

D0003/02B

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**  
*Département de Génie Mécanique*

**Thèse de Doctorat**  
Mécanique - Energétique

Présentée par  
**M.N BOUAZIZ**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**MODELES NON-LINEAIRES DES TRANSFERTS  
THERMIQUES DANS LES AILETTES  
LONGITUDINALES**

Soutenue le 11 juin 2002 devant la commission d'examen.

Composition du Jury :

Monsieur	<b>M.K. BERRAH</b>	Professeur	ENP	Président
Messieurs	<b>S. BENMANSOUR</b>	Professeur	USTHB	Examineur
	<b>A. NACER</b>	Professeur	IAP	Examineur
	<b>S. LARBI</b>	M.C	ENP	Examineur
	<b>S. RECHAK</b>	Professeur	ENP	Directeur de thèse
	<b>M.S. MOULAY</b>	Professeur	USTHB	Invité

---

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
*Département de Génie Mécanique***

**Thèse de Doctorat  
Mécanique - Energétique**

Présentée par  
**M.N BOUAZIZ**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**MODELES NON-LINEAIRES DES TRANSFERTS  
THERMIQUES DANS LES AILETTES  
LONGITUDINALES**

Soutenue le 11 juin 2002 devant la commission d'examen.

**Composition du Jury :**

<b>Monsieur</b>	<b>M.K. BERRAH</b>	<b>Professeur</b>	<b>ENP</b>	<b>Président</b>
<b>Messieurs</b>	<b>S. BENMANSOUR</b>	<b>Professeur</b>	<b>USTHB</b>	<b>Examineur</b>
	<b>A. NACER</b>	<b>Professeur</b>	<b>IAP</b>	<b>Examineur</b>
	<b>S. LARBI</b>	<b>M.C</b>	<b>ENP</b>	<b>Examineur</b>
	<b>S. RECHAK</b>	<b>Professeur</b>	<b>ENP</b>	<b>Directeur de thèse</b>
	<b>M.S. MOULAY</b>	<b>Professeur</b>	<b>USTHB</b>	<b>Invité</b>

---

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*à toutes les personnes qui me sont chères*

*et*

*à tous les croyants pour qui la droiture  
envers Dieu et envers leurs semblables  
constitue un credo pratiqué*

## Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger sous la direction de Monsieur **S. RECHAK**, professeur à l'école nationale polytechnique, département de Mécanique. Qu'il trouve ainsi l'expression de ma profonde reconnaissance pour ses compétences, ses encouragements, sa disponibilité, **son affabilité**, et ses précieux conseils durant le déroulement de ce travail. Cette thèse a été élaborée avec son constant soutien, et je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je remercie Monsieur **M.K BERRAH**, professeur à l'école nationale polytechnique, **directeur de l'ENP**, qui a bien voulu assurer la présidence de mon Jury ainsi que Monsieur **S. BENMANSOUR**, professeur à l'USTHB, Monsieur **A. NACER**, professeur et directeur à l'IAP et Monsieur **S. LARBI**, maître de conférences à l'ENP, pour avoir accepté de juger ce travail. Que, monsieur **M.S MOULAY**, professeur à l'USHTB, soit cité pour m'avoir fait l'honneur d'accepter cette invitation.

Je remercie également Monsieur **A. LALLEMAND**, professeur au centre de thermique à l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, **directeur** de l'équipe énergétique et thermique, **rédacteur en chef** de l'*International Journal of Thermal Sciences - Revue Générale de Thermique*, pour l'intérêt accordé à la partie publiée de ce travail.

Que mon épouse et nos enfants trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour leur patience et leur compréhension.

## TABLE DES MATIERES

	Page
<b>INTRODUCTION</b> .....	1
<b>CHAPITRE I – CONTEXTE BIBLIOGRAPHIQUE</b> .....	6
<b>CHAPITRE II – SOLUTION ALTERNATIVE POUR UN MODELE DE CONDUCTIVITE THERMIQUE VARIABLE</b> .....	11
2.1 Formulation mathématique.....	12
2.2 Analyse.....	13
2.3 Résultats et comparaison.....	15
2.4 Optimisation.....	22
2.5 Conclusion.....	26
<b>CHAPITRE III – MODELE BIDIMENSIONNEL AVEC CONVECTION L'EXTREMITE ET DISSYMETRIE DES ECHANGES</b> .....	27
3.1 Modèle mathématique.....	30
3.2 Analyse par perturbation et mise en moyenne.....	31
3.3 Résolution pour les termes d'espace.....	35
3.4 Résolution complète.....	36
3.5 Résultats.....	40
3.6 Conclusion.....	47
<b>CHAPITRE IV – DEVELOPPEMENT DU MODELE NON-LINEAIRE ETENDU</b> .....	50
4.1 Equations gouvernantes.....	52
4.1.1 Critique sur la modélisation.....	52
4.1.2 Hypothèses du modèle.....	55
4.1.3 Equation de l'énergie.....	56
4.1.4 Discrétisation géométrique.....	59
4.1.5 Efficacité.....	62
4.2 Schéma implicite.....	62

4.2.1	Discrétisation pour un nœud intérieur.....	63
4.2.2	Mise en forme pour programmation.....	67
4.2.3	Etude de la consistance.....	71
4.2.4	Etude de la stabilité.....	72
4.2.5	Convergence.....	75
4.3	Schéma explicite.....	75
4.3.1	Limitations de la procédure implicite.....	75
4.3.2	Equations en EFD.....	76
4.3.3	Discrétisation en EFD.....	76
<b>CHAPITRE V – PROGRAMME ET RESULTATS DU MODELE NON LINEAIRE ETENDU.....</b>		
		<b>79</b>
5.1	Stratégie et programmation.....	80
5.2	Validation.....	82
5.3	Résultats et discussion.....	86
5.3.1	Effet 2D.....	87
5.3.2	Epaisseurs des ailettes.....	87
5.3.3	Conductivité thermique.....	87
5.3.4	Coefficient d'échange.....	88
5.3.5	Ailette : source interne de chaleur.....	90
5.3.6	Profil d'ailette.....	90
5.3.7	Effet global.....	93
<b>CHAPITRE VI – CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS.....</b>		
		<b>95</b>
<b>LISTE DES REFERENCES.....</b>		
		<b>99</b>
<b>ANNEXES.....</b>		
		<b>106</b>
ANNEXE A.....		107
ANNEXE B.....		109
ANNEXE C.....		111
<b>RECAPITULATIF : CONTRIBUTION ET COMPARAISON.....</b>		
		<b>113</b>

## NOMENCLATURE ( DIN 1304 / ISO 31/I-XIII )

<b>a</b>	aire de la section normale à l'axe x de l'élément dV	$m^2$
<b>A</b>	aire d'échange avec le milieu ambiant (deux faces de l'ailette)	$m^2$
<b>B</b>	nombre caractérisant les échanges des faces de dessus et dessous	
<b>B<sub>t</sub></b>	nombre de Biot	$B_t = \frac{\alpha w_0}{2\lambda}$
<b>C</b>	capacité calorifique volumique	$J.m^{-3}.K^{-1}$
<b>C<sub>0</sub></b>	terme constant dans la dépendance en température de la conductivité	
<b>C<sub>1</sub></b>	coefficient de dépendance en température de la conductivité	$K^{-1}$
<b>F</b>	expression analytique de correction de la conductivité	
<b>g</b>	coefficient de dépendance en température de la source	$K^{-1}$
<b>G</b>	nombre de génération	$G = \frac{W_0 W_0}{2\alpha \theta_{0c}^*}$
<b>H</b>	expression complexe de discrétisation spatiale	$W.K^{-1}$
<b>I<sub>n</sub></b>	fonction de Bessel modifiée de 1 <sup>ère</sup> espèce, d'ordre n	
<b>K</b>	produit de la conductivité par la surface	$W.m.K^{-1}$
<b>l</b>	dimension de l'ailette suivant l'axe y	m
<b>L</b>	dimension de l'ailette suivant l'axe x	m
<b>m</b>	paramètre de l'ailette rectangulaire	$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda w_0}}$ $m^{-1}$
<b>M</b>	nombre de nœuds suivant l'axe y	
<b>N</b>	nombre de nœuds suivant l'axe x	
<b>N<sub>i</sub></b>	coefficient généralisé de solution	
<b>N*</b>	paramètre de l'ailette rectangulaire	$N^* = \frac{m\lambda - \alpha}{m\lambda + \alpha}$
<b>p</b>	constante d'amplitude	$p = r m^2 \lambda$
<b>q</b>	puissance volumique de la source	$W.m^{-3}$
<b>q*</b>	flux de chaleur échangé par l'ailette par unité de largeur	$W.m^{-1}$
<b>q<sub>x</sub></b>	flux suivant X	$q_x = - \hat{q} L / \lambda_0 \theta_{0c}^*$
<b>q<sub>y</sub></b>	flux suivant Y	$q_y = - \hat{q} L / \lambda_0 \sigma \theta_{0c}^*$
<b><math>\hat{q}</math></b>	flux de chaleur échangé par unité de section droite	$W.m^{-2}$
<b>S</b>	aire de la section normale à l'axe y	$m^2$
<b>t</b>	temps	s
<b>T</b>	température absolue de l'ailette	K
<b>T</b>	température de l'ailette à partir de l'ambiant (Ch. IV et V)	K
<b>T*</b>	température à la base de l'ailette (Ch. IV et V)	K
<b>T<sub>0</sub>*</b>	terme constant de T* (Ch. IV et V)	K
<b>T<sup>+</sup></b>	température adimensionnée $T^+ = T / T_0^*$ (Ch. IV et V)	
<b>U</b>	température de discrétisation	K

$u_i$	valeur propre	$u_i = \sqrt{\mu_i - \frac{B}{\sigma^2}}$	
$V$	volume de l'ailette		$m^3$
$w$	épaisseur de l'ailette		$m$
$W_0$	terme constant dans la dépendance en température de la source		$W.m^{-3}$
$X$	coordonnée adimensionnée	$X = x / L$	
$Y$	coordonnée adimensionnée	$Y = y / w_0$	
$x, y, z$	coordonnées		$m$
<b>Lettres grecques</b>			
$\alpha$	coefficient d'échange thermique convectif		$W.m^{-2}.K^{-1}$
$\alpha_1^+$	coeff. d'éch. convectif face de dessous	$\alpha_1^+ = \alpha_1 w_0 / \lambda_0$	
$\alpha_2^+$	coeff. d'éch. convectif face de dessus	$\alpha_2^+ = \alpha_2 w_0 / \lambda_0$	
$\alpha_3^+$	coeff. d'éch. convectif à l'extrémité	$\alpha_3^+ = \alpha_3 w_0 / \lambda_0$	
$\beta$	coefficient de dépendance suivant y de $\theta_0^*$		$m^{-1}$
$\gamma$	nombre adimensionnel	$\gamma = \frac{\beta l}{2}$	
$\delta_x, \delta_y$	opérateurs de discrétisation des termes d'espace		
$\delta$	rapport de dissymétrie	$\delta = 1 - \frac{\alpha_1^+}{\alpha_2^+}$	
$\Delta \tau$	pas de temps		$s$
$\varepsilon$	coefficient de la dépendance linéaire de la conductivité		
$\eta$	efficacité de l'ailette		
$\theta^*$	température de l'ailette à partir de l'ambient	$\theta^* = T - T_a$	$K$
$\theta_0^*$	température à la base de l'ailette		$K$
$\theta_{oc}^*$	terme constant pour la température à la base de l'ailette		$K$
$\theta^+$	température de l'ailette adimensionnée	$\theta^+ = \theta^* / \theta_{oc}^*$	
$\theta$	température adimensionnée	$\theta = 1 - \theta^+$	
$\theta_i$	coefficient généralisé		
$\bar{\theta}$	température moyenne suivant Y		
$\lambda$	conductivité thermique		$W.m^{-1}.K^{-1}$
$\lambda^+$	conductivité équivalente de modèle		$W.m^{-1}.K^{-1}$
$\lambda_0$	conductivité thermique constante	$\lambda_0 = \exp(C_0)$	$W.m^{-1}.K^{-1}$
$\bar{\lambda}$	conductivité thermique moyenne arithmétique		$W.m^{-1}.K^{-1}$
$\mu$	expression de discrétisation temporelle		$K.W^{-1}$
$\xi$	nombre adimensionnel	$\xi = L^{1.5} \left( \frac{\alpha}{\lambda L w_0} \right)^{0.5} = \frac{L}{w_0} (2B_1)^{0.5}$	
$\xi^*$	nombre adimensionnel de correction	$\xi^* = \left( L + \frac{w_0}{2} \right)^{1.5} \left( \frac{\alpha}{\lambda L w_0} \right)^{0.5}$	
$\rho$	nombre constant dans l'expression de Fourier		$m^{-1}$
$\sigma$	paramètre de perturbation	$\sigma = w_0 / L$	



$\tau$  temps adimensionné  $\tau = \lambda_0 t / CL^2$   
 $\Phi$  fonction pour différences finies exponentielles (EFD)

**Indices**

**a** ambiant  
**c** constant (pour  $\alpha$ )  
**cr** critique  
**e** extrémité  
**i** indicateur de position dans le réseau suivant l'axe x  
**j** indicateur de position dans le réseau suivant l'axe y  
**L** au bout de l'ailette  
**opt.** optimum  
**p.c** parabolique concave  
**rect.** rectangulaire  
**tra.** trapézoïdale  
**x** suivant x  
**y** suivant y  
**0** base  
**1** température / efficacité suivant modèle classique  
**2** température / efficacité suivant le modèle du Ch. II  
**3** température / efficacité suivant la moyenne arithmétique  
**4** température / efficacité suivant le modèle de "Aziz"

**Exposants**

**$h^*$**  instant de calcul intermédiaire entre  $h+1$  et  $h$   
 **$h$**  instant de calcul  
 **$n$**  paramètre de sommation  
 **$n$**  relatif à la géométrie  
 **$p, r, s$**  paramètres de sommation  
 **$tr$**  transposée  
 **$v$**  coefficient de dépendance en température de  $\alpha$   
**+** à la position  $i+1/2$  ou  $j+1/2$   
**-** à la position  $i-1/2$  ou  $j-1/2$   
**\*** spécifique au nœud frontière  
 **$\partial/\partial t$**  dérivation par rapport au temps  
 **$\partial/\partial T$**  dérivation par rapport à la température

**Symbole**

**(.|.)** produit scalaire

- Le tableau 4.3 récapitule la nomenclature spécifique aux sections 4.2 et 4.3.

## INTRODUCTION

L'emploi des ailettes comme moyen d'accroissement des échanges thermiques se justifie dans des domaines aussi divers que le nucléaire, l'aéronautique, l'espace, l'électronique ou la réfrigération [1].

Les techniques d'intensification disponibles et les perspectives d'amélioration sont décrites de façon régulière par Bergles [2]. L'ailette, base des surfaces auxiliaires continue d'être la plus usitée. Elle permet une augmentation de l'aire totale d'échange et par conséquent un transfert thermique accru.

L'addition de ces dispositifs ou l'extension à partir de la surface mère sont une pratique souvent utilisée lorsque l'échange thermique externe s'effectue par l'air. Dans ce cas souvent rencontré, le coefficient de transfert pour une surface de base sans ailettes est défavorable dans un rapport de 10 à 50 à celui du coté opposé [3].

En particulier, dans l'industrie frigorifique, où la batterie ailetée occupe une place privilégiée, le développement est tel que les constructeurs réservent des budgets de plus en plus importants à la recherche d'un pouvoir d'échange maximal et d'une compacité élevée [4]. Le résultat le plus caractéristique, durant les trente dernières années est d'importance, puisqu'on a enregistré un doublement de l'échange thermique externe. A titre indicatif, la *figure 1.1* représente cette évolution fortement significative grâce au développement de nouveaux profils d'ailettes. Par contre, l'évolution bénéfique de cette augmentation des échanges par ailettes mène à des surcoûts d'étude dus à la voie expérimentale que les constructeurs empruntent. La généralisation des données expérimentales et des corrélations existantes n'est pas une alternative devant la multitude de géométries, de la diversité des matériaux utilisés et des conditions aux limites des équipements. En outre, la mise en œuvre d'un dispositif expérimental est difficile, sinon virtuellement impossible dans les batteries aussi compacts et de configuration complexe [5].

En conséquence, quel que soit l'axe d'intérêt choisi, la connaissance précise des conditions physiques et thermiques est primordiale en ingénierie pour l'obtention des résultats probants et précis, ce qui se traduit par des mesures expérimentales volumineuses, très spécifiques et onéreuses. L'élaboration de corrélations est ainsi nécessaire pour les surfaces d'échanges améliorées [6]. A l'inverse, la modélisation là où l'expérimentation s'avère délicate, permet d'effectuer des simulations de comportements thermiques. Le remplacement des équations par des approximations discrètes et par suite la résolution des algorithmes offre à moindre coût, l'exploration d'un large éventail de conditions opératoires réelles.

L'augmentation du transfert thermique dépend principalement de la géométrie, de la configuration de l'ailette, de son efficacité et de

l'espacement inter-ailettes [3]. Ce dernier facteur est en relation avec l'épaisseur des couches limites et est considéré au sens de la dynamique des fluides par plusieurs auteurs [7-11]. En effet, l'espace entre deux ailettes consécutives ne peut pas diminuer jusqu'au recouvrement mutuel des couches sans risque d'une dégradation de l'échange thermique.

L'augmentation de l'efficacité de l'ailette est alors au centre des préoccupations [2-6].

Dans la pratique du dimensionnement des échangeurs, l'efficacité de l'ailette est un paramètre essentiel dans l'évaluation des coefficients globaux des transferts. A défaut de mesures disponibles et fiables, elle est sommairement adoptée sur la base de modèles analytiques reposant sur un ensemble d'hypothèses idéalisées [12]. Haseler [13] par exemple, utilise la théorie classique des ailettes (paramètres thermophysiques considérés constants) pour calculer la conduction transversale dans les échangeurs multi-courants. La déduction de cette efficacité s'effectue à partir des formules de Gardner [14] ou des expressions simplifiées de Churchill [15]. Ullman et Kalman [16] ont présenté des abaques pour les ailettes annulaires à partir des mêmes hypothèses classiques et dans une perspective d'optimisation de profil. Bien que les ailettes longitudinales à profil uniforme soient les plus utilisées en raison des avantages de fabrication, celles à profil variable sont aussi d'un grand intérêt pratique, en accord avec la minimisation du poids de matière utilisée.

Shah [17] insiste fortement sur la détermination précise de l'efficacité. L'impact énergétique d'une sous ou sur évaluation de ce paramètre à hauteur de dix pour-cent se traduit par une perte ou par un gain en tonnes équivalent du dixième de la production mondiale de pétrole, comme rapporté pour la période [18].

Les études avancées sont assez nombreuses. Elles remédient aux approches primaires dont les résultats sont souvent infirmés par les mesures expérimentales, conduites par Hu et Jacobi [18] et analysées par Shah [17] qui a signalé que cette simplification de modèles est non valide si l'efficacité est inférieure à 0,8. Ces travaux se caractérisent par un traitement sélectif vis à vis des hypothèses et s'appuient généralement sur des schémas théoriques à solutions le plus souvent semi-analytiques.

Il est important de noter, qu'outre le fait que ces travaux ne répondent qu'à une classe restreinte de problèmes caractérisés par un ou deux paramètres variables au plus, ces derniers ne le sont qu'avec une sous variable (coordonnées, température). En clair, et après revue critique des publications, la majorité des auteurs s'accordent sur les disparités par rapport aux efficacités conventionnelles dès qu'une non-linéarité est incluse.

C'est aussi cette absence de travaux quant à la prise en charge de la quasi-totalité des hypothèses et profils, qui est à l'origine de nos recherches, motivées par l'apparition de tels équipements où les conditions de

fonctionnement sont complexes et extrêmes. De plus les modèles analytiques cités sont souvent limités à l'ailette rectangulaire et sans échange de chaleur à son extrémité.

Notre contribution consiste d'abord à développer une solution semi-analytique, simplifiée dans le cas étudié de la conductivité thermique variable avec la température, et plus élaborée pour le cas des ailettes considérées en 2D avec dissymétrie des échanges et convection à l'extrémité, non traité ailleurs. On pourra évaluer à ce stade les limites des méthodes mathématiques non numériques pour le traitement du modèle général et de l'importance des effets relevés.

L'accent est mis sur le développement d'un programme à partir d'une modélisation plus réaliste tenant compte des aspects géométriques et pouvant présenter toutes les possibilités d'exploration de l'effet des hypothèses non classiques sur les efficacités.

Il convient de préciser que dès lors la validation du modèle effectué, le code de calcul mis au point, basé sur les différences finies et adaptées à ce type de problèmes, se considère comme un outil prévisionnel justifié par sa capacité à analyser l'influence des divers paramètres. Entre autres, l'apparition des variations locales des propriétés thermophysiques n'est pas a priori sans incidence notable sur les efficacités, et l'estimation globale de leurs effets n'est pas bien cernée.

Dans *l'annexe A*, le modèle conventionnel reposant sur les hypothèses simplificatrices classiques est rappelé. Les solutions connues selon cette théorie constituent les références pour la comparaison avec les résultats ultérieurs.

Le premier chapitre est consacré au contexte bibliographique de l'étude. Les travaux entrepris dans le domaine sont cités de façon à situer notre contribution et de manière à montrer l'aspect restreint des paramètres considérés.

Lorsque le problème du transfert thermique devient non linéaire, à cause d'une simple dépendance en température de la conductivité thermique, la résolution est conduite par utilisation d'une linéarisation optimale. La solution semi-analytique proposée est validée dans le chapitre II par les valeurs trouvées à partir d'une procédure plus complexe.

On présente dans le chapitre III, les résultats de la solution en température puis en efficacité d'une ailette formulée en 2D, convective à son extrémité et d'échange dissymétrique par les faces. Dans cette section, les paramètres prédominants justifiant la simplification en 1D sont mis en évidence. Par conséquent, l'écriture du modèle général ultérieur est allégée pour les cas rencontrés.

Dans le chapitre IV, un modèle général est développé sur la base d'hypothèses non classiques et dans le cadre des résultats précédents. Le problème non linéaire résultant est approché selon deux méthodologies

quant au choix du schéma numérique. La première formulation, implicite à trois niveaux selon la procédure de Lees, prouvée pour le modèle de conduction pure à 1D, est étendue au cas présent convectif avec source et à 2D suivant le troisième axe. Une analyse est conduite pour la consistance, la stabilité et la convergence du schéma. La deuxième formulation, de nature explicite, est une extension des différences finies exponentielles appliquées au problème posé.

Le choix d'une stratégie de résolution ainsi que le développement d'un programme de simulation correspondant sont rapportés dans le chapitre V. Dans ce même chapitre, les résultats du test de validation sont directement confrontés à ceux dérivés des modèles classiques de l'annexe A. L'investigation de plusieurs non-linéarités est mise en relief et on illustre les possibilités du programme développé par une comparaison en efficacités des profils classiques.

Une conclusion, des indications sur l'axe de recherche suivi et des recommandations en perspective d'approfondissement ou d'extension sont consignées en fin de ce travail.

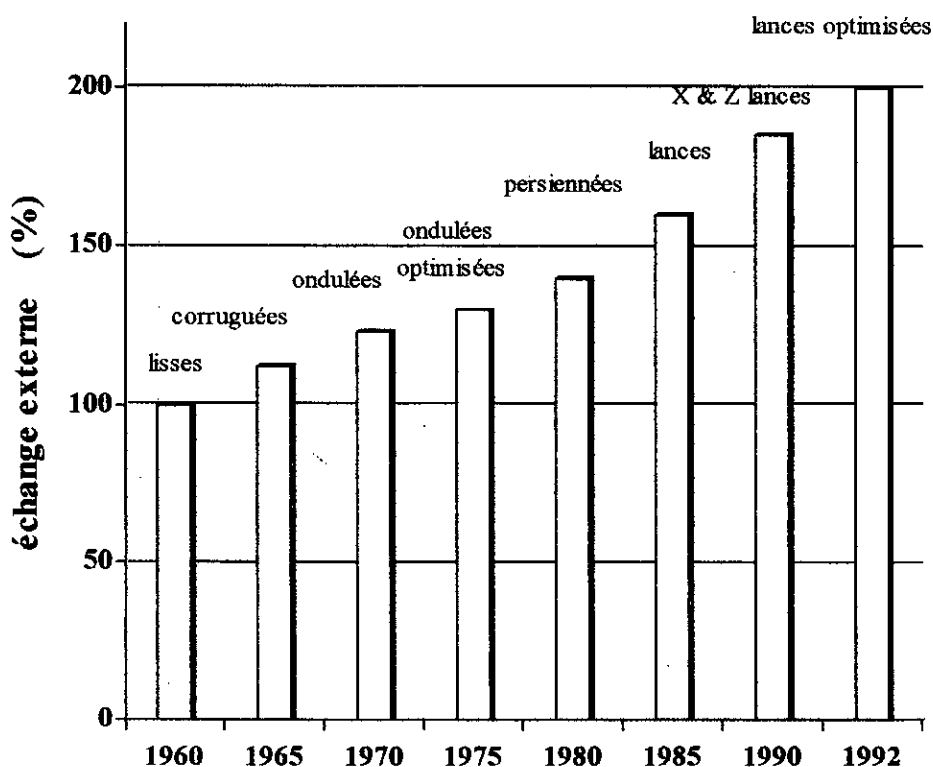


Figure 1.1. Evolution moyenne de l'échange externe des échangeurs ailetés, période 60 - 92 [4].

## **I – CONTEXTE BIBLIOGRAPHIQUE**

La théorie classique des ailettes repose sur un modèle simple mettant en jeu l'équation d'énergie qui est en somme un bilan des transferts thermiques de conduction auxquels on ajoute les flux évacués par convection au milieu environnant, écrits suivant la loi de Newton. Le coefficient de convection, l'intermédiaire entre les deux phénomènes, est considéré connu à partir d'expressions semi-empiriques. Le système mathématique traduisant ces transferts est résolu et l'efficacité est obtenue par dérivation.

L'exigence d'une efficacité précise de l'ailette a conduit à la recherche de solutions analytiques pour des problèmes spécifiques posés par les industriels engagés dans la fabrication des ailettes. Citons à titre d'exemple, le cas des gaines ailetées enveloppant les barreaux d'Uranium. La possibilité d'utilisation de matériaux de conductivité thermique élevée étant exclue, les ailettes additionnelles sont de plus à calculer avec une production interne de chaleur issue de la position de ces dispositifs dans l'élément combustible.

Parallèlement, des expérimentateurs ont réalisé en soufflerie des travaux de vérification des corrélations généralement admises et relèvent des écarts notables dans la détermination de l'efficacité, suite aux valeurs des coefficients d'échange obtenues par sublimation du naphthalène [19].

Nous reportons brièvement les études menées en direction d'une part du paramètre d'intérêt et d'autre part de la condition spécifique dans laquelle se trouve l'ailette. Ces travaux font l'objet de critiques, apparaissent parfois controversées et ne répondent qu'à l'aspect initialement abordé.

Notons enfin que l'utilisation des ailettes dans des environnements extrêmes et surtout à des niveaux de température de plus en plus élevés, induite par la technologie de performance, replace la problématique de l'efficacité de l'ailette dans un contexte d'actualité.

Look [20], Ju et al. [21], se sont intéressés à l'ailette bidimensionnelle avec une variété pour le coefficient d'échange selon le premier auteur.

La conductivité thermique dépendante de la température a été prise en compte pour les ailettes circulaires par Razelos et Imre [22], et pour les ailettes longitudinales par Aziz [23]. De même, Zubair et al [24] ont considéré cette dernière condition dans une étude d'optimisation.

Han et Lefkowitz [25] ont analysé l'ailette avec un coefficient d'échange thermique variable avec la position. Une approche différente est tentée, pour le même cas, par Sparrow et Acharya [26], Sparrow et Chyu [27], Huang et Chen [28], sous forme de problèmes conjugués de conduction-convection. Quelques études telles celles de Unal [29-30], Laor et Kalman [31], ont été développées en tenant compte d'un coefficient d'échange thermique dépendant de la température.



Le cas d'une ailette dissipant de la chaleur à partir d'une source interne uniforme a été traité par Minkler et Rouleau [32], et par Aziz [33]. Unal [34] a présenté des expressions analytiques pour l'ailette à source non uniforme.

D'autres conditions spécifiques du fonctionnement de l'ailette ont été étudiées [35-45].

Huang et Shah [46] dans une étude à caractère évaluatif ont conclu pour une ailette rectangulaire, que seul le coefficient d'échange supposé constant mène à de grosses erreurs. Cotta et Ramos [47] ont proposé récemment une solution hybride sous quelques hypothèses non simplifiées.

Un résumé succinct de ces travaux est reporté au *tableau 1.1*.

**Tableau 1.1. Caractéristiques des études avancées sur les ailettes.**

■ **Aspect 2D**

Look [20]	<u>1988</u> /Etude bidimensionnelle de l'ailette rectangulaire avec trois valeurs constantes et différentes des coefficients d'échange sur les faces.
Ju&al[21]	<u>1989</u> /Etude de la réduction du problème 2D à 1D en régime transitoire des ailettes rectangulaires avec convection nulle à l'extrémité.

■ **Conductivité thermique**

Razelos & al [22]	<u>1980</u> /Pour une ailette circulaire à 1D et d'épaisseur constante, une conductivité variant linéairement avec la température et un coefficient d'échange variable en loi puissance avec la position, les auteurs déterminent les dimensions optimales.
Aziz & al [23]	<u>1980</u> /Analyse des ailettes à 1D, en régime transitoire avec une conductivité dépendante de la température. Le coefficient d'échange est assumé variable avec la position selon une loi puissance et la température à la base est périodique.
Zubair & al [24]	<u>1996</u> /Etudient différents types d'ailettes circulaires avec une conductivité dépendante de la température.

■ **Coefficient d'échange thermique**

Han & al [25]	<u>1960</u> /Proposent des expressions analytiques en supposant un coefficient d'échange variable avec la température et la position.
Sparrow & al [26] [27] Huang & al [28]	<u>1981/1982/1985</u> /Le coefficient d'échange est a priori inconnu. Un couplage conduction-convection est traité, dans les cas respectifs de convection naturelle, forcée et mixte. Tous les paramètres sont assumés constants.
Unal [29]	<u>1985</u> /Son travail consiste en une solution analytique de l'efficacité d'une ailette rectangulaire à 1D avec un coefficient d'échange variable avec la température, et pour quelques cas traitables.

Unal [30]	<u>1987</u> /Le coefficient d'échange est variable avec la température dans le cas de l'ébullition du fluide convectif pour l'ailette rectangulaire ou l'aiguille. Des formules analytiques sont présentées pour différents types d'ébullition.
Laor & al [31]	<u>1996</u> /Etablissent leur étude pour des ailettes de refroidissement lors d'un coefficient d'échange variable avec la température.

■ **Ailette, source interne de chaleur**

Minkler & al [32]	<u>1960</u> /Les auteurs corrigent les valeurs des efficacités par l'intermédiaire du nombre de génération pour les ailettes à sources internes constantes.
Aziz [33]	<u>1977</u> /Etudie les ailettes convectives à sources internes constantes avec la conductivité variable avec la température.
Unal [34]	<u>1987</u> /Essai analytique pour les ailettes rectangulaires à sources constantes puis en dépendance polynomiale de la température. Le coefficient d'échange est variable avec la température selon une loi puissance.

■ **Problèmes spécifiques**

Chu & al [35]	<u>1983</u> /Modèle d'une ailette composée de différents matériaux en régime transitoire et adiabatique à l'extrémité.
Snider & al [36]	<u>1983</u> /Présentent des solutions pour les ailettes à sources et de différents profils.
Mikhailov & al [37]	<u>1984</u> /Une analyse mathématique unifiée est présentée pour les ailettes de différents profils, en 1D et de paramètres thermophysiques constants.
Liu & al [38]	<u>1986</u> /Etude analytique de l'échange conjugué dans une ailette cylindrique introduite dans un milieu poreux.
Mudjahid [39]	<u>1987</u> /Analyse les ailettes avec des températures périodiques pour la base et le fluide environnant.
Yavonovitch & al [40]	<u>1988</u> /Ils incluent la résistance de contact pour l'ailette circulaire
Sarma & al [41]	<u>1988</u> /L'ailette à source thermique est verticale et soumise à la convection naturelle.
Houghton & al [42]	<u>1992</u> /On considère l'assemblage ailette-paroi en régime transitoire avec une température du fluide interne périodique.
Kazeminejad [43]	<u>1995</u> /L'auteur étudie un assemblage d'ailettes rectangulaires avec l'air humide où une condensation se produit. Les autres hypothèses classiques sont maintenues.
Hsu & al [44]	<u>1998</u> /Le transfert thermique conjugué s'effectue par l'intermédiaire d'un fluide visco-élastique.
Feldman & al [45]	<u>2000</u> /Etude consacrée à l'ébullition nucléée et en mode convection dans les ailettes des échangeurs.

■ **Analyses spécifiques**

Huang & al [46]	1991/Analyse globale de l'effet de différents paramètres et l'impact sur l'efficacité.
Cotta & al [47]	1998/Etude de l'ailette en 2D pour différents profils et une conductivité variable avec la température.

Comme on peut le constater, peu de travaux ont été consacrés à l'étude de sensibilité aux paramètres et qui permettent de préciser la validité des approximations d'usage courant à l'exception des appréciations qualitatives de Huang et Shah. Il est évident que les multiples interactions ne peuvent être appréhendées que par l'écriture d'un modèle général et suivant une résolution impliquant tous les aspects cités.

Le travail présenté est une proposition dans ce sens. Il vise à cerner quelques aspects notamment l'effet dimensionnel, puis à développer sur cette base un modèle étendu de sorte à disposer d'un outil de prévision des distributions des températures dans l'ailette. L'efficacité approchée par ce moyen relèvera l'influence conjuguée des paramètres.

**II – SOLUTION ALTERNATIVE POUR UN MODELE**  
**DE CONDUCTIVITE THERMIQUE VARIABLE**

La conductivité thermique n'est pas une donnée constante et varie pour un matériau avec le taux d'impuretés et la température. A l'inverse, la précision sur les températures et les flux calculés sont largement tributaires de la bonne connaissance de cette propriété thermophysique. Ainsi, il sera nécessaire de caractériser le matériau convenablement avant de prédire les distributions des températures et par dérivation les efficacités.

Pour les solides homogènes tels utilisés pour la fabrication des ailettes, ce n'est qu'avec une approximation au minimum linéaire avec la température qu'on peut estimer ce paramètre [48]. Si l'intervalle de température est assez large ou si l'on est en présence de basses températures, la loi de variation est plus difficile à cerner, et une prise en compte de cette dépendance est requise dans les problèmes de conduction [49-50].

L'introduction de cette loi se traduit par des équations gouvernantes non linéaires. Le problème est alors résolu naturellement par les méthodes numériques. Cependant, cette procédure ne facilite pas l'optimisation des dimensions et souvent la recherche de solutions semi-analytiques est tentée comme indiqué en introduction *tableau 1.1*.

Une alternative d'une méthode numérique consiste à trouver une transformation similarité au cas transitoire du type Boltzmann. Ceci a été montré dans [51], mais cette procédure n'est applicable qu'au solide semi-infini. L'extension à l'ailette longue n'est pas effective en raison du terme de convection.

Dans cette section, après la mise en équation du problème correspondant à l'ailette finie et adiabatique à son extrémité, la méthode de linéarisation optimale introduite par Blaquièrre [52] et décrite par Vujanovic [53] pour la conduction est appliquée pour le système conducto-convectif formulé. Les résultats sont comparés à ceux trouvés par Aziz [33] suivant une analyse par perturbation. Nous nous efforcerons, par ailleurs, de préciser les conditions d'utilisation des expressions déduites, car s'agissant de méthodes d'approximation, elles nécessitent certaines précautions d'emploi.

En dernier lieu, la solution explicitée est alors considérée dans le sens d'une optimisation des paramètres de l'ailette.

## 2.1 FORMULATION MATHEMATIQUE

Pour une ailette rectangulaire de conductivité thermique variable avec la température, un bilan thermique sur un élément de longueur  $dx$  et de largeur unité (*figure A1 en annexe A*), écrit sous forme différentielle conduit à l'équation suivante :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{d\theta^+}{dx} \right) - m^2 \theta^+ = 0 \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites :

$$\theta^+(0)=1 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\theta^+}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.2)$$

où la température  $\theta^+$  est rapportée à la température de la base de l'ailette et  $x$  la coordonnée spatiale non adimensionnée. Le paramètre  $m$  de l'ailette est indiquée dans la nomenclature.

L'équation (2.1) peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2\theta^+}{dx^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx} \left[ \frac{d\theta^+}{dx} \right]^2 - \frac{\lambda_0}{\lambda} m^2 \theta^+ = 0 \quad (2.3)$$

qui montre la nature non linéaire du problème posé.

L'objectif est de déterminer la distribution des températures dans l'ailette. L'efficacité est calculée par la suite selon le rapport du flux échangé sur le même flux lorsque la température de l'ailette est celle de la base.

## 2.2 ANALYSE

La solution classique, et bien connue pour ce problème admettant une conductivité constante  $\lambda_0$  (cas II en *annexe A*), est :

$$\theta^+ = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (2.4)$$

solution de l'équation (A1), et vérifiant les équations (2.2).

L'application de la linéarisation optimale [51-52] pour le système à résoudre, consiste à calculer une conductivité thermique équivalente et constante désignée  $\lambda^+$  au sens où la différence entre les équations différentielles (A1) et (2.1) soit minimale. Cette conductivité remplace celle initiale  $\lambda_0$ .

Ainsi, l'erreur  $\varepsilon^+$  à minimiser s'écrit :

$$\varepsilon^+ = \frac{\lambda^+ \frac{d^2\theta^+}{dx^2}}{\lambda_0 \frac{d^2\theta^+}{dx^2}} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{d\theta^+}{dx} \right] \quad (2.5)$$

et l'approximation en moyenne quadratique de l'équation (2.1) par l'équation différentielle équivalente est :

$$\int_0^L (\varepsilon^+)^2 dx = \chi(\lambda^+) \quad (2.6)$$

La substitution de l'équation (2.5) dans (2.6) permet d'expliciter la fonction  $\chi(\lambda^+)$  :

$$\chi(\lambda^+) = A \left( \frac{\lambda^+}{\lambda_0} \right)^2 - 2(B+C) \left( \frac{\lambda^+}{\lambda_0} \right) + D \quad (2.7)$$

avec les coefficients A, B, C et D obtenus en incorporant la solution connue (2.4) dans l'équation (2.6).

En supposant une relation linéaire de la conductivité avec la température, soit  $\lambda = \lambda_0 [1 + \varepsilon \theta^+]$ , ces coefficients prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^L \left( \frac{d^2\theta^+}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{m^3}{4 \cosh^2 mL} [\sinh 2mL + 2mL] \\ B &= \int_0^L \frac{1}{\lambda_0} \frac{d\lambda}{d\theta^+} \left( \frac{d\theta^+}{dx} \right)^2 \frac{d^2\theta^+}{dx^2} dx = \frac{\varepsilon m^3}{4 \cosh^3 mL} \left[ \frac{\sinh 3mL}{3} - \sinh mL \right] \\ C &= \int_0^L \frac{\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{d^2\theta^+}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{m^3}{4 \cosh^2 mL} \left[ (\sinh 2mL + 2mL) + \frac{\varepsilon}{2 \cosh mL} \left( \frac{2 \sinh 3mL}{3} + 6 \sinh mL \right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Quant au coefficient D, il n'est pas utile ici, de le calculer, étant donné l'indépendance de  $\lambda^+$  optimale vis à vis de ce coefficient.

En effet l'équation : 
$$\frac{d\chi(\lambda^+)}{d\lambda^+} = 0$$

est équivalente à : 
$$\lambda^+ / \lambda_0 = (B+C) / A$$

L'introduction des équations (2.8) dans cette dernière relation donne :

$$\lambda^+ = \lambda_0 [1 + \varepsilon F(mL)] \quad (2.9)$$

$$\text{et } F(mL) = \frac{0.666 \sinh 3 mL + 2 \sinh mL}{(\sinh 2 mL + 2 mL) \cosh mL} \quad (2.10)$$

Dans la *figure 2.1*, on montre l'évolution de F assimilé à un facteur de correction.

En première approximation, on peut représenter  $\lambda^+$  par  $\lambda_0 [1 + \varepsilon]$  pour les valeurs de mL inférieures à l'unité. Notons que ceci correspond à  $F = 1$ . A mesure que mL augmente au-delà de l'unité, la correction devient de plus en plus grande. On constate que la valeur  $F^* = 0.5$ , qui représente la conductivité moyenne arithmétique et d'un usage courant, se différencie nettement du facteur F déduit.

Il ressort de cette analyse que l'on peut très bien déterminer la répartition des températures simplement par l'adoption d'une conductivité optimale par l'intermédiaire du facteur F. Une démarche similaire pourra être envisagée pour les cas classiques cités en *annexe A*.

### 2.3 RESULTATS ET COMPARAISON.

Cette solution approximative est comparée avec les expressions classiques suivantes :

- distribution classique (avec une conductivité constante) et l'efficacité correspondante :

$$\theta_1^+ = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (2.11a)$$

$$\eta_1 = \frac{\tanh mL}{mL} \quad (2.11b)$$

- distribution des températures et efficacité conséquentes de la solution proposée pour le présent modèle :

$$\theta_2^+ = \frac{\cosh m^+(L-x)}{\cosh m^+L} \quad (2.12a)$$

$$\eta_2 = \frac{\tanh m^+L}{m^+L} \quad (2.12b)$$



où :

$$m^+ = \left( \frac{2\alpha}{\lambda + w} \right)^{0.5} = m \frac{1}{[1 + \varepsilon F(mL)]^{0.5}}$$

- la distribution est obtenue à partir de la solution classique en considérant une conductivité moyenne arithmétique dans l'intervalle de variation :

$$\theta_3^+ = \frac{\cosh m_3(L-x)}{\cosh m_3 L} \quad (2.13a)$$

$$\eta_3 = \frac{\tanh m_3 L}{m_3 L} \quad (2.13b)$$

où :

$$m_3 = \left( \frac{2\alpha}{\lambda + w} \right)^{0.5} = m \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right]^{0.5}}$$

- les expressions de Aziz [33] plus exactes obtenues par perturbations et appliquées au présent cas :

$$\theta_4^+ = \cosh m(L-x) \left[ \frac{1}{\cosh mL} + \frac{\varepsilon \cosh 2mL}{3 \cosh^3 mL} \right] - \frac{\varepsilon \cosh 2m(L-x)}{3 \cosh^2 mL} \quad (2.14a)$$

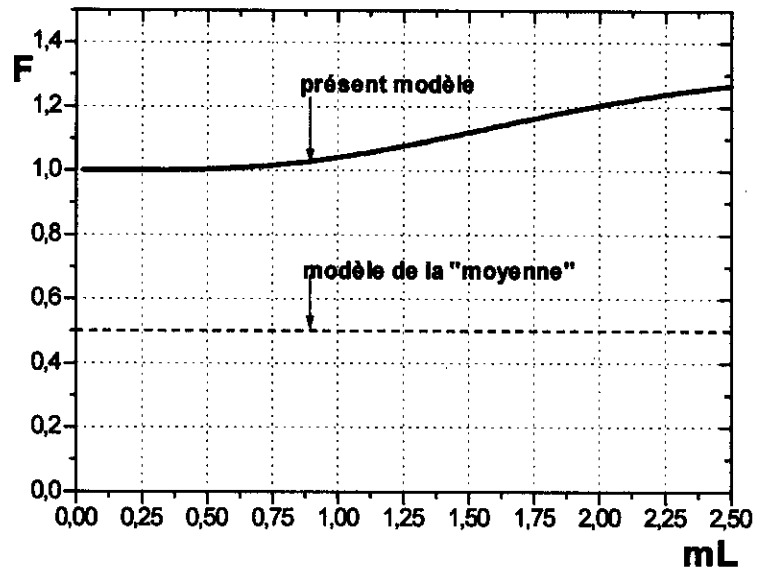
$$\eta_4 = \frac{\tanh mL}{mL} + \frac{\varepsilon (\tanh mL)^3}{3 mL} \quad (2.14b)$$

Cet auteur relève que cette solution est trouvée à hauteur de  $\pm 2\%$  de la solution numérique complète.

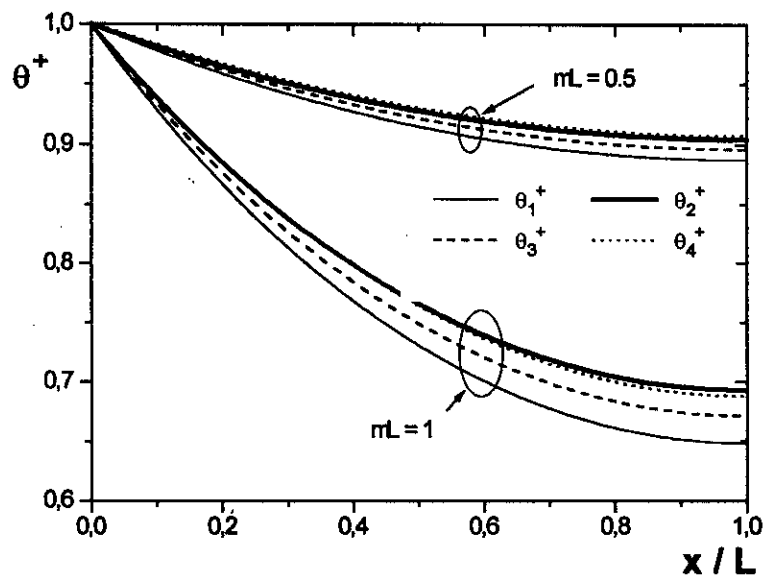
Dans les figures 2.2 à 2.5, on présente à titre d'exemple les résultats comparés des distributions citées pour quelques valeurs positives du coefficient  $\varepsilon$  de la conductivité thermique. Les paramètres de l'ailette choisis correspondent à ceux rencontrés dans la pratique des applications.

De même, on reporte dans les figures 2.6 et 2.7, les résultats correspondants et relatifs aux efficacités. Le cas où la conductivité thermique diminue avec la température est illustré par les figures 2.8 et 2.9. Enfin, les résultats du présent modèle sont regroupés dans la figure 2.10.

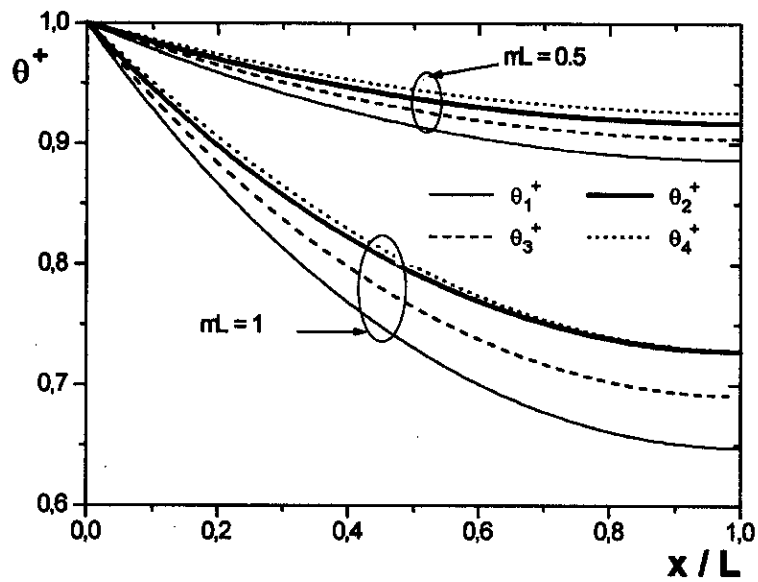
Tout d'abord, on constate une sensibilité à la conductivité thermique de la distribution des températures et des efficacités. Cet effet de  $\varepsilon$  est illustré particulièrement dans la figure 2.10 où une perte / gain est perceptible. Ensuite, dans les conditions d'utilisation habituelles des ailettes notre



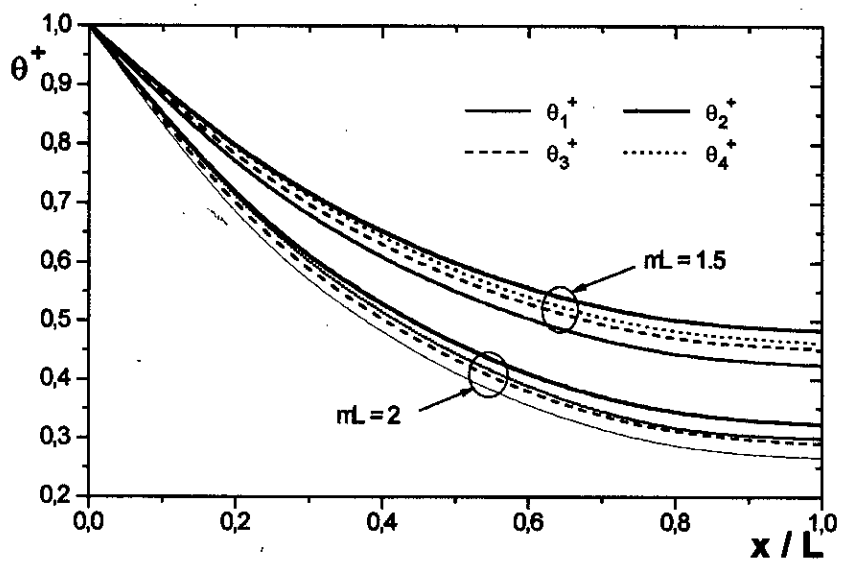
**Figure 2.1.** Variations du facteur de correction  $F$  avec la caractéristique de Raïlette.



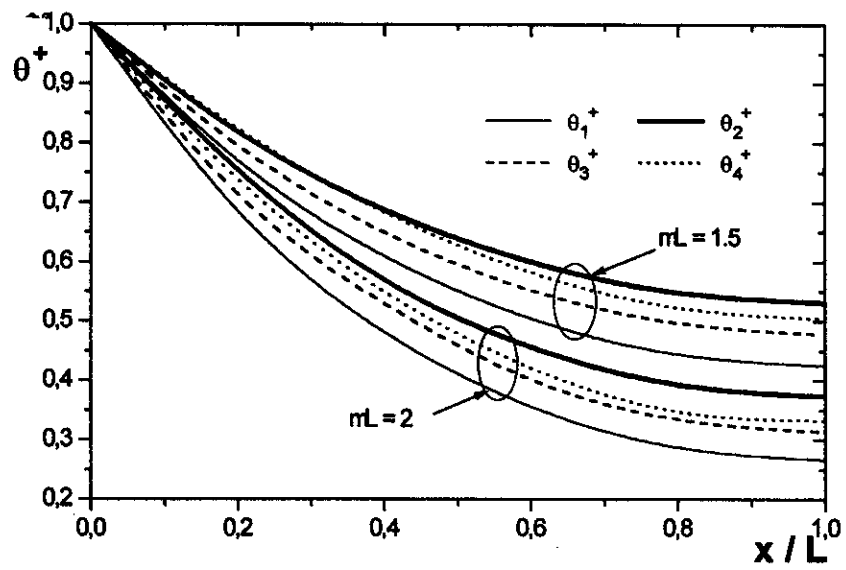
**Figure 2.2.** Distributions comparées de la température pour  $\varepsilon = 0.2$  et  $mL = 0.5$  et 1.



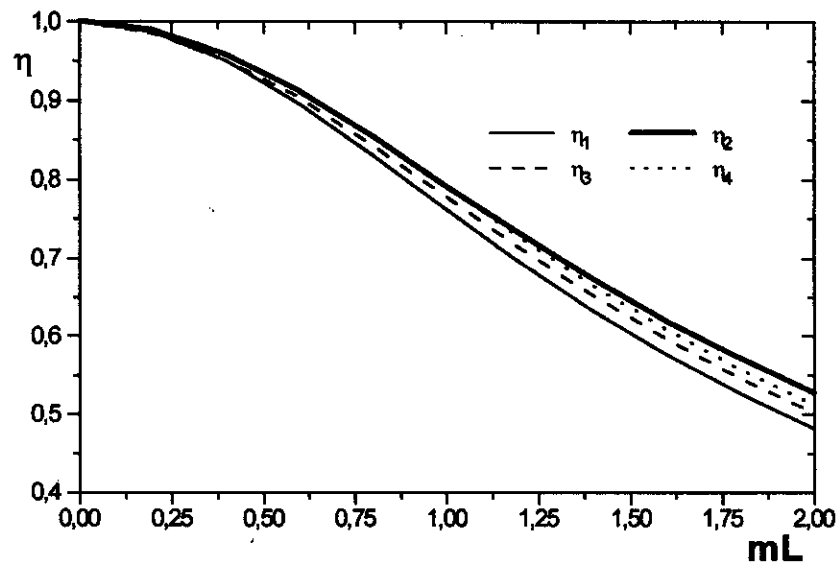
**Figure 2.3.** Distributions comparées de la température pour  $\varepsilon = 0.4$  et  $mL = 0.5$  et 1.



**Figure 2.4.** Distributions comparées de la température pour  $\varepsilon = 0.2$  et  $mL = 1.5$  et 2.



**Figure 2.5.** Distributions comparées de la température pour  $\varepsilon = 0.4$  et  $mL = 1.5$  et 2.



**Figure 2.6.** Efficacités comparées pour  $\varepsilon = 0.2$

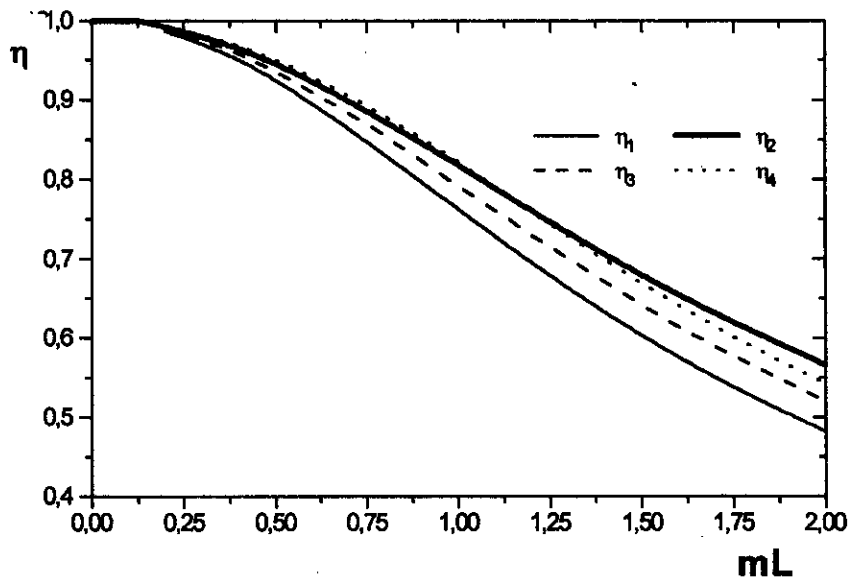


Figure 2.7. Efficacités comparées pour  $\varepsilon = 0.4$

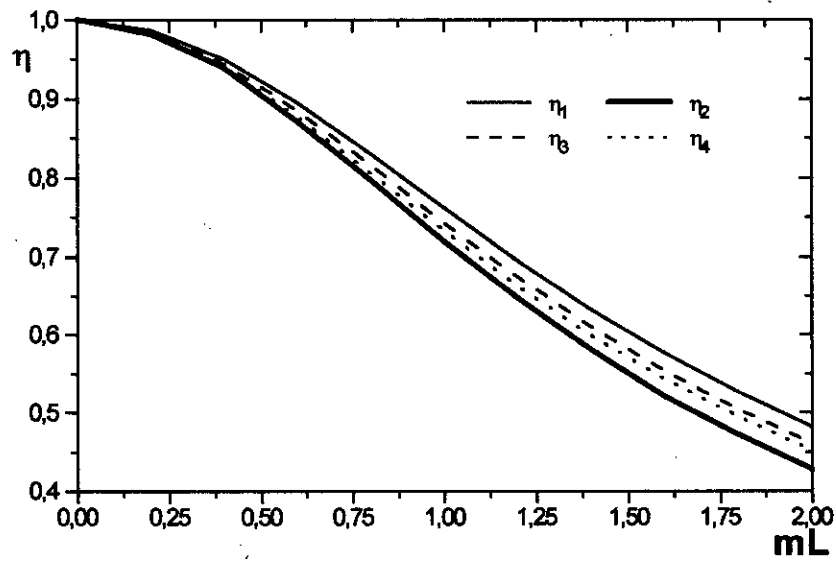


Figure 2.8. Efficacités comparées pour  $\varepsilon = -0.2$

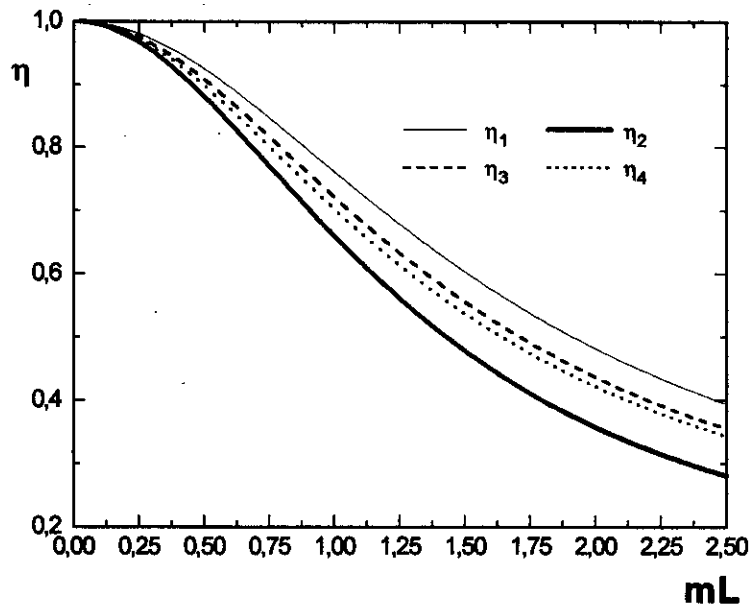


Figure 2.9. Efficacités comparées pour  $\varepsilon = - 0.4$

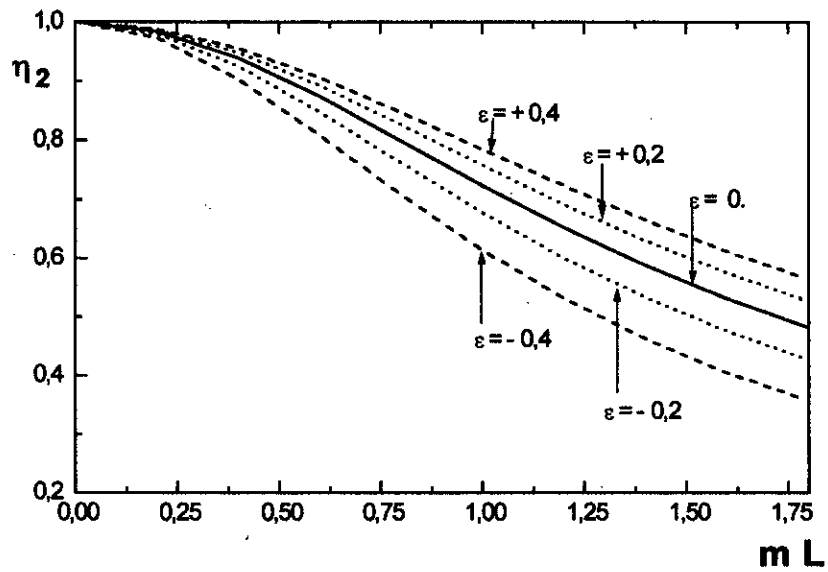


Figure 2.10. Efficacités obtenues pour le présent modèle et pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ .

expression présente une concordance quasi parfaite avec la solution de perturbation et indépendamment de l'étendue de variation de la conductivité.

Ce remarquable résultat confirme la validité de l'usage d'une approximation de linéarisation d'autant plus que cet accord reste encore valable :

- en température, jusqu'à  $mL = 1.5$  pour les faibles valeurs de  $\varepsilon$ ,
- et même au-delà de cette valeur de  $mL$  pour les efficacités. Ceci s'explique par le fait que l'efficacité représente les flux globaux.

Cependant, dès que le coefficient de la conductivité thermique et le paramètre de l'ailette augmentent, on observe une disparité avec la solution supposée exacte de Aziz. On ne peut conclure dans ce cas précis, étant donné que la méthode des perturbations perd de sa précision si le petit paramètre augmente.

La *figure 2.11* montre en évidence que la solution proposée en efficacités se situe dans les limites de précision de la solution par perturbation par rapport à celle numérique.

Dans tous les cas, la solution obtenue en utilisant la conductivité moyenne n'est pas satisfaisante et l'erreur s'accroît à mesure que  $\varepsilon$  croît et que  $mL$  augmente.

## 2.4 OPTIMISATION

Il est possible à présent de rechercher les dimensions optimales, en annulant la dérivée du flux global échangé par l'ailette et le milieu environnant par rapport à l'épaisseur, de sorte que ce flux soit maximal.

Le flux échangé  $q$ , est celui qui traverse l'ailette à la base, soit :

$$q = -\lambda a \left. \frac{d\theta_2^+}{dx} \right|_{x=0} \quad (2.15a)$$

$$q = \lambda_0 (1 + \varepsilon F) a m^+ \theta_0^* \tanh m^+ L \quad (2.15b)$$

Pour un profil d'ailette  $S$ , le flux de chaleur échangé par unité de largeur  $q^*$  s'écrit donc suivant l'épaisseur :

$$q^* = \theta_0^* \sqrt{2\alpha w \lambda_0} (\sqrt{1 + \varepsilon F}) \tanh \left[ S \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_0 (1 + \varepsilon F)}} \cdot \frac{1}{w^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (2.16)$$

En prenant la dérivée de ce flux par rapport à l'épaisseur, on trouve :

$$\frac{dq}{dw} = \theta_0 \sqrt{2\alpha\lambda_0} (\sqrt{1+\varepsilon F}) \left[ \frac{1}{2\sqrt{w}} \tanh \left( S \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_0(1+\varepsilon F)}} \frac{1}{w^{3/2}} \right) + \frac{3\sqrt{w}}{2} \frac{S}{w^2} \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_0(1+\varepsilon F)}} \operatorname{sech}^2 \left( S \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_0(1+\varepsilon F)}} \frac{1}{w^{3/2}} \right) \right] \quad (2.17)$$

On note que le facteur  $F$  est admis constant dans cette dérivation, ce qui n'est pas d'un effet perceptible à ce stade.

Cette dérivée est nulle, si :

$$\tanh \psi = 3\psi \operatorname{sech}^2 \psi \quad (2.18)$$

avec :

$$\psi = S \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_0(1+\varepsilon F)}} \frac{1}{w^{3/2}}$$

La solution de l'équation (2.18) est visualisée dans la *figure 2.12*. La valeur correspondante est  $\psi = 1.42$ . Ceci permet d'exprimer l'épaisseur optimale pour une section de profil  $S$  fixant le volume de matière de l'ailette :

$$w_{opt} = \sqrt[3]{\frac{2\alpha S^2}{(1.42)^2 \lambda_0 (1+\varepsilon F)}} \quad (2.19)$$

Par conséquent, on détermine le paramètre optimum de l'ailette, en écrivant :

$$\begin{aligned} (mL)_{opt} &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_0 w_{opt}}} L \\ &= 1.42 \sqrt{1+\varepsilon F} \end{aligned} \quad (2.20)$$

On montre dans la *figure 2.13* la variation du paramètre de l'ailette en fonction de  $\varepsilon$ . Le calcul suivant l'équation (2.20) est effectué par substitutions successives pour accéder à un optimum précis.



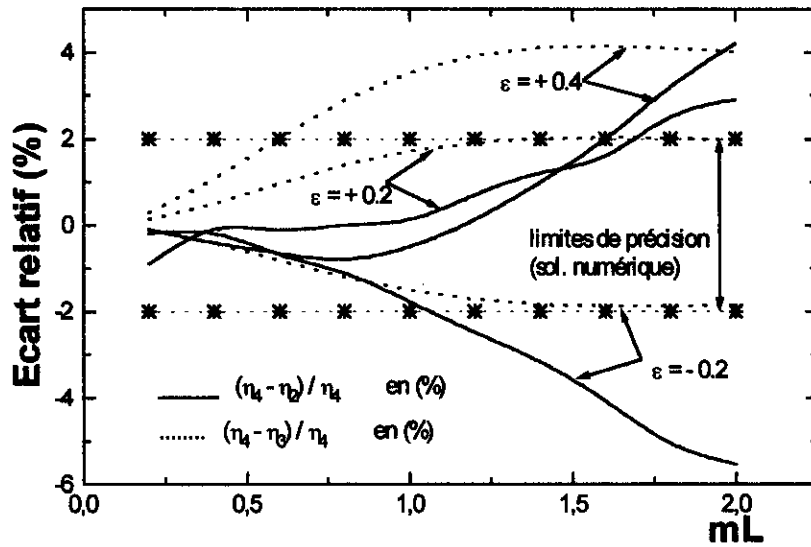


Figure 2.11. Limites de précision des solutions obtenue et classique ( moyenne) par rapport à la solution numérique.

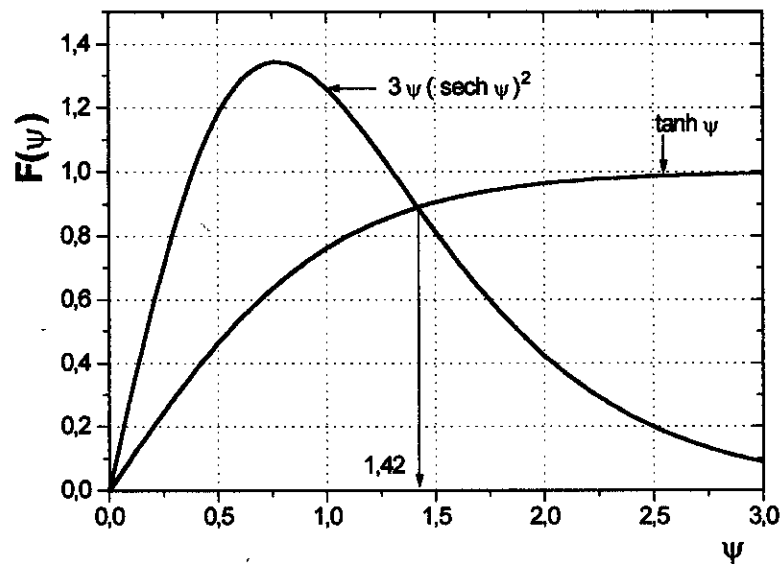
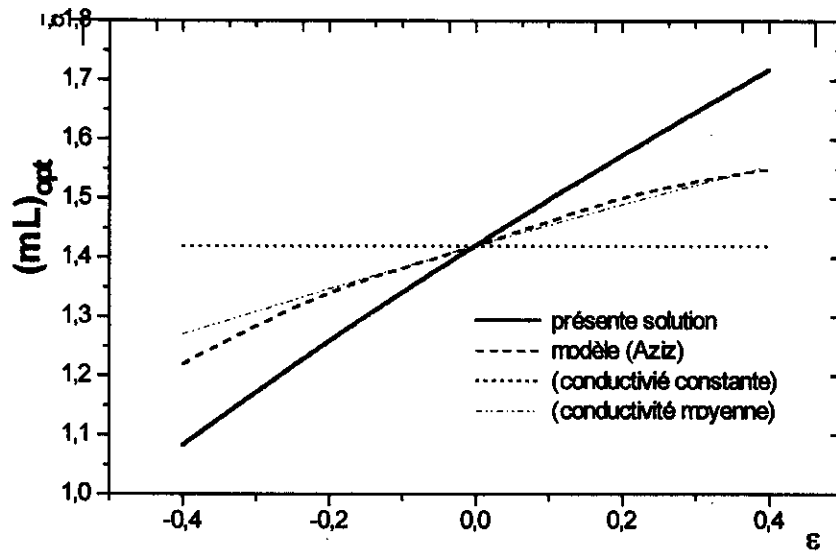


Figure 2.12. Solution graphique de l'équation (2.18) pour une optimisation de l'épaisseur de l'ailette suivant l'approche développée.



**Figure 2.13.** Paramètre optimal de la caractéristique de l'ailette suivant les procédures comparées.

## 2.5 CONCLUSION

L'objectif principal poursuivi est la détermination d'une conductivité thermique susceptible de représenter convenablement les transferts thermiques dans les ailettes, plus précisément lors d'une dépendance à la température. Les résultats montrent une concordance avec les solutions obtenues par perturbations. L'avantage est de disposer des solutions classiques simples au prix d'une correction de la conductivité. Nous avons observé que la moyenne arithmétique ne représente pas convenablement la variation de ce paramètre thermophysique. L'usage de la conductivité optimale exprimée suivant la linéarisation adoptée dans le présent travail permet donc de s'affranchir à la fois des approximations inexactes ou du recours aux solutions numériques lourdes.

Enfin, cette démarche a pu aboutir à l'optimisation de l'épaisseur de l'ailette rectangulaire, lors d'une dépendance de la conductivité thermique avec la température.

Cette approche peut être étendue à d'autres profils et pour différentes conditions. Pour une analyse en transitoire, les intégrations seront doubles en rapport des variables d'espace et du temps.

**III – MODELE BIDI MENSIONNEL AVEC**  
**CONVECTION A L'EXTREMITÉ**  
**ET DISSYMETRIE DES ECHANGES**

Une des questions les plus controversées dans l'étude des ailettes, est la validité de l'hypothèse du transfert thermique unidimensionnel [36].

Dans l'annexe A relatant la théorie classique, la conduction est considérée selon une seule direction (1D), avec un critère qualitatif sur le rapport des dimensions de l'ailette. Ceci est équivalent, à supposer que les isothermes au sein de l'ailette soient normales à l'axe de transfert  $Ox$ , comme le montre la figure 3.1.

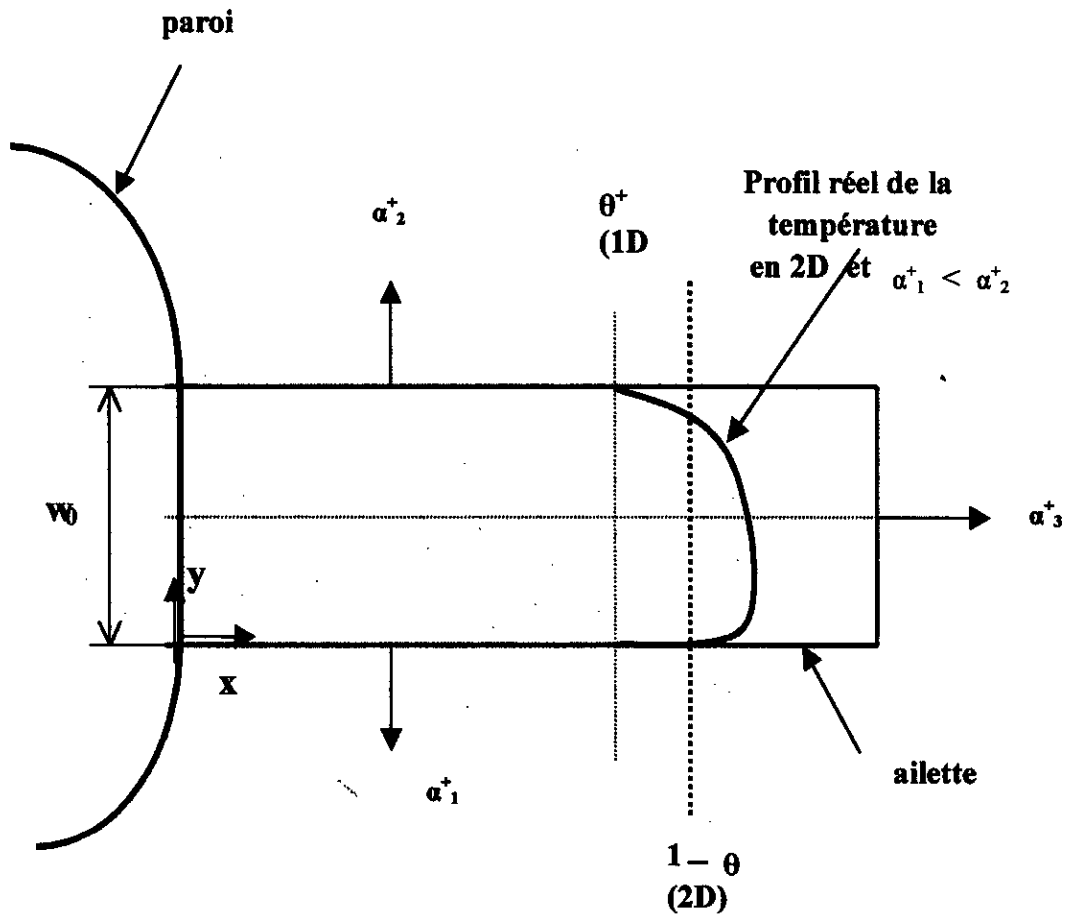


Figure 3.1. Schéma représentatif des approximations de l'ailette suivant la direction  $y$ .

Si cette supposition est admise comme une approximation raisonnable, il est nécessaire de noter que les deux approches pouvant caractériser cette simplification se distinguent les unes des autres. En effet, on pourrait négliger purement les variations de la température suivant la direction transversale, soit prendre en compte les transferts thermiques selon l'axe Oy. Dans ce dernier cas, le remplacement du profil de température bidimensionnel par un profil moyen sur une section droite constitue la seconde approche.

La première démarche mène aux solutions classiques avec le critère cité. La deuxième, plus rigoureuse, aboutit à des conditions limitatives précises pour l'usage de l'approximation [54].

Lau et Tan [55] ont montré que l'application du modèle 1D dépend du nombre de Biot et non du rapport des dimensions de l'ailette. De même, l'analyse de Levitsky [56] s'appuie sur le critère de Biot. Snider et al [36] corrigent le critère  $Bi \ll 1$  selon la géométrie, et la restriction est plus sévère.

Une étude développée par Ju et al [21] montre que la réduction à 1D du transfert dans l'ailette rectangulaire et sans convection à l'extrémité, se passe sans écarts notables entre les modèles pour un nombre de Biot inférieur à l'unité. Par contre, Cotta et Ramos [47] ont établi qu'une différence entre les solutions est observée pour des ailettes trapézoïdales courtes, notamment pour les faibles valeurs de Biot.

Heggs et Stone [57] présentent divers diagrammes obtenus numériquement et montrant la différence entre les solutions 1D et 2D, pour un assemblage ailette-paroi. Ils mettent en évidence particulièrement l'influence de la longueur de l'ailette, le rapport des conductivités et l'épaisseur de la paroi.

Par ailleurs, Look [20] a examiné l'effet sur les flux échangés, de l'inégalité des nombres de Biot calculés pour les deux faces de l'ailette. En effet, les expérimentateurs proposent des corrélations suivant la position de la face chaude. Dans le cas de la plaque plane par exemple, les nombres de Nusselt correspondants sont assez différents et peuvent se présenter dans un rapport de 2 [20], [54].

D'une part, le problème en général n'étant pas achevé par les méthodes analytiques et les limites d'application pour les formulations simplifiées ne sont pas clairement établies d'une manière unique. D'autre part et comme relevé en absence de mesures expérimentales déterminantes, les résultats varient d'un auteur à l'autre.

Notre objectif est de traiter donc le transfert thermique dans l'ailette rectangulaire à 2D, avec convection à l'extrémité et suivant une dissymétrie des échanges latéraux. Outre l'analyse globale, On cherche à mettre en évidence l'influence des paramètres prédominants sus-cités. L'examen approfondi des effets des facteurs mis en relief, permettra à priori de développer un modèle moins général des transferts thermiques non linéaires dans les ailettes.

### 3.1 MODELE MATHEMATIQUE

L'équation de l'énergie pour l'ailette rectangulaire (*figure 3.1*) en régime transitoire et en considérant les paramètres thermophysiques constants s'écrit :

$$C \frac{\partial \theta^*}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial y} \right]$$

$$\hat{q}_x = -\lambda_0 \frac{\partial \theta^*}{\partial x}$$

$$\hat{q}_y = -\lambda_0 \frac{\partial \theta^*}{\partial y} \quad (3.1)$$

avec les conditions aux limites et initiale suivantes (t étant omis) :

$$\hat{q}_y(x,0) = -\alpha_1 \theta^*(x,0) \quad (3.2)$$

$$\hat{q}_y(x,w) = \alpha_2 \theta^*(x,w) \quad (3.3)$$

$$-\lambda_0 \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x} \right|_{x=L} = \alpha_3 \theta^*(L,y) \quad (3.4)$$

$$\theta^*(0,y) = \theta_{oc} \quad (3.5)$$

$$\theta^* \Big|_{t=0} = 0 \quad (3.6)$$

Les équations (3.1) à (3.6) sont adimensionnées et le système est reporté au *tableau 3.1* dans la page suivante.

**Tableau 3.1. Equations adimensionnées du modèle bidimensionnel avec convection à l'extrémité et dissymétrie des échanges latéraux.**

Equation de l'énergie	$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = - \left[ \frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} \right]$	(3.7)
Flux longitudinal	$q_x = - \frac{\partial \theta}{\partial X}$	(3.8)
Flux transversal	$q_y = - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \theta}{\partial Y}$	(3.9)
Flux d'échange face de dessous	$q_y(X,0,\tau) = \frac{\alpha_1^+}{\sigma^2} [1 - \theta(X,0,\tau)]$	(3.10)
Flux d'échange face de dessus	$q_y(X,1,\tau) = \frac{\alpha_2^+}{\sigma^2} [\theta(X,1,\tau) - 1]$	(3.11)
Condition à l'extrémité	$\frac{\partial \theta}{\partial X} \Big _{X=1} = \frac{\alpha_3^+}{\sigma} [1 - \theta(1,Y,\tau)]$	(3.12)
Condition à la base	$\theta(0,Y,\tau) = 0$	(3.13)
Condition initiale	$\theta \Big _{\tau=0} = 1$	(3.14)

Dans ce tableau, les grandeurs adimensionnées sont indiquées dans la nomenclature.

### 3.2 ANALYSE PAR PERTURBATION ET MISE EN MOYENNE

En choisissant  $\sigma$  comme paramètre de perturbation [33][54], les grandeurs inconnues du système du *tableau 3.1* sont approximées en se limitant à deux termes, par les relations suivantes :



$$\theta = \theta_0 + \sigma^2 \theta_1 \quad (3.15)$$

$$q_x = q_{0x} + \sigma^2 q_{1x} \quad (3.16)$$

$$q_y = q_{0y} + \sigma^2 q_{1y} \quad (3.17)$$

La combinaison des équations (3.15), (3.17) et (3.9), se traduit par l'important résultat suivant :

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial Y} = 0 \quad (3.18)$$

La même application pour l'équation (3.8) et en utilisant l'équation (3.16) donne :

$$q_{0x} = - \frac{\partial \theta_0}{\partial X} \quad (3.19)$$

En conséquence, l'indépendance des premières approximations de la température et du flux transversal de la variable Y est prouvée.

Par ailleurs, et compte tenu de ce dernier résultat, l'écriture à l'ordre zéro en  $\sigma$  de l'équation (3.7) après incorporation des équations (3.15), (3.16) et (3.17) mène par identification à l'expression :

$$\frac{\partial q_{0y}}{\partial Y} = f(X, \tau) \quad (3.20)$$

où la fonction  $f$  regroupe les termes indépendants de X.

Après intégration de cette dernière équation, on aura d'une part :

$$q_{0y} = f(X, \tau) Y + g(X, \tau) \quad (3.21)$$

où  $f$  définie par (3.20) et  $g$  sont des fonctions à déterminer.

D'autre part, l'égalité au premier ordre en  $\sigma^2$  de la combinaison indiquée (équations (3.15), (3.17) et (3.9)) donne aussi par identification suivant eq. (3.18):

$$q_{0y} = - \frac{\partial \theta_1}{\partial Y} \quad (3.22)$$

ce qui permet finalement de trouver suivant l'éq. (3.21) et (3.22) l'expression de  $\theta_1$ , soit :

$$\theta_1 = -\frac{f}{2}Y^2 - gY - h \quad (3.23)$$

avec la constante d'intégration  $h$ .

En résumé, et en se rappelant l'équation (3.15) et (3.17), la température et le flux transversal peuvent être mis sous les formes suivantes :

$$\theta = \theta_0 - \sigma^2 \left[ \frac{f}{2}Y^2 + gY + h \right] \quad (3.24)$$

$$\text{et} \quad q_r = fY + g + O(\sigma^2) \quad (3.25)$$

A présent, l'analyse peut être poursuivie en ayant en vue une procédure de moyenne dans une section  $X$ , suivant la *figure 3.1* ; ainsi, on définit les grandeurs :

$$\bar{\theta}(X, \tau) = \int_0^1 \theta(X, Y, \tau) dY \quad (3.26)$$

$$\bar{q}_x = -\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial X} \quad (3.27)$$

qui expriment les valeurs recherchées suivant l'approche de départ. Nous les explicitons donc en introduisant les résultats précédents.

En reportant le résultat (3.23), l'équation (3.26) devient après intégration :

$$\bar{\theta} = \theta_0 - \sigma^2 \left[ \frac{f}{6} + \frac{g}{2} + h \right] \quad (3.28)$$

En intégrant l'équation (3.7) suivant  $Y$  et tenant compte de (3.27) et (3.25), l'équation de l'énergie (3.7) est ramenée donc à :

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial X^2} - f \quad (3.29)$$

L'écriture de la condition (3.10) en ayant en vue les équations (3.25), (3.15) et (3.23) donne une expression de  $g$  :

$$g = \frac{\alpha_2^+}{\sigma^2} [1 - \theta_0 + \sigma^2 h] \quad (3.30)$$

Quant à la condition (3.11), elle s'exprime suivant (3.25), (3.15) et (3.23) par la relation suivante :

$$f + g = \frac{\alpha_2^+}{\sigma^2} \left[ \theta_0 - \sigma^2 \left( \frac{f}{2} + g + h \right) - 1 \right] \quad (3.31)$$

Les équations (3.28), (3.30) et (3.31) constituent un système algébrique à trois inconnues, dont la résolution permet de trouver la fonction utile  $f$ , on trouve :

$$f = \frac{1}{\sigma^2} \frac{12 [\alpha_1^+ + \alpha_2^+ + \alpha_1^+ \alpha_2^+]}{12 + 4\alpha_1^+ + 4\alpha_2^+ + \alpha_1^+ \alpha_2^+} [\bar{\theta} - 1] \quad (3.32)$$

$$\text{ou bien } f = \frac{B}{\sigma^2} [\bar{\theta} - 1] \quad (3.33)$$

En cas d'égalité des coefficients d'échange, le coefficient complexe  $B$  mis en évidence, prend l'allure indiquée sur la *figure 3.2*.

En portant cette expression dans l'équation (3.29), on obtient un nouveau système de résolution analytique moins difficile, repris dans le *tableau 3.2*.

**Tableau 3.2. Equations du modèle bidimensionnel réduit avec convection à l'extrémité et dissymétrie des échanges latéraux.**

<b>Equation de l'énergie</b>	$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial X^2} - \frac{B}{\sigma^2} (\bar{\theta} - 1)$	(3.34)
<b>Expression du complexe B</b>	$B = \frac{12 [\alpha_1^+ + \alpha_2^+ + \alpha_1^+ \alpha_2^+]}{12 + 4\alpha_1^+ + 4\alpha_2^+ + \alpha_1^+ \alpha_2^+}$	(3.35)
<b>Condition à l'extrémité</b>	$\left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial X} \right _{X=1} = \frac{\alpha_3^+}{\sigma} [1 - \bar{\theta}(1, \tau)]$	(3.36)
<b>Condition à la base</b>	$\bar{\theta}(0, \tau) = 0$	(3.37)
<b>Condition initiale</b>	$\left. \bar{\theta} \right _{\tau=0} = 1$	(3.38)

### 3.3 RESOLUTION POUR LES TERMES D'ESPACE

Le système du *tableau* 3.2 peut être résolu de plusieurs manières. Une première tentative, à l'aide de la transformée de Laplace double [58] est tentée dans l'*annexe B*. La recherche des solutions par inversion reste un problème ouvert dans le cas qui nous concerne.

Une seconde méthodologie est appliquée à l'équation (3.34). De façon commode, on écrit :

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} = -\Psi \left( \bar{\theta} \right) + \frac{B}{\sigma^2} \quad (3.39)$$

avec l'opérateur : 
$$\Psi = \frac{B}{\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2}$$

Le problème en termes d'espace, associé pour les équations (3.36), (3.37) et (3.39), est avec les conditions aux limites équivalentes :

$$\Psi \Theta = \mu \Theta \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} \Theta(0) = 0 \\ \Theta'(1) = \frac{\alpha_2^+}{\sigma} [1 - \Theta(1)] \end{cases}$$

La solution générale est alors :

$$\Theta = M \cos \sqrt{\mu - \frac{B}{\sigma^2}} X + N \sin \sqrt{\mu - \frac{B}{\sigma^2}} X \quad (3.41)$$

où M et N sont des constantes d'intégration.

La première condition de (3.40) élimine la constante M, de sorte que les fonctions solutions se réduisent à :

$$\begin{aligned} \Theta_i &= N_i \sin \sqrt{\mu_i - \frac{B}{\sigma^2}} X \\ &= N_i \sin u_i X \end{aligned} \quad (3.42)$$

l'indice i étant relatif à une solution possible.

La normalisation convenable des fonctions propres (en rapport au sens physique du problème, i.e. :  $u_i > 0$  et  $N_i \leq 1$ ) est :

$$(\Theta_i | \Theta_i) = \frac{1}{4} \quad (3.43)$$

ce qui permet de déterminer les coefficients des fonctions propres en relation aux valeurs propres correspondantes :

$$N_i = \sqrt{\frac{u_i}{2u_i - \sin 2u_i}} \quad (3.44)$$

La deuxième condition de (3.40) donne l'équation transcendante suivante, dont la résolution aboutit aux valeurs propres  $u_i$  :

$$u_i \cos u_i = \frac{\alpha_3^+}{\sigma} \left[ \left( 2 - \frac{\sin 2u_i}{u_i} \right)^{0.5} - \sin u_i \right] \quad (3.45)$$

Les solutions graphiques de cette équation sont montrées dans les figures 3.3 à 3.6.

Le cas particulier de l'ailette adiabatique à son extrémité est représenté sur la figure 3.3. Les figures 3.4 et 3.5 montrent l'effet de la puissance de la convection à l'extrémité sur le spectre des valeurs propres.

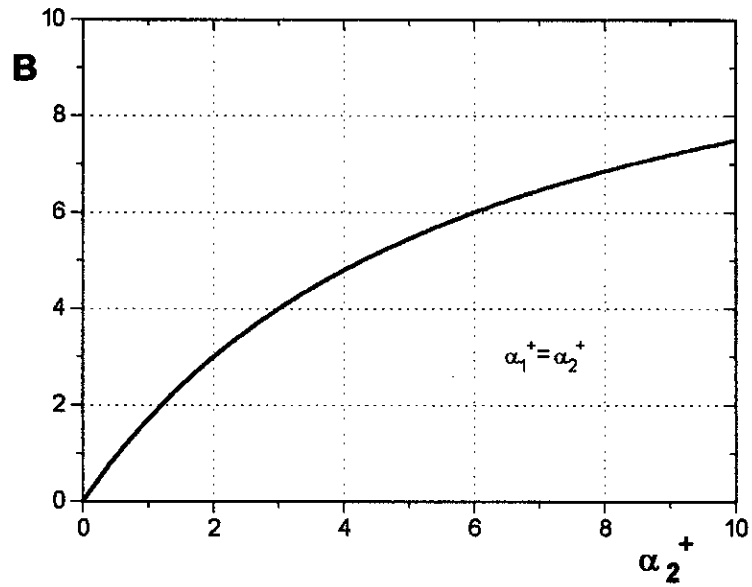
Par ailleurs, l'évolution du champ thermique complet décomposé sur l'ensemble discret des valeurs propres est dépendant des contributions modales. La quantification est étroitement liée à la localisation de la valeur propre.

La valeur fondamentale étant déterminante, elle est plus détaillée dans la figure 3.5. Enfin, cette valeur fondamentale prend plus d'importance suivant la convection à l'extrémité en regard à l'aspect des courbes de la figure 3.6, et permet donc d'appréhender l'essentiel du phénomène.

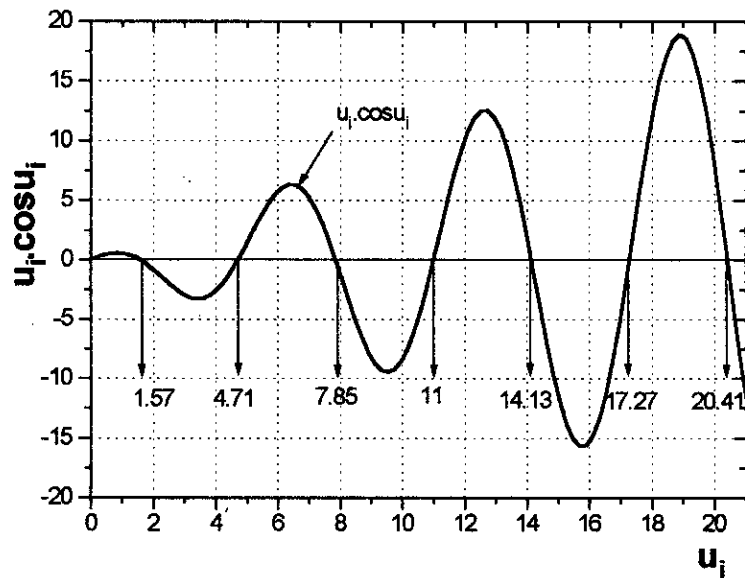
### 3.4 RESOLUTION COMPLETE

La solution globale de (3.39) peut être écrite en termes de produit scalaire :

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\bar{\theta} | \Theta_i)}{(\Theta_i | \Theta_i)} \Theta_i \quad (3.46)$$



**Figure 3.2.** Variations du coefficient  $B$  en échange symétrique suivant l'échange de la face de dessus.



**Figure 3.3.** Solution graphique de l'équation (3.45), cas extrémité de l'ailette adiabatique.

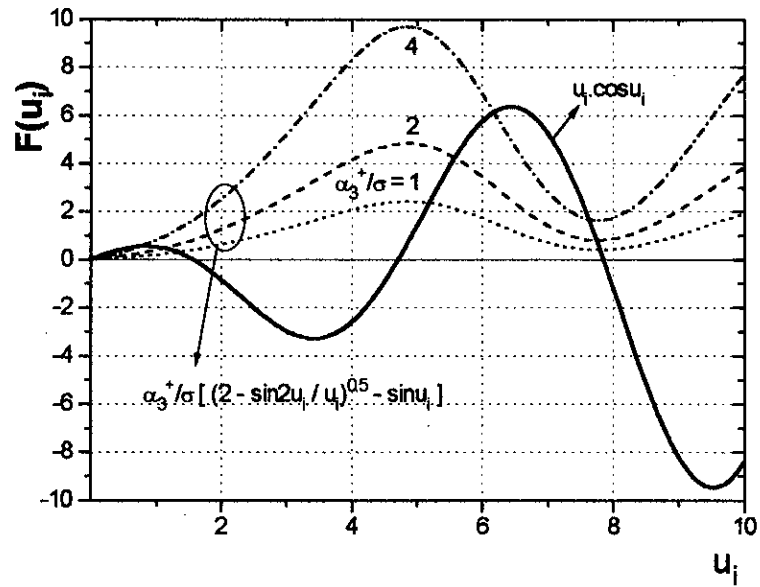


Figure 3.4. Solution graphique de l'équation (3.45),  
extrémité non isolée,  $u_i = 0 - 10$

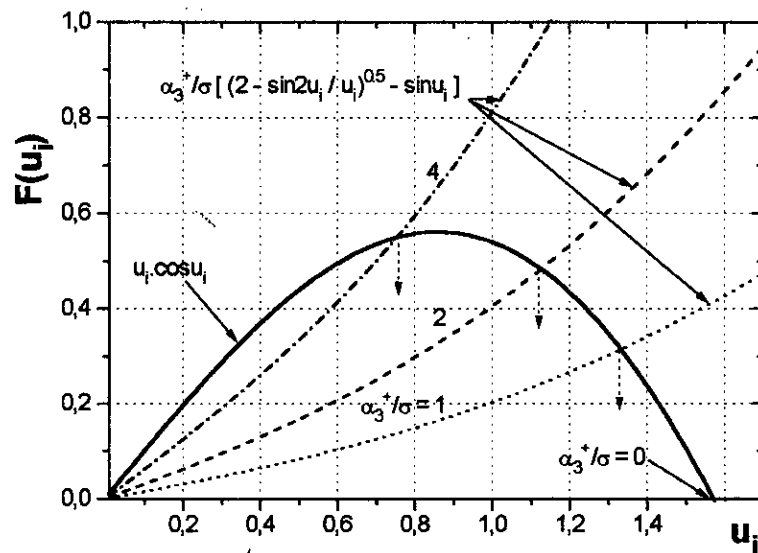


Figure 3.5. Solution graphique de l'équation (3.45),  
extrémité non isolée,  $u_i = 0 - 1.6$

Ainsi, l'équation (3.39) est :

$$\frac{\partial \left( \bar{\theta} | \Theta_i \right)}{\partial \tau} = -\mu_i \left( \bar{\theta} | \Theta_i \right) + \left( \frac{B}{\sigma^2} | \Theta_i \right) \quad (3.47)$$

C'est une équation différentielle du premier ordre non homogène. Par conséquent, la solution sera une composition.

L'équation homogène fournit la solution :

$$\left( \bar{\theta} | \Theta_i \right) = C \exp \left( -\mu_i \tau \right) \quad (3.48)$$

et la variation de la constante  $C$ , compte tenu de la condition initiale (3.38) donne :

$$\left( \bar{\theta} | \Theta_i \right) = \left( 1 | \Theta_i \right) \exp \left( -\mu_i \tau \right) + \exp \left( -\mu_i \tau \right) \int_0^1 \left( \frac{B}{\sigma^2} | \Theta_i \right) \exp \left( \mu_i z \right) dz \quad (3.49)$$

Dans cette expression,  $z$  n'est qu'une variable muette d'intégration.

L'évolution de la température est donc :

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4(1 - \cos u_i)}{(2u_i - \sin 2u_i)} \left\{ \frac{\exp \left[ -\left( u_i^2 + \frac{B}{\sigma^2} \right) \tau \right] + \frac{B}{\sigma^2 \left( u_i^2 + \frac{B}{\sigma^2} \right)} \left( 1 - \exp \left[ -\left( u_i^2 + \frac{B}{\sigma^2} \right) \tau \right] \right)}{\right\} \sin u_i X \quad (3.50a)$$

ou sous forme condensée :

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \left[ u_i \left( \frac{\alpha_3}{\sigma} \right), \frac{B}{\sigma^2} (\delta), \tau \right] \sin u_i X \quad (3.50b)$$

Cette relation (3.50b) rappelle les principaux facteurs d'influence sur la distribution des températures, qu'on s'est proposé au départ de rassembler.



En effet, l'écriture sous cette forme montre un coefficient généralisé qui met en lumière les dépendances suivantes:

- La convection à l'extrémité par l'intermédiaire des valeurs propres.
- Les coefficients d'échange et les dimensions relatives de l'ailette.
- La dissymétrie des échanges latéraux.

A priori, tous ces facteurs se conjuguent pour réaliser la température de l'ailette.

Nous présentons, à titre d'exemple, dans la *figure 3.7* la variation de  $\theta_i$  en fonction de  $B/\sigma^2$  pour le cas de l'extrémité adiabatique et en régime permanent. Il convient de remarquer, la domination des premières valeurs et la pente élevée vers les très faibles nombres de  $B/\sigma^2$ , ce qui explique le gradient transversal de la température. La dissipation de l'énergie thermique s'effectue principalement dans les régions proches de la base de l'ailette.

L'expression (3.50) se simplifie :

- pour l'instant initial par :

$$\theta_i = \frac{4(1 - \cos u_i)}{(2u_i - \sin 2u_i)} \quad (3.51)$$

- pour le régime permanent :

$$\theta_i = \frac{4B(1 - \cos u_i)}{\sigma^2(2u_i - \sin 2u_i)(u_i^2 + B/\sigma^2)} \quad (3.52)$$

La validation de l'expression (3.50a) se présentant sous la forme de séries, nécessite l'étude de la convergence. Le théorème de Weierstrass [59] est appliqué à cette série infinie de fonctions.

Les *figures 3.8, 3.9 et 3.10* montrent graphiquement la majoration par les séries numériques convergentes pour les cas respectifs du régime permanent, à l'instant initial et pour un temps quelconque. La procédure est élargie à un spectre continu, à fortiori un spectre discret tel notre cas, aboutira à une convergence plus rapide.

### 3.5 RESULTATS

Afin de ne pas multiplier inutilement les résultats, nous avons limité notre discussion du modèle de ce chapitre au régime permanent. Par rapport au régime transitoire, le comportement stationnaire en température conduit à la détermination recherchée de l'efficacité.

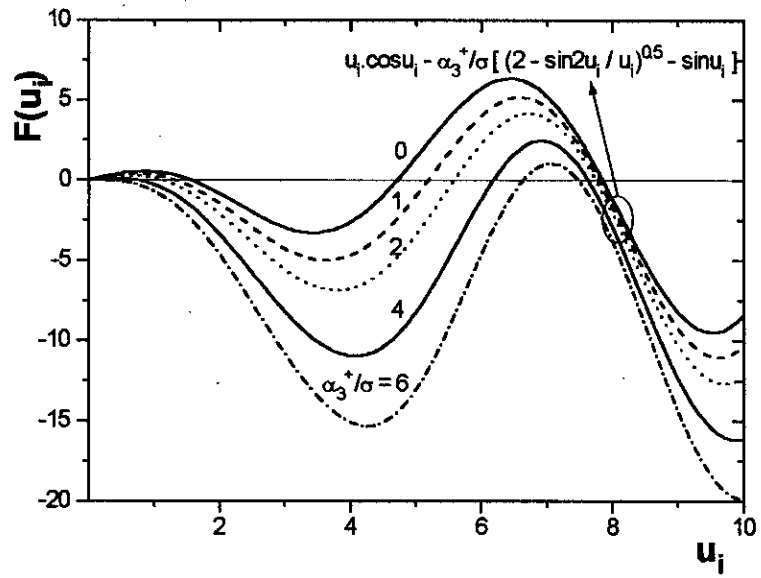


Figure 3.6. Evolution des valeurs propres suivant l'échange à l'extrémité.

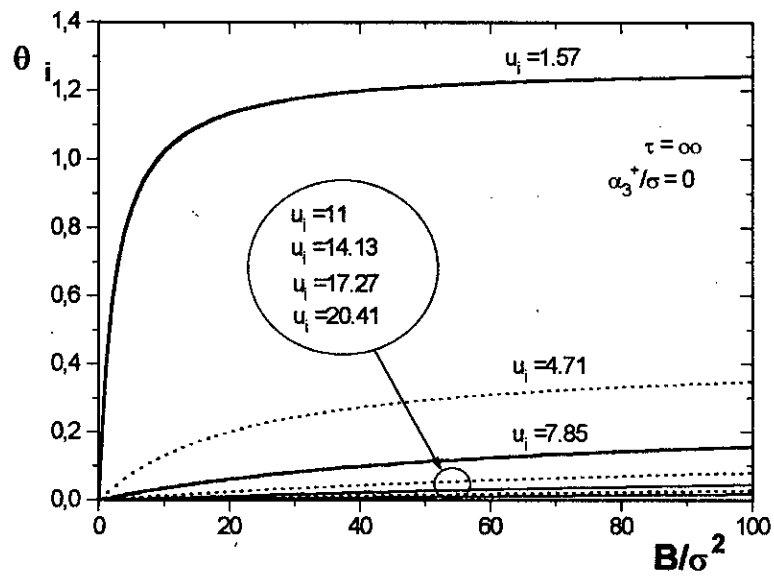


Figure 3.7. Exemple de variation du coefficient de la série obtenue suivant le paramètre prédominant de l'ailette.

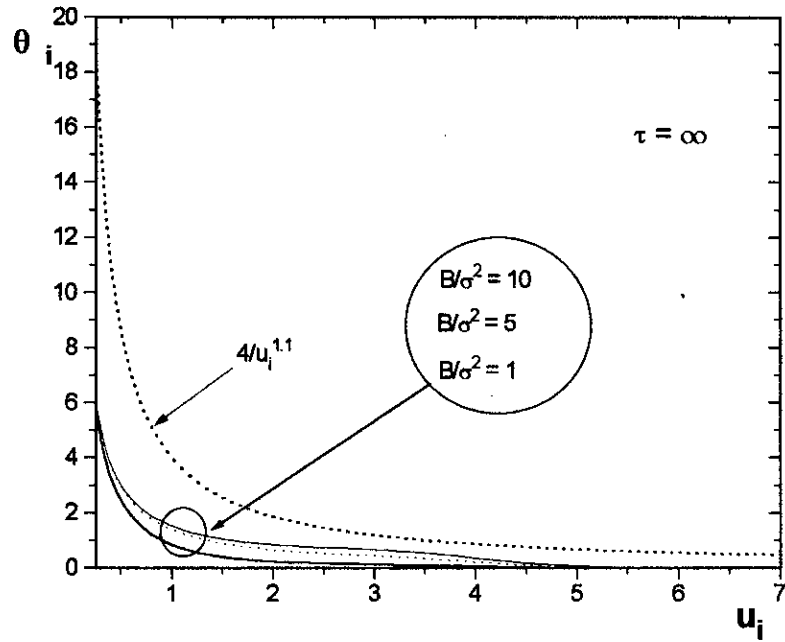


Figure 3.8. Majoration de la série obtenue, cas régime permanent.

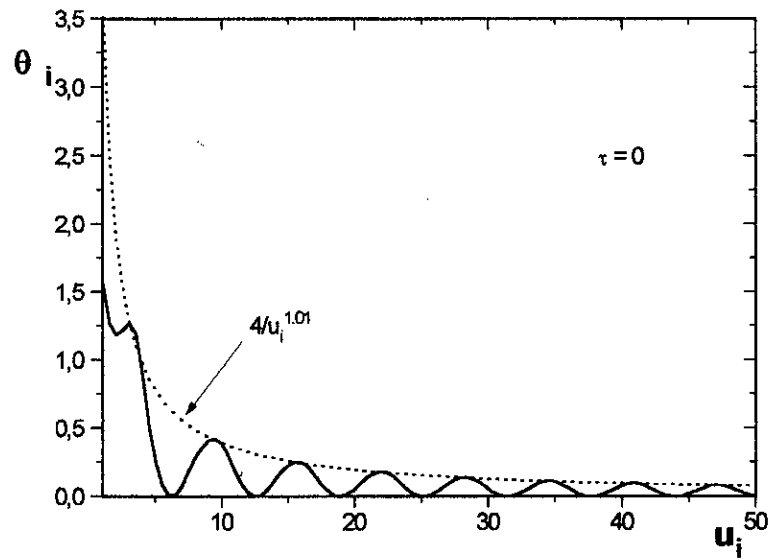


Figure 3.9. Majoration de la série obtenue, cas instant initial.

D'après la *figure 3.11*, les modes propres portées décroissent en intensité. Par conséquent, l'importance de la première valeur propre, signalé précédemment se confirme. Une légère contribution est notée pour la deuxième fonction dans le cas illustré. On note que cet apport est de plus en plus négligeable à mesure que  $B/\sigma^2$  diminue. Nous avons donc retenu seulement les deux premières valeurs pour la suite des calculs. Une bien meilleure estimation sera évidemment obtenue par l'ajout d'autres valeurs, cependant la précision additionnelle n'est pas significative.

On note aussi que la solution en série élaborée, converge rapidement en comparaison des séries présentant des évolutions monotones de la température [60]. La recherche de solutions commodément applicables pour les petites et les grandes valeurs du temps ou asymptotiques n'est pas nécessaire ici, en raison du terme  $B/[\sigma^2(u_i^2 + B/\sigma^2)]$ .

Trois situations sont examinées séparément. Il s'agit de :

- *Cas 1*: convection à l'extrémité nulle pour différentes valeurs de  $B/\sigma^2$ .
- *Cas 2*: convection à l'extrémité variable pour  $B/\sigma^2 = 1$ .
- *Cas 3*: coefficients d'échange différents ou dissymétrie  $\delta$ .

En température, le *cas 1* représenté par la *figure 3.12*, montre de toute évidence l'intérêt du modèle 2D. En définitive et par comparaison, le modèle unidimensionnel n'est applicable que pour les faibles valeurs de  $B/\sigma^2$ . Dans notre formulation, ce n'est pas tant le nombre de Biot classique qui intervient mais la caractéristique complexe de l'ailette. L'examen des deux critères montre que par rapport au nombre de Biot, la caractéristique apparue dans la présente étude fait intervenir en plus la longueur de l'ailette ainsi que l'échange éventuellement inégal des deux faces.

Comme on pouvait s'y attendre, l'effet d'une convection à l'extrémité (*cas 2*) se traduit par une distribution moins avantageuse de la température (*figure 3.13*). Ceci est la conséquence directe d'une augmentation globale de l'échange convectif. On constate que l'excitation du système au bout de l'ailette, extrême à ce niveau, se propage graduellement vers les positions proches de la base. Il est à remarquer qu'une comparaison avec le modèle 1D montre, là aussi, des écarts notables entre les deux approches.

Enfin, la *figure 3.14* représente les variations du coefficient  $B$  suivant  $\delta$ , rapport de dissymétrie des échanges thermiques de l'ailette et la *figure 3.15* montre cet effet sur la température (*cas 3*). Contrairement au cas précédent, ce résultat indique une distribution de plus en plus uniforme le long de l'ailette, dans les conditions où la face de dessous convecte moins dans le milieu environnant.

A partir des distributions des températures (éq.(3.50)), on formule l'efficacité :

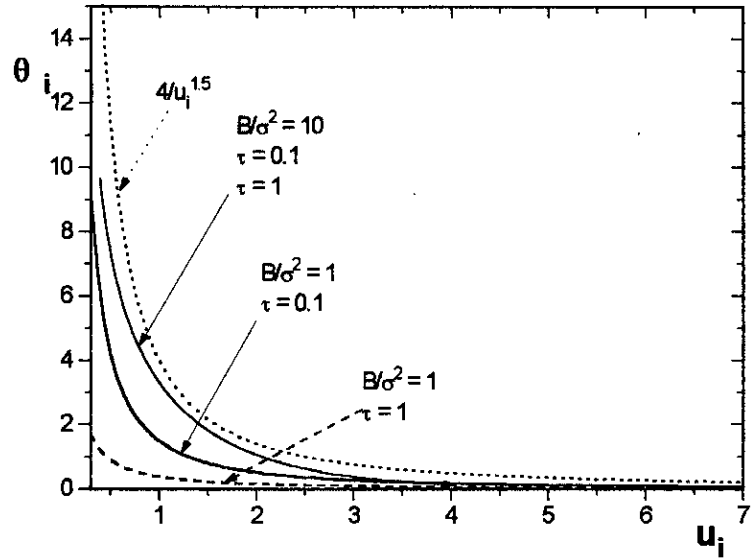


Figure 3.10. Majoration de la série obtenue, cas temps quelconque.

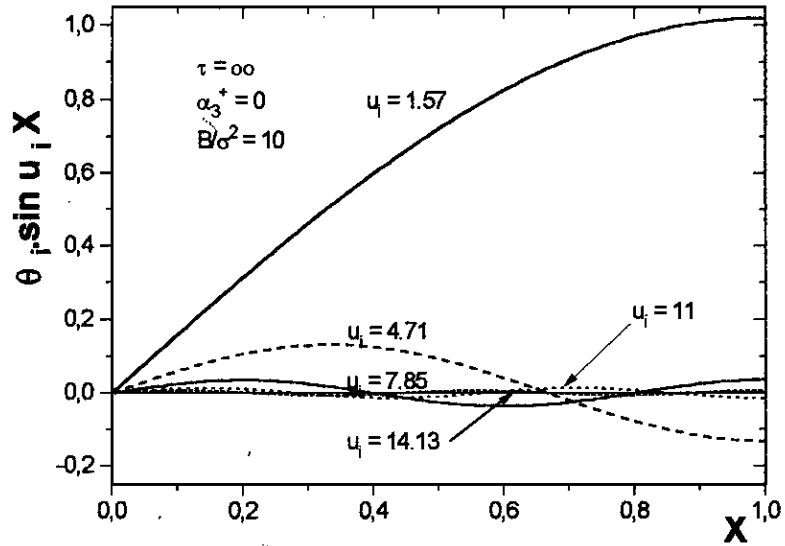
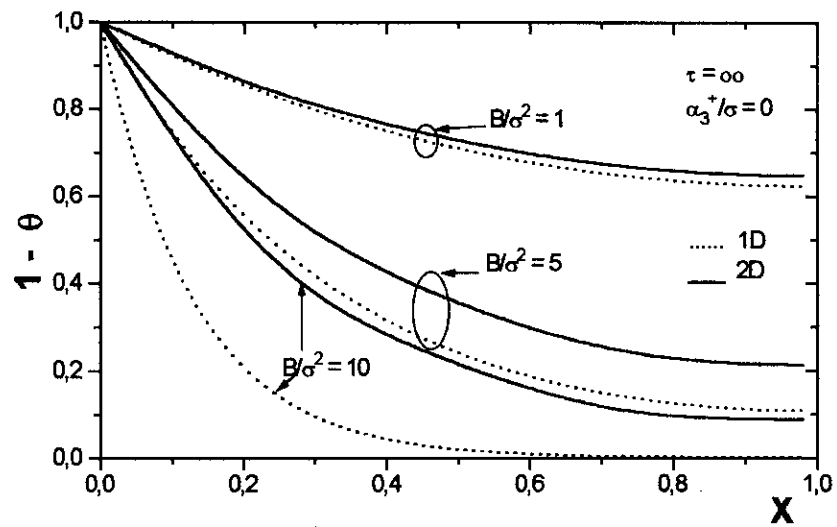
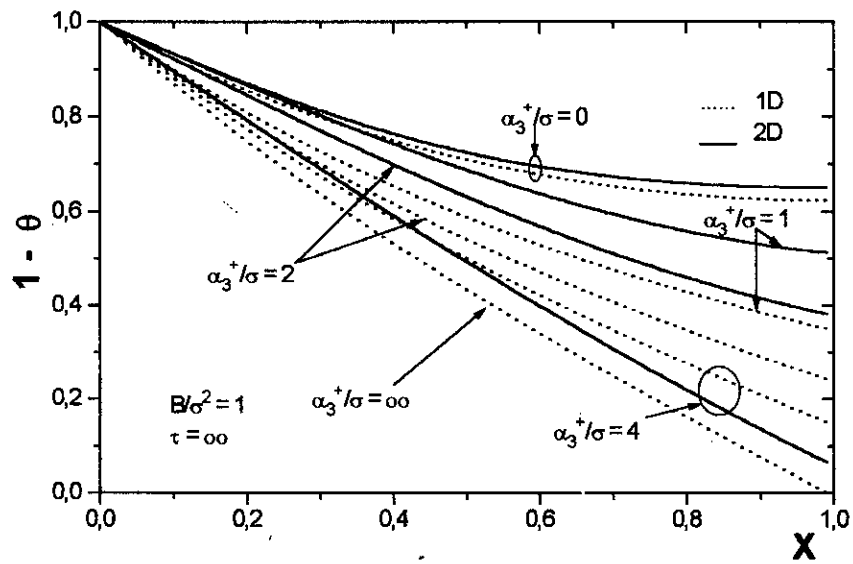


Figure 3.11. Exemple de variation spatiale des modes propres.



**Figure 3.12.** Distributions des températures en 1D et suivant le modèle développé, cas de l'extrémité isolée.



**Figure 3.13.** Distributions des températures en 1D et suivant le modèle développé, cas extrémité non isolée.

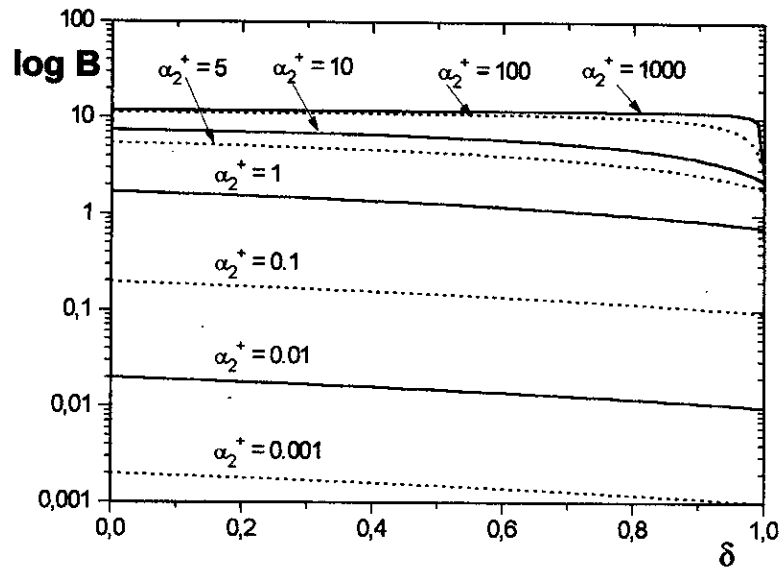


Figure 3.14. Variations du coefficient B suivant la dissymétrie des échanges.

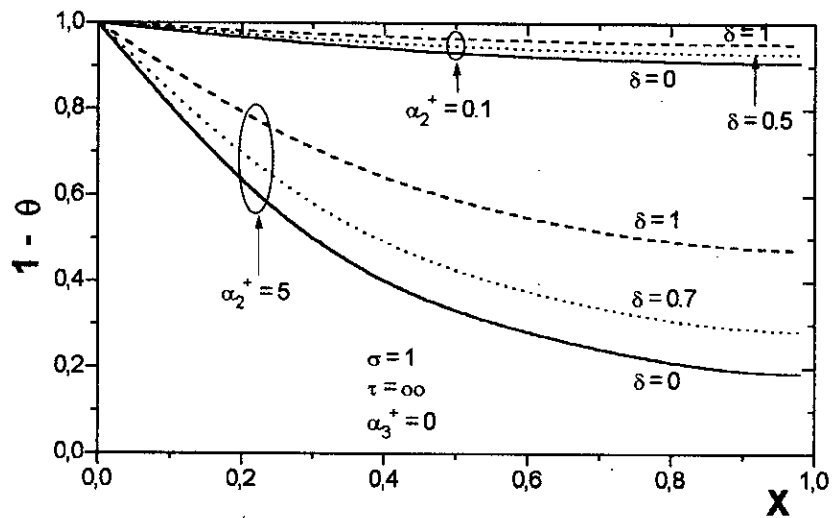


Figure 3.15. Effet de la dissymétrie des échanges sur la distribution des températures du modèle 2D.

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4B/\sigma^2 (1 - \cos u_i)^2}{u_i (2u_i - \sin 2u_i)(u_i^2 + B/\sigma^2)} \quad (3.53)$$

A présent, les cas cités sont étudiés de façon homologue en efficacité. Un critère d'utilisation du modèle 1D peut être établi à partir d'une précision fixée suivant la *figure 3.16* et on retrouve la différence entre le modèle classique et le présent modèle en rapport de  $B/\sigma^2$ .

En ce qui concerne l'influence d'une convection à l'extrémité sur l'efficacité, on observe sur la *figure 3.17* que l'importance de cette sollicitation externe est considérable pour les valeurs de  $B/\sigma^2$  intermédiaires. Cette face d'échange se comporte sans commune mesure avec sa faible surface. Il est possible d'apporter une explication satisfaisante, en remarquant qu'en dehors de cet intervalle intermédiaire, les transferts dans l'ailette sont totalement conductifs ou complètement convectifs. De ce fait, et dans ces cas, une convection à l'extrémité n'inverse pas les bilans.

Enfin, il est intéressant de relever combien l'efficacité est sensible à une convection des faces différente. Dans la *figure 3.18*, les variations sont nettement favorables lorsque la dissymétrie est extrême.

### 3.6 CONCLUSION

D'une part, l'analyse que nous avons proposée du transfert thermique bidimensionnel dans l'ailette, en admettant une température moyenne dans une section droite, met en lumière les points suivants :

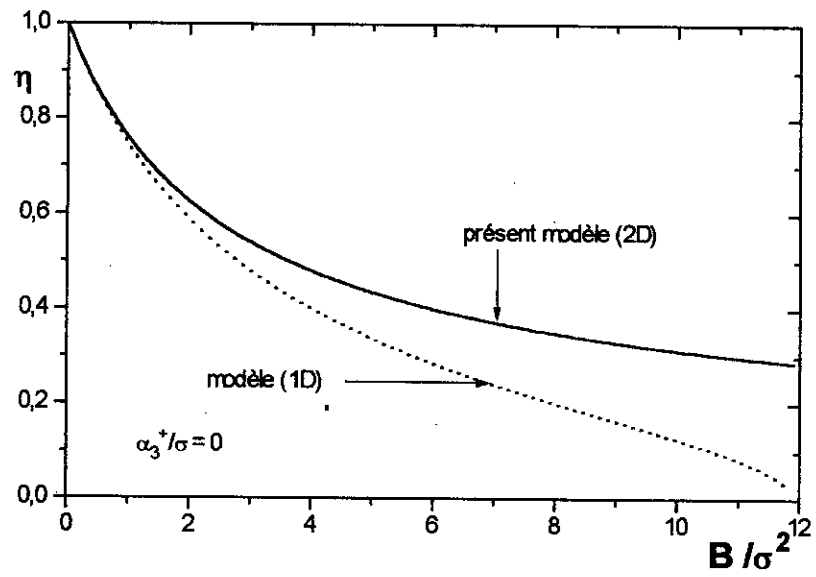
- La nécessité de recourir à des descriptions plus fines pour obtenir une meilleure estimation des températures et à plus forte raison les efficacités.
- L'importance capitale de la prise en considération de la convection à l'extrémité de l'ailette et de la dissymétrie dans les échanges latéraux.

D'autre part, l'application du modèle présenté à la détermination des températures et des efficacités met, de façon générale, en évidence le rôle des facteurs prédominants.

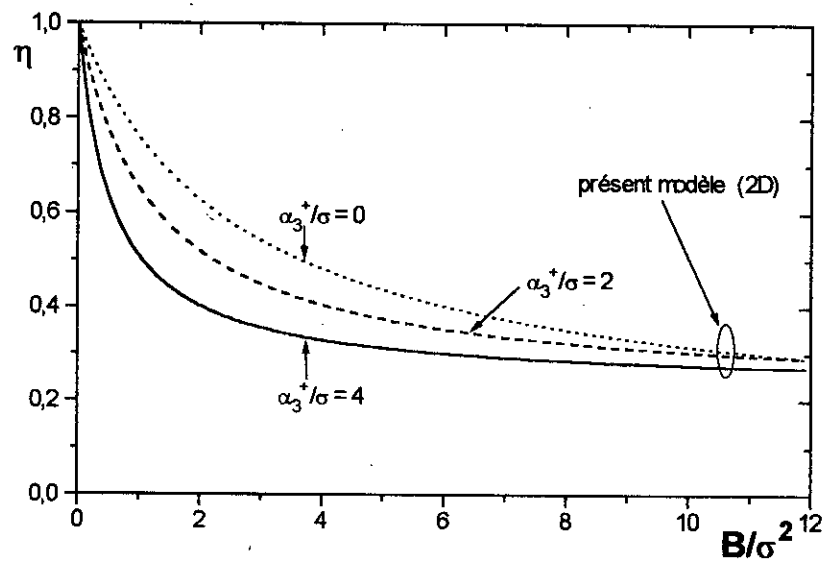
Par ailleurs, on a constaté en définitive, que la dissymétrie ainsi que la convection à l'extrémité interviennent fortement même dans le domaine de validité admis du modèle 1D.

Enfin, les limites d'application du modèle classique sont à présent cernées, ce qui constitue un apport lors du développement d'un modèle plus général, néanmoins pouvant être alors réduit du point de vue de la géométrie.

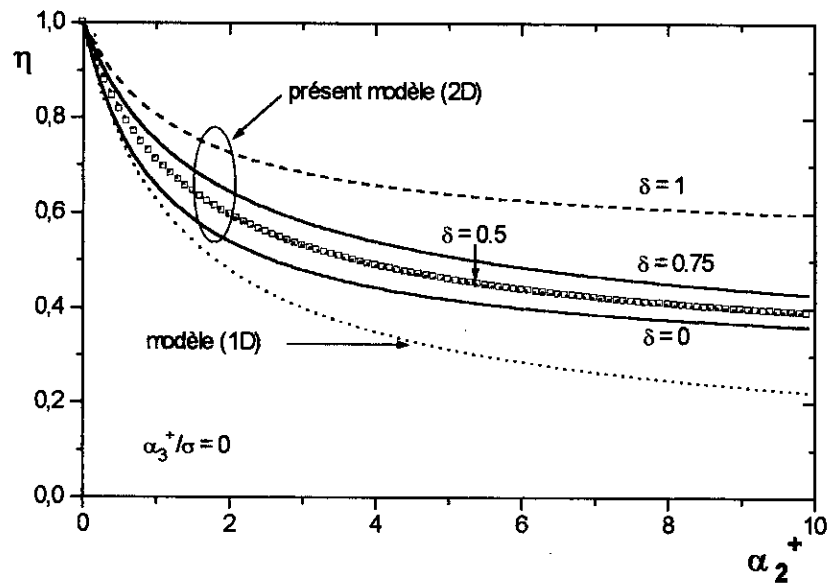




**Figure 3.16.** Comparaison des efficacités pour les modèles 1D et 2D cas de l'extrémité isolée.



**Figure 3.17.** Efficacités obtenues à partir du modèle présenté, suivant l'échange à l'extrémité.



**Figure 3.18.** Efficacités obtenues à partir du modèle présenté, suivant la dissymétrie des échanges.

**IV – DEVELOPPEMENT DU MODELE**  
**NON LINEAIRE ETENDU**

L'étude complète du comportement de l'ailette dans les situations les plus variées nécessite l'écriture de l'équation de l'énergie, non linéaire, régissant la température en chaque point. Il faudrait de la sorte écrire les équations appropriées traduisant à la fois les modes de transfert thermique ainsi que les conditions aux limites reflétant les différents phénomènes d'échange.

Poser correctement un tel problème est délicat, du fait de la complexité de la géométrie et de la difficulté quant à la détermination précise des paramètres thermophysiques suivant la nature des matériaux. Ceci a été élucidé au chapitre II, par exemple, pour la conductivité thermique. De plus, le coefficient d'échange thermique avec le milieu environnant est un paramètre dont la détermination est affectée d'incertitudes reconnues.

On est donc amené au préalable, à une discussion critique sur le choix des dimensions et des variables. Une revue exhaustive permettra alors de retenir les hypothèses les plus opportunes, conciliant les situations réelles et l'universalité d'application suffisante pour aborder les domaines d'intérêt pratique et industriel des ailettes.

Dans une première étape, la construction du modèle proposé et reposant sur cette description physique et thermique est traduit mathématiquement en discordance avec les simplifications classiques.

On est en présence de la résolution d'équations non linéaires, que soit pour l'équation gouvernante ou pour les conditions aux limites. Il est entendu que les méthodes analytiques ou semi-analytiques ne pouvant résoudre ce problème complexe. Bien qu'on poursuive encore la déduction de méthodes analytiques pour des cas de non-linéarité restreinte, à l'exemple récent de Cai et Zhang [61] en conduction pure, seules les solutions approximatives ou celles du calcul numérique conduisent à des résultats.

Dans la large gamme des premières approches [60], des propositions continuent d'être publiées [62], [63]. Pour les secondes, il est observable que la généralité accordée aux programmes basés sur les éléments finis, sur les différences finies ou sur des méthodes hybrides pose un problème de choix devant la profusion des schémas. Pour des problèmes spécifiques non linéaires, le code est en général inexistant.

La seconde étape consiste donc à résoudre numériquement le problème formulé. N'importe quel schéma peut être utilisé à condition de respecter les éventuels critères de stabilité. Ceci conduit naturellement au choix d'une discrétisation implicite à trois niveaux de temps pour les équations non linéaires. Cette approche est appliquée à notre modèle conducto-convectif, avec une analyse spécifique sur la convergence. Cependant, la difficulté de traduire le schéma dans un code de calcul, le volume des itérations et l'exigence de capacités de stockage, nous ont contraints à s'orienter vers un schéma de nature explicite tout en bénéficiant de la formulation initiale.

Les différences finies exponentielles, développées dans la présente étude, offre une alternative qui permet de contourner les inconvénients cités au prix d'une perte de la stabilité de façon générale.

## 4.1 EQUATIONS GOUVERNANTES

### 4.1.1 CRITIQUE SUR LA MODELISATION

#### • Aspect dimensionnel

La nomenclature relative aux dimensions d'études des ailettes longitudinales est la suivante (*figure 4.1*) :

- Modèle 1D selon la coordonnée x (ou transversale).
- Modèle 2D suivant l'axe x et l'axe z.
- Modèle 3D suivant les trois axes x, z et y (ou longitudinale).

Il y a un accord de tous les auteurs [36],[64], que le transfert de chaleur s'effectue essentiellement suivant l'axe x (1D), hypothèse fondamentale dans la quasi-totalité des études sur les ailettes. Dans le présent modèle, on considère évidemment le transfert suivant cet axe.

La plupart des auteurs réfutant le modèle unidimensionnel précédent s'intéressent aussi aux transferts suivant l'axe z, et considèrent le modèle à 2D. Les conclusions des études [65],[66],[67] et celles citées en introduction soulignent que le recours à 2D n'est nécessaire que si l'ailette est analysée suivant un nombre de Biot élevé. Dans le chapitre III, nous avons montré que les facteurs prédominants sont au nombre de trois. Il est évident d'une part que la condition primordiale  $\frac{B}{\sigma^2} \leq \left( \frac{B}{\sigma^2} \right)_{cr}$  est respectée dans les applications.

D'autre part, et même dans ce cas, l'influence de la convection à l'extrémité ainsi que la dissymétrie des échanges n'est pas négligeable. Par conséquent, les transferts dans cette direction seront ignorés, sous réserve d'une prise en compte des deux derniers facteurs.

En ce qui concerne l'axe y, les avis sont plutôt controversés. Dans [36], par exemple, les auteurs indiquent qu'un consensus existe : « les variations de la température suivant cet axe peuvent être ignorées ». Par contre, dans [68], et pour un modèle simple, la distribution des températures dépend de la condition à la base de l'ailette et de la longueur de celle-ci suivant cet axe. On ignore, toutefois cet effet sur l'efficacité.

Dans l'opinion de l'auteur, l'écoulement d'un fluide dans le tube ne peut être considéré toujours isotherme longitudinalement (à la restriction d'être calorifugé, ce qui d'ailleurs ne nécessite plus dans ce cas l'utilisation des ailettes). Aussi, on posera la condition limite d'une manière générale non constante. Le modèle est rendu donc 2D et le programme ultérieur développé se base sur cet aspect, en attente de résultats.

#### • Epaisseur transversale

Les variations de section suivant l'axe  $y$  ne sont pas conformes aux usages pratiques, bien qu'on puisse envisager l'ailette non uniforme selon cet axe (*figure 4.2*) avec un gain de masse.

Pour l'axe  $x$ , quelques auteurs se sont intéressés à un profil variable en relation à l'optimisation de poids de matière utilisée [64]. En accord avec le critère de Schmidt proposé pour l'optimisation géométrique, Ahmadi et Razani [69] dérivent une expression pour la section droite optimale dépendante des nombres de Biot et de génération. Pour cette minimisation du volume de l'ailette, cette section est trouvée non uniforme. L'analogie à cette étude pour les ailettes annulaires est menée par Mikk [70] où la masse idéale diffère légèrement de la masse d'une ailette de profil triangulaire. Mori et al. [71] ont recommandé un profil non uniforme pour les ailettes utilisées dans la condensation des vapeurs. De même, Sarma et Charpy [72] ont montré analytiquement que le profil de l'ailette a une influence notable sur la distribution des températures et par conséquent sur l'épaisseur du film de condensation.

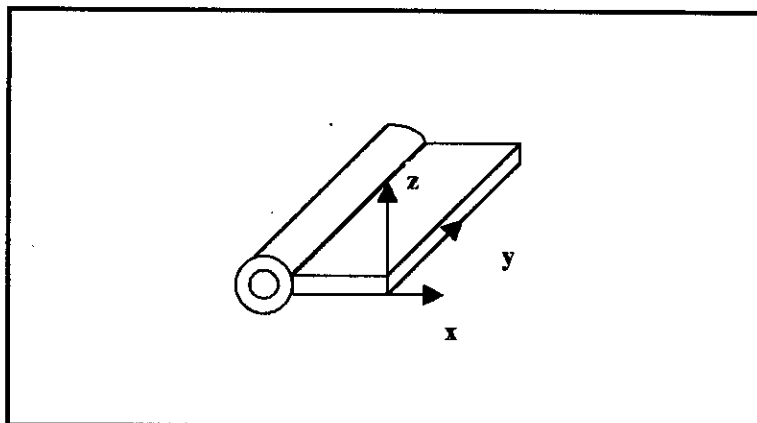
Dans notre modèle, une expression [37] est retenue pour simuler trois profils importants.

#### • Aspect régime instationnaire

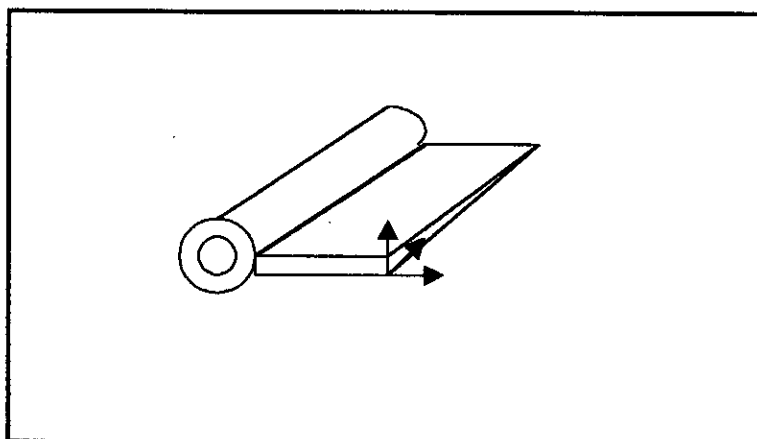
L'objectif du développement d'un modèle de la thermique d'une ailette est double :

- l'obtention de la distribution des températures,
- le calcul de l'efficacité.

Cette dernière n'est accessible qu'à partir des températures et n'est définie que si le régime est permanent, asymptote des états instationnaires. Le passage obligé par la distribution des températures est alors balisé par un critère. Du point de vue de méthode, le régime transitoire constitue une technique d'intégration. Du point de vue de calcul des distributions de températures, le modèle sera écrit en transitoire pour simuler l'évolution de ces grandeurs.



**Figure 4.1.** Conventions établies pour les coordonnées de l'ailette longitudinale.



**Figure 4.2.** Schéma de conception d'une ailette de section longitudinale non uniforme.

### • Paramètres thermophysiques

En ce qui concerne la conductivité thermique, nous avons montré au chapitre II que ce paramètre était dépendant de la température. Si dans le cas développé, il était aisé d'accéder à une conductivité optimale lors d'une variation linéaire avec la température, les calculs deviennent lourds en considérant une dépendance non linéaire. Par contre, la capacité thermique varie linéairement avec la température de façon quasi-insignifiante [73].

L'hypothèse d'un coefficient d'échange constant est fortement critiquable. La recherche d'une précision de ce paramètre est fondamentale, sachant qu'il contribue largement à la détermination de l'efficacité de l'ailette et que la distribution des températures est influencée de manière essentielle par ce coefficient. L'examen de la littérature spécifique relevée au *tableau 1.1*, montre sa relation avec la position et la température. Hu et Jacobi [18] ont trouvé un écart sensible entre l'efficacité déterminée expérimentalement et celle prédite classiquement. D'autres auteurs, tels Hegggs et Stone [74], Razelos et Imre [22] ont mis en évidence l'effet d'un coefficient non uniforme. Snider et Kraus [75] introduisent une fonction-poids, dérivée analytiquement pour tenir compte de cette variation avec la position.

Il est donc indispensable d'incorporer une relation représentative dans le modèle.

### • Source interne

Dans des situations particulières, l'ailette produit de la chaleur en addition de son rôle de support du transfert thermique. Sans restreindre la généralité, accordée à ce modèle, on peut adopter une dépendance linéaire avec la température en cas de génération interne de chaleur par effet Joule.

## 4.1.2 HYPOTHÈSES DU MODELE

Compte tenu de ce qui précède, les hypothèses de base du modèle seront :

- (a) Les transferts sont bidimensionnels et non permanents.
- (b) Les propriétés thermophysiques : la conductivité thermique et la chaleur spécifique évoluent selon la température.
- (c) Le coefficient d'échange n'est pas constant, il est fonction à la fois de la position et de la température.
- (d) L'ailette est une source interne de chaleur de puissance variable avec la température.
- (e) Les transferts de convection à l'extrémité ne sont pas négligés.
- (f) La température à la base de l'ailette varie suivant l'axe  $y$ .



- (g) L'épaisseur de l'ailette est variable transversalement et uniforme longitudinalement.

Par contre, les hypothèses simplificatrices habituelles suivantes sont maintenues :

- (h) Les effets de la dimension  $z$  sont négligés  $\frac{B}{\sigma^2} \leq \left(\frac{B}{\sigma^2}\right)_{cr}$ .
- (i) La température ambiante est uniforme et constante.
- (j) La résistance de contact entre l'ailette et la paroi mère est nulle.
- (k) L'espace entre deux ailettes consécutives n'est pas très court et l'épaisseur du tube support n'est pas très mince [51].
- (l) Les transferts thermiques radiatifs et par changement de phase ne sont pas pris en compte.

#### 4.1.3 EQUATION DE L'ENERGIE

La *figure 4.3* représente le schéma d'une ailette convective, longitudinale et à section uniforme suivant l'axe  $y$  et quelconque suivant  $x$ . L'élément de volume nécessaire aux calculs est aussi montré.

En accord avec l'épaisseur transversale adoptée, on peut écrire :

$$w(x) = (w_0 - w_e) [1 - x/L]^n + w_e \quad (4.1)$$

avec  $n = 0, 1, 2$  respectivement pour les profils rectangulaire, triangulaire (trapézoïdal) et parabolique concave.

Les caractéristiques géométriques sont reportées au *tableau 4.1*.

L'équation du transfert thermique peut être obtenue par établissement d'un bilan énergétique sur le volume élémentaire  $dV$ , soit en modes :

$$\{\text{conduction nette}\} + \{\text{génération}\} - \{\text{convection}\} = \{\text{accumulation}\} \quad (4.2)$$

A partir de ce bilan énergétique sous les hypothèses énumérées, l'équation quasi-linéaire de l'énergie, s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda a(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx + dS(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy + q dV - \alpha dA T = C dV \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3)$$

où les notations conventionnelles sont définies dans la nomenclature, avec  $T$  la température de l'ailette considérée ici à partir de l'ambiante  $T_a$ , et  $dA$  représente la surface totale d'échange de l'ailette (sur les deux faces).

Pour compléter la description du problème, et conformément à l'hypothèse (f), les conditions initiale et aux limites les plus fréquemment

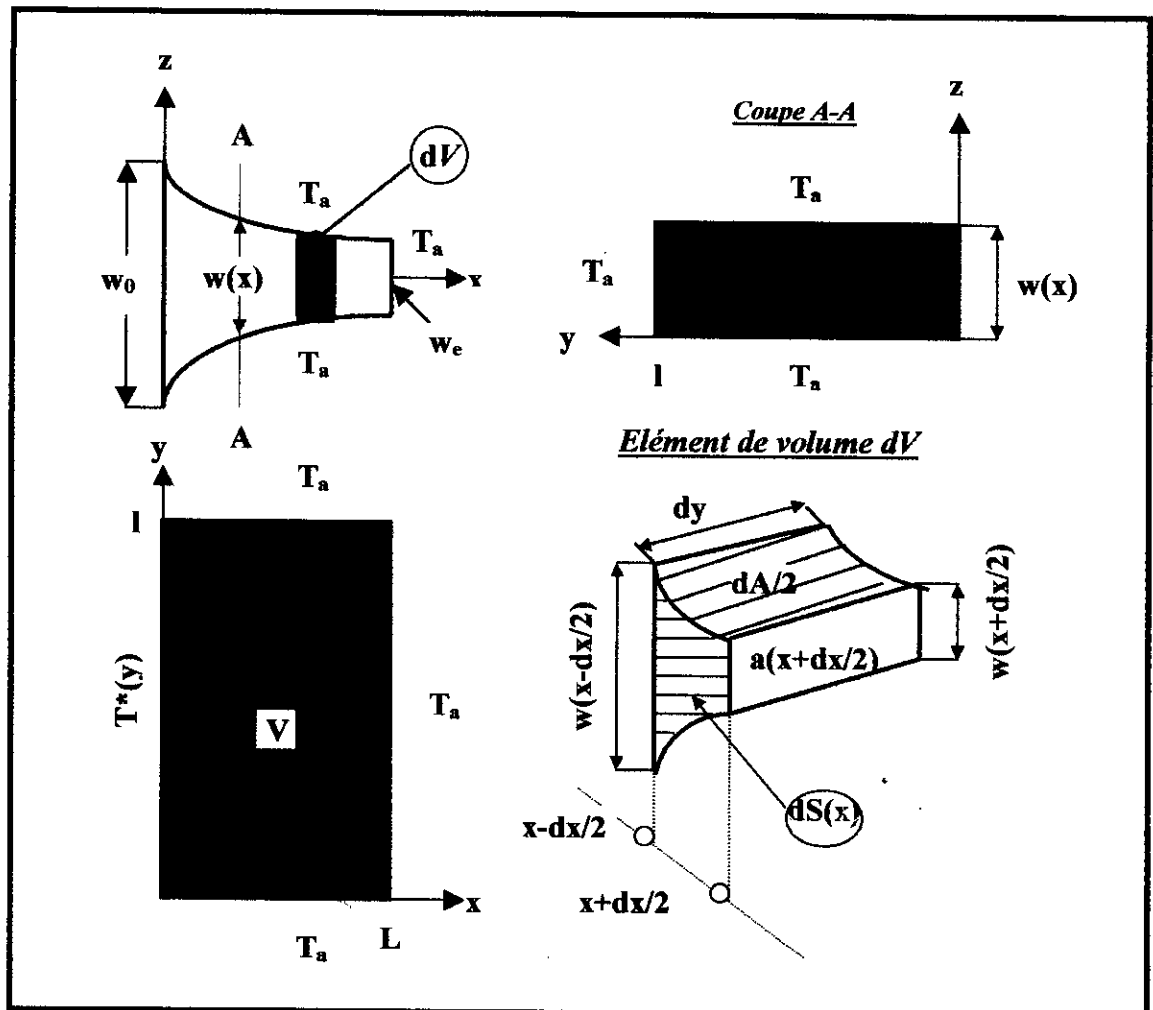


Figure 4.3. Schéma représentatif du modèle physique de l'ailette longitudinale.

Tableau 4.1. Caractéristiques géométriques sous forme discrétisées (n = 0, 1, 2).

caractéristique	forme discrétisée	
	i = 0, 1, ..., N-1	i = N
$a(x) = [ (w_0 - w_e)(1-x/L)^n + w_e ] dy$	$a(i) = m [ (w_0 - w_e)(1-i/N)^n + w_e ]$	$a^* = mw_e$
$dS(x) = [ (w_0 - w_e)(1-x/L)^n + w_e ] dx$	$dS(i) = m [ (w_0 - w_e)(1-i/N)^n + w_e ]$	$dS^* = Nm(w_0 - w_e)[(1 - Nm/2 + 1/2N)^{n+1} - (1 - Nm/2)^{n+1}] / (n+1) + w_e m/2$
$dA = 2 \left\{ 1 + \left[ \frac{n(w_0 - w_e)}{(1-x/L)^{n-1}/2L} \right]^2 \right\}^{0.5} dx dy$	$dA(i) = 2m^2 \left\{ 1 + \left[ \frac{n(w_0 - w_e)}{(1-i/N)^{n-1}/2Nm} \right]^2 \right\}^{0.5}$	$dA^* = 2m^2 \left\{ 1 + \left[ \frac{n(w_0 - w_e)}{(1/4N)^{n-1}/2Nm} \right]^2 \right\}^{0.5}$
$dV = [ (w_0 - w_e)(1-x/L)^n + w_e ] dx dy$	$dV(i) = m^2 [ (w_0 - w_e)(1-i/N)^n + w_e ]$	$dV^* = Nm^2(w_0 - w_e)[(1 - Nm/2 + 1/2N)^{n+1} - (1 - Nm/2)^{n+1}] / (n+1) + w_e m/2$

rencontrées sont retenues. Les non-linéarités issues des propriétés thermophysiques sont conservées.

• Condition initiale :

$$T = 0 \quad \text{à } t = 0 \quad (4.4)$$

• Conditions aux limites :

$$T = T^*(y) \quad \text{en } x=0 \quad (4.5)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T \quad \text{en } x=L \quad (4.6)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha T \quad \text{en } y=0 \quad (4.7)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T \quad \text{en } y=l \quad (4.8)$$

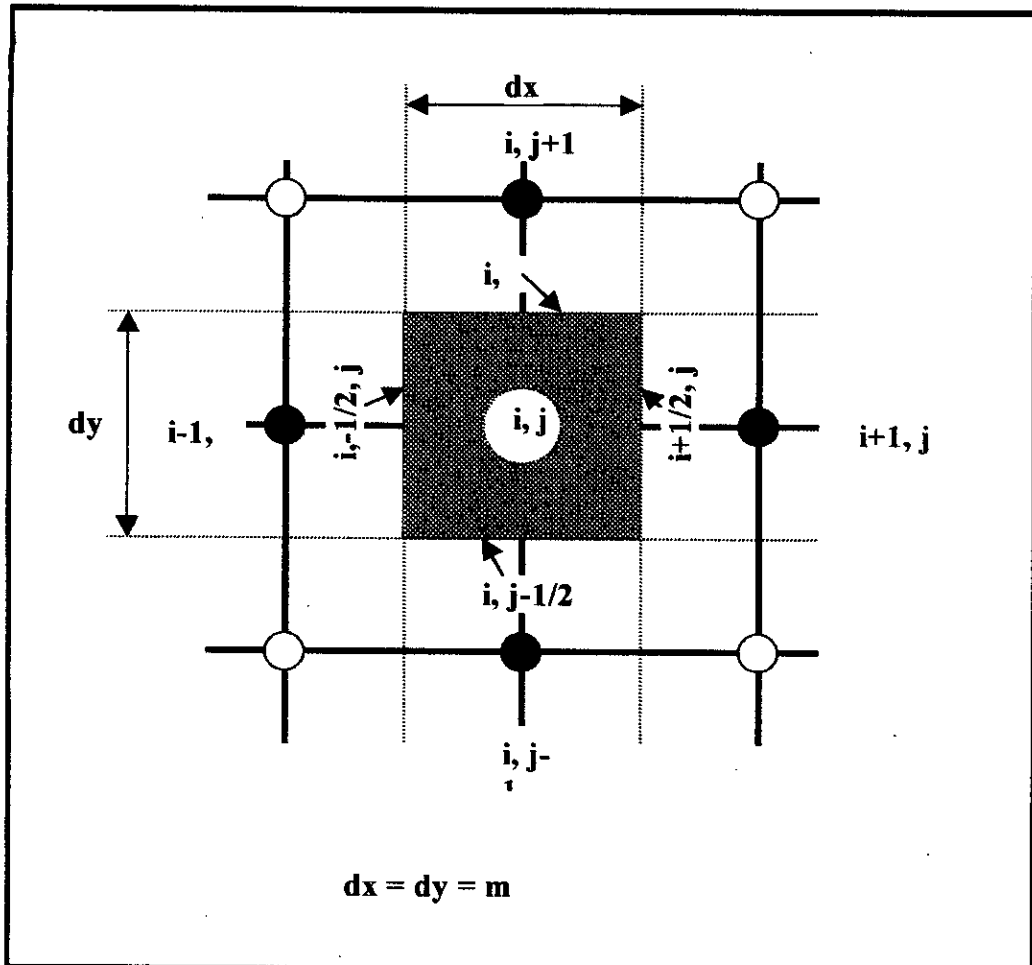
#### 4.1.4 DISCRETISATION GÉOMÉTRIQUE

En général, le choix d'une méthode numérique est lié à la complexité dimensionnelle du problème ainsi qu'aux conditions aux limites.

Les éléments finis se basant sur une formulation intégrale permettent une résolution aisée vis à vis de la géométrie [76]. Pour les modèles couplés de transfert de chaleur et d'écoulement de fluide, les concepts de la méthode sont associés à ceux des volumes finis, pour produire des procédés hybrides, en continu développement [77]. Cependant, la simplicité apparente des différences finies est mise en œuvre, pour ce cas non linéaire avec un maillage carré, d'autant plus que la loi de variation du coefficient d'échange est supposée connue.

En vue de la résolution par différences finies de l'équation (4.3) avec les conditions (4.4) – (4.8), le domaine de calcul est couvert par un réseau de points pour lesquels les paramètres thermophysiques sont fixés et où les températures sont à calculer. Pour un nœud interne, le procédé de la discrétisation est suivant la *figure 4.4*.

Les éléments géométriques sont d'abord remplacés par leurs expressions discrétisées, (*tableau 4.1*). Ensuite, des modifications de l'écriture de l'équation (4.3) et spécifiques aux nœuds situés sur les frontières sont reportées au *tableau 4.2*, terme par terme, pour la conduction, production de chaleur, convection et enfin accumulation. Un traitement particulier est ainsi



*Figure 4.4.* Schéma de discrétisation d'un nœud intérieur.

Tableau 4.2. Equation de l'énergie et ses équivalentes pour les nœuds aux frontières.

Type du nœud, position	Schéma	Termes de conduction	Terme de production	Terme de convection	Terme d'accumulation.
Nœud intérieur $i=1, \dots, N-1$ $j=1, \dots, M-1$		$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \alpha(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx$ $dS(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy$	$qdV$	$-\alpha dA \cdot T$	$CdV \frac{\partial T}{\partial t}$
$i=0$ $j=0, \dots, M$		Température prescrite $T^*(y)$			
$i=1, \dots, N-1$ $j=0$		$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \alpha(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx$ $\lambda dS(x) \frac{\partial T}{\partial y}$	$qdV/2$	$-\alpha [dS + dA/2] T$	$CdV \frac{\partial T}{\partial t}$
$i=1, \dots, N-1$ $j=M$		$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \alpha(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx$ $-\lambda dS(x) \frac{\partial T}{\partial y}$	$qdV/2$	$-\alpha [dS + dA/2] T$	$CdV \frac{\partial T}{\partial t}$
$i=N$ $j=1, \dots, M-1$		$-\lambda \alpha^*(x) \frac{\partial T}{\partial x}$ $dS^*(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy$	$qdV^*$	$-\alpha [a^*(x) + dA^*] T$	$CdV^* \frac{\partial T}{\partial t}$
$i=N$ $j=0$		$-\lambda \alpha^*(x) \frac{\partial T}{\partial x}$ $\lambda dS^*(x) \frac{\partial T}{\partial y}$	$qdV^*/2$	$-\alpha [a^*(x)/2 + dA^*/2 + dS^*] T$	$CdV^* \frac{\partial T}{\partial t}$
$i=N$ $j=M$		$-\lambda \alpha^*(x) \frac{\partial T}{\partial x}$ $-\lambda dS^*(x) \frac{\partial T}{\partial y}$	$qdV^*/2$	$-\alpha [a^*(x)/2 + dA^*/2 + dS^*] T$	$CdV^* \frac{\partial T}{\partial t}$

appliqué selon le type de nœud limite. Lorsque le nœud est de position N, la section de transfert équivalente est notée par un astérisque.

#### 4.1.5 EFFICACITE

L'efficacité compare essentiellement la performance thermique d'échange d'une ailette en rapport à celle présentant une conductivité infinie, par conséquent et de façon inspirée de celle exprimée dans [78], nous la définissons pour notre modèle par la relation suivante :

$$\eta = \frac{\iint_A \alpha T dA - \iiint_V q dV}{\iint_A \alpha T^* dA - \iiint_V q dV} \quad (4.9)$$

Elle se présente comme le rapport du flux effectivement échangé par les surfaces de convection, y compris les surfaces latérales et d'extrémité, sur le même flux calculé suivant l'ailette isotherme et à température de la base.

#### 4.2 SCHÉMA IMPLICITE

Plusieurs possibilités de discrétisation de l'équation (4.3) se présentent avec deux niveaux du temps [79]. Elles diffèrent de la manière d'évaluer les dérivées partielles, que ce soit pour les termes de temps ou de l'espace. Le schéma numérique résultant est spécifié suivant le niveau de temps considéré pour la température. Thibault [80] effectue une comparaison de plusieurs classes et recommande à partir d'une expérimentation numérique, une discrétisation en forme ADI.

La stabilité est une condition remplie pour les schémas implicites linéaires [81], et conduisent toutefois à des systèmes d'équations à chaque étape de calcul. En cas de non-linéarité, le processus itératif s'allonge.

De ce fait, la procédure de Lees [82] est attrayante pour la résolution numérique du modèle présenté, en ce sens que l'approximation des températures suivant trois niveaux de temps, permet une tenue sans itérations des non-linéarités.

Dans ce travail, nous développerons cette procédure pour les équations (4.3) à (4.8) représentant la thermique non classique de l'ailette longitudinale.

Le schéma aux différences finies est examiné alors suivant la consistance et la stabilité, pour que la convergence soit assurée.

#### 4.2.1 DISCRETISATION POUR UN NŒUD INTERIEUR

En choisissant donc, un schéma totalement implicite, l'équation (4.3) est remplacée par l'approximation en trois niveaux de temps, soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{dVC}(T_{i,j}^h) \frac{\delta_\tau T_{i,j}^h}{\Delta\tau} = & \frac{\delta_x \left[ \lambda(T_{i,j}^h) \alpha \delta_x \hat{T}_{i,j}^h \right]}{\Delta x} + \frac{\delta_y \left[ \lambda(T_{i,j}^h) \mathbf{dS} \delta_y \hat{T}_{i,j}^h \right]}{\Delta y} \\ & + q(T_{i,j}^h) \mathbf{dV} - \alpha_{i,j}(T_{i,j}^h) \mathbf{dA} \hat{T}_{i,j}^h \end{aligned} \quad (4.10)$$

En développant la température au nœud de discrétisation suivant une moyenne arithmétique et en remarquant la possibilité d'utilisation pour le terme temporel d'une différence centrale, l'équation précédente sera :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \mathbf{dV} \frac{T^{h+1} - T^{h-1}}{2\Delta\tau} = & \frac{\delta_x \left[ \lambda \alpha \delta_x (T^{h+1} + T^h + T^{h-1}) \right]}{3\Delta x} \\ & + \frac{\delta_y \left[ \lambda \mathbf{dS} \delta_y (T^{h+1} + T^h + T^{h-1}) \right]}{3\Delta y} \\ & + q \mathbf{dV} - \frac{\alpha}{3} \mathbf{dA} (T^{h+1} + T^h + T^{h-1}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

laquelle arrangée selon l'évolution des températures au nœud, se présente comme suit :

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{2\Delta\tau}{3mC\mathbf{dV}} (\delta_x [\lambda \alpha \delta_x] + \delta_y [\lambda \mathbf{dS} \delta_y]) + \frac{2\Delta\tau}{3C\mathbf{dV}} \alpha \mathbf{dA} \right\} T^{h+1} \\ & - \left\{ \frac{2\Delta\tau}{3mC\mathbf{dV}} (\delta_x [\lambda \alpha \delta_x] + \delta_y [\lambda \mathbf{dS} \delta_y]) - \frac{2\Delta\tau}{3C\mathbf{dV}} \alpha \mathbf{dA} \right\} T^h \\ & - \left\{ 1 + \frac{2\Delta\tau}{3mC\mathbf{dV}} (\delta_x [\lambda \alpha \delta_x] + \delta_y [\lambda \mathbf{dS} \delta_y]) - \frac{2\Delta\tau}{3C\mathbf{dV}} \alpha \mathbf{dA} \right\} T^{h-1} \\ & - \frac{2q\Delta\tau}{C} = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

ou sous forme abrégée :

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - r(\hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y) + s \right\} T^{h+1} \\ & - \left\{ r(\hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y) - s \right\} T^h \\ & - \left\{ 1 + r(\hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y) - s \right\} T^{h-1} \\ & - \gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.12b)$$



avec les notations relatives à cette écriture, portées au *tableau 4.3*.

Il est à présent possible d'ajouter au premier membre de l'équation (4.12b) les quantités :

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ r^2 \left( \hat{\delta}_x \hat{\delta}_y \right) - s r \hat{\delta}_y \right\} T^{h+1} \\
 \text{et} \\
 & - \left\{ r^2 \left( \hat{\delta}_x \hat{\delta}_y \right) - s r \hat{\delta}_y \right\} T^{h-1}
 \end{aligned} \tag{4.12c}$$

qui ne sont pas rigoureusement égaux. Cette addition n'altère pas la précision des calculs, mais par contre simplifie considérablement la structure de l'équation (4.12b). En effet, on obtient une factorisation :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left( \mathbf{1} - r \hat{\delta}_x + s \right) \left( \mathbf{1} - r \hat{\delta}_y \right) \right\} T^{h+1} \\
 & - \left\{ r \left( \hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y \right) - s \right\} T^h \\
 & - \left\{ \left( \mathbf{1} + r \hat{\delta}_x - s \right) \left( \mathbf{1} + r \hat{\delta}_y \right) \right\} T^{h-1} \\
 & - \gamma = 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

En ayant en vue une résolution alternée, l'équation (4.13) peut être scindée en deux en utilisant un temps intermédiaire  $h^*$  entre  $h+1$  et  $h$ , soit :

$$\left\{ \mathbf{1} - r \hat{\delta}_x + s \right\} T^{h^*} = \left\{ r \left( \hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y \right) - s \right\} T^h + \left\{ \mathbf{1} + r \left( \hat{\delta}_x + 2 \hat{\delta}_y \right) - s \right\} T^{h-1} + \gamma \tag{4.14a}$$

$$\text{et : } \left\{ \mathbf{1} - r \hat{\delta}_y \right\} T^{h+1} = T^{h^*} - r \hat{\delta}_y T^{h-1} \tag{4.14b}$$

A ces formules (4.14a) et (4.14b) correspondent leurs homologues pour les nœuds de frontière, consignées dans le *tableau 4.4*.

Tableau 4.3. Nomenclature spécifique à la discrétisation implicite du modèle étendu.

notation	définition	unité	notation	définition	unité
$\lambda_x^+$	$\lambda (T_{i+1/2,j}^h) = \lambda [(T_{i+1,j}^h + T_{i,j}^h) / 2]$	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	$a_x^+$	$a(i+1/2,j)$	$\text{m}^2$
$\lambda_x^-$	$\lambda (T_{i-1/2,j}^h) = \lambda [(T_{i-1,j}^h + T_{i,j}^h) / 2]$	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	$a_x^-$	$a(i-1/2,j)$	$\text{m}^2$
$\lambda_y^+$	$\lambda (T_{i,j+1/2}^h) = \lambda [(T_{i,j+1}^h + T_{i,j}^h) / 2]$	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	$dS_y^+$	$dS(i,j+1/2)$	$\text{m}^2$
$\lambda_y^-$	$\lambda (T_{i,j-1/2}^h) = \lambda [(T_{i,j-1}^h + T_{i,j}^h) / 2]$	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	$dS_y^-$	$dS(i,j-1/2)$	$\text{m}^2$
$\omega_x^+$	$T_{i+1,j}^h - T_{i,j}^h$	K	$K_x^+$	$\lambda_x^+ a_x^+$	$\text{WmK}^{-1}$
$\omega_x^-$	$T_{i-1,j}^h - T_{i,j}^h$	K	$K_x^-$	$\lambda_x^- a_x^-$	$\text{WmK}^{-1}$
$\omega_y^+$	$T_{i,j+1}^h - T_{i,j}^h$	K	$K_y^+$	$\lambda_y^+ dS_y^+$	$\text{WmK}^{-1}$
$\omega_y^-$	$T_{i,j-1}^h - T_{i,j}^h$	K	$K_y^-$	$\lambda_y^- dS_y^-$	$\text{WmK}^{-1}$
$\Omega_x^+$	$T_{i+1,j}^{h-1} - T_{i,j}^{h-1}$	K	r	$2\Delta\tau / 3mCdV$	$\text{KW}^{-1}\text{m}^{-1}$
$\Omega_x^-$	$T_{i-1,j}^{h-1} - T_{i,j}^{h-1}$	K	$r^*$	$rdV/dV^*$	$\text{KW}^{-1}\text{m}^{-1}$
$\Omega_y^+$	$T_{i,j+1}^{h-1} - T_{i,j}^{h-1}$	K	s	$2\Delta\tau\alpha dA/3CdV$	
$\Omega_y^-$	$T_{i,j-1}^{h-1} - T_{i,j}^{h-1}$	K	$s_1$	$2\Delta\tau\alpha [dA + 2dS] / 3CdV$	
$\delta_x^+(T_{i,j})$	$K_x^+(T_{i+1,j} - T_{i,j})$	Wm	$s_2$	$2\Delta\tau\alpha [dA^* + a^*] / 3CdV^*$	
$\delta_x^-(T_{i,j})$	$-K_x^-(T_{i-1,j} - T_{i,j})$	Wm	$s_3$	$2\Delta\tau\alpha [dA^* + a^* + 2dS^*] / 3CdV^*$	
$\delta_y^+(T_{i,j})$	$K_y^+(T_{i,j+1} - T_{i,j})$	Wm	$\hat{\delta}_x$	$\delta_x(\lambda_x a \delta_x)$	$\text{WmK}^{-1}$
$\delta_y^-(T_{i,j})$	$-K_y^-(T_{i,j-1} - T_{i,j})$	Wm	$\hat{\delta}_y$	$\delta_y(\lambda_y dS \delta_y)$	$\text{WmK}^{-1}$
$\delta_x(T_{i,j})$	$(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j})$	K	$\gamma$	$2q\Delta\tau / C$	K
$\delta_y(T_{i,j})$	$(T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1})$	K			

Tableau 4.4. Equations équivalentes à (4.14a) et (4.14b) pour les nœuds frontières.

type de nœud	équations type (4.14a)	équations type (4.14b)
intérieur $i = 1, \dots, N-1$ $j = 1, \dots, M-1$	$\{1 - r\hat{\delta}_x + s\} T^h = \{r(\hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y) - s\} T^h + \{1 + r(\hat{\delta}_x + 2\hat{\delta}_y) - s\} T^{h-1} + \gamma$	$\{1 - r\hat{\delta}_y\} T^{h+1} = T^{h*} - r\hat{\delta}_y T^{h-1}$
$i = 1, \dots, N-1$ $j = 0$	$\{1 - r\hat{\delta}_x + s_1\} T^h = \{r(\hat{\delta}_x + 2\hat{\delta}_y^+) - s_1\} T^h + \{1 + r(\hat{\delta}_x + 4\hat{\delta}_y^+) - s_1\} T^{h-1} + \gamma$	$\{1 - 2r\hat{\delta}_y^+\} T^{h+1} = T^{h*} - 2r\hat{\delta}_y^+ T^{h-1}$
$i = 1, \dots, N-1$ $j = M$	$\{1 - r\hat{\delta}_x + s_1\} T^h = \{r(\hat{\delta}_x - 2\hat{\delta}_y^-) - s_1\} T^h + \{1 + r(\hat{\delta}_x - 4\hat{\delta}_y^-) - s_1\} T^{h-1} + \gamma$	$\{1 + 2r\hat{\delta}_y^-\} T^{h+1} = T^{h*} + 2r\hat{\delta}_y^- T^{h-1}$
$i = N$ $j = 1, \dots, M-1$	$\{1 - r^*\hat{\delta}_x + s_2\} T^h = \{r^*(-\hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y) - s_2\} T^h + \{1 + r^*(-\hat{\delta}_x + 2\hat{\delta}_y) - s_2\} T^{h-1} + \gamma$	$\{1 - r^*\hat{\delta}_y\} T^{h+1} = T^{h*} - r^*\hat{\delta}_y T^{h-1}$
$i = N$ $j = 0$	$\{1 - r^*\hat{\delta}_x + s_3\} T^h = \{r^*(-\hat{\delta}_x + 2\hat{\delta}_y^+) - s_3\} T^h + \{1 + r^*(-\hat{\delta}_x + 4\hat{\delta}_y^+) - s_3\} T^{h-1} + \gamma$	$\{1 - 2r^*\hat{\delta}_y^+\} T^{h+1} = T^{h*} - 2r^*\hat{\delta}_y^+ T^{h-1}$
$i = N$ $j = M$	$\{1 - r^*\hat{\delta}_x + s_3\} T^h = \{r^*(-\hat{\delta}_x - 2\hat{\delta}_y^-) - s_3\} T^h + \{1 + r^*(-\hat{\delta}_x - 4\hat{\delta}_y^-) - s_3\} T^{h-1} + \gamma$	$\{1 + 2r^*\hat{\delta}_y^-\} T^{h+1} = T^{h*} + 2r^*\hat{\delta}_y^- T^{h-1}$

#### 4.2.2 MISE EN FORME POUR PROGRAMMATION

Il est nécessaire pour la programmation de discrétiser les opérateurs d'espace contenus dans les équations (4.14a) et (4.14b).

Le membre gauche de (4.14a) est ainsi :

$$MG_a = -rK_x^- T_{i-1,j}^{h*} + [1+s+r(K_x^+ + K_x^-)] T_{i,j}^{h*} - rK_x^+ T_{i+1,j}^{h*} \quad (4.15a)$$

De même manière, le membre de droite de l'éq. (4.14a) considérée devient :

$$\begin{aligned} MD_a = & rK_x^+ (\omega_x^+ + \Omega_x^+) + rK_x^- (\omega_x^- + \Omega_x^-) \\ & + rK_y^+ (\omega_y^+ + 2\Omega_y^+) + rK_y^- (\omega_y^- + 2\Omega_y^-) \\ & - sT_{i,j}^h + (1-s)T_{i,j}^{h+1} + \gamma \end{aligned} \quad (4.15b)$$

En résumé, l'équation (4.14a) suivant (4.15a) et (4.15b) est de forme :

$$a_x T_{i-1,j}^{h*} + b_x T_{i,j}^{h*} + c_x T_{i+1,j}^{h*} = d_x \quad (4.15c)$$

De façon similaire, l'équation (4.14b) est développée, on obtient :

$$a_y T_{i,j-1}^{h+1} + b_y T_{i,j}^{h+1} + c_y T_{i,j+1}^{h+1} = d_y \quad (4.16)$$

Les systèmes à résoudre sont schématiquement représentées dans la *figure 4.5*. L'algorithme de Thomas pourra être utilisé lors du balayage ligne par ligne pour l'instant  $h^*$  connaissant les températures aux instants  $h$  et  $h-1$ . Le procédé est poursuivi colonne par colonne pour l'instant final  $h+1$ , sachant les résultats précédents de l'instant  $h^*$ .

On indique dans les *tableaux 4.5 et 4.6*, les coefficients correspondants aux systèmes (4.15c) et (4.16) pour les nœuds frontières.

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_x & b_x & c_x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \vdots \\ T_{i-1,j}^{h^*} \\ T_{i,j}^{h^*} \\ T_{i+1,j}^{h^*} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ d_x \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_y & b_y & c_y \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \vdots \\ T_{i,j-1}^{h^{*+1}} \\ T_{i,j}^{h^{*+1}} \\ T_{i,j+1}^{h^{*+1}} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ d_y \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Figure 4.5. Schéma des systèmes à résoudre ligne j et colonne i suivant schéma implicite, équations (4.15c) et (4.16).

Tableau 4.5. Coefficients des systèmes type (4.15c) pour les nœuds frontières.

type de nœud	$a_x$	$b_x$	$c_x$	$d_x$
intérieur $i = 1, \dots, N-1$ $j = 1, \dots, M-1$	$-rK_x^-$	$1 + r(K_x^+ + K_x^-) + s$	$-rK_x^+$	$rK_x^+(\omega_x^+ + \Omega_x^+) + rK_x^-(\omega_x^- + \Omega_x^-) + rK_y^+(\omega_y^+ + 2\Omega_y^+) + rK_y^-(\omega_y^- + 2\Omega_y^-) - sT_{ij}^h + (1-s)T_{ij}^{h-1} + \gamma$
$i = 1, \dots, N-1$ $j = 0$	$-rK_x^-$	$1 + r(K_x^+ + K_x^-) + s_1$	$-rK_x^+$	$rK_x^+(\omega_x^+ + \Omega_x^+) + rK_x^-(\omega_x^- + \Omega_x^-) + rK_y^+(2\omega_y^+ + 4\Omega_y^+) - s_1T_{ij}^h + (1-s_1)T_{ij}^{h-1} + \gamma$
$i = 1, \dots, N-1$ $j = M$	$-rK_x^-$	$1 + r(K_x^+ + K_x^-) + s_1$	$-rK_x^+$	$rK_x^+(\omega_x^+ + \Omega_x^+) + rK_x^-(\omega_x^- + \Omega_x^-) + rK_y^-(2\omega_y^- + 4\Omega_y^-) - s_1T_{ij}^h + (1-s_1)T_{ij}^{h-1} + \gamma$
$i = N$ $j = 1, \dots, M-1$	$-r^*K_x^-$	$1 + r^*K_x^- + s_2$	0	$r^*K_x^-(\omega_x^- + \Omega_x^-) + r^*K_y^+(\omega_y^+ + 2\Omega_y^+) + r^*K_y^-(\omega_y^- + 2\Omega_y^-) - s_2T_{ij}^h + (1-s_2)T_{ij}^{h-1} + \gamma$
$i = N$ $j = 0$	$-r^*K_x^-$	$1 + r^*K_x^- + s_3$	0	$r^*K_x^-(\omega_x^- + \Omega_x^-) + r^*K_y^+(2\omega_y^+ + 4\Omega_y^+) - s_3T_{ij}^h + (1-s_3)T_{ij}^{h-1} + \gamma$
$i = N$ $j = M$	$-r^*K_x^-$	$1 + r^*K_x^- + s_3$	0	$r^*K_x^-(\omega_x^- + \Omega_x^-) + r^*K_y^-(2\omega_y^- + 4\Omega_y^-) - s_3T_{ij}^h + (1-s_3)T_{ij}^{h-1} + \gamma$

Tableau 4.6. Coefficients des systèmes type (4.16) pour les nœuds frontières.

type de nœud	$a_y$	$b_y$	$c_y$	$d_y$
intérieur $i = 1, \dots, N-1$ $j = 1, \dots, M-1$	$-r K_y^-$	$1 + r(K_y^+ + K_y^-)$	$-r K_y^+$	$-r^* K_y^+ Q_y^+ - r^* K_y^- Q_y^- + T_{i,j}^h$
$i = 1, \dots, N-1$ $j = 0$	.	$1 + 2r K_y^+$	$-2r K_y^+$	$-2r K_y^+ Q_y^+ + T_{i,j}^h$
$i = 1, \dots, N-1$ $j = M$	$-2r K_y^-$	$1 + 2r K_y^-$	0	$-2r K_y^- Q_y^- + T_{i,j}^h$
$i = N$ $j = 1, \dots, M-1$	$-r^* K_y^-$	$1 + r^* K_y^+ + r^* K_y^-$	$-r^* K_y^+$	$-r^* K_y^+ Q_y^+ - r^* K_y^- Q_y^- + T_{i,j}^h$
$i = N$ $j = 0$	.	$1 + 2r^* K_y^+$	$-2r^* K_y^+$	$-2r^* K_y^+ Q_y^+ + T_{i,j}^h$
$i = N$ $j = M$	$-2r^* K_y^-$	$1 + 2r^* K_y^-$	0	$-2r^* K_y^- Q_y^- + T_{i,j}^h$

### 4.2.3 ETUDE DE LA CONSISTANCE

On reprend le membre gauche de l'équation de base (4.13) pour l'étude de la consistance, en éliminant les termes de convection et de source qui ne génèrent aucune erreur d'approximation, soit :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( 1 - r\hat{\delta}_x \right) \left( 1 - r\hat{\delta}_y \right) \right\} T^{h+1} \\ & - \left\{ r \left( \hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y \right) \right\} T^h \\ & - \left\{ \left( 1 + r\hat{\delta}_x \right) \left( 1 + r\hat{\delta}_y \right) \right\} T^{h-1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

et réécrite sous forme commode :

$$\begin{aligned} T^{h+1} - T^{h-1} - r\hat{\delta}_x [T^{h+1} - 2T^h + T^{h-1}] - r\hat{\delta}_y [T^{h+1} - 2T^h + T^{h-1}] \\ + r^2 \hat{\delta}_x \hat{\delta}_y [T^{h+1} - T^{h-1}] \\ - 3r\hat{\delta}_x T^h - 3r\hat{\delta}_y T^h \end{aligned} \quad (4.18)$$

ce qui fait apparaître les différences en temps des températures, approchées par les développements limités de Taylor :

$$\begin{aligned} T'' &= \frac{(T^{h+1} - 2T^h + T^{h-1})}{\Delta\tau^2} - \frac{\Delta\tau^2}{12} T^{(4)} \\ T' &= \frac{(T^{h+1} - T^{h-1})}{2\Delta\tau} - \frac{\Delta\tau^2}{6} T^{(3)} \end{aligned} \quad (4.19a) \text{ et } (4.19b)$$

Le remplacement de ces dernières équations dans (4.18), en spécifiant  $r$  selon l'axe, mène à :

$$\begin{aligned} C\mathbf{d}VT' - \frac{\hat{\delta}_x T}{\Delta x} - \frac{\hat{\delta}_y T}{\Delta y} \\ + \Delta\tau^2 \left[ \psi \left( \hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y, T', T'', T'' \right) \right] \\ - \Delta x^2 \left[ \psi \left( \hat{\delta}_x, T', T'' \right) \right] \\ - \Delta y^2 \left[ \psi \left( \hat{\delta}_y, T', T'' \right) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$



Les premiers termes représentent l'équation originelle de l'énergie (exacte), par conséquent leur somme est nulle. En conclusion, le schéma construit est consistant avec l'EDP correspondante. Pour un nœud frontière, la précision est moindre par rapport au résultat trouvé pour un nœud intérieur.

#### 4.2.4 ETUDE DE LA STABILITE

Pour un problème instationnaire, l'opérateur est stable lorsque toute perturbation au cours du calcul de la solution numérique en un point s'amortit au voisinage de ce point [83].

La variante scalaire recommandée [76] pour les schémas implicites à trois niveaux du temps est ici utilisée.

La matrice de passage est trouvée à partir de l'équation (4.13) en ignorant le terme source non déterminant, d'où :

$$\left\{ \left( \mathbf{1} - r\hat{\delta}_x + s \right) \left( \mathbf{1} - r\hat{\delta}_y \right) \right\} T^{h+1} = \left\{ r\hat{\delta}_x + r\hat{\delta}_y - s \right\} T^h + \left\{ \left( \mathbf{1} + r\hat{\delta}_x - s \right) \left( \mathbf{1} + r\hat{\delta}_y \right) \right\} T^{h-1} \quad (4.21)$$

En introduisant un vecteur de température tel que :

$$[V] = [T, U]^T \text{ avec } U^h = T^{h-1} \text{ et } U^{h+1} = T^h \quad (4.22)$$

la relation (4.21) se présente sous forme vectorielle :

$$\begin{bmatrix} \left[ \mathbf{1} + s - r\hat{\delta}_x \right] \left[ \mathbf{1} - r\hat{\delta}_y \right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} [V^{h+1}] = \begin{bmatrix} \left[ r\hat{\delta}_x + r\hat{\delta}_y - s \right] & \left[ \mathbf{1} - s + r\hat{\delta}_x \right] \left[ \mathbf{1} + r\hat{\delta}_y \right] \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [V^h] \quad (4.23)$$

par inversion, nous trouvons :

$$[V^{h+1}] = \begin{bmatrix} \frac{[r\hat{\delta}_x + r\hat{\delta}_y - s]}{[1+s-r\hat{\delta}_x][1-r\hat{\delta}_y]} & \frac{[1-s+r\hat{\delta}_x][1+r\hat{\delta}_y]}{[1+s-r\hat{\delta}_x][1-r\hat{\delta}_y]} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [V^h] \quad (4.24)$$

Pour l'étude de la stabilité, le terme convectif est aussi ignoré, est par conséquent la matrice d'amplification se simplifie :

$$[V^{h+1}] = \begin{bmatrix} \frac{[r\hat{\delta}_x + r\hat{\delta}_y]}{[1-r\hat{\delta}_x][1-r\hat{\delta}_y]} & \frac{[1+r\hat{\delta}_x][1+r\hat{\delta}_y]}{[1-r\hat{\delta}_x][1-r\hat{\delta}_y]} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [V^h] \quad (4.25)$$

Les opérateurs d'espace peuvent être développés localement et analysés suivant l'expression de Fourier [76] qui consiste à s'assurer d'une amplitude inférieure à l'unité sachant la propagation de l'erreur amplifiée sous forme exponentielle complexe. Par exemple pour l'opérateur agissant dans la direction  $x$ , on obtient :

$$E_x = r\lambda m \delta_x^2 [(S)\exp(i\rho_x x)\exp(i\rho_y y)] \quad (4.26a)$$

ou bien :

$$E_x = -4p \left[ \left( \frac{\sin \rho_x \Delta x}{2} \right)^2 \right] [(S)\exp(i\rho_x x)\exp(i\rho_y y)] \quad (4.26b)$$

La matrice d'amplification du système (4.25) en fonction des amplitudes déterminées est alors :

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{E}_x + \bar{E}_y}{(1 - \bar{E}_x)(1 - \bar{E}_y)} & \frac{(1 + \bar{E}_x)(1 + \bar{E}_y)}{(1 - \bar{E}_x)(1 - \bar{E}_y)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\left(1 - \bar{E}_x\right)\left(1 - \bar{E}_y\right)\mu^2 - \left(\bar{E}_x + \bar{E}_y\right)\mu - \left(1 + \bar{E}_x\right)\left(1 + \bar{E}_y\right) = 0 \quad (4.28)$$

$$\text{ou } \Psi(\mu) = 0$$

nous procédons par localisation des racines, en effectuant des évaluations et en observant que les amplitudes sont négatives :

$$\Psi(1) = -3\bar{E}_x - 3\bar{E}_y > 0$$

$$\Psi(0) = -\bar{E}_x - \bar{E}_y - \left(1 + \bar{E}_x \bar{E}_y\right) \leq 0 \quad (4.29)$$

$$\Psi(-1) = -\bar{E}_x - \bar{E}_y > 0$$

Il est évident que les deux valeurs propres sont dans l'intervalle  $[-1, 1]$  et par conséquent la condition de stabilité au sens de Newman est réalisée.

Le cas particulier où les deux amplitudes sont égales séparément ou simultanément à  $-1$ , donne des valeurs propres 0 et 0.5, ce qui est aussi conforme à la condition.

En conclusion, le schéma numérique construit est inconditionnellement stable.

## 4.2.5 CONVERGENCE

Le théorème de Lax ou d'équivalence [76], [81] et qui relie la consistance, la stabilité et la convergence est donc suffisant pour établir cette propriété au schéma développé. Ce travail est discuté amplement par les auteurs dans [84].

La restriction à cet important théorème est relative à la non linéarité de la condition initiale, ce qui n'est pas le cas pour le modèle présenté. De plus, les paramètres thermophysiques utilisés dans la discrétisation ont été linéarisés grâce à la procédure de Lees.

## 4.3 SCHEMA EXPLICITE

### 4.3.1 LIMITATIONS DE LA PROCEDURE IMPLICITE

Bien que le schéma précédent soit stable inconditionnellement, l'écriture d'un programme et sa mise en œuvre restent des tâches ardues en raison du volume des équations et paramètres traduits dans le langage informatique approprié. Par conséquent et qualitativement, le temps d'exécution sera grand et de grandes capacités mémoire seront nécessaires particulièrement pour le calcul itératif des températures.

Une amélioration de la procédure implicite lors de la résolution itérative consiste à introduire un paramètre d'accélération. Le but, étant l'obtention d'une grande vitesse de convergence, mais son choix est approximatif. Par ailleurs, les méthodes directes ne sont pas appliquées en thermique si le maillage est fin [85].

Les schémas explicites ont été souvent rejetés à cause de la perte de stabilité menant à de très petits pas de temps [76]. Une comparaison globale mettant en relief la simplicité de la procédure explicite, inverserait à coup sur la préférence classique. Mitchell [86] avait montré que l'utilisation de pas de temps fractionnaires permettait une stabilité avec ses schémas. En principe, cette caractéristique compte autant que la précision, la stabilité et l'étendue d'application lors du choix d'une procédure de discrétisation [77].

Dans cette partie, les équations (4.3) à (4.8) sont discrétisées en prenant un schéma totalement explicite par l'intermédiaire des différences finies exponentielles proposées initialement par Battacharya puis par Handschuh [87]. La méthode expérimentée ultérieurement par Handschuh et Keith [88] pour les équations non linéaires en conduction pure à 1D, est étendue dans la présente étude aux termes de convection et de source suivant une conduction 2D en tenant compte des hypothèses (*a-1*).

### 4.3.2 ÉQUATIONS EN EFD

Le principe de la méthode consiste à introduire pour les équations paraboliques une fonction de la température, à multiplier les termes d'espace et du temps par la dérivée de la fonction choisie, pour aboutir à une expression discrétisée sous une forme très différente des différences finies classiques.

Ainsi, en appliquant le procédé, l'équation de l'énergie (4.3) est pré-multipliée par la dérivée en rapport de la température, soit :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ a(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx + dS(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy + q dV - \alpha dAT \right\} \frac{\Phi'(T)}{CdV} = \frac{\partial \Phi}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.30)$$

ou simplement :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi'(T)}{CdV} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ a(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx + dS(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy + q dV - \alpha dAT \right\} \quad (4.31)$$

Une discrétisation classique en réseau carré du terme d'accumulation donne :

$$\Phi(T^{h+1}) - \Phi(T^h) = \frac{\Delta \tau}{CdV} \Phi'(T^h) \left\{ \left[ \frac{(\hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y)}{\Delta x} - \alpha dA \right] T^h + q dV \right\} \quad (4.32)$$

Battacharya [89] a proposé le Logarithme de la température comme fonction introduite. Ensuite il a procédé à une comparaison avec les fonctions de type polynôme et sécante [90], pour que les différences finies exponentielles les supplantent par la précision.

### 4.3.3 DISCRETISATION EN EFD

En considérant un réseau carré, l'équation (4.32) discrétisée, est donc sous forme explicite :

$$T_{i,j}^{h+1} = T_{i,j}^h \exp[\mu H]_{i,j}^h \quad (4.33)$$

$$\text{avec} \quad \mu_{i,j}^h = \left[ \frac{\Delta \tau}{CdV} \right]_{i,j}^h \quad (4.33a)$$

$$\text{et } H_{ij}^{h+1} = \left[ \left[ \left( \hat{\delta}_x + \hat{\delta}_y \right) \frac{1}{\Delta x} - \alpha \mathbf{dA} \right] T_{ij}^h + (q \mathbf{dV})_{kj}^h \right] \frac{1}{T_{ij}^h} \quad (4.33b)$$

Pour faciliter la programmation de cette équation, on regroupe dans le *tableau 4.7*, les expressions de  $\mu$  et  $H$  pour les nœuds intérieurs et aux frontières. Les conductivités et les surfaces d'échange sont calculées suivant le nœud considéré et les nœuds adjacents à partir des températures et sections moyennes respectivement [91].

L'amélioration de la précision est possible par l'introduction d'un sous-pas de temps. Le nombre d'itérations  $k$  conséquent, assure aussi la stabilité de la méthode qui est trouvée similaire aux schémas explicites classiques [87].

Ainsi, l'équation (4.33) est réécrite comme suit :

$$T_{ij}^{h+1} = T_{ij}^h \exp \left\{ \frac{\mu_{ij}^h}{(k+1)} \sum_{p=0}^k H_{ij}^{(h+p/k+1)} \right\} \quad (4.34)$$

La discrétisation est décentrée avançante pour le terme temps, comme montrée dans l'équation initiale et centrale pour les opérateurs d'espace (*tableau 4.7*).

En comparaison avec les systèmes à résoudre précédents, l'expression explicite présente une facilité de programmation évidente.

**Tableau 4.7. Expressions de  $\mu$  et H de l'équation de l'énergie (réseau carré).**

	$\mu_{ij}^h$ [K/W]	$H_{ij}$ [W/K]
$i=1, \dots, N-1$ $j=1, \dots, M-1$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V}$	$\left[ \begin{array}{l} [K_x^+ T_{i+1,j} + K_y^+ T_{i,j+1} + K_x^- T_{i-1,j} + K_y^- T_{i,j-1}] - \\ [K_x^+ + K_y^+ + K_x^- + K_y^- + \alpha \Delta x \Delta A] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V \end{array} \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$
$i=1, \dots, N-1$ $j=0$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V}$	$\left[ \begin{array}{l} [K_x^+ T_{i+1,j} + 2K_y^+ T_{i,j+1} + K_x^- T_{i-1,j}] - \\ [K_x^+ + 2K_y^+ + K_x^- + \alpha \Delta x [\Delta A + 2\Delta S]] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V \end{array} \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$
$i=1, \dots, N-1$ $j=M$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V}$	$\left[ \begin{array}{l} [K_x^+ T_{i+1,j} + 2K_y^- T_{i,j-1} + K_x^- T_{i-1,j}] - \\ [K_x^+ + 2K_y^- + K_x^- + \alpha \Delta x [\Delta A + 2\Delta S]] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V \end{array} \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$
$i=N$ $j=1, \dots, M-1$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V^*}$	$\left[ \begin{array}{l} [K_x^- T_{i-1,j} + K_y^+ T_{i,j+1} + K_y^- T_{i,j-1}] - \\ [K_x^- + K_y^+ + K_y^- + \alpha \Delta x [\Delta A^* + a^*]] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V^* \end{array} \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$
$i=N$ $j=0$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V^*}$	$\left[ \begin{array}{l} [K_x^- T_{i-1,j} + 2K_y^+ T_{i,j+1}] - \\ [K_x^- + 2K_y^+ + \alpha \Delta x [\Delta A^* + a^* + 2\Delta S^*]] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V^* \end{array} \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$
$i=N$ $j=M$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V^*}$	$\left[ \begin{array}{l} [K_x^- T_{i-1,j} + 2K_y^- T_{i,j-1}] - \\ [K_x^- + 2K_y^- + \alpha \Delta x [\Delta A^* + a^* + 2\Delta S^*]] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V^* \end{array} \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$

**V- PROGRAMME ET RESULTATS**

**DU MODELE**

**NON LINEAIRE ETENDU**



## 5.1 STRATÉGIE ET PROGRAMMATION

Nous avons écrit un programme traduisant le modèle en Fortran 77. Il est développé pour résoudre les équations discrétisées suivant la formulation en différences finies exponentielles, et il est structuré d'abord par l'introduction des 26 matrices de géométrie et des paramètres thermophysiques qui sont choisis conformément aux hypothèses. Le calcul est poursuivi pour la détermination de la distribution des températures selon l'équation (4.34) et ses équivalentes pour les nœuds frontières. Les itérations couplées à des conditions d'arrêt de calcul permettent la sortie d'une distribution par pas de temps, sur la base de laquelle l'efficacité de l'ailette est calculée selon l'homologue discrétisée à l'équation (4.9). Un régime permanent s'établit déterminant une valeur finale de cette efficacité.

La caractéristique principale du code bidimensionnel mis au point est l'intégration à tous les niveaux du type de nœud.

La structure générale du programme est montrée sous forme d'un macro-organigramme dans le *tableau 5.1*.

Après les corrections et les premiers tests du programme suivant les conditions les plus simples, nous avons mené la validation complète. Dès lors, une série de résultats ont été obtenus pour les principales hypothèses de non linéarité du modèle étendu.

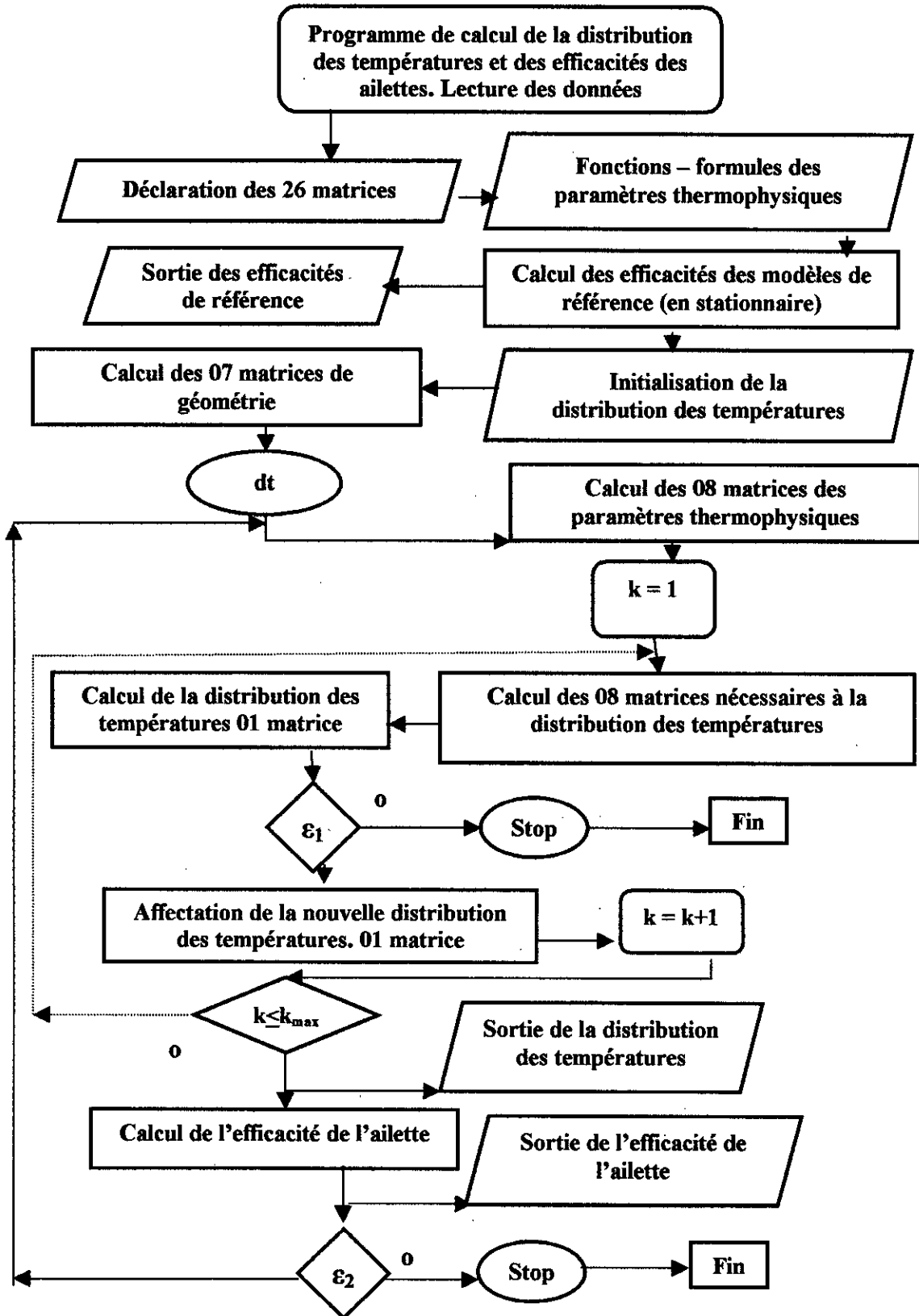
Dans tous les calculs de l'expérimentation numérique, nous avons retenu des grilles de  $16 \times 16$ , car un maillage plus fin n'apportait pas de changement significatif pour les conditions et valeurs relatives à la géométrie considérée. Le pas de temps a été fixé à 30s pour l'expérimentation de notre code de calcul et le nombre  $k$  a été trouvé suffisant pour la valeur 1001. Aucune anomalie n'a été constatée lors de l'utilisation du code avec le choix de ces valeurs.

Pour les distributions des températures, le critère d'arrêt est fixé à  $10^{-8}$  selon une norme matricielle de type Holder, quant à celui retenu pour l'efficacité, il est de l'ordre de  $10^{-4}$ .

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} |T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n|^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} |T_{i,j}^{n+1}|^2}} \leq 10^{-8} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\eta^{m+1} - \eta^m}{\eta^{m+1}} \leq 10^{-4} \quad (5.2)$$

Tableau 5.1. Macro-organigramme.



n, m étant ici les indices d'itérations.

## 5.2 VALIDATION

Pour valider le présent schéma numérique explicite, les solutions obtenues sont comparées à celles existantes dans la littérature pour les modèles classiques. Deux solutions sont choisies comme références et dont les expressions exactes ou approchées de l'efficacité sont parfaitement connues. Dans les deux cas, l'ailette est rectangulaire à 1D, le régime est permanent, les propriétés thermophysiques sont considérées constantes et il n'y a pas de production de chaleur interne. Les hypothèses (h-1) sont valables et l'extrémité de l'ailette est convectante (non isolée thermiquement). La température à la base de l'ailette est considérée constante.

- La première solution est représentée par l'expression approchée de Churchill où l'efficacité est de la forme [15] :

$$\eta_c = \left[ \left( 1 + (mL)^n \right)^{n-1} \right]^{-1} \quad (5.3)$$

avec  $n = 2,5$  dans le cas proposé.

- La seconde plus exacte, présente deux variantes, M1 et M2.

□ Pour M1, on néglige à l'extrémité de l'ailette les transferts thermiques de conduction-convection dans la section considérée, contrairement à l'hypothèse (e). La distribution des températures est donnée dans [76] :

$$T(x) = T^* \frac{N^* \exp[-mL(2-x/L)] + \exp[-mL(x/L)]}{N^* \exp[-2mL] + 1} \quad (5.4)$$

et l'efficacité est obtenue par intégration suivant l'équation (4.9) :

$$\eta_{M1} = \frac{[1 - \exp(-mL)] [N^* \exp(-mL) + 1]}{mL [N^* \exp(-2mL) + 1]} \quad (5.5a)$$

$$\text{ou bien : } \eta_{M2} = \frac{[1 - \exp(-\sqrt{2}\xi)] [N^* \exp(-\sqrt{2}\xi) + 1]}{\sqrt{2}\xi [N^* \exp(-2\sqrt{2}\xi) + 1]} \quad (5.5b)$$

avec le nombre  $\xi$  qui exprime le rapport de la résistance interne (de conduction) à celle externe (de convection) pour les dimensions fixées de l'ailette.

□ Pour M2, l'hypothèse (e) est admise. Nous utilisons alors la procédure de Harper et Brown qui consiste à introduire une longueur fictive  $L+w_0/2$ , et l'efficacité corrigée s'écrit :

$$\eta_{M2} = \frac{[1 - \exp(-\sqrt{2}\xi^*)][N^* \exp(-\sqrt{2}\xi^*) + 1]}{\sqrt{2}\xi^*[N^* \exp(-2\sqrt{2}\xi^*) + 1]} \quad (5.6)$$

Pour les ailettes rectangulaires de dimensions fixées  $L$  et  $w_0$ , les efficacités  $\eta$  calculées en fonction du paramètre  $\xi$  et à partir du présent modèle sont reportées avec celles  $\eta_c$ ,  $\eta_{M1}$  et  $\eta_{M2}$  dans les figures 5.1 à 5.4 pour les épaisseurs d'ailettes  $w_0 = 0,005\text{m}$ ,  $0,01\text{m}$ ,  $0,02\text{m}$  et  $0,03\text{m}$  respectivement (les épaisseurs indiquées permettant seulement la correction sur  $\eta_{M1}$ ).

Afin de montrer les différences, les efficacités  $\eta$  et  $\eta_{M2}$  obtenues sont portées suivant la valeur de  $\xi$  correspondante. Nous n'avons pas reproduit les courbes pour d'autres épaisseurs et qui présentent les mêmes allures et tendances. La température de base est fixée à  $T^* = 100^\circ\text{C}$ , la longueur de l'ailette est  $L = 0,05\text{m}$  et la largeur  $l = 0,05\text{m}$ .

La procédure de calcul est la suivante :

- On fixe  $\zeta$ .
- On calcule  $\eta_c$  suivant l'équation (5.3) avec  $mL = 1,414 \zeta$ .
- On calcule  $\eta_{M1}$  suivant l'équation (5.5c).
- On détermine  $\zeta^*$  pour diverses épaisseurs  $w_0$  à partir de l'expression correspondante, et on calcule  $\eta_{M2}(\zeta)$  suivant  $\zeta^*$  (procédure de correction de Harper et Brown).

On introduit ensuite dans le programme élaboré les valeurs  $\alpha$ ,  $w_0$ ,  $\lambda$ ,  $L$  de façon à obtenir un groupement égal à  $\zeta$  fixé et on calcule  $\eta$ . On note que  $\eta$  reste invariable quelle que soit la combinaison des valeurs indiquées pourvu que  $\zeta$  reste égal à celui fixé dans l'étape de calcul. Si on calcule ensuite l'efficacité selon une dépendance variable d'une propriété quelconque avec la température, la valeur trouvée est portée en ordonnée avec  $\zeta$  en abscisse (car il faut bien une référence) pour évaluer la correction à apporter.

Comme le montrent les figures, un bon accord est trouvé entre  $\eta$  et  $\eta_{M2}$  dans tous les cas. Par contre plus l'ailette est épaisse, plus les valeurs  $\eta_c$  et  $\eta_{M1}$  s'écartent du résultat exact. Par conséquent, les approximations pour l'ailette rectangulaire sont à reconsidérer dans de telles conditions.

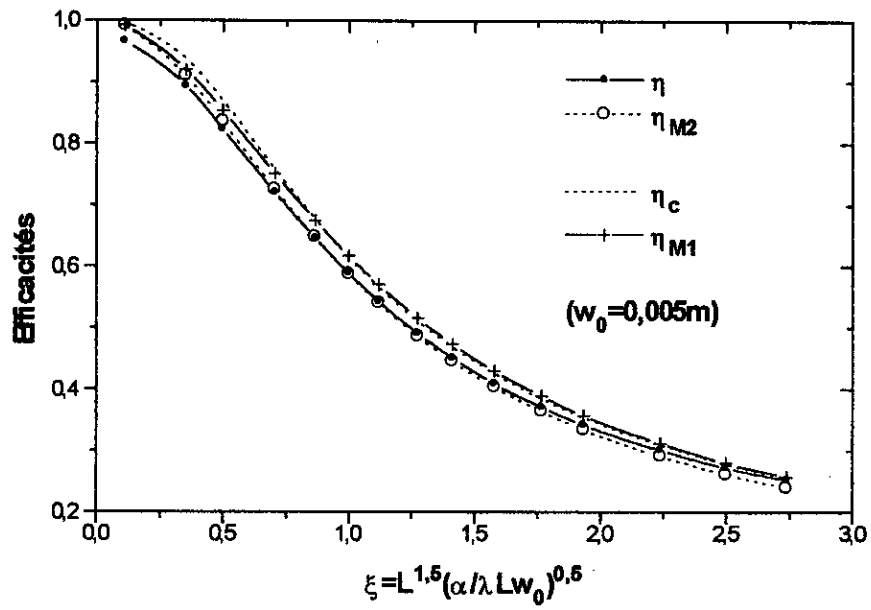


Figure 5.1. Efficacités comparées des quatre modèles ( $w_0 = 0.005m$ ).

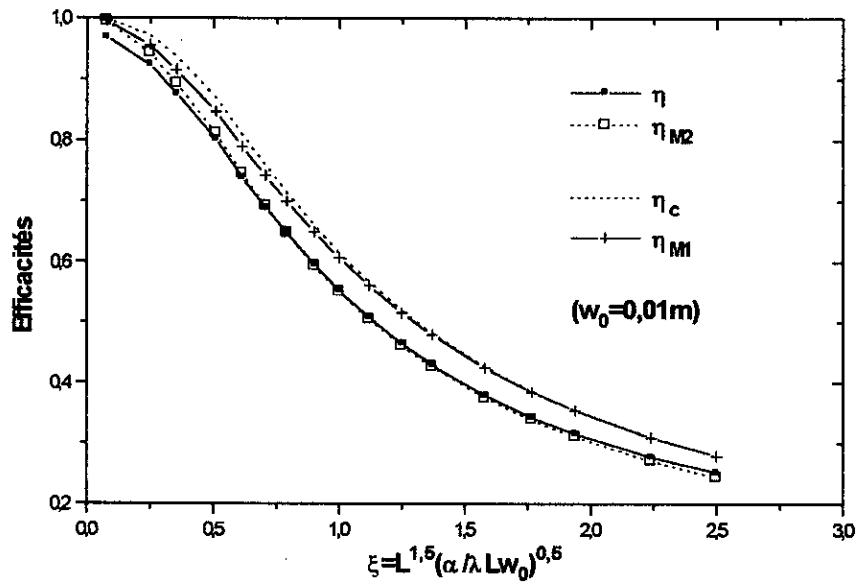


Figure 5.2. Efficacités comparées des quatre modèles ( $w_0 = 0.01m$ ).

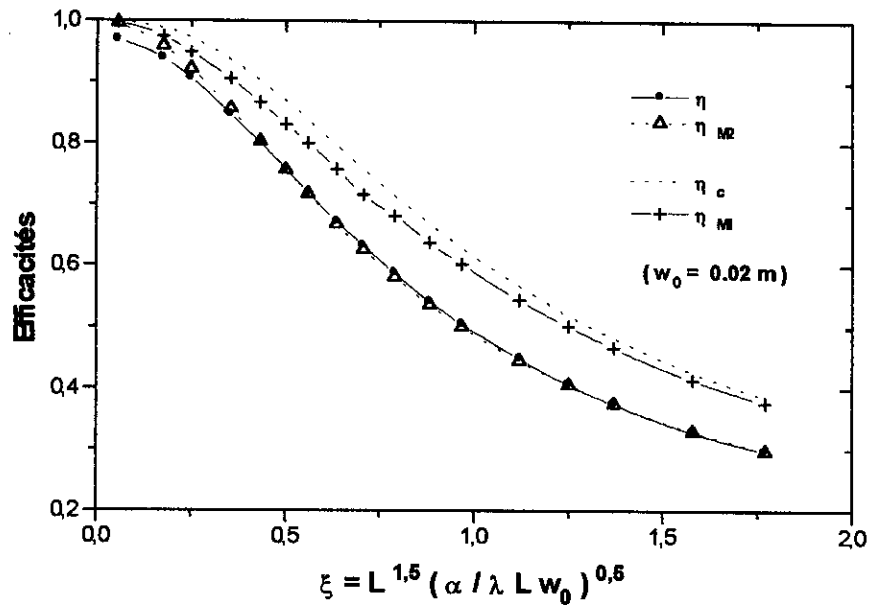


Figure 5.3. Efficacités comparées des quatre modèles ( $w_0 = 0.02\text{m}$ ).

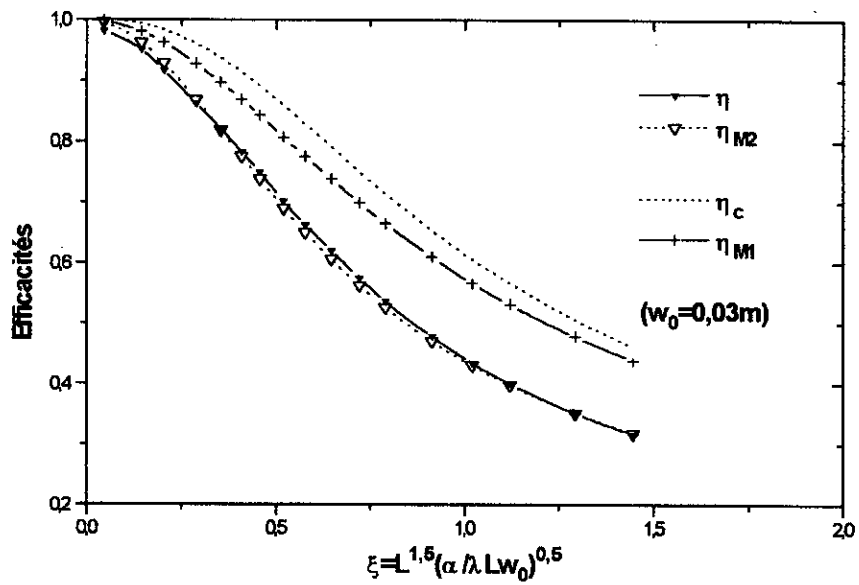


Figure 5.4. Efficacités comparées des quatre modèles ( $w_0 = 0.03\text{m}$ ).

On relève un décalage des efficacités entre les solutions analytiques de références et le présent modèle vers les très faibles valeurs de  $\xi$ . Si l'épaisseur de l'ailette augmente, cet écart s'accroît *figures 5.1 et 5.4*.

L'examen attentif des deux modèles mis en comparaison, nous permet d'expliquer le phénomène par l'approximation effectuée lors de la détermination de  $m$  (et donc de  $\xi$ ). En effet, on néglige dans la théorie classique la convection par les sections latérales ( $w_0L$ ). Dans notre formulation, les échanges par ces surfaces sont incorporés (*tableaux 4.2 et 4.7*).

Notons en fin de ce paragraphe qu'une validation précise n'est atteinte que si ces résultats seront comparés à ceux pouvant être obtenus dans un banc d'essai expérimental représentatif du modèle physique décrit.

### 5.3 RÉSULTATS ET DISCUSSION

Partant de la validation du code proposé, et à titre illustratif, une série d'expérimentations numériques a été conduite dans le cas de l'ailette rectangulaire. Nous examinons d'abord les transferts bidimensionnels et le niveau de correction à apporter suivant l'épaisseur de l'ailette.

Nous analysons l'effet des paramètres thermophysiques variant avec la température sur l'efficacité. L'importance relative des différents paramètres peut être appréciée par une étude de sensibilité. Le recours à cette étude permet surtout de concevoir une gamme d'essais expérimentaux optimale, et facilite l'interprétation des résultats pour un objectif de simplification théorique. Deux voies d'approche peuvent être empruntées. La première consiste à supposer des dépendances en température des paramètres sous forme de lois en puissance et à dériver les équations de sensibilité menant à des équations linéaires et pour lesquelles des résolutions numériques devraient être conduites [92]. Dans cette référence on cite quelques équations pour la conduction pure des modèles non linéaires. Plusieurs techniques ont été développées suivant cet axe. La seconde, moins laborieuse se traduit par des comparaisons entre les résultats numériques issus de la simulation du modèle non linéaire et ceux des modèles simplifiés où les termes de non-linéarité sont négligés. Dans notre étude cette voie a été retenue.

Nous traitons le cas de la source interne de chaleur, et nous montrons l'effet d'une production uniforme puis d'une source variable avec la température.

Les performances de trois sections sont comparées et nous appliquons le modèle proposé au problème complexe de la conjugaison des non-linéarités et de la température.

### 5.3.1 EFFET 2D

On n'a pas trouvé des variations dans les distributions des températures suivant l'axe  $y$  lors de la simulation avec une température à la base de l'ailette constante. Par conséquent, l'efficacité calculée est identique à celle du modèle 1D.

On peut alors se proposer de rechercher l'effet sur l'efficacité d'une variation linéaire de  $T^*$  avec  $y$ . En posons  $T^*(y) = 100 [1 + \beta y]$  et pour des valeurs de  $\beta$  dans l'intervalle  $[-1, -10]$ , les résultats sont presque les mêmes. Dans tous les cas, une différence absolue de l'ordre de  $10^{-5}$  est observée entre l'efficacité  $\eta$  et celle calculée suivant le modèle unidimensionnel.

Ce résultat numérique nécessite une analyse (*en annexe C*) sur un cas équivalent à celui considéré. On montre en effet que l'efficacité ne dépend pas de  $\beta$ . Cependant il y a un rapport de  $1+\gamma$  entre le flux de chaleur à la base, les températures, et les mêmes grandeurs correspondantes calculées à partir de  $T_0^* = 100$  °C.

### 5.3.2 ÉPAISSEURS DES AILETTES

Le regroupement des courbes (*figures 5.1-5.4*) des valeurs de  $\eta$  dans la *figure 5.5*, montre que les efficacités diminuent sensiblement à mesure que les épaisseurs des ailettes rectangulaires augmentent en rapport à celles calculées sans convection à l'extrémité.

La même figure montre aussi que cette tendance est conservée pour les ailettes à usage pratique ( $\eta \geq 0,8$ ). On peut déduire également, qu'il est avantageux de recourir à des ailettes assez longues et minces en conservant un niveau d'efficacité acceptable.

### 5.3.3 CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

Elle est considérée souvent constante pour que le modèle mathématique correspondant au problème posé soit résoluble du fait de la linéarité des équations.

Cependant, la plage de variations des températures n'est pas toujours réduite et par conséquent dans certains cas, une dépendance de ce paramètre avec la température n'est pas à ignorer comme discuté au chapitre II. De plus, pour les échangeurs utilisés en cryogénie de type plaques ailetées, l'évolution de la conductivité est très importante pour une légère variation de la température [12]. Nous l'admettrons dans notre code sous forme polynomiale [93], limitée à l'expression linéaire dans le cas présent :

$$\ln \lambda(T) = C_0 + C_1 T. \quad (5.7)$$



Deux cas sont comparés avec le cas initial en 5.2. Ils diffèrent les uns des autres par la valeur du coefficient  $C_1$  de la formule précédente et sont relatifs à l'Aluminium, le plus utilisé dans les batteries ailetées [4].

La *figure 5.6* montre, ce qui est physiquement évident, une amélioration des efficacités selon la valeur positive de  $C_1$ . On retrouve un fait déjà constaté sur les efficacités obtenues à partir des données expérimentales [94]. Il correspond dans la présente étude à une quantification précise.

L'analyse des courbes permet de formuler quelques remarques. Tout d'abord, le fait que cette incidence est minime pour les ailettes de grandes conductivités thermiques et / ou faibles coefficients de transfert. Ensuite, il semble ici aussi que l'usage des conductivités moyennes (arithmétique) ne soit pas une bonne approximation. Une conductivité optimale suggérée dans le chapitre II apporte une précision plus grande.

### 5.3.4 COEFFICIENT D'ÉCHANGE

Les études expérimentales ont montré que des variations substantielles du coefficient de transfert ont lieu le long de l'ailette. On attribue ces variations aux non-uniformités des distributions des vitesses et températures des écoulements. L'interaction très forte de la dynamique du fluide et du transfert de chaleur mène aux problèmes couplés. Il existe de nombreuses publications traitant cette dépendance spatiale du coefficient, mais peu se sont intéressées à la dépendance en température. Unal [34] détermine analytiquement les efficacités pour quelques cas limités et spécifiques à l'ailette rectangulaire et adiabatique à son extrémité. Pour le cas général, le problème ne peut être traité que numériquement comme l'admet cet auteur.

L'examen de la formule (4.9) montre une très grande influence du coefficient du transfert, puisqu'il conditionne à la fois l'efficacité (s'il n'est pas considéré constant) et les distributions de températures. Ces dernières gouvernent à leur tour les efficacités.

On montre à la *figure 5.7* les résultats de simulation pour deux cas pratiques pour une liaison de la forme [95]:

$$\alpha(T) = \alpha_c T^v \quad (5.8)$$

le coefficient d'échange constant étant égal à  $50 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .

- L'écoulement du fluide autour de l'ailette n'est pas forcé ( $v = 0,25$ ).
- L'écoulement du fluide autour de l'ailette est forcé ( $v = 0,33$ ).

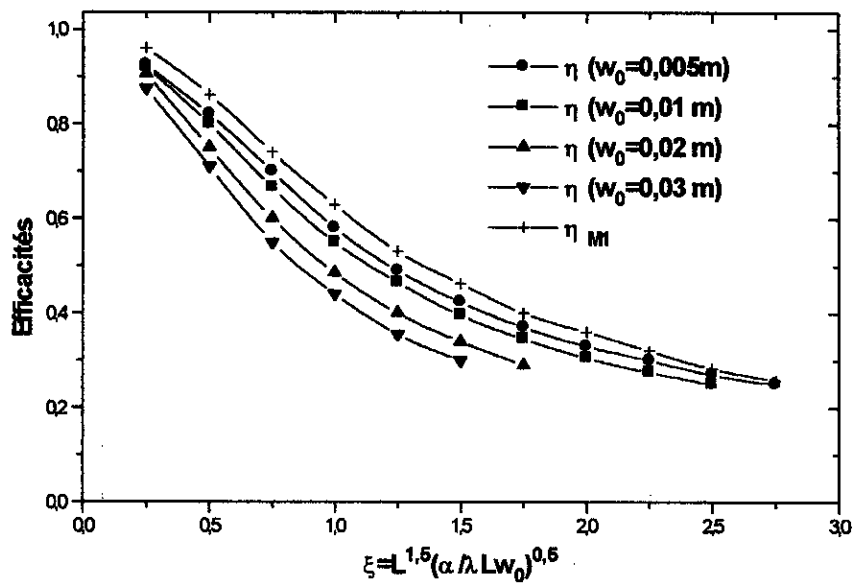


Figure 5.5. Correction de l'efficacité pour différentes épaisseurs (ailette rectangulaire) suivant le modèle présenté.

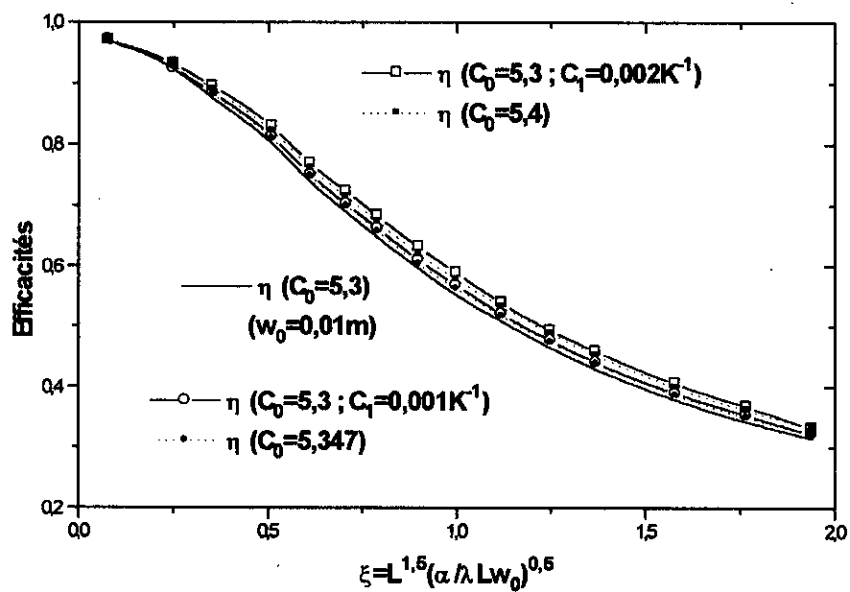


Figure 5.6. Influence du coefficient  $C_1$  de la conductivité thermique sur l'efficacité.

Les efficacités subissent une perte importante par rapport à l'adoption d'un coefficient d'échange constant. On observe aussi, une incurvation des courbes à partir de certaines valeurs de  $\xi$ . On constate un écart significatif pour  $\xi$  compris entre 0,4 et 1,0, et l'allure des courbes est similaire pour les différentes valeurs de  $v$ . Cette augmentation du coefficient d'échange par la température provoque la réduction de la résistance spécifique surfacique de la convection, et par conséquent une perte d'efficacité.

### 5.3.5 AILETTE : SOURCE INTERNE DE CHALEUR

La *figure 5.8* illustre le cas des ailettes caractérisées par l'existence d'une source interne de chaleur uniforme. Les courbes présentent des allures identiques à celles déterminées par le modèle analytique de comparaison ( $\eta_{M2}$ ). Une validation supplémentaire du code est ainsi réalisée. On observe une diminution très rapide des efficacités quand la production de chaleur au sein de l'ailette augmente.  $\eta$  perd approximativement 20 % de sa valeur pour  $G = 0,2$ .

En ce qui concerne l'effet sur l'ailette d'une source de chaleur dépendante de la température, nous n'avons pas trouvé de résultats dans la littérature. Dans ce sens, et à titre illustratif nous avons simulé de telles conditions en admettant une variation linéaire de la source avec la température  $q(T) = W_0[1+gT]$ ,  $W_0$  étant lié au nombre de génération  $G$  et indirectement à  $\xi$ .

La *figure 5.9* montre qu'il est important dans l'intervalle  $\xi \leq 0,5$  de tenir compte d'une telle dépendance. Cependant l'influence de la température sur l'efficacité s'estompe au-delà de  $\xi = 0,5$ . Il est évident que les ailettes caractérisées par des températures moyennes basses, et donc des efficacités réduites, présentent un effet additionnel modéré.

### 5.3.6 PROFIL D'AILETTE

On établit la comparaison des profils rectangulaire, trapézoïdale et parabolique concave en les considérant de mêmes dimensions ( $L$  et  $w_0$ ) à chaque étape de calcul. Les résultats sont présentés à la *figure 5.10*.

La classification des efficacités est conforme à celle des ouvrages classiques, mais des différences sont observées :

- Les courbes sont plus rapprochées les unes des autres.
- Le profil parabolique concave se confond avec le profil triangulaire pour  $\xi \leq 0,2$ , et au-delà de cette valeur avec le profil rectangulaire.
- Le profil trapézoïdal est plus performant que les autres.

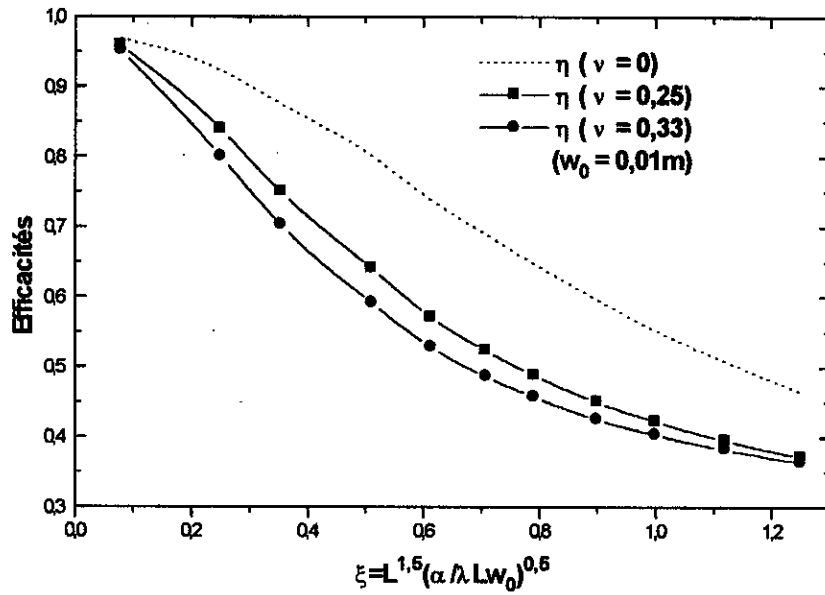


Figure 5.7. Profils des efficacités suivant un coefficient d'échange variable avec la température.

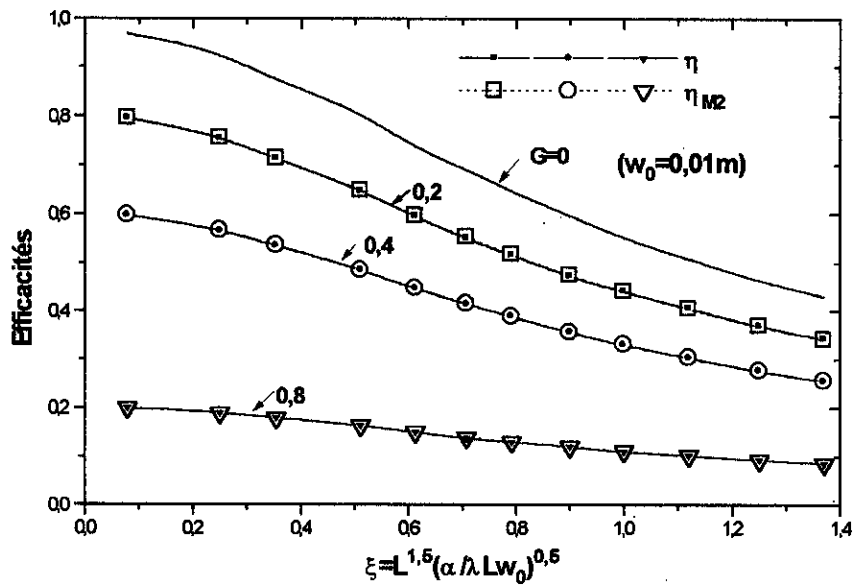


Figure 5.8. Variations de l'efficacité pour différentes valeurs de G.

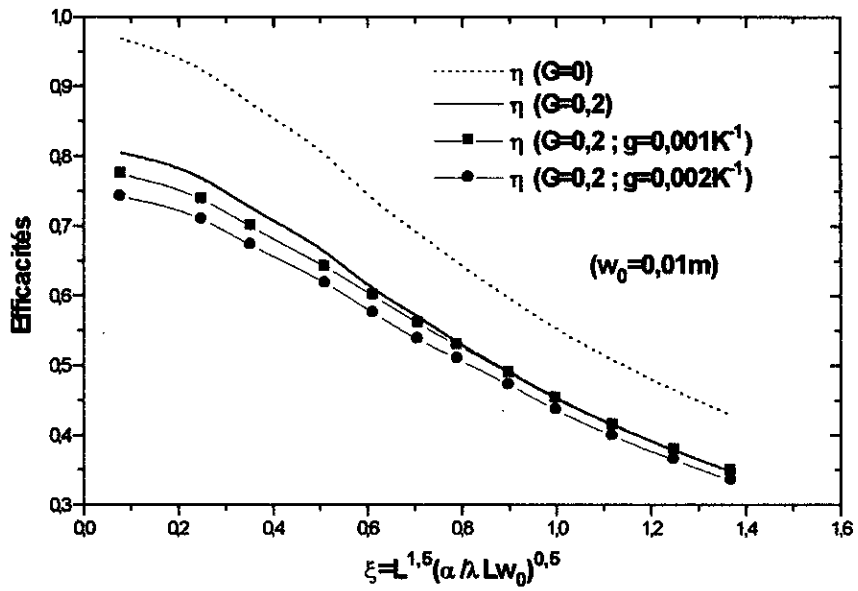


Figure 5.9. Effet du coefficient  $g$  de la source interne sur l'efficacité.

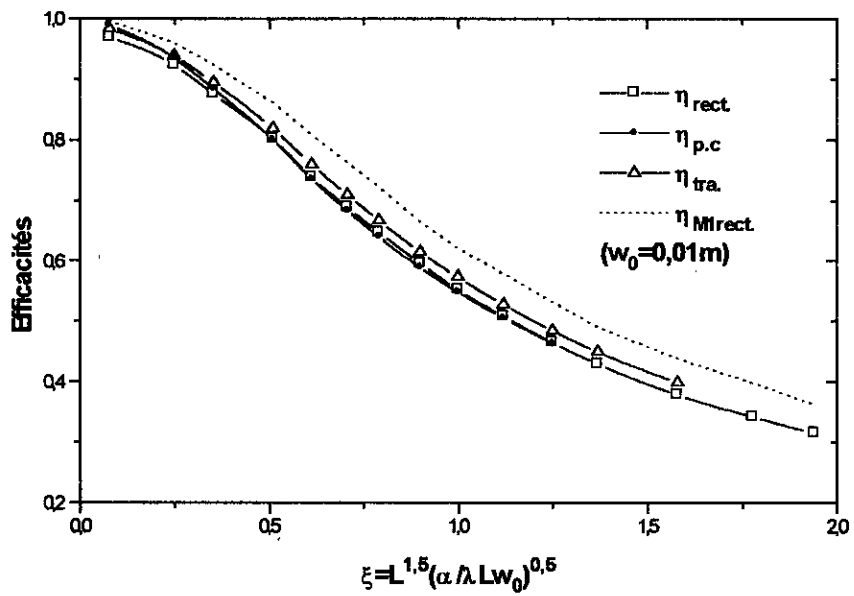
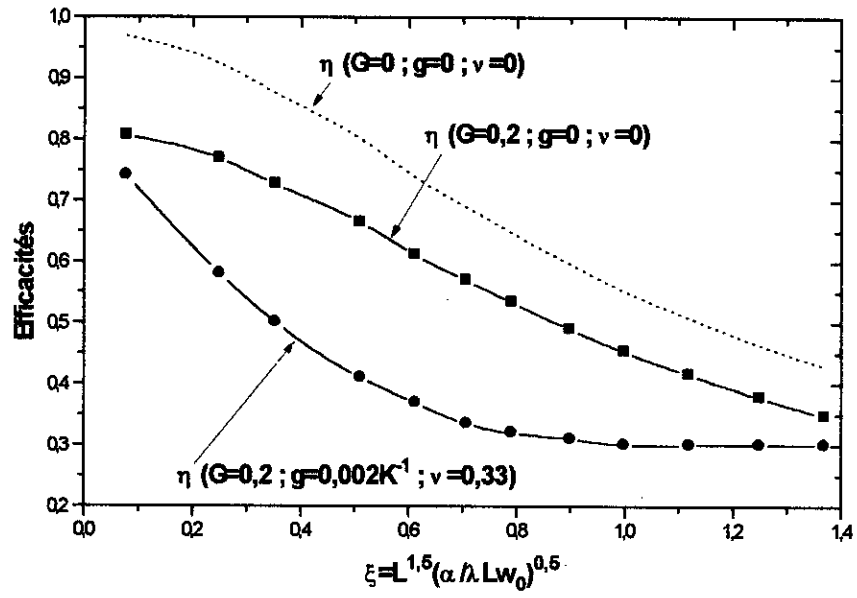


Figure 5.10. Comparaison entre les profils d'ailettes longitudinales.

La perte en efficacité du profil rectangulaire constatée est vraisemblablement imputable à la prise en compte dans notre modèle de l'hypothèse (e). La supériorité du profil trapézoïdal est relevée par plusieurs auteurs.

### **5.3.7 EFFET GLOBAL**

L'effet d'un ensemble de paramètres non constants est illustré à la *figure 5.11* où la source interne de chaleur dépendante de la température et un coefficient d'échange variable avec la température se conjuguent pour présenter des influences non négligeables sur les efficacités. Par conséquent, une attention particulière devra être portée suivant les conditions de fonctionnement lors de la détermination des efficacités des ailettes longitudinales.



**Figure 5.11.** Influence simultanée des paramètres variables avec la température sur les efficacités.

**VI- CONCLUSION ET**  
**RECOMMANDATIONS**



Cette étude s'est présentée par une approche sur la modélisation des transferts thermiques non linéaires dans les ailettes longitudinales, associant trois démarches :

- La déduction d'une solution analytique lors d'une simple dépendance en température de la conductivité thermique.
- La mise en évidence des facteurs prédominants pour un modèle bidimensionnel avec convection à l'extrémité et une dissymétrie des échanges.
- Le développement, puis la résolution d'un modèle étendu sous des hypothèses non classiques des transferts, en tenant compte des facteurs prédominants relevés.

Chacune de ces trois démarches a à la fois soulevé des difficultés spécifiques tant dans l'implémentation du modèle que dans sa résolution, et fourni des indications alimentant les autres.

Par rapport aux solutions numériques, les expressions des distributions de température et de l'efficacité de l'ailette soumise à une conductivité variable avec la température, apportent des résultats comparables en précision par l'intermédiaire d'une correction analytique simple. En pratique, l'obtention du transfert thermique dans un cas non linéaire, s'effectue à partir d'un modèle classique où la conductivité est représentée par une moyenne arithmétique. Le chapitre consacré à cet aspect montre que cette pratique est erronée. Du coup, le problème de la thermique non linéaire des ailettes s'est posé.

Dans la perspective du développement d'un modèle non linéaire général, et afin de disposer des connaissances relatives à l'effet des non linéarités de façon séparée ou conjuguée, une étude préalable a permis d'explorer l'aspect géométrique controversé en addition des effets de convection de bord.

Les résultats obtenus, montrent que contrairement à ce qui est généralement admis, la convection à l'extrémité d'une part et la dissymétrie des échanges par les deux faces de l'ailette d'autre part, ne peuvent être négligées. En effet, une condition thermique à la limite peut conduire à un équilibre différent des modes de transfert.

Cependant, le gain d'une dimension d'espace, sous réserve d'une condition critique améliorée, apporte une simplification substantielle dans le développement ultérieur du modèle général. Nous avons observé également que l'aspect dimensionnel est décrit nettement mieux par un critère incluant les nombres de Biot, l'épaisseur mais aussi la longueur de l'ailette.

En conséquence des deux démarches précédentes, on a établi un modèle mathématique non linéaire, bidimensionnel (suivant aussi l'axe longitudinal), instationnaire, décrivant les transferts thermiques dans les

aillettes de profils divers, à source interne de chaleur et à propriétés thermophysiques variables avec la température et / ou la position.

La construction des schémas numériques implicite et explicite s'est effectuée par la procédure de Lees pour le premier cas et par différences finies exponentielles pour le second.

Ce dernier schéma est ensuite traduit dans un programme écrit en Fortran, pour la détermination de la distribution des températures et de l'efficacité.

La simulation numérique que nous avons présentée confirme d'abord les résultats analytiques des cas simplifiés usuels, mais un écart est toutefois relevé lors de la prise en compte du transfert d'extrémité d'une ailette rectangulaire. Une déduction analytique suivant la procédure de Harper et Brown valide plus précisément notre modèle. La condition de la température à la base de l'ailette variable le long du tube, et incluse dans notre modèle, est d'un effet négligeable sur l'efficacité.

Puis, nous nous sommes intéressés à l'influence des divers paramètres sur l'efficacité, admis dans la littérature de base du dimensionnement à partir de valeurs constantes. Pour une ailette rectangulaire, les résultats montrent que l'augmentation de l'épaisseur se traduit par une amélioration de l'efficacité comme cela est prouvé classiquement, cependant une correction est nécessaire. Outre le fait que le présent modèle permet la quantification des effets de la variation des paramètres sur les efficacités, les résultats obtenus soulignent encore une fois la non validité de l'usage des conductivités moyennes et la perte importante de l'efficacité de l'ailette soumise à un échange de coefficient conducto-convectif dépendant de la température de l'interface. De plus, on ne peut ignorer l'influence de la température lorsque l'ailette est à source interne variable. Le modèle présenté constitue une alternative dans l'approche initiale de l'efficacité, paramètre évalué sommairement lors du dimensionnement des équipements ailetés placés dans des conditions extrêmes mais dont la conjugaison des effets réduit fortement la valeur.

Moyennant quelques vérifications, le programme développé peut être utilisé au calcul des efficacités dans des situations non classiques et à la recherche de conditions optimales.

Les conditions d'utilisation peuvent être modifiées à loisir (matériau, paramètres, géométrie,...) élargissant ainsi le champ d'application du modèle. Il faut cependant, garder à l'esprit le nombre de paramètres thermophysiques et les incertitudes inévitables pour chacun d'eux.

Deux voies d'approfondissement peuvent être menées :

- L'amélioration de l'aspect convivial du programme pour une large utilisation et la programmation du schéma implicite.
- La modélisation en couplage avec la dynamique du fluide adjacent à l'ailette. Dans cette optique, il suffit de combiner un modèle type *CFD* le mieux adapté avec le présent modèle.

Deux études similaires peuvent être effectuées comme extension du présent travail :

- L'effet des non linéarités sur les ailettes annulaires ou transversales.
- L'optimisation des ailettes par voie numérique à partir de tels modèles.

Les résultats de cette présentation et de tendance seront affinés si des bancs d'essais simulant les ailettes des échangeurs compacts pouvaient être réalisés. A cet effet, une soufflerie de veine adaptée combinée à la mesure de l'évolution des températures dans l'ailette par thermographie infrarouge est indiquée. Cependant, l'accès aux dépendances des paramètres thermophysiques ne peut se traiter que par les techniques dites inverses.

Pour clore, notre contribution s'inscrit étroitement dans la technologie compacte des échangeurs ailetés. Dans un cadre plus général, elle répond aux axes de recherche nécessaires à une évolution de technologie satisfaisant au double objectif de réduction des consommations énergétiques et de protection de l'environnement, exprimées par les constructeurs mondiaux des échangeurs. A cet effet, réunis à *Londres en novembre 1993* dans le cadre de *CLIMA 2000*, Ils souhaitent vivement des études fondamentales dans ce sens et le développement de programmes de dimensionnement et de simulation de ces échangeurs.

## **LISTE DES REFERENCES**

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Bouaziz M.N., Hanini S., Rechak S., Bal Y., Bal K.E., *Etude expérimentale de la décongélation des produits alimentaires à l'aide d'un dispositif à ailettes plates*, 2<sup>ème</sup> séminaire national de génie des procédés, USTHB, Alger (5- 6 déc. 1999) thème III, p. 15.
- [2] Bergles A., *Heat transfer enhancement-The encouragement and accommodation of high heat flux*, J. Heat Transfer Vol.119 (1997) pp. 9-19.
- [3] Webb R.L., *Air-side heat transfer in finned tube heat exchangers*, Heat Transfer Engineering Vol.1,n<sup>o</sup> 3 (1980) pp. 33-49.
- [4] Rigot G., *Echangeurs : l'évolution technologique des échangeurs ailetés*, Revue pratique du froid et du conditionnement d'air n<sup>o</sup>770 (1993) pp. 30-34.
- [5] Kays W.M., London A.L., *Compact heat exchangers*, third edition, Krieger publishing, 1998.
- [6] Sartre V., Marvillet CH., Lallemand M., *Echangeurs, des axes de recherche pour le futur*, Revue pratique du froid et du conditionnement d'air n<sup>o</sup>783 (1993) pp. 70-74.
- [7] Bejan A., Sciubba E., *The optimal spacing of parallel plates cooled by forced convection*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 35, n<sup>o</sup> 12 (1992) pp. 3259-3264.
- [8] Yoneda N., Kitano M., Schimizu I., *Thermal design of plastic LSI packages with fins*, Scripta Technica, Inc. Heat Trans Jpn Res, Vol. 25, n<sup>o</sup> 6 (1996) pp. 382-399.
- [9] Vollaro A. L., Grignaffini S., Gugliermetti F., *Optimum design of vertical rectangular fin arrays*, Int. J. Thermal sciences, Vol. 38 (1999) pp. 525-529.
- [10] Baskaya S., Sivrioglu M., Ozek M., *Parametric study of natural convection heat transfer from horizontal rectangular fin arrays*, Int. J. Thermal sciences, Vol. 39 (2000) pp. 797-805.
- [11] Roméro-Mendez R., Sen M., Yang K.T., McClain R., *Effect of fin spacing on convection in a plate fin and tube heat exchanger*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 43 (2000) pp. 39-51.
- [12] Smith E.M., *Thermal design of heat exchangers: A numerical approach, direct sizing & stepwise rating*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [13] Haseler L.E., *Performance calculation methods for multi-stream plate-fin heat exchangers*, In Heat Exchangers: Theory and practice, Eds. J. Taborek, G.F. Hewitt, N. Afgan : Hemisphere / Mc Graw-Hill, 1983.
- [14] Gardner K.A., *Efficiency of extended surface*, Trans. ASME Vol.67 (1945) pp. 621-631.
- [15] Churchill S.W., *Approximations for the efficiency of fins and spines*, Letters in heat and mass transfer n<sup>o</sup>4 (1977) pp. 385-389.
- [16] Ullman A., Kalman H., *Efficiency and optimized dimensions of annular fins of different cross-section shapes*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.32 (1989) pp. 1105-1110.
- [17] Shah R.K., *Advances in compact heat exchanger technology and design theory*, Proceedings of the seventh International Heat Transfer Conference, Munich, Germany, (1) 1982, pp. 123-142.

- [18] Hu X., Jacobi A.M., *Local heat transfer behavior and its impact on single-row annularly finned tube heat exchanger*, J. Heat Transfer Vol. 115 (1993) pp. 66-74.
- [19] Watel B., Harmand S., Desmet B., *Etude des échanges convectifs sur un arbre aileté tournant, soumis à un courant d'air parallèle aux ailettes*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 41 (1998) pp. 3741-3757.
- [20] Look D.C. Jr., *Two dimensional fin performance  $Bi$  (top surface)  $\geq$   $Bi$  (bottom surface)*, ASME J. Heat Transfer Vol.110 (1988) pp. 780-782.
- [21] Ju Y.H., Chou Y.S., Hsiao C.C., *A new approach to the transient conduction in a 2D rectangular fin*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.32 (1989) pp. 1657-1661.
- [22] Razelos P., Imre K., *The optimum dimension of circular fins with variable thermal parameters*, J. Heat Transfer Vol.102 (1980) pp. 420-425.
- [23] Aziz A., Na T.A., *Periodic heat transfer in fins with variable thermal parameters*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.24 (1980) pp. 1397-1404.
- [24] Zubair S.M., Al Garni A.Z., Nizami J.S., *The optimal dimensions of circular fins with variable profile and temperature-dependent thermal conductivity*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.39 (1996) pp. 3431-3440.
- [25] Han L.S., Lefkowitz S.G., *Constant cross-section fin efficiencies for non-uniform surface heat transfer coefficients*, ASME paper (1960) 60-WA-41.
- [26] Sparrow E.M., Acharya S., *A natural convection with solution determined non-monotonically varying heat transfer coefficients*, J. Heat Transfer Vol.103 (1981) pp. 218-225.
- [27] Sparrow E.M., Chyu M.K., *Conjugate forced convection-conduction analysis of heat transfer in a plate fin*, J. Heat Transfer Vol.104 (1982) pp. 204-206.
- [28] Huang M.J., Chen C.K., *Conjugate mixed convection and conduction heat transfer along a vertical circular pin*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.28 (1985) pp. 523-529.
- [29] Unal H.C., *Determination of the temperature distribution in an extended surface with a non uniform heat transfer coefficient*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.28 (1985) pp. 2279-2284.
- [30] Unal H.C., *An analytic study of boiling heat transfer from a fin*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.30 (1987) pp. 341-349.
- [31] Laor K., Kalman H., *Performance and optimum dimensions of different cooling fins with a temperature-dependent heat transfer coefficient*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.39 (1996) pp. 1993-2004.
- [32] Minkler W.S., Rouleau W.T., *The effects of internal heat generation on heat transfer in thin fins*, Nucl. Sci. Engng. Vol.7 (1960) pp. 400-406.
- [33] Aziz A., *Perturbation solution for convective fin with internal heat generation and temperature-dependent thermal conductivity*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.20 (1977) pp. 1253-1255.
- [34] Unal H.C., *Temperature distributions in fins with uniform and non uniform heat generation and non uniform heat transfer coefficient*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.30 (1987) pp. 1465-1477.

- [35] Chu HS., Weng CL., Kuang C., *Transient response of a composite straight fin*, J. Heat Transfer. Vol.105 (1983) pp. 307-311.
- [36] Snider A.D., Kraus A.D., *Recent developments in the analysis and design of extended surface*, J. Heat Transfer Vol.105 (1983) pp. 302-306.
- [37] Mikhailov M.D., Oziçik M.N., *Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion*, John Wiley & sons, Inc., Ch. Six, 1984.
- [38] Liu JY., Minkowycz W.J., Cheng P., *Conjugated mixed convection-conduction heat transfer along a cylindrical fin in a porous medium*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.29 (1986) pp. 769-775.
- [39] Mudjahid A. M., *Analysis of performance of a straight fin with oscillating base heat flux and environment temperature*, J. Engng. Sci. King Saud Univ., 13 (1) 25 (1987).
- [40] Yavanovitch M.M., Culham J.L., Lemczyk T.F., *Simplified solutions to circular annular fins with contact resistance and end cooling*, J. Thermophys. Heat Transfer 2 (2) 152 (1988).
- [41] Sarma P.K., Subrahmanyam T., Dharma Rao V., *Natural convection from a vertical heat-generating fin a conjugate problem, response of a composite straight fin*, J. Heat Transfer. Vol.110 (1988) pp. 99-102.
- [42] Houghton J.M., Ingham D.B., Heggs P.J., *The one-dimensional analysis of oscillatory heat transfer in a fin assembly*, J. Heat Transfer Vol.114 (1992) pp. 548-552.
- [43] Kazeminujad H., *Analysis of one-dimensional fin assembly heat transfer with dehumidification*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.38 (1995) pp. 455-462.
- [44] Hsu CH., Hsiao KL, *Conjugate heat transfer of a plate fin in a second-grade fluid flow*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.41 (1998) pp. 1087- 1102.
- [45] Feldman A., Marvillet C., Lebouché M., *Nucleate and convective boiling in a plate fin heat exchangers*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.43 (2000) pp. 3433-3442.
- [46] Huang L.J., Shah R.K., *Assessment of calculation methods for efficiency of straight fins of rectangular profile*, Advances in heat exchanger design radiation and combustion ASME HTD Vol.182 (1991) pp. 19-30.
- [47] Cotta R.M., Ramos R., *Integral transforms in the two-dimensional non-linear formulation of longitudinal fins with variable profile*, Int. J. for Num. Methods for heat & Fluid Flow Vol.8 (1) (1998) pp. 27-42.
- [48] Touloukian Y.S., et al., *Thermophysical properties of matter*, 1-11, Washington: IFI/Plenum Press 1970.
- [49] Luikov A.V., *Analytical heat diffusion*, Academic Press, New York, 1968.
- [50] Clark J.A., *Advances in heat transfer*, Academic Press, New York, 1968.
- [51] Bouaziz M.N., Hanini S., Bal Y., Bal K.E., *Comparaison de la méthode de linéarisation optimale et des perturbations appliquées à la conduction de chaleur non linéaire*, Colloque national d'analyse non linéaire & applications, USTHB, Alger (21-24 nov. 1999) p. 1.
- [52] Blaquièrre A., *Une nouvelle méthode de linéarisation locale des opérateurs non linéaires : approximation optimale*, 2<sup>nd</sup> Conf. Non Linear Vibrations, Warsaw 1962.

- [53] Vujanovic B., *Application of the optimal linearization method to the heat transfer problem*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.16 (1973) pp. 1111-1117.
- [54] Taine J., Petit J.P., *Transferts thermiques. Mécanique des fluides anisothermes*, Dunod Bordas, Paris, 1989.
- [55] Lau W., Tan C.W., *Errors in the one-dimensional heat transfer analysis in straight and annular fins*, J. Heat Transfer Vol.95 (1973) pp. 549-551.
- [56] Levitsky M., *Criterion for validity of the fin approximation*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.15 (1972) pp. 1960-1963.
- [57] Heggs P.J., Stones P.R., *The effects of dimensions on the heat flowrate through extended surfaces*, J. Heat Transfer Vol.102 (1980) pp. 180-182.
- [58] Dahiya R.S., Vinayagamoorthy M., *Laplace transform pairs of n-dimensions and heat conduction problem*, Mathl Comput. Modelling Vol.13 (1990) pp. 35-50.
- [59] Krasnov M., Kissélev A., Makarenko G., Chikine E., *Mathématiques supérieures*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1993.
- [60] Martinet J., *Thermocinétique approfondie*, Tech. & Doc. Lavoisier, 1990.
- [61] Cai R., Zhang N., *Some algebraically explicit analytical solutions of unsteady nonlinear heat conduction*, J. Heat Transfer Vol. 123 (2001) pp. 1189-1191.
- [62] Chen H-T., Lin J-Y., *Hybrid Laplace transform technique for non-linear transient thermal problems*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, n° 4/5 (1991) pp. 1301-1308.
- [63] Beckher M., *Nonlinear transient heat conduction using similarity groups*, J. Heat Transfer Vol. 122 (2000) pp. 33-39.
- [64] Kern D.Q., Kraus D.A., *Extended surface heat transfer*, Mc Graw-Hill, New York, 1972.
- [65] Rigot G., *transmission et échangeurs de chaleur, 1<sup>ère</sup> partie : les ailettes dans l'échange thermique*, les éditions parisiennes, 1991.
- [66] Yeh R-H., *Errors in one-dimensional fin optimization problem for convective heat transfer*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 39, n° 14 (1996) pp. 3075-3078.
- [67] Thomas L.C., *Heat transfer in fin assemblies: significance of two-dimensional effects-a reexamination of the issue*, J. Heat Transfer Vol. 121 (1999) pp. 748-752.
- [68] De Vriendt A.B., *La transmission de la chaleur, Généralités : la conduction*, Vol. 1, tome 1, Gaetan Morin, 1982.
- [69] Ahmadi G., Razani A., *Some optimization problems related to cooling fins*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.16 (1973), pp. 2369-2375.
- [70] Mikk I., *Convective fin of minimum mass*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.23 (1980) pp. 707-711.
- [71] Mori Y., Hijikata K., Hirazawa S., Nakayama W., *Optimized performance of condensers with outside condensing surfaces*, J. of Heat Transfer Vol.103 (1981) pp. 96-102.



- [72] Sarma P.K., Chary S.P., Dharma Rao V., *Condensation on a vertical plate fin of variable thickness*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.31 (1988) pp. 1941-1949.
- [73] Perry H., *Chaleurs spécifiques des composés minéraux et organiques*, Techniques de l'Ingénieur (4-97), traité constantes physico-chimiques K580-04-1955.
- [74] Heggs P.J., Stone P.R., *The effects of non uniform heat transfer coefficients in the design of finned tube air-cooled heat exchangers*, Proceedings of the seventh Int. Heat Transfer Conference, Munchen, Vol.6 (1982), pp. 209-215.
- [75] Snider A.D., Kraus A.D., *Correcting for the variability of the heat transfer coefficient in extended surface analysis*, Proceedings of the seventh Int. Heat Transfer Conference, Munchen, Vol.6 (1982), pp. 239-243.
- [76] Rohsenow W.M., Hartnett J.P., Ganic E.N., *Handbook of heat transfer fundamentals*. Second edition, Mc Graw Hill, 1985.
- [77] Minkowycz W.J., Sparrow E.M., *Advances in numerical heat transfer*, Vol.1, Taylor & Francis, 1997.
- [78] Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.W., *Transport phenomena*, John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- [79] Ames W.F., *Non linear partial differential equations in engineering*, Academic Press, Inc., 1960.
- [80] Thibault J., *Comparison of nine three dimensional numerical methods for the solution of the heat diffusion equation*, Numerical heat transfer, Vol.8 (1985), pp. 281-298.
- [81] Godounov S., Riabensky V., *Schémas aux différences*, OPU, Alger, 1987.
- [82] Lees M., *A linear three-level difference scheme for quasi-linear parabolic equations*, Math. of Computation, Vol.20 (1966), pp. 516-522.
- [83] Oblad Ch., *Analyse numérique*, INP Grenoble, 1986.
- [84] Bouaziz M.N., Hanini S., Rechak S., Bal Y., Bal K.E., *Convergence d'un schéma numérique à trois niveaux pour le problème d'évolution à 2D de la conduction dans les ailettes*, Troisième Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de l'Ingénieur, CIMASI 2000, Casablanca, Maroc, 2000, P 1-2.
- [85] Patankar S.V., *Numerical methods in heat transfer*, Proceedings of the seventh Int. Heat Transfer Conference, Munchen, Vol.1 (1982), pp. 83-90.
- [86] Mitchell A.R., *Computational methods in partial differential equations*, Wiley, New York, 1969.
- [87] Handschuh R.F., *An exponential finite difference technique for solving partial differential equations*, NASA National Technical Information Sce, Springfield VA, (1987), Rept. TM- 89874.
- [88] Handschuh R.F., Keith T.G. Jr., *Application of an exponential finite difference technique*, Numerical Heat transfer A 22 (1992) pp. 363-378.
- [89] Battacharya M.C., *An explicit conditionally stable finite difference equation for heat conduction problems*, Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol.21 (1985) pp. 239-265.
- [90] Battacharya M.C., Davies M.G., *The comparative performance of some finite difference equations for transient heat conduction*, Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol.24 (1987) pp. 1317-1331.

[91] Bouaziz M.N., Rechak S., Hanini S., Bal Y., Bal K.E., *Etude des transferts de chaleur non linéaires dans les ailettes longitudinales*, Int. J. Thermal Sciences Vol.40 n°9 (2001) pp. 843-857.

[92] Dowding K.J., Blackwell B.F., *Sensitivity analysis for nonlinear heat conduction*, J. Heat Transfer Vol. 123 (2001) pp. 1-10.

[93] Laurent M., Vuillermoz P.L., *Conductivité thermique des solides*, Techniques de l'Ingénieur, traité constantes physico-chimiques K 420, 1997.

[94] Rosman E.C., Carajilescov P., Saboya F.E.M., *Performance of one and two-row tube and plate fin heat exchangers*, J. Heat Transfer Vol.106 (1984) pp. 627-632.

[95] Sparrow E.M., *Reexamination and correction of the critical radius for radial heat conduction*, A.I.Ch.E J., Vol.. 16 (1970), p. 149.

## ANNEXES

## ANNEXE A

L'étude classique des transferts thermiques dans les ailettes longitudinales, *figure A1*, se base sur les simplifications suivantes :

- La relation entre le flux thermique et la température est celle de *Fourier*.
- Le régime est permanent.
- La conduction s'effectue selon une seule direction (1D) : i.e. la longueur dans le sens transversal est assez grande par rapport à l'épaisseur de l'ailette
- La conductivité thermique est constante.
- Le coefficient d'échange de convection est uniforme et le flux convectif est de type *Newton*.
- La température du fluide environnant est uniforme.
- Il n'y a pas de résistance de contact entre l'ailette et la paroi mère.
- Les transferts à l'extrémité et sur les bords latéraux sont souvent négligés
- L'espacement inter-ailettes est suffisant en rapport des couches limites.
- L'épaisseur du tube support n'est pas trop mince.
- Les conditions aux limites sont sous forme de relations linéaires ou linéarisées.
- Les transferts thermiques par rayonnement et par changement de phase ne sont pas pris en compte.

Ce modèle physique et thermique, idéalisé et traduit sous forme différentielle, permet une analyse linéaire à solutions analytiques par le biais du puissant principe de superposition.

La distribution des températures pour l'ailette rectangulaire, est solution de l'équation simple suivante :

$$\frac{d^2\theta^+}{dx^2} - m^2\theta^+ = 0 \quad (A1)$$

Les conditions aux limites variées interviennent pour spécifier la solution (*tableau A1*) avec la condition  $\theta^+(0) = 1$ .

L'expression la plus usitée est celle du *cas II* qui est corrigée lorsqu'on est en présence d'une source thermique interne constante par le coefficient multiplicateur (1-G).

A partir des distributions, on pourra pour ce cas, déterminer les efficacités, exprimées pour les profils classiques dans le *tableau A2*.

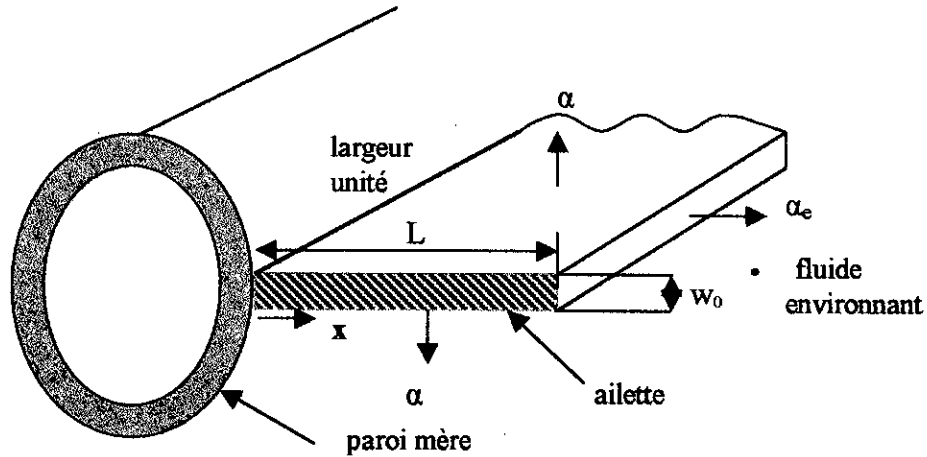


Figure A1. Schéma de l'ailette longitudinale.

Tableau A1. Distribution des températures des différents cas classiques – ailette rectangulaire.

	conditions aux limites	distribution des températures
Cas I	$x = L \quad -\lambda \frac{d\theta^+}{dx} = \alpha_e \theta^+$	$\theta^+ = \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{\alpha_e}{\lambda m} \sinh[m(L-x)]}{\cosh[mL] + \frac{\alpha_e}{\lambda m} \sinh[mL]}$
Cas II	$x = L \quad \frac{d\theta^+}{dx} = 0$	$\theta^+ = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh[mL]}$
Cas III	$x \rightarrow \infty \quad \theta^+ = 0$	$\theta^+ = \exp^{-mx}$
Cas IV	$x = L \quad \theta^+ = \theta_L^+$	$\theta^+ = \left[ \theta_L^+ - \exp^{-mL} \right] \left[ \frac{\exp^{mx} - \exp^{-mx}}{\exp^{mL} - \exp^{-mL}} \right] + \exp^{-mx}$

**Tableau A2. Efficacités classiques des ailettes convectives.**

profil	efficacité
rectangulaire	$\eta = \frac{\tanh mL}{mL}$
parabolique convexe	$\eta = \frac{1}{mL} \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}mL\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}mL\right)}$
triangulaire	$\eta = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$
parabolique concave	$\eta = \frac{2}{\sqrt{4(mL)^2 + 1} + 1}$

### ANNEXE B

On réécrit le système du *tableau 3.2* de façon que la nouvelle variable soit :

$$\theta^* = 1 - \bar{\theta} \quad (\text{B.1})$$

Les équations (3.34), (3.36), (3.37) et (3.38) deviennent :

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial X^2} - \frac{B}{\sigma^2} \theta^*$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial X} \right|_{X=1} = -\frac{\alpha_3^+}{\sigma} \theta^* \Big|_{X=1}$$

(B.2 – B.5)

$$\theta^*(0, \tau) = 1$$

$$\theta^*(X, 0) = 0$$

Une double application de la transformée de Laplace, en tenant compte de la condition à la base, mène à la solution suivante :

$$\theta^*(p, s) = \frac{p/s + G(s)}{p^2 - (s + B/\sigma^2)} \quad (\text{B.6})$$

où  $G(s)$  est la première transformée de la dérivée spatiale de la température à la base,  $p$  et  $s$  respectivement les paramètres d'espace et de temps de Laplace.

La première inversion de l'équation (B.6) donne :

$$\theta^*(X,s) = \frac{1}{s} \cosh \sqrt{s + B/\sigma^2} X + \frac{G(s)}{\sqrt{s + B/\sigma^2}} \sinh \sqrt{s + B/\sigma^2} X \quad (\text{B.7})$$

Le problème est donc complètement résolu si connaissant  $G(s)$ , on procède à la deuxième inversion. A cette fin, la formule d'inversion à travers les résidus est indiquée [60].

L'application de la condition à l'extrémité de l'ailette fournit :

$$G(s) = -\frac{1}{s} \frac{\left[ \sqrt{s + B/\sigma^2} \tanh \sqrt{s + B/\sigma^2} + \alpha_3^+/\sigma \right]}{\left[ 1 + (\alpha_3^+/\sigma) \frac{1}{\sqrt{s + B/\sigma^2}} \tanh \sqrt{s + B/\sigma^2} \right]} \quad (\text{B.8})$$

- Pour le cas particulier de l'ailette adiabatique ( $\alpha_3^+ = 0$ ), la relation précédente se simplifie :

$$G(s) = -\frac{1}{s} \sqrt{s + B/\sigma^2} \tanh \sqrt{s + B/\sigma^2} \quad (\text{B.9})$$

- L'autre cas qui correspond aux ailettes infiniment longues, donne :

$$G(s) = -\frac{1}{s} \sqrt{s + B/\sigma^2} \quad (\text{B.10})$$

Dans ce cas simple, l'inversion est possible par les tables [60], on trouve :

$$\theta^*(X,\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \exp\left(-\frac{X\sqrt{B}}{\sigma}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{X}{2\sqrt{\tau}} - \frac{\sqrt{B\tau}}{\sigma}\right] \\ & + \exp\left(\frac{X\sqrt{B}}{\sigma}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{X}{2\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{B\tau}}{\sigma}\right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.11})$$

et finalement la température de départ :

$$\bar{\theta}(X,\tau) = 1 - \theta^*(X,\tau) \quad (\text{B.12})$$

## ANNEXE C

Les transferts de chaleur pour le modèle physique considéré sont régis par l'équation ( T étant ici la température au dessus de l'ambient) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - m^2 T = 0 \quad (\text{C.1})$$

et pour simplifier l'analyse, les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} T &= T^*(y) && \text{en } x=0 \\ T &= 0 && \text{en } x=L \\ T &= 0 && \text{en } y=0 \\ T &= 0 && \text{en } y=l \end{aligned} \quad (\text{C.2a})-(\text{C.2d})$$

La solution de ce problème peut être obtenue par les séries de Fourier [60] :

$$T = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi y}{l} \sinh \left[ (L-x) \sqrt{m^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}} \right]}{\sinh \left[ L \sqrt{m^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}} \right]} \int_0^l T^*(u) \sin \frac{n\pi}{l} u \, du \quad (\text{C.3a})$$

$$\text{ou bien : } T = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} F(x,y,n) \int_0^l T^*(u) \sin \frac{n\pi}{l} u \, du \quad (\text{C.3b})$$

Introduisons la loi de température à la base :  $T^*(y) = T_0^*(1 + \beta y)$ .

Si  $\gamma = \frac{\beta l}{2}$ , alors :

$$\int_0^l T^*(u) \sin \frac{n\pi}{l} u \, du = \begin{cases} \frac{2T_0^* l}{n\pi} [1 + \gamma] & n=r=1,3,5,\dots \\ \frac{2T_0^* l}{n\pi} [-\gamma] & n=s=2,4,6,\dots \end{cases} \quad (\text{C.4})$$



L'efficacité suivant l'équation (4.9) est :

$$\eta = \frac{\int_0^L \int_0^L \alpha \frac{2}{l} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} F(x,y,r) \frac{2T_0^* l}{r\pi} [l+\gamma] + \sum_{s=2}^{\infty} F(x,y,s) \frac{2T_0^* l}{s\pi} [-\gamma] \right] dx dy}{\alpha T_0^* l L [l+\gamma]} \quad (C.5)$$

En portant  $F(x, y, s)$  suivant l'équation (C.3a) et en intégrant par rapport à  $y$ , le second terme du numérateur de (C.5) s'annule ( $s$ , étant un nombre pair) ; le premier terme est strictement positif. Par conséquent, l'équation (C.5) se simplifie et  $\eta$  ne dépend pas de  $\beta$ .

**RECAPITULATIF :**  
**CONTRIBUTION ET COMPARAISON**

## CONTRIBUTION

Les principales contributions de cette thèse se résument comme suit :

- La mise au point des avancées scientifiques à partir d'une bibliographie récente et spécifique aux ailettes, ainsi que la mise en relief de la problématique générée par les préoccupations industrielles se rapportant aux échangeurs ailetés.
- Le report des études antérieures dont l'objectif est de répondre aux faiblesses constatées du modèle classique. La critique pour ces études réside dans l'aspect limité en rapport des hypothèses non classiques.
- La présentation d'une expression très pratique lors d'une dépendance en température de la conductivité thermique, puisque le calcul repose sur les formules de l'ailette classiques. En somme, il s'agit d'évaluer ce paramètre suivant une certaine correction et non moyenné arithmétiquement comme il est d'usage. En conséquence, le paramètre de l'ailette rectangulaire optimal n'est pas constant, mais dépend du facteur de correction déduit dans cette thèse.
- La résolution mathématique d'un modèle en 2D original, incluant la convection à l'extrémité et aussi une dissymétrie des échanges convectifs de l'ailette. Les expressions représentant la distribution des températures et l'efficacité de l'ailette, de forme série, dérivée par une technique combinée de perturbation et de moyenne, se justifie dans ce cas. L'avantage de cette formule, d'usage pratique, est qu'elle regroupe les différents effets considérés et lève d'une part la controverse sur les dimensions géométriques. D'autre part, on a pu constater un effet non négligeable de la convection à l'extrémité et l'intérêt d'une dissymétrie. Ces séries apportent une réponse rigoureuse à ces diverses questions restées auparavant confinées dans le non quantifiable.
- Le développement d'un modèle non linéaire étendu de l'ailette et reposant sur un modèle physique décrivant de façon plus réaliste les conditions d'évolution de l'ailette, principalement hors des niveaux de température proches de celle du milieu environnant. L'écriture de l'équation de l'énergie se distingue par des fortes non linéarités.
- La mise en forme pour la programmation d'un schéma implicite spécifique au problème posé et son orientation vers l'algorithme de Thomas pour une résolution numérique à ce stade, classique.
- La démonstration de la stabilité et de la convergence du schéma élaboré, par application du théorème de Lax et par localisation des racines.
- L'écriture d'un schéma explicite plus simple que le précédent, basé sur les différences finies exponentielles bien qu'aucune étude antérieure n'était consacrée à une application aussi générale et pour un modèle non linéaire étendu.
- L'élaboration d'un programme et sa mise au point pour les résultats numériques de la thèse.

## COMPARAISON

Les résultats de la thèse les plus significatifs en rapport de ceux classiques et dans les conditions envisagées dans cette étude, sont :

- Un gain/perte d'efficacité maximum de 5% selon la caractéristique de l'ailette et suivant l'approche de cette thèse lorsque la conductivité thermique est dépendante de la température. Cette différence a pour référence l'approximation moyenne arithmétique de la conductivité thermique. En termes d'optimisation de la caractéristique de l'ailette et dans ce cas, La valeur optimale se situe à 20% d'écart de la valeur communément admise ( pour  $\varepsilon = 0.4$  ) et à 10 % de celle déduite avec la conductivité moyenne.
- L'efficacité est sous estimée -de manière régulière- de 0.03 à 0.35 suivant un large éventail ( 2 à 12 ) de la caractéristique complexe de l'ailette relevée dans la thèse et en rapport au passage de 1D à 2D. Notons que pour les constructions pratiques, le modèle 1D est donc suffisant.
- L'effet de la convection à l'extrémité peut abaisser l'efficacité de 0.20, si la caractéristique prend la valeur 2 et le coefficient d'échange de l'extrémité adimensionné, la valeur 4.
- L'influence bénéfique d'une dissymétrie totale des échanges thermiques convectifs des faces de l'ailette n'est pas négligeable. A partir de la valeur 2, le gain en efficacité atteint en moyenne 0.25 si l'on prend le modèle 2D en référence et 0.35 si le modèle classique 1D est utilisé.
- Cette thèse confirme numériquement un consensus : la dimension de l'ailette parallèle à la génératrice du tube support n'a pas d'effet sur l'efficacité.
- En comparaison des efficacités calculées de façon classique (sans convection à l'extrémité, par exemple), L'augmentation de l'épaisseur de l'ailette de 3 fois, provoque une diminution de l'efficacité de 10%.
- L'efficacité est dramatiquement dépendante du type de convection (forcée ou naturelle) et par conséquent de la prise en compte de la dépendance en température du coefficient d'échange. On observe une perte de la performance de l'ailette de 20% pour une caractéristique moyenne. Cet effet est trop important pour être négligé dans les calculs.
- A mesure que le coefficient de dépendance en température de la source thermique  $g$  évolue du simple au double, l'efficacité perd aussi 0.025 de sa valeur de référence classique et particulièrement pour les ailettes minces.
- La perte totale de l'efficacité due aux multiples dépendances en température des coefficients thermophysiques est énorme pour des cas pratiques rencontrés (figure 5.11) et se chiffre à 50% de sa valeur initiale.

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**

**Ecole Nationale Polytechnique**  
**Département de Mécanique**

**RESUME DE THESE**

Présenté par  
**Mohamed Najib Bouaziz**

En vue de l'obtention du diplôme de  
**Doctorat**

Spécialité : Mécanique / énergétique

---

**Modèles non linéaires des transferts thermiques  
dans les ailettes longitudinales**

---

Sous la direction du professeur S. RECHAK de l'ENP.

المخلص : تعتبر الجنيحة عنصر أساسي وفعال لرفع وتقوية التبادلات الحرارية. آن الأبحاث العلمية في الميدان عامة ما تكون قائمة على فرضيات مثالية موهومة بعيدة عن الواقع، لذا ارتأينا في دراستنا على تكسير هذه الفرضيات بوصف فزياتي مدقق للمسألة الحرارية للجنيحة، و من ثمة اقترحنا حل شبه تحليلي لنموذج حراري قائم على ناقلية مرتبطة بدرجة الحرارة. كما خصص نموذج ثانٍ للدراسة مدى تأثير تغيرات الحرارة العمودية، تأثير خصخصة الغير مهملة في مؤخر الجنيحة وكذا تأثير لا تناظر الخصخصة للواجهات العلوية والسفلية على الفعالية الحرارية. أدت النتائج الحاصل عليها إلى تطوير نموذج حراري عام يرتكز على صيغتين عدديتين : منهج ليز و منهج الفروق الأسية المنتهية. أنجزنا برنامجاً آلياً لحساب الفعالية الحرارية للجنيحة بدقة مقبولة. تشير النتائج إلى تغيرات قصوى في الفعالية خاصة إذا كانت الجنيحة منتجة للحرارة أو كانت ذات معامل خصخصة غير ثابت. الدراسة تبين أن تفاعل هذه العوامل له مقدار انخفاض كبير في الفعالية الحرارية.

**Résumé :** Les performances des échangeurs ailetés sont très sensibles à l'efficacité des ailettes qui sont calculées à partir de modèles classiques idéalisés. Une solution alternative semi-analytique est proposée pour un premier modèle de conductivité thermique variable. L'influence de la convection à l'extrémité, la dissymétrie des échanges est examinée dans un second modèle d'ailette épaisse. Les résultats ont conduit à la construction d'un modèle étendu discrétisé suivant la procédure de Lees, puis par différences finies exponentielles. Le code de calcul mis au point montre que les effets sur l'efficacité des non-linéarités ne sont pas négligeables.

**Mots clés :** modèles, ailette, différences finies exponentielles, non-linéarité, efficacité.

**Abstract:** Among the factors affecting the thermal performance of finned heat exchangers, is the fin-efficiency, that is widely miscalculated with idealized models. A semi - analytic alternative solution is proposed for a first model of temperature-dependent thermal conductivity. A mathematical model is developed taking into account temperature in the vertical direction, exchange at the tip fin and unequal heat transfer coefficients. The methodology of Lees and exponential finite- difference are applied to solve general discretised model. By a computation code, our results for the simultaneous effects on efficiency showed a profound discrepancy with the classical models.

**Key Words:** models, fin, exponential finite-difference, non-linear, efficiency.

---