

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE DE MAGISTERE

Présenté par:
MAGHRAOUI Ahmed

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Spécialité: Energétique

ELEMENTS D'ANALYSE DE LA REPARTITION
BIDIMENSIONNELLE DES CHAMPS THERMIQUES ET
HYDRIQUES EN MILIEU POREUX

Soutenue le: 23 Septembre 1997
devant le jury.

S. RECHAK	Professeur	ENP	Président
S. LARBI	Docteur	ENP	Rapporteur
H. BELHANECHÉ	Docteur	ENP	Examineur
B. BENKOUSSAS	C.C	ENP	Examineur
M. BOUDJEMA	C.C	ENP	Examineur

1996-1997

ENP 10, Avenue Hassen Badi - EL HARRACH - Alger

ELEMENTS D'ANALYSE DE LA REPARTITION BIDIMENSIONNELLE DES CHAMPS THERMIQUES ET HYDRIQUES EN MILIEU POREUX

ملخص:

في وسط مسامي غير مشبع ، وجود الفرق الحراري الناتج عن سبب طبيعي أو إصطناعي يولد إنتقال الرطوبة داخل هذا الوسط. الدراسة التجريبية للإنتقال المزدوج للحرارة و الرطوبة تبينت صعبة، بسبب الميزة الثنائية للأبعاد و أكثر منها للأبعاد الثلاثية لظواهر الإنتقال . لذلك تبحث في إيجاد الحلول عن طريق التشابه الرقمي .

العمل الحالي يهتم الدراسة الرقمية للإنتقال المزدوج للحرارة و الرطوبة في وسط مسامي غير مشبع. هذه الدراسة تركز على نموذج نظري ل فليب و دو فريس. طبعاً ، هذا النموذج يأخذ بعين الإعتبار كل الظواهر الأساسية المعروفة لوسط متجانس و موحد الخواص قد تم تأييده تجريبياً على نحو ملائم. هذا النموذج سمح بإنضاج نظام رقمي ثنائي الأبعاد، الذي يستعمل حل من نوع الفروق النهائية (طريقة الإتجاهات الضمنية المتغيرة) .

إستغلال هذا النظام سمح بدراسة الإنتقال الكمي للرطوبة مزدوجة بالحرارة و إظهار بديهية تأثير الجاذبية.

Abstract:

In an unsaturated porous media, the presence of temperature gradients induced by reason of natural or artificial, develops a moisture movements into the media. The experimental study of coupled heat and mass transfer avers difficult, because of two dimensional in truth three dimensional character of transfer phenomena. It is why we seek to make some numerical simulations.

The present work concerns the numerical study of simultaneous heat and mass transfer in anunsaturated porous media. This study rests on the theoretical model of PHILIP&DE VRIES. Indeed, this model takes in account all the phenomena conceded like fundamental for a homogeneous and isotropic porous material, and it was appropriately validated experimentally. This model allowed to formulate a two dimensional numerical code, who uses a finite differences approximation (A.D.I.: Alternating Direction Implicit).

The exploitation of this code allowed to study the moisture migration and to put in evidence the effect of the gravity .

Résumé:

Dans un milieu poreux non saturé, la présence d'un gradient thermique induit par une cause naturelle ou artificielle, développe un transfert d'humidité à l'intérieur du milieu.

L'étude expérimentale des transferts couplés de chaleur et de masse s'avère difficile, à cause du caractère bidimensionnel voire tridimensionnel des phénomènes de transfert; c'est pourquoi on cherche à faire des simulations numériques.

Le présent travail concerne l'étude numérique des transferts couplés de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé. Cette étude s'appuie sur le modèle théorique de PHILIP et DE VRIES. En effet, ce modèle prend en compte tous les phénomènes reconnus comme fondamentaux pour un milieu homogène et isotrope, et il a été convenablement validé expérimentalement. Ce modèle a permis d'élaborer un code de calcul bidimensionnel , qui utilise une méthode numérique de type différences finies (A.D.I.: méthode implicite des directions alternées).

L'exploitation de ce code a permis d'étudier la thermomigration et de mettre en evidence les effets de la gravité.

Mots clés:

Milieu poreux - Simulation numérique bidimensionnelle - Potentiel gravitationnel - Données expérimentales.

∞ Avant propos ∞

Cette étude à été effectuée à l'Ecole National Polytechnique au département de Génie Mécanique.

Monsieur le Professeur Saïd RECHAK, Président de la D.E.R de Génie Mécanique, Métallurgie et Génie Industriel à l'ENP, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma respectueuse gratitude.

Monsieur Salah LARBI, Docteur au département de Génie Mécanique à l'ENP, a bien voulu diriger ce travail. Je tiens à le remercier pour l'intérêt qu'il a donné à cette étude et d'en être rapporteur.

Monsieur H. BELHANECHÉ, a bien voulu accepté de faire partie du jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Monsieur B. BENKOUSSAS, a bien voulu accepté de faire partie du jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Monsieur M. BOUDJEMA, a bien voulu accepté de faire partie du jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Que toutes les personnes qui ont contribué à ce travail trouvent ici l'expression de ma gratitude.

INTRODUCTION.....	01
CHAPITRE I - ANALYSE PHYSIQUE DES DIFFERENTS MODES DE FIXATION D'HUMIDITE EN MILIEU POREUX	
I-1. MILIEUX POREUX : Définition et grandeurs physiques.....	03
I-1-1. Description.....	03
I-1-2. Propriétés.....	03
I-2. FIXATION DE L'HUMIDITE DANS UNE STRUCTURE POREUSE.....	05
I-2-1. Adsorption physique.....	05
I-2-2. Capillarité.....	07
I-2-3. Condensation.....	09
I-3. INFLUENCE DES PROPRIETES DU MATERIAU SUR LA QUALITE D'EAU FIXEE.....	10
CHAPITRE II- MODELISATION MATHEMATIQUE DES PHENOMENES DE TRANSFERTS EN MILIEU POREUX	
II-1. APPROCHE THEORIQUE DE LA PHYSIQUE DES TRANSFERTS EN MILIEU POREUX.....	12
II-1-1. Principes généraux	12
II-1-2. Echelle microscopique	12
II-1-3. Echelle macroscopique	15
II-2. RELATION ENTRE GRANDEURS MICROSCOPIQUES ET MACROSCOPIQUES	17
II-3. MODELE DIT DE PHILIP- DE VRIES	23
CHAPITRE III- MODELE MATHEMATIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES	
III-1. MODELE PHYSIQUE	31
III-2. MODELE MATHEMATIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES	32
III-2-1. Modèle mathématique	32
III-2-2. Conditions aux frontières	33
CHAPITRE IV - RESOLUTION NUMERIQUE	
IV-1. POSITION DU PROBLEME	36
IV-2. ANALYSE ADIMENSIONNELLE	36
IV-2-1. Variables de références	36
IV-2-2. Equations adimensionnelles	37
IV-2-3. Groupements adimensionnels	38
IV-3. SYSTEME D'EQUATIONS EN COORDONNES CARTESIENNES	39
IV-4. COEFFICIENTS THERMOPHYSIQUES.....	39
IV-5. TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES	40
IV-5-1. Conditions aux limites.....	40

IV-5-2. Simplification des conditions aux limites.....	41
IV-6. METHODE NUMERIQUE	43
IV-6-1.Principe de l'A.D.I.	43
IV-6-2. Mise sous forme d'équations modèles	43
IV-6-3. Discrétisation des équations.....	44
IV-6-4. Structure générale du programme de calcul.....	46
CHAPITRE V - RESULTATS ET DISCUSSION	
V-1. Premier cas	48
V-1-1. Potentiel gravitaire négligé : comparaison avec Crausse	48
V-1-2. Potentiel gravitaire pris en compte	49
V-2. Deuxième cas	50
V-2-1 Potentiel gravitaire négligé.....	50
V-2-2. Potentiel gravitaire pris en compte.....	51
V-3. Troisième cas	51
V-3-1. Transfert de masse	51
V-3-2. Transfert de chaleur	52
V-4. Effet de l'allongement sur le transfert.	52
CONCLUSION	73
ANNEXES	75
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	82

- NOMENCLATURE -

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

- a : coefficient de diffusion de masse isotherme [m² / s];
- c : capacité calorifique [J / Kg °K];
- d : longueur de l'échantillon [m];
- D : coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air [m² / s];
- D₀ : coefficient de diffusion massique isotherme global [m² / s];
- D_{0l} : coefficient de diffusion massique isotherme de la phase liquide [m² / s];
- D_{0v} : coefficient de diffusion massique isotherme de la phase vapeur [m² / s];
- D_π : coefficient de diffusion massique non isotherme de la phase liquide [m² / s °K];
- D_{πv} : coefficient de diffusion massique non isotherme de la phase vapeur [m² / s °K];
- F : fonction de pondération [-];
- g : accélération de la pesanteur [m / s²];
- h : enthalpie [J / Kg];
- I : terme source, et puit [-];
- J : densité de flux [Kg / m² s];
- K : conductivité hydraulique [m²];
- L : chaleur latente [J / Kg];
- M : masse molaire [Kg / mole];
- P : pression [N / m²];
- P_C : pression capillaire [N / m²];
- P_{vs} : pression de la vapeur saturante [N / m²];

R : constante des gaz parfaits [J / mole °K];

r : rayon des pores [m];

t : temps [s];

T : température [° K];

y, z : dimension d'espace [m].

lettres grecques

δ : coefficient de thermomigration [1 / °K];

ε : porosité [-];

λ : conductivité thermique [w / m °K];

ρ : masse volumique [Kg / m³];

ρ_0 : masse volumique du matériaux sec [Kg / m³];

(ρC) : chaleur volumique [J / m³ °K];

σ : tension interfaciale [N / m];

ω : teneur en eau pondérale [-];

θ : teneur en eau volumique [-];

α, β, χ : coefficient traduisant l'accumulation en phase vapeur [-];

ψ : succion [m];

ϕ : humidité relative [-];

∇ : opérateur $i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right), j \left(\frac{\partial}{\partial y} \right), k \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)$ [1 / m];

Indices, symboles

* : grandeur définie en milieu poreux ;

l : liquide ;

v : vapeur ;

0 : valeur initiale ;

a : air ;

q : chaleur ;

m : masse ;

c : critique ;

h : humide ;

i : intérieur ;

e : extérieur ;

s : surface ;

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Relations

$$a_l = D_{al} ;$$

$$a_v = D_{av} ;$$

$$a_l \cdot \delta_l = \frac{\rho_l}{\rho_0} \cdot D_{\pi} ;$$

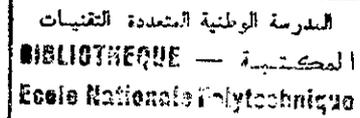
$$a_v \cdot \delta_v = \frac{\rho_v}{\rho_0} \cdot D_{\tau v} ;$$

$$a = a_l + a_v ;$$

$$a\delta = a_l \cdot \delta_l + a_v \cdot \delta_v .$$

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION



Introduction

Les transferts couplés de chaleur et de masse qui se développent dans les milieux poreux non saturés, sous l'influence de faibles gradients de température, jouent un rôle extrêmement important dans divers phénomènes naturels ou processus industriels, Il en est ainsi dans échanges d'humidité entre le sol et l'atmosphère par suite des variations de température journalière et saisonnière de la surface, mais également dans certains domaines techniques : génie-civil, séchage des matériaux, voire technologique: caloducs, où les transferts de masse sont stimulés de façon naturelle ou artificielle par des gradients de température.

L'amélioration des connaissances, concernant la physique de ces transferts revêt, par ailleurs, une importance grandissante au moment où se pose avec acuité le problème d'une meilleure utilisation de l'énergie et de son stockage. Qu'il s'agisse de développer de nouvelles techniques de séchage, d'améliorer l'isolation thermique des bâtiments ou d'utiliser le sol comme source ou réservoir d'énergie; la question fondamentale à laquelle se trouve confrontée l'élaboration de tout projet est en effet celle de l'estimation des transferts couplés de chaleur et de masse dans les structures poreuses correspondantes.

Selon les secteurs d'applications concernés, où les problèmes pratiques rencontrés, diverses tentatives de description physique et de modélisation mathématique de ces phénomènes ont été effectués au cours des dernières décennies. C'est ainsi qu'après les premiers travaux de modélisation fondés sur la prise en compte exclusive du transfert en phase vapeur, des améliorations sensibles ont été apportées à la théorie à travers les études de PHILIP et DE VRIES [18], LUIKOV [35], MARLE[38], BEAR [4] et WHITAKER [48] en prenant en considération les transferts simultanés en phase liquide et vapeur ainsi que les effets de couplage et d'interaction entre transfert de chaleur et transfert de masse.

L'étude expérimentale des processus réels de transferts couplés de chaleur et de masse dans les milieux poreux pose énormément de difficultés à cause du caractère bidimensionnel voire même tridimensionnel de la répartition spatio-temporelle des champs thermiques et hydriques ainsi que les difficultés de mesures liés aux techniques expérimentales employés [15]; ainsi, le recours à la simulation numérique de ces phénomènes devient une nécessité impérieuse.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans la continuité des études déjà entreprises [15, 27, 37, 42]. CRAUSSE [15], à travers une étude expérimentale (d'un milieu poreux non consolidé placé dans une cellule de forme cylindrique), et une simulation numérique (en utilisant le modèle de LUIKOV [35]) à une dimension d'espace a constaté qu'à partir d'une certaine teneur en eau (supérieure à 4%), les résultats numériques et expérimentaux ne concordaient pas; il a attribué cette différence à l'influence de potentiel gravitationnel. PRAT [42] et FIRDAOUSS [37], sur la base d'une étude numérique bidimensionnelle, ont montré l'influence de la gravité sur la répartition des champs d'humidité et de température dans le milieu poreux et, suivant le rapport du diamètre de la cellule employée par CRAUSSE [15] à sa longueur, le problème présente un aspect mono ou bidimensionnel.

Notre contribution à travers cette étude, vise à mettre en évidence l'influence du potentiel gravitationnel sur les distributions d'humidité et de température pour un modèle physique fermé c'est à dire un modèle de section rectangulaire sans transfert de masse sur ses faces et qui peuvent être

isothermes et (ou) adiabatiques, ainsi que la localisation des zones de dépôt d'humidité et l'analyse de la compétition entre l'effet thermique et l'effet gravitationnel.

Le travail présenté s'articule autour de cinq chapitres:

- le premier est consacré à quelques rappels sommaires concernant la description physique des différents modes de fixation d'humidité au sein d'un milieu poreux;
- le second chapitre traite la modélisation mathématique des phénomènes de transfert en milieu poreux où sont sommairement rappelés les concepts de base et les hypothèses utilisées dans sa formulation;
- le troisième chapitre est relatif au modèle mathématique choisi et aux conditions aux frontières;
- le quatrième chapitre concerne la résolution numérique du modèle mathématique de PHILIP et DE VRIES [18] sur la base d'un système physique donné;
- Le dernier chapitre est enfin destiné à valider le modèle mathématique utilisé où sont comparés nos résultats à ceux obtenus expérimentalement par CRAUSSE [15] et numériquement par PRAT [42] et FIRDAOUSS [37].

Mots Clés:

Milieu poreux - Simulation numérique bidimensionnelle-Potentiel gravitationnel- Données expérimentales.

CHAPITRE I

ANALYSE PHYSIQUE DES DIFFERENTS MODES DE FIXATION D'HUMIDITE EN MILIEU POREUX

I-1 MILIEU POREUX : Définition et Grandeurs physiques

I-1-1 Description

I-1-2 Propriétés

I-2 FIXATION DE L'HUMIDITE DANS UNE STRUCTURE POREUSE

I-2-1 Adsorption physique

I-2-2 Capillarité

I-2-3 Condensation

I-3 INFLUENCE DES PROPRIETES DU MATERIAUX SUR LA QUANTITE D'EAU FIXEE

I-1 MILIEUX POREUX : Définition et Grandeurs physiques

I-1-1 Description :

Les milieux poreux constituent un système extrêmement complexe, non seulement de par leur composition en trois phases (Solide, liquide et gazeuse), mais également de par la taille, la forme et l'agencement du squelette solide, qui limite l'espace dans lequel la phase liquide l'eau, et la phase gazeuse l'air, se déplacent ou sont piégées; les effets de température sur chacune des trois phases peuvent également modifier leurs propriétés physiques, et donc conditionner le comportement du milieu poreux vis à vis de son environnement.

I-1-2 Propriétés :

Diverses grandeurs fondamentales et paramètres spécifiques permettent de préciser les caractéristiques thermophysiques des milieux poreux.

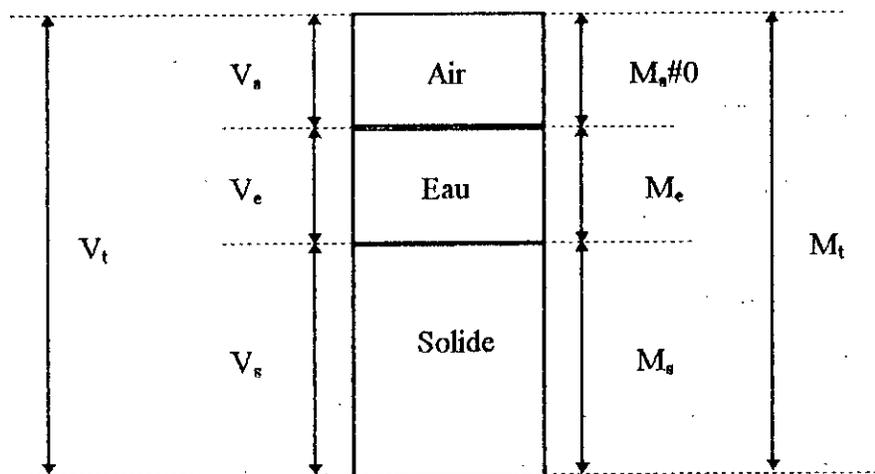


FIG (I - 1)

En schématisant le milieu poreux selon le système ci-dessus, figure (I-1), diverses relations entre les volumes V et les masses M des constituants peuvent être mis en évidence.

- La masse et le volume total du matériau :

$$M_t = M_a + M_e + M_s \quad \text{et} \quad V_t = V_a + V_e + V_s \quad (1-1)$$

- Le matériau à l'état sec possède une masse volumique apparente définie par :

$$\rho_0 = \frac{M_s}{V_t} \quad (1-2)$$

- La masse volumique de la phase solide est donnée par:

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s} \quad (1-3)$$

- La masse volumique équivalente est exprimée par:

$$\rho^* = \frac{M_t}{V_t} = \frac{M_s + M_e + M_a}{V_t} \quad (1-4)$$

qui peut s'exprimer sous la forme

$$\rho^* = \rho_0 \cdot \left(1 + \frac{M_e}{M_s} + \frac{M_a}{M_s} \right) \quad (1-4')$$

La masse de l'air humide pouvant être négligée devant la masse d'eau et de solide, la masse volumique équivalente se réduit à:

$$\rho^* = \rho_0 \cdot \left(1 + \frac{M_e}{M_s} \right) \quad (1-4'')$$

Dans cette expression, le rapport $\frac{M_e}{M_s}$ exprime la teneur en eau pondérale donnée par:

$$\omega_e = \frac{M_e}{M_s} \quad (1-5)$$

On peut aussi exprimer en terme de teneur en eau volumique sous la forme:

$$\theta_e = \frac{V_e}{V_t} \quad (1-6)$$

La teneur en vapeur pondérale ω_v et volumique θ_v s'expriment de la même manière:

$$\omega_v = \frac{M_v}{M_s} \quad (1-7)$$

$$\theta_v = \frac{V_v}{V_t} \quad (1-8)$$

La teneur en humidité (phase liquide et gazeuse) du matériau poreux s'exprime alors par:

$$\omega = \omega_v + \omega_e \quad (1-9)$$

Si l'on considère que la teneur en vapeur ω_v est négligeable devant ω_e , l'expression finale de la masse volumique équivalente du matériau se réduit à:

$$\rho^* = \rho_0 \cdot (1 + \omega) \quad (1-10)$$

I-2 FIXATION DE L'HUMIDITE DANS UNE STRUCTURE POREUSE

D'une manière générale, la fixation d'humidité, dans les milieux poreux, résulte de l'action plus au moins conjointe de trois mécanismes physiques fondamentaux : l'adsorption, la condensation et la capillarité. L'importance relative du rôle de chacun de ces mécanismes sur la masse d'humidité fixée dépend quant à elle de divers paramètres :

- propriétés structurales du milieu (porosité, surface spécifique) ;
- nature de la phase aqueuse avec laquelle le matériau est mis en contact (vapeur ou liquide) ;
- conditions thermodynamiques (pression, température) auxquelles il se trouve soumis.

Si l'on admet qu'il n'ya pas de réaction chimique entre le matériau solide constituant la structure poreuse et l'eau (vapeur ou liquide) avec laquelle cette structure est mise en contact, trois mécanismes peuvent intervenir pour contribuer à la fixation d'humidité au sein du milieu poreux. Il s'agit respectivement de l'adsorption physique, de la capillarité et de la condensation.

I-2-1 Adsorption physique

Pour illustrer ce phénomène, considérons un échantillon d'un milieu poreux sec de masse m_0 placé dans une enceinte dont on peut contrôler la température T et l'humidité relative : $\phi = P_v / P_{vs}$ (P_v étant la pression régnant dans l'enceinte et P_{vs} la pression de vapeur saturante à la température T).

Si l'on fait varier ϕ , la température étant maintenue constante, on remarque que le poids de l'échantillon augmente au fur et à mesure que la pression de vapeur dans l'enceinte se rapproche de la pression de vapeur saturante. Cet accroissement de poids, correspond à la fixation d'une certaine quantité d'eau par le milieu poreux, sous l'action des phénomènes dits, d'adsorption, dont l'origine physique est attribuée aux forces intermoléculaires (forces de VAN DER WAALS) agissant sur les molécules de vapeur au voisinage de l'interface solide-fluide dans les pores.

L'interprétation théorique des courbes de sorption, traduisant l'accroissement de la teneur en eau de l'échantillon $\omega_e = \frac{m}{m_0}$ (m étant la masse d'eau fixée par la masse m_0 de matériau sec) en fonction de l'humidité relative, a conduit à distinguer différentes étapes dans le processus de fixation de l'humidité (Figure (I - 2)):

- l'adsorption monomoléculaire caractérisée par la fixation d'une couche de molécules d'eau sur la surface des pores (Figure (I - 2 - 1)).
- l'adsorption plurimoléculaire caractérisée par la fixation de plusieurs couches de molécules d'eau sur la première couche adsorbée (Figure (I - 2 - 2)).

- enfin, lorsque les diamètres des pores sont suffisamment petits, la condensation capillaire sur les ménisques formés par la jonction des couches plurimoléculaires (Figure (I - 2 - 3)).

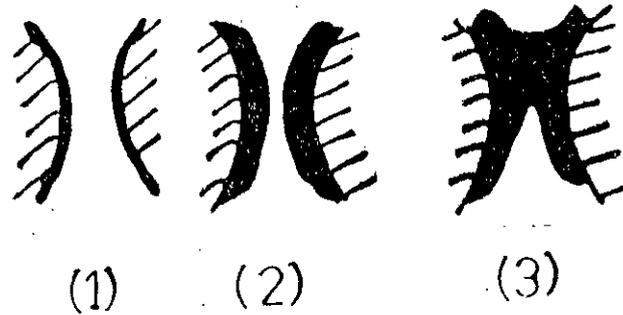


FIG (I - 2)

Cette description des phénomènes et les modèles théoriques correspondants sont, dans l'ensemble, assez largement justifiés par l'expérience [20, 13]. Sur une courbe d'adsorption type, le processus de fixation de l'humidité est ainsi convenablement représenté (Figure (I - 3)) :

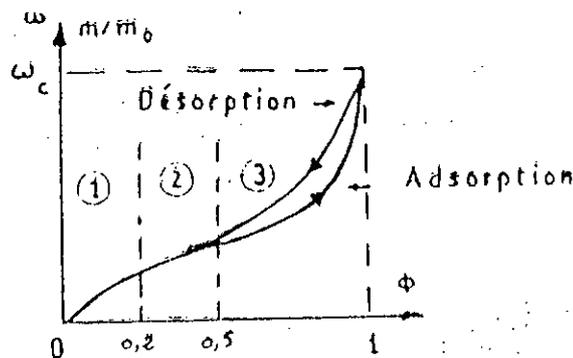


FIG (I - 3)

- par la théorie de l'adsorption monomoléculaire de LANGMUIR [20] lorsque

$$\phi \in [0, 0.2] \text{ environ.}$$

- par la théorie de l'adsorption plurimoléculaire de BRENAUER, EMMET, TELLER [13] lorsque

$$\phi \in [0.2, 0.5]$$

- enfin par la théorie de la condensation capillaire de KELVIN [20] lorsque

$$\phi \in [0.5, 1] \text{ environ.}$$

On peut montrer que, dans ce dernier cas, la pression de vapeur d'équilibre est reliée à la pression de vapeur saturante par la relation :

$$\phi = \frac{P_V}{P_{Vs}} = e^{-\frac{2 \sigma M_V}{r \rho_e R T}} \quad (1-11)$$

(r rayon du capillaire, σ tension interfaciale eau-vapeur, ρ_e masse volumique de l'eau liquide, M_V masse moléculaire de la vapeur, T température, R constante des gaz parfaits).

Malgré les nombreuses questions qu'il conviendrait encore à développer (influence de la température, hystérésis des courbes de sorption et désorption, énergie de liaison) et pour lesquelles on trouvera des réponses très complètes dans [13], nous concluons ces quelques rappels sur l'adsorption en précisant que la teneur en eau maximale, ω_c , qui peut être fixée dans un milieu poreux par ce mécanisme est, en règle générale, très inférieure à la teneur en eau correspondant à la saturation complète (remplissage de tous les pores).

A partir de la situation d'équilibre hygroscopique ($\omega_c = \omega_c, \phi = 1$), l'accroissement de teneur en eau ne peut alors se poursuivre que s'il y a un apport d'eau en masse. Deux mécanismes peuvent concourir à cela : la capillarité et la condensation de la vapeur saturée.

1 - 2 - 2 Capillarité

En tant que mécanisme de fixation de l'humidité, la capillarité intervient lorsque la structure poreuse est mise en contact avec de l'eau en phase liquide (Figure (I-4-a)). Sans entrer dans une analyse détaillée des phénomènes complexes de mouillabilité, l'expérience montre, que dans de nombreux cas, l'eau liquide présente un comportement mouillant par rapport au solide constituant les structures poreuses. Cette affinité de l'eau, qui se traduit par une tendance à l'étalement du liquide sur la surface des pores, conduit alors à la formation d'interfaces courbes entre le fluide mouillant liquide et non mouillant gazeux constitué, en l'occurrence, par l'air humide (Figure (I-4-b)).

Lorsque l'on examine la condition d'équilibre d'une telle interface, on constate qu'il existe, de part et d'autre, une différence de pression $P_C = P - P_e > 0$, la pression P_e dans la phase liquide étant inférieure à la pression P dans la phase gazeuse.

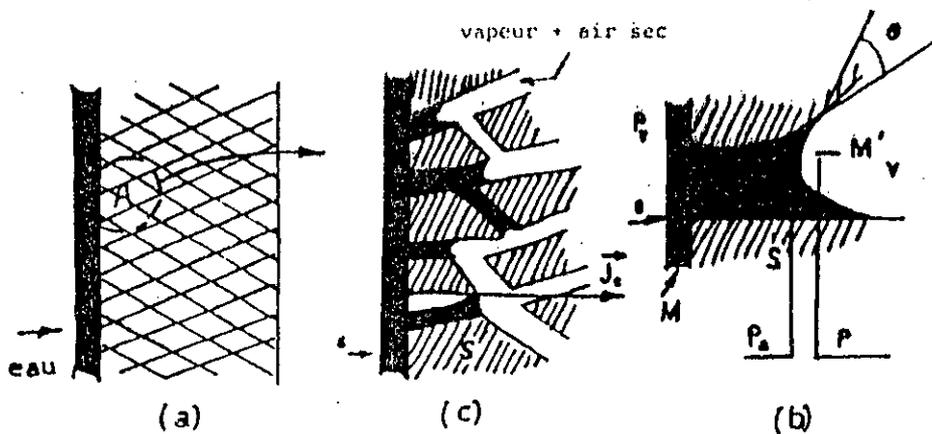


FIG (I-4)

Cette différence de pression P_C , appelée pression capillaire, s'exprime :

- en fonction de la tension interfaciale liquide-gaz $\sigma(T)$, et des rayons de courbures principaux R_1, R_2 , de l'interface par la loi de LAPLACE :

$$P_C = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1-12)$$

- ou bien, en fonction de la mouillabilité, caractérisée par l'angle θ , formé par les tangentes à la surface solide et à l'interface au point d'accrochage du liquide, et du rayon de pore. Pour un capillaire de section droite circulaire et de rayon r , on a dans ces conditions :

$$P_C = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos(\theta)}{r} \quad (1-13)$$

Etant donné que la pression dans le liquide libre, avec lequel la surface externe de la structure poreuse est mise en contact, est égale à la pression de l'air humide (l'espace des pores occupé par la phase gazeuse étant en relation avec l'extérieur à la structure - porosité ouverte -) il existe donc une différence de pression dans l'eau liquide lorsque l'on passe d'un point M extérieur à la structure à un point M' situé au voisinage d'une interface. Sous l'effet de cette différence de pression, égale à la pression capillaire, un écoulement liquide conduisant au remplissage des pores ou de certaines classes de diamètre de pores par l'eau liquide s'établit (Figure (I - 4 - c)).

En milieu poreux, la pression capillaire varie en fonction de la teneur en eau liquide ω , comme le montre la figure (I - 5). Elle s'annule pour une teneur en eau qui est la teneur en eau de saturation ω_{cs} , pour laquelle tous les pores sont remplis, et croit de façon continue lorsque ω diminue de ω_{cs} à ω_c . Comme dans le domaine d'adsorption, de Kelvin, les courbes $P_C(\omega)$ présentent des effets d'hystérésis qui peuvent être extrêmement marqués entre drainage (ω_c décroissant) et imbibition (ω_c croissant). L'allure des courbes $P_C(\omega)$ est déterminée quant à elle par la loi de distribution des rayons de pores. Etant donné la dépendance de P_C avec σ et T , P_C est donc également une fonction de T :

$$P_C = P_C(\omega, T) \quad (1-14)$$

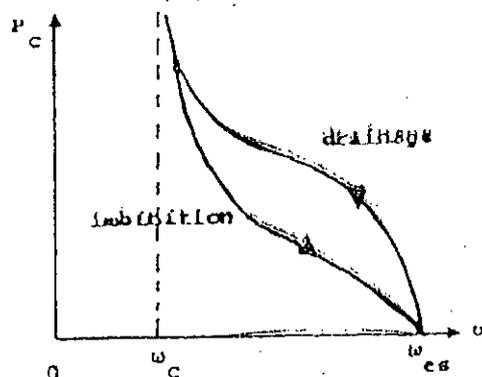


FIG (I - 5)

La relation fondamentale de LAPLACE indique qu'en raison de l'influence de la tension superficielle ou interfaciale, l'équilibre mécanique entre phases séparées par une interface courbe est réalisé pour des valeurs différentes des pression dans chacune des phases, la pression la plus élevée régnant dans la phase fluide située du côté concave. Ce n'est que lorsque l'interface est plate (rayon de courbure infini) que les pression de part et d'autre de l'interface sont égales. Comme nous le verrons dans ce qui suit ce phénomène n'est pas sans conséquence sur les conditions d'équilibre thermodynamique.

I - 2 - 3 Condensation

Bien entendu il ne sera pas question ici de s'interroger sur les fondements de la théorie à l'échelle moléculaire. Notre préoccupation sera en fait beaucoup plus modeste. Supposons qu'à l'échelle du continu le changement de phase est correctement décrit par les données thermodynamiques d'équilibre, nous nous bornerons, essentiellement, à vérifier si les modèles macroscopiques, généralement utilisés en milieu poreux, peuvent être considérés comme des outils de prédiction satisfaisants des évolutions spatio-temporelles de la phase liquide provenant de la condensation d'une vapeur sursaturée.

Pour illustrer de manière simple, ce phénomène, considérons une paroi poreuse dont l'une des faces est rendue étanche à la vapeur d'eau. Imaginons que cette paroi est en équilibre hygrothermique, T_0 étant sa température, $P_{v0} < P_{vs0}$ la pression de vapeur dans l'espace des pores, (P_{vs0} étant la pression de vapeur saturante correspondant à T_0) (Figure (I-6)) et supposons que par suite d'un refroidissement de la face imperméable, un régime thermique stationnaire, caractérisé par une variation de température T_0, T_e , telle que $T_e < T_0$ s'établisse. Si la courbe de pression de vapeur saturante correspondant à cette nouvelle distribution de température se situe, en certains points de la paroi, en dessous de la valeur P_{v0} , il est bien évident que l'on aura condensation. La masse d'eau liquide ainsi formée proviendra, d'une part, de la condensation de la vapeur initialement en place dans ce domaine et d'autre part, de la condensation d'une partie du flux d'humidité, en phase vapeur, s'écoulant vers les zones froides par diffusion moléculaire (Figure (I-6-b)).

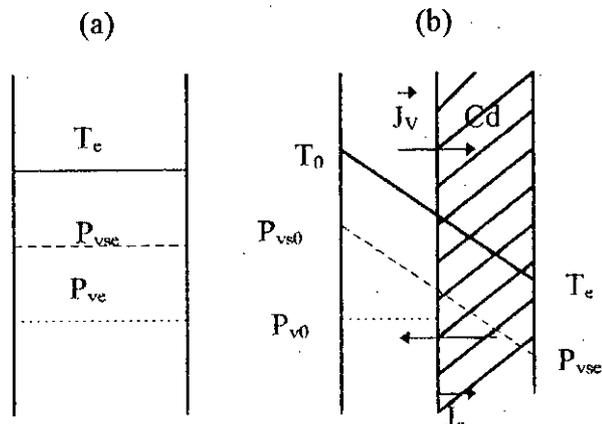


FIG (I-6)

Cette analyse schématique, constitue le fondement du modèle théorique proposée par GLASER [24] et complété ultérieurement par VOS [48] puis par KRISCHER [30], pour prendre en compte la contibution des effets capillaires, conduisant à l'apparition d'un flux d'eau liquide opposé au flux de vapeur dans la zone de condensation.

I - 3 INFLUENCE DES PROPRIETES DU MATERIAU SUR LA QUANTITE D'EAU FIXEE.

La quantité d'humidité qui peut se trouver fixée à l'équilibre par adsorption, condensation ou capillarité au sein d'un milieu poreux, dépend d'un certain nombre de caractéristiques géométriques globales de celui-ci: les cacactéristiques structurales. En ce qui concerne l'adsorption physique, dont l'effet se traduit par la fixation de molécules de vapeur à la surface des pores, le paramètre de structure fondamental qui détermine la quantité d'eau qui peut être fixée par un tel mécanisme est la surface spécifique S , surface limitant l'espace poreux par unité de volume du milieu poreux. En ce qui concerne la condensation et la capillarité, il s'agit principalement du volume des pores, caractérisé par la porosité ϵ , rapport du volume des vides accessibles sur le volume de l'échantillon.

Lorsque au lieu de considérer des situations d'équilibre, on s'intéresse à l'aspect dynamique des processus, d'autres grandeurs jouent un rôle essentiel. Il s'agit notamment:

- du diamètre des pores, d , dont l'influence se manifeste respectivement: sur les phénomènes de condensation capillaire, lors de l'adsorption (relation de KELVIN), sur le phénomène de capillarité conduisant à la fixation d'eau en masse (pression capillaire) et sur la résistance à l'écoulement (perméabilité ou perméabilité relative).

- de la tortuosité, définie par la relation: $T = \left(\frac{L_e}{L} \right)^2$ (L_e longueur réelle des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon , L longueur de celui-ci) dont l'influence se manifeste également sur les capacités d'écoulement des fluides à travers le matériau (perméabilité , diffusion moléculaire de la vapeur).

Si l'on se limite à l'analyse des seuls paramètres caractéristiques S , d , ϵ qui sont le plus commodément accessibles, certaines grandes familles de matériaux poreux peuvent être distinguées en dépit des très larges variations des paramètres considérés (Figure (I - 7)).

Si, par ailleurs, en utilisant la relation de KELVIN, on détermine le diamètre maximum du pore, au delà duquel les phénomènes de condensation capillaire ne peuvent plus se manifester : $P_v = P_{vs}$, soit $r \sim 10^{-7}$ m pour l'eau à 10°C, on peut en outre distinguer deux types de comportement des matériaux poreux :

- les matériaux dits hygroscopiques, dans lesquels les mécanismes d'adsorption peuvent contribuer à la fixation de quantité d'humidité non négligeable (ces matériaux ayant une grande surface spécifique et de surcroît des rayons de pores inférieur à 10^{-7} m), domaine A (Figure (I - 7)).
- les matériaux non hygroscopiques ou capillaro-poreux ($r > 10^{-7}$ m) pour lesquels la quantité d'humidité fixée par adsorption est faible voir négligeable , domaine B (Figure (I - 7))

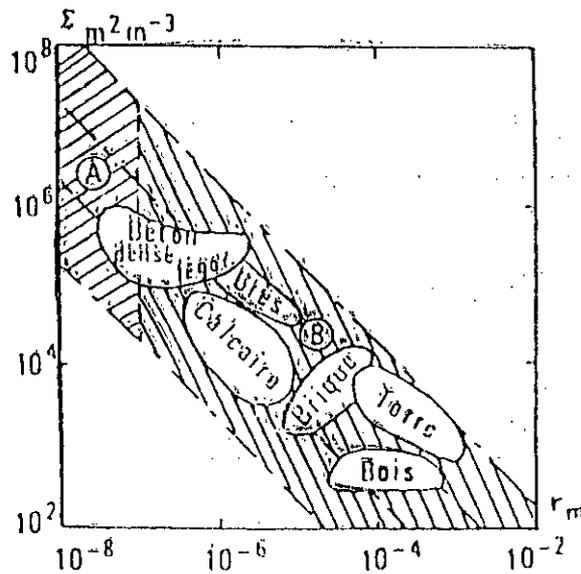


FIG (I - 7)

En règle générale, même pour les matériaux ayant un comportement réputé hygroscopique, la quantité d'humidité fixée par adsorption reste faible comparée à la quantité d'humidité correspondant au remplissage de tous les pores (saturation complète) .

Le matériau utilisé pour effectuer nos calculs est du type capillaro-poreux. Il s'agit d'un sable quartzique dont le diamètre des grains est compris entre 100 et 125 μm et dont la porosité dans les conditions de compactage usuels peut varier de 39 à 41% . Ce matériau a fait l'objet d'une étude extrêmement complète voir CRAUSSE [15] . La banque de données dont on dispose concerne aussi bien les coefficients de diffusion de masse (vapeur et liquide) que les propriétés thermophysiques (conductivité et diffusivité thermiques) ainsi que leurs variations en fonction de la teneur en eau et la température.

CHAPITRE II

MODELISATION MATHEMATIQUE DES PHENOMENES DE TRANSFERTS EN MILIEU POREUX

**II-1 APPROCHE THEORIQUE DE LA PHYSIQUE DES TRANSFERTS EN MILIEU
POREUX.**

II-1-1 Principes généraux

II-1-2 Echelle microscopique

II-1-3 Echelle macroscopique

II-2 RELATION ENTRE GRANDEURS MICROSCOPIQUES ET MACROSCOPIQUES

II-3 MODELE DIT DE PHILIP-DEVRIES

II-1 APPROCHE THÉORIQUE DE LA PHYSIQUE DES TRANSFERTS EN MILIEU POREUX.

II-1-1 Principes généraux

La modélisation mathématique des phénomènes de transferts en milieu poreux s'inspire directement des méthodes classiques de la mécanique des milieux continus (expressions locales des lois de conservation).

En raison de la complexité de l'espace poreux, cette approche ne peut toutefois être mise en pratique qu'après un changement d'échelle dont l'étape essentielle consiste à définir un volume élémentaire de référence (V. E. R.) permettant d'établir une équivalence entre milieu poreux et le milieu continu fictif. Par opposition avec l'échelle du continu classique, dite microscopique, telle qu'elle est proposée en mécanique des milieux continus, l'échelle du milieu continu fictif équivalent au milieu poreux définie à partir d'un élément de volume dont les dimensions sont grandes auprès des dimensions des pores, est dite macroscopique.

Dans cette acception, variables et paramètres physiques sont supposés représentatifs des variables et paramètres physiques moyens définis au sein du continuum poreux.

II-1-2 Echelle microscopique

Le fluide est vu sous son aspect structural comme étant composé d'un très grand nombre de molécule en mouvement, pouvant entrer en collision les unes avec les autres et avec les parois du récipient les contenant.

L'application de la théorie de la mécanique classique permet, en principe de décrire complètement l'état de ces molécules à n'importe quel instant, pourvu que soient connues la position et la vitesse initiales de chaque molécule ainsi que les forces mises en jeu.

En dépit de cette hypothèse, qui est impossible à satisfaire en pratique, il est excessivement délicat de résoudre ce problème; notons par ailleurs que dans un gramme de gaz, on dénombre plus de 10^{22} molécules: cela met en évidence l'ardeur de la tâche à accomplir ; même avec les calculateurs les plus rapides, on mettrait des milliard d'années pour résoudre les systèmes d'équations qui en résulteraient.

Nous sommes alors amenés à abandonner cette approche à l'échelle moléculaire pour une autre approche à l'échelle dite microscopique: la particule fluide est, dans cette approche, composée d'un grand nombre de molécules occupant un volume de fluide de dimension suffisamment grandes devant le libre parcours moyen des molécules et très petites comparées aux dimensions de l'ensemble du fluide sur lequel porte l'étude.

Cette approche, de nature statistique, permet de prédire les valeurs moyennées des différentes grandeurs physiques recherchées, prises sur un volume élémentaire de fluide ou particule fluide.

La double restriction sur la taille de la particule fluide assure d'une part la représentativité des grandeurs moyennées en imposant une taille assez grande pour permettre à un effet de moyenne d'apparaître, et d'autre part confert à ces mêmes grandeurs un caractère local en imposant une taille assez petite devant la totalité du domaine de fluide étudié.

Pour illustrer ceci, considérons une grandeur intensive, la masse volumique ρ , définie comme le rapport de la masse du fluide Δm au volume ΔV occupé par ce même fluide. En un point quelconque P du fluide, on peut imaginer une série de volumes ΔV_i centrés en P et contenant des masses de fluide Δm_i . Il correspond alors, une série de masses volumiques moyennes $\rho_i = \Delta m_i / \Delta V_i$, représentées sur la figure (II-1).

On remarque que pour des valeurs proches de ΔV_0 , la masse volumique ρ_i reste pratiquement constante. Pour des valeurs plus grandes, elle change graduellement dans le cas d'un fluide non homogène et reste constante dans le cas d'un fluide homogène. Pour des valeurs plus petites, de l'ordre de λ (λ : distance moyenne entre molécules ou libre parcours moyen des molécules), de larges fluctuations de ρ_i sont observées et, de ce fait, il devient insignifiant de représenter par ρ_i la masse volumique en P . Ainsi, la masse volumique du fluide au point P est définie par :

$$\rho(P) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} \rho_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} (\Delta m_i / \Delta V_i) \quad (2-1)$$

Un volume caractéristique ΔV_0 est appelé point physique (ou point matériel) du fluide au point mathématique P , c'est le volume d'une particule fluide au point P . De cette façon, le fluide composé d'un très grand nombre de molécules, présentant des vides est remplacé par un continuum composé d'un grand nombre de particules fluides pour lequel une fonction ρ continue dans l'espace est définie par :

$$\lim_{P' \rightarrow P} \rho(P') = \rho(P) \quad (2-2)$$

Notons que pour un milieu homogène, il importe de définir une longueur caractéristique L par:

$$L = \rho / (\partial \rho / \partial l) \quad (2-3)$$

ou selon chaque direction:

$$L_x = \rho / (\partial \rho / \partial x) ; L_y = \rho / (\partial \rho / \partial y) ; L_z = \rho / (\partial \rho / \partial z)$$

Avec :

$$(2-4)$$

$$\partial \rho / \partial l = \lim_{\Delta l \rightarrow \Delta l_0} \left[\rho \cdot \left(1 + \frac{\Delta l}{2} \right) - \rho \cdot \left(1 - \frac{\Delta l}{2} \right) \right] / \Delta l$$

$\lambda < \Delta l_0 < L$, est la longueur caractéristique du fluide au point P, avec $(\Delta l_0)^3$ de l'ordre de ΔV_0 .

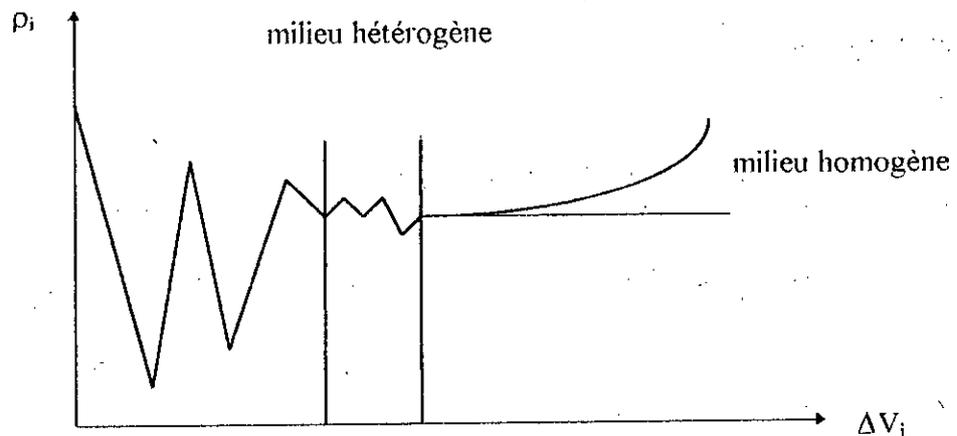


FIG (II-1): Densité d'un fluide

Notons aussi qu'il importe de faire le même raisonnement que précédemment, par rapport à la variable temps t afin de déterminer l'intervalle de temps Δt_0 qui permet à un effet de moyenne dans le temps de se manifester. En effet, si l'on observe (ou on mesure) une grandeur quelconque, soit la masse volumique ρ_i au point P du fluide à des intervalles de temps Δt_i autour d'un instant mathématique t , on obtiendra différentes valeurs ρ_i qu'on pourrait représenter sur une figure similaire à la figure (II-1). On définit alors le temps caractéristique τ par:

$$\tau = \rho / (\partial \rho / \partial t) \quad (2-5)$$

Le libre temps moyen d'une molécule λ_i est défini quand à lui comme étant l'intervalle de temps durant lequel chaque molécule entre en collision une fois en moyenne avec une autre molécule.

Δt_0 satisfait alors la condition :

$$\lambda_i \langle \Delta t_0 \rangle \ll \tau \quad (2-6)$$

Nous avons présenté dans ce qui précède, l'approche permettant de passer de l'échelle moléculaire à l'échelle microscopique associée au milieu continu fluide; ainsi, le fluide se présente au sein du milieu poreux comme un milieu continu délimité par des surfaces des parois solides de la matrice du milieu poreux. Nous allons, dans ce qui suit, procéder d'une manière analogue pour passer à une autre échelle, celle du V.E.R.

II-1-3 Echelle macroscopique

Considérons un point mathématique P au sein du milieu poreux et un volume ΔV_i (de forme sphérique) centré en P et de taille supérieure à celle d'un grain ou d'un pore. Déterminons pour ce volume le rapport :

$$\eta_i \equiv \eta_i \cdot (\Delta V_i) = (\Delta V_e)_i / \Delta V_i$$

$(\Delta V_e)_i$ désigne le volume de l'espace vide contenu dans (ΔV_i) .

En répétant la même procédure, une séquence de valeurs de $\eta_i \cdot (\Delta V_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ est obtenue en diminuant progressivement la taille de ΔV_i autour de P: $\Delta V_1 > \Delta V_2 > \Delta V_3 \dots$. Cette séquence est représentée sur la figure (II-2).

On distingue alors, comme au paragraphe précédent, trois domaines:

- Un domaine correspondant aux valeurs élevées de ΔV_i ; caractérisé par une constance du rapport $\eta_i \cdot (\Delta V_i)$ dans le cas d'un milieu homogène et par des fluctuations de plus en plus faibles en se rapprochant de ΔV_0 dans le cas d'un milieu hétérogène;

- Un domaine correspondant aux valeurs de ΔV_i légèrement supérieures à ΔV_0 caractérisé par de plus faibles fluctuations de $\eta_i \cdot (\Delta V_i)$ dues à la distribution aléatoire de la taille des pores au voisinage de P;

Un domaine correspondant aux valeurs de ΔV_i inférieures à ΔV_0 caractérisé par de larges fluctuations de $\eta_i(\Delta V_i)$. Il correspond à des valeurs de ΔV_i proches de celle du volume d'un pore singulier;

Finalement, lorsque $\Delta V_i \rightarrow 0$, convergeant vers le point mathématique P, le rapport $\eta_i(\Delta V_i)$ prend la valeur 0 ou 1 selon que le point P est situé à l'intérieur d'un pore ou d'un grain de la matrice solide du milieu.

La porosité volumique au point P du milieu poreux est définie comme la limite de η_i lorsque $\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0$:

$$\eta(P) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} \eta_i(\Delta V_i(P)) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} [(\Delta V_e)_i(P)] / \Delta V_i \quad (2-7)$$

Le volume ΔV_0 est donc le volume élémentaire représentatif ou point physique (ou matériel) au point mathématique P du milieu poreux.

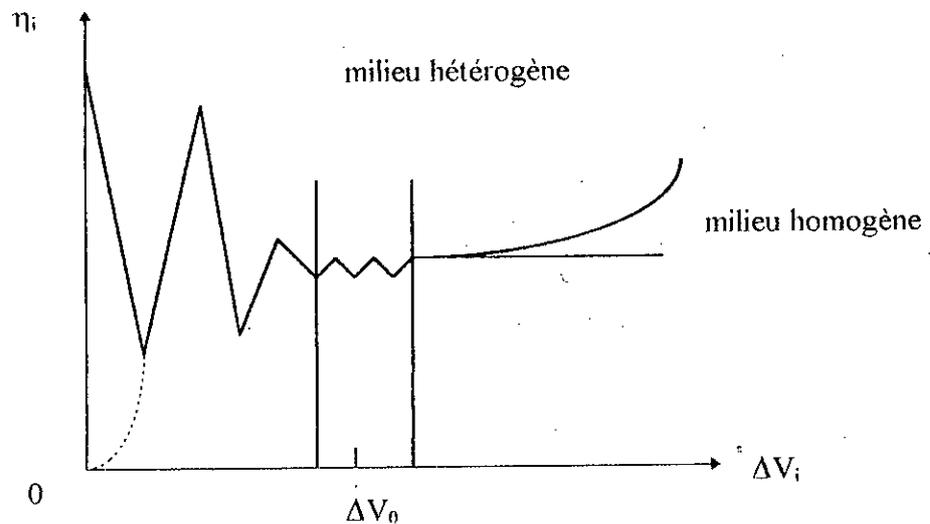


FIG (II-2) : Définition de la porosité et du V. E. R.

En admettant une variation graduelle de ΔV_e et ΔV_0 au voisinage de P, il vient :

$$\eta(P) = \lim_{P' \rightarrow P} \eta(P') \quad (2-8)$$

Ce qui signifie que η est une fonction continue de la position P au sein du milieu poreux.

Ainsi, par l'introduction du concept de porosité et la définition du V.E.R., nous avons remplacé le milieu réel par un milieu continu fictif dans lequel on peut attribuer des valeurs pour n'importe quelle propriété (aussi bien du milieu que du fluide s'y trouvant) à n'importe quel point mathématique du milieu. Soulignons cependant, que parfois il est nécessaire de définir des V.E.R. du milieu sur la base d'autres paramètres que la porosité.

De la même manière que pour la porosité volumique, on peut définir la porosité surfacique (η_A) et linéaire (η_L).

On peut montrer que la porosité volumique en un point du milieu poreux est égale à la moyenne de la porosité surfacique au même point et que la porosité surfacique en un point donné est égale à la moyenne de la porosité linéaire. (cf. BEAR [4])

$$\eta(P) = \bar{\eta}_A(P) \quad ; \quad \eta_A(P) = \bar{\eta}_L(P) \quad (2-9)$$

II-2. RELATION ENTRE GRANDEURS MICROSCOPIQUES ET MACROSCOPIQUES.

Jusqu'à présent nous avons montré qu'un milieu poreux peut être décrit comme un milieu continu fictif auquel sont associées des grandeurs macroscopiques définies en chaque point du milieu comme des valeurs moyennées prises sur un certain volume centré au point considéré, dit V.E.R. A ces grandeurs macroscopiques locales sont appliquées des lois macroscopiques locales qu'il faudrait établir par des prises de moyenne sur les équations microscopiques correspondantes. On aura alors à établir des relations entre les dérivées des grandeurs microscopiques et celles des grandeurs macroscopiques correspondantes.

A ce niveau, il importe de souligner qu'une grandeur microscopique associée à une phase donnée du milieu poreux, continue sur tout le domaine occupé par cette phase, n'est pas continue aux interfaces. Par conséquent les formules de dérivations de telles grandeurs doivent être appliquées au sens de distributions dès lors qu'on aura à les calculer en moyenne sur un V.E.R. [48].

A présent nous allons introduire quelques définitions complémentaires et établir quelques propriétés relatives aux grandeurs microscopiques et celles des grandeurs macroscopiques correspondantes que nous appliquerons pour établir les équations de bilans macroscopiques.

Considérons une fonction ψ_α continûment différentiable dans la phase α mais discontinue sur l'interface $A_{\alpha i}$ dans le milieu poreux:

- La moyenne de ψ_α dans un V.E.R. R_0 est définie par :

$$\langle \psi_\alpha \rangle(\bar{x}, t) = \frac{1}{R_0} \cdot \int_{R_0} \psi_\alpha(\bar{x} + \bar{\zeta}, t) dV_\zeta \quad (2 - 10)$$

- La moyenne intrinsèque de ψ_α ; c'est à dire prise sur la partie R_α de R_0 occupée par la phase α est définie par:

$$\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha(\bar{x}, t) = \frac{1}{R_\alpha} \cdot \int_{R_\alpha} \psi_\alpha(\bar{x} + \bar{\zeta}, t) dV_\zeta \quad (2 - 11)$$

de (2 - 10) et (2 - 11) on déduit:

$$\langle \psi_\alpha \rangle(\bar{x}, t) = \varepsilon_\alpha(\bar{x}, t) \cdot \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha(\bar{x}, t) \quad (2 - 12)$$

où : $\varepsilon_\alpha(\bar{x}, t) = [R_\alpha(\bar{x}, t)]/R_0 = \varepsilon \cdot s_\alpha$

s_α étant la saturation ou la teneur volumétrique en phase α et ε la porosité.

On peut établir les propriétés suivantes (cf. BEAR [4]).

$$\langle\langle \psi_\alpha \rangle\rangle = \langle \psi_\alpha \rangle \quad (2 - 13)$$

$$\langle\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \rangle^\alpha = \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \quad (2 - 14)$$

- La dérivation $\tilde{\psi}_\alpha$ en tout point du V.E.R. est définie comme étant la déviation par rapport à la moyenne $\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$:

$$\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha - \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \quad (2 - 15)$$

on peut montrer [4] que:

$$\langle \tilde{\psi}_\alpha \rangle^\alpha = 0 \quad (2 - 16)$$

$$\langle \psi_{1\alpha} \cdot \psi_{2\alpha} \rangle = \langle \psi_{1\alpha} \rangle^\alpha \cdot \langle \psi_{2\alpha} \rangle^\alpha + \langle \tilde{\psi}_{1\alpha} \cdot \tilde{\psi}_{2\alpha} \rangle \quad (2 - 17)$$

- Les opérateurs de dérivations s'écrivent en moyenne sous la forme:

$$\langle \nabla \psi_\alpha \rangle = \nabla \langle \psi_\alpha \rangle + \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A_{\alpha i}} |\psi_\alpha| \cdot \bar{n}_\alpha \cdot dA \quad (2 - 18)$$

$$\left\langle \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_\alpha \rangle}{\partial t} - \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A_{\alpha i}} |\psi_\alpha| \cdot \bar{w} \cdot \bar{n} \cdot dA \quad (2 - 19)$$

où:

$\vec{n}_{\alpha i}$: normale à l'interface $A_{\alpha i}$ dirigée vers l'extérieur de la phase;

\vec{w} : vecteur vitesse de déplacement de l'interface $A_{\alpha i}$;

$|\psi_{\alpha}|$: saut de ψ_{α} à la traversée de $A_{\alpha i}$ ($A_{\alpha i}$ surface séparant les phases α et i).

N.B.: Rappelons une fois encore que la dérivée de ψ_{α} doit être appliquée au sens de dérivée distributionnelle.

Soit ψ_{α} la valeur spécifique (par unité de masse) d'une grandeur extensive S de la phase α et ρ_{α} la masse volumique de α :

$$\psi_{\alpha} = \frac{dS}{dm_{\alpha}} \quad ; \quad \rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha} = \frac{dS}{dR_{\alpha}} \quad (2-20)$$

m_{α} et R_{α} désignent respectivement la masse et le volume de la phase.

L'équation générale de S à l'échelle microscopique s'écrit:

$$\frac{\partial(\rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha})}{\partial t} = -\nabla(\rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} + \vec{J}(\psi_{\alpha})) + I_{\alpha} \quad (2-21)$$

\vec{v}_{α} étant la vitesse locale de la phase α ,

$\vec{J}(\psi_{\alpha}) = \rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_{\alpha})$ est la densité de flux de diffusion de α ,

I_{α} est le taux de production volumique de S dans la phase α .

En prenant la moyenne sur le V.E.R, l'équation précédente s'écrit:

$$\left\langle \frac{\partial(\rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha})}{\partial t} \right\rangle = -\left\langle \nabla(\rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} + \vec{J}(\psi_{\alpha})) \right\rangle + \langle I_{\alpha} \rangle \quad (2-22)$$

En utilisant les relations de définition et les règles de prise de moyenne relatives aux opérateurs de dérivation données par les relations (2-18) et (2-19), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varepsilon_{\alpha} \cdot \langle \rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha} \rangle^{\alpha})}{\partial t} &= -\nabla \left(\varepsilon_{\alpha} \cdot \langle \rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha} \rangle^{\alpha} \cdot \langle \vec{v}_{\alpha} \rangle^{\alpha} + \varepsilon_{\alpha} \cdot \langle \rho_{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha} \rangle^{\alpha} \cdot \langle \vec{v}_{\alpha} \rangle^{\alpha} + \varepsilon_{\alpha} \cdot \langle \vec{J}(\psi_{\alpha}) \rangle^{\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{1}{R_0} \cdot \int_{A_{\alpha i}} [\rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha} \cdot (\vec{v}_{\alpha} - \vec{w}_{\alpha i}) + \vec{J}(\psi_{\alpha})] \cdot \vec{n} \cdot dA + \varepsilon_{\alpha} \cdot \langle I_{\alpha} \rangle^{\alpha} \end{aligned} \quad (2-23)$$

Notons que, par rapport à l'équation de bilan microscopique (2-21), cette équation fait apparaître deux termes supplémentaires:

* $\varepsilon_{\alpha} \cdot \langle \rho_{\alpha} \cdot \tilde{\psi}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} \rangle^{\alpha}$: représente une densité de flux de dispersion due aux variations locales de \vec{v}_{α} et $\rho_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha}$;

$$* \frac{1}{R_0} \cdot \iint_{A_{oi}} \left[\rho_\alpha \cdot \psi_\alpha \cdot (\bar{v}_\alpha - \bar{w}_{oi}) + \bar{J}(\psi_\alpha) \right] \cdot \bar{n} \cdot dA : \text{représente le transfert de } \psi_\alpha \text{ à}$$

travers les interfaces A_{oi} située dans le V.E.R. Ce terme ne s'identifie à zéro que si A_{oi} est une surface matérielle (A_{oi} interface avec la matrice solide) ou s'il n'y a pas de transfert entre phases (cas de deux phases non miscibles par exemple).

A ce stade, il importe de souligner que la détermination des termes supplémentaires ci-dessus apparaissant dans les équations de bilans macroscopiques pose (dans l'état actuel des connaissances et des moyens expérimentaux) en général des difficultés insurmontables : cette détermination ne devient possible que dans certains cas relativement simples et même dans de tels cas, le recours à des hypothèses complémentaires demeure incontournable.

Dans les paragraphes précédents, nous avons introduit la notion de grandeur macroscopique (définie comme étant une valeur moyenne prise sur un V.E.R) sans aucune précision concernant la procédure utilisée. Les détails relatifs à la méthode employée ne seront évoqués que dans le cadre d'un modèle bien défini, construit sur la base d'un ensemble d'hypothèses appropriées; ceci constitue une approche très répandue dans toutes les branches de la physique: elle est fondée sur le concept de modèle et elle permet de ramener le système physique étudié (de nature excessivement complexe) à un système traitable mathématiquement.

Dans le cas de l'étude des phénomènes physiques en milieu poreux, plusieurs modèles ont été proposés ; leur validité a été testé expérimentalement et des domaines d'applications ont été dégagés. Nous citons, à titre d'exemple, le modèle proposé par BEAR [4] et BACHMAT [1], ce modèle statistique permet d'établir les équations macroscopiques de l'écoulement de fluide dans un milieu poreux ainsi que des justifications théoriques à certaines lois empiriques utilisées telle: la loi de DARCY.

Compte tenu, de la taille relativement importante des développements théoriques pour établir les équations macroscopiques, nous nous sommes limités dans ce qui suit à un simple exemple illustratif, relatif au bilan de masse dans le cas d'un seul constituant présent dans le milieu poreux sous deux phases.

Bilan de conservation de masse

Considérons un fluide sous deux phases 1 et 2 présent dans un milieu poreux indéformable. Les équations de conservation de masse s'écrivent alors pour chaque phase sous la forme:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \cdot \bar{v}_1) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla(\rho_2 \cdot \bar{v}_2) = 0 \quad (2 - 24)$$

En prenant la moyenne sur un V.E.R, on obtient:

$$\left\langle \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla(\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle = 0 \quad ; \quad \left\langle \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla(\rho_2 \cdot \bar{v}_2) \rangle = 0 \quad (2-25)$$

Les relations entre les opérations de dérivation établies dans les relations (2-18) et (2-19) s'écrivent pour la phase 1 (présentant une interface A_{12} avec la phase 2 et A_{1s} avec la matrice solide) sous la forme:

$$\left\langle \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial t} - \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{12}} \rho_1 \cdot \bar{w} \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} - \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{1s}} \rho_1 \cdot \bar{w} \cdot \bar{n}_{1s} \cdot dA_{1s} \quad (2-26)$$

$$\langle \nabla(\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle = \nabla \langle (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle + \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{12}} \rho_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} + \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{1s}} \rho_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_{1s} \cdot dA_{1s} \quad (2-27)$$

Comme la matrice solide est indéformable, \bar{w} et \bar{v} sont nulles sur A_{1s} , et (2-26) et (2-27) s'expriment alors sous la forme:

$$\left\langle \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial t} - \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{12}} \rho_1 \cdot \bar{w} \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} \quad (2-26')$$

et

$$\langle \nabla(\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle = \nabla \langle (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle + \frac{1}{R_0} \int_{\Lambda_{12}} \rho_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} \quad (2-27')$$

L'équation de bilan macroscopique de la phase 1 sera:

$$\frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial t} + \nabla \langle (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle + \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{12}} \rho_1 \cdot (\bar{v}_1 - \bar{w}) \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} = 0 \quad (2-28)$$

Soit encore en moyenne intrinsèque de phase:

$$\frac{\partial \langle \varepsilon \cdot s_1 \cdot \langle \rho_1 \rangle' \rangle}{\partial t} + \nabla \langle \varepsilon \cdot s_1 \cdot \langle (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle' \rangle + \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{12}} \rho_1 \cdot (\bar{v}_1 - \bar{w}) \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} \quad (2-29)$$

En séparant $\langle (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle'$ d'après la propriété (2-17) on obtient:

$$\langle (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle' = \langle \rho_1 \rangle' \cdot \langle \bar{v}_1 \rangle' + \langle (\tilde{\rho}_1 \cdot \tilde{\bar{v}}_1) \rangle'$$

En négligeant $\langle (\tilde{\rho}_1 \cdot \tilde{\bar{v}}_1) \rangle'$, terme de dispersion devant $\langle \rho_1 \rangle' \cdot \langle \bar{v}_1 \rangle'$, on obtient:

$$\frac{\partial(\varepsilon \cdot s_1 \cdot \langle \rho_1 \rangle^1)}{\partial t} + \nabla(\langle \rho_1 \rangle^1 \cdot \bar{v}_1) + \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{12}} \rho_1 \cdot (\bar{v}_1 - \bar{w}) \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} = 0 \quad (2-30)$$

$$\text{où : } \langle \rho_1 \rangle^1 \cdot \bar{v}_1 = \langle (\rho_1 \cdot \bar{v}_1) \rangle = \varepsilon \cdot s_1 \cdot \langle \rho_1 \rangle^1 \cdot \langle \bar{v}_1 \rangle^1$$

Soit, en supprimant les signes $\langle \rangle$:

$$\frac{\partial(\varepsilon \cdot s_1 \cdot \rho_1)}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \cdot \bar{v}_1) + I_1 = 0 \quad (2-31)$$

De même pour la phase 2, on obtient :

$$\frac{\partial(\varepsilon \cdot s_2 \cdot \rho_2)}{\partial t} + \nabla(\rho_2 \cdot \bar{v}_2) + I_2 = 0 \quad (2-32)$$

où :

$$I_1 = \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{12}} \rho_1 \cdot (\bar{v}_1 - \bar{w}) \cdot \bar{n}_{12} \cdot dA_{12} = 0$$

et

$$I_2 = \frac{1}{R_0} \cdot \int_{\Lambda_{12}} \rho_2 \cdot (\bar{v}_2 - \bar{w}) \cdot \bar{n}_{21} \cdot dA_{21} = 0$$

représentent les pertes et sources (création-disparition) des phases 1 et 2 consécutives aux éventuels changements de phase du constituant considéré. On a alors $I_1 + I_2 = 0$: la masse de 1 qui quitte la phase 1 pour la phase 2 à travers Λ_{12} et égale à la masse de 2 qui entre dans la phase 2 par Λ_{12} .

La conservation de la masse totale du fluide s'exprime par :

$$\frac{\partial(\rho_1 \cdot \varepsilon \cdot s_1 + \rho_2 \cdot \varepsilon \cdot s_2)}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \cdot \bar{v}_1 + \rho_2 \cdot \bar{v}_2) = 0 \quad (2-33)$$

En résumé, les équations macroscopiques de conservation de masse relatives à chaque phase et à l'ensemble du constituant (1 et 2) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_1 \cdot \varepsilon \cdot s_1)}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \cdot \bar{v}_1) + I_1 &= 0 \\ \frac{\partial(\rho_2 \cdot \varepsilon \cdot s_2)}{\partial t} + \nabla(\rho_2 \cdot \bar{v}_2) + I_2 &= 0 \\ \frac{\partial(\rho_1 \cdot \varepsilon \cdot s_1 + \rho_2 \cdot \varepsilon \cdot s_2)}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \cdot \bar{v}_1 + \rho_2 \cdot \bar{v}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2-34)$$

$$\text{avec : } I_1 + I_2 = 0$$

Pour conclure ce paragraphe, notons que nous avons présenté l'approche permettant de traiter mathématiquement les phénomènes physiques ayant dans un milieu poreux, tout en évoquant les difficultés rencontrées à chaque niveau d'analyse avec, au besoin, des exemples très simples en vue d'illustration. [4, 8, 21, 33, 46]

Concernant les premières modèles théoriques utilisés pour décrire les mécanismes de transfert au sein d'un milieu poreux, les uns prennent exclusivement en compte le transfert en phase vapeur, les autres le transfert en phase liquide ; le modèle dit de **PHILIP.DEVRIES** étant le plus élaboré il prend en considération les deux modes de transfert (liquide + vapeur) ainsi que les effets de couplage entre transfert de masse et transfert de chaleur.

Il est fondé sur l'identification du milieu poreux à un milieu fictif pour lequel les équations de bilans macroscopiques sont obtenues par extension intuitive des équations de bilans microscopiques. Ces équations de bilans ne feront donc pas apparaître les termes supplémentaires relatifs au flux à travers les interfaces contenues dans le V.E.R et la dispersion.

II-3 MODELE DIT DE PHILIP-DEVRIES

La modélisation mathématique des phénomènes de transferts couplés de chaleur et de masse en milieu poreux a été établie respectivement par **PHILIP** et **DEVRIES** [18] en 1957 et **LUIKOV** [35] en 1958. Elle a été « justifier » par **WHITAKER**[48] en 1977, à partir de la thermodynamique des milieux continus.

Le modèle dû à **PHILIP** et **DEVRIES** est établi dans le cadre des hypothèses suivantes:

- La matrice solide constituant le milieu poreux est indéformable, homogène et isotrope;
- L'enthalpie des différentes phases est indépendante de la pression;
- Les phénomènes de gel ou d'ébullition ne sont pas pris en compte;
- La densité de la phase liquide est constante;
- Les différentes phases sont continues;
- La phase gazeuse obéit à la loi des gaz parfaits;
- La pression totale de la phase gazeuse est uniforme et constante;
- Le travail des forces de compression et de dissipation visqueuse est négligeable;

- La phase liquide ne contient qu'un seul constituant ;
- La diffusion de vapeur est du type moléculaire;
- Les différentes phases sont en équilibres thermodynamique local ;
- Les phénomènes d'hystérésis ne sont pas pris en compte;
- Il n'ya pas de réaction chimique au sein du milieu poreux ;
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable;

Les équations de bilans de conservation de la masse et de l'énergie pour chaque phase i sont données par:

Pour la loi de conservation de la masse:

$$\frac{\partial(\rho_i \cdot \theta_i)}{\partial t} = -\nabla(\bar{J}_i) + I_i$$

avec : $\sum_i I_i = 0$ (2 - 35)

Pour la loi de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial\left(\rho_0 \cdot h_i + \sum_i \rho_i \cdot \theta_i \cdot h_i\right)}{\partial t} = -\nabla\left(\bar{J}_q + \sum_i h_i \cdot \bar{J}_i\right)$$

Dans ces équations où l'indice i prend la valeur e ou v selon que le transfert se fait en phase liquide ou vapeur, ρ représente la masse volumique, h l'enthalpie massique, \bar{J} la densité de flux de masse, \bar{J}_q la densité de flux de chaleur conductif, I est un terme source, θ la teneur en eau volumique (volume de liquide ou de vapeur par unité de volume du milieu poreux) et $\rho_0 = \rho_s (1 - \varepsilon)$ la masse volumique apparente du milieu poreux, (ε étant la porosité et ρ_s la masse volumique du solide constituant la matrice).

La fermeture de ce système est effectuée grâce aux équations de transfert (masse et énergie), aux équations d'état et aux conditions d'équilibre entre phases.

Equation de transfert de masse en phase liquide

La formulation mathématique caractérisant le transfert de masse en phase liquide en milieu poreux est donnée par la loi de DARCY. Dans le cas d'un milieu non saturé au sein duquel la pression totale de la phase gazeuse est constante, la densité de flux de masse $\bar{J}_e = \rho_e \cdot \bar{v}_e$ où \bar{v}_e est la vitesse de filtration s'écrit:

$$\vec{J}_e = -\frac{\rho_e \cdot \vec{k}_e \cdot \mathbf{g}}{v_e} \cdot \nabla(\psi_t) \quad (2-36)$$

$$\psi_t = \psi_m + \psi_g$$

où

ψ_g = potentiel gravitationnel

ψ_m = potentiel matriciel, tels que:

$$\psi_m = g \cdot \psi = g \cdot \frac{P_c}{\rho_e}$$

où P_c est la pression capillaire dont on sait qu'elle dépend de θ et de T (Crausse[15]) et ,

$$\psi_g = -g \cdot z$$

compte tenu de ces relations \vec{J}_e devient:

$$\vec{J}_e = -\rho_e \cdot K \cdot \nabla(\psi - z) \quad (2-36')$$

avec : $\psi = \psi(\theta_e, T)$, $K = (k_e \cdot g) / v_e$ et le flux de masse s'écrit :

$$\vec{J}_e = -\rho_e \cdot K \cdot \nabla \psi + \rho_e \cdot K \cdot \vec{k} = -\rho_e \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot K \cdot \vec{k} \quad (2-37)$$

avec : $D_{\theta_e} = K \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_e} \right)_T$, $D_T = K \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_e}$

Equation de transfert de masse en phase vapeur

La pression totale de la phase gazeuse étant supposée uniforme et constante, la densité de flux de masse \vec{J}_v de la vapeur obéit à la diffusion moléculaire, modélisée par la loi de FICK. En milieu poreux cette loi est pondérée par un terme correctif $f(\theta_e)$, traduisant l'influence, jusqu'à présent non clairement identifiée, de la présence de la phase liquide ainsi que de la tortuosité de la matrice solide.

Dans ces conditions \vec{J}_v s'écrit :

$$\vec{J}_v = -F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \nabla P_v \quad (2-38)$$

où :

D : est le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air;

P : la pression totale du gaz;

P_v : la pression de vapeur;

R : constante des gaz parfaits.

En considérant la condition d'équilibre thermodynamique locale entre les phases liquides et vapeur formulée par la loi de KELVIN :

$$P_v = P_{v_s} \cdot e^{\frac{M_v \cdot g \cdot \psi}{R \cdot T}} \text{ pour exprimer } P_v = P_v(\theta_e, T), \quad \nabla P_v \text{ s'écrit alors :}$$

$$\nabla P_v = \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T \cdot \nabla \theta_e + \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} \cdot \nabla T \quad \text{et la densité de flux } \vec{J}_v \text{ prend la forme:}$$

$$\vec{J}_v = -\rho_e \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) \quad (2-39)$$

avec:

$$D_{\theta_e} = F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_e} \cdot \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T$$

$$D_T = F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_e} \cdot \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e}$$

ou bien encore, en utilisant la relation de CLAPEYRON donnée par:

$$\frac{1}{P_v} \cdot \frac{dP_v}{dT} = \frac{M_v \cdot L}{(R \cdot T)^2} \quad \text{avec: } P_v = \phi \cdot P_{v_s}$$

$$D_{\theta_e} = F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \left(\frac{M_v}{R \cdot T} \right)^2 \cdot \frac{g \cdot P_{v_s}}{\rho_e} \cdot e^{\frac{M_v \cdot g \cdot \psi}{R \cdot T}} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_e} \right)_T$$

$$D_T = F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \left(\frac{M_v}{R \cdot T} \right)^2 \cdot \frac{P_{v_s}}{\rho_e} \cdot e^{\frac{M_v \cdot g \cdot \psi}{R \cdot T}} \cdot \left(\frac{L}{T} \right) \\ + F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \left(\frac{M_v}{R \cdot T} \right)^2 \cdot \frac{g \cdot P_{v_s}}{\rho_e} \cdot \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_e} - \frac{\psi}{T} \right] \cdot \phi$$

En remplaçant les relations (2-37) et (2-38) dans les équations de bilan de masse et d'énergie il vient:

- Pour la phase liquide

$$\frac{\partial(\rho_e \cdot \theta_e)}{\partial t} = \nabla \left[\rho_e \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) \right] - \rho_e \cdot \left(\frac{\partial K}{\partial z} \right) + I_e$$

- Pour la phase vapeur

$$\frac{\partial(\rho_v \cdot \theta_v)}{\partial t} = \nabla \left[\rho_e \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) \right] + I_v$$

En exprimant θ_v en équivalent liquide condensé, θ_v^* formulé par:

$$\rho_v \cdot \theta_v = \rho_e \cdot \theta_v^* = \theta_v^* \quad , \quad \text{cela donne : } \theta_v^* = \frac{\rho_v \cdot \theta_v}{\rho_e} = (\varepsilon - \theta_e) \cdot \frac{\rho_v}{\rho_e}$$

L'utilisation de $\rho_v = P_v \cdot \frac{M_v}{R \cdot T}$ permet alors d'écrire:

$$\frac{\partial(\rho_v \cdot \theta_v)}{\partial t} = -\frac{\rho_v}{\rho_e} \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{\varepsilon - \theta_e}{\rho_e} \cdot \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\frac{\rho_v}{\rho_e} \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{\varepsilon - \theta_e}{\rho_e} \cdot \frac{M_v}{R} \cdot \frac{\partial(P_v/T)}{\partial t}$$

et par suite d'expliciter la variation de masse due à l'évolution des variables thermodynamiques P et T:

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = -\frac{\rho_v}{\rho_e} \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{\varepsilon - \theta_e}{\rho_e} \cdot \frac{M_v}{R} \cdot \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{P_v}{T^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec :

$$D_{\theta_v} = F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_e} \cdot \left(\frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T$$

$$D_T = F \cdot D \cdot \frac{P}{P - P_v} \cdot \frac{M_v}{R \cdot T} \cdot \frac{1}{\rho_e} \cdot \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e}$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec :

$$\alpha = (\varepsilon - \theta_e) \cdot \frac{D_{\theta_v}}{F \cdot D \cdot P} - \frac{\rho_v}{\rho_e}$$

$$\beta = (\varepsilon - \theta_e) \cdot \frac{D_T}{F \cdot D \cdot P} - (\varepsilon - \theta_e) \cdot \frac{\rho_v}{\rho_e \cdot T}$$

La loi de conservation de la masse de vapeur devient finalement:

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) + \frac{I_v}{\rho_e} \quad (2-40)$$

et celle de la phase liquide:

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla(D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{I_e}{\rho_e} \quad (2-41)$$

L'addition des relations (2-40) et (2-41) sachant que $I_e + I_v = 0$ donne enfin:

$$(1 + \alpha) \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (2-42)$$

qui est la loi de conservation de la masse totale d'eau (liquide + vapeur) du milieu poreux.

$$\text{avec: } D_{\theta} = D_{\theta_e} + D_{\theta_v} \quad ; \quad D_T = D_{T_e} + D_{T_v}$$

Considérons maintenant la loi de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial(\rho_0 \cdot h_0 + \rho_e \cdot \theta_e \cdot h_e + \rho_v \cdot \theta_v^* \cdot h_v)}{\partial t} = -\nabla \bar{J}_q - \nabla(\bar{J}_e \cdot h_e + \bar{J}_v \cdot h_v)$$

Après développement et en utilisant la loi de conservation de la masse en phases liquide et vapeur, il vient:

$$\frac{\partial(\rho_0 \cdot h_0)}{\partial t} + \rho_e \cdot \theta_e \cdot \frac{\partial h_e}{\partial t} + \rho_v \cdot \theta_v^* \cdot \frac{\partial h_v}{\partial t} = -\nabla \bar{J}_q - \bar{J}_e \cdot \nabla h_e - \bar{J}_v \cdot \nabla h_v - L \cdot I_v$$

avec:

$$h_0 = c_0 \cdot T$$

$$h_e = c_e \cdot T$$

$$h_v = c_v \cdot T$$

et $\bar{J}_q = -\lambda^* \cdot \nabla T$ loi de FOURIER exprimant le transfert de chaleur par conduction au sein

du milieu non saturé de conductivité thermique apparente $\lambda^* = \lambda^*(\theta_e, T)$. On obtient:

$$\begin{aligned} (\rho \cdot c)^* \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla(\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot c_e \cdot \nabla(D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_e} \cdot \nabla T - K) \cdot \nabla T \\ &+ \rho_e \cdot c_v \cdot \nabla(D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \cdot \nabla T - L \cdot I_v \end{aligned}$$

L'expression de I_v étant tirée de la relation (2-40), soit:

$$I_v = \rho_e \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \rho_e \cdot \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_e \cdot \nabla(D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T);$$

il vient finalement en remplaçant cette valeur dans l'expression précédente:

$$\begin{aligned} [(\rho \cdot c)^* + \rho_e \cdot L \cdot \beta] \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_e \cdot L \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} &= \nabla(\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot L \cdot \nabla(D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_e} \cdot \nabla T) \\ &+ \rho_e \cdot c_e \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_e} \cdot \nabla T - K) \cdot \nabla T \\ &+ \rho_e \cdot c_v \cdot (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \cdot \nabla T \end{aligned} \quad (2-43)$$

qui est la loi de conservation de l'énergie en milieu poreux.

Le système d'équations (2-42) et (2-43) forme le modèle de DE VRIES.

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(D_\theta \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

----- (a) ----- -- (b) -- -- (c) --

$$(\rho c)^* \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot L \cdot \nabla(D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T - \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} - \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t})$$

----- (d) -----

$$+ \rho_e \cdot c_e \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T - K) \cdot \nabla T + \rho_e \cdot c_v \cdot (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) \cdot \nabla T$$

----- (e) ----- ----- (f) -----

Dans ces équations les termes:

- (a) représente le taux d'accumulation en masse de vapeur exprimé en équivalent liquide condensé,
- (b) et (c) la densité du flux de masse (liquide + vapeur) due au gradient de pression de vapeur,
- (d) l'énergie créée ou absorbée par le processus de changement de phase,
- (e) et (f) respectivement l'énergie convective propre à la phase liquide et vapeur.

Dans l'étude, où le transfert des phases est contrôlé par la diffusion moléculaire et la capillarité, les termes d'énergie convective (e) et (f) sont négligeables, RECAN[45] et les équations précédentes se simplifient pour donner:

$$(1 + \alpha) \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(D_\theta \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

$$\left[(\rho c)^* + \rho_e \cdot L \cdot \beta \right] \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_e \cdot L \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla(\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot L \cdot \nabla(D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T)$$

(A)

Dans de nombreux cas, la prépondérance de la masse liquide par rapport à la masse vapeur, permet de simplifier le modèle (A) en négligeant les termes $\alpha \cdot \frac{\partial \theta_e}{\partial t}$ et $\beta \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ exprimant, dans le bilan de masse, la variation de masse locale due à l'évolution des variables d'état.

Dans ces conditions le modèle de DE VRIES simplifié est donné par:

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla(D_\theta \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

(B)

$$(\rho c)^* \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_e \cdot L \cdot \nabla(D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_T \cdot \nabla T)$$

Ce système est fréquemment utilisé pour décrire les processus de séchage, mais, comme l'a souligné BORIES[6], la simplification précédente peut être pénalisante, voire même conduire à un système d'équations qui ne décrit pas les phénomènes.

Pour éviter les problèmes posés par les variations éventuelles de volume du matériau en cours d'humidification les équations de bilan sont en outre souvent exprimées en fonction de teneur en eau pondérale w .

w et θ_e étant liés par la relation $\theta_e = \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot w$ et le système d'équations (A) s'écrit alors:

$$(1 + \alpha) \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \eta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(a_m \cdot \nabla w + a_d \cdot \nabla T) - \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot \frac{\partial K}{\partial z}$$

$$\left[(\rho c)^* + \rho_0 \cdot L \cdot \beta \right] \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 \cdot L \cdot \alpha \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \left[\rho_0 \cdot L \cdot a_{mv} \cdot \nabla w + (\lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}) \cdot \nabla T \right]$$

$$\text{avec : } a_m = D_\theta ; a_d = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_T ; a_{mv} = D_{\theta_v} ; a_{dv} = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_{T_v} ; \eta = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot \beta$$

Ce système a été partiellement testé par CRAUSSE[15] dans le cadre d'expériences fondamentales de thermomigration (migration d'humidité sous faibles gradients thermiques), effectuées avec teneur en eau initiale non nulle, sur des milieux macrocapillaires dont les coefficients avaient été préalablement déterminés.

CHAPITRE III

MODELE MATHEMATIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES

III-1 MODELES PHYSIQUES

III-2 MODELE MATHEMATIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES

III-2-1 MODELE MATHEMATIQUE

III-2-2 CONDITIONS AUX FRONTIERES

III-1 MODELES PHYSIQUES

L'étude des mouvements unidirectionnels des transferts couplés de chaleur et de masse a été entreprise à l'aide de deux modèles physiques par Crausse [15] et qui sont les suivants:

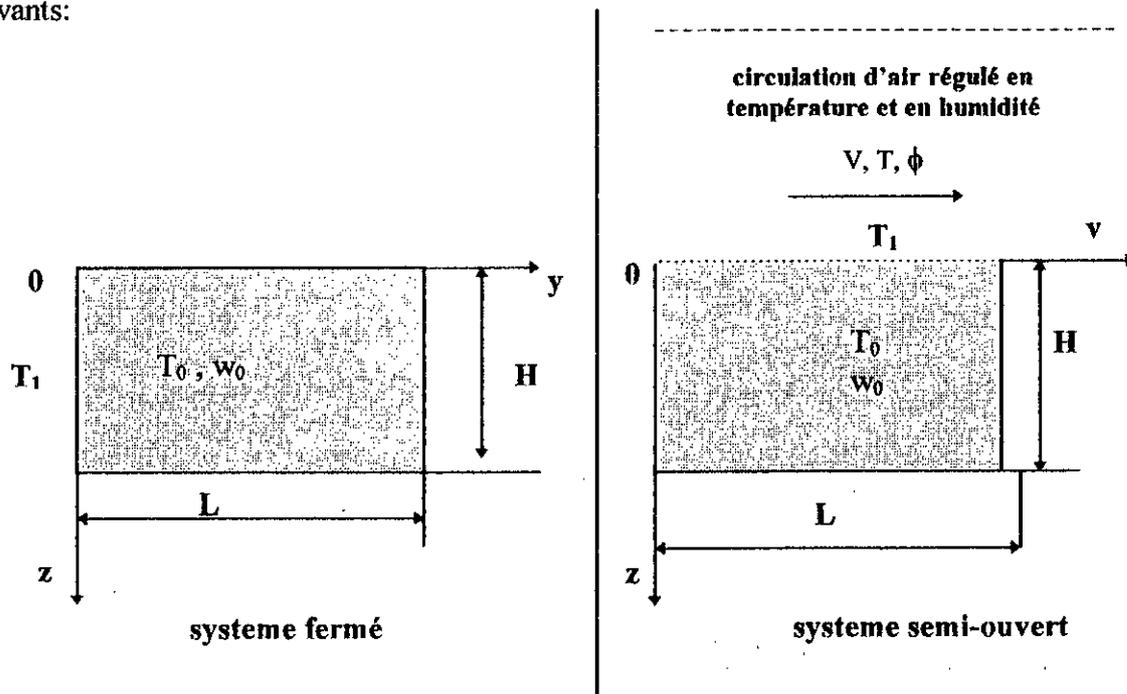


FIG (III-01)

Les conditions communes à ces types de modèle sont:

* Conditions initiales $t = 0$:

- Teneur en humidité uniforme $w = w_0$
- Température uniforme $T = T_0$

* Isolation thermique des faces latérales ($J_q = 0$)

Dans le cas du système fermé, toutes les faces sont imperméables à l'humidité. Dans le cas ouvert, seules trois faces sont imperméables. La face perméable est en contact avec un air régulé en vitesse V , en température T et en humidité relative ϕ .

A l'instant t , l'une des extrémité du système fermé est portée à la température $T > T_0$, et la face perméable du système semi-ouvert est mise en contact avec l'atmosphère désirée. Le gradient thermique ainsi imposé va provoquer une migration de l'humidité à l'intérieur du milieu poreux.

L'intérêt du système fermé en vue de la simulation des phénomènes de transferts, réside principalement dans le fait que c'est un modèle physique sur lequel les conditions aux limites peuvent être réalisées de manière rigoureuse, avec un bilan de masse conservatif et de surcroît sur lequel le phénomène de thermomigration apparaît exclusivement. Le fonctionnement global de ce système physique est d'ailleurs d'un principe voisin de celui d'un caloduc, bien que dans ce cas, l'état de pression et le mode de déplacement de la phase gazeuse soit différent.

III-2 MODELE MATHEMATIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES

III-2-1 Modèle mathématique

Le système complet d'équations décrivant les transferts couplés de chaleur et de masse en milieu poreux est donné par:

$$\begin{cases} (1 + \alpha) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} + \eta \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\mathbf{a}_m \cdot \nabla \omega + \mathbf{a}_d \cdot \nabla T) - \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot \frac{\partial K}{\partial z} \\ \rho_0 \cdot L \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} + [(\rho C)^* + \rho_0 \cdot L \cdot \beta] \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla[\rho_0 \cdot L \cdot \mathbf{a}_{mv} \cdot \nabla \omega + (\lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot \mathbf{a}_{dv}) \cdot \nabla T] \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m &= D_{\theta} ; \mathbf{a}_d = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_T ; \mathbf{a}_{mv} = D_{\theta_v} ; \mathbf{a}_{dv} = \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot D_{T_v} \\ \eta &= \frac{\rho_e}{\rho_0} \cdot \beta ; D_{\theta} = D_{\theta_e} + D_{\theta_v} ; D_T = D_{T_e} + D_{T_v} \end{aligned}$$

En termes de coefficients de diffusion a_i et de thermomigration δ_i , ($i = e$ ou v), les coefficients précédents s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} D_{\theta_e} &= a_e \\ D_{T_e} &= \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot a_e \cdot \delta_e \\ D_{\theta_v} &= a_v \\ D_{T_v} &= \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot a_v \cdot \delta_v \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_v \\ \mathbf{a}\delta &= \mathbf{a}_e \cdot \delta_e + \mathbf{a}_v \cdot \delta_v \end{aligned}$$

Compte tenu de ces éléments et des hypothèses vu au chapitre II, le système d'équations établi par PHILIP-DE VRIES [18] s'exprime sous sa forme simplifié en coordonnées cartésiennes par:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} + a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot K \right) \\ (\rho c)^* \cdot \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \rho_0 \cdot L \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}) \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \rho_0 \cdot L \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \end{aligned} \right. \quad (3 - 01)$$

III-2-2 Conditions aux frontières

Le domaine retenu pour la résolution numérique est le plan fermé . Concernant les conditions initiale et aux limites: elles correspondent à un séchage en système fermé (CRAUSSE [15]).

*** SYSTEME FERME:**

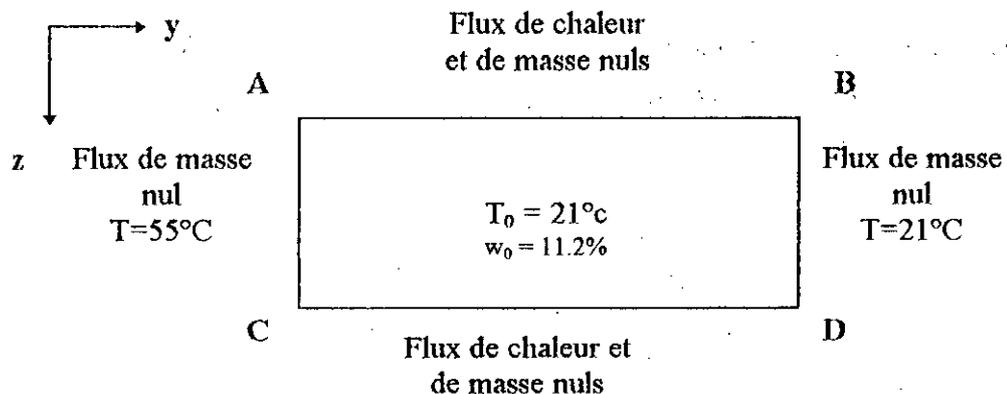


FIG (III-2) : Schéma de l'enceinte

Toutes les faces sont imperméables à l'humidité. Elles sont isolées thermiquement, sauf les deux faces orthogonales à oy (premier cas), ou bien une face orthogonale à oy et l'autre face orthogonale à oz (deuxième cas). A l'instant initiale, la température à l'intérieure de l'enceinte est supposée uniforme T₀ et, sur les faces non isolées, elle est égale à un échelon de température T₁ avec:

$$\Delta T = T_1 - T_0 \quad (3 - 02)$$

En l'absence d'autres perturbations extérieures, les conditions aux limites et initiale s'expriment en fonction des seules variables d'espace (y, z). Nous admettons que l'écoulement est plan.

Premier cas:

On s'intéresse uniquement aux effets du gradient thermique, en négligeant l'effet de la gravité. Bien que notre étude numérique soit faite dans le cadre des écoulements plan, on peut s'attendre à ce que l'écoulement dépende de la seule variable d'espace y.

FACE AC:

$$T = 55^\circ \text{c}$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

FACE BD:

$$T = 21^\circ \text{c}$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (3 - 03)$$

FACES AB et CD:

$$J_q = -(\lambda' + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}) \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \rho_0 \cdot L \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\rho_0}{\rho_c} \cdot K = 0$$

Deuxième cas:

L'écoulement est soumis à l'action de deux forces orthogonales correspondant à l'existence de gradients thermiques orthogonaux au voisinage des faces où l'échelon de température est imposé et l'écoulement sera bidimensionnel même si l'effet de gravité est négligé. Cette configuration bidimensionnelle se trouve dans plusieurs cas d'intérêt pratique, comme par exemple les problèmes d'irrigation par canaux.

a:

FACE AC:

$$T = 55^{\circ} \text{ c}$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

FACE BD:

$$J_q = -(\lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} - \rho_0 \cdot L \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

t > 0

FACE AB:

$$T = 55^{\circ} \text{ c}$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \pm \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot K = 0$$

FACE CD:

$$J_q = -(\lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}) \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \rho_0 \cdot L \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \pm \frac{\rho_0}{\rho_e} \cdot K = 0$$

b:

FACE AC:

$$T = 55^{\circ} \text{ c}$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

FACE BD:

$$J_q = -(\lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} - \rho_0 \cdot L \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

t > 0

FACE AB:

$$J_q = -(\lambda^* + \rho_0 \cdot L \cdot a_{dv}) \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \rho_0 \cdot L \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

(3 - 04)

FACE CD:

$$T = 55^{\circ} \text{ c}$$

$$J_m = -a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

CHAPITRE IV

RESOLUTION NUMERIQUE

IV-1 . POSITION DU PROBLEME

IV-2. ANALYSE ADIMENSIONNELLE

IV-2-1. Variables de référence

IV-2-2. Equations adimensionnelles

IV-2-3. Groupements adimensionnels

IV-3. SYSTEME D'EQUATIONS EN COORDONNES CARTESIENNES

IV-4. LES COEFFICIENTS THERMOPHYSIQUES

IV-5. TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES

IV-5-1. Conditions aux limites

IV-5-2. Simplification des conditions aux limites

IV-6. METHODE NUMERIQUE

IV-6-1. Principe de l'A.D.I.

IV-6-2. Mise sous forme d'équation modèle

IV-6-3. Discrétisation des équations

IV-6-4. Structure générale du programme de calcul

IV-1. POSITION DU PROBLEME

Notre analyse est basée sur l'étude de la thermomigration dans une cavité où l'écoulement est supposé plan. Nous évoquons les différentes forces mises en jeu dans l'écoulement tel que le gradient thermique et l'effet de gravité dans une cavité fermée rectangulaire.

Les caractéristiques physiques du milieu sont celles d'un sable de Fontainebleau qui a été étudié à l'institut de mécanique de fluide de Toulouse (I.M.F.T.) par Crausse[15].

Toutes les faces sont imperméables à l'humidité. Elles sont isolées thermiquement, sauf les deux faces orthogonales à oy (premier cas), ou bien une face orthogonale à oy et l'autre face orthogonale à oz (deuxième cas). A l'instant initial, la température à l'intérieur de l'enceinte est supposée uniforme T_i et, sur les faces non isolées, elle est égale à la température T_{max} avec :

$$\Delta T = T_{max} - T_i$$

En l'absence d'autres perturbations extérieures, les conditions aux limites et initiale s'expriment en fonction des seules variables d'espace (y, z). Nous admettons que l'écoulement est plan.

Dans le premier cas, on s'intéresse uniquement aux effets du gradient thermique, en négligeant l'effet de gravité. Bien que notre étude numérique soit faite dans le cadre des écoulements plan, on peut s'attendre à ce que l'écoulement dépende de la seule variable d'espace y .

Dans le deuxième cas, l'écoulement est soumis à l'action de deux forces orthogonales correspondant à l'existence de gradients thermiques orthogonaux au voisinage des faces où la température est imposée et l'écoulement sera bidimensionnel même si l'effet de la gravité est négligé. Cette configuration bidimensionnelle se trouve dans plusieurs cas d'intérêt pratique, comme par exemple les problèmes d'irrigation par canaux.

IV-2. ANALYSE ADIMENSIONNELLE

Les équations qui régissent le transfert couplé de chaleur et de masse sont fortement non linéaires. elles sont données sous forme adimensionnelle.

IV-2-1. Variable de référence

Pour rendre adimensionnelles ces équations, nous choisissons un état de référence arbitraire auquel on attribue l'indice r .

On définit les variables de référence suivantes:

$$\Delta T; \omega_r; Cv_r; \lambda_r^*; Lv_r; K_r; D_{\omega r}; D_{\omega r}; D_{Tr}; t_T; t_\omega; l_r$$

On choisit de deux temps de référence:

t_T : Pour l'équation de chaleur, qui définit une échelle caractéristique pour la diffusivité thermique.

t_ω : Pour l'équation de conservation de la masse, qui définit une échelle caractéristique par le coefficient de diffusion massique.

Les variables sans dimensions sont définis par:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla} &= l_r \cdot \nabla ; \tilde{C}_v = \frac{C_v}{C_{vr}} ; \tilde{\lambda} = \frac{\lambda^*}{\lambda_r^*} ; \tilde{K} = \frac{K}{K_r} \\ \tilde{\omega} &= \frac{\omega}{\omega_r} ; U = \frac{T - T_i}{\Delta T} ; t_u = \frac{t}{t_r} ; t_\omega = \frac{t}{t_\omega} \\ \tilde{a}_\omega &= \frac{a_\omega}{a_{\omega r}} ; \tilde{a}_{\omega v} = \frac{a_{\omega v}}{a_{\omega v r}} ; \tilde{a}_d = \frac{a_d}{a_{dr}} ; \tilde{k} = \frac{1}{l_r} \tilde{k}\end{aligned}$$

IV-2-2 Equations adimensionnelles

* Equation de la chaleur :

$$(\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [(\lambda + L_v \cdot \rho_0 \cdot a_{dv}) \cdot \nabla T] + \nabla \cdot (L_v \cdot \rho_0 \cdot a_{\omega v} \cdot \nabla \omega)$$

où

$$(\rho C)^* = \rho_0 (C_s + C_v \cdot \omega_v + C_L \cdot \omega_L) \cong \rho_0 (C_s + C_L \cdot \omega_L) = \rho_0 C^* = C_v$$

ρ_0 : Masse volumique du milieu poreux sec.

$$\lambda^* = \lambda + L_v \cdot \rho_0 \cdot a_{dv}$$

Alors :

$$C_v \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \cdot \nabla T) + \rho_0 \cdot \nabla (L_v \cdot a_{mv} \cdot \nabla \omega) \quad (4 - 1)$$

* Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \cdot (a_m \cdot \nabla \omega + a_d \cdot \nabla T) + \frac{\rho_c}{\rho_0} \cdot \nabla (K \cdot \nabla \tilde{k}) \quad (4 - 2)$$

on pose :

$$t_u = \frac{l_r^2}{a_r} \quad t_\omega = \frac{l_r^2}{a_{mr}}$$

où :

$$a_r = \frac{\lambda_r^*}{C_{vr}} \quad \text{est la diffusivité thermique.}$$

Après avoir remplacé toutes les variables par des variables sans dimension,

les é quations (4 - 1) et (4 - 2) deviennent respectivement :

$$\tilde{C}_v \cdot \frac{\partial U}{\partial t_u} = \tilde{\nabla} (\tilde{\lambda}^* \cdot \tilde{\nabla} U) + AD1 \cdot \tilde{\nabla} (\tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\omega}) \quad (4 - 3)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t_\omega} = \tilde{\nabla} (\tilde{a}_m \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\omega}) + AD2 \cdot \tilde{\nabla} (\tilde{a}_d \cdot \tilde{\nabla} T) + AK \cdot \tilde{\nabla} (\tilde{K} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{k}) \quad (4 - 4)$$

où:

$$AD1 = \left(\frac{\rho_0 \cdot L_{vr} \cdot \omega_r \cdot a_{mvr}}{l_r} \right) / \left(\frac{\lambda_r^* \cdot \Delta T}{l_r} \right)$$

$$AD2 = \frac{a_{dr} \cdot \Delta T}{a_{mr} \cdot \omega_r}$$

$$AK = \frac{\rho_c \cdot K_r \cdot l_r}{\rho_0 \cdot a_{mr} \cdot \omega_r}$$

IV-2-3. Groupements adimensionnels

Il apparait dans les équations adimensionnelles les trois groupements sans dimension suivant :

Premier groupement:

$$AD1 = \left(\frac{\rho_0 \cdot L_{vr} \cdot \omega_r \cdot a_{mvr}}{l_r} \right) / \left(\frac{\lambda_r^* \cdot \Delta T}{l_r} \right) \quad (4-5)$$

AD1 se compose de deux termes:

- premier terme : $\frac{\rho_0 \cdot L_{vr} \cdot \omega_r \cdot a_{mvr}}{l_r}$, peut s'identifier à la puissance par unité de surface due au changement de phase.

- deuxième terme : $\frac{\lambda_r^* \cdot \Delta T}{l_r}$, peut s'identifier à la puissance par unité de surface due à la conduction de la chaleur.

Et par conséquent ce groupement sans dimension AD1 exprime le rapport des transferts d'énergies dûs au changement de phase, aux transferts d'énergies dûs à la conduction de chaleur.

Si AD1 est très faible, on peut dire que les transferts dûs au changement de phase sont négligeables devant ceux de la conduction de la chaleur et l'équation (4-3) devient:

$$\tilde{c}_v \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = \tilde{\nabla}(\tilde{\lambda}^* \cdot \tilde{\nabla}U) \quad (4-6)$$

Deuxième groupement :

$$AD2 = \frac{a_{dr} \cdot \Delta T}{a_{mr} \cdot \omega_r} \quad (4-7)$$

Ce groupement exprime l'effet du transfert de chaleur sur le déplacement de l'humidité.

Troisième groupement :

$$AK = \frac{\rho_e \cdot K_r \cdot l_r}{\rho_0 \cdot a_{mr} \cdot \omega_r} \quad (4-8)$$

Ce groupement exprime d'une façon générale le rapport de la conductivité à la diffusivité de la masse. Sa valeur donne une idée de l'importance respective de ces deux phénomènes. On le nomme coefficient du potentiel gravitaire, puisqu'il intervient sur le terme de la gravité dans l'équation (4-4).

IV-3. SYSTEME D' EQUATIONS EN COORDONNEES CARTESIENNES

Le modèle théorique décrit par le système d'équations (4-3), (4-4) est utilisé pour résoudre le transfert simultané de chaleur et de masse dans une cavité rectangulaire. Les équations s'expriment en coordonnées cartésiennes par:

$$\tilde{C}_v \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\tilde{\lambda}^* \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tilde{\lambda}^* \cdot \frac{\partial U}{\partial z} + AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} \right]$$

Equation de la chaleur: (4-9)

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\tilde{a}_m \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} + AD2 \cdot \tilde{a}_d \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tilde{a}_m \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} + AD2 \cdot \tilde{a}_d \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - AK \cdot \tilde{K} \right]$$

Equation de conservation de la masse: (4-10)

La variation, en fonction de la température et de l'humidité, des coefficients:

$$\tilde{C}_v, \tilde{\lambda}^*, \tilde{K}, \tilde{a}_m, \tilde{a}_{mv}, \tilde{a}_d$$

est très importante. Les deux équations ci-dessus (4-9) et (4-10) ont un caractère fortement non linéaire. Ceci rend difficile la recherche d'une solution analytique et impose une résolution par voie numérique.

IV-4. LES COEFFICIENTS THERMOPHYSIQUES

Pour résoudre les équations (4-9), (4-10), il faut d'abord connaître l'expression des coefficients thermophysiques cités ci-dessus. La connaissance de ces coefficients à partir des expressions théoriques présentés dans le premier chapitre, montre que leur détermination nécessite la connaissance de divers paramètres. Certains de ces paramètres sont des données physiques caractérisant le matériau, d'autres sont liés au problème étudié et, dans l'état actuel des connaissances, doivent être évalués expérimentalement. Ces coefficients sont :

- la conductivité hydraulique k ;
- la succion ψ ;
- l'humidité relative ϕ pour les faibles valeurs de la teneur en humidité;
- et le coefficient de pondération $f(\omega)$.

Dans notre cas nous utilisons les coefficients qui ont été évalués à partir de données expérimentales recueillis par Crausse [15], sur un matériau poreux de type sable quartzeux provenant du site de Fontainebleau.

IV-5. TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES

IV-5-1. Conditions aux limites

Pour résoudre les équations (4 - 3), (4 - 5) il faut ajouter les conditions initiale et aux limites. Les conditions aux limites sont soit celles de Dirichlet ou soit de Neumann (condition de flux). Pour notre cas nous avons deux conditions suivant la direction y et deux autres suivant la direction z.

A titre d'exemple dans le premier cas à traiter, il y a pour le transfert de chaleur deux conditions de flux sur deux faces et deux autres conditions de Dirichlet sur les deux autres faces. Pour le transfert de masse, la cavité est supposée imperméable et par conséquent nous avons que des conditions de flux.

Les conditions de flux sont couplées par la température et l'humidité qui, ce qui introduit une difficulté supplémentaire, elles sont exprimées par:

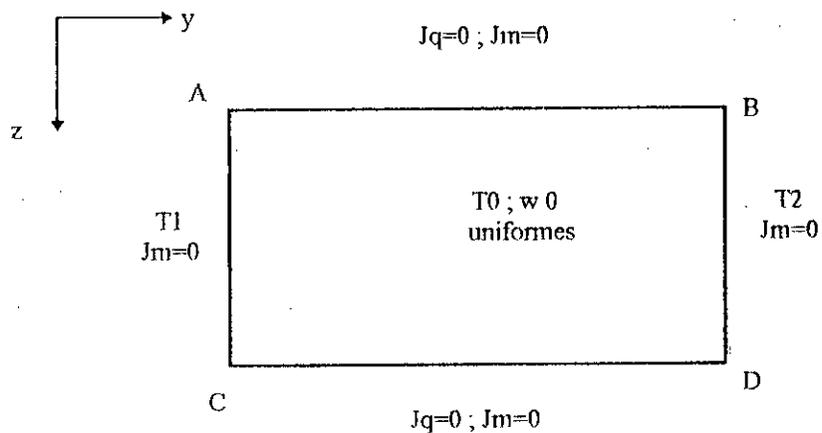


Figure IV-1

On a:

- Conditions de flux suivant la direction y

$$-\lambda^* \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_i} - \rho_0 \cdot L_v \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y_i} = J_{q_i} \quad (4-11)$$

$$-a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y_i} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_i} = J_{m_i} \quad (4-12)$$

- Conditions de flux suivant la direction verticale z

$$-\lambda^* \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z_j} - \rho_0 \cdot L_v \cdot a_{mv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{z_j} = J_{q_j} \quad (4-13)$$

$$-a_m \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{z_j} - a_d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z_j} - ss \cdot K = J_{m_j} \quad (4-14)$$

où :

J_q est le de chaleur imposé à la paroi ;

J_m est le flux de masse imposé à la paroi ;

y_i est la valeur à la frontière de y qui vaut 0 et L ;

z_j est la valeur à la frontière de z vaut 0 et H ;

ss est une constante qui prend la valeur (+ 1) ou (- 1) suivant le sens de l'orientation de l'axe z.

En variables adimensionnelles ces équations deviennent :

- Suivant y :

$$-\tilde{\lambda}^* \cdot \frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} - AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} = \frac{J_{q_i} \cdot l_r}{\lambda_r^* \cdot \Delta T} = \tilde{J}_{q_i} \quad (4-15)$$

$$-\tilde{a}_m \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} - AD2 \cdot \tilde{a}_d \cdot \frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} = \frac{J_{m_i} \cdot l_r}{a_{mr} \cdot \omega_r} = \tilde{J}_{m_i} \quad (4-16)$$

- Suivant z :

$$-\tilde{\lambda}^* \cdot \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_j} - AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_j} = \frac{J_{q_j} \cdot l_r}{\lambda_r^* \cdot \Delta T} = \tilde{J}_{q_j} \quad (4-17)$$

$$-\tilde{a}_m \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_j} - AD2 \cdot \tilde{a}_d \cdot \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_j} = \frac{J_{m_j} \cdot l_r}{a_{mr} \cdot \omega_r} + ss \cdot AK \cdot \tilde{K} = \tilde{J}_{m_j} \quad (4-18)$$

où :

\tilde{J}_q est le flux de chaleur adimensionnel;

\tilde{J}_m est le flux de masse adimensionnel.

IV-5-2 Simplification des conditions aux limites

On remarque que suivant la direction horizontale oy ou suivant la direction verticale oz, on fait appel respectivement aux couples d'équations de conditions de flux (4 - 15), (4 - 16) ou (4 - 17), (4 - 18). Ces deux couples d'équations peuvent être regardés chacun comme un système de deux équations à deux inconnues qui sont les dérivées partielles de U et de $\tilde{\omega}$ en considérant les autres coefficients comme des paramètres. Nous pouvons procéder à un découplage de ces deux variables (U et $\tilde{\omega}$) par résolution de ce système:

- Le couple d'équations (4 - 15), (4 - 16) nous donne :

$$-\tilde{\lambda}^* \cdot \frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} - AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} = \tilde{J}_{q_i} \quad (1)$$

$$-AD2 \cdot \tilde{a}_d \cdot \frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} - \tilde{a}_m \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} = \tilde{J}_{m_i} \quad (2)$$

$$(1) \times (AD2 \cdot \tilde{a}_d) - (2) \times (\tilde{\lambda}^*) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} = \frac{AD2 \cdot \tilde{a}_d \cdot \tilde{J}_{q_i} - \tilde{\lambda}^* \cdot \tilde{J}_{m_i}}{\tilde{\lambda}^* \cdot \tilde{a}_m - AD1 \cdot AD2 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \tilde{a}_d} \quad (4-19)$$

$$(1) \times (\tilde{a}_m) - (2) \times (AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} \Big|_{y_i} = \frac{AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \tilde{J}_{m_i} - \tilde{a}_m \cdot \tilde{J}_{q_i}}{\tilde{\lambda}^* \cdot \tilde{a}_m - AD1 \cdot AD2 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \tilde{a}_d} \quad (4-20)$$

- Le couple d'équations (4 - 17), (4 - 18) nous donne :

$$-\tilde{\lambda}^* \cdot \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_i} - AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_i} = \tilde{J}_{q_i} \quad (3)$$

$$-AD2 \cdot \tilde{a}_d \cdot \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_i} - \tilde{a}_m \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_i} = \tilde{J}_{m_i} \quad (4)$$

$$(3) \times (AD2 \cdot \tilde{a}_d) - (4) \times (\tilde{\lambda}^*) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_i} = \frac{AD2 \cdot \tilde{a}_d \cdot \tilde{J}_{q_i} - \tilde{\lambda}^* \cdot \tilde{J}_{m_i}}{\tilde{\lambda}^* \cdot \tilde{a}_m - AD1 \cdot AD2 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \tilde{a}_d} \quad (4-21)$$

$$(3) \times (\tilde{a}_m) - (4) \times (AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} \Big|_{z_i} = \frac{AD1 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \tilde{J}_{m_i} - \tilde{a}_m \cdot \tilde{J}_{q_i}}{AD1 \cdot AD2 \cdot \tilde{L}_v \cdot \tilde{a}_{mv} \cdot \tilde{a}_d - \tilde{\lambda}^* \cdot \tilde{a}_m} \quad (4-22)$$

Avec cette forme simplifiée des conditions aux limites, le couplage de U et $\tilde{\omega}$ se fait uniquement par l'intermédiaire des coefficients thermophysiques et les groupements adimensionnels AD1, AD2 et AK. Ce nouveau système de conditions aux limites devient très simple à manipuler numériquement.

Remarque:

Cette simplification du système des conditions aux limites n'est valable que lorsqu'on a sur la portion de frontière concernée une condition de Neumann aussi bien pour le transfert de chaleur que pour le transfert de masse. Si par exemple sur l'une des faces de la cavité on a une condition de Dirichlet en température et une condition de flux en humidité, le système simplifié n'est pas valable, et il faut utiliser le premier système d'équations pour résoudre le problème.

IV-6. METHODE NUMERIQUE

Nous utilisons un schéma aux différences finies pour résoudre le système d'équations aux dérivées partielles, et une méthode implicite des directions alternées: A.D.I. .

IV-6-1. Principe de l' A.D.I

Le système d'équations est discrétisé selon la méthode implicite des directions alternées mise au point par Peaceman et Rachford [39].

On suppose connue la fonction U (ou $\tilde{\omega}$) dans le domaine discrétisé à l'instant t . La procédure de calcul de $U^{t+\Delta t}$ (ou $\tilde{\omega}^{t+\Delta t}$) à l'instant $t+\Delta t$ se fait en deux étapes:

*** Première étape:**

Au premier demi-pas de temps, on calcule une valeur intermédiaire de la fonction U ou $\tilde{\omega}$ à l'instant $(t + \frac{\Delta t}{2})$.

Les dérivées par rapport à y sont exprimées implicitement au temps $(t + \frac{\Delta t}{2})$ tandis que les dérivées par rapport à z sont évaluées au temps t . On obtient ainsi les fonctions $U^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ et $\tilde{\omega}^{t+\frac{\Delta t}{2}}$. Comme ces valeurs sont uniquement des valeurs intermédiaires, elles seront notées pour la suite du calcul U^* et $\tilde{\omega}^*$.

*** Deuxième étape:**

Les dérivées par rapport à z sont exprimées maintenant au temps $(t+\Delta t)$ en fonction des dérivées par rapport à y écrites explicitement en se servant des valeurs intermédiaires calculées à la première étape U^* et $\tilde{\omega}^*$.

Le principe de la méthode revient à effectuer un balayage du maillage, horizontale par horizontale puis verticale par verticale, alternativement, d'où le nom de: A.D.I..

IV-6-2 Mise sous forme d'équation modèle

Les deux équations aux dérivées partielles (4 - 9), (4 - 10) à résoudre étant parabolique, elles ont la même forme d'écriture. Il est commode, pour simplifier l'écriture du système d'équations d'introduire l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 A(y,z) \cdot \frac{\partial f(y,z)}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial y} \left[B(y,z) \cdot \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} + AD \cdot C(y,z) \cdot D(y,z) \cdot \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[B(y,z) \cdot \frac{\partial f(y,z)}{\partial z} + AD \cdot C(y,z) \cdot D(y,z) \cdot \frac{\partial g(y,z)}{\partial z} \right] + E \cdot \frac{\partial K}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{4-23}$$

- Lorsqu'il s'agit de l'équation de chaleur, on identifie les coefficients ainsi que les fonctions à ceux de l'équation (4-9) soit:

$$A = \tilde{C}_v ; B = \tilde{\lambda}^x ; C = \tilde{I}_v ; D = \tilde{\alpha}_{mv} ; AD = AD1 ; f = U ; g = \tilde{\omega} ; E = 0 .$$

- Lorsqu'il s'agit de l'équation de conservation de la masse ces coefficients s'identifient à ceux de l'équation (4-10) soit:

$$A = 1 ; B = \tilde{\alpha}_m ; C = 1 ; D = \tilde{\alpha}_d ; AD = AD2 ; f = \tilde{\omega} ; g = U ; E = AK .$$

L'équation (4-23) peut se permettre d'être sous la forme suivante:

$$A(y,z) \cdot \frac{\partial f(y,z)}{\partial t} = L_y(f) + AD \cdot L_y(g) + L_z(f) + AD \cdot L_z(g) - ss \cdot E \cdot \frac{\partial K}{\partial z} \tag{4-23}$$

avec:

$$L_y(f) = \frac{\partial}{\partial y} \left[B(y,z) \cdot \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} \right]$$

$$L_z(f) = \frac{\partial}{\partial z} \left[B(y,z) \cdot \frac{\partial f(y,z)}{\partial z} \right]$$

$$L_y(g) = \frac{\partial}{\partial y} \left[C(y,z) \cdot D(y,z) \cdot \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} \right]$$

$$L_z(g) = \frac{\partial}{\partial z} \left[C(y,z) \cdot D(y,z) \cdot \frac{\partial g(y,z)}{\partial z} \right]$$

IV-6-3. Discrétisation des équations

Écriture en différences finies:

Le domaine rectangulaire est maillé avec un pas d'espace constant Δy , Δz dans chaque direction. Nous désignons par I_{\max} , et par J_{\max} le nombre de lignes de discrétisation dans la direction z.

On note que :

y_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur de y ;

z_j est la $j^{\text{ème}}$ valeur de z ;

t_n est la $n^{\text{ème}}$ valeur de t .

$$\text{avec} \quad 1 \leq i \leq I_{\max} \quad , \quad 1 \leq j \leq J_{\max}$$

Nous allons discrétiser les équations pour des pas d'espace variables, pour cela nous introduisons les notations suivantes:

$$f(y, z, t) = f(y_i, z_j, t_n) = f_{i,j}^n$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad ; \quad \Delta z_j = z_{j+1} - z_j$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) \quad ; \quad z_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (z_j + z_{j+1})$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j} = 0.5(B_{i+1,j} + B_{i,j}) \quad ; \quad C_{i+\frac{1}{2},j} = 0.5(C_{i+1,j} + C_{i,j}) \quad ; \quad D_{i+\frac{1}{2},j} = 0.5(D_{i+1,j} + D_{i,j})$$

Les opérateurs différentiels L_y et L_z sont approchés par les opérateurs aux différences finies δ_y et δ_z .

$$\delta_y(f) = \left[B_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \frac{(f_{i+1,j} - f_{i,j})}{\Delta y_i} - B_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \frac{(f_{i,j} - f_{i-1,j})}{\Delta y_{i-1}} \right] \cdot \frac{1}{y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}} \quad (4-25)$$

$$\delta_z(f) = \left[B_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(f_{i,j+1} - f_{i,j})}{\Delta z_j} - B_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(f_{i,j} - f_{i,j-1})}{\Delta z_{j-1}} \right] \cdot \frac{1}{z_{j+\frac{1}{2}} - z_{j-\frac{1}{2}}} \quad (4-26)$$

$$\delta_y(g) = \left[C_{i+\frac{1}{2},j} \cdot D_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \frac{(g_{i+1,j} - g_{i,j})}{\Delta y_i} - C_{i-\frac{1}{2},j} \cdot D_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \frac{(g_{i,j} - g_{i-1,j})}{\Delta y_{i-1}} \right] \cdot \frac{1}{y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}} \quad (4-27)$$

$$\delta_z(g) = \left[C_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot D_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(g_{i,j+1} - g_{i,j})}{\Delta z_j} - C_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot D_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(g_{i,j} - g_{i,j-1})}{\Delta z_{j-1}} \right] \cdot \frac{1}{z_{j+\frac{1}{2}} - z_{j-\frac{1}{2}}} \quad (4-28)$$

Pour intégrer l'équation (4-23) on procède comme suit :

On traite les termes en g comme terme source et on les évalue à l'instant $(t + \frac{\Delta t}{2})$

pendant le balayage en y aussi bien que pendant le balayage en z .

Les équations deviennent :

$$A_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(f_{i,j}^* - f_{i,j}^n)}{\frac{\Delta t}{2}} = \delta_y^*(f) + \delta_z^n(f) + S^{n+\frac{1}{2}}$$

pour le balayage suivant y : (4-29)

$$A_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^*)}{\frac{\Delta t}{2}} = \delta_z^{n+1}(f) + \delta_y^*(f) + S^{n+\frac{1}{2}}$$

pour le balayage suivant z : (4-30)

$$\text{avec:} \quad S^{n+\frac{1}{2}} = AD \cdot \delta_y^{n+\frac{1}{2}}(g) + AD \cdot \delta_z^{n+\frac{1}{2}}(g) - ss \cdot E \cdot \frac{K_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - K_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{z_{j+1} - z_{j-1}} \quad (4-31)$$

Les coefficients A, B, C, D intervenant dans les opérateurs aux dérivées partielles sont évalués à $t + \frac{\Delta t}{2}$ et sont calculés à partir des fonctions $f^{n+\frac{1}{2}}$ et $g^{n+\frac{1}{2}}$.

A chaque pas de temps l'équation (4 - 29) se trouve réduite à un système d'équations linéaires que l'on peut écrire sous la forme:

$$\Pi_1 f^* = \Omega_1 \quad (4 - 32)$$

L'équation (4 - 30) s'écrit de même:

$$\Pi_2 f^{n+1} = \Omega_2 \quad (4 - 33)$$

où Π_1 et Π_2 sont des matrices tridiagonales, Ω_1 et Ω_2 des vecteurs colonnes. Le calcul numérique se fait par le procédé d'élimination directe de Thomas.

IV-6-4. Structure générale du programme de calcul.

i-Maillage de calcul

Le maillage de calcul consiste en un réseau bidimensionnel de cellules quadrilatérales pour des coordonnées planes (cartésiennes).

Les coins des cellules sont mentionnés par des indices i et j. Les centres des cellules sont notés par des demi-entier d'indice $i + \frac{1}{2}$ et $j + \frac{1}{2}$. Le maillage des cellules est de N_y cellules de largeur par N_z cellules de hauteur.

Les principales variables sont y et z.

ii- Structure générale.

Nôtre programme qu'on a appelé MIPO (abrev. Milieu Poreux) s'articule sur un ensemble de sous-routines primaires contrôlées par un court programme principale. La structure générale est illustrée dans la figure (IV-2). A côté de chaque cadre de la structure apparaît le (ou les) noms de la (ou des) sous-routine(s) responsable de la tâche qui lui est associée. En plus des sous-routines primaires, figure(IV-2), s'identifient aussi un nombre de sous-routines supports qui performant les tâches des sous-routines primaires. Elles concernent les conditions aux limites et le programme de sortie.

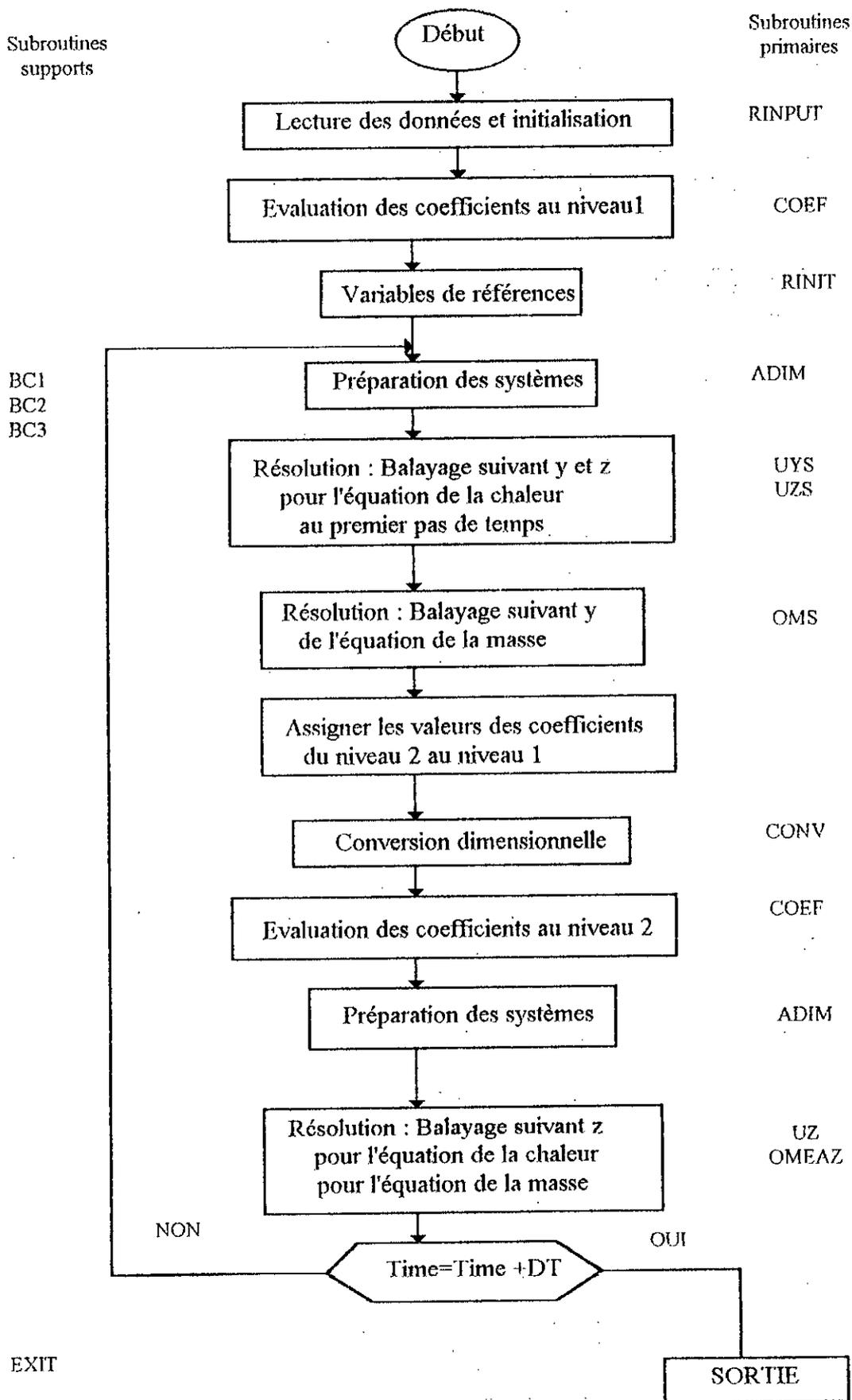


Figure (IV-2)

CHAPITRE V

RESULTATS ET DISCUSSION

V-1. Premier cas

V-1-1. Potentiel gravitaire négligé. Comparaison avec CRAUSSE

V-1-2. Potentiel gravitaire pris en compte.

V-2-. Deuxième cas

V-2-1. Potentiel gravitaire pris en compte

V-2-2. Potentiel gravitaire négligé

V-3. Troisième cas

V-3-1. Transfert de masse

V-3-2. Transfert de chaleur

V-4. Effet de l'allongement sur le transfert

On choisit une enceinte de section rectangulaire, de hauteur H et de largeur L . Après adimensionnement des équations, la géométrie est caractérisée par le paramètre sans dimension $\frac{H}{L}$ que l'on nomme **rapport de forme**; l'écoulement est supposé plan.

Pour simplifier le problème nous avons pris le rapport de forme égale à l'unité ($\frac{H}{L} = 1$) d'où notre cavité est de section carrée.

On va traiter trois cas de types de problèmes physiques à conditions aux limites différentes.

V-1. Premier cas :

On impose sur la face verticale AC un échelon de température $T = 55^\circ\text{C}$ et on maintient l'autre face BD à la température initiale $T_i = 21^\circ\text{C}$ (Voir Chapitre III).

Le calcul numérique est réalisé avec un maillage régulier $\Delta y = \Delta z = 1$ cm et avec un pas de temps $\Delta t = 30$ s.

On va étudier l'effet de la gravité sur le transfert de chaleur et la redistribution de l'humidité lorsqu'on tient compte de la gravité.

V-1-1. potentiel gravitaire négligé.

Lorsque le potentiel gravitaire est négligé, on montre au temps $t = 60$ mn sur les figures (V-1) et (V-2) les distributions spatiales des isothermes et des iso-humidités.

On constate que la thermomigration ne s'effectue pas d'une façon monotone, ce qui permettrait à l'eau de s'accumuler progressivement vers la face froide. Au contraire, on remarque que l'humidité atteint une valeur maximale entre la face chaude AC et la face froide BD (Figure (V-1)).

L'écoulement devient monodimensionnel lorsqu'on néglige l'effet de la gravité. Les résultats issus du code de calcul bidimensionnel sont comparés avec les résultats expérimentaux de Crausse [15] , figure (V-3) , qui avait utilisé un dispositif permettant d'évaluer la teneur en eau et la température dans un cylindre de 35 cm de longueur et de 5 cm de diamètre.

Les résultats numériques sont en bon accord avec l'expérience ce qui signifie que le modèle est correct dans ce cas.

Prat [42] est arrivé à la même conclusion en utilisant le même matériau, à partir d'une simulation numérique par une méthode aux éléments finis.

V-1-2. Potentiel gravitaire pris en compte.

Lorsque le potentiel gravitaire est pris en compte, on observe que l'accumulation massique ne s'effectue pas seulement au voisinage de la face verticale maintenue à la température initiale, mais aussi dans le bas (Voir figure (V-2)) où sont représentées les isoteneur en eau.

Les isothermes restent pratiquement verticales sauf vers le haut de la cavité où l'humidité est moins importante qu'en bas. On remarque que le temps de l'évolution isotherme est lent dans la zone à teneur en humidité élevé; ceci est en accord avec la diffusivité thermique du matériau considéré.

En ce qui concerne les différents processus, il est intéressant d'étudier les différents phénomènes pris sous considération (diffusion, gravité,...).

Le long de l'axe (OZ) à partir d'une compétition entre le flux de masse dû à la gravité et le flux de masse dû aux gradients d'humidité.

Le long de l'axe (OY) à partir d'une compétition entre le flux de masse dû gradients thermiques et le flux de masse dû aux gradients d'humidité.

Ces considérations nous permettent de comprendre le processus de redistribution de l'eau à l'intérieur du matériau.

La gravité agit très rapidement comparée au mouvement de l'eau dû aux gradients thermiques et provoque une stratification le long de la verticale.

Le mouvement dû aux gradients thermiques modifie cette redistribution de l'eau en deux voies: à la premier frontière par un mouvement d'eau horizontal (drainage de la zone chaude et imbibition de la zone froide) et à l'autre frontière par un changement insignifiant (léger) de l'équilibre gravitaire conduisant à de nouveaux mouvements verticaux.

Cette légère modification de l'équilibre gravitaire est due au changement dans le coefficient de la diffusivité de masse isotherme et dans le coefficient de conductivité hydraulique.

Les expériences qui ont été effectuées ne permettent pas d'avoir une idée sur les profils bidimensionnel. Nous ne pouvons donc comparer les résultats fournis par le code de calcul qu'avec les valeurs moyennées sur une tranche que Crausse [15] a recueillies. En fait on peut s'apercevoir qu'un bon accord est obtenue lorsque nous recherchons une solution avec **stratification horizontale** en négligeant le potentiel gravitaire.

V-2. Deuxième cas :

On impose sur la face verticale AC de la cavité et sur la face supérieur AB un échelon de température $T=55^{\circ}\text{C}$ et on maintient les autres faces adiabatiques (Voir Chapitre III).

Le maillage utilisé est un maillage régulier $\Delta y=\Delta z=1$ cm et avec un pas de temps $\Delta t=30\text{s}$.

V-2-1.-Potentiel gravitaire négligé.

Lorsqu'on néglige le potentiel gravitaire, le milieu n'atteint pas la saturation pour la valeur initiale donnée même après quatre heures de simulation .

On représente sur les figures (V-4)- (V-5) les isoteneurs en eau pour 6 temps différents: $t = 60, 90, 120, 180, 210, 240$ minutes, et de même pour les figures (V-7) et (V-8) pour les isotherme.

Comme on a fait la remarque dans le cas précédent, on observe bien une symétrie, par rapport à la diagonale de la cavité, des isotherme et des isoteneurs en eau.

Dans le premier problème, on a observé que la variation de l'humidité w en fonction de l'abscisse y atteint un maximum . On retrouve ce phénomène dans ce deuxième problème où la gravité est négligée. Par exemple: l'évolution de la valeur de l'iso-humidité $w=13\%$, au temps $t= 60$ mn. Cette valeur est représentée par une concentration de points, figure (V-4), sur la diagonale de la cavité et évolue dans le temps pour donner une sorte de concentration de masse qui se déplace vers le bas suivant cette diagonale. A $t = 90$ mn, l'iso-humidité $w = 13\%$ devient circulaire, figures (V-4) et (V-5), et elle va se déplacer au cours du temps jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de concentration d'eau; son déplacement devient monotone à partir de $t=180\text{mn}$; au delà de ce temps, l'allure des iso-humidités devient aussi régulière que les isothermes, et le transfert devient monotone.

V-2-2.Potentiel gravitaire pris en compte .

i-Transfert de masse:

Le transfert de masse se fait du haut de la cavité vers le bas du fait de la présence d'un flux thermique couplé avec le potentiel gravitaire. Ceci s'explique par la présence d'un flux thermique orienté dans la direction des z , du côté chaud AC vers le côté froid BD.

Au voisinage de la paroi AC, la figure (V-5) illustre bien le phénomène de la thermomigration. Le fluide se déplace du côté chaud c'est à dire le côté supérieur gauche de la

cavité vers le coté froid c'est à dire le coté inférieur droit de la cavité. Tandis que vers le bas de la cavité on observe une forte accumulation d'eau du fait du potentiel gravitaire.

ii- Transfert de chaleur:

Comme le montre l'évolution des isothermes illustrée par la figure (V-9), le transfert de chaleur se fait dans le sens contraire du transfert de masse. On remarque jusqu'au temps $t=60$ s que les isothermes ne sont pas symétriques par rapport à la diagonale de la cavité, ce qui est significatif de la présence du potentiel gravitaire et de son effet sur le transfert de chaleur. En effet les conditions aux limites dans ce cas sont symétriques par rapport à la diagonale de la cavité et la solution du problème sans prise en compte de l'effet de la gravité doit contenir cette symétrie.

V-3. Troisième cas :

Cette configuration diffère de la deuxième par l'inversion des conditions aux limites suivant la direction verticale. Ceci revient à mettre physiquement le flux thermique en opposition au potentiel gravitaire.

De même que le deuxième cas le maillage est régulier et avec un pas de temps $\Delta t=30$ s.

V-3-1. Transfert de masse.

Au début du transfert, on remarque sur la figure (V-10) où est présentée l'évolution des isothermes qu'il y a concentration d'humidité au voisinage d'un plan situé à 5 cm de la face gauche; au temps $t=15$ mn, accumulation d'eau est suivie d'un transfert monotone dans la cavité. Au temps $t=60$ mn en comparant avec les résultats obtenus dans le premier problème, on observe que l'effet du gradient thermique s'oppose à l'écoulement et devient très sensible. Le fait qu'il y ait un flux thermique en bas de la cavité entraîne une accumulation d'humidité au milieu de celle-ci par rapport au premier problème.

V-3-2. Transfert de chaleur.

On représente sur la figure (V-11) les isothermes à différents temps. On constate que dans la direction horizontale oy , la progression de la chaleur est beaucoup plus rapide dans la partie supérieure de la cavité que dans la partie inférieure. Le front thermique avance légèrement plus vite par rapport au premier problème où le potentiel gravitaire est négligé.

V-4. Effet de l'allongement sur le transfert

Dans cette étude, on s'est attaché à explorer l'effet du rapport de forme qu'on fait varier.

La configuration traitée dans ce cas est la suivante:

pour la face AC, une condition de dirichlet sur la température $T=55^{\circ}\text{C}$, ce qui correspond à la condition physique d'imposer un échelon de température, et une condition de Neumann pour le transfert de masse, c'est à dire une condition d'imperméabilité. Les conditions sont les même que le premier cas.

La résolution numérique est effectuée avec un maillage régulier et un pas d'espace constant et identique dans les deux directions $\Delta y = \Delta z = 1\text{cm}$; $\Delta t = 30\text{s}$.

Dans le cadre de la validation de notre code de calcul avec d'autres résultats numériques on s'est ramené à une configuration géométrique où $\frac{H}{L} = \frac{1}{7}$.

Cette configuration a été étudié par Prat [42] par la méthode des éléments finis, nos résultats sont comparés au siens et qui sont pratiquement les mêmes (Voir figure (V-12)).

On présente sur les figures (V-13) à (V-16) les iso-teneurs en eau w et les isothermes calculées pour les rapports de forme

$$H/L = 1,5 ; 2 ; 3,5 ; 7$$

On observe d'une façon générale, pour tous les rapports de forme, les phénomènes suivants:

_ Le déplacement de l'eau se fait de la partie supérieure vers la partie inférieure de l'enceinte. Ceci est dû au potentiel gravitaire puisqu'on a choisi une teneur en eau initiale constante et l'équilibre massique nécessite une redistribution de l'eau.

_ Le déplacement de l'eau va du coté chaud (coté gauche) vers le coté droit le moins chaud (coté droit) voir figures (V-13) à (V-16) où sont représentées les isothermes et les iso-humidités.

_ On distingue deux régions où l'écoulement présente des caractéristiques très différentes:

* Une région où les deux phénomènes de gravité et de thermomigration sont couplés;

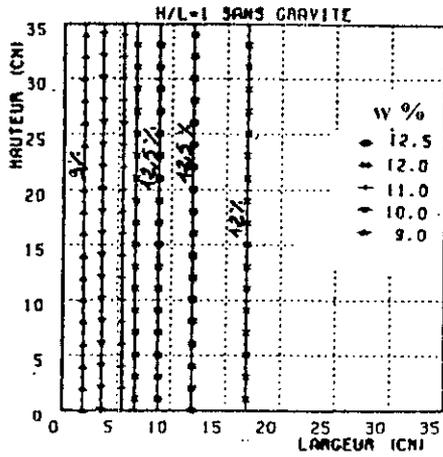
* Une région où l'écoulement est dû uniquement à la présence du potentiel gravitaire. Cette région est susceptible de disparaître au cours du temps lorsque tout le champs de l'écoulement est atteint par le gradient thermique.

Ces deux régions sont séparées par une sorte de front que l'on peut nommer front thermique. En fait cette appellation ne fait apparaître qu'il s'agit d'un front aussi bien pour le transfert de chaleur que pour le transfert d'humidité.

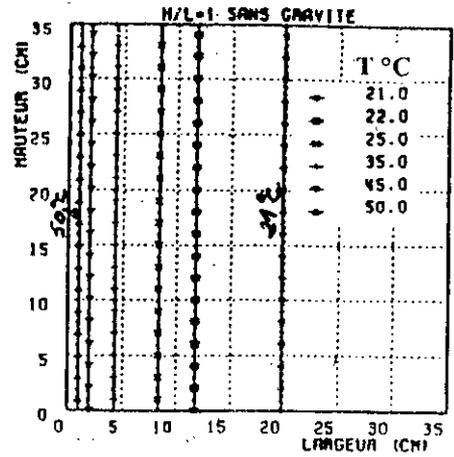
Dans la zone située à gauche de ce front, le transfert d'eau et de chaleur sont couplés. Par contre, dans la zone située à droite du front, le transfert de l'eau est dû uniquement à la redistribution par gravité. Ce front correspond approximativement à l'isotherme 21°C que l'on peut voir sur les figures représentant les isothermes calculées pour différents allongements.

Les profils de teneur en humidité à différentes hauteurs sont représentés sur les figures (V-17) à (V-19). On constate que l'écoulement est d'autant plus d'un écoulement unidirectionnel que le facteur de forme est important. Ceci indique que les effets de parois ne sont ressentis que localement.

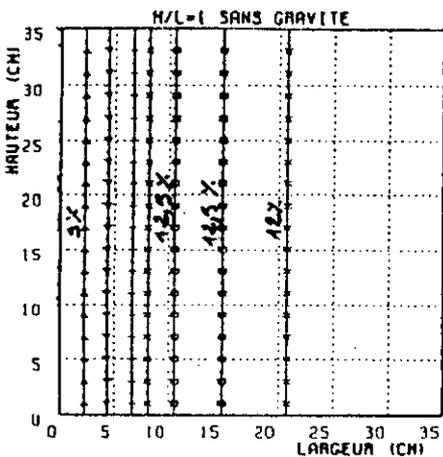
NB: Le choix du pas de temps $\Delta t=30s$ a été fait après une étude de convergence et sur recommandation de certains auteurs utilisant cette méthode [37].



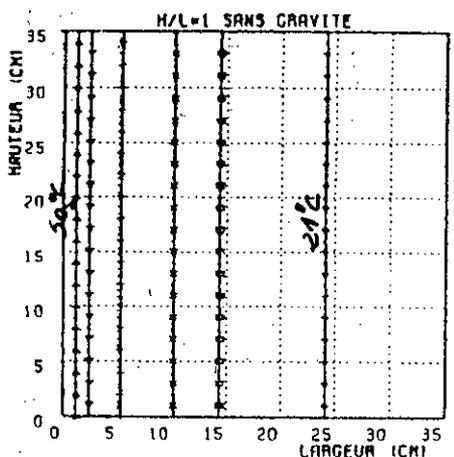
ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=30 MN



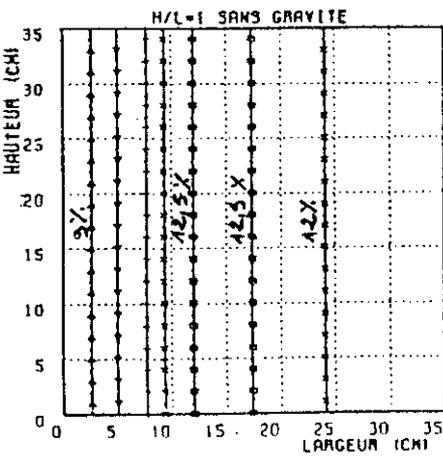
ISOTHERME AU TEMPS T=30 MN



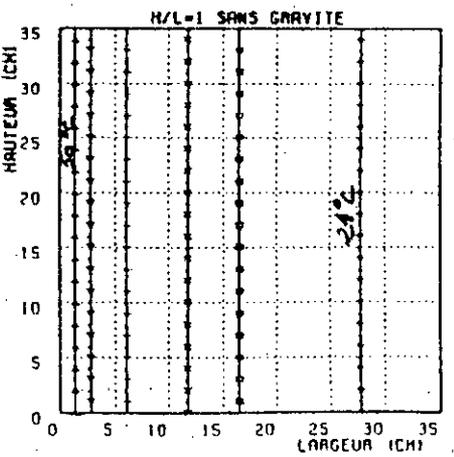
ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=45 MN



ISOTHERME AU TEMPS T=45 MN

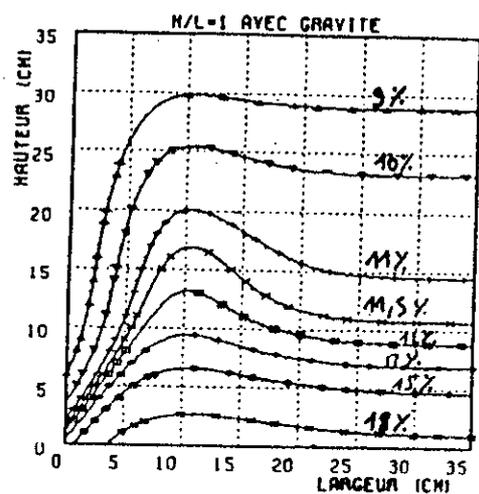


ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=60 MN

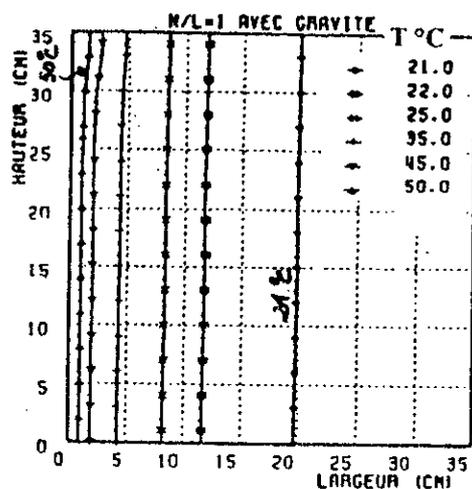


ISOTHERME AU TEMPS T=60 MN

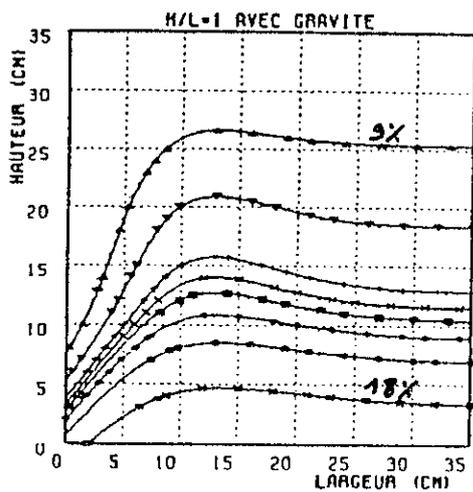
Figure (V-1) : Iso-teneurs en humidité et isothermes à différents temps dans le cas où la gravité est négligée



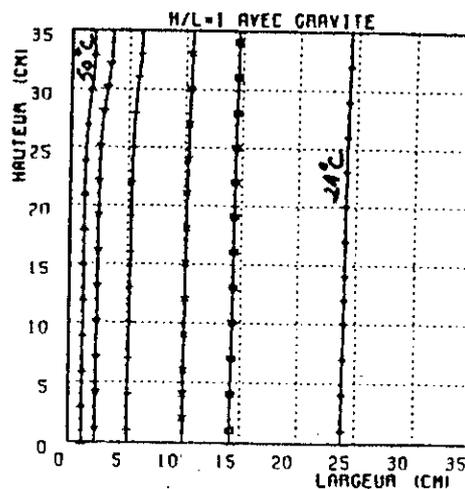
ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=30 MN



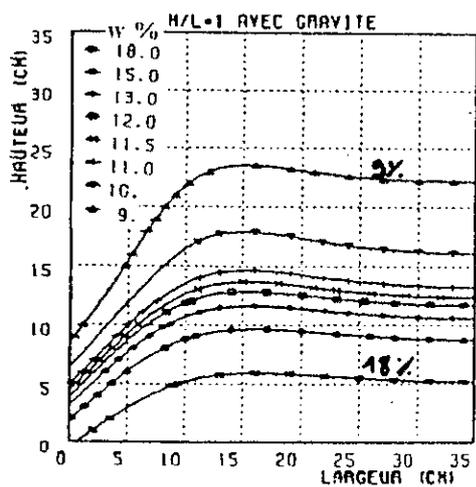
ISOTHERME AU TEMPS T=30 MN



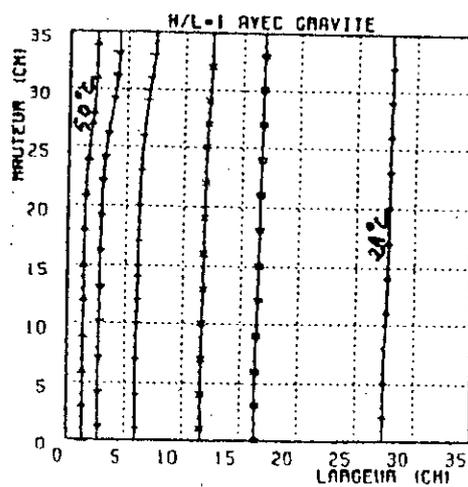
ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=45 MN



ISOTHERME AU TEMPS T=45 MN



ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=60 MN



ISOTHERME AU TEMPS T=60 MN

Figure (V-2): Iso-teneurs en humidité et isothermes à différents temps dans le cas où la gravité est prise en compte

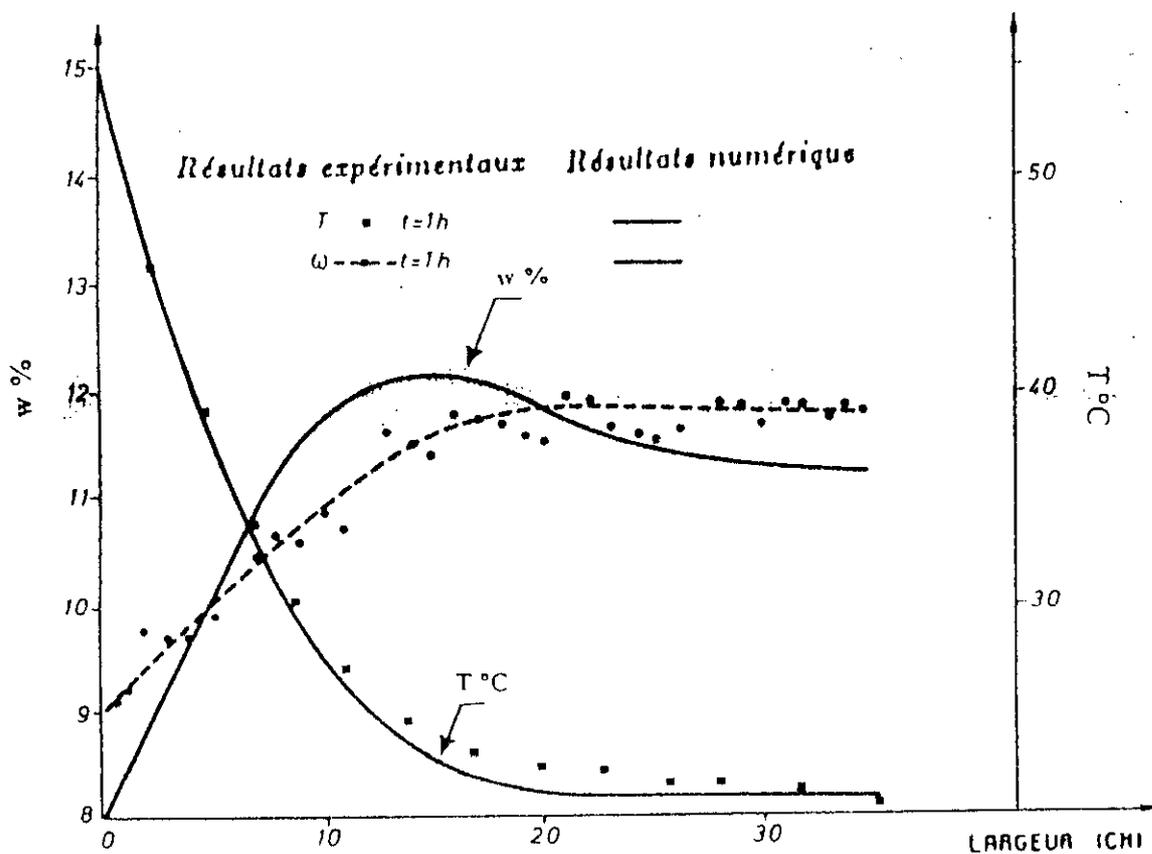
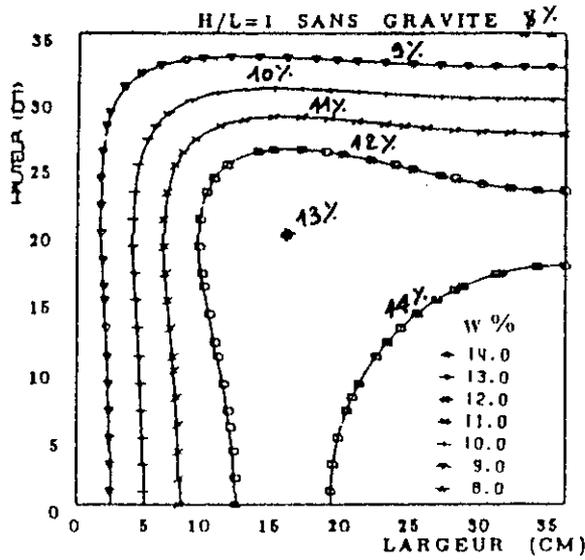
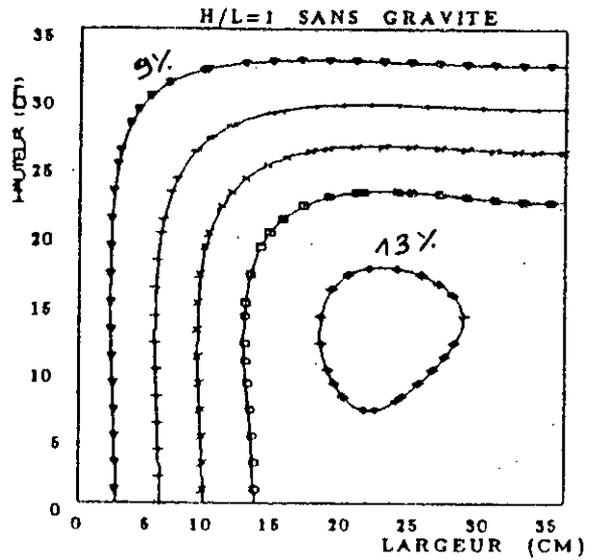


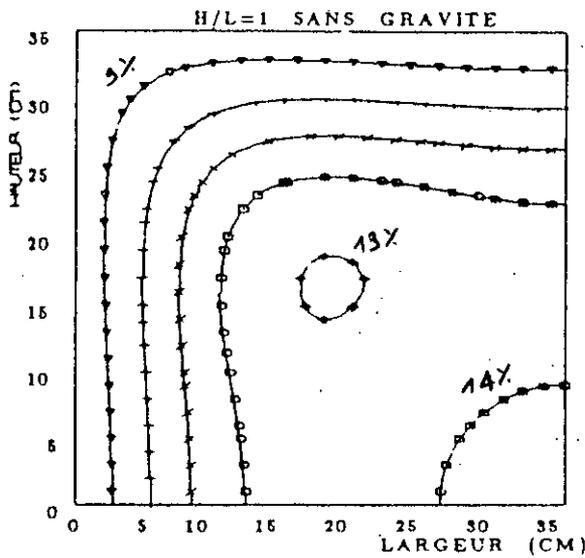
Figure (V-3) Variation de la teneur en humidité et de la température en fonction de la largeur comparaison entre les résultats numériques obtenue lorsque la gravité est négligée et ceux de l'expérience obtenue par Crausse sur un cylindre horizontal



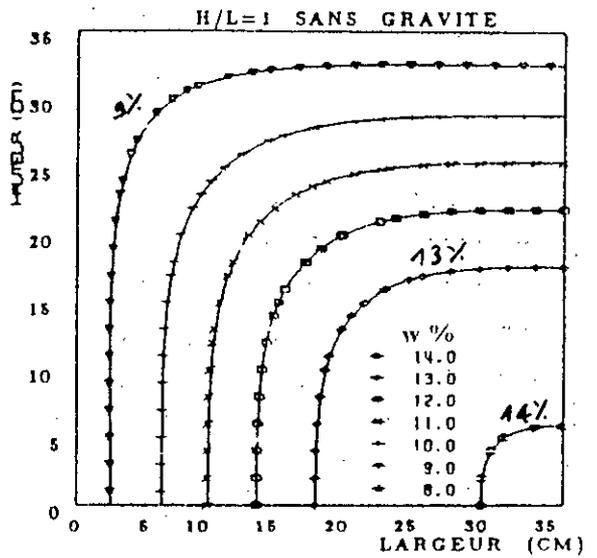
ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=60



ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=120

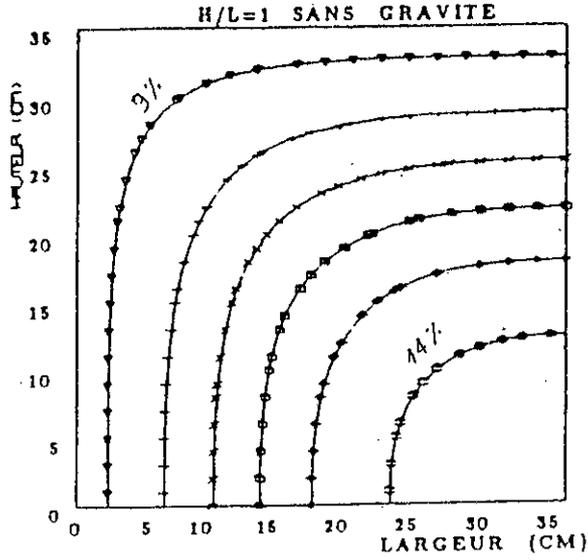


ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=90

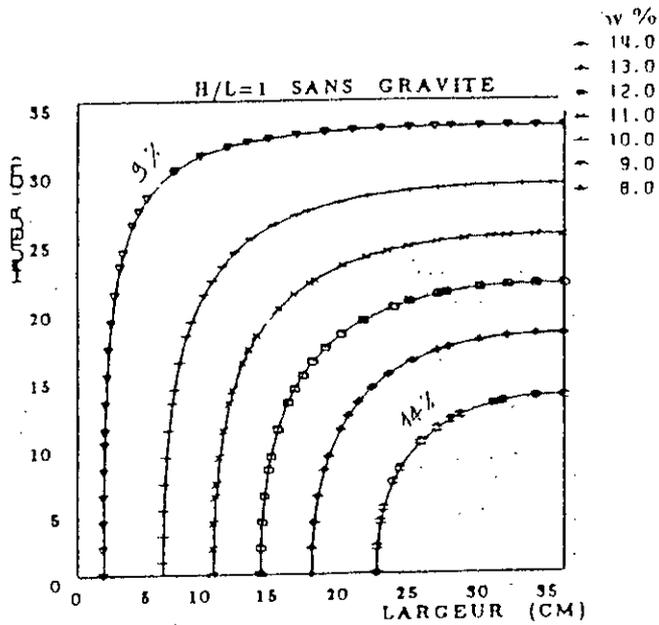


ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=180

Figure (V-4) : Iso-teneurs en humidité à différents temps dans le cas où la gravité est négligée avec le même isotherme (55°C) sur les deux faces orthogonales à gauche et supérieure

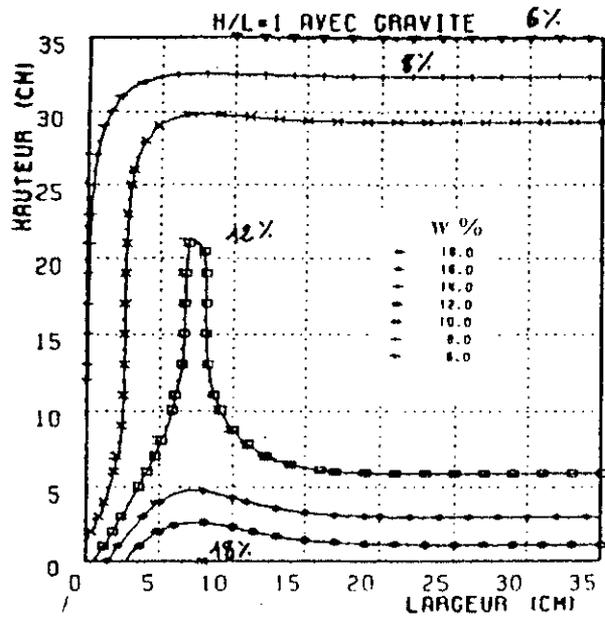


ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=210

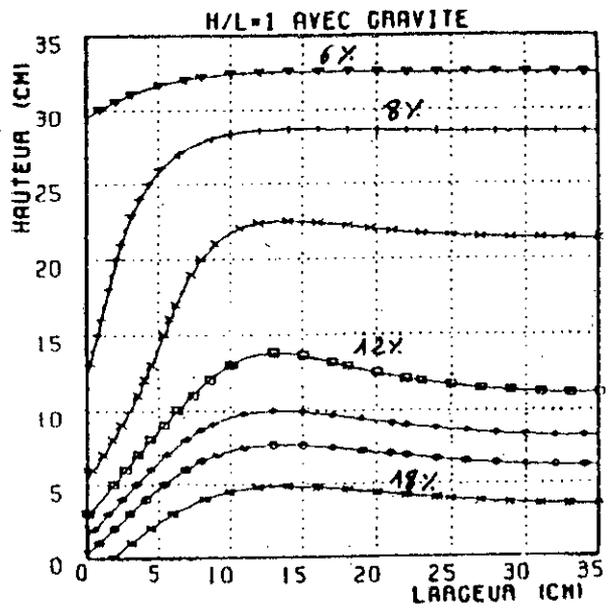


ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=240

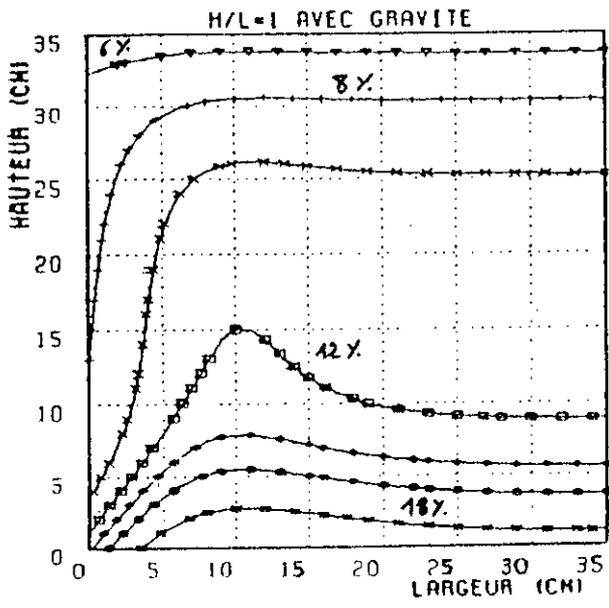
Figure (V-5) : Iso-teneurs en humidité aux temps 210 et 240 mn dans le cas où la gravité est négligée avec le même isotherme (55°C) sur les deux faces orthogonales à gauche et supérieure



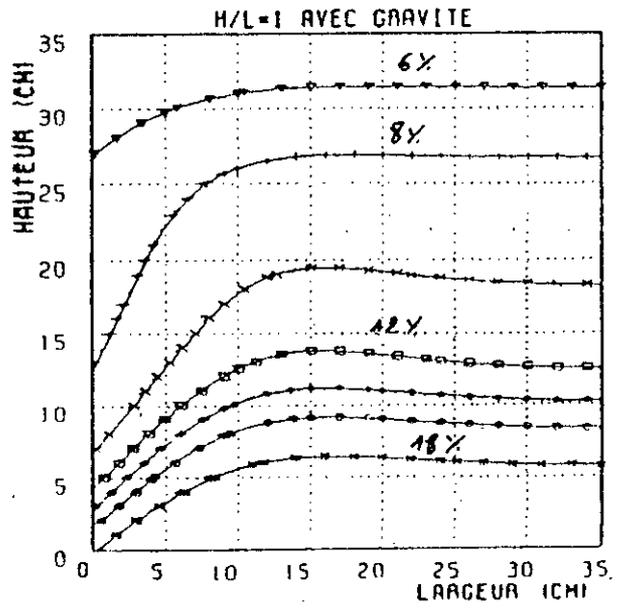
ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=15 MN



ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=45 MN

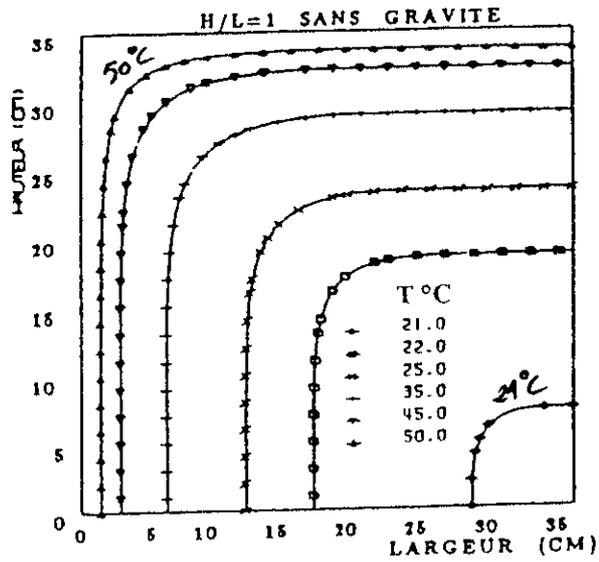


ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=30 MN

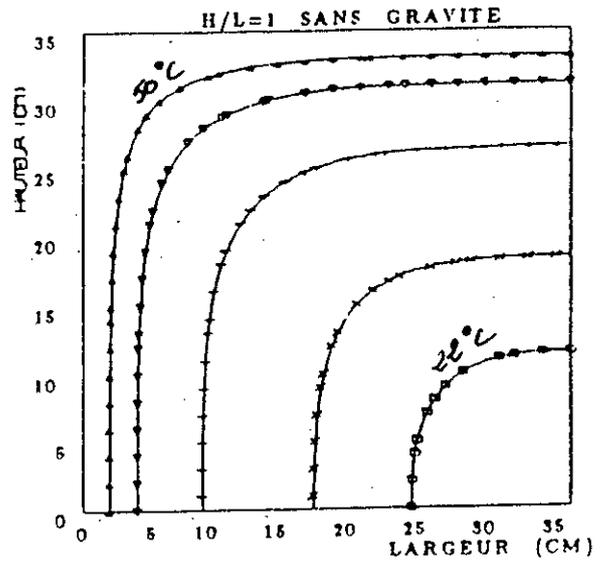


ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=60 MN

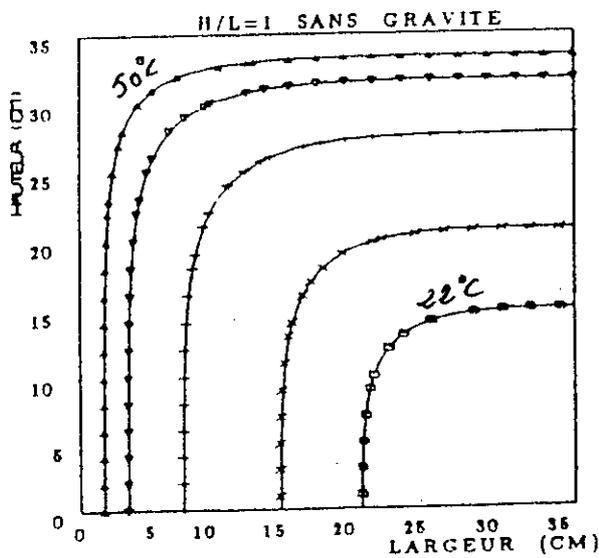
Figure (V-6) : Iso-humidités à différents temps dans le cas où la gravité est prise en compte avec le même isotherme (55°C) sur les deux faces orthogonales à gauche et supérieure



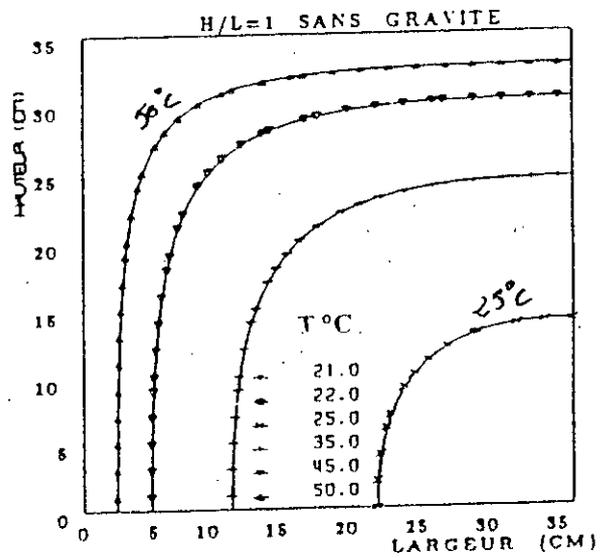
ISOTHERME AU TEMPS T=60



ISOTHERME AU TEMPS T=120



ISOTHERME AU TEMPS T=90



ISOTHERME AU TEMPS T=180

Figure (V-7) : Isothermes à différents temps dans le cas où la gravité est négligée avec le même isotherme (55°C) sur les deux faces orthogonales à gauche et supérieure

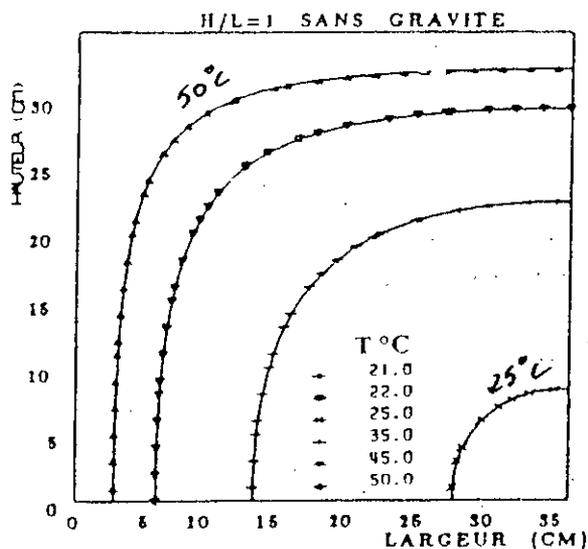
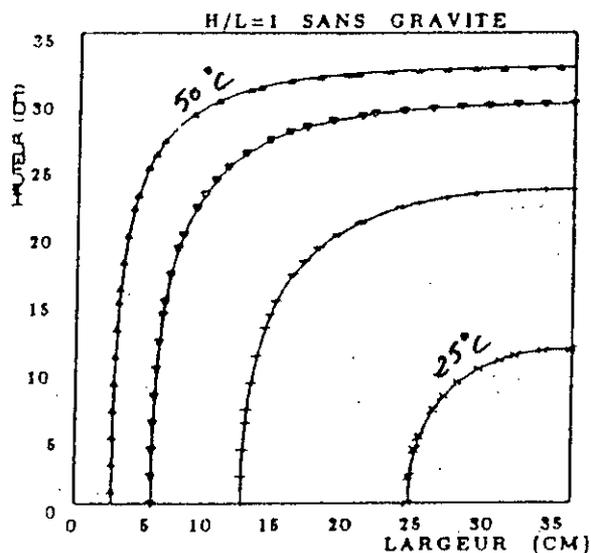
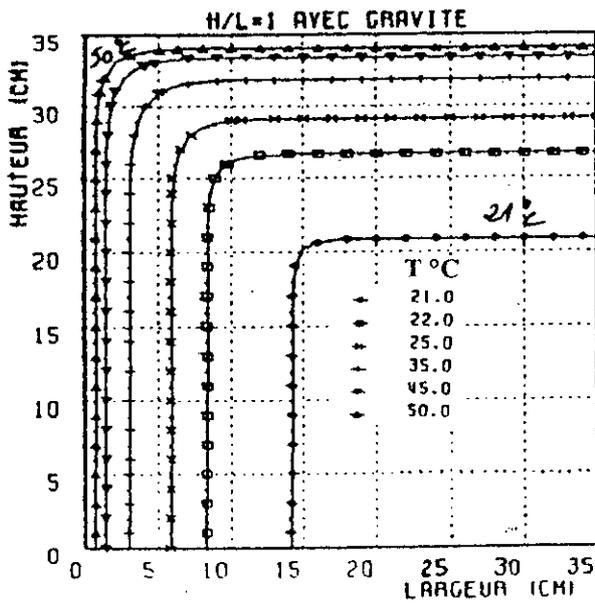
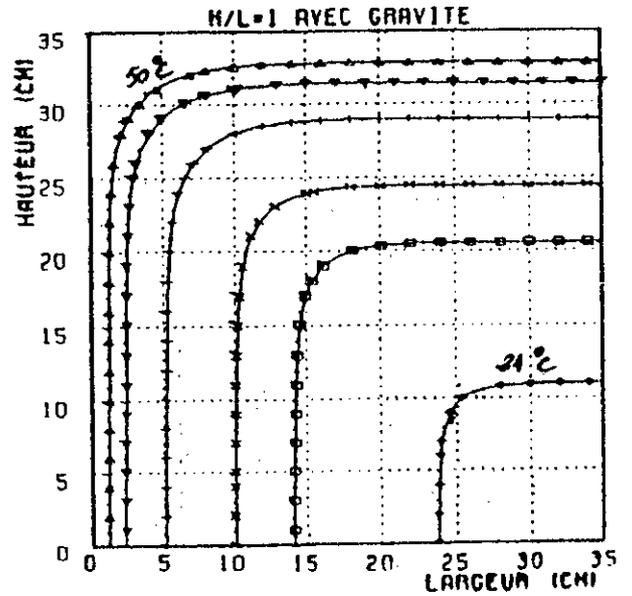


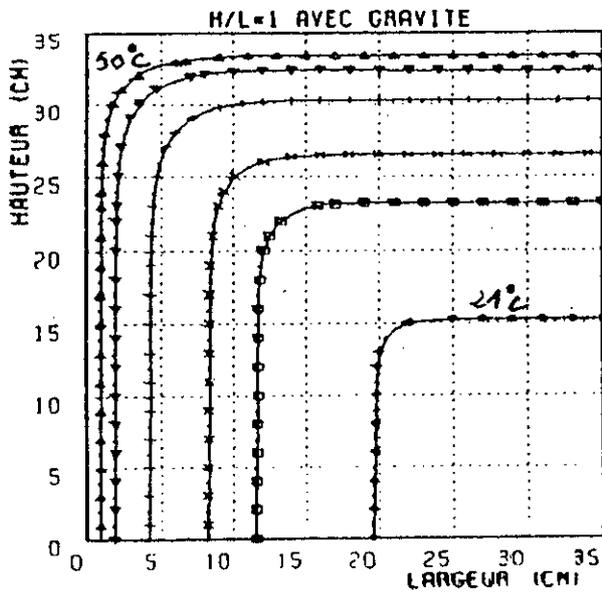
Figure (V-8) : Isothermes aux temps 210 et 210 mn dans le cas où la gravité est négligée avec le même isotherme (55°C) sur les deux faces orthogonales à gauche et supérieure



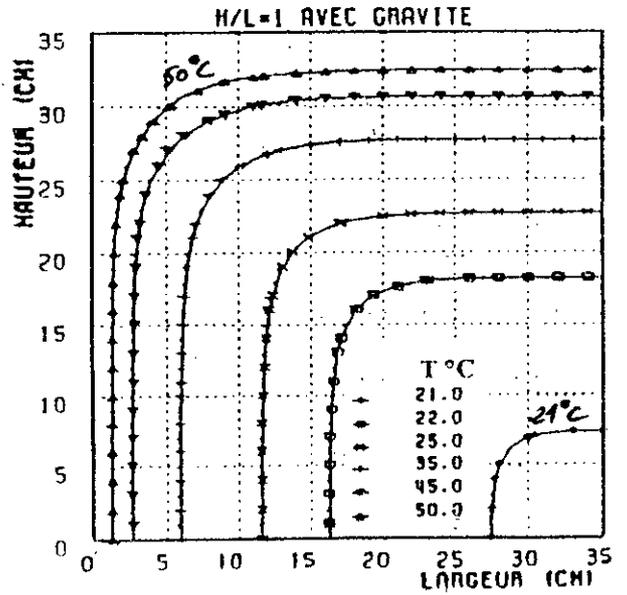
ISOTHERME AU TEMPS T=15 MN



ISOTHERME AU TEMPS T=45 MN

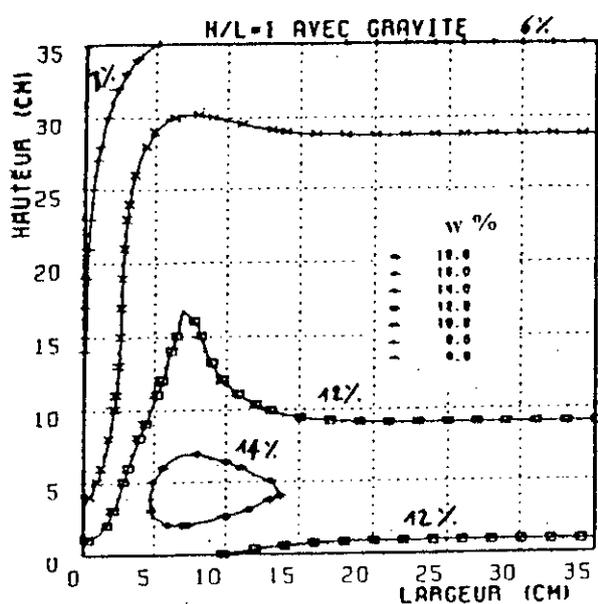


ISOTHERME AU TEMPS T=30 MN

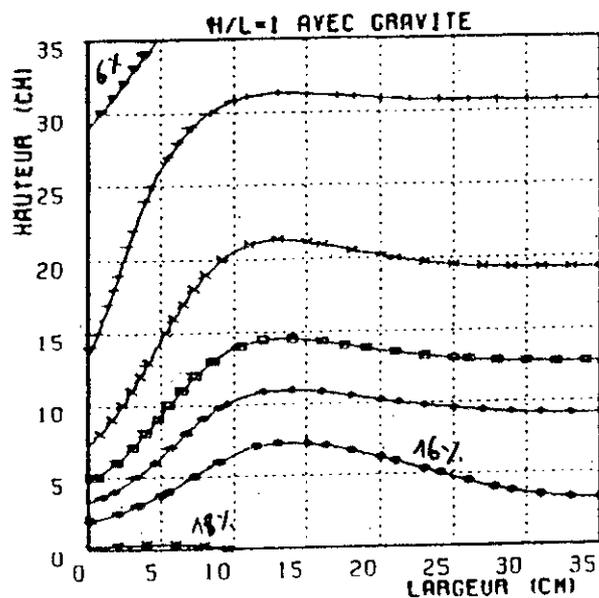


ISOTHERME AU TEMPS T=60 MN

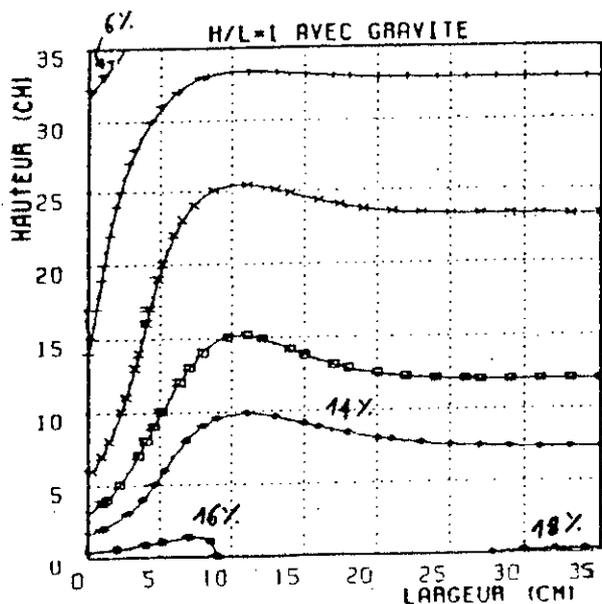
Figure (V-9) : Isothermes à différents temps dans le cas où la gravité est prise en compte avec le même isotherme (55°C) sur les deux faces orthogonales à gauche et supérieure



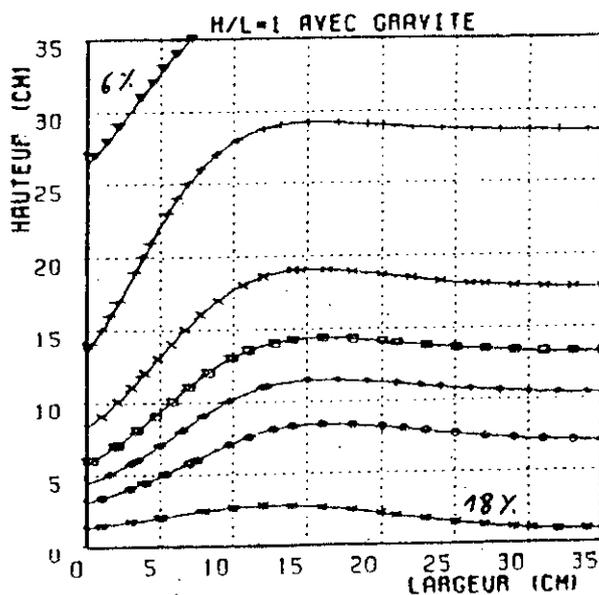
ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=15 MN



ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=45 MN

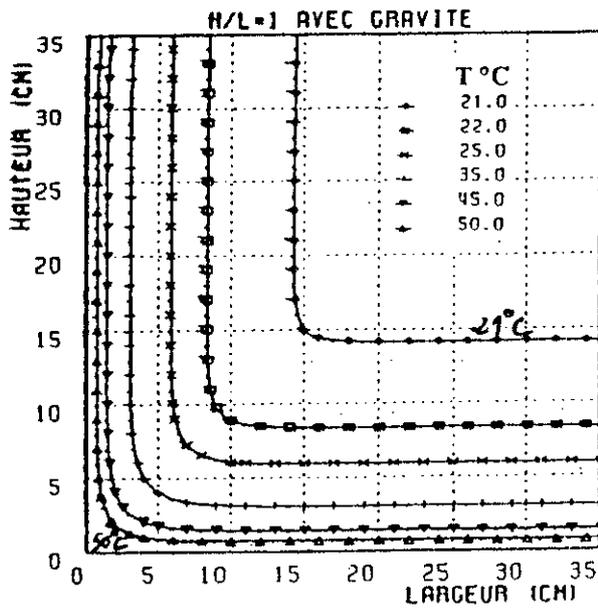


ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=30 MN

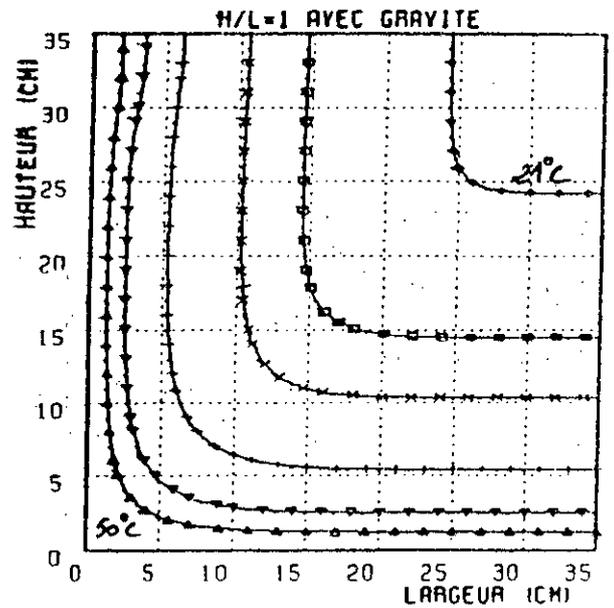


ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=60 MN

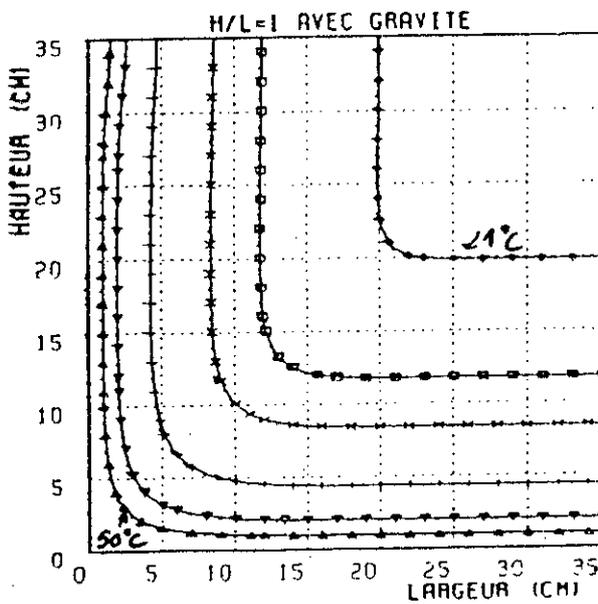
Figure (V-10) : Iso-teneurs en humidité à différents temps dans le cas où la gravité est prise en compte avec le même isotherme (55°C) sur les deux faces orthogonales à gauche et inférieure



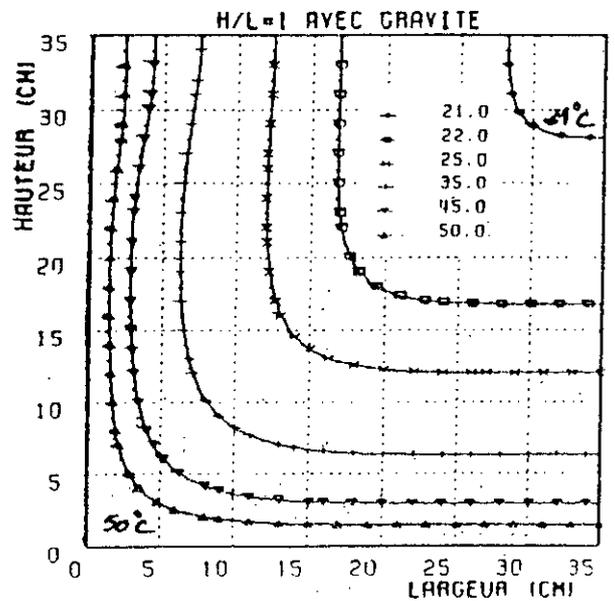
ISOTHERME AU TEMPS T=15 MN



ISOTHERME AU TEMPS T=45 MN

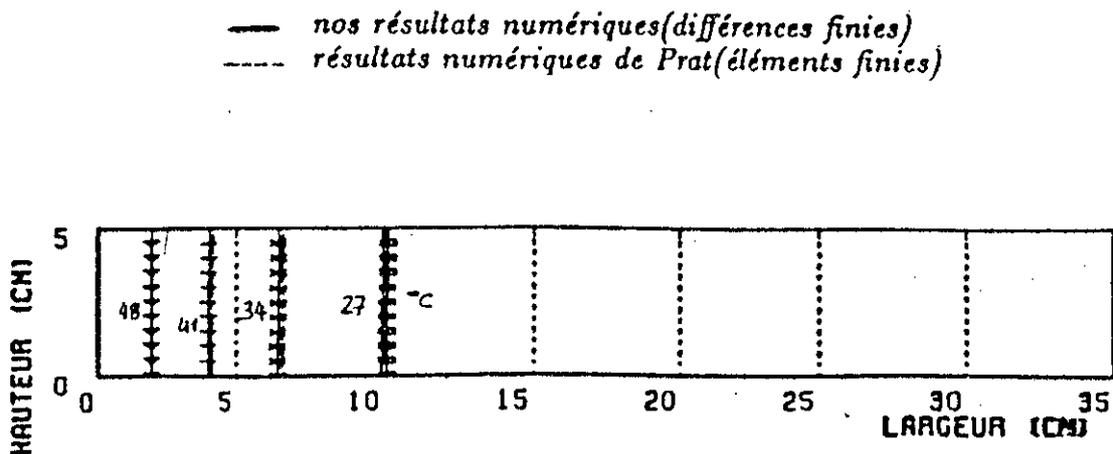


ISOTHERME AU TEMPS T=30 MN

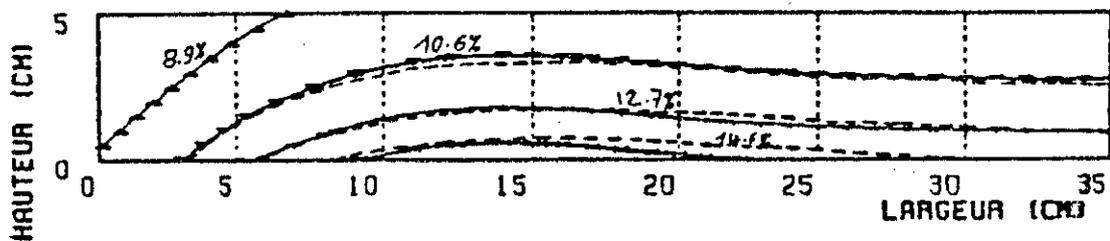


ISOTHERME AU TEMPS T=60 MN

Figure (V-11) : Isothermes à différents temps dans le cas où la gravité est prise en compte avec le même isotherme (55°C) sur les deux faces orthogonales à gauche et inférieure



ISOTHERMES AU TEMPS T=60 MN



ISO-TENEUR EN EAU AU TEMPS T=60 MN

Figure (V-12) : Comparaison entre nos résultats numériques avec ceux de Prat (1986) obtenus par la méthode des éléments finie

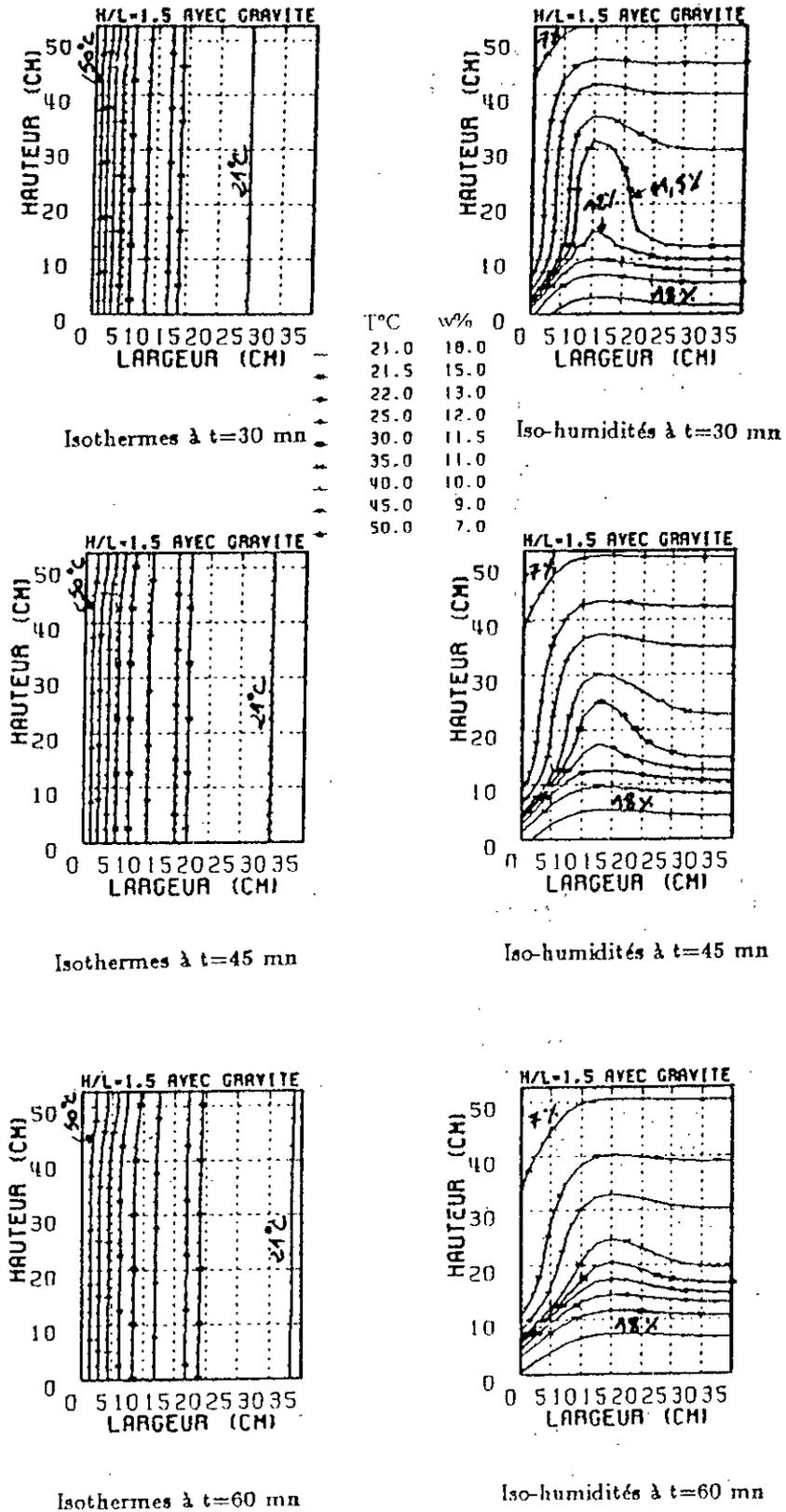
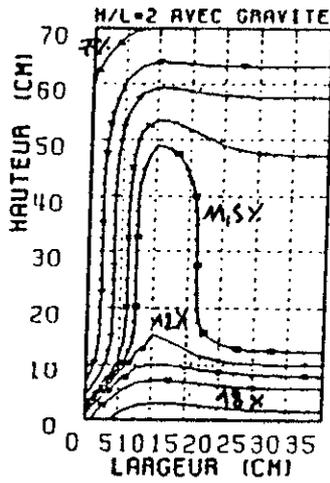
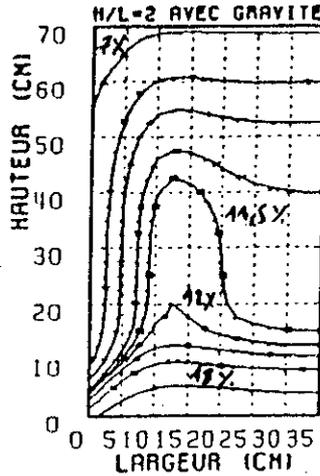


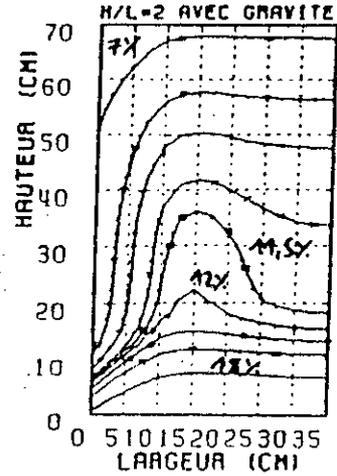
Figure (V-13) : Iso-teneurs en humidité et isothermes à différents temps pour un allongement de 1.5



Iso-humidités à t=30 mn

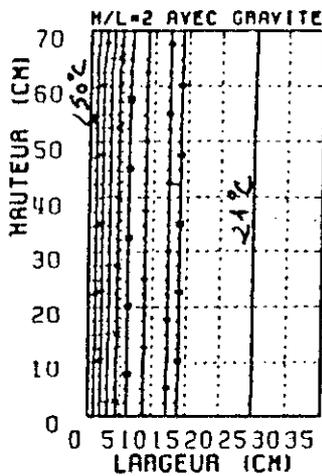


Iso-humidités à t=45 mn

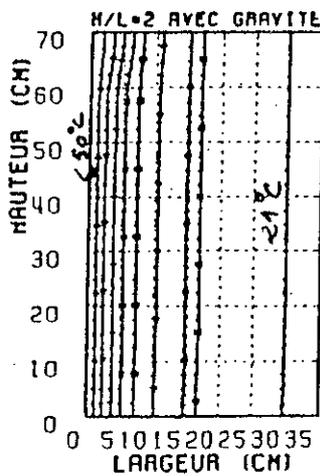


Iso-humidités à t=60 mn

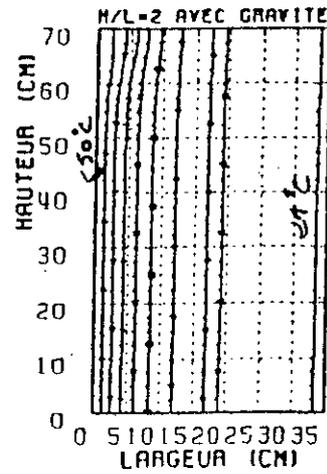
	T°C	w%
—	21.0	18.0
•••	21.5	15.0
•••	22.0	13.0
•••	25.0	12.0
•••	30.0	11.5
•••	35.0	11.0
•••	40.0	10.0
•••	45.0	9.0
•••	50.0	7.0



Isothermes à t=30 mn

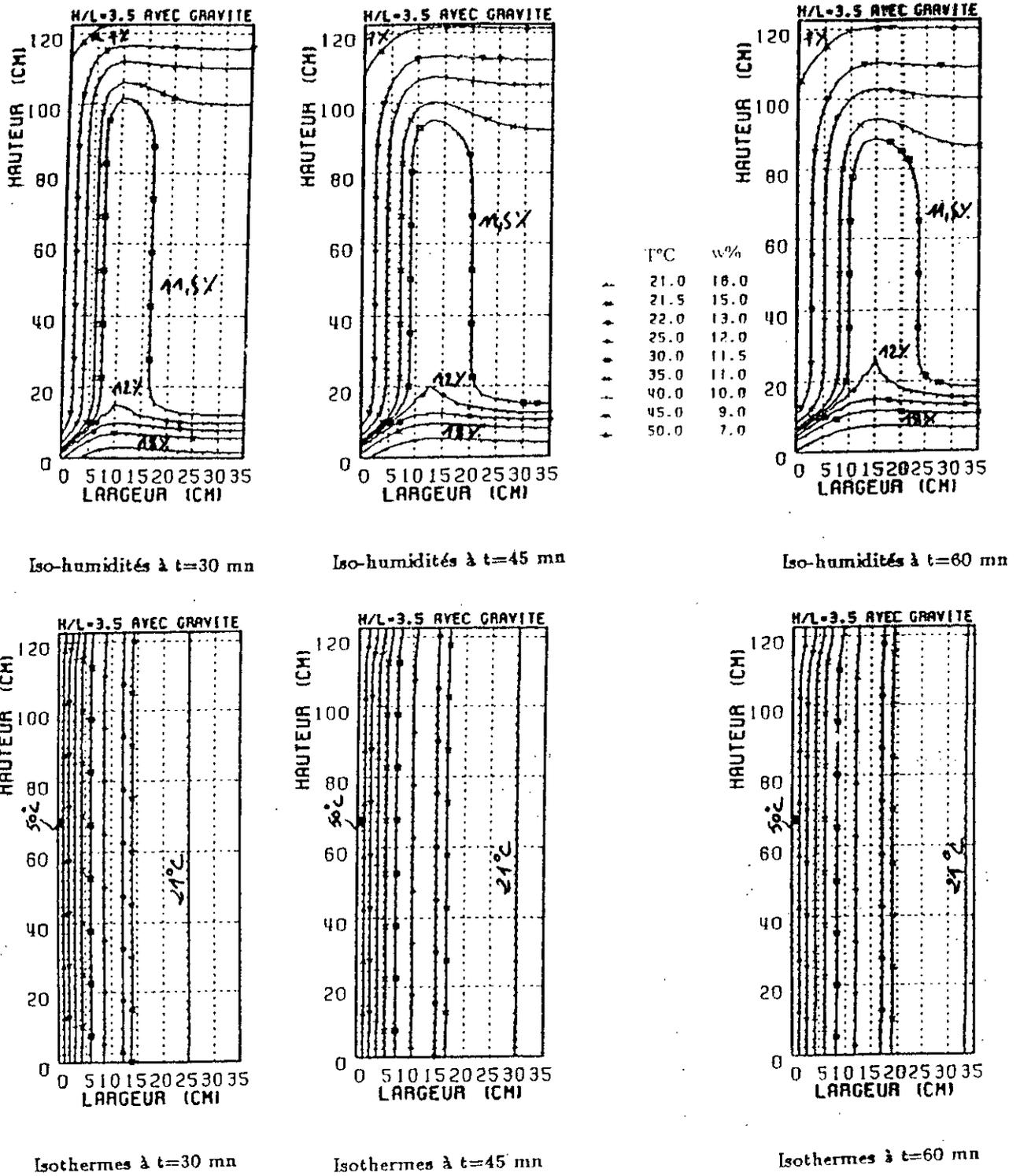


Isothermes à t=45 mn

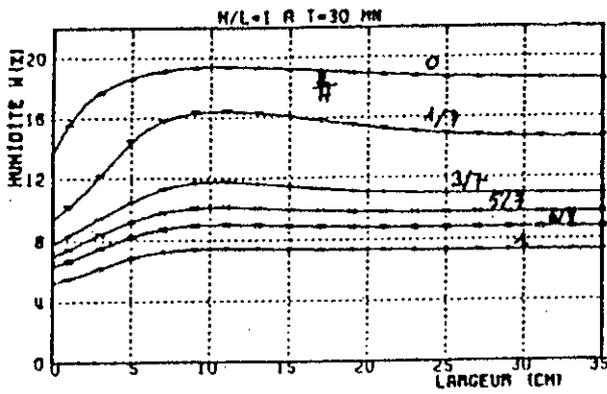


Isothermes à t=60 mn

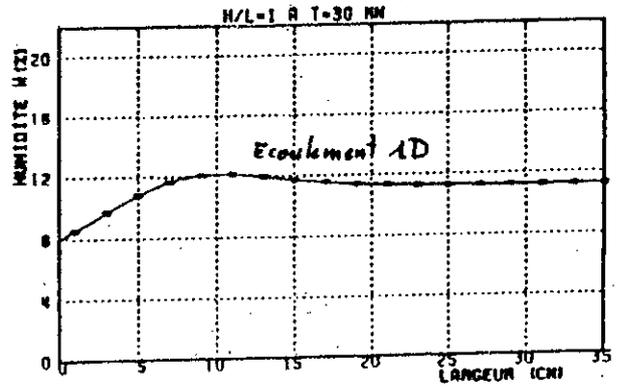
Figure (V-14) Iso-teneurs en humidité et isothermes à différents temps pour un allongement de 2.



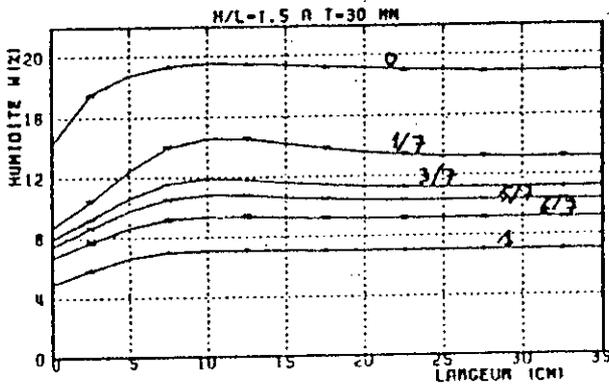
Figure(V-15) Iso-teneurs en humidité et isothermes à différents temps pour un allongement de 9.5



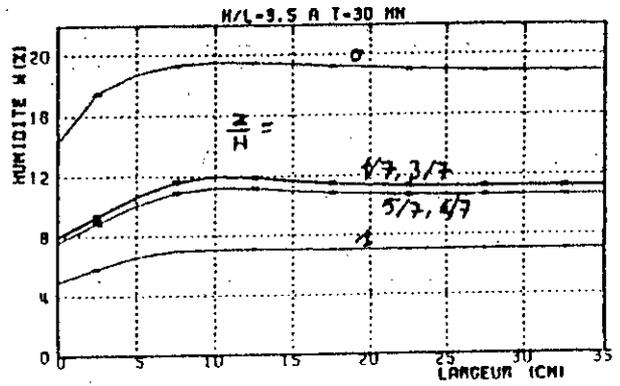
VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



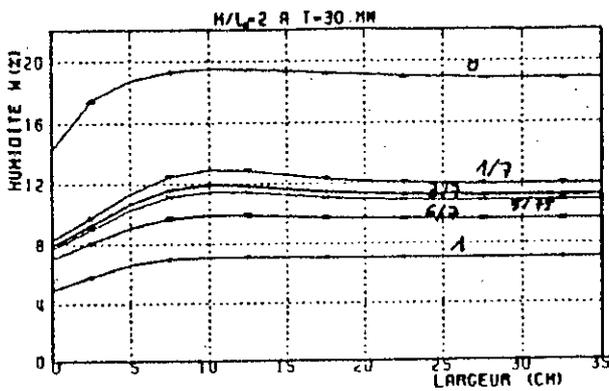
VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



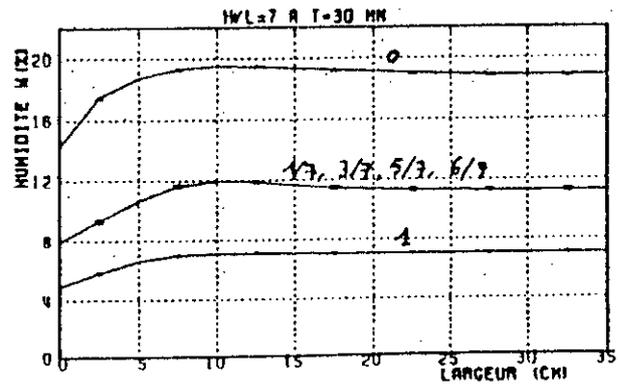
VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR

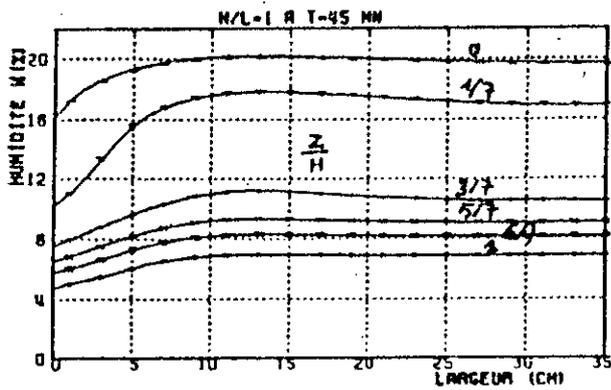


VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR

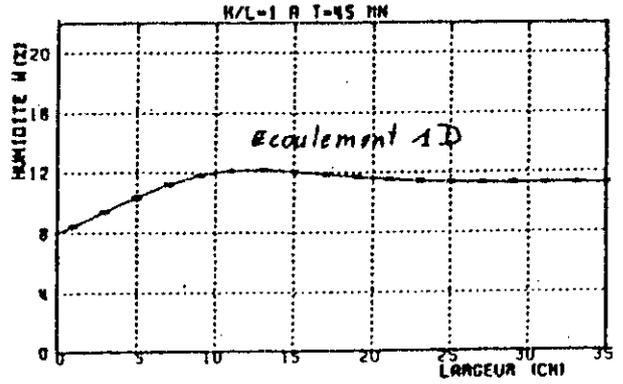


VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR

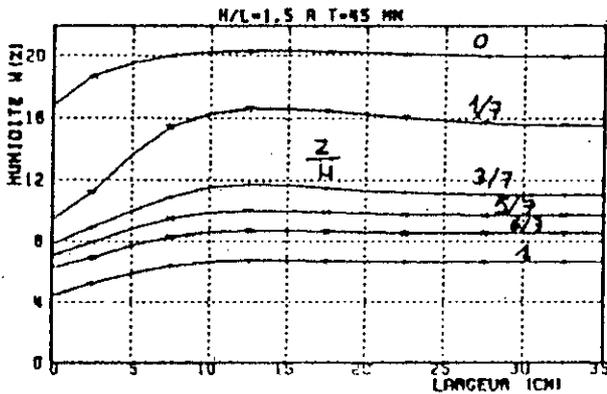
Figure (V-17) : Variation de l'humidité en fonction de la largeur de la cavité aux temps $t=30$ mn



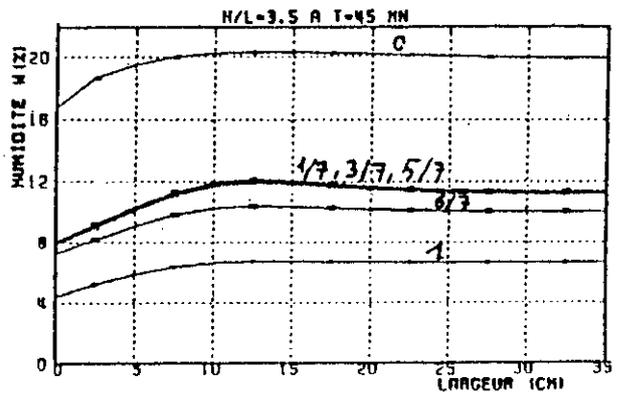
VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



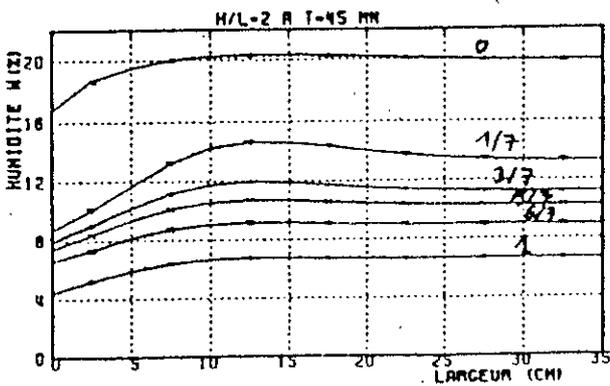
VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



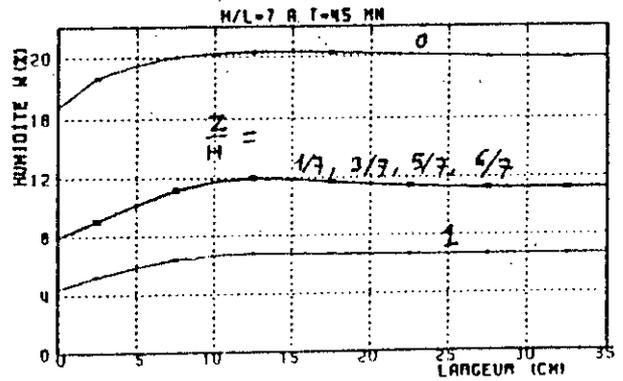
VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR

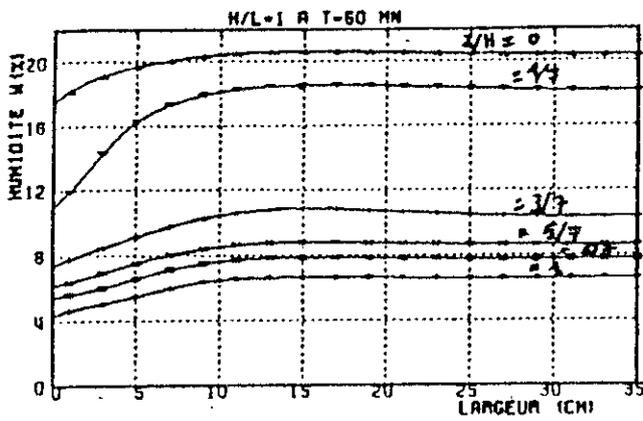


VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR

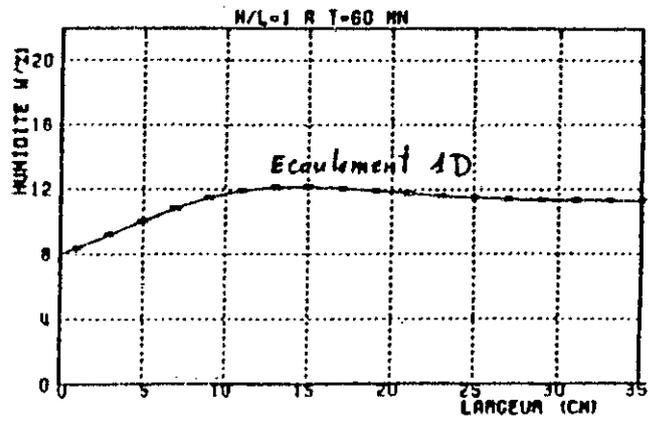


VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR

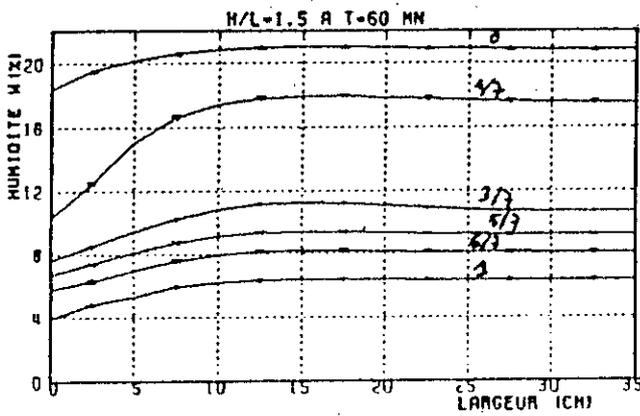
Figure (V-18) : Variation de l'humidité en fonction de la largeur de la cavité aux temps $t=45$ mn



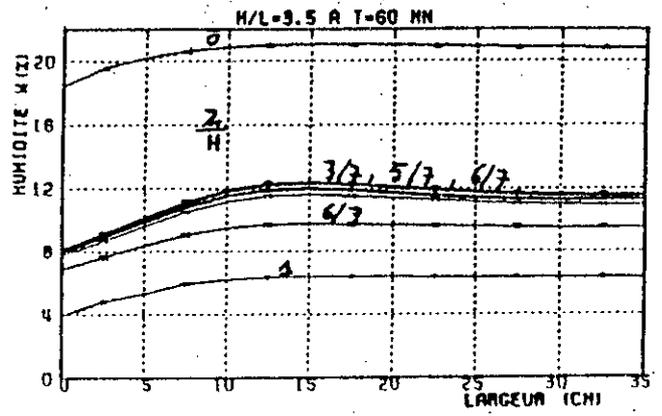
VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



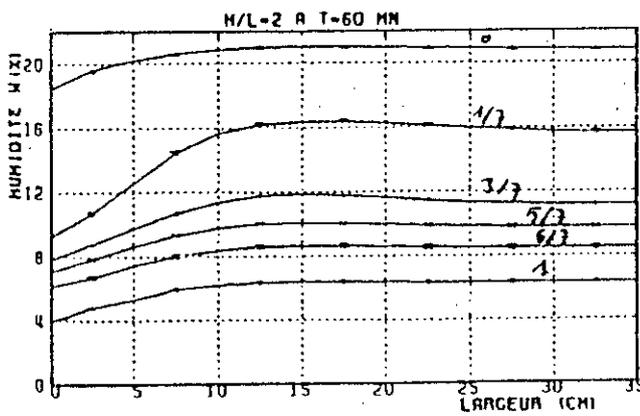
VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



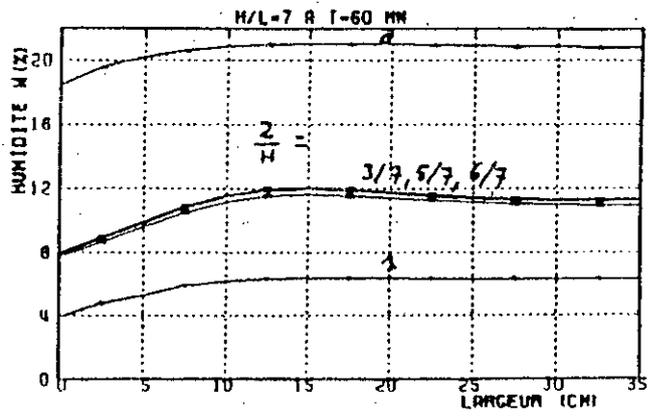
VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR



VARIATION DE W EN FONCTION DE LA LARGEUR

Figure(V-19) Variation de l'humidité en fonction de la largeur de la cavité aux temps $t=60$ min

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Cette étude a permis :

* de réaliser un code de calcul bidimensionnel pour résoudre le problème du transfert couplé chaleur-masse dans une enceinte à section rectangulaire. Ce code a été validé par comparaison des résultats obtenus avec des résultats expérimentaux [15] et avec d'autres résultats numériques [37, 42]:

- lorsque la gravité est négligée, on est amené à une configuration où les transferts sont monodimensionnels, les résultats numériques sont alors comparés à ceux donnés par des études expérimentales [15];

- lorsque le potentiel gravitaire est pris en compte, l'écoulement est bidimensionnel; la validation est alors effectuée par comparaison à des résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis [42]

* de mettre en évidence l'effet de la gravité pendant la thermomigration:

- pendant une redistribution en présence d'une forte teneur en humidité initiale : on constate que la contribution du potentiel gravitaire l'emporte sur la thermomigration, lorsque le gradient thermique est en opposition avec la gravité;

- pendant l'effet de l'allongement de la cavité sur le transfert, on constate que l'écoulement a tendance à devenir monodimensionnel lorsque le facteur de forme de la cavité dépasse 3,5.

Du point de vue de la résolution numérique, l'expérience a permis de mettre en évidence la sensibilité au pas de temps de calcul. Cette sensibilité est due au caractère fortement non linéaire des équations; elle est d'autant plus élevée que le gradient thermique imposé à la frontière est fort.

L'ensemble de ces résultats nous paraissent encourageante. Le prolongement de cette étude est indispensable pour la compréhension des processus de transfert couplé de chaleur et de masse. Parmi les perspectives que nous comptons développer; on peut citer:

1- l'optimisation de l'irrigation en fonction des conditions climatiques, par l'étude des transferts couplés de chaleur et de l'eau dans le sol ainsi que dans la couche atmosphérique voisine,

2- l'estimation de la concentration des solutés dans les nappes au sahara, par l'étude des transferts couplés de chaleur et de masse ainsi que l'étude de transport de solutés dans les milieux sableux fissurés.

Par ces deux cas notre code peut être développé en tenant compte des échanges thermiques et massiques à la surface du sol en introduisant des conditions aux limites instationnaires, ainsi qu'une étude numérique d'une infiltration bidimensionnelle non isotherme est indispensable, dans laquelle le modèle de PHILIP et DE VRIES [16] est considéré au complet.

Pour l'ensemble de ces perspectives, une étude expérimentale de laboratoire ou sur le terrain s'impose, afin de déterminer les coefficients d'échanges massique et thermique.

ANNEXES

ANNEXE IFONDEMENTS MATHÉMATIQUES DE LA MÉTHODE A.D.I.

La méthode A.D.I. a été proposée par PEACEMAN et ROCHFORD[39] en 1955, et ses performances comparées à un schéma explicite et à une méthode implicite itérative. Les tests ont été effectués sur une équation aux dérivées partielles de type parabolique linéaire.

Soit à résoudre dans un domaine rectangulaire de maillage régulier l'équation suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (A1-1)$$

La méthode A.D.I. consiste à résoudre dans un premier temps l'équation (A1-1) où $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est discrétisée par des valeurs inconnues de f alors que $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ l'est par des valeurs connues de f. Cette équation est implicite suivant la direction x en écrivant:

$$\frac{f^{n+\frac{1}{2}} - f^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \delta_{xx} \cdot f^{n+\frac{1}{2}} + \delta_{yy} \cdot f^n \quad (A1-2)$$

où δ_{xx} et δ_{yy} sont des opérateurs en différence finies, respectivement de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$$\delta_{xx} f = \frac{f_{i+1,j} - 2 \cdot f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\delta_{yy} f = \frac{f_{i,j+1} - 2 \cdot f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

La procédure est répétée, dans le second temps, avec un pas d'espace $\Delta y = \Delta x$ en utilisant une formulation implicite suivant la direction y, soit:

$$\frac{f^{n+1} - f^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \delta_{xx} f^{n+\frac{1}{2}} + \delta_{yy} f^{n+\frac{1}{2}} \quad (A1-3)$$

Cette méthode est dite précise à l'ordre 2 en temps du fait que, lorsqu'on fait la somme des équations (A1-2) et (A1-3), on obtient:

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = \delta_{xx} f^{n+\frac{1}{2}} + \delta_{yy} \left(\frac{f^n + f^{n+1}}{2} \right) \quad (A1-4)$$

Si on pose $f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{f^n + f^{n+1}}{2}$ On obtient alors:

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = \delta_{xx} f^{n+\frac{1}{2}} + \delta_{yy} f^{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{A1-5})$$

qui n'est autre que le schéma de Crank-Nicolson. Ce schéma est centré dans le temps, donc précis à l'ordre 2, dans le cas d'équations linéaires. L'avantage économique de la méthode A.D.I. est évident car les équations (A1-2) et (A1-3) forment des systèmes tridiagonaux et peuvent être résolues par des méthodes d'élimination directe. Les tests effectués par Peaceman et Rachford [39] sur une équation de la chaleur ont montré que la méthode A.D.I. nécessitait sept fois moins de temps de calcul que les méthodes itératives et 25 fois moins que les méthodes explicites.

Douglas et Gunn [22] ont démontré en utilisant une procédure de factorisation que la méthode A.D.I. est précise d'ordre 2 en temps du fait qu'elle est une perturbation de la méthode de Crank-Nicolson, mais si on part d'un schéma implicite, la méthode A.D.I. a une précision d'ordre 1 en temps.

A1-1. Méthode A.D.I. d'ordre 1.

A1-1-1. Application à 2 D

La discrétisation de l'équation (A1-1) suivant un schéma implicite s'écrit:

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = (\delta_{xx} + \delta_{yy}) f^{n+1} + o(\Delta t) \quad (\text{A1-6})$$

$$\text{Soit:} \quad (1 - \Delta t \cdot \delta_{xx} - \Delta t \cdot \delta_{yy}) f^{n+1} = f^n + o(\Delta t) \quad (\text{A1-7})$$

$$\text{Or} \quad (1 - \Delta t \cdot \delta_{xx} - \Delta t \cdot \delta_{yy}) = (1 - \Delta t \cdot \delta_{xx})(1 - \Delta t \cdot \delta_{yy}) - (\Delta t)^2 \cdot \delta_{xx} \cdot \delta_{yy} \quad (\text{A1-8})$$

Dans l'équation (A1-8), le dernier terme est de l'ordre $o((\Delta t)^2)$. Si on le néglige, on garde l'ordre de précision de l'équation (A1-6) qui est $o(\Delta t)$. On peut alors écrire:

$$(1 - \Delta t \cdot \delta_{xx})(1 - \Delta t \cdot \delta_{yy}) f^{n+1} = f^n + o(\Delta t)$$

$$\text{En posant:} \quad (1 - \Delta t \cdot \delta_{yy}) f^{n+1} = f^{n+\frac{1}{2}}$$

l'équation (A2-9) devient:

$$(1 - \Delta t \cdot \delta_{xx}) f^{n+\frac{1}{2}} = f^n$$

que l'on résoud pour trouver $f^{n+\frac{1}{2}}$ solution intermédiaire. Une fois la solution $f^{n+\frac{1}{2}}$ connue, f^{n+1} est obtenue en résolvant l'équation (A1-10).

A1-1-2. Application à 3D.

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = (\delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz})f^{n+1} + o(\Delta t)$$

$$\text{soit: } (I - \Delta t \cdot \delta_{xx} - \Delta t \cdot \delta_{yy} - \Delta t \cdot \delta_{zz})f^{n+1} = f^n + o(\Delta t)$$

$$\text{etenfactorisant: } (I - \Delta t \cdot \delta_{xx})(I - \Delta t \cdot \delta_{yy})(I - \Delta t \cdot \delta_{zz})f^{n+1} = f^n + o(\Delta t)$$

$$\text{En posant : } (I - \Delta t \cdot \delta_{zz})f^{n+1} = f^{**} \text{ et } (I - \Delta t \cdot \delta_{yy})f^{**} = f^*$$

$$\text{Il suffit de résoudre : } (I - \Delta t \cdot \delta_{xx})f^* = f^n \text{ pour résoudre à } f^{n+1}$$

A1-2. Méthode A.D.I. à l'ordre 2.**A1-2-1. Application à 2D.**

La discrétisation de l'équation (A1-1) suivant un schéma de Crank-Nicolson s'écrit:

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [(\delta_{xx} + \delta_{yy})f^n + (\delta_{xx} + \delta_{yy})f^{n+1}] + o((\Delta t)^2)$$

où

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{xx} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{yy}\right)f^{n+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{xx} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{yy}\right)f^n = D^n$$

soit en factorisant:

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{xx}\right)\left(I - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{yy}\right)f^{n+1} = D^n + o((\Delta t)^2)$$

$$\text{En posant : } \left(I - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{yy}\right)f^{n+1} = f^*$$

$$\text{on résoud: } \left(I - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{xx}\right)f^* = D^n$$

$$\text{puis: } \left(I - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{yy}\right)f^{n+1} = f^*$$

A1-2-2. Application à 3D.

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [(\delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz})f^n + (\delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz})f^{n+1}] + o((\Delta t)^2)$$

$$\text{soit : } \left(I - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{xx} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{yy} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{zz}\right)f^{n+1} = D^n + o((\Delta t)^2)$$

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{xx}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{yy}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{zz}\right) f^{n+1} = D^n + o((\Delta t)^2)$$

En posant :

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{zz}\right) f^{n+1} = f^{**} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{yy}\right) f^{**} = f^*$$

On résoud d'abord : $\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot \delta_{xx}\right) f^* = D^n$ et ainsi de suite jusqu'à f^{n+1} .

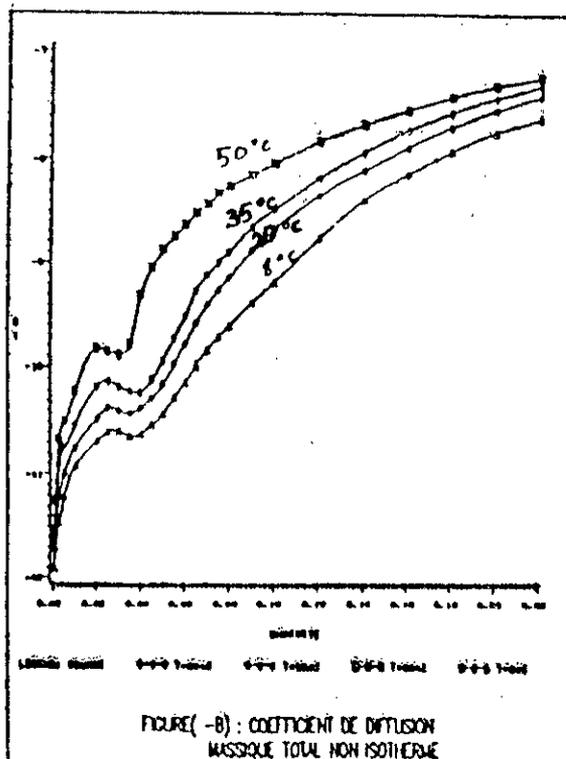
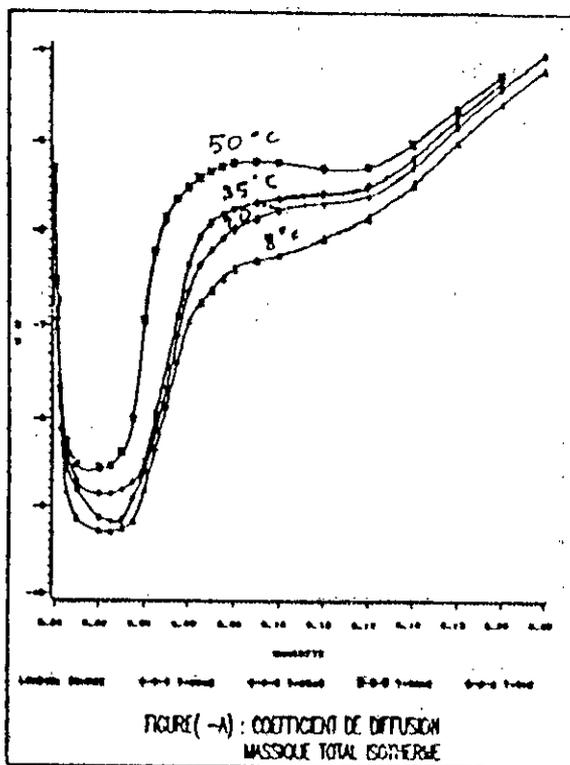


FIGURE A.II.1. Coefficients de diffusion massique isotherme et non isotherme en représentation logarithmique. en w/m²

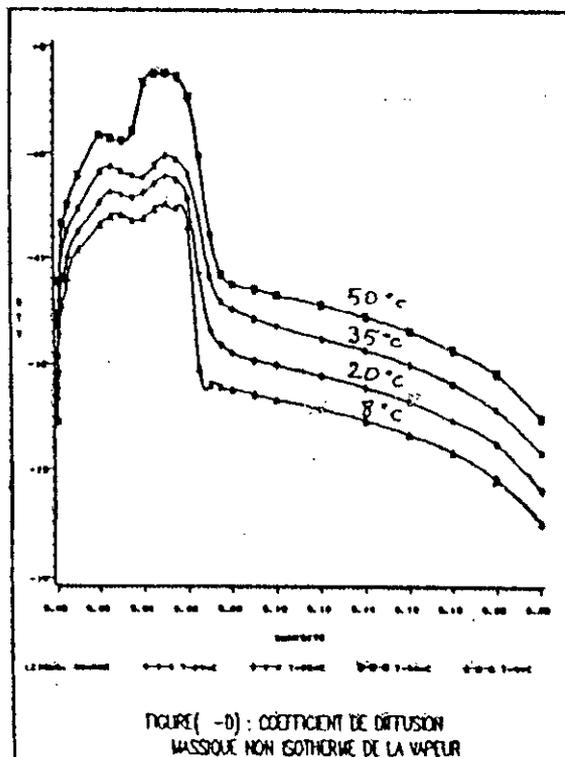
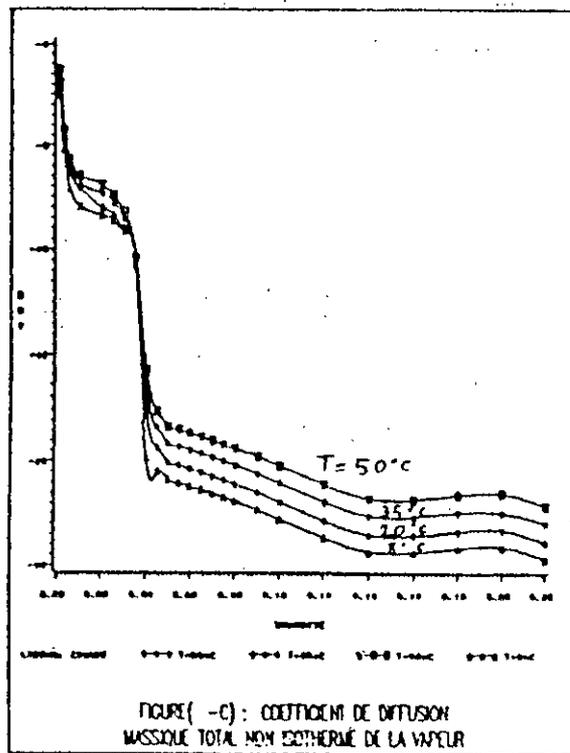


FIGURE A. II. 2. Coefficients de diffusion massique isotherme et non isotherme en représentation logarithmique. en W/m^2

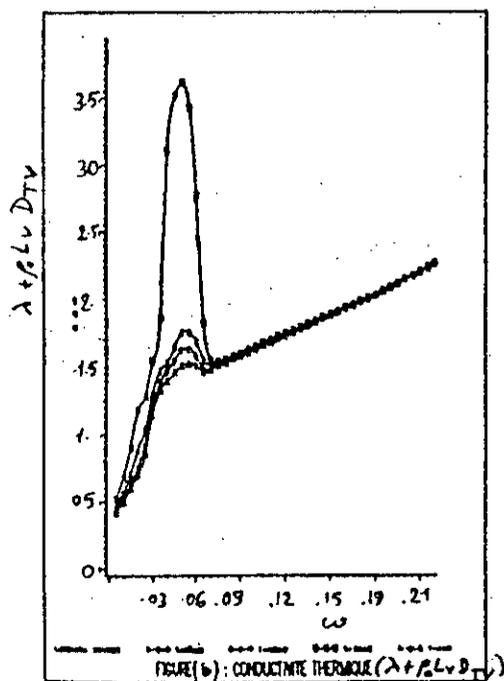
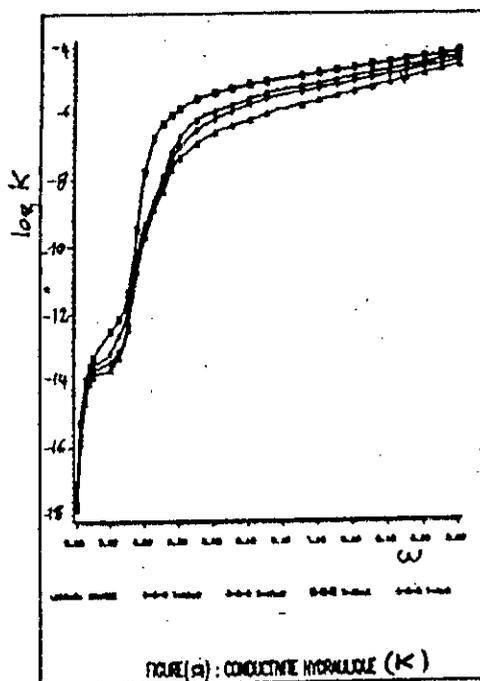


FIGURE A. II. 3. Conductivité hydraulique et thermique

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Y. BACHMAT , J. BEAR (1986) , Macroscopic modelling of transport phenomena in porous media. 1 : The continuum approach, *Transport in Porous Media* 1 , 213-240.
- [2] G. BACON (1982) , Simulation numérique des transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé, Congrès à Lausanne, Suisse.
- [3] P. BAVEYE , G. ESPOSITO (1984) , The operational significance of the continuum hypothesis in the theory of water movement through soils and aquifer , *Water Res. Resour.* 20 , 521-530.
- [4] J. BEAR (1982) , Dynamics of fluids in porous media , American Elsevier Publishing Company.
- [5] R.B. BIRD , W.E. STEWARD & E.N. LIGHT FOOT (1960) , Transport phenomena , Wiley International Edition.
- [6] S. BORIES (1982) , Principes physiques de l'évaporation. Transferts de chaleur et de masse entre un matériau poreux et l'atmosphère. Humidité dans le bâtiment , Collège International des sciences de la construction , pp. 53-71.
- [7] S. BORIES (1984) , Transferts de chaleur et de masse dans les matériaux. Analyse critique des différents modèles mathématiques utilisés. Humidité dans le bâtiment , Collège International des sciences de la construction , pp.13-31.
- [8] S. BORIES (1985) , Fragment de la description des transferts thermiques dans les sous sol. , *La Houille Blanche* , Vol. 3/4 , pp. 211-219.
- [9] S. BORIES (1987) , Transport in porous media , Notes de cours de D.E.A. de Mécanique des Fluides , ENSEEIHT Toulouse.
- [10] S. BORIES (1991) , Fundamentals of drying of capillary-porous bodies , S.Kakaç et al. (Eds.) , *Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media* , pp. 391-434 , INP , ENSEEIHT Toulouse.
- [11] S. BORIES , K. GHALLEB (1972) , Transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux non saturés . Analyse physique . Equations des phénomènes , Institut Français du Pétrole , IMDF de Toulouse.
- [12] G. BOUYOUCOS (1915) , Effect of temperature on movement of water and capillary moisture in soil , *J. Agricultural Research* 5 , pp. 141-172.
- [13] S. BRUNAUER , P.H. EMMET and E. TELLER (1938) , Adsorption of gases in multimolecular layers , *J. Amer. Ch. S.* , Vol. 60 , pp. 309-319.
- [14] B.H. CAUSSADE , G. RENARD (1979) , Numerical method for solving the non linear diffusion equation . Study of two dimensional infiltration in unsaturated soils , *Numerical Heat Transfer J.* , Vol.2 , pp. 455-466.
- [15] P. CRAUSSE (1983) , Etude fondamentale des transferts couplés de chaleur et d'humidité en milieu poreux non saturé , Thèse de Doctorat d'état , INP de Toulouse.

- [16] P. CRAUSSE , G. BACON & S. BORIES (1981) , Etude fondamentale des transferts couplés chaleur-masse en milieu poreux , *Int. J. Heat Mass Transfer* , Vol.24 ,N°6 ,pp. 991-1004.
- [17] R. DEFAY , I. PRIGOGINE , A. BELLEMANS & D.H. EVERETT (1966) ,Surface tension and adsorption , Longmans , Green and Co. Ltd.
- [18] D.A. DE VRIES & J. PHILIP (1957) ,Moisture movement in porous materials under temperature gradients , *Trans. Ame. Geoph. Union* , Vol 38 ,pp. 222-232.
- [19] D.A. DE VRIES (1958) , Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media , *Trans. Ame. Geoph. Union* , Vol 39 ,pp. 909-916.
- [20] J . F. Daïan (1986). processus de condensation et de transfert d'eau dans un matériaux méso et macroporeux. étude expérimentale du mortier de béton. thèse de doctorat d'état, USM de Grenoble.
- [21] D.A. DE VRIES & W.H. AFGAN (1975) , Heat and Mass Transfer in the biosphere. 1: Transfer processes in plant environment , Script Book Company , Washington.
- [22] D.A. DE VRIES (1987) ,The theory of heat and moisture transfer in porous media revisited , *Int. J. Heat Mass Transfer* , Vol 30. ,Pp.1343-1350.
- [23] J.J. DOUGLAS & J.E. GUNN (1964) , A general formulation of alternating Direction method , *Numerische Mathematik* , Vol.6 ,pp.428-453.
- [24] H. GLASER (1959) , Graphisches Vehren zur untersuchung Von diffusion-vorgängen , *Kaptechnik* , Vol.11 ,pp.354-355.
- [25] A. GOURDIN , M. BOUMAH RAT (1991) , Méthodes Numériques Appliquées , OPU.
- [26] W.G. GRAY , M. HASSANIZADEH (1979) , General conservation equations for multiphase systems . 1: Averaging procedure , *Adv. Water Resour. Res.*2 , pp 131-144.
- [27] A.GUELLATI (1997) ; Analyse des aspects massiques et thermiques dans les milieux poreux en régime diffusionnel pure, thèse de magistère, ENP d'Alger.
- [28] D. HILLEL (1988) , L'eau et le sol . Principes et processus physiques , Université Catholique de Louvain . Unité de Génie Rural , Collection PEDASUP5.
- [29] F. KALAYDJIAN (1987) , A macroscopic description of multiphase flow in porous media involving space time evolution of fluid/fluid interface , 2 , 6 , pp.537-552.
- [30] J.V.D. KOOI (1971) ,Moisture transfer in cellular concrets roofs , PHD THESIS , EINDHOVEN UNIV. OF Technology , Walman , Delft.
- [31] O. KRISHER & K. KROLL (1978) , Techniques du séchage , Centre technique des industries aéroliques et thermiques , B.P.N°-19 , 91402 ORSAY.
- [32] S. LARBI & S. BORIES (1984) , Simulation expérimentale d'un processus de condensation en milieu poreux , Forth International Meeting on Heat Transfer , Alger.
- [33] S. LARBI (1990) , Quelques aspect de la physique des transferts en milieu poreux d'un processus d'humidification par condensation , Thèse de Doctorat , INP de Toulouse.

- [34] A. LE POURHIET (1988) , Résolution numérique des équations aux dérivées partielles , Cepadues-Editions , Collection la recherche , Toulouse.
- [35] A.V. LUIKOV (1966) , Heat end Mass Transfer in capillary-porous bodies , Pergamon Press, England, London.
- [36] EL-M. MABSATE & M. FIRDAOUSS (1985) , Simulation numérique de la thermomigration bidimensionnelle . Influence du potentiel gravitaire , Proceeding EUROMECH 94 , pp. 185-188.
- [37] EL-M. MABSATE & M. FIRDAOUSS (1987) , Influence des facteurs de forme sur la thermomigration bidimensionnelle dans les milieux poreux non saturé , Proceeding Journées Internationales de Thermique JITH1987 , Tome 1.
- [38] C.M. MARLE (1967) , Ecoulements monophasiques en milieu poreux , Revue de l'institut Francais de Pétrole ,pp. 1471-1509.
- [39] C.M. MARLE (1984) , Les écoulements polyphasiques en milieu poreux : de l'échelle des pores à l'échelle macroscopique , Annales des mines ,pp.1-6.
- [40] C. MOYNE (1987) , Transferts couplés chaleur-masse lors du séchage : prise en compte du mouvement de la phase gazeuse , Thèse INP de Lorraine.
- [41] D.W. PEACEMAN & H.H. RACHFORD (1955) , The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation , J. Soc. Indust. Appl. Math. , Vol. 3(1) , pp.28-44.
- [42] M. PRAT (1986) , Analysis of experiments of moisture migration caused by temperature differences in unsaturated porous medium by means of two dimensional numerical simulation , Int. J. Heat and Mass Transfer , 29 , 7, pp. 1033-1039.
- [43] M. PRAT (1989) , On the boundary conditions at the macroscopic level , Transport in Porous Media , 4 ;pp 259-280.
- [44] M. PRAT (1985) , Analyse critique d'une expérience de thermomigration. Influence du potentiel gravitaire , Proceeding EUROMECH 194 ,pp 189-192.
- [45] M. RECAN (1982) , Simulation numérique du comportement thermique et hydrique d'un sol nu . Application à l'étude de l'évaporation par télédétection , Thèse de Docteur Ingénieur , INP de Toulouse.
- [46] L. SCHWARTZ (1956) , Théorie des distributions , HERMAN.
- [47] S. TIEN-MO (1984) , Numerical Heat Transfer , Hemisphere Publishing Corporation.
- [48] S. WHITAKER (1977) , Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media. A theory of drying in porous media , Adv. In Heat Transfer , Vol.13 ,pp. 119-200.
- [49] B.H. VOS (1969) , Internal condensation in structures , Build. Science , Vol.8 , pp.191-206.