

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

THESE DE MAGISTER

Présentée par

AMOURA Nasr-eddine

Option : construction mécanique

**ETUDE DES MILIEUX VISCO-
ELASTIQUES LINEAIRES FISSURES
SIMULATION NUMERIQUE ET VALIDATION
EXPERIMENTALE**

Soutenue le : 28 Janvier 1997

Devant le jury :

A. BALI	Professeur	E.N.P	Président
S. RECHAK	Professeur	E.N.P	Examineur
T. BOUKHAROUBA	Dr.Es Sciences	U.S.T.H.B	Examineur
K. ABADLI	C.C	E.N.P	Examineur
Y. BELKACEMI	M.A	E.N.P	Rapporteur

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je tiens à remercier très sincèrement *Mr Y. BELKACEMI*, Directeur de cette thèse qui, tout au long de ce travail, n'a cessé de me conseiller en me laissant une très grande liberté dans mes initiatives. Qu'il veuille bien accepter ma plus profonde gratitude en reconnaissance de ses conseils, de sa clairvoyance et de son dévouement continu.

Mes remerciements à Monsieur le président du jury, le **Professeur A.BALI** pour l'honneur qu'il me fait par sa présence et Messieurs les membres du jury qui ont accepté d'évaluer cette thèse.

Toute ma reconnaissance au **Professeur S. RECHAK**. En premier, pour ses enseignements durant les deux cycles de graduation et de post-graduation, ensuite, pour avoir mis à notre disposition son bureau et son matériel informatique, sans lesquels, la réalisation de ce travail à temps aurait été compromise.

Je remercie aussi Messieurs *BELHADEF et GUERGUEB*, enseignants au département Génie-Mécanique pour avoir mis à notre disposition leurs laboratoires durant toute la durée des essais.

Un hommage particulier est rendu à *Mlle S. ATIF* qui a réalisé les dessins de la thèse et pour avoir accepté de lire le manuscrit et d'y apporter ses remarques et suggestions.

Je ne saurais, ne pas associer à mes remerciements, le personnel de la bibliothèque et du centre de calcul de l'école qui ont toujours répondu à nos demandes et qu'ils veuillent bien nous excuser si nous avons été, pendant certains moments, trop exigeants.

الحمد لله

ملخص:

يهدف هذا العمل إلى دراسة المواد ذات مرونة لزجة و التي تحتوي على شروخ. في أول الأمر تم تطبيق طريقة الانتقالات المتقطعة باستعمال عنصر خاص يمكن من الحصول على متغيرات الشقوق :نسبة استرجاع الطاقة G و معامل شدة الإجهادات K وتحسين قيمها بالنسبة للعناصر العادية. ثانيا، تم تدعيم هذا العمل النظري بتطبيق تجريبي سمح لنا بدراسة التصرف اللزج في إحدى سبائك الألمنيوم.

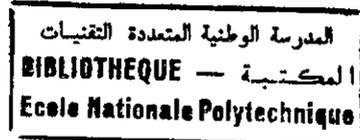
ABSTRACT

This work has two parts:

- First, a study of the linear viscoelastic fracture of bodies is done by the displacement discontinuity method with the use of a new singular element for crack tips.
- Second, an experimental work which aim with the creep of an aluminium alloy has been achieved and results are compared with the numerical ones.

RESUME

Ce travail porte sur la fissuration dans les matériaux viscoélastiques linéaires. En premier lieu, une simulation numérique du comportement viscoélastique est faite en utilisant la méthode de discontinuité de déplacement et faisant intervenir un élément bout de fissure singulier développé. Cette partie nous a permis de déterminer le facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie viscoélastiques. En second lieu, une étude expérimentale du fluage, utilisant un alliage d'aluminium, nous a permis de confronter les résultats expérimentaux à ceux obtenus par le code de calcul construit.

SOMMAIRE

NOTATIONS	p.06
INTRODUCTION	p.08
<u>CHAPITRE I - LA VISCOELASTICITE LINEAIRE</u>	
I.1. Milieu viscoélastique	p.11
I.1.1 Relations constitutives	p.12
I.1.2 Expériences de base	p.12
I.2 Modèles rhéologiques et représentation différentielle	p.13
I.2.1 Le modèle de MAXWELL	p.13
I.2.2 Le modèle de KELVIN	p.14
I.2.3 Les modèles généralisés	p.15
I.2.4 Le modèle standard	p.16
I.3 Formulation de la viscoélasticité linéaire	p.17
I.3.1 Produit de convolution de STIELTJES et transformée de LAPLACE	p.18
Conclusion	p.19
<u>CHAPITRE II - LA FISSURATION DES MATERIAUX</u>	
Introduction	p.21
II.1 Prévision de la croissance des fissures dans les structures	p.21
II.1.1 Structures	p.21
II.1.2 Sollicitations	p.22
II.1.3 Matériaux	p.22
II.2 Définition mécanique des variables de la fissuration	p.22
II.2.1 Facteurs d'intensité de contrainte	p.22
II.2.2 Intégrales de RICE et de BUI	p.24
II.2.3 Taux de restitution d'énergie	p.25
II.3 Critères de branchement de la fissure	p.26
II.4 La rupture dans les matériaux viscoélastiques	p.26
II.4.1 Calcul du taux de restitution d'énergie viscoélastique à partir du champs local des contraintes et des déformations	p.27
Conclusion	p.28
<u>CHAPITRE III - EQUATIONS INTEGRALES ET ELEMENTS DE FRONTIERE EN MECANIQUE DU SOLIDE</u>	
Introduction	p.30
III.1 Domaines d'application des équations intégrales de frontière	p.31
III.2 La méthode de discontinuité de déplacement - MDD -	p.31
III.2.1 Discontinuité de déplacement dans un milieu infini	p.32
III.2.2 Procédure numérique	p.33
III.3 Adaptation de la MDD au comportement viscoélastique	p.33
Conclusion	p.35
<u>CHAPITRE IV - EVALUATION NUMERIQUE DES PARAMETRES DE LA FISSURATION</u>	
Introduction	p.37
IV.1 Présentation de l'élément bout de fissure puissance - Power Element-	p.37
IV.2 Procédure numérique	p.38
IV.3 Résultats numériques et interprétations	p.39
Conclusion	p.44

CHAPITRE V - VALIDATION EXPERIMENTALE

Introduction	p.46
V.1 Présentation des moyens de l'approche expérimentale	p.46
V.1.1 Description du dispositif expérimental	p.46
V.1.2 Eprouvette utilisée	p.47
V.1.3 Présentation du matériau	p.47
V.2 Technique expérimentale et exploitation des résultats	p.48
V.2.1 Caractérisation du matériau	p.48
V.2.2 Identification	p.48
V.2.3 Analyse des courbes expérimentales	p.50
V.3 Application du code de calcul	p.50
V.4 Interprétations et commentaires	p.51
Conclusion	p.52

<u>CONCLUSION GENERALE</u>	p.54
----------------------------	------

<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	p.57
------------------------------------	------

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

« *Tout solide est un fluide qui s'ignore* »
J. LEMAITRE

Généralités

La connaissance des mécanismes physiques élémentaires de déformation et de rupture est nécessaire pour la formulation des hypothèses sur lesquelles reposent les théories phénoménologiques macroscopiques de déformation et de rupture.

Pour les métaux, c'est l'introduction du concept de dislocation par *Taylor* [FRI67] et quelques autres en 1934 qui constitue le pas décisif pour l'explication des phénomènes de déformation plastique. D'une manière plus générale, c'est l'invention de la microscopie électronique à transmission et à balayage qui a permis dans les années 1960-70 de comprendre les principaux mécanismes de la rupture.

Malgré la grande différence de nature et de structure des matériaux tels que les métaux et alliages, les polymères et composites, les bétons, les bois, paradoxalement, on observe une grande unité dans leurs comportements macroscopiques. Avec des ordres de grandeurs différents les termes d'élasticité, de viscosité, de déformation plastique, ou permanente, de consolidation ou écrouissage, de rupture fragile, de rupture ductile s'applique à tous ces matériaux. Ce qui justifie, a priori, l'approche globale de la mécanique des matériaux qui, utilisant les concepts de la mécanique des milieux continus, de la thermodynamique et de la rhéologie permet de construire des modèles indépendants dans leurs fondements (mais pas dans leur formulation analytique) de la nature des matériaux, [ZAO91].

Mécanismes physiques de déformation.

Les métaux et alliages sont généralement obtenus à l'état liquide, la structure se forme par solidification lors du refroidissement. La température du liquide diminuant, les distances interatomiques décroissent; la distance critique pour laquelle des liaisons s'établissent, est atteinte en quelques points répartis au hasard qui constituent les premiers germes de croissance des cristaux. Des mailles se forment dans un même système cristallin et constituent un polycristal.

Dans un polycristal, les déformations élastiques sont le résultat des mouvements relatifs réversibles des atomes. Elles sont quasi indépendantes des déformations permanentes sauf en ce qui concerne les micro-contraintes résiduelles créées par les glissements cristallins irréversibles et qui font que la déformation élastique macroscopique n'est pas exactement la somme des micro-déformations élastiques. On définit conventionnellement une limite d'élasticité σ_e qui correspond à une valeur fixée de la déformation permanente selon la précision souhaitée.

Pour certains matériaux tels les polymères, la déformation bien que réversible ne se stabilise ou ne disparaît qu'au bout d'un certain temps. La limite de réversibilité est de quelques pour cent mais si la densité des liaisons est faible elle peut atteindre 50 à 100 %.

Mécanismes physiques de rupture.

La rupture détruit la cohésion de la matière par création de discontinuités surfaciques ou volumiques. Elle se situe donc à l'échelle des cristaux. Dans les matériaux présentant une réponse différée aux sollicitations, l'amorçage de la rupture est la disparition de liaisons moléculaires sous l'effet des sollicitations extérieures. Le phénomène est sensible à la vitesse. Les zones d'amorçage sont essentiellement les zones de défaut dans les cristallites. Le développement de la fissure peut s'opérer par un mécanisme de rupture fragile ou ductile, [LEM85].

La rupture fragile ne met en jeu que des ruptures de liaisons interatomiques sans déformations plastiques appréciables. Ces ruptures interviennent lorsque l'énergie de déformation locale due aux sollicitations extérieures devient égale à l'énergie nécessaire à la décohésion atomique. Les défauts du réseau ou les accidents géométriques qui engendrent toujours des concentrations de contraintes locales jouent un rôle essentiel dans l'amorçage du processus.

La rupture ductile est le résultat de l'instabilité des très grandes déformations locales engendrées au voisinage des défauts cristallins. Selon la densité de ces défauts, la déformation macroscopique globale peut être importante ou non. Les particules d'éléments d'addition et les inclusions sont parmi les défauts responsables de l'amorçage de la rupture ductile.

OBJECTIF DU TRAVAIL

L'objet du présent travail est l'étude de la fissuration dans les matériaux viscoélastiques linéaires. En premier lieu, une simulation numérique par la méthode de discontinuité de déplacement qui utilise un élément bout de fissure singulier développé dans cette étude nous a permis d'évaluer le facteur d'intensité de contrainte, l'énergie disponible et le taux de restitution d'énergie viscoélastiques.

En second lieu, un travail expérimental a été achevé au laboratoire du traitement thermique au sein du département Génie Mécanique à l'école nationale polytechnique nous permettant de valider le code développé.

Le chapitre I porte sur la modélisation rhéologique des corps à comportement viscoélastique et présente une formulation intégrale de la viscoélasticité linéaire.

Le chapitre II est une introduction à la mécanique linéaire de la rupture et comporte les définitions des différents paramètres de la fissuration ainsi que l'extension de la mécanique linéaire de la rupture au comportement viscoélastique.

Le chapitre III est consacré à la simulation de la rupture viscoélastique par une méthode intégrale indirecte (la méthode de discontinuité de déplacement).

L'évaluation des paramètres de la fissuration par l'introduction d'un élément singulier adapté aux bouts des fissures a été portée au chapitre IV dans lequel on a présenté des exemples numériques qui mettent en évidence les performances du nouvel élément développé.

Le chapitre V est consacré à la partie expérimentale qui nous a permis, pour une première approche, d'étudier le comportement viscoélastique d'un alliage d'aluminium et de confronter les résultats expérimentaux à ceux de la simulation numérique.

CHAPITRE I

LA VISCOELASTICITE LINEAIRE

« Une loi est un modèle qui n'est plus (et pas encore!) contesté »

J.Lemaître

I.1 MILIEU VISCOELASTIQUE

Dans la théorie de l'élasticité on admet que les relations entre l'état de déformation et celui de tension sont linéaires et ne dépendent pas du temps.

L'hypothèse qu'on y fait, que les corps se déforment extrêmement peu, permet d'appliquer le principe de superposition des charges et des déformations [CRE86].

Il est cependant connu qu'un certain nombre de corps ne se soumettent pas d'une manière plus ou moins perceptible aux hypothèses de la théorie de l'élasticité linéaire et que dans les équations d'état le facteur temps intervient.

Les expériences faites sur différents matériaux [NOW85], prouvent que lorsque ceux-ci sont sollicités et maintenus dans cet état, les déformations qui en résultent croissent avec le temps. La charge supprimée, les déformations diminuent au cours du temps. Ces propriétés des matériaux ont une grande importance pour le génie mécanique et le génie civil. En fait, une fois les charges appliquées, les forces internes du corps et les déformations se réarrangent au cours du temps et le modèle d'un corps à élasticité parfaite ne peut plus alors traduire l'état de tension et l'état de déformation des structures.

Pour le modèle généralisé d'un corps on admet la relation fonctionnelle

$$f(\sigma, \varepsilon, t) = 0 \quad (\text{I. 1})$$

La même relation comprend en outre des opérateurs différentiels et intégraux des fonctions en σ et ε . Lorsque le régime thermique du corps varie, l'équation I.1 contient encore le paramètre température [LIN88].

La relation existant entre les contraintes et les déformations trouve sa forme la plus simple, si l'on considère le milieu comme étant viscoélastique, c'est-à-dire si l'on lie deux milieux qui s'interpénètrent mutuellement: l'un admettant comme modèle celui d'un corps solide élastique, l'autre celui d'un fluide visqueux.

D'une part les effets de l'élasticité obéissent à la loi de Hooke, d'autre part ceux de la viscosité suivent la loi de Newton. La théorie qui correspond à ce genre de milieux est dite théorie des milieux viscoélastiques linéaires. Celle-ci est donc une généralisation de deux domaines qui se sont développés séparément, à savoir la théorie de l'élasticité et la mécanique des liquides visqueux.

Dans les raisonnements qui vont suivre, on se limitera à la **théorie de la viscoélasticité linéaire**, de même que dans la théorie classique de l'élasticité linéaire, on supposera les déformations faibles. Aussi ne considérera-t-on pas les déplacements finis. De plus on limitera les études aux corps qui satisfont au principe de superposition de Boltzmann. Ce principe s'est trouvé à la base des équations mathématiques de la théorie des corps de viscoélasticité linéaire [SAL87].

Etant donnée cette limitation, la relation I.1 s'exprime par une équation différentielle linéaire, ou par une équation intégrale par rapport au temps.

A présent la théorie de la viscoélasticité linéaire est un chapitre de la rhéologie, son essor est stimulé par l'application toujours grandissante de nouveaux matériaux (polyesters, composites, bois...) dont les propriétés diffèrent considérablement des propriétés connues et étudiées.

Dans son développement, la rhéologie s'apprête à se concentrer sur la construction des équations d'état et sur l'étude des lois physiques ayant trait au comportement des corps réels, tout en tentant d'expliquer, en se basant sur la structure moléculaire des corps, les causes intrinsèques de phénomènes qui se produisent dans le temps.

Donc, et comme il a été déjà mentionné, on traitera dans ce travail de la théorie viscoélastique linéaire qui a d'ailleurs déjà atteint un développement important lui permettant de résoudre une large classe de problèmes pratiques.

I.1.1 RELATIONS CONSTITUTIVES

Une équation constitutive est une relation entre forces et déformations. Dans le contexte présent (analyse des petites déformations) les forces et les déformations sont conventionnellement spécifiées par un champs de contraintes σ et déformations (infinitésimales) ε .

En pratique, les relations constitutives sont suggérées par l'expérience ensuite établies aux moyen de modèles mathématiques.

Dans une expérience typique, on applique à une structure une histoire de chargement $\sigma(\tau)$, variable dans le temps ($\tau_0 \leq \tau \leq \infty$) et on mesure l'histoire des déformations correspondante $\varepsilon(\tau)$. On peut, inversement, appliquer une histoire de déformation $\varepsilon(\tau)$ et mesurer les charges qui en résultent $\sigma(t)$, (le choix de la variable de contrôle devient une simple question d'expérience).

Pour une histoire de chargement $\sigma(\tau)$, la déformation $\varepsilon(t)$ au temps t dépendra, en général, de toutes les valeurs de τ dans l'intervalle ($\tau_0 \leq \tau \leq t$), on écrit alors

$$\varepsilon(t) = \mathbf{D}[\sigma(t)] \quad (\text{I. 2})$$

$$\tau_0 \leq \tau \leq t$$

τ_0 est le temps initial choisi arbitrairement, tel que lorsque $\sigma(\tau)=0$ pour $\tau \leq \tau_0$, alors $\varepsilon(t)=0$ pour $t \leq \tau_0$.

Du point de vue analyse du système, un matériau est regardé comme une "boite noire" Fig.II.1. avec en entrée $\sigma(t)$ et en sortie $\varepsilon(t)$ auquel on associe l'équation I.2 comme opérateur mathématique jouant le rôle de fonction de transfert.

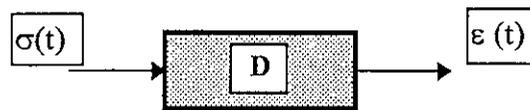


Fig. I.1- Modélisation de la loi de comportement par fonction de transfert

Pour chaque classe de matériaux, correspond une fonctionnelle \mathbf{D} . Par exemple, un matériaux élastique linéaire est tel que la déformation $\varepsilon(t)$ au temps t dépend instantanément de la valeur de $\sigma(t)$ (non héréditaire). Dans ce cas l'équation I.2 s'écrit $\varepsilon(t) = \mathbf{D} \cdot \sigma(t)$, où \mathbf{D} est la compliance élastique.

D'un autre côté, les matériaux viscoélastiques sont caractérisés par une entière dépendance de l'histoire du processus de déformation et leurs relations constitutives doivent avoir une fonctionnelle du genre indiqué par l'équation I.2.

I.1.2 EXPERIENCES DE BASE

Le comportement viscoélastique est caractérisé par le rôle que joue le facteur temps. En effet les matériaux viscoélastiques sous chargement constant, évoluent en déformation avec le temps, alors qu'à déformation constante, la charge diminue avec le temps. La figure I.2 indique le comportement d'un matériau viscoélastique typique en fluage caractérisé par l'application d'une charge constante σ_0 au temps $t = \tau_0$.

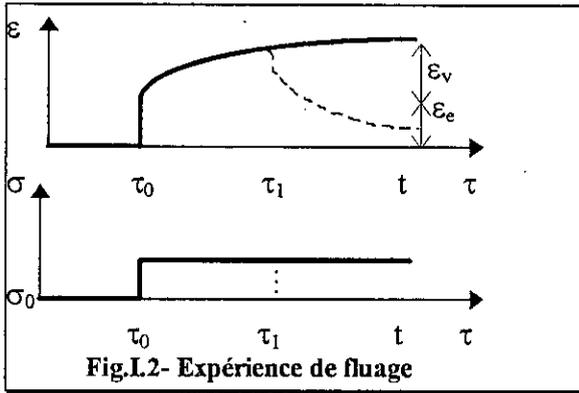


Fig.I.2- Expérience de fluage

L'histoire du chargement est définie comme :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot H(t - \tau_0) \tag{I. 3}$$

En test de fluage, on trouve toujours une déformation élastique ϵ_e (instantanée) et une composante de fluage ϵ_v . Cette dernière augmente avec le temps et caractérise le comportement viscoélastique.

Au temps τ_1 la contrainte est supprimée, ce qui donne pour histoire de chargement:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot H(t - \tau_0) - \sigma_0 \cdot H(t - \tau_1) \tag{I. 4}$$

On obtient pour $t \geq \tau_1$ l'histoire de déformation (en pointillés sur la figure I.2). La diminution en déformation après suppression du chargement est le phénomène de recouvrance.

Maintenant, nous considérons l'essai de relaxation, correspondant à une déformation constante imposée

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cdot H(t - \tau_0) \tag{I. 5}$$

En mesurant la contrainte $\sigma(t)$ nécessaire au maintien de la déformation ϵ_0 , on trouve qu'elle décroît progressivement comme indiqué par l'histoire de chargement (Fig.I.3).

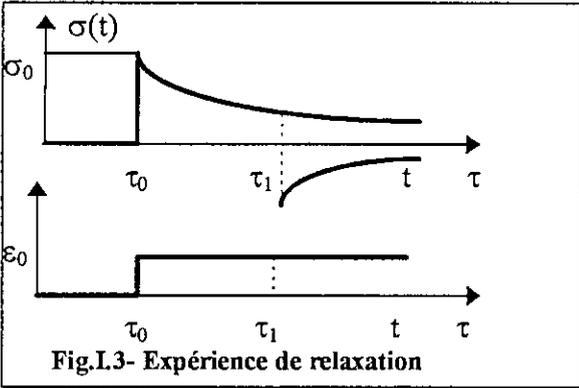


Fig.I.3- Expérience de relaxation

En supprimant à $t = \tau_1$ la déformation,

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cdot H(t - \tau_0) - \epsilon_0 \cdot H(t - \tau_1) \tag{I. 6}$$

on obtient la réponse représentée (Fig.I.3) pour $t > \tau_1$.

Revenons à l'essai de fluage, nous pouvons constater que l'argument de la fonctionnelle en I.2 est complètement déterminé une fois connues les valeurs de σ_0 , t et τ . Ce dernier étant l'instant générant le chargement. Donc pour le test de fluage nous pouvons utiliser à la place de la fonctionnelle en I.2, une fonction à 3 variables:

$$\epsilon(t) = D(\sigma_0, t, \tau) \tag{I. 7}$$

HYPOTHESES

Le comportement viscoélastique est considéré comme linéaire (obéissant au principe de superposition) en plus de l'hypothèse de non vieillissement qui impose que:

$$D(t + \Delta t, \tau + \Delta \tau) = D(t, \tau) \quad \forall \Delta t$$

La relation I.7 s'écrit alors:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \cdot D(t - \tau) \tag{I. 8}$$

I.2 MODELES RHEOLOGIQUES ET REPRESENTATION DIFFERENTIELLE

Le comportement viscoélastique des matériaux sous chargement uniaxial peut être représenté au moyen de modèles conceptuels composés d'éléments élastiques et visqueux.

I.2.1 MODELE DE MAXWELL

Le modèle de Maxwell est la combinaison en série d'un ressort et d'un amortisseur (Fig.I.4a). Pour ce système on peut écrire comme équations:

$$\sigma_E(t) = \sigma_n(t) = \sigma(t) \quad \text{Equation d'équilibre} \tag{I. 9}$$

$$\varepsilon_E(t) + \varepsilon_\eta(t) = \varepsilon(t) \quad \text{Equation de compatibilité} \quad (I.10)$$

$$\sigma_E(t) = E \cdot \varepsilon_E(t) \quad \text{Equation constitutive pour le ressort} \quad (I.11)$$

$$\sigma_\eta(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_\eta(t) \quad \text{Equation constitutive pour l'amortisseur} \quad (I.12)$$

où les indexes E et η indiquent le ressort et l'amortisseur respectivement.

Une manipulation des équations I.9, I.10, I.11 et I.12 nous donne l'équation différentielle du modèle de Maxwell:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (I.13)$$

et après intégration

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\tau_0) + \frac{\sigma(t)}{E} \cdot \frac{1}{\eta} \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \cdot d\tau \quad \text{pour } \sigma(t) \text{ donnée} \quad (I.14.a)$$

et

$$\sigma(t) = \sigma(\tau_0) + E \cdot \int_{\tau_0}^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \cdot \dot{\varepsilon}(\tau) \cdot d\tau \quad \text{pour } \varepsilon(t) \text{ donnée} \quad (I.14.b)$$

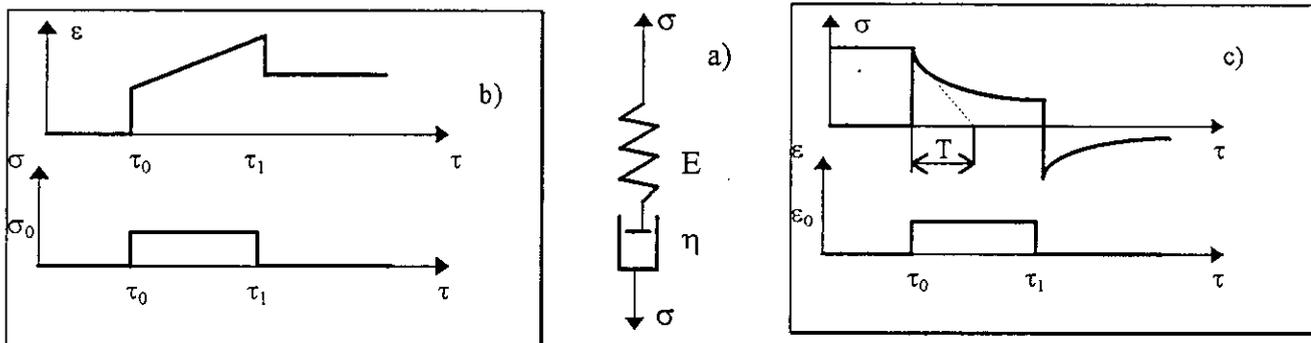


Fig.I.4- Modèle de Maxwell (a), représentation du comportement en fluage (b) et en relaxation (c).

De cette solution générale, on peut déterminer le comportement du modèle en fluage et en relaxation.

Pour $\sigma(t) = \sigma_0 \cdot H(t-\tau_0)$ nous avons à partir de I.14.a :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left\{ \frac{1}{E} + \frac{t-\tau_0}{\eta} \right\} \cdot H(t-\tau_0) \quad (I.15)$$

Sur la figure I.4.b nous pouvons distinguer que sous charge constante, la déformation augmente indéfiniment, caractéristique d'un comportement fluide.

En test de relaxation, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot H(t-\tau_0)$, de la relation I.14.b, on déduit:

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau_0)} \cdot H(t-\tau_0) \quad (I.16)$$

Ce comportement est schématisé sur la figure I.4.c, la constante $T = \eta/E$ est appelée *temps de relaxation*.

1.2.2 MODELE DE KELVIN

Ce modèle est la combinaison en parallèle du ressort et de l'amortisseur, Fig.I.5.a.

Pour ce système, les équations sont:

$$\sigma_E(t) + \sigma_\eta(t) = \sigma(t) \quad \text{Equation d'équilibre} \quad (I.17)$$

$$\varepsilon_E(t) = \varepsilon_\eta(t) = \varepsilon(t) \quad \text{Equation de compatibilité} \quad (I.18)$$

$$\sigma_E(t) = E \cdot \varepsilon_E(t) \quad \text{Equation constitutive pour le ressort} \quad (I.19)$$

$$\sigma_\eta(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_\eta(t) \quad \text{Equation constitutive pour l'amortisseur} \quad (I.20)$$

L'équation différentielle qui en résulte est:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_\eta(t) \quad (I.21)$$

Les solutions générales pour des histoires de chargement et de déformation sont:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\tau_0) + \frac{1}{\eta} \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \cdot e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} d\tau \quad \text{pour } \sigma(t) \text{ donnée} \quad (I.22.a)$$

et

$$\sigma(t) = \sigma(\tau_0) + E \cdot \int_{\tau_0}^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \cdot \dot{\varepsilon}(\tau) \cdot d\tau \quad \text{pour } \varepsilon(t) \text{ donnée} \quad (I.22.b)$$

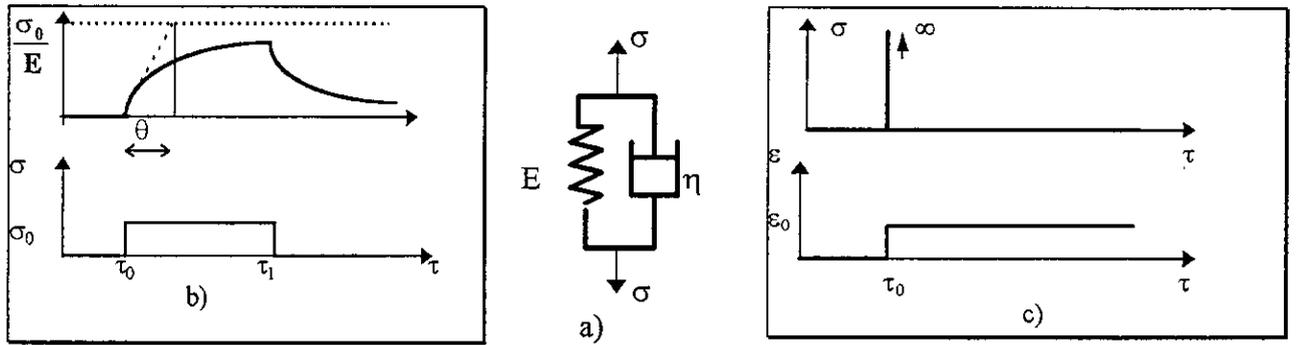


Fig.I.5- Modèle de Kelvin (a), représentation du comportement en fluage (b) et en relaxation (c).

$\theta = \eta/E$ est appelé *temps de retardation*, il donne une estimation du temps requis en déformation pour atteindre la déformation finale. Le test de relaxation étant physiquement impossible avec le modèle de Kelvin.

I.2.3 MODELES GENERALISES

Afin d'améliorer les modèles utilisés pour les corps solides viscoélastiques, une combinaison d'un grand nombre de ressorts et d'amortisseurs selon des schémas différents nous donne une forme généralisée des modèles simples, Figures I.6.a et I.6.b.

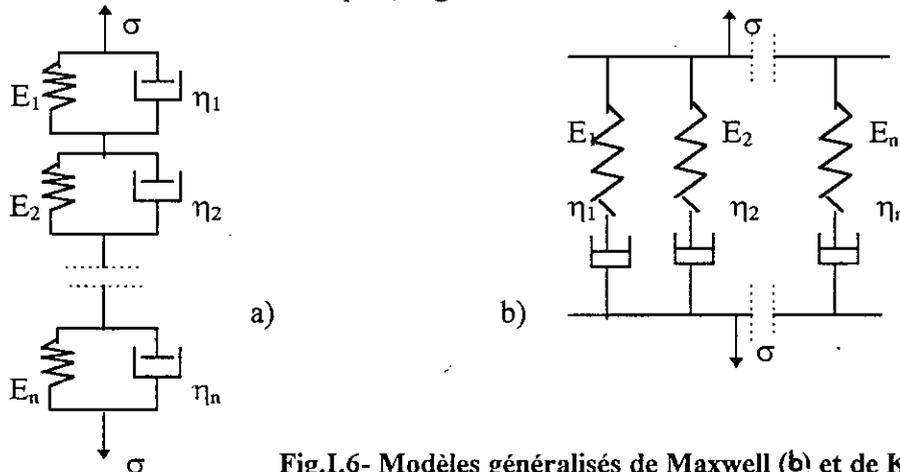


Fig.I.6- Modèles généralisés de Maxwell (b) et de Kelvin (a)

Les équations différentielles pour de tels modèles se présentent sous la forme:

$$\sum_{i=0}^n p_i \frac{d^i \sigma}{dt^i} = \sum_{i=0}^m q_i \frac{d^i \varepsilon}{dt^i} \tag{I.23}$$

On peut également montrer que la *fonction fluage* pour le modèle de Kelvin généralisé est

$$J(t-\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left\{ 1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\theta_i}} \right\}; \quad \theta_i = \frac{\eta_i}{E_i} \tag{I.24}$$

alors que la *fonction relaxation* pour le modèle de Maxwell généralisé est:

$$R(t-\tau) = \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{(t-\tau)}{T_i}}; \quad T_i = \frac{\eta_i}{E_i} \tag{I.25}$$

Pour une courbe de fluage, les modèles généralisés ci-dessus donnent une variation exponentielle des déformations (cas du fluage), avec des temps de retardation θ_i différents. Ceci nous offre la possibilité d'approcher les courbes du type Fig.I.2 pour un degré d'approximation voulu en choisissant un nombre fini de termes exponentiels.

En particulier, si la réponse à un chargement nous intéresse uniquement pour une certaine durée du temps, les éléments avec des temps de retardation faibles sont remplacés par un ressort isolé.

Les éléments avec des temps de retardation du même ordre que l'intervalle de temps considéré peuvent être représentés par un modèle de Kelvin.

En résultat, pour la plus part des éléments viscoélastiques, nous aurons comme modèle, un ressort en série avec l'élément de Kelvin. Ce modèle à trois paramètres est connu sous l'appellation de *Modèle standard* (Fig.I.7).

1.2.4 LE MODELE STANDARD

On obtient le modèle standard à trois paramètres (Fig.1.7) comme un cas particulier du modèle de Kelvin généralisé avec $n=2$, $\eta_1 = 0$ et $\eta_2 = \eta$. En substituant ces valeurs dans l'équation I.23 on a:

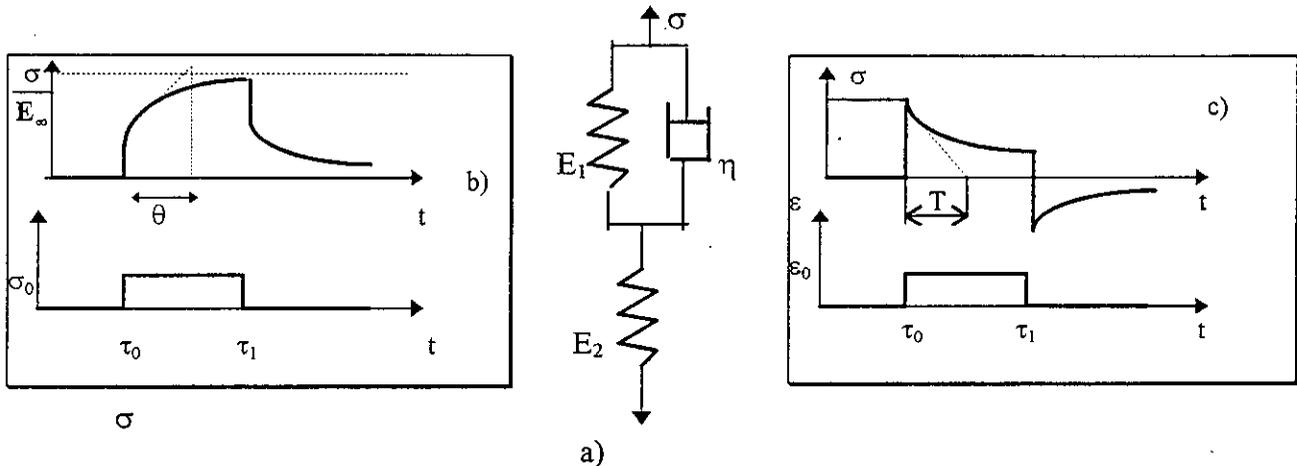


Fig.I.7- Modèle à trois paramètres (standard) (a).
Comportement en fluage (b) et en relaxation (c).

$$E_1 \eta \frac{d\varepsilon}{dt} + E_1 E_2 \varepsilon = \sigma (E_1 + E_2) + \eta \frac{d\sigma}{dt} \tag{I.26}$$

L'intégration de I.26 donne:

- pour une histoire de chargement $\sigma(t) = \sigma_0 \cdot H(t-\tau)$

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left[1 - e^{-\frac{E_2}{\eta}(t-\tau_0)} \right] \right\} \cdot \mathbf{H}(t - \tau_0) \quad (\text{I.27})$$

• Pour une histoire de déformation $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{H}(t - \tau)$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left\{ E_\infty + (E_1 - E_\infty) e^{-\frac{(E_1 + E_2)(t - \tau_0)}{\eta}} \right\} \cdot \mathbf{H}(t - \tau_0) \quad (\text{I.28})$$

avec $E_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ Module asymptotique quand t tend vers l'infini.

I.3 FORMULATION DE LA VISCOELASTICITE LINEAIRE

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique traduit la correspondance entre l'histoire des contraintes et celle des déformations. La déformation $\varepsilon(t)$ ne dépend donc que de l'histoire de la contrainte jusqu'à l'instant t .

Le problème de la viscoélasticité est un problème complexe. Pour cette raison on introduit généralement plusieurs hypothèses simplificatrices. La plus fréquente est l'hypothèse de la linéarité du comportement viscoélastique qui se traduit par une linéarité de la fonction (I.1).

Si l'on superpose deux histoires de sollicitations, chacune apporte sa contribution à la déformation finale et la réponse est la superposition des réponses (Fig.I.8).

Par voie de conséquence au principe de superposition de Boltzmann, la fonction de fluage \mathbf{J} est indépendante du niveau de contrainte [FLU75].

Ceci est illustré pour une expérience de fluage avec des sauts de contrainte au temps $\tau_i = \tau_a$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(t_0, t) \cdot d\sigma(t) + \sum \mathbf{J}(\tau_i, t) \cdot d\sigma_i \quad (\text{I.29})$$

La formule (I.29), appelée *Intégrale de Stieltjes*, peut s'écrire sous la forme

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(t_0, \tau_a) \cdot \sigma(\tau_a) \cdot d\tau_a \quad (\text{I.30})$$

ou bien

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) \cdot \mathbf{J}(t_0, t) + \int_{t_0}^t \mathbf{J}(\tau_a, t) \cdot \sigma(\tau_a) \cdot d\tau_a \quad (\text{I.31})$$

Une intégration par partie de (I.31) donne:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \cdot \mathbf{J}(\tau_a, t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau_a) \cdot \frac{\partial \mathbf{J}(\tau_a, t)}{\partial \tau_a} d\tau_a \quad (\text{I.32})$$

t_0 est l'instant initial pour l'histoire et τ_a l'instant où est appliqué le saut de contrainte.

De façon similaire

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \cdot \mathbf{R}(\tau_a, t) - \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau_a) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}(\tau_a, t)}{\partial \tau_a} d\tau_a \quad (\text{I.33})$$

Les expressions I.32 et I.33 sont appelées *formules de Boltzmann*. Elles donnent la relation entre l'histoire des contraintes et l'histoire des déformations et la valeur de la contrainte à l'instant t .

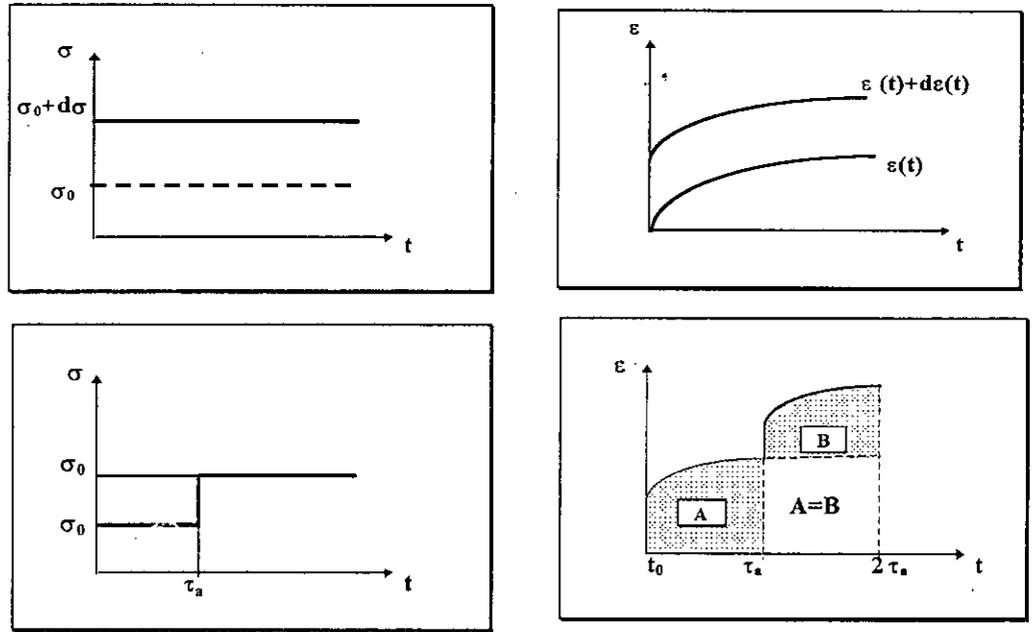


Fig.I.8- Mise en évidence du phénomène de viscoélasticité linéaire

L'hypothèse de non vieillissement est ajoutée dans un souci de simplification, c'est à dire que les propriétés mécaniques du matériaux n'évoluent pas avec le temps. On traduit ceci par la propriété d'invariance avec le temps de la fonctionnelle.

Les formules I.32 et I.33 deviennent alors:

$$\epsilon(t) = \sigma(t) \cdot J(0) + \int_{-\infty}^t \sigma(\tau_a) \frac{\partial J(t - \tau_a)}{\partial \tau_a} d\tau_a \tag{I.34}$$

$$\sigma(t) = \epsilon(t) \cdot R(0) + \int_{-\infty}^t \epsilon(\tau_a) \frac{\partial R(t - \tau_a)}{\partial \tau_a} d\tau_a \tag{I.35}$$

I.3.1 PRODUIT DE CONVOLUTION DE STIELTJES ET TRANSFORMEE DE LAPLACE-CARLSON

La formule I.34 exprime que la déformation ϵ est obtenue par la convolution de J et de σ qui est notée:

$$\epsilon = J' * \sigma \tag{I.36}$$

Cette convolution est appelée aussi: *convolution de Stieltjes*.

D'une façon similaire:

$$\sigma = R' * \epsilon \tag{I.37}$$

Les formules obtenues montrent que tous les calculs concernant un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant se font dans une algèbre de convolution. La transformée de Laplace permet de remplacer les calculs dans l'algèbre de convolution de Rieman par des calculs algébriques ordinaires portant sur la transformation de Laplace-Carlson [SAL87].

D'une façon générale, soit une fonction $f(t)$, la transformée de Laplace de f est une fonction de la variable p définie par:

$$L[\Phi(p)] = f(f(\tau); e^{-pt}) \tag{I.38}$$

Dans notre cas on utilisera l'intégrale de Stieltjes:

$$\mathbf{L}[\Phi(\mathbf{p})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (\text{I.39})$$

Les propriétés essentielles de cette transformée sont:

$$\mathbf{L}(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = \mathbf{L}(\mathbf{a}) * \mathbf{L}(\mathbf{b}) ; \quad \mathbf{L}\delta = \mathbf{1} \mathbf{L}\delta' = \mathbf{p} ; \quad \mathbf{L}\Phi' = \mathbf{p} \mathbf{L}\Phi \quad (\text{I.40})$$

en outre, on définira la transformée de Carlson de Φ notée Φ^* :

$$\Phi^* = \mathbf{p} \mathbf{L}\Phi \quad (\text{I.41})$$

qui a pour propriété:

$$(\Phi^* \mathbf{b}')^* = \Phi^* \cdot \mathbf{b}^* \quad (\text{I.42})$$

il vient donc par dérivation que:

$$\varepsilon^* = \mathbf{J}^* \cdot \sigma^* ; \quad \sigma^* = \mathbf{R}^* \cdot \varepsilon^* ; \quad \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{R}^* = \mathbf{1} \quad (\text{I.43})$$

CONCLUSION

Le calcul des déplacements, contraintes et déformations dans les structures viscoélastiques linéaires peut se ramener à la résolution de problèmes d'élasticité classique grâce au calcul symbolique introduit au moyen de la transformée de Laplace- Carlson.

Les solutions dans l'espace transformé sont des champs qui dépendent de coefficients définissant les sollicitations extérieures, la seule difficulté subsiste dans l'inversion en particulier si le problème d'élasticité associé n'a de solution que numérique approchée. Le modèle retenu dans la suite de l'étude est le modèle standard qui traduit parfaitement le comportement d'un solide viscoélastique.

CHAPITRE II

LA FISSURATION DES MATERIAUX

«Une fissure instable est une crique qui craque! »

J.Lemaître

INTRODUCTION

La rupture est la séparation, ou la fragmentation, d'un corps solide en deux ou plusieurs parties sous l'effet des contraintes. Le processus de rupture peut être considéré comme le fait combiné de deux phénomènes que sont l'initiation et la propagation de la fissure [IRW87].

On dénombre deux grandes catégories de rupture des matériaux; la *rupture ductile* et la *rupture fragile*. Une rupture ductile est caractérisée par une zone de déformation plastique appréciable avant et durant la propagation de la fissure.

La rupture fragile dans les solides est caractérisée par une vitesse de propagation de fissure rapide sans grandes déformations et très peu de micro-déformations. La rupture fragile a tendance à s'accroître avec des températures basses, des taux de déformations rapides et une triaxialité du champ des contraintes [LAB80].

Ce chapitre présente une idée sommaire de la mécanique de la rupture fragile. La rupture est produite par un chargement uniaxial indépendamment de la vitesse et de la température.

II.1 PREVISION DE LA CROISSANCE DES FISSURES DANS LES STRUCTURES

Prévoir l'évolution de fissures dans une structure soumise à des sollicitations, c'est résoudre un problème de mécanique dans lequel les données sont constituées par la géométrie de la structure, la configuration de la fissure initiale, l'histoire des efforts appliqués, la loi de comportement à la déformation et la loi de fissuration du matériaux considéré. Le calcul consiste à trouver la relation qui lie les configurations successives des fissures à l'histoire des sollicitations (fig. II.1).

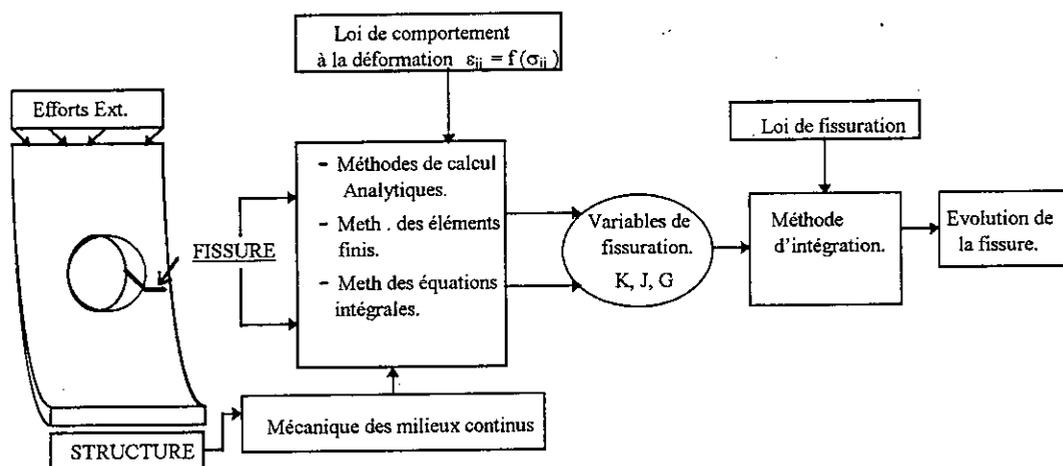
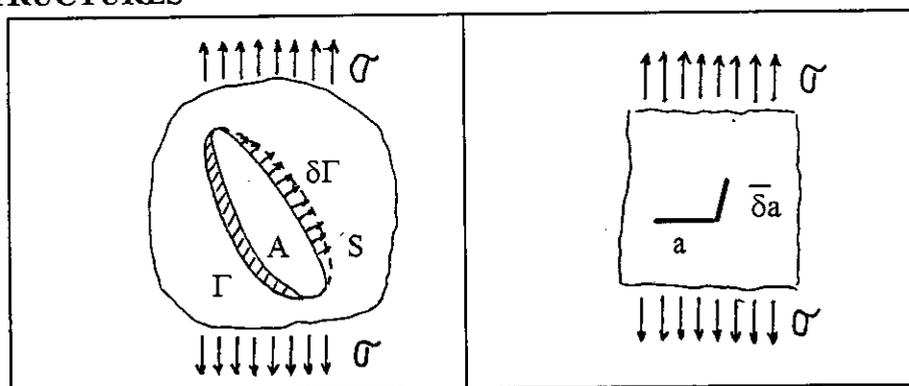


Fig.II.1- Organigramme d'un problème de prévision d'évolution de fissure d'après C.BATHIAS. [BAT80]

II.1.1 STRUCTURES



Fissure surfacique dans un milieu 3-D

Fissure linéique dans un milieu 2-D

Fig. II.2

Le traitement des fissures surfaciques dans un milieu tridimensionnel est un problème complexe car, dans les inconnues, figure la forme du front de fissure dont un accroissement se représente par un champs de vecteurs. Si la région fissurée de la structure peut être considérée comme bidimensionnelle, la fissure est alors linéique et son accroissement est représenté par un seul vecteur qui se réduit d'ailleurs à un scalaire dans les cas fréquents où la fissure progresse dans son prolongement (Fig.II.2).

A souligner que sous certaines conditions de chargement, les structures minces sont justifiables de l'hypothèse des contraintes planes alors que les structures épaisses peuvent être traitées dans l'hypothèse des déformations planes.

II.1.2 SOLLICITATIONS

Dans le cas général de chargement, la fissure ne progresse pas dans son plan, il y a branchement de la fissure.

Concernant la variation des efforts en fonction du temps, on distingue:

- Les efforts périodiques pour lesquels les lois de fissuration sont bien établies;
- Les efforts d'histoire complexe qui imposent de prendre en compte des effets de mémoire;
- Les efforts aléatoires connus seulement par des grandeurs statistiques. Le caractère non linéaire de la loi de fissuration rend la prévision difficile.

II.1.3 MATERIAUX

Du point de vue des calculs de structures nécessaires à la connaissance des facteurs d'intensité de contrainte ou du taux de restitution d'énergie, les matériaux sont représentés par leur loi de comportement à la déformation:

- élastique linéaire.
- élasto-plastique.
- élasto-viscoplastique.

Dans la plus part des cas pratiques, la structure dans son ensemble travaille dans le domaine élastique, la zone plastique à la pointe de la fissure peut être négligée et les calculs peuvent être effectués en élasticité [ASH91], [PLU89].

II.2 DEFINITION MECANIQUE DES VARIABLES DE LA FISSURATION

Trois variables sont couramment utilisées pour caractériser le comportement à la fissuration des matériaux. Elles sont équivalentes pour le cas simple du milieu bidimensionnel élastique linéaire-fragile en chargement simple mais permettent des degrés de généralisation plus ou moins grands pour les cas plus complexes.

II.2.1 FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRANTE

On les définit comme des quantités qui caractérisent la singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe de la fissure. Une définition plus intéressante consiste à les introduire par le champ de déplacement d'ouverture de fissure [BUI78]. Si la fissure est repérée en coordonnées polaires (O, r, θ) , dans le système d'axe (O, x_1, x_2) , on définit trois modes simples d'ouverture u de la fissure (Fig.II.3).

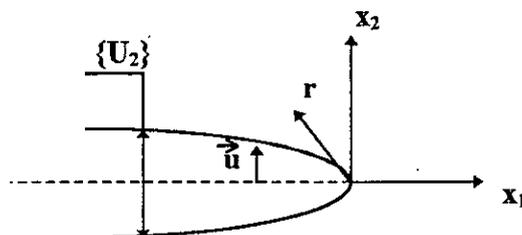


Fig.II.3- Déplacement d'ouverture de fissure

$$\begin{aligned}
 \text{Mode I: } & U_1 = 0, \quad U_2 \neq 0, \quad U_3 = 0 \\
 \text{Mode II: } & U_1 \neq 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0 \\
 \text{Mode III: } & U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissure, on distingue trois cinématiques remarquables du déplacement relatif des lèvres de la fissure, elles sont indiquées sur la figures (II.4).

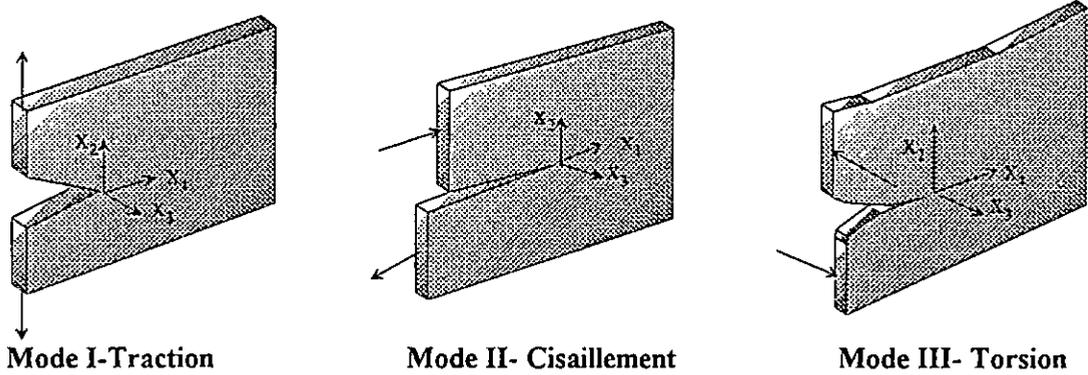


Fig. II.4. les trois modes de rupture

Le champ des déplacements au voisinage de la pointe de fissure calculé par la méthode de WESTERGAARD [LIE68] pour chacun des trois modes est:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot (k - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot (k + \cos \theta + 2) \\
 U_2 &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot (k - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot (k + \cos \theta - 2) \\
 U_3 &= \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

où μ est la constante d'élasticité de Lamé et $k = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contraintes planes} \\ 3-4\nu & \text{en déformations planes} \end{cases}$

ν étant le coefficient de Poisson (II.3)

Les fonctions K_I , K_{II} et K_{III} introduites dans les expressions (II.2) caractérisent l'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe de la fissure et sont proportionnelles à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure. On les appelle facteurs d'intensité de contrainte, respectivement en mode I, mode II et mode III.

Si l'on connaît les expressions des composantes non nulles des contraintes et des déplacements, on peut déterminer les facteurs d'intensité des contraintes par les expressions suivantes qui constituent leurs définitions pour les milieux fissurés plans:

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8\Lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot u_2 \right) \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8\Lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot u_1 \right) \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot u_3 \right)
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

avec

$$\Lambda = 1 \quad \text{en contraintes planes}$$

$$\Lambda = 1 - \nu^2 \quad \text{en déformation planes}$$

K_I , K_{II} et K_{III} peuvent s'exprimer seulement en fonction de la discontinuité de déplacement d'ouverture de fissure par:

$$[u_i] = u_i(r, \pi) - u_i(r, -\pi)$$

$$\text{Mode I : } K_I = \frac{\mu}{(k(\nu) + 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2]$$

$$\text{Mode II : } K_{II} = \frac{\mu}{(k(\nu) + 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_1] \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Mode III : } K_{III} = \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_3]$$

$k(\nu)$ étant défini par l'expression (II.3).

II.2.2 INTEGRALES DE RICE ET DE BUI

Une approche un peu moins locale consiste à définir des intégrales de contour qui expriment la variation de l'énergie potentielle du solide pour un accroissement de fissure. En considérant toujours un problème plan en élasticité linéaire, l'intégrale de RICE [LIE71] et sa duale, l'intégrale de BUI [BUI78], sont respectivement:

$$J = \int_{\Gamma} \left[\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_1 - \sigma_{ij} \mathbf{n}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_1} \right] d\Gamma \quad (\text{II.6})$$

$$I = \int_{\Gamma} \left[-\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{ij} \mathbf{n}_j \cdot \frac{\partial \sigma_i}{\partial \mathbf{x}_1} \right] d\Gamma \quad (\text{II.7})$$

Γ est un contour d'intégration linéique ouvert, entourant la pointe de la fissure (Fig.II.5), les intégrales I et J son indépendantes des dimensions et de la forme de ce contour.

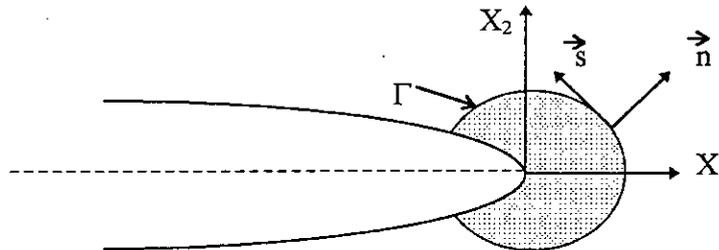


Fig.II.5 - Contour d'intégration pour les intégrales de Rice et de Bui

\rightarrow
 \mathbf{n} est la normale à Γ , w est l'énergie de déformation, w^* l'énergie de déformation complémentaire, σ_{ij} et ϵ_{ij} sont les composantes du champs de contrainte et du champs de déformation:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{II.8})$$

En appliquant les expressions de J et I à l'analyse de Westergaard, on montre que pour les problèmes plans, dans le cas de la propagation de la fissure dans son propre plan, les intégrales I et J sont reliées aux facteurs d'intensité de contrainte par les relations:

$$J = I = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{en contraintes planes} \quad (\text{II.9})$$

$$J = I = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{en déformations planes}$$

II.2.3 TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

Il s'agit d'une approche encore plus globale qui exprime le transfert d'énergie élastique libérée par le solide fissuré lors d'un accroissement de fissure et disponible pour créer cet accroissement par décohesion de la matière. L'intérêt de ce concept, introduit initialement par Griffith [GRI20], est qu'il permet une généralisation de la mécanique linéaire de la rupture aux problèmes tridimensionnels et non linéaires pour les comportements élasto-plastique et élasto-viscoplastique des matériaux [LEM76].

La thermodynamique des processus irréversibles fournit le cadre de cette généralisation en considérant que l'aire A de la fissure est une variable interne cachée du milieu fissuré à laquelle on peut associer la variable duale G qui dérive alors du potentiel thermodynamique Ψ [SIH72]:

$$G = - \frac{\partial \Psi}{\partial A} \quad (\text{II.10})$$

On peut encore exprimer cette grandeur en fonction de la variation du travail des efforts extérieurs pour aboutir à des expressions directement utilisables en calcul numérique.

En calcul de structures, l'approche statique et l'approche cinématique fournissent un encadrement de la valeur réelle de G . On peut imaginer la cinématique du mécanisme d'accroissement de fissure de deux manières différentes (Fig.II.6):

- A effort constant P imposé, c'est l'approche statique:

$$G = \frac{1}{2} P \cdot \frac{\delta U_e}{\delta A} \quad (\text{II.11})$$

- A déplacement constant U_e , c'est l'approche cinématique:

$$G = - \frac{1}{2} U_e \cdot \frac{\delta P}{\delta A} \quad (\text{II.12})$$

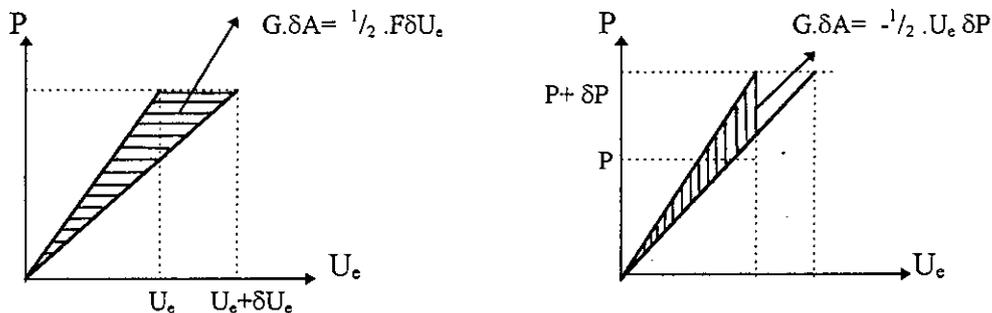


Fig.II.6 -Approche statique et cinématique du mécanisme d'accroissement de fissure.

Dans les deux cas, le taux de restitution d'énergie est égal à la moitié de la variation du travail des efforts extérieurs W pour un accroissement d'aire de fissure,

$$G = \frac{1}{2} \frac{\delta W}{\delta A} \quad (\text{II.13})$$

L'approche statique minimise la variation de l'énergie potentielle et donc maximise la variation du travail des efforts extérieurs, alors que c'est l'inverse pour l'approche cinématique:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta W}{\delta A} (P = \text{C te}) \geq G \geq \frac{1}{2} \frac{\delta W}{\delta A} (U_e = \text{C te}) \quad (\text{II.14})$$

II.3 CRITERES DE BRANCHEMENT DE LA FISSURE

Lorsque le chargement varie en direction (chargement complexe) la fissure change de direction, il y a *branchement*, ce qui implique que son accroissement soit représenté, non plus par un scalaire, mais par un vecteur. Aux lois de propagation de fissure, il faut ajouter un critère fixant la direction : *un critère de branchement de fissure*.

Parmi les différents critères proposés, trois se prêtent à l'exploitation par calcul:

Critère de la contrainte normale maximale ou critère de MANDEL [ERD63],

Le vecteur accroissement de fissure est normal à la direction de la plus grande contrainte principale. Ce critère de mise en oeuvre facile n'est valable que pour les angles de bifurcation assez faibles. La relation donnant l'angle de propagation étant:

$$K_1 \sin\theta + (3\cos\theta - 1) K_2 = 0 \tag{II.15}$$

Critère de la densité locale maximale d'énergie : Selon ce critère, proposé par Sih [SIH72], la trajectoire de la pointe de la fissure s'identifie avec le lieu des points de la structure possédant la densité maximale d'énergie élastique W :

$$w = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_{ij} \cdot \sigma_{ij} \tag{II.16}$$

Critère du taux de restitution d'énergie maximale [LEM76] : Parmi tous les accroissements de fissure virtuels $\delta \vec{a}^*$ cinématiquement admissibles et de même longueur δa , l'accroissement réel $\delta \vec{a}$ est celui qui maximise le taux de restitution d'énergie G :

$$\delta a_{réel} = \sup(G(\delta \vec{a}^*)) \tag{II.17}$$

Les deux premiers critères sont délicats à mettre en oeuvre d'un point de vue numérique car la direction de propagation de la plus grande contrainte principale ou le point de densité maximale d'énergie élastique dépendent de la distance du point envisagé à la pointe de la fissure.

II.4 LA RUPTURE DANS LES MATERIAUX VISCOELASTIQUES

Le principe de correspondance, qui a été établie au Chapitre I, permet de ramener un problème de viscoélasticité linéaire à un problème d'élasticité linéaire où les constantes élastiques sont remplacées par celles obtenues par transformation de Laplace- Carlson.

La même démarche sera utilisée pour passer de la mécanique linéaire de la rupture à la mécanique de la rupture d'un matériau viscoélastique. On pourra dans ce cadre se placer dans le contexte de l'extension de la mécanique linéaire des ruptures [PLU92].

C'est ainsi que Liebowitz et Eftis [LIE71] ont étendu la définition du taux de restitution d'énergie G au cas d'un comportement élastique non linéaire. Le taux de restitution d'énergie non linéaire

\bar{G} est défini par :

$$\bar{G} = \frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial U_{nl}}{\partial a} \tag{II.18}$$

W : Taux de travail extérieur

U_{nl}: Travail non linéaire dépensé

a : Longueur de la fissure

Les courbes charge-déplacement pour les deux cas linéaire

- non linéaire (Fig.II.7), montrent les différences d'aires

définissant G et \bar{G} .

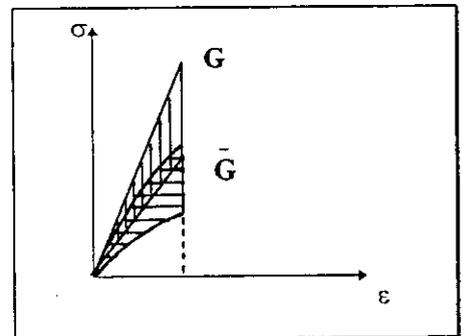


Fig II.6. Description du taux de restitution d'énergie linéaire et non linéaire

II.4.1 CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE A PARTIR DU CHAMP LOCAL DES CONTRAINTES ET DES DEFORMATIONS

• Cas d'une fissure de Griffith

La distribution des contraintes à la pointe d'une fissure à pour forme générale [FRA96]:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_m}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad (\text{II.19})$$

La transformée de Laplace de cette équation s'écrit

$$\sigma'_{ij} = \frac{K'_m}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad (\text{II.20})$$

de façon similaire l'expression des déplacements s'écrit

$$u_i = \frac{2K_m}{E} \sqrt{\frac{8r}{\pi}} \cdot g_i(\theta) \quad (\text{II.21})$$

et par transformation

$$u'_i = \frac{2K'_m}{E'} \sqrt{\frac{8r}{\pi}} \cdot g_i(\theta) \quad (\text{II.22})$$

on pose

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot f_\sigma(t) \quad (\text{II.23})$$

de sorte que

$$K_m(t) = K_m(0) \cdot f_{m\sigma}(t) \quad (\text{II.24})$$

et les déplacements

$$u_i(t) = \frac{2K_m}{E'(t)} \sqrt{\frac{8r}{\pi}} \cdot f_{m\sigma}(t) \quad (\text{II.25})$$

ou encore

$$u_i(t) = u_{i(0)} \cdot f_{iu}(t) \quad (\text{II.26})$$

$E' = E$ en contraintes planes et $E' = E / (1-\nu^2)$ en déformations planes.

L'expression des déplacements peut s'écrire en utilisant la transformation de Laplace inverse:

$$u_i(t) = \frac{2K_m}{E'} \sqrt{\frac{8r}{\pi}} \cdot \left[f_{m\sigma}(t) * L^{-1}\left(\frac{E'}{E'^*}\right) \right] \quad (\text{II.27})$$

donc

$$f_{mu} = f_{m\sigma}(t) * L^{-1}\left(\frac{E'}{E'^*}\right) \quad m = 1, 2, 3 \quad (\text{II.28})$$

Le taux de restitution d'énergie viscoélastique \bar{G} est défini comme

$$\bar{G}_m = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\delta a} \int_0^{\delta \Delta u_m} \int_0^{\delta} \sigma_{mj} \cdot d(\Delta u_m) dr \quad (\text{II.29})$$

On peut mettre l'évolution de ce taux d'énergie disponible en fonction du temps sous la forme

$$\bar{G}_m(t) = \bar{G}_m(0) \cdot f_{mG}(t) \quad \text{avec} \quad \bar{G}_m(0) = \frac{\sigma^2 \pi a}{E'} \quad (\text{II.30})$$

par analogie on pose

$$f_{mG}(t) = f_{m\sigma}(t) \cdot f_{mu}(t) \quad (\text{II.31})$$

d'où

$$f_{mG}(t) = f_{m\sigma}(t) \cdot \left[f_{m\sigma}(t) * L^{-1}\left(\frac{E'}{E'^*}\right) \right] \quad (\text{II.32})$$

En mode I, par exemple, le taux de restitution d'énergie va s'accroître avec le temps. Lorsque $\bar{G}_1(t)$ atteint la valeur critique \bar{G}_{1c} , l'équilibre de la fissure devient instable et la fissure se propage en régime viscoélastique avec une vitesse non limitée [WAL87]. Le temps d'apparition de cette fissure peut être considéré comme un temps d'incubation qui dépend de l'amplitude $\bar{G}_1(0)$, de l'amplitude de la contrainte initiale et de la taille du défaut.

CONCLUSION

Pour caractériser la rupture viscoélastique, on peut, expérimentalement, soit :

- Mesurer l'évolution de la vitesse de fissuration en fonction de la variation de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte.
- Soit mesurer le temps à rupture pour des chargements courants
- Soit mesurer la contrainte de rupture pour des essais à vitesse de chargement constante.

CHAPITRE III

EQUATIONS INTEGRALES ET ELEMENTS DE FRONTIERE EN MECANIQUE DU SOLIDE

*« It will be a very delicate point to cut the feather, and divide
the several reasons to a nice and curious reader, how the numerical
difference in the brain can produce effects of so vast a difference »*

Swift , « A table of a tub »

INTRODUCTION

La plupart des problèmes posés par la mécanique des solides déformables peuvent être résolus par des méthodes numériques, et notamment les problèmes d'intérêt pratique qui sont généralement posés sur des domaines géométriques ne permettant pas l'emploi des techniques de recherche de la solution exacte.

Les méthodes numériques les plus couramment utilisées sont:

- Les différences finies.
- Les éléments finis.
- Les éléments de frontière.

D'autres, d'emploi moins courant, reposent par exemple sur la méthode des caractéristiques ou l'approche spectrale. La méthode des éléments de frontière est sans doute la plus récemment développée des trois grandes catégories de méthodes de résolution numérique.

Les premiers développements utilisés numériquement remontent aux années 1960: voir par exemples [RIZ 67], [CRU69]. Toutefois, ses fondements théoriques remontent à la fin du siècle dernier: l'identité intégrale de *Somigliana* pour l'élastostatique, par exemple, remonte à 1886.

En fait, l'étude sur le plan mathématique des équations intégrales sur lesquelles reposent les méthodes des éléments de frontière est un domaine classique de la physique mathématique: *la théorie du potentiel*.

La théorie du potentiel a d'abord été étudiée dans le cas de champs scalaires (température, potentiel électrostatique, ondes acoustiques, potentiel des vitesses d'un fluide incompressible irrotationnel, ...), généralement solution de l'équation de Laplace, Poisson ou Helmholtz. Ces champs peuvent être décrits comme créés dans l'espace par une distribution de sources portées par un volume V ou une surface S : on parle de *potentiels Newtoniens*

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V f(\mathbf{y}) \frac{dV_y}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \quad (\text{III.1})$$

de *potentiel de simple couche*

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \Phi(\mathbf{y}) \frac{dS_y}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \quad (\text{III.2})$$

ou de *double couche*

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{dS_y}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \quad (\text{III.3})$$

Cela conduit naturellement à des équations intégrales, posées sur la frontière du domaine d'étude (la distribution du potentiel Newtonien étant connue: forces, masse,...) dont les inconnues sont les sources f , Φ , ψ . On voit que les intégrales définissant les potentiels ci-dessus sont singulières pour \vec{x} appartenant à V , S .

Le problème de l'existence d'une solution, pour des conditions aux limites données, est alors ramené à celui de l'existence d'une solution à l'équation intégrale associée. Cette voie a été étendue à l'élasticité statique et dynamique, notamment par *Kupradze* [KUP63], [KUP79] qui introduit des potentiels élastiques similaires à ceux de la théorie du potentiel scalaire. Il propose également dans ses ouvrages des méthodes de résolution numériques.

Ces équations intégrales sont qualifiées d'*indirectes*, car elles portent sur une inconnue intermédiaire: une distribution (réelle ou fictive) de sources. Elles sont essentiellement utilisées pour la formulation des problèmes fondamentaux (de *Dirichlet*, *Neumann* ou *Robin*). D'autres équations intégrales, dites *directes* lient les valeurs des champs physiques considérés et leurs dérivées normales (ou en élasticité, le vecteur contrainte) sur la frontière du domaine d'étude. Leur avantage est de pouvoir être appliquées pour toutes sortes de conditions aux limites mixtes.

Ces équations intégrales doivent bien sûr être résolues numériquement dans la plupart des cas. Ceci a donné naissance à la méthode des éléments de frontières. Celle-ci est en fait un sous produit de la méthode des éléments finis [BAT 90], dans la mesure où les notions de maillage, d'interpolation par fonctions à support borné sont nées et ont vu leurs premiers développements

dans le contexte des éléments finis. Ces notions ont été adaptées au traitement des équations intégrales de frontière, notamment pour ce qui est de la représentation et l'approximation de surfaces.

L'avantage conceptuel de la méthode des éléments de frontière est le gain d'une dimension d'espace. En revanche, leur caractère singulier est une difficulté pratique dans la mesure où une mauvaise évaluation des intégrales élémentaires singulières conduit à une dégradation sensible de la précision de la méthode.

III.1 DOMAINES D'APPLICATION DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE

Dans le domaine de la mécanique du solide, les éléments de frontière sont notamment appliqués en calcul de structures élastiques. De nombreuses applications concernent également les solides fissurés, dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile.

Les calculs de structures tridimensionnelles fissurées se prêtent bien au traitement par éléments de frontière, en raison des difficultés soulevées par le maillage des domaines tridimensionnels fissurés par éléments finis (notamment la nécessité de raffiner le maillage autour du front de fissure et le remaillage dans cas où il y a propagation de fissure).

Un des points forts des méthodes fondées sur les équations intégrales est la possibilité de traiter des domaines infinis ou semi-infinis (demi-espaces) sans avoir à introduire une troncature artificielle du domaine d'étude.

Le traitement de non-linéarités géométriques ou de comportement est généralement ramené à la résolution d'une succession de problèmes linéaires, dans lesquels les contributions des non-linéarités apparaissent sous forme de termes additionnels de sources et conditions aux limites (assimilables à des déformations ou contraintes initiales pour le cas de l'élastoplasticité).

Une grande catégorie de problèmes à laquelle le traitement par éléments de frontière semble bien adapté concerne les problèmes à domaine variable ou inconnu:

- Problèmes de propagation de fissures ou de zones d'endommagement, par approches directes [AME92] ou énergétiques [POR92].
- Optimisation de la forme de structures.
- Problèmes inverses à domaines inconnus (identification d'obstacles, d'inclusions, de fissures,...).
- Simulation de nappes aquatiques souterraines, et autres problèmes à surface libre inconnue.

III.2 LA METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT

Plusieurs problèmes pratiques en mécanique des solides traitent des milieux contenant des discontinuités telles que des ouvertures ou des fissures.

Une fissure possède deux lèvres (surfaces) qui coïncident l'une sur l'autre. La méthode intégrale directe ne s'adapte pas bien à ce genre de situation du fait que les conditions diffèrent d'une surface à l'autre.

Pour y remédier, la méthode de discontinuité de déplacement (M.D.D) fut développée à partir de la solution analytique relative à une discontinuité constante en déplacement le long d'un segment de droite (élément) fini dans le plan (X,Y) d'un solide élastique infini.

Physiquement, on peut imaginer une discontinuité de déplacement telle une fissure dont les surfaces se déplacent l'une par rapport à l'autre. Généralement, bien sûr, on peut considérer une distribution arbitraire du déplacement relatif.

Dans un cas pratique, la distribution des discontinuités de déplacement le long des surfaces est inconnue, alors que celle des contraintes est connue (chargement imposé). On cherche alors les valeurs des discontinuités élémentaires nécessaires pour produire ces contraintes, élément par élément le long de la fissure. Ceci est accompli par la résolution d'un système d'équations algébriques.

III.2.1 DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT DANS UN MILIEU INFINI

Nous introduisons une discontinuité de déplacement D_i comme une différence de déplacement entre les deux faces du segment comme suit, (Fig.III.1):

$$\begin{aligned} D_x &= U_x(x,0^-) - U_x(x,0^+) \\ D_y &= U_y(x,0^-) - U_y(x,0^+) \end{aligned} \quad (III.4)$$

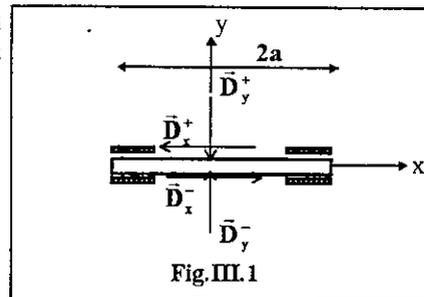


Fig.III.1

D_x discontinuité de déplacement tangentielle

D_y Discontinuité de déplacement normale

La solution à un tel problème est donnée par Crouch [CRO83]. Les déplacements et les contraintes sont formulés comme suit:

$$\begin{aligned} U_x &= D_x [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \\ U_y &= D_x [(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \end{aligned} \quad (III.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GD_x [2f_{,xy} + yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2GD_x [-yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} - yf_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2GD_x [f_{,yy} + yf_{,yyy}] + 2GD_y [-yf_{,xyy}] \end{aligned} \quad (III.6)$$

la fonction $f(x,y)$ étant définie par:

$$f(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ y \left(\arctg \frac{y}{x-a} - \arctg \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right\} \quad (III.7)$$

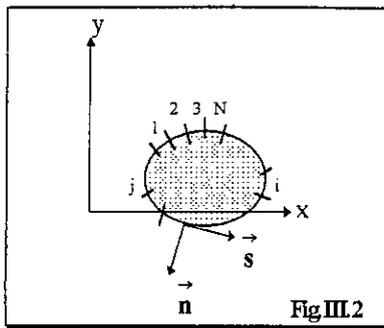
Les déplacements U_x et U_y sont alors continus pour $|X| > a$ sur l'axe $y=0$, et sont constants pour $|X| < a$. (a : étant la demi longueur de l'élément).

Les contraintes le long de la ligne $y=0$ peuvent être évaluées à partir des équations:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{yy}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{xy}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2 - a^2} \end{aligned} \quad (III.8)$$

On remarque que les contraintes normales σ_{xx} et σ_{yy} sur la ligne $y=0$ dépendent de la discontinuité D_y uniquement, alors que la contrainte de cisaillement σ_{xy} dépend seulement de la composante tangentielle D_x . La continuité est assurée partout sur la ligne $y=0$ sauf en $x = \pm a$ où les équations III.8 sont singulières et discontinues.

III.2.2 PROCEDURE NUMERIQUE



Le passage au système algébrique à résoudre est fait par une discrétisation du contour à étudier en N éléments. Les discontinuités de déplacement élémentaires sont définies par rapport aux coordonnées locales s et n indiquées sur la figure III.2.

Les contraintes normales et tangentielles au milieu du $i^{\text{ème}}$ élément peuvent être exprimées en fonction des N discontinuités de déplacement par [CRO83]:

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \quad (\text{III.9})$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j$$

où les A_{ss}^{ij} , A_{sn}^{ij} , ... sont les coefficients d'influence pour les contraintes.

De façon similaire, si les déplacements sont prescrits, alors à la place du système III.9 nous avons:

$$u_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \quad (\text{III.10})$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j$$

En général, les conditions aux limites sont du type mixte, ce qui engendre un système composé d'équations du type III.9 et III.10, sous la forme:

$$b_s^i = \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n^j \quad (\text{III.11})$$

$$b_n^i = \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j$$

Les quantités b_s^i et b_n^i sont les conditions aux limites en contraintes ou en déplacements connus et C_{ss}^{ij} , C_{ns}^{ij} , ... sont les coefficients d'influence correspondants.

III.3 ADAPTATION DE LA M.D.D. AU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE

L'adaptation de la M.D.D pour simuler le comportement viscoélastique ne peut se faire sans l'utilisation du principe de correspondance ([CRA83], [WAR91] et [SCH75]) qui permet de remplacer les calculs dans l'algèbre de Rieman par des calculs algébriques ordinaires portant sur la transformation de Laplace.

• Cas du fluage

Pour un cas de fluage (charges imposées):

$$\{\sigma(t)\} = H(t) \cdot \{\sigma_0\} \quad (\text{III.12})$$

Le problème élastique correspondant s'interprète par la relation:

$$\{\sigma_0\} = [A] \cdot \{D_0\} \quad (\text{III.13})$$

où $[A]$ est la matrice regroupant les coefficients d'influence et qu'on peut décomposer en:

$$[A] = \frac{G_0}{2\pi(1-\nu_0)} [A^*] \quad (\text{III.14})$$

Le principe de correspondance nous permet alors d'écrire:

$$\{D(s)\} = \frac{2\pi(1-\nu(s))}{G(s)} [A^*]^{-1} \cdot \{\sigma(s)\} \quad (\text{III.15})$$

et par transformation inverse,

$$\{\mathbf{D}(s)\} = 2\pi[\mathbf{A}^*]^{-1} \cdot \{\sigma_0\} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{(1 - \nu(s))}{sG(s)} \right\} \quad (\text{III.16})$$

L'équation III.16 traduit l'évolution temporelle des discontinuités sur la frontière du domaine.

Le terme $L^{-1} \left\{ \frac{(1 - \nu(s))}{sG(s)} \right\}$ est évalué suivant le modèle rhéologique choisi.

Les contraintes à l'intérieur du domaine d'après les équations III.6:

$$\{\sigma_b\} = \frac{G_0}{2\pi(1 - \nu_0)} [\mathbf{K}^*] \cdot \{\mathbf{D}_e\} \quad (\text{III.17})$$

avec:

$$\{\mathbf{D}_e\} = \frac{2\pi(1 - \nu_0)}{G_0} [\mathbf{A}^*]^{-1} \cdot \{\sigma_0\} \quad (\text{III.18})$$

donc:

$$\{\sigma_b(t)\} = [\mathbf{K}^*] [\mathbf{A}^*]^{-1} \cdot \{\sigma_c(t)\} \quad (\text{III.19})$$

cette dernière équation indique que les contraintes à l'intérieur du corps dépendent uniquement du chargement extérieur.

Pour ce qui est des déplacements à l'intérieur du corps, les équations III.5 couplées au principe de correspondance s'écrivent:

$$\{\mathbf{U}(t)\} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}^*]^{-1} \cdot \{\sigma_c\} \cdot L^{-1} [\mathbf{W}(s)] \quad (\text{III.20})$$

$[\mathbf{W}(s)]$ étant la matrice des pré-fonctions d'influence définies par la fonction (III.7) et ses dérivées, f_x, f_y, f_{xy}, \dots

• Cas de la relaxation

Pour ce qui est du comportement en relaxation (déplacements imposés), soit:

$$\{\mathbf{U}_c(t)\} = \mathbf{H}(t) \cdot \{\mathbf{U}_c^0\} \quad (\text{III.21})$$

le système IV.10 est transformé en:

$$\{\mathbf{D}(s)\} = [\mathbf{B}(s)]^{-1} \cdot \{\mathbf{U}_c(s)\} \quad (\text{III.22})$$

Pour pouvoir inverser l'équation III.22, l'hypothèse d'un coefficient de poisson constant est nécessaire, soit $\nu(t) = \nu_0$

ce qui donne:

$$\{\mathbf{D}(t)\} = \{\mathbf{D}_e\} \quad (\text{III.23})$$

Les contraintes à l'intérieur du corps sont déterminées moyennant la relation IV.9:

$$\{\sigma(s)\} = \frac{G(s)}{2\pi(1 - \nu(s))} [\mathbf{A}^*] \cdot \{\mathbf{D}(s)\} \quad (\text{III.24})$$

ou bien en inversant cette dernière:

$$\{\sigma(t)\} = \frac{1}{2\pi(1 - \nu)} [\mathbf{A}^*] \cdot \{\mathbf{D}_e\} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (\text{III.25})$$

On voit bien que pour la relaxation, les relations écrites dans l'espace des transformées de LAPLACE ne peuvent être inversées analytiquement si l'hypothèse d'un coefficient de POISSON constant n'est pas admise. Or, ceci contredit l'hypothèse initiale sur le coefficient de compressibilité.

Pour les déplacements à l'intérieur du domaine:

$$\{\mathbf{U}_b\} = \frac{1}{4\pi(1 - \nu)} [\mathbf{M}][\mathbf{D}] \quad (\text{III.26})$$

avec la matrice $[\mathbf{M}]$ dépendant uniquement du coefficient ν .

CONCLUSION

Dans ce chapitre une brève introduction au calcul des structures par la méthode des équations de frontière a été présentée. La méthode de discontinuité de déplacement, qui s'avère bien adaptée aux milieux fissurés, est appliquée aux matériaux à comportement viscoélastique moyennant le principe de correspondance. La mise en oeuvre numérique de la méthode fait l'objet du chapitre suivant. Le champs de déplacement doit être continu en fond de fissure. Le problème de simulation par la méthode de discontinuité de déplacement utilisant un élément constant ne respecte pas cette continuité. Donc un élément plus performant doit être pris en fond de fissure. Le nouvel élément présenté dans le chapitre suivant a été développé pour tenir compte du problème lié au fond de fissure.

CHAPITRE IV

ÉVALUATION NUMÉRIQUE DES PARAMÈTRES DE LA FISSURATION

« Ainsi celà fait un cercle, d'où sont heureux ceux qui sortent »
Blaise Pascal , « Les pensées »

INTRODUCTION

Dans le présent chapitre un développement analytique et numérique d'un élément singulier adapté aux bouts d'entailles est mis en application pour des cas de structures fissurées.

L'utilisation de la méthode de discontinuité de déplacement (M.D.D) pour évaluer numériquement la solution analytique relative à une distribution normale du déplacement entre les deux lèvres d'une fissure linéaire donne d'assez bons résultats avec une discrétisation de la fissure en 10 ou 20 éléments, mais la qualité des résultats se détériore au voisinage du bout de la fissure [SAH95]. En mécanique de la rupture, une meilleure approche de la solution au voisinage du bout de la fissure est très importante pour l'évaluation des paramètres de la rupture, ce qui impose la nécessité de trouver de meilleures approches.

On pourrait, en premier lieu, penser à utiliser des éléments d'ordres supérieurs, tel que l'élément linéaire où la distribution de la discontinuité est linéaire entre les deux nœuds de l'élément, mais le saut de la discontinuité de déplacement d'un nœud à l'autre est fait d'une façon brusque ce qui provoque une singularité de la contrainte en ces points. Ceci d'une part, d'autre part, l'utilisation d'un élément quadratique entraînerait une amélioration marginale au prix d'une formulation compliquée.

IV.1 ELEMENT BOUT DE FISSURE PUISSANCE -Power Element -

En mécanique de la rupture, le facteur d'intensité de contrainte est un paramètre important. Il permet de prédire l'évolution des fissures. Les solutions analytiques en mécanique linéaire de la rupture pour différents cas de chargement montrent que les contraintes à une distance r du bout de la fissure varient en $r^{-1/2}$ pour r assez faible [RIC68].

Pour la détermination du facteur d'intensité de contrainte, quelques expressions ont été proposées pour une variété de cas simples. Par exemple, pour une fissure de longueur $2a$ dans un milieu infini et soumise à une contrainte σ , le facteur d'intensité de contrainte est donné par [BUI78]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \quad (IV.1)$$

Pour des cas plus complexes, les facteurs d'intensité de contrainte sont évalués le plus souvent numériquement. Ceci ne saurait être fait sans le maximum de précision au voisinage de la pointe de la fissure.

Comme le déplacement relatif entre les lèvres de la fissure est proportionnel à \sqrt{r} au voisinage du bout, on se propose une fonction de forme pour l'élément placé en font d'entaille sous la forme:

$$\hat{U}_y(r) = \alpha_1 \cdot r^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 \cdot r^{\frac{3}{2}} \quad (IV.2)$$

α_1 et α_2 sont des constantes à déterminer en fonction des discontinuités.

Nous pouvons maintenant, développer une approche numérique dans laquelle la fissure est discrétisée en n éléments de discontinuité ordinaire, excepté pour le premier et le dernier élément bouts de fissure singuliers (un à chaque extrémité). L'avantage de cette approche particulière est que les contraintes sont toujours évaluées aux milieux des éléments évitant par là une singularité aux nœuds entre éléments adjacents.

Pour plus de précision, nous présentons les équations donnant les coefficients d'influence pour le nouvel élément bout de fissure qui peuvent être déduites de l'équation donnant la contrainte σ_{yy} sur la ligne $y = 0$:

$$\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{a \cdot G}{\pi(1-\nu)} \cdot D_y \cdot \frac{1}{(x^2 - a^2)} \quad (IV.3)$$

cette équation est obtenue en substituant $\hat{U}_y(r)$ par D_y dans l'intégrale:

$$\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-a}^a \hat{U}_y(r) \cdot \frac{dr}{(x-r)^2 + y^2} \quad (IV.4)$$

L'élément puissance est représenté pour le bout gauche de l'entaille par la figure (IV.1).

En introduisant l'équation (IV.2), l'intégrale (IV.4) s'écrit alors:

$$\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \cdot (C_1 \cdot D_1 + C_2 \cdot D_2) \quad (IV.5)$$

avec

$$C_1 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{(x-2a)} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{4\sqrt{ax}} \cdot \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x} + \sqrt{2a}} \right| \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{3x}{a}\right) + \frac{3}{a\sqrt{2}}\right) \quad (IV.6.a)$$

$$C_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{(x-2a)} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4\sqrt{ax}} \cdot \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x} + \sqrt{2a}} \right| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{x\sqrt{3}}{a}\right) + \frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}\right) \quad \text{pour } x > 0$$

et pour $x < 0$

$$C_1 = -\left\{ \arctg \sqrt{\frac{2a}{r}} \left(\frac{3}{2\sqrt{3ar}} - \frac{3\sqrt{r}}{2a\sqrt{a}}\right) + \left(2 - \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{r}{a\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{r+2a} \right\} \quad (IV.6.b)$$

$$C_2 = \frac{a-3r}{2a\sqrt{3ar}} \cdot \arctg \sqrt{\frac{2a}{r}} + \frac{1}{r+2a} \left[\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{r}{a} \right]$$

avec $r = -x$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{3a}} (3\sqrt{3}D_1 - D_2) \quad (IV.7)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2a\sqrt{3a}} (D_2 - \sqrt{3}D_1)$$

Des expressions similaires peuvent être écrites pour le bout droit de la fissure.

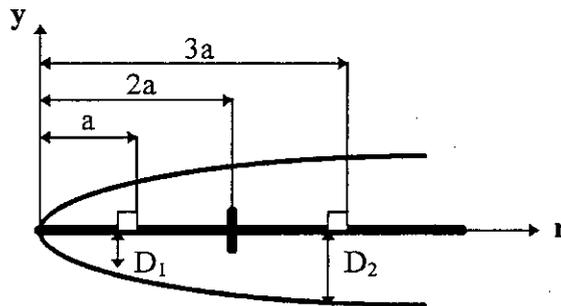


Fig. IV.1- Représentation de l'élément bout de fissure 'Puissance'

IV.2 PROCEDURE NUMERIQUE

Nous procédons à une division de la ligne de fissure en n éléments telle que l'élément i , de longueur $2a_i$ est centré au point $x = x_i$, $y = 0$. Si le premier et le dernier élément sont des éléments bout de fissure, il s'en suit des équations IV.3 et IV.5 que les coefficients des éléments frontières s'écrivent:

$$A_{ij} = \frac{-G}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{a_j}{(x_i - x_j)^2 + a_j^2} \quad \text{pour } j \neq 1, 2 \text{ et } j \neq n-1, n$$

$$A_{ij} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{\sqrt{2}}{(s-2a_j)} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{4\sqrt{a_j s}} \cdot \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{s} - \sqrt{2a_j}}{\sqrt{s} + \sqrt{2a_j}} \right| \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{3s}{a_j}\right) + \frac{3}{a_j\sqrt{2}} \right] \quad x > 0$$

$$A_{ij} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left[\arctg \sqrt{\frac{2a_j}{r}} \left(\frac{3}{2\sqrt{3a_j r}} - \frac{3r}{2a_j\sqrt{a_j}}\right) + \left(2 - \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{r}{a_j\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{r+2a_j} \right] \quad r = -x$$

pour $j = 1$ et $j = n$ (IV.8.a)

$$A_{ij} = -\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{\sqrt{2}}{(s-2a_j)} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{4\sqrt{a_j s}} \cdot \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{s} - \sqrt{2a_j}}{\sqrt{s} + \sqrt{2a_j}} \right| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{s\sqrt{3}}{a_j} \right) + \frac{\sqrt{3}}{a_j\sqrt{2}} \right)$$

$$A_{ij} = -\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{a_j - 3r}{2a_j\sqrt{3a_j r}} \cdot \text{arctg} \sqrt{\frac{2a_j}{r}} + \frac{1}{r+2a_j} \left[\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{r}{a_j} \right] \right]$$

(IV.8.b)

avec $s = a_j + |x_i - x_j|$

A noter que pour l'élément parabolique développé par Crouch [CRO83] et dont la fonction de forme est :

$$\hat{U}_y(\mathbf{r}) = \mathbf{D}_y \cdot \mathbf{r}^{\frac{1}{2}} \tag{IV.9}$$

les coefficients d'influence s'écrivent comme suit:

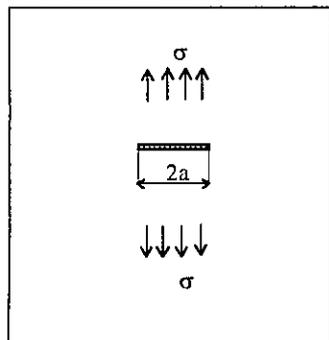
$$A_{ij} = \frac{-G}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{a_j}{(x_i - x_j)^2 + a_j^2} \quad \text{pour } j \neq 1 \text{ et } j \neq n$$

$$A_{ij} = -\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{(s-2a_j)} + \frac{1}{2\sqrt{a_j s}} \cdot \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{s} - \sqrt{2a_j}}{\sqrt{s} + \sqrt{2a_j}} \right| \right\} \quad x > 0 \tag{IV.10.a}$$

$$A_{ij} = -\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a_j r}} \text{arctg} \sqrt{\frac{2a_j}{r}} - \frac{\sqrt{\frac{2a_j}{r}}}{r+2a_j} \right\} \quad x < 0 \text{ (} r = -x \text{)} \tag{IV.10.b}$$

pour $j=1$ et $j=n$

IV.3 RESULTATS NUMERIQUES ET INTERPRETATIONS



Les performances du nouvel élément développé sont mises en valeur à travers deux problèmes classiques largement utilisés dans la littérature pour valider de nouvelles approches.

En considérant un milieu infini comportant une fissure rectiligne de longueur 2a soumise à une pression σ (Fig.IV.2), nous procédons à une évaluation des différents paramètres à savoir: Ouverture de la fissure, facteur d'intensité de contrainte et taux de restitution d'énergie, et ceci pour différents maillages de la fissure; (voir graphes (IV.1), (IV.2)et (IV.3)).

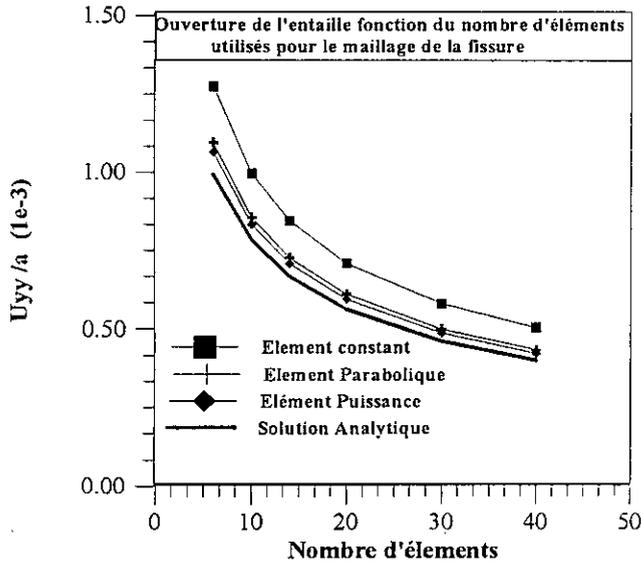
Fig IV.2 Fissure rectiligne dans un milieu infini

Les graphes (IV.1 à 4) montrent une nette amélioration de la convergence des résultats numériques en fonction du nombre d'éléments utilisés pour le maillage de l'entaille pour l'élément puissance par rapport aux deux autres éléments: l'élément constant et l'élément parabolique.

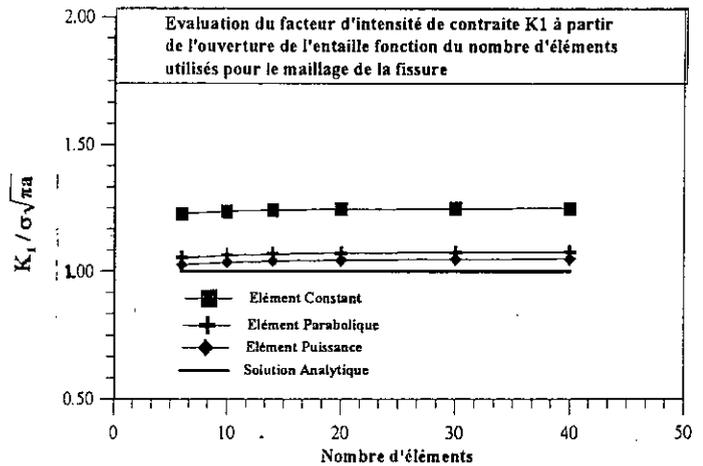
A titre indicatif et pour le nouvel élément, l'erreur sur l'évaluation de l'ouverture de l'entaille est inférieure à 4 % par rapport à la solution analytique pour seulement 20 éléments sur la fissure au lieu de 30 pour l'élément parabolique et 50 éléments simples.

Le facteur d'intensité de contrainte évalué en utilisant le taux de restitution d'énergie à partir de l'approche globale (Graphe IV.4) présente une meilleure convergence avec les éléments parabolique et puissance alors que pour l'élément constant, l'erreur est supérieure à 15 % quel que soit le nombre d'éléments. Ceci est justifié par le fait que l'élément de propagation donne une assez bonne évaluation du taux de restitution d'énergie (Graphe IV.3).

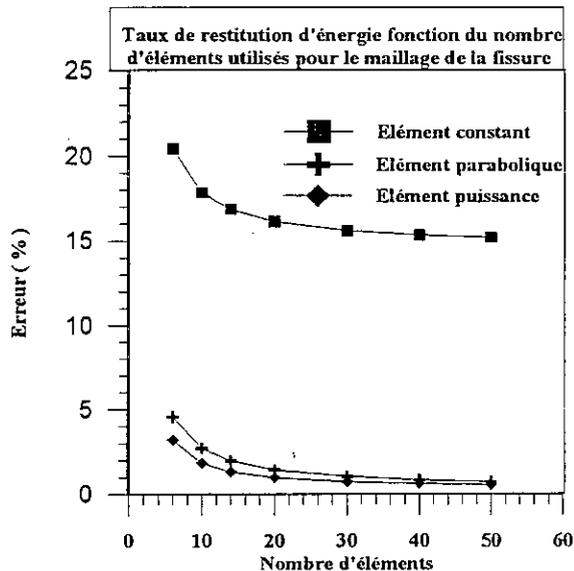
Quant au deux autres éléments singuliers, ils présentent une bonne convergence aussi bien dans l'approche globale que dans l'approche locale avec une erreur minimale pour l'élément puissance. Il suffit de constater (Graphe IV.3 et IV.4) que 10 éléments (8+2élé puissances) sont suffisants pour s'assurer une erreur inférieure à 2 % sur la valeur de G et 1 % sur la valeur de K_I .



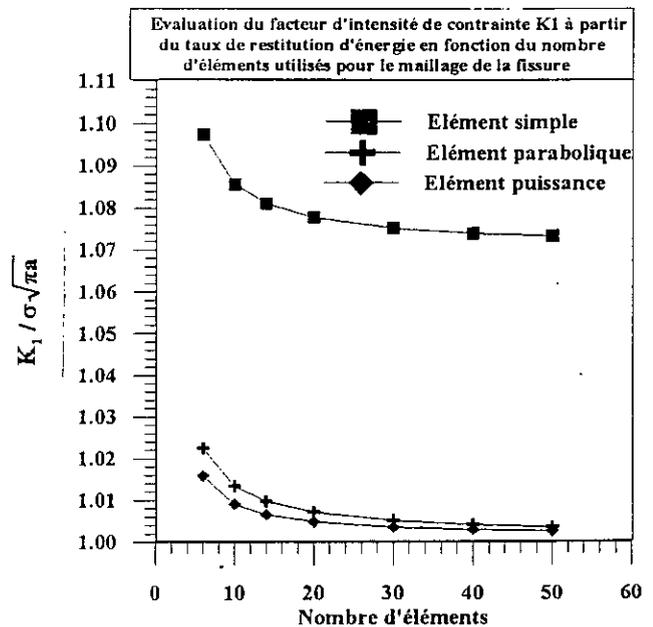
Graph IV. 1



Graph IV. 2



Graph IV. 3



Graph IV. 4

Comme second exemple, nous considérons une plaque rectangulaire avec une fissure débouchante (single edge crack) représentée sur la figure (IV.3).

La longueur de la fissure est a , la largeur de la plaque w et la hauteur $2h$. La plaque est soumise à l'action d'une traction uniforme σ , appliquée de part et d'autre sur les bords supérieur et inférieur.

Les résultats ont été obtenus pour le cas $h/w = 0.5$ dans le but de pouvoir les comparer à ceux donnés par Civelek et Erdogan [CIV82].

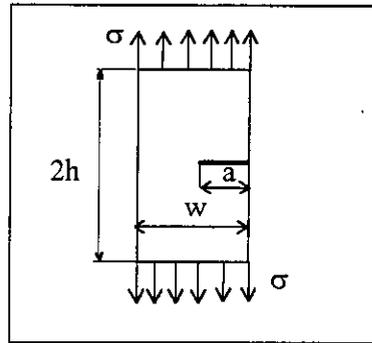


Fig.IV.3 Plaque rectangulaire avec fissure débouchante

Quatre cas sont considérés, avec $a/w = 0.2, 0.3, 0.4$ et 0.5 respectivement. Une convergence est obtenue pour un maillage de la plaque en 120 éléments où la fissure est discrétisée avec 40 éléments disposés avec un raffinement progressif dans les rapport $0.4, 0.3, 0.2$ et 0.1 . Le dernier élément est un élément bout de fissure.

Les résultats obtenus avec le maillage de 120 éléments sont groupés dans les tableaux IV.1 et IV.2 pour le facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie respectivement.

a/w	.2	.3	.4	.5	.6
Elt. simple	1.776	2.617	2.668	3.665	5.066
Elt. parabolique	1.520	1.823	2.275	3.123	4.307
Elt. puissance	1.465	1.755	2.187	2.997	4.121
Réf. [CIV82]	1.488	1.848	2.324	3.010	4.152
Réf. [BAR80]	1.367	1.655	2.108	2.827	4.043

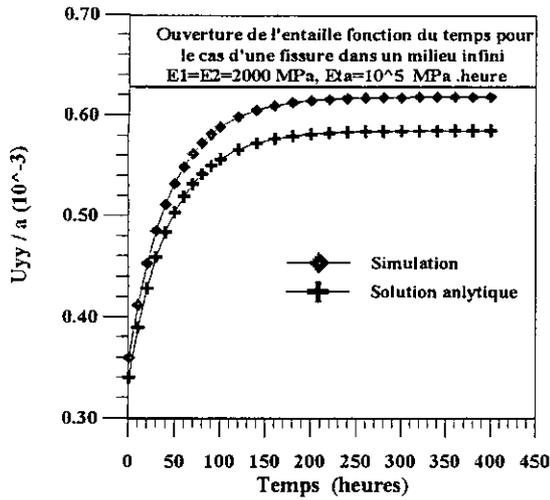
Tableau IV.1- Facteur d'intensité de contrainte ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) pour différents rapports de a/w

a/w	.2	.3	.4	.5	.6
Elt. simple	4.474	6.455	10.064	18.996	36.287
Elt. parabolique	3.266	4.701	7.319	13.787	26.230
Elt. puissance	3.034	4.353	6.762	12.700	24.010
Réf. [CIV82]	3.130	4.828	7.635	12.808	24.371
Réf. [BAR80]	2.640	3.873	6.282	11.295	23.111

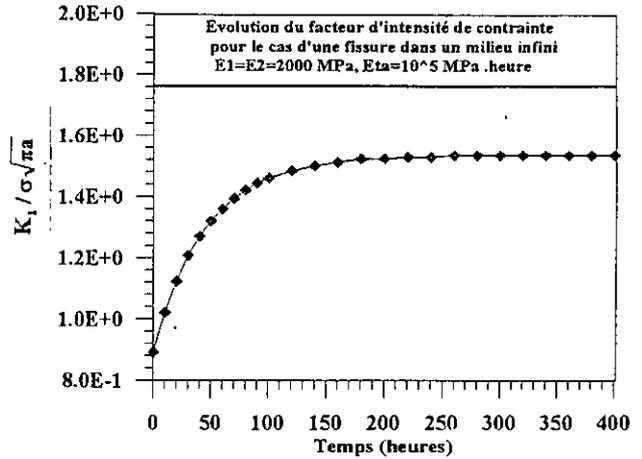
Tableau IV.2- Taux de restitution d'énergie élastique ($G / \sigma a \cdot 10^{-3}$) pour différents rapports de a/w

Notons que, aussi bien pour K_I que pour G , les résultats obtenus par utilisation de l'élément puissance restent très proches de ceux donnés par la référence [CIV82] sans toute fois atteindre les valeurs citées par la référence [BAR80] qui représentent un cas limite ($h/w \gg 1$)

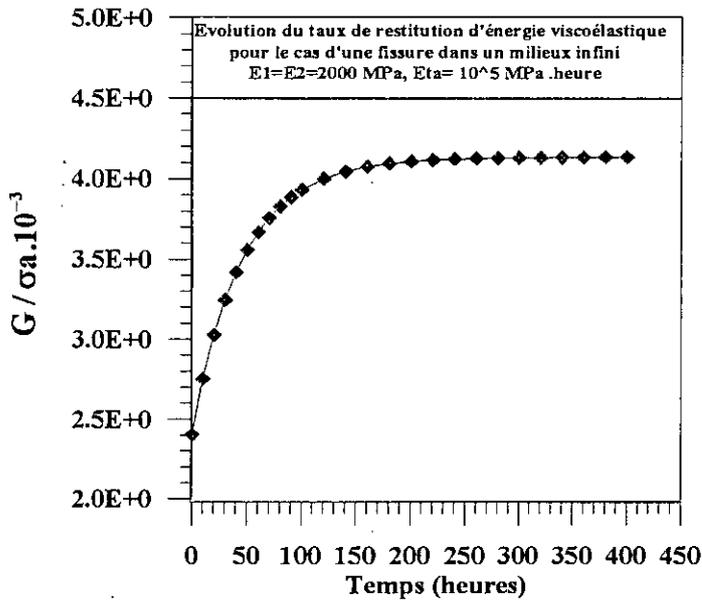
Les graphes IV.5 à IV.8 présentent les résultats du calcul viscoélastique pour le premier exemple (fissure linéaire dans un milieu infini) obtenus avec un maillage de la fissure en 20 éléments. La solution analytique pour l'ouverture de l'entaille est obtenue par transformée de Laplace de la solution du problème élastique correspondant [BEN91].



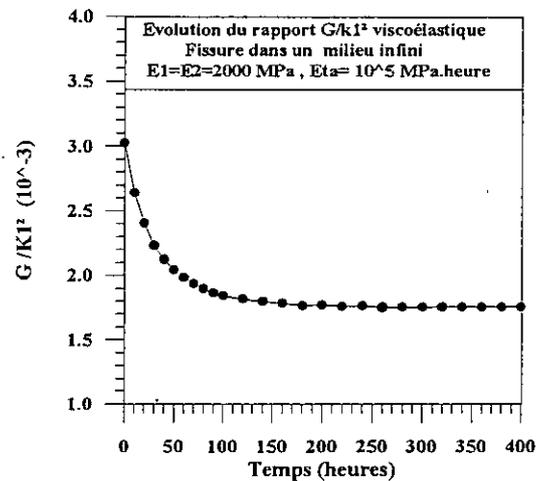
Graphe IV.5



Graphe IV.6

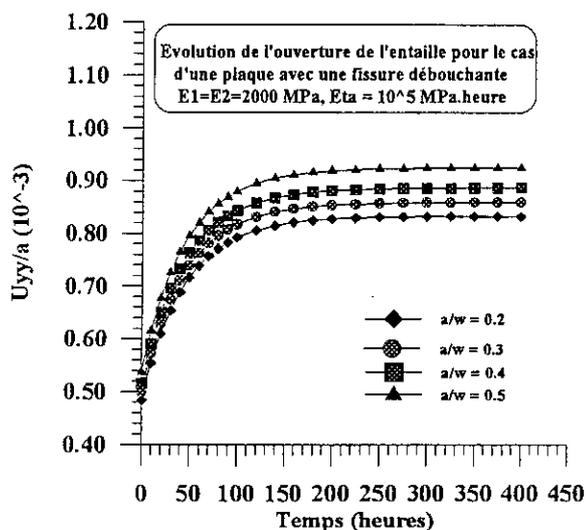


Graphe IV.7

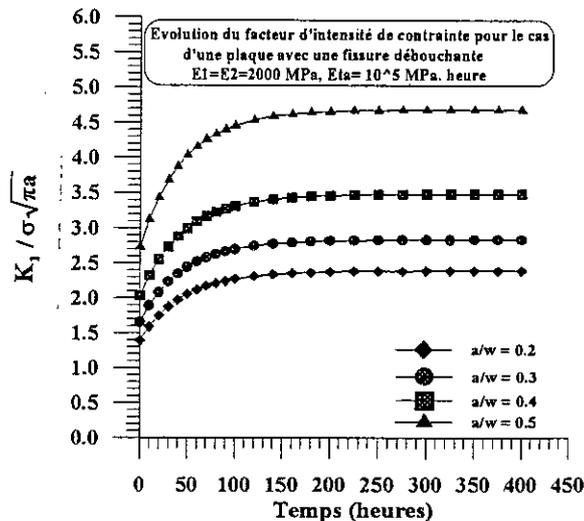


Graphe IV.8

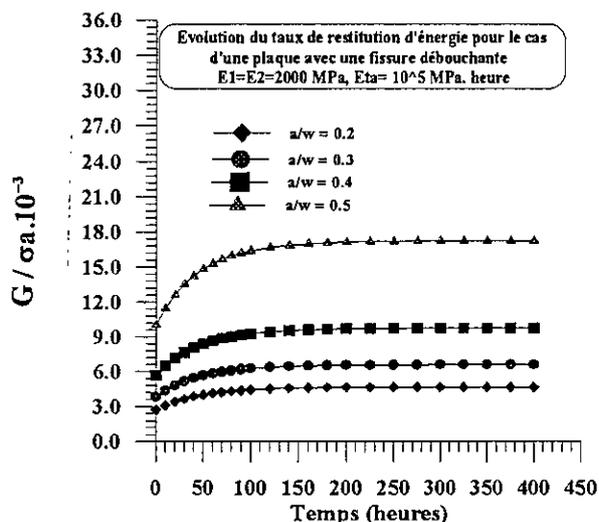
Les graphes IV.9 à IV.12 regroupent les résultats du calcul viscoélastique pour le second exemple. L'ouverture de l'entaille, le facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie évoluent avec la taille de l'entaille (rapport a/w), mais le rapport $G/ K1^2$ en est pratiquement indépendant.



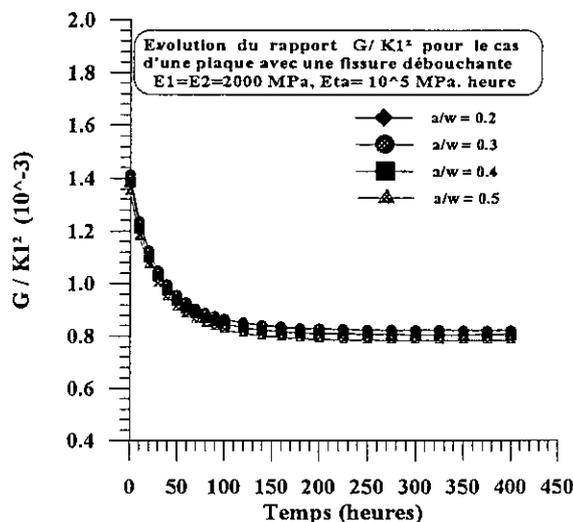
Graphe IV.9



Graphe IV.10



Graphe IV. 11



Graphe IV. 12

Pour les résultats du graphe IV.12 on pourrait approximer les courbes $G(t)/ K_1^2(t)$ par une fonction dépendant uniquement du temps et qui représentera une corrélation entre $G(t)$ et $K(t)$. Nous donnons ci dessous le résultat de l'approximation des courbes du graphe V.12 par une fonction puissance du type:

$$\frac{G(t)}{K_1^2(t)} = C_1 \cdot t^{-C_2} \tag{IV.11}$$

a/w	0.2	0.3	0.4	0.5
C_1	1.6764	1.6743	1.6424	1.5961
C_2	0.1399	0.1398	0.1399	0.1400
r	0.9745	0.9742	0.9752	0.9751

Tableau IV. 3- Valeurs des coefficients de la corrélation IV.11

CONCLUSION

Dans ce chapitre un élément singulier adapté aux bords des fissures a été développé analytiquement et testé sur deux exemples. Les résultats obtenus montrent que pour un même nombre d'éléments, donc un même temps de calcul, le nouvel élément permet une amélioration considérable de la convergence. Les paramètres de la fissuration: ouverture, facteur d'intensité de contrainte et taux de restitution d'énergie, se trouvent mieux évalués. A noter que la convergence est monotone en fonction du nombre d'éléments utilisés. Ceci nous sera d'une grande utilité dans le restant du travail vu que le temps de calcul lors de la simulation viscoélastique se verra considérablement diminué par réduction du nombre d'éléments utilisés pour le maillage de la structure.

Pour le calcul viscoélastique, une corrélation entre $K_1(t)$ et $G(t)$ est établie par utilisation d'une fonction puissance dépendant uniquement du temps. Ce qui nous permet de conclure que le rapport $C(t) = G(t)/K_1^2(t)$ dépend uniquement des paramètres rhéologiques du modèle considéré et que la connaissance du rapport critique C_c suffit pour évaluer le temps à la rupture.

CHAPITRE V

VALIDATION EXPERIMENTALE

« Où l'indécis au précis se joint »
Verclaine , « Jadis et naguère »

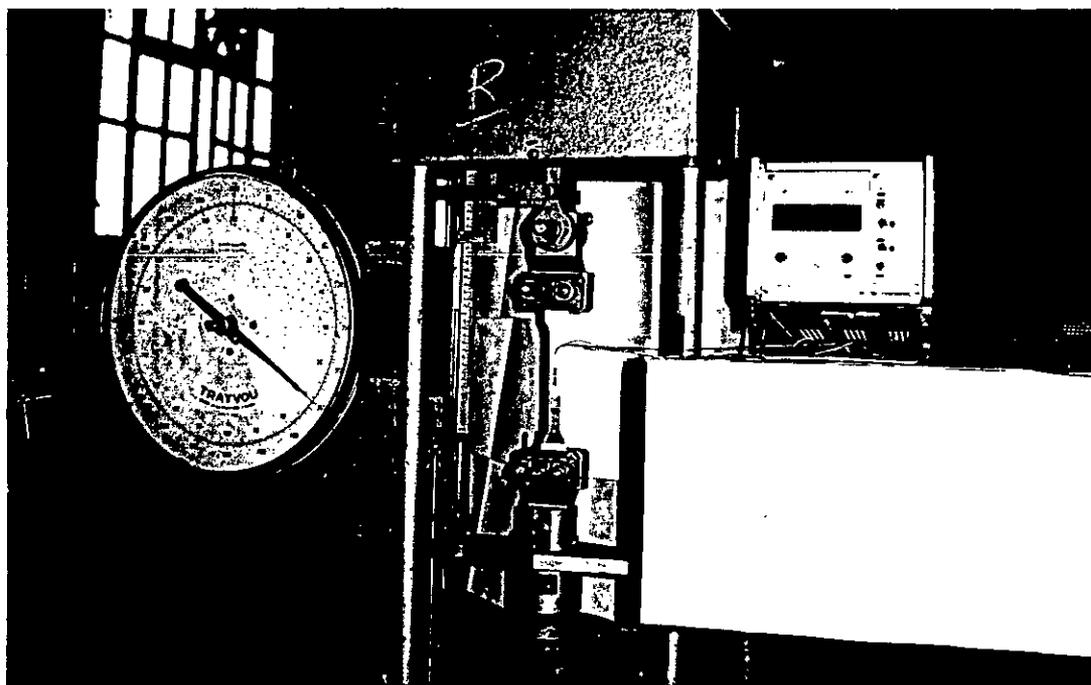
INTRODUCTION

Le présent chapitre est consacré à l'étude expérimentale du comportement en fluage d'un alliage d'aluminium selon le mode I. Notre choix a porté sur l'aluminium vu sa disponibilité et sa large utilisation sous forme de tôles, (Aéronautique, construction mécanique, construction chimique, etc.).

V.1 PRESENTATION DES MOYENS DE L'APPROCHE EXPERIMENTALE

V.1.1 DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Les essais ont été effectués sur une machine de traction (TRAYVOU) -Voir Image ci dessous-disponible au laboratoire des traitements thermiques au niveau du département Génie Mécanique à l'E.N.P. L'avantage du dispositif utilisé est dû au fait que la charge (jusqu'à 1000 Kg) appliquée au moyen d'un bras de levier peut être maintenue constante durant toute la durée de l'essai, ce qui n'est pas le cas de la plus part des machines de traction à vérins hydrauliques.



- La machine de traction utilisée pour nos essais

V.1.2 EPROUVETTE UTILISEE

De nombreux types d'éprouvettes furent essayées durant les années 60 avant que ne soit définies des éprouvettes normalisées, adaptées d'abord par l'ASTM [AST72], puis par AFNOR [AFN74]. Les essais en traction simple ont été menés sur des éprouvettes plates entaillées (Fig. V.1). La fissure de longueur a est réalisée de façon à être la plus aigüe possible et doit avoir une longueur au moins égale à 5 % de la largeur de l'éprouvette $2w$, [WHI87].

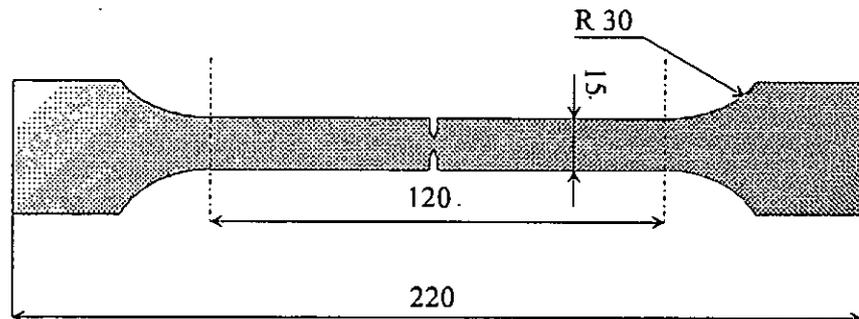


Fig.V 1 Dimension de l'éprouvette utilisée

Les éprouvettes ont été découpées sur des tôles de 1 mm de façon à s'assurer un état de contraintes planes lors des essais, ensuite usinées sur une fraiseuse universelle en respectant la symétrie et la forme des arrondis. Une attention particulière a été apportée lors du découpage au moyen d'une fraise de Φ 60 mm pour éviter toute anomalie sur les bords pouvant engendrer des concentrations de contrainte. Ensuite les bords sont rectifiés afin d'améliorer leur état de surface et la forme des arrondis.

Un défaut artificiel est réalisé au milieu de la longueur utile de part et d'autre du bord. Ce qui nous donne une éprouvette avec double fissure latérale (Fig. V.2).

L'approche expérimentale est basée sur la mesure de la déformation globale, loin du défaut par utilisation de l'extensométrie.

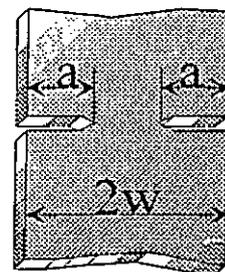


Fig.V 2- Détail de la partie entaillée

V.1.3 PRESENTATION DU MATERIAU

Le matériau utilisé est un alliage d'aluminium non allié de 1^{ère} fusion de la série 1000. Il est utilisé dans de nombreux domaines tels la construction mécanique, le bâtiment, l'industrie chimique ou l'électricité.

L'analyse chimique d'un échantillon de la tôle utilisée pour la réalisation des éprouvettes a donné les résultats suivants:

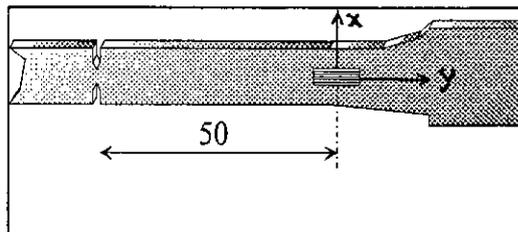
Al (%)	Fe (%)	Si (%)
99.32	0.616	< 0.1

Tableau V. 1 Résultats de l'analyse chimique de l'alliage utilisé

Le matériau est disponible au niveau des ateliers de mécanique à l'E.N.P sous forme de tôles laminées de 1 à 3 mm d'épaisseur.

V.2 TECHNIQUE EXPERIMENTALE ET EXPLOITATION DES RESULTATS

Le montage de l'éprouvette sur la machine étant réalisé, on effectue ensuite la connexion de la jauge de déformation (Fig.V.3) avec le système d'acquisition à l'aide de relais (soudés auparavant sur l'éprouvette).



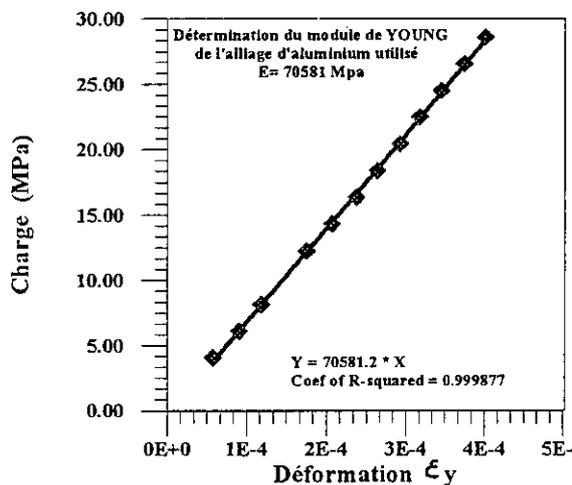
Une fois la charge appliquée, la déformation de la jauge est appréciée sur un amplificateur digital qui permet la conversion du signal électrique.

L'amplificateur utilisé du type K10 de HBM possède une grande sensibilité aux faibles signaux et permet ainsi de suivre l'évolution temporelle de la déformation sur une durée de plusieurs jours.

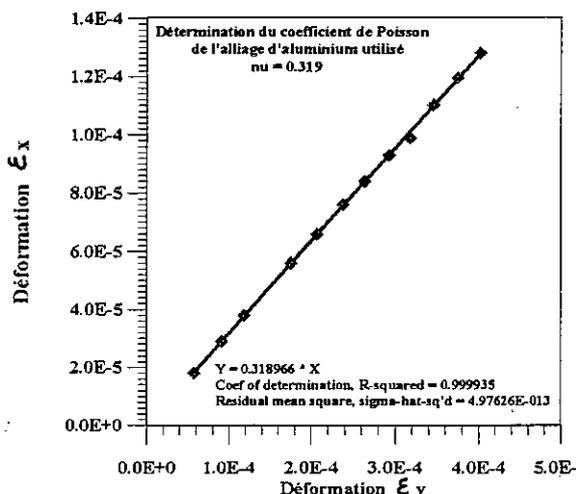
Fig.V 3- Emplacement de la jauge sur l'éprouvette

V.2.1 CARACTERISATION DU MATERIAU

Sur une éprouvette lisse (sans entailles), nous procédons à la fixation de deux jauges extensométriques au milieu de la longueur utile. Les jauges sont disposées de façon à avoir une lecture de ϵ_y et ϵ_x . Un chargement progressif de l'éprouvette est effectué manuellement avec lecture des déformations correspondantes.



Graphe V. 1



Graphe V. 2

L'analyse des résultats obtenus a permis une évaluation du module de Young et du coefficient de Poisson de l'alliage, Graphes V.1 et V.2.

- Module de Young : **E = 70600 MPa**
- Coefficient de Poisson : **ν = 0.32**

V.2.2 IDENTIFICATION

Nous entendons par identification, la détermination des valeurs actuelles des paramètres du modèle considéré en se basant sur des données expérimentales.

Pour le cas du modèle standard, par exemple, et pour un test de fluage avec $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$, la déformation est donnée par la relation I.27:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta_r}} \right) \right\} \cdot H(t) , \quad \theta_r = \eta / E_2 \quad \text{Temps de retardation}$$

La fonction fluage est alors:

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta_r}} \right) \tag{V.1}$$

En prenant $t = 0$, nous déterminons E_1 et pour $t \rightarrow \infty$ nous avons le module asymptotique

$$\frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \quad (V.2)$$

Dans un cas réel, la courbe expérimentale s'étend sur un intervalle de temps $[0, t_r]$ qui n'est pas forcément de l'ordre de grandeur du temps de retardation θ_r .

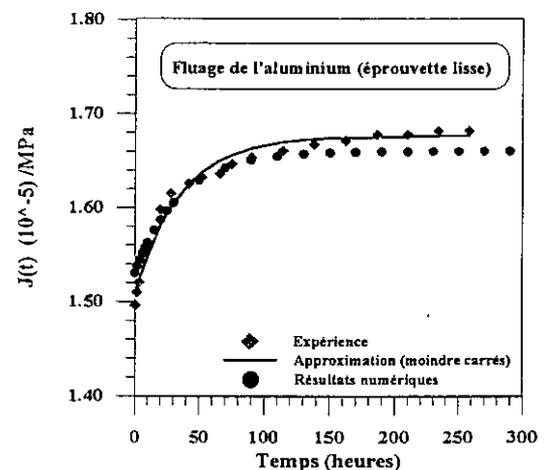
Une fois la courbe expérimentale tracée, nous procédons à un lissage des données moyennant une méthode d'interpolation (dans notre cas la méthode des moindres carrés). Pour une bonne convergence de la méthode choisie, un choix judicieux du temps de retardation est nécessaire. En pratique, il est d'usage de prendre $\frac{t_r}{\theta_r} = 0,5$.

Pour l'identification de notre alliage nous avons effectué un essai de fluage sur une éprouvette lisse. L'essai a porté sur une durée de 250 heures et la courbe obtenue a été lissée par une fonction du type équation V.1 couplée à la méthode des moindres carrés.

Les paramètres rhéologique du modèle à trois paramètres qui ressortent de cet essai sont:

- $E_1 = 66,3 \text{ GPa}$
- $E_2 = 596 \text{ GPa}$
- $\eta = 21200 \text{ GPa. heure}$

Le graphe V.3 montre une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux, l'approximation par moindres carrés et la simulation numérique.



Graphe V. 3

V.2.3 ANALYSE DES COURBES EXPERIMENTALES

Les résultats qui ressortent de notre étude expérimentale sont groupés dans les graphes V.4, V.5 et V.6 pour différentes longueurs de l'entaille. Les courbes présentent une allure correspondant au fluage primaire, lequel est caractérisé par une vitesse de déformation décroissante. Les perturbations présentes dans certains points de mesure sont dues essentiellement aux fluctuations de la température non contrôlée du laboratoire.

Les charges appliquées sont inférieures à 0.5 Re ($R_e \approx 110$ MPa) pour limiter la zone des déformations plastiques au fond de la fissure.

L'analyse des courbes expérimentales montre la présence de trois domaines:

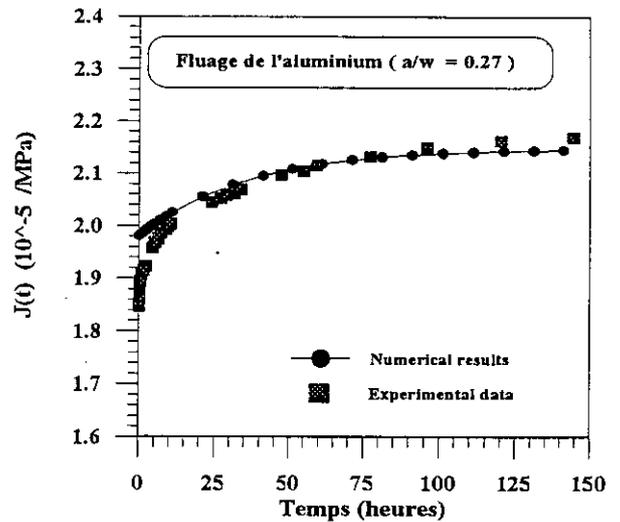
- Le domaine des déformations instantanées caractérisé par un saut de la déformation à l'instant de l'application de la charge suivie d'une zone de faible amortissement qui peut s'étaler sur une durée de 4 à 5 heures.
- Le domaine des déformations lentes, qui s'étend sur plus de 80 % de la durée de l'essai, est caractérisé par une vitesse de déformation décroissante.
- Enfin, le domaine de stabilité représentant l'état de déformation finale dont la pente est pratiquement nulle.

V.2.4 APPLICATION DU CODE DE CALCUL

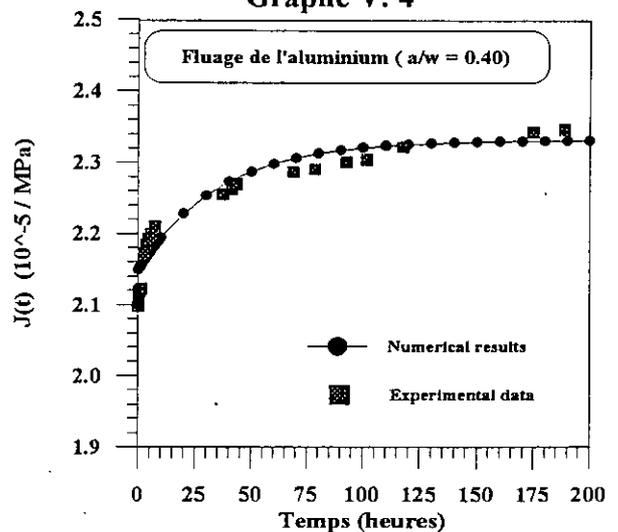
La première approche permettant l'exploitation de ces résultats consiste en l'évaluation de la déformation viscoélastique globale loin de l'entaille. Pour cela, nous avons appliqué le code de calcul à une plaque représentant la longueur utile de l'éprouvette. Les conditions de symétrie permettent le maillage de la moitié de l'éprouvette seulement, avec des conditions aux limites en contraintes (Fig. V.4).

Le contour est discrétisé avec 60 éléments constants, le nombre d'éléments utilisés pour le maillage de la fissure dépend de sa longueur avec une taille de l'élément du bout (élément singulier) inférieure ou égale à 1/10.

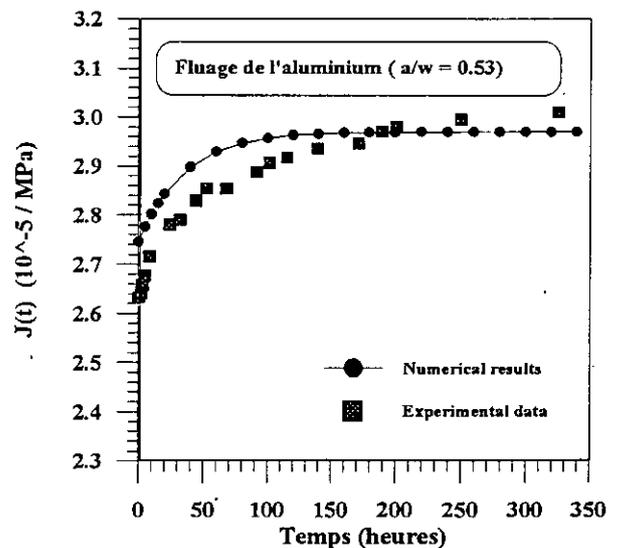
Les courbes numériques obtenues sont superposées aux courbes expérimentales sur les graphes V.3 à V.6.



Graphe V. 4



Graphe V. 5



Graphe V. 6

V.3 INTERPRETATIONS ET COMMENTAIRES

Les graphes V.7, V.8 et V.9 donnent une évaluation numérique des paramètres de la fissuration viscoélastique ($U_y(t)$, $K_1(t)$ et $G(t)$) correspondants à notre exemple expérimental.

Pour le facteur d'intensité de contrainte, et si on néglige la zone plastique confinée en fond de fissure, on peut voir que sa valeur augmente considérablement (90 %) entre l'instant de l'application de la charge et la stabilisation des déformations. Ce résultat est d'une grande importance lorsqu'il est question d'évaluer la durée de vie d'une structure viscoélastique endommagée.

Le graphe V.10 relatif au rapport $G(t)/K_1(t)^2$ montre que ce dernier est pratiquement indépendant de la longueur de l'entaille (a/w) et par conséquent, une corrélation entre $G(t)$ et $K(t)$ peut être donnée et sera considérée comme une caractéristique rhéologique du matériau permettant d'évaluer le temps nécessaire à la propagation.

Pour notre cas, le tableau V.2 donne les résultats de l'approximation des courbes du graphe V.10 par une fonction du type équation IV.11:

$$\frac{G(t)}{K_1^2(t)} = C_1 \cdot t^{-C_2} \quad (V.3)$$

a/w	0.27	0.40	0.53
C ₁	1.3339	1.3281	1.3264
C ₂	0.3082	0.3083	0.3088
r	0.9904	0.9800	0.9792

2- Valeurs des coefficients de la corrélation (V.3)

On constate d'après les valeurs du tableau V.2 que lorsque la taille de la fissure augmente (a/w) l'effet de la zone plastique se manifeste par une dispersion de plus en plus marquée des valeurs expérimentales. Ceci est traduit par une diminution du facteur de corrélation r.

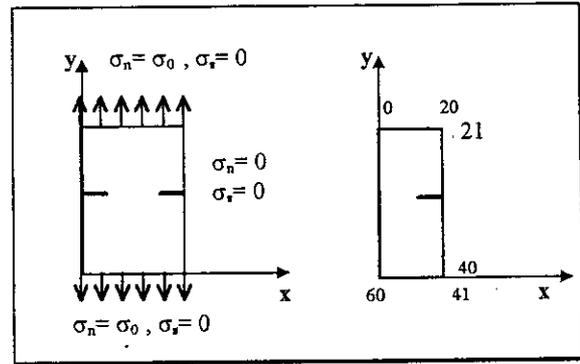
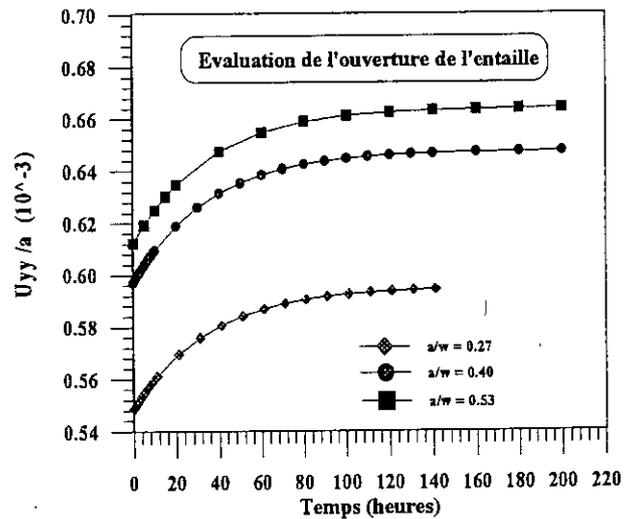
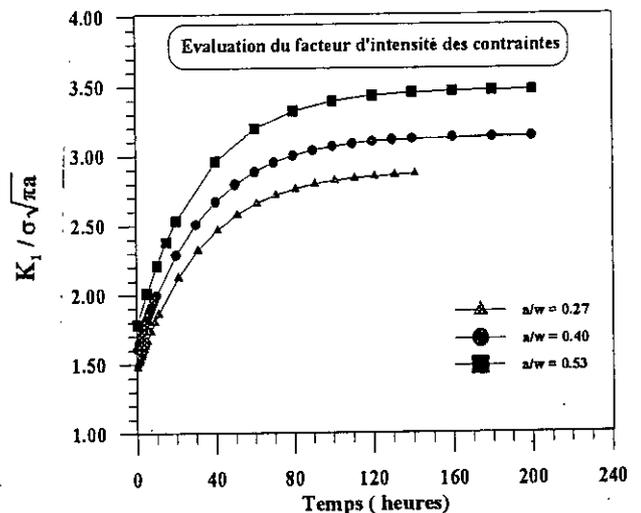


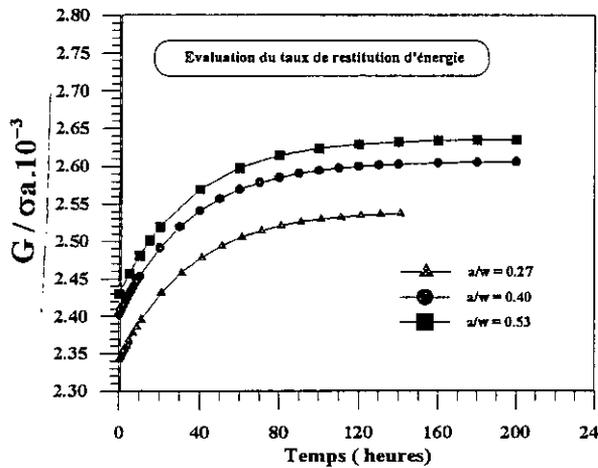
Fig.V 4- Discretisation de l'éprouvette



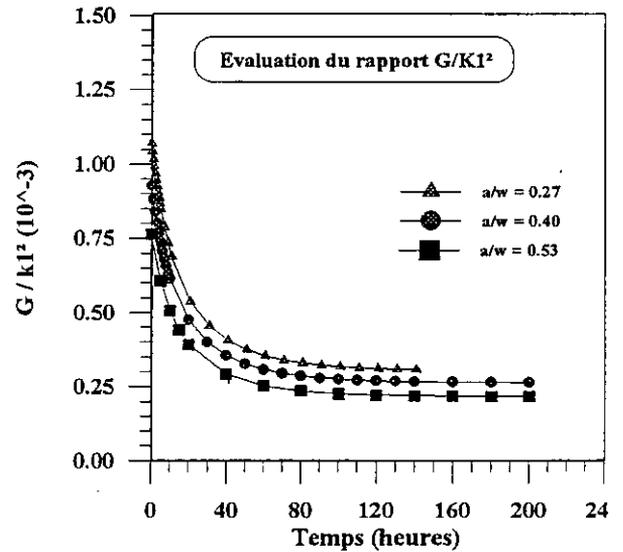
Graphe V. 7



Graphe V. 8



Graphe V. 9



Graphe V.10

CONCLUSION

Dans ce chapitre une approche expérimentale du fluage d'un alliage d'aluminium de la série 1000 a été présentée et les données expérimentales introduites dans le code de calcul pour une évaluation des paramètres de la fissuration: l'ouverture de l'entaille, le facteur d'intensité de contrainte en mode I et le taux de restitution d'énergie.

Les courbes expérimentales présentent une allure correspondant au fluage primaire. Les valeurs du rapport a/w utilisées, comprises dans l'intervalle $[0.2, 0.6]$, ont été choisies de sorte que les perturbations dues à la présence de la zone des déformations plastiques en fond de fissure restent limitée.

La durée des essais s'étend sur un intervalle de temps suffisamment long pour atteindre l'état des déformations différées.

L'utilisation des données expérimentales pour la simulation a permis de mettre en évidence un accroissement de $K_I(t)$ entre l'état initial et l'état final de l'ordre de 90 % ce qui est à prendre en considération pour définir le temps critique de rupture.

CONCLUSION GENERALE

« The worst is ever nearest truth »
Byron , « Lara »

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail constitue une contribution numérique et expérimentale à l'étude des matériaux viscoélastiques fissurés.

La première partie du travail est consacrée à la modélisation du comportement viscoélastique linéaire. Nous avons présenté une formulation intégrale du comportement viscoélastique qui traduit la correspondance entre l'histoire des contraintes et celle des déformations sous les hypothèses de linéarité et de non vieillissement. La résolution des problèmes de viscoélasticité linéaire est faite dans une algèbre de convolution par utilisation de la transformation de Laplace - Carlson. Dans la plus part des cas, le problème élastique correspondant n'a pas de solution analytique. On a alors, recourt aux méthodes numériques.

La mise en oeuvre numérique de la formulation est faite par l'utilisation de la méthode de discontinuité de déplacement, laquelle est très bien adaptée aux milieux fissurés.

Tout d'abord, en élasticité, un élément singulier adapté aux bouts des fissures a été développé analytiquement et testé numériquement sur deux exemples simples. Les résultats obtenus pour l'ouverture de l'entaille, le facteur d'intensité de contrainte en mode I et le taux de restitution d'énergie, font ressortir une meilleure traduction des fortes variations du champ de contraintes en fond d'entaille. Une amélioration notable de la convergence des résultats numériques vers les solutions analytiques pour le nouvel élément par rapport à l'élément simple et l'élément parabolique de Crouch a été montrée.

La méthode de discontinuité de déplacement a été ensuite étendue au comportement viscoélastique linéaire par un processus de linéarisation pas à pas dans le temps.

Les exemples de calcul viscoélastique présentés ont permis une évaluation de l'évolution temporelle des paramètres de la fissuration et une corrélation en fonction puissance est proposée entre le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte viscoélastiques. La fonction proposée dépend des paramètres rhéologiques du modèle utilisé (donc du matériau considéré) et peut permettre une évaluation du temps critique à la propagation.

La deuxième partie du travail est une approche expérimentale qui nous a permis d'étudier le comportement en fluage d'un alliage d'aluminium de la série 1000. Notre choix a porté sur l'aluminium qui est un matériau très répandu dans l'industrie. Il répond à nos hypothèses de base. Ce choix a été guidé dans un souci de pouvoir limiter la durée des essais selon les moyens disponibles au laboratoire, pour faire intervenir le phénomène de fluage et réaliser ainsi la validation du code développé. En premier, des essais préliminaires sur éprouvettes lisses (sans

entailles) ont permis de caractériser notre matériau par détermination du module de Young, le coefficient de Poisson et les trois paramètres rhéologiques du modèle standard E_1 , E_2 et η .

L'expérimentation viscoélastique a porté sur la mesure de la déformation globale loin de l'entaille et ceci pour différentes longueurs de cette dernière. Faute d'avoir des capteurs de déplacement, l'ouverture viscoélastique de l'entaille n'a pu être appréciée.

Les données issues de l'expérimentation ont été ensuite injectées dans le code de calcul ce qui a permis de confronter les valeurs numériques de la déformation globale aux valeurs expérimentales. La superposition des résultats numériques et expérimentaux est très concluente. Le modèle de simulation est donc valide.

Enfin, une évaluation numérique de $K_1(t)$, et $G(t)$ est faite pour les différentes longueurs de l'entaille et nous avons pu constater que:

- Le facteur d'intensité de contrainte initial correspondant à l'instant de l'application de la charge est (pour notre cas) de l'ordre de 50 % de la valeur asymptotique en fin d'essai. Ce résultats est à prendre en considération lorsque l'état du chargement est proche des conditions critiques.
- Une corrélation en fonction puissance est proposée et peut être utilisée pour lier les paramètres $G(t)$ et $K(t)$, laquelle, et pour un matériau donné, pourrait servir à évaluer le temps d'apparition de la propagation qui dépend de l'amplitude $G(0)/K_1^2(0)$.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

BIBLIOGRAPHIE

[AFN74] AFNOR

- Méthode de détermination du facteur d'intensité de contrainte critique des aciers. Norme expérimentale AFNOR NF A 03-180, Fév. 1974, Déc. 74

[AME92] M. AMESTOY, J.B. LEBLOND

- Detailed forms of the expansions of the stress intensity factors- Int. J. Solids Struct., 29, pp. 465-501, 1992

[ASH91] M.F. ASHBY D.R.H. JONES

- Matériaux II, propriétés et applications - Dunod 1991

[AST72] ASTM standards

- ASTM standard method of test for plane strain fracture toughness of metallic materials- Mai. 1972, E399-72

[BAR80] B. BARTHELEMY

- Notions pratiques de la mécanique de la rupture - Ed. Eyrolles 1980

[BAT80] C. BATHIAS, J.P. BAILON

- La fatigue des matériaux et des structures - Presse de l'univ. de Montreal, 1980

[BAT90] J.L. BATOZ, G. DHATT

- Modélisation des structures par éléments finis - Hermès, Paris, 1990

[BEN91] Z. BENRABAH, A. ZEGNOUNE

- Modélisation de la rupture des matériaux viscoélastiques par la méthode de discontinuité de déplacement - P.F.E, E.N.P, Juin 94

[BON94] M. BONNET

- Equations intégrales et éléments de frontière en mécanique des solides - Cours de l'école Polytechnique de France, 1994

[BUI78] H.D. BUI

- Mécanique de la rupture fragile - Ed. Masson, 1978

[CIV82] M.B. CIVELEC, F. ERDOGAN

- Crack problems for a rectangular sheet and an infinite strip- Int. J. Fract. 19, pp. 139-159, 1982

[CRA83] A.M. CRAWFORD, J.H. CURRAN

- A displacement discontinuity approach to modelling the creep behaviour of rock and its discontinuities- Int. J. Num. Meth. in Eng., pp. 245-267, 1983

[CRE86] G.J. CREUS

- Viscoelasticity. Basic theory and applications to concrete structures - Ed. C.A. BREBBIA and S.A. ORSZAG, 1986

[CRO83] S.L. CROUCH, A.M. STARFIELD

- Boundary element in solid mechanics- G. ALLEN & ANWIN edition 1983

[CRU69] T.A. CRUSE

- Numerical solutions in three dimensional elastostatics - Int. J. Solids Struct., 5, pp. 1259-1274, 1969

[DAV82] R. DAVIS

- Testing of engineering materials - Internat. stud. ed. 1982

[ERD63] F. ERDOGAN, G. SIH

- On the crack extension under plane loading and transverse shear - Jo. Bas. Eng., pp. 519-527, 1963

[FLU75] G. FLUGGE

- Viscoelasticity - Springer Verlag 1975

[FRA96] D. FRANCOIS

- Essais mécaniques des métaux - Technique de l'ingénieur M120, M126 et M127, Février 1996

- [FRI67] J. FRIDEL
- Dislocations - Ed. Pergamon, 1967
- [GRI20] A.A. GRIFFITH
- The phenomena of rupture and flow in solids - Phil. Trans. of Roy. Soc., London, Vol.221, pp. 163-199, 1920
- [IRW87] G.R. IRWIN
- Fracture mechanics - Metal Handbook volume 8, pp. 439-464, ed. 1987
- [KUP63] V.D. KUPRADZE
- Dynamical problems in elasticity- Progress in solids mechanics, vol. III, North Holland 1963
- [KUP79] V.D. KUPRADZE (Editor)
- Three dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity- North Holland, 1979
- [LAB80] R. LABBENS
- Introduction à la mécanique de la rupture - ed. Pularis 1980
- [LEM76] J. LEMAITRE
- Extension de la notion de taux d'énergie de fissuration aux problèmes tridimensionnels et non linéaires- C. R. Acad. Sc. Paris, t.282, B157, 1976
- [LEM85] J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE
- Mécanique des matériaux solides - ed. Dunod 1985
- [LIE68] H. LIEBOWITZ
- Fracture II, Mathematical fundamentals. Academic Press, 1968
- [LIE71] H. LIEBOWITZ, J. EFTIS
- On non linear effect in fracture mechanics - Eng. Fract. Mech., pp. 267-281, 1971
- [LIN88] K. Y. LIN, I. H. HWANG
- Thermo-viscoelastic response of Graphite / Epoxy composites- Jo. Eng. Mat. Tech., APR 1988
- [NOW85] W. NOWACKI
- Théorie du fluage - éd. Eyrolles 1985
- [PLU89] G. PLUVINAGE
- Mécanique élastoplastique de la rupture (Critères d'amorçage) - Ed. Cépadues, 1989
- [PLU92] G. PLUVINAGE
- La rupture du bois et de ses composites - éd. Cépadues 1992
- [POR92] A. PORTELA, M.H. ALIABADI, D.B. ROOKE
- Dual boundary element incremental analysis of crack propagation, Comp. Mech. Pup, ELSEVIER 1992
- [RIC68] J. R. RICE
- Mathematical analysis in the mechanic of fracture - In fracture, an advanced treatise. Vol.II, Acad. Press., NewYork, pp.191-311, 1968
- [RIZ67] F.J. RIZZO
- An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics- Quart. Appl. Math., 25, pp. 83-95, 1967
- [SAH95] M. SAHNOUN
- Description de chemin de propagation droite et circulaire par la méthode de discontinuité de déplacement en champ complexe - Thèse de Magister, E.N.P, Juillet 1995
- [SAL87] J. SALENCON
- Viscoélasticité - éd. école polytechnique, France 1987
- [SCH75] R.A. SCHAPERY
- A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media - Inter. Jo. Fract. pp. 141-155, 369-388, 549-562, 1975
- [SHA82] C. ZHANG
- Crack tip fields for idealized linear viscoelastic bodies - Science exploration Vol. 2, N° 3 pp. 91-105, 1982

[SIH72] G. SIH

- Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems - Int. Fract. T. R. Lehigh Univ. 1972

[WAL87] J.R. WALTON

- The dynamic energy release rate for a steadily propagating antiplane shear crack in a linearly viscoelastic body- J. App. Mech., Vol. 54, pp. 635-641, SEP 1987

[WAR91] M.K. WARBY, J.R. WALTON, J. WHITEMAN

- Numerical modelling of mode I linear viscoelastic fracture- Transaction of the conference of applied mathematics and computing (9th) Held in Minneapolis, Minnesota on June 1991

[WEB86] G.A. WEBSTER, D.J. SMITH, K.M. NIKBIN

- An engineering approach to the prediction of creep crack growth- J. E. M. T., Vol. 108, pp. 186-191, APR 86

[WHI87] J.D. WHITTENBERGER

- Creep and stress rupture testing - Metal Handbook vol. 11, pp. 308-328, ed. 1987

[ZAO91] A. ZAOUI, D. FRANCOIS

- Comportement mécanique des matériaux - ed. Hermès 1991

[ZHA84] Z.D. ZHANG, S.S. CHERN, C.C. HZIAO

- Propagation of crazing in viscoelastic media - Univ. of Minnesota, Minneapolis (NASA-CR-173244) 1991