

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

«★»

Ministère de l'Enseignement Supérieur

»O«

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

»O«

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

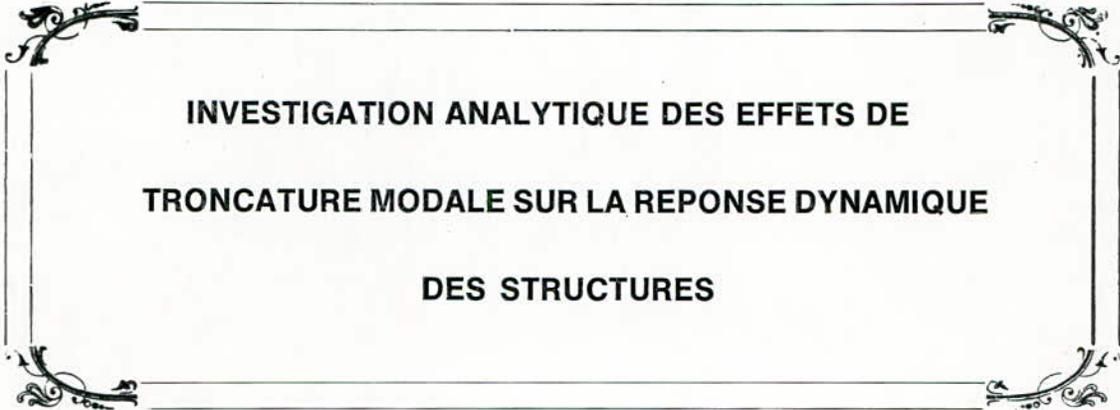
LABORATOIRE INTERACTION SOL - STRUCTURES

»O«

THESE DE MAGISTER

Présentée par : **A. TAIBI**

en Février 1990



**INVESTIGATION ANALYTIQUE DES EFFETS DE
TRONCATURE MODALE SUR LA REPONSE DYNAMIQUE
DES STRUCTURES**

Membres du jury :

A. CHARIF	Professeur	Président
S. BELKACEMI	Maître de Conférence	Examineur
M. BERRAH	Maître de Conférence	Examineur
M. DEMIDEM	Chargé de Cours	Examineur
B. TILIOUINE	Professeur titulaire	Rapporteur
M. BELAZOUGUI	Directeur du C.G.S.	Invité

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

« ★ »

Ministère de l'Enseignement Supérieur

»O«

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

»O«

**DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL
LABORATOIRE INTERACTION SOL - STRUCTURES**

»O«

THESE DE MAGISTER

Présentée par : **A. TAIBI**

en Février 1990

**INVESTIGATION ANALYTIQUE DES EFFETS DE
TRONCATURE MODALE SUR LA REPONSE DYNAMIQUE
DES STRUCTURES**

Membres du jury :

A. CHARIF	Professeur	Président
S. BELKACEMI	Maître de Conférence	Examineur
M. BERRAH	Maître de Conférence	Examineur
M. DEMIDEM	Chargé de Cours	Examineur
B. TILIOUINE	Professeur titulaire	Rapporteur
M. BELAZOUGUI	Directeur du C.G.S.	Invité

DEDICACES

A mes parents

A mes frères

A mes soeurs et ma belle soeur

A toute ma famille

En témoignage de mon affection.

REMERCIEMENTS

A l'occasion de la présentation de cette thèse, il m'est particulièrement agréable d'exprimer à Monsieur le professeur B. TILIOUINE, mon directeur de recherche, ma profonde gratitude pour la sollicitude avec laquelle il m'a guidé, pour les conseils efficaces et les encouragements qu'il m'a prodigués tout le long de ce travail, pour son dévouement et son sérieux, tout en soulignant la grande compétence dont il a fait preuve durant toute cette étude.

J'adresse l'expression de ma profonde gratitude à Messieurs BERRAH, Maître de conférence et DEMIDEM, Chargé de cours, membres du comité de lecture et du jury pour avoir examiné avec toute l'attention voulue ce travail.

J'exprime mes plus vifs remerciements à Monsieur CHARIF, Professeur à l'E.N.P. qui m'a fait l'honneur de présider ce jury de thèse et à Monsieur BELKACEMI, Maître de conférence, pour avoir bien voulu faire partie du jury.

Je suis heureux d'exprimer ma gratitude à Monsieur BELLAZOUGUI, Directeur du C.G.S. pour avoir accepté l'invitation.

Il est une personne que je tiens tout particulièrement à remercier, une personne sans qui cette thèse ne serait pas présentée sous la forme qu'elle a aujourd'hui: Monsieur SAIS, Post-graduant à l'E.N.P. qui a su m'apporter son aide et me donner des conseils pour la présentation de cette thèse.

Je remercie également mes amis et toute l'équipe du centre de calcul pour m'avoir aidé et participé à la mise à jour de ce travail.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué de quelque manière que ce soit à la réalisation de cette recherche.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE PREMIER : INTRODUCTION	1
I.1 - POSITION DU PROBLEME	1
I.2 - BUT DE LA RECHERCHE	3
I.3 - METHODOLOGIE SUIVIE	3
I.4 - MODELISATION ET ANALYSE	5
I.4.1. - Hypothèses de modélisation	5
I.4.2. - Méthode d'analyse	6
CHAPITRE DEUXIEME : ETUDE ET ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE	7
II.1 - TRAVAUX DE N. R. MADDOX	7
II.2 - TRAVAUX DE J. H. VUGTS, I. M. HINES, R. NATARAJA ET W. SCHUMM	10
II.3 - TRAVAUX DE A. J. SALAMONTE	12
II.4 - TRAVAUX DE E. L. WILSON, M. W. YUAN ET J. M. DICKENS	13
II.5 - TRAVAUX DE R. E. CORNWELL, P. R. CRAIG, J. R. AND C. P. JOHNSON	15
II.6 - TRAVAUX DE K. BARGI	16
II.7 - CONCLUSION	16

CHAPITRE TROISIEME : PROBLEME AUX FREQUENCES ET MODES 18
PROPRES DE VIBRATION

III.1 - INTRODUCTION	18
III.2 - FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENTS	21
III.2.1 - Méthode des raideurs	21
III.2.2 - Méthode des déformabilités	23
III.2.3 - Remarque	24
III.3 - REDUCTION DE GUYAN	25
III.3.1 - Principe de la méthode	26
III.3.2 - Justification de la méthode	27
III.3.3 - Conclusion	29
III.4 - RECHERCHE D'UNE FREQUENCE ET DU MODE ASSOCIE	29
III.5 - RECHERCHE SUCCESSIVE DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES	32
III.6 - PASSAGE A LA FORME CLASSIQUE DU PROBLEME AUX VALEURS PROPRES	33
III.6.1 - Matrice dynamique non symétrique	34
III.6.2 - Matrice dynamique symétrique	35
III.6.2.1 Décomposition de CHÓLESKY de [M]	35
III.6.2.2 Décomposition de CHOLESKY de [K]	36
III.6.3 - Matrice de raideur symétrique	37
III.6.4 - Remarques générales sur le passage à la forme classique	37

QUATRIEME : METHODES D'ANALYSE DE LA REPONSE	42
DYNAMIQUE DES STRUCTURES	
DOMAINE FREQUENTIEL	42
DOMAINE TEMPOREL	43
2.1 - Méthode d'intégration directe	43
2.2 - Méthode des déplacement modaux (M.D.M.)	44
IV.2.2.1 - Equation d'équilibre dynamique	45
IV.2.2.2 - Amortissement dans les systèmes à plusieurs d.d.l.	47
IV.2.2.2.1 - Conditions pour l'orthogonalité des modes	48
IV.2.2.2.1.1 - Méthode basée sur l'extension de la série de CAUGHEY	48
IV.2.2.2.1.2 - Evaluation directe de la matrice d'amortissement	50
2.3 - Méthode des accélérations modales (M.A.M.)	52
DIFFICULTES RELATIVES A L'APPLICATION DE CES METHODES AUX PROBLEMES D'ORDRE ELEVE	53

VI.5.2 - Chargement triangulaire périodique " B "	79
VI.5.3 - Chargement triangulaire périodique " C "	80
VI.5.4 - Composante horizontale N-S de l'accélérogramme du séisme de Constantine	83
CHAPITRE SEPTIEME : APPLICATIONS NUMERIQUES	86
VII.1 - LOGICIEL DE CALCUL DYNAMIQUE DES STRUCTURES	86
VII.1.1 - Introduction	86
VII.1.2 - Description du logiciel	88
VII.2 - EXEMPLES NUMERIQUES	92
VII.2.1 - Structure étudiée	92
VII.2.2 - Chargements	93
CHAPITRE HUITIEME : CONCLUSIONS GENERALES	95
VIII.1 - PROBLEMATIQUE ET OBJECTIFS	95
VIII.2 - METHODOLOGIE ADOPTEE	97
VIII.3 - PRINCIPAUX RESULTATS	100
VIII.4 - RECOMMANDATIONS ET PERSPECTIVES	102
REFERENCES	105
ANNEXE	

INTRODUCTION

Les principes de l'algèbre

Les principes de l'algèbre sont les mêmes que ceux de l'arithmétique, mais ils sont plus généraux. On considère des lettres au lieu de chiffres, et on étudie les propriétés des opérations sur ces lettres. Les principes de l'algèbre sont les mêmes que ceux de l'arithmétique, mais ils sont plus généraux. On considère des lettres au lieu de chiffres, et on étudie les propriétés des opérations sur ces lettres.

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I.1 - POSITION DU PROBLEME

Il existe deux stratégies fondamentales, pour calculer la réponse temporelle d'une structure soumise à l'action d'un chargement dynamique donné : la méthode d'intégration directe qui traite le problème dans ses coordonnées physiques spatio-temporelles [1], [2], [3], et l'analyse modale basée sur une transformation des coordonnées physiques en coordonnées généralisées [1], [4], [5], [6], [7], [8], [9].

La stratégie de résolution la plus utilisée en pratique est, sans doute la méthode de superposition modale. Elle est reconnue comme étant une procédure de résolution puissante, pour évaluer la réponse des structures linéaires à amortissement visqueux proportionnel.

Deux versions sont utilisables :

- La méthode des déplacements modaux traditionnelle (M.D.M.) [1], [6], [8], [9], dans laquelle les déplacements généralisés sont évalués d'abord puis combinés pour trouver les déplacements nodaux.

-La méthode des accélérations modales (M.A.M.) [10], consistant en une solution pseudo-statique complétée par une correction dynamique obtenue par combinaison adéquate des accélérations et vitesses généralisées.

En raison du coût de calcul sur ordinateur élevé de la M.A.M., la M.D.M. est plus utilisée.

La M.D.M. constitue une technique élégante dans son fondement théorique et très utile de part l'étendue de son vaste champ d'applications à divers secteurs de l'industrie, notamment au domaine de la construction des centrales nucléaires, pour lesquelles les analyses sismiques des structures et autres installations y afférentes représentent un impératif de sécurité incontournable [11].

Son utilisation intensive réside essentiellement dans le fait que seul un nombre réduit de modes est généralement suffisant pour une évaluation adéquate de la réponse. Néanmoins, cette procédure n'est malheureusement réalisable qu'au prix de certaines approximations de calcul vis à vis de la solution du problème initial.

Son application systématique, quoique permettant une prédiction des déplacements avec une précision acceptable, conduit souvent à des efforts internes (dont l'évaluation constitue souvent l'objet primordial du projet) très éloignés des sollicitations

dynamiques exactes [10], [12], [13], [14], [15], [16].

I.2 - BUT DE LA RECHERCHE.

Dans cette présente recherche, le but qu'on s'est assigné est d'examiner les effets implicites de troncature modale sur les déplacements dynamiques et les efforts internes induits d'une part, et de suggérer une procédure d'amélioration du taux de convergence de la réponse dynamique des structures d'autre part.

A cet effet, un logiciel de calcul de la réponse dynamique des bâtiments intégrant les hypothèses de planchers déformables et indéformables, ainsi que l'ensemble des étapes inhérentes au modèle numérique proposé a été développé.

I.3 - METHODOLOGIE SUIVIE

La formulation du modèle numérique proposé réside essentiellement dans l'idée simple d'associer une procédure de réduction des équations d'équilibre dynamique, avec une technique de résolution du système matriciel résultant, en base modale tronquée modifiée par une correction numérique des effets des modes supérieurs négligés.

Les premiers modes propres de vibration sont déterminés par une

technique de déflation matricielle conjuguée à une méthode d'itération inverse de vecteurs avec décalage spectral.

A l'encontre du critère habituel de détermination du nombre de modes utiles, la présente formulation présente l'avantage d'utiliser un critère de sélection en rapport direct avec la fréquence du chargement.

Contrairement à la M.A.M. classique, la correction intégrée dans le modèle numérique ne nécessite pas la détermination explicite et instantanée des vitesses et accélérations généralisées et n'engendre pas ainsi, un important coût de calcul sur ordinateur.

Afin d'illustrer l'utilité du logiciel développé et la précision du modèle numérique suggéré, une analyse dynamique détaillée d'une structure multi-étagée contreventée par portiques autostables [17] est effectuée, et une comparaison systématique entre les résultats déduits de la M.D.M. avec ceux obtenus par application directe du modèle numérique est établie.

Les effets de 4 types de chargements sont considérés successivement : un chargement constant, deux chargements triangulaires périodiques de fréquences différentes et un chargement sismique résultant de l'action de la composante horizontale N-S de l'accélérogramme de Constantine du 27 Octobre 1985.

I.4 - MODELISATION ET ANALYSE

I.4.1 - Hypothèses de modélisation

Dans les hypothèses de calcul, il y a lieu de distinguer :

- Les hypothèses propres à la structure :

a) Les structures étudiées peuvent être symétriques du point de vue raideur et masse, ou peuvent ne pas présenter de dissymétries excessives.

b) Les planchers peuvent être indéformables ou déformables dans leur plan.

c) La masse de la structure peut être évaluée par deux méthodes:

. Une méthode qui consiste à concentrer les masses aux noeuds ou aux planchers. Dans ce cas, seuls les degrés de liberté (d.d.l.) de translation sont pris en compte.

. Une méthode dite "Cohérente" prenant en compte les d.d.l. de translation et de rotation.

d) Le matériau est continu, homogène, isotrope et élastique

e) Le comportement des éléments structuraux et de la structure dans son ensemble est élastique linéaire.

f) L'amortissement est du type visqueux proportionnel.

- L'hypothèse sur l'ensemble "sol-structure" :

On admet que la base de la structure suit rigoureusement les déplacements du sol.

I.4.2 - Méthode d'analyse

Compte tenu des hypothèses précédentes et vu que la structure est supposée soumise à une vibration forcée, limitée à un seul plan; on modélisera la structure par une console dont les masses sont concentrées au niveau des planchers, si on admet l'hypothèse des planchers indéformables, et par des portiques ayant un nombre fini de d.d.l., étudiés séparément, si on admet l'hypothèse des planchers déformables.

La formulation mathématique du mouvement basée sur la méthode matricielle conduit à un système d'équations différentielles linéaires du second ordre non homogènes et couplées. Ces équations seront résolues par les méthodes appropriées d'intégration numérique.

**CHAPITRE
DEUXIEME**

ETUDE ET
ANALYSE
BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE II

ETUDE ET ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

Pour mieux comprendre les problèmes posés par la troncature modale, notamment leurs effets sur la réponse dynamique de structures soumises aux actions dynamiques, il est utile de consulter les documents relatifs à ce domaine.

Ceci permet aussi, de constituer une méthodologie appropriée pour aborder rationnellement le problème et d'aboutir aux résultats les plus intéressants possibles.

La littérature spécialisée consacrée au problème qu'on vient d'évoquer n'est pas abondante. Ceci s'explique par le fait que sa mise en évidence est relativement récente (1975).

Il importe de remarquer que les efforts de recherches ont été orientés principalement aux structures relevant du domaine de l'offshore.

II.1 - TRAVAUX DE N.R. MADDOX

L'observation des effets de troncature modale constitue un

fait relativement récent. La première mise en évidence des effets de troncature remonte à la dernière décennie et revient à MADDIX (12), qui au service de la compagnie pétrolière américaine EXXON, entreprend dès l'année 1975 une étude du comportement dynamique d'une plate-forme offshore soumise à l'action de la houle.

Il montre que la superposition d'un nombre réduit de modes de vibration conduit à des déplacements acceptables mais à des efforts internes erronés.

MADDIX propose alors, une procédure qu'on rappelle ci-après, permettant de corriger la réponse tronquée et d'obtenir ainsi de bonnes prédictions, aussi bien pour les déplacements que pour les charges dynamiques.

Après avoir transformé les équations du mouvement constituant un système de N équations différentielles couplées, en un système de N équations indépendantes rapportées aux coordonnées principales :

$$\ddot{y}_i(t) + 2\gamma_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \Gamma_i(t) \quad (i=1, \dots, N) \quad (2-1)$$

où N est le nombre total de d.d.l. de la structure et $y_i(t)$, γ_i , ω_i , et $\Gamma_i(t)$ sont respectivement : la coordonnée principale, le facteur d'amortissement, la fréquence propre et la force généralisée correspondants au mode i.

Il évalue la réponse dynamique, en calculant séparément les

réponses de chaque mode par résolution des équations (2-1) par la méthode "béta de NEWMARK", et en les assemblant pour obtenir la réponse dans les coordonnées physiques.

les composantes du vecteur représentant les différences entre les forces dynamiques exactes (superposition de tous les modes) et approchées (superposition de r modes, $r < N$) sont très différentes de zéro.

Ceci provient du fait qu'aux petites différences de déplacements correspondent de grandes différences de forces.

Pour tenir compte des modes supérieurs négligés dans la M.D.M., MADDOX écrit, en accord avec le principe de d'ALEMBERT, le système d'équations suivant :

$$y_i(t) = \Gamma_i(t) / \omega_i^2 \quad (i=r+1, \dots, N) \quad (2-2)$$

où r est le nombre de modes correspondant aux forces d'inertie significatives.

En effet, pour les (N-r) modes négligés, les forces d'inertie ne sont pas importantes d'une part, et le système est supposé faiblement amorti d'autre part.

L'applicabilité et l'utilité de la méthode proposée sont illustrées par l'étude d'une structure offshore de 42 d.d.l. modélisée par une poutre console dont les masses sont concentrées en 14 points ; chaque point du modèle est caractérisé

par 3 d.d.l : deux de ~~translation~~ et un ~~de~~ rotation.

Pour comparer la réponse obtenue par chaque méthode avec la réponse exacte, MADDOX calcule, pour un temps arbitraire, les ratios entre la valeur de chaque variable évaluée par la méthode considérée et la valeur exacte.

L'analyse des résultats montre que les forces calculées par la méthode tronquée (superposition de 5 modes) sont erronées, par contre celles calculées par la méthode proposée sont obtenues avec une bonne précision.

Bien que la procédure proposée permette de prédire les forces dynamiques avec une bonne précision, elle présente les inconvénients majeurs de devoir d'une part, procéder à la détermination préalable de la totalité des fréquences et modes propres de vibration, et d'autre part, de fixer, à priori de manière subjective, le nombre de composantes modales associées aux forces d'inertie importantes.

II.2 - TRAVAUX DE J.H. VUGTS, I.M. HINES, R. NATARAJA et W. SCHUMM

En 1979, VUGTS, HINES, NATARAJA et SCHUMM [13] présentent lors de la seconde conférence internationale sur le comportement

des structures offshores, tenue au collège impérial de Londres, une étude approfondie du comportement dynamique d'une plate forme pétrolière d'environ 1500 d.d.l. soumise à l'action de la houle.

Tous les calculs sont réalisés dans le domaine fréquentiel en utilisant le logiciel de l'analyse dynamique NASTRAN.

Trois méthodes de calcul sont employées :

- a) résolution directe
- b) M.D.M. traditionnelle
- c) M.A.M. classique

La comparaison de la solution obtenue par une résolution directe des équations du mouvement avec celle déduite de la simple analyse modale, a permis aux auteurs de conclure que cette dernière pouvait conduire à des erreurs substantielles relativement aux efforts dynamiques induits dans plusieurs éléments de la structure, et ce malgré l'inclusion des 50 premiers modes propres de vibration.

L'augmentation du nombre de modes n'améliore pas significativement la précision de calcul de la réponse, à moins que tous les modes ou la plupart soient inclus dans la solution. Pour les structures pouvant atteindre un nombre élevé de d.d.l., une telle approche est non seulement en contradiction avec la justification fondamentale relative à l'application de la

superposition modale, à savoir qu'un nombre réduit de modes est suffisant pour représenter correctement le comportement dynamique de la structure, mais aussi impraticable sur le plan numérique.

Par ailleurs, la méthode des accélérations modales avec seulement 10 modes, améliore substantiellement la précision de calcul des efforts internes. Cette amélioration considérable de la réponse illustre que la réponse statique des modes supérieurs non retenus dans l'analyse modale traditionnelle (M.D.M.), a des effets importants sur les efforts internes de la structure .

II.3 - TRAVAUX DE A.J. SALAMONTE

En 1982, SALAMONTE [16] suggère une technique simple appelée "the residual mode method " pour représenter, sous certaines conditions, les effets de troncature des modes supérieurs.

L'applicabilité de la méthode est étudiée dans le contexte de l'analyse par spectre de réponse qui permet généralement de prédire les sollicitations avec une bonne précision sous réserve toutefois, de ne pas omettre des modes significatifs.

Deux structures de cinq niveaux chacune ont fait l'objet de son analyse. La comparaison des résultats obtenus par application successive de :

- la méthode de la superposition modale sans troncature (réponse exacte)
- la méthode de la superposition modale avec troncature
- la méthode proposée basée sur le facteur de participation modale

montre clairement que cette dernière conduit à des résultats plus précis que la simple superposition de quelques modes.

II.4 - TRAVAUX DE E.L. WILSON, M.W. YUAN ET J.M. DICKENS

Partant de l'idée, qu'il n'a pas encore été prouvé que l'utilisation des vecteurs propres exacts dans l'analyse par la méthode de la superposition modale est meilleure que l'utilisation d'un autre système de vecteurs orthogonaux, WILSON, YUAN et DICKENS [4] proposent une alternative très intéressante de la M.D.M.

En effet, ils suggèrent dans leur papier publié en 1982, d'employer les vecteurs de RITZ à la place des vecteurs modaux.

L'emploi de ces vecteurs orthogonaux de RITZ générés par un algorithme basé sur une minimisation d'erreur, présente les avantages suivants :

- réduction de la taille du système

- obtention d'une bonne précision de la réponse avec un nombre réduit de vecteurs comparativement au nombre de composantes modales de la M.D.M.

- inclusion automatique de la correction statique relative aux modes supérieurs non retenus dans la résolution.

- réduction du coût de calcul sur ordinateur.

Il importe de noter que seuls les vecteurs de RITZ associés à des facteurs de participation importants sont retenus.

Par ailleurs, lorsque la structure est soumise à l'action d'un chargement sismique, seuls les modes correspondants à la partie basse fréquence du spectre de la structure (généralement moins de 50) contribuent à la réponse dynamique.

Dans ce cas, il est recommandé d'utiliser dans l'analyse dynamique les valeurs et vecteurs propres exacts, puisque l'effort numérique développé dans cette procédure est inférieur à celui qui résulterait de l'utilisation des vecteurs de RITZ.

En outre, à l'opposé des valeurs et vecteurs propres exacts, ceux de RITZ ne permettent pas la compréhension du comportement dynamique général de la structure.

II.5 - TRAVAUX DE R.E. CORNWELL, R.R. CRAIG, J.R. ET C.P. JOHNSON

En 1983, CORNWELL, CRAIG et JOHNSON [10] résument les résultats d'une étude systématique comparant la précision de la méthode des déplacements modaux et la méthode des accélérations modales classique appliquées à une structure simple.

Les auteurs se sont intéressés à l'étude comparative des effets d'amortissement et fréquences du chargement extérieur sur la précision de la réponse relative à la M.D.M. et la M.A.M.. A cet effet une poutre console avec trois valeurs d'amortissement (0%, 5% et 10%) soumise à une excitation constante est considérée, pour mettre en évidence les effets du premier paramètre. La même structure est soumise ensuite à une excitation sinusoïdale, et ce pour examiner l'influence du deuxième paramètre sur la réponse dynamique.

Les résultats les plus importants découlant de l'étude sont les suivants :

- La méthode des accélérations modales surclasse la méthode des déplacements modaux.
- La M.A.M. répond favorablement à l'amortissement structural; le taux de convergence de la M.A.M. augmente lorsque l'amortissement augmente.

Ils concluent alors que tout ce qui tend à rendre le comportement de la structure "statique" favorise l'utilisation de la M.A.M.

- Pour représenter convenablement la réponse, la M.D.M. nécessite un nombre élevé de modes; ceci permet d'inclure la réponse statique du système.

II.6 - TRAVAUX DE K. BARGI

En 1985, BARGI [14], présente les résultats de l'analyse dynamique d'une structure bidimensionnelle de 126 d.d.l., caractérisée par 109 barres tubulaires et une hauteur de 80 m, sous l'action de forces hydrodynamiques.

Il conclut notamment, que la méthode classique de sous-structuration diminue nettement le temps de calcul, mais (compte tenu de la troncature modale dans chaque sous-structure ainsi que dans la structure assemblée) ne conduit pas, en général, à une précision suffisante sur les efforts internes.

II.7 - CONCLUSION

D'une façon générale, les travaux de recherches cités dans ce paragraphe font ressortir que l'utilisation de la M.D.M.

traditionnelle est inefficace pour une prédiction précise des efforts internes.

Aussi, plusieurs méthodes dont la M.A.M. classique ont été proposées, pour tenir compte de la contribution des modes supérieurs (non retenus dans la résolution) à la réponse dynamique.

Par ailleurs, bien que le nombre de composantes modales à retenir dans la résolution constitue sans doute le paramètre le plus influant sur la précision de calcul, aucun critère n'a été proposé pour sa détermination.

On constate également que ces études ne montrent pas la variation du taux d'erreur dans le temps.

CHAPITRE TROISIEME

**PROBLEME AUX
FREQUENCES ET
MODES PROPRES
DE VIBRATION**

CHAPITRE III

PROBLEME AUX FREQUENCES ET MODES PROPRES DE VIBRATION

III.1 - INTRODUCTION

La connaissance des fréquences et modes propres de vibration est essentielle pour l'évaluation, par la méthode de superposition modale, de la réponse dynamique des structures soumises à des excitations extérieures, telles que les actions sismiques dans le cas des constructions de génie civil.

Elle constitue une phase de calcul difficile et qui nécessite généralement le plus de temps de calcul. Aussi trouve-t-on aujourd'hui dans la littérature spécialisée [3], [18], [19], de nombreux algorithmes permettant de résoudre les problèmes aux valeurs et vecteurs propres.

D'une façon générale, ces méthodes peuvent être subdivisées en 4 groupes [3] :

- Les méthodes d'itération vectorielle
- Les méthodes de transformation
- Les méthodes d'itération polynomiale
- Les méthodes employant les propriétés des suites de STURM des polynômes caractéristiques.

En plus de ces méthodes, on peut citer celles utilisant une combinaison de ces techniques fondamentales conduisant à des méthodes de résolution plus efficaces et plus performantes.

Il importe de remarquer que toutes les méthodes disponibles sont de nature itérative. Cela tient au fait que la résolution des problèmes aux valeurs et vecteurs propres, est équivalent au calcul des racines du polynôme caractéristique dont l'ordre est égal à celui de $[M]$ et de $[K]$, respectivement matrices de masse et de raideur de la structure.

Comme il n'existe pas dans le cas général, des formules explicites pour le calcul des racines d'un polynôme d'ordre supérieur à 4, on fait recours à des méthodes itératives.

Par ailleurs, il n'existe pas un algorithme unique pouvant être utilisé efficacement à la résolution de tous les problèmes aux valeurs propres; un algorithme adéquat à la résolution d'un problème donné peut être totalement inadéquat à la résolution d'un autre.

Le choix d'une méthode dépend non seulement de la puissance de l'ordinateur utilisé, mais aussi des caractéristiques (taille et largeur de la bande) de $[K]$ et de $[M]$ d'une part et du nombre de valeurs et vecteurs propres requis d'autre part .

Les caractéristiques des matrices $[K]$ et $[M]$ sont directement liées à la modélisation de la structure. En effet, pour étudier

par exemple, les effets dynamiques de l'action d'une composante horizontale d'un séisme donné sur les bâtiments contreventés par portiques autostables, ces derniers s'ils sont symétriques ou ne présentant pas de dissymétries excessives, sont généralement modélisés par des consoles dont les masses sont concentrées au niveau des planchers.

Les matrices $[K]$ et $[M]$ résultant de ce modèle simplifié, sont respectivement tridiagonale et diagonale, et sont de taille très réduite.

Bien que plusieurs Constructions peuvent être modélisées ainsi, de tels simplifications ne sont généralement pas admises pour les structures complexes [20]. Aussi conçoit-on aisément qu'une évaluation correcte de la réponse dynamique de ces structures exige une modélisation très sophistiquée, conduisant généralement à des matrices $[K]$ et $[M]$ bandes et impliquant un nombre impressionnant de d.d.l..

Pour des raisons de coût de calcul, on est souvent amené à envisager des procédures susceptibles de réduire la taille des problèmes. A ce propos, le modèle numérique proposé (voir chap. VI) est basé en partie sur la stratégie de résolution ci-après :

- Réduction de la taille du système initial ,tout en n'altérant pas son spectre basse fréquence, par la méthode de GUYAN [21].

- Calcul progressif des p premiers modes propres de vibration

par une méthode de déflation matricielle associée à une méthode d'itération inverse de vecteurs avec décalage spectral [1], [2].

On remarque que cette méthode résulte de la combinaison des deux premières techniques citées ci-avant.

L'objectif essentiel de ce chapitre est de présenter une procédure performante au plan numérique pour la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres.

Enfin, étant donné que de nombreux algorithmes sont élaborés dans le but de résoudre le problème aux valeurs et vecteurs propres standard, on a jugé utile de consacrer un paragraphe au passage à la forme classique du problème aux valeurs propres général.

Ce passage permet l'intégration éventuelle, pratiquement de toutes les méthodes de calcul des valeurs et vecteurs propres, dans le modèle numérique suggéré.

III.2 - FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENTS

III.2.1 - Méthode des raideurs

L'équation du mouvement d'une structure libre non amortie est de la forme :

$$[M] \langle \ddot{D} \rangle + [K] \langle D \rangle = \langle 0 \rangle \quad (3-1)$$

où $\langle D \rangle$ est le vecteur des d.d.l. de la structure.

$[M]$ la matrice de masse symétrique généralement définie positive pouvant être semi-définie positive dans le cas de d.d.l. affectés de masse nulle.

$[K]$ matrice de raideur de la structure, symétrique définie positive dans le cas des structures iso ou hyperstatiques extérieurement, semi-définie positive dans le cas des structures libres.

Une solution particulière est donnée par l'expression:

$$\langle D \rangle = \langle X \rangle \sin(\omega t + \phi) \quad (3-2)$$

où $\langle X \rangle$ représente la déformée modale de la structure

ω la fréquence propre de vibration

ϕ un angle de déphasage

Le vecteur des accélérations $\langle \ddot{D} \rangle$ a pour valeur

$$\langle \ddot{D} \rangle = -\omega^2 \langle D \rangle \quad (3-3)$$

La relation (3-1) doit être vérifiée quelle que soit la valeur

du temps t ; on en déduit le problème "bien connu" aux valeurs propres général.

$$\left([K] - \omega^2 [M] \right) \langle X \rangle = \langle 0 \rangle \quad (3-4)$$

Cette expression admet toujours la solution triviale ($\langle X \rangle = 0$) qui ne présente aucun intérêt. Pour qu'elle admette d'autres solutions non nulles, il faut que le déterminant de la matrice

$$\left([K] - \omega^2 [M] \right) \text{ soit nul:}$$

$$\left\| [K] - \omega^2 [M] \right\| = 0 \quad (3-5)$$

Le développement de ce déterminant conduit à un polynôme de degré N en ω^2 pour un système à N d.d.l. La substitution des N solutions $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ permet d'obtenir, à une constante près, les N modes de vibration ($\langle X_i \rangle, i=1, \dots, N$).

III.2.2 - Méthode des déformabilités

Prémultiplions les deux membres de l'équation (3-4) par $\frac{1}{\omega^2} [S]$; il vient alors

$$\left(\frac{1}{\omega^2} [S][K] - [S][M] \right) \langle X \rangle = \langle 0 \rangle \quad (3-6)$$

ou encore:

$$\left(\frac{1}{\omega^2} [I] - [S][M] \right) \langle X \rangle = \langle 0 \rangle \quad (3-7)$$

où [S] représente la matrice des déformabilités
et [I] la matrice identité d'ordre N.

Comme auparavant, l'équation aux fréquences s'écrit :

$$\left\| \frac{1}{\omega^2} [I] - [S][M] \right\| = 0 \quad (3-8)$$

Le produit [S][M] qui caractérise les propriétés dynamiques de la structure, n'est en général pas symétrique; on l'appelle matrice dynamique et on le note [Q] :

$$[Q] = [S][M] \quad (3-9)$$

III.2.3 - Remarque

Les vecteurs modaux $\langle X_i \rangle$ possèdent les propriétés suivantes, appelées propriétés d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} \langle X_j \rangle^T [M] \langle X_i \rangle &= 0 \quad \text{si } i \neq j \\ \langle X_j \rangle^T [K] \langle X_i \rangle &= 0 \quad \text{si } i \neq j \end{aligned} \quad (3-10)$$

$$\omega_i^2 = \frac{\langle X_i \rangle^T [K] \langle X_i \rangle}{\langle X_i \rangle^T [M] \langle X_i \rangle}$$

$\langle X_i \rangle$ est supposé M-orthogonal

III.3 - REDUCTION DE GUYAN

Il est plus difficile d'approcher les dérivées d'une variable donnée avec la même précision que celle de la variable elle-même. C'est pourquoi les modèles nécessaires au calcul des caractéristiques élastiques sont généralement plus détaillés que ceux nécessaires au calcul des caractéristiques d'inertie.

En effet, les caractéristiques d'inertie représentées par l'énergie cinétique dépendent des déplacements de la structure, par contre les caractéristiques élastiques représentées par l'énergie de déformation sont fonctions des dérivées de ces déplacements.

La méthode qui consiste à concentrer les masses aux noeuds de la structure est donc amplement justifiée. Rappelons qu'il y a une deuxième méthode dite "cohérente" prenant en compte les d.d.l. de translation et de rotation.

Lorsque c'est la première méthode qui est utilisée, le rapport d.d.l. de la matrice masse et le nombre total de d.d.l. est généralement entre $1/2$ et $1/10$.

Un autre point d'égale importance : les modèles utilisés pour l'étude des structures complexes peuvent parfois présenter un nombre très élevé de d.d.l.

Dans de tels cas, la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres devient difficile et très coûteuse, et sa

réduction s'avère alors nécessaire [21],[22], [23].

Dans ce qui suit, on présente une procédure permettant de réduire la taille des matrices de raideur, d'amortissement et de masse (concentrée ou cohérente).

En ce qui concerne notre étude, cette méthode sera utilisée pour éliminer essentiellement les d.d.l. de rotation et de translation horizontale.

Ceci est amplement justifié, dans la mesure où les structures étudiées sont supposées planes et que l'excitation extérieure agit suivant un plan horizontal.

III.3.1 - Principe de la méthode

Supposons que l'on ait partitionné l'ensemble des d.d.l. de la structure en deux sous ensembles : le sous-ensemble $\langle D_m \rangle$ variables "maîtresses" (avec $m \ll N$, N représentant l'ensemble des d.d.l.) et le sous-ensemble complémentaire des variables "esclaves" $\langle D_e \rangle$.

Si les variables esclaves sont choisies de telle sorte que les forces qui leur correspondent puissent être négligées, on obtient la relation suivante :

$$\langle D_e \rangle = [T_{em}] \langle D_m \rangle \quad (3-11)$$

où

$$[T_{em}] = - [K_{ee}]^{-1} [K_{em}] \quad (3-12)$$

La matrice de transformation $[T_m]$ permettant de réduire les matrices de masse, de raideur et d'amortissement est donnée par :

$$[T_m] = \begin{bmatrix} [T_{em}] \\ [I_m] \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

où $[I_m]$ est une matrice identité de même ordre que la matrice réduite des raideurs $[K_{mm}]$.

Les matrices de masse, de raideur et d'amortissement réduites sont déterminées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [M_{mm}] &= [T_m]^T [M] [T_m] \\ [K_{mm}] &= [T_m]^T [K] [T_m] \\ [C_{mm}] &= [T_m]^T [C] [T_m] \end{aligned} \quad (3-14)$$

avec $[C]$: la matrice d'amortissement de la structure.

III.3.2 - Justification de la méthode

Cette méthode de réduction des matrices de masse et d'amortissement peut être justifiée de la façon suivante. L'énergie potentielle élastique, E_p , et l'énergie cinétique, E_c , de la structure peuvent être écrites comme suit :

$$E_p = \frac{1}{2} \langle D \rangle^T [K] \langle D \rangle \quad (3-15)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \langle \dot{D} \rangle^T [M] \langle \dot{D} \rangle \quad (3-16)$$

Le travail $\langle \delta T \rangle$ des forces d'amortissement effectué lors d'un déplacement $\langle \delta D \rangle$ peut être exprimé par:

$$\langle \delta T \rangle = \langle \delta D \rangle^T [C] \langle \dot{D} \rangle \quad (3-17)$$

Il s'ensuit qu'en termes de variables maîtresses, les quantités scalaires énumérées ci-dessus peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \langle D_m \rangle^T [K_{mm}] \langle D_m \rangle \\ E_c &= \frac{1}{2} \langle \dot{D}_m \rangle^T [M_{mm}] \langle \dot{D}_m \rangle \\ \langle \delta T \rangle &= \langle \delta D_m \rangle^T [C_{mm}] \langle \dot{D}_m \rangle \end{aligned} \quad (3-18)$$

Ces trois dernières équations expriment l'énergie potentielle, l'énergie cinétique, et le travail virtuel des forces d'amortissement en termes de variables maîtresses.

Les matrices $[K_{mm}]$, $[M_{mm}]$ et $[C_{mm}]$ peuvent être interprétées, respectivement, comme les matrices de raideur, de masse et d'amortissement de la structure, correspondants aux variables maîtresses.

III.3.3 - Conclusion

L'intérêt de cette méthode réside principalement dans la possibilité de pouvoir résoudre le problème réduit en mémoire centrale.

Il ne faut pas perdre de vue que la réduction de GUYAN constitue une méthode approchée. Pour ne pas altérer le spectre basse fréquence de la structure, un choix judicieux des variables maitres et esclaves s'impose.

Afin d'obtenir les solutions propres avec une bonne précision, il faut tenir compte de ces deux considérations :

- Retenir en priorité les d.d.l. associés aux forces d'inertie importantes.

- Eliminer en priorité les d.d.l. associés aux foces d'inertie négligeables ou "nulles".

Enfin, il y'a lieu de souligner que la même transformation permettant de réduire la matrice de raideur est utilisée pour réduire les matrices de masse et d'amortissement de la structure.

III.4 - RECHERCHE D'UNE FREQUENCE ET DU MODE ASSOCIE

La méthode de l'itération inverse est très utilisée pour le

calcul de la plus petite valeur propre ω_1 du système (3-4), ainsi que le vecteur propre correspondant $\langle X_1 \rangle$. Il faut que [K] soit définie positive.

Si elle est semi-définie positive il est possible d'utiliser un décalage approprié.

A cet effet, posons $\lambda_i = 1/\omega_i^2$ et décomposons la matrice de raideur [K] par la méthode de CHOLESKY modifiée [3].

$$[K] = [U]^T [G] [U] \quad (3-19)$$

avec [G]: une matrice diagonale

et [U]: une matrice triangulaire supérieure ayant la diagonale unité.

A la jème itération, l'algorithme enchaîne les opérations suivantes :

. Calculer le vecteur $\langle B_1 \rangle_j$: $\langle B_1 \rangle_j = [M] \langle Z_1 \rangle_j$ (3-20)

. Calculer $\langle V_1 \rangle_j$: $[U]^T [G] [U] \langle V_1 \rangle_j = \langle B_1 \rangle_j$ (3-21)

. Calculer le nouveau vecteur : $\langle Z_1 \rangle_{j+1} = \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle_j} \langle V_1 \rangle_j$ (3-22)

. Verifier la convergence de la valeur propre $\langle \lambda_1 \rangle_j$:

$$\left| \frac{\langle \lambda_1 \rangle_j - \langle \lambda_1 \rangle_{j-1}}{\langle \lambda_1 \rangle_j} \right| \leq 10^{-6} \quad (3-23)$$

$$\text{où } \langle Z_1 \rangle = \langle X_1 \rangle \quad \langle V_1 \rangle = \lambda_1 \langle X_1 \rangle \quad \langle B_1 \rangle = [M] \langle X_1 \rangle \quad \lambda_1 = 1 / \omega_1^2$$

$(\lambda_1)_j$: est le plus grand élément (positif ou négatif) du vecteur $\langle V_1 \rangle_j$

S : nombre de chiffres significatifs après la virgule.

Pour accélérer la convergence BATHE [3] recommande le calcul de $(\omega_1^2)_j = 1 / (\lambda_1)_j$ par le quotient de RAYLEIGH. Cependant, l'amélioration du taux de convergence de la valeur propre est malheureusement sans effet sur celui du vecteur propre associé. Afin d'accélérer la convergence de ce dernier, on peut utiliser la technique du décalage spectral consistant à transformer la matrice [K] du système (3-4) :

$$[K]^* = [K] - \alpha_i [M] \quad (3 - 24)$$

où α_i est un décalage très proche (mais différent) de la valeur propre à calculer ω_i^2

On obtient :

$$[K]^* \lambda_i^* \langle X_i \rangle = [M] \langle X_i \rangle \quad (3 - 25)$$

où

$$\lambda_i^* = \frac{1}{\omega_i^2 - \alpha_i} \quad (3 - 26)$$

III.5 - RECHERCHE SUCCESSIVE DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES

Supposons que nous ayons obtenu le premier couple $(\lambda_1, \langle X_1 \rangle)$.
 Pour obtenir le deuxième couple $(\lambda_2, \langle X_2 \rangle)$ on peut effectuer une nouvelle itération inverse après élimination préalable du mode fondamental, par application d'une procédure de déflation [3].
 Pour ce faire, on exprime l'orthogonalité des vecteurs modaux $\langle X_1 \rangle$ et $\langle X_k \rangle$ respectivement à la matrice [M]:

$$\langle X_1 \rangle^T [M] \langle X_k \rangle = 0 \quad (k = 2, \dots, N) \quad (3-27)$$

En ajoutant cette condition au système d'équation (3-4), on peut réduire son ordre de n à $n-1$.

Le système réduit ainsi obtenu, a pour mode dominant le deuxième qui peut être déterminé par la méthode d'itération inverse.

Il est évident que cette technique permet d'obtenir autant de modes que l'on désire.

Toutefois, pour garder dans chaque itération une bonne précision, il faut contraindre chaque nouveau vecteur à rester M-orthogonal à ceux déjà déterminés. Ceci est possible grâce au processus d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT [3].

III.6 - PASSAGE A LA FORME CLASSIQUE DU PROBLEME AUX VALEURS PROPRES

En analyse numérique, la résolution du problème aux valeurs propres standard.

$$[\bar{K}] \langle \bar{X} \rangle = \lambda \langle \bar{X} \rangle \quad (3-28)$$

a beaucoup attiré l'attention des chercheurs. Aussi de nombreux algorithmes permettant la résolution de ce problème sont disponibles dans la littérature spécialisée [3], [18].

Le but qu'on s'est assigné dans ce paragraphe est de montrer comment passer de la résolution du problème aux valeurs propres général équation (3-4), à celle d'un problème standard équation (3-28).

Ce passage qui peut s'effectuer de différentes façons, présente un intérêt double :

- Possibilité d'utiliser les algorithmes de résolution du problème aux valeurs propres standard pour résoudre le problème aux valeurs propres général.

- Les propriétés des valeurs propres, des vecteurs propres

associés et des polynômes caractéristiques du problème général peuvent être déduites des propriétés de quantités correspondantes du problème aux valeurs propres standard.

Dans ce qui suit, on suppose que la matrice [M] est définie positive.

C'est le cas de :

- [M] diagonale et tous ses éléments diagonaux sont positifs.
- [M] est bande, obtenue par une analyse "cohérente".

III.6.1 - Matrice dynamique non symétrique

On vient de voir qu'une formulation par les déformabilités conduit à un problème aux valeurs propres standard, équation (3-7) qu'on peut écrire sous la forme :

$$[Q] \langle X \rangle = \frac{1}{\omega^2} \langle X \rangle \quad (3 - 29)$$

Il importe de rappeler que la matrice dynamique [Q] n'est pas symétrique. Le caractère non symétrique du problème classique aux valeurs propres (3 - 29) est un inconvénient majeur de cette approche.

En effet, les méthodes courantes de résolution les plus efficaces ne s'appliquent qu'aux problèmes symétriques.

Pour cette raison, il serait désirable de pouvoir transformer le problème général en la forme symétrique standard.

III.6.2 - Matrice dynamique symétrique

Le passage à la forme classique peut conserver la symétrie du problème si l'on effectue une factorisation de CHOLESKY de [M] ou de [K] :

III.6.2.1 - Décomposition de CHOLESKY de [M]

Soit la décomposition de CHOLESKY de [M] :

$$[M] = [L] [L]^T \quad (3 - 30)$$

avec [L] : matrice triangulaire inférieure.

Le système aux valeurs propres (3 - 29) peut être écrit sous la forme :

$$[\bar{Q}] \langle \bar{X} \rangle = \frac{1}{\omega^2} \langle \bar{X} \rangle \quad (3 - 31)$$

avec :

$$[\bar{Q}] = [L]^T [S] [L] \quad (3 - 32)$$

et

$$\langle \bar{X} \rangle = [L]^T \langle X \rangle \quad (3 - 33)$$

III.6.2.1 - Décomposition de CHOLESKY de [K]

Soit la décomposition de CHOLESKY de [K] :

$$[K] = [L][L]^T \quad (3 - 34)$$

Le problème général aux valeurs propres (3-4) peut être écrit sous la forme :

$$[\bar{Q}] \langle \bar{X} \rangle = \frac{1}{\omega^2} \langle \bar{X} \rangle \quad (3 - 35)$$

avec :

$$[\bar{Q}] = [L]^{-1} [M] [L]^{-T} \quad (3 - 36)$$

et

$$\langle \bar{X} \rangle = [L]^T \langle X \rangle \quad (3 - 37)$$

Il est à noter que cette dernière méthode, n'est utilisable que dans le cas d'une matrice de raideur définie positive.

III.6.3 - Matrice de raideur symétrique

La décomposition de CHOLESKY de [M] permet d'écrire l'équation (3 - 4) sous la forme :

$$[K] \langle X \rangle = \omega^2 [L] [L]^T \langle X \rangle \quad (3 - 38)$$

ou encore

$$[\bar{K}] \langle \bar{X} \rangle = \omega^2 \langle \bar{X} \rangle \quad (3 - 39)$$

avec :

$$[\bar{K}] = [L]^{-1} [K] [L]^{-T} \quad (3 - 40)$$

$$\langle \bar{X} \rangle = [L]^T \langle X \rangle \quad (3 - 41)$$

III.6.4 - Remarques générales sur le passage à la forme classique

Il est intéressant de noter que lorsque [M] est diagonale les matrices [K] et $[\bar{K}]$ ont la même largeur de bande. Cependant dans le cas de [M] bande, $[\bar{K}]$ est généralement pleine et ladite transformation devient alors inefficace.

En effet, dans le but de réduire le nombre d'opérations (ce qui entraîne naturellement la réduction du coût de calcul sur ordinateur), cet aspect est exploité dans de nombreux

algorithmes de résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres.

Un autre point d'égale importance : la transformation peut être effectuée par une factorisation de [M] ou de [K]. Contrairement à [K] qui est toujours bande, [M] est souvent diagonale, ceci rend évidemment la méthode basée sur la factorisation de [M] plus efficace que celle basée sur la décomposition de [K].

Néanmoins, il arrive parfois que la matrice [M] soit mal conditionnée, impliquant une transformation pouvant conduire à des résultats imprécis. Dans de tels cas, il est recommandé d'utiliser la décomposition en [K] (si elle est bien conditionnée).

Il importe aussi de souligner qu'une alternative de factorisation de [M] s'offrant à nous est la décomposition spectrale, qui consiste à résoudre le système complet du problème aux valeurs propres de [M].

$$[M] \langle t \rangle = \omega'^2 \langle t \rangle \quad (3 - 42)$$

où $\langle t \rangle$ est un vecteur propre de [M].

ω'^2 la fréquence propre correspondante.

Les vecteurs propres de la matrice [M] satisfont aux conditions d'orthogonalité.

Si de plus ils sont normalisés telle que :

$$\langle t_i \rangle^T \langle t_i \rangle = 1 \quad (3 - 43)$$

La matrice [T] de l'ensemble des vecteurs propres est orthonomale.

Dans ce cas la matrice [M] peut être écrite sous la forme :

$$[M] = [T] [\omega'^2] [T]^T \quad (3 - 44)$$

où $[\omega'^2]$ la matrice des valeurs propres.

Soit en reportant dans l'équation (3-4) et en prémultipliant par $[\omega']^{-1}[T]^T$:

$$[\bar{K}] \langle \bar{X} \rangle = \omega^2 \langle \bar{X} \rangle \quad (3 - 45)$$

avec

$$[\bar{K}] = [\omega']^{-1} [T]^T [K] [T] [\omega']^{-1} \quad (3 - 46)$$

et

$$\langle \bar{X} \rangle = [T]^T \langle X \rangle \quad (3 - 47)$$

A l'opposé du problème résultant de la décomposition

spectrale, celui découlant de la factorisation de CHOLESKY est très sensible et difficile à résoudre avec précision.

Cependant, La comparaison des deux factorisations, CHOLESKY et spectrale, montre que cette dernière est plus chère si la matrice de masse n'est pas diagonale, notamment lorsque le problème est d'ordre élevé.

Enfin, on peut dire sur le plan pratique cette méthode de passage à la forme standard du problème aux valeurs propres n'est intéressante que pour des systèmes d'ordre réduit.

Cette réduction pourra être obtenue par exemple après application de l'algorithme de GUYAN (& III.3).

En effet, elle nécessite non seulement la décomposition de CHOLESKY ou Spectrale de matrices appropriées, mais aussi et surtout l'inversion d'une matrice dans certains cas, ce qui n'est envisageable que pour des matrices d'ordre réduit.

Néanmoins, sur le plan théorique, ce passage à la forme classique est très intéressant, dans la mesure où il permet de déduire les propriétés remarquables du problème général, telles que les suites de STURM, à partir de celles du problème aux valeurs propres standard.

CHAPITRE QUATRIEME

**METHODES
D'ANALYSE DE
LA REPONSE
DYNAMIQUE DES
STRUCTURES**

CHAPITRE IV

METHODES D'ANALYSE DE LA REPONSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES

Comme on l'a déjà souligné dans l'introduction, le mouvement d'une structure donnée soumise à l'action dynamique de forces extérieures, relève d'un système d'équations différentielles linéaires du second ordre non homogènes et couplées.

Sa résolution dans le domaine temporel peut être effectuée soit par une méthode dite " d'intégration directe " ou par une autre méthode dite de " l'analyse modale ".

On a souligné aussi que cette dernière nous offre deux alternatives: la M.D.M. traditionnelle et la M.A.M. classique.

Il existe une troisième procédure de résolution de principe totalement différent dite de " l'analyse fréquentielle " permettant l'étude de la réponse dans le domaine des fréquences.

L'objet de ce chapitre est de rappeler brièvement ces méthodes, en accordant toutefois une place plus importante à la méthode de sommation modale, la plus couramment utilisée en dynamique linéaire.

IV.1 - DOMAINE FREQUENTIEL

Cette méthode permet, par le biais d'une transformation mathématique de type FOURIER [24], [25], de reporter sur les fréquences la résolution qui se fait dans le temps.

Ainsi, le vecteur des forces extérieures étant décomposé de la manière suivante :

$$\langle F(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F(\omega) \rangle e^{i\omega t} d\omega \quad (4 - 1)$$

On est amené à chercher la solution de l'équation de mouvement sous la forme :

$$\langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle Y(\omega) \rangle e^{i\omega t} d\omega \quad (4 - 2)$$

Avec $\langle Y(\omega) \rangle$ donné par :

$$\langle [K] + i\omega [C] - \omega^2 [M] \rangle \langle Y(\omega) \rangle = \langle F(\omega) \rangle \quad (4 - 3)$$

Ce système doit être résolu alors sur toute une gamme de valeurs de ω .

IV.2 - DOMAINE TEMPOREL

IV.2.1 - Méthode d'intégration directe

Cette méthode est surtout utilisée pour résoudre les problèmes non linéaires, ou si le contenu fréquentiel de l'excitation est susceptible d'exciter un nombre de modes très important de la structure.

Elle consiste à intégrer pas à pas les équations du mouvement, et traite donc le problème dans ses coordonnées spatio-temporelles réelles (1) (2).

Autrement dit, connaissant les vecteurs des déplacements, vitesses et accélérations à l'instant initial $t = 0$, on calcule successivement ces mêmes vecteurs aux instants :

$$\Delta t, 2\Delta t, \dots ; t, t+\Delta t, \dots$$

Où Δt est le pas d'intégration numérique.

Plusieurs types d'algorithmes d'intégration sont disponibles. On peut citer entre autres :

- Méthode de l'accélération linéaire
- Méthode α de HILBER
- Méthode de HOUBOLT

- Méthode β de NEWMARK
- Méthode θ de WILSON.

Cette dernière méthode a l'avantage d'être inconditionnellement stable au plan numérique ; cela signifie qu'elle est stable quel que soit le pas de temps Δt .

D'une façon générale l'un des inconvénients de la méthode d'intégration directe est que le pas de temps Δt doit être suffisamment petit pour assurer une précision suffisante à la solution.

La recherche de la solution peut devenir alors très coûteuse si l'intégration doit être effectuée sur une assez longue durée, à plus forte raison si la dimension N du problème est importante.

IV.2.2 - Méthode des déplacements modaux (M.D.M.)

Lorsque l'amortissement de la structure est donné sous la forme spécifiée par CAUGHEY [26], les modes de vibration sont réels, pratiquement identiques à ceux associés à la même structure supposée non amortie. De telles structures sont dites classiquement amorties, et la méthode de la superposition modale qui leur est appliquée est dite " méthode modale classique ".

Grâce à sa simplicité, cette méthode a trouvé une application très étendue dans de nombreux domaines d'application [27].

Dans ce chapitre, on va présenter la version " temporelle " et montrer que la difficulté d'analyser rigoureusement les systèmes sujets à des excitations dynamiques arbitraires dans leurs coordonnées physiques originales, est tournée par l'utilisation des modes propres de vibration comme coordonnées généralisées. Ces coordonnées permettent en effet, le découplage, " Sous certaines conditions ", des équations de mouvement ; équations qu'on peut résoudre indépendamment les unes des autres.

IV.2.2.1 - Equation d'équilibre dynamique

L'équation d'équilibre dynamique d'une structure à N d.d.l. est donnée par :

$$[M] \langle \ddot{D} \rangle + [C] \langle \dot{D} \rangle + [K] \langle D \rangle = \langle F (s,t) \rangle \quad (4 - 4)$$

où $\langle F (s,t) \rangle$: chargement dynamique extérieur

Les déplacements peuvent être donnés par

$$\langle D \rangle = [X] \langle Y \rangle \quad (4 - 5)$$

où $[X]$ est la matrice modale.

et $\langle Y \rangle$ le vecteur des amplitudes modales.

La matrice $[X]$ permet de passer du vecteur $\langle Y \rangle$ des coordonnées généralisées (appelées aussi coordonnées principales ou normales) au vecteur $\langle D \rangle$ des coordonnées géométriques.

En multipliant l'équation (4-4) par $[X]^T$ et compte tenu de l'équation (4-5), des propriétés d'orthogonalité des modes de vibration et en supposant qu'une condition d'orthogonalité s'applique à la matrice d'amortissement, on peut découpler les équations du mouvement (4-4).

$$[M] \langle \ddot{Y} \rangle + [C] \langle \dot{Y} \rangle + [K] \langle Y \rangle = \langle F(s,t) \rangle \quad (4-6)$$

ou

$$\begin{aligned} [M] &= [X]^T [M] [X] : \text{la matrice de masse généralisée.} \\ [C] &= [X]^T [C] [X] : \text{la matrice d'amortissement généralisée} \\ [K] &= [X]^T [K] [X] : \text{la matrice de raideur généralisée.} \\ \langle F(s,t) \rangle &= [X]^T \langle FC(s,t) \rangle : \text{le vecteur chargement généralisé.} \end{aligned} \quad (4-7)$$

Ces matrices étant diagonales, ce système d'équations peut être écrit sous la forme :

$$\ddot{y}_i + 2\gamma_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = F_i(s,t) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4-8)$$

où γ_i représente le coefficient d'amortissement du mode i et $\langle X \rangle$ est supposé M-orthonormé.

L'emploi des coordonnées généralisées nous a permis de transformer N équations différentielles simultanées couplées, en un système de N équations indépendantes rapportées aux coordonnées principales.

La résolution de chacune des équations, permet d'obtenir la réponse de chaque mode, et par utilisation de l'équation (4 - 5) on obtient la réponse dans les coordonnées géométriques. Ce procédé est appelé méthode de superposition des modes.

Dans cette méthode, il n'est pas nécessaire d'établir la matrice d'amortissement. On peut sur la base de données expérimentales, assigner des valeurs numériques aux coefficients d'amortissement.

IV.2.2.2 - Amortissement dans les systèmes à plusieurs d.d.l.

Contrairement aux propriétés élastiques et d'inertie, celles de l'amortissement ne sont pas très bien connues. S'il est vrai que les effets de l'amortissement sur la réponse des structures soumises à des chargements dynamiques dont la fréquence soit loin de la résonance sont négligeables, il n'en est pas de même pour les structures sujettes à des excitations dont la fréquence est proche de la résonance.

En effet, dans ce cas l'amortissement a une importance primordiale et doit être pris en considération, surtout que ces

effets ne sont pas connus a priori.

IV.2.2.2.1 - Conditions pour l'orthogonalité des modes

Dans les équations qui précèdent, on a supposé que les forces d'amortissement sont découplées de la même manière que les forces d'inertie et de rappel élastique. Toutefois, cette supposition n'est vraie que sous certaines conditions.

La forme générale de la matrice d'amortissement visqueux possédant les propriétés d'orthogonalité est due à CAUGHEY.

Cependant, dans son papier il ne décrit pas une méthode permettant la construction de la matrice d'amortissement, pour un amortissement modal spécifique.

Dans ce sens, WILSON et PENZIEN [28] ont développé des méthodes de calcul pour la détermination de cette matrice.

IV.2.2.2.1.1 - Méthode basée sur l'extension de la série de CAUGHEY

Partant de l'équation (3-4), et en utilisant les conditions d'orthogonalité des modes et quelques manipulations matricielles simples, on peut montrer que deux familles de relations

d'orthogonalité s'expriment de manière concise :

$$\langle X_i \rangle^T [M] \left[[M]^{-1} [K] \right]^b \langle X_i \rangle = 0 \quad (4 - 9)$$

$$(b = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

Ces relations permettent d'écrire la matrice d'amortissement sous la forme :

$$[C] = [M] \sum_b a_b \left[[M]^{-1} [K] \right]^b \quad (4 - 10)$$

Pour évaluer les constantes a_b , il est nécessaire de les exprimer en termes de coefficients d'amortissements modaux.

Ceci peut être accompli par la substitution de l'équation (4 - 10) dans le second membre de l'équation (4 - 7) :

$$\mathcal{E}_i = \sum_b a_b \omega_i^{2b} M_i = 2 \gamma_i \omega_i M_i \quad (4 - 11)$$

Il en résulte que :

$$\gamma_i = \frac{1}{2\omega_i} \sum_b a_b \omega_i^{2b} \quad (4 - 12)$$

Si les coefficients d'amortissement sont spécifiés pour tous les modes, les constantes a_b peuvent être calculées par

l'équation (4 - 12).

L'équation (4 - 10) permet alors d'obtenir la matrice complète d'amortissement.

Lorsque le nombre de d.d.l. est élevé cette méthode devient impraticable sur le plan numérique. Ceci est du à l'augmentation rapide des valeurs de ω_i^{2b} .

IV.2.2.2.1.2 - Evaluation directe de la matrice d'amortissement

Une autre procédure encore permet non seulement l'évaluation directe de la matrice d'amortissement, mais aussi l'élimination des difficultés numériques rencontrées dans la méthode précédente.

En effet, il découle d'une simple manipulation matricielle de l'équation (4 - 7) la relation suivante :

$$[C] = [X]^{-T} [Z] [X]^{-1} \quad (4 - 13)$$

En utilisant l'équation (4 - 7), on montre que :

$$[X]^{-1} = [M]^{-1} [X]^T [M] \quad (4 - 14)$$

La substitution de l'équation (4 - 14) dans l'équation (4 - 13)

donne :

$$[C] = [\theta] [\beta] [\theta]^T \quad (4 - 15)$$

où $[\theta] = [M] [X]$ (4 - 16)

et $[\beta]$ est une matrice diagonale dont les termes sont donnés par :

$$\beta_i = \frac{2 \gamma_i \omega_i}{M_i} \quad (4 - 17)$$

Enfin l'équation (4 - 15) peut être mise sous la forme :

$$[C] = \sum_{i=1}^N [C_i] \quad (4 - 18)$$

où $[C_i]$ est la matrice ne produisant d'amortissement que dans le mode i .

Elle peut être calculée par la relation :

$$[C_i] = [\beta_i] [\theta_i] [\theta_i]^T \quad (4 - 19)$$

IV.2.3 - Méthode des accélérations modales (M.A.M.)

En 1946, WILLIAMS introduit pour la première fois la méthode des accélérations modales [29].

Plus tard BISPLINGHOFF et ASHLEY discutent la méthode [30]. Dans chaque cas les auteurs ont étudié les possibilités de la méthode, de prédire la réponse dynamique d'un système non amorti soumis à une excitation unique.

Par la suite MADDOX [12], HANSTEEN et BELL [15] et CORNWELL, CRAIG et JOHNSON [10] ont étudié la méthode d'une façon plus approfondie.

Récemment, c'est WILSON [4] qui présenta une alternative intéressante de cette méthode.

La M.A.M. classique [10] peut être obtenue à partir de l'équation (4 - 8) qu'on peut écrire sous la forme :

$$y_i(t) = \left[\frac{1}{\omega_i^2} \right] \langle X_i \rangle^T \langle F(s, t) \rangle - \left[\frac{2\gamma_i \dot{y}_i(t)}{\omega_i} + \frac{\ddot{y}_i(t)}{\omega_i^2} \right] \quad (4 - 20)$$

On obtient les déplacements nodaux, par utilisation de l'équation (4 - 5):

$$\langle \dot{X}(t) \rangle = \sum_{i=1}^N \langle X_i \rangle \left[\frac{1}{\omega_i^2} \langle X_i \rangle^T \langle F(s, t) \rangle - \frac{2\gamma_i \dot{y}_i(t)}{\omega_i} - \frac{\ddot{y}_i(t)}{\omega_i^2} \right] \quad (4 - 21)$$

Ou encore

$$\langle \dot{X}(t) \rangle = [K]^{-1} \langle F(s, t) \rangle - \sum_{i=1}^N \langle X_i \rangle \left[\frac{2\gamma_i \dot{y}_i(t)}{\omega_i} + \frac{\ddot{y}_i(t)}{\omega_i^2} \right] \quad (4 - 22)$$

Le second terme du membre gauche de cette équation représente la correction dynamique appliquée à la réponse pseudo-statique.

Il importe de noter au passage que le nom " accélération modale " provient de la présence du terme de l'accélération modale $\ddot{y}_i(t)$ dans l'expression ci-dessus.

IV.3 - DIFFICULTES RELATIVES A L'APPLICATION DE CES METHODES AUX PROBLEMES D'ORDRE ELEVE :

Les exigences architecturales actuelles conduisent l'ingénieur à réaliser des constructions de plus en plus complexes, impliquant un nombre élevé de d.d.l. .

En présence de telles structures des difficultés surgissent dans

l'application des méthodes qu'on vient de rappeler. Ces difficultés concernent principalement les trois aspects suivants:

- Le temps de calcul
- La place occupée en ordinateur
- Les erreurs numériques.

Généralement, les deux premiers aspects sont liés. En effet, tout ordinateur, aussi puissant soit-il, ne peut traiter que les problèmes de tailles limitées. Ceci est en rapport avec la capacité mémoire qui caractérise chaque ordinateur. Le manque de place en mémoire centrale conduit à l'usage des mémoires auxiliaires (disques ou bandes), mais comparés aux temps d'accès à la mémoire centrale ceux des mémoires périphériques sont beaucoup plus longs. Aussi, on ne peut pallier à ce manque de place qu'au prix de l'augmentation du temps de calcul.

Par ailleurs, il y a lieu de souligner que le traitement informatique d'un problème donné implique des erreurs d'arrondi et l'effet cumulatif de telles erreurs peut devenir parfois important. Une opération arithmétique effectuée par un ordinateur diffère, en toute rigueur, du résultat théorique.

La précision obtenue peut être différente selon qu'on effectue les calculs sur une machine ou sur une autre. Autrement dit, le mode de représentation d'un nombre n'est pas unique.

Il s'ensuit que le temps de calcul et l'occupation nécessaire en mémoire augmentent tous les deux avec la précision requise; cela signifie que l'effet cumulatif des erreurs d'arrondi peut constituer une réelle limitation à la résolution de systèmes d'ordre élevé.

Même avec les ressources informatiques actuellement disponibles, la recherche de solutions exactes de problèmes dynamiques d'ordre élevé n'est pas satisfaisante d'après le critère économique.

C'est pourquoi, on se contente de la recherche de solutions approximatives, même si celles-ci peuvent présenter des inconvénients, comme on le verra dans le chapitre suivant.

plus précisément, lorsque l'on opère par analyse modale, seuls les modes propres correspondant à la partie basse fréquence sont pris en compte dans l'évaluation de la réponse dynamique. En d'autres termes les équations (4-5) et (4-22) prennent les formes tronquées suivantes:

$$\langle D(t) \rangle \approx [X_p] \langle Y_p \rangle = \sum_{i=1}^P \langle X_i \rangle y_i(t) \quad (4 - 23)$$

et

$$\langle D(t) \rangle \approx [K]^{-1} \langle F(s, t) \rangle - \sum_{i=1}^P \langle X_i \rangle \left[\frac{2\gamma_i \dot{y}_i(t)}{\omega_i} + \frac{y_i(t)}{\omega_i^2} \right] \quad (4 - 24)$$

avec $P \ll N$

CHAPITRE CINQUIEME

**EFFETS DE
TRONCATURE
MODALE SUR LA
REPONSE
DYNAMIQUE**

CHAPITRE V

EFFETS DE TRONCATURE MODALE SUR LA REPONSE DYNAMIQUE

V.1 - MISE EN EVIDENCE DES EFFETS DE TRONCATURE

Dans le chapitre précédent, on a vu qu'en pratique, la méthode de la superposition modale est basée sur l'utilisation de bases modales tronquées. Ceci conduit naturellement à des solutions approximatives.

On se propose ci-après de mettre en évidence les effets de troncature modale sur la réponse dynamique des structures.

V.1.1 - STRUCTURES OFFSHORES:

Les structures offshore sont des constructions tridimensionnelles partiellement submergées. Elles font l'objet de modélisations à nombre élevé de d. d. l. Une analyse dynamique réelle de ces structures exige non seulement la prédiction de la réponse aux actions extrêmes de courte durée, telles que celles résultant des tempêtes marines, mais aussi à la houle conduisant à des variations des efforts internes.

Ainsi, l'ingénieur se trouve confronté à la nécessité d'un dimensionnement à la fatigue des structures, notamment lorsque les premières périodes de vibration de la structure sont voisines de la période de la houle. Dans ce cas, l'évaluation précise des efforts internes s'impose.

Ce paragraphe vient compléter ce qui a été précédemment dit dans le chapitre II consacré en partie à l'étude bibliographique relative à l'incidence de la troncature des modes supérieurs sur la réponse dynamique des structures relevant du domaine de l'offshore.

Ainsi, en plus des travaux de MADDOX [12], VUGTS, HINES NATARAJA et SCHUMM [13], et BARGI [14], on peut citer entre autres ceux de GRAY, BERGE et KOEHLER [31], MARSHALL ET KINRA [32], et HALLAM, BOUDREAU, MILLAM et HEAF [33].

Il importe de noter que le dénominateur commun de ces recherches et que la M.D.M. traditionnelle, s'avère une méthode ne répondant pas aux besoins de l'ingénieur qui envisage un dimensionnement correct des structures offshore soumises à l'action de la Houle.

V.1.2 STRUCTURES EN PORTIQUES AUTOSTABLES

L'analyse de la littérature spécialisée montre que les efforts de recherche relatifs au problème des effets de troncature ont

été principalement orientées vers des applications relevant du domaine de structures offshore, destinées à être implantées dans des profondeurs d'eau de plus en plus importantes.

Paradoxalement, l'analyse des effets de troncature sur les constructions à usages habitationnel, administratif ou industriel contreventées par portiques autostables n'a pas reçu l'attention voulue. Aussi, a-t-il été convenu dans le cadre de la présente recherche de dévouer une attention particulière à l'incidence de troncature modale sur la réponse dynamique de ces structures.

A titre indicatif, les effets de troncature sur la réponse dynamique d'une structure dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont détaillées dans la référence [17], (voir également le Chap. VII) sont analysés.

Quatre types d'excitations sont successivement considérés :

- . Un chargement constant d'intensité 0,40g et de fréquence nulle Fig. 1.a appelé dans la suite de l'exposé "chargement A".
- . Un chargement triangulaire périodique d'intensité maximale 0,40g et de fréquence 1Hz Fig. 1 b "appelé chargement B".
- . Un chargement triangulaire périodique d'intensité maximale 0,40g et de fréquence 3,33 Hz Fig.1c "appelé chargement C".
- . Un chargement sismique résultant de l'action de la composante

N-S de l'accélérogramme du séisme de Constantine du 27.10.1985 enregistré à la station C.E.M. Abdelmoumen Fig. 1.d. "appelé chargement D"

Pour chaque cas, l'attention est portée sur l'évaluation des déplacements dynamiques et des forces induites.

V.2 - CRITERE D'ANALYSE DES EFFETS

Compte tenu du nombre important de résultats numériques pratiquement impossible à reporter "in extenso" dans le cadre de cette thèse, le nombre de variables caractérisant la réponse dynamique de l'étude sera réduit au minimum et seuls les paramètres ayant des effets prépondérants sur celle-ci (donc utile à l'interprétation) seront retenus.

Aussi les paramètres considérés pour l'étude comparative des réponses d'une structure donnée sont :

- . Nature du chargement extérieur
- . Période du chargement extérieur
- . Niveau de plancher considéré par-rapport à la base de la structure.

- . Déplacements dynamiques horizontaux de chaque noeud
- . Forces dynamiques induites

AUX fins de mettre en évidence les effets de troncature, l'évaluation de la réponse est effectuée selon trois méthodes de résolution différentes :

- . Analyse modale exacte (superposition de tous les modes de la structure)
- . Analyse modale tronquée (superposition des p premiers modes)
- . Analyse modale tronquée corrigée.

Dans un souci de clarté, les résultats de cette dernière seront illustrés dans le paragraphe suivant.

Ceci étant, et dans un but de faciliter l'interprétation des résultats obtenus, le dépouillement de ces derniers est effectué en deux phases distinctes :

PHASE 1

Pour chaque méthode, la réponse obtenue est comparée avec la réponse exacte en calculant systématiquement les erreurs absolues et relatives des déplacements et forces dynamiques induites

calculées par rapport aux valeurs exactes des quantités correspondantes.

PHASE 2

Pour chaque méthode, les résultats précédents obtenus en "phase 1" sont représentés, compte tenu des fluctuations rapides de la réponse, sur des graphes qui montrent la valeur des grandeurs étudiées en fonction de la variable temps. Ce mode de présentation des résultats offre l'avantage incontestable d'apprécier non seulement le niveau maximal d'amplitude ou d'intensité des déplacements, des forces induites et des erreurs correspondantes, mais aussi et surtout de visualiser directement l'évolution dans le temps de ces grandeurs.

V.3 - PRINCIPALES OBSERVATIONS

V.3.1 - Chargement constant " A "

Les Fig. 2.a et 2.d reproduisent les variations de la réponse dynamique exacte, correspondant au niveau 1 de la structure soumise à l'action du chargement constant (paramètre fréquence n'intervenant pas dans les calculs), et la réponse tronquée résultant de la superposition des trois premiers modes de vibration.

La Fig. 2.c représentant les erreurs relatives sur les déplacements tronqués, montre que ceux-ci sont calculés avec une précision acceptable n'excédant pas 8 % .

Néanmoins, il importe de remarquer que la figure 2.f montre clairement que les efforts internes induits sont substantiellement éloignés des efforts exacts, l'erreur relative dynamique pouvant atteindre des valeurs de l'ordre de 50 % . Cette observation est valable pour toute la durée du signal.

Il est intéressant de noter que les erreurs absolues sur les déplacements Fig. 8.a et 8.b et les forces dynamiques Fig. 8.c et 8.d se stabilisent progressivement convergeant vers une valeur constante différente de zéro.

Les grandes différences apparentes des erreurs relatives en début de chargement Fig. 2.b et 2.e ne présentent pas d'intérêt particulier, parce que les déplacements et les efforts dynamiques sont pratiquement insignifiants à ces instants. Cette constatation n'affecte d'aucune façon la portée des résultats obtenus.

Par ailleurs, il y a lieu de souligner que les erreurs relatives aussi bien pour les déplacements que pour les forces dynamiques induites, augmentent progressivement au fur et à mesure que l'on s'approche de la base de la structure.

Ceci est clairement mis en évidence par les courbes en pointillés des Fig. 5.a, 5.b et 5.c représentant respectivement les erreurs relatives sur les déplacements des étages 7,4 et 1.

La même remarque s'appliquant aux forces dynamiques induites Fig. 5.e et 5.f.

V.3.2 - Chargement triangulaire périodique " B "

Le cas du chargement triangulaire périodique de fréquence 1 Hz est illustré sur la Fig. 3 (voir également la Fig. 6).

Les observations générales relatives à la précision de calcul des déplacements et forces dynamiques induites demeurent applicables.

A noter cependant, que des difficultés d'analyse des effets de troncature par le critère des erreurs relatives dynamiques peuvent exister par suite d'un mauvais conditionnement numérique, si les deux valeurs comparées sont très petites.

En effet, la nature de ce type de chargement implique que la réponse dynamique passe par la valeur nulle en plusieurs points de l'axe des temps, il en découle naturellement que le problème d'interprétation se posera autant de fois que la réponse s'annulera, ce qui est clairement illustré par les Fig 3.b et 3.e.

Dans ce qui suit et notamment pour les chargements caractérisés

par des amplitudes variables de signes différents, le critère des erreurs relatives sera écarté au détriment du critère des erreurs absolues qui présente la particularité d'exhiber une évolution temporelle pratiquement similaire à celle des déplacements Fig. 3.c et des forces dynamiques induites Fig. 3.f.

Ceci signifie entre autres, que les erreurs absolues sont d'autant plus importantes que l'intensité de la réponse dynamique est élevée.

V.3.3. - Chargement triangulaire périodique " C "

Comme dans le cas du chargement " B ", les Fig. 7.a, 7.c, 7.e et 7.g représentent les variations de la réponse dynamique exacte des niveaux 1 et 7 de la structure, et de la réponse tronquée obtenue par superposition des 3 premiers modes de vibration, ainsi que les erreurs absolues correspondantes Fig. 7.b, 7.d, 7.f, et 7.h.

Les observations générales relatives à la précision de calcul des déplacements et forces dynamiques induites restent applicables. Toutefois, l'interprétation des résultats de l'analyse montre que les erreurs relatives dynamiques commises aussi bien sur les déplacements que les forces induites sont plus importantes Fig. 6 et 7. Aussi, peut-on conclure que le paramètre " fréquence " a une influence sur la réponse dynamique (voir Chap. VI).

V.3.4 - Composante horizontale N-S de l'accélérogramme du séisme de Constantine

Les Fig. 10, 11, 14 et 15 montrent les variations des réponses dynamiques exacte et tronquée (superposition de 3 modes) des niveaux 1 et 7 de la structure soumise à l'action de la composante N-S de l'accélérogramme du séisme de Constantine du 27/10/1988.

L'analyse des résultats de l'étude confirme les observations générales faites à l'occasion de l'étude des autres chargements, à savoir :

- La méthode modale tronquée est efficace pour le calcul des déplacements, même avec un petit nombre de modes.
- Les efforts calculés par la méthode tronquée ne sont généralement pas acceptables.
- Les erreurs relatives sur les déplacements et sur les forces dynamiques induites augmentent progressivement au fur et à mesure que l'on s'approche de la base de la structure.
- Le paramètre " fréquence " a une très grande influence sur la réponse dynamique (voir Fig. 16, 17, 18 et 19).

En conclusion, on peut dire que la solution en base modale tronquée est séduisante dans son principe, mais pouvant induire des erreurs inacceptables sur les efforts dynamiques internes.

Le but du chapitre suivant est de proposer un modèle numérique permettant d'améliorer le taux de convergence de la réponse dynamique des structures, sans pour autant engendrer un coût de calcul important comparativement aux méthodes classiques d'analyse.

CHAPITRE SIXIEME

**DEVELOPPEMENT
DU MODELE
NUMERIQUE**

CHAPITRE VI

DEVELOPPEMENT DU MODELE NUMERIQUE

VI.1 - INTRODUCTION

Dans le paragraphe précédent, les effets implicites de troncature modale sur les déplacements dynamiques des structures multi-étagées et des efforts internes induits ont été examinés.

Dans ce qui suit, un modèle numérique est proposé en vue d'améliorer substantiellement le taux de convergence de la réponse, via une formulation appropriée de la M.A.M..

La procédure de correction envisagée présente l'avantage important de pouvoir être intégrée, sans difficulté majeure, dans les programmes de calcul employant la M.D.M. traditionnelle.

Par ailleurs, il convient de noter que la situation actuelle des ressources informatiques disponibles sur le marché National, voire international, est loin de répondre aux besoins de l'analyste confronté aux normes d'exigences en matière d'évaluation précise des efforts.

En effet, la recherche de solutions exactes de problèmes dynamiques réels posés par la construction de projets industriels

de plus en plus importants (pylônes, structures offshores, ponts de grandes portées, cheminées industrielles, barrages, réacteurs nucléaires), exprimées en coordonnées physiques spatio-temporelles [2] , [3] ou en coordonnées généralisées [4], [5], constitue un processus complexe est très onéreux.

Ceci ne signifie nullement qu'il soit impossible d'aboutir à des précisions raisonnables et d'effectuer des analyses fiables, en se basant sur la recherche de solutions approchées en base modale tronquée.

Néanmoins, ceci suppose implicitement que les p premières périodes de vibration et formes propres associées d'un système caractérisé par un nombre de degrés de liberté élevé soient déterminées avec une précision suffisante pour que les dispositions finales qui en découlent ne soient pas remises en question lors de la phase finale de vérification du projet.

Différentes techniques numériques peuvent être utilisées à cet effet [3], [18], cependant celles-ci présentent de nombreux inconvénients entre autres :

- Problème de convergence numérique très lente, conduisant inévitablement à une imprécision notable sur les valeurs des modes propres supérieurs.

- Nécessité de s'assurer que les vecteurs propres sont bien les p premiers d'une part, et obligation de fixer à priori de

manière subjective, le nombre de composantes modales pour un calcul précis des grandeurs dynamiques analysées d'autre part.

Afin de contourner ces difficultés, on s'est proposé d'utiliser (voir chap. III) une méthode de déflation matricielle associée à une méthode d'itération inverse de vecteurs dont la détermination progressive des modes selon l'ordre des fréquences croissantes, offre la possibilité intéressante d'inclusion d'un critère de sélection des modes utiles, autrement plus significatif que ceux utilisés traditionnellement.

En effet, l'interprétation des résultats obtenus montrent que les efforts prédits demeurent voisins des efforts exacts, sous réserve de choisir un nombre de modes propres en rapport avec la période dominante du chargement. Ces résultats corroborés par une analyse du phénomène d'amplification dynamique indiquent clairement que la relation :

$$\frac{\Omega}{\omega_i} < \frac{1}{3} \quad (6-1)$$

où Ω : est la fréquence dominante du chargement

et ω_i : la fréquence du mode i de la structure.

peut être employée et ce indépendamment de la valeur du pourcentage d'amortissement critique retenue.

Par ailleurs, il faut faire remarquer que le problème de

réduction simultanée des matrices de raideur , de masse et d'amortissement (non nécessairement diagonales), consistant à une élimination de d.d.l. pour lesquels l'effet des forces d'inertie et autres forces appliquées est peu important (voir chap.III), s'avère une nécessité pour le traitement de problèmes de structures complexes.

La combinaison des techniques performantes d'analyse dynamique de structures, condensation, méthode mixte " déflation - itération inverse " avec décalage spectral, analyse modale tronquée corrigée basée sur un critère de sélection de modes utiles en rapport direct avec la fréquence dominante des sollicitations extérieures, constitue la base de développement du modèle numérique proposé .

Conjointement aux méthodes de calcul présentées dans le chapitre III, le développement théorique et les résultats obtenus des exemples traités permettent de compléter le modèle numérique suggéré d'une part, et d'étudier son applicabilité, d'autre part. A cet effet, et pour mettre en évidence le deuxième point , la structure étudiée est soumise à 4 types de chargements retenus au titre des applications numériques (voir paragraphe V.1.2).

En fait, ces chargements caractérisés par des fréquences différentes sont choisis en fonction des fréquences propres de la structure.

On conçoit aisément que chacune des excitations va agir

différemment sur la structure ; par exemple la réponse de la structure au chargement constant " A " sera quasi-statique vu que l'amplification dynamique sera très faible, alors que le comportement de la même structure vis à vis du chargement " B " sera fondamentalement dynamique, avec une amplification élevée des déplacements et des efforts internes ,puisque le rapport fréquence du mode fondamental de la structure et celle du chargement est voisin de 1 "résonance" (voir tableau 6.2).

Le comportement de la structure excitée avec le troisième chargement " C " sera également dynamique, mais évidemment moins que le deuxième, pour la simple raison que ce sont les modes supérieurs qui seront particulièrement excités.

On verra aussi que la composante horizontale N-S de l'accélérogramme du séisme de Constantine va exciter les modes supérieurs de la structure, la diminution de sa fréquence prédominante conduit alors à la définition d'un nouveau chargement excitant particulièrement les premiers modes de vibration de la structure.

VI.2 - DEVELOPPEMENT EN BASE MODALE TRONQUEE DE LA MATRICE DES DEFORMABILITES

Une variante de calcul de la méthode des accélérations modales classique peut être obtenue en développant la matrice des

CHAPITRE 6 DEVELOPPEMENT DU MODELE NUMERIQUE

en appliquant la M.D.M. traditionnelle, et en introduisant les déformabilités en base modale tronquée $[X_p]$. Ecrivons à cet effet l'équation (4-20) sous la forme :

L'évaluation des termes correctifs se fait par les opérations

$$-\frac{2\gamma_i \dot{y}_i(t)}{\omega_i} - \frac{\ddot{y}_i(t)}{\omega_i^2} = y_i(t) - \frac{1}{\omega_i^2} \langle X_i \rangle^T \langle F(s,t) \rangle \quad (6-2)$$

La substitution du membre droit de cette équation dans l'équation (4-24) permet d'obtenir :

calculer le vecteur correctif, il n'est pas nécessaire de calculer les " modes " correspondants.

$$\langle DX(t) \rangle = [K]^{-1} \langle F(s,t) \rangle + \sum_{i=1}^p \langle X_i \rangle \left[y_i(t) - \frac{1}{\omega_i^2} \langle X_i \rangle^T \langle F(s,t) \rangle \right] \quad (6-3)$$

VI - DEVELOPPEMENT EN BASE MODALE TRONQUEE DU VECTEUR

Mais l'on sait que :

$$[K]^{-1} = [X] [\omega^2]^{-1} [X]^T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i^2} \langle X_i \rangle \langle X_i \rangle^T \quad (6-4)$$

Une autre variante de calcul de la matrice des déformabilités, alors, peut être obtenue et développée la matrice chargement en base modale tronquée

$$\langle DX(t) \rangle = \sum_{i=1}^p \langle X_i \rangle y_i + \left([K]^{-1} - [K_p]^{-1} \right) \langle F(s,t) \rangle \quad (6-5)$$

On montre aisément que :

où $[K_p]^{-1}$ est la représentation symbolique de la matrice des déformabilités développée en base modale tronquée.

Dans cette expression, le premier terme du second membre correspond à la solution en base modale tronquée que l'on obtient

en appliquant la M.D.M. traditionnelle, et le second terme représente la correction tenant compte de la contribution des modes propres supérieurs négligés dans l'équation (4 - 23). L'évaluation des termes correctifs se fait par considération complète de la solution statique diminuée de la contribution des modes inclus avec l'amplification dynamique, dans le calcul de la réponse.

On constate que pour calculer le vecteur correctif, il n'est pas nécessaire de connaître les " N - p " derniers modes propres, ce qui fait tout l'intérêt de l'expression (6.5).

VI.3 - DEVELOPPEMENT EN BASE MODALE TRONQUEE DU VECTEUR CHARGEMENT

Une autre variante de calcul de la méthode des accélérations modales peut être obtenue en développant le vecteur chargement en base modale tronquée.

On montre aisément que :

$$[K_p]^{-1} = [K]^{-1} [M] [X_p] [X_p]^T \quad (6 - 6)$$

La substitution de cette équation dans l'équation (6 - 5) conduit à :

$$\langle \dot{X}(t) \rangle = \sum_{i=1}^P \langle X_i \rangle y_i(t) + [K]^{-1} \left\{ \langle F(s,t) \rangle - \sum_{i=1}^P \langle X_i \rangle^T \langle F(s,t) \rangle \right\} [M] \langle X_i \rangle \quad (6 - 7)$$

ou encore :

$$\langle \dot{X}(t) \rangle = \sum_{i=1}^P \langle X_i \rangle y_i(t) + [K]^{-1} \left(\langle F(s,t) \rangle - \langle F_p(s,t) \rangle \right) \quad (6 - 8)$$

avec :

$\langle F_p(s,t) \rangle$: la représentation symbolique du vecteur chargement développé en base modale tronquée.

Dans cette expression, le premier terme du second membre représente aussi, la solution en base modale tronquée que l'on obtient en appliquant la M.D.M. traditionnelle, et le second terme le vecteur correctif.

VI.4 - PROGRAMMATION DE LA M.A.M.

VI.4.1 - Comparaison de la M.A.M. et de ses variantes

La programmation de la méthode des accélérations modales peut

être réalisée en considérant soit la formulation classique éq (4.24), soit l'une de ses variantes données par les expressions (6.5) et (6.8).

Lorsque c'est la formulation classique qui est retenue, le calcul explicite des vitesses et des accélérations généralisées est nécessaire ; autrement dit, la solution est cherchée par la méthode dite pas à pas. Ainsi le coût de calcul sur ordinateur risque de devenir élevé comparativement à celui des variantes citées ci-dessus. En effet :

- Il est possible d'effectuer la correction uniquement aux intervalles de temps où l'on estime que la réponse est maximale.

- Les charges dynamiques dont la distribution spatiale est constante par rapport au temps $\langle f(s) \rangle$, telles que les actions sismiques, peuvent être écrites sous la formes :

$$\langle F(s,t) \rangle = \langle f(s) \rangle g(t) \quad (6 - 9)$$

Où $g(t)$ est une fonction du temps.

Dans ce cas, le concept de la correction est considérablement simplifié, puisque le vecteur correctif n'est calculé qu'une seule fois ; les autres vecteurs étant obtenus par application de scalaires apporpriés à chaque incrément de temps.

En outre, les vecteurs de déplacements dynamiques calculés par l'une de ces deux variantes résultent de la somme de deux vecteurs : le vecteur obtenu par la méthode des déplacements modaux et le vecteur correctif. Il s'ensuit que toutes les sous-routines évaluant les déplacements en opérant par la M.D.M. peuvent être utilisées.

VI.4.2 Comparaison des deux variantes

Dans de nombreuses applications, la variante de calcul donnée dans l'équation (6 - 3) basée sur le développement de la matrice de déformabilité en base modale tronquée, pourra être préférée, puisque les facteurs de participation ont été préalablement calculés par analyse modale.

Cette approche conduit alors à un nombre d'opérations inférieur à celui qui résulte de l'utilisation de l'équation (6 - 7), à plus forte raison si la matrice de masse concentrée est employée.

VI-5 PRINCIPAUX RESULTATS

VI-5.1 Chargement constant " A "

La Fig. 5 présente les variations des erreurs relatives des

CHAPITRE 6: DEVELOPPEMENT DU MODELE NUMERIQUE

déplacements et forces dynamiques correspondants aux niveaux 1,4 et 7 de la structure étudiée, soumise à un chargement constant. Seuls les trois premiers modes de vibration sont retenus.

Ces graphes indiquent que les erreurs relatives commises sur les déplacements, calculées par la méthode tronquée, sont plus importantes que celles calculées par la méthode tronquée corrigée. On remarque également que les erreurs relatives de la réponse tronquée corrigée sont très petites et oscillent autour de l'axe des temps comparativement à celles correspondant à la méthode tronquée.

En ce qui concerne les erreurs relatives sur les forces dynamiques induites, les observations précédentes demeurent applicables. Néanmoins, il importe de remarquer que ces erreurs présentent des amplitudes plus élevées lorsque la réponse est exprimée en termes de forces dynamiques.

Il est intéressant de noter au passage que pour l'étage 1 Fig. 5.f, les erreurs obtenues en employant la méthode tronquée sans correction, peuvent atteindre un taux d'erreur proche de 50% par-rapport à la réponse exacte, alors que les erreurs obtenues en utilisant la méthode tronquée corrigée n'excèdent pas 5% en général pour toute la durée du signal.

Par ailleurs, la Fig. 8. montre que l'allure des courbes des erreurs absolues sur les réponses tronquée et tronquée corrigée des déplacements dynamiques et des forces induites est

caractérisée par des fluctuations temporelles indentiques ; la première convergeant vers une valeur constante différente de zéro, la seconde vers une valeur nulle.

Cette évolution similaire des erreurs s'explique par le fait que pour le cas de chargements constants, la correction est constante pour toute la durée du signal, de sorte que les réponse tronquée et tronquée corrigée se déduisent l'une de l'autre par une simple translation d'axe exactement égale à cette correction.

En outre, l'analyse des résultats tableau 6.1 montre que le modèle numérique permet d'obtenir avec 2 modes des efforts dynamiques plus précis que la M.D.M. avec 5 modes.

NIVEAUX	NOMBRE DE MODES SUPERPOSES				
	SEPT (07)	DEUX (02)		CINQ (05)	
	ANALYSE EXACTE	ANALYSE TRONQUEE	ANALYSE TRON-CORR	ANALYSE TRONQUEE	ANALYSE TRON-CORR
1	-1224	- 446	-1231	- 971	-1289
2	-1195	- 739	-1100	-1309	-1179
3	-1217	-1110	-1100	-1327	-1171
4	-1229	-1533	-1247	-1130	-1284
5	-1608	-1990	-1709	-1640	-1593
6	-2036	-2240	-2224	-2024	-2039
7	-2613	-2205	-2414	-2616	-2613
EFFORT TRANCHANT A LA BASE	-11120	-10263	-11025	-11017	-11148
ERREURS RELATIVES EN %	0 %	7,7 %	0,85 %	0,93 %	-0,25 %

TABLEAU 6.1 : EFFORTS DE NIVEAUX - ERREURS RELATIVES SUR L'EFFORT TRANCHANT A LA BASE , AU TEMPS $t = 0,33s$.

VI.5.2 - Chargement triangulaire périodique " B "

La correction introduite par le modèle numérique proposé améliore substantiellement la réponse de la structure étudiée soumise au chargement triangulaire périodique de fréquence 1 Hz. Cette observation est corroborée par les résultats représentés sur la Fig. 6 qui montrent clairement que les erreurs absolues tant sur les déplacements que les forces dynamiques obtenues par le modèle numérique sont négligeables par rapport à celles obtenues par l'analyse tronquée.

Il y a lieu de signaler au passage que les erreurs sur la réponse tronquée corrigée sont caractérisées par des fréquences élevées; cela signifie que les erreurs sur la réponse tronquée corrigée s'annulent plus souvent que celles obtenues par l'analyse tronquée.

Contrairement à la méthode tronquée corrigée qui surestime et sous-estime la réponse dynamique pour un niveau donné, la méthode tronquée conduit à des déplacements et des efforts internes tous plus grands ou tous plus petits, comparativement aux quantités exactes correspondant.

En effet, la Fig. 6 montre que tous les déplacements et les forces dynamiques induites de l'étage 7 sont surestimés, les mêmes variables de l'étage 1 sont sous-estimées.

Ceci est clairement illustré par les courbes des déplacements et

de leurs erreurs absolues correspondantes qui sont en opposition de phase pour le niveau 7 Fig. 6.a et 6.b et en phase pour le niveau 1 Fig.6.c et 6.d.

La même remarque s'applique aux forces dynamiques induites respectivement Fig. 6.e et 6.f et Fig. 6.g et 6.h.

D'autre part, on constate comme dans le cas du chargement constant les erreurs relatives des déplacements et des forces dynamiques induites, aussi bien de la méthode tronquée que la méthode tronquée corrigée, augmentent progressivement au fur et à mesure que l'on s'approche de la base de la structure Fig. 6

VI.5.3. Chargement triangulaire périodique " C "

Dans l'introduction de ce chapitre, on a indiqué que le nombre de modes à retenir dans la solution est en rapport avec la période dominante du chargement.

En effet, tous les modes dont la fréquence est trois fois supérieure à la fréquence du chargement appliquée eq (6.1), la réponse est essentiellement élastique puisque les effets d'inertie et d'amortissement peuvent être négligés.

Afin de mettre en évidence l'influence du paramètre "fréquence", on a excité la structure avec le chargement triangulaire " C " qui diffère du chargement " B " en faisant

varier la période, toute chose étant égale par ailleurs.

Ce chargement, à l'opposé du précédent n'excitant pratiquement que les 3 premiers modes de vibration, présente l'intérêt d'exciter les modes supérieurs.

Ceci apparait clairement dans le tableau 6.2, ci dessous, dans le quel :

ω_i : représente la fréquence du mode i

Ω_B : est la fréquence du chargement " B " ($\Omega_B = 6,28$ rd/s)

Ω_C : est la fréquence du chargement " C " ($\Omega_C = 20,94$ rd/s)

et FC : le facteur de contribution modal cumulé.

MODE i	ω_i (rd/s)	ω_i / Ω_B	ω_i / Ω_C	FC en %
1	7.62	1.2	0.4	72.5
2	19.40	3.0	0.9	90.7
3	30.52	4.9	1.5	95.4
4	40.51	6.5	1.9	97.7
5	46.94	7.5	2.2	98.5
6	58.30	9.3	2.8	99.4
7	78.03	12.4	3.7	100.0

TABLEAU 6.2 : RAPPORT DE LA FREQUENCE DU MODE i ET LA FREQUENCE DU CHARGEMENT FACTEUR DE CONTRIBUTION MODAL CUMULE.

Bien que les résultats de calcul par la méthode modale tronquée corrigée restent meilleurs que ceux obtenus par la simple analyse modale tronquée, les différences en déplacements et en forces dynamiques ne sont pas aussi spectaculaires que celles obtenues avec le chargement " B ".

Ceci s'explique par le fait que le nombre de modes retenus (trois modes) n'est pas compatible avec celui qui serait déduit par application du critère proposé (six modes) qui présente l'avantage d'être en rapport avec la fréquence dominante du chargement.

On constate en effet tableau 6.2, que les ratios (ω_i / Ω) correspondants aux modes non retenus (c'est à dire les modes 4,5,6 et 7) :

- Sont tous supérieurs à 3 dans le cas du chargement " B "
- Seul le ratio correspondant au mode 7 est supérieur à 3 dans le cas du chargement " C ".

C'est pourquoi la réponse qui est substantiellement améliorée dans le cas du chargement " B ", ne l'est plus dans le cas du chargement " C ".

Dans le même ordre d'idées, il importe de noter que l'application de la M.D.M. traditionnelle conduit à une réponse dynamique très éloignée de la réponse exacte, malgré un facteur de contribution de 95,4% correspondant aux trois premiers modes de vibration.

Néanmoins, l'application du critère proposé indique que le calcul de la réponse dynamique doit être basé sur la superposition d'un nombre minimal de six composantes modales.

La Fig. 9.b montre que dans ce cas les erreurs absolues sur les

forces dynamiques (150 KN au maximum) sont moins importantes que dans le cas précédent (650 KN au minimum) Fig. 7 h.

L'application du modèle numérique permet de réduire ces erreurs à des valeurs très faibles voire nulles dans certains cas.

Ceci est clairement illustré par l'analyse des résultats obtenus par la méthode tronquée corrigée Fig. 9..

VI.5.4- Composante horizontale N-S de l'accélérogramme du séisme de Constantine

Aux fins de compléter l'étude de la validité du modèle numérique, l'applicabilité de celui-ci est finalement étudiée sur la base des résultats obtenus à partir de la composante horizontale N-S de l'accélérogramme du séisme de Constantine du 27/10/85.

Les Fig. 10.,11.,14. et 15. représentent les déplacements, les forces dynamiques induites et les erreurs absolues correspondantes des niveaux 1 et 7 obtenus par superposition des 3 premiers modes propres de vibration.

L'examen de ces courbes permet d'observer que l'analyse tronquée corrigée n'améliore pas la réponse par-rapport à l'analyse tronquée: l'allure des courbes des erreurs absolues sur les réponses des deux analyses est caractérisée par des

fluctuations temporelles pratiquement indentiques.

Par ailleurs, l'augmentation du nombre de modes retenus dans la résolution (cinq modes) Fig. 12 et 13 n'améliore guère les résultats de la méthode tronquée corrigée par-rapport à la méthode tronquée.

Ceci s'explique par le fait que la fréquence de l'excitation considérée excite au moins les cinq premiers modes propres de vibration de la structure et la correction ne peut pas s'effectuer d'une façon pseudo-statique.

La diminution de la fréquence de la même excitation a permis de définir un nouveau chargement (chargement DM) présentant l'intérêt particulier d'exciter uniquement les premiers modes de vibration de la structure.

L'application de ce chargement offre la possibilité d'apprécier l'efficacité du modèle numérique suggéré.

En effet, les Fig. 16., 17., 18. et 19. montrent clairement que les résultats obtenus par application du modèle numérique (le nombre de modes retenu étant égal à 4) sont nettement plus précis (erreurs absolues sur les efforts internes pratiquement nulles) que ceux découlant de la M.D.M. traditionnelle.

Ces résultats sont valables quelque soit le niveau considéré.

L'analyse de ces résultats montre une fois de plus l'importance et l'efficacité du critère de sélection des modes

proposé , ainsi que l'insuffisance des critères habituels à savoir les facteurs de participation et de contribution modaux.

Enfin, il importe de préciser que :

- L'étude de la réponse dynamique sur toute la durée de l'excitation, c'est à dire 20s, ne présente aucun intérêt particulier pour notre étude, aussi s'est-on contenté d'analyser la réponse correspondant aux 15 premières secondes, ce qui a permis de réduire le temps d'exécution sur ordinateur d'une part et de gagner de l'espace mémoire d'autre part.
- Par souci de clarté, on a été amené à multiplier la réponse par un facteur égal à 5,3.

**CHAPITRE
SEPTIEME**

**APPLICATIONS
NUMERIQUES**

CHAPITRE VII

APPLICATIONS NUMERIQUES

VII.1 - LOGICIEL DE CALCUL DYNAMIQUE DES STRUCTURES

VII.1.1 - Introduction

Il existe aujourd'hui sur le marché international, des logiciels de calcul très sophistiqués pour le traitement des structures présentant une architecture complexe aussi bien dans le domaine statique que dynamique.

Néanmoins, l'utilisation de ces logiciels dont la logique est généralement difficile à comprendre ou les principes sur lesquels ils sont bâtis ne sont pas parfaitement connus, peut entraîner des erreurs lors de leur exploitation.

Par ailleurs, il est parfois plus utile de disposer d'un programme modeste, spécifique, mieux adapté à ses besoins et d'utilisation facile, que d'un programme très élaboré, général, d'utilisation difficile.

Un programme qu'on maîtrise offre deux avantages intéressants : celui de pouvoir lui intégrer de nouveaux modules pour en faire

un superprogramme unique, ou bien au contraire, celui de le simplifier ou de le modifier en vue d'une spécialisation pour des usages bien déterminés et précis, adaptés à ses besoins et, pourquoi pas à ses habitudes de travail.

En outre, développer un logiciel, c'est aussi approfondir ses connaissances théoriques, numériques et de programmation.

Le logiciel de calcul qu'on a développé dans le cadre de ce travail de recherche est du type spécialisé dans le calcul des structures planes contreventées par portiques auto-stables. Il est organisé tel que l'on peut l'adapter sans trop de difficultés à d'autres structures, notamment :

- Les structures à treillis.
- Les structures à réseaux orthogonaux.

On peut aussi l'étendre aisément au calcul des structures spatiales.

Le logiciel est écrit en langage FORTRAN 77 qui est très utilisé pour l'implantation sur ordinateur des applications scientifiques, techniques, de recherche opérationnelle ... etc. Par ailleurs, la machine sur laquelle il a été développé est le micro-Vax type II du centre de calcul de l'Ecole Nationale Polytechnique.

VII.1.2 Description du logiciel

On présente ci-après le logiciel de calcul de la réponse dynamique des structures planes contraventées par portiques autoportables soumises aux actions dynamiques.

1 = Ouverture des fichiers de données et de résultats

. donner le nom du fichier de données

. donner un nom au fichier résultats

2 = Lecture et impression des données générales

. Nombre d'éléments total

. Nombre de d.d.l. libres

. Nombre de Coordonnées nodales esclaves

3 = Construction des matrices de raideur et de masse de la structure

Pour chaque élément :

. Lire et imprimer les propriétés élémentaires:

- module d'élasticité

- longueur
- section
- moment d'inertie de la section transversale
- masse linéique
- cosinus et sinus de l'angle définissant la position de l'élément dans le repère global
- connectivités

. construire la matrice de raideur élémentaire dans le repère global

. construire la matrice de masse élémentaire dans le repère global (cohérente ou concentrée).

. assembler ces matrices élémentaires dans les matrices générales de la structure : [K] et [M]

. Imprimer les résultats.

4 - Réduction des équations d'équilibre dynamique

. Calculer et imprimer:

- la matrice de transformation
- la matrice réduite de raideur
- la matrice réduite de masse

. tester si la matrice de masse est diagonale.

5 - Calcul et impression de la matrice de déformabilité

6 - Calcul des fréquences et modes propres de vibration

. Lire et imprimer:

- précision de calcul
- fréquence dominante du chargement
- le décalage modal

. Calculer les "p" premières fréquences et modes propres.

. Normaliser les vecteurs modaux par rapport à [M]

. Impression des résultats.

7 - Calcul de la réponse dynamique

. lire et imprimer :

- pas d'intégration
- temps maximal d'intégration
- nombre maximal de points définissant l'excitation

extérieure

. lire les accélérations (ou forces) de l'excitation et interpolation suivant le pas de temps d'intégration.

. Calculer les forces généralisées

. Lire et imprimer les facteurs d'amortissement

Pour chaque incrément de temps, calculer :

. les déplacements généralisés

. les déplacements nodaux (non corrigés)

. le vecteur correctif

. les déplacements nodaux (corrigés)

. les efforts internes (non corrigés)

. les efforts internes (corrigés)

Et enfin

. imprimer les résultats

VII.2 EXEMPLES NUMERIQUES

VII.2.1 - Structure étudiée

Pour montrer les effets de troncature modale sur la réponse dynamique soumise à l'action d'une excitation variable dans le temps d'une part, et d'illustrer la versatilité du logiciel développé et la précision du modèle numérique suggéré d'autre part, un exemple numérique est considéré.

Cet exemple consiste en un bâtiment de sept niveaux à usage de bureaux (A.P.C), contreventé par portiques autostables en béton armé.

La structure dont les niveaux sont numérotés en commençant par le bas est modélisée par une console encastrée à sa base. Afin de tenir compte de la flexibilité des planchers, des raideurs corrigées sont déterminées.

Les caractéristiques de cette structure sont données dans le tableau 7.1 ci-dessous :

NIVEAU	RAIDEUR CORRIGÉE (t / m)	MASSE (t)	HAUTEUR (m)
1	57340	334	4.25
2	65592	307	3.25
3	46176	299	3.25
4	30192	292	3.25
5	18477	289	3.25
6	18101	289	3.25
7	17731	273	3.25

TABLEAU 7.1 CARACTERISTIQUES DE LA STRUCTURE

Les facteurs d'amortissement sont égaux à 7%.

VII.2.2 Chargements

La structure est soumise suivant le sens longitudinal, à l'action de quatre types de chargements Fig. 1. :

- Un chargement constant d'intensité 0,40g et de fréquence nulle Fig. 1.a (chargement A)
- Un chargement triangulaire périodique d'intensité maximale 0,40g et de fréquence 1 Hz Fig. 1.b (chargement B).
- Un chargement triangulaire périodique d'intensité maximale 0,40g et de fréquence 3,33 Hz Fig. 1.C (chargement C)

- Un chargement sismique résultant de l'action de la Composante N-S de l'accélérogramme du séisme de Constantine du 27/10/1987 enregistré à la station C.E.M. Abdelmoumen Fig. 1.d (chargement D).

**CHAPITRE
HUITIEME**

**CONCLUSIONS
GENERALES**

CHAPITRE VIII

CONCLUSIONS GENERALES

VIII.1 - PROBLEMATIQUE ET OBJECTIFS

Afin de représenter aussi fidèlement que possible le comportement réel des structures, il est généralement nécessaire d'utiliser des modèles mécaniques très élaborés pouvant présenter un nombre très élevé de d.d.l. d'une part, et des modèles analytiques permettant une évaluation précise de la réponse dynamique, d'autre part.

Néanmoins, même avec les ressources informatiques actuellement disponibles, la recherche de solutions exactes des grands systèmes, n'est pas satisfaisante d'après le critère économique. Pour contourner cette difficulté, on se contente de la recherche de solutions approximatives.

Dans ce sens, il est généralement recommandé d'utiliser pour les structures à comportement linéaire, la M.D.M. traditionnelle employant une base modale tronquée. Cet outil s'avère économique et attrayant.

Cependant, l'utilisation d'un nombre réduit de modes peut

entraîner une perte de précision substantielle sur le calcul des efforts internes dont l'évaluation constitue souvent l'objectif primordial du projet.

Par ailleurs dans l'application de la méthode de la superposition modale, on se heurte à une difficulté majeure relative au nombre de modes, et lesquels en particulier, à retenir dans la solution afin d'obtenir une réponse dynamique correcte.

Des décisions de cette nature sont fondamentales pour l'application de ce procédé et exigent de l'ingénieur de l'expérience, du bon sens et de la perspicacité.

Dans la présente recherche on s'est proposé :

- d'examiner les effets implicites de troncature modale sur les déplacements dynamiques et les efforts internes induits.
- de suggérer un modèle numérique permettant d'améliorer le taux de convergence de la réponse dynamique.
- d'étudier l'applicabilité de ce modèle numérique.
- de développer un logiciel de calcul de la réponse dynamique des bâtiments intégrant les hypothèses de planchers déformables et indéformables, ainsi que l'ensemble des étapes inhérentes au modèle numérique proposé.

Il importe de noter également, qu'une attention particulière a été accordée au problème concernant le nombre de modes utiles pour une représentation correcte des efforts internes.

En effet, un critère de sélection des modes, différent de ceux utilisés jusqu'ici, a été introduit dans notre modèle numérique.

VIII.2 - METHODOLOGIE ADOPTEE

S'il est vrai que la littérature spécialisée consacrée à l'analyse des effets de troncature modale sur la réponse dynamique des structures relevant du domaine de l'offshore est relativement étoffée, il n'en demeure pas moins que les études relatives aux constructions à usages habitationnel, administratif ou industriel contreventées par portiques autostables sont très limitées.

Aussi, a-t-il été jugé judicieux de contribuer à l'enrichissement de ce domaine, à plus forte raison que ce genre de structures est très répandu dans notre pays.

La consultation des documents a permis de constater notamment, l'inefficacité de la M.D.M. traditionnelle pour une prédiction précise des efforts internes, et de réunir les informations nécessaires à la constitution d'une méthodologie appropriée permettant d'aborder rationnellement le problème et

d'aboutir à des résultats très intéressants.

Ce travail présente trois volets de recherche étroitement liés :

- Le premier concerne la mise en évidence analytique des effets implicites de troncature modale sur le comportement dynamique des constructions à plusieurs degrés de liberté, notamment les bâtiments en portiques autostables.

Une attention particulière est portée à l'analyse des déplacements et des efforts dynamiques induits.

- Le deuxième volet présente un modèle numérique permettant d'améliorer substantiellement le taux de convergence de la réponse et de prendre ainsi en considération les effets de troncature dynamique sur les systèmes constructifs multi-étagés.

La considération des techniques appropriées d'analyse dynamique a permis de mettre en oeuvre un modèle analytique performant au plan numérique et permettant d'atteindre une bonne précision de calcul des efforts induits avec un nombre relativement réduit de modes propres de vibration.

- Le troisième volet constitue la transcription informatique du second. A cet effet un logiciel, à portée générale, de calcul

temporel de la réponse dynamique est élaboré.

Ce logiciel intègre diverses techniques performantes d'analyse dynamique des structures, entre autres la méthode des accélérations modales modifiée, technique de réduction des équations d'équilibre dynamique, de décalage spectral et une méthode de déflation de matrices associée à une méthode d'iteration inverse de vecteurs, via la procédure de CHOLESKY modifiée.

L'applicabilité du modèle numérique est étudiée sur la base des résultats obtenus à partir de Quatre types de chargements :

- Un chargement constant d'intensité 0,40g et de fréquence nulle, auquel la réponse de la structure est quasi-statique vue que l'amplification dynamique est très faible.
- Un chargement triangulaire périodique d'intensité maximale 0,40g et de fréquence 1 Hz, présentant la particularité d'exciter le spectre basse fréquence de la structure.
- Un chargement triangulaire périodique d'intensité maximale 0,40g et de fréquence 3,33 Hz, qui excite particulièrement les modes supérieurs de la structure.
- La composante horizontale N-S de l'accélérogramme du seisme de Constantine excitant les modes supérieurs de la structure.

La diminution de sa fréquence prédominante a conduit à la définition d'un nouveau chargement excitant, notamment les premiers modes de vibration de la structure.

VIII.3 - PRINCIPAUX RESULTATS

Malgré le caractère exploratoire de cette recherche, plusieurs conclusions ont pu être tirées, dont on évoquera brièvement ci-après, les plus significatives :

1 - L'application systématique de la M.D.M., quoique permettant une prédiction des déplacements dynamiques avec une précision acceptable, conduit souvent à des efforts dynamiques substantiellement éloignés des efforts exacts; le taux d'erreur dynamique pouvant excéder 50% dans certains cas. Cette observation demeure valide pour toute la durée du signal d'excitation.

2 - Les erreurs absolues sur la réponse calculée par la M.D.M sont d'autant plus importantes que la réponse dynamique est plus élevée; l'évolution temporelle étant similaire à celles des déplacements et des efforts internes induits.

3 - Le taux d'erreur dynamique sur les déplacements est

d'autant plus important que l'on se rapproche de la base du bâtiment.

Cette observation s'applique également sur les efforts induits.

4 - Le critère de sélection des modes utiles basé sur le calcul des facteurs de participation ou de contribution des modes est insuffisant. Néanmoins, les efforts internes obtenus peuvent rester très proches de la solution exacte, sous réserve de sélectionner les modes par un critère reliant les fréquences des modes supérieurs à la fréquence dominante des composantes des actions extérieures.

5 - La procédure de correction introduite dans le modèle numérique améliore de façon sensible la réponse dynamique. Le taux de convergence de la M.D.M. peut être substantiellement amélioré pour le calcul sismique des bâtiments, en employant un développement limité de la matrice de déformabilité en base modale tronquée.

6 - L'application du modèle numérique permet d'obtenir de façon générale avec un nombre réduit de modes, des efforts internes plus précis que ceux déduits de la M.D.M. avec un nombre relativement élevé de modes propres de vibration.

7 - La combinaison des techniques de condensation, de déflation de matrice associée à une méthode d'itération inverse, via la

décomposition de CHOLESKY modifiée suivie de décalage spectral et de développement limité de matrice de déformabilité en base modale tronquée, s'avère un instrument précis et performant au plan numérique, notamment lorsque les bâtiments présentent une architecture très développée et une topologie structurale complexe.

VIII.4 - RECOMMANDATIONS ET PERSPECTIVES

Les résultats de cette recherche montrent que la M.D.M. traditionnelle, même avec un nombre relativement élevé de modes, conduit encore à des erreurs substantielles sur les efforts dynamiques internes.

Ceci signifie que la contribution pseudo-statique à la réponse dynamique des modes supérieurs non retenus dans la résolution est importante.

Pour une prédiction correcte des efforts internes, il est nécessaire que tous les modes (ou la plupart) soient pris en compte dans la solution, ce qui est non seulement à exclure en pratique, à cause du coût de calcul qui en découle, mais aussi en contradiction avec la justification fondamentale de l'utilisation de cette procédure, à savoir qu'un nombre réduit de modes est suffisant pour représenter correctement le comportement dynamique de la structure.

Aussi recommande-t-on de tenir compte de la contribution pseudo-statique des modes supérieurs pour lesquels l'amplification dynamique est négligeable.

Il est alors important de distinguer les modes caractérisés par une amplification dynamique importante de ceux caractérisés par une amplification dynamique négligeable.

A cet effet, on recommande d'utiliser le critère de sélection des modes eq (6.1). Ceci implique naturellement que la détermination des fréquences propres et modes correspondants soit progressive, offrant ainsi le double avantage de pouvoir déterminer le nombre de composantes modales ayant un comportement dynamique et de réduire considérablement le coût de calcul sur ordinateur en se limitant au calcul des P premiers modes.

Cette procédure couplée avec une méthode de réduction des équations de mouvement ne peut qu'amoindrir le coût de calcul, conduisant à une bonne prédiction de la réponse escomptée.

On n'a pas la prétention de fournir un outil répondant à tous les problèmes évoqués dans le cadre de cette thèse, mais on peut dire que le modèle numérique proposé s'avère efficace pour la résolution de ce type de problèmes. Néanmoins, il est encore perfectible. Pour l'améliorer on suggère :

- 1 - D'utiliser une condensation dynamique en vue d'améliorer la précision de calcul du spectre basse fréquence de la structure.

CHAPITRE 8: CONCLUSIONS GENERALES

2 - De lui intégrer la méthode de sous-structuration pour diminuer le temps de calcul et de faciliter l'analyse dynamique de grandes structures sur ordinateur.

3 - De prendre en considération l'interaction sol-structure pour représenter aussi fidèlement que possible le comportement réel des structures.

4 - De l'enrichir avec d'autres éléments structuraux afin d'étendre son application à d'autres types de structures, autres que celles contreventées par portiques autostables.

5 - De l'adapter pour un calcul tridimensionnel.

REFERENCES

REFERENCES

- [1] W. JR. WEAVER, and P. R. JOHNSTON, " Structural dynamics by finite elements ", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., U. S. A., 1988.
- [2] CLAES DYRBYE, " Dynamic response of framed structures ", E. E. S. D., Vol 14, 1986.
- [3] K. J. BATHE, " Finite element procedures in engineering analysis ", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., U. S. A., 1982.
- [4] E. L. WILSON, M. W. YUAN and J. M. DICKENS, " Dynamic analysis by direct superposition of RITZ vectors ", E. E. S. D., Vol. 10, 1982.
- [5] P. LEGER, E. L. WILSON and R. W. CLOUGH, " The use of load vectors for dynamic and earthquake analyses ", Report N° E. E. R. C 86-04, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, U. S. A., 1986.
- [6] R. R. CRAIG, " Structural dynamics ", Wiley & sons, New York, U. S. A., 1981.

- [7] M.P. SINGH and M. GHAFORY-ASHTIANY, " Modal time history analysis of non-classically damped structures for seismic motions ", E.E.S.D ,Vol.14, 1986.
- [8] R.W. CLOUGH and J. PENZIEN, " Dynamique des structures ", Pluralis, Paris, FRANCE, 1980.
- [9] T. BRANCI, " Incidence des décrochements verticaux sur la réponse dynamique des systèmes à plusieurs degrés de liberté ", Thèse de Magister, Dept G.C., Ecole Nationale Polytechnique, ALGERIE, 1988.
- [10] R.E. CORNWELL, R.R. CRAIG, J.R. and C.P. JOHNSON, " On the application of the mode acceleration method to structural engineering problems ", E.E.S.D ,Vol.11, 1983.
- [11] U.S. Nuclear Regulatory Commission, " Seismic design classification ", Regulatory Guide , U.S.A. , 1978.
- [12] N.R. MADDOX, " On the number of modes necessary for accurate response and resulting forces in dynamic analysis ", J. appl. mech. , A.S.M.E. , 42, 1975.
- [13] J.H. VUGTS, J.M. HINES, R. NATARAJA and W. SCHUMM, " Modal superposition vs direct solution techniques in the dynamic analysis of offshore structures ", Proceedings of 2nd International Conference on Behavior of Offshore Structures, Vol. 2, LONDON, 1979.

[14] K. BARGI, " Contribution au calcul dynamique de structures ayant un grand nombre de degrés de liberté ", Thèse de Docteur Ingénieur de l'université de Paris- VI, FRANCE, 1985.

[15] O.E. HANSTEEN and K. BELL, " On the accuracy of mode superposition analysis in structural dynamics ", E.E.S.D , Vol. 7, 1979

[16] A.J. SALAMONTE, " Consideration on the residual Contribution in modal analysis ", E.E.S.D., Vol. 10, 1982

[17] N. AMOKRANE et S.E. DJELLAB, " Batiment (R+6) portiques autostables (A.P.C. de KOUBA) ", Mémoire d'ingénieur, Dept G.C., Ecole Nationale Polytechnique, ALGERIE ,1985.

[18] J.H. WILKINSON, " The algebraic eigenvalue problem ", Oxford University Press, LONDON, 1965.

[19] K.K. GUPTA, " Vibration of frames and other structures with banded stiffness matrix ", International Journal for numerical methods in engineering , Vol. 2, 1970.

[20] J.A. BLUME, " Dynamic characteristics for multistory buildings ", Journal of the structural division, 1968.

[21] R.J. GUYAN, " Reduction of stiffness and mass matrices ", A.I.A.A. Journal ,Vol. 3, 1965.

[22] J.N. RAMSDEN and M.G. STOKER. " Mass condensation : a semi-automatic method for reducing the size of vibration problems ". International journal for numerical methods in engineering , Vol. 1, 1969.

[23] E.L. WILSON. " The static condensation algorithm ", E.E.S.D., Vol. 6., 1972.

[24] A.S. VELETOS and C.E. VENTURA. " Efficient analysis of dynamic response of linear systems ", E.E.S.D., Vol. 12, 1984.

[25] J.W. COOLEY, P.A.W. LEWIS and P.D. WELCH. " The fast fourier transform and its applications ", I.E.E.E., Transactions on Education, Vol. 12, N°1 , 1969.

[26] T.K CAUGHEY, " Classical normal modes in damped linear systems ", J. appl. mech., Vol. 27, 1960.

[27] N.F. RIEGER. " The relationship between finite element analysis and modal analysis ", Sound and Vibration, 1986.

[28] E.L. WILSON and J. PENZIEN. "Evaluation of orthogonal damping matrices ", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, 1972.

[29] D. WILLIAMS, " Dynamic loads in aeroplanes under given impulsive loads with particular reference to landing and gust loads on a large flying boat ", GREAT BRITAIN R.A.E. Reports SNE9909 and 9316, 1945.

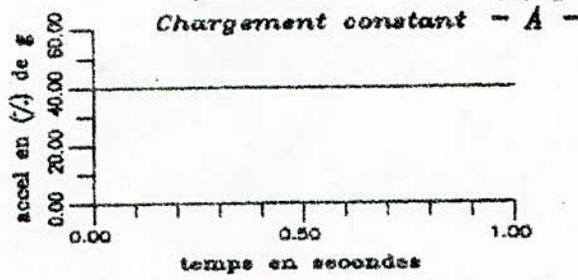
[30] R.L. BISPLINGHOFF and H. ASHLEY, " Aeroelasticity ", Addison - Wesley, Reading, Mass, 1955.

[31] R.M. GRAY, B. BERGE and A.M. KOEHLER, " Dynamic analysis of the north sea forties field platforms ", Proc. 7th Offshore Technology Conference, Paper 2250, Organised by A.S.P.E. et Al., Houston Texas, U.S.A., 1975.

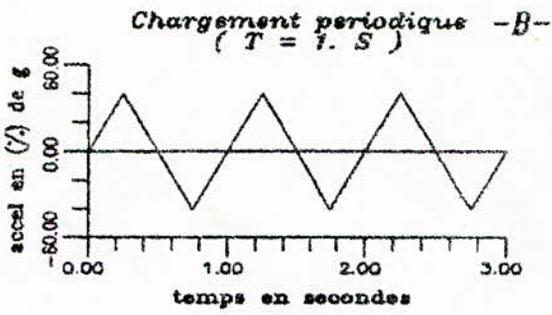
[32] P.W. MARSHALL and R.K. KINRA., " Dynamic and fatigue analysis for deepwater fixed platforms ", Second Annual A.S.C.E. -E.M.D. Speciality Conference, RAYLEIGH, N.C., 1977.

[33] M.G. HALLAM, R.H. BOUDREAUX, D.N. MILLMAN et N.J. HEAF, " Dynamic fatigue analysis of Murichison tower structure ", Proc. 10th Offshore Technology conference, Paper 3183, Organised by A.S.P.E. et Al., Houston Texas, U.S.A., 1978.

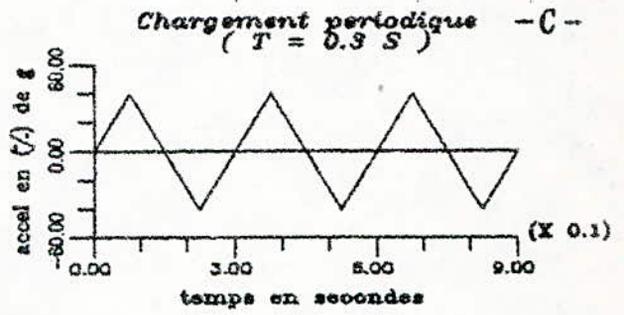
ANNEXE



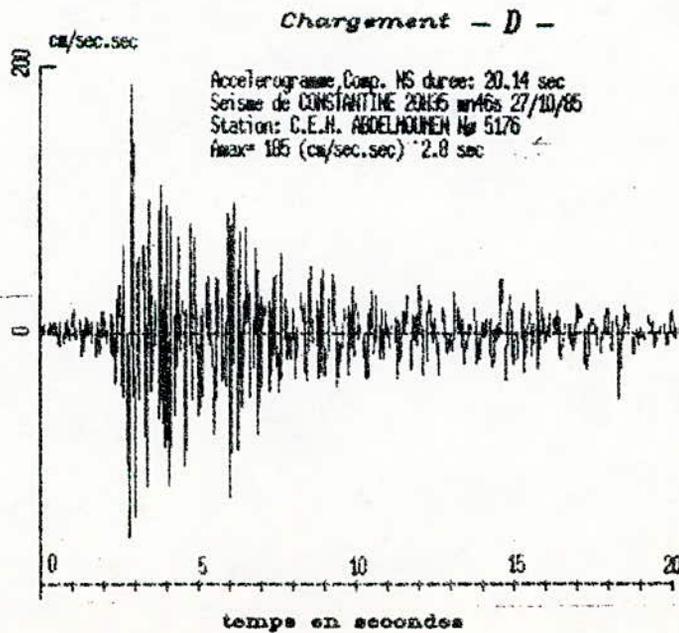
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 1 - CHARGEMENTS

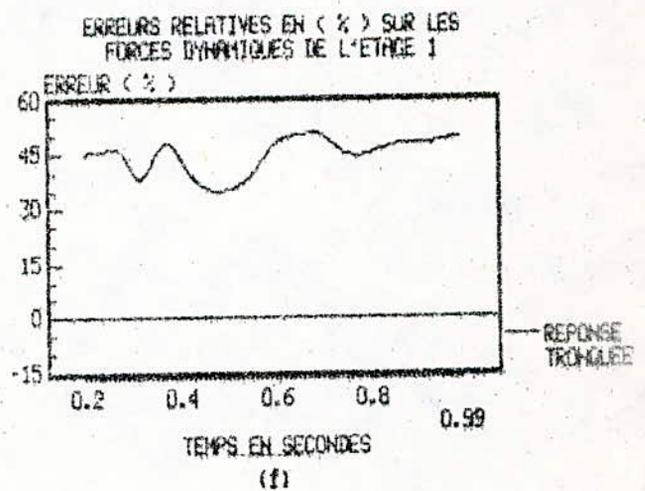
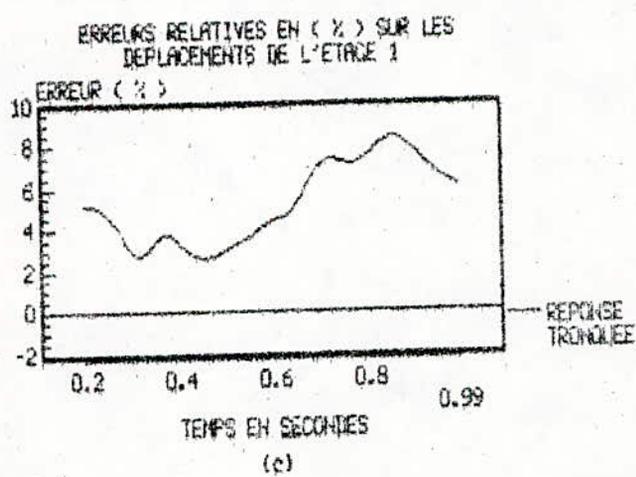
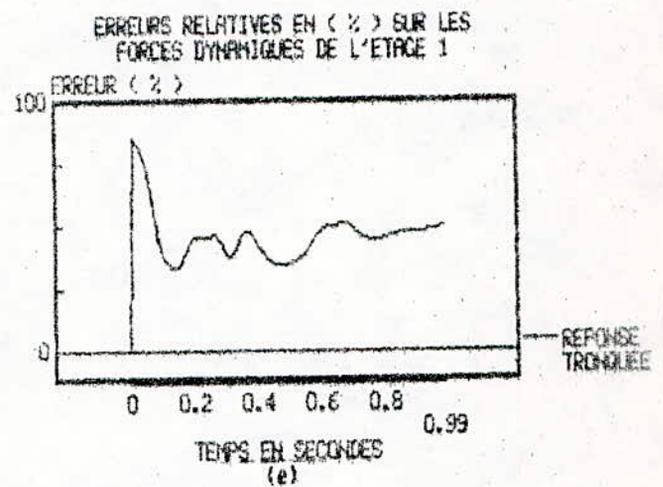
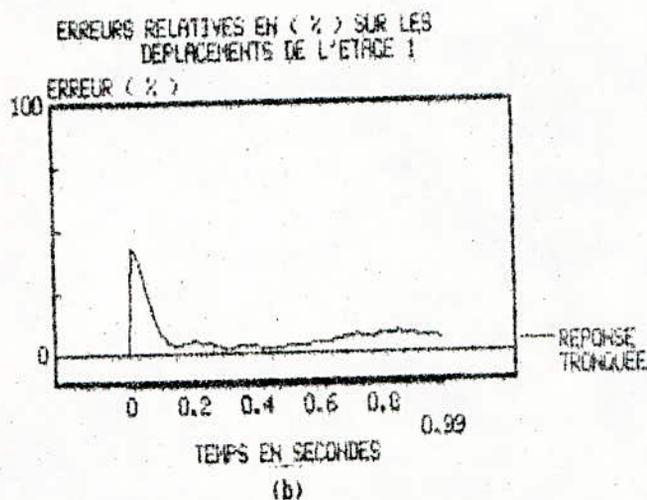
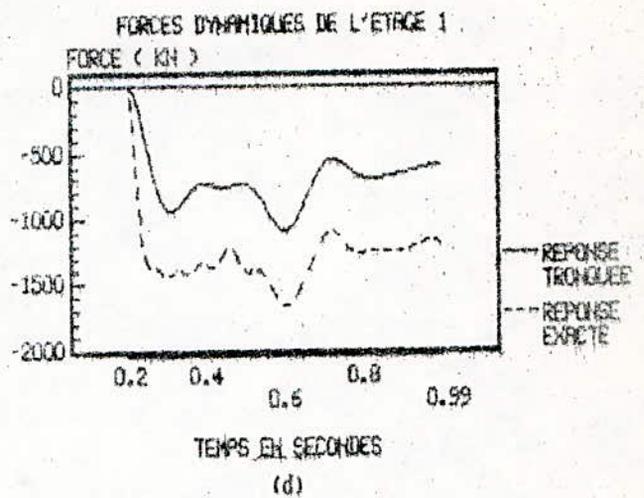
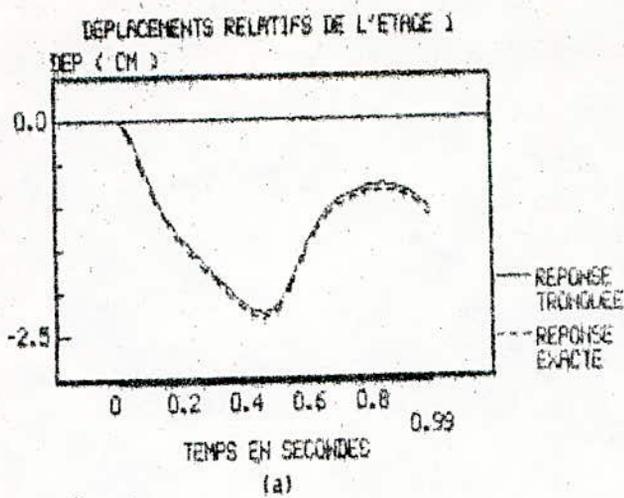


FIG. 2 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES
(CHARGEMENT CONSTANT - A -)

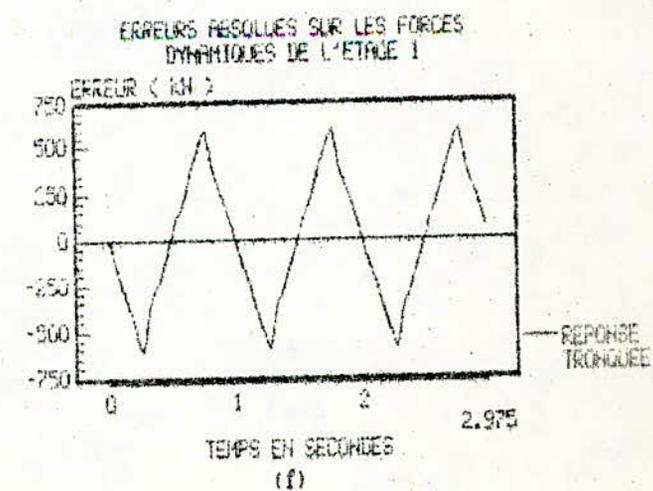
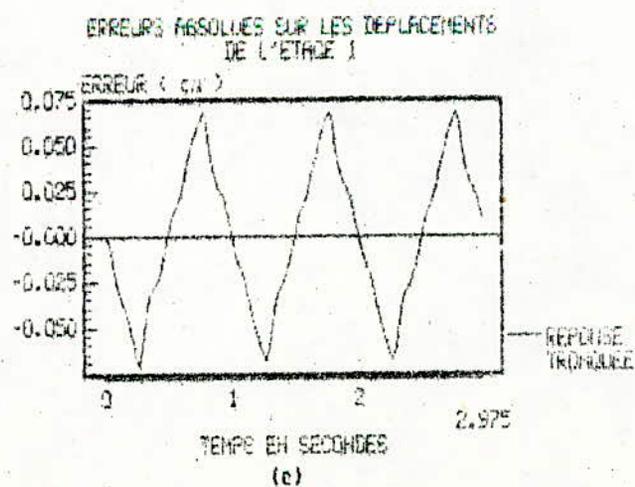
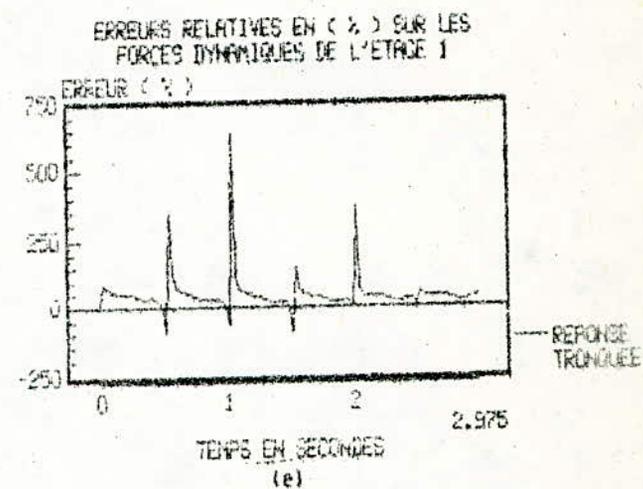
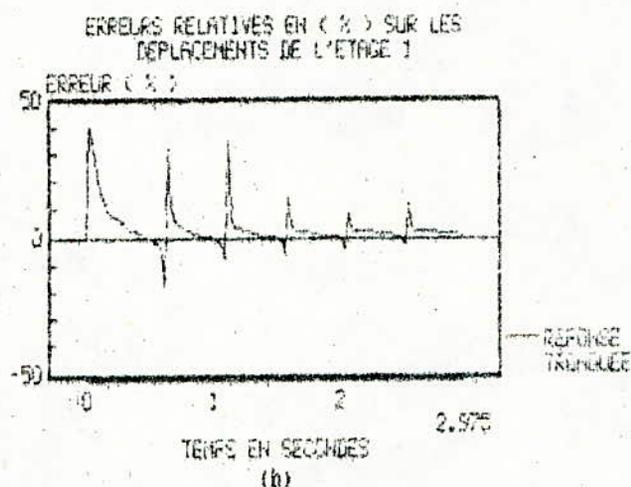
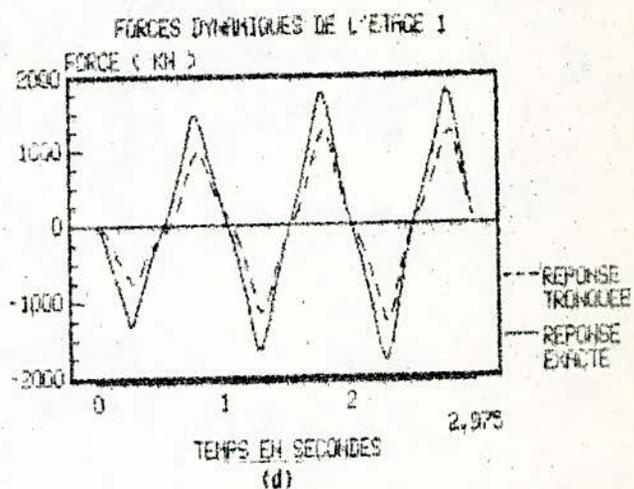
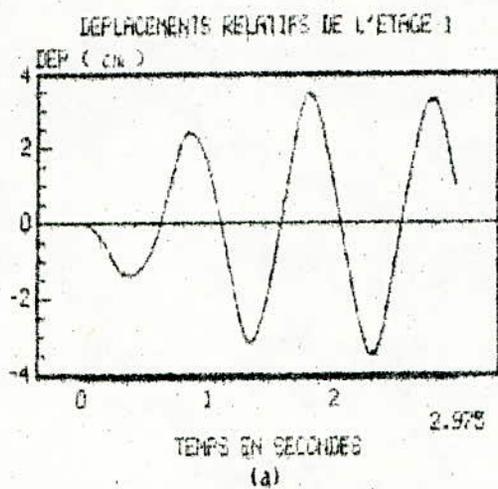


FIG. 3 SUPERPOSITION DE TROIS MODES
(CHARGEMENT PERIODIQUE - B -)

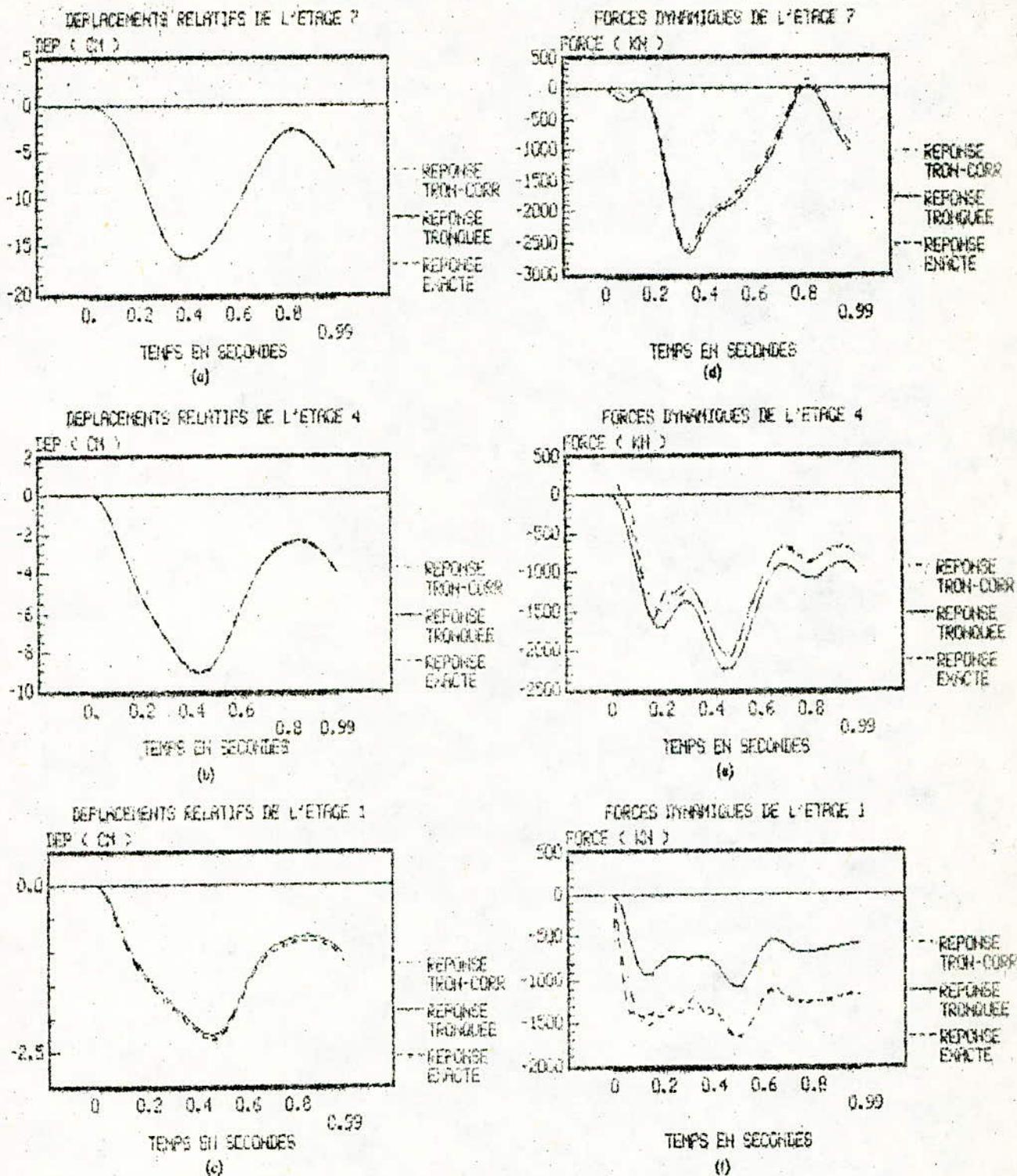
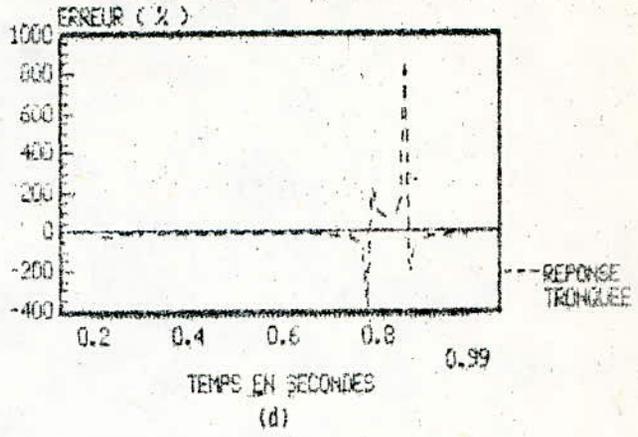
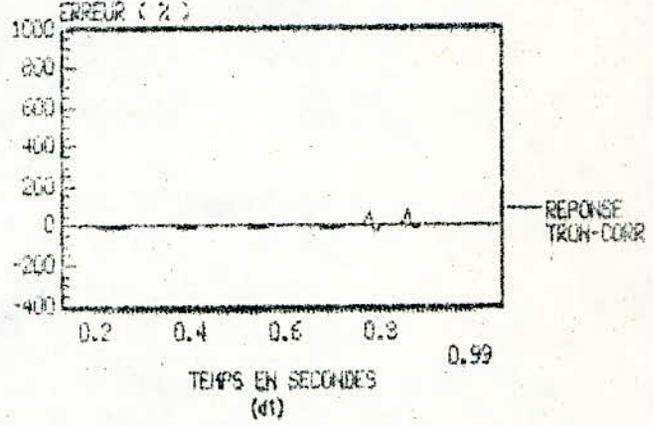


FIG. 4 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES (CHARGEMENT CONSTANT - A -)

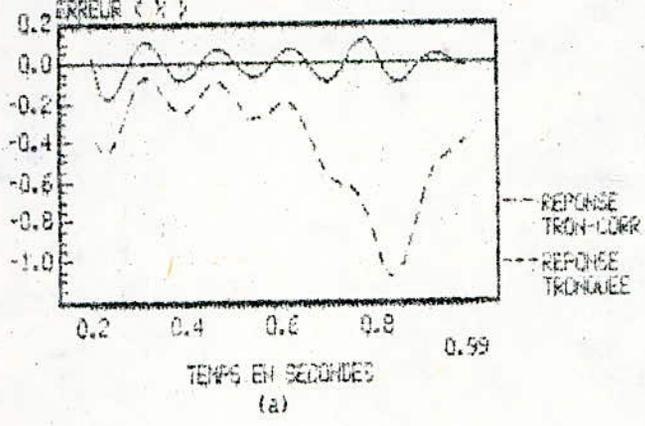
ERREURS RELATIVES EN (%) SUR LES FORCES DYNAMIQUES DE L'ETAGE 7



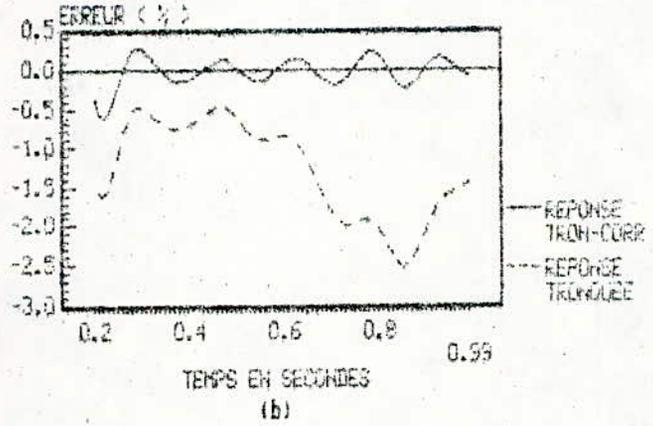
ERREURS RELATIVES EN (%) SUR LES FORCES DYNAMIQUES DE L'ETAGE 7



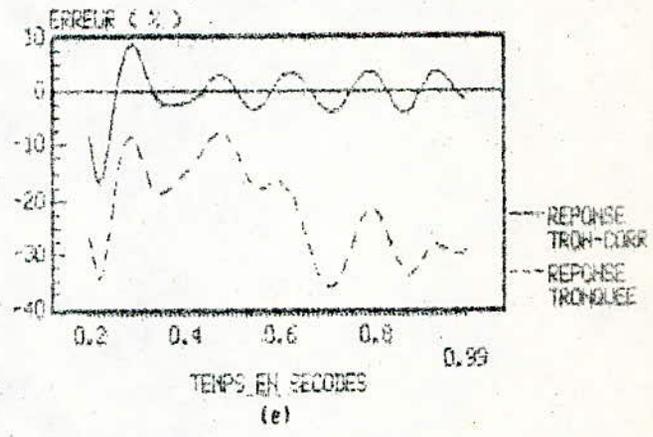
ERREURS RELATIVES EN (%) SUR LES DEPLACEMENTS DE L'ETAGE 7



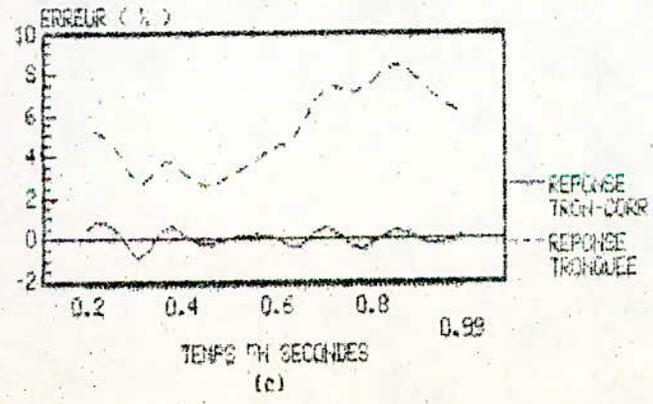
ERREURS RELATIVES EN (%) SUR LES DEPLACEMENTS DE L'ETAGE 4



ERREURS RELATIVES EN (%) SUR LES FORCES DYNAMIQUES DE L'ETAGE 4



ERREURS RELATIVES EN (%) SUR LES DEPLACEMENTS DE L'ETAGE 1



ERREURS RELATIVES EN (%) SUR LES FORCES DYNAMIQUES DE L'ETAGE 1

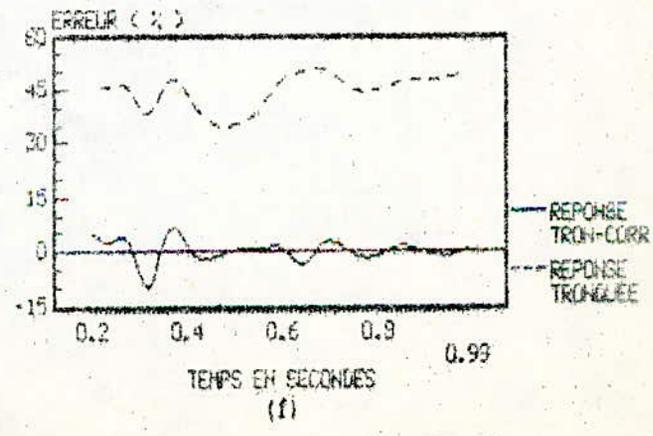
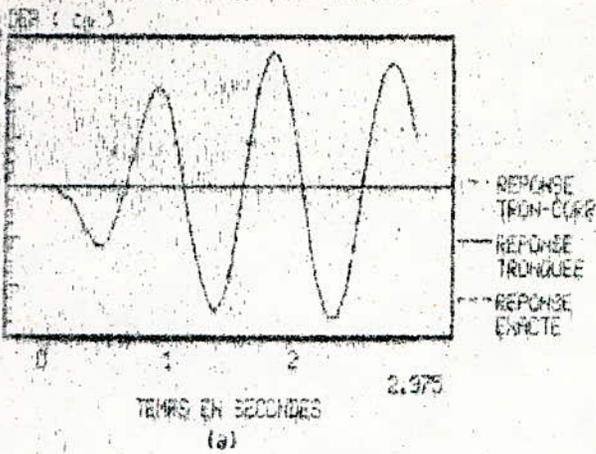
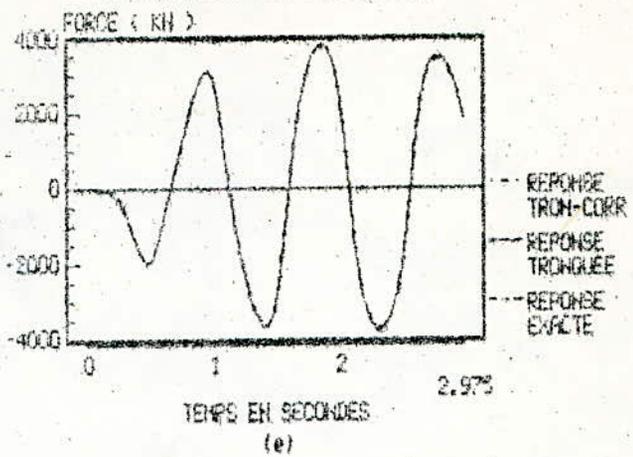


FIG. 5 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES (CHARGEMENT CONSTANT - A -)

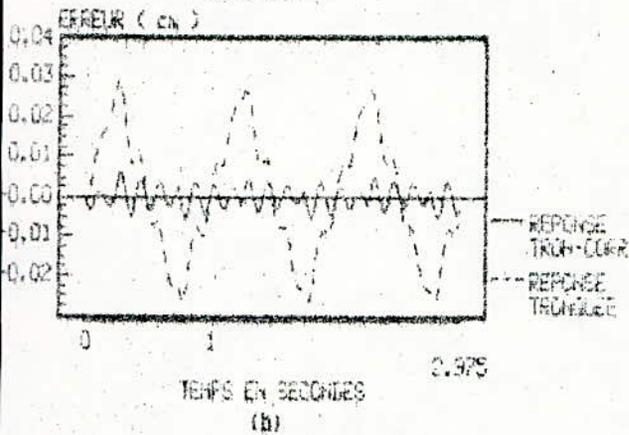
DEPLACEMENTS RELATIFS DE L'ETAGE 7



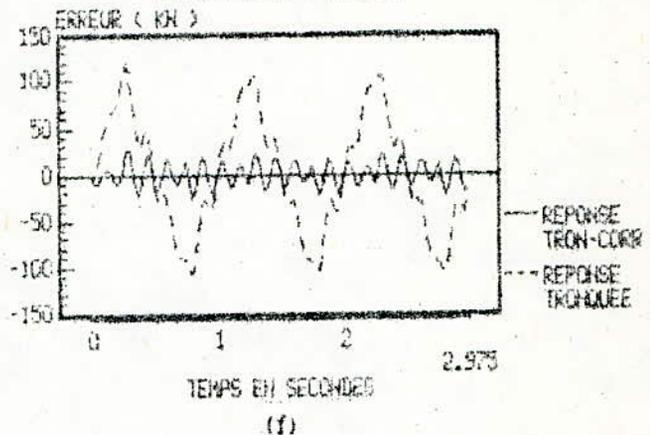
FORCES DYNAMIQUES DE L'ETAGE 7



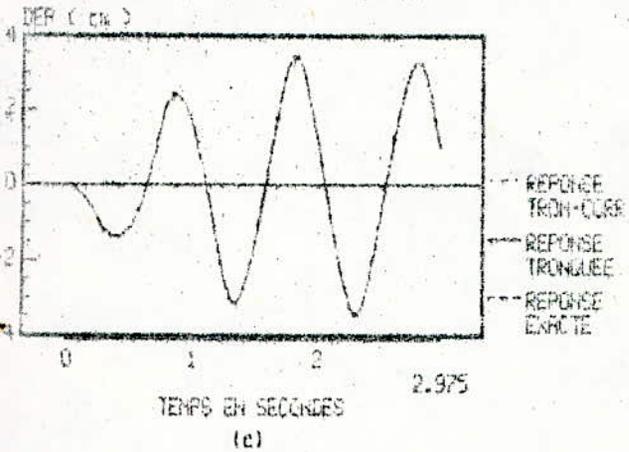
ERREURS ABSOLUES SUR LES DEPLACEMENTS DE L'ETAGE 7



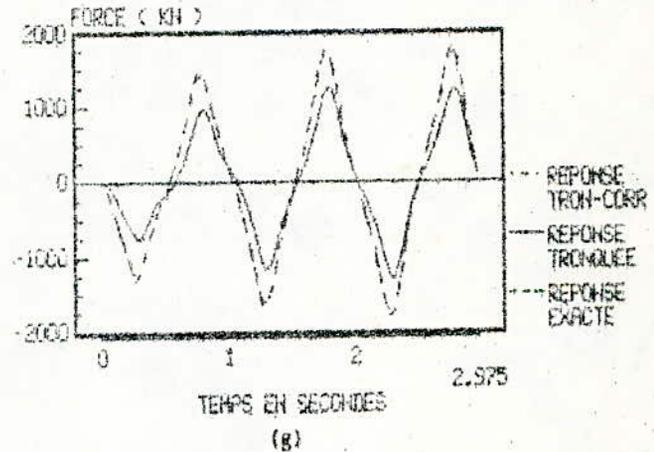
ERREURS ABSOLUES SUR LES FORCES DYNAMIQUES DE L'ETAGE 7



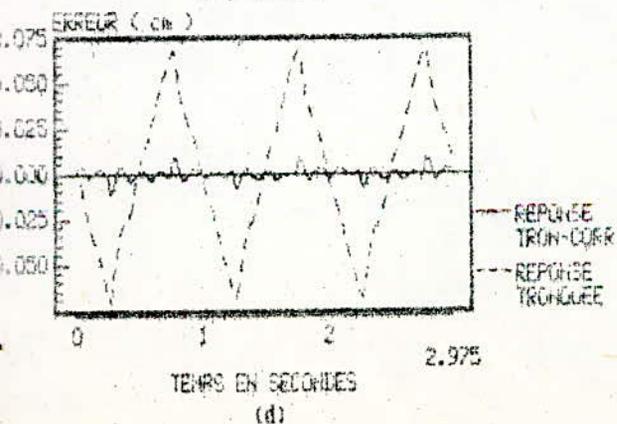
DEPLACEMENTS RELATIFS DE L'ETAGE 1



FORCES DYNAMIQUES DE L'ETAGE 1



ERREURS ABSOLUES SUR LES DEPLACEMENTS DE L'ETAGE 1



ERREURS ABSOLUES SUR LES FORCES DYNAMIQUES DE L'ETAGE 1

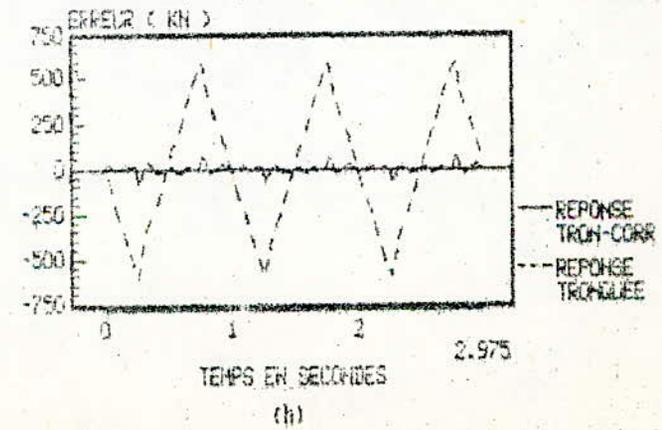


FIG. 6 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES (CHARGEMENT PERIODIQUE - B -)

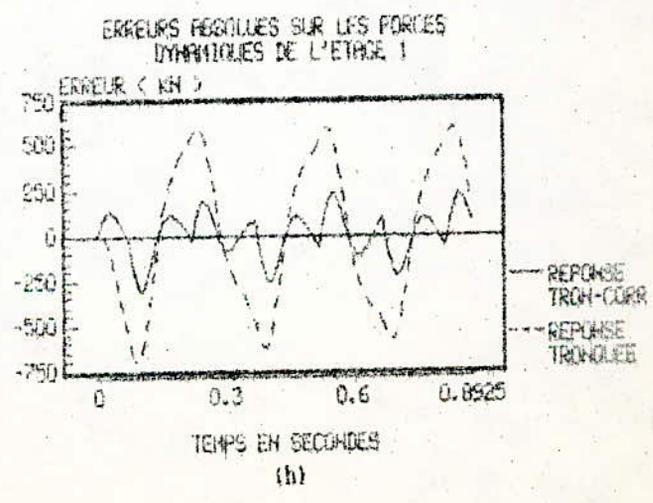
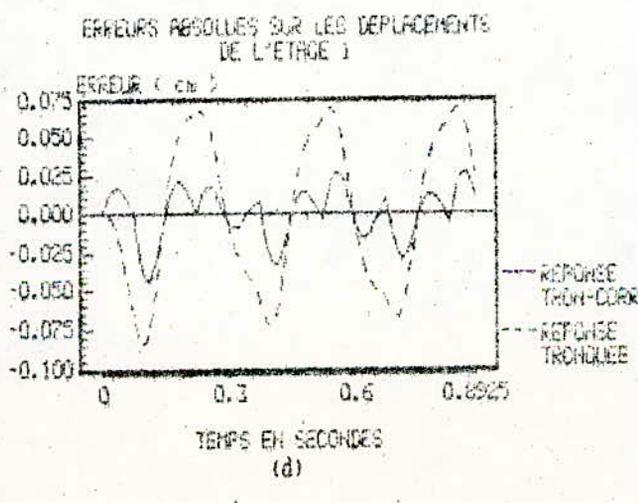
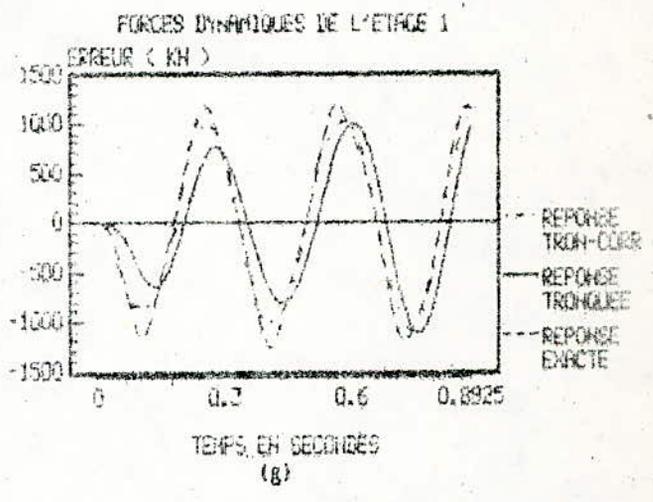
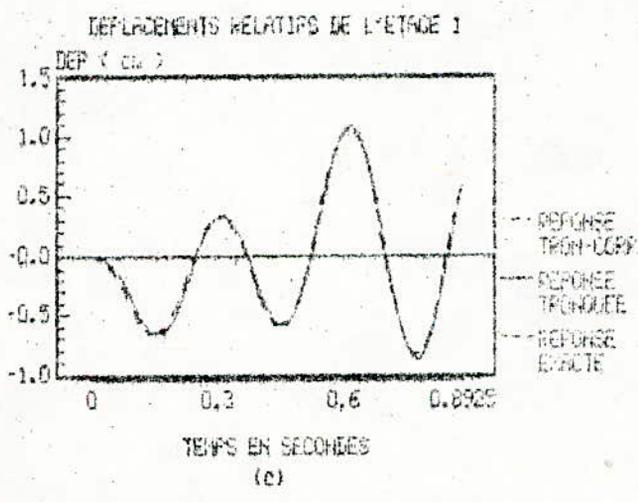
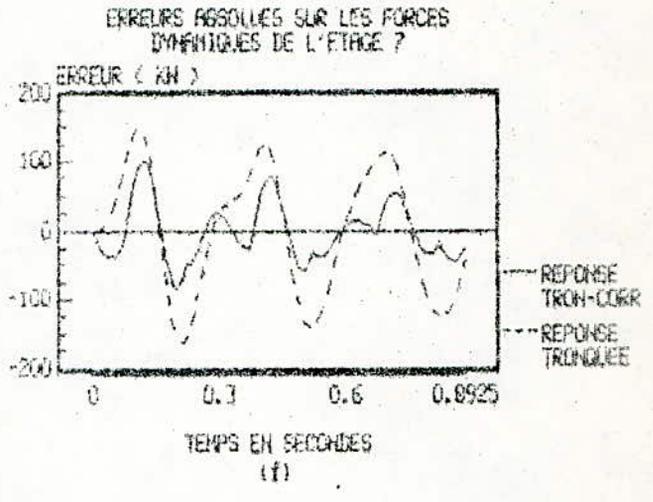
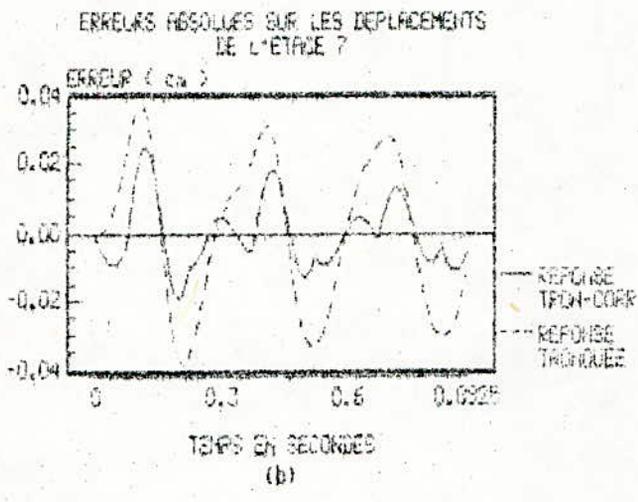
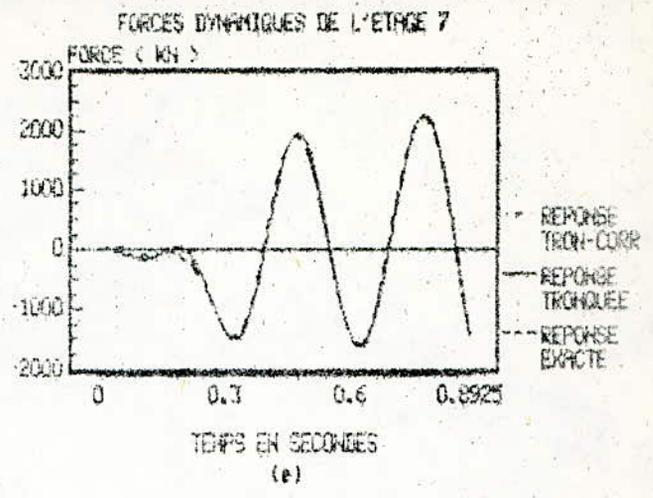
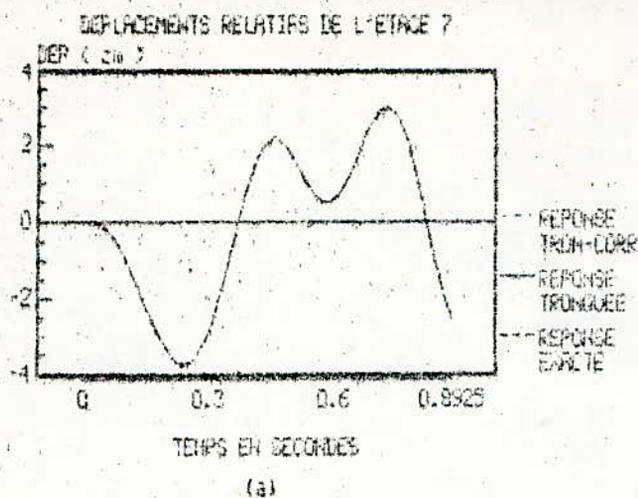


FIG. 7 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES (CHARGEMENT PERIODIQUE - C -)

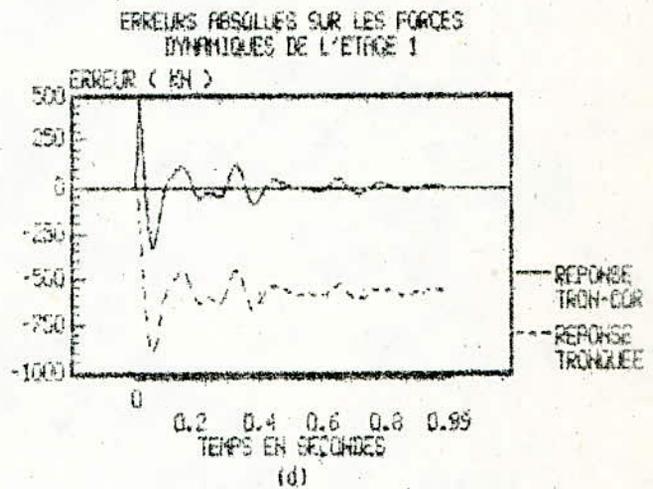
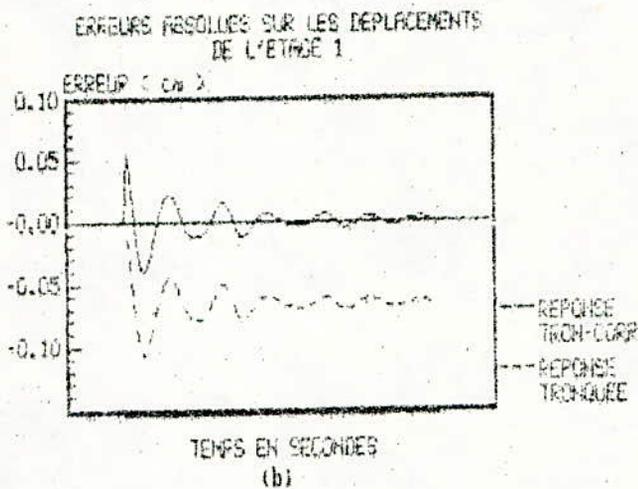
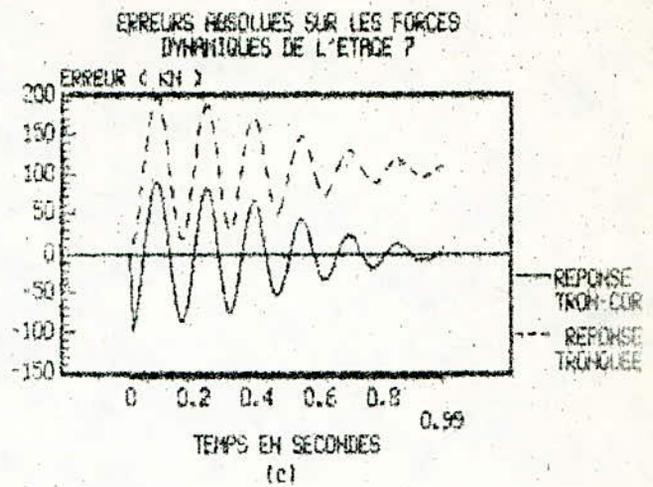
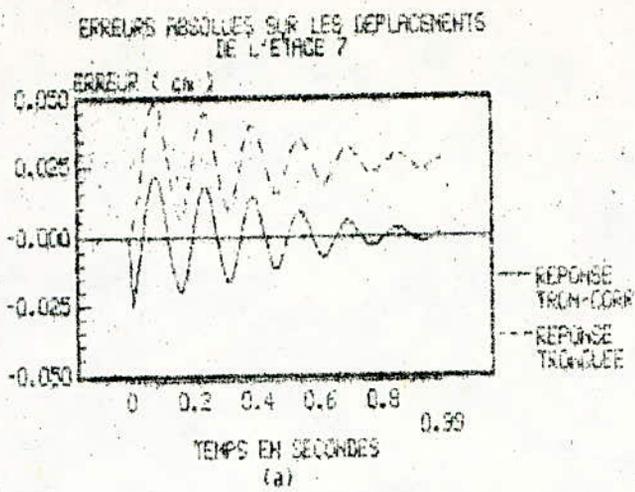


FIG. 8 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES (CHARGEMENT CONSTANT - A -)

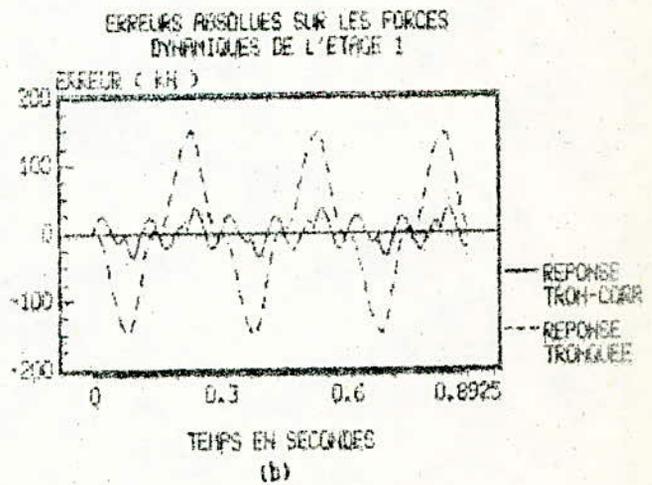
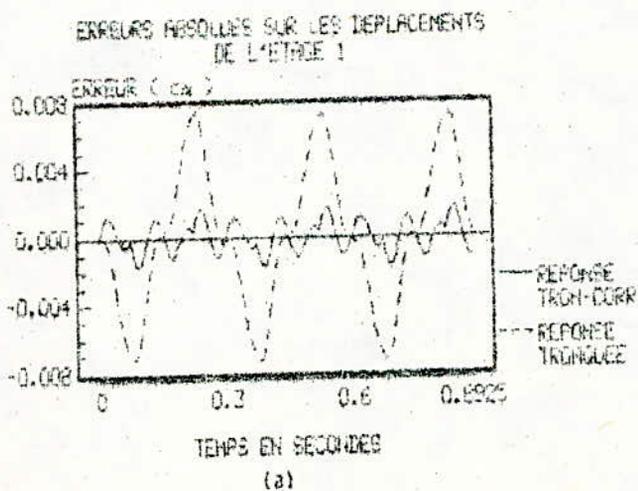


FIG. 9 - SUPERPOSITION DE SIX MODES (CHARGEMENT PERIODIQUE - C -)

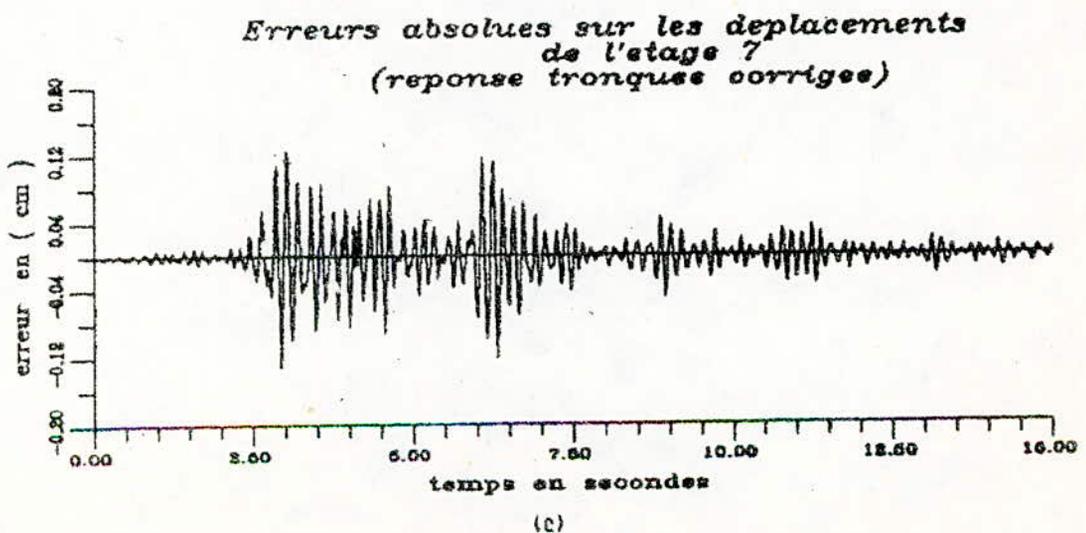
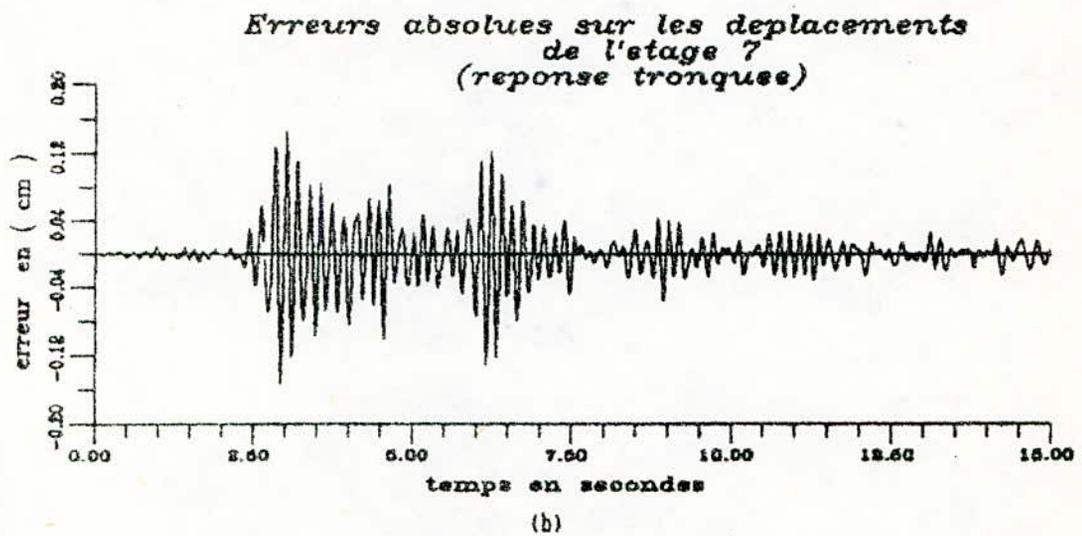
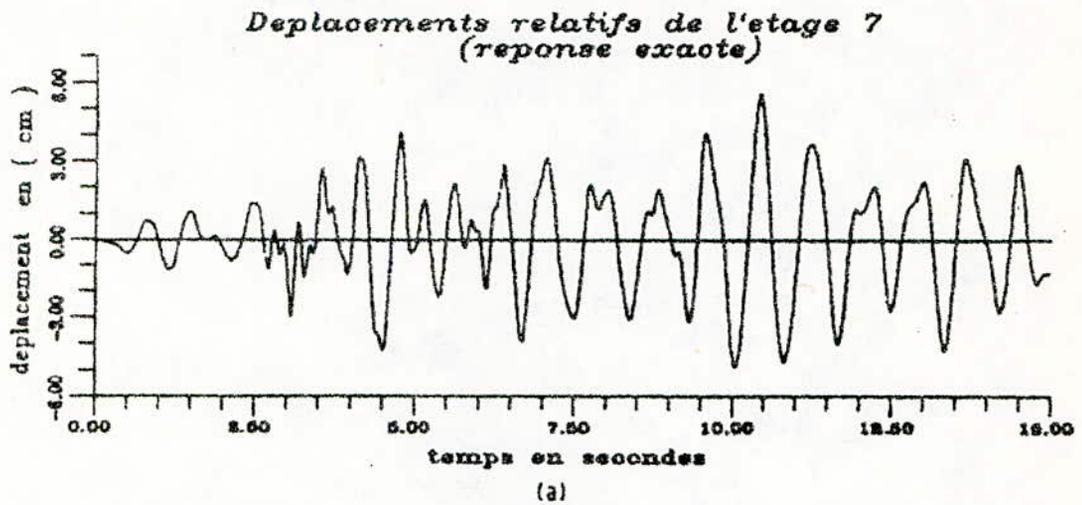
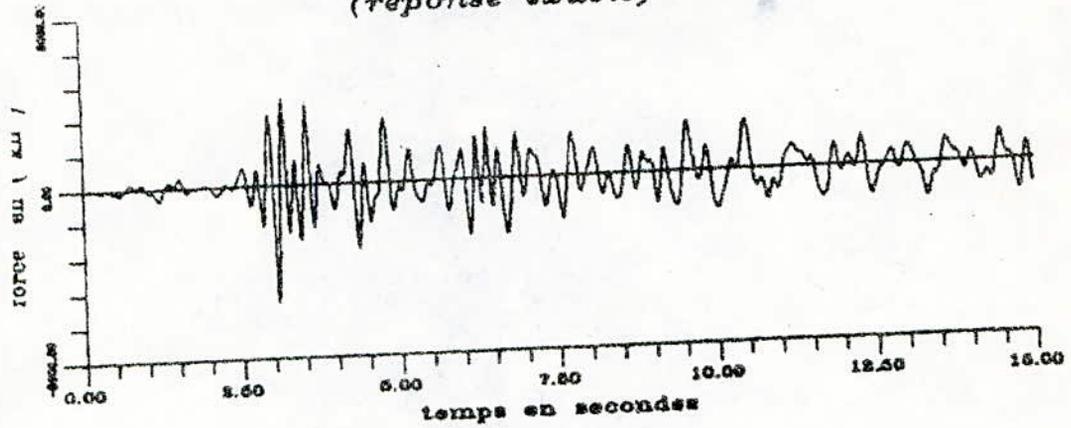


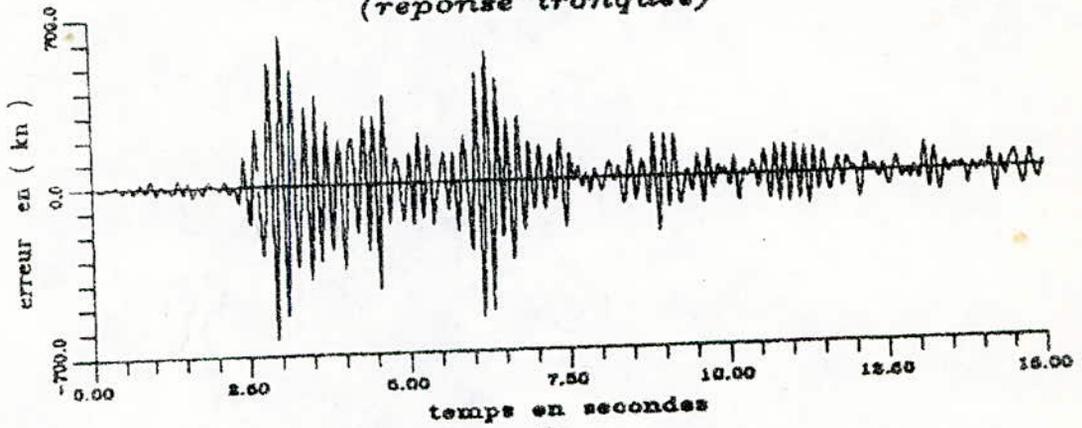
FIG.10 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES
(CHARGEMENT - D -)

*Forces dynamiques de l'etage 7
(reponse exacte)*



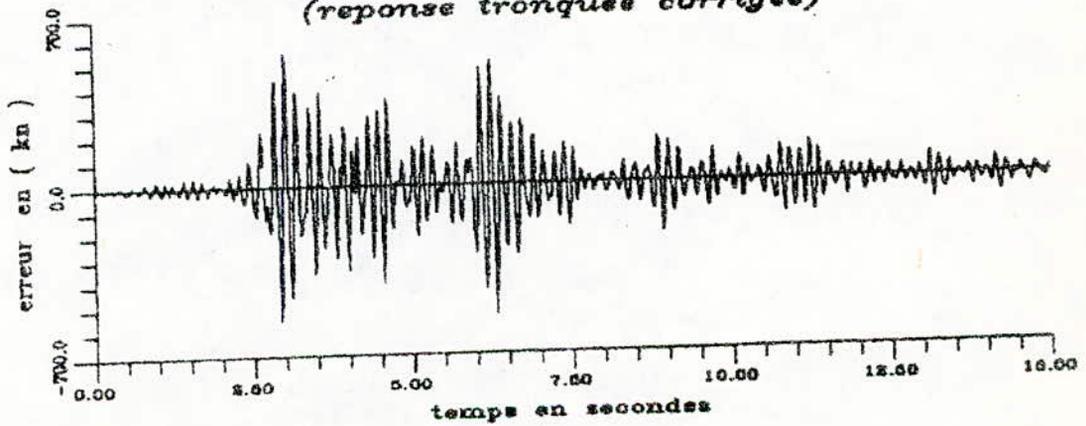
(a)

*Erreurs absolues sur les forces dynamiques
de l'etage 7
(reponse tronquee)*



(b)

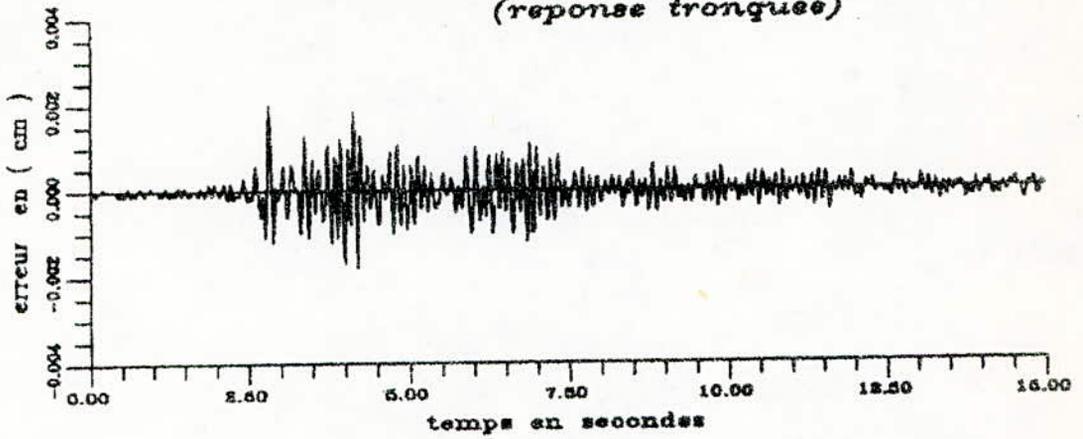
*Erreurs absolues sur les forces dynamiques
de l'etage 7
(reponse tronquee corrigee)*



(c)

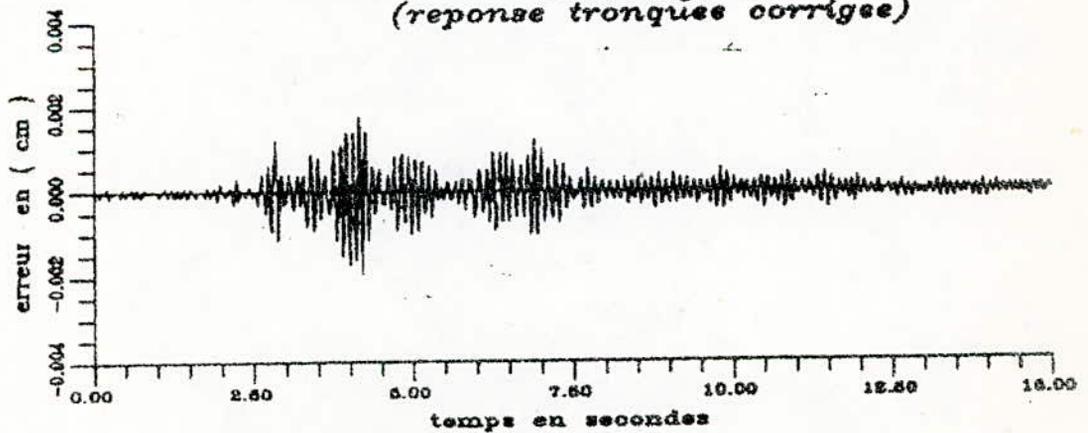
FIG. 11 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES
(CHARGEMENT - D -)

Erreurs absolues sur les déplacements
de l'étage 7
(reponse tronquee)



(a)

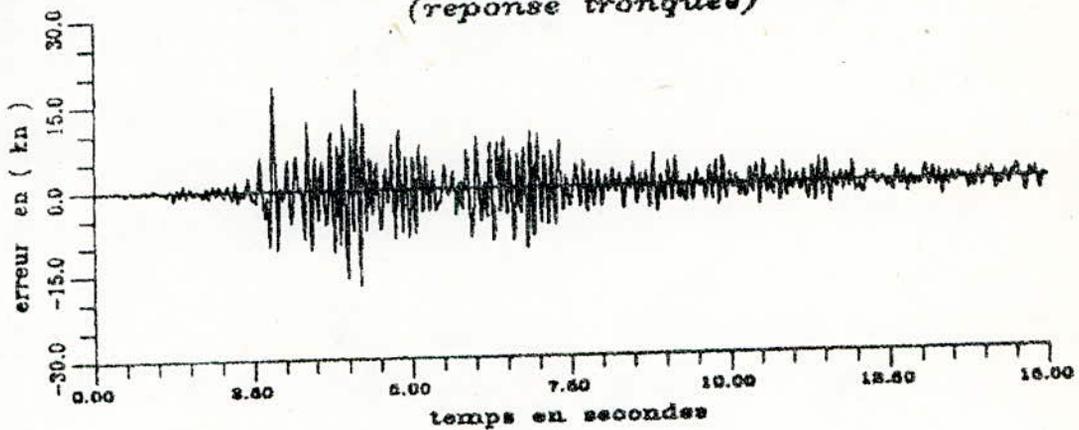
Erreurs absolues sur les déplacements
de l'étage 7
(reponse tronquee corrigee)



(b)

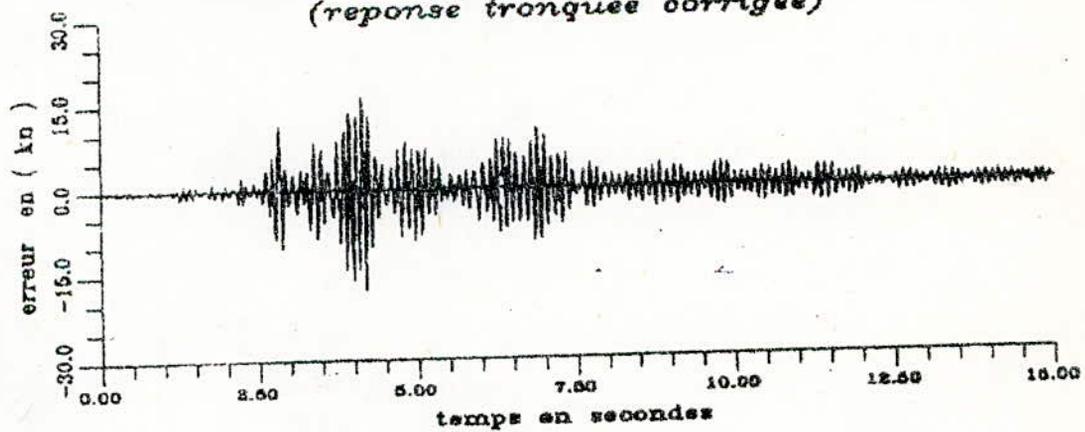
FIG.12 - SUPERPOSITION DE CINQ MODES
(CHARGEMENT - D -)

Erreurs absolues sur les forces dynamiques
de l'etage 7
(reponse tronquee)



(a)

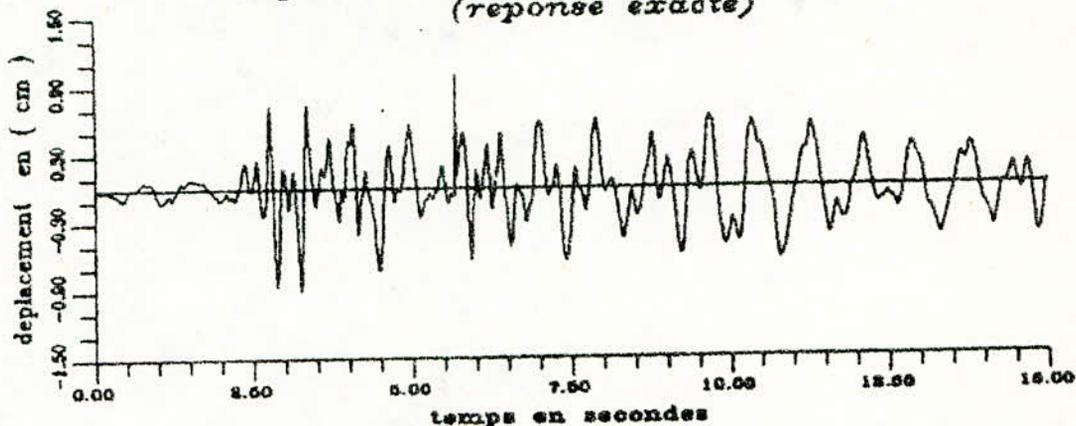
Erreurs absolues sur les forces dynamiques
de l'etage 7
(reponse tronquee corrigee)



(b)

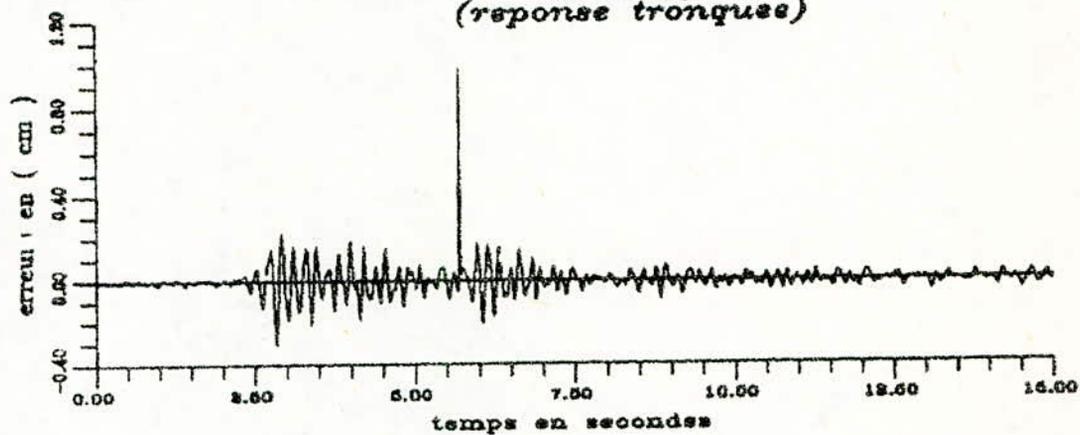
FIG.13 - SUPERPOSITION DE CINQ MODES
(CHARGEMENT - D -)

*Deplacements relatifs de l'etage 1
(reponse exacte)*



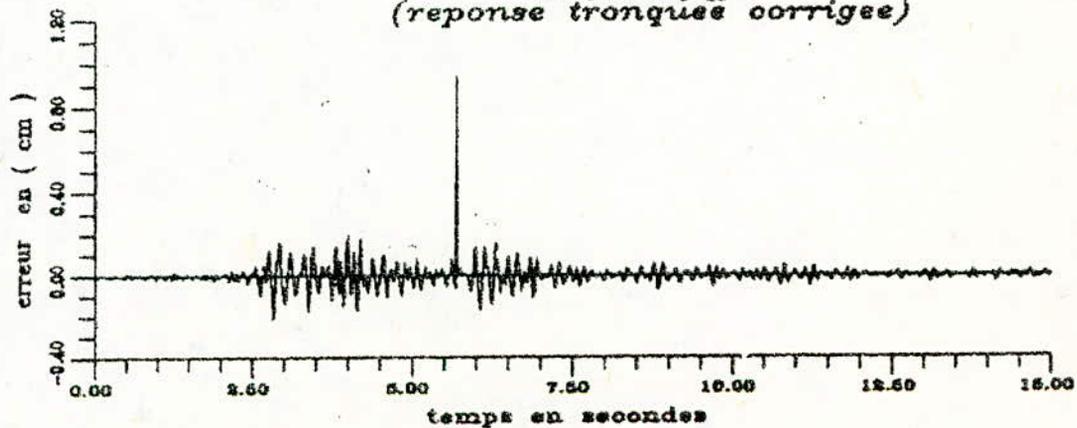
(a)

*Erreurs absolues sur les deplacements
de l'etage 1
(reponse tronquee)*



(b)

*Erreurs absolues sur les deplacements
de l'etage 1
(reponse tronquee corrigee)*



(c)

FIG.14 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES
(CHARGEMENT - D -)

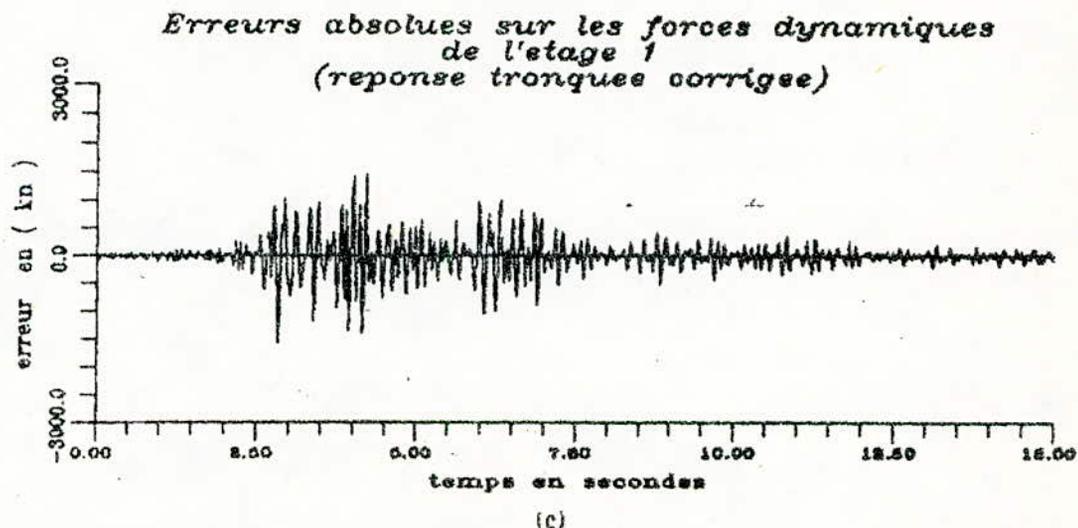
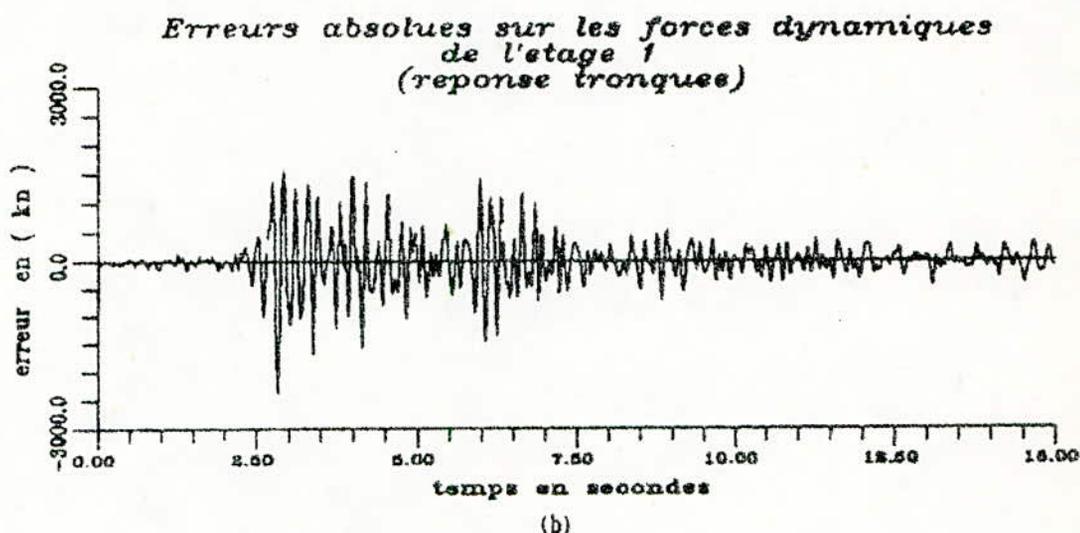
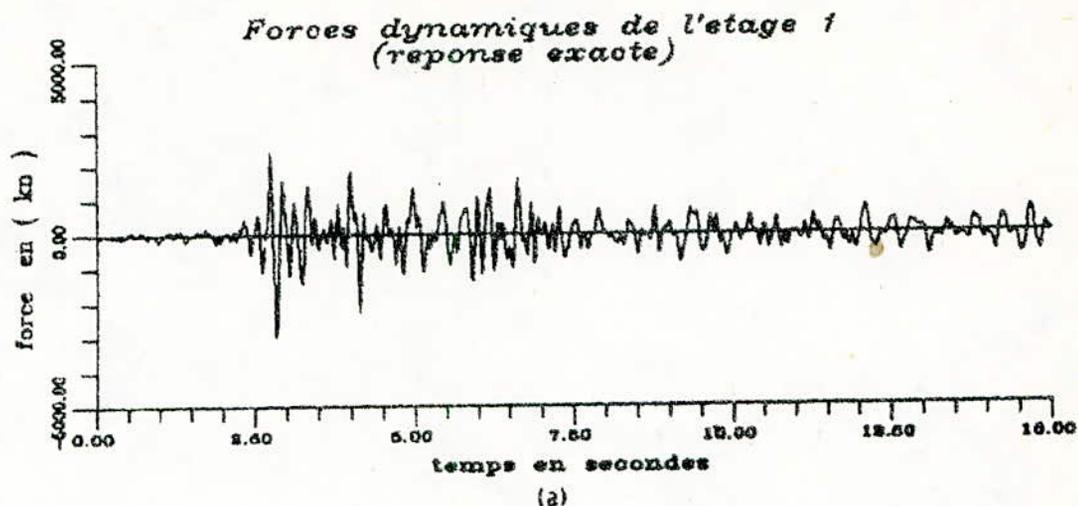
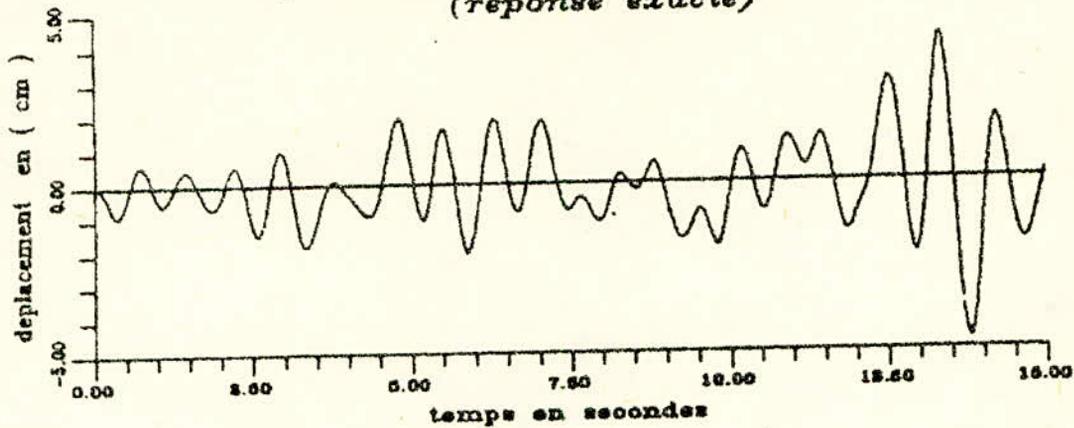


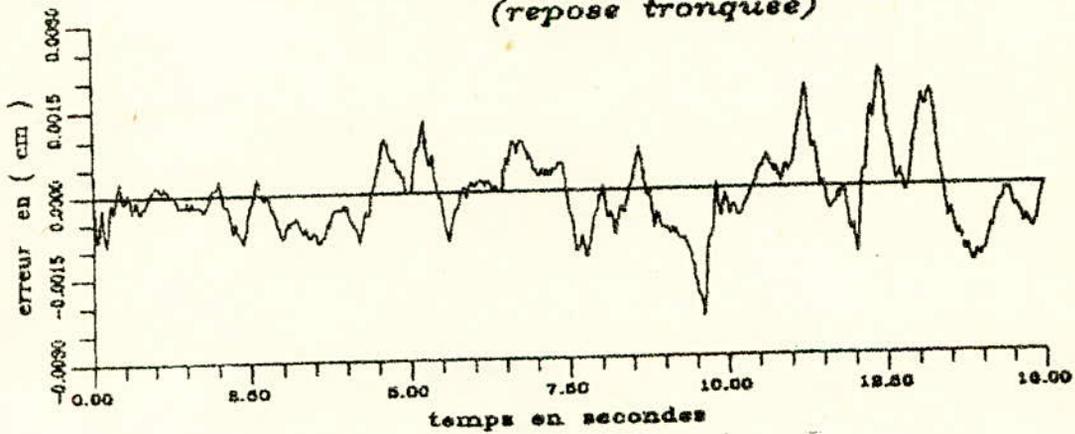
FIG.15 - SUPERPOSITION DE TROIS MODES
(CHARGEMENT - D -)

*Deplacements relatifs de l'etage 7
(reponse exacte)*



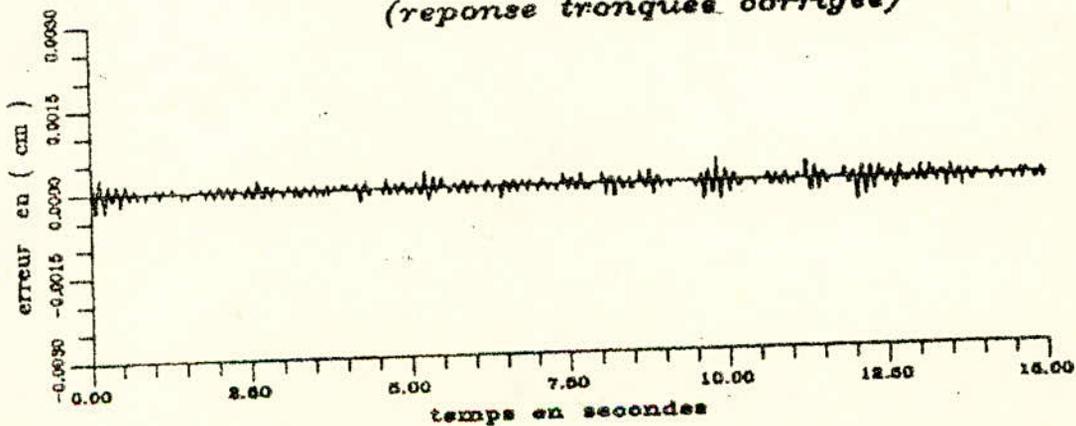
(a)

*Erreurs absolues sur les déplacements
de l'etage 7
(reponse tronquee)*



(b)

*Erreurs absolues sur les déplacements
de l'etage 7
(reponse tronquee corrigee)*



(c)

FIG.16 - SUPERPOSITION DE QUATRE MODES
(CHARGEMENT - DM -)

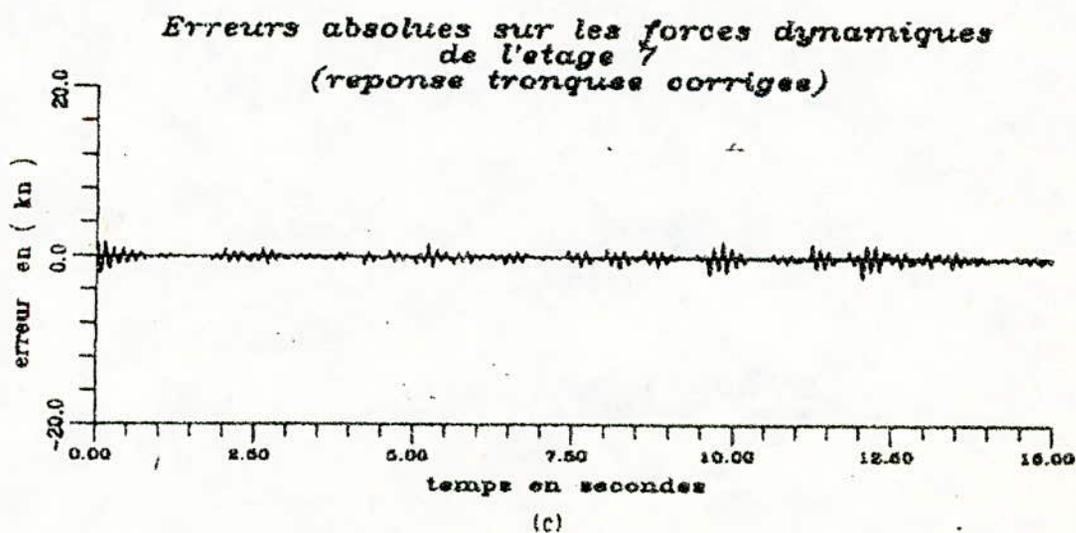
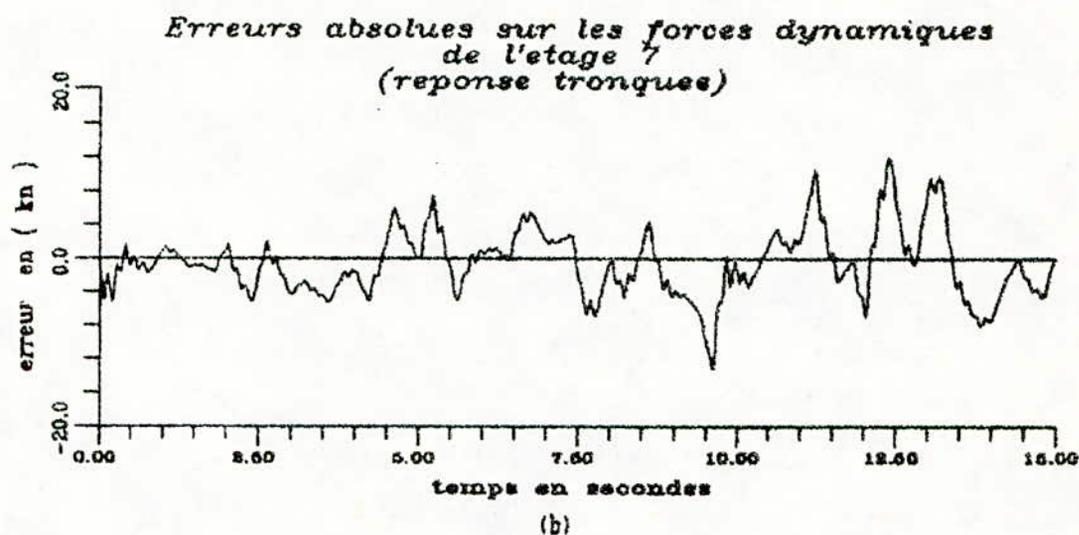
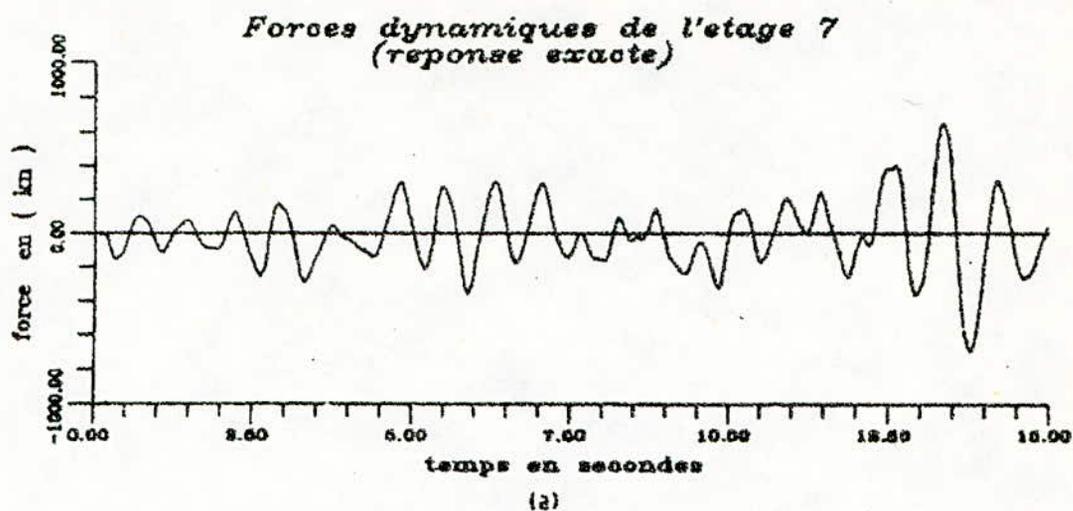
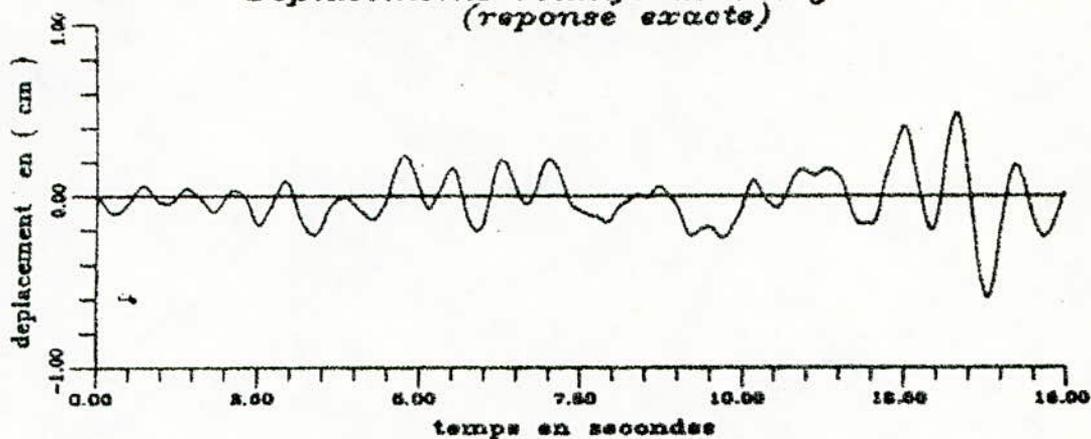


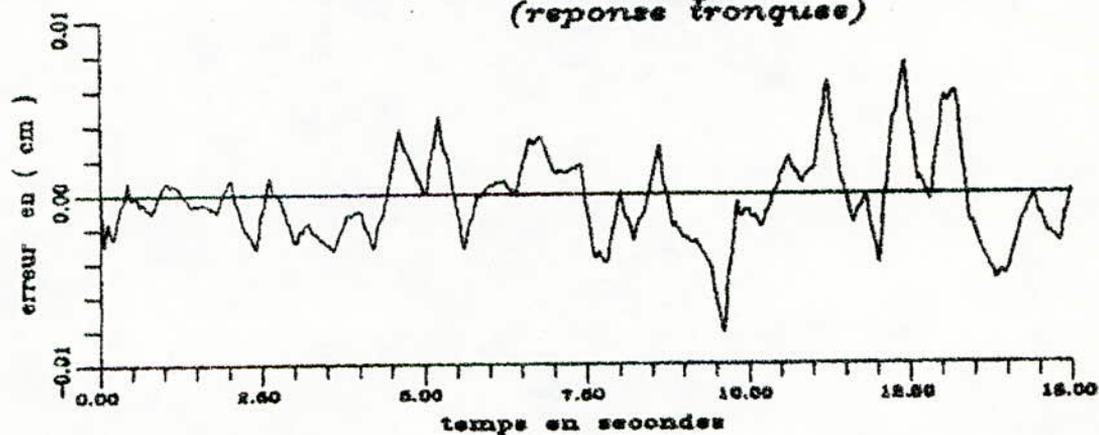
FIG.17 - SUPERPOSITION DE QUATRE MODES
(CHARGEMENT - DM -)

*Deplacements relatifs de l'etage 1
(reponse exacte)*



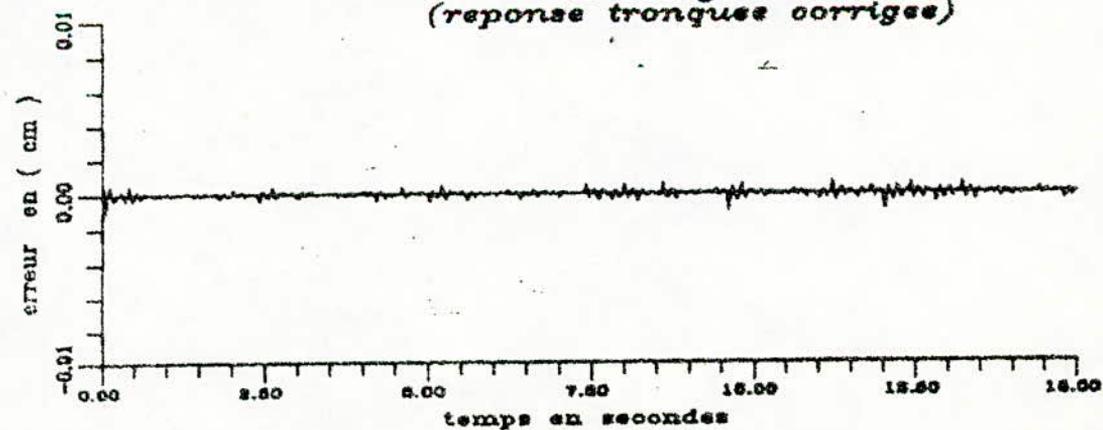
(a)

*Erreurs absolues sur les déplacements
de l'etage 1
(reponse tronquee)*



(b)

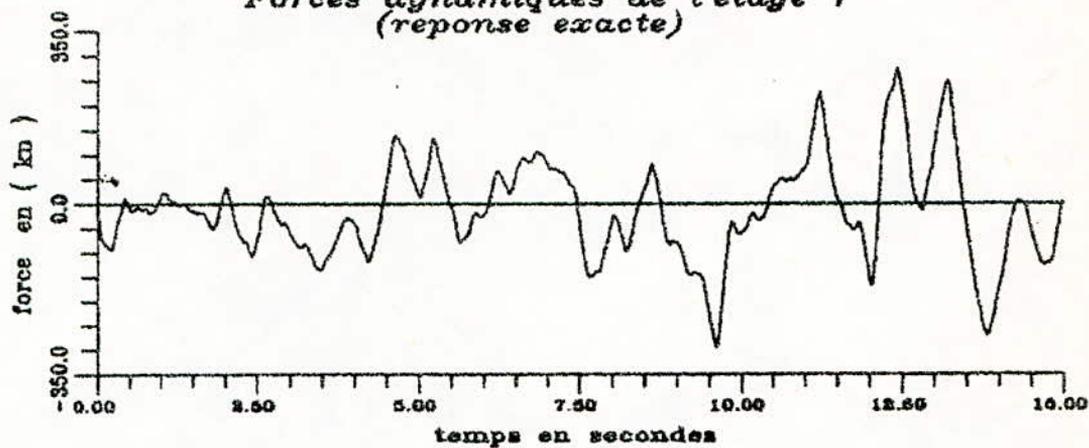
*Erreurs absolues sur les déplacements
de l'etage 1
(reponse tronquee corrigee)*



(c)

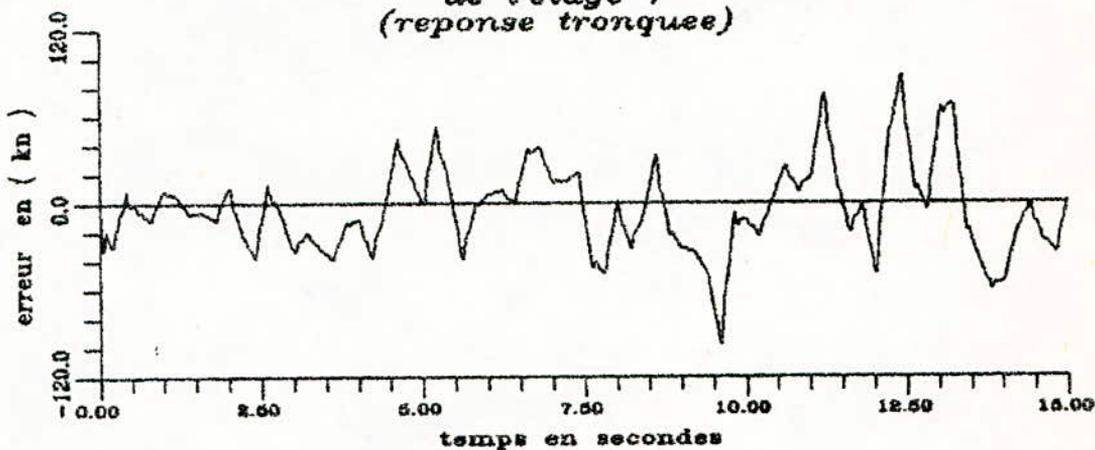
FIG.18 - SUPERPOSITION DE QUATRE MODES
(CHARGEMENT - DM -)

*Forces dynamiques de l'etage 1
(reponse exacte)*



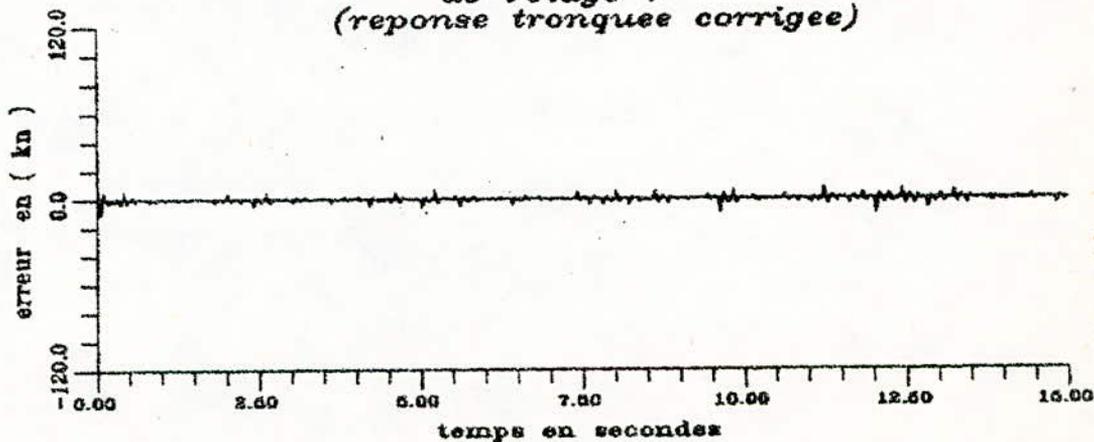
(a)

*Erreurs absolues sur les forces dynamiques
de l'etage 1
(reponse tronquee)*



(b)

*Erreurs absolues sur les forces dynamiques
de l'etage 1
(reponse tronquee corrigee)*



(c)

FIG.19 - SUPERPOSITION DE CINQ MODES
(CHARGEMENT - DM -)