

4/02



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
Ecole Nationale Polytechnique

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

Département
Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'étude

Pour l'obtention d'un Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique

Thème

UTILISATION DE FONCTION DE POIDS BASÉE SUR LA MÉTHODE DE DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT POUR DÉTERMINER LE FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTE EN BIDIMENSIONNEL

Proposé & dirigé par :
Mr. Y. BELKACEMI
Mr. B. K. HACHI

Etudié par :
Ahmed Lamine BOUKHALKHAL

Promotion 2002

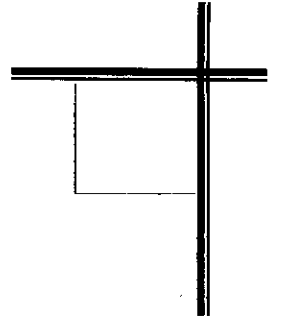
E.N.P 10, Avenue Hassan Badi, EL HARRACH, ALGER
Tél. (021) 52.53.01/03 Fax. (021) 52.29.73 E-mail : ENP@IST.CERIST.DZ

DÉDICACES

*Je dédie ce travail à mes parents qui j'espère
trouveront ici le fruit de leurs amours et leurs
souffrances pour moi ;*

A mes frère et mes sœurs ;

*A Kamel, Thameur, Hassen et tous ce qui ont
vécus avec moi les pires et heureux moments de ma
vie surtout mes amis de 1^{ère} et 2^{ème} année TCT et ma
promotion.*



Remerciements

On remercie Dieu, tout puissant de nous avoir donné le courage et la capacité d'arriver à ce stade du savoir et de présenter ce modeste travail.

Je tiens particulièrement à exprimer, à travers ces quelques lignes, toute ma gratitude et mon profond respect à mes promoteurs : Mr Y. BELKACEMI et Mr B.K. HACHI, pour leur suivi permanent et surtout l'immense patience.

Je remercie également l'ensemble des membres du jury qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir accepter d'examiner et évaluer mon travail.

Mes meilleurs sentiments vont aussi aux membres de ma famille, dont la présence à mes côtés, et le soutien constant, surtout pendant les moments difficiles, m'a permis d'achever ce travail.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué à la finalisation de cette thèse, tout en particulièrement : R. Atia , B. Jamel, E. Ahmed, Y. Abderaouf et B. Adel ...

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE I	NOTIONS SUR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE
I.1. Introduction.....	4
I.2. Notions préliminaires sur la mécanique de la rupture.....	5
I.2.1. Notions & hypothèses.....	5
I.2.2. Modes fondamentaux de rupture.....	6
I.2.3. Champ de contraintes et champ de déplacement.....	7
I.3. Facteur d'intensité de contrainte (approche locale).....	8
CHAPITRE II	MÉTHODE DE DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT
II.1. Introduction.....	9
II.2. Principe de la méthode de discontinuité de déplacement.....	10
II.3. Procédure de le MDD dans un solide infini.....	10
II.4. Procédure numérique.....	13
II.5. Transformation de coordonnées.....	15
II.6. Coefficients d'influence.....	16
CHAPITRE III	TECHNIQUE DE FONCTION DE POIDS BASÉE SUR LA MDD EN BIDIMENSIONNEL
III.1. Introduction.....	19
III.2. La détermination du facteur d'intensité de contrainte par fonction de Green.....	20
III.3. Technique de fonction de poids.....	23
III.4. La détermination de fonction de poids.....	26
CHAPITRE IV	ORGANIGRAMME DU PROGRAMME
IV.1. Plan du programme.....	27
IV.2. Temps d'exécution.....	30
IV.3. Présentation du programme.....	30
CHAPITRE V	EXEMPLES, RÉSULTATS & INTERPRÉTATIONS
V.1. Introduction.....	32
V.2. Première catégorie d'exemples (fonction de Green).....	33
V.3. Deuxième catégorie d'exemples (fonction de poids).....	49
V.4. Conclusion.....	59
CONCLUSION GÉNÉRALE.....	60

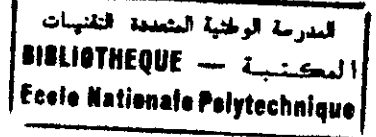
BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE

المكتبة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE.



Depuis plus d'un demi siècle, les ingénieurs sont de plus en plus conscients du besoin d'évaluation plus précise des contraintes locales dues aux irrégularités géométriques (défauts, fissures, inclusions, ...). Pour atteindre la fiabilité et pour éviter des ruptures aux conséquences graves, l'ingénieur doit être persuadé de l'importance des concentrations de contraintes provoquées par telles irrégularités [6].

Parmi les problèmes que posent ce genre de situation, le problème de la fissuration, qui représente un problème de mécanique dans lequel les données sont constituées, par la géométrie de la structure, la configuration de fissure, les efforts appliqués, la loi de comportement à la déformation du matériau considéré. Le calcul consiste à trouver les paramètres mécaniques influents sur la fissure.

Dans ces calculs, nous considérons des structures bidimensionnelles et nous supposons le comportement linéaire de ces dernières, vu que dans la plupart des cas pratiques, elles travaillent dans le domaine élastique. Nous aurons donc à déterminer le champ de contrainte et le champ de déplacement dans le domaine fissuré et calculer le facteur d'intensité de contrainte.

Trois principales méthodes numériques sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de structures en mécanique : méthode des éléments finis, méthode des différences finies et la méthode des équations intégrales de frontière. Fréquemment, nous relevons des études comparatives de l'efficacité de la méthode des éléments finis par rapport à la méthode des équations intégrales et nous relevons que l'on oppose l'une par rapport à l'autre.

Chacune des deux méthodes numériques a ses avantages. Cependant, la méthode des équations intégrales offre des avantages certains dans des configurations de problèmes dont :

- La résolution en domaines infinis.
- La résolution de problèmes de corps fissurés.

Le dernier domaine d'application en tridimensionnel reste un champ d'étude en cours de développement.

La famille des équations intégrales de frontière est divisée en deux groupes : la méthode directe et la méthode indirecte. La méthode directe est plus développée « Brebbia (1987) ». L'approche indirecte, plus intuitive, est la moins populaire et regroupe la méthode des contraintes fictives ou la méthode de discontinuité de déplacement. Cette méthode s'est avérée la plus performante pour traiter les matériaux fissurés et les problèmes de contact [2].

La formulation de la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel en coordonnées cartésiennes est due à « Crooch (1976 & 1983) ». Cette contribution a permis d'assurer une plus grande popularité de la méthode et a pu être utilisée dans la modélisation de problème de contact de failles « Crawford, (1983) », ruptures autour de cavités « Kondo (1989) » et en élasto-dynamique [2].

Pour des corps statiquement chargés, la technique de fonction de Poids est un meilleur concept d'évaluer des facteurs d'intensité de contraintes, et peuvent être obtenus par l'évaluation d'un simple intégral. « Bueckner (1970) » a présenté le concept de fonction de poids pour l'analyse les fissures en bidimensionnelles. « Rice (1972) » a montré que les fonctions de poids peuvent être déterminées en différenciant la solution élastique connue pour un champ de déplacement de la longueur de la fissure [7].

Les fonctions de Poids peuvent être obtenues par une méthode de calcul numérique, comme la méthode de discontinuité de déplacement.

L'objet du présent travail est l'étude de fissuration et calcul de facteur d'intensité de contrainte, en utilisant la technique de fonction de Poids basé sur la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel.

Cette étude comporte cinq chapitres, le premier chapitre est une introduction à la mécanique de la rupture.

Le deuxième chapitre, on présentera la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel.

Puis dans le troisième chapitre, on va présenter la technique de fonction de Poids pour les problèmes statiques.

Le quatrième chapitre consacré pour l'organisation du programme qui traite le problème de fissuration en bidimensionnel et calcul de facteur d'intensité de contrainte.

Et enfin, le cinquième chapitre comporte les exemples traités, et leurs résultats et ses interprétations.

CHAPITRE I

NOTIONS SUR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE

CHAPITRE I

NOTIONS SUR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE

I.1. INTRODUCTION.

Une pièce de machine de construction ou un organe soumis à des sollicitations mécaniques, thermiques ou chimiques..., peut le conduire à sa détérioration.

Le calcul de ces pièces a le plus souvent pour objet de prévenir les déformations importantes et est en général fondées sur la théorie de l'élasticité et la résistance des matériaux.

Ces calculs supposent tous que les matériaux sont parfaitement continus, sans lacune ou fissure, et que dans la déformation aucun vide ni fissure n'apparaît.

Mais, on a aussi observé des ruptures soudaines en domaine élastique. On a constaté qu'on trouvait toujours à l'origine d'une rupture un défaut, lacune ou fissure, plus au moins grandes ; par ailleurs de nombreux accidents ont montré que de tels défauts peuvent conduire à des ruptures brutales, parfois catastrophiques, lorsque les conditions de chargement et d'environnement sont non propices.

La mécanique de la rupture est une philosophie de conception visant à développer un critère de ruine et une science de l'étude du comportement d'une structure procédant des fissures initiales [1].

On constate deux approches d'analyse utilisées en mécanique de la rupture :

1. L'analyse du champ des contraintes en tête de fissure, c'est l'approche par les facteurs d'intensité de contraintes «approche locale».

2. L'analyse énergétique proposée par « GRIFFITH 1920 » qui procède par le calcul de l'énergie disponible pour la propagation de fissure dans la structure, cette énergie dépend du potentiel total du système « *le taux de restitution d'énergie* ».

Dans ce chapitre on va définir des notions et des hypothèses sur la mécanique de la rupture. On parle sur les différents modes d'ouverture d'une fissure en trois dimensions et sur les équations concernant le champ de déformations et de contraintes auprès du fond de fissure, puis on va essayer de mettre en évidence la notion des facteurs d'intensité de contraintes.

I.2. NOTIONS PRELIMINAIRES SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE.

I.2.1. NOTIONS & HYPOTHESES :

On considère une fissure plane ayant un front rectiligne (Fig. I.1) celle-ci correspond à une discontinuité de déplacement. Nous formulons trois hypothèses importantes :

- 1- Le matériau est supposé homogène et isotrope, avec un comportement élastique linéaire.
- 2- On néglige les forces de volume et les accélérations (la rupture est supposée statique).
- 3- On se restreint aux problèmes plans (bidimensionnels).

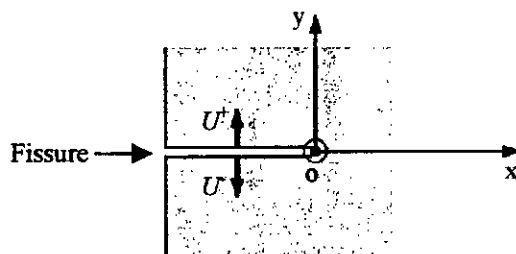


Fig. I.1 : Notations pour une fissure plane

I.2.2. MODES FONDAMENTAUX DE RUPTURE :

On définit trois modes de déplacement (ouvertures) des bords d'une fissure (Figure I.2).

Pour les problèmes plans :

- **Mode I (ouverture)** : une sollicitation de traction perpendiculaire au plan de la fissure (figure I.2a), ce mode est souvent le plus dangereux.
- **Mode II (glissement plan)** : une sollicitation de cisaillement dans le plan de la fissure dont l'action est perpendiculaire au bout de la fissure (figure I.2b).

Pour les problèmes anti-plan :

- **Mode III (glissement anti-plan)** : une sollicitation de cisaillement parallèle au fond de la fissure (figure I.2c)

Ce dernier mode est résolu par une représentation 3D anti-plan tandis que les deux précédents sont résolus par une analyse 2D en contrainte ou en déformation plane.

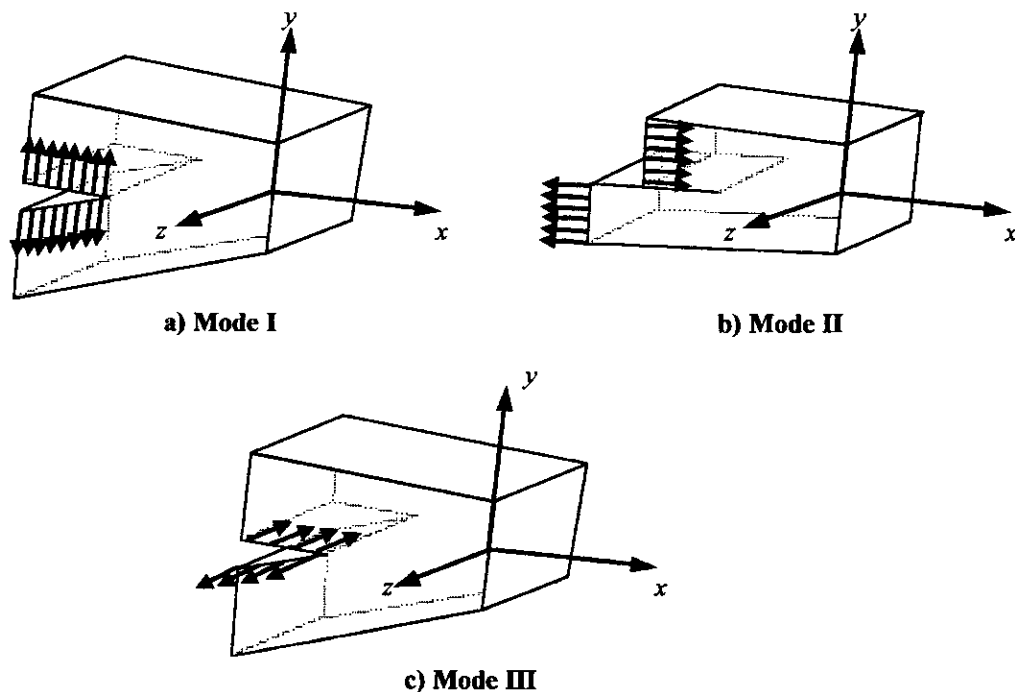


Fig. I.2: Modes d'ouvertures d'une fissure

I.2.3. CHAMP DE CONTRAINTES ET DE DEPLACEMENTS :

Ces contraintes ont été calculées par Irwin à l'aide de la théorie de l'élasticité [1] avec les notations de la figure I.3.

- **Mode I :**

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
 U_x &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\
 U_y &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu - \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\
 U_z &= 0 \quad (\text{déformation plane}).
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

- **Mode II :**

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x - \sigma_y) \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
 U_x &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 U_y &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 U_z &= 0 \quad (\text{déformation plane}).
 \end{aligned} \tag{I.2}$$

- **Mode III :**

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad , \quad \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\
 \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\
 U_z &= \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\
 U_x &= U_y = 0
 \end{aligned} \tag{I.3}$$

ν est le coefficient de Poisson.

G est le module d'élasticité de cisaillement.

$$\text{avec } G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Les facteurs K_I , K_{II} et K_{III} sont exprimés en $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$. Ils sont appelés facteurs d'intensité de contraintes. Ces paramètres dépendant uniquement des conditions de chargement et de géométrie.

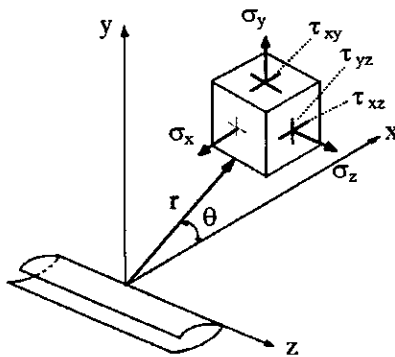


Fig. I.3 : Champ de contraintes et de déplacements au voisinage d'un bout de fissure

I.3. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE (APPROCHE LOCALE).

Le facteur d'intensité de contrainte est un paramètre couramment utilisé pour caractériser le comportement à la fissuration des matériaux. On le définit comme une quantité qui caractérise la singularité du champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure, ces facteurs sont proportionnelles à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure [2].

Les facteurs d'intensité de contraintes en bout de fissure sont définis en utilisant la méthode de WESTERGAARD, comme suite « Lemaitre J. et al. (1989) » :

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_m \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_n] \right) \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_m \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_v] \right) \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_m \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_t] \right) \end{aligned} \quad (I.4)$$

CHAPITRE II

Méthode de Discontinuité de Déplacement

CHAPITRE II

Méthode de Discontinuité de Déplacement

II.1. INTRODUCTION.

Pour approcher les solutions analytiques aux problèmes tels que, la mécanique des fluides, la mécanique des solides, celle de la rupture, l'élastostatique et autres, souvent difficiles à déterminer par une résolution directe des équations différentielles, plusieurs méthodes numériques ont été mises en places où l'on peut noter la méthode des éléments finis et la méthode des différences finis.

Néanmoins, ces dernières années ont vu l'apparition en force d'une nouvelle technique, la méthode des éléments de frontières (BEM), généralement connue sous le nom de la méthode des équations intégrales de frontières, qui ne cesse elle aussi de s'illustrer par sa simplicité et sa variété d'application.

Au contraire de la méthode des éléments finis qui nécessite une discrétisation totale du domaine en éléments, qui devient très compliqué lorsqu'il s'agit d'un domaine infini, la BEM se limite seulement à une subdivision de la frontière en éléments joints les uns aux autres.

Cette méthode (BEM) a été développée suivant deux approches l'une d'elles est d'origine mathématique basée sur des théorèmes classiques de la théorie du potentiel d'où la Méthode Directe. L'autre approche est physique et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités, placées tout au long du contour discrétisé en segments de droites, et de la, calculer les paramètres aux limites désirés, cette méthode est connue sous le nom de Méthode Indirecte.

Deux formulations indirectes existent, soient la Méthode des Contraintes Fictives (MCF) et la Méthode de Discontinuité de Déplacement (MDD), ont été développées par Crouch et Starfeild (1983) pour étudier les solides continus ou fissurés dans des problèmes géomécaniques.

II.2. PRINCIPE DE LA METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT (MDD).

Une discontinuité de déplacement peut être visualiser comme étant une fissure droite (rectiligne) composée de deux surfaces (lèvres) disjointes, se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre.

La méthode de discontinuité de déplacement se base sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité de déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini. Elle consiste à diviser (discrétiser) le segment de droite en une série de N éléments reliés les uns aux autres. Ainsi et connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donnée, en sommant les effets de tous les éléments.

II.3. PROCEDURE DE LA MDD DANS UN SOLIDE INFINI.

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite dans le plan x, y d'un solide infini est spécifié par la condition que le déplacement soit continu partout sauf sur le segment en question (soit la partie $-a < x < a$, pour $y = 0$) (voir Fig.2.1).

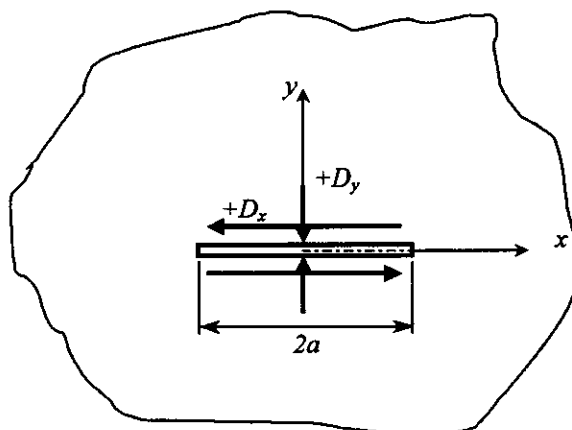


Fig.2.1. Discontinuité de déplacement

Si on considère ce segment comme une fissure droite on peut distinguer ses deux surfaces en disant que l'une des surfaces est sur le côté positif de $y = 0$, noté $y = 0^+$ et que l'autre est sur le côté négatif de $y = 0$, noté $y = 0^-$.

En passant d'un côté à l'autre du segment le déplacement subit un changement constant désigné par $D_i = (D_x, D_y)$, on définit la discontinuité de déplacement D_i comme la différence de déplacement entre les deux côtés du segment :

$$D_i = U_i(x, 0^-) - U_i(x, 0^+) \tag{II.1}$$

$$\text{ou } \begin{cases} D_x = U_x(x,0^-) - U_x(x,0^+) \\ D_y = U_y(x,0^-) - U_y(x,0^+) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

La solution du problème posé en contraintes et en déplacements est donnée par Crouch (1976a,b) :

$$\begin{aligned} U_x &= D_x [2(1-\nu)f_{,y} - \gamma f_{,xx}] + D_y [- (1-2\nu)f_{,x} - \gamma f_{,xy}] \\ U_y &= D_x [(1-2\nu)f_{,x} - \gamma f_{,xy}] + D_y [2(1-\nu)f_{,y} - \gamma f_{,yy}] \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GD_x [2f_{,xy} + \gamma f_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} + \gamma f_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2GD_x [-\gamma f_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} - \gamma f_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2GD_x [f_{,yy} + \gamma f_{,yyy}] + 2GD_y [-\gamma f_{,xyy}] \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

avec : $G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)}$

$$f(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (\text{II.5})$$

Ces équations forment la base de la méthode de discontinuité de déplacement.

Les dérivées de fonction $f(x,y)$ dans les équations (II.3) et (II.4) sont obtenues directement à partir de l'équation (II.5) (voir annexe A).

Les déplacements le long de la droite $y = 0$ sont :

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{-1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Les valeurs des limites des termes en arctangent sont les suivantes (voir annexe A pour plus de détails) :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, y = 0 \\ +\pi & |x| < a, y = 0^+ \\ -\pi & |x| < a, y = 0^- \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

On peut considérer trois cas pour évaluer les déplacements le long de la ligne $y = 0$:

1) $|x| > a$ et $y = 0$

$$\begin{aligned} U_x(x,0) &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x,0) &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \end{aligned} \tag{II.8}$$

2) $|x| < a$ et $y = 0^+$

$$\begin{aligned} U_x(x,0^+) &= -\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x,0^+) &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2} D_y \end{aligned} \tag{II.9}$$

3) $|x| < a$ et $y = 0^-$

$$\begin{aligned} U_x(x,0^-) &= \frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x,0^-) &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2} D_y \end{aligned} \tag{II.10}$$

Les déplacements U_x et U_y sont continus pour $|x| > a$ et $y = 0$, mais ont une discontinuité constante $+D_x$ et $+D_y$ pour $|x| < a$, les contraintes le long de la ligne $y = 0$, d'après l'équation (II.4) peuvent être évaluées comme suite :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x,0) &= -\frac{G}{2\pi(1-\nu)} D_y \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{yy}(x,0) &= -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{xy}(x,0) &= -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2 - a^2} \end{aligned} \tag{II.11}$$

Il est facile de vérifier que les contraintes sont continues partout sur $y = 0$ sauf pour $x = \pm a$ où on note une discontinuité et une singularité due à la présence du terme $1/(x^2 - a^2)$.

II.4. PROCEDURE NUMERIQUE.

La MDD est un moyen de trouver une approximation discrète à la distribution régulière du déplacements et de contraintes qui existent en réalité.

Pour une généralisation de cette procédure numérique, on considérera un ensemble de N segments de droites, parfaitement reliés les uns aux autres et formant une courbe quelconque comme représenté dans la fig2.2. La longueur de chacun de ces segments est notée par $2a^i$.

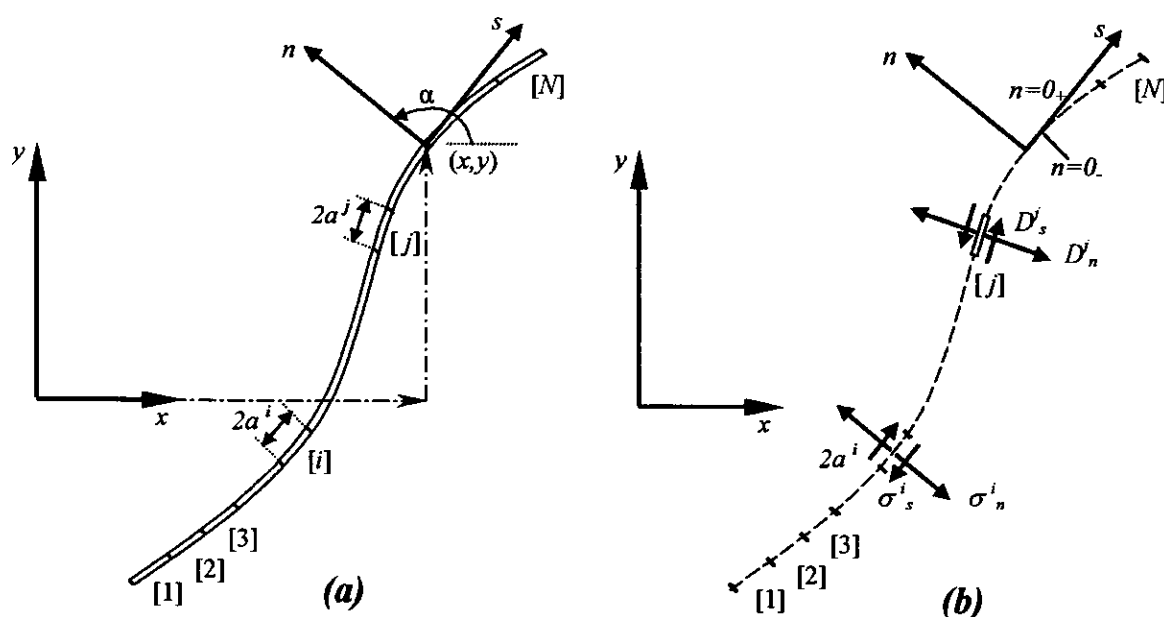


Fig.2.2 Représentation d'une fissure quelconque en N segments

Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local s, n comme le montre dans la Fig.2.2.b de l'élément j et dont les composantes D_s^j et D_n^j sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} D_s^j &= U_s^- - U_s^+ \\ D_n^j &= U_n^- - U_n^+ \end{aligned} \tag{II.12}$$

Où : U_s^j et U_n^j sont les déplacements normales et tangentielle de l'élément j .

Les contraintes normales et tangentielles au milieu de l'élément i peuvent être exprimées en fonction des composantes de discontinuité de déplacement de l'élément j comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i = 1, N \quad (\text{II.13})$$

Remarque : Les effets d'une discontinuité de déplacement élémentaire sur les contraintes et les déplacements d'un point arbitraire du corps peuvent être calculés d'après les résultats fournis par la section (II.3).

En utilisant le principe de superposition, et ainsi tenant compte de l'effet de N éléments (discontinuités) on obtient le champ de contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i = 1, N \quad (\text{II.14})$$

de la même manière, on établit le champ de déplacements :

$$\begin{aligned} U_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ U_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i = 1, N \quad (\text{II.15})$$

ou : $A_{ss} \dots$ sont les coefficients d'influences relatifs aux contraintes sur la frontière et $B_{ss} \dots$ sont les coefficients d'influences relatifs aux déplacements sur la frontière.

En spécifiant les valeurs des contraintes σ_s^i et σ_n^i pour chaque élément, on aura alors un système de $2N$ équations linéaires à $2N$ inconnues, à savoir les composantes D_s^i et D_n^i des discontinuités de déplacements élémentaires. Une fois ces équations résolues, on peut exprimer les contraintes et les déplacements en chaque point du domaine par d'autres combinaisons linéaires des discontinuités de déplacements en utilisant la même procédure que précédemment.

(*) Il faut noter que la même procédure peut être suivie dans le cas où les éléments joints les uns aux autres forment un contour fermé (par exemple cas d'une cavité).

(*) Les conditions aux limites peuvent être en contraintes comme elles peuvent en déplacements ou les deux cas à la fois.

II.5. TRANSFORMATION DE COORDONNEES.

Les coefficients d'influences dans l'équation (II.14) et (II.15) sont développées pour le problème pour une discontinuité de déplacement constante avec une orientation arbitraire d'un segment dans un solide infini.

La méthode de discontinuité de déplacement est basée essentiellement sur la connaissance des coordonnées des points à étudier par rapport au repère local de chaque segment et l'orientation de ce repère par rapport au repère global.

Les coordonnées locales (\bar{x}, \bar{y}) sont obtenues par une translation et une rotation par rapport au repère global (x, y) de système. Les composantes de translation sont C_x et C_y suivant x, y respectivement, tandis que la relation est définie par l'angle β positif dans le sens trigonométrique.

Les expressions de transformation de coordonnées sont :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - C_x) \cos \beta + (y - C_y) \sin \beta \\ \bar{y} &= -(x - C_x) \sin \beta + (y - C_y) \cos \beta\end{aligned}\quad (\text{II.16})$$

Les déplacements et les contraintes dans les systèmes de coordonnée locale sont retrouvés en remplaçant (x, y) par (\bar{x}, \bar{y}) dans les équations (II.3) et (II.4), avec :

$$\begin{aligned}f(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{F}_1(\bar{x}, \bar{y}), & f_{,\bar{x}} &= \bar{F}_2(\bar{x}, \bar{y}), & f_{,\bar{y}} &= \bar{F}_3(\bar{x}, \bar{y}) \\ f_{,\bar{x}\bar{y}} &= \bar{F}_4(\bar{x}, \bar{y}), & f_{,\bar{x}\bar{x}} &= -f_{,\bar{y}\bar{y}} = \bar{F}_5(\bar{x}, \bar{y}), & f_{,\bar{y}\bar{y}} &= \bar{F}_6(\bar{x}, \bar{y}) \\ f_{,\bar{y}\bar{y}\bar{y}} &= \bar{F}_7(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}$$

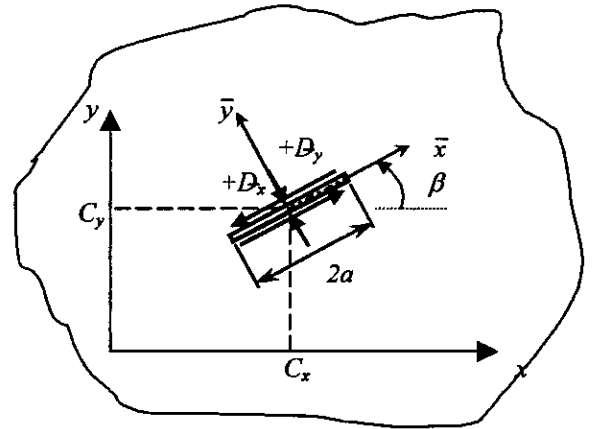


Fig.2.3. Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire.

Les coordonnées des déplacements et de contraintes dans le repère globale (x,y) de système, à l'aide de les équations (A.5) , (A.9) et (A.11) (voir annexe A) sont :

$$\begin{aligned}
 U_x &= D_{\bar{x}} \left[-(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right] \\
 &\quad + D_{\bar{y}} \left[-(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right] \\
 U_y &= D_{\bar{x}} \left[(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right] \\
 &\quad + D_{\bar{y}} \left[-(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right]
 \end{aligned}
 \tag{II.17}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2GD_{\bar{x}} \left[2 \cos^2 \beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right] \\
 &\quad + 2GD_{\bar{y}} \left[-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\
 \sigma_{yy} &= 2GD_{\bar{x}} \left[2 \sin^2 \beta \bar{F}_4 - \sin 2\beta \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right] \\
 &\quad + 2GD_{\bar{y}} \left[-\bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\
 \sigma_{xy} &= 2GD_{\bar{x}} \left[\sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\
 &\quad + 2GD_{\bar{y}} \left[-\bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right]
 \end{aligned}
 \tag{II.18}$$

On peut utilisée ces équations pour calculer les coefficients d'influence de la MDD.

II.6. COEFFICIENTS D'INFLUENCE.

On considère un domaine infini contenant N segments de droites orientés dans des directions arbitraires par rapport au repère global (x,y) . On considère deux éléments distincts « i » et « j » reliés chacun à un repère local $\begin{pmatrix} x^i, y^i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x^j, y^j \end{pmatrix}$ respectivement, et orientés de β^i et β^j (Voir Fig.2.4).

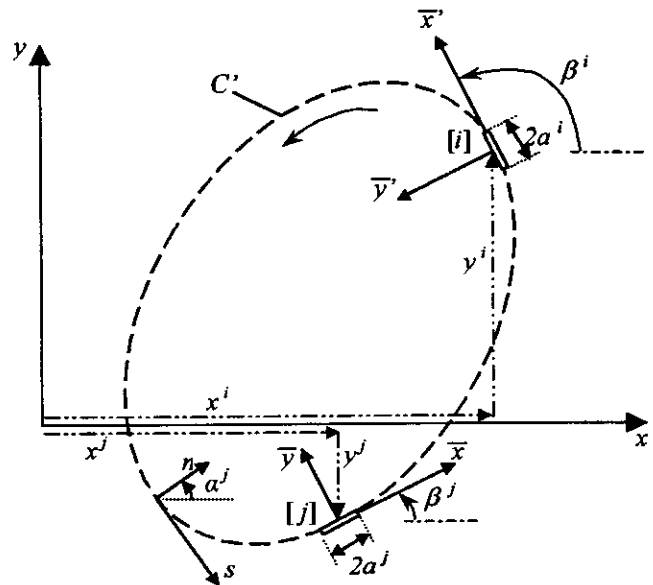


Fig.2.4. Position et orientation des éléments limites

Les coordonnées locales (\bar{x}, \bar{y}) dans les équations (II.17) et (II.18) représentent celles du point (x,y) par rapport au milieu de l'élément i :

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= (x - x^i) \cos \beta^i + (y - y^i) \sin \beta^i \\
 \bar{y} &= -(x - x^i) \sin \beta^i + (y - y^i) \cos \beta^i
 \end{aligned}
 \tag{II.19}$$

Les déplacements et les contraintes en ce point dus aux discontinuités de déplacements sur les N éléments sont obtenus par la sommation des contributions de chaque élément.

En choisissant le point (x,y) comme étant le milieu de l'élément i , c'est-à-dire $x = x^i$ et $y = y^i$, l'équation (II.19) devient :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x^j - x^i) \cos \beta + (y^j - y^i) \sin \beta \\ \bar{y} &= -(x^j - x^i) \sin \beta + (y^j - y^i) \cos \beta\end{aligned}\quad (\text{II.20})$$

Les composantes de déplacements et de contraintes relativement en repère local au point « i » sont x' , y' . Les deux repères locaux de l'élément i et l'élément j sont reliés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= \bar{x} \cos \gamma + \bar{y} \sin \gamma \\ \bar{y}' &= -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma\end{aligned}\quad (\text{II.21})$$

ou $\gamma = \beta^j - \beta^i$ (orientation de l'élément j par rapport au l'élément i).

Les déplacements et les contraintes seront :

$$\begin{aligned}U_{\bar{x}'} &= U_{\bar{x}} \cos \gamma + U_{\bar{y}} \sin \gamma \\ U_{\bar{y}'} &= -U_{\bar{x}} \sin \gamma + U_{\bar{y}} \cos \gamma\end{aligned}\quad (\text{II.22})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}\bar{x}'} &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \cos^2 \gamma + 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}} \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \sin^2 \gamma \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}'} &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \sin^2 \gamma - 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}} \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \cos^2 \gamma \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}'} &= -\left(\sigma_{\bar{x}\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}\right) \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{x}\bar{y}} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)\end{aligned}\quad (\text{II.23})$$

Les coefficients d'influence pour les déplacements et les contraintes sont obtenues des systèmes des équations (II.17), (II.18), (II.22) et (II.23) après avoir posé :

$$D_s^j = D_{\bar{x}}^j, \quad D_n^j = D_{\bar{y}}^j, \quad U_s^i = U_{\bar{x}'}^i, \quad U_n^i = U_{\bar{y}'}^i, \quad \sigma_s^i = \sigma_{\bar{x}\bar{y}'}^i \text{ et } \sigma_n^i = \sigma_{\bar{y}\bar{y}'}^i$$

Donc :

$$\begin{aligned}U_s^i &= D_s^j \left[(1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 - \bar{y} (\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_n^j \left[-(1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5) \right] \\ U_n^i &= D_s^j \left[(1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_n^j \left[(1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 + \bar{y} (\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5) \right]\end{aligned}\quad (\text{II.23})$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_s^i &= 2G \sum_{j=1}^j D_s^j \left[-\sin 2\gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7) \right] \\
 &\quad + 2G \sum_{j=1}^j D_n^j \left[-\bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7) \right] \\
 \sigma_n^i &= 2G \sum_{j=1}^j D_s^j \left[2\sin 2\gamma \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7) \right] \\
 &\quad + 2G \sum_{j=1}^j D_n^j \left[-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7) \right]
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

On peut écrire les équations (II.23) et (II.24) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 U_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\
 U_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j
 \end{aligned} \quad i = 1, N \tag{II.25}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\
 \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j
 \end{aligned} \quad i = 1, N \tag{II.26}$$

*** Element « auto-influence » :**

Ce sont les termes diagonaux de la matrice des coefficients d'influences, sont données par :

$$\begin{aligned}
 B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0 \quad , \quad B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \pm \frac{1}{2} \quad \text{pour } \bar{y} = 0^\pm \\
 A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0 \quad , \quad A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = + \frac{G}{\pi(1-\nu)^i}
 \end{aligned}$$

*** Conditions de symétrie :**

On parlera de symétrie pour un solide par rapport à un axe, quand les propriétés élastiques, la configuration géométrique et les conditions aux limites de ce solide sont toutes symétriques par rapport à cet axe.

L'utilisation de la symétrie pour la résolution des problèmes par la MDD est une extrême importance, quand on sait que le système d'équations est réduit de moitié (cas de la simple symétrie), ou de quart (cas de la double symétrie)

CHAPITRE III

TECHNIQUE DE FONCTION DE POIDS BASÉE SUR LA MDD

CHAPITRE III

TECHNIQUE DE FONCTION DE POIDS BASÉE SUR LA MDD EN BIDIMENSIONNEL.

III.1. INTRODUCTION.

Des méthodes conventionnelles pour l'évaluation de facteur d'intensité de contrainte comptent sur la solution répétée (héritée) des équations d'élasticité pour une charge appliquée. Une approche alternative qui élimine la solution répétée est la technique de fonction de poids.

Les fonctions de poids peuvent être considérées comme la généralisation des fonctions de Green. Leur utilisation est efficace et économique pour le calcul de facteur d'intensité de contrainte pour des structures fissurées. Une fois que la fonction est déterminée pour une géométrie de fissure donnée, le facteur d'intensité de contrainte peut être calculé pour n'importe quel chargement sur n'importe quelle frontière par une intégration simple.

Le concept de fonction de poids a été présenté par « Bueckner 1970 » pour l'analyse de fissure élastostatique en bidimensionnel. Ses fonctions de poids satisfont les équations d'élasticité linéaire, mais ont une singularité au bout de la fissure qui ne serait pas admissible comme un champ physique. Il se réfère à eux comme des champs fondamentaux. Rice (1972) a montré que les fonctions de poids pourraient aussi être obtenues en différenciant les solutions connues pour des champs de déplacement le long de la longueur de la fissure.

Quelques chercheurs ont proposé l'extension générale de la formule de Rice aux problèmes de fissure de mode - mixte, par exemple Paris, McMeeking et Tada (1976), Bortman et Banks-Sills (1983), Sha & Yang (1985).

Une formulation efficace d'élément de frontière pour l'évaluation de fonctions de poids utilisant les champs fondamentaux a été annoncée par Aliabadi, Cartwright & Rooke (1989) pour le mode I et Rooke & Aliabadi (1994) pour le mode - mixte des problèmes de fissure dans l'élastostatiques.

La Méthode des Eléments de Frontière Indirecte (Méthode de Discontinuité de Déplacement) est utilisée initialement pour déterminer les fonctions de poids $H_i^{\zeta}(x)$ ($\zeta = I, II; i = 1, 2$) pour un problème statique.

Dans ce chapitre, la technique de fonction de poids est présentée pour des problèmes elastostatiques. La détermination de fonctions de poids est basée sur la procédure de calcul de chapitre 2 et la technique de fonction de Green.

III.2. LA DETERMINATION DE FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE PAR FONCTION DE GREEN.

On utilise la fonction de Green comme une fonction de poids (cas particulier) pour déterminer le facteur d'intensité de contrainte en première partie puis on va généraliser la formulation.

Il est clair que les discontinuités de déplacements D_i sur les fissures sont les déplacements relatifs séparant entre la surface supérieure et la surface inférieure de la fissure; les facteurs d'intensité de contraintes sont déterminées à l'aide de ces discontinuités. Autrement dit, les facteurs d'intensité de contraintes de problème réel sont les mêmes pour les mêmes discontinuités de déplacement D_i agissant sur la surface de fissure dans un corps infini comme montré dans la Fig. III.1.

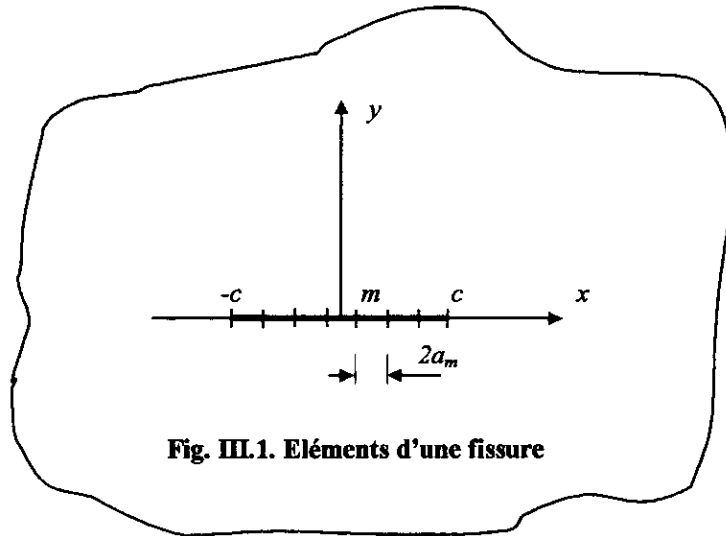


Fig. III.1. Eléments d'une fissure

Pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes, une formulation par la méthode de discontinuités de déplacements nous donne la combinaison liant les contraintes en chaque élément i et les discontinuités de déplacements en chaque élément de la fissure.

À l'élément i , en utilisant les équations (II.3) et (II.4), nous avons :

$$\sigma_n^i = \sum_{m=1}^M \frac{Ga_m D_n^m}{\pi(1-\nu)[(x_m - x_i)^2 - a_m^2]} = \sum_{m=1}^M \alpha_{im} D_n^m \quad (\text{III.1})$$

et

$$\sigma_s^i = \sum_{m=1}^M \frac{Ga_m D_s^m}{\pi(1-\nu)[(x_m - x_i)^2 - a_m^2]} = \sum_{m=1}^M \alpha_{im} D_s^m$$

Où a est la moitié de la longueur d'élément i et M nombre d'éléments de la fissure.

et:

$$\alpha_{im} = \frac{Ga_m}{\pi(1-\nu)[(x_m - x_i)^2 - a_m^2]}$$

et x^i est la coordonnée de milieu de l'élément i dans le repère lié à la fissure.

D'après [7], le facteur d'intensité de contrainte peut être donnée par, en basant sur la noyau de Green (utilisation de la fonction de Green comme fonction de poids) :

$$\begin{aligned}
 K_I^\pm &= \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^c \sigma_n(x) \sqrt{\frac{c \pm x}{c \mp x}} dx = \sum_{i=1}^M \sigma_n F_i \sqrt{\pi c} = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^M \alpha_{im} F_i D_n^m \sqrt{\pi c} \\
 K_{II}^\pm &= \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^c \sigma_s(x) \sqrt{\frac{c \pm x}{c \mp x}} dx = \sum_{i=1}^M \sigma_s F_i \sqrt{\pi c} = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^M \alpha_{im} F_i D_s^m \sqrt{\pi c}
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

où :

$$F_i = \frac{1}{\pi} \int_{x'-a'}^{x'+a'} \sqrt{\frac{c \pm x}{c \mp x}} dx = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{x}{c}\right) \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right]_{x'-a'}^{x'+a'}$$

c : est la moitié de la longueur de la fissure.

Le signe positif est attribue a la bout droit de la fissure et le signe négatif a la bout gauche de la fissure.

De l'équation (III.2), on peut prévoir qu'elle donne une meilleure approche de facteur d'intensité de contrainte car elle se base sur les discontinuités de déplacements de tous les éléments de la fissure, non juste l'élément bout de la fissure. Cependant, plus en se rapprochant a le bout de la fissure, l'influence de ça discontinuité de déplacement d'élément est plus grand.

III.3. TECHNIQUE DE FONCTION DE POIDS.

Pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} au bout de la fissure (point A), de la Fig. III.2 (a), deux problèmes de référence sont présentés, montrés par la Fig. III.2 (b) et (c). Supposons que Γ est la frontière extérieure et C la frontière de longueur de fissure l . On donne le vecteur contrainte $\tilde{t}_i(x)$ ($i=1,2$) sur la frontière chargée Γ_f et le vecteur de déplacement $\tilde{u}_i(x)$ sur la frontière encastrée Γ_u dans un système de coordonnées local, formé par deux vecteurs, normal ($i=2$) et tangentiel ($i=1$).

On donne les conditions de frontière (conditions aux limites) pour ces deux problèmes de référence :

1) Problème de Référence (b) :

Contraintes libres sur Γ_f avec les mêmes conditions de déplacement que le problème (a) sur Γ_u et une charge uniforme normale σ_0 sur les deux surfaces de fissure C (des facteurs d'intensité de contraintes $K_I^{(b)}$ et $K_{II}^{(b)}$).

2) Problème de Référence (c) :

Contraintes libres sur Γ_f avec les mêmes conditions de déplacement que le problème (a) sur Γ_u et une charge uniforme tangentiel s_0 sur les deux surfaces de fissure C

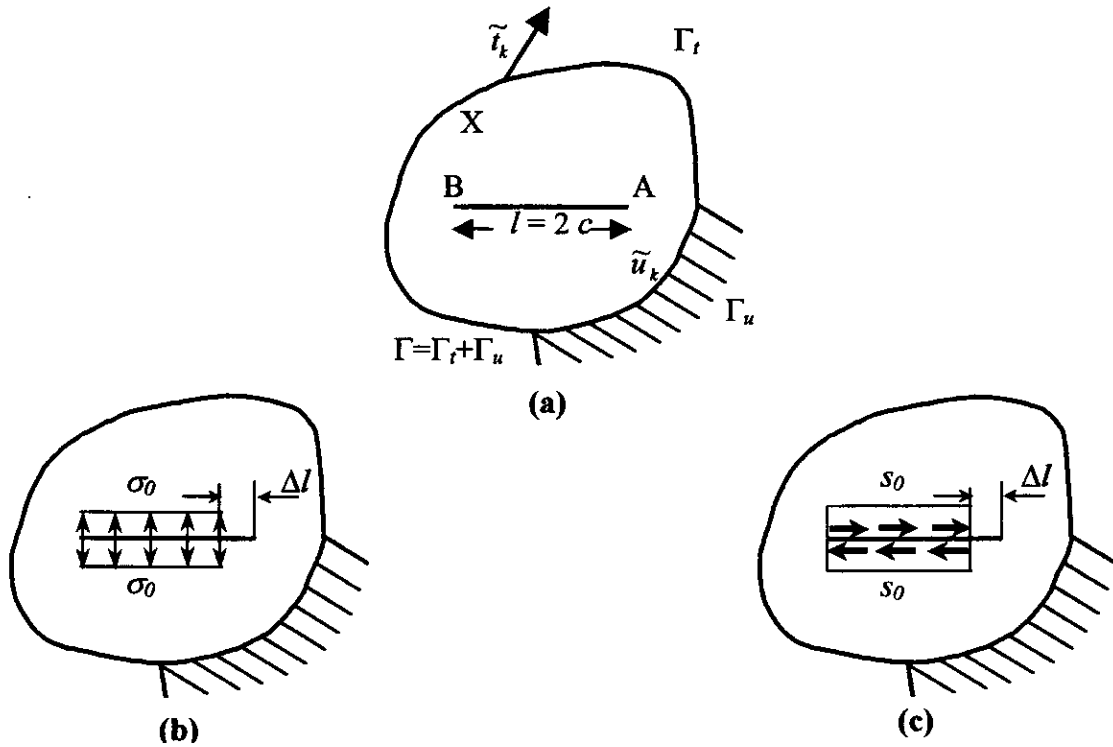


Fig. III.2 : Problèmes de référence

S'il y a dans le problème (b) une élongation Δl de la fissure, au point A, et la variation relatif de déplacement Δu_i sur le frontière chargée Γ_f et Δt_i sur le frontière encastree Γ_u , donc on donne le rapport entre les facteurs d'intensité de contraintes pour des problèmes (a) et (b), pour des conditions de contrainte plan, par [7] :

$$K_I K_I^{(b)} + K_{II} K_{II}^{(b)} = \frac{G}{(1-\nu)} \left[\int_{\Gamma_f} \left(\frac{\Delta u_i^{(b)}}{\Delta l} \right) \tilde{t}_i(x) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \left(\frac{\Delta t_i^{(b)}}{\Delta l} \right) \tilde{u}_i(x) d\Gamma \right] \quad (\text{III.3})$$

On donne le rapport entre les facteurs d'intensité de contraintes pour des problèmes (a) et (c) :

$$K_I K_I^{(c)} + K_{II} K_{II}^{(c)} = \frac{G}{(1-\nu)} \left[\int_{\Gamma_I} \left(\frac{\Delta u_i^{(c)}}{\Delta l} \right) \tilde{t}_i(x) d\Gamma - \int_{\Gamma_{II}} \left(\frac{\Delta u_i^{(c)}}{\Delta l} \right) \tilde{u}_i(x) d\Gamma \right] \quad (\text{III.4})$$

Dont le G et ν sont respectivement le module de cisaillement et coefficient de Poisson.

Les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} pour le problème (a) peuvent ainsi être obtenus des équations (III.3) et (III.4), pour la condition de frontière chargée ($\Gamma = \Gamma_I$), comme :

$$K_I = \frac{G}{(1-\nu)D} \int_{\Gamma} \left[K_{II}^{(c)} \left(\frac{\Delta u_i^{(b)}}{\Delta l} \right) - K_{II}^{(b)} \left(\frac{\Delta u_i^{(c)}}{\Delta l} \right) \right] \tilde{t}_i(x) d\Gamma \quad (\text{III.5})$$

et

$$K_{II} = \frac{G}{(1-\nu)D} \int_{\Gamma} \left[K_I^{(b)} \left(\frac{\Delta u_i^{(c)}}{\Delta l} \right) - K_I^{(c)} \left(\frac{\Delta u_i^{(b)}}{\Delta l} \right) \right] \tilde{t}_i(x) d\Gamma \quad (\text{III.6})$$

Où $D = K_I^{(b)} K_{II}^{(c)} - K_I^{(c)} K_{II}^{(b)}$.

Posons ;

$$H_I^I(x) = \frac{G}{(1-\nu)D} \left[K_{II}^{(c)} \left(\frac{\Delta u_i^{(b)}}{\Delta l} \right) - K_{II}^{(b)} \left(\frac{\Delta u_i^{(c)}}{\Delta l} \right) \right] \quad (\text{III.7})$$

et

$$H_{II}^{II}(x) = \frac{G}{(1-\nu)D} \left[K_I^{(b)} \left(\frac{\Delta u_i^{(c)}}{\Delta l} \right) - K_I^{(c)} \left(\frac{\Delta u_i^{(b)}}{\Delta l} \right) \right] \quad (\text{III.8})$$

Où x appartient à la frontière Γ , $H_i^\zeta(x)$ ($\zeta = I, II$) sont appelé des fonctions de poids.

Les équations (III.5) et (III.6) peuvent maintenant être réécrites comme :

$$K_I = \int_{\Gamma} H_I^I(x) \tilde{t}_I(x) d\Gamma \quad (\text{III.9})$$

et

$$K_{II} = \int_{\Gamma} H_{II}^I(x) \tilde{t}_I(x) d\Gamma \quad (\text{III.10})$$

Les fonctions de poids $H_i^{\zeta}(x)$ sont indépendantes des conditions aux limites de contraintes appliquées \tilde{t}_i , une fois que l'on connaît les fonctions de poids, les facteurs d'intensité de contraintes pour des conditions aux limites de contraintes différentes peuvent être évalués par des équations (III.9) et (III.10),

III.4. LA DETERMINATION DE FONCTION POIDS. $H_i^{\zeta}(x)$.

Les facteurs d'intensité de contraintes de ces deux problèmes de référence $K_{\zeta}^{(b)}$, $K_{\zeta}^{(c)}$ ($\zeta = I, II$) et la proportion de l'incrément de déplacement à l'incrément de la fissure $\Delta u_i / \Delta l$ sont calculés par la méthode indirecte d'élément de frontière (MDD) et par la Fonction de Green (cas particulière de fonction de poids). La variation de la fissure Δl doit être dans le domaine de 10^{-2} et $10^{-3}\delta$ (où δ est la longueur d'élément de bout de fissure ($\delta = M / l$)). De la même manière, les équations (III.9) et (III.10) pourraient être utilisées pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes au bout de fissure B (voir Fig. III.2 (a)) en mettant l'incrément Δl à ce bout.

CHAPITRE IV

**ORGANISATION
du PROGRAMME**

CHAPITRE IV

ORGANISATION DU PROGRAMME

IV.1. PLAN DU PROGRAMME.

Notre programme est fait à l'aide de langage de programmation **BORLAND Builder C++ 5.0**, sous windows. Le programme est constitué de cinq parties : Localisation, Calcul de contraintes et déplacements aux frontières, Calcul facteur d'intensité de contrainte par fonction de Green, Calcul facteur d'intensité de contrainte par fonction de poids et la dernière partie est Calcul les contraintes et les déplacements aux points spécifiques.

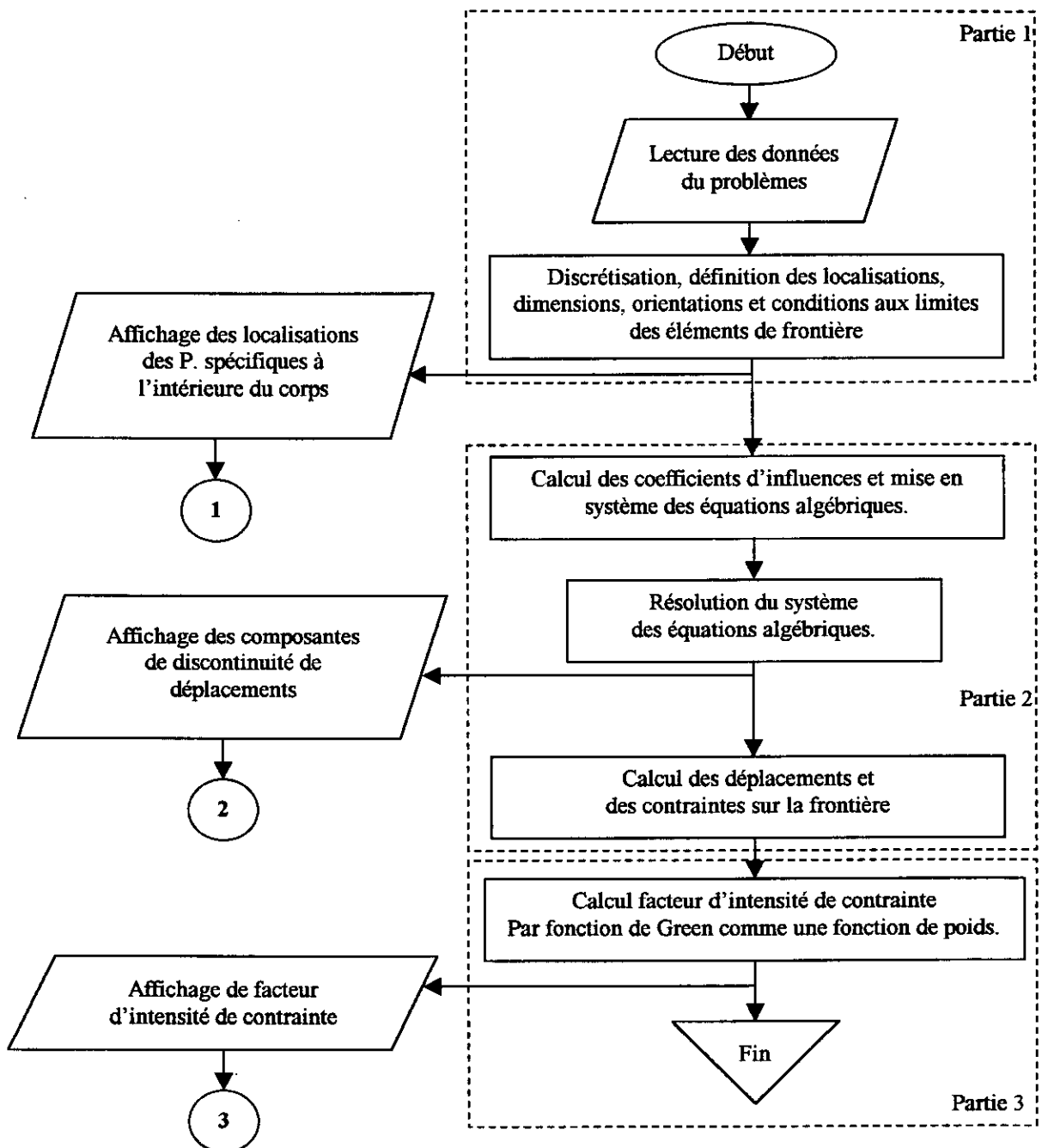
La 1^{ère} Partie du programme qui comporte la lecture des principales données ; les caractéristiques mécaniques, le chargement, le raffinage des segments, et le positionnement du problème. Il discrétise le corps à étudier et il affecte à chaque élément sa position, son orientation et ses conditions aux limites. Les résultats de cette partie constituent trois bases de données, la première pour la deuxième partie, la deuxième pour la troisième partie et l'autre pour la dernière.

La 2^{ème} Partie est la partie principal de la méthode MDD. Il récupère les données à partir de localisation et il calcule les coefficients d'influences entre chaque couple d'éléments de la frontière du corps en appelant au procédure *COEFF*. En suite, il construit le système algébrique d'équations pour le résoudre par la procédure *SOLVE* pour obtenir les composantes de discontinuité de déplacement de chaque élément. Ces résultats vont être chargés dans un fichier qui va être utilisé comme une base de données pour la dernière partie (pour calculer le champ de contraintes et de déplacements aux points spécifiques). Finalement cette partie calcule le champ de contraintes et de déplacements pour chaque élément de frontière. En suite, en utilisant ces résultats avec les résultats de la partie précédente, on calcule le facteur d'intensité de contrainte par la

fonction de Green comme étant fonction de poids, puis les sorties de cette partie sont utilisées comme initialisation pour la quatrième partie.

La quatrième partie du programme présente la technique de fonction de poids. Il récupère les données à partir de la troisième partie, et il calcule le facteur d'intensité de contraintes par la technique de fonction de poids sous sa forme générale.

On a choisi la structure du code de calcul comme il est mentionné sur la figure suivante :



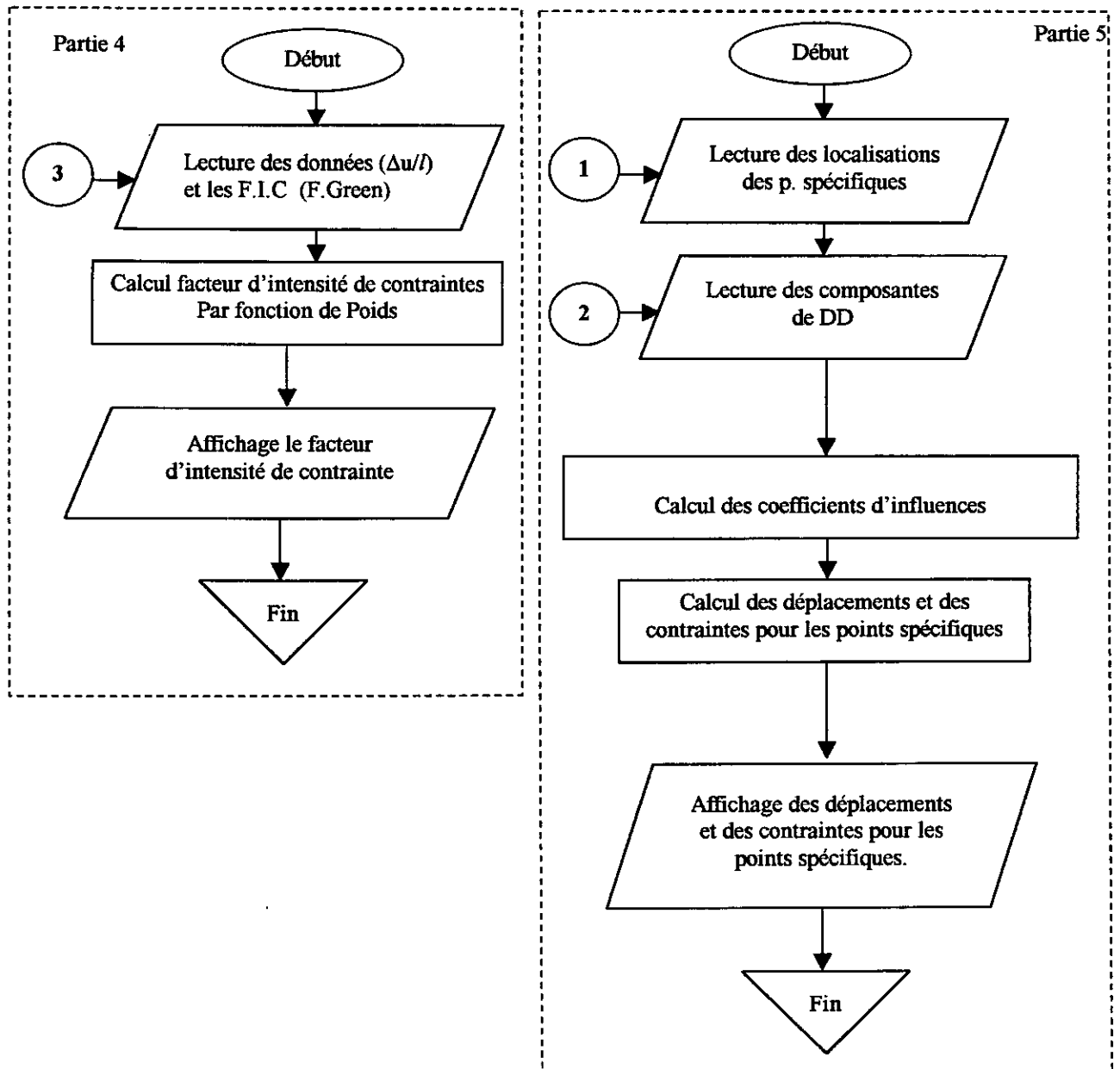


Fig. IV.1. Organigramme et chronologique des calculs du programme réalisé.

IV. 2. TEMPS D'EXECUTION

Le micro-ordinateur utilisé dans la partie numérique est un AMD Duron 1000 MHz muni d'un coprocesseur mathématique et une mémoire vive SDRAM128Mo. La mise en évidence du temps d'exécution de chacun des programmes est nécessaire pour compléter tous les paramètres influant sur le choix du nombre d'éléments nécessaire et suffisant pour une meilleure modélisation du problème considéré.

Le temps d'exécution de calcul est très rapide de sorte qu'on ne peut pas quantifier avec précision. Cependant, on peut constater que pour la première, deuxième et la troisième partie, le temps d'exécution est relativement plus important que celui du quatrième, ceci paraît évident à cause de l'absence des calculs des coefficients d'influence et de résolution de système d'équation.

IV.3. PRESENTATION DU PROGRAMME :

Pour faciliter l'accès au fichier d'entrée et de sortie ainsi que l'exécution les différentes parties du programme, nous avons présenté le programme par une interface Windows réalisée on « Borland Builder C++ 5.0 » comme représenté sur la figure suivante :

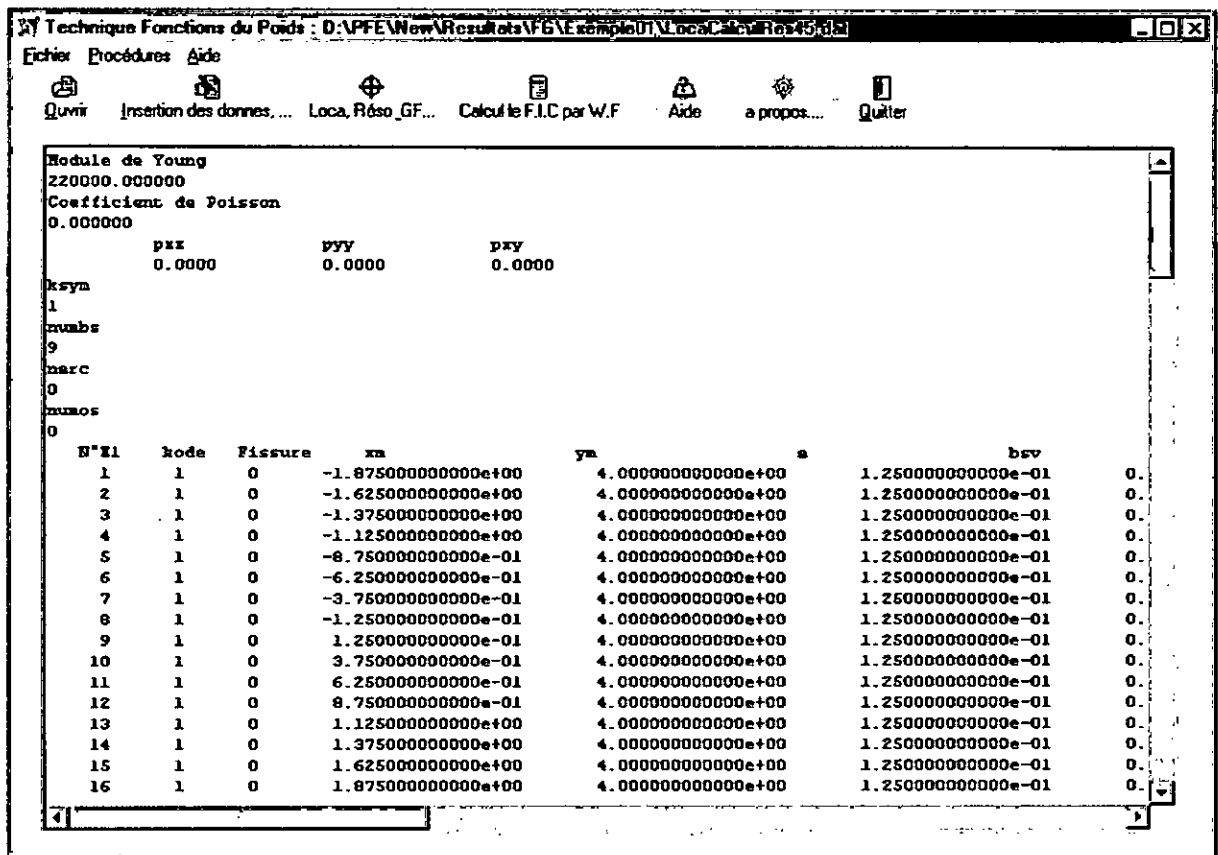


Fig. IV.2. Présentation de l'interface principale du programme réalisé.

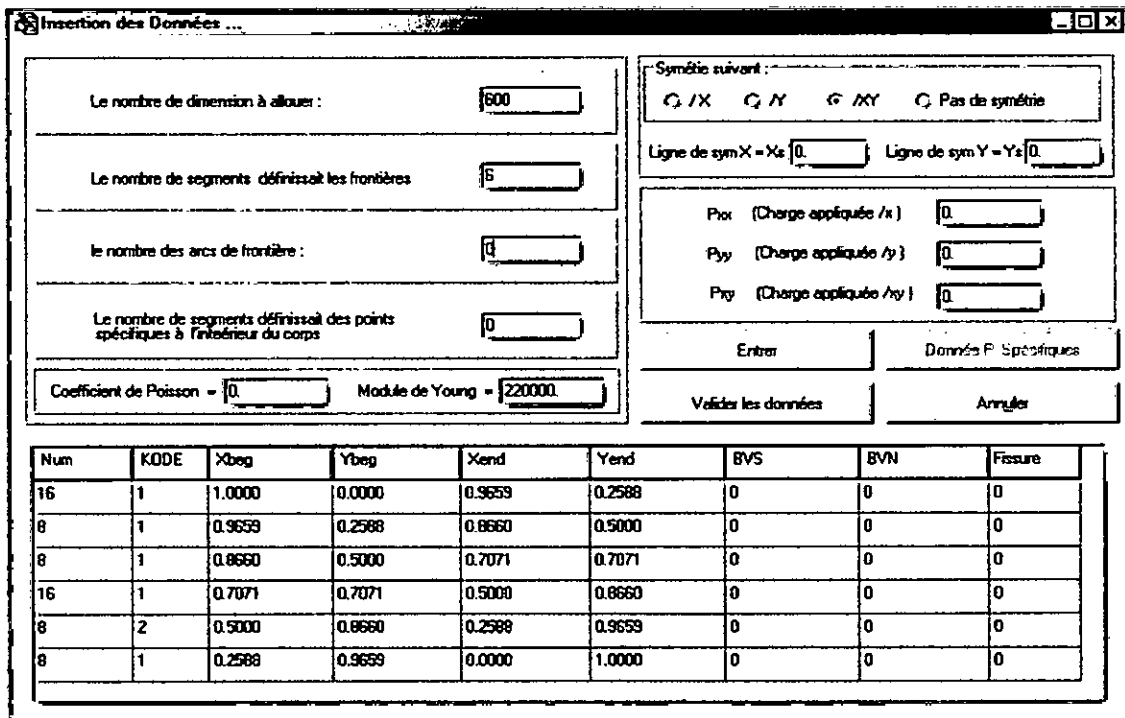


Fig. IV.3. Présentation de l'interface principale du programme réalisé.

CHAPITRE V

EXEMPLES, RÉSULTATS & INTERPRÉTATIONS

CHAPITRE V

EXEMPLES, RÉSULTATS & INTERPRÉTATIONS

V.1. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, on va essayer de traiter un nombre d'exemples pratiques en mécanique des solides, et qui peuvent être simulés numériquement par la technique de fonction de poids basée sur la méthode de discontinuité de déplacement (MDD) en bidimensionnel. Ces exemples peuvent être divisés en deux catégories :

* La première catégorie d'exemple concerne l'utilisation de fonction de Green pour déterminer les facteurs d'intensité de contrainte. Dans cette catégorie on traite des exemples qui possèdent une solution analytique, empirique ou une solution trouvée par d'autres auteurs qu'on compare avec celle trouvée numériquement.

* La deuxième catégorie concerne l'utilisation de la fonction de poids sous sa forme généralisée pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes.

V.2. PREMIERE CATEGORIE D'EXEMPLE (FONCTION DE GREEN).

1\ - EXEMPLE 01 : FISSURE CENTRALE DANS UNE PLAQUE FINIE.

Une plaque rectangulaire de largeur $2w$ et de hauteur $2h$ fissurée est chargée par une contrainte uniforme $\sigma_o = 100$ MPa (les conditions aux limites montrées dans la Fig. V.1). La valeur $h/w = 2.0$ et $c/w = 0.5$. La fissure est inclinée par un angle α par rapport à la perpendiculaire à la direction de la charge. Les nombres d'élément ont été choisis comme $N_w = 16$, $N_h = 16$, ($N=2*N_w+2*N_h$) et $M_c=16$. Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont les suivantes : $E = 220000$ MPa et $\nu = 0$

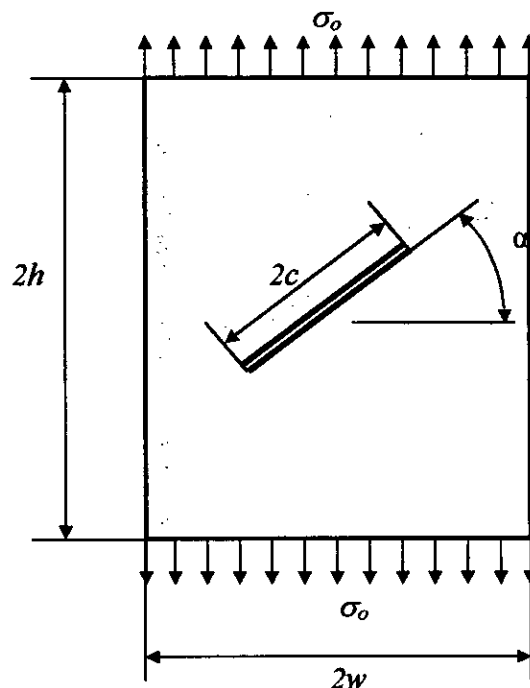


Fig. V.1. Plaque rectangulaire contenant une fissure

On varie l'angle α entre 0° et 75° . Les résultats analytiques d'après réf [3] et [7] avec les résultats numériques sont représentés graphiquement (Fig.V.2 & 3) sous forme de courbes et sous forme du tableau (Table V.1), suivants :

Table V.1: Facteur d'intensité de contrainte pour différents angles d'inclinaison de la fissure. (Mode I & II)

Angle	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$K_I / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ (Num)	1,1545	1,0869	0,8995	0,6184	0,3198	0,0964
$K_I / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ [3]	1,1793	1,1128	0,9046	0,6119	0,3099	0,0837
$K_{II} / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ (Num)	---	0,2289	0,4209	0,5189	0,4682	0,2759
$K_{II} / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ [7]	---	0,2467	0,4499	0,5314	0,4718	0,2774

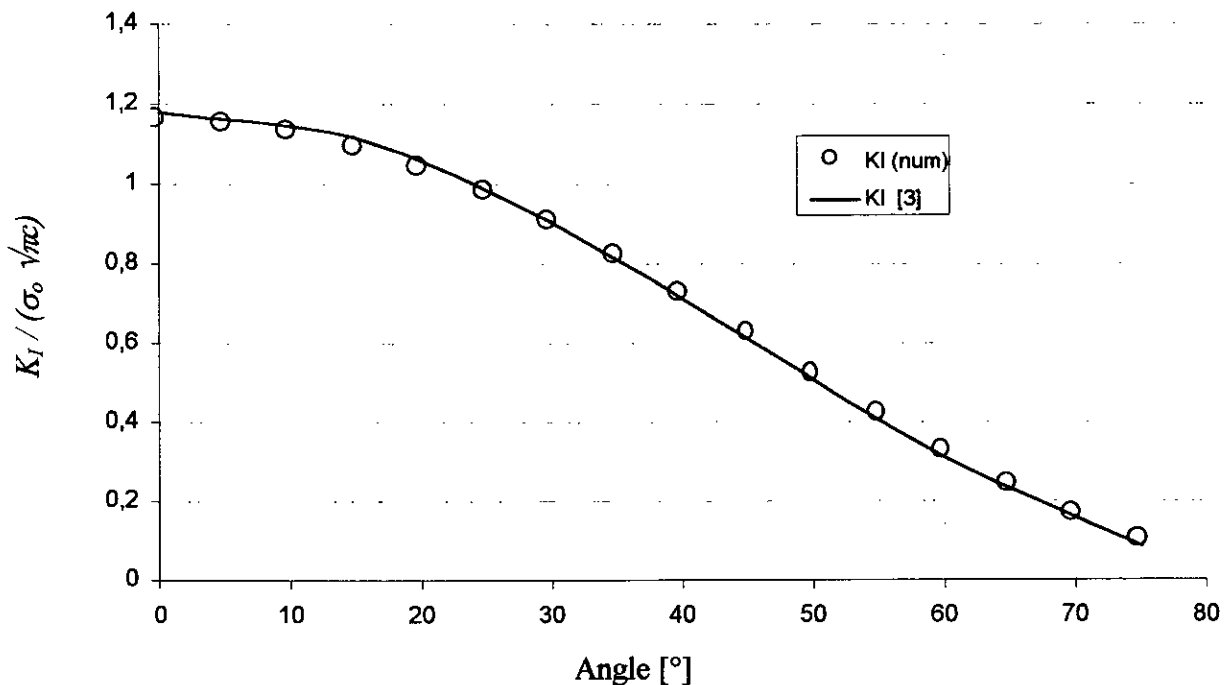


Fig.V.2. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure (Mode I)

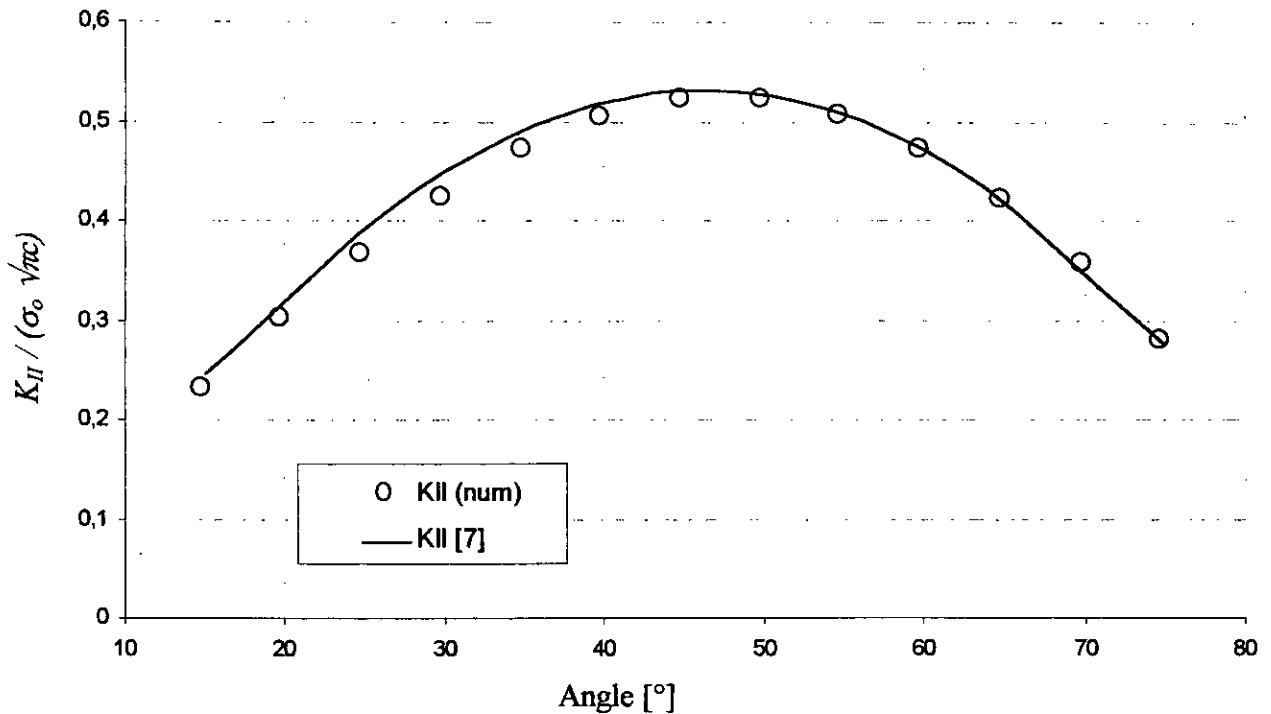


Fig.V.3. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure (Mode II)

On remarque que la valeur de K_I est maximum quand l'angle $\alpha = 0$, ceci explique le cas plus dangereux d'ouverture d'une fissure.

D'après les résultats, nous pouvons conclure que la technique de fonction de Green donne une bonne approximation du calcul de facteur d'intensité de contrainte en mode I & II, quelque soit l'orientation de la fissure par rapport à la perpendiculaire à la direction de la charge.

2\ - EXEMPLE 02 : FISSURE CENTRALE DANS UNE PLAQUE FINIE.

Nous utilisons précédent en variant la valeur de c/w entre 0,1 et 0,8 pour un angle $\alpha = 0^\circ$.

Les résultats analytiques sont donnés par la formule suivante [1] :

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi c} f\left(\frac{c}{w}\right)$$

Le facteur de correction $f(c/w)$ peut être calculé à 0,3 % près par la formule ci-après :

$$f\left(\frac{c}{w}\right) = \frac{1 - 0,5 \frac{c}{w} + 0,370 \left(\frac{c}{w}\right)^2 - 0,044 \left(\frac{c}{w}\right)^3}{\sqrt{1 - \frac{c}{w}}}$$

Les résultats numériques et analytiques sont représentés graphiquement sous forme de courbe (Fig. V.4) et sous forme du tableau (Table V.2), suivants :

Table V.2 : Facteur d'intensité de contrainte (K_I) pour différentes valeurs de c/w

C/w	K_I (Num)	K_I [1]	Erreur
0,1	80	80	0 %
0,2	115	114	0,2 %
0,3	144	145	0,6 %
0,4	173	175	1,2 %
0,5	205	210	2,4 %
0,6	242	253	4,5 %
0,7	293	313	6,8 %
0,8	372	409	9,9 %

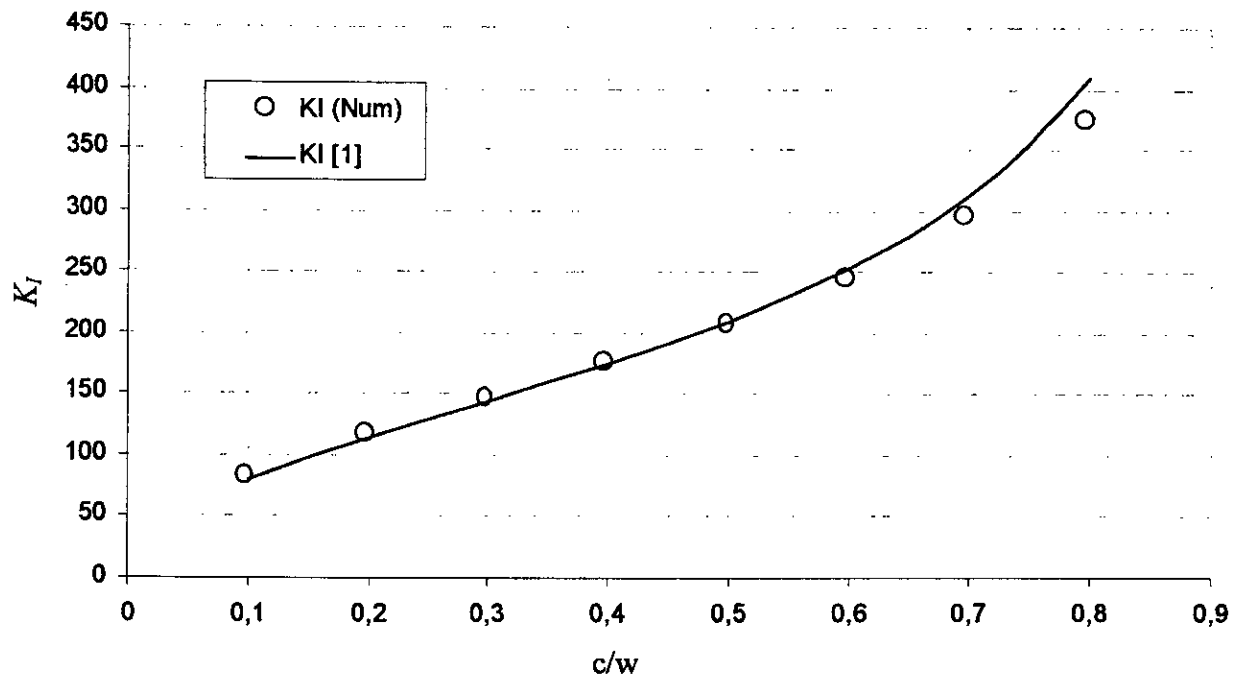


Fig.V.4. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de longueur de la fissure.

On remarque que K_I augmente quand c/w augmente, ceci a cause de l'importance de la singularité.

D'après le graphe de la figure V.4, la solution trouvée par la technique de fonction de Green est très proche de la solution analytique.

3\ - EXEMPLE 03 : FISSURE DEBOUCHANTE DANS UNE PLAQUE FINIE.

Une plaque rectangulaire de largeur w et de hauteur $2h$ fissurée est chargée par une contraintes uniforme $\sigma_0 = 100$ MPa (les conditions aux limites montrées dans la Fig. V.5). Nous utilisons $h/w = 2.0$.

Les nombres d'élément ont été choisis comme $N_v = 16$, $N_b = 16$ ($N = 2 * N_v + 2 * N_b$) et $M = 8$. Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont les mêmes que celles utilisées dans l'exemple 01.

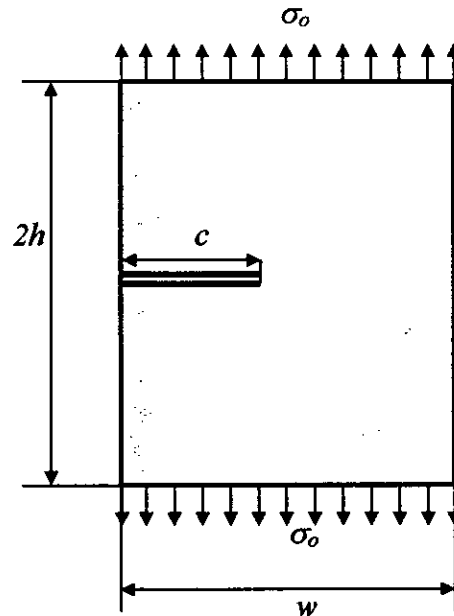


Fig. V.5. Plaque rectangulaire contenant une fissure

On varie c/w entre 0,1 et 0,5. Les résultats analytiques sont donnés par la formule suivante [1] :

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi c} f\left(\frac{c}{w}\right)$$

avec :

$$f\left(\frac{c}{w}\right) = \left(\frac{2w}{\pi c} \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2w}\right)^{1/2} \frac{0,752 + 0,370 \left(1 - \sin \frac{\pi c}{2w}\right)^3 + 2,02 \frac{c}{w}}{\cos \frac{\pi c}{2w}}$$

La précision atteinte par cette formule est 0,5 % quel que soit le rapport (c/w).

Les résultats analytiques et numériques peuvent être représentés graphiquement sous forme de courbe (Fig. V.6) et sous forme du tableau (Table V.3), suivants :

Table V.3 : Facteur d'intensité de contrainte (K_I) pour différentes valeurs de c/w

c/w	K_I (Num)	K_I [1]	Erreur
0,05	91	91	0 %
0,10	133	134	0,8 %
0,15	172	174	1,1 %
0,20	214	217	1,4 %
0,25	261	265	1,5 %
0,30	312	321	2,8 %
0,35	371	389	4,8 %
0,40	440	473	7,5 %
0,45	521	577	10,7 %
0,50	624	709	13,6 %

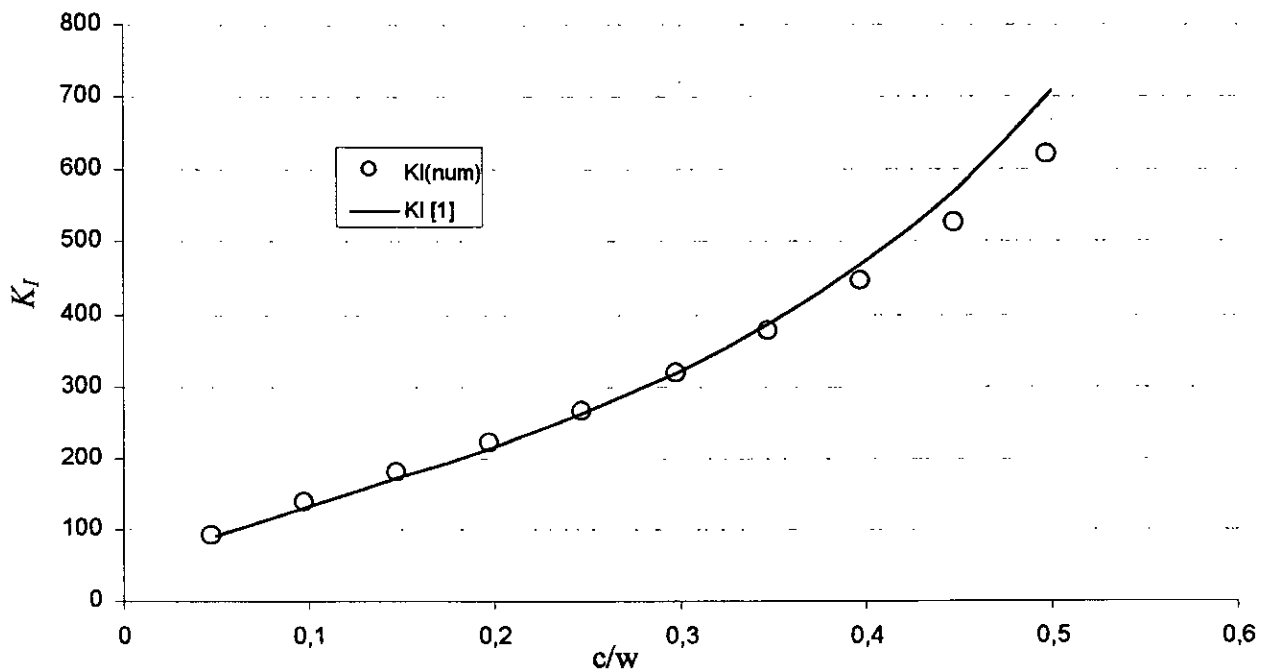


Fig.V.6. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de longueur de la fissure.

La valeur de K_I est très grande pour $c/w = 0,5$, à cause d'influence de frontière, ceci qui donne un risque d'une rupture brutale.

On remarque que les résultats numériques convergent vers les solutions analytiques.

4\ - EXEMPLE 04 : FISSURE CENTREE DANS UNE PLAQUE CIRCULAIRE RADIALEMENT TENDUE.

Une plaque circulaire de rayon w fissurée est chargée par une contrainte radiale et uniforme $\sigma_o = 100$ MPa (voir Fig. V.7). La longueur de fissure est $2c$.

Les nombres d'élément ont été choisis comme $N = 128$ et $M = 24$. Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont les suivantes :

$$E = 220000 \text{ MPa} \text{ et } \nu = 0,2$$

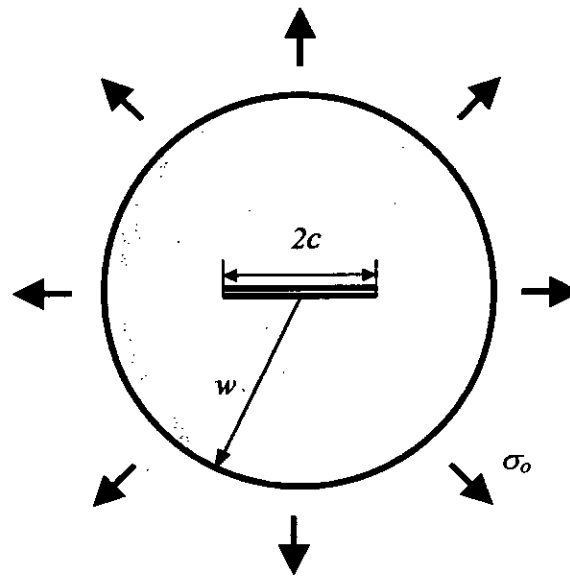
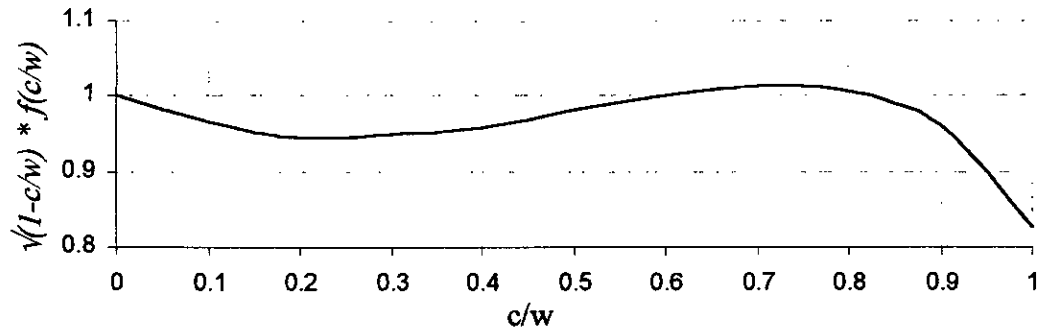


Fig. V.7. Fissure centrale dans une plaque circulaire

On varie c/w entre 0,1 et 0,9. Les résultats analytiques sont donnés par la formule suivante [1] :

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi c} f\left(\frac{c}{w}\right)$$

Dans ce cas, le facteur de correction pour différentes valeurs de c/w est donné par le graphe suivant [1] :



Les résultats analytiques avec les résultats numériques sont représentés graphiquement sous forme de courbe (Fig. V.8) et sous forme d'un tableau (Table V.4), suivants :

Table V.4 : Facteur d'intensité de contrainte pour différentes valeurs de c/w . (Mode I)

c/w	K_I (Num)	K_I [1]	Erreur
0,1	81	80	1,2 %
0,2	120	118	1,6 %
0,3	159	156	1,9 %
0,4	201	196	2,5 %
0,5	253	246	2,8 %
0,6	320	307	4,2 %
0,7	410	389	5,3 %
0,8	550	504	9,1 %
0,9	855	745	14,7 %

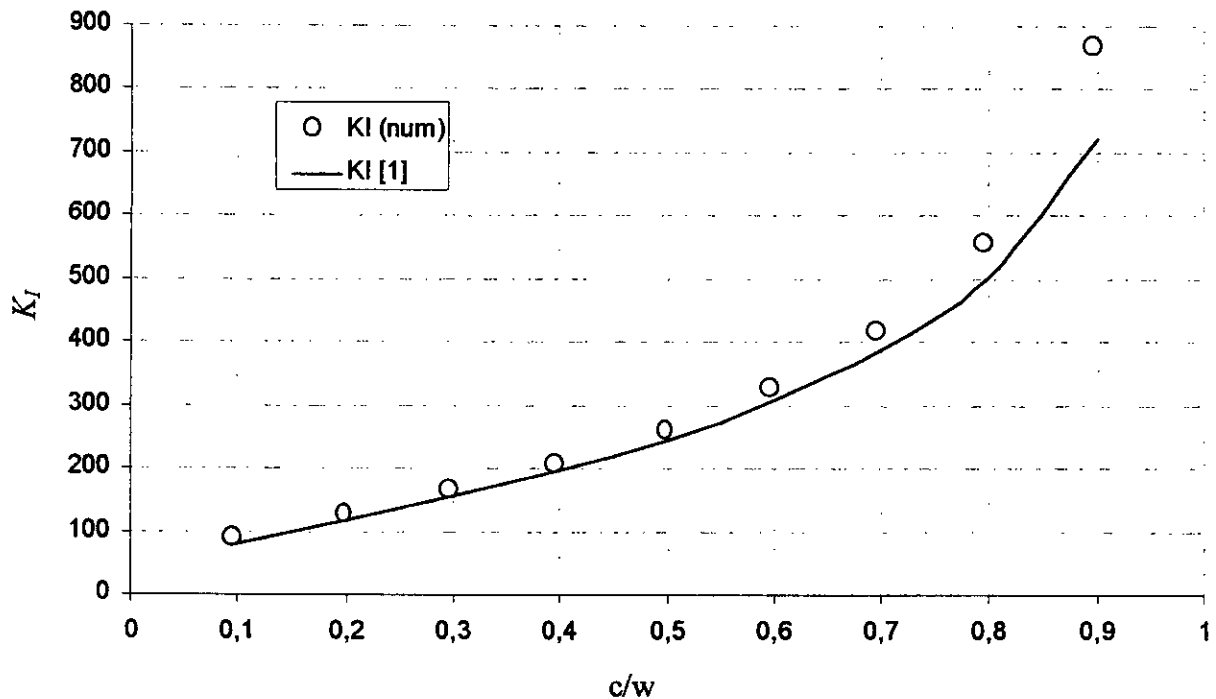


Fig.V.8. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de c/w

Notons que les résultats numériques du facteur d'intensité de contrainte sont obtenus en utilisant un nombre d'éléments constant dans la discrétisation pour toute la fissure. Ceci explique l'augmentation relative de l'erreur. Cette erreur diminue de plus en plus avec la diminution du rapport c/w . ceci est dû au fait que lorsque c/w est faible, le nombre d'éléments est plus représentatif de la fissure (effet de raffinement).

D'après le graphe de la figure V.8, nous constatons que les résultats numériques convergent vers les résultats analytiques.

5\ - EXEMPLE 05 : FISSURE LATÉRALE DANS UNE PLAQUE CIRCULAIRE
RADIALEMENT TENDUE.

Une plaque circulaire de diamètre D fissurée est chargée par une contrainte radiale et uniforme $\sigma_o = 100$ MPa (voir Fig. V.9). La longueur de fissure est c .

Les nombres d'élément choisis comme $N = 120$ et $M = 16$ jusqu'à 2.

Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont les suivantes :
 $E = 220000$ MPa et $\nu = 0$

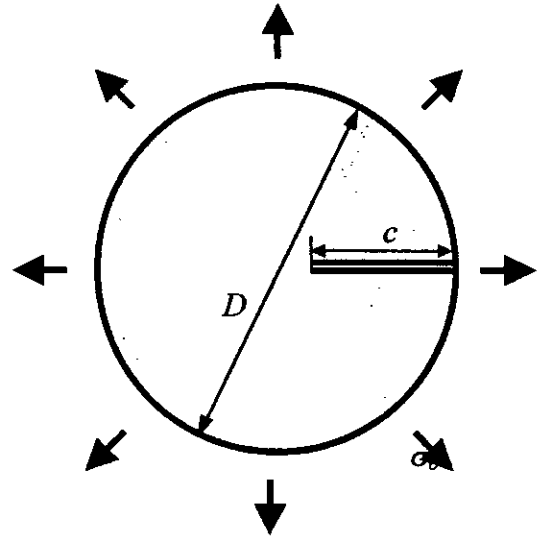


Fig. V.9. Fissure latérale dans une plaque circulaire

On varie c/D entre 0,1 et 0,8. Les résultats analytiques sont donnés par la formule suivante [1] :

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi c} f\left(\frac{c}{D}\right)$$

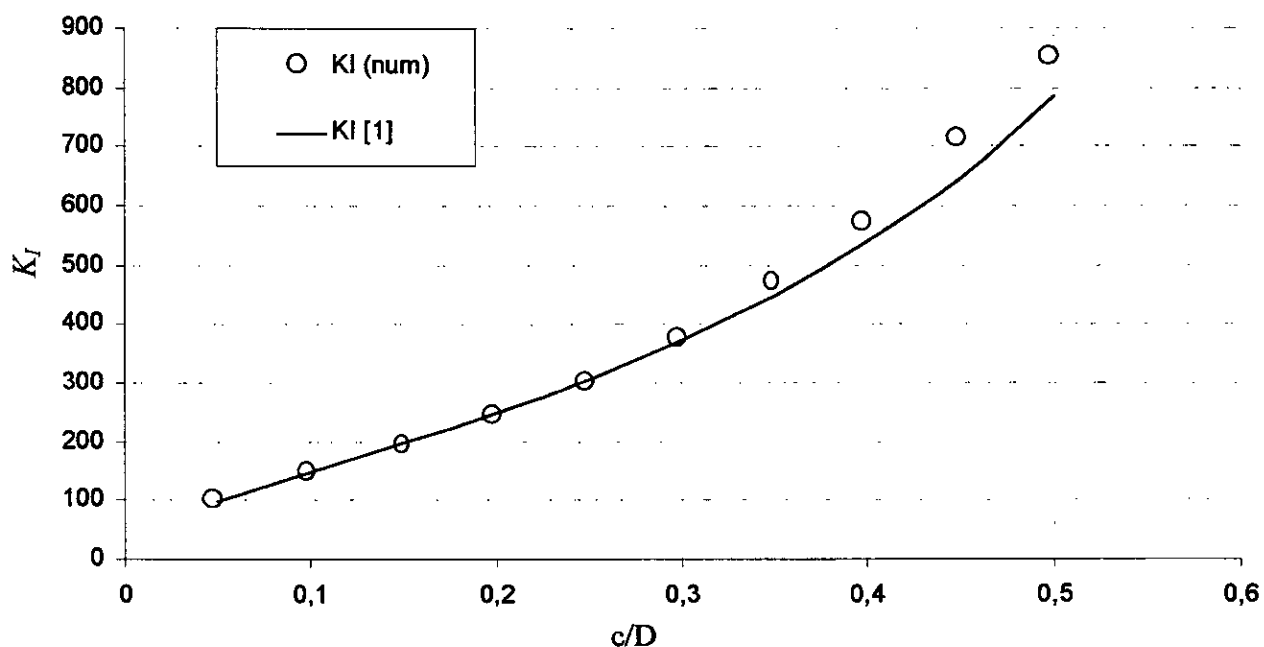
Dans le cas, le facteur de correction est :

$$f\left(\frac{c}{D}\right) = \frac{1,122 + 0,140 \frac{c}{D} - 0,545 \left(\frac{c}{D}\right)^2 + 0,405 \left(\frac{c}{D}\right)^3}{\left(1 - \frac{c}{D}\right)^{3/2}}$$

Les résultats analytiques avec les résultats numériques sont représentés graphiquement sous forme de courbe (Fig. V.10) et sous forme d'un tableau (Table V.5), suivants :

Table V.5 : Facteur d'intensité de contrainte pour différentes valeurs de c/D . (Mode I)

c/D	K_I (Num)	K_I [1]	Erreur
0,05	95	96	1,1 %
0,10	145	149	2,7 %
0,15	189	198	4,7 %
0,20	238	251	5,4 %
0,25	295	308	4,4 %
0,30	372	373	0,2 %
0,35	466	449	3,8 %
0,40	568	539	5,4 %
0,45	709	648	9,4 %
0,50	872	784	11,2 %

Fig.V.10. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de c/D

D'après les résultats obtenus, nous constatons que la courbe du facteur d'intensité de contrainte obtenue par la technique de fonction de Green est de même forme que celle trouvée analytiquement.

6\ - EXEMPLE 06 : TROU FISSURE CENTRE DANS UNE PLAQUE FINIE TENDUE.

Une plaque finie de largeur $2w$ et de hauteur $2h$, contenant un trou fissuré est chargée par une contrainte uniforme $\sigma_0 = 100$ MPa (voir Fig. V.11). La valeur $h/w = 2.0$. Les nombres d'élément choisis comme $N_w = 16$, $N_h = 16$, ($N = 2 * N_w + 2 * N_h$) et $M_a = 2$ pour les deux fissures et $N_{\text{trou}} = 32$. Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont les suivantes : $E = 220000$ MPa et $\nu = 0$

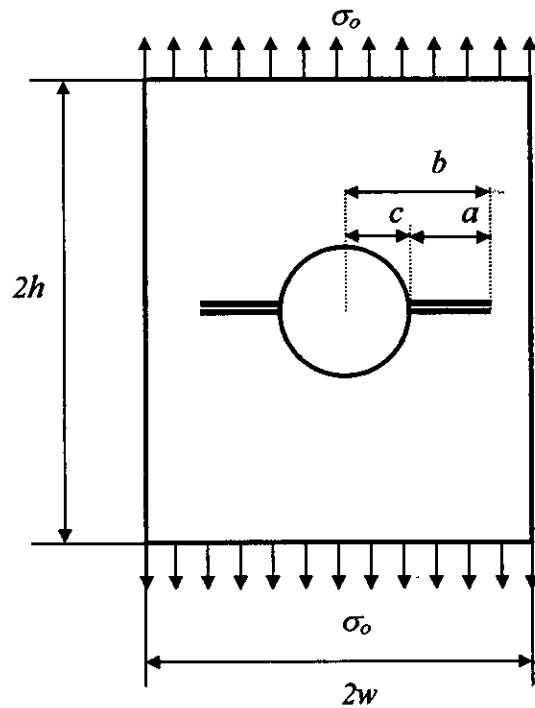


Fig. V.11. Plaque rectangulaire contenant deux fissures latérales

On varie b/w entre 0,3 et 0,9 et on prend $c/w = 0,25$. Les résultats analytiques sont donnés par la formule suivante [1] :

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{a\pi} f\left(\frac{c}{w}, \frac{b}{w}\right)$$

$f\left(\frac{c}{w}, \frac{b}{w}\right)$ est donné par la figure suivante :

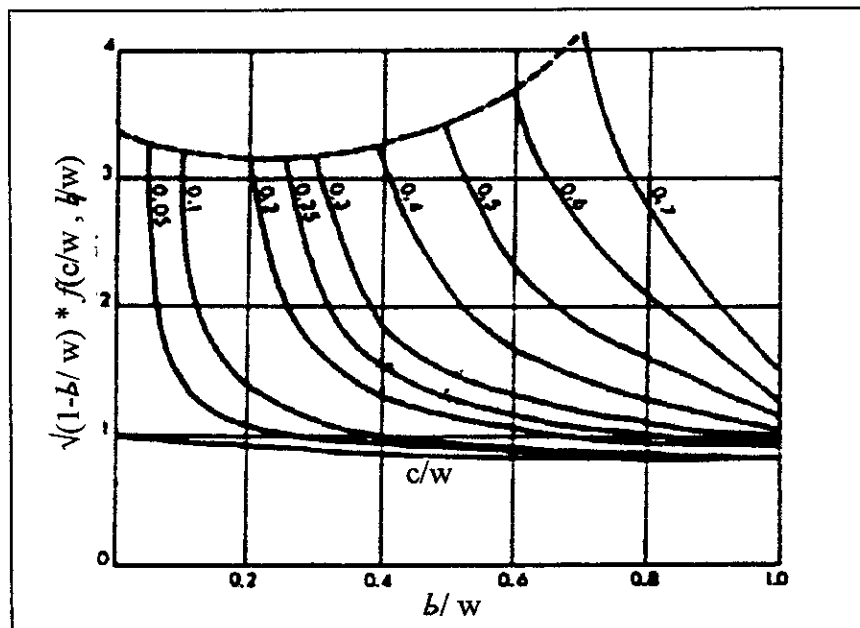


Table V.6 : Facteur d'intensité de contrainte pour différentes valeurs de b/w .

B/w	K_I (Num)	K_I [1]	Erreur
0,3	169	161	4,9 %
0,4	213	207	2,9 %
0,5	240	248	3,3 %
0,6	273	293	7,3 %
0,7	322	338	4,9 %
0,8	403	416	3,2 %
0,9	561	575	2,4 %

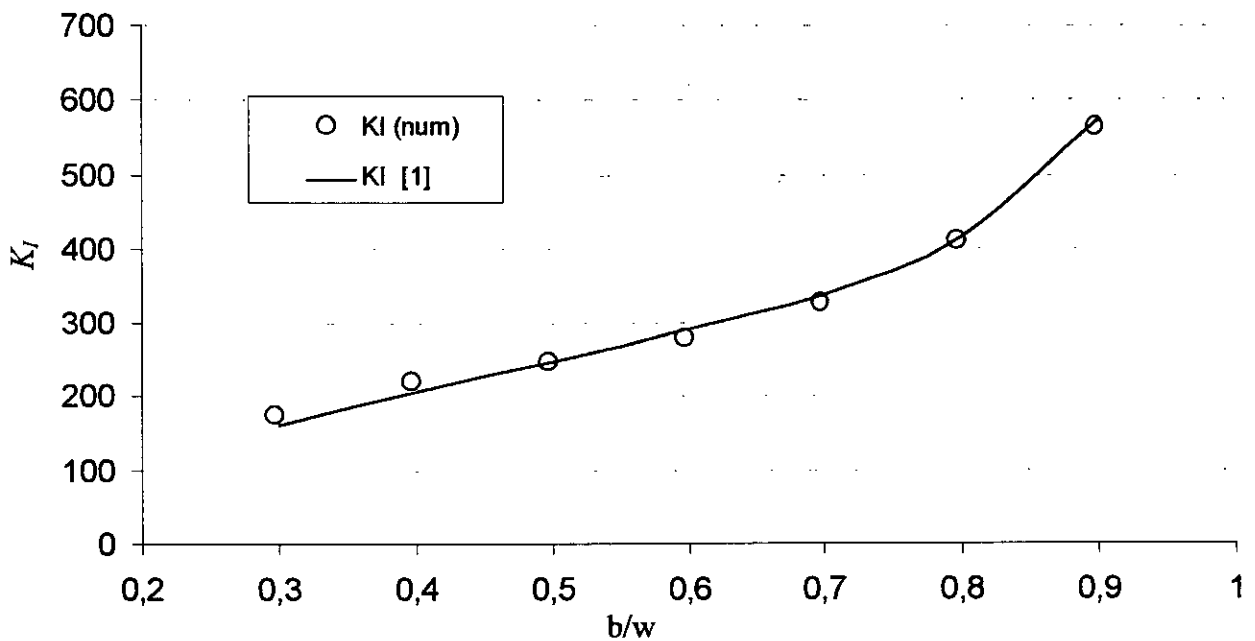


Fig.V.12. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de b/w

Une légère augmentation de facteur d'intensité de contrainte quand c/w augmente, a cause de la présence d'effet de bord (les frontières).

Les résultats trouvés par la technique de fonction de Green sont convergents vers les résultats analytiques.

7\ - EXEMPLE 07 : PLAQUE INFINIE CONTIENT UNE FISSURE CENTRALE.

Une fissure dans une plaque infinie est chargée par une charge uniforme $P_{yy} = 100 \text{ MPa}$ (voir Fig. V.13) La fissure est inclinée par un angle α par rapport à la perpendiculaire à la direction de la charge. Les nombres d'élément ont été choisis comme $N_c=16$.

Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont les suivantes :

$$E = 220000 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \nu = 0$$

On varie l'angle α entre 0° et 85° .

Les résultats analytiques d'après réf [5] :

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi c} \cos^2 \alpha$$

$$K_{II} = \sigma_o \sqrt{\pi c} \cos \alpha \sin \alpha$$

Les résultats analytiques et les résultats numériques peuvent être représentés graphiquement sous forme de courbes (Fig. V.14 & 15), suivants :

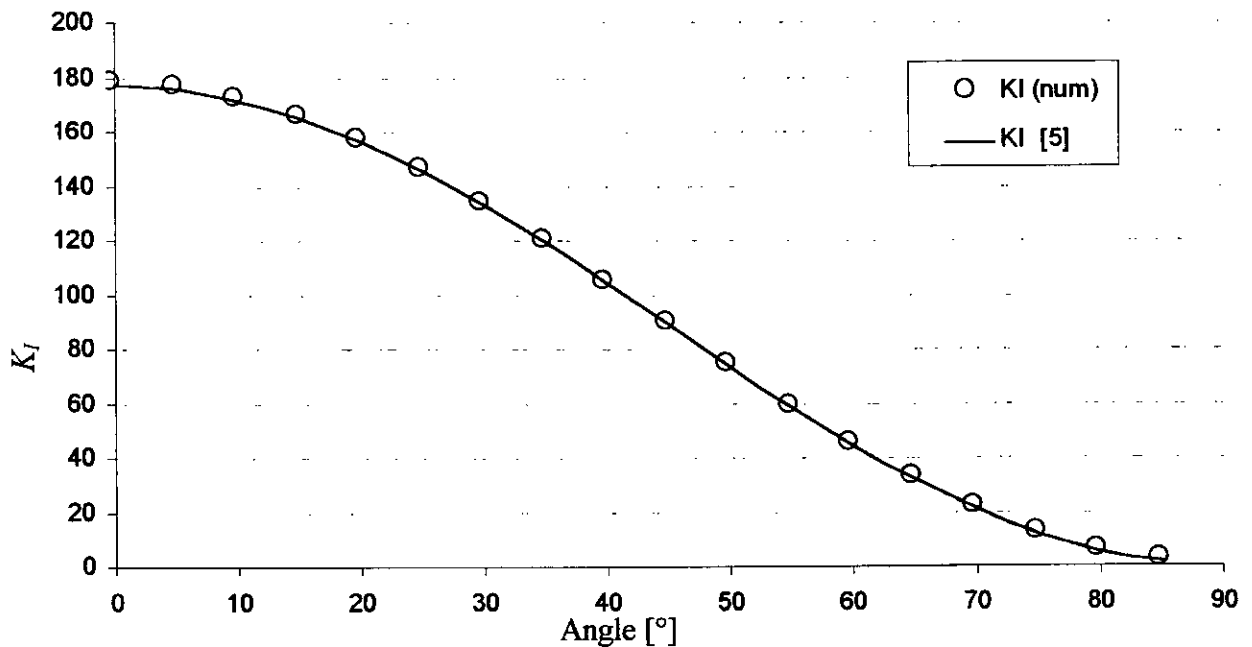


Fig.V.14. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure (Mode I)

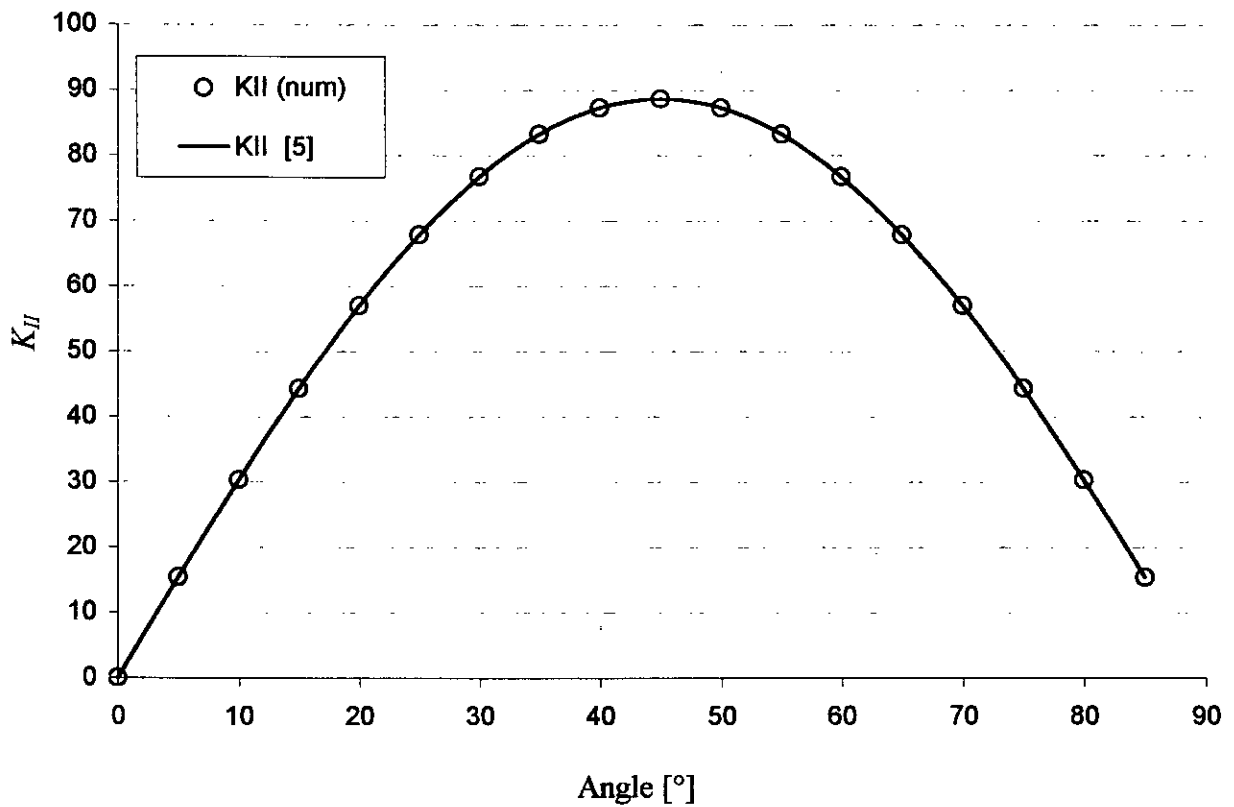


Fig.V.15. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure (Mode II)

D'après les résultats trouvés, on constate que notre approche donne des solutions pratiquement superposées avec les solutions analytiques, ce qui montre l'exactitude de cette approche, notamment, en l'absence des effets de frontière.

V.3. DEUXIEME CATEGORIE D'EXEMPLE (FONCTION DE POIDS GENERALISEE).

1\ - EXEMPLE 01 : FISSURE CENTRALE DANS UNE PLAQUE FINIE.

Même exemple 01 de première catégorie (voir Fig. V.1) mais avec utilisation de technique de fonction de poids. On utilise les mêmes caractéristiques mécaniques et les conditions aux limites.

On varie l'angle α entre 0° et 75° . Les résultats analytiques d'après réf [3] avec les résultats numériques peuvent être représentés graphiquement sous forme de courbes (Fig.V.16 & 17) et sous forme d'un tableau (Table V.7), suivants :

Table V.7 : Facteur d'intensité de contrainte pour différents angles d'inclinaison de la fissure. (Mode I & II)

Angle	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$K_I / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ (Num)	1,2146	1,1383	0,9305	0,6235	0,3160	0,0840
$K_I / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ [3]	1,1793	1,1128	0,9046	0,6119	0,3099	0,0837
$K_{II} / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ (Num)	---	0,2546	0,4585	0,5570	0,4972	0,2912
$K_{II} / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ [3]	---	0,2619	0,4617	0,5458	0,4827	0,2825

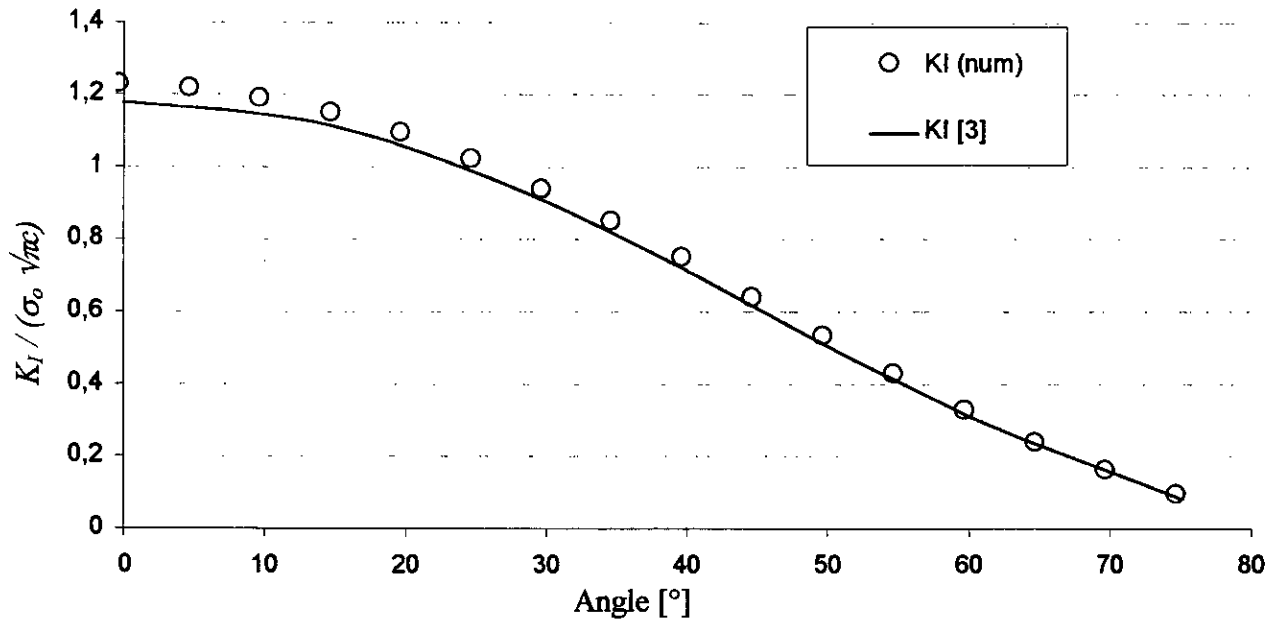


Fig.V.16. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure (Mode I)

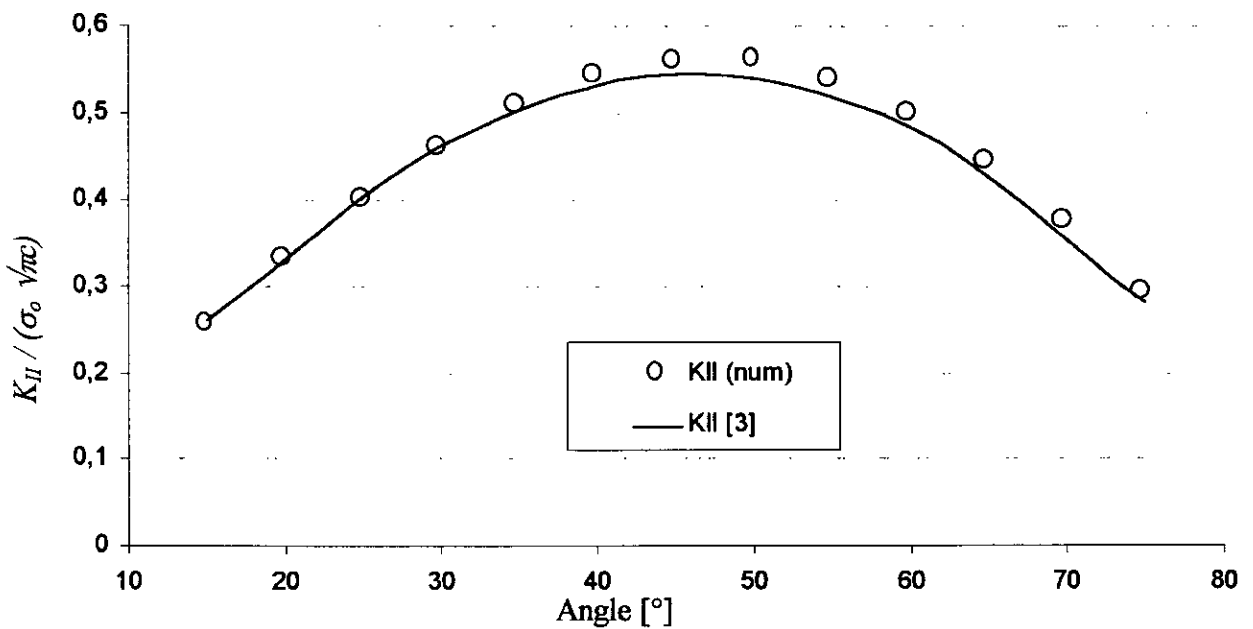


Fig.V.17. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure (Mode II)

La valeur de K_I est maximum quand l'angle $\alpha = 0^\circ$, ceci explique le cas plus dangereux d'ouverture d'une fissure. Et pour la valeur de K_{II} est maximum quand l'angle $\alpha = 45^\circ$.

D'après les résultats, nous pouvons conclure que la technique de fonction de poids généralisée donne une bonne approximation du calcul de facteur d'intensité de contrainte en mode I & II avec une erreur maximum de 2,3 %, quelque soit l'orientation de la fissure par rapport à la perpendiculaire à la direction de la charge.

2\ - EXEMPLE 02 : FISSURE CENTRALE DANS UNE PLAQUE FINIE.

Même exemple que précédent avec utilisation de technique de fonction de poids. On varie la valeur de c/w entre 0,1 et 0,8 pour un angle $\alpha = 0^\circ$.

Les résultats analytiques sont donnés par la formule suivante [1] :

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi c} f\left(\frac{c}{w}\right)$$

Le facteur de correction $f(c/w)$ peut être calculé à 0,3 % près par la formule ci-après :

$$f\left(\frac{c}{w}\right) = \frac{1 - 0,5 \frac{c}{w} + 0,370 \left(\frac{c}{w}\right)^2 - 0,044 \left(\frac{c}{w}\right)^3}{\sqrt{1 - \frac{c}{w}}}$$

Les résultats numériques et analytiques peuvent être représentés graphiquement sous forme de courbe (Fig.V.19) et sous forme d'un tableau (Table.V.9), suivants :

Table V.9 : Facteur d'intensité de contrainte (K_I) pour différentes valeurs de c/w

c/w	K_I (Num)	K_I [1]	Erreur
0,1	84	80	5 %
0,2	120	115	4,3 %
0,3	151	145	4,1 %
0,4	181	175	3,4 %
0,5	215	210	2,4 %
0,6	255	253	0,8 %
0,7	308	313	1,6 %
0,8	392	409	4,3 %

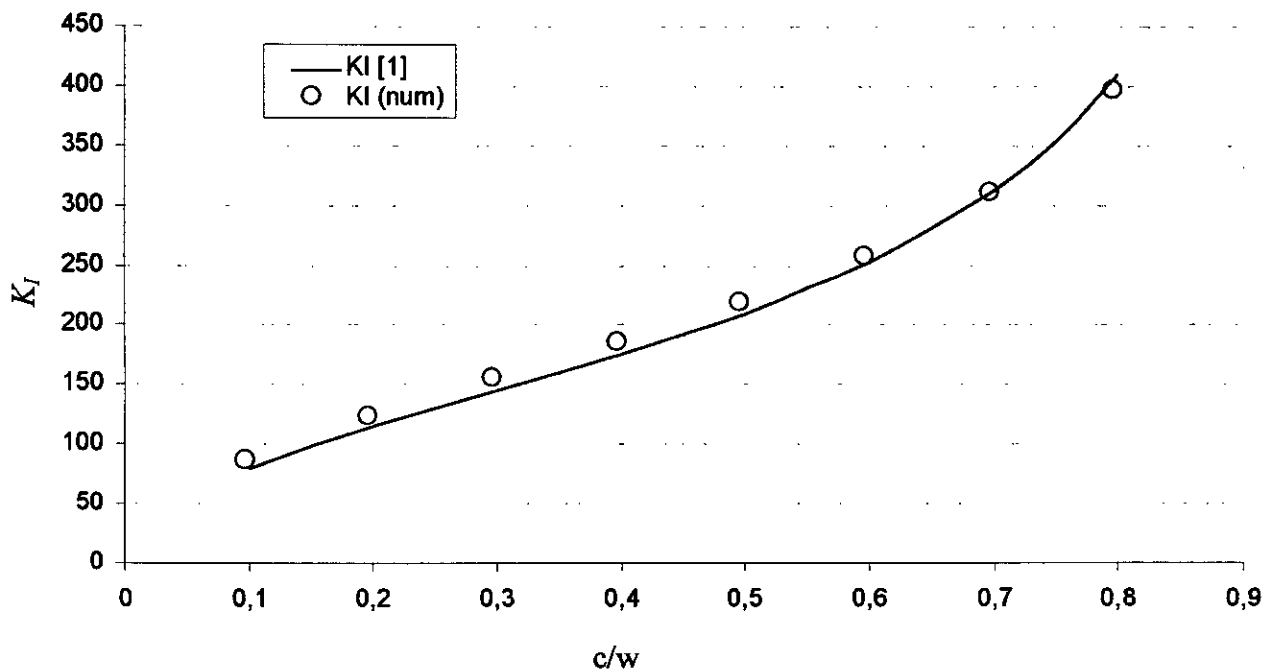


Fig.V.19. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de longueur de la fissure.

Les résultats trouvés par la technique de fonction de poids sont convergents vers les résultats analytiques, cette technique sous forme généralisée est donne une bonne résultat avec une erreur maximum égale à 5 %, par contre les résultats obtenus par le cas particulière de cette technique (fonction de Green), l'erreur maximum est 9,9 %

3\ - EXEMPLE 03 : FISSURE DEBOUCHANTE DANS UNE PLAQUE FINIE.

Même exemple que exemple 03 de première catégorie (voir la Fig. V.5).

On varie c/w entre 0,1 et 0,5. Les résultats analytiques sont donnés par la formule suivante [1] :

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi c} f\left(\frac{c}{w}\right)$$

$$\text{avec : } f\left(\frac{c}{w}\right) = \left(\frac{2w}{\pi c} \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2w}\right)^{1/2} \frac{0,752 + 0,370 \left(1 - \sin \frac{\pi c}{2w}\right)^3 + 2,02 \frac{c}{w}}{\cos \frac{\pi c}{2w}}$$

La précision atteinte par cette formule est 0,5 % quel que soit le rapport (c/w).

Les résultats analytiques et numériques peuvent être représentés graphiquement sous forme de courbe (Fig.V.20) et sous forme d'un tableau (Table.V.10), suivants :

Table V.10 : Facteur d'intensité de contrainte (K_I) pour différentes valeurs de c/w

c/w	K_I (Num)	K_I [1]	Erreur
0,05	96	91	6,5 %
0,10	142	134	5,9 %
0,15	184	174	5,7 %
0,20	226	217	4,1 %
0,25	273	265	3 %
0,30	327	321	1,9 %
0,35	389,1	389	0,2 %
0,40	461	473	2,6 %
0,45	546	577	5,6 %
0,50	645	709	9,9 %

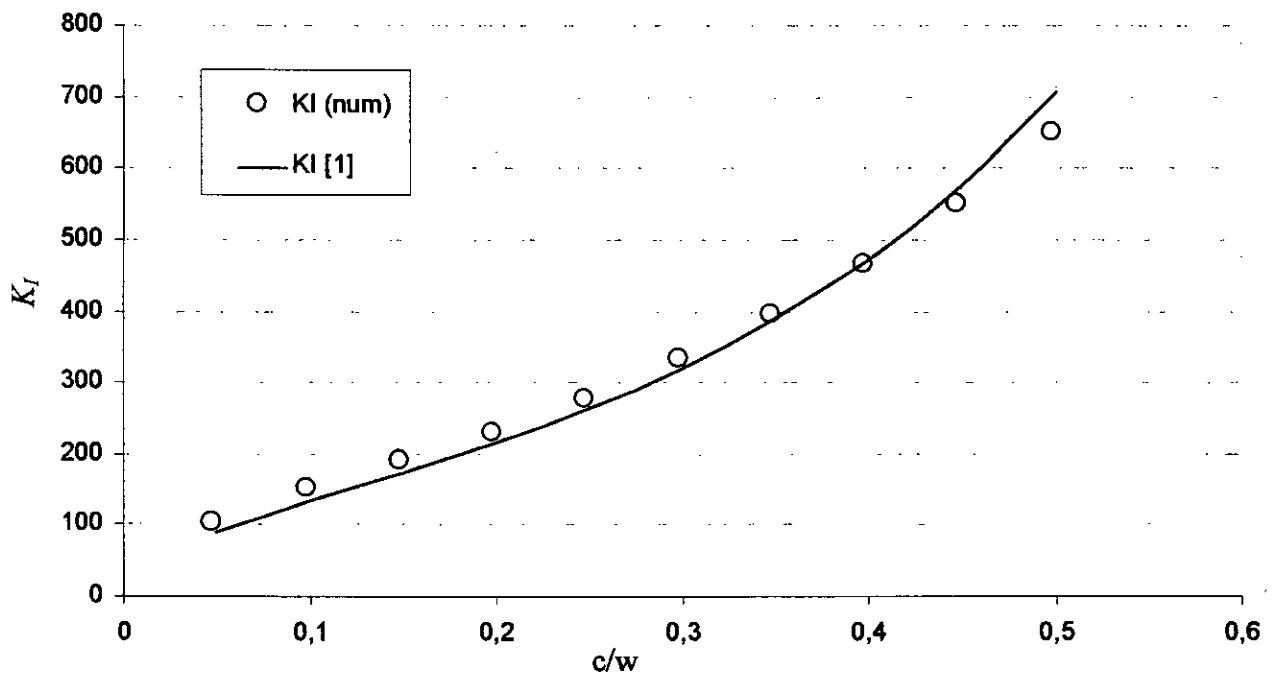


Fig.V.20. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de longueur de la fissure.

D'après les résultats obtenus, nous constatons que la courbe du facteur d'intensité de contrainte obtenue par la technique de fonction de poids est pratiquement de même forme que celle trouvée analytiquement avec une erreur maximum égale à 9,9 %.

4\ - EXEMPLE 04 : FISSURE CENTREE DANS UNE PLAQUE CIRCULAIRE RADIALEMENT TENDUE.

Même exemple que exemple 04 de première catégorie (voir la Fig. V.7).

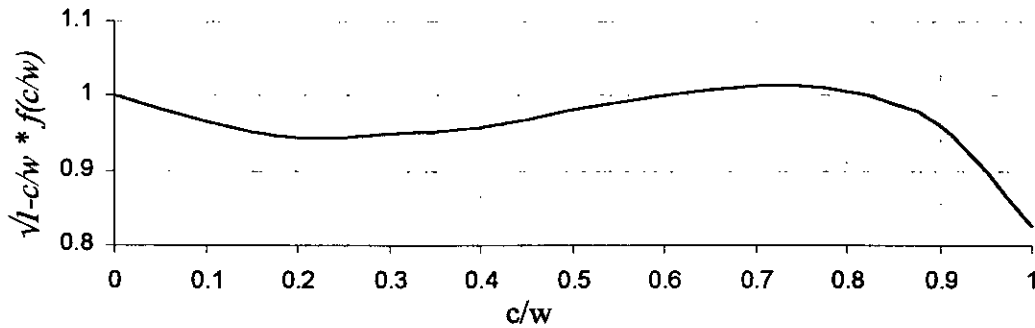
Les nombres d'élément ont été choisis comme $N = 48$ et $M = 6$ jusqu'à 30. Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont les suivantes :

$$E = 220000 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \nu = 0,1$$

On varie c/w entre 0,1 et 0,9. Les résultats analytiques sont donnés par la formule suivante [1] :

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi c} f\left(\frac{c}{w}\right)$$

Dans ce cas, le facteur de correction pour différentes valeurs de c/w est donné par le graphe suivant [1] :



Les résultats analytiques avec les résultats numériques sont représentés graphiquement sous forme de courbe (Fig. V.21) et sous forme d'un tableau (Table V.11), suivants :

Table V.11 : Facteur d'intensité de contrainte pour différentes valeurs de c/w . (Mode I)

c/w	K_I (Num)	K_I [1]	Erreur
0,1	80	80	0 %
0,2	120	118	0,8 %
0,3	158	156	1,2 %
0,4	199	196	1,5 %
0,5	251	246	2 %
0,6	316	307	2,9 %
0,7	406	389	4,3 %
0,8	538	504	6,7 %
0,9	842	745	13 %

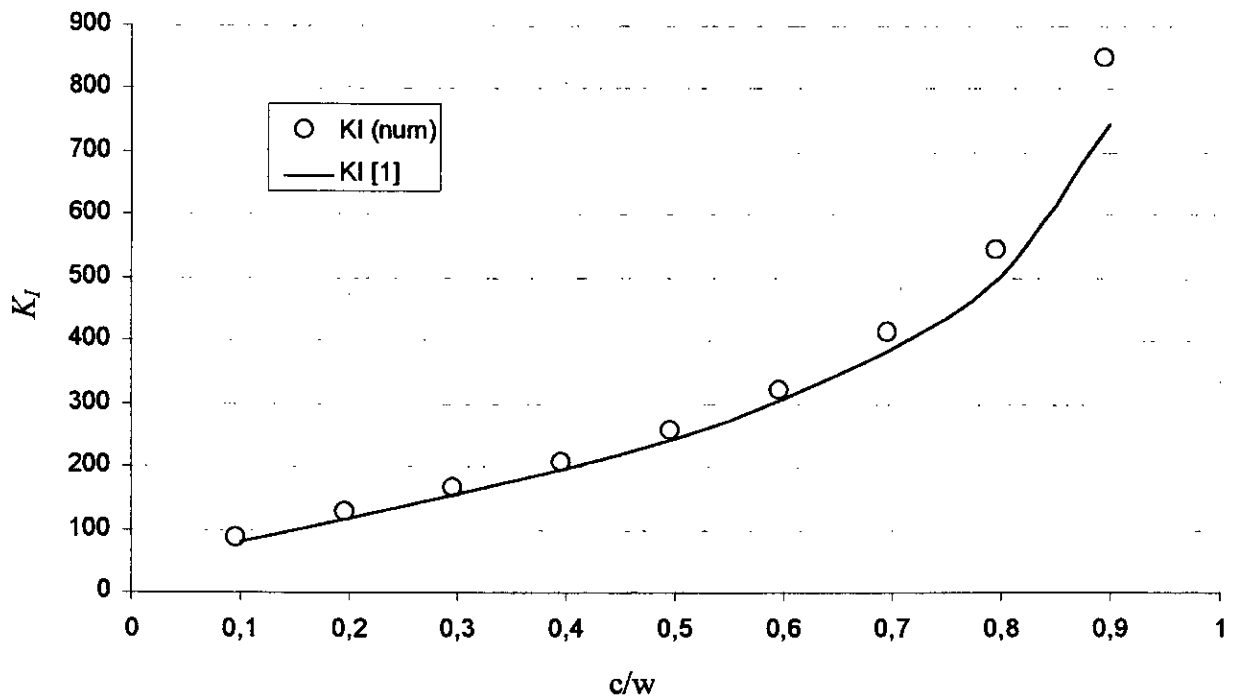


Fig.V.21. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de c/w

On remarque que K_I augmente quand c/w augmente, ceci a cause de l'influence du frontière.

La technique de fonction de poids est donne des résultats numériques qui convergent vers les résultats analytiques, avec bonne précision.

5\ - EXEMPLE 05 : TROU FISSURE CENTRE DANS UNE PLAQUE FINIE TENDUE.

Une plaque finie de largeur $2w$ et de hauteur $2h$, contenant une trou fissuré est chargée par une contrainte uniforme $\sigma_o = 100$ MPa (voir Fig. V.22). La valeur $h/w = 2.0$. Les nombres d'élément choisis comme $N_w = 16$, $N_h = 16$, ($N=2*N_w+2*N_h$) et $M_o=2$ pour les deux fissures et $N_{trou} = 32$. Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont les suivantes : $E = 220000$ MPa et $\nu = 0.1$

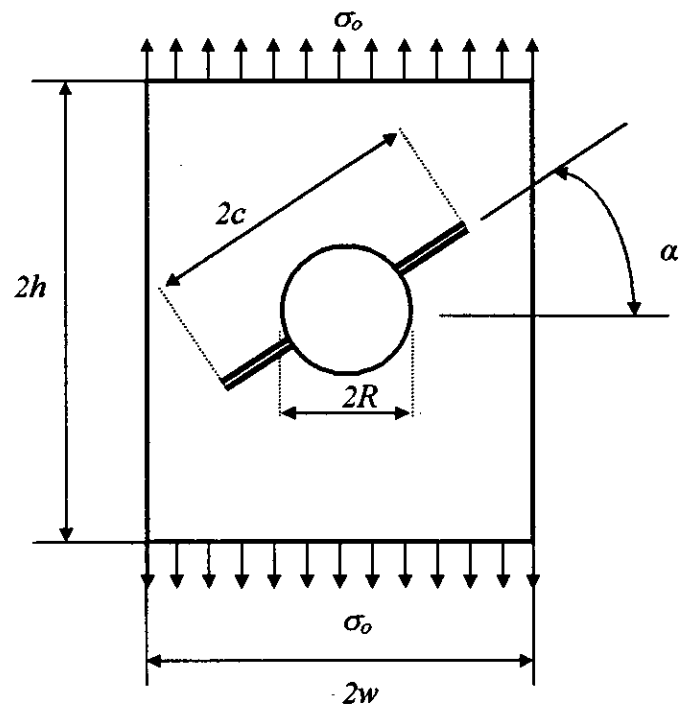


Fig. V.22. Plaque rectangulaire contenant deux fissures latérales

On varie l'angle α . Les résultats analytiques sont donnés par la réf [11] avec les résultats numériques sont représentés graphiquement sous forme de courbe (Fig.V23 & 24), et sous forme du tableau (Table V.12), suivants :

Table V.12 : Facteur d'intensité de contrainte pour différents angles d'inclinaison de la fissure. (Mode I & II)

Angle	0°	30°	45°	60°
$K_I / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ (Num)	1,320	0,930	0,614	0,225
$K_I / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ [11]	1,285	0,948	0,585	0,210
$K_{II} / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ (Num)	---	0,425	0,507	0,419
$K_{II} / \sigma_o \sqrt{\pi c}$ [11]	---	0,417	0,486	0,418

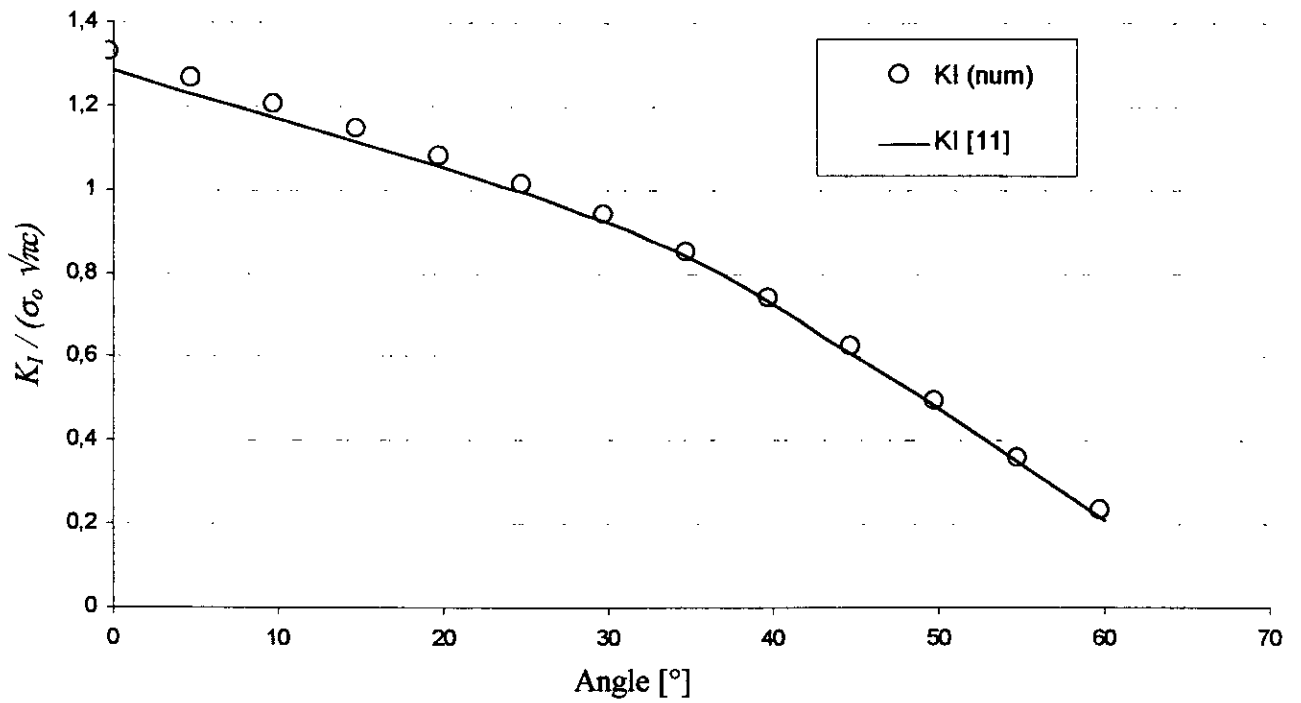


Fig.V.23. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure (Mode I)

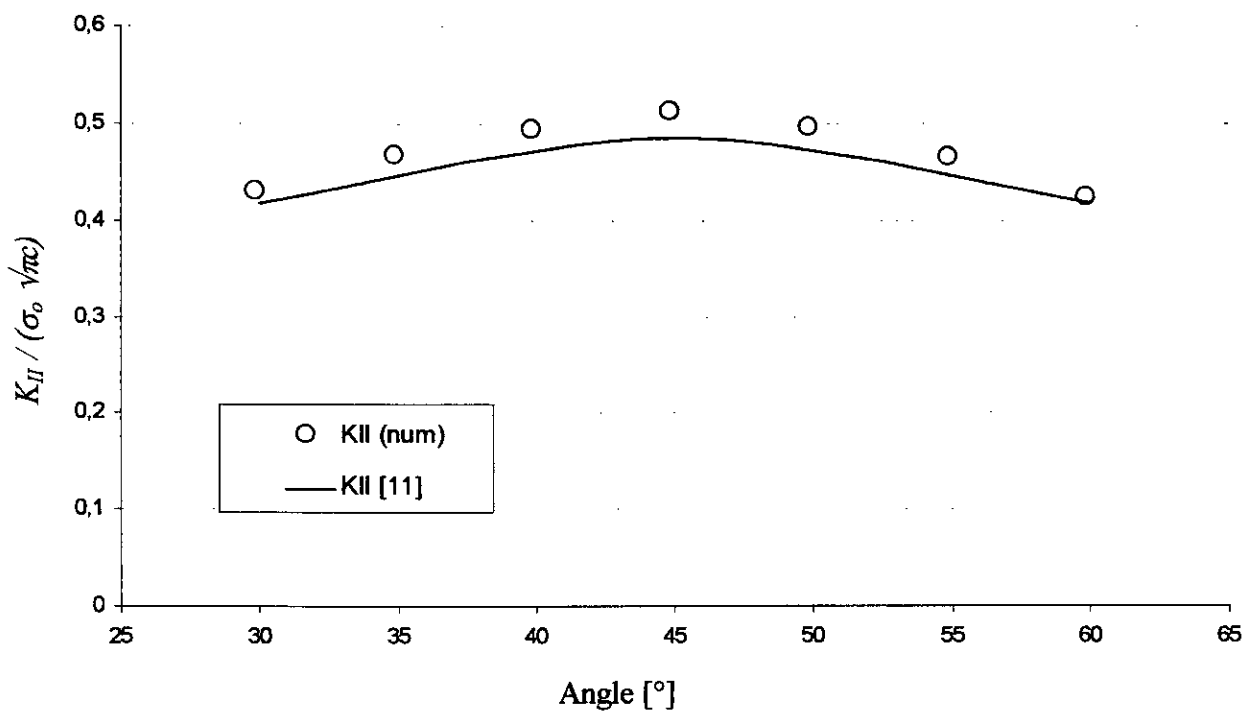


Fig.V.24. Variation de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure (Mode II)

V.4. CONCLUSION.

On conclusion générale de ce chapitre, nous avons traité quelque problèmes pratiques liés à la mécanique de la rupture. On peut dire que les résultats obtenus pour les différents exemples étudiés démontrent l'efficacité et la précision de la technique de fonction de poids (cas généralisée et le cas de fonction de Green) basée sur la méthode de discontinuité de déplacement. On a vu la bonne convergence de la solution numérique vers la solution analytique avec une erreur minimale.

L'augmentation relative de l'erreur dans les exemples dû à présence de la singularité, c'est-à-dire, l'effet des élément de frontière sur le bout de la fissure

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE.

Ce travail montre les grandes possibilités qu'offre la technique de fonction de poids basée sur la méthode de discontinuité de déplacement pour la résolution des problèmes de mécanique de la rupture en bidimensionnel.

Nous avons montré premièrement la connaissance des relations fondamentales de la mécanique de la rupture.

La deuxième discipline porte sur l'utilisation de la simplicité de la méthode de discontinuité de déplacement pour résoudre les problèmes de l'élasticité et de la mécanique de la rupture, et qu'elle fournit des résultats exploitables.

La troisième discipline contient la mise en évidence de l'utilisation de la technique de fonction de poids généralisé pour déterminer le facteur d'intensité de contrainte, et leurs applications pour les problèmes planes. Une fois que l'on connaît les fonctions de poids, pour une géométrie bien définie, on peut déterminer le facteur d'intensité de contrainte pour n'importe quel chargement par une simple intégrale.

Nous avons pu grâce à ces acquis, construire un code du calcul sous forme d'un programme pour la modélisation des milieux fissurés, en utilisant la technique de fonction de poids basée sur la méthode de discontinuité de déplacement pour résoudre les problèmes planes.

Pour tester la validité de notre programme, nous avons lancé une série d'exemples, par soucis de donner un caractère pratique à notre travail. Les exemples traités ont particulièrement montré la puissance de cette technique en mécanique de la rupture.

Dans la première catégorie d'exemples, nous nous sommes intéressés au calcul du facteur d'intensité de contrainte. Ce paramètre est évidemment un élément d'appréciation fondamental en mécanique de la rupture. Ces calculs sont basés sur la technique de fonction de Green (cas particulière de la fonction de poids). La comparaison des résultats donnés par nos calculs et les résultats analytiques et quelques autres études, montre que ces tests de validation présentent une bonne corrélation.

Dans la deuxième catégorie d'exemples, nous nous sommes toujours intéressés au calcul du facteur d'intensité de contrainte, mais cette fois en utilisant la technique de fonction de poids généralisée.

Donc l'utilisation de la technique de fonction de poids nous a permis l'obtention d'excellents résultats en comparaison avec les solutions analytiques et celle d'autres travaux^(*) correspondantes pour la plupart des problèmes.

Nous espérons qu'avec ce modeste travail, avoir pu dégager un champ de travail pour ceux qui pourraient s'intéresser à l'application de la technique de fonction de poids pour les problèmes dynamiques ou tridimensionnels.

(*) : voir les références telles que les références : [1],[3],[4],[5],[7] et [11].

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [1] **B. Barthélémy**
“Notions pratiques de mécanique de la rupture”
Edition EYROLLES 1980.
- [2] **B.K. Hachi**
“Contribution à l'application de la méthode de discontinuité de déplacement (MDD) en tridimensionnel”
Thèse de magistère, E.N.P, Alger 2000.
- [3] **D.P. Rooke, D.J. Cartwright**
“Compendium of stress intensity factors”
Her majesty's stationery office, London 1976.
- [4] **H.L. Ewalds, R.J.H. Wan hill**
“Fracture mechanics”
Edition Edward Arnold 1986.
- [5] **J. Lemaitre, J.L. Chaboche**
“Mécanique des matériaux solides”
Edition Dunod Paris 1986.
- [6] **M. Ghemour, A. Hillal**
“Etude numérique du phénomène de rupture autour d'inclusion par la méthode de discontinuité des déplacements”
P.F.E, E.N.P, Alger 1997.
- [7] **PH. Wen**
“Dynamic fracture mechanics: Displacement discontinuity method”
Computational mechanics publication, Southampton, UK and Boston, USA 1996.
- [8] **R.Dilmi, H. Boukia**
“Application de la méthode des contraintes fictives aux milieux anisotropes”
P.F.E, E.N.P, Alger 1995.
- [9] **R. Labbens**
“Introduction à la mécanique de la rupture”
Edition Pluralis 1980.
- [10] **S.L. Crouch, A.M. Starfield**
“Boundary element method in solid mechanics”
Edition Allen et Unwin 1983.
- [11] **Y. Murakami**
“Stress intensity factors handbook”
Pergamon Press. London 1987.

ANNEXE

ANNEXE

1\-

$$f(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (\text{A.1})$$

les dérivées de fonction $f(x,y)$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} f_{,x} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ f_{,y} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\ f_{,xy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ f_{,xx} &= -f_{,yy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ f_{,yyy} &= -f_{,xxx} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)^2 - y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right] \\ f_{,yyy} &= -f_{,xxx} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

2\ - La limites dans l'équations (II.6) est mentionnée parce que la fonction arctangente a plusieurs valeurs. On définit alors deux angles θ_1 et θ_2 (Fig. A) avec :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan \frac{y}{x-a} \\ \theta_2 &= \arctan \frac{y}{x+a} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

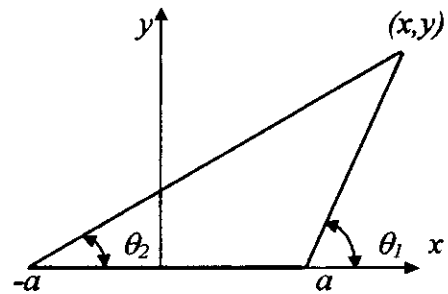


Fig.A Les angles à partir des extrémités

Donc pour $y \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, y = 0 \\ +\pi & |x| < a, y = 0^+ \\ -\pi & |x| < a, y = 0^- \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

3\ -Changement de coordonnées :

* Pour les déplacements (Figure B) :

$$\begin{aligned} U_x &= U_{\bar{x}} \cos \beta - U_{\bar{y}} \sin \beta \\ U_y &= U_{\bar{x}} \sin \beta + U_{\bar{y}} \cos \beta \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

reciproquement :

$$\begin{aligned} U_{\bar{x}} &= U_x \cos \beta + U_y \sin \beta \\ U_{\bar{y}} &= -U_x \sin \beta + U_y \cos \beta \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

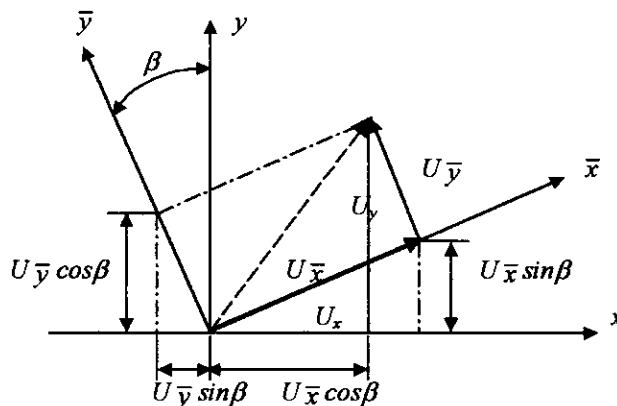


Fig. B Transformation de déplacement.

* Pour les contraintes (Figure C) :

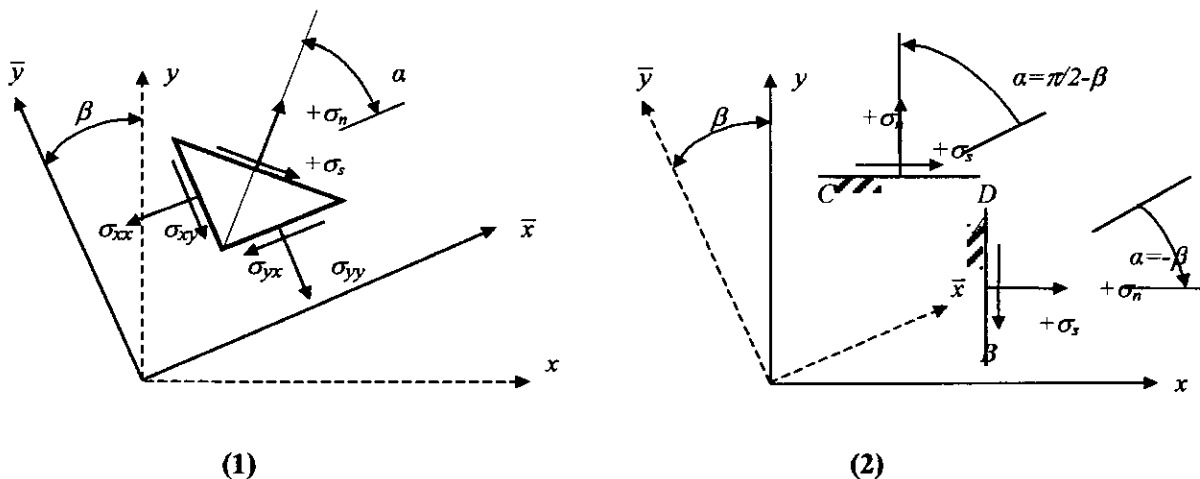


Fig. C Transformation de contraintes.

on a d'après la figure C.(1) :

$$\begin{aligned}\sigma_s &= (\sigma_{\bar{x}\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}) \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{\bar{x}\bar{y}} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ \sigma_n &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \sin^2 \alpha\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

et d'après la figure C.2 (pour le plan AB) on a :

$$\begin{aligned}(\sigma_n)_{\alpha=-\beta} &= +\sigma_{\bar{x}\bar{x}} \\ (\sigma_s)_{\alpha=-\beta} &= -\sigma_{\bar{x}\bar{y}}\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

la combinaison entre (A.7) et (A.8) et la notation :

$$\begin{aligned}\cos(-\beta) &= \cos(\beta) \text{ et } \sin(-\beta) = -\sin(\beta) \quad \text{donne :} \\ \sigma_{xy} &= (\sigma_{\bar{x}\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{\bar{x}\bar{y}} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \sin^2 \alpha\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

et pour le plan CD on a :

$$\begin{aligned}(\sigma_n)_{\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta} &= \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \\ (\sigma_s)_{\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta} &= \sigma_{\bar{x}\bar{y}}\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

la combinaison entre (A.7) et (A.10) et la notation :

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2-\beta) &= \sin(\beta) \quad \text{et} \quad \sin(\pi/2-\beta) = \cos(\beta) \quad \text{donne :} \\ \sigma_{yx} &= (\sigma_{\bar{x}\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{\bar{x}\bar{y}} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \sin^2 \alpha - 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \cos^2 \alpha\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة الأوساط المشققة بواسطة دوال العقد و التي تعتمد على طريقة الانتقالات غير المستمرة في الأوساط ثنائية الأبعاد. في بداية الأمر قمنا بتحويل الصيغة الرياضية لهذه الطريقة إلى الصيغة العددية، ثم قمنا بإيجاد برنامجا حاسوبا يمكننا من حساب معامل شدة الإجهادات للنمط I و النمط II بالنسبة لهذه الأوساط باستعمال الحالة الخاصة (دالة غرين) و الحالة العامة لهذه الدوال.

ABSTRACT

This work consists to study the crack body problems with the weight function technique based on the displacement discontinuity method for two-dimensional.

First, we change the mathematical formulation of the method to the numerical procedure, and construction of the computer program. With this program we determine the stress intensity factors for mode I and mode II for this problems, we use the Green function and the weight function.

RESUME

Ce travail porte sur la modélisation des problèmes des milieux fissurés par la technique de fonction de poids basé sur la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel.

On fait la mise en forme de la procédure numérique à partir de la formulation mathématique, ensuite l'élaboration d'un code de calcul. Avec ce code, on peut déterminer le facteur d'intensité de contrainte en mode I et mode II pour ces problèmes, en utilisant le cas particulier de la fonction de poids (fonction de Green), puis le cas générale. de fonction de poids.

Mots clés : Mécanique de la rupture, fissure, Fonction de poids, Fonction de Green, Méthode de discontinuité de déplacement, Facteur d'intensité de contrainte.