

9/02

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

MISE AU POINT D'UN MODE DE CALCUL  
POUR LE TRAITEMENT DE RUPTURE  
AUTOUR D'INCLUSIONS UTILISANT LA  
METHODE DE DISCONTINUITÉ DE  
DEPLACEMENT

Proposé et dirigé par :  
Y.BELKACEMI

Etudié par :  
A.TIBAH

PROMOTION 2002

E.N.P. 10, Avenue Hassen Badi-EL HARRACH-ALGER

## DEDICACES

*Je dédie ce présent travail à toutes les personnes qui m'ont soutenu lors de tout mon cursus universitaire, de plus je voudrai spécialement faire cette dédicace pour :*

- *Mes parents qui ont toujours été à mes côtés pour me soutenir, et m'épauler en tous les moments, et sans qui je ne serais pas là où j'en suis.*
- *A mes deux sœurs Karima et Samia.*
- *Et finalement à mes camarades de promotion avec qui j'ai passé de bons moments lors de notre cursus.*

## RESUME

Le travail effectué lors de ce projet de fin d'étude a pour but de mettre en place un code de calcul qui permettra de prime abord d'étudier le comportement élastique des milieux multicouches et isotropes, et d'étudier la propagation des fissures autour d'inclusions en utilisant la méthode de discontinuité de déplacement.

## ABSTRACT

This work consists in the resolution of problems referring to isotropic multi-layered materials that have elastic behaviour and the study of crack propagation problems around inclusions using a boundary elements method that is the displacements discontinuity method.

## ملخص

يهدف هذا الإنجاز إلى حل المسائل المتعلقة بالأوساط المتعددة الطبقات ذات سلوك مرن خطي ونسيق و دراسة مسألة إنتشار الشقاق حول تضمينات و ذلك باستعمال طريقة الإنقطاعات الإنتقالية

Mots clés : Coefficient d'influence, Facteur d'intensité de contrainte, taux de restitution de l'énergie, Discontinuité de déplacement.

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b>	<b>Page1</b>
<b>CHAPITRE I : Rappel sur l'élasticité linéaire</b>	<b>Page3</b>
I.1. LES CONTRAINTES	
I.2. LES DEFORMATIONS	
I.3. LOI DE HOOK GENERALISEE	
I.4. CHANGEMENT DE REPERE	
<b>CHAPITRE II: Notions de mécanique de la rupture-Fissuration</b>	<b>Page8</b>
II.1. ELEMENTS SUR L'ANALYSE DES MILIEUX FISSURES	
II.1.1. Fissures initiales	
II.1.2. Analyses élastiques	
II.1.2.1. Analyse élastiques	
II.1.2.2. Solution de Westergaard	
II.1.2.3. Solution exacte de Muskhelishvili	
II.1.2.4. Facteurs d'intensité de contraintes	
II.1.2.5. Intégrales de contour	
II.1.2.6. Taux de restitution de l'énergie	
II.2. VARIABLES GOUVERNANT LE COMPORTEMENT DES FISSURES	
II.2.1. Taux de restitution d'énergie. Intégrales de contour et facteur d'intensité de contraintes	
II.2.2. Valeurs usuelles d'intensité de contraintes	
<b>CHAPITRE III : Méthode de discontinuité de déplacement</b>	<b>Page21</b>
III.1. INTRODUCTION	
III.2. METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT DANS UN SOLIDE INFINI	
III.3. PROCEDURE NUMERIQUE	
III.4. TRANSFORMATION DE COORDONNEES	
III.5. COEFFICIENTS D'INFLUENCE	
III.6. PROBLEMES INTERIEUR/EXTERIEUR	
III.7. CONDITIONS DE SYMETRIE	
III.8. APPLICATION DE LA MDD AUX MILIEUX MULTICOUCHES	

## CHAPITRE IV : Résultats et interprétations

IV.1. ANNEAU DANS UNE PLAQUE INFINIE

IV.2. TUBE FRETTE

IV.3. ANNEAU FRETTE DANS UN AUTRE ANNEAU

IV.4. ESSAI BRESILIEN EN MULTICOUCHE

IV.5. PLAQUE MULTICOUCHE SOLICITEE EN COMPRESSION

IV.6. ESSAI BRESILIEN POUR LE CAS D'UNE ELLIPSE

IV.7. CALCUL DE L'ENERGIE D'AVANCEMENT G

IV.8. EXEMPLE SUR LES FISSURE

IV.8.1. Plaque infinie contenant une cavité sollicitée en traction

IV.8.2. Plaque infinie sollicitée en compression contenant une inclusion

IV.8.3. Plaque finie sollicitée en compression contenant une inclusion

IV.8.4. Plaque finie sollicitée en compression contenant une inclusion pleine

IV.8.5. Cas d'une plaque multicouche contenant une fissure

CONCLUSION

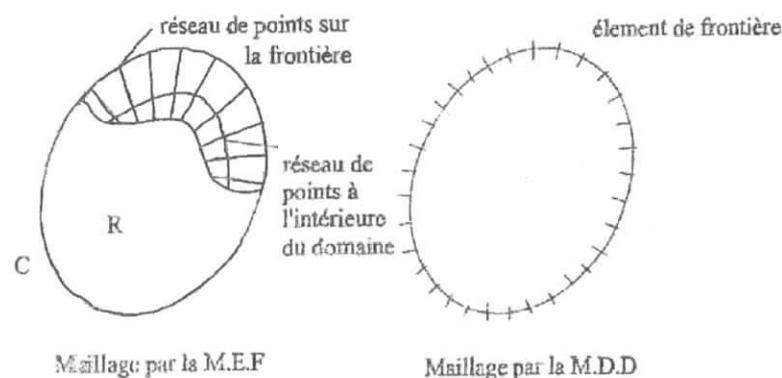
Page65

Figures	Page
<b>Fig1.Type de maillage dans les différentes méthodes numériques</b>	1
<b>FigI.1.Champ de contraintes</b>	3
<b>Fig.I.2.Changement de repère pour les déplacements</b>	5
<b>Fig.I.3.Changement de repère pour les contraintes</b>	6
<b>Fig.II.1.Fissure sollicitée en mode I</b>	11
<b>Fig.II.2.Fissure dans un milieu plan infini sollicitée en mode I.</b>	15
<b>Fig.II.3.Contour d'intégration</b>	16
<b>FigII.4.Fissure inclinée</b>	20
<b>Fig.II.5.Fissure émanant d'un trou</b>	20
<b>Fig.III.1.Composantes de discontinuité de déplacement <math>D_x</math> et <math>D_y</math></b>	22
<b>Fig.III.2.Charges appliquées sur la surface de la fissure</b>	25
<b>Fig.III.3.Discrétisation d'une fissure en N discontinuités de déplacements élémentaires</b>	25
<b>Fig.III.4.Représentation d'un contour fermé</b>	27
<b>Fig.III.6.Discontinuité de déplacement sur un segment de ligne orienté arbitrairement</b>	28
<b>Fig.III.7.Positionnement des éléments frontières</b>	31
<b>Fig.III.8.Condition de symétrie pour l'axe <math>x=x^*</math></b>	33
<b>Fig.III.9.Condition de symétrie pour la ligne <math>y=y^*</math></b>	34
<b>Fig.III.10.Conditions de symétrie pour les axes <math>y=y^*</math> et <math>x=x^*</math></b>	35
<b>Fig.III.11.Milieu multicouche constitué de deux régions isotropes continues et élastiques</b>	36
<b>Fig.IV.1Anneau dans une plaque infinie</b>	41
<b>Fig.IV.2.Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction du rayon</b>	43
<b>Fig.IV.3.Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction du rayon</b>	44
<b>Fig.IV.4. Anneau fretté dans un autre anneau</b>	45
<b>Fig.IV.5.Variation des contraintes normales et tangentielles dans un anneau fretté</b>	46
<b>Fig.IV.6.Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction du rayon</b>	47

<b>Fig.IV.7.Essai d'emmanchement en multicouche</b>	48
<b>Fig.IV.8.Variation de <math>\sigma_{xx}</math> en fonction de y</b>	49
<b>Fig.IV.9.Variation de <math>\sigma_{yy}</math> en fonction de y</b>	50
<b>Fig.IV.11.Plaque multicouche en compression</b>	51
<b>Fig.IV.12.A : Essai d'emmanchement en multicouche dans le cas d'une ellipse</b>	51
<b>Fig.IV.12.B.Variation de <math>\sigma_{xx}</math> en fonction de y</b>	52
<b>Fig.IV.12.C :Variation de <math>\sigma_{yy}</math> en fonction de y</b>	53
<b>Fig.IV.13.Variations des contraintes en fonction de y</b>	53
<b>Fig.IV.14.Plaque infinie contenant une cavité et deux fissures soumise en traction</b>	55
<b>Fig.IV.15.Variation de <math>G_r</math> en fonction de la longueur de la fissure</b>	56
<b>Fig.IV.16.Plaque infinie contenant deux fissures et sollicité en compression</b>	57
<b>Fig.IV.17. Variation de <math>G_r</math> en fonction de la longueur de la fissure</b>	58
<b>Fig.IV.18.Plaque finie sollicitée en compression contenant deux fissures</b>	59
<b>Fig.IV.19. Variation de <math>G_r</math> en fonction de la longueur de la fissure</b>	59
<b>Fig.IV.20.Plaque finie contenant une inclusion sollicitée en compression</b>	60
<b>Fig.IV.21. Variation de <math>G_r</math> en fonction de la longueur de la fissure</b>	61
<b>Fig.IV.22.Variation de <math>G_r</math> en fonction de la longueur de la fissure et du rayon de l'inclusion</b>	62
<b>Fig.IV.23.Plaque multicouche avec une fissure</b>	63
<b>Fig.IV.24.Longueur de la fissure en fonction de la longueur de la fissure.</b>	63



Depuis toujours l'homme c'est intéressé à améliorer ces connaissances au sujet du comportement des matériaux, il a en effet toujours essayé et voulu construire avec des matériaux qui sont de plus en plus solides et de plus en plus durs, mais l'avancé dans ce domaine a été plus importante que lors du siècle précédent puisqu'il a fallu attendre que l'Homme maîtrise la Métallurgie mais aussi qu'il atteigne une connaissance très avancée en matière de limite de rupture des matériaux, en effet grâce à la mécanique de la rupture, qui s'intéresse comme son nom l'indique aux limites de rupture des matériaux, l'Homme a-t-il ainsi fait un grand pas dans le domaine de la science qui lui a permis par exemple de construire des immeubles qui sont plus hauts les uns que les autres il a aussi permis de mettre au point des moteurs de plus en plus légers tout en ne pas perdant de leur robustesse et par ceci augmenter les performances des voitures, c'est ainsi que lors de ce projet nous allons essayer de mettre en place un code de calcul pour le traitement de ruptures autour d'inclusions. Ceci se fera grâce à l'utilisation de la méthode de discontinuité de déplacement qui est une méthode qui appartient à la familles des méthodes des éléments frontières, effectivement ces dernières peuvent être un choix très judicieux, pour certains problèmes, devant leur consœur connu sous le nom de méthode à éléments finis, si on regarde le côté facilité d'utilisation, mais jusqu'à une date récente on a pas beaucoup utilisé ces méthodes puisqu'on leur a préfère les méthodes à éléments finis. Cette méthode à éléments frontières va ainsi être développée ultérieurement.



**Fig1. Type de maillage dans les différentes méthodes numériques**

Mais de prime abord nous allons consacrer notre étude pour une présentation des lois fondamentales de la mécanique de milieu continu puis nous allons faire une présentation générale de la méthode de discontinuité de déplacement qui est une méthode d'éléments frontières, après ceci nous allons consacrer une étude sur les différentes lois de la mécanique de la rupture et ceci concernant plus précisément la fissuration. Et grâce à la méthode de discontinuité de déplacement nous pourrons ainsi élaborer un programme qui va nous permettre d'étudier la fissuration autour d'une inclusion.

**CHAPITRE I :**  
**RAPPEL SUR L'ELASTICITE**  
**LINEAIRE**

---

– Convention de signe des contraintes :

Dans tout le travail qui sera effectué, nous supposerons que les  $\sigma_{ij}$  sont positifs quand ils ont un sens d'action qui admet le même sens de l'axe  $j$  et quand ils agissent dans un plan qui a pour vecteur normal un vecteur qui admet le même sens que le sens de l'axe  $i$ ,  $\sigma_{ij}$  sont également positifs lorsqu'ils ont un sens d'action opposé au sens de l'axe  $j$  et quand ils agissent sur un plan qui a pour vecteur normal un vecteur qui soit opposé au à l'axe  $i$ .

Ainsi  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont positifs, comme représenté sur la figure I.1.

– Equations d'équilibre :

Grâce à la relation d'équilibre des moments nous pourrions facilement montrer que la matrice de contraintes est symétrique, en d'autre terme nous pouvons écrire :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Le champ de contrainte doit aussi vérifier l'équilibre des forces, il faudra ainsi que ce champ de contrainte satisfasse les trois relations d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \quad (1.1.3)$$

où  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  sont des forces volumiques qui ont donc comme unité des  $N/m^3$ .

## I.2. LES DEFORMATIONS

Le concept de déformation a été mis en place, pour pouvoir prévoir la manière avec laquelle un corps va se déformer ceci s'effectuera connaissant les contraintes auxquelles est soumis ce corps.

La déformation est elle même constituée :

- Déformation longitudinal qui provoque l'allongement,
- Distorsion qui elle provoque la déformation angulaire.

On peut démontrer que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \quad (1.2.1)$$

Ainsi nous pouvons définir la matrice de déformation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

D'après la relation définissant  $\varepsilon_{ij}$  on peut facilement démontrer que le tenseur de déformation est symétrique ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ )

### I.3. LOI DE HOOK GENERALISEE

La loi de Hook généralisée peut être définie comme étant la loi liant le champ de contrainte au champ de déformation, mais cette loi n'est applicable que dans la limite d'élasticité autrement dit la Loi de Hook n'est plus applicable passant le seuil d'élasticité du matériau utilisé.

Cette loi peut s'écrire sous deux formes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (1.3.1)$$

$$\text{et } \sigma_{ij} = 2G \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (1.3.2)$$

où  $G = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu}$  et  $\sigma_{kk} = \text{Trace } \sigma$   $\delta_{ij}$  étant le symbole de Kronecker qui est définie comme suit :

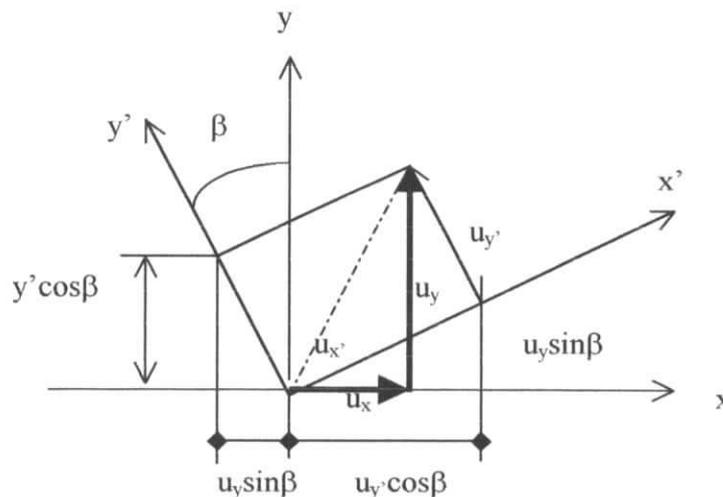
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$\nu$  : Coefficient de Poisson

$E$  : Module de Young

### I.4. CHANGEMENT DE REPERE

Vu l'importance des changements de base dans la méthode de discontinuité de déplacement nous allons introduire les relations de changement de base pour les déplacements et les contraintes.



**Fig.I.2.Changement de repère pour les déplacements**

D'après la figure de la page précédente nous pouvons ainsi déduire les relations suivantes :

$$u_x = u_{x'} \cdot \cos\beta - u_{y'} \cdot \sin\beta \quad (1.4.1)$$

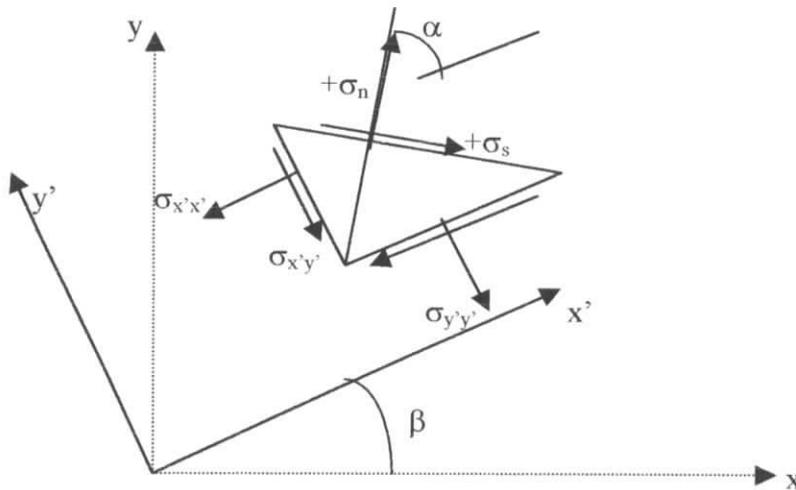
$$u_y = u_{y'} \cdot \sin\beta + u_{x'} \cdot \cos\beta \quad (1.4.2)$$

d'après les relations précédentes nous pouvons ainsi déduire les transformées inverses qui s'écrivent comme suit :

$$u_{x'} = u_x \cdot \cos\beta + u_y \cdot \sin\beta \quad (1.4.3)$$

$$u_{y'} = -u_y \cdot \sin\beta + u_x \cdot \cos\beta \quad (1.4.4)$$

Les équations de transformation des contraintes peuvent être déduites à partir des expressions de la contrainte normale et la contrainte tangentielle  $\sigma_n$  et  $\sigma_t$  appliqués à un plan qui admet une normale qui fait un angle  $\alpha$  avec l'axe  $x'$ , comme le montre la figure ci-après.

**Fig.I.3.Changement de repère pour les contraintes**

$$\sigma_s = (\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'}) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sigma_{x'y'} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \quad (1.4.5)$$

$$\sigma_n = \sigma_{x'x'} \cdot \cos^2\alpha + 2\sigma_{x'y'} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sigma_{y'y'} \cdot \sin^2\alpha \quad (1.4.6)$$

Dans le cas où le plan étudié est parallèle à l'axe des y nous pouvons facilement voir que :

$$\alpha = -\beta \text{ et } \sigma_t = \sigma_{xx} \quad \sigma_n = -\sigma_{xy}$$

Comme  $\cos(-\beta) = +\cos\beta$  et  $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ , les équations précédentes deviennent :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{x'x'} \cdot \cos^2\beta - 2\sigma_{x'y'} \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta + \sigma_{y'y'} \cdot \sin^2\beta \quad (1.4.7)$$

$$\sigma_{xy} = (\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'}) \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta + \sigma_{x'y'} (\cos^2\beta - \sin^2\beta) \quad (1.4.8)$$

Similairement, pour un plan parallèle à l'axe des x nous pouvons écrire que  $\alpha = \pi/2 - \beta$ . Les contraintes tangentielles et normales deviennent donc :

$$\sigma_t = \sigma_{xx} \quad \sigma_n = \sigma_{yx}$$

De plus sachant que  $\cos(\pi/2-\beta)=\sin \beta$  et  $\sin(\pi/2-\beta)=\cos \beta$ , nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\sigma_{yy}=\sigma_{x'x'}\sin^2\beta+2\sigma_{x'y'}\sin\beta.\cos\beta+\sigma_{y'y'}\cos^2\beta \quad (1.4.9)$$

$$\sigma_{yx}=(\sigma_{x'x'}-\sigma_{y'y'})\sin\beta.\cos\beta+\sigma_{x'y'}(\cos^2\beta-\sin^2\beta) \quad (1.4.10)$$

D'après les équations obtenues nous pouvons facilement déduire leurs transformés inverses :

$$\sigma_{x'x'}=\sigma_{xx}.\cos^2\beta+2\sigma_{xy}.\sin\beta.\cos\beta+\sigma_{yy}.\sin^2\beta \quad (1.4.11)$$

$$\sigma_{y'y'}=\sigma_{xx}.\sin^2\beta-2\sigma_{xy}.\sin\beta.\cos\beta+\sigma_{yy}.\cos^2\beta \quad (1.4.12)$$

$$\sigma_{x'y'}=\sigma_{y'x'}=-(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin\beta.\cos\beta+\sigma_{xy}(\cos^2\beta-\sin^2\beta) \quad (1.4.13)$$

Lors de ce chapitre nous allons essayer d'introduire un aperçu sur la mécanique de la rupture qui nous permettra d'étudier des cas de fissuration dans des problèmes fortement chargés.

La théorie de la fissuration décrit le comportement des solides ou structures présentant des discontinuités géométriques macroscopiques à l'échelle de la structure, discontinuités linéiques dans les milieux considérés comme bidimensionnels (plaques, coques), discontinuités surfaciques dans les milieux tridimensionnels. La théorie de la fissuration permet de prévoir l'évolution de la fissure microscopique jusqu'à la rupture complète de la structure.

Dans les calculs de structures, ces discontinuités doivent être prises en compte car elles modifient les champs de contraintes, déformations et déplacements à une échelle telle que l'homogénéisation du milieu n'aurait plus de sens.

Dès 1920, Griffith montrait que la rupture d'un milieu élastique-fragile pouvait être caractérisée par une variable appelée plus tard taux de restitution de l'énergie, dont la valeur critique était une caractéristique du matériau. Cette approche n'a été généralisée et formellement construite qu'au cours des années 1970. Elle montrait que les phénomènes essentiels se situent au voisinage du front de fissure et qu'il est possible d'étudier le milieu de fissure macroscopique à l'aide de variables intrinsèques. Ceci est dû aux fortes concentrations de contraintes qui existent à la pointe des fissures et que l'analyse élastique linéaire traduit par des singularités du champ de contraintes. L'étude de ces singularités conduisit Irwin à définir des facteurs d'intensité des contraintes, correspondant à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Ces paramètres semi-locaux sont largement utilisés pour étudier la rupture fragile ou la rupture par fatigue des milieux bidimensionnels.

## **II.1 ELEMENTS SUR L'ANALYSE DES MILIEUX FISSURES**

L'analyse des contraintes et des déformations au voisinage des pointes ou fronts de fissures est essentiel pour l'étude du comportement des fissures. Ce comportement est gouverné par des transferts d'énergie de déformation en énergie de décohésion dans ces zones.

### II.1.1. Fissures initiales

La mécanique de la rupture par fissuration suppose préalablement l'existence d'une fissure initiale dans la structure étudiée et un système de sollicitations extérieures. La fissure initiale est soit créée par endommagement sous l'effet de cette sollicitation, soit un défaut créé lors de l'élaboration du matériau ou lors de sa mise en forme. Dans le premier cas, elle progressera dans la continuité du mécanisme d'endommagement, sans transition. Dans le second cas, il n'y a pas de relation entre l'orientation de la fissure et le système de chargement. Sa progression met en jeu un phénomène d'amorçage d'une nouvelle direction qui constitue une phase transitoire, on la qualifie de fissure incompatible.

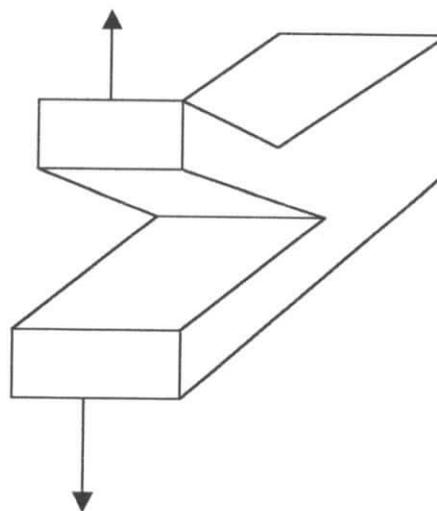
### II.1.2. Analyse élastiques

En mécanique de la rupture, le problème de base est l'analyse du champ des contraintes dans les milieux fissurés plans, élastiques linéaires. Ceci pour des raisons théoriques et pratiques.

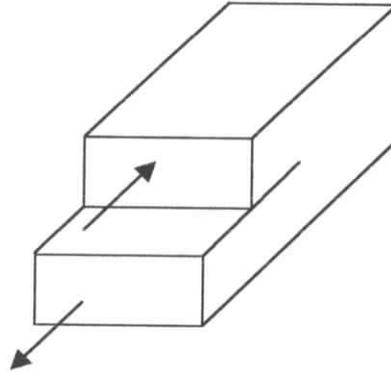
#### II.1.2.1. Modes de sollicitations

Considérons une fissure dans un milieu pla. Selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissure, on distingue trois cinématiques de déplacement des lèvres de la fissure, elle peuvent être schématisées comme suit :

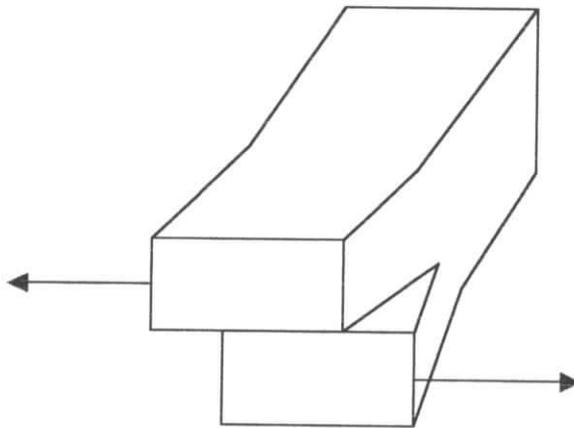
MODE I :



MODE II :



MODE III :



Dans le premier mode d'ouverture, le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par la discontinuité :

$$[u_1]=0, [u_2(x_1)]\neq 0, [u_3]=0. \quad (2.1.1)$$

Dans le mode II appelé aussi mode de cisaillement plan :

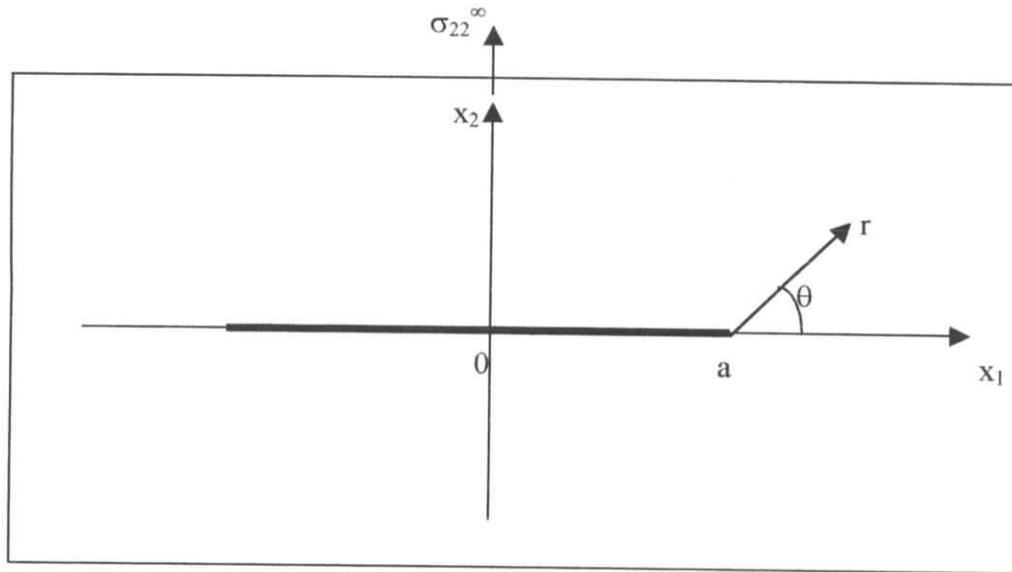
$$[u_1(x_1)]\neq 0, [u_2]=0, [u_3]=0, \quad (2.1.2)$$

Enfin dans le mode III ou mode de cisaillement antiplan :

$$[u_1]=0, [u_2]=0, [u_3(x_3)]\neq 0. \quad (2.1.3)$$

#### II.1.2.2. Solution asymptotique de Westergaard :

Traisons le problème du milieu plan fini peu épais, justiciable de l'hypothèse des contraintes planes, soumis suffisamment loin de la fissure de longueur  $2a$  à un champ de contrainte uniforme  $\sigma_{ij}=0$  sauf  $\sigma_{22}=\sigma_{22}^\infty$ , sollicitant la fissure en mode I.



**Fig.II.1.Fissure sollicitée en mode I**

La solution du problème asymptotique (d'après [2] LE MAITRE-CHABOCHE) au niveau de la pointe de la fissure s'obtient par la fonction d'Airy de la variable complexe  $z=x_1+ix_2$  suivante :

$$\chi = \text{Re}(\bar{Z}) + x_2 \text{Im}(\bar{Z})$$

$$\text{avec } \frac{d\bar{Z}}{dz} = \bar{Z}, \quad \frac{d\bar{Z}}{dz} = Z, \quad \frac{dZ}{dz} = Z \quad \text{et} \quad Z = \frac{K_I(\sigma_{22}^\infty, a)}{\sqrt{a} \sqrt{z^2 - a^2}}$$

où  $K_I$  est un scalaire indépendant du point et qui ne varie qu'avec la sollicitation  $\sigma_{22}^\infty$  et la demi-longueur de fissure  $a$ .

Les équations d'équilibres sont automatiquement satisfaites, et les conditions de Cauchy-Riemann permettent d'effectuer le calcul de contraintes :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial^2 x_2^2} = \text{Re } Z - x_2 \text{Im } Z \quad (2.1.5)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial^2 x_1^2} = \text{Re } Z + x_2 \text{Im } Z \quad (2.1.6)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} = -x_2 \text{Im } Z \quad (2.1.7)$$

Avec le changement de variable  $z-a=r \exp(i\theta)$  qui permet de repérer les contraintes en coordonnées polaires, l'origine étant prise à la pointe de la fissure et en considérant l'approximation  $r/a \ll 1$ , on obtient l'expression de la fonction  $Z$ , valable lorsque  $r$  tend vers 0 (et pour le mode I)

$$Z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.1.7)$$

Les contraintes et déplacements au voisinage de la pointe de fissure s'en déduisent par :

$$[\sigma] = \frac{K_I(\sigma_{22}^{\infty}, a)}{\sqrt{2\pi r}} \times \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta & \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta) \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

$$u_1 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} [3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta] \quad (2.1.9)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} [3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta] \quad (2.1.10)$$

Le déplacement d'ouverture de la fissure  $u_2$  est en contraintes planes par :

$$[u_2] = u_2(r, \pi) - u_2(r, -\pi) = \frac{8K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (2.1.11)$$

Ce qui montre qu'à la pointe de la fissure, les contraintes sont singulières en  $r^{-1/2}$  et que le déplacement d'ouverture tend vers 0 comme  $r^{1/2}$ .

Le même problème traité avec l'hypothèse des déformations planes donne les mêmes expressions pour les contraintes avec :

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Mais un champ de déplacement différent :

$$u_1 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) \quad (2.1.14)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) \quad (2.1.15)$$

et une ouverture de fissure exprimée par :

$$u_2 = \frac{8K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 - \nu^2) \quad (2.1.16)$$

Des procédures similaires, appliquées à l'étude du milieu sollicité en mode II (problème plan) et en mode III (problème antiplan), donnent les résultats suivants :

Mode II :

- Contraintes et déplacements dans l'hypothèse des contraintes planes ou déformations planes s'écrivent :

$$[\sigma] = \frac{K_{II}(\sigma_{I2}^{\infty}, a)}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}) & \cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \\ \cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.1.17)$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1+\nu) \sin\frac{\theta}{2} (C_1 + 2 + \cos\theta) \quad (2.1.18)$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1+\nu) \cos\frac{\theta}{2} (C_1 - 2 + \cos\theta) \quad (2.1.19)$$

avec  $C_1 = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  en contraintes planes,  $C_1 = 3-4\nu$  en déformations planes. Le déplacement

de cisaillement plan des lèvres de la fissure est :

$$[u_1] = u_1(r, \pi) - u_1(r, -\pi)$$

$$\text{en contraintes planes : } u_1 = \frac{8K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (2.1.20)$$

$$\text{en déformations planes : } u_1 = \frac{8(1-\nu^2)K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (2.1.21)$$

En mode III :

– Contraintes antiplanes :

$$[\sigma] = \frac{K_{III}(\sigma_{I3}^{\infty}, a)}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & \cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.22)$$

– Déplacements antiplans :

$$u_1 = u_2 = 0$$

$$u_3 = \frac{4(1+\nu)}{E} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \quad (2.1.23)$$

– Déplacement de cisaillement antiplan des lèvres de fissure :

$$[u_3] = u_3(r, \pi) - u_3(r, -\pi)$$

$$[u_3] = \frac{8(1+\nu)K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (2.1.24)$$

### II.1.2.3. Solution exacte de Muskhelishvili

Si le milieu étudié au paragraphe précédent est infini dans les deux directions, on connaît la solution exacte pour le mode I de sollicitation. Elle s'obtient par superposition des solutions du problème trivial du milieu sans fissuration et le problème à contrainte

nulle à l'infini et égale à  $-\sigma_{22}^{\infty}$  sur la ligne de fissure  $-a < x_1 < a$ . Cette solution est analytique pour  $x_2=0$ . Dans le cas des contraintes planes, elle est la suivante :

- Pour  $x_1 \geq a$  :

$$\sigma_{22}(x_2=0) = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_1}\right)^2}} \quad (2.1.25)$$

$$\sigma_{11}(x_2=0) = \sigma_{22} - \sigma_{22}^{\infty}$$

$$\varepsilon_{22}(x_2=0) = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{E} \left[ \frac{1-\nu}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_1}\right)^2}} + \nu \right] \quad (2.1.26)$$

- Pour  $0 \leq x_1 \leq a$  :

Le déplacement d'ouverture de fissure s'écrit :

$$[u_2] = 2u_2$$

$$[u_2] = \frac{4\sigma_{22}^{\infty}a}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2} \quad (2.1.27)$$

Si on fait le changement de variable  $x_1 = a+r$  nous obtenons :

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{\sqrt{\frac{r^2+2ar}{(a+r)^2}}} = \sigma_{22}^{\infty} \frac{a+r}{\sqrt{r(2a+r)}} \quad (2.1.28)$$

où, pour  $r$  petit devant  $a$  :

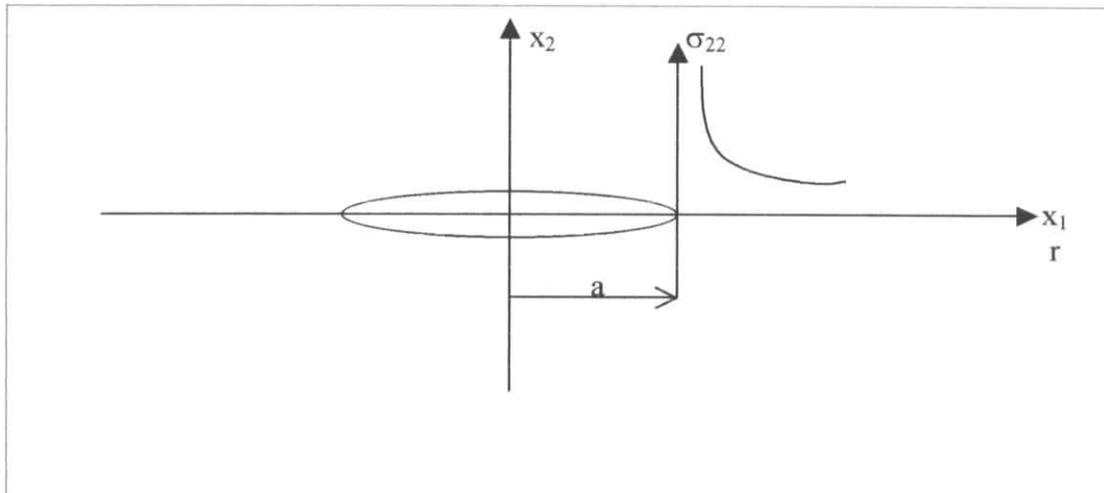
$$\sigma_{22} \rightarrow \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{a}{r}}$$

ce qui montre que la composante  $\sigma_{22}(x_2=0)$  est bien singulière en  $r^{-1/2}$  à la pointe de la fissure  $r=0$  (ou  $x_1=a$ ). On retrouve la solution approchée de Westergaard en posant :

$$K_I = \sigma_{22}^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

Cette expression est celle du facteur  $K_I$  correspondant à une plaque de grande dimension contenant une fissure centrale de longueur  $2a$  (petite), perpendiculaire à la direction de traction. Contrairement à la solution approchée, la solution ci-dessus conduit à une contrainte au loin égale à la contrainte appliquée.

Par ailleurs, l'expression du déplacement d'ouverture de fissure montre que la forme de la fissure sollicitée est une ellipse. Elle est représentée sur la figure qui suit :



**Fig.II.2.Fissure dans un milieu plan infini sollicitée en mode I.**

#### II.1.2.4.Facteurs d'intensités de contraintes

Les Fonctions  $K_I(\sigma_{22}^{\infty}, a)$ ,  $K_{II}(\sigma_{12}^{\infty}, a)$ ,  $K_{III}(\sigma_{13}^{\infty}, a)$  introduites dans l'expression de la fonction d'Airy de Westergaard caractérisent finalement l'intensité de la singularité du champ de contraintes à la pointe de la fissure et sont proportionnelles à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure. On les appelle facteur d'intensité de contraintes, respectivement en mode I, en mode II et en mode III.

Si l'on connaît leurs valeurs ils permettent de déterminer complètement les champs de contraintes ou de déplacements dans la structure fissurée, considérée comme élastique. Inversement, si l'on connaît les expressions des composantes non nulles des contraintes et des déplacements, on peut déterminer les facteurs d'intensité des contraintes par les expressions suivantes qui constituent leurs définitions pour les milieux fissurés plans :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \langle u_2 \rangle \right) \quad (2.1.29)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \langle u_1 \rangle \right) \quad (2.1.30)$$

avec :

$C_2=1$  en contraintes planes

$C_2=1-\nu^2$  en déformations planes

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \langle u_3 \rangle \right) \quad (2.1.31)$$

Si par exemple, on applique la définition de  $K_I$  à la solution de Muskhelishvili relative au milieu plan infini sollicité en mode I, on retrouve :

$$K_I = \sigma_{22}^{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (2.1.32)$$

De la même façon, pour un milieu plan, infini sollicité en mode II on trouve :

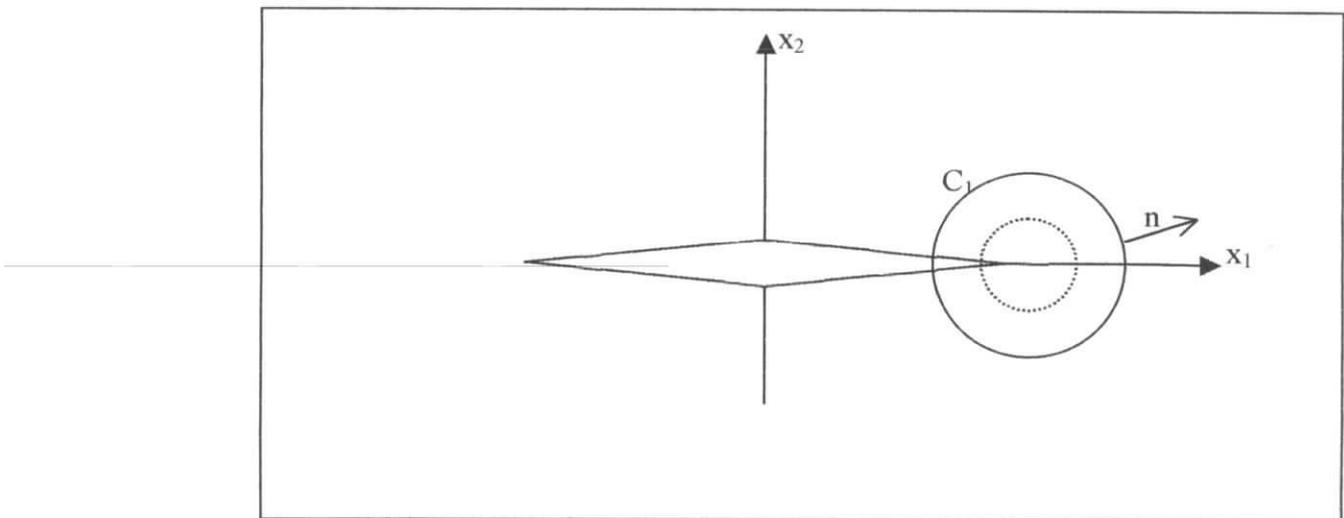
$$K_{II} = \sigma_{12}^{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (2.1.33)$$

L'unité des facteurs d'intensités de contraintes est le  $N.m^{-3/2}$ .

### II.1.2.5. Intégrales de contour

Une autre façon de caractériser la singularité du champ de contraintes au voisinage de la pointe des fissures est l'étude de certaines intégrales de contour que l'on peut déduire de la loi de conservation de l'énergie.

Considérons un milieu fissuré plan, élastique sollicité en mode mixte I et II, c'est-à-dire un problème plan où les déplacements de fissure sont  $[u_1] \neq 0$ ,  $[u_2] \neq 0$ ,  $[u_3] = 0$ . Soit un contour ouvert  $C_1$  entourant la pointe de la fissure et soit  $n$  sa normale extérieure (figure suivante).



**Fig.II.3. Contour d'intégration**

Si  $w_e$  est la densité d'énergie de déformation élastique et  $w_e^*$  l'énergie complémentaire on écrit :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w_e}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial w_e^*}{\partial \sigma_{ij}}$$

L'intégrale de Rice est définie par

$$J = \int_C (w_e n - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x}) ds \quad (2.1.34)$$

l'intégrale de Bui, duale de la précédente, est définie par :

$$I = \int_C \left( -w_e^* n + u_i n_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} \right) ds \quad (2.1.35)$$

Ces intégrales sont indépendantes du contour d'intégration.

On peut donc les appliquer sur un contour voisin de la pointe de la fissure avec les champs de contraintes et de déplacements de Westergaard utilisables en mode mixte, par superposition des deux champs particuliers, par superposition de deux champs particuliers des mode I et II. On trouve :

$$J=I = \begin{cases} \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) & \text{en contraintes planes} \\ \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) & \text{en déformations planes} \end{cases} \quad (2.1.36)$$

Si l'on définit l'énergie potentielle  $\mathcal{V}^o$  de tout le solide et l'énergie complémentaires  $\mathcal{V}^{o*}$  (les forces de volumes ne sont pas considérées) :

$$\mathcal{V}^o = \int_S w_e dV - \int_{\partial S_F} \vec{F}^d \cdot \vec{u} \quad (2.1.37)$$

$$\mathcal{V}^{o*} = - \int_S w_e^* dV + \int_{\partial S_u} \vec{u}^d \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS \quad (2.1.38)$$

On démontre que J et I sont égales au taux de variation de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire par rapport à un accroissement de fissure (dans son prolongement) :

$$J = - \frac{dV}{da} \quad I = \frac{dV^*}{da}$$

Ces quantités sont égales.

$$J=I$$

#### II.1.2.6. Taux de restitution de l'énergie

Une approche plus globale consiste à étudier le bilan des énergies mises en jeu dans le processus d'accroissement de fissure. On a vu au paragraphe précédent que les intégrales de contour, caractéristiques de la singularité du champ de contraintes, l'étaient aussi du taux de variation de l'énergie potentielle de tout le solide.

Considérons toujours le milieu plan fissuré élastique d'épaisseur  $e$  dans lequel la fissure croît avec une vitesse linéique  $\dot{a}$  ou surfacique  $\dot{A}=e\dot{a}$  et appliquons le premier

principe de la thermodynamique à tout le solide, considéré dans l'hypothèse des petites perturbations :

$$\dot{E} + \dot{K} = P_{(x)} + Q - 2\gamma \dot{A}$$

où E est l'énergie interne, K l'énergie cinétique, Q le taux de chaleur reçu par le domaine considéré,  $P_{(x)}$  la puissance des efforts extérieurs qui s'écrit :

$$P_{(x)} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{u} dS$$

Le terme  $-2\gamma \dot{A}$  intervient car la frontière du volume considéré est évolutive.  $2\gamma \dot{A}$  est ainsi la puissance dissipée dans le mécanisme de décohésion,  $\gamma$  étant une constante caractéristique du matériau. La variation d'énergie interne s'exprime :

$$\dot{E} = -P_{(i)} + Q = \int_V \sigma : \dot{\varepsilon} dV + Q = \dot{W}_e + Q. \quad (2.1.39)$$

le premier principe s'écrit sous la forme :

$$\dot{W}_e + \dot{K} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{u} dS - 2\gamma \dot{A} \quad (2.1.40)$$

La condition de stabilité du processus est que l'énergie cinétique ne s'accroisse pas

$$\dot{W}_e + \dot{K} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{u} dS - 2\gamma \dot{A} \leq 0 \quad (2.1.41)$$

En considérant A comme seule variable de ce bilan globale, cela revient à écrire :

$$\dot{K} = \left( \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} dS - \frac{\partial W_e}{\partial A} - 2\gamma \right) \dot{A} \leq 0 \quad (2.1.42)$$

d'où (avec  $\dot{A} \geq 0$ ) :

$$\left( \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} dS - \frac{\partial W_e}{\partial A} \right) \leq 2\gamma \quad (2.1.43)$$

La quantité au premier membre, qui représente l'énergie disponible lors d'un accroissement de fissure et qui peut être utilisée pour créer ce mécanisme, et par définition le taux de restitution de l'énergie G. En utilisant le travail des forces extérieures  $W_x$ , on peut écrire :

$$G = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} dS - \frac{\partial W_e}{\partial A} = \frac{dW_x}{dA} \Big|_F - \frac{\partial W_e}{\partial A}$$

La condition de rupture par instabilité des milieux élastiques-fragiles de Griffith est alors :

$$G \geq 2\gamma.$$

Lorsque  $G=2\gamma$ , on peut dire que la rupture est « contrôlée », l'énergie cinétique n'augmente plus.

Appliquons le principe des travaux virtuels à  $W_e$  en négligeant les effets dynamiques :

$$\int_S \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{u} dS$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial A} \cdot \vec{u} + \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} \right) dS$$

$$\text{on obtient : } G = \frac{1}{2} \int \left( \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} - \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial A} \right) dS \quad (2.1.45)$$

Comme  $A=ea$  ( $e$  étant l'épaisseur de la plaque étudiée) et  $\partial S=eC$ , on peut donc écrire pour tout contact fermé :

$$G = \frac{1}{2} \int_C \left( \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial a} - \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial a} \right) da$$

En appelant  $\vec{u}^{(1)}$  et  $\vec{u}^{(2)}$  les champs de déplacement avant et après progression de la fissure on trouve :

$$G da = \frac{1}{2} \int_{S^+} \vec{F}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)} dS + \frac{1}{2} \int_{S^-} \vec{F}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)} dS$$

Dans le cas symétrique (fissure rectiligne), on a :

$$G da = \frac{1}{2} \int_S \vec{F}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)} dS$$

Ces quantités s'interprètent comme étant le travail nécessaire pour fermer la fissure de longueur  $da$ .

En utilisant les équations de Westergaard, on aboutit à la formule d'Irwin :

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad \text{en contraintes planes ;} \quad (2.1.46)$$

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad \text{en déformations planes.} \quad (2.1.47)$$

## II.2. Variables gouvernant le comportement des fissures

### II.2.1. Taux de restitution d'énergie. Intégrales de contour et facteur d'intensité de contraintes.

Trois types de variables caractérisent la perturbation du champ de contraintes due à la présence d'une fissure : les facteurs d'intensité des contraintes, les intégrales de contour

et le taux de restitution d'énergie  $G$ .  $G$  caractérise le caractère stable ou instable de la fissure. Si  $G \geq 2\gamma$  la fissure s'accroît brutalement.

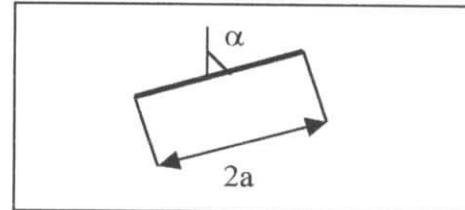
Historiquement ce sont ce sont les facteurs d'intensité des contraintes qui ont été les plus utilisés, c'est donc ces variables que nous employons pour présenter les résultats expérimentaux de base qui servent à la modélisation.

II.2.2. Valeurs usuelles d'intensité de contraintes :

- Fissure dans un milieu infini :

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cos^2 \alpha \quad (2.2.1)$$

$$K_{II} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (2.2.2)$$

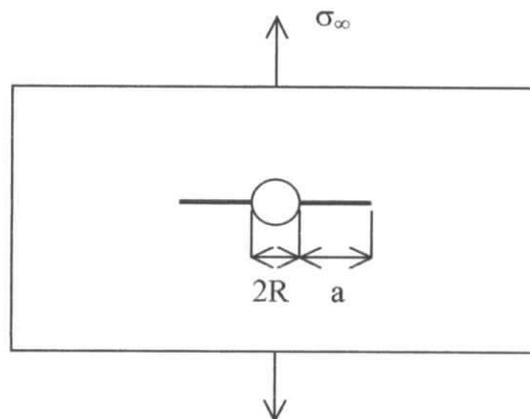


**FigII.4.Fissure inclinée**

- Fissure émanant d'un trou :

$$K_I \cong f\left(\frac{a}{R}\right) \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (2.2.3)$$

$\frac{a}{R}$	0	0.1	0.2	0.5	1	2	5
$f\left(\frac{a}{R}\right)$	3.39	2.73	2.3	1.73	1.37	1.06	0.81



**Fig.II.5.Fissure émanant d'un trou**

### III.1. INTRODUCTION

Plusieurs problèmes de mécanique des solides mettent en jeu des matériaux qui contiennent des fissures, pour résoudre ce type de problème nous ferons appel à la méthode de discontinuité de déplacement, cette méthode en effet tient compte de la différence qu'il y a entre une surface de la fissure et la surface qui lui est opposée c'est lors de ce chapitre on essaiera de présenter cette méthode.

Mais il faudra d'abord savoir que la méthode de discontinuité de déplacement est basée sur la notion selon laquelle on peut faire l'approximation d'une distribution continue de déplacement le long de la fissure. La méthode s'effectue en divisant la fissure en une série de  $N$  éléments (éléments frontières), connaissant la solution analytique pour un seul élément nous pouvons ainsi calculer la solution numérique du problème en sommant les effets des  $N$  éléments.

### III.2. METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT DANS UN SOLIDE INFINI

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment fini dans le plan  $x,y$  d'un solide élastique est spécifié par le fait que les déplacements sont continus partout sauf sur le segment en question. Prenons par exemple un segment qui occupe une portion de l'axe des  $x$  tel que,  $|x| \leq a$ , et  $y=0$ . Si nous considérons que ce segment est une fissure, on pourra distinguer ses deux surfaces en appelant une des surfaces le côté positif de  $y=0$ , notée  $y=0_+$ , et la deuxième surface le côté négatif de  $y=0$ , notée  $y=0_-$ . En passant d'une surface à l'autre le déplacement varie d'une valeur  $D_i=(D_x, D_y)$ .

On définit ainsi la discontinuité de déplacement  $D_i$  comme étant la différence de déplacement des deux côtés de du segment :

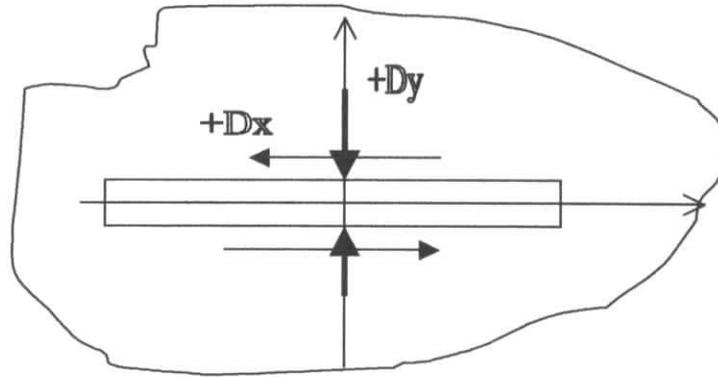
$$D_i = u_i(x_i, 0_-) - u_i(x_i, 0_+) \quad (3.2.1)$$

Ou :

$$D_x = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \quad (3.2.2)$$

$$D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+) \quad (3.2.3)$$

Si  $u_x$  et  $u_y$  sont positifs dans la partie positive de  $x$  et  $y$  il en suit que  $D_x$  et  $D_y$  sont positifs comme le montre la figure ci-après. On pourra aussi noter que la valeur positive de  $D_y$  suggère que les deux côtés de la fissure s'enchevêtrent .



**Fig.III.1. Composantes de discontinuité de déplacement  $D_x$  et  $D_y$**

Le champ de déplacement de ce problème est le suivant (d'après [1] CROUCH):

$$u_x = D_x [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \quad (3.2.3)$$

$$u_y = D_x [(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,y} - yf_{,yy}] \quad (3.2.4)$$

et le champ de contrainte s'écrit comme suit (d'après [1] CROUCH):

$$\sigma_{xx} = 2GD_x [2f_{,xy} + yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}] \quad (3.2.5)$$

$$\sigma_{yy} = 2GD_x [-yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} - f_{,xxx}] \quad (3.2.6)$$

$$\sigma_{xy} = 2GD_x [f_{,yy} + yf_{,yyy}] + 2GD_y [f_{,yy} - yf_{,yyy}] \quad (3.2.7)$$

où

$$f(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \left( \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

Les dérivées de cette fonction au premier et au deuxième ordre sont les suivantes :

$$f_{,x} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (3.2.8)$$

$$f_{,y} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \quad (3.2.9)$$

$$f_{,xy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{y}{(x-a)^2+y^2} - \frac{y}{(x+a)^2+y^2} \right] \quad (3.2.10)$$

$$f_{,xx} = -f_{,yy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} \right] \quad (3.2.11)$$

Quant aux dérivées du troisième ordre elles s'écrivent comme suit :

$$f_{,xyy} = -f_{,xxx} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x-a)^2-y^2}{\{(x-a)^2+y^2\}^2} - \frac{(x+a)^2-y^2}{\{(x+a)^2+y^2\}^2} \right] \quad (3.2.12)$$

$$f_{,yyy} = -f_{,xxy} = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x-a}{\{(x-a)^2+y^2\}^2} - \frac{x+a}{\{(x+a)^2+y^2\}^2} \right] \quad (3.2.13)$$

On remarque que les déplacements sont continus partout dans la plaque infinie sauf pour le segment  $|x| \leq a, y=0$  où ils sont discontinus ; les déplacements sur la ligne  $y=0$  sont les suivants :

$$u_x = -\frac{1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (3.2.14)$$

$$u_y = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \quad (3.2.15)$$

les valeurs limites de l'arctangente sont les suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, y=0^+ \text{ ou } y=0^- \\ +\pi & |x| < a, y=0^+ \\ -\pi & |x| < a, y=0^- \end{cases} \quad (3.2.16)$$

En utilisant ces résultats aux limites on trouve trois cas qui doivent être considérés pour trouver le déplacement autour de la droite  $y=0$  :

-  $|x| > a, y=0_\pm$

$$u_x(x,0) = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (3.2.17)$$

$$u_y(x,0) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (3.2.18)$$

$$- |x| < a, y = 0_+$$

$$u_x(x, 0_+) = -\frac{1}{2}D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (3.2.19)$$

$$u_y(x, 0_+) = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2}D_y \quad (3.2.20)$$

$$- |x| < a, y = 0_-$$

$$u_x(x, 0_-) = \frac{1}{2}D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (3.2.21)$$

$$u_y(x, 0_-) = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2}D_y \quad (3.2.22)$$

Nous pouvons ainsi aussi déduire les contraintes sur la ligne  $y=0$  :

$$\sigma_{xx}(x, 0) = -\frac{aG}{\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \quad (3.2.23)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -\frac{aG}{\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \quad (3.2.24)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = -\frac{aG}{\pi(1-\nu)}D_x \frac{1}{x^2 - a^2} \quad (3.2.25)$$

Nous remarquons donc que les contraintes normales  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  ne dépendent que de la composante normale de la discontinuité de déplacement  $D_y$ , alors que la contrainte tangentielle dépend quant à elle que de la composante tangentielle de cette dernière  $D_x$ . Nous remarquons aussi que les contraintes sont indéfinies pour les points  $x = \pm a, y = 0$  alors qu'elles sont constantes partout ailleurs.

Les directions des composantes de traction sur les deux surfaces de la fissure sont illustrées sur la figure ci-dessus, dans ce cas  $D_x > 0$  et  $D_y > 0$ .

Comme la partie supérieure de la fissure admet pour normale le vecteur  $n(0, -1)$  et la partie inférieure de la fissure a pour normale le vecteur  $n(0, 1)$ . Comme  $t_i = \sigma_{ji}n_j$  nous pouvons ainsi déduire :

$$t_x(x, 0_+) = -\sigma_{xy}(x, 0_+) \quad (3.2.26)$$

$$t_y(x, 0_+) = -\sigma_{yy}(x, 0_+) \quad (3.2.27)$$

$$\text{et } t_x(x, 0_-) = -\sigma_{xy}(x, 0_-) \quad (3.2.28)$$

$$t_y(x, 0_-) = -\sigma_{yy}(x, 0_-) \quad (3.2.29)$$

Nous concluons à partir des relations des contraintes sur l'axe  $y=0$  trouvées précédemment que  $t_i(x,0_+) = -t_i(x,0_-)$ , donc la force résultante  $t_i(x,0) = t_i(x,0_+) + t_i(x,0_-)$  appliquée à la fissure est nulle.

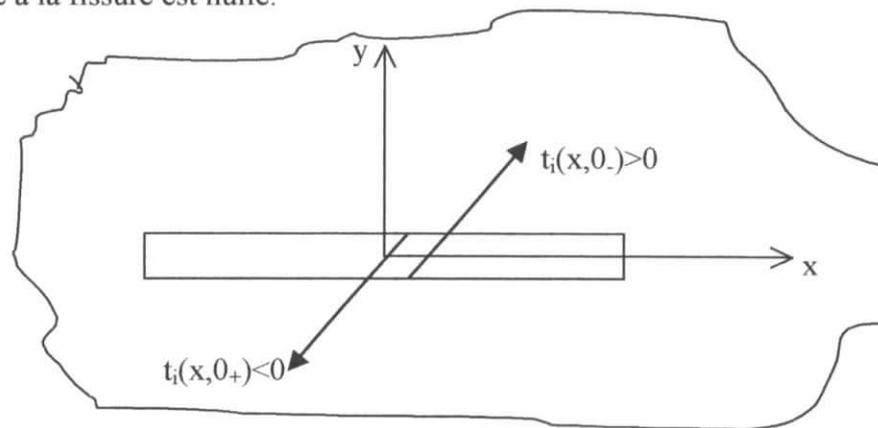


Fig.III.2.Charges appliquées sur la surface de la fissure

### III.3. PROCEDURE NUMERIQUE

Pour pouvoir étudier des problèmes plus complexes il est essentiel de généraliser la méthode de discontinuité de déplacement. Et pour cela il faudra étudier une fissure qui est inclinée et que l'on va discrétiser en  $N$  segments distincts, qui sont joints bout à bout.

Ces segments sont positionnés et orientés en référence au repère  $(x,y)$  comme schématisé dans la figure suivante. La méthode de discontinuité de déplacement permet de trouver une approximation discrète de la distribution régulière du déplacement relatif (i.e. la discontinuité de déplacement) qui existe en réalité.

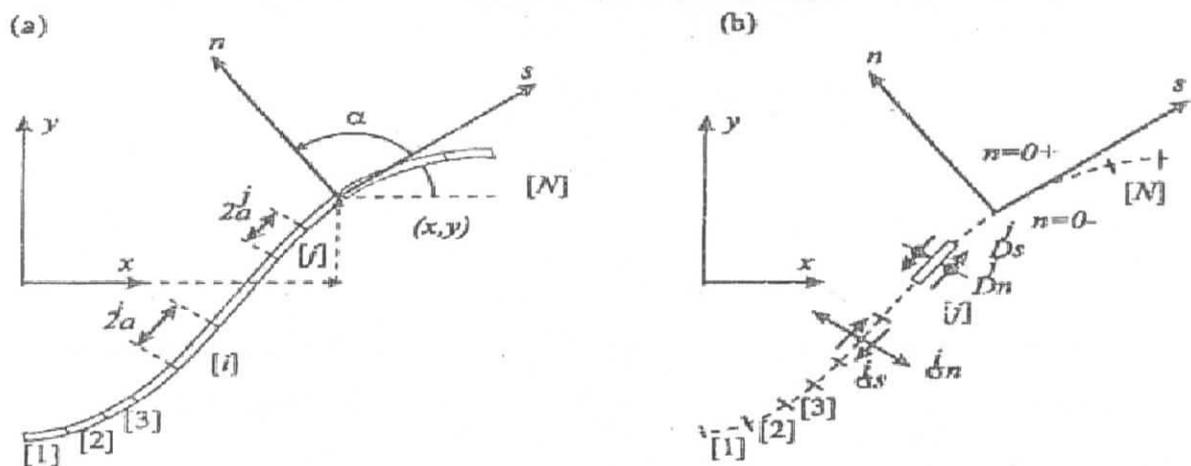


Fig.III.3.Discrétisation d'une fissure en  $N$  discontinuités de déplacements élémentaires

Les discontinuités de déplacement sont définies tout en respectant les coordonnées locales  $s$  et  $n$  comme ce qui est indiqué dans la figure précédente. La figure b quant à elle décrit un seul élément de discontinuité de déplacement à l'élément  $j$  de la fissure.

Les composantes de la discontinuité dans les directions  $s$  et  $n$  sont dénotées  $D_s^j$  et  $D_n^j$ .

Ces quantités sont définies comme suit :

$$D_n^j = u_n^{j-} - u_n^{j+} \quad (3.3.1)$$

$$D_s^j = u_s^{j-} - u_s^{j+} \quad (3.3.2)$$

Dans ces définitions  $u_s^j$  et  $u_n^j$  se réfèrent respectivement aux déplacements tangentiels et normaux sur le  $j^{\text{ème}}$  segment de la fissure. Les indices  $+$  et  $-$  dénotent les surfaces positives et négatives de la fissure avec le respect des coordonnées locales.

Les déplacements locaux  $u_s^j$  et  $u_n^j$  forment deux composantes d'un vecteur. Ils sont positifs dans les directions positifs de  $s$  et  $n$ . Par conséquent, il en suit que la composante normale de discontinuité de déplacement  $D_n^j$  est positive si les deux surfaces de la fissure se déplacent l'une vers l'autre. Similairement, la composante tangentielle  $D_s^j$  est positive si la surface positive de la fissure se déplace vers la gauche.

Les effets d'un élément de discontinuité de déplacement sur les déplacements et les contraintes sur un point arbitraire du solide infini peut être calculer des résultats obtenus dans le paragraphe précédent.

Les composantes normales et tangentiels agissant sur le milieu du  $i^{\text{ème}}$  élément peuvent être exprimées en termes de discontinuité de déplacement de l'élément  $j$  s'écrivent comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= A_{ss} D_s + A_{sn} D_n \\ \sigma_n &= A_{ns} D_s + A_{nn} D_n \end{aligned} \right\} i=1 \text{ à } N \quad (3.3.4)$$

où  $A_{ss}$ ,  $A_{ns}$ ,  $A_{sn}$ ,  $A_{nn}$  sont les coefficients d'influence des contraintes aux éléments frontières.

Le coefficient  $A_{ns}$ , par exemple, donne la contrainte normale au centre du  $i^{\text{ème}}$  élément due à la discontinuité de déplacement tangentielle de valeur unité sur le  $j^{\text{ème}}$  élément.

En retournant au problème de la fissure curviligne, nous plaçons une discontinuité de déplacement élémentaire sur chacun des éléments de le long de la fissure, on pourra ainsi écrire :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \sum_{j=1}^N A_{sj} D_s + \sum_{j=1}^N A_{sn} D_n \\ \sigma_n &= \sum_{j=1}^N A_{ns} D_s + \sum_{j=1}^N A_{nn} D_n \end{aligned} \right\} i=1 \text{ à } N \quad (3.3.5)$$

Si nous spécifions les valeurs des contraintes agissant sur chaque élément de la fissure, les équations ci-dessus deviennent un système de  $2N$  équations linéaires avec  $2N$  inconnus, qui sont les discontinuités de déplacement élémentaires  $D_s^j$  et  $D_n^j$  pour  $i=1$  à  $N$ .

Après avoir résolu le système d'équation précédent, nous pouvons calculer les déplacements et les contraintes dans n'importe quel point du corps considéré en utilisant le principe de superposition. Les déplacements le long de la fissure sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \sum_{j=1}^N B_{sj} D_s + \sum_{j=1}^N B_{sn} D_n \\ u_n &= \sum_{j=1}^N B_{ns} D_s + \sum_{j=1}^N B_{nn} D_n \end{aligned} \right\} i=1 \text{ à } N \quad (3.3.6)$$

où  $B_{ss}$ ,  $B_{ns}$ ,  $B_{sn}$  et  $B_{nn}$  sont les coefficients d'influence aux élément frontières. Les déplacements sont discontinus en passant d'un côté du  $i^{\text{ème}}$  élément à l'autre, donc il faut faire une distinction entre ces deux côtés en calculant les coefficients d'influence.

Si nous considérons maintenant une situation dans laquelle les discontinuités de déplacement élémentaires sont connectées de telle manière qu'elles forment un contour fermé dans le solide infini, comme le montre la figures suivante. Les conditions aux limites se résument donc en deux types, le premier type qui concerne la bordure de la cavité ( $n=0_-$ ) et la deuxième concerne la bordure du solide fini ( $n=0_+$ ).

Les composantes de discontinuité de déplacement  $D_s^i$  et  $D_n^i$  avec  $i=1$  à  $N$ , définissent les déplacements relatifs entre ces deux bordures dans le plan ( $s,n$ ).

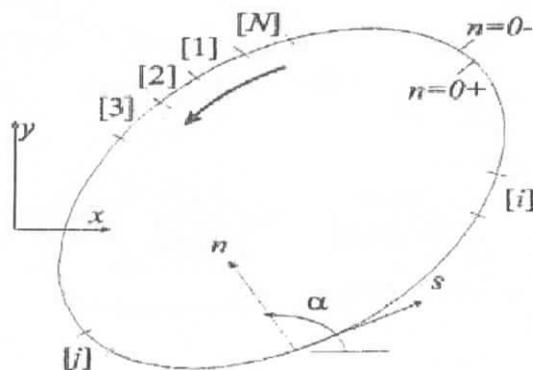


Fig.III.4.Représentation d'un contour fermé

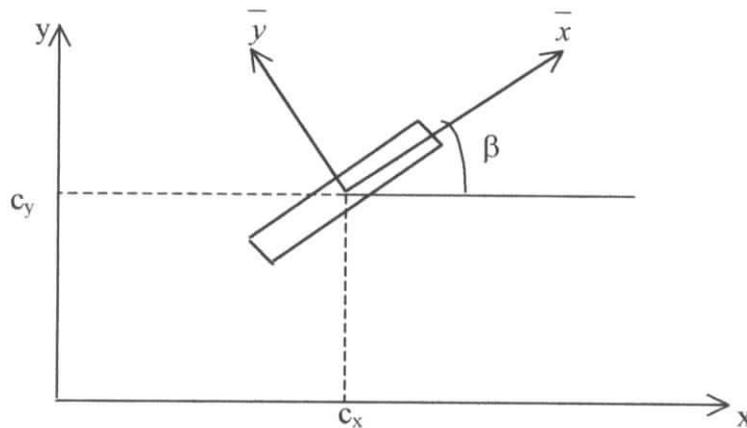
### III.4. TRANSFORMATION DE COORDONNEES

Les coefficients d'influences introduits dans les systèmes du paragraphe précédent ont été développés à partir de la solution analytique du problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment orienté arbitrairement dans un solide infini. Cette solution peut être obtenue à partir des résultats trouvés dans le paragraphe III.2 et par le moyen d'une simple transformation de coordonnées. On pourra ainsi donner la solution de la géométrie représenté dans la figure ci-après. Les composantes de la discontinuité de déplacement sont constantes à travers le segment de ligne  $|\bar{x}| \leq a, \bar{y}=0$ .

Les coordonnées  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont en relation avec les coordonnées globales  $x$  et  $y$  par l'équation de transformation suivante :

$$\bar{x} = (x - c_x) \cos \beta + (y - c_y) \sin \beta \quad (3.4.1)$$

$$\bar{y} = -(x - c_x) \sin \beta + (y - c_y) \cos \beta \quad (3.4.2)$$



**Fig.III.6. Discontinuité de déplacement sur un segment de ligne orienté arbitrairement**

Les déplacements et les contraintes dus aux composantes de discontinuités de déplacement  $D_{\bar{x}}$  et  $D_{\bar{y}}$  à travers le segment de ligne  $|\bar{x}| \leq a, \bar{y}=0$  peuvent être écrits en introduisant les notation suivantes :

$$F_2(\bar{x}, \bar{y}) = f_{,\bar{x}} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \sqrt{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]} - \ln \sqrt{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]} \right] \quad (3.4.3)$$

$$F_3(\bar{x}, \bar{y}) = f_{,\bar{y}} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}-a} - \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}+a} \right] \quad (3.4.4)$$

$$F_4(\bar{x}, \bar{y}) = f_{,xy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\bar{y}}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{y}}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right] \quad (3.4.5)$$

$$F_5(\bar{x}, \bar{y}) = f_{,xx} = -f_{,yy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\bar{x}-a}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{x}+a}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right] \quad (3.4.6)$$

$$F_6(\bar{x}, \bar{y}) = f_{,xyy} = -f_{,xxx} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(\bar{x}-a)^2 - \bar{y}^2}{\{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2\}^2} - \frac{(\bar{x}+a)^2 - \bar{y}^2}{\{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2\}^2} \right] \quad (3.4.7)$$

$$F_7(\bar{x}, \bar{y}) = f_{,yyy} = -f_{,xxy} = \frac{2\bar{y}}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\bar{x}-a}{\{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2\}^2} - \frac{\bar{x}+a}{\{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2\}^2} \right] \quad (3.4.8)$$

Nous pouvons ainsi déduire :

$$u_x = D_x \left[ 2(1-\nu)\bar{F}_3 - y\bar{F}_5 \right] + D_y \left[ -(1-2\nu)\bar{F}_2 - y\bar{F}_4 \right] \quad (3.4.9)$$

$$u_y = D_x \left[ (1-2\nu)\bar{F}_2 - y\bar{F}_4 \right] + D_y \left[ -(1-2\nu)\bar{F}_3 - y\bar{F}_5 \right] \quad (3.4.10)$$

et

$$\sigma_{xx} = 2GD_x \left[ 2\bar{F}_4 + y\bar{F}_6 \right] + 2GD_y \left[ -\bar{F}_5 + y\bar{F}_7 \right] \quad (3.4.11)$$

$$\sigma_{yy} = 2GD_x \left[ -y\bar{F}_6 \right] + 2GD_y \left[ -\bar{F}_5 - y\bar{F}_7 \right] \quad (3.4.12)$$

$$\sigma_{xy} = 2GD_x \left[ -\bar{F}_5 + y\bar{F}_7 \right] + 2GD_y \left[ -y\bar{F}_6 \right] \quad (3.4.13)$$

Les déplacements et les contraintes dans les coordonnées  $x, y$  peuvent être écrits en appliquant les relations du chapitre I concernant la transformation des coordonnées :

$$u_x = D_x \left[ -(1-2\nu)\sin\beta\bar{F}_2 + 2(1-\nu)\cos\beta\bar{F}_3 - y(\sin\beta\bar{F}_4 - \cos\beta\bar{F}_5) \right] + D_y \left[ -(1-2\nu)\cos\beta\bar{F}_2 - 2(1-\nu)\sin\beta\bar{F}_3 - y(\cos\beta\bar{F}_4 + \sin\beta\bar{F}_5) \right] \quad (3.4.14)$$

$$u_y = D_x \left[ (1-2\nu)\cos\beta\bar{F}_2 + 2(1-\nu)\sin\beta\bar{F}_3 - y(\cos\beta\bar{F}_4 + \sin\beta\bar{F}_5) \right] + D_y \left[ -(1-2\nu)\sin\beta\bar{F}_2 + 2(1-\nu)\cos\beta\bar{F}_3 - y(\sin\beta\bar{F}_4 - \cos\beta\bar{F}_5) \right] \quad (3.4.15)$$

et

$$\sigma_{xx}=2GD_x[2\cos^2\beta\bar{F}_4+\sin 2\beta\bar{F}_5+\bar{y}(\cos 2\beta\bar{F}_6-\sin 2\beta\bar{F}_7)]+2GD_y[-\bar{F}_5+\bar{y}(\sin 2\beta\bar{F}_6+\cos 2\beta\bar{F}_7)]$$

(3.4.16)

$$\sigma_{yy}=2GD_x[2\sin^2\beta\bar{F}_4-\sin 2\beta\bar{F}_5-\bar{y}(\cos 2\beta\bar{F}_6-\sin 2\beta\bar{F}_7)]+2GD_y[-\bar{F}_5-\bar{y}(\sin 2\beta\bar{F}_6+\cos 2\beta\bar{F}_7)]$$

(3.4.17)

$$\sigma_{xy}=2GD_x[\sin 2\beta\bar{F}_4-\cos 2\beta\bar{F}_5+\bar{y}(\sin 2\beta\bar{F}_6+\cos 2\beta\bar{F}_7)]+2GD_y[-\bar{y}(\cos 2\beta\bar{F}_6-\sin 2\beta\bar{F}_7)]$$

(3.4.18)

Ces équations peuvent être utilisées pour calculer les coefficients d'influence pour la méthode de discontinuité de déplacement.

### III.5. COEFFICIENTS D'INFLUENCE

Les coefficients d'influence pour la méthode de discontinuité de déplacement sont obtenus à partir des résultats précédents et en considérant un solide infini contenant N segments de ligne, orientés arbitrairement avec le respect du repère global x,y. Chacun de ces segments a son propre système de coordonnées local, et chacun représente un élément de la discontinuité de déplacement. L'influence des composantes normales et tangentielles de la discontinuité de déplacement du j<sup>ème</sup> élément sur les déplacement et les contraintes à un point arbitraire (x,y) sur le solide peuvent être calculés à l'aide des systèmes d'équations énoncés au paragraphe III.3. L'influence de ces quantités sur les déplacements et les contraintes normales et tangentiels au milieu du i<sup>ème</sup> élément spécifie les coefficients d'influence aux limites  $B_{ss}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{sn}^{ij}$  et  $B_{ss}^{ij}$  et  $A_{ss}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{sn}^{ij}$  et  $A_{ss}^{ij}$ .

Les déplacements et les contraintes normales et tangentiels peuvent alors s'écrire comme suit (en utilisant les formule de transformées du premier chapitre) :

$$u_s^i = D_s^j \left[ -(1-2\nu)\sin\gamma\bar{F}_2 + 2(1-\nu)\cos\gamma\bar{F}_3 - \bar{y}(\sin\gamma\bar{F}_4 - \cos\gamma\bar{F}_5) \right] + D_n^j \left[ -(1-2\nu)\cos\gamma\bar{F}_2 - 2(1-\nu)\sin\gamma\bar{F}_3 - \bar{y}(\cos\gamma\bar{F}_4 + \sin\gamma\bar{F}_5) \right] \quad (3.5.1)$$

$$u_n = D_s^j [(1-2\nu)\cos\gamma\bar{F}_2 + 2(1-\nu)\sin\gamma\bar{F}_3 - \bar{y}(\cos\gamma\bar{F}_4 + \sin\gamma\bar{F}_5)] + D_n^j [-(1-2\nu)\cos\gamma\bar{F}_2 + 2(1-\nu)\sin\gamma\bar{F}_3 - \bar{y}(\sin\gamma\bar{F}_4 - \cos\gamma\bar{F}_5)] \quad (3.5.2)$$

et

$$\sigma_s = 2GD_s^j [-\sin 2\gamma\bar{F}_4 - \cos 2\gamma\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\gamma\bar{F}_6 - \cos 2\gamma\bar{F}_7)] + 2GD_n^j [-\bar{y}(\cos 2\gamma\bar{F}_6 + \sin 2\gamma\bar{F}_7)] \quad (3.5.3)$$

$$\sigma_n = 2GD_s^j [2\sin^2\gamma\bar{F}_4 + \sin 2\gamma\bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\gamma\bar{F}_6 + \sin 2\gamma\bar{F}_7)] + 2GD_n^j [-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\gamma\bar{F}_6 - \cos 2\gamma\bar{F}_7)] \quad (3.5.4)$$

où  $\gamma = \beta^i - \beta^j$  donne l'inclinaison du  $i^{\text{ème}}$  élément par rapport au  $j^{\text{ème}}$  comme le montre la figure ci-dessus :

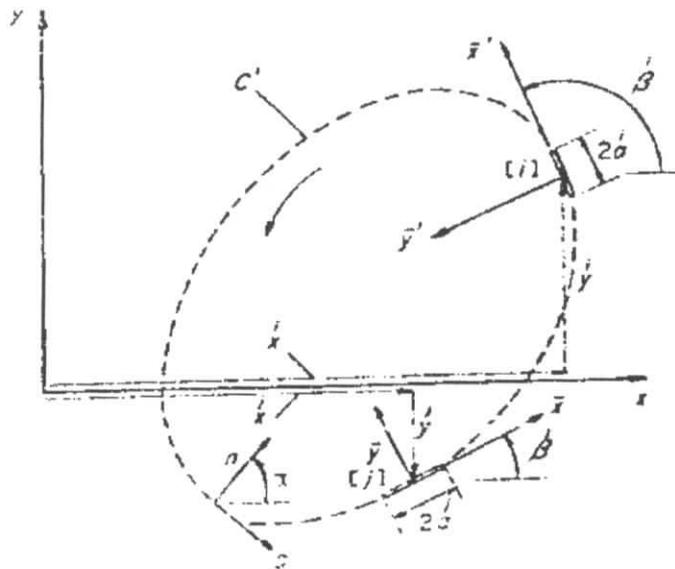


Fig.III.7. Positionnement des éléments frontières

Il est facile de démontrer les termes diagonaux des coefficients d'influence aux limites s'écrivent comme suit :

$$B_{sn}^i = B_{ns}^i = 0 ; B_{ss}^i = B_{mm}^i = \pm \frac{1}{2} \text{ pour } \bar{y} = 0_{\pm}$$

$$A_{sn}^i = A_{ns}^i = 0 ; A_{ss}^i = A_{mm}^i = \frac{G}{\pi(1-\nu)\alpha^i}$$

### III.6. PROBLEMES INTERIEUR/EXTERIEUR

Pour ce problème il faudra diviser les limites en  $N$  éléments et affecter à chaque élément à chaque élément avec les composantes de discontinuité de déplacement  $D_s$  et  $D_n$ . Nous mettrons alors en place le système algébrique pour trouver les discontinuités de déplacement que produisent les déplacements et les contraintes imposés aux limites.

Les déplacements et les contraintes peuvent ainsi être calculés dans n'importe quelle point du solide en sommant les effets en ce point des différentes discontinuités de déplacement sur les  $N$  éléments limites.

Le système d'équation algébrique est formé en considérant les conditions aux limites pour chaque élément. Si les contraintes appliquées sur le  $i^{\text{ème}}$  élément frontière sont

$\sigma_s = \begin{pmatrix} \sigma_s \\ \sigma_n \end{pmatrix}_0$  nous écririons alors pour le  $i^{\text{ème}}$  élément :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_s)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n \\ (\sigma_n)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n \end{aligned} \right\} \quad (3.6.1)$$

Similairement, si on applique des déplacements aux frontières du  $j^{\text{ème}}$  élément

$u_s = \begin{pmatrix} u_s \\ u_n \end{pmatrix}_0$  et  $u_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_s \end{pmatrix}_0$  le système d'équations du  $i^{\text{ème}}$  élément est :

$$\left. \begin{aligned} (u_s)_0 &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n \\ (u_n)_0 &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n \end{aligned} \right\} \quad (3.6.2)$$

En mélangeant les formulations des déplacements et des contraintes et en procédant de même pour  $i=1, N$ , nous obtenons la système algébrique à  $2N$  inconnus suivant :

$$\left. \begin{aligned} b_s &= \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n \\ b_n &= \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n \end{aligned} \right\} \quad i=1 \text{ à } N \quad (3.6.3)$$

Les quantités  $b_s^i$  et  $b_n^i$  sont les valeurs limites des contraintes ou des déplacements, et  $C_{ss}^j, C_{sn}^j, C_{ns}^j, C_{nn}^j$  sont les coefficients d'influence correspondants.

### III.7. CONDITIONS DE SYMETRIE

Une symétrie axiale existe pour certains problèmes quand les propriétés élastique du matériel, la configuration géométrique des limites et des conditions de chargement sont tous symétriques.

Prenons par exemple un corps qui satisfait les conditions précédemment citées et qui admet un axe de symétrie  $x=x^*$  comme le représente la figure ci-après.

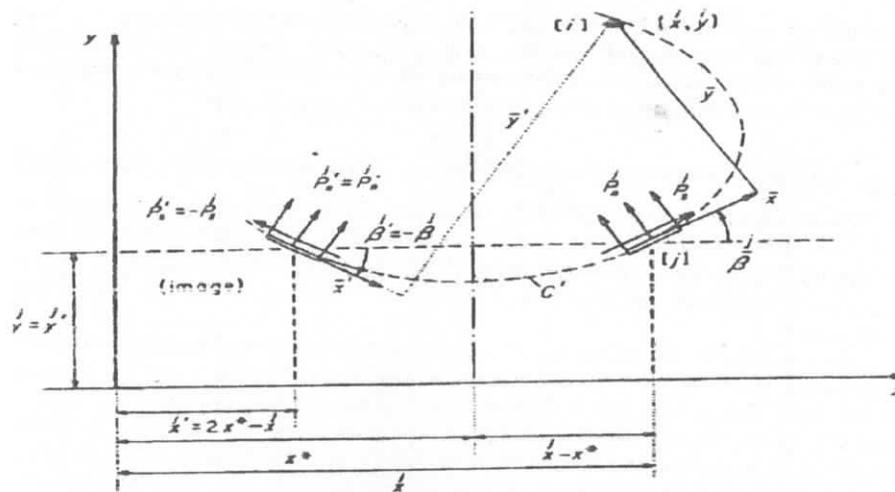


Fig.III.8. Condition de symétrie pour l'axe  $x=x^*$

Nous pouvons écrire à partir de ce schémas les relations suivantes entre les deux coordonnées du milieu des éléments symétriques :

$$x^j = x^* - (x - x^*) = 2x^* - x \quad (3.7.1)$$

$$y^j = y \quad (3.7.2)$$

Les déplacements et les contraintes aux limites au point  $x=x^i, y=y^i$  peuvent être calculés à l'élément image en terme des coordonnées locales :

$$\bar{x}^i = (x - x^i) \cos \beta^i + (y - y^i) \sin \beta^i \quad (3.7.3)$$

$$\bar{y}^i = -(x - x^i) \sin \beta^i + (y - y^i) \cos(-\beta^i) \quad (3.7.4)$$

De même pour un axe de symétrie  $y=y^*$  d'après la figure ci-après nous pouvons écrire :

$$x' = x \tag{3.7.5}$$

$$y' = y^* - (y - y^*) = 2y^* - y \tag{3.7.6}$$

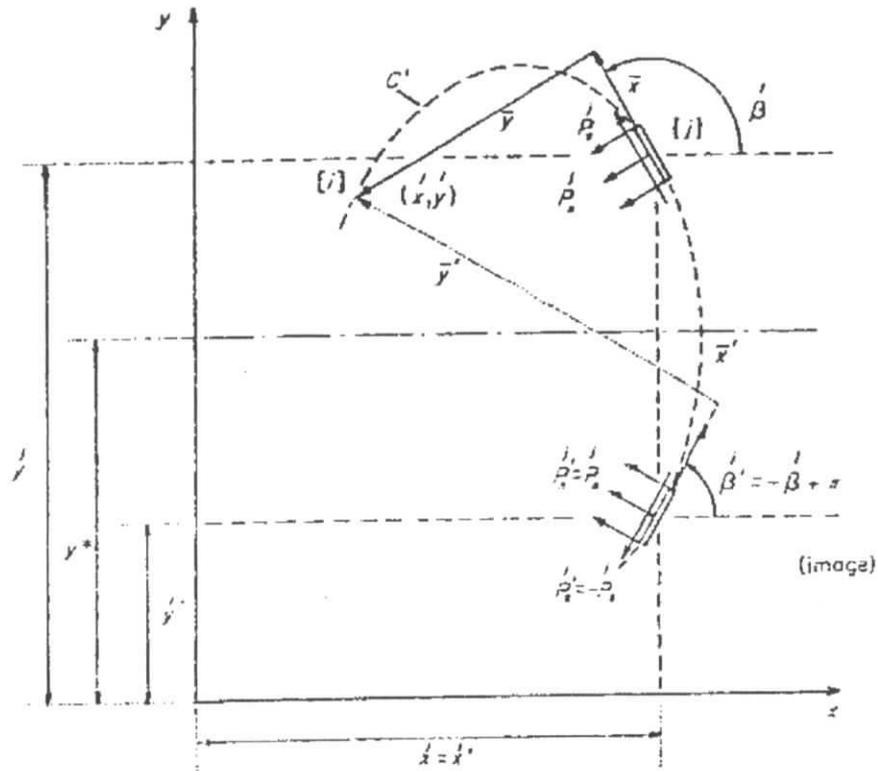


Fig.III.9. Condition de symétrie pour la ligne  $y=y^*$

Et finalement quant on a à faire à une symétrie suivant l'axe  $x=x^*$  et  $y=y^*$ , comme le représente la figure ci-après, les formules des deux symétries précédentes sont applicables mais en plus de cela il faut rajouter le cas suivant :

$$x' = x^* - (x - x^*) = 2x^* - x \tag{3.7.8}$$

$$y' = y^* - (y - y^*) = 2y^* - y \tag{3.7.9}$$

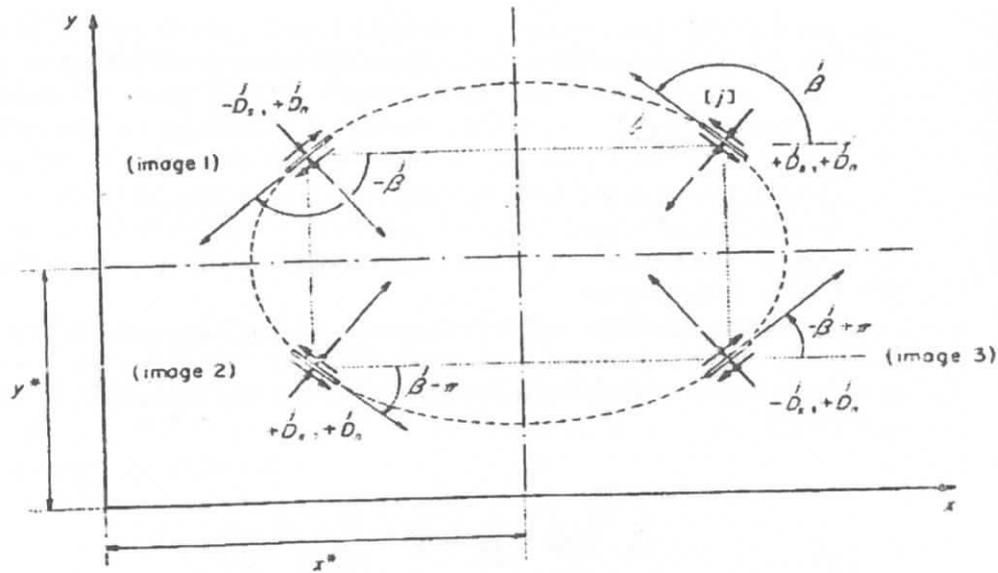


Fig.III.10. Conditions de symétrie pour les axes  $y=y^*$  et  $x=x^*$

### III.8. APPLICATION DE LA MDD AUX MILIEUX MULTICOUCHES

Etudions à présent les milieux multicouches en effet nous nous intéresserons aux corps constitués de deux milieux différents comme présentés sur la figure suivante. Chaque milieu est supposé isotrope homogène et linéairement élastique avec les constantes élastiques  $\nu_1, E_1, \nu_2, E_2$ .

Les systèmes locaux de coordonnées sont associés aux deux contours. La partie commune des deux milieux définit l'interface entre ces deux milieux. Les systèmes de coordonnées des deux milieux  $s_1, n_1$  et  $s_2, n_2$  sont opposés c'est-à-dire  $s_1 = -s_2$  et  $n_1 = -n_2$ . Pour la résolution de ce problème on définit les conditions aux limites du problème dans le corps non homogène de la figure ci-dessus par des conditions en déplacements et en contraintes pour l'interface.

Ces conditions de continuités sont définis pour un point de l'interface par :

$$\sigma_s^1 = \sigma_s^2 \quad (3.8.1)$$

$$\sigma_n^1 = \sigma_n^2 \quad (3.8.2)$$

et

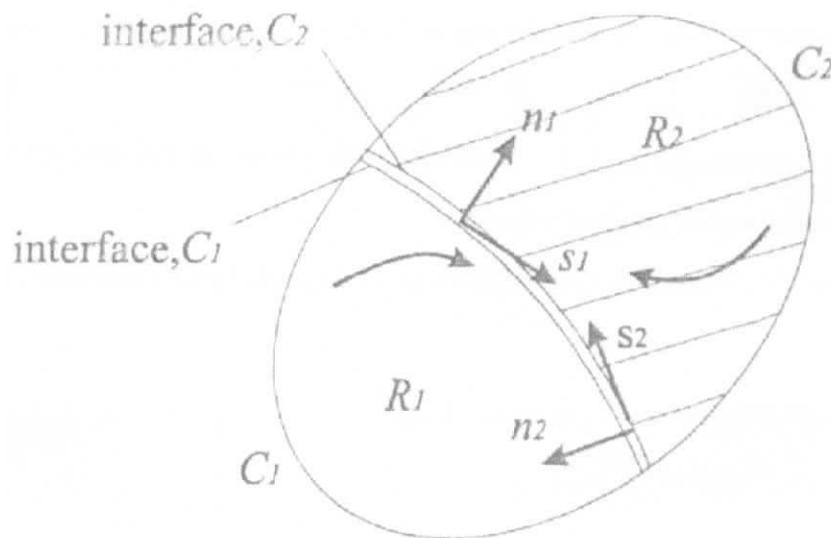
$$u_s^1 = -u_s^2 \quad (3.8.3)$$

$$u_n^1 = -u_n^2 \quad (3.8.4)$$

Le signe moins de l'équation précédente est en fait dû à l'opposition de sens des systèmes  $s_1, n_1$  et  $s_2, n_2$  le long de l'interface.

Pour solutionner ce genre de problème il faudra tout d'abord diviser les contours  $C_1$  et  $C_2$  en un plusieurs segments et en posant sont constant sur chaque segment du contour.

En incluant des portions des contours que représente l'interface, on aura  $n_1$  éléments de frontière le long de  $C_1$  et  $n_2$  éléments le long de  $C_2$ . Les deux éléments face à face le long de l'interface des deux milieux doivent être égaux. Deux déplacements et deux contraintes sont associés à chaque élément d'interface et doivent vérifier les conditions de continuité pour que le problème ait une solution.



**Fig.III.11.Milieu multicouche constitué de deux régions isotropes continues et élastiques**

Appliquons maintenant la méthode de discontinuité de déplacement comme elle a été énoncée précédemment. En effet nous aurons deux problèmes qui sont reliés entre eux par les conditions de continuité à l'interface. Comme ce qui a été fait en monocouche, nous allons associer les discontinuités de déplacement  $D_s$  et  $D_n$  à chaque élément de  $C_1$  et  $C_2$ . Les déplacements et les contraintes dans le milieu  $R_1$  sont donnés en fonction de  $D_s^{[1]}$  et  $D_n^{[1]}$  des  $n_1$  éléments du contour  $C_1$  et les déplacements et les contraintes dans le milieu  $R_2$  sont donnés en fonction de  $D_s^{[2]}$  et  $D_n^{[2]}$  des  $n_2$  éléments de contour  $C_2$ .

La résolution du problème consistera à calculer les discontinuités de déplacements  $D_s$  et  $D_n$  à chaque élément frontière parmi les  $n$  éléments ( $n=n_1+n_2$ ), si les conditions aux limites et les conditions de continuité sont connues nous pourrions alors opérer à la construction du système d'équation algébriques pour notre problème. Il sera préférable de numérotter les éléments frontières des deux milieux consécutivement comme suit :

- Pour le contour  $C_1$  les éléments sont numérotés de 1 jusqu'à  $n_1$ .
- Pour le contour  $C_2$  les éléments sont quant à eux numérotés de  $n_1+1$  jusqu'à  $n_1+n_2$ .

En se référant aux équations obtenues dans le milieu monocouche nous pouvons déduire que sur le contour de  $R_1$  les contraintes s'écrivent comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \sum_{j=1}^m A_{ss}^{i[1]} D_s + \sum_{j=1}^m A_{sn}^{i[1]} D_n \\ \sigma_n &= \sum_{j=1}^m A_{ns}^{i[1]} D_s + \sum_{j=1}^m A_{nn}^{i[1]} D_n \end{aligned} \right\} i=1 \text{ à } m \quad (3.8.5)$$

les contraintes sur la frontière de  $R_2$  s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \sum_{j=m+1}^n A_{ss}^{i[2]} D_s + \sum_{j=m+1}^n A_{sn}^{i[2]} D_n \\ \sigma_n &= \sum_{j=m+1}^n A_{ns}^{i[2]} D_s + \sum_{j=m+1}^n A_{nn}^{i[2]} D_n \end{aligned} \right\} i=m+1 \text{ à } n \quad (3.8.6)$$

Les déplacements aux deux frontières s'écrivent respectivement :

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \sum_{j=1}^m B_{ss}^{i[1]} D_s + \sum_{j=1}^m B_{sn}^{i[1]} D_n \\ u_n &= \sum_{j=1}^m B_{ns}^{i[1]} D_s + \sum_{j=1}^m B_{nn}^{i[1]} D_n \end{aligned} \right\} i=1 \text{ à } m \quad (3.8.7)$$

et

$$\left. \begin{aligned} u_s^{[2]} &= \sum_{j=m+1}^n B_{ss}^{[2]} D_s + \sum_{j=m+1}^n B_{sn}^{[2]} D_n \\ u_n^{[2]} &= \sum_{j=m+1}^n B_{ns}^{[2]} D_s + \sum_{j=m+1}^n B_{nn}^{[2]} D_n \end{aligned} \right\} i=m+1 \text{ à } n \quad (3.8.9)$$

Les coefficients d'influence dans les systèmes précédent peuvent être obtenus de la même manière que dans le cas du monocouche, mais il est nécessaire d'utiliser les propriétés élastiques de chacun des milieux.

Les quatre systèmes d'équations précédentes peuvent se mettre sous la forme d'un seul système à  $2n$  équations et  $2n$  inconnues ( $D_s$  et  $D_n$ ).

$$\left. \begin{aligned} b_s^i &= \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n \\ b_n^i &= \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n \end{aligned} \right\} i=1 \text{ à } n \quad (3.8.10)$$

Les variables de ces équations sont obtenues en construisant les quatre système précédents en conservant les conditions aux limites et les conditions de continuité. Chaque élément  $i$  peut être dans la portion libre ou dans l'interface des deux milieux.

Supposons que l'élément  $i$  appartient à la portion libre du contour  $C_1$  et supposons qu'on a des contraintes appliquées à cet élément  $\sigma_s^i = \begin{pmatrix} i \\ \sigma_s \end{pmatrix}_0$   $\sigma_n^i = \begin{pmatrix} i \\ \sigma_n \end{pmatrix}_0$ .

Utilisons les équations précédentes pour la détermination de  $b_s^i$ ,  $b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij}$ ... nous obtiendrons alors :

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{[1]} & j=1, n \\ 0 & j=m+1, n \end{cases} \quad (3.8.11)$$

Nous pouvons obtenir les autres coefficients d'influence ( $C_{sn}^{ij}$ ,  $C_{ns}^{ij}$  et  $C_{nn}^{ij}$ ) en raisonnant de la même manière.

Etudions maintenant le cas où l'élément appartient à la partie libre du contour  $C_2$ .

Si les conditions imposées sont en déplacement  $u_s = (u_s^i)_0$  et  $u_n = (u_n^i)_0$  et d'après les systèmes d'équations précédents on peut écrire :

$$b_s^i = (u_s^i)_0$$

et  $b_n^i = (u_n^i)_0$

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} 0 & j=1, n \\ B_{ss}^{ij[2]} & j=n+1, n \end{cases} \quad (3.8.12)$$

Avec des relations similaires on peut exprimer les autres coefficients d'influence en combinant les deux conditions aux limites et en faisant un simple arrangement des deux systèmes précédents on obtient un seul système d'équations.

Maintenant, considérons que l'élément  $i$  est situé sur la portion de l'interface et supposons que cet élément appartient à  $C_1$  cet élément sera directement opposé à l'élément  $i$  appartenant à l'autre contour  $C_2$ . On aura quatre conditions qui doivent être satisfaites concernant les deux éléments face à face  $i$  et  $i^*$ , deux conditions de continuité de contraintes et deux de déplacements.

Les conditions de continuité en contraintes sont :

$$\sigma_s^{i(1)} - \sigma_s^{i*(2)} = 0 \quad (3.8.13)$$

$$\sigma_n^{i(1)} - \sigma_n^{i*(2)} = 0 \quad (3.8.14)$$

d'après les systèmes précédents les quantités  $b_s^i$ ,  $b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij} \dots$  seront :

$$b_s^i = \sigma_s^{i(1)} - \sigma_s^{i*(2)} = 0 ; \quad (3.8.15)$$

$$b_n^i = \sigma_n^{i(1)} - \sigma_n^{i*(2)} = 0. \quad (3.8.16)$$

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij[1]} & j=1, n \\ -A_{ss}^{i*j[2]} & j=n+1, n \end{cases} \quad (3.8.17)$$

Nous pouvons raisonner identiquement pour les coefficients d'influence.

Quant aux conditions de continuité en déplacement, elles s'énoncent comme suit :

$$u_s^{(1)} + u_s^{*(2)} = 0 \quad (3.8.19)$$

$$u_n^{(1)} + u_n^{*(2)} = 0. \quad (3.8.20)$$

Nous avons alors :

$$b_s^i = u_s^{(1)} + u_s^{*(2)} = 0 \quad (3.8.21)$$

$$b_n^i = u_n^{(1)} + u_n^{*(2)} = 0. \quad (3.8.22)$$

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} B_{ss}^{ij[1]} & j=1, m \\ B_{ss}^{i^*,j[2]} & j=m+1, n \end{cases} \quad (3.8.23)$$

Pour les autres coefficients d'influences ils seront déduits de la même manière que ci-dessus.

Si on considère maintenant le cas où le contact entre les deux milieux est un serrage (déplacement relatif normal non nul) les conditions de continuité en déplacement deviennent :

$$u_s^{(1)} + u_s^{*(2)} = 0 \quad (3.8.24)$$

$$u_n^{(1)} + u_n^{*(2)} = -\delta_r. \quad (3.8.25)$$

$\delta_r$  étant le serrage entre les deux couches.

Le cas du serrage ne pourra être présent que dans des problèmes à interface fermée c'est-à-dire que les différents éléments forment un contour fermé.

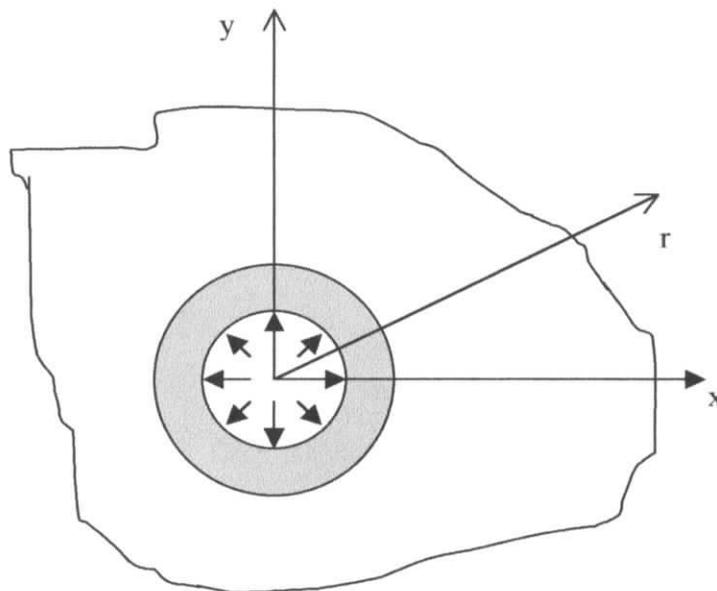
Le micro ordinateur utilisé pour les calculs numériques est un Pentium III 700 MHz. Et le langage de programmation utilisé est le C++ Builder de Borland.

#### IV.1. ANNEAU DANS UNE PLAQUE INFINIE

L'anneau considéré a pour caractéristiques élastique  $\nu_1$  et  $E_1$  cet anneau a pour rayon intérieur  $r=a$  est soumis à une pression radiale et de rayon extérieur  $r=b$  :

$$\sigma_{rr} = -P.$$

Cet anneau se trouve à l'intérieur d'un trou d'une plaque infinie de caractéristiques élastiques  $\nu_2$  et  $E_2$  non chargée à l'infini comme schématisé à la figure suivante :



**Fig.IV.1 Anneau dans une plaque infinie**

Connaissant la solution analytique d'un tube simple et qui est définie par :

$$\sigma_{rr} = A - Br^{-2} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = A + Br^{-2} \quad (4.1.1)$$

$$u_r = \frac{1+\nu}{E} [A(1-2\nu)r + Br^{-1}] \quad (4.1.2)$$

En tenant compte des conditions aux limites et celle de continuité, on établit la solution analytique de notre problème :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= \frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}} \left[ \left( P \frac{a^2}{b^2} - P' \right) - (P - P') \frac{a^2}{r^2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= \frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}} \left[ \left( P \frac{a^2}{b^2} - P' \right) + (P - P') \frac{a^2}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} a \leq r \leq b \quad (4.1.3)$$

et pour la deuxième couche :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^2 &= -P' \frac{b^2}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= +P' \frac{b^2}{r^2} \end{aligned} \right\} r \geq b \quad (4.1.4)$$

où :

$$P' = \frac{2(1-\nu_1)P \frac{a^2}{b^2}}{2(1-\nu_1) + \left( \frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (4.1.5)$$

Les caractéristiques mécaniques de la première couche sont :

$$E_1 = 2.10^5 \text{ Mpa}$$

$$\nu_1 = 0.25$$

$$P/G_1 = 10^{-3}$$

La valeur du chargement est  $P = 80 \text{ Mpa}$

Pour la deuxième couche nous avons :

$$E_2 = 1.10^5 \text{ Mpa}$$

$$\nu_2 = 0.25$$

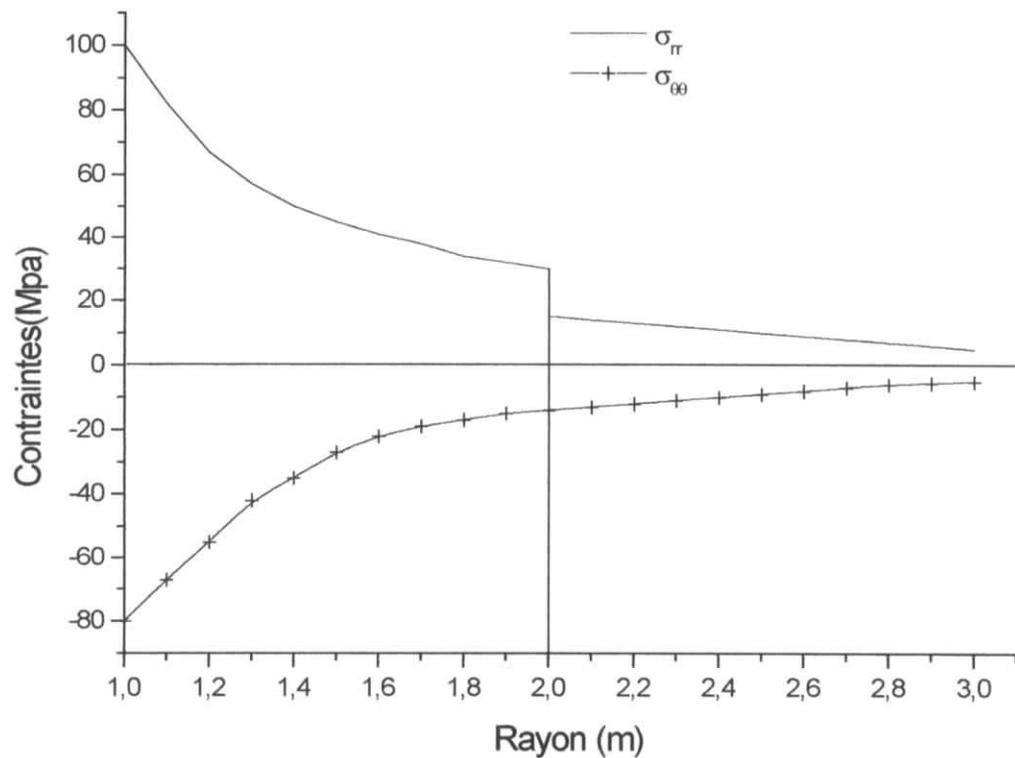
Prenons aussi  $a/b = 1/2$

On a considéré pour résoudre ce problème que :

- Il existe deux axes de symétries.

- Le nombre d'éléments qui subissent la pression normale est 80.
- Le nombre d'éléments d'interface est 120.

La figure suivante est obtenue grâce au programme de la méthode de discontinuité de déplacement.



**Fig.IV.2. Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction du rayon**

On peut ainsi remarquer que les contraintes normales sont continues alors que les contraintes tangentielles ne le sont pas au niveau de l'interface ceci est en fait dû à la discontinuité de matière et à la différence de rigidité des matériaux.

On peut aussi noter que les contraintes tendent vers le zéro qui est imposé par l'hypothèse de départ (chargement nul à l'infini).

**IV.2. TUBE FRETTE**

L'exemple précédent peut être traité dans le cas où le rayon externe de l'anneau a une valeur supérieure à b, et égale à b+δr.

Ce problème admet pour solutions analytiques les équations suivantes :

Dans le cas de la première couche :

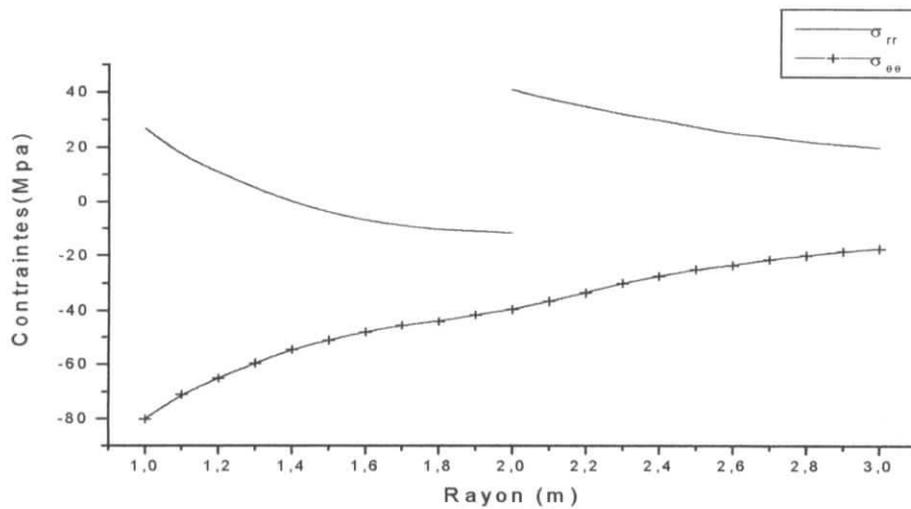
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= \frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}} \left[ \left( P \frac{a^2}{b^2} - P' \right) - (P - P') \frac{a^2}{r^2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= \frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}} \left[ \left( P \frac{a^2}{b^2} - P' \right) + (P - P') \frac{a^2}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} a \leq r \leq b \quad (4.2.1)$$

Pour la deuxième couche :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^2 &= -P' \frac{b^2}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= +P' \frac{b^2}{r^2} \end{aligned} \right\} r \geq b \quad (4.2.2)$$

$$\text{avec } P' = \frac{2(1-\nu)P \frac{a^2}{b^2} + 2G_1 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{\delta r}{b}}{2(1-\nu) + \left(\frac{G_1}{G_2} - 1\right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (4.2.3)$$

La solution numérique de ce problème est obtenue pour  $\frac{\delta r}{b} = -0,5 \cdot 10^{-3}$ , les résultats sont résumés dans la figure suivante.



**Fig.IV.3.Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction du rayon**

Sur le schéma précédent la fissure de longueur  $A$  (puisque'il s'agit d'une fissure d'épaisseur unité) se propage de l'état 1 à l'état 2 d'une valeur  $dA$  dans la même direction que la fissure.

En contraintes imposées l'expression du taux de restitution de l'énergie s'écrit :

$$G = \frac{1}{2} \int T_i \frac{du_i}{dl} d\Gamma \quad (4.7.1)$$

Ecrivons maintenant cette expression sous une forme incrémentale, désignons pour cela  $u_i^1$  et  $u_i^2$ , les déplacements avant et après progression de la fissure de  $dl$ .

Nous obtiendrons alors :

$$T_i du_i = T_i (u_i^2 - u_i^1) \quad (4.7.2)$$

l'écriture intégrale deviendra alors :

$$Gdl = \int_{\Omega} T_i (u_i^2 - u_i^1) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_i (u_i^2 - u_i^1) d\Gamma \quad (4.7.3)$$

ou bien :

$$Gdl = \int_{\Omega} T_i (u_i^2 - u_i^1) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_i (D_i^2 - D_i^1) d\Gamma \quad (4.7.4)$$

Ainsi, le calcul numérique de  $G$  se fera en discrétisant cette dernière expression. Il suffira de sommer les produits  $T_i(u_i^2 - u_i^1)$  sur le contour  $\Omega$  et les produits  $T_i(D_i^2 - D_i^1)$  sur la fissure.

La méthode de discontinuité de déplacement présente un avantage certain pour le calcul du taux de restitution de l'énergie. En effet dans l'état 2, la matrice obtenue à l'état 1 n'est pas modifiée, en effet il suffira juste compléter la matrice des coefficients d'influence par les lignes et les colonnes correspondant au segment de la fissure propagée.

#### IV.8. EXEMPLES SUR LES FISSURES

On constate que dans des corps contenant des inclusions, qui sont considérés comme des défauts de matières, une fissuration précoce peut apparaître quand ce corps est soumis à une sollicitation. Pour cela nous allons introduire dans notre étude ce type de défaut et nous allons voir l'influence que pourra avoir la taille de l'inclusion de son type sur la propagation de la fissure. Nous allons considérer des plaques finies ou infinies contenant une inclusion en exemple.

Mais pour s'assurer que notre méthode numérique pour le calcul du taux de restitution de l'énergie est exacte nous allons comparer les valeurs de  $G$  obtenues numériquement avec d'autres obtenues analytiquement et ceci dans l'exemple suivant.

#### IV.8.1. Plaque infinie contenant une cavité et sollicitée en traction

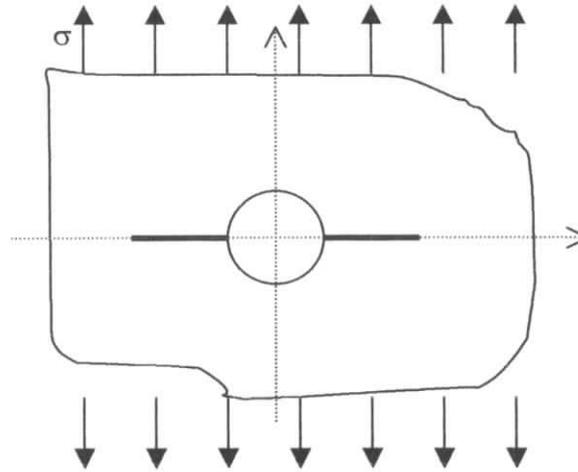
Les caractéristiques élastiques de la plaque étudiée sont les suivantes :

$$E=10^5 \text{ MPa}, \nu=0.25$$

Nous prendrons un chargement à l'infini  $P=100 \text{ MPa}$ .

Supposons qu'il existe préalablement deux fissures comme le montre la figure suivante.

Pour ce problème on considérera qu'il y a un seul axe de symétrie.



**Fig.IV.14. Plaque infinie contenant une cavité et deux fissures soumise en traction**

La solution analytique de ce problème doit passer par le calcul du facteur d'intensité de contrainte qui s'écrit dans ce cas (comme on l'a vu au chapitre II) :

$$K_I \cong f\left(\frac{a}{R}\right) \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

les valeurs de  $f(a/R)$  sont résumées dans le tableau suivant :

$\frac{a}{R}$	0	0.1	0.2	0.5	1	2
$f\left(\frac{a}{R}\right)$	3.39	2.73	2.3	1.73	1.37	1.06

$a$  : étant la longueur de la fissure

$R$  : Rayon de l'inclusion.

A partir du coefficient de concentration de contraintes on peut calculer le taux de restitution de l'énergie :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2$$

on obtient ainsi les résultats suivants :

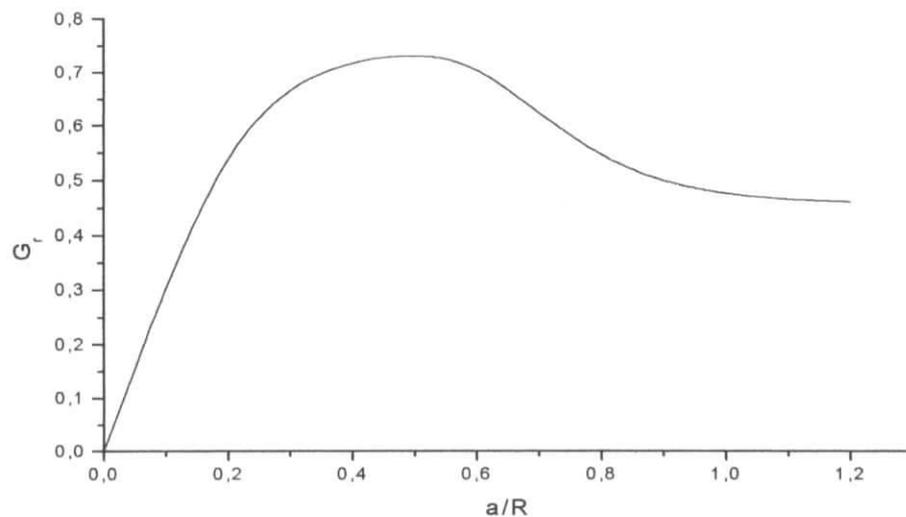
$a/R$	$K_I$	$G_{\text{analytique}}$	$G_{\text{numérique}}$	Erreur%
0,2	145,69	0,199	0,196	1,2
0,4	158,32	0,235	0,229	2,5
0,5	159,33	0,238	0,230	3,7
0,6	155,26	0,225	0,228	0,9

On pourra ainsi conclure qu'on a une bonne approximation du taux de restitution de l'énergie avec notre méthode numérique.

Représentons  $a/R$  en fonction de  $G_r$  avec :

$$G_r = \frac{G \cdot E}{\pi \sigma^2 r}$$

$G_r$  étant un paramètre sans dimension, rapporté à la dimension de l'inclusion, au matériau et au chargement.



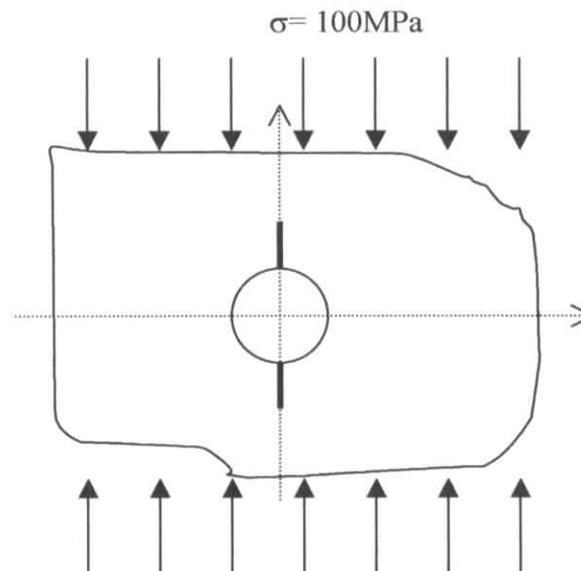
**Fig.IV.15.Variation de  $G_r$  en fonction de la longueur de la fissure**

Nous concluons d'après ce graphique que pour une fissure qui a la moitié du rayon de l'inclusion le taux de restitution de l'énergie commence à diminuer c'est-à-dire quand la longueur de la fissure atteint la valeur de la moitié du rayon de la cavité, la propagation de la fissure devient stable, autrement dit la fissure n'avancera plus que si on fait augmenter le chargement.

#### IV.8.2. Plaque infinie sollicitée en compression contenant une inclusion

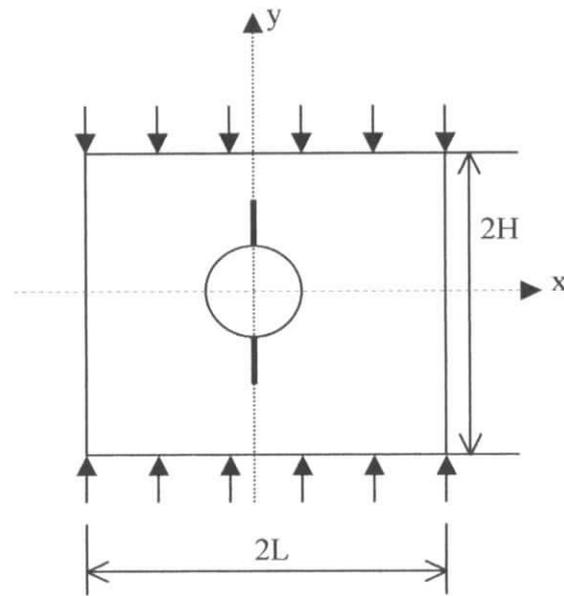
La plaque étudiée est schématisée dans la figure suivante cette plaque contient une cavité de rayon  $R$ . Cette plaque est soumise à une compression suivant la direction  $yy$ .

Les caractéristiques élastiques de la plaque sont les mêmes que l'exemple précédent. Dans cet exemple il existe une symétrie axiale d'axe  $y=0$ .



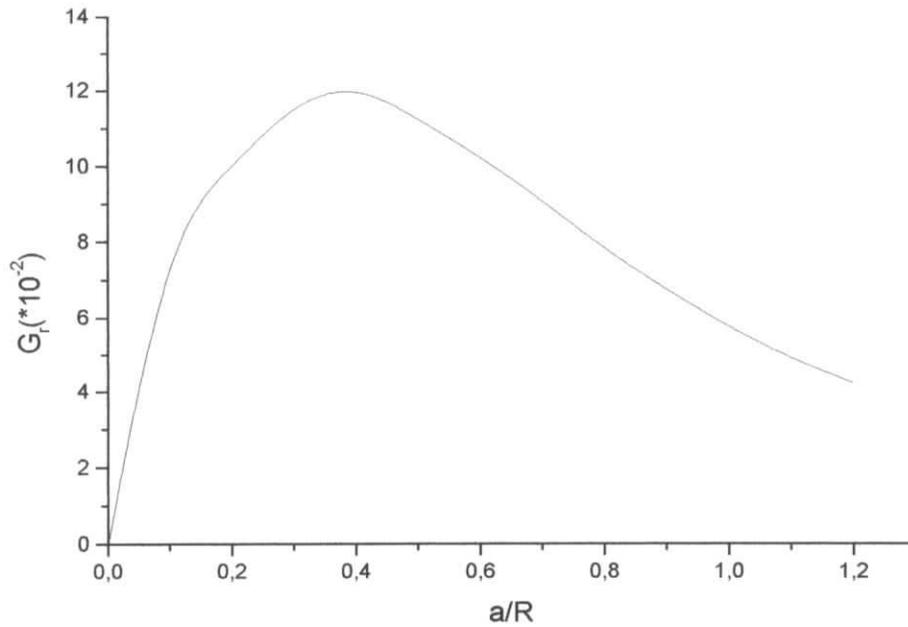
**Fig.IV.16. Plaque infinie contenant deux fissures et sollicitée en compression**

En procédant de même que précédemment nous obtenons le graphique de  $a/R$  en fonction de  $G_r$ .



**Fig.IV.18. Plaque finie sollicitée en compression contenant deux fissures**

Nous obtenons le graphique suivant en solutionnant ce problème.



**Fig.IV.19. Variation de  $G_r$  en fonction de la longueur de la fissure**

On constate une similitude entre l'allure de ces résultats et ceux de la plaque infinie, sauf que dans ce cas la stabilité se fait à une longueur de la fissure de 30% du rayon, et les valeurs de  $G_r$  sont plus élevés.

#### IV.8.4. Plaque finie contenant une inclusion pleine

Prenons à présent une plaque de la même dimension que celle de l'exemple précédent, mais considérons à présent une inclusion qui ait des caractéristiques élastiques qui soient différentes de celles de la plaque.

Les caractéristiques de la plaque sont les suivantes :

$$E_1 = 5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

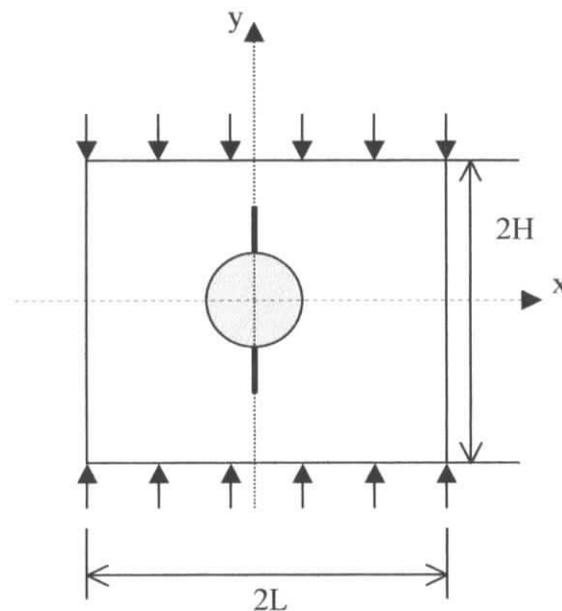
$$\nu_1 = 0,2$$

Pour l'inclusion elles s'énoncent comme suit :

$$E_2 = 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu_2 = 0,25$$

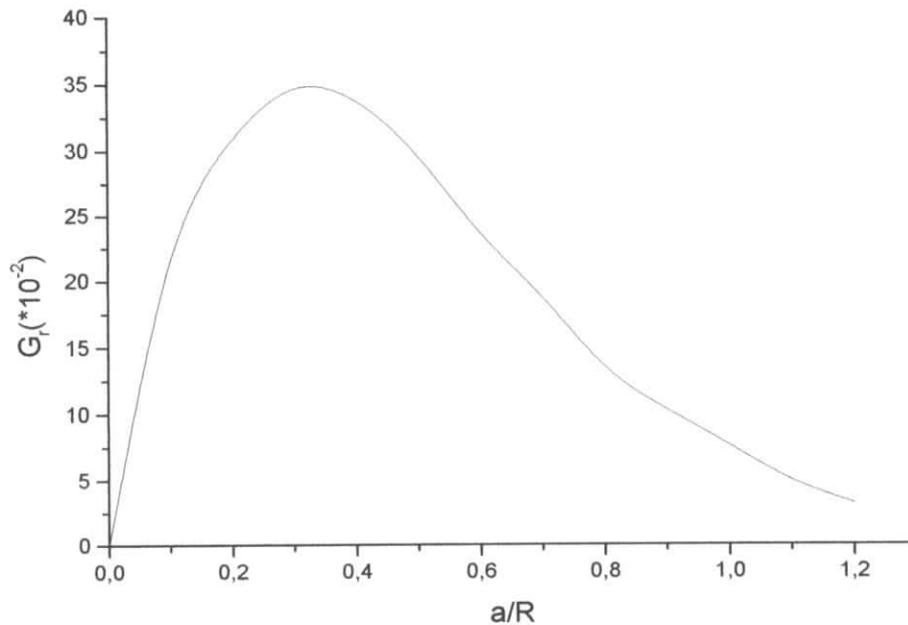
Pour résoudre ce problème nous avons considéré l'existence d'une symétrie axiale d'axe Oy.



**Fig.IV.20. Plaque finie contenant une inclusion sollicitée en compression**

La discrétisation des contours et des fissures joue un rôle très important quant à l'exactitude des résultats obtenus. En effet pour obtenir des résultats corrects il faudra fortement discrétiser les zones de jonction entre les contours circulaires et les éléments des fissures ainsi que les éléments d'interface.

Nous obtenons grâce à la résolution numérique de ce problème les résultats résumés dans le graphique suivant :



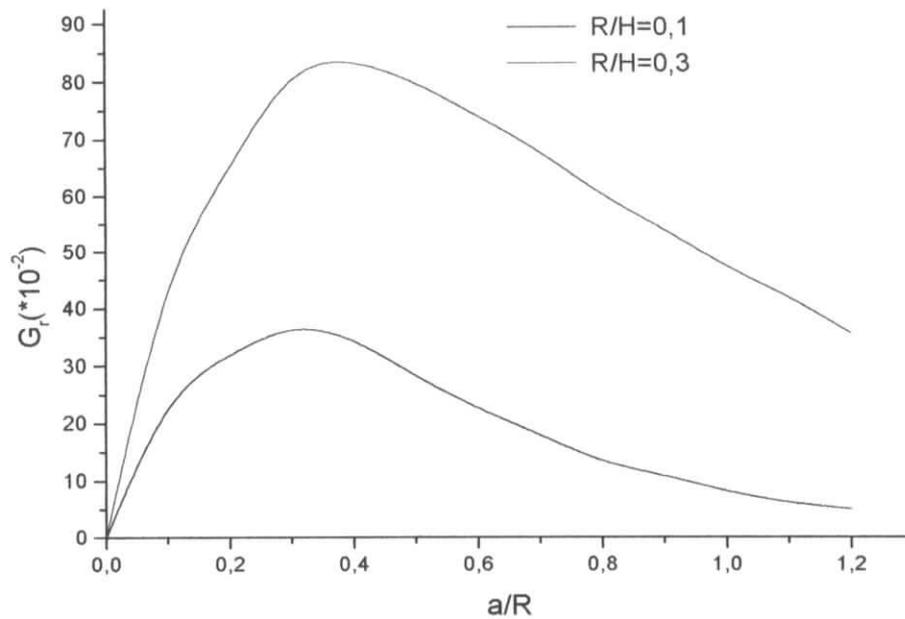
**Fig.IV.21. Variation de  $G_r$  en fonction de la longueur de la fissure**

On observe que l'allure de la courbe est identique à l'allure de celle du cas où l'inclusion n'est pas pleine. Nous concluons donc que le type d'inclusion n'influe aucunement sur la stabilité de la propagation de la fissure, mais elle influe sur la valeur du taux de restitution de l'énergie.

En effet, on constate que la valeur de  $G_r$  a environ été multiplié par trois dans le cas d'une inclusion pleine, donc on conclue que le chargement nécessaire pour faire avancer une fissure dans le cas d'une inclusion pleine est plus faible que dans le cas d'une inclusion vide.

Maintenant faisons varier le rayon de l'inclusion, tout en gardant les autres dimensions constantes.

Nous obtenons ainsi le graphique suivant :



**Fig.IV.22. Variation de  $G_r$  en fonction de la longueur de la fissure et du rayon de l'inclusion**

On constate que la dimension de l'inclusion influe sur le taux de restitution de l'énergie. Bien qu'il n'influe pas sur la stabilité de la propagation de la fissure car la stabilité débute pour les deux cas à une longueur de fissure égale à 30% de la valeur du rayon d'inclusion.

Nous concluons ainsi que plus l'inclusion est grande plus la fissure se propage à une distance plus grande et pour qu'elle se déplace à une même distance il faudra un plus petit chargement pour le cas d'une inclusion pleine.

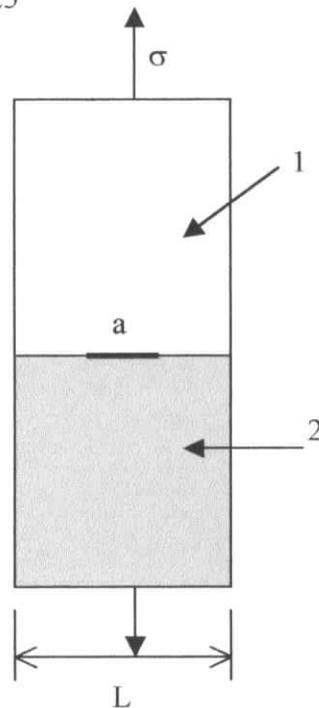
#### **IV.8.5. Cas d'une plaque multicouche contenant une fissure**

Considérons à présent le cas d'une plaque finie contenant deux couches et à l'interface de ces deux couches nous avons affaire à une fissure. Comme le représente la figure suivante.

Les caractéristiques des deux couches de la plaque sont :

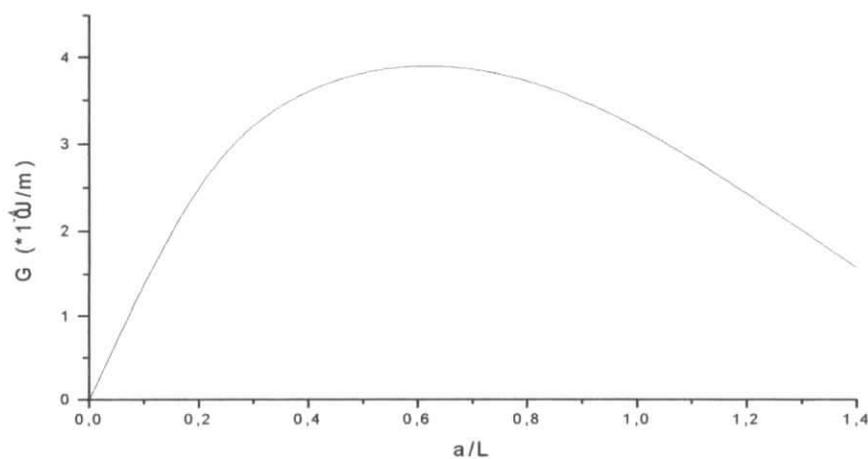
$$E_1=10^5 \text{ MPa}, \nu_1=0,2$$

$$\text{Et } E_2=2*10^5 \text{ MPa}, \nu_2=0,25$$



**Fig.IV.23.Plaque multicouche avec une fissure**

En prenant une charge de  $\sigma=100 \text{ Mpa}$  et en considérant qu'il y a un seul axe de symétrie qui est l'axe  $y=0$  nous pouvons ainsi, en discrétisant les contours de la plaque, l'interface et la fissure, déduire grâce à l'outil numérique le taux de restitution de l'énergie pour cet exemple ; nous obtenons ainsi la courbe suivante :



**Fig.IV.24.Longueur de la fissure en fonction de la longueur de la fissure.**

**CONCLUSION :**

Cette étude nous a permis d'avoir une certaine idée des outils dont possède l'ingénieur pour la résolution de certains problèmes de mécanique des milieux continus parmi ces outils on pourra citer :

- La méthode de discontinuité de déplacement qui est une méthode à élément frontière et qui est une méthode assez souple pour être utilisée
- Nous avons également étudié les relations entre les deux faces d'une interface pour pouvoir étudier les milieux multicouches.
- Nous avons aussi eu affaire à un aperçu de la mécanique de la rupture et nous avons pu appliquer les relations fondamentales de cette dernière pour connaître le comportement des fissures dans différents milieux étudiés (autour d'inclusions, plaques...)

Nous avons ainsi grâce à ces thèmes étudiés mettre en place et élaborer un code de calcul pour les problèmes à milieu isotropes, homogènes et multicouches, en effet l'utilisation de la méthode de discontinuité de déplacement pour les problèmes plans est une méthode efficace et très souple en point de vue emploi pour tout type de problème bidimensionnel.

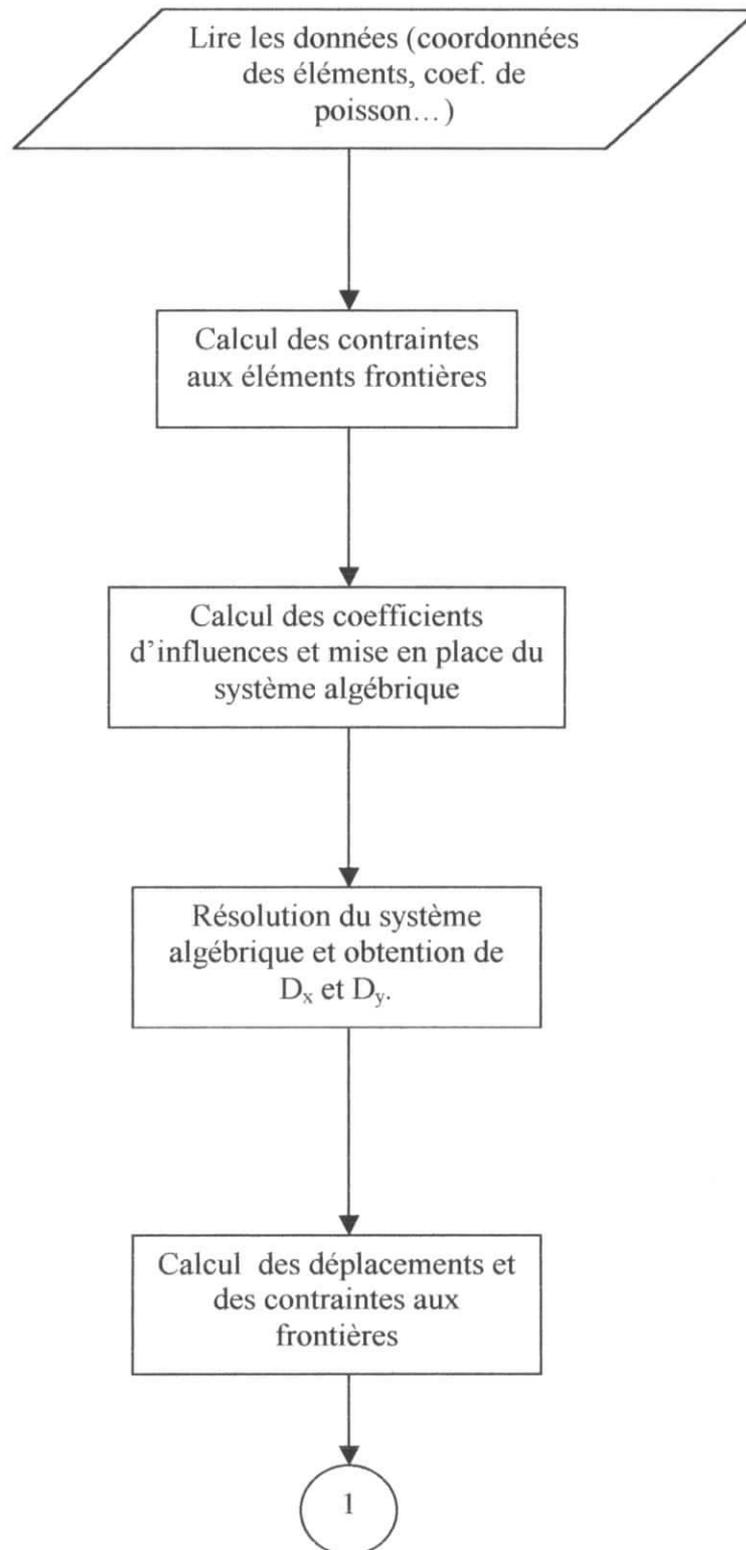
Quant à l'analyse de la rupture autour des inclusions, nous constatons que la méthode de discontinuité de déplacement est une méthode adaptée à ce type de problème de plus les résultats obtenus sont des résultats tout à fait satisfaisants.

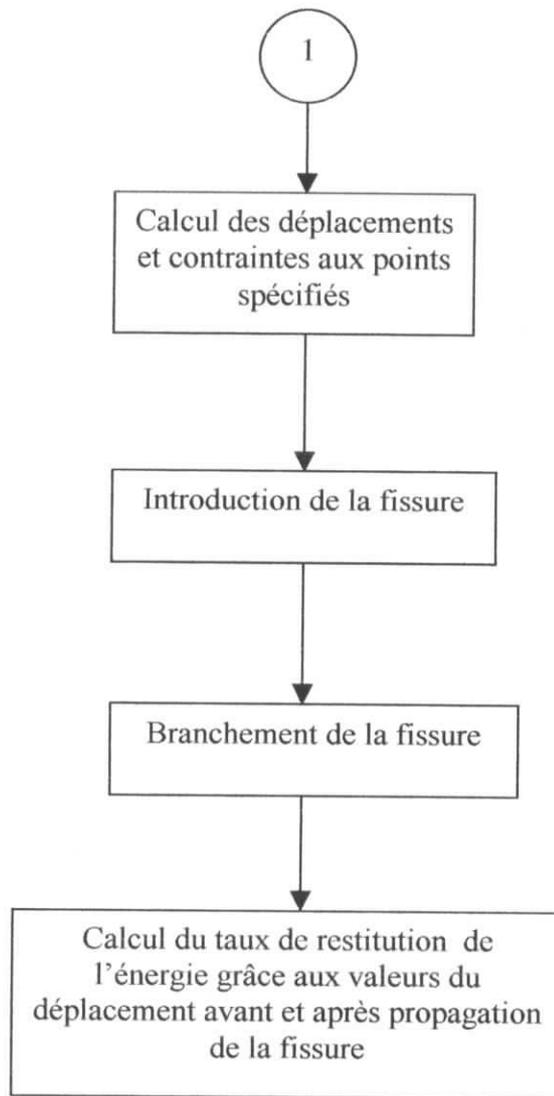
D'après les résultats obtenus on note qu'il y a existence de deux phases dans la propagation des fissures à partir de trou ou d'inclusions circulaires.

Les effets de la rigidité de ces inclusions ont été bien montrés sur la stabilité de la propagation de la fissure.

## ANNEXE

### Algorithme de la méthode de discontinuité de déplacement





## BIBLIOGRAPHIE

[1]S.L. CROUCH-A.M.STARFIELD : "Boundary element method in solid mechanics"

ALLEN et UNWIN

(1983)

[2]J.LEMAITRE-J.L.CHABOCHE : « Mécanique des matériaux solides »

Dunod

(1988)

[3]BARTHELEMY : « Notions pratiques de la mécanique de la rupture »

[4]LABBENS : « Introduction à la mécanique de la rupture »

[5]TIMOSHENKO : « Théorie de l'élasticité »

Librairie Polytechnique ch. Baranger

[6]A.HILLAL-M.GHEMOUR : « Etude numérique du phénomène de rupture autour d'inclusion par la méthode de discontinuité de déplacement »

P.F.E. promotion :1997

[7]L.SALOMON : « Elasticité linéaire »

Masson et Cie 1968

[8]M.GHOUALI : « Modélisation par la discontinuité des déplacements des milieux multicouches élastiques et viscoélastiques »

P.F.E. promotion 1992