

الوزارة المنتدبة لدى الجامعات  
Ministère Délégué aux Universités

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Mécanique

THESE

de



Option : CONSTRUCTION

Presenté par : Mr F. BELBLIDIA

**Modelisation 3D en Super-Eléments  
du Vilebrequin du Moteur F4 L912 par la Méthode  
des Eléments Finis**

Soutenance Devant le Jury :

Pr A. GAHMOUSSE (ENP)  
Pr A. CHAKER (USTHB)  
Dr M. KSIASEK (ENP)  
Dr S. RECHAK (ENP)

M<sup>r</sup> M. DEMIDEM (ENP)

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DELEGUE AUX UNIVERSITES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de : MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## THESE DE MAGISTER

Option : CONSTRUCTION

Présentée par : M<sup>R</sup> FAWZI BELBLIDIA

MODELISATION 3D EN SUPER-ELEMENTS  
DU VILEBREQUIN DU MOTEUR F4L912  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

SOUTENUE LE 10 JUIN 1990 DEVANT LE JURY :

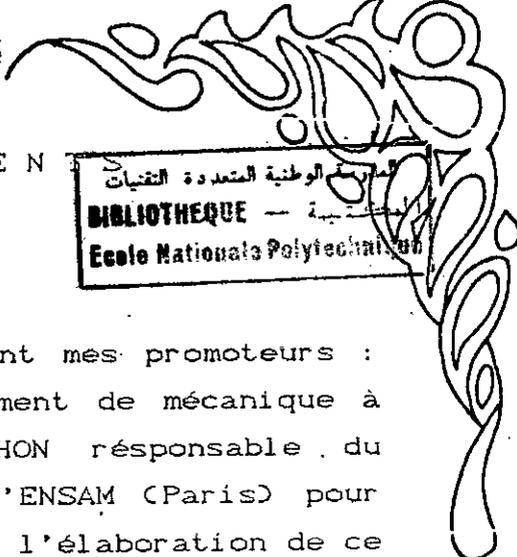
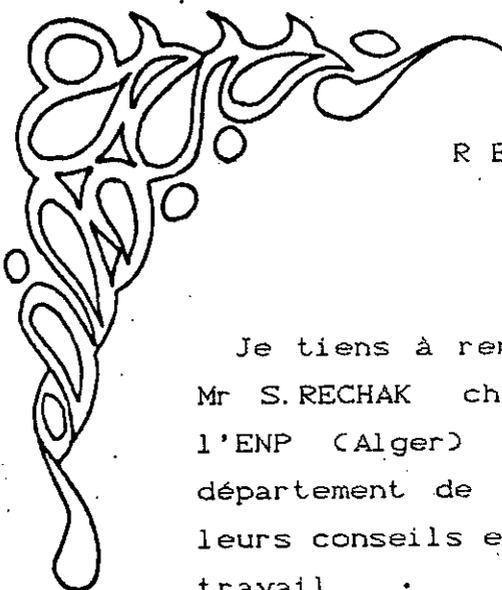
PRESIDENT	: A. GAHMOUSSE	Professeur	(ENP)
EXAMINATEURS	: A. CHAKER	Professeur	(USTHB)
	M. KSIAZEK	Maitre Conférence	(ENP)
	M. DEMIDEM	Chargé de Cours	(ENP)
RAPPORTEUR	: S. RECHAK	Maitre Conférence	(ENP)

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à :

- Mon père et ma mère qui m'ont encouragé et à qui je dois tout .
- Mon frère Ahcen et mes soeurs .
- toute ma famille .
- Mes amis du département et de l'école et de la cité universitaire .
- tout qui me sont chers .



REMERCIEMENTS

المركز الوطني المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Je tiens à remercier vivement mes promoteurs :  
Mr S.RECHAK chef de département de mécanique à  
l'ENP (Alger) et Mr H.GACHON responsable du  
département de structure à l'ENSAM (Paris) pour  
leurs conseils et leur suivi à l'élaboration de ce  
travail . .

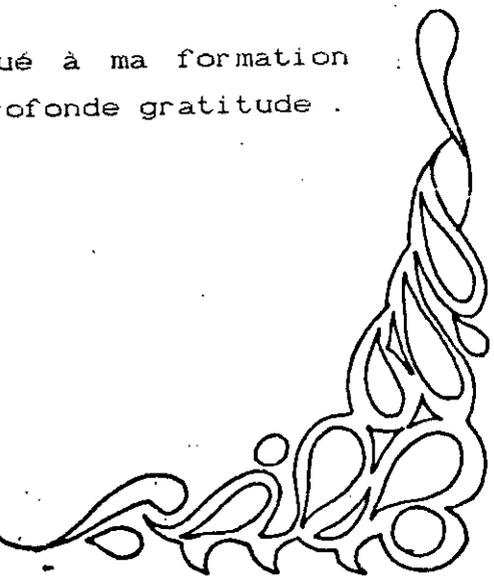
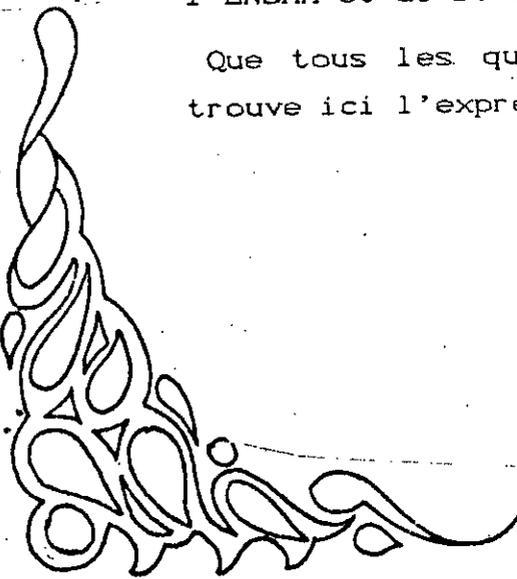
Je remercie également Mr A.CHAKER pour son aide  
appréciable au niveau de la bibliographie et des  
discussions fructueuses sur le sujet .

Je remercie aussi Messieurs les membres du Jury  
pour avoir bien accepté d'évaluer ce modeste  
travail .

Je tiens à exprimer ma reconnaissance :

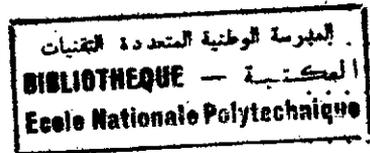
- à Mr BOUKABACHE pour avoir proposer ce sujet et  
pour m'avoir mis en contact avec Mr GACHON .
- à mon ami M.HECINI pour son aide à l'intiation à  
ABAQUS .
- au personnel du centre de calcul de l'ENP ,  
l'ENSAM et de IG Civil de Chlef.

Que tous les qui ont contribué à ma formation  
trouve ici l'expression de ma profonde gratitude .



INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1	
SECTION 1.1 DESCRIPTION GEOMETRIQUE DU VILEBREQUIN	4
1.1.1 ELEMENTS CONSTITUANTS LE VILEBREQUIN	4
1.1.2 PARTICULARITES GEOMETRIQUES	4
1.2 DONNEES DU VILEBREQUIN F4L912	5
SECTION 1.2 CALCUL DES EFFORTS SUR LE VILEBREQUIN	7
1.2.1 ETUDE CINEMATIQUE	7
1.2.2 ETUDE DYNAMIQUE	8
1.2.3 ETUDE DU SYSTEME BIELLE MANIVELLE	12
1.2.4 RESOLUTION	24
1.2.5 EXPLOITATION DES RESULTATS	22
1.2.6 CONCLUSION	27
CHAPITRE 2	
SECTION 2.1 PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	28
2.1.1 UTILISATION DE LA MEF	28
2.1.2 FORMULATION PAR LA MEF	29
2.1.3 DETERMINATION DE LA RIGIDITE ELEMENTAIRE	31
2.1.4 DETERMINATION DU VECTEUR FORCE ELEMENTAIRE	34
2.1.5 ASSEMBLAGE	34
2.1.6 PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE	35
2.1.7 CONDITION DE CONVERGENCE ET PRECISION DE LA MEF	35
2.1.8 ELEMENT ISOPARAMETRIQUE	38
2.1.9 RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES	41
SECTION 2.2 PRESENTATION DU LOGICIEL ABAQUS	45
2.2.1 PROBLEMES TRAITES PAR ABAQUS	45
2.2.2 STRUCTURE ET ENVIRONNEMENT D'ABAQUS	45
2.2.3 GENERALITE SUR ABAQUS	46
2.2.4 MAILLAGE PAR ABAQUS	49

SECTION 2.3	LE MAILLAGE DU VILEBREQUIN PAR ABAQUS	....	51
2.3.1	MANIERE DE PROCEDER		51
2.3.2	CHOIX DU TYPE D'ELEMENT		51
2.3.3	HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES		55
2.3.4	MAILLAGE DES CONSTITUANTS DU VILEBREQUIN	....	55



### CHAPITRE 3

SECTION 3.1	INTRODUCTION AUX SYSTEMES A GRAND NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTE	....	88
3.1.1	STOCKAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE	....	88
3.1.2	METHODE DE CONDENSATION STATIQUE	....	89
3.1.3	METHODE DE SOUS STRUCTURATION	....	92
3.1.4	METHODE FRONTALE	....	95
3.1.5	CONCLUSION	....	96
SECTION 3.2	FORMATION DES SUPER-ELEMENTS DU VILEBREQUIN	..	99
3.2.1	FORMATION DU SUPER TOURILLON ET MANETON	....	99
3.2.3	FORMATION DU SUPER DISQUE DE JONCTION	....	101
3.2.3	FORMATION DU SUPER BRAS	....	102
3.2.4	SUPER ELEMENT D'ABAQUS	....	102
3.2.5	DETERMINATION DE LA RIGIDITE DE L'ENSEMBLE DES CONSTITUANTS	....	103
3.2.6	CONSEQUENCE DE LA CONDENSATION	....	110

### CHAPITRE 4

	DISCUSSIONS ET PERSPECTIVES DU MODEL	....	112
4.1	SIMULATION STATIQUE DU VILEBREQUIN	....	112
4.2	OPTIMISATION DE LA FORME DU RACCORD	....	113
4.3	MODELE DYNAMIQUE	....	113
4.4	EXTRAPOLATION DES RESULTATS A D'AUTRE VILEBREQUIN	.	116
	CONCLUSION	....	122

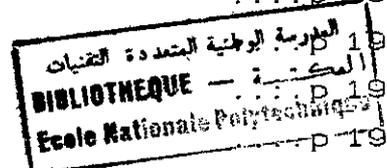
ANNEXES

ANNEXE A	POLYNOME DE LAGRANGE ET DE HERMITE	....	124
A.1	INTERPOLATION DE LAGRANGE	....	124
A.2	INTERPOLATION DE HERMITE	....	125
ANNEXE B	INTEGRATION NUMERIQUE	....	126
B.1	METHODE DE NEWTON - COTES	....	126
B.2	METHODE DE GAUSS - LEGENDRE	....	126
B.3	ORDRE DE L'INTEGRATION NUMERIQUE	....	128
ANNEXE C	LES EQUATIONS DE LIAISONS	....	129
C.1	INTRODUCTION	....	129
C.2	METHODES UTILISEES	....	129
C.3	DETERMINATION DES EQUATIONS DE LIAISONS	....	134
ANNEXE D	CONDENSATION STATIQUE - ELIMINATION DE GAUSS	...	140
	BIBLIOGRAPHIE	....	143



CHAPITRE 1

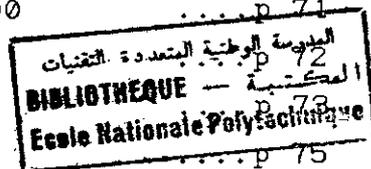
fig.1.1.1	ELEMENTS CONSTITUANTS LE VILEBREQUIN	.... p 6
fig.1.2.1	VITESSE ET ACCELERATION D'UN POINT M	.... p 10
fig.1.2.2	CHAMP DE VITESSE ET ACCELERATION	.... p 10
fig.1.2.3	TENSEUR D'INERTIE	.... p 10
fig.1.2.4	SYSTEME BIELLE MANIVELLE	.... p 15
fig.1.2.5.a	PISTON	.... p 19
fig.1.2.5.b	BIELLE	.... p 19
fig.1.2.5.c	MANIVELLE	.... p 19
fig.1.2.6	CYCLE THERMODYNAMIQUE $P(\theta)$	.... p 23
fig.1.2.7	EFFORT DE PRESSION SUR LE PISTON $F_p(\theta)$	.... p 23
fig.1.2.8	EFFORT SUR LA MANIVELLE $F_a(\theta)$	.... p 24
fig.1.2.9	EFFORT SUR L'AXE DU PISTON $F_b(\theta)$	.... p 25
fig.1.2.10	EFFORT SUR LA CHEMISE $F_c(\theta)$	.... p 25
fig.1.2.11	REACTION SUR LES PALIERS $R_e(\theta)$	.... p 26
fig.1.2.12	COUPLE MOTEUR MONOCYLINDRIQUE	.... p 26



CHAPITRE 2

sch.2.1.1	POSITION DE LA MEF	.... p 29
fig.2.1.1	TRANSFORMATION ISOPARAMETRIQUE	.... p 40
fig.2.1.2	CONDITION DE MAILLAGE 2D [13]	.... p 40
sch.2.2.1	STRUCTURE ET ENVIRONNEMENT D'ABAQUS	.... p 47
fig.2.3.1.a	ELEMENT C3D20 référence	.... p 54
fig.2.3.1.b	ELEMENT C3D20 réel	.... p 54
fig.2.3.2.a	ELEMENT C3D15 référence	.... p 54
fig.2.3.2.b	ELEMENT C3D15 réel	.... p 54
fig.2.3.3.a	MAILLAGE a TOURILLON - MANETON	.... p 58
fig.2.3.3.b	MAILLAGE b TOURILLON - MANETON	.... p 58
fig.2.3.3.c	MAILLAGE c TOURILLON - MANETON	.... p 58
fig.2.3.4.a	LIAISON MPC	.... p 60
fig.2.3.4.b	PROBLEME DE DECOLLEMENT OU RECOUVREMENT	.... p 60
fig.2.3.5.a	MAILLAGE TOURILLON MANETON (x,y)	.... p 61
fig.2.3.5.b	MAILLAGE TOURILLON MANETON (x,z)	.... p 62
fig.2.3.6.b	MAILLAGE TOURILLON MANETON (x,z)	.... p 63

fig.2.3.7.a	MAILLAGE DISQUE DE JONCTION	(x,y)	.... p 65
fig.2.3.7.b	MAILLAGE DISQUE DE JONCTION	(x,z)	.... p 66
fig.2.3.8	CONTINUITE DU MAILLAGE POUR LE BRAS		.... p 67
fig.2.3.9	EMPILEMENT DE 4 NIVEAUX POUR LE BRAS		.... p 67
fig.2.3.10.a	1er FLASQUE	(x,y) face 3000	.... p 70
fig.2.3.10.b	2nd FLASQUE	(x,y) face 6000	.... p 71
fig.2.3.10.c	1er FLASQUE	(x,z)	.... p 72
fig.2.3.10.d	1er FLASQUE	dans l'espace	.... p 73
fig.2.3.11.a	1er ESSAI DU	1er DEMI BRAS	.... p 75
fig.2.3.11.b	1er ESSAI DU	2nd DEMI BRAS	... p75bis
fig.2.3.12.a	2nd ESSAI DU	BRAS (x,y) face 4000	.... p 76
fig.2.3.12.b	2nd ESSAI DU	BRAS espace face 2000	.... p 77
fig.2.3.12.c	2nd ESSAI DU	BRAS espace face 4000	.... p 78
fig.2.3.13	CORRESPONDANCE DES FACES POUR BRAS		.... p 80
fig.2.3.14	3eme ESSAI DU	BRAS espace face 6000	.. p 81
fig.2.3.15.a	BRAS	(x,y) face 2000	.... p 82
fig.2.3.15.b	BRAS	(x,y) face 6000	.... p 83
fig.2.3.15.c	BRAS	espace face 2000	.... p 84
fig.2.3.15.d	BRAS	espace face 6000	.... p 85
tab.2.3	RESULTAT DU MAILLAGE POUR VILEBREQUIN		.... p 86



### CHAPITRE 3

fig.3.1.1	MATRICE BANDE		.... p 90
fig.3.1.2	MATRICE EN LIGNE DE CIEL		.... p 90
fig.3.1.3	MAILLAGE EN SOUS-STRUCTURE		.... p 94
fig.3.1.4	NIVEAUX DE LA SOUS-STRUCTURATION		.... p 94
fig.3.1.5	SUPER ELEMENT - METHODE FRONTALE		.... p 97
fig.3.1.6	SOUS-STRUCTURATION EN SERIE		.... p 98
fig.3.2.1	ETAPES : MODELISATIONS DU VILEBREQUIN		.... p 100
tab.3.2.1	NOMBRE-NOEUDS DES CONSTITUANTS		.... p 105
tab.3.2.2	SYMETRIES POUR LES SUPER-ELEMENTS		.... p 105
fig.3.2.3	DIFFERENTS TYPES DE SYMETRIES		.... p 108
tab.3.2.3	RESULTATS DE LA CONDENSATION		.... p 111

## CHAPITRE 4

fig.4.1	RAFFINEMENT DU MAILLAGE DU RACCORD	....p 114
fig.4.2	OPTIMISATION DE LA FORME DU RACCORD (org.)	p 115
fig.4.3	MODELE D'ARBRE SANS RAMIFICATION	....p 118.
fig.4.4	EXTRAPOLATION DES RESULTATS DU MAILLAGE	...p 118

## ANNEXES

fig.C.1	EQUATIONS DE LIAISON MPC DE TYPE 2	....p 135
fig.C.2	EQUATIONS DE LIAISON MPC DE TYPE 4	....p 139
fig.D.1	EXEMPLE DE BARRE A 3 NOEUDS	....p 140

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة —  
BIBLIOTHEQUE —  
Ecole Nationale Polytechnique

# - SYMBOLES ET NOTATIONS -

SONACOME	SOciete NAtionale de COnstruction MEcanique
MEF	Methode des Eléments Finis
DDL ,ddl	Degré De Liberté
MPC	( Multi-Point Constraint ) equations de liaisons
EDP	Equation aux Derivees Partielles
EFD	Equation Fondamentale de la Dynamique
$\mathcal{L} , l$	Polynome de Lagrange
$[k_{el}] , [k]$	Matrice de rigidite elementaire
$[K] , [K^*] , [K]^{glob}$	Matrice de rigite assemblee, condensee, globale
$(u) , (U) , (D)$	Vecteur deplacement
$(f) , (F)$	Vecteur force
$(\epsilon) , (o)$	Vecteur deformation, contrainte
$[P] , [H]$	Matrice de Passage , d'Homothetie
$\Pi , \Pi^*$	Energie de deformation, complementaire, augmentee
$[J]$	Jacobien
$[.]^{-1}$	Inverse de la matrice $[.]$
$[.]^T$	Transposee de la matrice $[.]$
$\omega$	Pulsation
$\delta_{ij}$	Indice de Kronecker
$(\dot{U}) , (\ddot{U})$	Vecteur vitesse, acceleration
$(r,s,t) , (g,h,r) , (\xi,\eta,\zeta)$	Coordonnees isoparametriques

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
 المكتبة —  
**BIBLIOTHEQUE** —  
**Ecole Nationale Polytechnique**

Le mélange gazeux, dans les moteurs à combustion interne, est comprimé puis brûlé pour en tirer de l'énergie sous forme de translation du piston, ce qui permettra le mouvement du véhicule par le biais de la rotation des roues motrices.

Ceci est possible grâce au vilebrequin qui utilise le principe classique du système bielle-manivelle.

Le vilebrequin, malgré son utilisation dès la naissance des moteurs, reste un mécanisme indispensable à toute transformation de translation alternative en rotation continue. De nos jours il est toujours utilisé dans les moteurs de véhicules particuliers ou industriels, les bateaux, les avions à hélices, et les moteurs de production d'énergie électrique.

Il est un assemblage de pièces de révolution désaxées : constituants (tourillons-maneton-bras), dont le nombre dépendra du nombre et de l'orientation des cylindres dans le moteur (en ligne ou en V, 4, 5 ou 8 cylindres etc...)

L'objectif de cette étude est de formuler un modèle numérique du vilebrequin pour une analyse par la méthode des éléments finis (MEF), et la simulation de ce dernier sous divers types de chargements (selon le moteur).

Dans cette étude on s'est particulièrement intéressé à l'élaboration du modèle statique, mais sans être limitatif le modèle dynamique peut être envisagé. Nous avons pris comme référence le vilebrequin du moteur F4L912 du camion K120 de la SONACOME (planche 1)

Une bibliographie concernant le traitement du vilebrequin par la MEF [1,2] nous a permis de dégager un plan de travail et nous la compléterons selon le type de problèmes rencontrés dans la formulation MEF [ de 9 à 31 ].

La thèse est partagée en trois grands chapitres partagés en sections, traitant chacun un domaine bien défini, et nous avons prévu un chapitre de discussion et des annexes auxquelles nous référerons.

Nous commençons, au chapitre 1 par la présentation du vilebrequin F4L912 en insistant sur les symétries et les répétitions de formes qu'il présente. Puis une étude cinématique et dynamique du système bielle-manivelle [3,4,5,6,7,8] a été développée pour déterminer les efforts appliqués sur la manivelle permettant de déduire ceux appliqués sur le modèle. Les résultats graphiques des efforts sont présentés à la fin du chapitre.

Au chapitre 2, après une présentation de la MEF [de 9 à 16] et du logiciel ABAQUS [27] utilisé, nous établissons un maillage 3D (tri-dimensionnel) pour chaque constituant du vilebrequin, ceci en utilisant des éléments qui tiennent compte des différentes déformations au sein du vilebrequin, ainsi nous déterminons la matrice de rigidité de chaque constituant.

Dans un souci de réduction de la taille des systèmes à résoudre et de commodité de maillage nous utilisons la technique des équations de liaisons (MPC) [10,15,20,21].

Dans ce chapitre nous présentons toutes les possibilités du maillage par ABAQUS.

Au chapitre 3, vu que nous aboutissons à une taille assez importante du système à résoudre, nous sommes dans l'obligation de faire appel à des techniques de stockage, et de sous-structuration dans le souci de réduction de cette taille.

La technique de condensation et résolution par élimination frontale [12,14,22,24,26,27] est introduite pour cet effet. Nous formons ainsi ce que l'on appellera des super-éléments.

L'assemblage de ces super-éléments se fera après avoir déterminé les rigidités de l'ensemble des constituants par des matrices de passage adéquates, ce qui déterminera la matrice de rigidité "condensée" du modèle pour procéder à la simulation statique.

Nous terminons l'étude (chapitre 4) par un procédé qui permettra d'extrapoler les résultats du modèle statique F4L912 à d'autre type de vilebrequin, ou toute autre structure de forme cylindrique comme étant une étape préliminaire d'analyse, ce qui donnera une originalité à notre travail.

#### REMARQUE

Pour des raisons de commodité on ne présentera pas avec cette thèse les fichiers de maillage et ceux donnant les matrices de rigidités condensées des constituants, on les présenteront indépendamment de ce polycopié .

**- DESCRIPTION GEOMETRIQUE  
DU VILEBREQUIN**

Le vilebrequin à modeliser est celui du moteur diesel, en ligne avec quatre (4) cylindres, le F4L912 de la SONACOME. Le rôle principal de celui-ci dans le moteur à combustion interne est de transformer, par le biais de la bielle, le mouvement de translation alternatif du piston en rotation continue qui sera transmise par des mécanismes aux roues du véhicule.

1.1.1 ELEMENTS CONSTITUANTS LE VILEBREQUIN [6,7]

Le vilebrequin à étudier est présenté dans un repère X,Y,Z (planche P1). Il est constitué de : (fig 1.1.1)

a- 4 manetons : C'est des disques en liaison avec la bielle, donc lieu d'application des charges dues à la combustion des gaz.

b- 5 tourillons : C'est des disques sous paliers fluides pour le guidage en rotation du vilebrequin, lieu d'application des réactions d'appui et conditions aux limites du modèle.

c- 8 bras : Par sa forme ovale, il permet un "désaxage" entre le tourillon et le maneton. L'entraxe définira alors la course du piston.

ainsi le vilebrequin est une succession de tourillon - bras - maneton - tourillon - ect...

1.1.2 PARTICULARITES GEOMETRIQUES

Par sa forme et le rôle qui lui est attribué, le vilebrequin présente certaines particularités géométriques :

- Une symétrie dans le plan (Y,Z), ceci est dû aux formes de révolutions des constituants.

-Le vilebrequin peut être représenté par quatre sous-ensembles (système bielle-manivelle) identiques positionnés dans une certaine manière dans l'espace.

Un sous-ensemble est constitué de : 1/2 tourillon - bras - maneton - bras - 1/2 tourillon.

Ainsi si nous prenons la section S1 sur la planche P1 comme référence , alors :

La section S2 s'obtient par rotation autour de l'axe Z puis Y de S1

La section S3 s'obtient par rotation autour de l'axe Z de S1

La section S4 s'obtient par rotation autour de l'axe Z puis Y de S1.

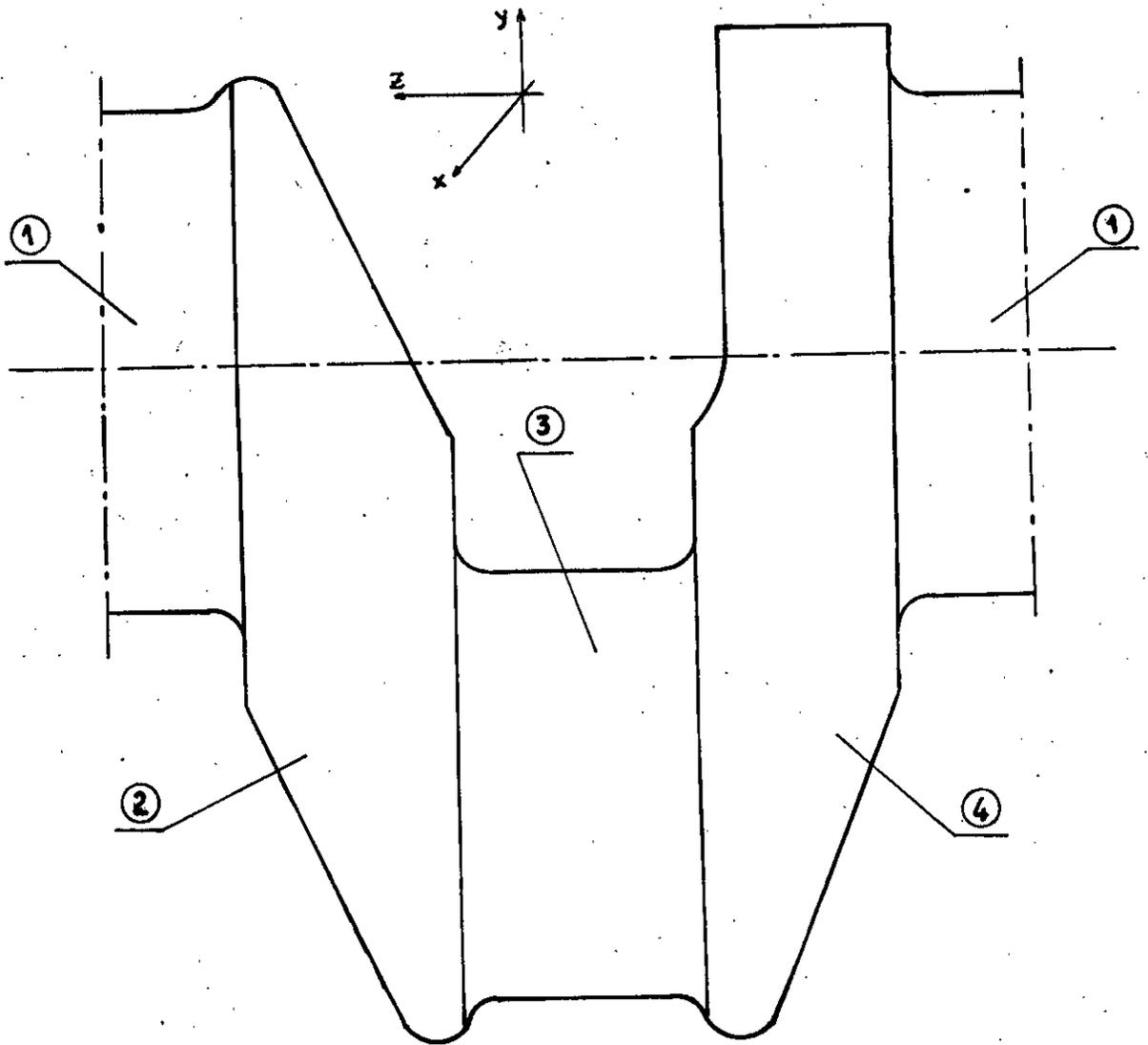
De même les sections S1-S3 (S2-S4) sont symétriques par rapport à l'axe Z (rotation de  $\Pi$  ).

Ces particularités propres à la géométrie du vilebrequin seront exploitées lors de la modélisation afin de réduire la difficulté du maillage.

## 1.2 DONNEES DU VILEBREQUIN F4L912 [3,4]

Les données du vilebrequin F4L912 sont :

$M_p$	= 1.635 Kg	masse du piston et ses accessoires
$M_b$	= 1.700 Kg	masse de la bielle
$M_m$	= 2.800 Kg	masse de la manivelle
$D$	= 0.100 m	alésage du piston
$L$	= 0.210 m	entraxe de la bielle
$L_b$	= 0.140 m	position du centre de gravité de la bielle par rapport à son pied
$C$	= 0.120 m	la course du piston
$\epsilon$	= 17	taux de compression



- 1 - Tourillon
- 2 - Bras
- 3 - Maneton
- 4 - Bras avec contre poids

fig 1.1.1 : ELEMENTS CONSTITUANTS LE VILEBREQUIN

- CALCUL DES EFFORTS  
SUR LE VILEBREQUIN -

Dans une étude statique par la méthode des éléments finis nous sommes ramenés à résoudre un système d'équations du type

$$[ K ] ( U ) = ( F ) \quad 1.2.1$$

ou [ K ] matrice de rigidité  
 ( U ) vecteur déplacement inconnu  
 ( F ) vecteur force appliqué sur le vilebrequin

La résolution de (1.2.1) nécessite la détermination de [ K ] et de ( F ). Dans cette partie on s'intéresse au vecteur charge qui sera déduit d'une étude du système bielle-manivelle. Cette étude repose sur la cinématique et la dynamique du système. Nous commencerons alors par des définitions.

### 1.2.1 ETUDE CINEMATIQUE [3,4,8]

Nous devons, pour aborder un problème de cinématique, mettre en place des repères pour l'écriture des relations mathématiques.

#### ω- VITESSE ET ACCELERATION D'UN POINT

Soit un point M appartenant au solide (S) lié au repère (1) en mouvement par rapport au repère zéro (0) (fig 1.2.1) on peut écrire :

$$\text{vitesse du point M} \quad \overline{V_{CM,1/O}} = \frac{d^0 \overline{OM}}{dt} \quad 1.2.1$$

$$\text{accélération de M} \quad \overline{\Gamma_{CM,1/O}} = \frac{d^0 \overline{V_{CM,1/O}}}{dt} \quad 1.2.2$$

**b)-CHAMP DE VITESSES ET ACCELERATION D'UN SOLIDE INDEFORMABLE**

Soient deux points A et B appartenant au solide (S) lié au repère (1) en mouvement par rapport au repère (0) (fig 1.2.2'), on peut écrire :

$$\overline{V_{CA,1/O}} = \overline{V_{CB,1/O}} + \overline{\Omega_{1/O}} \wedge \overline{BA} \quad 1.2.4$$

$$\overline{\Gamma_{CA,1/O}} = \overline{\Gamma_{CB,1/O}} + \frac{d^0 \overline{\Omega_{1/O}}}{dt} \wedge \overline{BA} + \overline{\Omega_{1/O}} \wedge [\overline{\Omega_{1/O}} \wedge \overline{BA}] \quad 1.2.5$$

**c)-DERIVEE D'UN VECTEUR**

Soit un repère (1) en mouvement par rapport au repère (0) et un vecteur U en mouvement par rapport au repère (1) alors :

$$\frac{d^0 \overline{U}}{dt} = \frac{d^1 \overline{U}}{dt} + \overline{\Omega_{1/O}} \wedge \overline{U} \quad 1.2.6$$

Cette formule sera utilisée pour le calcul du vecteur vitesse des axes du repère lié aux différents éléments mobiles.

Si U est fixé dans le repère (1) on a :

$$\frac{d^0 \overline{U}}{dt} = \overline{\Omega_{1/O}} \wedge \overline{U} \quad 1.2.7$$

**1.2.2 ETUDE DYNAMIQUE [3,4,5,8]**

Pour aborder un problème de dynamique pour n solides (S1, S2, ..., Sn) il faut :

- a- Isoler le solide S1 et analyser les actions mécaniques qui lui sont appliquées.
- b- Ecrire les équations vectorielles de la dynamique du solide S1.
- c- répéter les points a- et b- pour les solides S2, ..., Sn.

1.2.2.1 TENSEUR D'INERTIE I(S/G)

Soient un solide S de centre de gravité G et le repère lié à S (G,x,y,z). On exprime le tenseur d'inertie I(S/G) de S par rapport à son centre de gravité G dans le repère (G,x,y,z) par : (fig 1.2.3) :

$$I(S/G)_{(G,x,y,z)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ & B & -D \\ \text{sym.} & & C \end{bmatrix} \quad 1.2.8$$

$$A = \int_{p \in S} (y^2 + z^2) dm_p \quad B = \int_{p \in S} (x^2 + z^2) dm_p \quad C = \int_{p \in S} (x^2 + y^2) dm_p$$

$$D = \int_{p \in S} yz dm_p \quad E = \int_{p \in S} xz dm_p \quad F = \int_{p \in S} xy dm_p \quad 1.2.9$$

A,B,C sont les moments d'inertie D,E,F les produits d'inertie.

REMARQUE : si le solide possède comme symétrie le plan

$$\begin{array}{lll} (x,y) & \text{alors} & D=E=0 \\ (y,z) & \text{alors} & E=F=0 \end{array} \quad 1.2.10$$

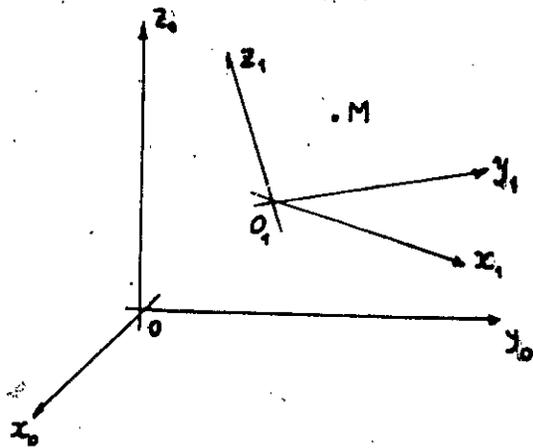


fig 1.2.1.

VITESSE ET ACCELERATION  
DU POINT M

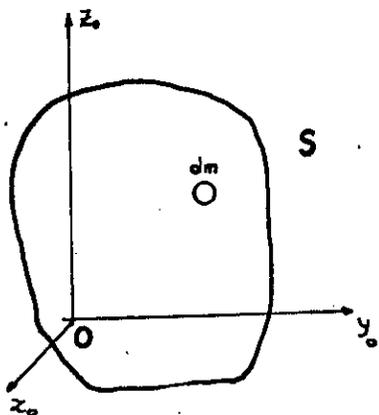


fig 1.2.2.

CHAMP DE VITESSE ET  
ACCELERATION D'UN SOLIDE

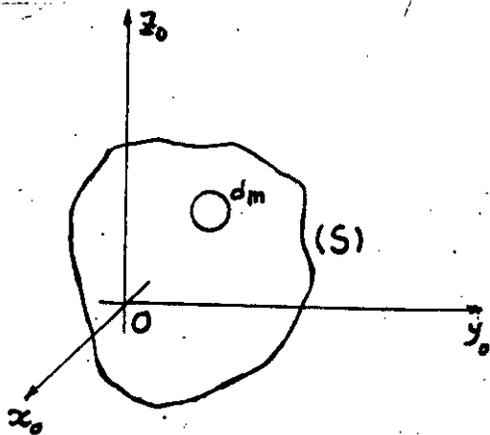


fig 1.2.3

TENSEUR D'INERTIE

### 1.2.2.2 MOMENT CINÉTIQUE $\sigma^1(S/G)$

Soient 2 repères, l'un fixe (0)  $(O, x_0, y_0, z_0)$  et l'autre mobile (1)  $(G, x_1, y_1, z_1)$ . On définit le moment cinétique du solide S par rapport à son centre de gravité G exprimé dans le repère (1) par

$$\overline{\sigma^1(S/G)} = I(S/G)_{(G, x_1, y_1, z_1)} \overline{\Omega(1/0)} \quad 1.2.11$$

### 1.2.2.3 MOMENT DYNAMIQUE $\delta^1(S/G)$

Le moment dynamique  $\delta^1(S/G)$  est la dérivée dans le repère fixe du moment cinétique par rapport au temps.

$$\overline{\delta^1(S/G)} = \frac{d^0 \overline{\sigma^1(S/G)}}{dt} \quad 1.2.12$$

### 1.2.2.3.4 TENSEUR DES ACTIONS MÉCANIQUES

Soient 2 solides S1 et S2, le tenseur des actions mécaniques du solide S1 sur S2 au point A est défini par :

- l'effort du solide S1 sur S2
- le moment du solide S1 sur S2

Donc dans le cas général (3 dimensions) le tenseur est défini par 6 composantes notées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{F}_{1-2} \\ \overline{M}_{F1-2} \end{array} \right\}$$

REMARQUE : Si on connaît le moment d'une force au point A, le moment de cette même force au point B différent de A sera :

$$\overline{M}_{F1-2/B} = \overline{M}_{F1-2/A} + \overline{BA} \wedge \overline{F}_{1-2} \quad 1.2.13$$

### 1.2.3.5 ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE [8]

Les équations fondamentales de la dynamique (EFD) se réduisent à deux équations vectorielles obtenues à partir des théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique.

### a) - Théorème de la résultante dynamique

La quantité d'accélération du centre de gravité du solide S dans son mouvement par rapport au repère (O) :  $\overline{\Gamma}(G, S/o)$  multipliée par la masse du solide  $m_s$  est égale à la somme des forces extérieures des actions mécaniques appliquées au solide S :  $\overline{F}_{ext/s}$

$$m_s \cdot \overline{\Gamma}(G, S/o) = \sum_i \overline{F}_{i, ext/s} \quad 1.2.14-a$$

### b) - Théorème du moment dynamique

Le moment dynamique du solide S par rapport à son centre de gravité G :  $\delta(S/G)$  est égal à la somme des moments des forces extérieures  $\overline{M} F_{ext}$  appliqués au solide S.

$$\delta(S/G) = \sum_i \overline{M} \overline{F}_{i, ext/g} \quad 1.2.14-b$$

REMARQUE : Les équations scalaires sont obtenues en projetant les équations vectorielles 2.2.14-a, b sur les axes du repère dans lequel sont exprimés  $\overline{\Gamma}$ ,  $\overline{F}$ ,  $\overline{S}$  et  $\overline{M}$

## 1.2.3 ETUDE DU SYSTEME BIELLE-MANIVELLE [3,6,8]

L'étude du système bielle-manivelle et le calcul des efforts sur les éléments constituant ce dernier, permet de déterminer les efforts sur le vilebrequin, car un vilebrequin d'un moteur à 4 cylindres n'est autre que la succession de 4 systèmes bielle-manivelle.

### 1.2.3.1 ETUDE CINEMATIQUE

Sur la fig 1.2.4 nous représentons le système bielle-manivelle avec les différents repères liés à chacun de ces éléments

On définit :

- la vitesse angulaire de la manivelle (du moteur)

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad 1.2.15$$

- le vecteur rotation de la manivelle par rapport au repère fixe

$$\bar{\Omega}(1/0) = \bar{\Omega}(m/0) = \omega \bar{z}_0 \quad 1.2.16$$

- le vecteur rotation de la bielle par rapport au repère fixe

$$\bar{\Omega}(2/0) = \bar{\Omega}(b/0) = \dot{\varphi} \bar{z}_0 \quad 1.2.17$$

a- formule de passage entre repère

passage du repère (0, x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>) au repère (0, x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>, z<sub>1</sub>)

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta x_0 + \sin\theta y_0 \\ y_1 = -\sin\theta x_0 + \cos\theta y_0 \\ z_1 = z_0 \end{cases} \quad 1.2.18$$

passage du repère (0, x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>) au repère (B, x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>, z<sub>2</sub>)

$$\begin{cases} x_2 = \cos\varphi x_0 + \sin\varphi y_0 \\ y_2 = -\sin\varphi x_0 + \cos\varphi y_0 \\ z_2 = z_0 \end{cases} \quad 1.2.19$$

La dérivée par rapport au temps de 1.2.18 donne :

$$\begin{cases} \frac{d^0 x_1}{dt} = \omega y_1 \\ \frac{d^0 y_1}{dt} = -\omega x_1 \\ \frac{d^0 z_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad 1.2.20$$

La dérivée par rapport au temps de 1.2.19 donne :

$$\begin{cases} \frac{d^0 x_2}{dt} = \dot{\varphi} y_2 \\ \frac{d^0 y_2}{dt} = -\dot{\varphi} x_2 \\ \frac{d^0 z_2}{dt} = 0 \end{cases} \quad 1.2.21$$

b - relations cinématiques pour déterminer  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ , et  $\ddot{\varphi}$

D'après la géométrie du système on peut écrire :

$$90 < \varphi < 270$$

$$\sin\varphi = \frac{R}{L} \sin\theta \quad 1.2.22$$

$$\cos\varphi = -\sqrt{1 - \left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2\theta} \quad 1.2.23$$

de 1.2.22 on a la vitesse de rotation de la bielle  $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{R \omega \cos\theta}{L \cos\varphi} \quad 1.2.24$$

de 1.2.22 on a l'accélération angulaire  $\ddot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - \omega^2) \operatorname{tg}\varphi \quad 1.2.25$$

c - position, vitesse et accélération des points A, B et G

le point A :

$$OA = \begin{Bmatrix} -R \sin\theta \\ R \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.2.26$$

$$VA = \begin{Bmatrix} -R \omega \cos\theta \\ -R \omega \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.2.27$$

$$\Gamma_A = \begin{Bmatrix} R \omega^2 \cos^2\theta \\ -R \omega^2 \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.2.28$$

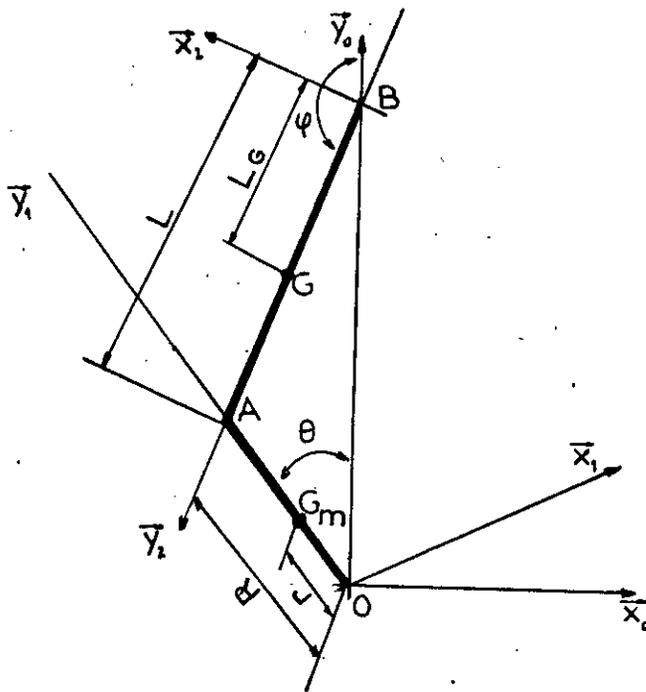


fig 1.2.4

SYSTEME BIELLE-MANIVELLE

LEGENDE :

- L    LONGEUR BIELLE
- Lg   POSITION DU CENTRE DE GRAVITE DE LA BIELLE  
PAR RAPPORT A L'AXE DU PISTON
- R    RAYON DE MANIVELLE
- $(O, x_0, y_0, z_0)$     REPERE FIXE
- $(O, x_1, y_1, z_1)$     REPERE MOBILE LIE A LA MANIVELLE
- $(B, x_2, y_2, z_2)$     REPERE MOBILE LIE A LA BIELLE
- $y_0$     L'AXE DU CYLINDRE
- $z_0$     L'AXE DU VILEBREQUIN
- $y_1$     L'AXE DE LA MANIVELLE
- $\theta = (y_0, y_1)$     ANGLE DE ROTATION DU VILEBREQUIN
- $\phi = (y_0, y_2)$     ANGLE DE ROTATION DE LA BIELLE

le point B

$$OB = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \omega \sin\theta - L \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.2.29$$

$$V_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R \omega \sin\theta + L \dot{\varphi} \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.2.30$$

$$\Gamma_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R \omega^2 \cos\theta + L \dot{\varphi}^2 \cos\theta + L \ddot{\varphi} \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.2.31$$

le point G

$$OG = \begin{Bmatrix} La \sin\varphi \\ R \cos\theta - (L-La) \cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.2.32$$

$$V_G = \begin{Bmatrix} -La \dot{\varphi} \cos\varphi \\ -R \omega \sin\theta + (L-La) \dot{\varphi} \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.2.33$$

$$\Gamma_G = \begin{Bmatrix} (La/L) R \omega^2 \sin\theta \\ -R \omega^2 \cos\theta + (L-La) \dot{\varphi}^2 \cos\theta + (L-La) \ddot{\varphi} \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.2.34$$

### 1.2.3.2 ETUDE DYNAMIQUE

On aborde dans l'ordre, en appliquant la relation fondamentale de la dynamique sur le piston, la bielle, et la manivelle.

#### a -> Le piston

Sur la fig 1.2.5-a on représente les différents efforts appliqués sur le piston.

La projection des relations fondamentales (formules 1.2.14) appliquée au piston, donne :

$$M_P \ddot{x}_B = X_C - X_B$$

$$M_P \ddot{y}_B = -Y_P(\theta) - Y_B$$

$$0 = 0$$

1.2.35

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = a X_B - b X_C$$

#### b -> La bielle

Les efforts agissants sur la bielle sont désignés sur la fig 1.2.5-b, avant de projeter les équs. 1.2.14, calculons d'abord le moment dynamique  $\delta(b/G)$  de la bielle, ainsi on a :

Le tenseur d'inertie de la bielle est :

$$I(b/G) = \begin{bmatrix} I_{ax_2} & 0 & 0 \\ \text{sym} & I_{ay_2} & 0 \\ & & I_{az_2} \end{bmatrix} \quad 1.2.36-a$$

les produits d'inerties sont nuls car la bielle possède 2 plans de symétries. Puis

$$\bar{\Omega}(b/G) = \dot{\varphi} \cdot \bar{z}_2 = \dot{\varphi} \cdot \bar{z}_0 \quad 1.2.36-b$$

$$\bar{\sigma}(b/G) = I_{az_2} \dot{\varphi} \cdot \bar{z}_0 \quad 1.2.36-c$$

en dérivant

$$\bar{\delta}(b/G) = I \alpha z_2 \dot{\varphi}^{\circ} \bar{z}_o \quad 1.2.36-d$$

de même:

$$\bar{M}_{FB/G} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ Lg (Y_B \sin \varphi + X_B \cos \varphi) \end{array} \right\} \quad 1.2.36-e$$

ainsi la projection des équations EFD dans le cas de la bielle donne :

$$M_B \dot{x}_G^{\circ} = X_A - X_B$$

$$M_B \dot{y}_G^{\circ} = Y_A - Y_B$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

1.2.37

$$I \alpha z \dot{\varphi}^{\circ} = Lg (Y_B \sin \varphi + X_B \cos \varphi) - (L-Lg)(X_A \cos \varphi + Y_A \sin \varphi)$$

c -> La manivelle

Les efforts sur la manivelle sont présentés sur la fig 1.2.5-c  
calculons :

$$\bar{\sigma}(m/K) = I \omega \bar{z}_o \quad 1.2.38-a$$

$$\text{alors } \bar{\delta}(m/K) = \bar{0} \quad 1.2.38-b$$

et

$$\bar{M}_{FA/K} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ (R-r)(X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) \end{array} \right\} \quad 1.2.38-c$$

$$\bar{M}_{RE/K} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ r(X_E \cos \theta + Y_E \sin \theta) \end{array} \right\} \quad 1.2.38-d$$

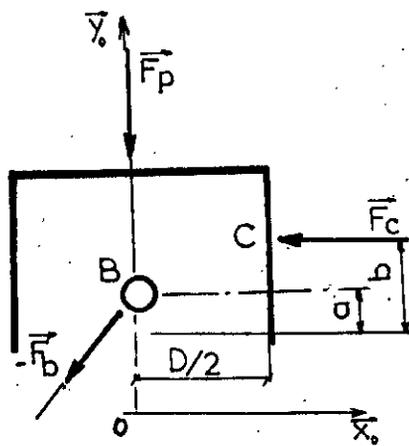


fig 1.2.5-a

piston

$$F_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_p(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{effort du au gaz}$$

$$F_c = \begin{pmatrix} X_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{effort de frottement}$$

$$-F_b = \begin{pmatrix} -X_b \\ -Y_b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{effort exercé par} \\ \text{l'axe du piston} \end{array}$$

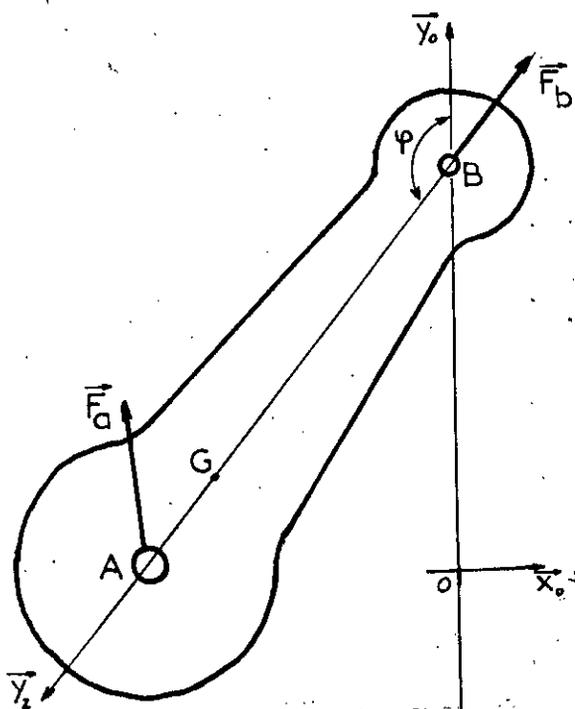


fig 1.2.5-b

bielle

$F_A$  effort exercé par la manivelle  
 $F_B$  effort exercé par la piston

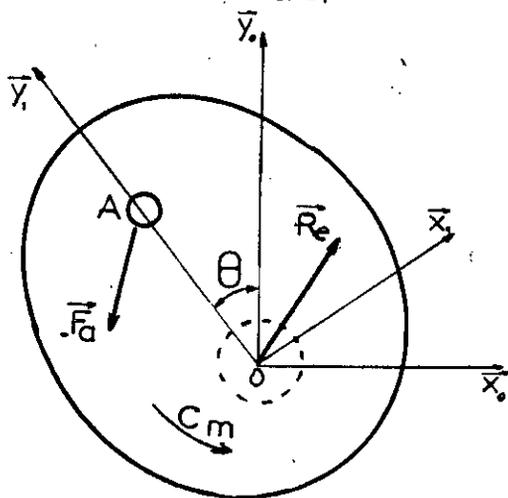


fig 1.2.5-c

manivelle

$F_A$  effort exercé par la bielle  
 $R_E$  réaction des paliers  
 $C_m$  couple moteur

Ainsi la projection des équations EFD appliquée à la manivelle donne :

$$Mm \omega^2 r \sin\theta = -X_A + X_E$$

$$Mm \omega^2 r \cos\theta = -Y_A + Y_E$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

1.2.39

$$0 = (R-r)(X_A \cos\theta + Y_A \sin\theta) + r(X_E \cos\theta + Y_E \sin\theta) + C_m$$

EN RESUME : l'ensemble des équations de la dynamique aboutissent au système suivant :

$$X_C - X_B = 0$$

$$-Y_B = M_p \ddot{y}_B + Y_p(\theta)$$

$$a X_B - b X_C = 0$$

$$X_A + X_B = M_B \ddot{x}_G$$

$$Y_A + Y_B = M_B \ddot{y}_G$$

1.2.40

$$I_G \ddot{\phi} = L_G(X_B \cos\phi + Y_B \sin\phi) - (L - L_G)(X_A \cos\phi + Y_A \sin\phi)$$

$$-X_A + X_E = Mm \omega^2 r \sin\theta$$

$$-Y_A + Y_E = Mm \omega^2 r \cos\theta$$

$$0 = (R-r)(X_A \cos\theta + Y_A \sin\theta) + r(X_E \cos\theta + Y_E \sin\theta) + C_m$$

de plus

$$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$$

$$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$$

1.2.40 bis

$$F_C = |X_C|$$

$$R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2}$$

Nous avons à résoudre un système (1.2.40) de 9 équations à 11 inconnues !. Swoboda [8] propose que le point d'application des forces de frottements  $F_c$  soit tel que  $a = b$  (dernière équ. 1.2.35)

ainsi nous aurons un système de 8 équations à 8 inconnues suivant:

$$X_C - X_B = 0$$

$$-Y_B = M_p \ddot{y}_B^{\circ} + Y_P(\theta)$$

$$X_B - X_C = 0$$

$$X_A + X_B = M_B \ddot{x}_G^{\circ}$$

1.2.41

$$Y_A + Y_B = M_B \ddot{y}_G^{\circ}$$

$$I_{GZ} \ddot{\varphi}^{\circ} = L_G(X_B \cos\varphi + Y_B \sin\varphi) - (L - L_G)(X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi)$$

$$-X_A + X_E = M_m \omega^2 r \sin\theta$$

$$-Y_A + Y_E = M_m \omega^2 r \cos\theta$$

$$0 = (R-r)(X_A \cos\theta + Y_A \sin\theta) + r(X_E \cos\theta + Y_E \sin\theta) + C_m$$

REMARQUE : toutes les inconnues du système (forces, couples) sont fonction de l'angle de rotation  $\theta$ , donc fonction du temps. On s'intéressera surtout à  $F_A(\theta)$

#### 1.2.4 RESOLUTION

Pour résoudre le système 1.2.41 ci-dessus il faut au préalable connaître l'effort du aux gaz de combustion  $F_P$ , ou plus précisément  $Y_P(\theta)$ .

Pour cela il y a deux façons de procéder : [3,4,5,28]

-  $Y_P(\theta)$  est obtenue grace au band d'essai sur le moteur F4L912, on peut mesurer la pression dans la chambre de combustion selon l'angle de rotation  $\theta$  du vilebrequin.

- la méthode semi-empérique qui consiste à étudier le cycle quasi-réel  $(P, \theta)$  thermodynamique du moteur diesel à partir de données telque : la cylindrée, le taux de compression, etc...

Dans le cas de notre étude nous utiliserons les valeurs fournies par le constructeur

La résolution du système 1.2.41 se fera donc par un programme,  
et les résultats seront présentés sous forme graphique. on a ainsi figures :

fig 1.2.6	- le cycle thermodynamique	$P(\theta)$
fig 1.2.7	- l'effort de pression sur le piston	$F_p(\theta)$
** fig 1.2.8	- l'effort sur la manivelle	$F_A(\theta)$ **
fig 1.2.9	- l'effort sur l'axe du piston	$F_b(\theta)$
fig 1.2.10	- l'effort sur la chemise	$F_c(\theta)$
fig 1.2.11	- réaction sur les paliers	$R_e(\theta)$
fig 1.2.12	- couple moteur monocylindrique	$C_m(\theta)$

### 1.2.5 EXPLOITATION DES RESULTATS POUR LE MODELE

Les résultats du calcul des efforts sont propre au système bielle-manivelle (moteur monocylindre) néanmoins nous pouvons les utiliser dans le cas de notre modèle en respectant la règle suivante :

pour un moteur à quatre cylindres et quatre temps ,les efforts seront placés sur les quatre manetons en tenant compte de l'ordre d'allumage (1-3-4-2) dans ce cas, avec un déphasage de  $\pi$  pour assurer les deux tours du vilebrequin (4 temps).

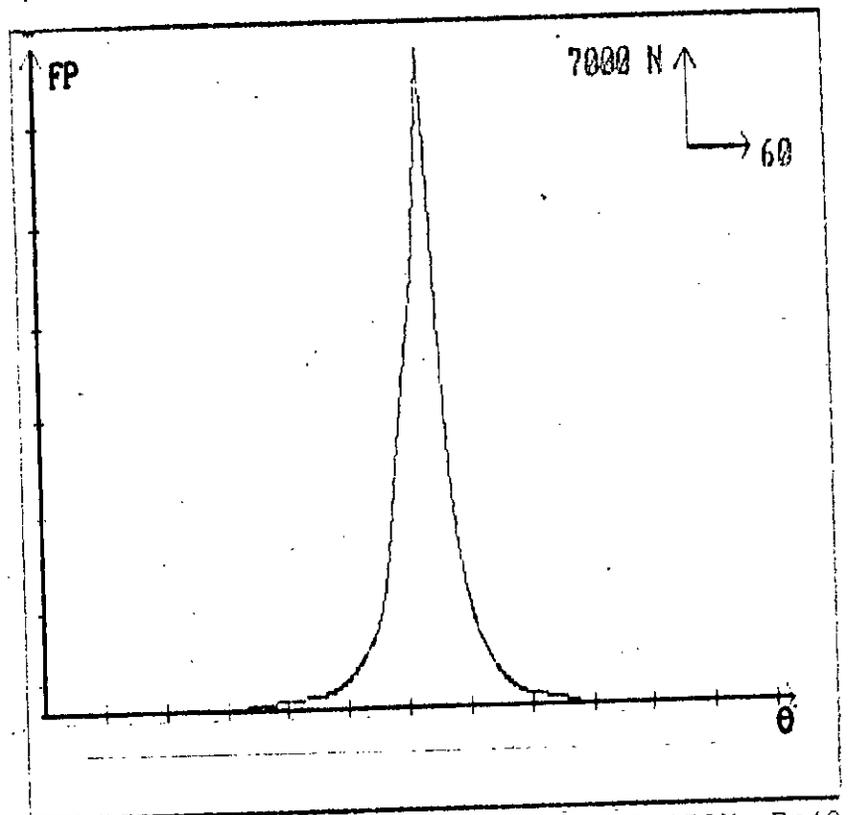
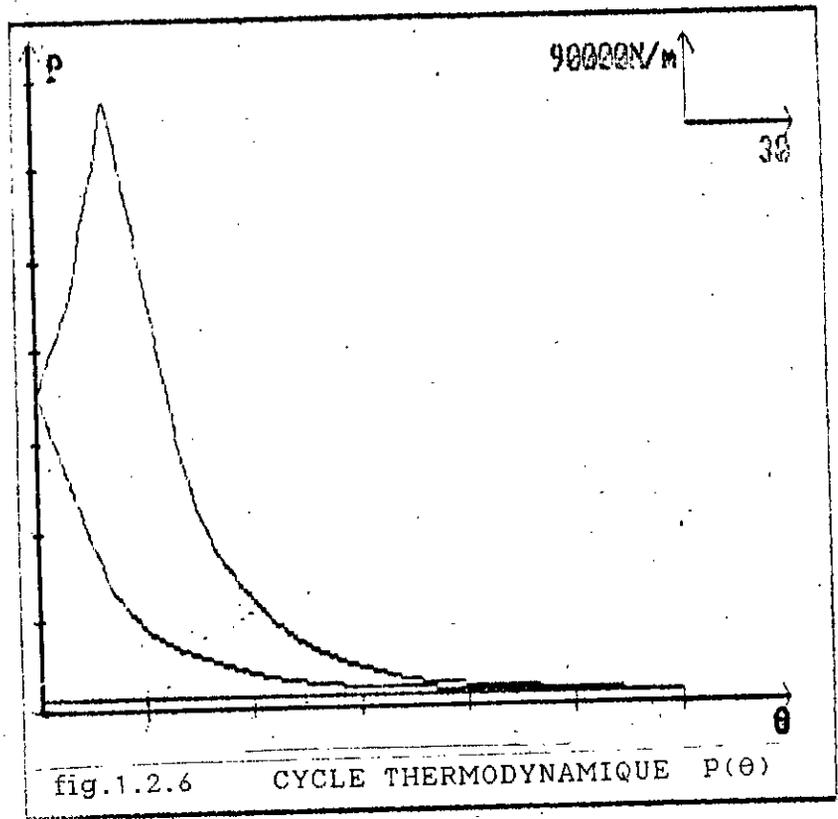
donc si sur :

1<sup>er</sup> - le premier maneton on a  $\theta = \theta_0$  et  $F_A = F_A(\theta_0)$

2<sup>nd</sup> - le troisième maneton on a  $\theta = \theta_0 + \pi$  et  $F_A = F_A(\theta_0 + \pi)$

3<sup>eme</sup> - le quatrième maneton on a  $\theta = \theta_0 + 2\pi$  et  $F_A = F_A(\theta_0 + 2\pi)$

4<sup>eme</sup> - le second maneton on a  $\theta = \theta_0 + 3\pi$  et  $F_A = F_A(\theta_0 + 3\pi)$



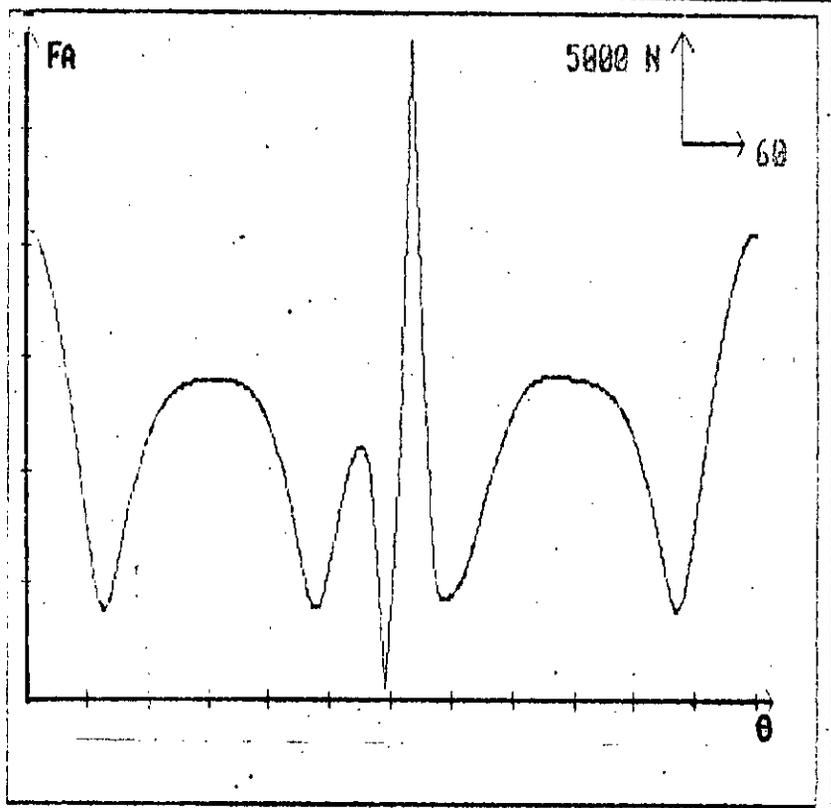


fig.1.2.8 EFFORT SUR LA MANIVELLE  $F_a(\theta)$ .

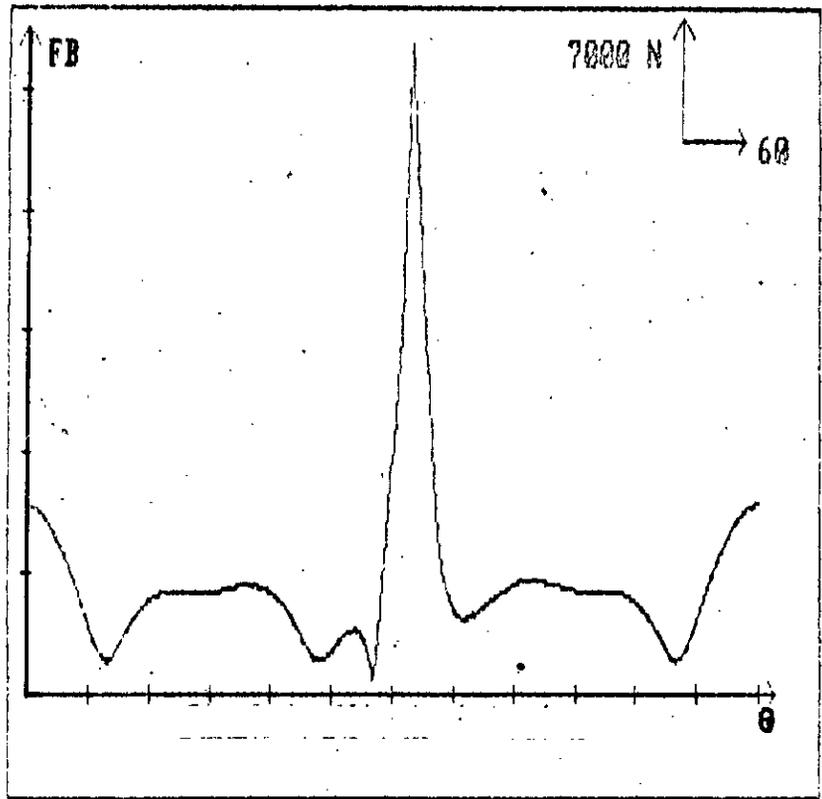


fig.1.2.9 EFFORT SUR L'AXE DU PISTON  $F_b(\theta)$

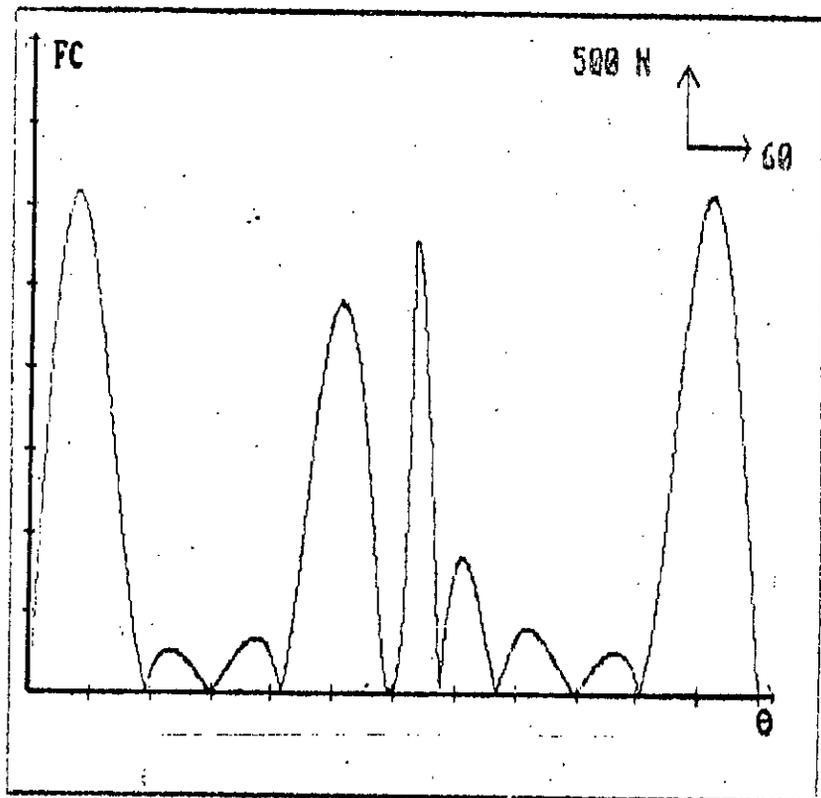


fig.1.2.10 EFFORT SUR LA CHEMISE  $F_c(\theta)$

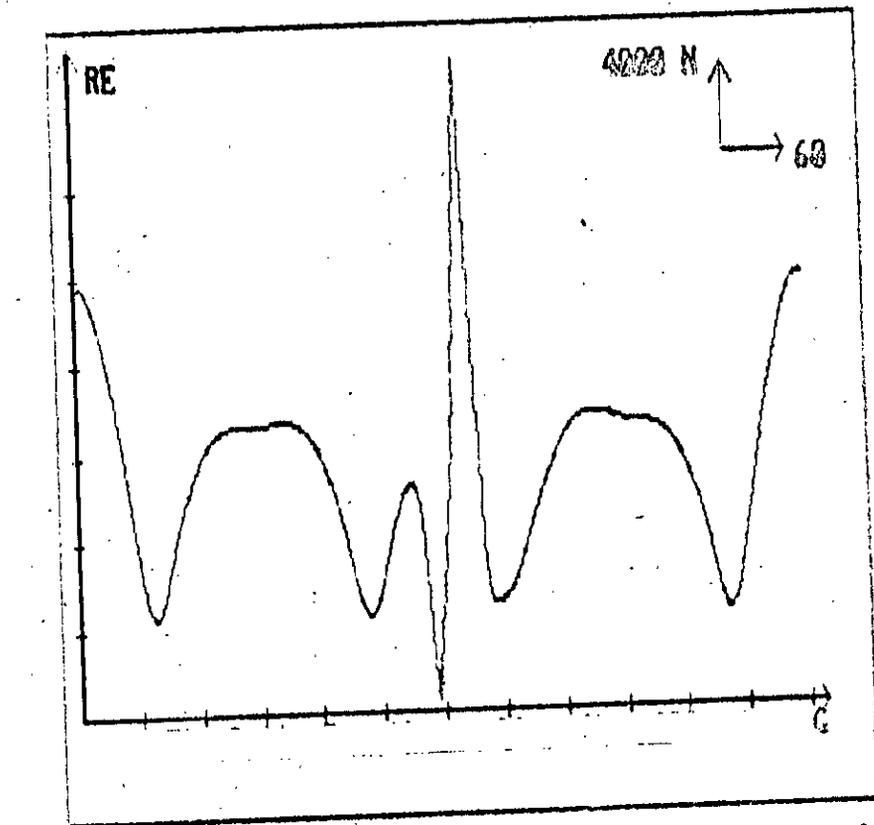


fig.1.2.11 REACTION SUR LES PALIERS  $Re(\theta)$

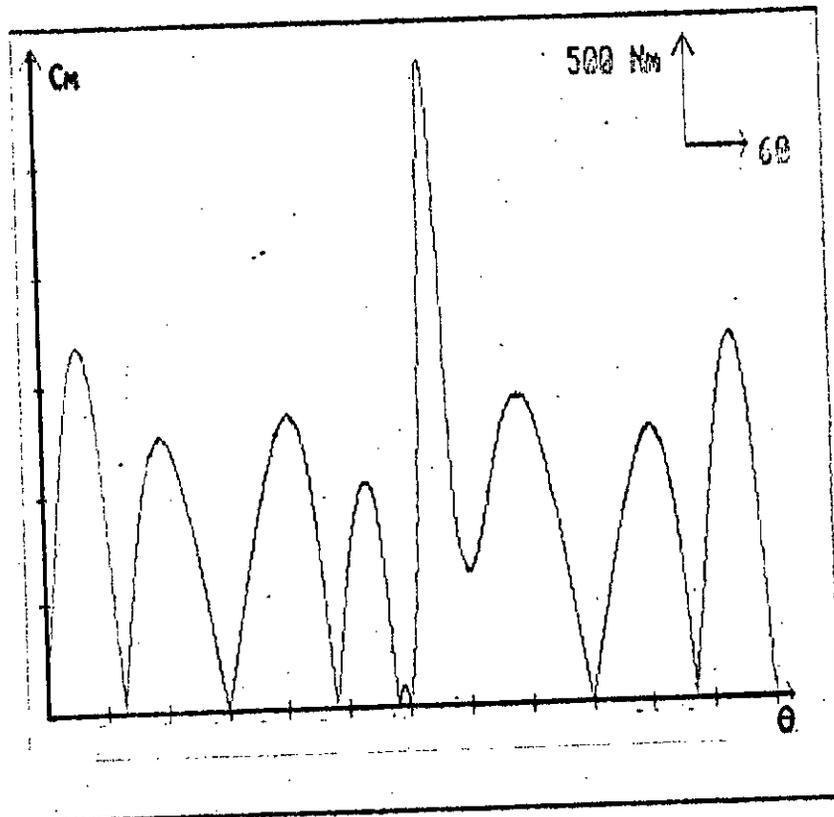


fig.1.2.12 COUPLE MOTEUR MONOCYLINDRIQUE  $C_m(\theta)$

Si nous avons un autre type de moteur il suffit donc de connaître l'ordre d'allumage et le déphasage (ou nombre de cylindres et de temps ) pour déduire les efforts sur le vilebrequin à partir de ceux calculer à partir du système bielle-manivelle correspondant.

#### 1.2.6 CONCLUSION

La méthode nous a permis de déterminer les efforts sur le vilebrequin à partir d'une étude cinématique et dynamique du système bielle-manivelle

Ces résultats peuvent ainsi être appliqués pour la simulation statique et dynamique du vilebrequin par la MEF.

La difficulté réside dans le faite que l'effort est fonction du temps , et est variable en intensité ,direction ,et point d'application .

---

L'étude des actions mécaniques dans les moteurs à combustion interne fait actuellement l'objet d'une étude détaillée (magister E.N.P) dirigé par Mr M. Boukabache ( Département mécanique - Laboratoire moteurs)

P R E S E N T A T I O N D E L A M E T H O D E  
D E S E L E M E N T S F I N I S

Pour le calcul des contraintes (statique et dynamique) dans un but de dimensionnement du vilebrequin nous utilisons la méthode des éléments finis - MEF -(numérique) vu les avantages qu'elle présente : -précision -formulation simple -domaine d'utilisation varié -et l'existence de logiciels adéquats (exemple : SAP4, SAP80, MEF MOZAIQUE ,MODULEF ,ADINA ,SYSTUS ,ABAQUS ,MSCPAL,...)

Dans cette section nous faisons une introduction à la méthode.

2.1.1 L'UTILISATION DE LA MEF [16]

La MEF est reconnue comme un outil de résolution d'équations aux dérivées partielles - EDP - , son domaine d'utilisation est assez vaste et concerne pratiquement tous les problèmes physiques régissent par des EDP . On cite à titre d'exemples :

Mécanique : dimensionnement précis des pièces mécaniques..

Hydraulique : problème d'écoulement , assainissement...

Civil : bâtiment , seismes , barrage , ...

Électrique : problèmes de champs électriques , magnétisme...

Aéronautique et aérospace : satellites , avions ...

La méthode peut être formulée à partir de considération énergétiques ou variationnelles. Elle consiste, pour un problème donné, à formuler les équations qui régissent ce phénomène, puis les transformer pour les adapter à la méthode. Cette adaptation est sujette à des erreurs dans la résolution qu'il faudrait minimiser.

On peut montrer la position de la méthode sur le schéma

formulation des équations { système physique discret - continu loi physique  
 équation aux dérivées partielles

TRANSFORMATION

approximation

MEF

résolution numérique { système d'équations algébriques résolution  
 solution approchée

schéma 2.1.1

position de la MEF

### 2.1.2 FORMULATION PAR LA MEF [10,25]

On distingue 3 types de formulations (approche ,version) principales par la MEF à savoir :

#### -a) VERSION DEPLACEMENT

Elle a pour principe la stationnarité de l'énergie potentielle  $\Pi$  de la structure ( elle atteint un minimum )

On a :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon)^T (\sigma) dv - \int_V (u)^T (fv) dv - \int_S (u^e)^T (f_e) ds \quad 2.1.1$$

ou  $(u)$  vecteur déplacement inconnu dont on propose une approximation (polynome ,trigonométrie ,... ) en posant  $d\Pi=0$  avec la loi de HOOKE :  $(\sigma) = [D] (\epsilon)$  on a alors

$$\int_V \delta(\epsilon)^T [D] (\epsilon) dv = \int_V \delta(u)^T (fv) dv - \int_S \delta(u^e)^T (f_e) ds \quad 2.1.2$$

La décritisation en éléments finis du domaine  $[v]$  et de son contour  $[s]$  ramène l'équation de stationnarité de  $\Pi$  au système

classique suivant :

$$[K](U) = (F)$$

2.1.3

où  $[K]$  est la matrice de rigidité

Dans ce cas ( version déplacement <sup>ⓐ</sup> )

- Les équations liants déformations aux déplacements et les conditions aux limites CL géométriques du déplacement sont satisfaites.

- Mais l'équilibre local et les CL naturelles de forces ne sont satisfaites qu'à la limite ( sur le contour  $[s]$  )

#### b -> VERSION CONTRAINTE

On utilise dans ce cas la stationnarité de l'énergie complémentaire  $\Pi^*$  ( elle atteint un maximum )

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_V (\sigma)^T (\epsilon) dv - \int_V (fv)^T (u) dv - \int_V (fa)^T (u_a) ds \quad 2.1.4$$

en posant  $\delta \Pi^* = 0$  on a avec  $(\epsilon) = [D](\sigma)$

$$\int_V \delta(\sigma)^T [D]^{-1} (\sigma) dv = \int_V \delta(fv)^T (u) dv - \int_V \delta(fa)^T (u) ds \quad 2.1.5$$

Dans ce cas on a :

- l'équation liant déformation - déplacement , la continuité des déplacements entre éléments , et les CL géométriques ne sont satisfaites qu'à la limite.

- l'équilibre local (continuité des contraintes) et les CL naturelles (forces) sont satisfaites.

#### c -> VERSION MIXTE

On ne tient plus compte des conditions qui doivent être satisfaites par l'une des versions déjà citée :

relation déformation-déplacement  $(\epsilon) = [B](u)$  et les CL géométriques  $(u)_{imp} = (u)_n$  sont relaxées .

---

ⓐ C'est la version la plus utilisée

Dans ce cas on utilise la formulation par l'énergie augmentée  
 $\Pi_1$  (multiplicateur de Lagrange -- annexe C --)

$$\Pi_1 = \Pi + \int_V [\lambda \varepsilon]^T \left[ (\varepsilon) - [B](u) \right] dv + \int_S [\lambda u]^T \left[ (u_n) - (u_{imp}) \right] ds \quad 2.1.6$$

ou  $(\lambda u)$  multiplicateur de Lagrange représentant  $(f_s)$   
 $(\lambda \varepsilon)$  multiplicateur de Lagrange représentant  $(\sigma)$   
 si on rend  $\Pi_1$  stationnaire on aura :

$$\begin{aligned} & \int_V \delta(\varepsilon)^T [D](\varepsilon) dv - \int_V \delta(u)^T (fv) dv - \int_S \delta(u_s)^T (f_s) ds + \\ & + \int_V \delta(\sigma)^T \left[ (\varepsilon) - [B](u) \right] dv + \int_V (\sigma)^T \left[ \delta(\varepsilon) - [B]\delta(u) \right] dv + \\ & + \int_V \delta(f_s)^T \left[ (u_n) - (u_{imp}) \right] ds + \int_S (f_s)^T \delta(u_n) ds = 0 \quad 2.1.7 \end{aligned}$$

Les inconnues de cette équation sont:  $(\sigma), (\varepsilon), (u), (u_B),$   
 $(u_{imp}), (fv), (f_s)$

Cette version trouve sa puissance dans la formulation des éléments dits "hybrides" utilisés dans la modélisation des structures en plaques et coques, ect...

### 2.1.3 DETERMINATION DE LA RIGIDITE ELEMENTAIRE [10,13,25,26]

Pour calculer la matrice de rigidité d'un élément donné, on suit les étapes suivantes (version déplacement).

#### a -) CONSTRUCTION DES FONCTIONS D'INTERPOLATIONS N

Dans la version déplacement, la manière de construire les fonctions d'interpolations (qui sont au fait une solution essai, particulière, de l'EDP) suit :

- Choix de la base polynomiale (interpolation non nodale du type polynomiale)

$$(u) = \langle P(x,y,z) \rangle (a) \quad 2.1.8$$

ou  $P(x,y,z)$  base polynomiale

- relation entre variables nodales  $(u)$  et variables généralisés  $(a)$

$$(u) = [A] (a) \quad \text{ou} \quad [A] = \langle P(x_i, y_i, z_i) \rangle \quad 2.1.9$$

si l'élément n'est pas dégénéré (volume nul) alors

$(a) = [A]^{-1}(u)$  numériquement on évite l'inversion de  $[A]$

l'approximation nodale sera alors

$$(u) = \langle P(x,y,z) \rangle [A]^{-1}(u_i)$$

$$(u) = [N(x,y,z)] (u_i) \quad 2.1.10$$

donc

$$[N] = \langle P \rangle [A]^{-1} \quad 2.1.11$$

Cette fonction d'interpolation doit vérifier les conditions :

$$1- N_j(x_i, y_i, z_i) = \delta_{ij}$$

$$2- \sum_{i=1}^n N_i(x,y,z) = 1 \quad (n \text{ nombre de noeuds}) \quad 2.1.12$$

$$3- \sum_{i=1}^n N_i(x,y,z) L(x_i, y_i, z_i) = L(x,y,z) \quad \begin{matrix} L: \text{polynome} \\ \text{quelconque} \end{matrix}$$

#### b -> RELATION DEFORMATION DEPLACEMENT

La déformation dans le cas tridimensionnelle, linéaire s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad 2.1.13$$

$\{\epsilon\} = [L] \{u\}$  ou  $[L]$  opérateur de dérivation  
 or avec 2.1.10 on peut écrire

$$\{\epsilon\} = [L] [N] \{u_i\}$$

$$\{\epsilon\} = [B(x,y,z)] \{u_i\} \quad 2.1.14$$

$$\text{alors } [B(x,y,z)] = [L] [N(x,y,z)] \quad 2.1.15$$

### c -> RELATION CONTRAINTE - DEFORMATION

Pour un matériau isotrope, homogène, on applique la loi de HOOKE généralisée (cas tridimensionnel)

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad 2.1.16$$

ou  $[D]$  est donc fonction du matériau seulement

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ & & & & 0.5-\nu & 0 \\ & & & & & 0.5-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}$$

2.1.17

Il existe des expressions plus simple dans le cas bidimensionnel (problème de contrainte plane ou déformation plane).

Ainsi à partir des relations 2.1.15 et 2.1.17 (connaissant l'expression de  $[B]$  et  $[D]$ ) on peut écrire l'expression de la matrice de rigidité élémentaire avec interpolation polynomiale :

$$[k_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad 2.1.18$$

- la matrice de rigidité  $[k]$  est symétrique à cause du théorème de réciprocité, qui est une conséquence de l'invariance de l'énergie de déformation par rapport au chemin suivi.

Néanmoins le calcul de cette intégrale peut s'avérer fastidieux, on fait généralement recours à l'intégration numérique (--annexe B --)

#### 2.1.4 DETERMINATION DU VECTEUR FORCE ELEMENTAIRE

Le vecteur force élémentaire se trouvant dans le second membre de EDP a pour expression :

$$(f_e) = \int_V [N]^T (f_v) dv + \int_S [N]^T (f_s) ds \quad 2.1.19$$

*force de volume + force de surface*

Dans le cas du vilebrequin ce vecteur force est déjà déterminé entièrement dans le chapitre 1.2 et son point d'application sera nécessairement un noeud de la structure ( circonférence du maneton ) , on n'utilisera donc l'équation 2.1.19 que si on considèrera l'effort comme étant un vecteur charge réparti (ceci on faisant intervenir le lubrifiant par exemple ).

#### 2.1.5 ASSEMBLAGE [10,13,16,26]

L'opération d'assemblage consiste à construire à partir des matrices élémentaires de rigidités [k] et de forces (f), les matrices globales de rigidité [K] et force [F]

Si nous reprenons l'expression de l'énergie (élémentaire) 2.1.1 avec l'expression intégrale de [k] et [f] 2.1.18 et 2.1.19 , soit :

$$\Pi_e = 1/2 (u)^T [k_e] (u) - (u)^T (f_e) \quad 2.1.20$$

L'énergie totale de la structure étant égale à la somme des énergies élémentaires :

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{e=1}^{nel} \Pi_e = \sum_{e=1}^{nel} 1/2 (u)^T [k_e] (u) - (u)^T (f_e) \\ &= 1/2 (U)^T [K] (U) - (U)^T (F) \end{aligned} \quad 2.1.21$$

où  $(U) = \sum_{e=1}^{nel} (U_e)$  vecteur déplacement total

$(F) = \sum_{e=1}^{nel} (f_e)$  vecteur force total (global)

$$[K] = \sum_{e=1}^{nel} [k_e] \quad \text{matrice rigidité assemblée (globale)}$$

ainsi l'équation exprimant la statique de la structure sera :

$$[K] (U) = (F) \quad 2.1.22$$

où  $(U)$  est l'inconnue qui sera calculée aux noeuds de la structure, et  $n$  est le nombre de degré de liberté total DDL de la structure.

### 2.1.6 PROPRIETE DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE [11,16]

La matrice de rigidité globale est construite donc à partir d'addition des matrices élémentaires en localisant la position (la place) des DDL dans cette dernière, de se fait un terme  $K_{ij}$  n'est nul que s'il existe un élément qui fait intervenir  $U_i$  et  $U_j$ , c'est pourquoi  $[K]$  présente un certain nombre de termes nuls qu'il faudrait "manipuler" avec soin quand l'ordre de  $[K]$  est important ( Chapitre 3 )

Donc en plus de son aspect creux ( plusieurs termes  $K_{ij}$  sont nuls ,selon le type de structure ,d'éléments et l'ordre établi dans la numérotation des noeuds ), elle est à termes diagonaux dominants , et reste symétrique ( si  $[k_e]$  l'est ).

### 2.1.7 CONDITIONS DE CONVERGENCE ET PRECISION DE LA MEF [13,15,16,25]

Etant donné que nous proposons dès le début de la formulation une approximation de l'inconnue déplacement (équ. 2.1.8) ,la MEF reste une méthode approximative.

Sa puissance est dans le fait qu'on a les moyens ( par la formulation et le maillage ) de réduire selon nos besoins l'erreur, et améliorer ainsi la précision

#### a -) L'ERREUR DANS LA MEF [15,25]

Pratiquement, l'erreur est donnée par le corollaire suivant :

$$\|e\| \leq c h^{k+1-m} \|u_{ex}\| \quad 2.1.23$$

où

$c$  : coefficient indépendant de l'élément  
 $h$  : taille de l'élément  
 $k$  : degré du polynome d'interpolation  
 $m$  : ordre de dérivées apparaissant dans  
l'expression des variables nodales  
( déplacement - rotation - gauchissement - ect... )

si  $m = 1$  problème de classe  $C^0$

exemple problème d'élasticité, conduction ...

si  $m = 2$  problème de classe  $C^1$

exemple flexion des plaques, coques...

#### b -> PRECISION

Pour améliorer la précision de la méthode ( équ. 2.1.23 )  
nous pouvons soit :

-Diminuer la taille de l'élément (  $h$  plus petit ), ce  
qui a pour conséquence l'augmentation du nombre  
d'éléments pour discrétiser la structure.

-Augmenter le degré du polynome d'interpolation par :

\* augmentation du nombre de noeuds de l'élément

( interpolation de LAGRANGE )

\* augmentation du nombre de variables nodales

pour chaque noeud en conservant le

nombre de noeud de l'élément

( interpolation d'HERMITE ) [31]

b1 -> Interpolation de Lagrange ( classe  $C^0$  )

L'interpolation est utilisée pour augmenter le nombre de noeud  
de l'élément, pour  $n$  noeuds on a un polynome de Lagrange  $\mathcal{L}$  de  
degré  $n-1$

pour un élément unidimensionnel, l'interpolation est de la  
forme :

$$N_i(r) = \mathcal{L}_i(r) = \prod_{j=1}^n \frac{r_j - r}{r_j - r_i} \quad (j \neq i) \quad 2.1.24$$

b2 -> Interpolation d'Hermite (classe  $C^1$ ) [31]

Dans ce cas on augmente le nombre de variables nodales ( $u$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2$ , ect....)

les points b1 et b2 seront repris en annexe A

c -> CONVERGENCE

problème de classe  $C^0$  ( $/C^1$ )  $m = 1$  ( $/m=2$ )

C1 - continuité du champ de déplacement et de sa 1<sup>ère</sup> ( $/ses$ ) dérivée ( $/s$ ) à l'intérieur de l'élément

C2 - continuité du champ de déplacement ( $/et$  de sa 1<sup>ère</sup> dérivée) à la frontière entre éléments

C3 - le champ de déplacement doit pouvoir présenter un état de déformation constant, de plus ce champs doit donner lieu à des déformations lors ce que ce dernier ne correspond pas à un mouvement de corps rigide.

Les éléments qui vérifient C1 et C2 sont dits conformes, mais ces 2 conditions ne sont pas nécessaires car il existe des éléments qui ne les respectent pas et qui convergent (même plus rapidement). Ces éléments là sont dits non conforme, et leur utilisation reste conditionnée par un "passage de tests"

la 3<sup>ème</sup> condition reste nécessaire (de point de vu numérique) elle exprime le fait qu'une déformation de l'élément, sous un chargement, ne peut subsister sans application de conditions aux limites. C'est le critère de complétude.

Par sa formulation, l'élément doit présenter une translation ou une rotation pure.

d -> DECELEMENT DE MOUVEMENT DE CORPS RIGIDE [10,11,13]

L'existence de DDL de déplacement rigide dans un système d'équations de rigidité de l'élément se traduit par une dépendance de certains de ces équations par rapport à d'autres , on dira dans ce cas que [k] est singulière <sup>©</sup> .

On détermine le nombre de singularité dans [k] en calculant les valeurs propres de celle-ci , le nombre de valeurs propres nulles sera égal au nombre de déplacements de corps rigides .

2.1.8 ELEMENT ISOPARAMETRIQUE [12,13,16,25,26]

Ce type d'élément permet de modéliser une forme complexe avec un nombre réduit d'éléments standards . Pour construire cet élément ,on définit une transformation bijective ,de l'élément adimensionnel (référence) à l'élément réel ,qui ne s'intéresse qu'à la géométrie.

Avec cette transformation (isoparamétrique) ,les noeuds de l'élément de référence correspondent aux noeuds de l'élément réel, et ils sont de même nombre. fig 2.1.1, on a :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathcal{F} \begin{Bmatrix} r \\ s \\ t \end{Bmatrix} \quad 2.1.25$$

cette transformation (géométrique) sera dans ce cas la même que la transformation (interpolation) nodale N ,ainsi

$$\begin{aligned} x(r,s,t) &= \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) x_i \\ y(r,s,t) &= \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) y_i \\ z(r,s,t) &= \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) z_i \end{aligned} \quad 2.1.26$$

---

© On doit donc introduire les conditions aux limites du problème avant la résolution, on évitera alors l'existence d'une singularité dans la matrice de rigidité globale [K].

de même

$$u(r,s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) u_i$$

$$v(r,s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) v_i \quad 2.1.27$$

$$w(r,s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) w_i$$

avec

$n$  : nombre de noeuds de l'élément

### a -> RIGIDITE DE L'ELEMENT ISOPARAMETRIQUE

Dans l'expression de  $[k]$  de l'élément réel nous avons besoin des matrices  $[B]$  et  $[D]$  et un calcul d'intégrale (équs. 2.1.15 - 2.1.17 - et 2.1.18). Nous remarquons que :

$$[B] = [B(x,y,z)] = [L] [N(x,y,z)] \quad (2.1.17)$$

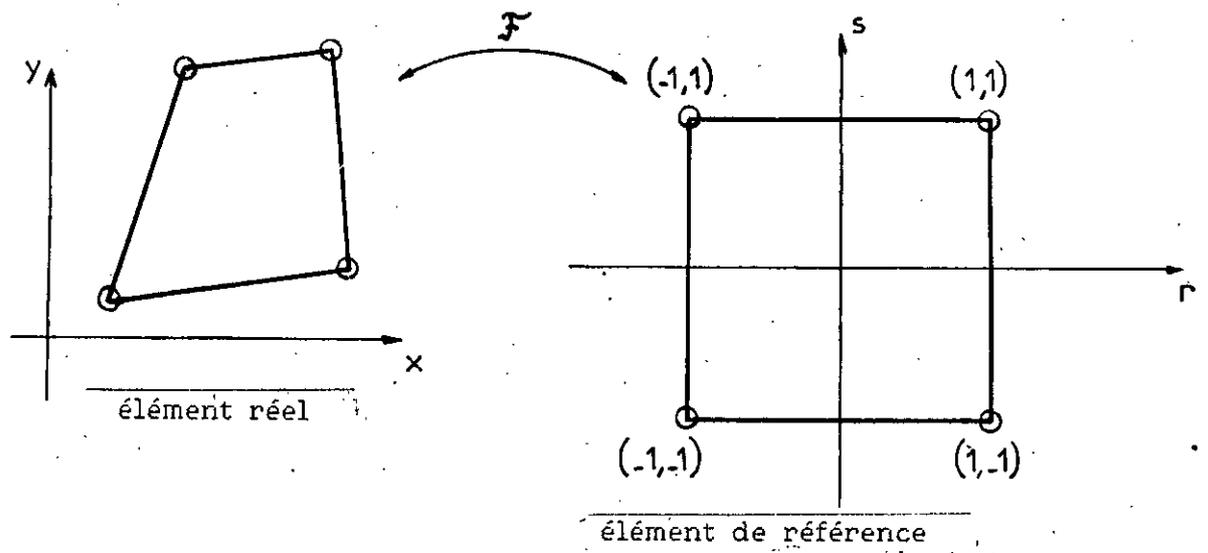
Or dans le cas de l'élément isoparamétrique  $[N] = [N(r,s,t)]$  donc  $[B]$  sera une fonction de  $(r,s,t)$  ainsi il est nécessaire de procéder à un changement de variables dans  $[B]$

on peut écrire alors :

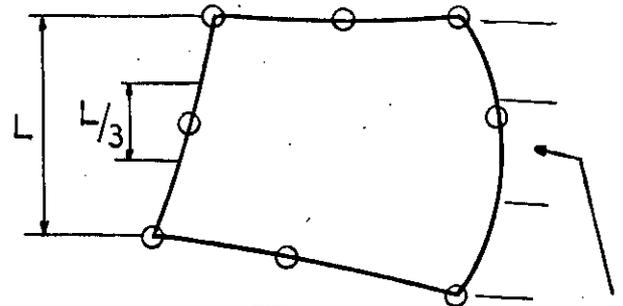
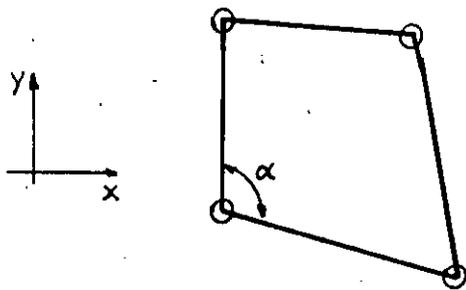
$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial r \\ \partial/\partial s \\ \partial/\partial t \end{array} \right\} &= \left[ \begin{array}{ccc} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r & \partial z/\partial r \\ \partial x/\partial s & \partial y/\partial s & \partial z/\partial s \\ \partial x/\partial t & \partial y/\partial t & \partial z/\partial t \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{array} \right\} \\ &= \quad [J] \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{array} \right\} \quad 2.1.28 \end{aligned}$$

ou  $[J]$  est le Jacobien

Le changement de variables qu'on a effectué permet de passer de l'intégration (de la rigidité) sur l'élément réel à une intégration plus simple sur l'élément de référence



TRANSFORMATION ISOPARAMETRIQUE



position acceptable pour le noeud intermediaire

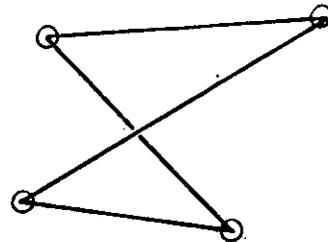
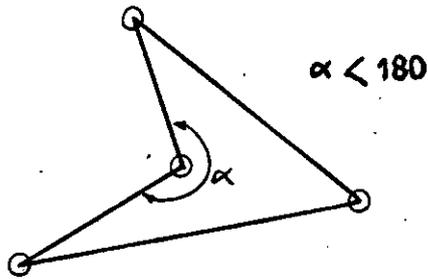


fig.2.1.2.

CONDITION DE MAILLAGE 2D [13]

cela reste conditionner par le faite que la transformation soit bijective (unique et réciproque) pour cela il faut que :

$$\det | \mathcal{J} | > 0 \quad 2.1.29$$

En règle pratique, ZIENKEWICZ [13] propose des conditions pour le maillage en éléments 2D linéaires et quadratiques: fig 2.1.2 page précédente, en plus il faut que le volume (surface) de l'élément soit positif. Pour le cas 3D nous utilisons une règle propre à notre cas (chap 2.3)

Dans ce cas : (isoparamétrique)

La matrice de rigidité élémentaire [k] a pour expression :

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(r,s,t)]^T [D] [B(r,s,t)] \det | \mathcal{J} | dr ds dt$$

2.1.30

le vecteur force élémentaire

$$\begin{aligned} (f) = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(r,s,t)]^T (fv) \det | \mathcal{J} | dr ds dt + \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_e(r,s)]^T (f_e) \det | \mathcal{J} | dr ds \end{aligned} \quad 2.1.31$$

pour effectuer ces intégrales on utilise l'intégration numérique - annexe B -

### 2.1.9 RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES (STATIQUE)

[11,13,16,17]

Nous entamons maintenant une étape importante dans la MEF c'est la résolution (statique, linéaire) du système :  $[K] (U) = (F)$  permettant ainsi de déterminer les déplacements aux noeuds de la structure à étudier et par conséquent les déformations et les contraintes (statiques) permettant un choix optimal de dimensionnement de la structure .

La résolution est une opération (numérique) coûteuse surtout pour des systèmes de taille importante. Il est dans ce cas indispensable d'adapter les méthodes numériques de résolution de tels systèmes ( c'est l'objet du prochain chapitre ) pour réduire au maximum le temps de calcul sans pour autant "toucher" à la précision des résultats numériques.

Au préalable, avant la résolution il faut que la matrice  $[K]$  soit bien conditionner ( définie positive ) par l'introduction des conditions au limites CL (exemple en annexe C.2 ). L'ordre de  $[K]$  est égale alors au nombre total de degré de liberté DDL .

### 2.1.9.1 CLASSIFICATION DES METHODES DE RESOLUTION

Les méthodes de résolution des systèmes lineaires sont classées en deux catégories :

#### a -> Méthodes directes

Elles conduisent à la solution après un nombre d'opérations connu donc un temps de calcul bien déterminé - exemple :

#### ELIMINATION DE GAUSS

Elle se formule en deux étapes :

**TRIANGULARIATION** : Le système d'équations  $[K](U)=(F)$  sera transformé pour aboutir à un autre système de type  $[S](U)=(F')$  avec la matrice  $[S]$  triangulaire supérieure .

La triangularisation consiste à éliminer successivement les inconnues  $U_s$  ( $s= 1, \dots, n$ ) dans les  $s+1$  à  $n$  équations , ceci en exprimant  $U_s$  en fonction de  $U_{s+1} \dots U_n$  et  $F_s$  en utilisant l'équation  $s$  , puis reporter l'expression de  $U_s$  trouvée dans les  $s+1$  à  $n$  équations restantes , ainsi  $U_s$  n'apparaîtra plus dans ces équations, et on aura donc des zéros dans la colonne  $s$  sous la diagonale .

Les pivots successifs de  $[K]$  transformée ne risque pas d'être nuls si  $[K]$  est bien conditionnée (il existe des techniques pour éviter ce type de problème)

**RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE SUPERIEURE** : La résolution se fait en remontant : à partir de la dernière équation donnant  $U_n$  on calcul alors  $U_{n-1} \dots U_1$  .

Cette méthode peut se présenter sous divers formes (chap 3)

b -) Méthodes indirectes ( itératives )

Elles ont des algorithmes plus simples et demandent moins d'espace en mémoire ,mais il est pratiquement impossible de déterminer le nombre d'opérations nécessaire pour obtenir une précision donnée , exemple :

GAUSS - SEIDEL

A partir d'un vecteur solution de départ et un critère de convergence ,la résolution se fait par itérations successives dans  $[K] \{U\} = \{F\}$

La convergence dépend du choix du vecteur de départ et du conditionnement de  $[K]$  .En plus pour accélérer la convergence il existe des techniques adaptées (relaxation) :

La méthode s'adapte bien dans les problèmes de réanalyse et d'optimisation .

Dans le cadre de notre étude on utilisera des méthodes de résolutions directes qui sont basées sur la méthode d'élimination de GAUSS .

---

Nous arrêterons ici l'introduction de la MEF qui été nécessaire pour aborder l'analyse du vilebrequin par cette méthode .On pourra donc se référer alors à cette introduction à la méthode dans les chapitres suivants

P R E S E N T A T I O N   D U   L O G I C I E L  
A B A Q U S -

Pour modéliser le vilebrequin F4L912 ,il fallait utiliser un logiciel permettant de faire le maillage et la résolution de système de taille assez importante ,en premier lieu nous avons penser au logiciel MODULEF installé à l'USTHB (Alger) et nous avons commencé alors par une initialisation et familiarisation au logiciel ,mais on nous a pas permis de faire des résolutions vu le temps machine nécessaire à cela .Par cotre on pouvait faire le maillage seulement .(ce qui été insuffisant)

Heureusement une opportunité s'est présentée pour l'utilisation du logiciel d'éléments finis: -ABAQUS version 4.5 - [27] implanté au département de structures à l'ENSAM (Paris) sous la direction du Pr H.Gachon, le logiciel est conçu par Hibbitt, Karlson & Sorensen Inc ( USA )

### 2.2.1 PROBLEMES TRAITES PAR ABAQUS

ABAQUS peut traiter divers types de problèmes ,on peut citer à titre d'exemples les problèmes :

- linéaires et non-linéaires
- grandes déformations et grands déplacements
- élastiques,plastiques, hyperélastiques, viscélastiques
- tridimensionnels, coques ,poutres ,mécanique des sols  
écoulements en milieu poreux ,frottement ,glissement  
et contacts
- statiques ,dynamiques et thermiques

### 2.2.2 STRUCTURE ET ENVIRONNEMENT D'ABAQUS

Le logiciel est implanté sur IBM 9375 avec VMBATCH qui permet de placer les programmes exécutables par ABAQUS en queue.

Avant de lancer une exécution ,nous avons intérêt de commencer

par exécuter le pré-processeur afin de vérifier les données du maillage. Malheureusement ABAQUS ne possède pas un mailleur automatique ni une liaison avec un logiciel de CAO.

ABAQUS et son environnement sont schématisés en *schéma 2.2.1*

### 2.2.3 GENERALITES SUR ABAQUS

Comme c'est le cas pour chaque logiciel, il faut entrer toutes les données nécessaires pour la définition de la structure à étudier (géométrie, chargement, matériau, etc...)

#### a -> L'entrée de données

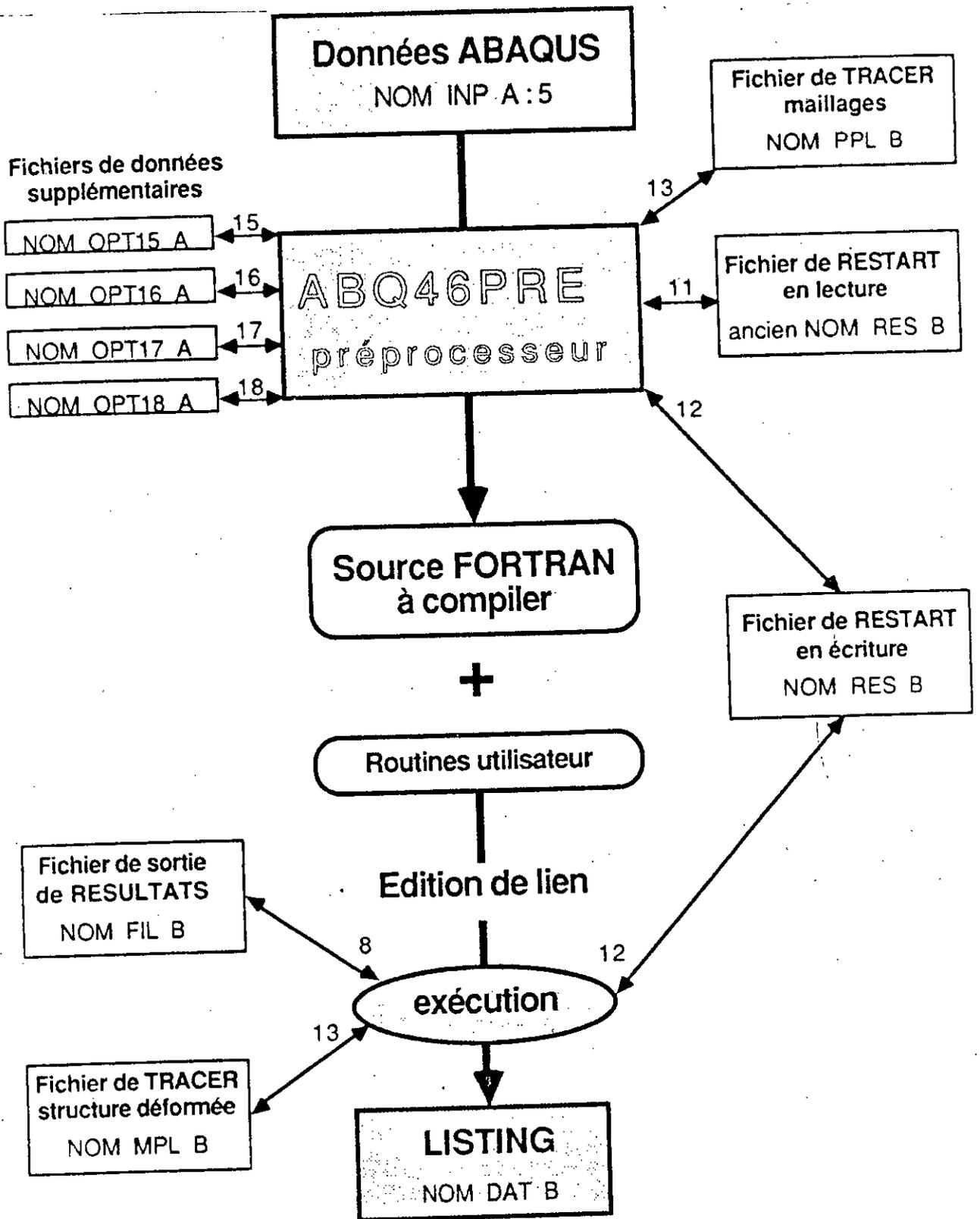
L'introduction de données dans ABAQUS se fait par des fichiers .INP définis par des \* directives (noeuds, éléments, chargements, type de problème à traité ...)

La directive est définie par son mot-clé précédé par une " \* ", ces données sont introduites en format libre, si elle ne dépasse pas cinq (5) caractères sinon, il faudrait les introduire en format imposé.

#### b -> Bibliothèque des éléments

ABAQUS propose à l'utilisateur plus de 100 éléments permettant de traiter divers types de problèmes, en plus des éléments définis par l'utilisateur, on peut citer comme éléments de la bibliothèque :

- éléments poutres (B) : avec 10 formes de sections différentes (rectangulaire, trapézoïdale, anneau, forme I arbitraire, ...), l'élément peut être défini dans le plan, ou dans l'espace.
- éléments coques (S) : éléments axisymétriques, dans l'espace
- éléments continus (C) : ces éléments peuvent être unidimensionnels, tridimensionnels, et tridimensionnels axisymétriques
- Autres : éléments à diffusion thermique, à déformation ou contrainte plane, et pour milieux poreux, avec intégration réduite, de couplage température déplacement avec formulation hybride



sch.2.2.1

STRUCTURE ET ENVIRONNEMENT D'ABAQUS

- élément utilisateur : défini par l'utilisateur en donnant la manière de calculer la rigidité et la masse. Ces éléments sont à interpolation linéaire, quadratique, ils sont définis par la directive \*ELEMENT en donnant le type et les n° des noeuds dans un ordre bien établi.

#### c -> Définition des noeuds

Les noeuds sont introduits à l'aide de \*NODE et (ou) \*NGEN. Puisque ABAQUS ne possède pas de mailleur automatique, il est donc nécessaire de définir "l'ensemble" des noeuds de la structure en leur attribuant des numéros, et leurs coordonnées dans un repère (local, global, cartésien, cylindrique, sphérique) avant de définir les éléments.

Une directive qui fait défaut dans la version 4.6 d'ABAQUS est \*NCOPY qui permet de faire des copies d'un ensemble \*NSET de noeuds par transformation géométrique (translation ou rotation).

#### d -> Les matériaux

Le matériau est introduit par \*MATERIAL et en donnant le type de celui-ci : élastique, plastique, friction, conductivité, incompressible, matériau utilisateur etc...

#### e -> Introduction des conditions aux limites et chargement

Les CL sont introduites par \*BOUNDARY en donnant le n° ou le nom des noeuds concernés avec le type de la condition (appui simple, encastrement, rotule). On peut aussi définir des conditions initiales.

On définit le type de chargement : ponctuelle par \*CLOAD, répartis par \*DLOAD et thermique \*TEMPERATURE.

Un pas de charge peut être défini en spécifiant la nature du problème : statique, dynamique, visco, réponse spectrale, couplage température - déplacement, transfert de chaleur, mécanique des sols, flambage, réponse aléatoire.

#### f -> Reprise

Dans un calcul par MEF, on procède généralement en plusieurs

étapes pour analyser ,réanalyser et contrôler l'évolution des calculs , ceci peut se faire grâce à \*RESTART

g -> Les liaisons cinématiques ( annexe C )

C'est l'un des nombreux avantages que présente ABAQUS ,ces liaisons sont définis de 2 manières : soit par la directive

- \*EQUATION permet à l'utilisateur de définir des liaisons cinématiques entre les DDL des noeuds de la structure . Cette liaison (équation) sera prise en compte dans la détermination de la rigidité par une des techniques citées en annexe C
- \*MPC (multi-point constraint) a pour but la définition des conditions cinématiques assurant la continuité du champ de déplacement lors d'assemblage d'éléments d'interpolation différentes ,ou dans le cas de raffinement du maillage ou de couplage. ABAQUS propose 7 types d'MPC ,en plus d'MPC utilisateur.

Dans notre étude on a utilisé \*MPC2 et \*MPC4

#### 2.2.4 MAILLAGE PAR ABAQUS

L'élaboration d'un maillage par ABAQUS se fait par la création d'un fichier nom .INP.A donnant toutes les informations de la structure sous forme de \*directives (cette entrée de donnée se fait manuellement ) . La vérification du maillage se fait par l'exécution du pré-processeur et les résultats peuvent être tirés sur listing par le fichier nom .DAT.B, ou sous forme graphique.

Le fichier .INP.A dans le cas de notre étude comportera les directives suivantes :

- \*HEADING : définissant une en-tête pour le fichier résultat et le graphisme.
- \*NODE et \*NGEN : pour définir et générer les noeuds par n° et coordonnées dans le repère cartésien et cylindrique

\*ELEMENT et \*ELGEN : pour définir à partir des noeuds les éléments en spécifiant leurs types.

\*MPC : à été utiliser pour le raffinement du maillage par l'écriture de ce type d'équation (type 2 et 4)

\*MATERIAL : le matériau du vilebrequin est de l'acier  
\*ELASTIQUE

\*SOLIDE SECTION

\*PLOT et \*DRAW avec \*VIEWPOINT : permettant de dessiner le maillage de la structure considérée selon un angle choisi.

Les directives (ci dessus) sont nécessaires pour définir le maillage non déformé de la structure

\*STEP , \*BOUNDARY , \*END STEP : permet de placer les conditions aux limites (pour la formation des super éléments  
*chap. 3*)

Dans la prochaine section nous utiliserons cette forme de fichier INP pour le maillage des éléments constituant le vilebrequin donc la première étape par laquelle nous commencerons le maillage après avoir assimiler la manière de procéder sera l'introduction de données du vilebrequin , qui peut prendre un temps considérable vu la complexité de notre structure .

- LE MAILLAGE DU VILEBREQUIN  
PAR ABAQUS -

Le maillage est la première et la plus importante étape dans l'utilisation de la MEF . Elle consiste à discrétiser un domaine (structure) en sous domaine (éléments) ,ces derniers doivent vérifier les conditions d'utilisation de la MEF chap 2.1, ce qui permettra alors de mettre sous forme de modèle mathématique le vilebrequin à étudier .

### 2.3.1 MANIERE DE PROCEDER

Comme on l'a présenté au chap.1.1 et pour bénéficier de la géométrie particulière du vilebrequin ,nous allons procéder au maillage des constituants principaux formant le vilebrequin pour déterminer leurs rigidités ,ce qui permettra d'en deduire celle du vilebrequin par assemblage.

Nous avons dans notre cas (trois) 3 principaux types de constituants : Bras , Tourillon , Maneton .

Nous ajouterons (maillerons) ,pour des raisons qu'on citera plus tard ,la zone de liaison (disques de jonction) bras-tourillon et bras-maneton indépendamment des constituants cités. Nous avons donc à mailler 5 types de constituants pour définir celui du vilebrequin ,c'est une manière de réduire le temps de travail sur le maillage par rapport à celui qu'il faudrait pour un maillage en bloc du vilebrequin .

### 2.3.2 CHOIX DU TYPE D'ELEMENT

Le vilebrequin est une structure 3D (dimensions) ,le premier élément que nous pensons utiliser sera bien sur : l'élément solide 3D qui ne présente pas de problèmes dans sa formulation , il est très bien conditionné ,et a la possibilité de bien présenter les différents types de déformations dans le

vilebrequin (traction-compression , flexion , torsion , et cisaillement ) par les déplacements 3D de ses noeuds. Néanmoins, il admet un inconvénient : sa chéreté de point de vu numérique. (vu la taille de sa matrice de rigidité élémentaire )

Nous avons voulu réduire une dimension ,en utilisant des éléments moins chers <sup>©</sup>. (exemple 2D axisymétrique), malheureusement et malgré les différentes symétries que présente la structure, ce type d'élément ne peut être utilisé vu qu'on a un chargement quelconque .

En s'inspirant des articles des Japonais [1,2] , nous modéliserons par des éléments solides continus 3D ,et nous compenserons leurs chéretés en profitant au maximum de la géométrie.

Le vilebrequin est constitué principalement en forme de révolution (circulaire) ,c'est pourquoi nous choisirons les 2 types d'éléments solides à interpolation quadratique (pour approcher les formes) de la bibliothèque d'ABAQUS : le C3D20 et le C3D15 (au niveau du centre)

#### a -> L'élément C3D20 (fig 2.3.1.b)

C'est un parallélépipède (brique) 20 noeuds, 3 noeuds par coté (interpolation quadratique) ,et 3 DDL par noeud, donc sa matrice de rigidité élémentaire est de l'ordre de 60-60 . L'élément est pris isoparamétrique (fig 2.3.1.a) ,ce qui nécessite un calcul du déterminant (  $\det |J|$  ) dans l'expression de la matrice de rigidité élémentaire [k] ( chap.2.1), qui doit être nécessairement positif. Ceci a pour conséquences des contraintes dans la géométrie de l'élément réel. Techniquement avec ABAQUS il faut que :

- Le rapport des dimensions des cotés du parallélépipède soit inférieur au 1/5
- L'angle formé par deux faces adjacentes soit entre 45° et 135°

---

© une étude en élément poutre à été mener pour le maillage de ce même vilebrequin [4]

Si une des conditions n'est pas respectée nous aurons des messages d'erreurs dans le fichier résultats DAT

La fonction d'interpolation de cet élément est du second ordre, elle est identique pour les 3 déplacements u,v,w .

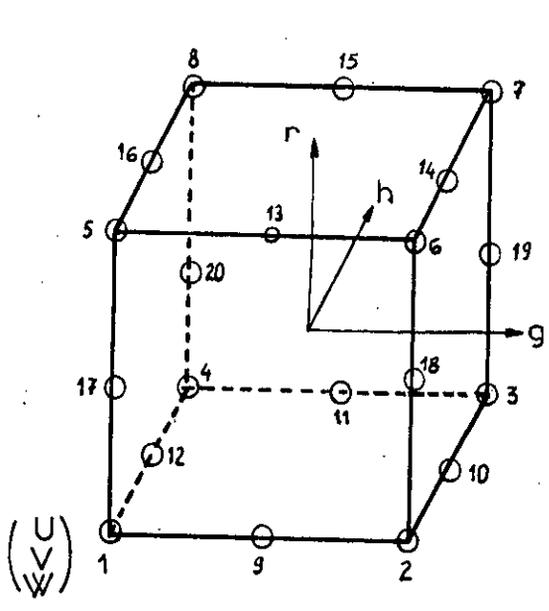
On a donc pour u :

$$\begin{aligned}
 u = & - 1/8 (1-g) (1-h) (1-r) (2+g+h+r) & U_1 - \\
 & - 1/8 (1+g) (1-h) (1-r) (2-g+h+r) & U_2 - \\
 & - 1/8 (1+g) (1+h) (1-r) (2-g-h+r) & U_3 - \\
 & - 1/8 (1-g) (1+h) (1-r) (2+g-h+r) & U_4 - \\
 & - 1/8 (1-g) (1-h) (1+r) (2+g+h-r) & U_5 - \\
 & - 1/8 (1+g) (1-h) (1+r) (2-g+h-r) & U_6 - \\
 & - 1/8 (1+g) (1+h) (1+r) (2-g-h-r) & U_7 - \\
 & - 1/8 (1-g) (1+h) (1+r) (2+g-h-r) & U_8 - \\
 + & 1/4 (1-g) (1+g) (1-h) (1-r) & U_9 + \\
 & + 1/4 (1-h) (1+h) (1+g) (1-r) & U_{10} + \text{équ. 2.3.1} \\
 & + 1/4 (1-g) (1+g) (1+h) (1-r) & U_{11} + \\
 & + 1/4 (1-h) (1+h) (1-g) (1-r) & U_{12} + \\
 & + 1/4 (1-g) (1+g) (1-h) (1+r) & U_{13} + \\
 & + 1/4 (1-h) (1+h) (1+g) (1+r) & U_{14} + \\
 & + 1/4 (1-g) (1+g) (1+h) (1+r) & U_{15} + \\
 & + 1/4 (1-h) (1+h) (1-g) (1+r) & U_{16} + \\
 + & 1/4 (1-r) (1+r) (1-g) (1-h) & U_{17} + \\
 & + 1/4 (1-r) (1+r) (1+g) (1-h) & U_{18} + \\
 & + 1/4 (1-r) (1+r) (1+g) (1+h) & U_{19} + \\
 & + 1/4 (1-r) (1+r) (1-g) (1+h) & U_{20}
 \end{aligned}$$

#### b -> L'élément C3D15 (fig 2.3.2.b)

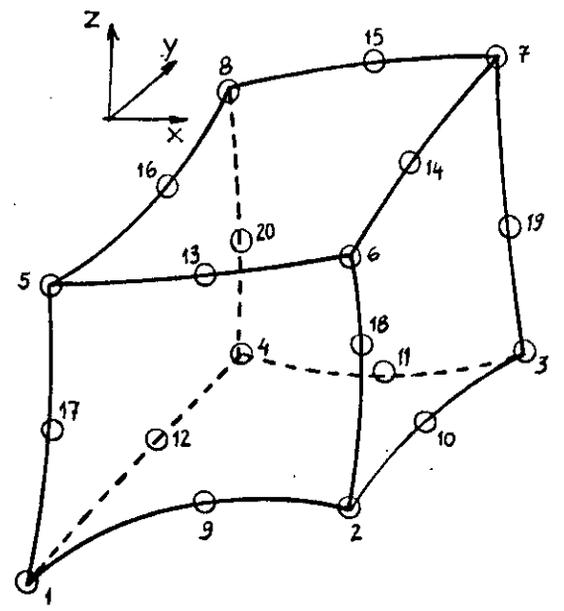
C'est une pyramide à base rectangulaire ,dans certains cas l'élément C3D20 peut être dégénéré en C3D15 ,il est pris isoparamétrique (fig 2.3.2.a), et sera essentiellement utiliser pour le maillage à l'intérieur des formes de révolution et de la zone du raccord (disque de jonction).

Sa matrice de rigidité élémentaire est de l'ordre de 45-45 est sa fonction d'interpolation (quadratique) peut être déduite de celle du C3D20 ,ou par la méthode directe.



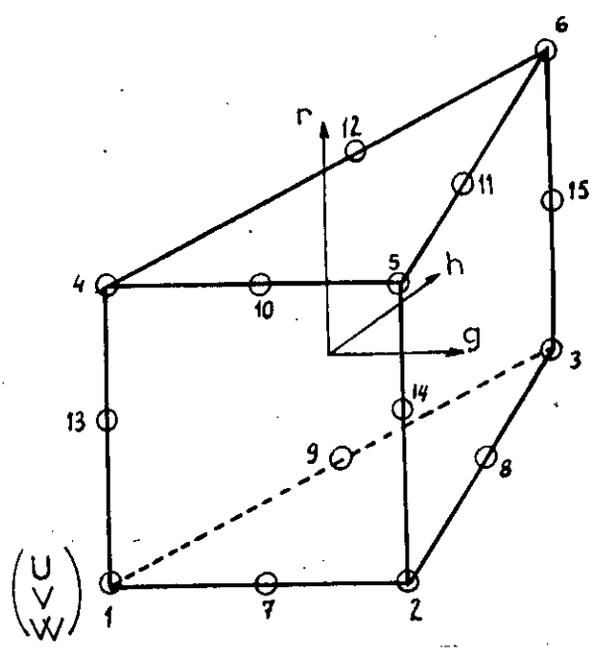
C3D20

référence



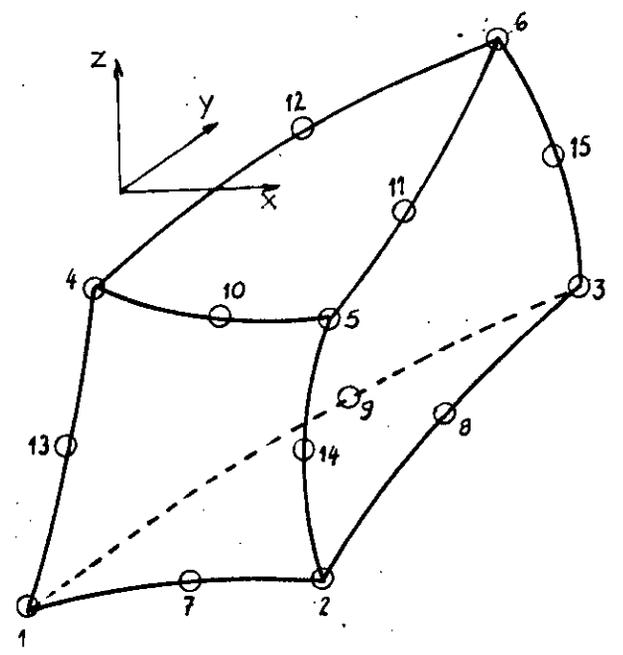
réel

fig 2.3.1



C3D15

référence



réel

fig 2.3.2

### 2.3.3 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

En premier lieu le maillage (grossier) nous faisons les simplifications suivantes :

- on ne tient pas compte à ce stade du maillage des trous de graissage ,de plus il faut savoir que la position de ses trous est optimisée (de point de vu contraintes) par la détermination des efforts dans un repère polaire a partir de ceux calculés dans le repère cartésien au chap 1
- on a modifié la géométrie des bras pour avoir la même forme standard, ceci étant possible car les bras ne sont pas des zones de concentration de contraintes.

Et toujours à ce stade du maillage nous avons jugé justifiable de simplifier un DDL (prendre  $U = 0$ ) sur l'ensemble du vilebrequin ou du moins au niveau des tourillons . Mais vu le temps qui nous a été alloué sur ABAQUS ,il nous a pas été donc possible de commencer par le " commencement " .

### 2.3.4 MAILLAGE DES CONSTITUANTS DU VILEBREQUIN

Nous avons à mailler des formes de révolutions ,pour chaque constituant on sera ramené donc à faire plusieurs essais de maillage dont on choisira le meilleur .

Le maillage se fera selon les deux plans :

- maillage selon  $(x,z)$  défini par la lettre  $\mathcal{X}$  :  
est simplement un empilement de même forme (sauf pour le cas du bras) , nous avons ainsi
  - 1 seul empilement pour le 1/2 tourillon --  $\mathcal{X} = 0-1000$
  - 1 seul empilement pour le disque de jonction  
--  $\mathcal{X} = 1000-2000$  et  $\mathcal{X} = 6000-7000$
  - 2 ou 4 empilements différents pour le bras -- $\mathcal{X}=2000-6000$
  - 2 empilements identiques pour le maneton --  $\mathcal{X} = 7000-9000$
- maillage selon  $(x,y)$  qui est assez difficile (plusieurs solutions seront proposées) et nous sommes contraints ,une fois le maillage des constituants fait, de les assembler pour former le vilebrequin . Ceci n'est possible que si on

a des noeuds communs sur les faces de liaison entre deux constituants successifs ,donc il faut reprendre les même noeuds (ou du moins leurs positions) dans la face commune dans le maillage du constituant suivant .

#### 2.3.4.1 Maillage du maneton et tourillon

Notre premier souci est de trouver un compromis entre le nombre de DDL total ,donc le nombre d'éléments et la capacité de ses éléments à présenter la forme du constituant.

Au niveau de la périphérie du tourillon et du maneton nous avons l'application des forces extérieures (l'effort dû aux gaz, et les réactions d'appuis) c'est pourquoi les éléments se trouvant à la périphérie sont plus petits pour pouvoir présenter le champ de contraintes dû au contact .

Parmi les possibilités du maillage sur le plan (x,y) nous retiendrons particulièrement :

a -) Un maillage de type (a) avec 24 éléments fig 2.3.3.a

Le maillage se fait selon 3 niveaux (rayons) et 8 secteurs égaux :

- le niveau 1 : intérieur avec  $r_1$  assez grand, rempli avec 8 éléments C3D15
- le niveau 2 : intermédiaire de rayon  $r_2$  ,rempli avec 8 éléments C3D20
- le niveau 3 : extérieur de rayon  $r_3$  ,rempli avec 8 éléments

on a  $(r_3 - r_2) < (r_2 - r_1) < r_1$  2.3.2

Cette relation permet une bonne présentation du champ de contraintes qui s'atténuent vers l'intérieur du maneton et du tourillon .

- Inconvénient du maillage de type (a)

Les éléments du 3<sup>ème</sup> niveau sont peut nombreux pour pouvoir présenter la périphérie ,et on risque d'avoir un rapport de coté supérieur à (1/5) ce qui engendre un message d'erreurs .

b -> *Maillage du type (b) avec 36 éléments* fig 2.3.3.b

Dans ce cas, on augmente le nombre de secteurs à 12 , nous avons ainsi :

- le niveau 1 rempli avec 12 éléments C3D15
- le niveau 2 et 3 remplis par 12 éléments C3D20 chacun
- Inconvéniant du maillage de type (b)  
C'est vrai que les éléments du niveau 3 sont plus nombreux et qu'on évite ainsi l'inconvéniant du maillage du type (a) ,mais ceci provoque une augmentation sans intérêt d'éléments au niveau intérieur et par conséquent une augmentation du nombre total d'éléments.

c -> *Maillage de type (c) avec 20 éléments* fig 2.3.3.c

Ici, nous "mélangeons" au niveau intermédiaire les éléments C3D15 et C3D20 , nous avons ainsi :

- le niveau 1 rempli avec 4 éléments C3D15 seulement
- le niveau 2 rempli avec une succession de 8 éléments : C3D15 et C3D20
- le niveau 3 rempli avec 8 éléments C3D20
- Inconvéniant du maillage du type (c)  
Comme avantage , nous avons réduit considérablement le nombre total d'éléments avec un inconvéniant au niveau extérieur , de plus le "mélange" des C3D15 et C3D20 au même niveau est à déconseiller .

**EN CONCLUSION** : ces trois essais de maillage des formes circulaires (tourillon - maneton) nous a permis de localiser les difficultés d'un tel maillage et aboutir au maillage final .

d -> *Maillage du tourillon et maneton par ABAQUS*

On garde dans ce cas les 3 niveaux en respectant la relation 2.3.2 , et on partage les deux niveaux 2 et 3 en 12 secteurs égaux par des éléments C3D20, par contre vu la non nécessité de précision dans le niveau intérieur , ce dernier est rempli avec 6 éléments C3D15, en plus  $r_1$  est pris assez grand , ce qui donne un total de 30 éléments.

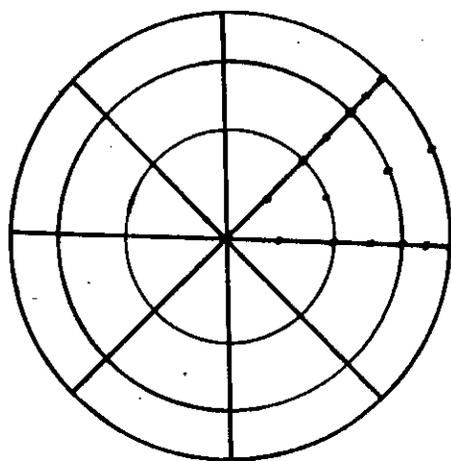


fig 2.3.3.a  
 Maillage en 24 éléments  
 du tourillon - maneton

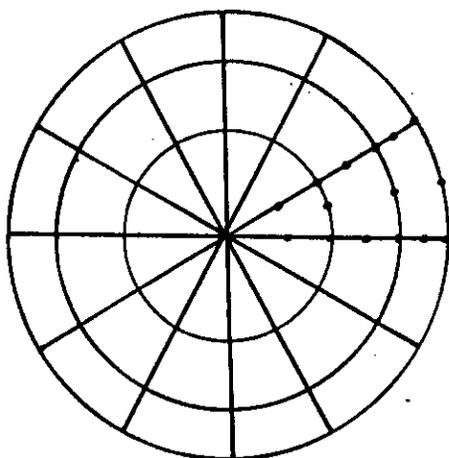


fig 2.3.3.b  
 Maillage en 36 éléments  
 du tourillon - maneton

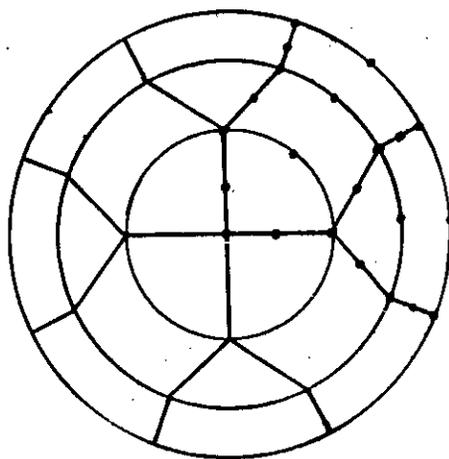


fig 2.3.3.c  
 Maillage en 20 éléments  
 du tourillon - maneton

Cette façon de mailler nous oblige, à l'endroit du raccord entre le niveau interieur et l'intermédiaire ,d'assembler sur la base de la pyramide d'un élément C3D15 deux éléments C3D20, donc les noeuds 1,2,3,4,5 (fig 2.3.4 a) qui appartiennent aux éléments C3D20 du niveau 2 n'appartiennent pas à l'élément C3D15, ce qui a pour conséquence une discontinuité dans l'interpolation et un problème de recouvrement ou de décollement peut exister. (fig 2.3.4.b)

Cet handicap est résolu par l'introduction de liaisons MPC (multi point constraint) [ 15,20,21 ] - annexe C - et chap 2.2

Dans notre cas on a du définir deux types d'MPC : fig 2.3.4.a

- MPC de type 2 pour les noeuds positionner en 1 ,2 ,3 ,4
- MPC de type 4 pour le noeud positionner en 5

Lors de la définition des MPC par ABAQUS nous avons suivi le "mode d'emploi" étant donné qu'ABAQUS est une boîte noir pour l'utilisateur ,ce qui nous a poussé à chercher la manière d'écrire ses équations et de les introduire dans le calcul de la rigidité , c'est ce qui a été fait en annexe C .

#### RESULTATS :

##### LE TOURILLON $\kappa = 0-1000$

- Le maillage dans le plan (x,y) fig 2.3.5.a
- Le maillage dans le plan (x,z) fig 2.3.5.b

Nous avons donc 30 éléments , 258 noeuds et l'écriture de 30 équations MPC

##### LE MANETON $\kappa = 7000-9000$

- Le maillage dans le plan (x,y) fig 2.3.5.a  
il est semblable à celui du tourillon à la différence près des dimmensions
- Le maillage dans le plan (x,z) fig 2.3.6.b  
avec un double empilement

Nous avons donc 60 éléments , 407 noeuds et l'écriture de 48 équations MPC

o

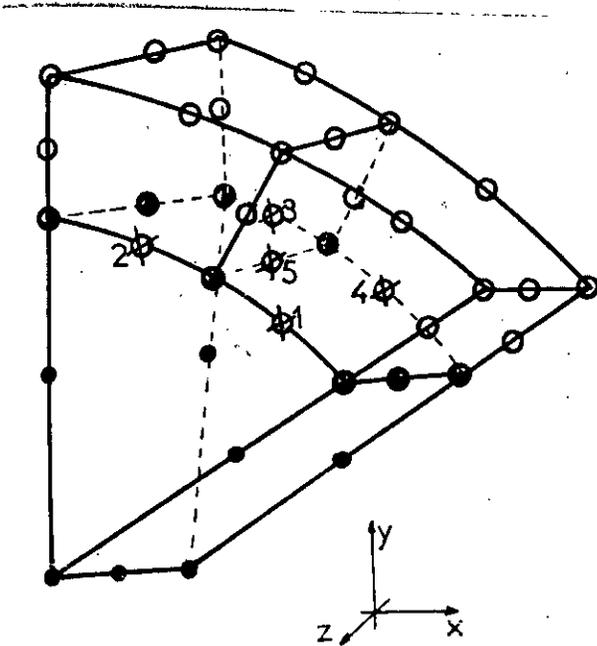


fig 2.3.4.a  
 Assemblage MPC  
 ● noeud de C3D15  
 ○ noeud de C3D20  
 ⊗ noeud lié par MPC

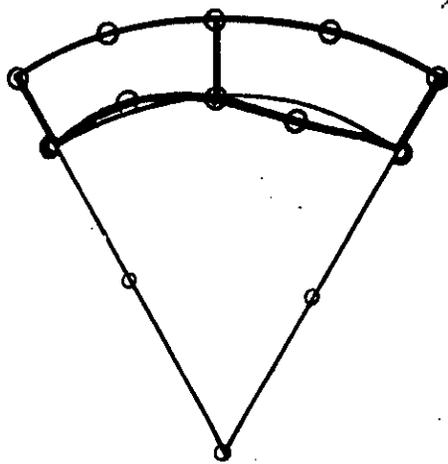
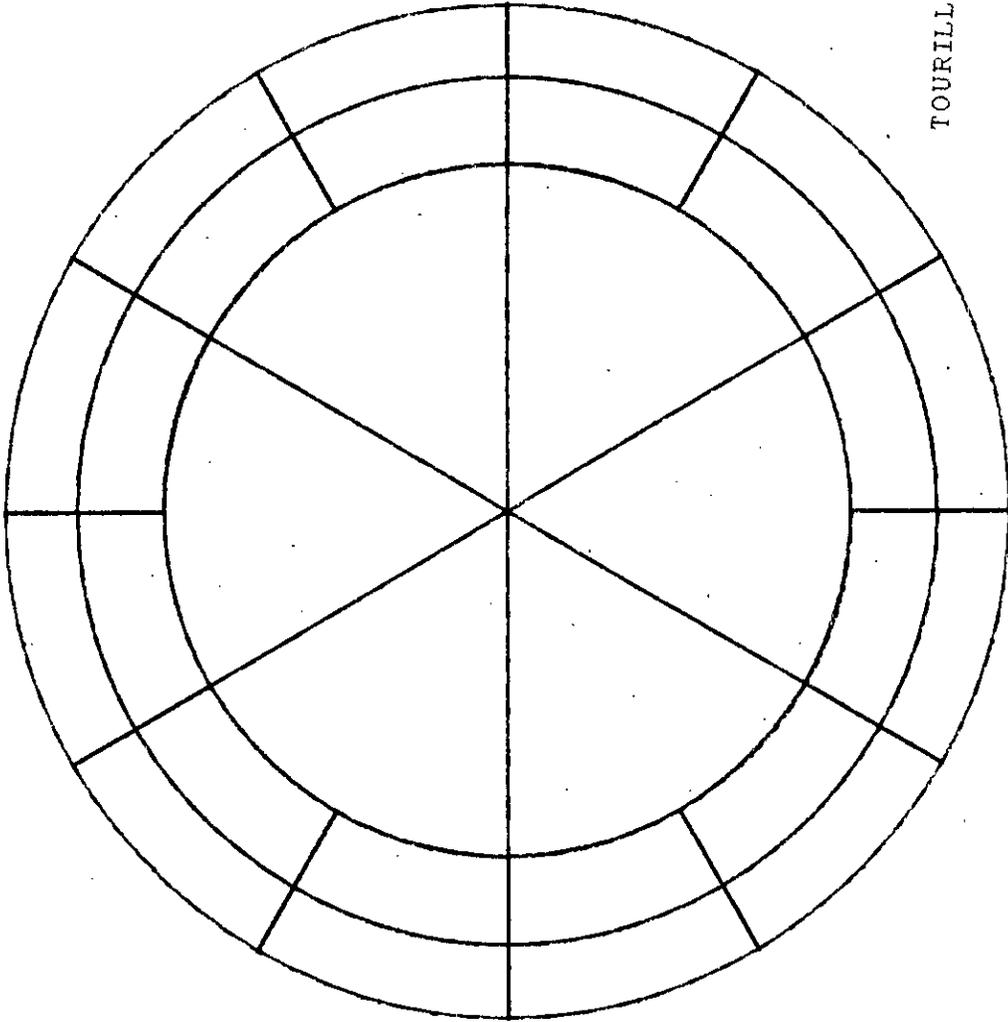


fig 2.3.4.b  
 Problème de  
 décollement ou recouvrement



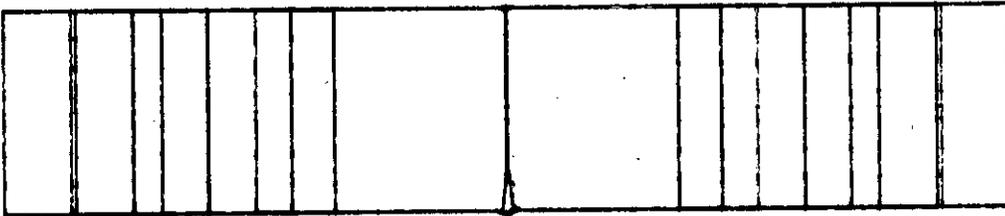
TOURILLON MANETON \'



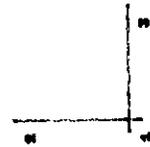
1ER DISQUE AXE LARGE 0 - 1000  
 ANGLES VERSION 4-4-148 DATE 04/08/00 TIME 10:00:22

fig.2.3.5.a

MAILLAGE TOURILLON MANETON (x,z)



TOURILLON



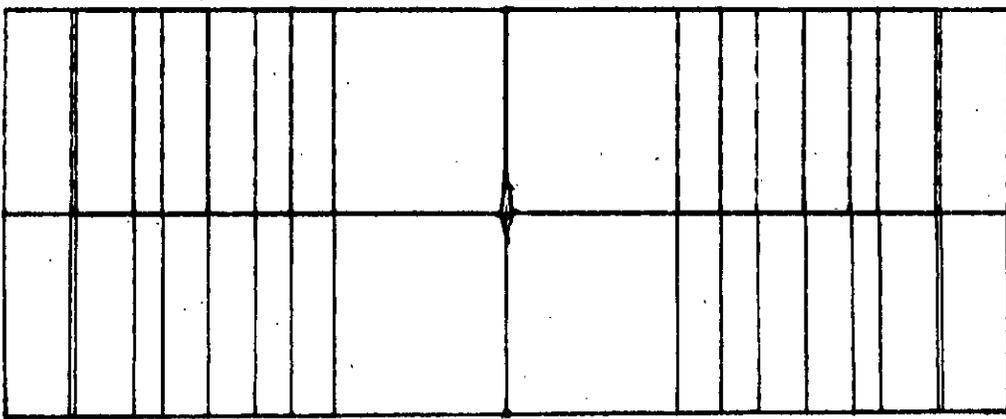
1ER DISQUE AXE LARGE

PROGRAM VERSION 4-8-88 DATE: 05/08/88 TIME: 10:20:22

fig.2.3.5.b

MAILLAGE TOURILLON (x,z)

MANETON



DISQUE AXE LARGE

PROJETS VERSION 4-6-88 DATEL 21/03/88 TDRS 18.03.88



fig.2.3.6.b

MAILLAGE MANETON (x,z)

#### 2.3.4.2 Maillage des disques de jonctions

L'idée de mailler indépendamment cette zone vient du fait que celle est lieu de concentration de contraintes [1,2], ce qui nous permettra alors après une première analyse d'isoler ces disques et de les réanalyser après avoir déterminé avec exactitude la zone dans le disque sous les différents efforts.

Pour le maillage, on reprendra principalement pour le disque de jonction tourillon-bras le maillage du tourillon et pour l'autre disque celui du maneton.

Pour représenter le raccord, on ajoute au dessus du niveau 3 (du tourillon ou maneton) un 4<sup>ème</sup> niveau rempli avec 12 éléments C3D15. Cependant cet ajout d'éléments C3D15 a donné un message d'erreurs malgré le soin pris dans l'entrée de données pour ces éléments, pour s'en sortir nous les avons remplacés par des C3D20 dégénérés en C3D15 ceci en faisant correspondre 2 cotés opposés.

Les 2 disques ont la même forme, ils diffèrent seulement par l'inclinaison des éléments du 4<sup>ème</sup> niveau, en plus de la différence dans les dimensions.

RESULTAT :  $\kappa = 1000-2000$  et  $\kappa = 6000-7000$

selon le plan (x,y) pour  $\kappa = 2000$  ou  $\kappa = 6000$  fig 2.3.7.a

selon le plan (x,z) fig 2.3.7.b

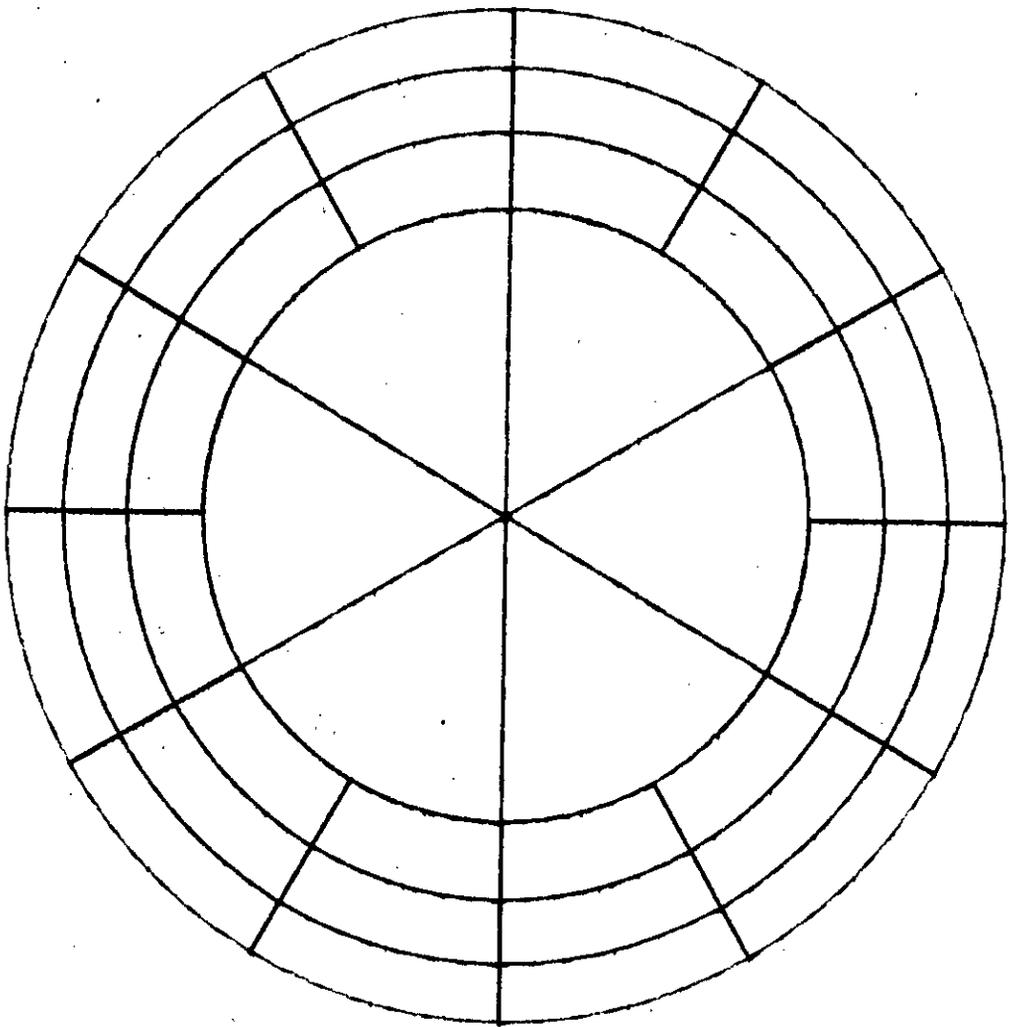
Nous avons un total de 42 éléments, 309 noeuds, l'écriture de 30 équations MPC

#### 2.3.4.3 Maillage du bras

C'est le constituant qui nous a donné le plus de mal, vu sa forme complexe d'un côté et les contraintes dans le maillage qui nous obligent, pour pouvoir assembler après, de reprendre le maillage des faces  $\kappa = 2000$  et  $\kappa = 6000$  des disques de jonctions.

De plus, il est préférable, pour une meilleure présentation du champ de contraintes dans le vilebrequin, d'avoir la continuité dans le maillage du bras selon le plan (x,z), comme cela a été fait pour les disques et tourillon - maneton fig 2.3.8

DISQUE  
DE  
JONCTION



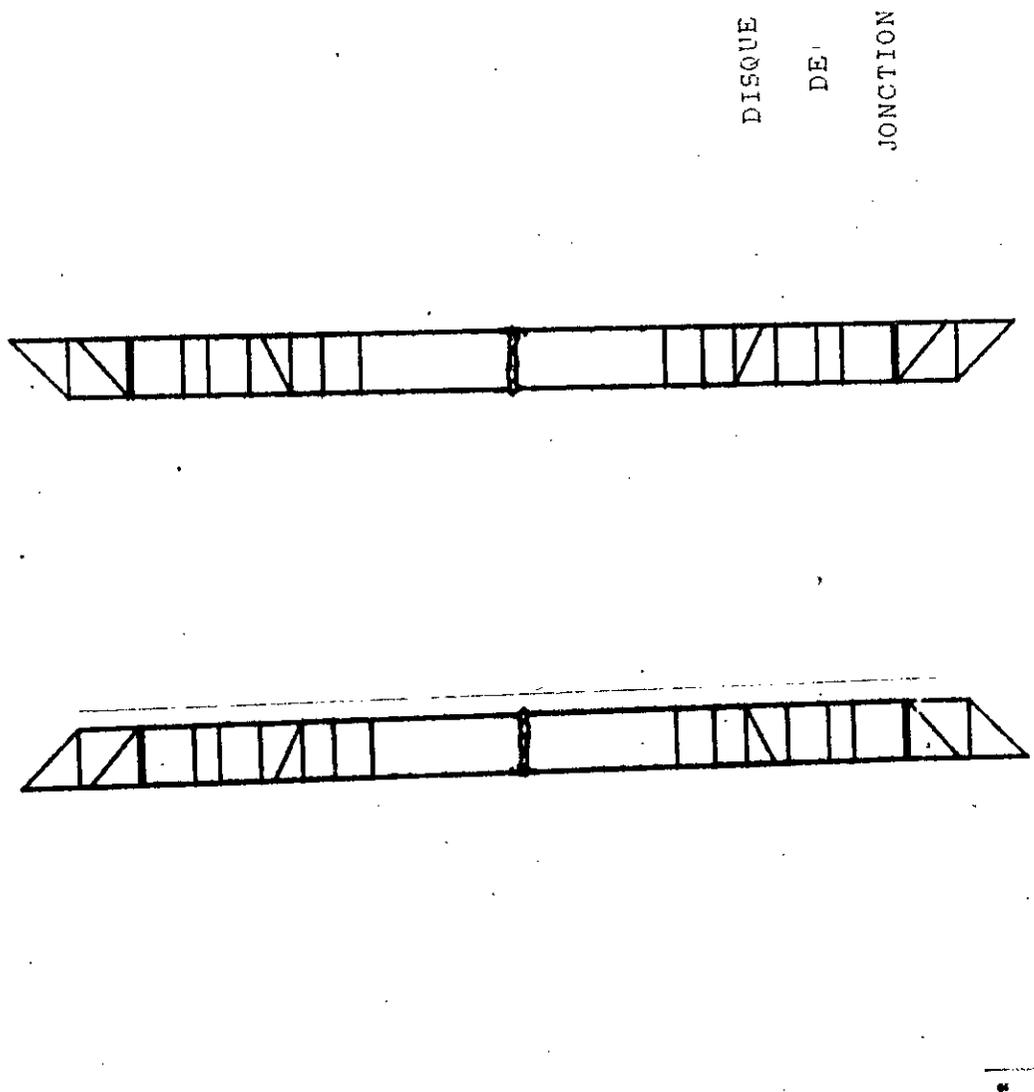
2ND DISQUE AXE MINCE

REVISED VERSION 4-9-74S DATED 04-28-75 7306 104 014 07



fig.2.3.7.e

MAILLAGE DISQUE DE JONCTION (x,y)



DISQUE  
DE  
JONCTION

1ER, 2ND DISQUE AXE MINCE

ARABUS VERSION 4-0-100 DATE 05/00/98 TDEG 101 021 87

fig.2.3.7.b

MAILLAGE DISQUE DE JONCTION (x,z)

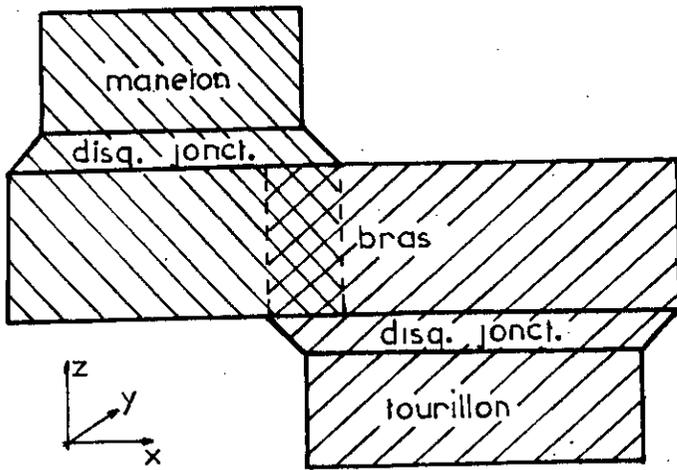


fig 2.3.8  
Continuite du maillage  
pour le bras

- zone de continuite du maillage pour le maneton
- zone de continuite du maillage pour le tourillon
- zone commune de maillage

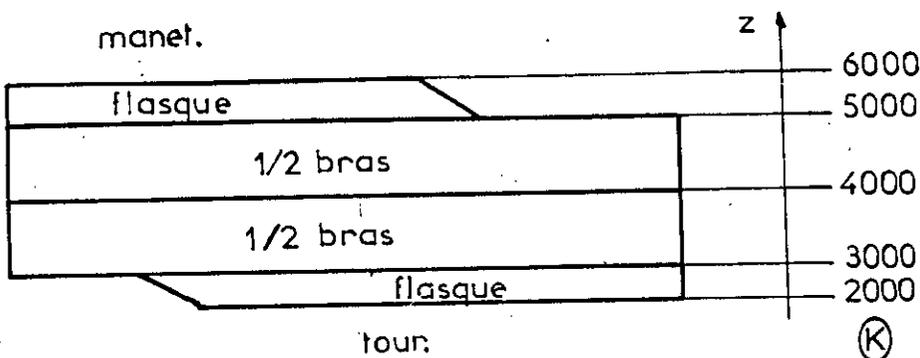


fig 3.3.9  
1er partage du Bras selon z

Le bras n'est pas sujet à de forte concentration de contraintes comme c'était le cas des disques .

a -) 1<sup>er</sup> essai : empilement de 4 niveaux selon le plan (x,y)

Nous avons voulu dans cet essai reprendre le plus fidelement la forme initiale du bras , ainsi il a été divisé en 4 parties fig 2.3.9 page précédente :

- flasque mince  $\kappa = 2000-3000$  en liaison avec le disque de jonction du coté du tourillon
- 1/2 bras  $\kappa = 3000-4000$
- 1/2 bras  $\kappa = 4000-5000$  qui n'est pas identique au précédent
- flasque mince  $\kappa = 5000-6000$  en liaison avec le disque de jonction du coté du maneton

a1 -) maillage du flasque  $\kappa = 2000-3000$  et  $\kappa = 5000-6000$

Dans un souci de diminuer le nombre de DDL total, nous avons divisé le flasque en :

- niveau 1 qui regroupe toujours les 6 éléments centraux C3D15
- niveau 2 qui dans ce cas regroupe l'ancien niveau 2 du disque , mais avec seulement 6 éléments C3D20 au lieu de 12 et on utilisera si nécessaire des liaisons MPC pour l'assemblage avec le disque de jonction
- niveau 3 est une continuité des niveaux 3 et 4 du disque ,rempli avec 12 éléments C3D20 ,avec la possibilité d'écrire des MPC
- et enfin le niveau 4 représentant l'inclinaison au niveau du flasque avec 4 éléments C3D15

Le maillage du flasque s'est fait sans difficulté ,il est semblable pour les 2 flasques (la différence est dans l'orientation de l'inclinaison et les dimensions)

$$\mathcal{X} = 2000-3000 \quad \text{et} \quad \mathcal{X} = 5000-6000$$

selon le plan (x,y), face  $\mathcal{X} = 3000$ , le 1<sup>er</sup> flasque    fig 2.3.10.a  
 selon le plan (x,y), face  $\mathcal{X} = 6000$ , le 2<sup>nd</sup> flasque    fig 2.3.10.b  
 selon le plan (x,z) . le 1<sup>er</sup> flasque    fig 2.3.10.c  
 et dans l'espace (sans vue cachée) le 1<sup>er</sup> flasque    fig 2.3.10.d

a2 -> maillage du 1/2 bras     $\mathcal{X} = 3000-4000$  et     $\mathcal{X} = 4000-5000$

Pour le maillage du 1/2 bras, nous avons d'un coté  $\mathcal{X} = 3000$  le maillage imposé du flasque et sur le coté  $\mathcal{X} = 4000$  la liaison commune avec le 2<sup>nd</sup> 1/2 bras et la nécessité de garder la continuité du maillage dans l'ensemble du vilebrequin. C'est là ou réside la difficulté vu qu'on a pas le choix.

On a remarqué, dans un souci de continuité du champ de contraintes, qu'on peut partager le maillage ( $\mathcal{X} = 3000-5000$ ) selon le plan (x,y) en 3 zones : fig 2.3.11.a et b

- la partie (1) du bas qui "reprendra" le maillage de la zone inférieure du 1<sup>er</sup> flasque
- la partie (2) du haut qui reprendra le maillage de la zone supérieure du 2<sup>nd</sup> flasque
- la partie (3), ou zone d'interaction dans le maillage que l'on maillera par un empilement à 2 niveaux, selon z dans un but de jonction commune en  $\mathcal{X} = 4000$

#### REMARQUE A :

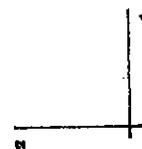
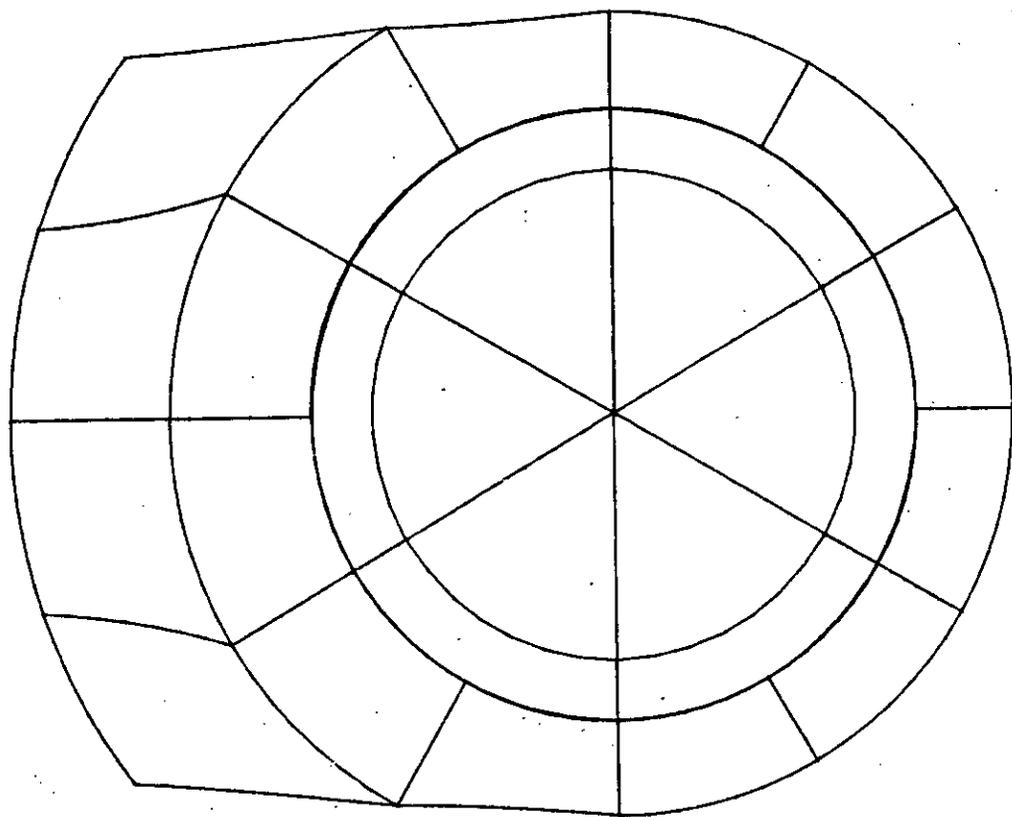
Cette zone d'interaction est difficile à mailler vu les dimensions du tourillon et maneton par rapport à la course du piston qui sont de sorte que :

$$C < D_r + D_m \quad 2.3.2$$

ou

C : course du piston (entraxe du bras)

$D_r$  et  $D_m$  : diametre du tourillon et maneton  
 (réspectivement)



FLASQUE MINCE COTE TOURILLON (BAS) ... 2000 - 3000.

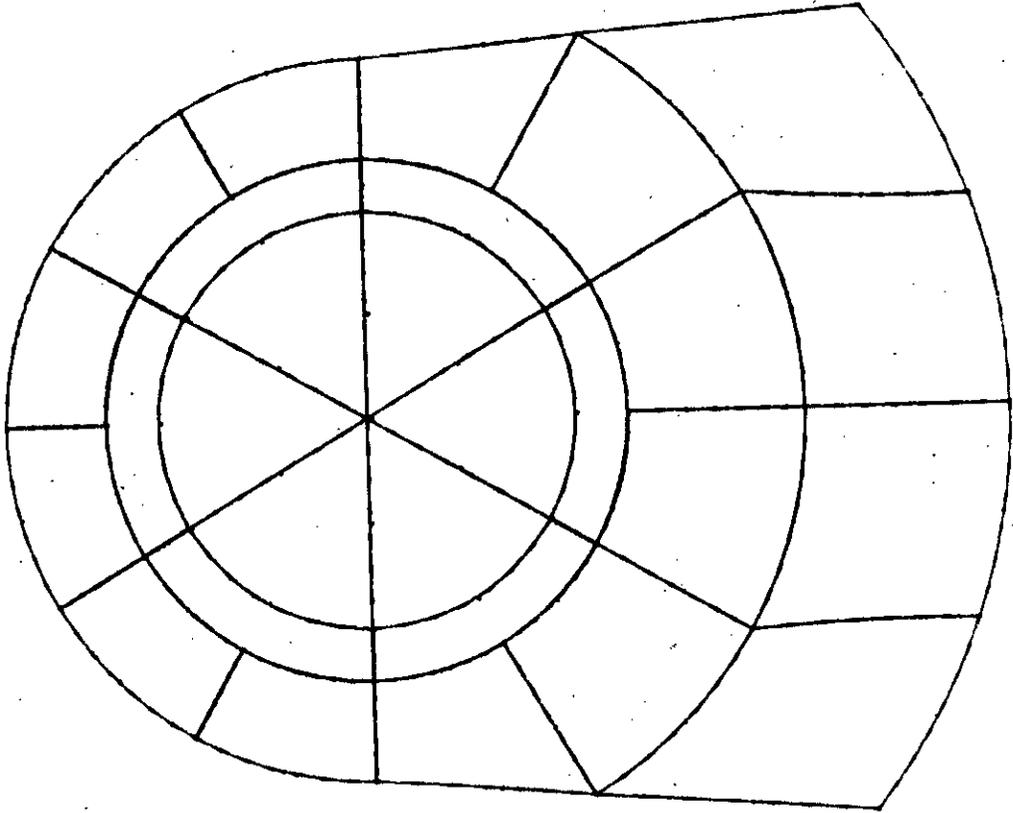
ABRABUS VERSION 4-8-88 DATE: 88-12-88 TIME: 08:57:00

fig.2.3.10.a

1er FLASQUE (x,y) face 3000



FLASQUE |



FLASQUE MINCE COTE MANETON ..... 5000 - 6000.....  
REVISED VERSION 4-6-1988 DATE: 08/10/88 TIME: 01:28:12

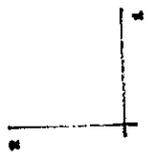
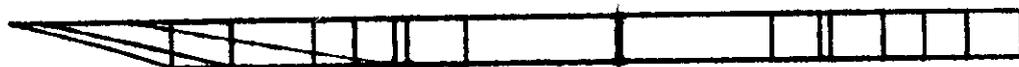
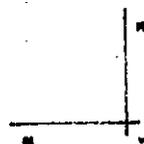


fig.2.3.10.b

2nd FLASQUE (x,y) face 6000



FLASQUE

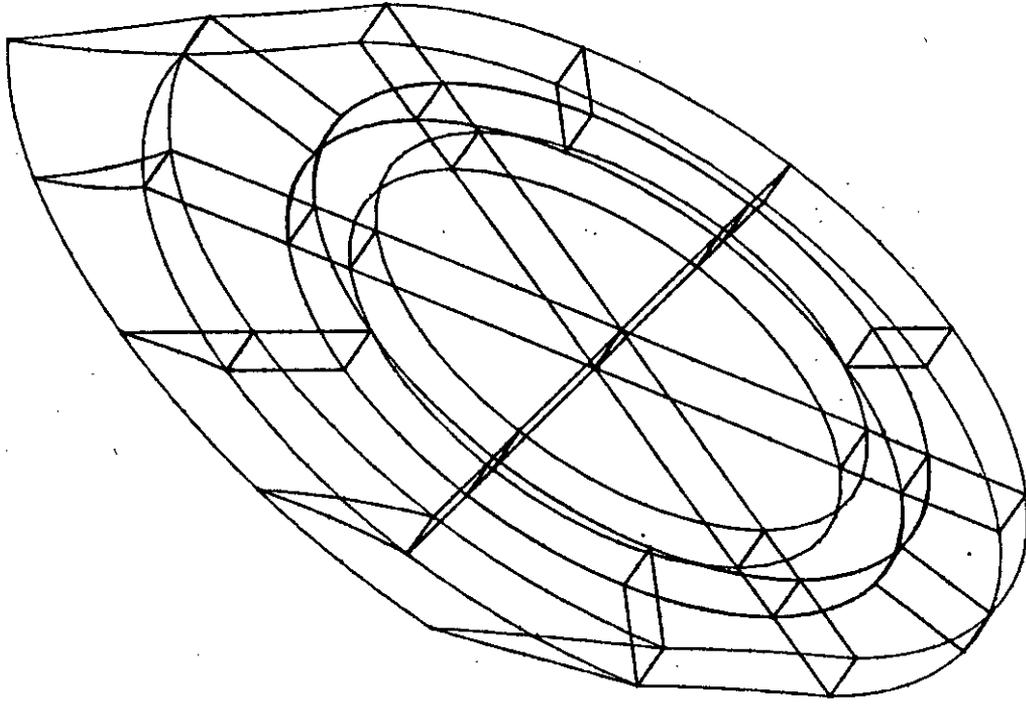


FLASQUE MINCE COTE TOURILLON (BAS) ... 2000 - 3000.

FLASQUE VERSION 4-8-88 DATE 08/11/88 TDM 00:07:00

fig.2.3.10.c

1er FLASQUE (x, z)



FLASQUE

FLASQUE MINCE COTE TOURILLON (BAS) ... 2000 - 3000.

ABSQUIS VERSION 4-6-88 DATE: 06/18/88 TIME: 08:57:00

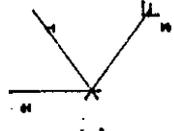


fig.2.3.10.d

1er FLASQUE dans l'espace

Avec cet constat nous avons pu mailler avec une certaine difficulté (un certain nombre d'essais) le 1/2 bras  $\mathcal{X} = 3000-4000$ , mais on a pas pu mailler le demi bras restant à cause de la forme de certains éléments "hachurés" sur la fig 2.3.11.b

pour le demi bras on a : selon le plan (x,y)

pour le premier demi bras  $\mathcal{X} = 4000$  fig 2.3.11.a

pour le second demi bras  $\mathcal{X} = 5000$  fig 2.3.11.b

sur ces 2 figures apparait des dédoublements de traits ,ceci est dû à la non utilisation des liaisons MPC , en plus on a dû abandonner cette solution à cause des messages d'erreurs pour le second demi-bras ,et du fait de la brusque interruption dans le maillage des parties (1) et (2) avec la partie d'interaction de la partie (3)

b -> 2<sup>ème</sup> Essai : Bras avec un empilement de 2 niveaux  
sans flasques

La prise en compte des flasques par l'ajout du 4<sup>o</sup> niveau dans le maillage des flasques, pour tenir compte de l'inclinaison dans la forme du bras, a compliqué ,sans interet, le maillage du bras vu qu'il ne présente pas de concentration de contraintes.

C'est pourquoi on essayera de mailler le bras par un empilement de 2 demi-bras  $\mathcal{X} = 2000-4000$  et  $\mathcal{X} = 4000-6000$  avec une face commune .

On garde dans la mesure du possible ( en respectant la remarque A ) le maillage du tourillon et du maneton et on s'intéressera particulièrement à la zone d'interaction ,qui sera mailler principalement avec des éléments C3D15

Nous présentons le maillage du demi-bras  $\mathcal{X} = 2000-4000$

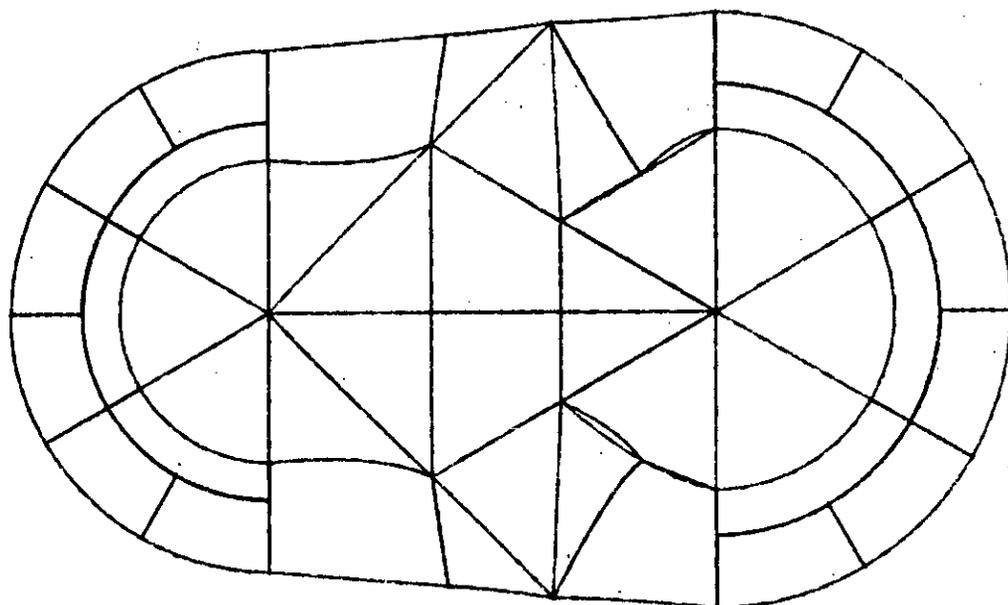
selon le plan (x,y)  $\mathcal{X} = 4000$  fig 2.3.12.a

dans l'espace en face  $\mathcal{X} = 2000$  fig 2.3.12.b

dans l'espace en face  $\mathcal{X} = 4000$  fig 2.3.12.c

Le maillage du demi-bras n'a pas présenté de difficulté mais a dû être abandonner à cause de la discontinuité du maillage entre les zones (interaction), malgré que la solution de cet essai est fonctionnel .

Nous ne présentons pas alors le maillage du demi-bras restant.



BRAS

partie 2 \*

partie 3

\* partie 1

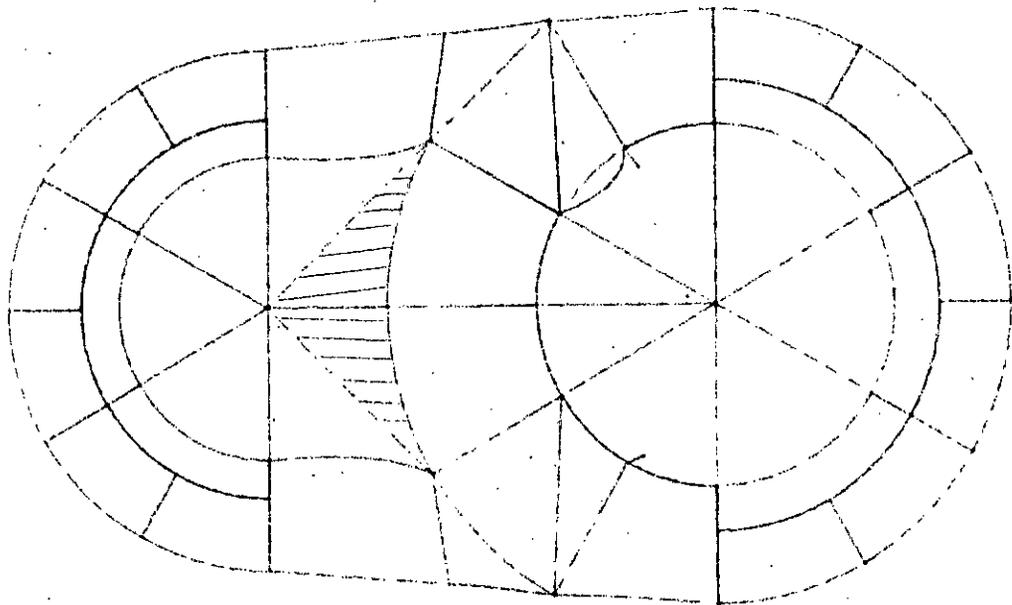


fig.2.3.11.a

1er ESSAI DU 1er DEMI BRAS

BRAS COTE TOURILLON (BAS) \*\* FLAS \*\* ...3000 -

ADRESSE VERSION 4-8-143 DATE: 06/11/98 TITRE: 1.4.001.00



BRAS

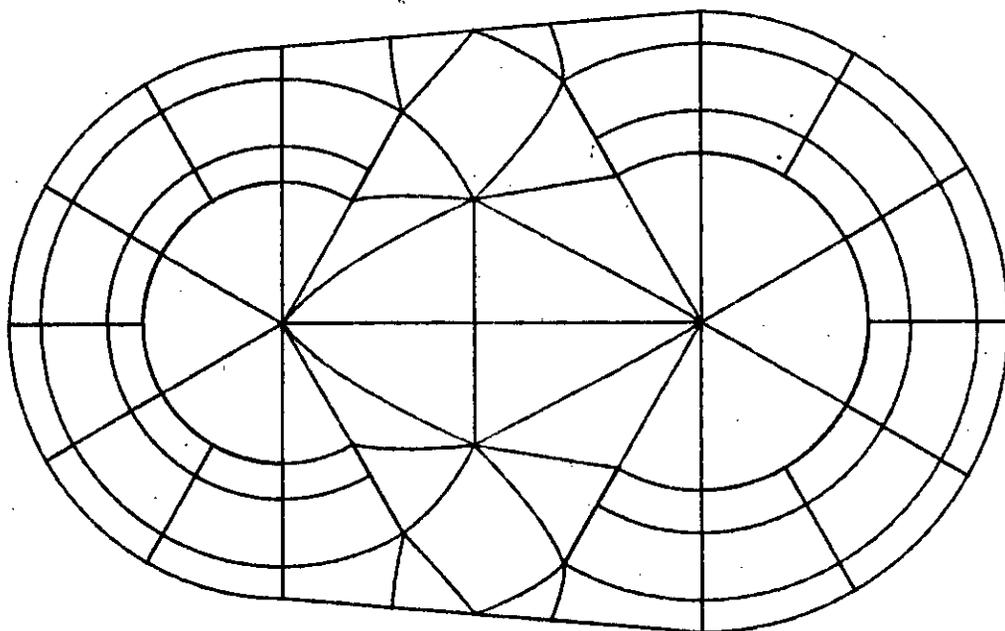
BRAS C/MANGETON N° PLA B ... 4000 - 5000...

ARMÉE VESTIMENTAIRE - 1970 - 1975

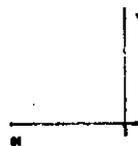


fig.2.3.11.b

1er ESSAI DU 2nd DEMI-BRAS



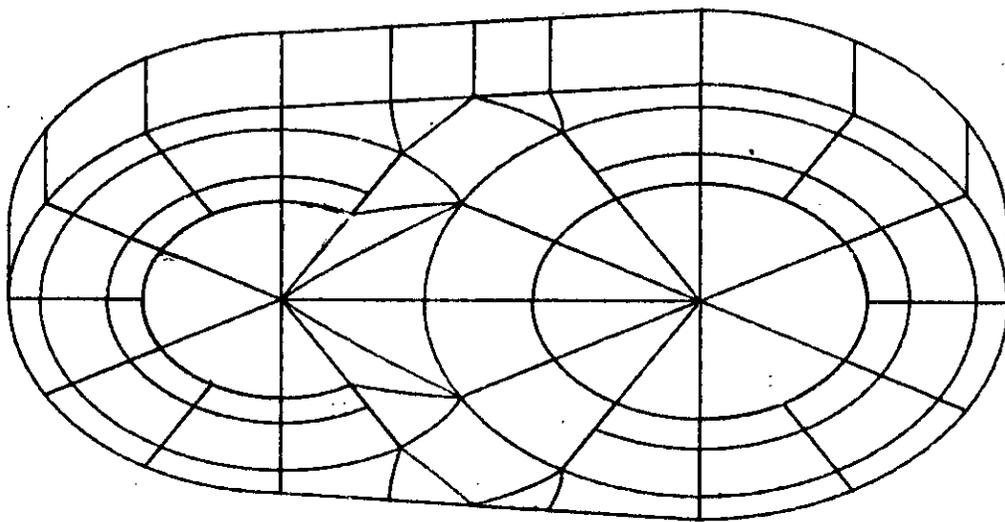
BRAS \



BRAS /COTE TOURIL. N 2000 4000M  
 ASBCLUS VERSION 4-0-155 DATEL 08/08/88 TOME: 15:2104

fig.2.3.12.a

2nd ESSAI DU BRAS (x,y) face 4000



BRAS

BRAS / COTE TOURIL. # 2000 4000 #

ANGLAIS VERSION: 4-6-1988 DATE: 08/30/90 TIME: 16:00:12

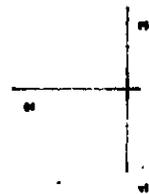
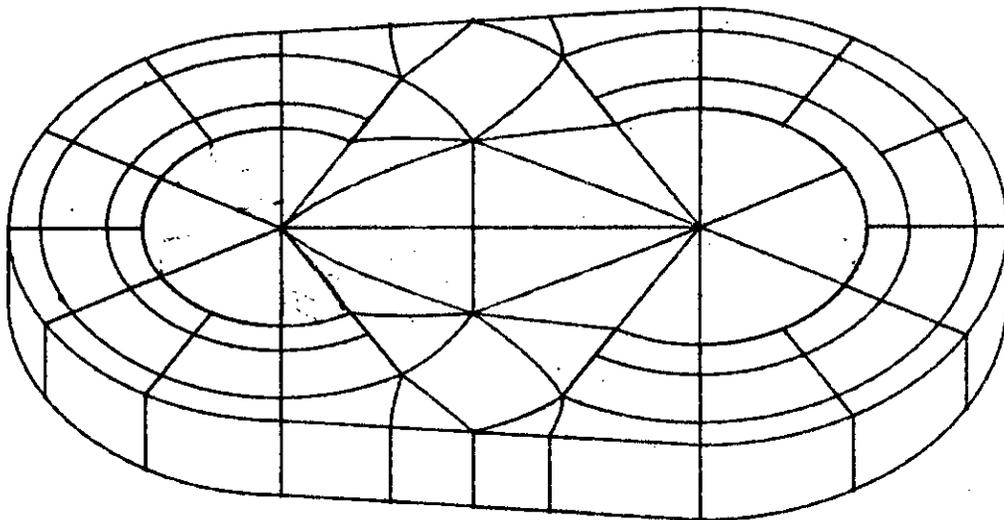


fig.2.3.12.b

2nd ESSAI DU BRAS espace face 2000



BRAS

(OVAL24)

BRAS /COTE TOURIL. # 2000 4000\*

ASBQUE. VERSION 4-6-105 DATEL. 06/03/88 TOME 12:21:04

BRAS /COTE TOURIL. # 2000 4000\*

ASBQUE. VERSION 4-6-105 DATEL. 06/03/88 TOME 12:21:04



fig.2.3.12.c

2nd ESSAI DU BRAS espace face 4000

c -> 3<sup>ème</sup> ESSAI : Bras avec un seul empilement à 2 niveaux

·  $\mathcal{K} = 2000-6000$

Les 2 essais précédents nous ont permis de cerner la zone d'interaction où réside la difficulté . Le maillage dans cette zone est possible si on fait correspondre à chaque noeud de la face  $\mathcal{K} = 2000$  son image sur la face  $\mathcal{K} = 6000$

Ainsi dans le plan (x,z) ,la projection des noeuds passe par le point central I dans la face  $\mathcal{K} = 4000$  en faisant attention à l'inclinaison des éléments dans cette zone fig 2.3.13

Le maillage de l'ensemble du bras est effectué dans un seul fichier .INP . En premier lieu nous donnons les résultats sans l'écriture des équations de liaison MPC , nous avons ainsi :

selon le plan (x,y)  $\mathcal{K} = 6000$  fig 2.3.14

Nous remarquons en haut dans la figure l'emplacement (maillage circulaire) du maneton .

Malheureusement l'introduction des MPC à donner des erreurs (au niveau de la directive \*MPC ) dont on a pas pu déterminer l'origine ,et ce qui est bizarre c'est que le message d'erreurs diffère si on change l'ordre d'introduction des équations MPC, de plus ces même équations ont déjà été utilisé lors du maillage des disques de jonction ,sans donner de message d'erreurs © . Nous pensons que cela est dû au logiciel ,ou au nombre élevé de ces équations MPC à introduire ( 96 MPC ) .

Pour s'en sortir ( sans que cela soit la bonne solution ,et vu le temps informatique passé pour le maillage ) nous augmentons le nombre d'éléments centraux pour éviter l'utilisation des MPC .

Nous avons ainsi les résultats suivants :

selon le plan (x,y)	face $\mathcal{K} = 2000$	fig 2.3.15.a
selon le plan (x,y)	face $\mathcal{K} = 6000$	fig 2.3.15.b
dans l'espace	face $\mathcal{K} = 2000$	fig 2.3.15.c
dans l'espace	face $\mathcal{K} = 6000$	fig 2.3.15.d

Ce qui donne un total de 188 éléments et 1070 DDL sans MPC

---

© voir les listings de résultats du maillage du bras et du disque .

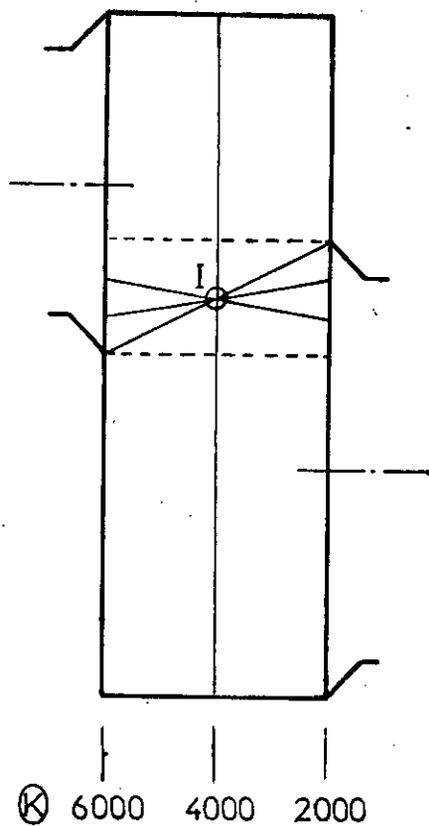
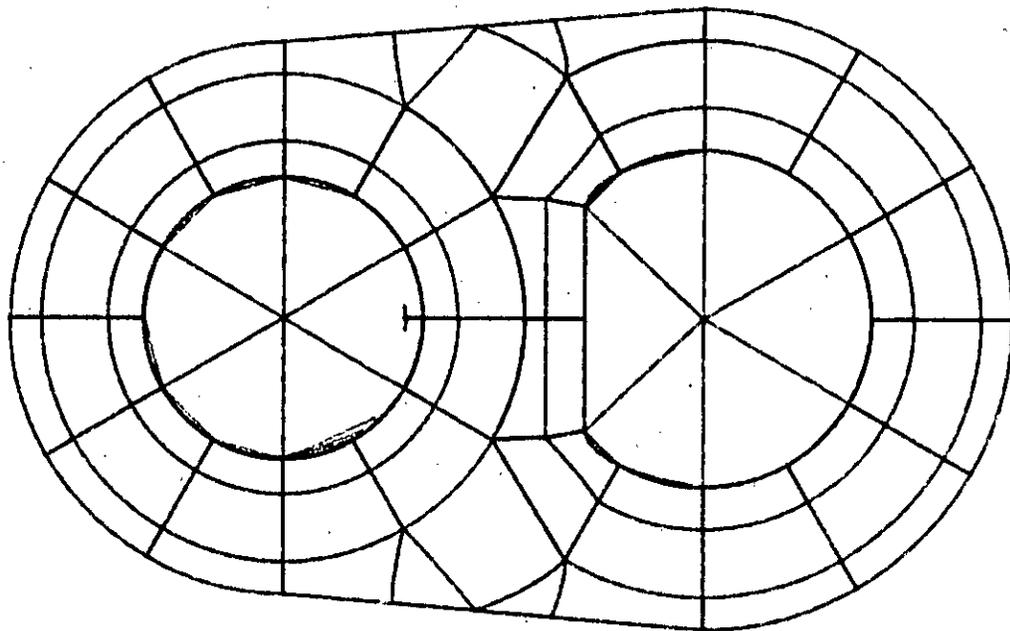


fig 2.3.13

Correspondance entre les  
 noeuds de la zone commune  
 BRAS 2000 - 6000



RAS,

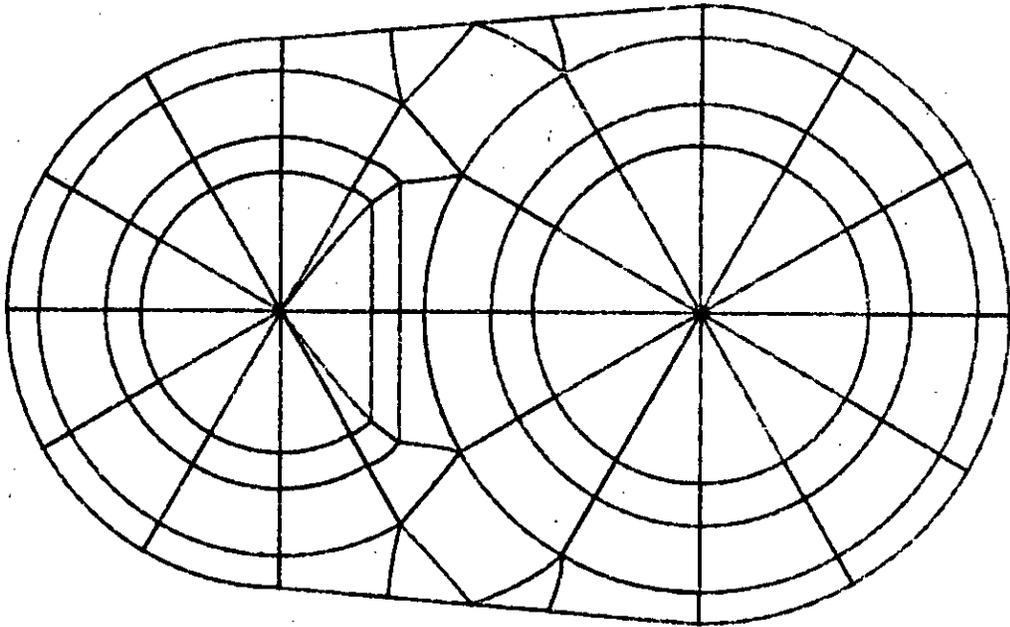


BRAS 2000 6000  
 REVISED VERSION 4-8-140 DATE 07/10/90 TDR 17188-00

fig.2.3.14

3eme ESSAI DU BRAS espace face 6000

BRAS



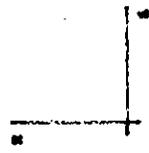
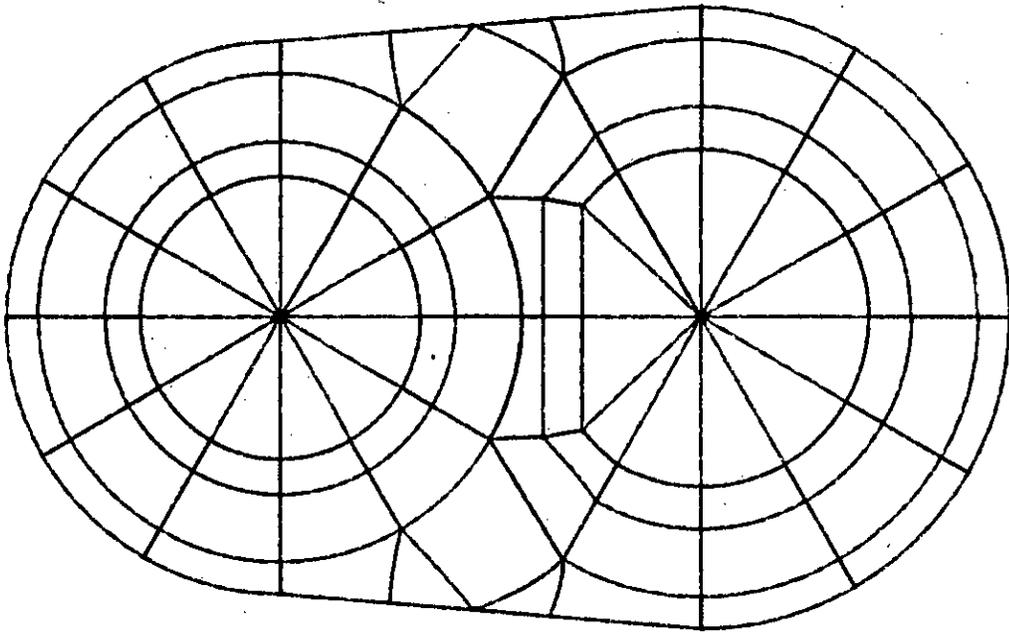
BRAS 2000 6000  
PROGRAM VERSION 4-4-88 DATE 07/10/98 TIME 08:30:00



fig.2.3.15.a

BRAS (x,y) face 2000

BRAS



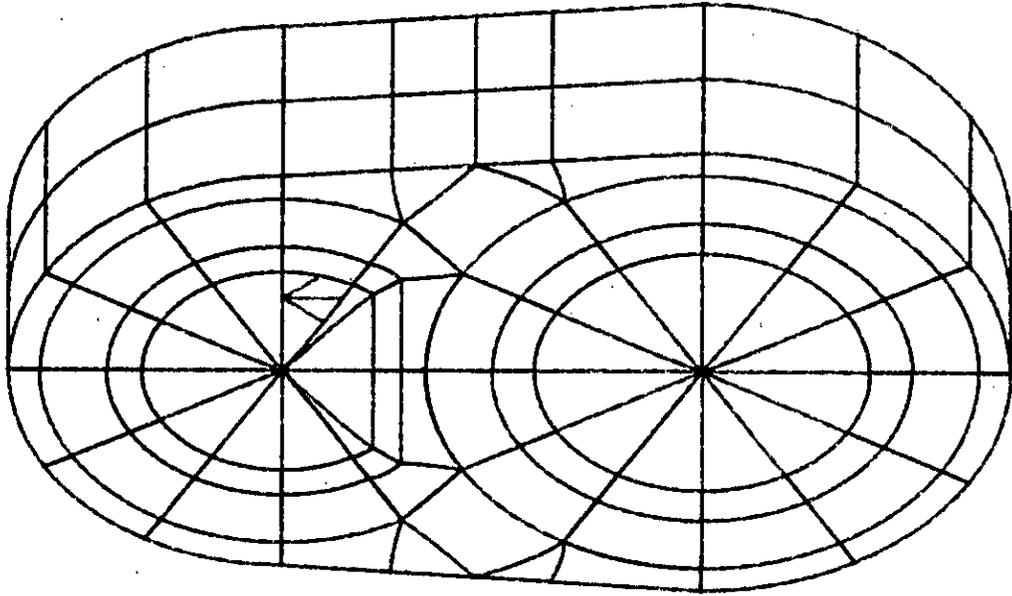
BRAS 2000 6000

REVISED VERSION 4-9-88 DATE: 07/10/88 TIME: 09:30:00

fig.2.3.15.b

BRAS (x,y) face 6000

LE BRAS



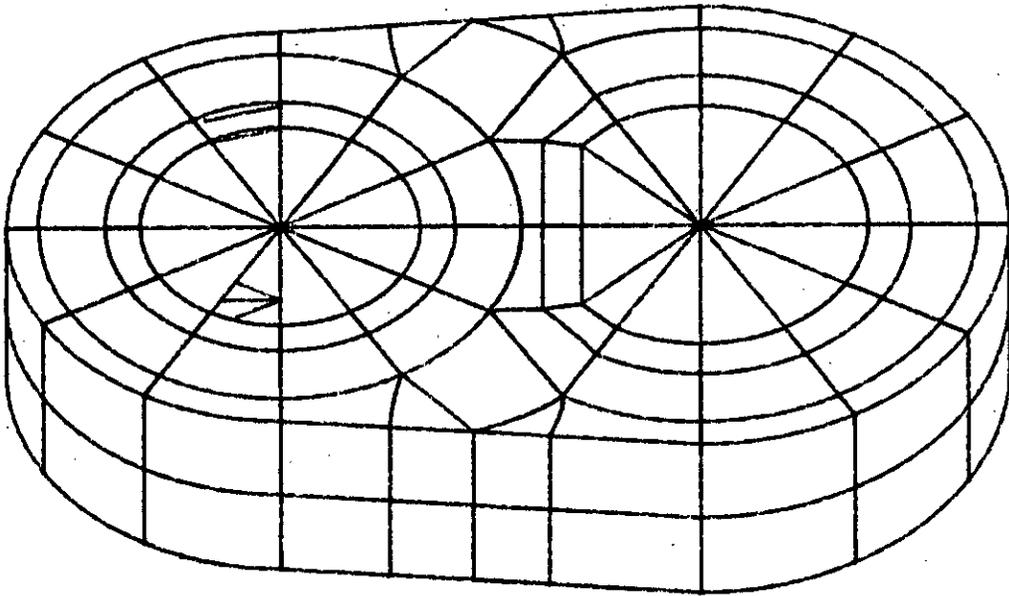
BRAS 2000 6000

ADRESUS VERRECON 4-9-155 DATED: 07/15/90 TDMEL 00.30:00

fig.2.3.15.c

BRAS espace face 2000

LE BRAS



BRAS 2000 6000

PROJETS VERSION 4-4-1988 DATEL 07/10/88 TITRE 00000100



fig.2.3.15.d

BRAS espace face 6000

- EN RESUME

Nous avons ainsi réalisé le maillage de 5 constituants (de références) qui permettront le maillage de l'ensemble du vilebrequin en utilisant les propriétés géométriques de ce dernier.

Une estimation du nombre total de DDL dans ce cas permet d'évaluer la possibilité de la simulation de tel structure (de point de vu numérique)

Nous résumons les résultats dans le tableau suivant :

constituant	1/2touril	maneton	bras	disq. jon.	v i l e b r q
nbr. élément	30	60	188	42	
nbr. noeuds	258	407	1070	309	
nbr. ddl	774	1221	3210	927	
nbr. constit	8	4	8	16	36
tot. élément	240	240	1504	672	2656
tot. noeuds	2064	1628	8560	4944	17296
tot. ddl	6192	4884	25680	14832	51888

tableau 2 3                      résultats du maillage  
pour l'ensemble du vilebrequin

Ainsi nous avons à résoudre un système de l'ordre de 51888 pour la simulation du vilebrequin sans pour autant avoir assez de précision pour une analyse de contraintes dans la zone à fort gradient ( vu le maillage assez grossier des constituants ) . C'est pourquoi ( et c'est ce qui a été prévu avant de mailler ) nous chercherons un moyen d'éviter une telle résolution , du moins optimiser la résolution pour pouvoir procéder à une réanalyse de la zone de concentration , pour amener à bien le dimensionnement du vilebrequin .

#### REMARQUE

Les fichiers de maillage pour les 5 constituants de référence , fichiers INP ont été exécutés par le préprocesseur d'ABAQUS définit en classe A (CPU inférieur à 5 mn) ainsi que les fichiers résultats DAT sont disponibles mais non présentés dans la thèse.

Nous avons aussi procédé au maillage du disque de jonction  $\mathcal{K} = 9000-10000$  pour le vérifier celui qu'on déduira par transformation ponctuelle du disque  $\mathcal{K} = 6000-7000$ .

I N T R O D U C T I O N   A U X   S Y S T E M E S  
A   G R A N D   N O M B R E   D E   D E G R E S  
D E   L I B E R T E

Dans le cas statique, l'utilisation de la méthode des éléments finis MEF abouti à un système du type  $[K] (U) = (F)$  qu'il faut résoudre pour déterminer les déplacements  $(U)$  inconnus.

Cette opération peut s'avérer très coûteuse et des fois impossible de point de vu numérique si la taille du système est fastidieuse, c'est pourquoi une gestion optimale de la mémoire de l'ordinateur est à conseiller : stockage de  $[K]$ , et le nombre d'opérations (selon la méthode de résolution choisie) nécessaire pour venir à bout du système.

Par exemple, l'utilisation de la méthode de GAUSS (chap 2.1) pour la résolution d'un système de l'ordre  $n$  assez grand nécessite  $2n^2/3$  opérations élémentaires [17], cela veut dire que dans le cas où nous utilisons les résultats de notre maillage avec  $n=50000$ , nous aurons besoin d'un temps de calcul CPU suffisant pour mener environ 1 milliard 800 millions d'opérations élémentaires, sans parler de la mémoire nécessaire à stocker  $[k]$

Notre but sera donc de réduire ce temps (de l'optimiser) sans perdre dans la précision, ceci en profitant des propriétés de  $[K]$  (symétrie, agglomération, répétition).

On commence donc par les techniques de stockage de la matrice

### 3.1.1 STOCKAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE [11,12,16,17,23]

a -> Pour une matrice de rigidité pleine d'ordre  $n$ , nous devons stocker  $n^2$  termes  $K_{ij}$

Si elle est symétrique on stockera alors  $n(n+1)/2$  termes, mais ceci reste insuffisant pour des systèmes de taille importante.

#### b -> Stockage en bande

On dira que [K] à un profile bande quand les termes nuls de celle-ci se trouvent de part et d'autre d'une bande diagonale de largeur  $b$  de termes non nuls , de plus ces termes nuls n'interviennent pas dans la résolution par GAUSS [11].

Dans ce cas on ne mémorise que les termes se trouvant dans la diagonale ,donc  $n(b+1)$  termes (fig 3.1.1). On a interet que la largeur de bande soit la plus petite possible ( $b$  minimum).

Cela peut se faire grace à une numérotation optimale des noeuds de la structure qui influera sur l'ordre dans lequel les équations sont traitées . En règle pratique ,pour diminuer la largeur de bande il faut diminuer la diférence entre les numéros des noeuds appartenant à un même élément, mais cette alternative n'est pas possible dans tout les cas surtout pour les structures complexes et tridimensionnelles.

#### c -> Stockage en ligne de ciel "skyline"

Cette technique de mémorisation est utilisée pour les matrice à largeur de bande importante présentant des creux (zéros) . Elle consiste à stocker la matrice par lignes et colonnes de longueur variable afin d'éviter le stockage de termes nuls inutilement. (fig 3.1.2)

Quand [K] est très volumineuse ,on décompose en blocs la matrice en formant des sous-matrices ,cette décomposition peut se faire à plusieurs niveaux . Le choix de la taille de la sous-matrice est lié à l'encombrement dans la mémoire et la résolution se fera alors par blocs.

Pour chaque manière de stockage utilisée ,on accommode l'algorithme de résolution de GAUSS à cet effet.

Toujours dans un soucis de réduire le temps de calcul ,on prévoit pour les systèmes de grande taille, des techniques comme:

### 3.1.2 METHODE DE CONDENSATION STATIQUE [10,11,14,19]

Dans certains cas d'analyse ,nous avons besoin de connaitre les résultats (déplacements - contraintes) qu'au niveau des noeuds préalablement choisi dans la structure ,nous procédons alors

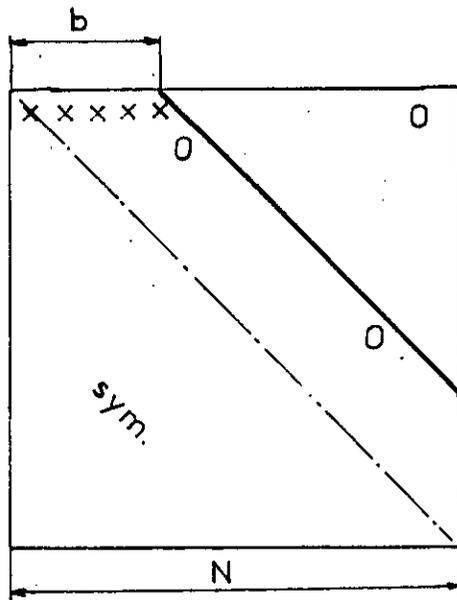


fig.3.1.1

MATRICE BANDE

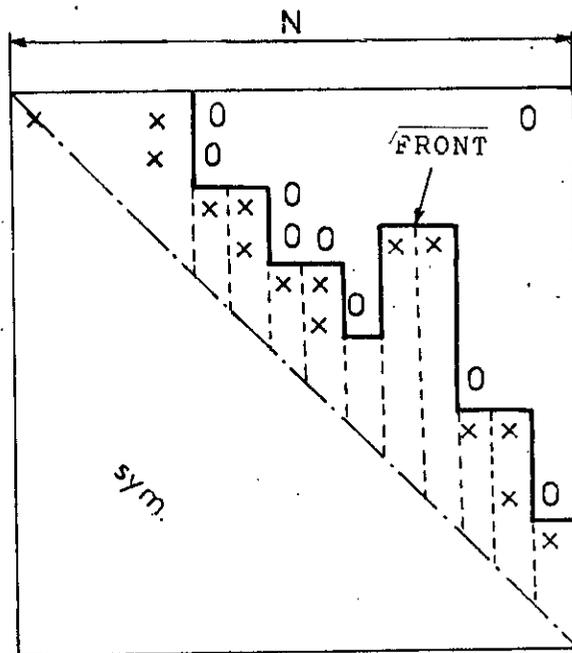


fig.3.1.2

MATRICE EN LIGNE DE CIEL

à la condensation des noeuds non nécessaires (c'est une autre façon d'utiliser la méthode de GAUSS - annexe D -). Le problème peut aussi se poser dans le cas où la taille de la mémoire ne permet pas une résolution directe. La méthode se formule ainsi:

soit le système :

$$[K] (U) = (F) \quad 3.1.1$$

où

Le vecteur (U) peut être décomposé en :

(U<sub>e</sub>) : ddl que l'on veut conserver

et (U<sub>c</sub>) : ddl que l'on veut éliminer (ou condenser)

ainsi

$$(U) = (U_e, U_c)^T$$

et le système 3.1.1 peut s'écrire alors sous la forme

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ec} \\ K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_e \\ U_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ F_c \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \quad 3.1.2$$

Nous pouvons écrire de l'équation (a) de 3.1.2 :

$$[K_{ee}] (U_e) = (F_e) - [K_{ec}] (U_c) \quad 3.1.3$$

ainsi les déplacements des ddl à éliminer peuvent être déduits après la connaissance (calcul) des ddl à conserver de l'équation.

(b) on peut écrire :

$$[K_{ce}] (U_e) + [K_{cc}] (U_c) = (F_c) \quad 3.1.4$$

qui par remplacement de (U<sub>e</sub>) de 3.1.3 dans 3.1.4 donne alors

$$([K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}[K_{ec}]) (U_c) = (F_c) - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}(F_e) \quad 3.1.5$$

qui peut être écrite sous la forme condensée

$$[K_{cc}^*] (U_c) = (F_c^*) \quad 3.1.6$$

où

$$[K_{cc}^*] = [K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}[K_{ec}] \quad 3.1.7$$

est la matrice de rigidité condensée

$$\{ F_c^* \} = \{ F_c \} - [K_{cc}] [K_{ee}]^{-1} \{ F_e \} \quad 3.1.8$$

est le vecteur charge corrigé , la correction est due au transport des charges appliquées à  $\{ U_e \}$  vers  $\{ U_c \}$

Ainsi le système initial 3.1.1 se transforme en équations 3.1.6 et 3.1.3 , en évitant l'inversion de  $[K_{ee}]$ , donc

$$[K] \{ U \} = \{ F \} \iff \begin{cases} [K_{cc}^*] \{ U_c \} = \{ F_c \} \\ [K_{ee}] \{ U_e \} = \{ F_e \} - [K_{ec}] \{ U_c \} \end{cases} \quad 3.1.9$$

Les résultats obtenus par la forme condensée sont identiques à ceux obtenus par le système initial , car nous n'avons fait aucune hypothèse dans la transformation , la forme condensée sera intéressante si nous cherchons l'information seulement au noeuds à conserver  $\{ U_c \}$ , pour cela il suffit de résoudre l'équation 3.1.6 d'ordre moins élevé que celui de l'équation 3.1.1

La technique de condensation peut être utilisée au niveau de l'élément , ainsi on peut formuler de nouveaux éléments à partir d'anciens par condensation de certains noeuds , c'est généralement la façon avec laquelle sont formulés les éléments de type hybrides en formulation déplacement (chap 2.1)

Nous montrons en annexe D le lien entre la condensation statique et l'élimination de GAUSS .

### 3.1.3 METHODE DE SOUS STRUCTURATION [11,12,13,14]

La méthode a été formulée en 1963 , elle joue actuellement un rôle considérable dans l'analyse des structures complexes, où il est nécessaire de résoudre le problème par étapes successives. La structure initiale est subdivisée en parties (régions) appelées sous structures qui seront analysées séparément .

Dans chaque sous structure , nous effectuons une condensation de l'ensemble des ddl internes, en laissant ainsi les noeuds à l'interface de la sous structure, qui seront alors les noeuds de liaison pour permettre l'assemblage de l'ensemble des sous

structures formant la structure initiale. fig 3.1.3

L'assemblage se fera comme si la sous structure est un élément ayant des noeuds sur sa frontière d'où l'appellation de la méthode de "super-élément".

Cette opération peut se faire à plusieurs niveaux fig 3.1.4

Chaque sous structure est maillée différemment, mais conformément au type du problème traité par la structure initiale ceci n'exclut pas alors la possibilité de localiser des phénomènes particuliers à la structure (domaine non linéaire localisé, domaine de matériau différent, ect... ) par une sous structure adéquate (formulation, élément...)

Pour chaque sous structure, nous définissons les ddl internes ( $U_e$ ) et les ddl ( $U_c$ ) de liaison, nous avons ainsi :

pour les noeuds de liaisons (conservés):

$$\begin{aligned} [K_{cc}^*]^A (U_c)^A &= (F_c)^A \\ [K_{cc}^*]^E (U_c)^E &= (F_c)^E \end{aligned} \quad 3.1.10$$

pour les noeuds internes

$$\begin{aligned} [K_{ee}]^A (U_e)^A &= (F_e)^A - [K_{ec}]^A (U_c)^A \\ [K_{ee}]^E (U_e)^E &= (F_e)^E - [K_{ec}]^E (U_c)^E \end{aligned} \quad 3.1.11$$

L'assemblage se fera à partir des matrices condensées des sous structures  $[K_{cc}^*]$ , qui aboutira alors à la matrice condensée globale pour l'analyse, soit :

$$[K_{cc}^*]^{glob} (U_c)^{glob} = (F_c)^{glob} \quad 3.1.12$$

Une fois les variables  $(U_c)^{glob}$  déterminées par la résolution globale ( qui est d'un ordre bien inférieur au système d'équations 3.1.1 ) , on peut revenir si nécessaire à n'importe quelle sous structure pour en déterminer les déplacements internes inconnus par la résolution des équations 3.1.11 .

En conclusion , la méthode se fait en trois étapes :

- 1- Analyse des sous structures séparément pour former les matrices condensées.
- 2- Assemblage des sous structures et résolution globale

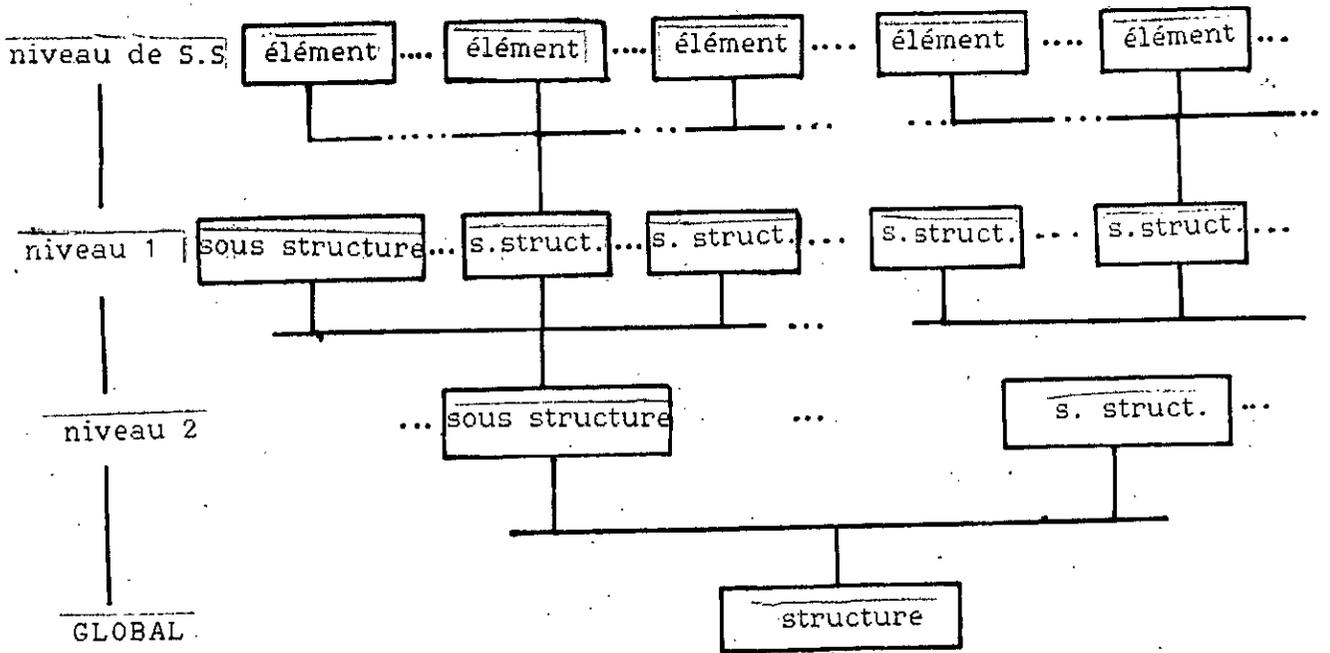


fig 3.1.4

Branche de sous structuration d'une structure

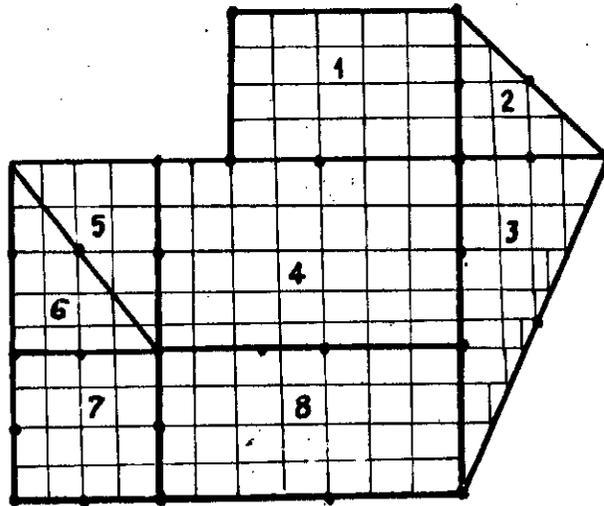


fig 3.1.3

Maillage en sous structure

### a- Réstitution des calculs internes

Les avantages <sup>©</sup> de la méthode sont ,en plus de la gestion optimale de la mémoire :

- Préparation et vérification des modèles de sous structures indépendamment les unes des autres.
- La modification dans le maillage dans une sous structure n'entachera pas la structure complète.
- Pour des sous structures identiques et répétitives ,elle permet donc de minimiser d'avantage le temps de calcul et la préparation des données.
- La possibilité de mailler différemment chaque sous structure de point de vu formulation.

La sous structuration équivaut par son algorithme à la résolution par blocs dans la méthode d'élimination de GAUSS

#### 3.1.4 METHODE FRONTALE [11,22,24,26]

La méthode due à IRONS [22] combine l'élimination de GAUSS à une optimisation de la taille mémoire dans la résolution des systèmes linéaires obtenus par la MEF ,elle permet d'éviter des opérations sur les zéros à l'intérieur de la bande ,elle trouve alors son efficacité pour les matrices à grande largeur de bande ,mais faiblement peuplées.

La méthode utilise à un instant donné un sous ensemble de la matrice du système qui sera stocké en mémoire ,cette particularité offre un gain dans l'espace mémoire par rapport à un stockage en bande ou en ligne de ciel, mais augmente le temps total de calcul du fait du nombre élevé d'entrée-sortie.

Le principe de la méthode est la condensation de noeuds avant assemblage de sous structure : A chaque élimination relative à un ddl ,l'ensemble des ddl correspondant aux colonnes qui vont être modifiées (colonnes actives) en conséquence (par condensation)

---

© Ces avantages sont très commode à l'analyse d'une structure tel qu'un vilebrequin (répétitivité ,temps de calcul et préparation de données puis la vérification et la réanalyse )

On peut schématiser cette technique par la fig 3.1.5 montrant la formation d'un super élément.

Techniquement ,pour former le super élément <sup>©</sup> fig 3.1.5 ,on prendra à l'instant  $t$  donné à tour de role les noeuds de la structure, en évitant les noeuds d'application des charges et des conditions aux limites .

Si le noeud considéré appartient à l'instant  $t$  au "front" (noeud 20) ,on le garde (conserve) sinon (noeuds 18 ,19) on utilise alors une condensation de ces noeuds ,et ainsi le super élément sera formé par l'évolution successive du "front"

fig 3.1.6 c'est pourquoi la méthode est appelée sous structuration en série .

### 3.1.5 CONCLUSION

Toutes les méthodes citées découlent de la méthode d'élimination de GAUSS (méthode directe) et la possibilité de traiter des systèmes de taille élevée par une taille mémoire relativement faible ,mais cela risque d'augmenter le temps de l'analyse .

La méthode de GAUSS peut facilement s'accommoder aux techniques citées et le principe qui revient chaque fois est la condensation ,la différence est dans le fait quelle soit avant (frontale) ou après (sous structure) l'assemblage.

#### REMARQUE :

Les méthodes évoquées sont extrapolées à l'analyse en dynamique des structures ayant des systèmes de taille importante [28,29,30] (chap 4).

---

© cette technique sera utilisée pour la formation des super éléments dans le cas du vilebrequin

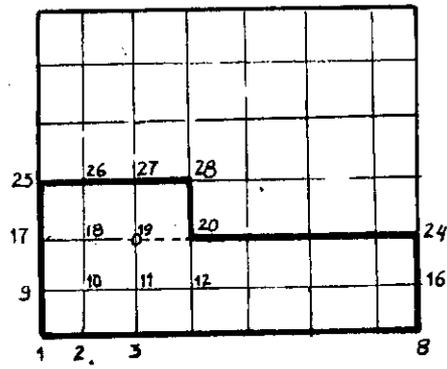


schéma 4.1.5

ation de super élément par la méthode frontale

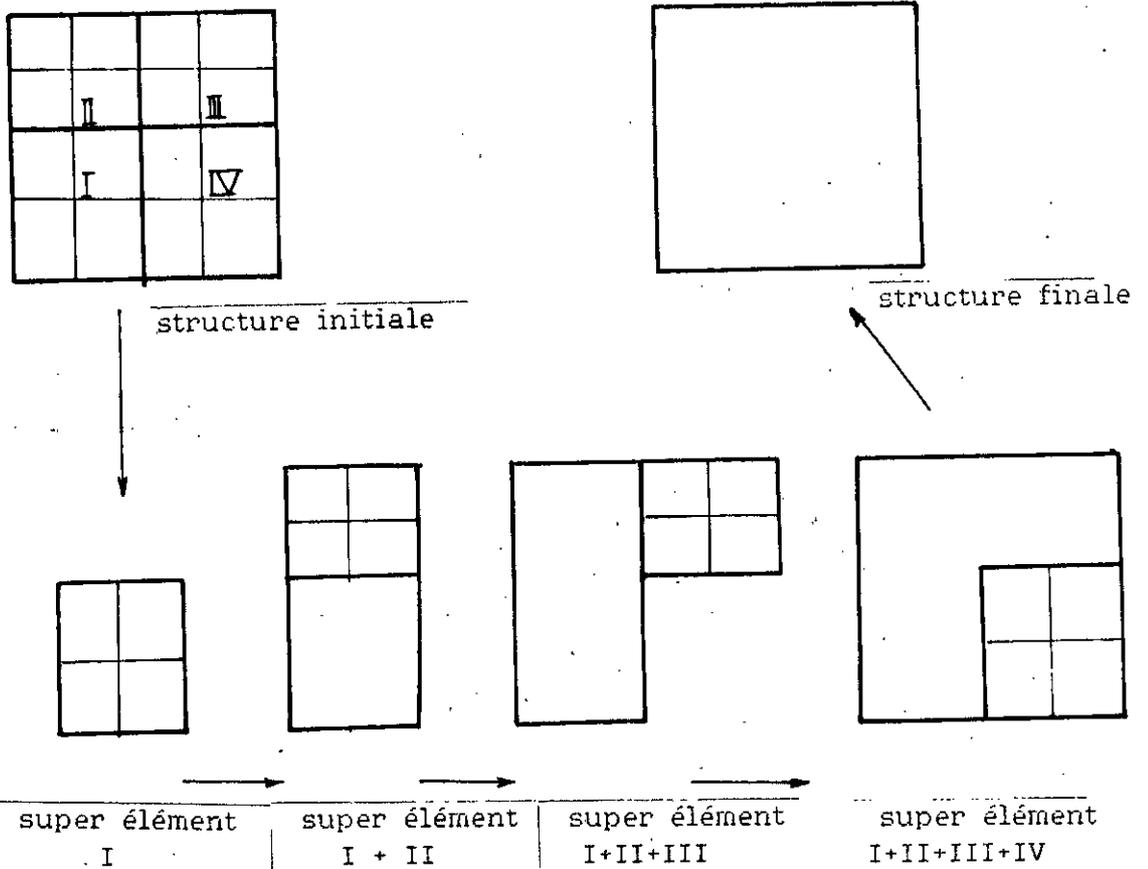


fig 3.1.6

Sous-structure en série

- F O R M A T I O N   D E S   S U P E R - E L E M E N T S  
D U   V I L E B R E Q U I N -

Lorsqu'on a établi le maillage du vilebrequin avec des éléments assez grands ,on a abouti ,pour une simulation statique à un système de l'ordre de 50000 . D'autre part ,ce maillage n'est pas assez fin pour une analyse rigoureuse des zones de concentration de contraintes ,il serait donc intéressant de procéder à une sous structuration du vilebrequin pour profiter des avantages de la méthode vu quelle s'adapte très bien à notre structure.

Nous formons ainsi à partir des maillages des 5 constituants 5 super-éléments ,pour en déduire les rigidités de tous les constituants par transformation ponctuelle *organigramme 3.2.1*

3.2.1 FORMATION DU SUPER TOURILLON ET MANETON

Nous ne maillerons ,pour des raisons de symétrie que le demi-tourillon (celui de gauche). Le choix des noeuds à conserver reposera sur les conditions d'appui et de chargements ainsi que les noeuds nécessaires à l'assemblage des super-éléments qui se situent alors à la frontière ,au niveau extérieur de chaque sous structure .

Pour le tourillon ,lieu d'application des conditions d'appui on choisit donc les noeuds se trouvant au milieu et à la périphérie de celui ci . Pour le maneton lieu d'application des charges (charges concentrées calculées au *chap 1.2* qui sont fonctions de l'angle de rotation ) on choisit les noeuds se trouvant au milieu et à la périphérie ,leur nombre déterminera alors le nombre de chargements à faire (pour  $n$  noeuds choisis ,on effectuera  $2n$  chargements pour avoir les 2 tours du vilebrequin ) ,dans notre cas on prendra  $n = 6$  . Pour des raisons de repérage nous conserverons le noeud se trouvant à la face de jonction et au centre .

1<sup>ere</sup>  
ETAPE

Maillage grossier du vilebrequin

X=0-1000 Demi - tourillon  
X=1000-2000 1<sup>er</sup> Disq. jonction  
X=2000-6000 Bras  
X=6000-7000 2<sup>nd</sup> Disq. jonction  
X=7000-9000 Maneton

2<sup>nd</sup>  
ETAPE

Formation des supers éléments  
par condensation

les supers  
Demi - tourillon  
1<sup>er</sup> Disque de jonction  
Bras  
2<sup>nd</sup> Disque de jonction  
Maneton

3<sup>eme</sup>  
ETAPE

Assemblage des supers éléments

Détermination de l'ensemble  
des rigidités [ K ]

Assemblage

fig 3.2.1

organigramme  
ETAPES DE LA MODELISATION  
DU VILEBREQUIN

a -) le tourillon  $\mathcal{X} = 0-1000$  on gardera les noeuds :  
 sur la face  $\mathcal{X} = 0$  ( conditions aux limites )  
 6 noeuds sur la périphérie espacés régulièrement à des intervalles de  $60^\circ$   
 sur la face  $\mathcal{X} = 1000$  ( noeuds de jonction )  
 12 noeuds espacés de  $30^\circ$  sur la périphérie et le noeud de repérage au centre : 13 noeuds au total

b -) le maneton  $\mathcal{X} = 7000-9000$  on conserve les noeuds  
 sur les faces  $\mathcal{X} = 7000$  et  $\mathcal{X} = 9000$  (pour la jonction)  
 on garde sur chacune des faces 12 noeuds sur la périphérie et le noeud de repérage : 13 noeuds sur chaque face ( soit donc 26 noeuds )  
 sur la face  $\mathcal{X} = 8000$  ( noeuds de chargement )  
 on garde 6 noeuds sur la périphérie , donc 12 cas de charges seront nécessaires pour déterminer la position critique du vilebrequin (  $\theta$  critique )

Nous avons donc à conserver 19 noeuds pour le demi-tourillon sur un total de 258 noeuds , et 32 noeuds pour le maneton sur un total de 407.

### 3.2.2 FORMATION DU SUPER DISQUE DE JONCTION

Nous savions que cette partie du vilebrequin est sujette à des forts gradients d'où l'intérêt de la considérer comme super élément , pour une réanalyse plus poussée des contraintes après l'avoir isolée , lorsque la position critique du vilebrequin sera déterminée (grâce à l'information sur l'état de contraintes dans le raccord )(chap. 4)

Pour localiser cette zone nous avons gardé seulement les noeuds se trouvant sur l'arrondi ainsi :

sur les faces  $\mathcal{X} = 1000$  et  $\mathcal{X} = 2000$  (  $\mathcal{X} = 7000$  et  $\mathcal{X} = 6000$  )  
 les noeuds de jonction : 12 noeuds sur chaque face à la périphérie , en plus des noeuds de repérages.

sur la face  $\mathcal{X} = 1500$  (  $\mathcal{X} = 6500$  ) pour avoir plus d'informations sur l'état de contraintes sans isoler le disque, on gardera à cet effet que 6 noeuds à la périphérie

Finalement les noeuds conservés appartiennent au même niveau (le 4<sup>ème</sup>) ,donc aux faces supérieures des éléments C3D20 dégénérés en C3D15 du maillage initial, donc un total de 32 noeuds pour chaque disque sur le total des 309 noeuds initiaux.

### 3.2.3 FORMATION DU SUPER BRAS

Le bras n'étant pas une zone de concentration de contraintes aussi importante que les disques ,c'est pourquoi nous ne garderons que les noeuds de jonction avec les disques ,donc sur la face  $X = 2000$  nous avons ( 12+1 ) noeuds à conserver sur la face  $X = 6000$  nous gardons aussi ( 12+1 ) noeuds soit un total de 26 noeuds sur les 1070 initiaux .

Un tableau récapitulatif dénombrant le résultat du choix des noeuds conservés est présenté en : tableau 3.2.1

### 3.2.4 SUPER ELEMENT D'ABAQUS

Le super élément peut être considéré comme un simple élément défini par l'utilisateur ceci en donnant sa matrice de rigidité élémentaire qui n'est au fait que la matrice condensée de la structure formant le super élément.

La directive définissant le super élément existe sur la nouvelle version 4.7 d'ABAQUS ,mais malheureusement pas sur la version 4.6 utilisée .

Pour ce faire ,nous étions donc obligés d'utiliser techniquement la condensation par résolution frontale pour définir la matrice condensée ,puis définir un élément utilisateur ayant pour noeuds les noeuds conservés et pour matrice la matrice condensée.

La technique de condensation est réalisée par des manipulations de la matrice de rigidité total de la sous structure, en utilisant la directive \*BOUNDARY CONDITION entre \*STEP et \*END STEP qui définira un pas de choix de conditions aux limites sur l'ensemble des noeuds à conserver ©

---

© pratiquement la condensation a pris un temps moyennement important ( 6 h en moyenne selon le nombre de steps à faire )

Nous imposons alors ,pour chaque ddl séparément, une condition aux limites "unitaire" au ddl concerné alors que les autres ddl seront nuls dans ce step . On doit donc définir autant de steps que de ddl à conserver

Pour le système  $[ K ] ( U ) = ( F )$  3.2.1

nous définissant à un step donné, la condition au limite suivante :

$$( U_i ) = 1 \text{ et } ( U_j ) = 0 \quad j \neq i \quad 3.2.2$$

La résolution de 3.2.1 avec la condition 3.2.2 donnera alors le vecteur force  $( F_i )$  qui représentera alors la  $i^{\text{eme}}$  colonne de la matrice condensée  $[ K^* ]$  .

Cette possibilité peut être vérifiée sur un système à 1 ddl ,si on impose donc la condition unitaire à ce ddl on aura :

$$K_{11} U_1 = F_1 \quad \text{où} \quad U_1=1 \quad \text{donne} \quad K_{11} = F_1$$

Une fois les colonnes de  $[ K^* ]$  déterminées successivement à chaque step , il faut définir l'élément utilisateur par ces noeuds et sa matrice de rigidité, ceci par :

\*USER ELEMENT , NODES= nbre,TYPE=U

\*MATRIX (donner la matrice de rigidité qui dans ce cas est  $[ K^* ]$  ,si nécessaire en format 4F20 )

Ainsi l'élément U sera utilisé (et manipulé) comme n'importe quel élément de la bibliothèque d'ABAQUS .

### 3.2.5 DETERMINATION DES RIGIDITES DE L'ENSEMBLE DES CONSTITUANTS

Après avoir déterminé (formé) les 5 super-éléments représentant les différents types de constituants du vilebrequin Il faut ,pour établir la matrice condensée globale du vilebrequin par assemblage standard ,définir les matrices condensées de l'ensemble des constituants .

Nous avons donc un total de : ( planche P1 )

- 4 tourillons ,soit donc 8 demi-tourillons  $T_1-T_8$
- 4 manetons  $M_1-M_4$
- 8 bras  $B_1-B_8$
- 8 disques de jonction tourillon-bras  $DT_1-DT_8$
- 8 disques de jonction maneton-bras  $DM_1-DM_8$

Ainsi si on prend ,comme référence les matrices des constituants déjà formées (  $T_1, M_1, B_1, DT_1, et DM_1$  ) les autres matrices peuvent être déterminées (vu les symétries évoquées au chap 1.1) par transformation de passage entre repères ,c'est pourquoi on doit connaître le type de symétrie entre les constituants ,ceci a été établi sous forme de tableau 3.2.2 .

a -> Détermination des matrices de passage [9,14,16]

Selon le tableau 3.2.2 ,nous avons besoin de définir des formules de passage pour déterminer les rigidités de l'ensemble des super-éléments ,nous avons à ce fait besoin de définir :

- symétrie par rapport au plan (x,y)
- symétrie par rapport au plan (x,z)
- symétrie par rapport au plan (x,y)et(x,z)

La transformation ponctuelle linéaire d'un repère (x,y,z) à un autre (x',y',z') sera appliquée au niveau de chaque noeud (par ces coordonnées , ou ces ddl), elle a la forme suivante :

transformation des coordonnées

$$\begin{aligned}
 x_i' &= l_1 x_i + m_1 y_i + n_1 z_i \\
 y_i' &= l_2 x_i + m_2 y_i + n_2 z_i \\
 z_i' &= l_3 x_i + m_3 y_i + n_3 z_i
 \end{aligned}
 \tag{3.2.3}$$

transformation des degrés de liberté

$$\begin{aligned}
 u_i' &= l_1 u_i + m_1 v_i + n_1 w_i \\
 v_i' &= l_2 u_i + m_2 v_i + n_2 w_i \\
 w_i' &= l_3 u_i + m_3 v_i + n_3 w_i
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4}$$

CONSTITUANTS	position %	nbre noeuds	nbre ddl
demi-tourillon	0 -1000	19	57
disq. jonction	1000-2000	32	96
bras	2000-6000	26	78
disq. jonction	6000-7000	32	96
maneton	7000-9000	32	96

TABLEAU 3.2.1

Choix et nombre de noeuds des constituants

	demi-tour	disq DT	bras B	disq DM	manet M
2	x y	x y	x y	x y	=
3	=	=	x z	=	=
4	x y	x y	xy - xz	x y	=
5	=	=	x z	=	=
6	x y	x y	xy - xz	x y	=
7	=	=	=	=	=
8	x y	x y	x y	x y	=

TABLEAU 3.2.2

Type de symétrie pour l'ensemble des super-élément

qui s'écrira sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad 3.2.5$$

où on posera

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad 3.2.6$$

La matrice  $[\lambda]$  : est la matrice de passage au niveau d'un noeud entre repère qui peut être appliquée aux coordonnées des noeuds ou aux ddl de ces derniers .

Ce qui permettra alors de déterminer la matrice de passage  $[\mathcal{P}]$  appliquée à la structure (super-élément), ainsi :

$$\begin{matrix} (d') & = & [\mathcal{P}] & (d) \\ n,1 & & n,n & n,1 \end{matrix} \quad 3.2.7$$

où

$(d)$  /respectivement  $(d')$ / regroupe les variables nodales (coordonnées ou ddl) de l'ensemble des noeuds conservés du super-élément dans le repère  $(x,y,z)$  /respectivement  $(x',y',z')$ /

La forme de la matrice de passage pour une structure à  $n$  noeuds avec 3 ddl par noeud est de la forme :

$$[\mathcal{P}] = \begin{bmatrix} [\lambda]_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\lambda]_2 & 0 & \\ & & & \\ 0 & & & [\lambda]_n \end{bmatrix} \quad 3.2.8$$

La connaissance de  $[\mathcal{P}]$  permet alors de déterminer la rigidité  $[K']$  de n'importe quel super-élément à partir de celle de référence  $[K]$  par :

$$[K'] = [\mathcal{P}]^T [K] [\mathcal{P}] \quad 3.2.9$$

Cette équation peut être démontrée à partir de l'invariabilité de l'énergie de déformation par rapport au repère choisi.

a -> matrice de passage pour une symétrie dans le plan (x,y)

Une telle symétrie peut se définir par une rotation de  $\pi$  de l'axe z (fig 3.2.3)

on a donc :

$$[\lambda]_{x-y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 3.2.10$$

b -> matrice de passage pour une symétrie dans le plan (x,z)

C'est le cas de symétrie dans un plan contenant l'axe z, donc une rotation de  $\pi$  de l'axe y (fig 3.2.3)

on a alors :

$$[\lambda]_{x-z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.2.11$$

c -> matrice de passage pour une double symétrie (x,y) et (x,z)

C'est le cas des bras B4 et B6, on a dans ce cas alors (fig 3.2.3) :

$$[\lambda]_{\substack{x-y \\ x-z}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 3.2.12$$

ce qui peut être aussi obtenu par une symétrie dans le plan (y-z) puis par rapport à l'origine

d -> Effet de  $[\lambda]$  sur  $[K]$

L'application de  $[\lambda]$  pour la détermination de la matrice de rigidité d'un super-élément par rapport à celui pris comme référence aura pour conséquences :

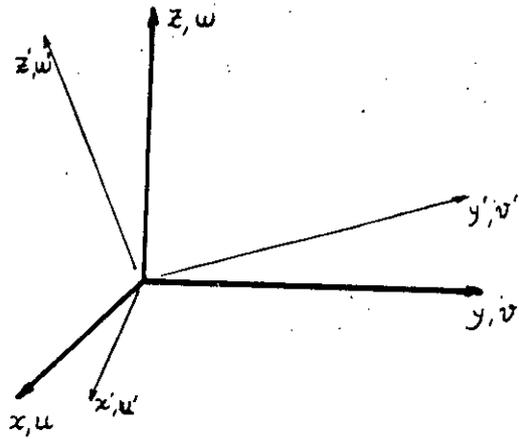
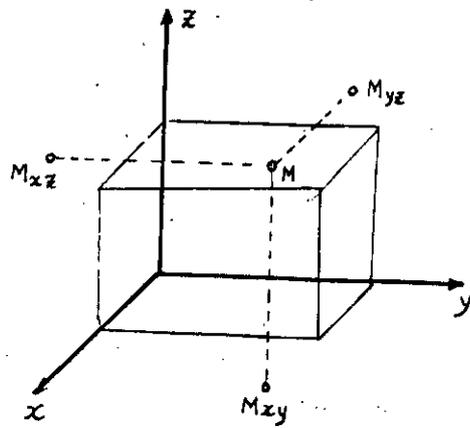


fig 3.2.3

differentes symétries



étant donné que dans le cas du vilebrequin F4L912 la matrice  $[ \lambda ]$  est diagonale avec le terme unitaire alors la rigidité au niveau d'un noeud se transforme de la manière suivante par rapport à celle prise comme référence :

soit comme référence au niveau d'un noeud la matrice suivante :

$$[ K ]_r = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ \text{SYM} & & k_{33} \end{bmatrix} \quad 3.2.13$$

symétrie (x,y)

$$[ K' ]_{x-y} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{13} \\ & k_{22} & -k_{23} \\ \text{SYM} & & k_{33} \end{bmatrix} \quad 3.2.14$$

symétrie (x,z)

$$[ K' ]_{x,z} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & -k_{23} \\ \text{SYM} & & k_{33} \end{bmatrix} \quad 3.2.15$$

symétrie (x,y) puis (x,z)

$$[ K' ]_{\substack{x-y \\ x-z}} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & -k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ \text{SYM} & & k_{33} \end{bmatrix} \quad 3.2.16$$

Attention :

L'application des matrices de passage influe sur l'ordre de numérotation des noeuds du super-élément qui est déduit par cette transformation, car elle s'applique aussi pour les coordonnées des noeuds, c'est pourquoi il faut faire très attention lors de l'introduction des noeuds du super-élément déduit, on a intérêt à suivre la position du noeud lors de la transformation.

On peut comparer les résultats de la transformation pour le cas du disque DM2  $X = 9000-10000$  à celui qui a été réalisé : DM1 (pour cette effet) lors du chapitre précédent (comparaison de la rigidité)

### 3.2.6 CONSEQUENCE DE LA CONDENSATION

Nous avons ainsi réussi, grâce aux symétries que présente la forme du vilebrequin à déterminer à partir des rigidités condensées des 5 super-éléments, la rigidité condensée du vilebrequin. Ce qui permettra alors l'analyse statique de ce dernier sous divers cas de charges grâce à une réduction importante (1:17°) de la taille initiale de la rigidité (non condensée).

La matrice globale obtenue présente un aspect bande et son traitement peut se faire sans difficulté. (du moins c'est ce que nous pensons)

Un tableau 3.2.3 récapitulatif est dressé à cet effet montrant les résultats obtenus par condensation de la taille initiale de la rigidité.

#### *remarque*

*Les 5 matrices de rigidités condensées des super-éléments existent sur listing .DAT après avoir exécuté ABAQUS en définissant la classe du VMBATCH F ou G 60 à 1200 mn CPU (selon la disponibilité), mais non présentées dans la thèse pour des raisons de commodités.*

	demi tourill	maneto	bras	disque jonction	vileb- requin
A	nombre élément	30	60	188	42
	nombre noeuds	258	407	1070	309
	nombre ddl	774	1221	3210	927
B	nombre noeuds	19	32	26	32
	nombre ddl	57	96	78	96

	nombre constit	8	4	8	8+8	
	total élément	240	240	1504	672	2656
C	total noeuds	2064	1628	8560	4944	17296
	total ddl	6192	4884	25680	14832	51888
D	cond tot nod	152	128	208	512	1000
	cond tot ddl	456	384	624	1536	3000

A - avant condensation

B - après condensation

C - total avant condensation

D - total après condensation

TABLEAU 3.2.3 (récapitulation)

RESULTATS DE LA CONDENSATION

SUR LE VILEBREQUIN

- DISCUSSIONS ET PERSPECTIVES  
DU MODEL -

Dans le présent chapitre , nous présenterons les possibilités d'utilisation du modèle du vilebrequin formulé. Malheureusement cette partie n'a pu être traitée numériquement faute de moyens, nous nous contentons alors de dresser les perspectives d'utilisation du maillage et du modèle condensé.

4.1 SIMULATION STATIQUE DU VILEBREQUIN

On peut ( c'est ce qu'on a voulu faire ) faire une analyse statique des contraintes du vilebrequin en le chargeant d'efforts venant de la bielle calculés au chapitre 1.2 , et étant donné que cet effort est fonction de l'angle de rotation  $\theta$ , donc son point d'application est aussi fonction de  $\theta$ , nous avons prévu sur notre modèle au niveau du maneton 6 noeuds à la périphérie ce qui nous permettra alors d'effectuer 12 chargements représentant les 2 tours du vilebrequin , on doit donc résoudre le système suivant 12 fois :

$$[ K^* ] ( U ) = ( F^* ) , \quad i=1,12 \quad 4.1$$

avec un pas d'angle de rotation  $\theta = 60^\circ$

La manière d'appliquer l'effort (  $F^*$  ) a été expliquée en chapitre 1.2 , en tenant compte de l'ordre d'allumage.

De cette façon nous aurons pour chaque effort appliqué une répartition tridimensionnelle des contraintes sur le modèle au niveau des noeuds conservés après condensation , grâce à cette répartition on localisera la zone à fort gradient , que nous soupçonnons être comme c'est le cas du vilebrequin du moteur de bateau étudié par les auteurs de l'article [1,2] , dans un des disques de jonctions prévu dans le maillage .

## 4.2 OPTIMISATION DE LA FORME DU RACCORD

Nous pouvons après avoir localiser la zone (dans le disque de jonction) procéder à l'optimisation de la forme du raccord, ceci par l'isolation du disque en appliquant sur sa frontière les résultats des efforts de la première analyse statique. On voit ainsi tout l'intérêt du premier maillage en sous-structure. L'utilisation des équations qui ont été éliminées permet de réduire le domaine de la réanalyse de la zone par un nouveau isolement qui dans ce cas sera très réduit (un ou deux éléments C3D20 dégénérés en C3D15 du 4<sup>e</sup> niveau du premier maillage), dans ce cas un raffinement du maillage s'impose. *fig 4.1*. On changera le maillage jusqu'à obtenir une répartition optimale des contraintes, mais il faut penser à la réalisation dans l'atelier de fabrication de la forme obtenue. *fig 4.2*

## 4.3 LE MODELE DYNAMIQUE

Le modèle statique reste insuffisant pour refléter l'effet de l'environnement sur le vilebrequin, surtout l'effet de la lubrification, des excitations externes autre que celles venant de la chambre de combustion (utiliser dans le modèle statique) comme l'effet du volant d'inertie, etc...

Après connaissance de cet environnement, la simulation peut être utilisée sur le modèle dynamique pour le calcul des contraintes (vibrations de flexion et de torsion). Ce modèle se met sous la forme : (forme condensée)

$$[ M ] ( \ddot{U} ) + [ C ] ( \dot{U} ) + [ K ] ( U ) = ( F(t) ) \quad 4.2$$

ou

[ M ] matrice masse condensée

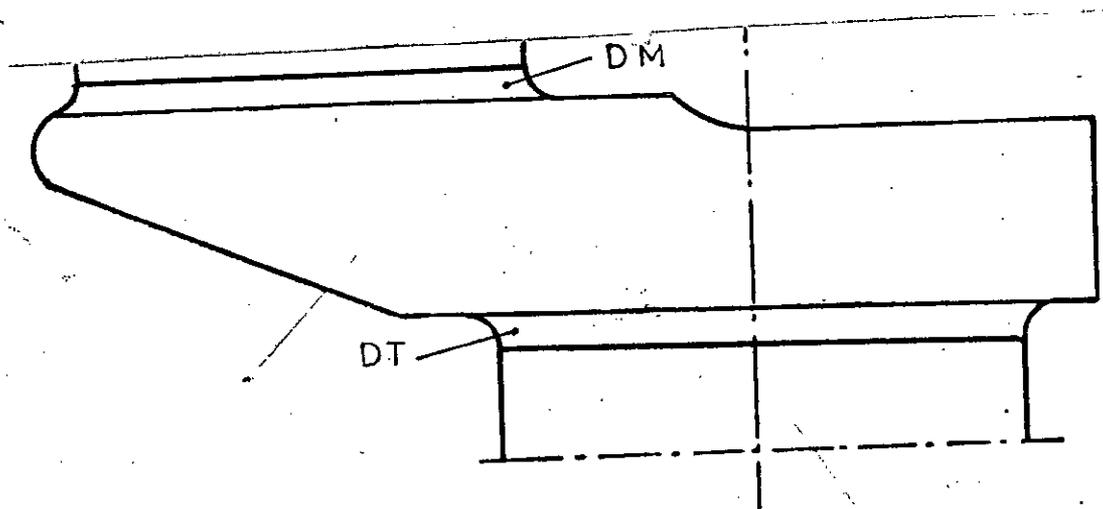
[ C ] matrice amortissement

[ K ] matrice rigidité condensée (déjà obtenue)

( F(t) ) excitation externe ; volant, suspension, combustion

( U ), (  $\dot{U}$  ), (  $\ddot{U}$  ) vecteur déplacement et ces dérivées

Il existe des techniques d'étouffement des vibrations pour atténuer leurs effets sur le vilebrequin : exemple de



Simulation puis Isolation

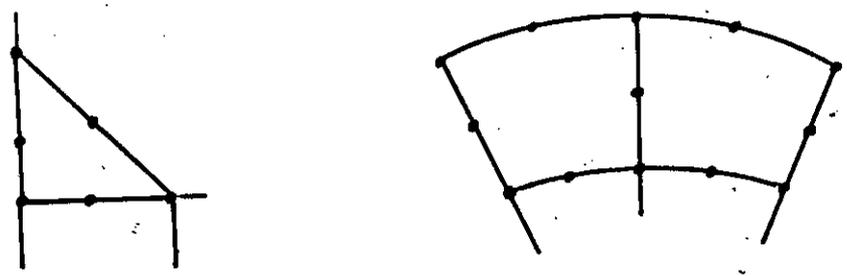
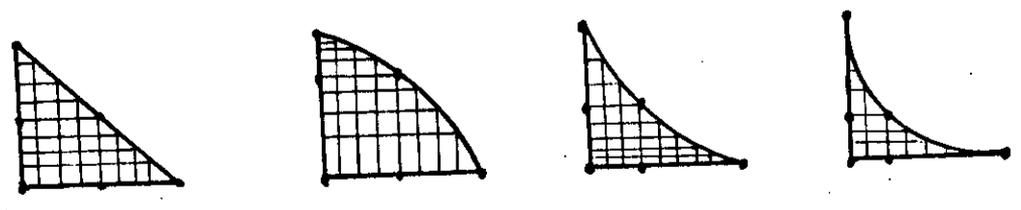


fig.4.1

RAFFINEMENT DU MAILLAGE DU RACCORD  
OPTIMISATION DE LA FORME DU RACCORD

fig.4.2



l'étouffeur de Lanchester [18], équilibrage par des masselottes.

Le calcul qui a été effectué sur la matrice de rigidité dans l'élaboration du modèle statique peut être extrapolé à la matrice masse du modèle dynamique [10,12,16,29,30], on peut citer les méthodes de calcul dynamique et détermination des valeurs propres suivantes :

- Sous-structure en dynamique
- Condensation de Guyan
- Méthodes de calcul des valeurs propres :
  - méthode d'itération inverse
  - méthode de Rayleigh-Ritz
  - méthode de sous espaces

Avec les matrices [ M ] et [ K ] seulement nous pouvons donc déterminer les valeurs propres du système 4.2 par le calcul de :

$$\det \left| [ K ] - \omega^2 [ M ] \right| = 0 \quad 4.3$$

Cette manière de calcul des valeurs propres  $\omega$  est assez coûteuse (si nous voulons calculer seulement les valeurs propres) car il existe des modèles plus simple [3,8] donnant des résultats satisfaisants :

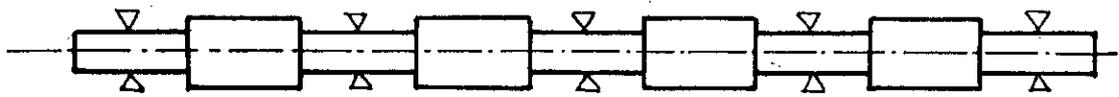
On peut citer comme exemple le modèle d'arbre sans ramification pour le calcul des vibrations de torsion et de flexion fig 4.3. Mais l'utilisation de la MEF pour le modèle dynamique reste nécessaire pour la détermination des contraintes dynamique dans le vilebrequin .

#### 4.4 EXTRAPOLATION DES RESULTATS DU MODELE STATIQUE

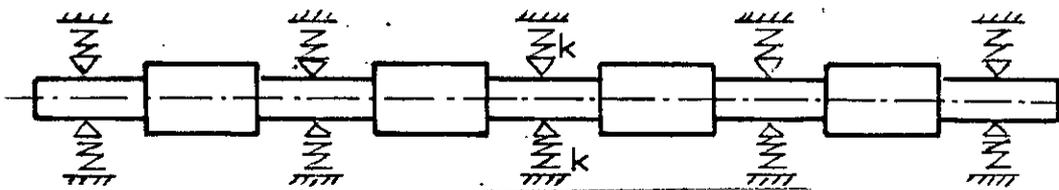
Lors de la détermination des matrices de passages [ P ] au chap 3.3, nous avons pensé à la possibilité d'utiliser les résultats obtenus pour d'autres types de vilebrequins

##### 4.4.1 EXTRAPOLATION DES RESULTATS A D'AUTRES VILEBREQUINS

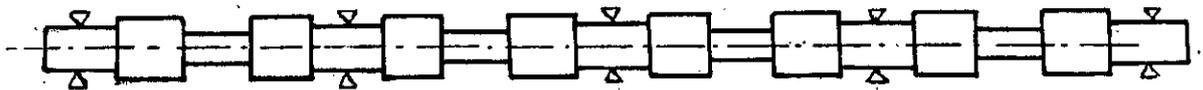
Si nous avons à mailler un autre vilebrequin, on peut moyennant la définition d'une transformation ponctuelle (homothétie) utiliser les résultats du maillage du vilebrequin F4L912 (pris comme référence) sans pour autant procéder au



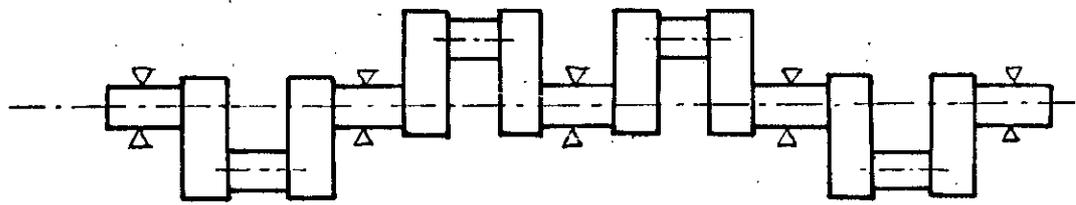
modèle [ a ] sur appuis rigide



modèle [ b ] sur appuis élastique



modèle [ c ] sur appuis rigide ou élastique



modèle [ d ] coudé sur appuis rigide ou élastique

fig.4.3

MODELE D'ARBRE SANS RAMIFICATION.

maillage du nouveau vilebrequin . Quelle que soit la forme du vilebrequin ,il est composé d'un nombre finis de tourillons, manetons et de bras .

Ce qui permettra à cette étude de ne pas être limitative au seul vilebrequin F4L912 .

a -> manière de procéder

Nous pouvons définir la rigidité condensée de chaque constituant par la transformation ponctuelle de la rigidité condensée du constituant similaire du vilebrequin F4L912 . Une fois les rigidités déterminées ,on reprendra l'assemblage après avoir défini de nouveau les matrices de passage selon les symétries dans le nouveau vilebrequin ,ainsi l'homothétie s'appliquera alors seulement aux 5 constituants organigramme fig 4.4

Donc on procède en 2 étapes :

### 1<sup>ère</sup> ETAPE

détermination de la rigidité des constituants référentiels du vilebrequin

Comme ca été fait pour le vilebrequin F4L912 ,nous choisirons des constituants de références pour le vilebrequin à étudier .La rigidité de ses constituants sera déterminer à partir de celle du F4L912 par la transformation [ H ] (au niveau d'un noeud) suivante :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad 4.4$$

$$( X' ) = [ H ] ( X )$$

où les termes de [H ] seront définit par les dimenssions des costituants du vilebrequin à étudier.

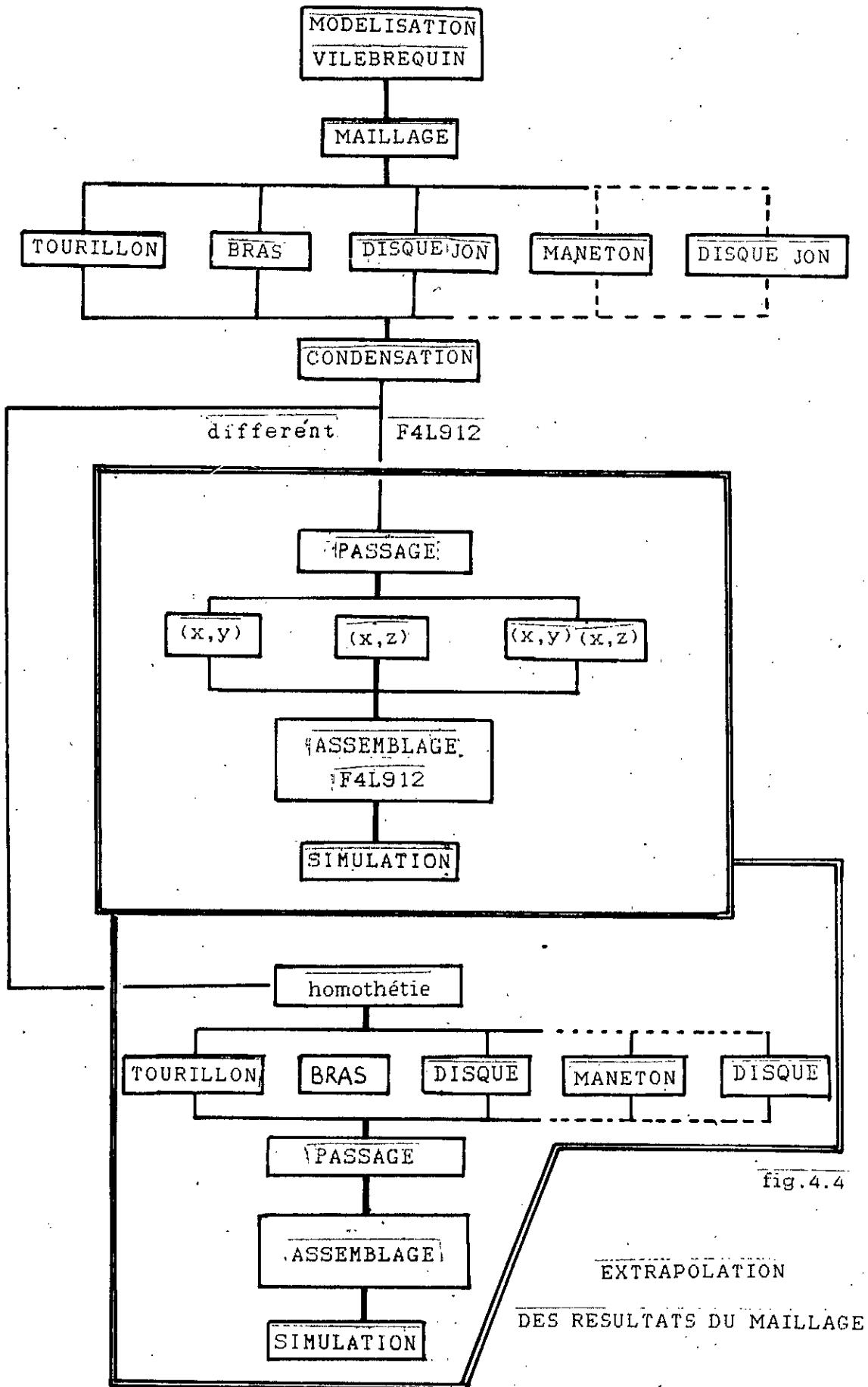


fig.4.4

FORMES DES MATRICES [ H ]

Pour tourillon [ H ]<sub>t</sub> = 
$$\begin{bmatrix} R_t/R_{tr} & 0 & 0 \\ 0 & R_t/R_{tr} & 0 \\ 0 & 0 & L_t/L_{tr} \end{bmatrix} \quad 4.5$$

Pour le maneton [ H ]<sub>m</sub> = 
$$\begin{bmatrix} R_m/R_{mr} & 0 & 0 \\ 0 & R_m/R_{mr} & 0 \\ 0 & 0 & L_m/L_{mr} \end{bmatrix} \quad 4.6$$

Pour le disque de jonction DT [ H ]<sub>dt</sub> = 
$$\begin{bmatrix} R_t/R_{tr} & 0 & 0 \\ 0 & R_t/R_{tr} & 0 \\ 0 & 0 & L_{dt}/L_{dtr} \end{bmatrix} \quad 4.7$$

Pour le disque de jonction DM [ H ]<sub>dm</sub> = 
$$\begin{bmatrix} R_m/R_{mr} & 0 & 0 \\ 0 & R_m/R_{mr} & 0 \\ 0 & 0 & L_{dm}/L_{dmr} \end{bmatrix} \quad 4.8$$

où

$R_t, L_t / (R_{tr}, L_{tr})$  rayon et longueur du tourillon (de référence)

$R_m, L_m / (R_{mr}, L_{mr})$  rayon et longueur du maneton (de référence)

$L_{dt} / (L_{dtr})$  longueur du disque de jonction avec le tourillon (de référence)

$L_{dm} / (L_{dmr})$  longueur du disque de jonction avec le maneton (de référence)

Pour le bras c'est un peu plus compliqué, car les noeuds de liaisons ne se trouvent pas sur le même rayon, il faut donc distinguer les noeuds de liaison avec le tourillon et les noeuds de liaison avec le maneton. On définira pour cela 2 transformations selon la position du noeud.

Noeuds de liaison avec le tourillon

$$[ H ]_{bt} = \begin{bmatrix} R_t/R_{tr} & 0 & 0 \\ 0 & R_t/R_{tr} & 0 \\ 0 & 0 & L_b/L_{br} \end{bmatrix} \quad 4.9$$

Noeuds de liaison avec le maneton

$$[ H ]_{bm} = \begin{bmatrix} R_m/R_{mr} & 0 & 0 \\ 0 & R_m/R_{mr} & 0 \\ 0 & 0 & L_b/L_{br} \end{bmatrix} \quad 4.10$$

où

$L_b / (L_{br})$  longueur du bras (de référence)

Ainsi pour le bras , on distingue 2 familles de noeuds et

$$\text{Pour le bras } [ H ]_b = \left[ \begin{array}{c|c} [ H ]_{br} & 0 \\ \hline 0 & [ H ]_{bm} \end{array} \right] \quad 4.11$$

Les matrices  $[ H ]$  définies pour un noeud permet de former les matrices de transformation  $[ T ]$  pour l'ensemble du constituant selon le type de ce dernier

La rigidité condensée du constituant considéré s'obtient par:

$$[ k' ]_E = [ T ]_E^T [ K ]_E [ T ]_E \quad 4.12$$

où

$$[ T ]_E = \begin{bmatrix} [ H ]_E & & \text{zero} \\ & [ H ]_E & \\ \text{zero} & & [ H ]_E \end{bmatrix} \quad 4.13$$

où

$E = t, m, dt, dm, b$  : les 5 constituants

## 2<sup>ème</sup> ETAPE

### Détermination de la rigidité pour l'ensemble du vilebrequin

Une fois les rigidités de références établis et comme c'était le cas pour le F4L912 ,on définit des matrices de passage [ P ] à partir des symétries entre les différents constituants par rapport à ceux pris comme références

Cette symétrie peut se déduire facilement selon le nombre de cylindres et leurs orientation dans le moteur : 4 cylindres en ligne , 6 cylindres en ligne ou en V , 10 cylindres ....

On aura ainsi les rigidités par :

$$[ K' ] = [ P ]^T [ K ] [ P ] \quad 4.14$$

( comme l'exemple du vilebrequin F4L912 )

Les 2 étapes pour la détermination de la rigidité globale condensée d'un vilebrequin pour une analyse statique sans procédé à un nouveau maillage ( l'utilisation de celui du F4L912 suffit ) sont reprise sur le schéma de la fig 4.4

#### 4.4.2 EXTRAPOLATION DES RESULTATS A DES STRUCTURES CYLINDRIQUES

Toujours par la définition de l'homothétie [ T ] ,on peut imaginer la possibilité d'extrapoler les résultats du maillage du maneton ou tourillon à des structures de forme cylindrique ,il suffit d'avoir les dimensions de cette dernière .

Par exemple on peut cité : poulie - arbre de transmission ...

## CONCLUSION

Dans cette thèse ,le maillage du vilebrequin n'était pas un but en soit , nous avons voulu connaître les difficultés du maillage et de la résolution statique (dynamique) pour des structures de forme complexe rencontrées dans la construction mécanique ,le vilebrequin en est une qui est utilisé dans des conditions sévères de chargement.

Au départ nous voulions optimiser ,de point de vu dimension la forme du raccord (disque de jonction) qui est sujet à des forts gradients de contraintes ,mais cette partie du vilebrequin est une partie intégrante de ce dernier d'une part ,et l'utilisation de la méthode des éléments finis nécessite l'application des conditions aux limites de la structure à étudier ,s'est pourquoi l'isolement du disque était nécessaire, mais comment ?

Nous avons ainsi procédé au maillage en sous-structures du vilebrequin pour arriver à ce but ,en plus des avantages que présente cette manière de procéder .

Nous avons donc utilisé des techniques de stockage et de résolution pour des systèmes à grand nombre de degrés de liberté dans un but d'optimisation du temps de calcul.

Ce travail donne un aperçu sur un certain nombre de ces techniques utilisées dans ce cas de situations .

La première optimisation vient du temps d'entrée de données vu que le maillage en sous-structures permet d'éviter la répétition de formes identiques comme c'est le cas du vilebrequin ,nous avons ainsi maillé cinq (5) formes différentes sur les 36 formes initiales. La détermination de leurs maillage (rigidité) se fera par la transformation ponctuelle [P] de passage.

La seconde optimisation vient de l'utilisation de la condensation dans la résolution avant assemblage des sous-structures, et nous avons réussi de réduire d'une manière considérable la taille du système d'équations initial de 1/17° (59%) sans pour autant perdre dans la précision des résultats.

La dernière optimisation vient de la possibilité d'extrapoler les résultats du maillage (les rigidités condensées) à d'autres types de vilebrequin ou toute autres structures de forme semblable à l'un des constituants du vilebrequin moyennant la définition d'une transformation ponctuelles Homothétie .

Nous souhaitons que ce travail donnera une idée sur les techniques d'analyse (traitement) des structures de forme complexe . Seulement ,il reste à effectuer la simulation statique du modèle condensé et l'optimisation de la forme du raccord ,ainsi que la réalisation du modèle complet (dynamique) en suivant la façon avec laquelle a été réalisé le modèle statique . Cette partie donc peut être reprise dès que les moyens mis à notre disposition le permettent .

- POLYNOME DE LAGRANGE  
ET DE HERMITE -

Ces types de polynomes permettent la définition d'une interpolation nodale au niveau de l'élément dans un but d'améliorer la précision de cette dernière (selon le corollaire de la précision) soit par augmentation de degré de liberté du polynome, soit par augmentation du nombre de variables nodales.

Le corollaire donnant l'erreur est :

$$\|e\| \leq \|u - u_x\| c h^{k+1-m} \|u_x\| \quad A.1$$

où

- c : coefficient indépendant de l'élément
- k : degré du polynome d'interpolation
- m : ordre des dérivées apparaissant dans l'expression des variables nodales
- h : la taille de l'élément

A.1 - L'INTERPOLATION DE LAGRANGE (Problème de classe  $C^0$ )

L'interpolation augmente le nombre de noeuds de l'élément ( $k \rightarrow n$ )  
Pour n noeuds d'interpolation le polynome de Lagrange  $l_i$  de degré  $n-1$  s'écrit alors :

- pour un élément à une dimension

$$N_i(r) = l_i(r) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{r_j - r}{r_j - r_i} \quad A.2$$

pour un élément plan, dans ce cas l'interpolation est le produit de 2 polynomes de Lagrange

$$N_i(r, s) = l_a(r) \cdot l_b(s) \quad A.3$$

où  $i$  est la position du noeud dans le plan par rapport à la position des 2 noeuds des éléments unidimensionnel le formant.

- pour un élément de volume (cas général)

$$N_i(r, s, t) = l_i(r) l_j(s) l_k(t) \quad A.4$$

### A.2 INTERPOLATION DE HERMITE [31] (Problème de classe $C^1$ )

Cette interpolation permet d'augmenter le nombre de variables nodales au niveau d'un noeud donc on ajoute à  $u_i$  :  $\partial u_i / \partial x$ ,  $\partial^2 u_i / \partial x^2$  ... pour formuler ce polynôme : Soit la fonction  $f$  et sa dérivée  $f'$  connues en  $(n+1)$  points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  le polynôme de Hermite de degré  $2n+1$  s'écrit alors :

$$y(x) = f(x) = \sum_{i=0}^n h_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^n H_i(x) f'(x_i) \quad A.5$$

Cherchons alors les expressions des  $(n+1)$  fonctions  $h_i(x)$  et  $H_i(x)$  telque :

$$\begin{array}{ll} h_i(x_j) = \delta_{ij} & H_i(x_j) = 0 \\ \text{dérivée} \quad h'_i(x_j) = 0 & H'_i(x_j) = \delta_{ij} \end{array} \quad A.6$$

$$\begin{array}{ll} \text{de plus} & h_i(x) = \omega_i(x) l_i^2(x) \\ & H_i(x) = z_i(x) l_i^2(x) \end{array} \quad A.7$$

alors si  $l_i(x)$  est le polynôme de Lagrange de degré  $n$   
 $\omega_i(x)$  est de degré 1 et  $z_i(x)$  l'est aussi  
 par identification des équations A.6 et A.7 on a :

- détermination de  $\omega_i$

$$\omega_i(x) = 1 - 2(x-x_i) l'_i(x_i) \quad A.8$$

- détermination de  $z_i$

$$z_i(x) = (x-x_i) \quad A.9$$

d'où le polynôme de Hermite

$$\begin{aligned} y(x) = & \sum_{i=0}^n (1 - 2(x-x_i) l'_i(x_i)) l_i^2(x) f(x_i) + \\ & + \sum_{i=0}^n (x-x_i) l_i^2(x) f'(x_i) \end{aligned} \quad A.10$$

**- INTEGRATION NUMERIQUE -**  
 [ 12 , 13 , 16 , 26 ]

L'integration numérique permet d'éviter le calcul d'intégrale qui dans le cas de la détermination de la matrice de rigidité est très difficile vu la forme des matrices [ B ]. L'évaluation numérique de l'intégrale se fait par sommation d'aires sur un polynôme qui "passe" par certains points de la fonction à intégrer initialement. Selon le choix du polynôme, et des points d'intégration on a deux (2) méthodes (principalement) :

**B.1 - METHODE DE NEWTON - COTES**

Les points où la fonction est calculée sont définis à intervalles réguliers (équidistants), il faut n valeurs de la fonction pour définir un polynôme de degré (n-1), ainsi :

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad \text{B.1}$$

Les valeurs des poids  $H_i$  sont tabulées et sont déterminées par le polynôme de Lagrange :

$$H_i = \int_{-1}^1 l_i(\xi) d\xi \quad \text{B.2}$$

L'approximation B.1 à une erreur de l'ordre n

**B.2 - METHODE DE GAUSS - LEGENDRE**

Dans ce cas les points d'intégration sont déterminés de façon à améliorer la précision de l'approximation, donc nous avons 2n inconnues pour déterminer la position des points  $(\xi_i, f(\xi_i))$  (n pour déterminer  $\xi$  et n pour leurs images  $f(\xi_i)$ ), c'est pourquoi il nous faut un polynôme d'approximation de degré 2n-1 et ainsi l'erreur de la méthode est de l'ordre 2n.

On utilise pour l'approximation de la fonction le polynôme de Legendre :

$$P(\xi) = \prod_{i=1}^n (\xi - \xi_i) \quad \text{B.3}$$

en écrivant le développement en série  $f(\xi)$  sous la forme

$$f(\xi) = \varphi(\xi) + P(\xi) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \xi^i \right) \quad \text{B.4}$$

ou

$\varphi(\xi)$  est un polynôme de degré  $n-1$  utilisant le polynôme de Lagrange

ainsi

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n f_j \left( \int_a^b 1(\xi) d\xi \right) + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \left( \int_a^b \xi^j P(\xi) d\xi \right) \quad \text{B.5}$$

les valeurs de  $\xi$  sont calculés à partir de la condition :

$$\int_a^b \xi^k P(\xi) d\xi = 0 \quad \text{avec } k = 0, n-1 \quad \text{B.6}$$

qui sont donc tabulées

intégration à 1D

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad \text{B.7}$$

intégration à 2D

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_i, \eta_j) \quad \text{B.8}$$

intégration à 3D

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad \text{B.9}$$

Si l'intégration se fait sur un intervalle  $[a, b]$ , le changement suivant doit alors se faire :

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i \quad \text{B.10}$$

$$H'_i = \frac{b-a}{2} H_i$$

La substitution de l'intégration exacte par une intégration numérique introduit une erreur qu'il faut minimiser, pour cela on doit connaître la condition minimale d'intégration assurant la convergence, par la connaissance du nombre de points d'intégration évaluant exactement le volume de l'élément [13].

$$\int_V dv = \int_V \det(\mathcal{J}) dr ds dt \quad \text{B.11}$$

Cette condition peut s'avérer insuffisante dans certains cas, car ce nombre est fonction du type d'élément. Avec l'intégration exacte, pour les problèmes bien conditionnés la matrice de rigidité [K] est non singulière ainsi la solution est unique. Mais dans le cas de l'utilisation de l'intégration numérique avec un ordre d'intégration faible peut aboutir à [K] singulière malgré l'introduction des CL. Il est difficile de certifier qu'aucune singularité ne surviendra lors du calcul.

Dans certains cas on utilise l'intégration dite réduite dans le but de réduire le temps de calcul, mais ceci est possible si l'introduction de la méthode numérique ne provoque pas une singularité. On a dans ce cas un phénomène dit de "hourglassing" (phénomène du sablier).

Enfin on peut remarquer que la précision de l'intégration numérique diminue quand la déformation (dans la géométrie) de l'élément augmente.

- LES EQUATIONS DE LIAISON -

Etant donné que nous avons utilisé la directive \*MPC d'ABAQUS pour les raisons déjà citées et pour comprendre le but et la façon avec laquelle cette directive est introduite dans le calcul de la rigidité , cette annexe a pour objective la clarification de ce problème de point de vu théorique .

C.1 INTRODUCTION

Les équations de liaison définissent des relations entre certains ddl en plus des équations de base de la MEF .Elles sont utilisées dans plusieurs cas de l'analyse de structure ,comme exemple on peut citer :

- connexion de noeuds ne repondant pas au même souci d'analyse (élément de flexion avec élément solide )
- raffinement d'un maillage dans une zone donnée par introduction de noeuds le long du côté des éléments
- définition de conditions aux limites spéciales pour la mécanique de la rupture
- l'analyse des matériaux composites ...

C.2 -METHODES UTILISEES

Il y a plusieurs façons d'introduire ce type d'équations dans le système d'équations globales définissant la structure ,nous avons alors : [11,15,20,21]

- Méthode de transformation des matrices par condensation statique
- Méthode de manipulation des matrices ( ABEL & SHEPHARD )
- Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE
- Méthode des pénalités

Les 2 premières méthodes sont similaires ,elles ne diffèrent que par la façon d'introduire leurs algorithmes dans un programme MEF .

a -> Méthode de transformation de matrices [20]

La méthode repose sur la condensation des ddl (méthode citée au chap 3.1) ou il faut définir autant d'équations de liaison que de noeuds à condenser.

Il s'agit de la simple condensation qui nécessite des opérations assez coûteuses en plus d'une entrée de données supplémentaire (que l'on condensera).

b -> Méthode d'ABEL et SHEPHARD [20]

Dans cette méthode, les auteurs s'inquiètent seulement sur la possibilité de l'implantation des équations dans les programmes existants sans modifications majeures.

considérons l'équation de liaison linéaire suivante :

$$(D_k) = [A] (D_j) + (B) \quad C.1$$

où

(D\_k) : vecteur contenant les DDL concernés par les équations

(D\_j) : vecteur additionnel de DDL permettant la définition des équations

[A] et (B) : matrices donnant la valeur de ses équations

Partageons le vecteur déplacement inconnu en :

$$(D) = ( \underset{L}{D_i}, \underset{L}{D_j}, \underset{L}{D_k} ) \quad C.2$$

avec (D) vecteur non concerné par les équations.

L'équation statique de la MEF  $[K] (U) = (F)$  s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{ik} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jk} \\ K_{ki} & K_{kj} & K_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} a \\ b \cdot C.3 \\ c \end{matrix}$$

Les équations de liaison sont alors introduites par substitution de C.1 dans C.3 a et b et le remplacement de C.3 c par C.1 ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij}+K_{kk} A & 0 \\ K_{ji} & K_{jj}+K_{jj} A & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i - K_{ik} B \\ F_j - K_{jk} B \\ B \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} a \\ b \text{ C.4} \\ c \end{matrix}$$

Mais dans ce cas malgré l'introduction des équations on perd la symétrie de la rigidité. pour lui rendre cette propriété très utile de point de vu numérique, on multipli C.3 c par  $[A]^T$  et on ajoute le résultat à C.4 b de plus on multipli C.4 c par  $-K_{kk}$ , nous aurons ainsi :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij}+K_{ik} A & 0 \\ K_{ji}+A^T K_{ki} & K_{jj}+K_{jj} A + A^T K_{kj} & A^T K_{kk} \\ 0 & K_{kk} A & -K_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i - K_{ik} B \\ F_j - K_{jk} B + A^T F_k \\ -K_{kk} B \end{Bmatrix} \quad \text{C.5}$$

ainsi la méthode présentée permet d'introduire les équations, en plus il est facile de l'implanter dans un programme classique en modifiant les termes de la rigidité selon l'équation C.5

c -> Multiplicateur de LAGRANGE [11,15,20]

La méthode repose sur la formulation mixte de la MEF (chap 2.1) dans laquelle les équations augmentées de contraintes expriment la liaison, ainsi les inconnues sont les déplacements et les contraintes.

L'expression de l'énergie dans le cas d'une formulation déplacement étant :

$$\Pi = 1/2 (U)^T [K] (U) - (U)^T (F) \quad \text{C.6}$$

Les (r) équations de liaison peut être exprimer sous la forme

$$\begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} \quad \text{C.7}$$

$\begin{matrix} r, n & n, 1 & r, 1 \end{matrix}$

Ainsi l'expression de l'énergie augmentée  $\Pi^*$  qui tient compte des liaisons C.7 se met sous la forme :

$$\Pi^* = \Pi + m [ G ] \quad \text{C.8}$$

les inconnues de l'équation C.8 sont le déplacement ( U ) et les multiplicateurs de LAGRANGE m

- cas d'une seule équation de liaison ( introduction d'une condition au limite )

Si nous prenons le cas d'une seule équation de liaison qui dans ce cas peut exprimer une condition au limite pour le DDL (n°:a)

$$( 1a )^T ( d ) = q \quad \text{C.9}$$

avec  $( 1a )^T = ( 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 )$   
 $a^* \hat{=} rme$

La minimisation de  $\Pi$  qui tient compte de C.9 donc  $d\Pi = 0$  donne:

$$[ K ] ( U ) + m ( 1a ) = ( F ) \quad a \quad \text{C.10}$$

$$\text{et} \quad ( 1a )^T ( U ) = q \quad b$$

Nous constatons, de l'équation C.10.a que le multiplicateur m de LAGRANGE a le sens d'une force, l'écriture de l'équ C.10 sous forme matricielle donne :

$$\begin{bmatrix} [ K ] & ( 1a ) \\ ( 1a )^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ( U ) \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ( F ) \\ q \end{Bmatrix} \quad \text{C.11}$$

- cas général d'introduction des liaisons

Dans ce cas l'équation C.11, en tenant compte de C.7 se met sous la forme

$$\begin{bmatrix} [ K ] & [ G ] \\ [ G ]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ( U ) \\ ( m ) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ( F ) \\ ( q ) \end{Bmatrix} \quad \text{C.12}$$

Cette équation est un modèle de la formulation mixte déplacement - contrainte .

L'inconvénient de la méthode est l'augmentation de la taille du système à résoudre.

d-) Méthode des pénalités (penalty's method) [15,16]

La méthode peut être vue comme une approximation de celle de LAGRANGE, pour cela nous définissons l'expression de l'énergie augmentée :

$$\Pi^* = 1/2 (UD)^T [K] (UD) - (UD)^T (CF) + \alpha/2 ( [G] (UD) - (cq) ) ( (UD)^T [G]^T - (cq)^T ) \quad C.13$$

De l'équation C.13 si on choisit un  $\alpha$  assez grand sans pour autant que  $\Pi^*$  augmente il faut que le terme  $[G] (UD) - (cq)$  soit le plus petit possible, donc de vérifier  $[G] (UD) = (cq)$

$\delta \Pi^* = 0$  donnera :

$$\delta \Pi^* = \delta (UD)^T [K] (UD) - \delta (UD)^T (CF) + \alpha/2 \left\{ ([G] \delta (UD)) ((UD)^T [G]^T - (cq)^T) \right\} + \alpha/2 \left\{ ([G] (UD) - (cq)) (\delta (UD)^T [G]^T) \right\} = 0 \quad C.14$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} [K] \\ n,n \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} [G]^T \\ n,r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [G] \\ r,n \end{pmatrix} (UD) = (CF) + \alpha [G]^T (cq) \quad C.15$$

d'où

$$\begin{pmatrix} [K^*] \\ n,n \end{pmatrix} (UD) = (F^*) \quad C.16$$

avec

$$\begin{aligned} [K^*] &= [K] + [G]^T [G] \\ (F^*) &= (CF) + \alpha [G]^T (cq) \end{aligned} \quad C.17$$

Ainsi par le choix du terme de pénalité  $\alpha$  on peut introduire la liaison, mathématiquement il faut  $\alpha \rightarrow \infty$  pour l'égalité C.7 soit satisfaite exactement, mais pour éviter des problèmes numériques et selon la précision de l'ordinateur [16,17] on prendra  $\alpha$  de l'ordre de  $10^3 (\max K_{ii})$ .

La méthode à l'avantage la conservation la taille du système , mais elle influe sur la largeur de la bande ,c'est pourquoi la résolution de C.16 par la méthode frontale est souhaitée .

### C.3 DETERMINATION DES EQUATIONS DE LIAISON MPC

Après avoir montré comment introduire ces équations dans la formulation MEF ,nous essayons dans ce paragraphe de définir explicitement ses équations ( définir la matrice [G] ) dans le cas qui nous intéresse : la liaison \*MPC définie entre l'élément central C3D15 et 2 éléments C3D20 dans le maillage du tourillon, maneton, et disque de jonction .

Reprenons le lieu de cette liaison fig C.1 ,en se plaçant sur la frontière commune a - c ,nous avons 2 noeuds p et q qui doivent suivre exactement par leurs coordonnées (positions) et leurs déplacements les noeuds fictifs p' et q' pour assurer la continuité sur cette frontière .

Il faut donc :

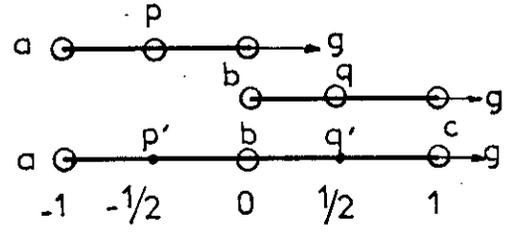
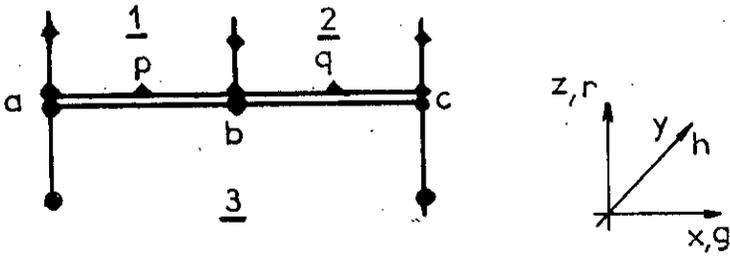
- égaliser les coordonnées et les déplacements du noeud p de l'élément 1 à celui du noeud p' de l'élément 3
- égaliser les coordonnées et les déplacements du noeud q de l'élément 2 à celui du noeud q' de l'élément 3

a -> pour les noeuds p et p' :

Nous avons dans l'élément 3 sur le coté a - c

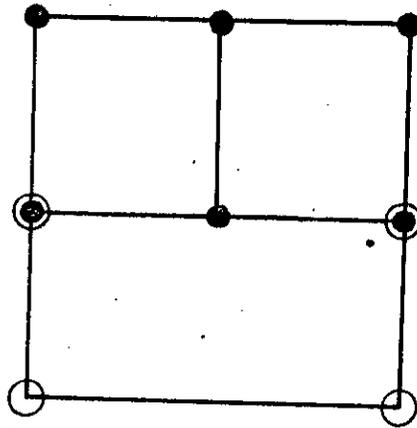
$$h = 0 \quad \text{et} \quad r = +1$$

le noeud p' est défini par : ses coordonnées



MPC type 2

fig. C.1



$$\begin{Bmatrix} x(g, h, r) \\ y(g, h, r) \\ z(g, h, r) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_a(g, 0, 1) \\ N_b(g, 0, 1) \\ N_c(g, 0, 1) \end{Bmatrix} \quad \text{C.18}$$

ses déplacements ( l'élément est isoparamétrique )

$$\begin{Bmatrix} u(g, h, r) \\ v(g, h, r) \\ w(g, h, r) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & w_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_a(g, 0, 1) \\ N_b(g, 0, 1) \\ N_c(g, 0, 1) \end{Bmatrix} \quad \text{C.19}$$

pour le noeud p' on a  $g = -1/2$   $h = 0$   $r = +1$   
 dans l'élément 1 les coordonnées et les déplacements sont connus

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} \quad \text{sont donc connus étant donné}$$

que le noeud p dans l'élément 1 est réel

En égalisant alors les coordonnées et déplacements de p et p'  
 on aura :

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_a(-1/2, 0, 1) \\ N_b(-1/2, 0, 1) \\ N_c(-1/2, 0, 1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{C.20}$$

équation de liaison pour coordonnées du noeud p

et

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & w_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_a(-1/2, 0, 1) \\ N_b(-1/2, 0, 1) \\ N_c(-1/2, 0, 1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{C.21}$$

équation de liaison pour les déplacements du noeud p

b -> pour les noeuds q et q'

on suit le meme raisonnement fait pour les noeuds p et p'

avec  $g = 1/2$   $h = 0$   $r = 1$

alors :

$$\begin{Bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_a C_{1/2, 0, 1} \\ N_b C_{1/2, 0, 1} \\ N_c C_{1/2, 0, 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{C. 22}$$

équation de liaison pour coordonnées du noeud q  
et

$$\begin{Bmatrix} u_q \\ v_q \\ w_q \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & w_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_a C_{1/2, 0, 1} \\ N_b C_{1/2, 0, 1} \\ N_c C_{1/2, 0, 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{C. 23}$$

équation de liaison pour les déplacements du noeud q

Ce raisonnement peut être extrapolé pour les noeuds p' et q' se trouvant de l'autre côté de l'élément C3D15 avec

$$g = \pm 1/2 \quad h = 1 \quad r = 1$$

Nous remarquons que pour la définition de ses équations nous avons besoin de connaître les coordonnées et les déplacements des 3 noeuds a, b, c :

C'est le cas de la dérivative \*MPC de type 2

c -> cas du noeud central j fig C.2

Pour cela on se place sur la surface a, b, c, d avec r = 1 seulement ; Le noeud j qui appartient aux éléments 1 et 2 doit être pris en considération dans l'interpolation de l'élément 3 sur la face de liaison pour assurer la continuité.

Dans ce cas il faut égaliser les variables de j et j'

$$\begin{Bmatrix} x_{(g, h, r)} \\ y_{(g, h, r)} \\ z_{(g, h, r)} \end{Bmatrix}_j \stackrel{\exists}{=} = \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \stackrel{1}{=} = \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \stackrel{2}{=} \quad \text{C. 24}$$

avec

$$\begin{Bmatrix} xC_{g,h,r} \\ yC_{g,h,r} \\ zC_{g,h,r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c & x_e & x_d & x_e & x_f & x_t \\ y_a & y_b & y_c & y_e & y_d & y_e & y_f & y_t \\ z_a & z_b & z_c & z_s & z_d & z_e & z_f & z_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} NaC_{g,h,r} \\ NbC_{g,h,r} \\ NcC_{g,h,r} \\ NeC_{g,h,r} \\ NdC_{g,h,r} \\ NeC_{g,h,r} \\ NfC_{g,h,r} \\ NtC_{g,h,r} \end{Bmatrix}$$

C.25

l'élément est isoparamétrique donc l'équation C.25 est identique pour le déplacement .

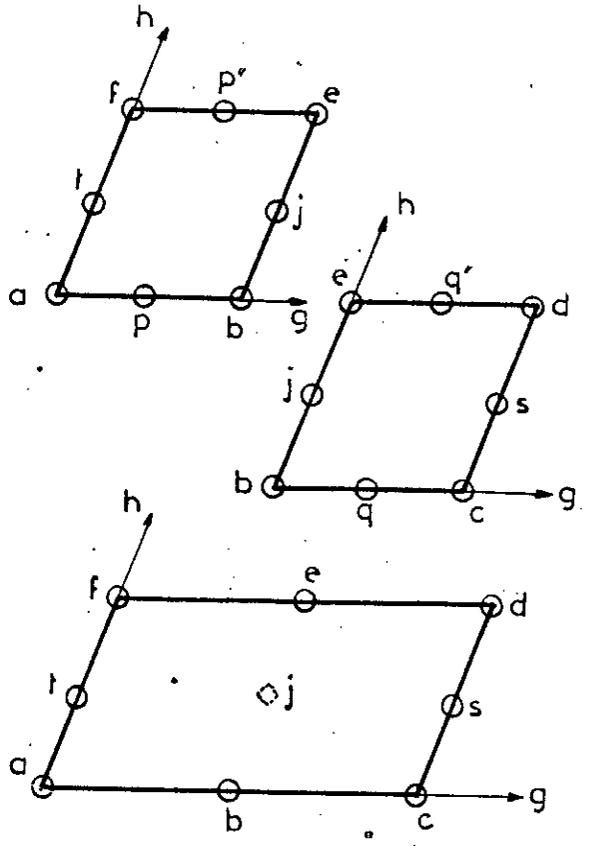
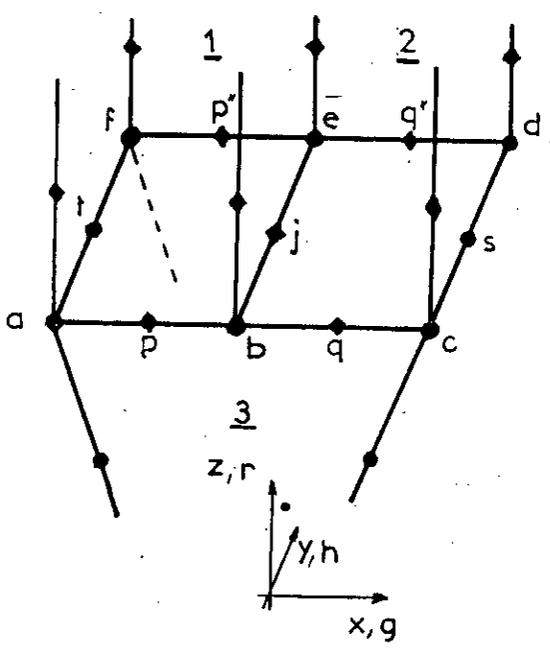
Dans le cas du noeud j on a  $g = 0$   $h = 0$   $r = 1$  et l'équation de liaison dans ce cas est de la forme

$$\begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c & x_e & x_d & x_e & x_f & x_t \\ y_a & y_b & y_c & y_e & y_d & y_e & y_f & y_t \\ z_a & z_b & z_c & z_s & z_d & z_e & z_f & z_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} NaC_{0,0,1} \\ NbC_{0,0,1} \\ NcC_{0,0,1} \\ NeC_{0,0,1} \\ NdC_{0,0,1} \\ NeC_{0,0,1} \\ NfC_{0,0,1} \\ NtC_{0,0,1} \end{Bmatrix}$$

C.26

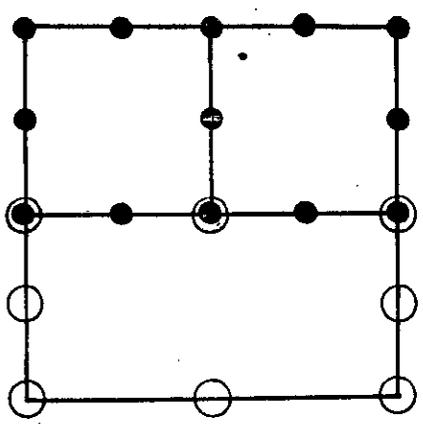
même chose pour le déplacement

Nous remarquons alors pour définir la directive \*MPC type 4 on a besoin de connaître les coordonnées et les déplacements de 8 noeuds sur la face de liaison .



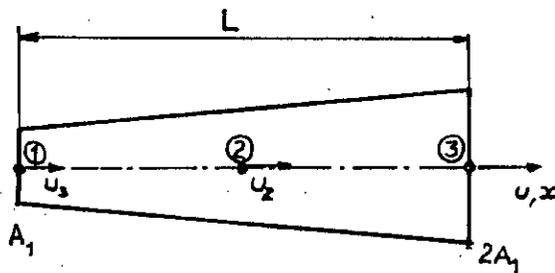
MPC type 4

fig c.2



- CONDENSATION STATIQUE  
ELIMINATION DE GAUSS -

Nous prenons un exemple de la barre à 3 noeuds *fig D.1* pour montrer le lien entre l'élimination de GAUSS et la condensation statique



*fig D.1*

Le noeud interne va être condensé selon l'algorithme vu au *chap 3.1* et comparer le résultats avec celui obtenu par l'élimination de GAUSS .

le système décrivant la structure est :

$$EA_1/6L \begin{bmatrix} 17 & -20 & 3 \\ -20 & 48 & -28 \\ 3 & -28 & 25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad D.1$$

a- ) condensation statique

Rangeons le système sous la forme  $\begin{Bmatrix} U_c \\ U_w \end{Bmatrix}$  pour utiliser l'algorithme de condensation

ainsi (permutation ligne/colonne 2 avec ligne/colonne 3) :

$$EA_1/6L \begin{bmatrix} 17 & 3 & -20 \\ 3 & 25 & -28 \\ -20 & -28 & 48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad D.2$$

donc

$$[K_{cc}] = \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 3 & 25 \end{bmatrix} \quad \# \quad [K_{ce}] = [K_{ec}]^T = \begin{bmatrix} -20 & -28 \end{bmatrix} \quad \# \quad [K_{ee}]^{-1} = (1/48)$$

alors:

$$[K_{cc}^*] = EA_1/6L \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 3 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 \\ -28 \end{bmatrix} (1/48) \begin{bmatrix} -20 & -28 \end{bmatrix}$$

$$(F_{c}^*) = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 \\ -28 \end{bmatrix} (1/48) (F_2)$$

d'où

$$[K_{cc}^*] = 13/9 EA_1/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D.3$$

$$(F_{c}^*) = \begin{Bmatrix} F_1 - 5/12 F_2 \\ F_3 - 7/12 F_2 \end{Bmatrix} \quad D.4$$

donc le système condensé est :

$$13/9 EA_1/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - 5/12 F_2 \\ F_3 - 7/12 F_2 \end{Bmatrix} \quad D.5$$

$$\text{et } (U_2) = 1/24 ( 3L/EA_1 F_2 + 10 U_1 + 14 U_3 ) \quad D.6$$

b -> élimination de GAUSS

On élimine le lien entre les variables  $U_1, U_3$  avec  $U_2$  en ayant des zéros dans la colonne contenant le pivot de  $U_2$  ainsi l'équation D.1 devient :

$$EA_1/6L \left[ \begin{array}{cc|c} 17 - 20(20/48) & 0 & 3 - 20(28/48) \\ -20 & 48 & -28 \\ 3 - 20(20/48) & 0 & 25 - 28(28/48) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + 20/48 F_2 \\ F_2 \\ F_3 + 28/48 F_2 \end{Bmatrix} \quad D.7$$

En séparant maintenant les équations de  $U_1$  et  $U_3$  de celle de  $U_2$  on obtient :

$$13/9 EA_1/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - 5/12 F_2 \\ F_3 - 7/12 F_2 \end{Bmatrix} \quad D.8$$

et

$$(U_2) = 1/24 ( 3L/EA_1 F_2 + 10 U_1 + 14 U_3 ) \quad D.9$$

On remarque que les équations D.5--D.6 sont identiques à D.8--D.9 , cela veut dire que la condensation statique est une manière de procéder avec l'élimination de GAUSS.

Dans cette exemple , la matrice de rigidité condensée représente la rigidité élémentaire d'un élément barre à 2 noeuds (1 - 3) avec interpolation quadratique . En plus la rigidité condensée a les même propriétés que celle de la matrice initiale ( à savoir symétrie , termes diagonaux dominants ) , étant donné que c'est celle d'une structure réelle.



- [ 9 ] K. C. ROCKEY - H. R. EVANS - D. W. GRIFFITHS -  
D. A. NETHERCOT  
*introduction à la méthode des éléments finis (traduit)*  
EYROLLES 1979
- [ 10 ] R. H. GALLAGHER  
*introduction au méthode des éléments finis*  
PRENTICE - HALL 1975
- [ 11 ] J. IMBERT  
*analyse des structures par éléments finis*  
CEPADUES EDITION 1975
- [ 12 ] K. J. BATHE  
*finite element procedures in engineering analysis*  
PRENTICE - HALL 1980
- [ 13 ] O. C. ZIENKIEWICZ  
*la méthode des éléments finis (traduit)*  
3° EDITION Mc GRAW HILL 1979
- [ 14 ] R. D. COOK  
*concepts and applications of finite element analysis*  
2° EDITION JOHN WILEY & Sons
- [ 15 ] T. J. R. HUGHES  
*the finite element method ( linear static and dynamic  
finite element analysis )*  
PRINTICE - HILL INC
- [ 16 ] G. DHATT - G. TOUZOT  
*présentation des méthode des éléments finis*  
2° EDITION 1984 MALOINES S A EDITEUR
- [ 17 ] M. LAPORTE - J. VIGNES  
*algorithmes numériques : analyse et mise en oeuvre*  
EDITION TECHNIP

[ 18 ] W. T. THOMSON

*theory of vibration*

PRINTICE - HILL INC 1972

[ 19 ] R. G. PRAKASH - M. S. PRABIHU

*reduction techniques in dynamic substructures for large problems*

COMPUTERS & STRUCTURES VOL 22 N°4 PP 539-552 1986

[ 20 ] J. F. ABEL - M. S. SHEPHARD

*an algorithm for multipoint constraints in finite element analysis*

REFERENCE INCOMPLETE

[ 21 ] J. I. CURISKIS - S. VALLIAPPAN

*a solution algorithm for linear constraint equations in finite element analysis*

COMPUTERS & STRUCTURES VOL 8 PP 117-124 1978

[ 22 ] B. M. IRONS

*a frontal solution program for finite element analysis*

INT. J. NUMER. METH. ENG. 2 PP 5-32 1970

[ 23 ] H. R. GROOMS

*algorithm for matrix bandwidth reduction*

ASCE J. STRUCT. DIV. VOL 98 N°ST1 PP 203-214 JAN. 1972

[ 24 ] R. JOLY

*méthode frontale : analyse numérique et fonctionnelle*

UNIV. PARIS VI CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENT.

[ 25 ] A. CHAKER

*cours de magister : méthode des éléments finis*

USTHB INSTITUT G. CIVIL OCT 1988

[ 26 ] H. GACHON

*cours de DEA : méthode des éléments finis*

ENSAM PARIS DEPT. STRUCTURES OCT 1986

[ 27 ] USER D'ABAQUS version 4.6

[ 28 ] I. GAD

*cours de graduation : moteur thermique I*

ENP DEPT. MECANIQUE

SEPT. 1985

[ 29 ] K. J. BATHE - E. L. WILSON

*eigensolution of large structural systems with small  
bandwidth*

ASCE MECANICS DIVISION PP 467-479 DATE ?

[ 30 ] XIAN LU

*simplified dynamic condensation in multisubstructure  
systeme*

COMPUTERS & STRUCTURES VOL 30 N°4 PP 851-854 1984

[ 31 ] M. R. SPIEGEL

*theory and problems of advanced mathematics for engineers  
and scientists*

SCHAUM'S OUTLINE SERIES MCGRAW-HILL BOOK COMPANY 1971