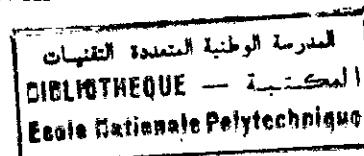


*Thèse*

Présentée par

**HADID MOHAMED**  
*Ingénieur d'Etat en Génie Civil*  
(E.N.P)

*Pour obtenir le titre de*  
**MAGISTER**  
*en GENIE CIVIL*



Sujet:

**ANALYSE DE L'INTERACTION CINEMATIQUE  
DETERMINISTE ET STOCHASTIQUE POUR FONDATIONS  
RIGIDES BIDIMENSIONNELLES PAR UNE APPROCHE  
INTEGRALE AUX FRONTIERES**

Soutenue en Juin 1995 devant le jury composé de :

Président	: B. TILIOUINE	Professeur, E.N.P.
Rapporteur	: M.K. BERRAH	Maître de conférence, E.N.P.
Examineurs	: M. BOUGHOUFALLAH	Chargé de cours, E.N.P.
	M. DEMIDEM	Chargé de cours, E.N.P.
	M. HAMMOUTENE	Chargé de cours, E.N.P.

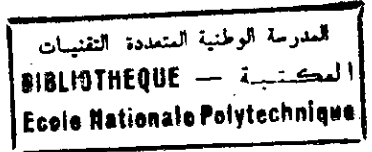
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

كتاب  
تاريخ  
الجزيرة العربية

وقالوا نعم من هذا العالم  
قل لله الحمد

صديق  
الكتاب

# Dédicaces



*C'est avec une joie immense que je dédie ce travail:*

*A ma mère*

*A mon père*

*A Habouche Nabila*

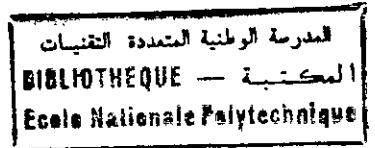
*A mes soeurs et frères*

*A toute ma famille*

*A Noun Abdelkader, ainsi qu'à sa famille*

*A tous mes amis, notamment à Lakhder Guenfaf pour ses  
entrevues fructueuses et ses idées judicieuses*

# Remerciements



C'est pour moi un extrême plaisir et un grand honneur que d'avoir eu Monsieur M.K.BERRAH comme directeur de recherche. J'ai trouvé en lui une source d'inspiration décisive et un recours ultime. C'est à lui que je dois mon initiation à la recherche et les orientations de cette thèse. Je ne saurais assez le remercier pour les précieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail. Qu'il veuille croire à ma profonde estime et ma sincère reconnaissance.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur B. TILIOUINE qui me fait l'honneur de présider le jury; j'y suis d'autant plus sensible que j'ai suivi ses cours avec un grand intérêt.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur M. DEMIDEM, dont l'enthousiasme scientifique a toujours été un encouragement et un soutien, je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie également M. HAMMOUTENE et M. BOUGHOUFALLA pour intérêt qu'ils témoignent à mon travail en acceptant d'en être examinateurs, et pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon Jury. Leurs avis me sont particulièrement importants.

Je souhaite remercier le Professeur A. BALI pour ces qualités humaines et ses encouragements.

Mes remerciements s'adressent également à: Hamid, Hassen, El Hadi, Hocine, Karima et Leila qui ont contribué à me faciliter l'acquisition du matériel informatique.

Je tiens à adresser mes remerciements à Dr Hamid AFRA, Fouzia DJALLALI et Farida BALI, pour toute la bibliographie qui m'est parvenue pour réaliser ce travail, je voudrais leurs exprimer ma profonde reconnaissance.

Mes sincères remerciements iront à tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce mémoire notamment ceux du service documentation à savoir: Amara, Ouarani, Salah, Karim, Krime, Abdelkrim, Mourad, Hafida, Chrifa, Ouahiba, Naima, Farida et Ghania sans oublier celles des périodiques.

Je remercie vivement Lakhdar GUENFAF, Nourdine BALI, Farid HALET, Reda YEDOU, Nouredine BERROU, Nacer SLIMANI, etc... pour leur soutien moral et leurs encouragements.

Je voudrais terminer en saluant la promotion de Génie-Civil de Juin 92 de l'E.N.P. d'Alger et celle du Magister 93.

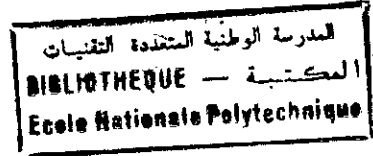
Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude à tous qui ont permis, à des degrés divers, que ce travail soit ce qu'il est.

## SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE	1
<b>Chapitre 1 Etat de l'art en matière d'interaction sol-structure</b>	
1.1 Introduction	5
1.2 Définition de l'interaction sol-structure	6
1.3 Historique	6
1.4 Analyse de l'interaction sol-structure	7
1.5 Méthodes d'analyse	10
1.5.1 Approche directe	10
1.5.2 Approche par sous-structures	14
1.5.2.1 Théorème de superposition et méthode des trois étapes	15
1.5.2.2 Théorème des sous-structures	22
1.6 Conclusion	26
<b>Chapitre 2 Généralités sur l'élastodynamique</b>	
2.1 Introduction	27
2.2 Formulation en déplacements des problèmes de l'élastodynamique	27
2.3 Théorème de réciprocité	29
2.4 Solutions fondamentales et représentation intégrale	30
2.5 Conditions de radiation de Sommerfield	31
2.6 Ondes sismiques et leur propagation	33
2.6.1 Définition de différents types d'ondes sismiques	33
2.6.2 Représentation mathématique de la propagation en champ libre des différents types d'ondes sismiques	35
2.7 Conclusion	40

<b>Chapitre 3 Equations intégrales singulières pour l'élastodynamique stationnaire bidimensionnelle</b>	
3.1	Introduction 41
3.2	Fonction de Green 43
3.3	Formulation intégrale discrétisée 45
3.4	Intégration des fonctions de Green singulières 46
3.5	Résolution du système d'équations 49
3.6	Conclusion 50
<b>Chapitre 4 Impédances dynamiques de fondations filantes</b>	
4.1	Introduction 51
4.2	Fonctions d'impédance: définition et interprétation physique 54
4.3	Formulation intégrale 56
4.3.1	Cas de conditions aux limites relâchées 57
4.3.2	Cas de conditions aux limites parfaites 60
4.4	Etude paramétrique 61
4.4.1	Convergence et effet de discrétisation 61
4.4.2	Comparaison avec les résultats publiés 62
4.4.3	Effet du coefficient de Poisson 63
4.4.4	Effet de l'amortissement 63
4.4.5	Effet de l'enterrement 64
4.4.6	Effet du type de contact sol-fondation 64
4.5	Conclusion 65
<b>Chapitre 5 Réponse sismique de fondations filantes sollicitées par l'incidence d'ondes de types P, SV, et de Rayleigh</b>	
5.1	Introduction 78
5.2	Formulation intégrale 80
5.3	Présentation et analyse des résultats 84
5.4	Conclusion 85



## Chapitre 6 Notions fondamentales de la théorie des vibrations aléatoires

6.1 Introduction	89
6.2 Processus aléatoires	90
6.2.1 Caractérisation d'un processus aléatoire	90
a) Fonction de densité de probabilité	90
b) Moments	91
6.2.2 Processus stationnaires	92
a) Propriétés des fonctions d'auto-corrélation et d'auto-variance	93a
b) Moyenne temporelle et processus ergodique	93c
6.2.3 Décomposition spectrale d'un processus aléatoire	93c
a) Transformée de Fourier	93c
b) Fonction de densité spectrale de puissance	93d
c) Fonction de densité spectrale de puissance unilatérale	95
d) Fonction de l'inter-densité spectrale de puissance	95
6.2.4 Fonctions d'auto-corrélation et densité spectrale des processus aléatoires dérivés	96
6.3 Réponse d'un système linéaire à un degré de liberté à une sollicitation aléatoire	96
6.3.1 Domaine temporel	96
6.3.2 Domaine fréquentiel	97
6.3.3 Réponse stationnaire à une excitation aléatoire stationnaire	98
6.4 Statistiques du pic de la réponse à une excitation Gaussienne	98
6.5 Conclusion	100
Chapitre 7 Réponse probabiliste de fondations filantes	
7.1 Introduction	102
7.2 Caractérisation spectrale du mouvement de fondations	105
7.2.1 Formulation	105
7.2.2 Interprétation des résultats	108
7.3 Conclusion	109

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS FUTURES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## ANNEXES

Annexe 1	Propriétés fondamentales de la fonction de Dirac	124
Annexe 2	Fonctions de Bessel	125
REFERENCES		129



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# *INTRODUCTION*

*"La pensée ne commence qu'avec le doute".*

ROGER MARTIN AIGARD

## INTRODUCTION GENERALE

L'étude de la réponse dynamique de fondations rigides revêt une importance significative dans la conception des fondations supportant les machines vibrantes, ainsi que dans la conception d'ouvrages avec prise en compte de l'interaction sol-fondation tels que les immeubles de grande hauteur sujets à l'action du vent ou du séisme, les centrales nucléaires ou encore les plate-formes offshore. Le problème de l'interaction sol-structure peut être résolu soit par une approche directe qui analyse le système sol-structure dans son ensemble ou bien, si l'on se place dans l'hypothèse de l'élasticité linéaire, par l'approche des sous-structures qui le traite après sa décomposition en sous problèmes. Cette dernière approche passe par la détermination de l'impédance et du mouvement induit de la fondation, puis l'analyse du système couplé. Dans le cadre de cette thèse nous choisissons cette approche et abordons les problèmes liés à la modélisation du sol et au type de liaison entre le sol et la fondation. L'étude du système fondation-structure ainsi que l'étude du système couplé sol-fondation-structure sont des problèmes relevant de la dynamique des structures et ne sont pas abordés dans cette thèse car ils ont fait l'objet d'études extensives.

Parmi les méthodes numériques d'analyse de l'interaction sol-fondation, la méthode des éléments finis (M.E.F) est particulièrement utilisée pour traiter les problèmes complexes qui ne peuvent pas être résolus analytiquement. Il en est ainsi lorsque la géométrie du problème est complexe, lorsque le sol est hétérogène avec des couches non horizontales, etc... L'ensemble de la fondation et du sol est modélisé par un maillage en éléments finis et le problème est alors traité dans sa globalité. Les fondations enterrées et les sols multicouches peuvent être étudiés sans effort supplémentaire par la méthode des éléments finis.

Cependant, Durant la vibration des massifs de fondation, deux types de dissipation d'énergie mécanique emmagasinée dans la fondation sont possibles: une dissipation par amortissement radiatif, ainsi qu'une dissipation par amortissement matériel. Pour la prise en compte du phénomène de radiation dans la solution numérique obtenue par la M.E.F, il nous faut étendre suffisamment les dimensions du modèle de sol pour éviter que les ondes réfléchies aux limites n'atteignent la structure pendant le laps de temps durant lequel on évalue sa réponse. Cependant cette procédure est très coûteuse vu la taille des calculs nécessaires. Pour s'affranchir de ce problème, on peut adopter un modèle utilisant des frontières absorbantes simulant de façon exacte la présence, au delà de la frontière, d'un milieu d'étendue infinie. L'existence de ce milieu permet la dissipation d'énergie vers l'infini.

La modélisation du sol peut se faire par La méthode des équations intégrales aux frontières (M.E.I.F.) appliquée aux problèmes de l'élastodynamique. La formulation intégrale transforme les équations de l'élastodynamique en relations intégrales entre vecteurs déplacements et vecteurs contraintes sur la frontière du domaine considéré. Il est procédé alors à une discrétisation de la frontière du domaine en éléments finis et la dimension du problème se trouve réduite d'une unité. Les conditions de radiation des ondes à l'infini sont incluses dans la formulation de manière inhérente et n'exigent donc pas l'introduction d'équations supplémentaires à cet effet. On peut ainsi aisément traiter des problèmes de taille infinie dans une, deux ou trois directions.

Dans le cadre de ce travail, nous présentons en premier lieu une investigation numérique de la réponse dynamique à des excitations harmoniques de translation et de balancement de fondations bidimensionnelles rigides, superficielles ou enterrées dans un sol viscoélastique. Dans ce contexte, nous fournissons les résultats d'une étude paramétrique relative à l'influence de la discrétisation du champ libre de part et d'autre de la fondation, à l'influence des propriétés mécaniques du sol via le coefficient de Poisson, et

l'amortissement, ainsi qu'à l'influence de l'enterrement et du type de contact sol-fondation. Nous étudions en deuxième lieu, l'effet du passage d'onde, ainsi que l'effet de l'incohérence du mouvement du sol sur la réponse de fondations rigides bidimensionnelles. Il est supposé dans ce travail que l'incohérence du mouvement du sol est due à la superposition des ondes planes stationnaires de différents types (P, SV et de Rayleigh) non corrélées arrivant suivant plusieurs angles et possédant la même densité spectrale de puissance. La méthode des équations intégrales aux frontières est utilisée à travers ce travail de recherche conjointement avec une procédure analytique contournant les intégrations numériques de fonctions de Green singulières.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à un exposé de l'état de l'art en matière d'analyse de l'interaction sol-structure et des aspects théoriques et techniques des méthodes d'analyse. Nous y trouvons la définition des notions fondamentales pour l'étude du comportement des ouvrages en relation avec leur sol de fondation. Les notions d'impédance et de méthodes de sous-structures y sont introduites en parallèle avec les méthodes globales par éléments finis.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques notions sur l'élastodynamique parmi lesquelles figurent notamment le théorème de réciprocité en dynamique pour des champs de déplacement et de contrainte, la notion de la solution fondamentale, les conditions de radiation pour les régions infinies et enfin quelques notions sur la propagation d'ondes.

Nous nous proposons dans le troisième chapitre de développer brièvement la formulation mathématique et le traitement numérique des équations intégrales conjointement avec une procédure analytique contournant les intégrations numériques de fonctions de Green singulières pour leur application à l'étude de problèmes élastodynamiques stationnaires en déformation plane.

La méthode des équations intégrales aux frontières est exploitée dans le quatrième chapitre pour le calcul des fonctions d'impédance de fondations filantes rigides superficielles et enterrées. La transcription informatique de cette formulation est effectuée par l'élaboration d'un code de calcul. Ce code permet de calculer les mouvements rigides de translation et de rotation de fondations filantes reposant sur un demi-espace visco-élastique et soumises à des sollicitations harmoniques. Nous fournissons également les résultats d'une étude paramétrique relative à l'influence de la discrétisation du champ libre de part et d'autre de la fondation, et à l'influence des propriétés mécaniques du sol telles que le coefficient de Poisson, et l'amortissement. L'effet de l'enterrement et le type de contact sol-fondation sont également étudiés.

Dans le cinquième chapitre, nous utilisons la méthode des équations intégrales aux frontières pour l'analyse sismique des fondations filantes sollicitées par l'incidence des ondes planes de type P, SV et de Rayleigh en supposant que le sol est homogène et élastique.

Après le sixième chapitre qui n'a d'autre prétention que de définir les notions fondamentales de la théorie des vibrations aléatoires nécessaires à la caractérisation probabiliste du mouvement sismique de fondations (possibilité de déterminer les caractéristiques probabilistes de déplacement du système et de leurs deux premières dérivées et d'obtenir une information au sujet des propriétés statistiques du système, indispensable pour évaluer sa fiabilité), on abordera le dernier chapitre dans lequel on traite l'étude de l'effet de l'incohérence du mouvement de sol sur la réponse de fondations rigides bidimensionnelles en utilisant la méthode des équations intégrales aux frontières précédemment exposée.

## Chapitre 1

# ETAT DE L'ART EN MATIERE D'INTERACTION SOL-STRUCTURE

*"Une loi est un modèle qui n'est plus (ou pas encore!) contesté"  
"un modèle devient une loi ... , ou sombre dans l'oubli!"*

JEAN LEMAITRE

## Chapitre 1

ETAT DE L'ART EN MATIERE D'INTERACTION  
SOL-STRUCTURE

## 1.1 Introduction

Les désordres et les conséquences fâcheuses engendrés par les séismes ont fait que la prise en compte du risque sismique dans la conception des ouvrages est devenue nécessaire et ont contribué au développement de méthodes d'analyse de structures sous sollicitations dynamiques.

Les premières méthodes d'analyse utilisées pour la détermination de la réponse sismique d'une structure ont été basées sur l'hypothèse de la rigidité infinie du sol supportant la structure. Par conséquent, l'action réciproque sol-structure n'était pas prise en compte dans les calculs et les résultats obtenus se sont avérés loin de la réalité, notamment dans le cas de sols déformables.

Ces dernières décennies, ces méthodes d'analyse ont connu un essor considérable qui s'est amplifié par les exigences rigoureuses de sécurité imposées à la conception des ouvrages importants tels que les centrales nucléaires, les barrages, les réservoirs de gaz naturel liquéfié ... De nombreuses études ont montré que lorsqu'une structure était soumise à une sollicitation sismique, les efforts engendrés créaient une variation des contraintes dans le sol de fondation. D'où des perturbations du mouvement du sol en champ libre, qui vont à leur tour affecter la réponse de la structure. Ce phénomène est appelé "Interaction sol-structure".

L'abondance de la littérature concernant l'interaction sol-structure [48,49,54,60,81,90,97,104,108,116,117...] traduit à la fois la complexité du phénomène et l'intérêt qu'y ont porté nombre de chercheurs. Une synthèse générale a établi une classification des méthodes d'étude de l'interaction sol-structure [73].

Dans ce qui suit, nous allons exposer un état de l'art en matière d'analyse de l'interaction sol-structure, ainsi que les aspects théoriques et techniques des méthodes d'analyse.

### 1.2 Définition de l'interaction sol-structure

Littéralement, l'interaction sol-structure traduit la modification du mouvement du sol (ou de la structure) lors d'un séisme du fait de la présence de l'autre composante (structure ou sol). Le phénomène de l'interaction sol-structure est dû à la perturbation du mouvement sismique initial par le mouvement intrinsèque de la structure. Ainsi, le mouvement de la surface de contact sol-structure, n'est pas le mouvement enregistré en l'absence de construction (mouvement en champ libre). Cette interaction s'accroît avec la rigidité de la structure et la déformabilité du sol et décroît avec la rigidité du sol et la souplesse de la structure.

### 1.3 Historique [115]

L'interaction sol-structure en tant que discipline, a présenté des difficultés au double plan de la description phénoménologique et de la formulation mathématique. Cette situation a fait que la discipline n'a connu un essor significatif que durant les trois dernières décennies, en se basant sur des travaux antérieurs relatifs aux vibrations des massifs de fondation, à la théorie des demi-espaces, et à l'interaction sol-structure (I.S.S) pour des constructions conventionnelles (Housner 1957).

La présente section fait état de la chronologie des développements de l'I.S.S qui s'articule essentiellement autour des trois étapes suivantes :

- La première étape (1964 - 1971) constitue l'impulsion à un développement plus général et rationnel de l'I.S.S en débutant par l'utilisation approfondie de la théorie des demi-espaces, puis une compréhension phénoménologique de l'interaction et enfin par un développement spécifique de la méthode des éléments finis ( M.E.F ).



- La deuxième étape a débuté autour de l'année 1971 lorsque une première analyse d'I.S.S appliquée à un réacteur nucléaire a été faite. Cette phase dans le développement de la discipline est qualifiée de difficile vu les problèmes posés par un tel traitement. L'amortissement, le point d'application de l'excitation sismique et le perfectionnement de la M.E.F étaient parmi les difficultés rencontrées et les principaux défis à relever.

- A partir de l'année 1977, a commencé la troisième et dernière étape, connue sous le vocable de la période de renaissance vu les développements puissants concernant la M.E.F et son adaptation aux problèmes d'engineering, notamment l'étude avec efficacité des constructions nucléaires.

#### 1.4 Analyse de l'interaction sol-structure

Il est important de cerner avec précision le phénomène de l'interaction sol-structure. Bien que ce terme soit très familier en géotechnique et plus généralement en génie-parasismique, il n'existe pas une définition universelle adoptée par tous les spécialistes en la matière. Il n'existe même pas un consensus sur la terminologie utilisée par les différents auteurs pour décrire les différentes facettes constituant le phénomène. Succintement, on pourra dire que l'interaction sol-structure est une discipline de la mécanique appliquée s'intéressant au développement et à l'investigation de méthodes théoriques et pratiques pour l'analyse des structures soumises à des charges dynamiques en tenant compte de la flexibilité du sol de fondation et de ces propriétés dynamiques [56].

Dans ses premières étapes de développement, la théorie de l'interaction sol-structure s'est concentrée sur les problèmes de charges externes, i.e, les problèmes où l'excitation dynamique est appliquée directement sur la structure. On peut citer à titre d'exemple les structures de grande hauteur sous l'action du vent. Cependant, la conception de structures massives de grande hauteur, dans des zones sismiques, a nécessité l'extension de la théorie aux

charges internes, i.e, les excitations dynamiques prenant naissance au sein de la masse de sol. Dans la première situation les effets de l'interaction se présentent uniquement, comme le résultat de forces extérieures et d'inertie transmises à un sol se pliant aux efforts imposés. On peut attribuer à ceci le nom d'interaction inertielle. L'énergie mécanique transmise alors au sol se propage à partir de la structure sous forme d'ondes de contraintes, et caractérise ainsi le phénomène d'amortissement radiatif. dans le cas des excitations sismiques, un effet supplémentaire peut survenir, car la fondation, du fait de sa rigidité, ne se conforme pas aux distorsions du sol causées par les ondes sismiques incidentes. La structure se présente alors comme un objet opaque ou réfléchissant sur le chemin des ondes sismiques incidentes, produisant ainsi, une dispersion du champ d'ondes qui modifie localement le mouvement au voisinage de la fondation. Cet effet est connu sous le nom de "passage d'onde" ou "Dispersion des ondes sismiques par une inclusion rigide" ou "interaction cinématique". Elle dépend uniquement de la géométrie de la fondation, de la configuration du sol et du chemin suivi par les ondes sismiques à travers le sol jusqu'à l'interface sol-structure.

Enfin, le mouvement sur la surface libre du terrain vierge (sans aucune excavation ou implémentation de structure) est appelé solution en champ libre. La réponse d'une structure durant un séisme dépend uniquement des caractéristiques du mouvement en surface, du sol environnant et de la structure. Donc, pour les sols mous, le mouvement de la fondation lors d'un séisme diffère du mouvement en champ libre, car le sol et la structure sont couplés. Il est alors logique, suite aux effets de l'interaction, que l'état de déformation dans le sol soit différent de celui en champ libre. A son tour, la réponse de la structure diffère en amplitude et en fréquence de la réponse d'une structure identique reposant sur un sol rocheux.

Les calculs d'interaction s'effectuent à partir de modélisations du sol et de la structure, et d'une définition de la sollicitation sismique de référence. La modélisation du sol, milieu tridimensionnel, semi-infini à comportement complexe constitue l'aspect le plus délicat. Les calculs dynamiques peuvent cependant largement varier selon les cas traités:

- \* La complexité de la définition mécanique du sol (sols élastiques à viscosité [26] ou hystérésis [93], sol élastoplastique [63,80], sols homogènes ou stratifiés, avec ou sans pentes [30,78,95,96], modules d'élasticité [44], etc ...),

- \* Le type de fondation (radier rigide plat sur le sol, de forme circulaire ou autre [38,69,118], radier rigide enterré dans le sol [70,85], radier souple [53], fondations sur pieux [3], fondations sur sol stratifiés [43,61], pluralité de structures [36,120,122], supports parasismiques spéciaux [100], etc...),

- \* Le type d'onde sismique choisi (en général des ondes verticales ascendantes en cisaillement [50] et en compression [16], mais parfois aussi des ondes de Rayleigh [72] ou de Love [77], ou des ondes obliques [101]),

- \* L'emplacement correspondant au mouvement de référence (niveau du sol, ou niveau des fondations, ou niveau d'une assise rocheuse insensible à l'interaction, ou surface d'un terrain hypothétique de propriétés différentes de celles du sol réel, au-dessus d'un certain niveau),

- \* La forme mathématique du mouvement de référence (données temporelles, telles que des accélérogrammes [79], ou données par spectre fréquentiels (référence [116] dans [73]),

La variété des calculs dépend aussi du modèle utilisé pour représenter la configuration sol-structure:

- \* Modélisation détaillée et unique de l'ensemble du sol et de la structure, ou au contraire effectuée progressivement, conformément à une procédure par étapes [88],

\* Modélisation du sol en éléments finis [74,103], avec frontières lointaines ou avec frontières "absorbantes" évitant les réflexions des perturbations [35],

\* Modélisation du sol en éléments de frontière (B.E.M) [2,34],

\* Calcul direct dans le domaine temporel si les éléments de la modélisation ne dépendent pas de la fréquence [10,11,83,92,102], ou calcul dans le domaine fréquentiel [15,24,64] en admettant des règles de superposition des composantes fréquentielles.

### 1.5 Méthodes d'analyse

Pour apprécier l'interaction sol-structure il faudra l'évaluer. A cet effet, deux grandes catégories de techniques de résolution sont à distinguer :

- i) L'approche directe
- i) L'approche par sous-structures.

#### 1.5.1 Approche directe

Dans le cadre de cette approche, la structure et le sol environnant sont analysés ensemble. On aboutit donc à une détermination simultanée du mouvement dans le sol et dans la structure. Des éléments finis ou des éléments aux frontières sont normalement utilisés pour modéliser les différentes composantes du système.

On peut résoudre les équations du mouvement par deux méthodes générales :

- i) Solution dans le domaine temporel où le système d'équations différentielles est résolu par la méthode d'intégration pas à pas. cette méthode est applicable même pour un comportement non linéaire dû à la loi de comportement d'un des matériaux (sol le plus souvent) ou aux interfaces sol-structures (décollement ou glissement d'ouvrages sur leur fondation),

ii) Solution dans le domaine fréquentiel. On utilise les transformations de Fourier pour l'écriture des équations dans ce domaine.

La solution donnée par la première méthode est très coûteuse, alors que la seconde est limitée aux problèmes linéaires car elle est basée sur l'application du principe de superposition.

En utilisant soit la méthode des différences finies, soit la méthode des éléments finis, il convient de respecter certaines restrictions pour fournir une précision acceptable. D'importants facteurs doivent être considérés, à savoir, la dimension et la forme des éléments, la modélisation de l'amortissement interne ou un mécanisme pour la dissipation de l'énergie, et des conditions aux limites appropriées dans un domaine fini. Une reproduction adéquate de la propagation des ondes à travers un milieu continu, indique que la dimension des éléments (ou les dimensions de la maille en différences finies) doit être plus petite que le 1/8 de la plus petite longueur d'onde qui est simplement donnée par la relation :

$$l_{\min} = c_s T_{\min} = \frac{c_s}{f_{\max}}$$

$T_{\min}$  et  $f_{\max}$  sont respectivement, la plus petite période et la plus grande fréquence de l'excitation à transmettre.

$c_s$  est la célérité de propagation des ondes de cisaillement dans le sol.

Le second point intéressant est la dissipation de l'énergie internedu sol quand une analyse linéaire est effectuée. La source importante de cette perte est la nature hystérétique du sol qui induit une perte cyclique indépendante de la fréquence.

Le troisième point à souligner est la précision de la représentation d'une situation tridimensionnelle (3D) avec un modèle bidimensionnel (2D). De bons résultats ont été trouvés entre les solutions 2D et 3D, quoique les solutions 2D prévoient une

interaction légèrement plus grande.

Un autre point important est celui du choix des conditions aux limites appropriées pour simuler un espace semi-infini en utilisant un domaine fini. La méthode des éléments finis ne peut s'appliquer directement lorsque le domaine  $\Omega$  n'est pas borné, car il faudrait une infinité d'éléments pour le couvrir. Il convient donc d'apporter quelques modifications. Les méthodes actuelles, à l'exception de la méthode des équations intégrales pour laquelle la condition de radiation est prise en compte automatiquement dans la formulation, utilisent des conditions particulières sur la frontières par le biais d'éléments spéciaux pour simuler l'infinité du domaine étudié. Nous avons groupé ces diverses méthodes en quatre catégories. Les trois premières consistent à tronquer le domaine à étudier, et à imposer diverses conditions sur la frontière afin de minimiser les réflexions d'ondes. La dernière méthode est basée sur la notion d'élément infini.

- a) Frontières élémentaires (non absorbantes)
- b) Frontières locales (partiellement absorbantes)
- c) Frontières consistantes ( parfaitement absorbantes)
- d) Eléments infinis

#### a) Frontières élémentaires

L'idée la plus simple consiste à étendre le maillage, et à appliquer des conditions aux limites simples de type Neumann (N), Dirichlet (D) ou une combinaison (N,D) Robin s'il y a plusieurs degrés de liberté par noeud par exemple. Ce type de frontière est parfaitement réfléchissant. La méthode ne peut donc donner des résultats valables que si le sol comporte un amortissement interne, afin de dissiper l'énergie piégée dans le maillage. Même dans ce cas, ces frontières ne sont pas utilisées, car la taille du maillage nécessaire pour obtenir une solution acceptable est trop importante.

### b) Frontières Locales

Lorsqu'on utilise un domaine  $\Omega$  borné pour représenter un domaine  $\Omega$  non borné, il est possible de chercher formellement des conditions aux limites absorbantes (nous entendons par absorbante, une frontière qui absorbera complètement l'énergie incidente. Inversement, une frontière parfaitement réfléchissante ne permet pas la transmission de l'énergie). Ces conditions doivent conduire à un problème équivalent au problème initial sur  $\Omega$ . On définit alors des conditions aux limites locales absorbantes, i.e., assurant une dissipation d'énergie, et ne faisant intervenir que le voisinage de la frontière. La première tentative destinée à simuler l'absorption d'énergie par radiation à l'aide de frontières locales est due à Lysmer-Kuhlemeyer [75]. Physiquement, cette frontière absorbante peut être interprétée comme représentant des amortisseurs, connectés à la frontière du modèle, et dont les caractéristiques sont fonctions des propriétés mécaniques du sol à leur voisinage. L'avantage primordiale de ce type de frontière réside dans leur facilité d'implémentation dans des codes de calcul numérique opérant aussi bien dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. Ces frontières constituent des absorbeurs parfaits d'ondes planes de compression (onde P) et de cisaillement (onde s) sous incidence normale. Pour des angles d'incidence inclinés, l'absorption est imparfaite. Kuhlemeyer a également développé des amortisseurs qui absorbent les ondes de Rayleigh, prédominantes près de la surface (amortisseurs de Rayleigh). Les frontières locales doivent dans tous les cas être placées suffisamment loin des sources pour s'approcher des deux conditions nécessaires :

- \* Ondes planes
- \* Incidence normale

### c) Frontières consistantes

Ce type de frontières doit permettre d'absorber parfaitement tous les types d'ondes sous n'importe quelle incidence. Les conditions qui en résultent ne sont pas locales, la formulation dans le domaine des fréquences conduit, le long de la frontière, à une matrice de rigidité pleine et dépendant de la fréquence. En revanche ces frontières peuvent être placées le long de la fondation à étudier. La taille du maillage est donc considérablement réduite. ce qui compense en partie le coût supplémentaire du calcul de rigidité effective de la frontière. Ces frontières ont été initialement développées par Lysmer-Waas (1972) dans le cadre d'ondes planes. Elles ont été étendues au problèmes à symétrie de révolution par Kausel (1974).

### d) Eléments infinis

L'application directe de la méthode des éléments finis à un domaine infini oblige à considérer une infinité d'éléments bornés. Le problème n'est donc pas adapté à une résolution numérique. mais rien n'empêche de considérer des éléments non bornés, pourvu que les quantités à intégrées restent finies. Le choix des fonctions de forme devra respecter deux critères :

- \* Ces fonctions doivent être " proches " de la solution afin d'assurer la convergence,

- \* Ces fonctions doivent conduire à des intégrales finies sur le domaine considéré.

### 1.5.2 Approche par sous-structures

Cette approche décompose le problème de l'interaction sol-structure (ISS) en plusieurs étapes successives. Chacune de ces étapes présente plus de facilité, du point de vue de la modélisation ou du traitement, que le problème global. Les résultats obtenus sont superposés. Ainsi, cette approche reposera sur deux théorèmes fondamentaux qui sont :



- 1- Le théorème de superposition,
- 2- Le théorème des sous-structures.

### 1.5.2.1 Théorème de superposition et méthode des trois étapes :

On considère le système sol-structure présenté dans la figure 1.1 Cette représentation suppose une discrétisation du sol et de la structure en éléments finis linéiques reliés entre eux au niveau de jonctions appelées noeuds. La généralisation à un milieu continu peut être obtenue en supposant une infinité de noeuds et d'éléments. Les équations régissant le mouvement sont données par :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = R(t) \quad (1.1)$$

où  $M$ ,  $C$ , et  $K$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité du système.

$u$  : Vecteur déplacement absolu,

$R$  : Vecteur force résultant.

Dans l'hypothèse d'élasticité, la solution de l'équation (1.1) est équivalente à la solution des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{u}_1 + C \dot{u}_1 + K u_1 = R(t) & (1.2.a) \\ M_2 \ddot{u}_2 + C \dot{u}_2 + K u_2 = -M_2 \ddot{u}_1 & (1.2.b) \end{cases}$$

où  $M = M_1 + M_2$  et  $u = u_1 + u_2$

$M_1$  : Masse du sol sans prise en compte de la masse de la structure,

$M_2$  : Masse de la structure sans prise en compte de la masse du sol.

Cette équivalence peut être démontrée par une simple addition des équations (1.2). Une interprétation physique des deux équations ci-dessus serait la suivante :

Dans la première étape, équation (1.2.a), La structure sans masse ( $M_1$ ) est soumise à la même excitation sismique que celle du système d'origine (le même vecteur force) mais aucune force d'inertie n'est

développée dans la structure. Cependant, puisque la structure est généralement enfoncée dans le sol, ou si le mouvement supposé dans le sol ne consiste pas simplement en des ondes planes se propageant verticalement, la structure subira des distorsions résultant des variations spatiales des mouvements de sol autour de la fondation. Pour les fondations idéales rigides, ces distorsions n'apparaissent pas et aucune déformation n'est transmise à la structure. Ainsi la structure a un mouvement de corps rigide et pourrait donc être remplacée par une fondation rigide sans masse. Ce déplacement est appelé interaction cinématique.

Dans la seconde étape, équation (1.2.b), le chargement est appliqué uniquement à la structure et il consiste en des forces d'inertie fictives proportionnelles à  $\ddot{u}_1$  calculées dans la première étape. Les mouvements additionnels,  $u_2$ , obtenus par ce calcul sont appelés interaction inertielle.

Ainsi, la solution totale est la somme des deux solutions (théorème de superposition).

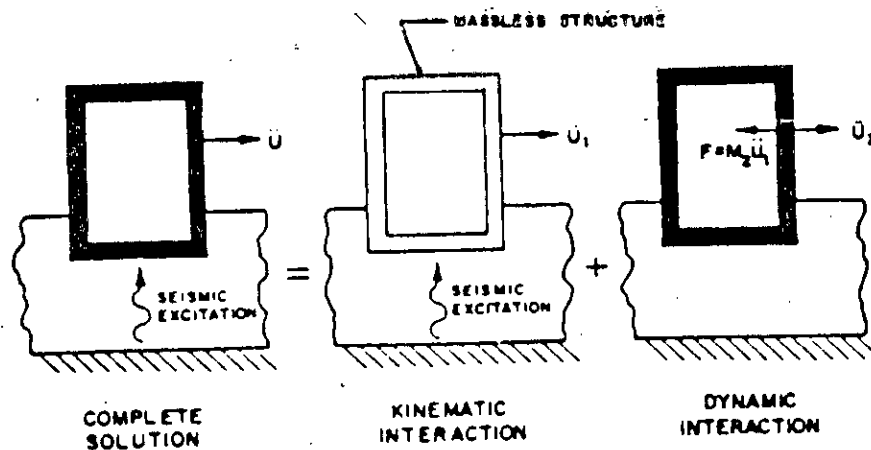


FIGURE 1 Théorème de Superposition

\* Methode des trois étapes

Considérant l'équation (1.2.b). Pour une résolution dans le domaine fréquentiel, cette équation s'écrira :

$$(-\omega^2 M + i \omega C + K) \hat{u}_2 = \omega^2 M_{21} \hat{u}_1 \quad (1.3)$$

ou d'une manière plus compacte

$$\tilde{K} \hat{u}_2 = \omega^2 M_{21} \hat{u}_1 \quad (1.4)$$

où  $\tilde{K} = -\omega^2 M + i \omega C + K$  est appelée matrice de rigidité dynamique du système.  $\hat{u}_1, \hat{u}_2$  sont respectivement les transformées de Fourier de  $u_1$  et  $u_2$ .

Dans ce qui suit, on omet le symbole de transformée de Fourier " ^ " sur les vecteurs déplacements pour le but d'alléger la notation.

Puisque les termes du vecteur force  $(\omega^2 M_{21} u_1)$  sont non nuls seulement pour les degrés de liberté (d.d.l) associés à la structure ( $M_2 = M_s$ ), il est possible de procéder à une condensation dynamique de tous les degrés d.d.l du sol au niveau de l'interface. Le résultat de cette approche sera une matrice d'impédances (dépendant de la fréquence)  $X=X(\omega)$ , i.e., une matrice de rigidité du sol vue à partir de l'interface, ayant autant de lignes et de colonnes que le nombre de d.d.l à l'interface sol-structure.

Pour la structure, L'équation (1.4) s'écrira comme étant :

$$(\tilde{K}_s + Z) u_{2s} = \omega^2 M_{s1s} u_{s1s} \quad (1.5)$$

où  $\tilde{K}_s = -\omega^2 M_s + i \omega C_s + K_s$  est la matrice de rigidité dynamique de la structure en additionnant à la structure les noeuds de l'interface.

et

$$Z = \begin{Bmatrix} 0 \\ X \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

est la matrice d'impédance de l'interface augmentée avec des zéros

pour la ramener à la même dimension que  $\tilde{K}_s$ .

De la même manière,  $u_{1s}$  et  $u_{2s}$  sont respectivement des sous vecteurs de  $u_1$  et  $u_2$  correspondant aux d.d.l de la structure (augmentée par des noeuds à l'interface) et  $M_s$  est la matrice masse de la structure.

Puisque  $u_s = u_{1s} + u_{2s}$  d'où par substitution dans l'équation (1.5)

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_s + Z)u_s &= (\tilde{K}_s + Z + \omega^2 M_s)u_{1s} \\ &= (\tilde{K}_s + i \omega C_s + Z)u_{1s} \end{aligned} \quad (1.7)$$

De plus, même si aucune approximation n'a été faite jusqu'à maintenant, les équations (1.4) et (1.7) sont largement équivalente. Il est à noter que si la fondation est infiniment rigide,  $u_{1s}$  peut être déterminé par un déplacement de corps rigide. On peut écrire  $u_{1s}$  comme étant :

$$u_{1s} = T u_0 \quad (1.8)$$

où  $T$  est une matrice de transformation du corps rigide et  $u_0$  vecteur de déplacement du corps rigide constitué dans le cas le plus général de trois translations et trois rotations.

Substituant (1.8) dans (1.7) nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_s + Z)u_s &= (\tilde{K}_s + i \omega C_s + Z) T u_0 \\ &= (\tilde{K}_s T + i \omega C_s T + Z T)u_0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ainsi, vu que la matrice de rigidité  $\tilde{K}_s$  et la matrice d'amortissement  $C_s$  satisfont la condition de transformation de corps rigide, puisque ni des forces élastique ni des forces visqueuses ne sont nécessaires à exécuter un déplacement de corps rigide dans la structure, cela implique que:

$$\tilde{K}_s T = C_s T = 0$$

et

$$(\tilde{K}_s + Z)u_s = Z T u_0 \quad (1.10)$$

Cette équation peut être écrite sous une forme répartie comme étant

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{aa} & \tilde{K}_{ab} \\ \tilde{K}_{ba} & \tilde{K}_{bb} + X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ XT_b u_o \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

On notant avec l'indice a, les d.d.l associées à la structure sans l'interface et par l'indice b les d.d.l associés à l'interface. Définissons maintenant F comme étant le vecteur force d'interaction nécessaire pour exciter à la base, le système fondation-ressort. Ce vecteur forces/moments s'écrit :

$$\begin{aligned} F &= T_b^T X T_b (u_o - u_b) \\ \Rightarrow F &= -T_b^T X u_b + T_b^T X T_b u_o \end{aligned} \quad (1.12)$$

Additionnons cette quantité dans l'équation (12) d'où :

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{aa} & \tilde{K}_{ab} & 0 \\ \tilde{K}_{ba} & \tilde{K}_{bb} + X & -XT_b \\ 0 & -T_b^T X & T_b^T X T_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

Celle-ci peut être interprétée (fig 1.2) comme un déplacement de corps rigide  $u_o$  spécifié à la base de la structure connectée à une fondation rigide par des " ressorts " X. Notons que cette interprétation ne nécessite pas une fondation rigide, mais elle nécessite simplement que l'interaction cinématique soit considérée comme un déplacement de corps rigide. Si on suppose que la fondation est rigide, nous pouvons écrire donc que :

$$u_b = T_b u_f \quad (1.14)$$

$u_f$  : Vecteur déplacement décrivant les translations et les rotations

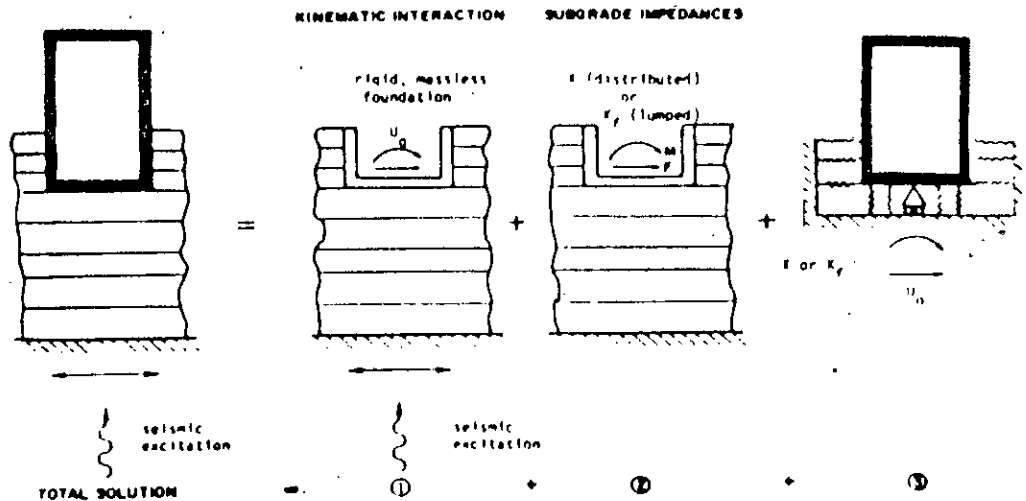


FIGURE 2 Méthode des trois pas

Substituons (1.14) dans (1.13), nous obtiendrons

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{aa} & \tilde{K}_{ab} T_b & 0 \\ T_b \tilde{K}_{ba} & T_b^T \tilde{K}_{bb} T_b + K_f & -K_f \\ 0 & -K_f & \tilde{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_f \\ u_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_b^T F \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

Avec 
$$K_f = T_b^T X T_b \quad (1.16)$$

est une matrice d'impédance de dimension 6x6 ramenée par rapport à centre de gravité.

Nous avons maintenant toutes les formules nécessaires pour la

détermination de la solution du problème d'interaction sol-structure. Ainsi, la solution se fera en trois étapes :

Etape a : Détermination du mouvement de la fondation rigide sans masse, soumise aux mêmes données sismiques que le système d'origine. Généralement, ce calcul conduit à des translations et des rotations, même si la fondation est enfoncée. Cette étape rend compte de l'interaction cinématique .

Etape b : Détermination de la matrice de rigidité dynamique du sol après condensation des d.d.l du sol ("amortisseurs" et "ressorts") au niveau de l'interface. Cette étape rend compte de " La flexibilité du sol ".

Etape c : Evaluation de la réponse de la structure réelle reposant sur les "ressorts" du sol dépendant des impédances et soumise au mouvement de support calculé en a). Le mouvement déterminé en a) n'a aucune existence réelle car il ne se produit nulle part dans le système sol-structure. Ce n'est pas non plus le mouvement en surface avant l'excavation du sol ou avant la construction. Ce point est d'un intérêt particulier pour l'interprétation objective de la différence entre les résultats obtenues par la résolution directe de l'équation (1.1) et ceux obtenus par les approximations faites en supposant que l'excavation de la surface est directement appliquée à la base du sol "ressort". Ces comparaisons sont généralement incompatibles car elles négligent l'interaction cinématique due à l'excitation de support et les effets de l'enfoncement sur la rigidité de la fondation.

Nota : L'interaction cinématique d'une fondation superficielle reposant sur une stratigraphie horizontale excitée par un champ incident composé d'ondes de cisaillement ou de compression à propagation verticale est nulle. Le mouvement de la fondation sans masse est celui de la surface du sol en l'absence d'ouvrage. L'approche intuitive consistant à calculer la réponse de la

structure posé sur les ressorts de sol dont la base est excitée par un accélogramme est donc exacte dans ce cas particulier à condition que l'impédance "ressort" de sol, soit déterminée correctement.

#### 1.5.2.2 Théorème des sous-structures

Une formulation très illustrative et très utilisée du théorème de superposition peut être obtenue en utilisant la technique des sous-structures. La séparation en sous-structure est une technique selon laquelle l'analyse des structures composées est menée en plusieurs étapes, en séparant la structure en sous-unités (sous-structures) plus simples et plus faciles à manipuler par rapport à l'analyse de l'ensemble du système en une seule étape. L'analyse de chaque unité est menée de façon à assurer une compatibilité et un équilibre à travers toutes les interfaces séparant les différentes sous-structures. Cette technique étant basée sur le théorème de superposition, elle n'est applicable qu'aux systèmes linéaires. De plus, les équations du mouvement sont exprimées dans le domaine fréquentiel.

La technique des sous-structures peut être appliquée avec ou sans substitution, i.e, que pour le premier cas, non seulement le système est divisé en sous-structures, mais en plus chaque sous-structure est complétée par des corps additifs qui transforment les sous-unités en solides, avec des propriétés géométriques et physiques adéquates. Par exemple, dans le cas de la l'I.S.S, il convient de séparer tout le système en deux sous-structures: la structure d'un côté et son support de l'autre. Le sol excavé se présente comme un problème compliqué dans sa résolution. Le vide est rempli avec le sol déplacé et le support est ainsi transformé en un semi-espace avec les propriétés requises (i.e, satisfaction des conditions en " champs libre" ), on parle dans ce cas de substitution à la structure.

Considérant la figure (1.3) représentant deux modèles discrets

\* Le problème de l'interaction sol-structure,



\* Le problème des vibrations en champ libre pour le même sol avant la mise en place de la structure.

Dans la figure 1.3.a, le modèle est divisé en deux sous-structures : le sol excavé et la structure.

Dans la figure 1.3.b, les deux sous-structures sont : le sol excavé et le sol déplacé.

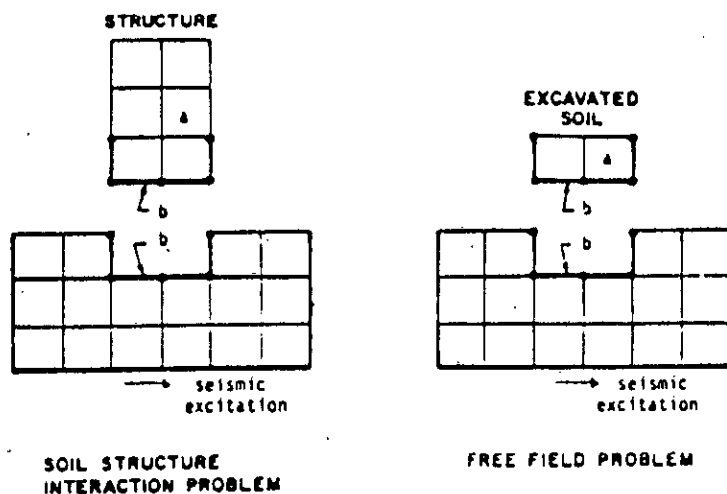


FIGURE 3 Théorème de Sous-Structure

Les équations régissant le mouvement de la structure sont données, après partitionnement, par :

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{aa} & \tilde{K}_{ab} \\ \tilde{K}_{ba} & \tilde{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -S_b \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

$\tilde{K}$  : déjà définie dans le théorème du superposition. L'indice a est relatif aux d.d.l de la structure, sans tenir compte des d.d.l de l'interface.  $u_a$ ,  $u_b$  sont les vecteurs déplacements absolus

correspondants. Enfin  $-S_b$  sont les forces internes, le long de l'interface nécessaires pour préserver l'équilibre après avoir séparé.

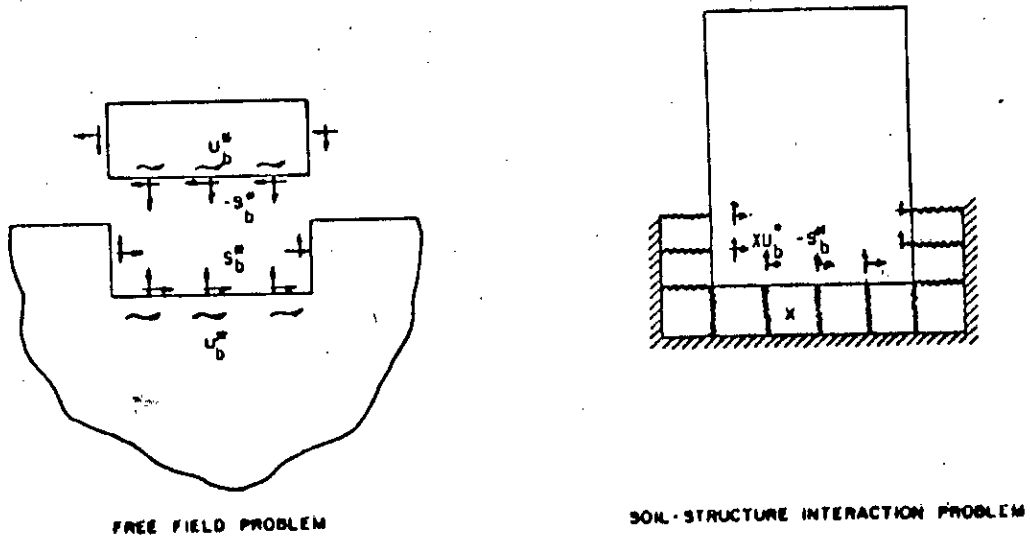


FIGURE 4

la structure du sol. Ainsi, le problème de l'I.S.S est caractérisé par les forces  $S_b$  et les déplacements  $u_b$  de l'interface. D'une manière analogue, le problème en champ libre est caractérisé par les forces internes  $S_b^*$  et les déplacements  $u_b^*$  le long de l'interface. Puisque l'excitation aux limites lointaines est exactement la même dans les deux problèmes, la différence entre les déplacements de l'interface  $\Delta u_b = u_b - u_b^*$ , résulte de la différence des forces s'appliquant sur l'interface,  $\Delta S_b = S_b - S_b^*$ .  
Ce qui implique que :

$$\Delta S_b = X \Delta u_b \quad (1.18)$$

où  $X$  est la matrice d'impédance de l'excavation. Il est à souligner que  $S_b \neq X u_b$  et  $S_b^* \neq X u_b^*$  car il ne faut pas perdre de vue que des forces dynamiques agissent sur le système dans les autres régions du modèle (excitation sismique).

L'équation (1.18) devient

$$-S_b = -X u_b + X u_b^* - S_b^* \quad (1.19)$$

On injecte l'équation (1.19) dans (1.17) on aura

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{aa} & \tilde{K}_{ab} \\ \tilde{K}_{ba} & \tilde{K}_{bb} + X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Xu_b^* - S_b^* \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

Le système d'équations peut être interprété comme la substitution du sol par des "ressorts" et des "amortisseurs", et l'application de forces fictives  $Xu_b^* - S_b^*$  le long de l'interface (fig.1.4). Puisque la solution en champ libre peut être "facilement" calculée pour divers sols et ondes sismiques modélisées. La solution pour la structure pourra ainsi être obtenue si  $X$  est connue. L'équation (1.20) est valable pour n'importe quel système sol-structure rigide ou flexible. En supposant que l'approximation de la rigidité de la fondation est admissible en général dans le calcul de l'interaction cinématique, par identification de l'équation (1.20) à (1.11), on déduit que

$$X T_b^t u_o = Xu_b^* - S_b^* \quad (1.21)$$

Multipliant par  $T_b^t$ , et considérant l'équation (1.16), nous obtenons

$$u_b = K_f^{-1} T_b^t (Xu_b^* - S_b^*) \quad (1.22)$$

Laquelle donne la relation entre le mouvement fictif du support  $u_o$

spécifié à la base des impédances ( $X$ ), et les solutions du champ libre  $u_b^*$ ,  $S_b^*$ .

### 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, à travers la définition littéraire et phénoménologique de l'interaction sol-structure, nous avons pu montrer son intérêt et la nécessité de sa prise en compte dans la conception parasismique des ouvrages. Nous avons également exposé les aspects théoriques et techniques des méthodes d'analyse telles que l'approche directe et l'approche par sous-structures.

L'avantage majeur de l'approche globale est sa capacité à prendre en compte les hétérogénéités résultant soit des variations de profil, soit des variations des caractéristiques de sol provenant de non linéarités plus prononcées dans certaines zones (angles des radiers...).

La méthode des sous-structures est une méthode par étape, i.e., analyse le problème d'interaction sol-structure en plusieurs étapes successives; chacune de ces étapes est plus facile à résoudre du point de vue de la modélisation ou du traitement que le problème global. Les résultats obtenus sont superposés. En outre la méthode de sous-structures présente l'avantage de permettre certaines modifications sans qu'il soit nécessaire de reprendre toute l'analyse; par exemple une modification des caractéristiques de la structure ne requiert qu'une nouvelle analyse dynamique de la structure sans refaire celle du sol. Elle peut également présenter des avantages pour identifier la part relative de chaque composante (interaction cinématique ou inertielle) contribuant au phénomène global d'interaction.

## Chapitre 2

# GENERALITES SUR L'ELASTODYNAMIQUE

Notre ennemi dans l'étude c'est la subbissance;  
quiconque veut réellement apprendre doit commencer par s'en débarrasser.

"S'instruire sans jamais s'estimer satisfait"

et

"Enseigner sans jamais se lasser"  
telle doit être notre attitude.

MAO TSE-TOUNG

## Chapitre 2

## GENERALITES SUR L'ELASTODYNAMIQUE

## 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objet de présenter les notions d'élastodynamique que nous utiliserons tout au long de cette thèse. Parmi ces notions figurent notamment le théorème de réciprocité en dynamique pour des champs de déplacement et des tenseurs de contraintes réguliers, la notion de tenseur fondamental, les conditions de radiation pour les régions infinies et enfin quelques notions sur la propagation d'ondes. Les résultats cités dans cette partie sont le résultat d'un travail de synthèse à partir de nombreuses références telles que [6,18,25,...].

## 2.2 Formulation en déplacements des problèmes de l'élastodynamique

Plaçons nous dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations, dans un solide linéairement élastique, homogène et isotrope occupant un domaine  $\Omega$ , limité par sa surface  $\Gamma$ . Le couple  $(u, \sigma)$  où  $u$  est le champ de déplacement et  $\sigma$  le tenseur des contraintes, correspondant à une densité volumique de forces  $f(x, t)$  et une masse volumique  $\rho$ , est un état élastodynamique, s'il vérifie les équations gouvernant l'équilibre du solide, soit

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.1a)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1a)$$

ou

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.2)$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.3)$$

Aux équations (2.1), (2.2) et (2.3) s'ajoutent les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x) ; \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x) \quad (2.4)$$

Et les conditions aux limites sur la surface  $\Gamma$ . Le vecteur traction  $t^{(n)}(x,t)$  appliqué sur une facette de normale  $n(x)$ , s'exprime en fonction du vecteur déplacement par la relation

$$t^{(n)} = \lambda \nabla \cdot u n + 2\mu \partial u / \partial n + \mu n \wedge (\nabla \wedge u) \quad (2.5)$$

Dans de nombreux problèmes physiques et en particulier dans ceux exposés dans les prochains chapitres de ce travail, les termes de "source" sont de nature harmonique, caractérisés par une pulsation  $\omega$ . La densité volumique de forces peut être alors représentée par

$$f(x,t) = \hat{f}(x) e^{-i\omega t} \quad (2.6)$$

En sachant que dans (2.6) la quantité physique est la partie réelle du terme de droite. Il est alors intéressant de mettre le champ de déplacement et le tenseur des contraintes sous la forme suivante

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + \hat{u}(x) e^{-i\omega t} \quad (2.7a)$$

$$\sigma(x,t) = \bar{\sigma}(x,t) + \hat{\sigma}(x) e^{-i\omega t} \quad (2.7b)$$

Il s'agit essentiellement d'un traitement dans le domaine des fréquences.  $\hat{u}$ ,  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{f}$  sont respectivement les transformées de Fourier de  $u$ ,  $\sigma$  et  $f$ .

Le premier terme du deuxième membre des équations (2.7) est la solution transitoire et le deuxième terme est la solution stationnaire. En introduisant les relations (2.7) dans les équations d'équilibres (2.1), (2.2) et (2.3), on obtient les équations d'équilibres pour l'état stationnaire.

$$\hat{\sigma}_{i,j,j}(x) + \rho \hat{f}_i(x) + \rho \omega^2 \hat{u}_i(x) = 0 \quad (2.8a)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \lambda \hat{u}_{k,k} \delta_{ij} + \mu (\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) \quad (2.8b)$$

ou

$$\mu \nabla^2 \hat{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \hat{u}) + \rho \hat{f} + \rho \omega^2 \hat{u} = 0 \quad (2.9)$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \hat{u}) - \mu \nabla \wedge (\nabla \wedge \hat{u}) + \rho \hat{f} + \rho \omega^2 \hat{u} = 0 \quad (2.10)$$

Les conditions aux limites étant harmoniques, elles concernent la solution stationnaire. Par conséquent, la solution transitoire vérifie les équations d'équilibre homogènes, les conditions aux limites homogènes et les conditions initiales

$$\bar{u}(x,0) = \bar{u}(x) - \hat{u}(x) \quad ; \quad \bar{u}(x,0) = v(x) + i\omega \hat{u}(x) \quad (2.11)$$

On considère en général que cette solution transitoire tend vers zéro et disparaît complètement au bout d'un certain temps en raison des dissipations internes du matériau. A partir de cet instant, la solution est alors représentée uniquement par sa solution stationnaire. On remarque alors que le problème aux conditions aux limites et initiales d'origine est remplacé par un problème aux conditions aux limites pures.

Dans ce qui suit, on omet le symbole de transformée de Fourier " ^ " pour le but d'alléger la notation.

### 2.3 Théorème de réciprocité

Le théorème de réciprocité entre deux états élastodynamiques est l'extension du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti en élastostatique.

On considère, dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , deux champs de déplacement  $u$  et  $v$  satisfaisant respectivement les équations de Navier dans le cas stationnaire :

$$(\Delta^* + \omega^2) u + f = 0$$

et

$$(\Delta^* + \omega^2) v + g = 0$$

(2.12)



Avec  $\Delta^* = \frac{\mu}{\rho} \Delta + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div}$  : est l'opérateur d'élasticité  
 Alors nous avons la relation suivante entre  $u$  et  $v$

$$\int_{\Omega} \rho (f v - g u) dv + \int_{\Gamma} (t^{(n)} u v - t^{(n)} v u) ds = 0 \quad (2.13)$$

où  $n$  désigne la normale unitaire, extérieur à  $\Omega$ , sur  $\Gamma$ . Le théorème de réciprocité est l'outil de base pour la formulation intégrale d'un problème d'élasticité quand il est utilisé avec une solution fondamentale de l'élasticité.

#### 2.4 Solutions fondamentales et représentation intégrale

Pour établir la représentation intégrale des équations de l'élastodynamique, on a besoin des solutions fondamentales singulières, ou fonctions de Green, dans un espace infini représentant la réponse à une force volumique concentrée unitaire en un point  $y$  et agissant dans une direction  $e$ . Dans le domaine des fréquences la fonction de Green du milieu infini correspond à une source unitaire et doit satisfaire l'équation suivante

$$\rho (\Delta^* + \omega^2) \ddot{u} + \delta(x-y)e = 0 \quad (2.14)$$

où  $\delta$  représente la fonction de Dirac qui est en fait une impulsion unitaire appliquée au point source  $y$  suivant la direction du vecteur  $e$ . Les propriétés de la fonction de Dirac sont définies dans l'annexe 1.

La fonction de Green est notée  $U_{ij}^{\omega}$  et exprime le déplacement complexe dans le sens  $j$  au point  $x$  due à une force unitaire concentrée au point  $y$  et dirigée dans le sens  $e_i$ .

La traction sur une facette de normale  $n(x)$  associée à  $U_{ij}^{\omega}(x,y)$  par la relation (2.5) est notée  $T_{ij}^{(n)\omega}(x,y)$ .

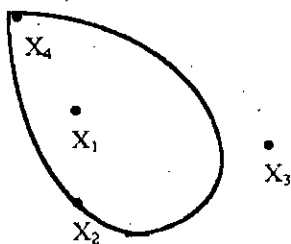
En appliquant le théorème de réciprocité (2.13) à l'état élastodynamique  $[u(x), \sigma(x)]$  et à celui défini par la fonction de Green  $U_{ij}^{\omega}(x,y)$  on obtient la représentation intégrale suivante :

$$c_{ij}(y) u_j(y) + \int_{\Gamma} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) u_j(x) ds(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^{\omega}(x,y) t_j^{(n)}(x) ds(x) + \int_{\Omega} \rho U_{ij}^{\omega}(x,y) f_j(x) dv(x) \quad (2.15)$$

Avec 
$$c_{ij}(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_{\epsilon} \cap \Omega} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) ds$$

- $x_1$  : point intérieur
- $x_2$  : point frontière régulier
- $x_3$  : point extérieur
- $x_4$  : point frontière anguleux

Le terme  $c_{ij}(y) u_j(y)$  est appelé terme libre. Il est donné par :



$$c(y) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } y = x_1 \\ 1/2 \delta_{ij} & \text{si } y = x_2 \\ 0 & \text{si } y = x_3 \end{cases} \quad \delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker}$$

Dans tous les cas, il est fonction de la position de  $x$  par rapport à  $\Gamma$  et de la géométrie locale de  $\Gamma$  en  $x$  uniquement.

### 2.5 Conditions de radiation de Sommerfield

Lorsque le domaine  $\Omega$  est infini ou semi-infini et qu'il n'y a pas de source à l'infini on doit imposer certaines restrictions sur le comportement du champ de déplacement  $u(x,t)$  à l'infini.

Considérons le cas du demi-espace élastique (fig.2.1), dont la frontière  $\Gamma$  est composée du plan définissant la surface du massif, et  $\Gamma_R$  étant la surface d'un demi cylindre pour le problème bidimensionnel de rayon  $R$ , que nous ferons tendre vers l'infini, et de centre  $x$ .

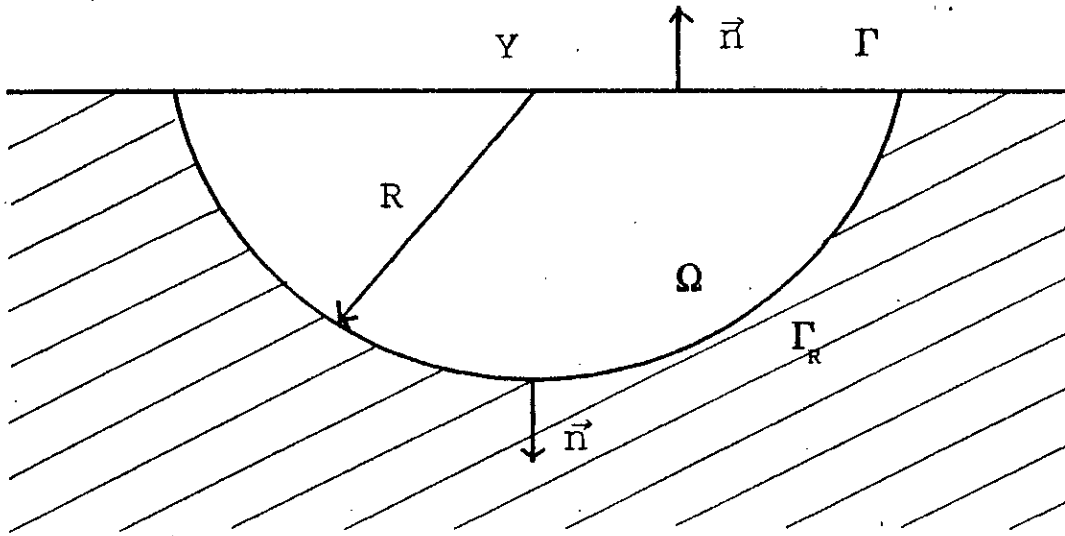


Figure 2.1 Conditions de Sommerfield

La représentation intégrale (2.15) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(y) u_j(y) + \int_{\Gamma} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) u_j(x) ds(x) + \int_{\Gamma_R} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) u_j(x) ds(x) \\
 = \int_{\Gamma} U_{ij}^{\omega}(x,y) t_j^{(n)}(x) ds(x) + \int_{\Gamma_R} U_{ij}^{\omega}(x,y) t_j^{(n)}(x) ds(x) \\
 + \int_{\Omega} \rho U_{ij}^{\omega}(x,y) f_j(x) dv(x) \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Lorsque il n'y a pas de source à l'infini, on peut montrer que le champ de déplacement vérifie les conditions de radiation à l'infini. L'expression suivante tend vers 0 quand R tend vers l'infini.

$$\int_{\Gamma_R} U_{ij}^{\omega}(x,y) t_j^{(n)}(x) d\Gamma_R(x) - \int_{\Gamma_R} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) u_j(x) d\Gamma_R(x) = o(1/R) \quad (2.17)$$

Alors, la représentation intégrale du problème semi-infini devient

$$c_{ij}(y) u_j(y) + \int_{\Gamma} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) u_j(x) ds(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^{\omega}(x,y) t_j^{(n)}(x) ds(x) + \int_{\Omega} \rho U_{ij}^{\omega}(x,y) f_j(x) dv(x) \quad (2.18)$$

et les conditions de radiation à l'infini sont automatiquement prises en compte.

Lorsqu'il existe des sources à l'infini c'est à dire une onde incidente venant de l'infini représentée par le champ  $u^{inc}$  les conditions de radiation précédentes doivent s'appliquer alors au champ de déplacement diffracté par la source  $S : u^{diff} = u - u^{inc}$ . La relation (2.17) s'interprète alors, en appliquant les formules de représentation intégrale pour une région infinie, comme le déplacement du champ incident au point  $y$  en l'absence d'obstacle diffractant soit pour le cas stationnaire :

$$\int_{\Gamma_R} [U_{ij}^{\omega}(x,y) t_j^{(n)}(x) d\Gamma_R(x) - T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) u_j(x) d\Gamma_R(x)] = u_i^{inc}(y) \quad (2.19)$$

$R \longrightarrow +\infty$

## 2.6 Ondes sismiques et leur propagation

### 2.6.1 Définition de différents types d'ondes sismiques

L'énergie de déformation accumulée dans la croûte terrestre est brusquement libérée, ce qui engendre un phénomène aléatoire de vibration du sol de forte amplitude appelée séisme. Le mouvement se caractérise par un glissement selon un plan de faille, celui-ci constitue une surface de moindre résistance. Le séisme se propage à partir de foyer sous forme d'ondes de divers types, qui, compte tenu des conditions géologiques et topographiques du site, engendrent en surface un mouvement complexe difficilement prédictible. On peut distinguer les types d'ondes suivantes :

**a) Les ondes de volume**

Elles sont observées au niveau de l'hypocentre et leur propagation à l'intérieur de la terre se fait selon deux directions. Elles se subdivisent en :

\* Ondes P ou ondes longitudinales: Ces ondes engendrent un changement de volume (compression et dilatation alternées)

\* Ondes S ou ondes transversales: Celles-ci engendrent un cisaillement sans changement de volume dû à une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. A la différence des ondes longitudinales, les ondes transversales ne peuvent se propager dans les milieux liquides et gazeux, en raison de l'inaptitude de ces milieux à transmettre les efforts de cisaillement.

**b) Les ondes de surface**

Les ondes de volume qui arrivent à la surface de la terre produisent des ondes de surface n'intéressant le sol que sur une profondeur extrêmement faible. On distingue principalement :

\* Les ondes R ou ondes de Rayleigh: Ce sont des ondes pour lesquelles les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation. Ce mouvement est semblable au mouvement de la houle et entraîne des compressions (ou des tractions) ainsi que des cisaillements dans le sol.

\* Les ondes Q ou ondes de Love: Ce sont des ondes pour lesquelles les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface, perpendiculairement à la direction de propagation, elles n'engendrent que des contraintes de cisaillement.

2.6.2 Représentation mathématique de de la propagation en champ libre des différents types d'ondes sismiques

On note  $\theta$  l'angle d'incidence entre le vecteur propagation et l'axe horizontale  $x_1$ . Pour l'onde de Rayleigh on prend  $\theta = 0$ . Le champ de déplacement total créé par la réflexion d'une onde plane incidente P, SV, SH sur la surface libre du demi-espace  $x_2 = 0$  ou par une onde de Rayleigh est noté  $u^f(x)$  et est donné dans le demi-espace  $x_2 \leq 0$ , par

$$u^f(x) = A_0^E D^E(x_1, x_2, \theta, \phi) \tag{2.20}$$

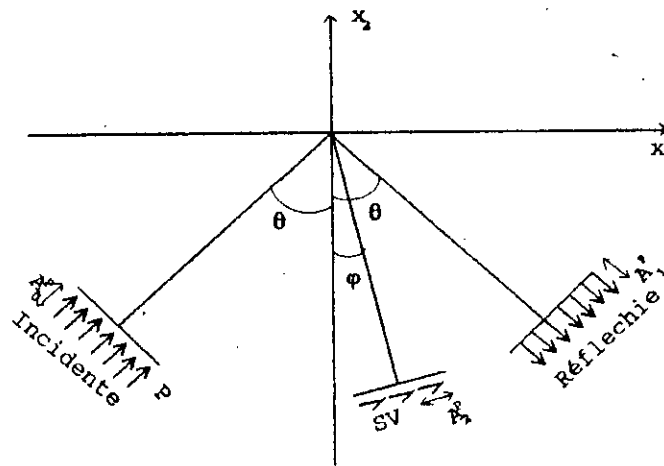


Figure 2.2 Reflexion de l'onde P

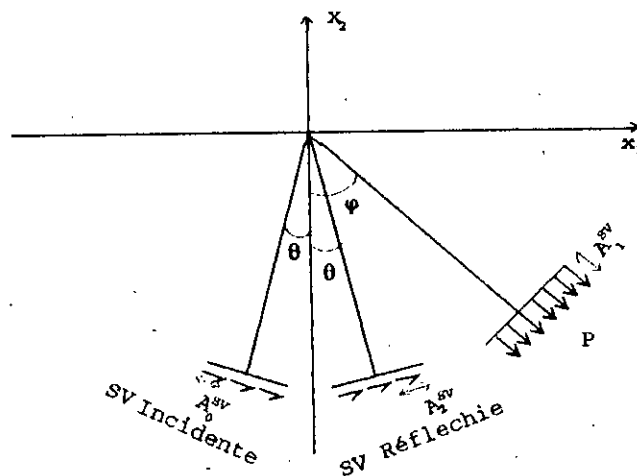


Figure 2.3 Reflexion de l'onde SV

où l'exposant E désigne suivant le cas, l'onde incidente de type P, SV, SH ou de Rayleigh.  $A_O^E$  représente l'amplitude associée à l'onde incidente E considérée. Pour l'onde de Rayleigh il représente l'amplitude de la composante horizontale du demi-espace. Chacune de ces ondes (P, SV, SH ou R) est caractérisée par son nombre d'onde  $k_E = \omega/c_E$  et sa vitesse  $c_E$ . On pose  $\eta = c_s/c_p = \sqrt{(1-2\nu)/(2-2\nu)}$ . Les vecteurs  $D^E(x_1, x_2, \theta, \phi)$  sont donnés par les formules suivantes :

## A) Onde P

$$D^P(x_1, x_2, \theta, \phi) = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_p (x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)] +$$

$$\frac{A_1^P}{A_O^P} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_p (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta)] \quad (2.21)$$

$$+ \frac{A_2^P}{A_O^P} \begin{Bmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_s (x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi)]$$

où  $\phi$  est défini par  $\cos\phi = \eta \cos\theta$  et où

$$\frac{A_1^P}{A_O^P} = \frac{\eta^2 \sin 2\phi \sin 2\theta - \cos^2 2\phi}{\eta^2 \sin 2\phi \sin 2\theta + \cos^2 2\phi} \quad (2.23.a)$$

$$\frac{A_2^P}{A_O^P} = - \frac{2\eta \sin 2\theta \cos 2\phi}{\eta^2 \sin 2\phi \sin 2\theta + \cos^2 2\phi} \quad (2.23.b)$$

On peut remarquer que pour une incidence particulière telle que

$$\eta^2 \sin 2\phi \sin 2\theta = \cos^2 2\phi \quad (2.24)$$

l'onde incidente P est réfléchiée en une onde SV seulement.

## B) Onde SV

$$\begin{aligned}
 D^{SV}(x_1, x_2, \theta, \phi) &= \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_s (x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)] + \\
 &\frac{A_1^{SV}}{A_0^{SV}} \begin{Bmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_p (x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi)] \quad (2.25) \\
 &+ \frac{A_2^{SV}}{A_0^{SV}} \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_s (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta)]
 \end{aligned}$$

où  $\phi$  est défini par  $\cos\phi = 1/\eta \cos\theta$  et où

$$\frac{A_1^{SV}}{A_0^{SV}} = \frac{\eta \sin 4\theta}{\eta^2 \sin 2\phi \sin 2\theta + \cos^2 2\theta} \quad (2.26.a)$$

$$\frac{A_2^{SV}}{A_0^{SV}} = \frac{2\eta \sin 2\theta \cos 2\phi}{\eta^2 \sin 2\phi \sin 2\theta + \cos^2 2\theta} \quad (2.26.b)$$

On remarque que l'amplitude  $A_1^{SV}$  s'annule pour certaines valeurs de  $\theta_0$ . Ainsi pour  $\theta_0 = 0, \pi/4, \pi/2$  il y'a pas d'onde P réfléchie, l'onde incidente SV se réfléchit totalement en une onde SV. En revanche, pour un angle d'incidence  $\theta$  tel que :

$$\eta^2 \sin 2\phi \sin 2\theta = \cos^2 2\theta \quad (2.27)$$

l'onde incidente SV se réfléchit totalement en une onde P.

En analysant l'équation décrivant la loi de reflexion ou la loi de Snell :

$$\cos\phi = c_p / c_s \cos\theta \quad (2.28)$$



on peut remarquer que l'angle  $\phi$  n'est réel que si et seulement si  $\theta_0$  est plus petit qu'un angle critique  $\theta_{cr}$ , défini par

$$\cos \theta_{cr} = c_p / c_s \quad (2.29)$$

d'où 
$$\theta_{cr} = \arccos(\eta) \quad (2.30)$$

Pour  $\theta = \theta_{cr}$  on obtient  $\phi = \pi/2$ ,

$$\frac{A_1^{sv}}{A_0^{sv}} = \frac{4\eta^2 (1 - \eta^2)^{1/2}}{(1 - 2\eta^2)^{1/2}}, \quad \frac{A_2^{sv}}{A_0^{sv}} = -1 \quad (2.31)$$

On remarque aussi que pour  $\theta < \theta_{cr}$  l'onde réfléchie devient inhomogène définie par :

$$D^{sv}(x_1, x_2, \theta, \phi) = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_s (x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)] +$$

$$\frac{A_1^{sv}}{A_0^{sv}} \begin{Bmatrix} 1/\eta \cos\theta \\ -1/\eta \beta i \\ 0 \end{Bmatrix} \exp(ik_s x_1 \cos\theta) \exp(k_s \beta x_2) \quad (2.32)$$

$$+ \frac{A_2^{sv}}{A_0^{sv}} \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_s (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta)]$$

où  $\beta = (\cos^2 \theta - \eta^2)^{1/2}$

et

$$\frac{A_1^{sv}}{A_0^{sv}} = \frac{\eta \sin 4\theta}{2\beta \cos\theta \sin 2\theta i + \cos^2 2\theta} \quad (2.33.a)$$

$$\frac{A_2^{sv}}{A_0^{sv}} = \frac{2\beta \cos\theta \sin 2\theta i - \cos^2 2\theta}{2\beta \cos\theta \sin 2\theta i + \cos^2 2\theta} \quad (2.33.b)$$

## C) Onde SH

$$D^{SH}(x_1, x_2, \theta) = 2 \cos(k_s x_2 \sin \theta) \exp(ik_s x_1 \cos \theta) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

## D) Onde de Rayleigh

$$D^R(x_1, x_2, 0) = (1 - 2 k_R^2 / k_s^2) \begin{Bmatrix} 1 \\ -ik_R / (k_R^2 - k_s^2)^{1/2} \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_R x_1 + (k_R^2 - k_s^2)^{1/2} x_2] + 2 k_R^2 / k_s^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -i (k_R^2 - k_s^2)^{1/2} / k_R \\ 0 \end{Bmatrix} \exp [ik_R x_1 + (k_R^2 - k_s^2)^{1/2} x_2] \quad (2.35)$$

Avec  $k_R$  vérifié l'équation de Rayleigh

$$(2k_R^2 - k_s^2)^2 - 4k_R^2 (k_R^2 - k_s^2)^{1/2} (k_R^2 - k_s^2)^{1/2} = 0 \quad (2.36)$$

Une bonne approximation de  $c_R$  est donnée par la formule suivante

$$c_R = \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} c_s \quad (2.36)$$

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir rappelé la formulation en déplacements des problèmes de l'élastodynamique, l'application du théorème de réciprocité entre deux états élastodynamiques, la signification des fonctions de Green, nous avons présenté la formulation intégrale des problèmes de l'élastodynamique. Nous avons également déduit une représentation intégrale du problème semi-infini avec ou sans une source émettrice d'ondes sismiques à l'infini, tout en montrant que les conditions de radiation de Sommerfeld à l'infini étaient prises en compte de manière inhérente dans la formulation .

Enfin quelques définitions sur les différents types d'ondes sismiques ainsi que la modélisation mathématique de leur propagation en champ libre ont été évoquées.

## Chapitre 3

# EQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES POUR L'ELASTODYNAMIQUE STATIONNAIRE BIDIMENSIONNELLE

*"Ce que l'on conçoit bien s'annonce clairement.  
Et les mots pour le dire arrivent aisément".*

BOILEAU

## Chapitre 3

EQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES POUR L'ELASTODYNAMIQUE  
STATIONNAIRE BIDIMENSIONNELLE

## 3.1 Introduction

Les problèmes rencontrés en mécanique du milieu continu sont, de manière inhérente tridimensionnels. Cependant, sous-couvert d'un contexte hypothétique relatif à la configuration du milieu étudié et du chargement appliqué, il est possible de simplifier le traitement de certains problèmes par le biais d'une analyse bidimensionnelle s'inscrivant dans le cadre de situations de contraintes planes ou de déformations planes tels que les tunnels, routes, certains barrages ou bâtiments de grandes longueurs. La complexité de certains problèmes fixe à l'approche analytique des limites certaines et impose l'approche numérique comme alternative du contournable.

En Général, le principe de toute méthode de discrétisation consiste à remplacer un milieu continu (structure) en un nombre de parties (éléments) dont le comportement est connu à partir d'un nombre fini de paramètres. Les éléments de la structure sont choisis suffisamment petits pour que leur comportement structurel soit simple à déterminer.

La méthode des éléments finis constitue actuellement un outil efficace pour le calcul des structures complexes, et son domaine d'application s'est considérablement étendu en englobant l'étude des problèmes non linéaires en mécanique des solides.

Plus récente que la méthode des éléments finis, la méthode des équations intégrales aux frontières [17], permet de limiter la discrétisation au contour du domaine. Cette méthode a pour le moment

un champ d'application restreint, mais elle offre les avantages suivants:

1- La simplicité de préparation des données (seul le contour est discrétisé),

2- le nombre d'inconnues est réduit (les fonctions inconnues intervenant, se trouvent sur la frontière et non à l'intérieur du domaine),

3- Une précision favorable dans le cas des concentrations de contraintes ou des singularités, l'équation de base étant théoriquement vérifiée à l'intérieur du domaine,

4- Facilité de traitement des domaines infinis et semi-infinis [14,33,113] puisque la condition de radiation est prise en compte automatiquement dans la formulation. Nous évitons ainsi, dans la méthode numérique associée, les problèmes liés à la finitude artificielle du domaine discrétisé rencontrés lors de la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis.

La mise en oeuvre de cette technique nécessite la discrétisation de la frontière du domaine étudié uniquement, diminuant ainsi de 1 la dimension du problème. Après discrétisation, la taille des systèmes linéaires à résoudre est relativement faible mais la contre-partie inévitable se manifeste par l'obtention de matrices pleines et non symétriques.

Le principe de la formulation de la la méthode des équations intégrales consiste à :

- Etablir une formulation intégrale des équations différentielles régissant le comportement physique du problème étudié,

- Discrétiser la frontière en éléments finis formant ainsi le système d'équations algébriques  $[H]\{u\} = [G]\{p\}$ ,

- Imposer les conditions aux frontières de type Dirichlet, Newmann ou Robin,

- Et enfin résoudre le système d'équations arrangé sous la forme  $\{A\}\{X\} = \{B\}$ .

Une fois les inconnues sur la frontière déterminées, il est alors possible de connaître le vecteur déplacement et le vecteur contrainte en tout point du domaine.

Dans les sections suivantes, nous nous proposons de développer brièvement la formulation mathématique et le traitement numérique des équations intégrales pour leur utilisation dans l'étude de problèmes élastodynamiques stationnaires en déformation plane.

### 3.2 Fonctions de Green

On a vu au chapitre 2 que les fonctions de Green sont les solutions en déplacement et en contrainte des équations d'équilibre de l'élastodynamique pour une excitation unitaire

$$\rho (\Delta^* + \omega^2)u + \delta(x - y)e = 0 \quad (3.1)$$

$\delta$  représente la fonction de Dirac qui est en fait une impulsion unitaire appliquée au point source  $y$  suivant la direction du vecteur  $e$ . Les propriétés de la fonction de Dirac sont définies dans l'annexe 1.

Lorsque le domaine dans lequel on les considère est infini on obtient les fonctions de Green classiques du milieu infini. Lorsque le domaine est quelconque les fonctions de Green dépendent alors des conditions aux limites imposées à la surface du domaine, mais en général ces fonctions ne sont pas connues explicitement. Pour les problèmes de dynamique des sols certains auteurs utilisent les fonctions de Green du demi-espace homogène avec des conditions aux limites de surface libre. L'utilisation de ces fonctions de Green dans une formulation intégrale permet de s'affranchir de la surface libre ce qui réduit d'autant le contour à discrétiser. Cependant elles sont plus compliquées que celles du milieu infini et malgré la réduction du maillage elles demandent en général un effort de calcul

plus important. nous avons donc choisi d'utiliser les fonctions de Green du milieu infini.

Les fonctions de Green du milieu infini sont données comme suit [8]

$$U_{ij}^{\omega}(x,y) = \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \left[ \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 K_2 \left( \frac{sr}{c_1} \right) - K_2 \left( \frac{sr}{c_2} \right) \right] r_{,i} r_{,j} \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{sr} K_1 \left( \frac{sr}{c_1} \right) - \frac{c_2}{sr} K_1 \left( \frac{sr}{c_2} \right) - K_0 \left( \frac{sr}{c_2} \right) \delta_{ij} \right] \right\} \quad (3.2)$$

$$T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{s}{c_1} \left[ \left[ 2 \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 - 1 \right] r_{,i} n_{,j} - 2 \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 r_{,i} r_{,j} r_{,n} \right] \right. \\ \times K_1 \left( \frac{sr}{c_1} \right) + \frac{s}{c_2} \left[ 2 r_{,i} r_{,j} r_{,n} - \delta_{ij} r_{,n} - r_{,j} n_{,i} \right] \\ \times K_1 \left( \frac{sr}{c_2} \right) - \frac{2}{r} \left[ K_2 \left( \frac{sr}{c_2} \right) - \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 K_2 \left( \frac{sr}{c_1} \right) \right] \\ \left. \times \left[ r_{,j} n_{,i} + r_{,i} n_{,j} + \delta_{ij} r_{,n} - 4 r_{,i} r_{,j} r_{,n} \right] \right\} \quad (3.3)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont respectivement les vitesses des ondes de dilatation et de cisaillement,  $\mu$  est le module de cisaillement du milieu,  $s = i\omega$  est un paramètre complexe,  $r = \|x - y\|$ , enfin  $K_0(z)$ ,  $K_1(z)$  et  $K_2(z)$  sont les fonctions de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro, un et deux respectivement.

Le calcul des expressions (3.2) et (3.3) revient donc à calculer les fonctions  $K_0(z)$ ,  $K_1(z)$  et  $K_2(z)$  dont nous exposons, la définition et la procédure de calcul en annexe 1.

#### Nota:

Les solutions fondamentales exprimées par les équations (3.2) et (3.3) ont été établies pour un état de déformation plane. Ces mêmes expressions sont valides pour un état de contraintes planes, en remplaçant tout simplement le coefficient de poisson  $\nu$  par son équivalent  $\bar{\nu}$  tel que  $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$ .



### 3.3 Formulation intégrale discrétisée

La résolution analytique de l'équation (2.18) est difficile à mener: il a été montré qu'une telle résolution ne peut se faire que si les problèmes étudiés présentent une géométrie et des conditions aux frontières très simples ce qui n'est pas le cas en pratique. C'est pour cette raison, que la méthode des équations aux frontières utilise une approche numérique pour la résolution de l'équation (2.18). La première étape du traitement numérique réside dans le choix du mode d'interpolation des fonctions inconnues. En se plaçant dans le cas d'un problème bidimensionnel, il est nécessaire d'approximer le contour du domaine à l'aide d'éléments dits éléments de frontière. L'élément choisi dans ce travail est l'élément constant. Les déplacements et les tractions sont donc supposés constants au sein des éléments.

Supposons maintenant que le contour soit divisé en  $n$  éléments, l'équation intégrale (2.18) se met en omettant l'intégrale du domaine sous la forme discrétisée suivante

$$c_{ij}(y)\ddot{u}_j(y) + \sum_{e=1}^n u_j^e \int_{\Gamma_e} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) ds_e(x) = \sum_{e=1}^n t_j^e \int_{\Gamma_e} U_{ij}^{\omega}(x,y) ds_e(x) \quad (3.4)$$

où  $u_i^e$  et  $t_i^e$  sont des composantes constantes des déplacements nodaux et des tensions nodales au sein de l'élément  $e$ .

Sous forme matricielle, l'équation (3.4) devient

$$c \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^n H_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} \mathbf{t}_j \quad (3.5)$$

### 3.4 Intégration des fonctions de Green singulières

L'inconvénient majeur de la méthode des équations intégrales réside dans l'apparition des singularités des noyaux  $U_{ij}^\omega$  et  $T_{ij}^{(n)\omega}$  dans le calcul des intégrales lorsque  $x$  et  $y$  appartiennent au même élément. On peut éviter ce problème en prenant  $y$  dans un domaine  $\Omega'$  extérieur à  $\Omega$ . La distance entre point singulier et point courant n'est jamais nulle. Cependant, la contre-partie se situe dans le système d'équations qui est souvent mal conditionné et ainsi plus délicat à résoudre. La position des points singuliers est alors obtenue par tâtonnement jusqu'à détermination de leur position optimale.

Par contre, lorsque nous choisissons le point singulier sur la frontière  $\Gamma$ , nous conservons un système d'équations avec des termes diagonaux fortement dominants. Nous avons mis au point dans notre recherche une méthode d'intégration analytique permettant de résoudre les problèmes liés aux singularités.

Les fonctions à intégrer dans le cas où on a considéré que les déplacements et les tensions sont constants au sein de chaque élément, sont

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y) ds_j(x) \quad (3.6)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} U_{ij}^\omega(x,y) ds_j(x) \quad (3.7)$$

**a) Le point courant ( $x$ ) et le point singulier ( $y$ ) n'appartiennent pas au même élément**

Dans ce cas les fonctions (3.6) et (3.7) ne contiennent pas de termes singuliers puisque  $(x-y)$  n'est jamais égale à zéro. Nous avons utilisé alors, pour l'intégration sur chaque élément, la méthode de Gauss à 4 points.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^4 A_i f(x_i) \quad (3.8)$$

Avec

$$x_1 = -x_4 = 0.8611363115941$$

$$x_2 = -x_3 = 0.3399810435849$$

$$A_1 = A_4 = 0.347854851375$$

$$A_2 = A_3 = 0.6521451548625$$

b) Le point courant ( $x$ ) et le point singulier ( $y$ ) appartiennent au même élément

Dans ce cas, les fonctions (3.6) et (3.7) contiennent des termes singuliers puisque  $(x-y)$  s'annule.

Nous avons donc à intégrer les deux sous-matrices  $H_{ii}$  et  $G_{ii}$  avec

$$H_{ii} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (3.9.a)$$

$$G_{ii} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (3.9.b)$$

En faisant un changement de repère vers un repère local adéquat  $(\xi, \eta)$ , nous pouvons démontrer que les termes de  $H_{ij}$  dans le nouveau repère s'annulent.

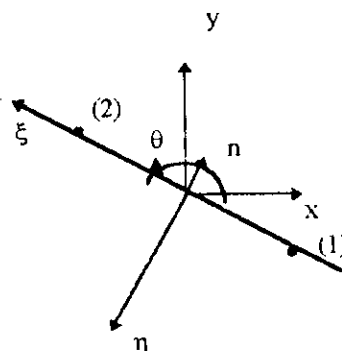


Figure 3.1

De même, on peut voir facilement que  $G_{12} = G_{21} = 0$  et par conséquent les seules termes qui nécessitent un traitement particulier sont donc  $G_{11}$  et  $G_{22}$ .

Vu qu'on a  $\partial r / \partial \xi = 1, \partial r / \partial \eta = 0$  et d'après la relation de récurrence des fonctions de Bessel [5]

$$K_2(z) = K_0(z) + 2 K_1(z)/z \quad (3.10)$$

On peut écrire  $G_{11}$  et  $G_{22}$  sous la forme suivante

$$G_{11} = \frac{1}{\pi\mu} \int_0^R \left\{ \left[ \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \left[ K_0\left(\frac{sr}{c_1}\right) + \frac{c_1}{sr} K_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) \right] - \frac{c_2}{sr} K_1\left(\frac{sr}{c_2}\right) \right] \right\} dr \quad (3.11)$$

$$G_{22} = \frac{1}{\pi\mu} \int_0^R \left\{ - \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{sr} K_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) + \frac{c_2}{sr} K_1\left(\frac{sr}{c_2}\right) + K_0\left(\frac{sr}{c_2}\right) \right\} dr \quad (3.12)$$

Et en utilisant en outre la formule de récurrence des fonctions de Bessel [5] suivante

$$K_n'(z) = -K_{n-1}(z) - n/z K_n(z) \quad (3.13)$$

On peut démontrer que

$$G_{11} = \frac{1}{\pi\mu} \left\{ \left[ - \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{s} K_1\left(\frac{sR}{c_1}\right) + \frac{c_2}{s} K_1\left(\frac{sR}{c_2}\right) \right] + \int_0^R K_0\left(\frac{sr}{c_2}\right) dr \right\} \quad (3.14)$$

$$G_{22} = \frac{1}{\pi\mu} \left\{ \left[ \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{s} K_1\left(\frac{sR}{c_1}\right) - \frac{c_2}{s} K_1\left(\frac{sR}{c_2}\right) \right] + \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \int_0^R K_0\left(\frac{sr}{c_2}\right) dr \right\} \quad (3.15)$$

Les intégrales qui apparaissent dans (3.14) et (3.15) ne sont pas singulières. Le résultat analytique de ces intégrales est exposé en annexe 1.

Les expressions des sous-matrices  $H_{ii}$  et  $G_{ii}$  dans le repère physique se calculent aisément en transformant ces sous-matrices de la manière suivante

$$H_{ii}^g = T^t H_{ii}^l T \quad (3.16)$$

$$G_{ii}^g = T^t G_{ii}^l T \quad (3.17)$$

Avec 
$$T = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

### 3.5 Résolution du système d'équations

Après calcul de tous les coefficients des contraintes et des déplacements, nous aboutissons à un système d'équations du type

$$H u = G t \quad (3.18)$$

où  $u$  et  $t$  sont les vecteurs contenant respectivement les déplacements et les vecteurs contraintes sur les éléments de surface.

$G$  et  $H$  sont des matrices pleines puisque dans la formulation tous les points du contour sont couplés.

Le problème est en général mixte. Les termes inconnus se placeront dans la matrice du système  $AX = b$  à résoudre tandis que les termes connus passent dans le second membre. Les coefficients des déplacements et des contraintes qui apparaissent dans la matrice ne sont pas du même ordre de grandeur. Afin d'éviter les perturbations numériques susceptibles d'en résulter, nous multiplions les coefficients des contraintes par le module d'Young du matériau. La résolution du système linéaire obtenu se fait par la méthode de Gauss classique pour les matrices pleines non symétriques avec recherche du pivot maximal.

### 3.6 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté le traitement analytique et numérique afférent à la méthode des équations intégrales appliquée à l'étude des problèmes de l'élastodynamique stationnaire bidimensionnelle. Nous avons en particulier mis au point une méthode d'intégration analytique permettant de résoudre les problèmes liés aux singularités, ce qui permet de réduire les imprécisions dans les calculs numériques.

Nous présentons dans le chapitre suivant l'application de la méthode des équations intégrales aux problèmes de vibration des massifs de fondations.

## Chapitre 4

# IMPEDANCES DYNAMIQUES DE FONDATEIONS FILANTES

*"La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit,  
mais c'est cet éclair qui est tout".*

HENRI POINCARRE

## Chapitre 4

## IMPEDANCES DYNAMIQUES DE FONDATIONS FILANTES

## 4.1 Introduction

L'étude de la réponse dynamique de fondations rigides revêt une importance significative dans la conception des fondations supportant les machines vibrantes, ainsi que dans la conception d'ouvrages avec prise en compte de l'interaction sol-fondation. Les endommagements causés par les séismes indiquent que les propriétés locales du sol, la géométrie de la fondation, la profondeur de l'enterrement, la stratification du sol, etc... jouent un rôle déterminant dans le comportement dynamique du système sol-fondation.

L'étude des vibrations de massifs de fondation a constitué l'un des premiers objectifs de la dynamique des sols. Dans ce domaine, les premiers résultats ont été obtenus par Lamb (référence [21] dans [7]) qui a déterminé, en tout point du demi espace élastique les déplacements dus à une force harmonique. Par intégration de cette solution élémentaire sur une surface circulaire, Reissner (référence [24] dans [7]), Quinlan et Sung (références [23] et [28] dans [7]) ont obtenu des solutions pour le cas de répartition de contraintes uniforme, parabolique ou elliptique. Deleuze [27] et Bycroft (référence [8] dans [7]) entre autres ont pris comme déplacement de la fondation des moyennes pondérées des déplacements obtenus sous la surface chargée. Toutes ces méthodes analytiques reposent sur un des contexte hypothétique potentiellement éloigné de la réalité alors, qu'en fait, le problème d'une fondation vibrante est un problème mixte: les déplacements sont imposés à l'interface sol-fondation et les contraintes sont nulles sur la surface libre; par conséquent la répartition des contraintes est une inconnue du problème et varie avec la fréquence.



Lysmer [76] a obtenu une expression analytique plus rigoureuse du déplacement rigide en discrétisant l'interface sol-fondation en plusieurs éléments et en y imposant des vecteurs contraintes constants par morceaux mais dépendant de la fréquence. D'une manière générale, suivant la façon dont est traitée la condition aux limites à l'interface sol-fondation, des solutions analytiques diverses sont obtenues. Ces solutions analytiques, vu la difficulté du problème, n'ont été obtenues que pour des cas assez limités (fondation circulaire et filante sur sol stratifié, viscoélastique, et pour fondation rectangulaire sur un demi espace). Luco et Westmann [69,70] ont donné des fonctions de rigidités dynamiques (en supposant que la surface de contact est sans frottement). En réalité, les fondations sont généralement de forme quelconque et sont semi-enterrées dans le sol. L'obtention des fonctions de rigidité dynamique de celles-ci nécessite le recours aux méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (M.E.F) ou la méthode des éléments aux frontières (B.E.M)

Parmi les méthodes numériques, la méthode des éléments finis [21] est particulièrement utilisée dans le cadre des calculs d'interaction sol-structure, notamment, pour traiter les problèmes complexes qui ne peuvent pas être résolus par des formulations analytiques. Il en est ainsi lorsque la géométrie du problème est complexe, lorsque le sol est hétérogène avec des couches non horizontales, etc. L'ensemble de la fondation et du sol est modélisé par un maillage éléments finis et le problème est alors traité dans sa globalité, dans le cadre d'une méthode dite " méthode globale". Les fondations enterrées et les sols multicouches peuvent être étudiés sans effort supplémentaire par la méthode des éléments finis.

Cependant, Durant la vibration des massifs de fondation, deux types de dissipation d'énergie mécanique emmagasinée dans la fondation sont possible: une dissipation par amortissement radiatif,

ainsi qu'une dissipation par amortissement matériel. Pour la prise en compte de phénomène de radiation de l'amortissement dans la solution numérique obtenue par la M.E.F, il nous faut étendre suffisamment les dimensions du modèle de sol pour que les ondes réfléchies aux limites n'atteignent pas la structure durant le laps de temps où l'on évalue sa réponse. Cependant, cette procédure est très coûteuse, vu la taille des calculs nécessaires. Pour contourner ce problème, on peut adopter un modèle utilisant des frontières absorbantes [35,59]) simulant de façon exacte la présence, au delà de la frontière, d'un milieu d'extension infinie. L'existence de ce milieu permet la dissipation d'énergie vers l'infini.

La M.E.I.F. transforme les équations de l'élastodynamique en relations intégrales entre vecteurs déplacements et vecteurs contraintes sur la frontière du domaine considéré. Il est procédé alors à une discrétisation de la frontière du domaine en éléments finis et la dimension du problème se trouve réduite d'une unité. Les conditions de radiation des ondes à l'infini sont incluses dans la formulation de manière inhérente et n'exigent donc pas l'introduction d'équations supplémentaires à cet effet. On peut ainsi aisément traiter des problèmes de taille infinie dans une, deux ou trois directions. Le premier traitement numérique par une formulation intégrale aux frontières d'un problème d'élastodynamique a été donné par Cruse et Rizzo [22] et Cruse [23] en 1968. Cependant, Dominguez [31] a été le premier à étudier la réponse dynamique des fondations rigides superficielles et enterrées par la M.E.I.F dans le domaine fréquentiel. Spyrakos et Beskos [98,99] ont utilisé la M.E.I.F dans le domaine temporel pour l'analyse dynamique bidimensionnelle des fondations rigides et flexibles. Abascal et Dominguez [1] ont utilisé la M.E.I.F pour étudier l'effet du sol sous-jacent et celui d'un substratum non rigide sur les fonctions d'impédance de fondations filantes.

Dans ce chapitre, après une brève description des fonctions d'impédance, nous présentons le développement d'une formulation matricielle des équations intégrales pour le calcul de la réponse dynamique des fondations filantes rigides superficielles et enterrées. La transcription informatique de cette formulation est effectuée par l'élaboration d'un code de calcul. Ce code permet de calculer les mouvements rigides de translations et de rotation de fondations filantes (superficielles ou enterrées) reposant sur un demi-espace visco-élastique et soumises à des sollicitations harmoniques. Nous fournissons également les résultats d'une étude paramétrique relative à l'influence de la discrétisation du champ libre de part et d'autre de la fondation, et sur l'influence des propriétés mécaniques du sol telles que le coefficient de Poisson, et l'amortissement. L'effet de l'enterrement et le type de contact sol-fondation sont également étudiés.

#### 4.2. Fonctions d'impédance: Définition et interprétation

Une étape importante dans les calculs actuels de fondations consiste à déterminer les fonctions d'impédance d'une fondation rigide et non pesante. Lorsque ces fonctions d'impédance sont connues, il est possible de calculer la réponse de la fondation réelle grâce à la méthode des "sous-structures" permettant de décomposer un problème donné en plusieurs sous-problèmes.

Pour des fondations filantes, les fonctions d'impédance correspondant aux modes de translation horizontale, de translation verticale et de balancement sont définies par la relation matricielle suivante

$$\begin{Bmatrix} F_h \\ F_v \\ M_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{hh} & 0 & K_{h\phi} \\ 0 & K_{vv} & 0 \\ K_{\phi h} & 0 & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ u_v \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Avec

$u_v$  - déplacement vertical

$u_h$  - déplacement horizontal

$\phi$  - rotation autour d'un axe horizontal passant par o

$F_v$  - force verticale

$F_h$  - force horizontale

$M_\phi$  - moment total autour d'un axe horizontal

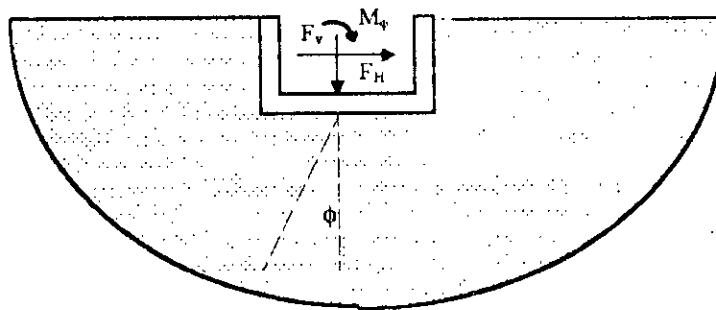


Figure 4.1 Géométrie et notation d'une fondation enterrée

$K_{hh}$ ,  $K_{vv}$ ,  $K_{\phi\phi}$ ,  $K_{h\phi}$  et  $K_{\phi h}$  sont complexes et dépendent de la fréquence. La partie réelle de ces composantes représente la rigidité et l'inertie du sol tandis que la partie imaginaire représente l'amortissement radiatif et éventuellement

l'amortissement matériel du sol. La matrice d'impédance complexe induit un déphasage entre la sollicitation et la réponse. Les termes non-diagonaux  $K_{h\phi}$  et  $K_{\phi h}$  apparaissent parce que les modes de la translation horizontale et du balancement sont toujours couplés, i.e, qu'une force horizontale donne lieu non seulement à un déplacement horizontal, mais aussi à une rotation autour de l'axe horizontal perpendiculaire. Souvent négligeables pour les fondations superficielles, ces termes ( $K_{h\phi}$  et  $K_{\phi h}$ ) peuvent être très importants lorsqu'il s'agit de fondations enterrées.

Ces résultats sont exploités pour le traitement du même problème étendu au cas d'un milieu semi-infini, visco-élastique en substituant les coefficients de Lamé initialement réels par leurs homologues complexes.

$$G^* = G(1 + 2\beta i), \quad \lambda^* = \lambda(1 + 2\beta i) \quad (4.2)$$

où  $\beta$  est le coefficient d'amortissement.

#### 4.3 Formulation intégrale

La forme matricielle des équations intégrales aux frontières de l'élastodynamique, en supposant que le contour est divisé en  $n$  éléments, et que les champs de déplacement et de traction sont constants au sein des éléments, est donnée comme suit

$$c \ u_i + \sum_{j=1}^n H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} t_j \quad (4.3)$$

ou sous la forme condensée

$$\hat{H} u = G t \quad (4.4.a)$$

$$\hat{H} = H + \frac{1}{2} I \quad (4.4.b)$$

où  $I$  est la matrice unité

L'équation (4.4) sera utilisée pour la détermination de la matrice d'impédance dynamique. Les éléments de frontières sont divisés en deux parties. La première partie, identifiée par l'indice

c désigne les éléments de contact sol-fondation; la deuxième partie, identifiée par l'indice l, désigne les éléments de la surface libre.

En vertu de cette partition l'équation (4.4.a) se réécrit comme suit

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & H^{cl} \\ H^{lc} & H^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} & G^{cl} \\ G^{lc} & G^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^c \\ t^l \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

or le vecteur contrainte  $t^l$  est nul (surface libre), d'où

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & H^{cl} \\ H^{lc} & H^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{lc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^c \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Il est à noter que dans ce travail nous nous sommes basés sur une formulation en sous-structures pour l'évaluation des matrices d'impédance de fondations filantes rigides pour les deux types de contact sol-fondation: relâché et parfait. Le type de contact sol-fondation relâché entraîne le découplage entre les degrés de libertés de la fondation et partant une réduction considérable de l'effort de calcul sans altération de la précision.

#### a) Cas de conditions aux limites relâchées

Dans ce cas, nous supposons que sur la surface, la charge verticale ne produit qu'un déplacement vertical et une charge horizontale n'engendre qu'un déplacement horizontal. Cela se traduit mathématiquement par  $H_{12} = H_{21} = G_{12} = G_{21} = 0$ .

De plus, si tous les éléments de frontière se situent dans le même plan horizontal, on peut vérifier que tous les éléments de la matrice  $H_{ij}$  deviennent nuls.

d'où

$$H = \frac{1}{2} I \quad (4.7)$$

et

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{lc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^c \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} u^c = G^{cc} t^c \\ \frac{1}{2} u^l = G^{lc} t^c \end{cases} \quad (4.9)$$

$$t^c = \frac{1}{2} \left( G^{cc} \right)^{-1} u^c \quad (4.10)$$

Déterminons à présent la relation force-déplacement au sein de l'interface sol-fondation. La relation cinématique entre les degrés de libertés rigides de translation et de rotation et les déplacements des éléments de frontières sont données par les contraintes géométriques suivantes (voir fig.4.2)

$$u_{1i} = u_1 \quad (4.11.a)$$

$$u_{2i} = u_2 + \phi r_{1i} \quad (4.11.b)$$

lesquelles s'écrivent en notation matricielle

$$u^c = T u_o \quad (4.12)$$

avec

$u_o$  déplacement du centre de gravité de la fondation (deux translations et une rotation)

$T$  matrice de transformation

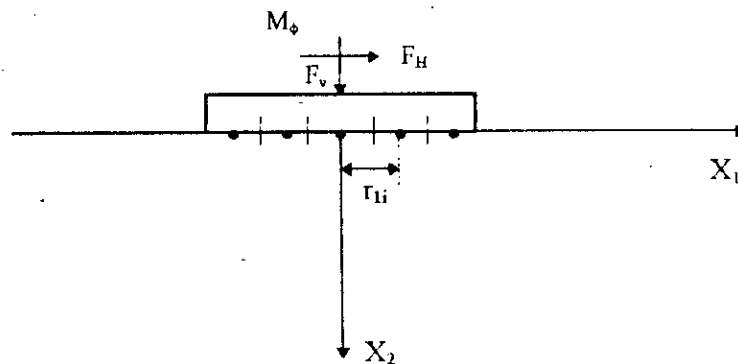


Figure 4.2

Les forces correspondantes (fig.4.2) appliquées dans les directions de  $u$  et de  $\phi$ , peuvent être déterminés par intégration des contraintes de contact sur les éléments de frontière.

$$F_H = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} t_1^c dA_i \quad (4.13.a)$$

$$F_v = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} t_2^c dA_i \quad (4.13.b)$$

$$M_\phi = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} t_2^c r_{1i} dA_i \quad (4.13.c)$$

en notation matricielle, l'équation (4.13) s'écrit

$$F = T^t A t^c \quad (4.14)$$

où  $A$  est une matrice diagonale designant "l'aire" de chaque élément de frontière de la fondation, d'où

$$F = \frac{1}{2} T^t A \left[ G^{cc} \right]^{-1} T u_0 \quad (4.15)$$

La matrice d'impédance est définie comme étant

$$F = K u_0 \quad (4.16)$$

Ce qui prouve après identification avec l'équation (4.15) que la matrice d'impédance s'écrit comme étant

$$K = \frac{1}{2} T^t A \left[ G^{cc} \right]^{-1} T \quad (4.17)$$



## b) Cas des conditions aux limites parfaites

Dans ce cas, les conditions aux limites sont parfaites, i.e. les contraintes et les déplacements sur la surface sont supposés couplés. Il en découle qu'une discrétisation par élément de frontière de la surface libre est obligatoire.

l'équation (9), peut se réécrire comme suit

$$H^{cc} u^c + H^{cl} u^l = G^{cc} t^c \quad (4.18.a)$$

$$H^{lc} u^c + H^{ll} u^l = G^{lc} t^c \quad (4.18.b)$$

à partir de l'équation (4.18.b), on a

$$u^l = (H^{ll})^{-1} G^{lc} t^c - (H^{ll})^{-1} H^{lc} u^c \quad (4.19)$$

En substituant (4.19) dans (4.18.a), nous pouvons déterminer le vecteur contrainte à l'interface sol-fondation en fonction du vecteur déplacement

$$t^c = (G^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc})^{-1} (H^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} H^{lc}) u^c \quad (4.20)$$

A partir des équations (4.12), (4.14) et (4.16) nous pouvons montrer que

$$P = T^t A (G^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc})^{-1} (H^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} H^{lc}) T u_o \quad (4.21)$$

d'où la matrice d'impédance

$$K = T^t A (G^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc})^{-1} (H^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} H^{lc}) T \quad (4.22)$$

#### 4. Etude paramétrique

##### 4.1 Convergence et effet de discrétisation

L'interaction sol-structure a une importance considérable dans la conception parasismique des structures. Dans ce cadre, le calcul des fonctions d'impédances dynamiques des fondations, i.e, les forces de translation et de balancement produisant des déplacements de translation et de rotation unitaires d'une fondation non-pesante et rigide posée ou enterrée dans un sol visco-élastique est une étape clé. Les fonctions d'impédances ( $K_{11}$ ,  $K_{22}$  et  $K_{33}$ ) ainsi que leurs inverses ( $f_{11}$ ,  $f_{22}$  et  $f_{33}$ ) peuvent être écrites en notation adimensionnelle en les divisant/multipliant par le module de cisaillement du sol. Les valeurs de ces dernières sont obtenues en fonction de la fréquence adimensionnelle variant de 0 à 3. La fréquence adimensionnelle est définie par  $a_0 = \frac{\omega B}{c_s}$ .

où  $B$  est la demi-largeur de la fondation filante et  $c_s$  la vitesse de l'onde de cisaillement.

On note que le maillage est choisi en correspondance avec la fréquence d'excitation considérée. Nous avons pris le soin de limiter à  $\lambda_s/8$  la taille des éléments de frontières,  $\lambda_s$  étant la longueur d'onde de cisaillement.

La solution fondamentale correspondant à l'espace infini nécessite en général une forme de discrétisation portant sur la frontière du domaine borné en entier. Cette solution peut être utilisée dans le cas de l'interaction dynamique sol-structure en discrétisant uniquement l'interface sol-fondation et une distance très limitée du champ libre autour de la fondation. Ceci peut être expliqué par le comportement asymptotique de la solution fondamentale à l'infini convergeant vers des valeurs nulles (les valeurs extradiagonales des matrices  $H$  et  $G$  sont négligeables par rapport aux valeurs de la bande diagonale). En effet, nous pouvons observer (fig.4.3) qu'une discrétisation du champ libre au voisinage de la fondation est suffisante pour obtenir de très bons résultats.

Il est recommandé qu'une discrétisation de l'interface sol-fondation, uniquement, soit effectuée pour les fondations superficielles, et une discrétisation d'une distance  $D$  (allant de  $B$  à  $3B$ ) entre l'extrémité de la fondation et l'extrémité du champ libre soit effectuée pour les fondations enterrées avec un coefficient d'enterrement  $E/B$  variant entre 0,5 et 1 respectivement (fig.4.6). il y a lieu de noter que le champ libre à discrétiser pour obtenir de très bons résultats augmente avec l'augmentation du coefficient d'enterrement  $E/B$ .

#### 4.2 Comparaison avec les résultats publiés

Pour mettre en exergue la précision de la présente étude, les fonctions d'impédances de fondations filantes superficielles et enterrées sont analysées. En premier lieu, nous considérons la fondation superficielle reposant sur un sol semi-infini. Nous adoptons des conditions aux limites relâchées permettant le découplage des mouvements. L'interface sol-fondation est discrétisée en huit éléments de longueur égale (fig.4.4). Les figures (4.7) et (4.8) présentent la variation de l'amplitude adimensionnelle des fonctions d'impédances ainsi que les mouvements horizontaux, verticaux et de balancement, du centre de la fondation rigide sujette à des sollicitations harmoniques de différents types (horizontal, vertical et de balancement) sur une plage de fréquences adimensionnelles allant de 0 à 3. En deuxième lieu, une fondation enterrée est considérée. Un contact parfait entre le sol et la fondation est supposé. Dans ce cas, la discrétisation de la surface libre dans le proche voisinage de la fondation est nécessaire (fig.4.5). L'amplitude du déplacement horizontal, vertical et du balancement de la fondation enterrée ( $E/B=1$ ) en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0$  sont présentés dans la figure (4.9). Les fonctions d'impédances ou leurs inverses obtenues par la présente formulation sont comparées avec celles obtenues par Antes

et Von Estorff [8]. Les deux séries de résultats sont en parfait accord.

#### 4.3 Effet du coefficient de Poisson

Le coefficient du Poisson influe significativement sur la vitesse de propagation de l'onde de dilatation P. La contribution relative de l'onde P sur la vibration verticale est plus importante que la contribution des autres types d'ondes. Ainsi, nous observons d'après la figure (4.10) que l'effet du coefficient de Poisson est plus prononcé sur la fonction d'impédance inverse verticale et de balancement que sur la fonction d'impédance inverse horizontale. La fonction d'impédance inverse horizontale varie légèrement avec la variation du coefficient de Poisson, et nous pouvons noter qu'elle reste invariante en hautes fréquences. Nous pouvons observer aussi que lorsque le coefficient de Poisson augmente, les fonctions d'impédances inverses diminuent, impliquant que la fondation devient plus rigide. Quand le sol est chargé verticalement, nous pouvons enregistrer une plus grande déformation latérale avec l'augmentation du coefficient de Poisson. Cependant le confinement latéral du sol offre une résistance plus grande, d'où la rigidification du système sol-fondation. Pour les fondations enterrées (fig.4.11), la diminution de l'amplitude des fonctions d'impédances inverses due à l'augmentation du coefficient de Poisson est très petite comparée à celles des fondations superficielles. En d'autres termes, le coefficient de Poisson a un effet pratiquement négligeable sur la vibration des massifs de fondations enterrées.

#### 4.4 Effet de l'amortissement

Le contact interne entre les particules et le comportement hystérétique du sol engendrent une dissipation d'énergie durant la vibration des fondations. Les essais expérimentaux indiquent que la dissipation d'énergie par cycle est généralement indépendante de la fréquence pour les petites vibrations. Cela justifie l'utilisation

de modèle de l'amortissement hystérétique pour la prise en compte de la perte d'énergie interne. Ce modèle est très commode en théorie, car il suffit de remplacer les coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$  par leur homologues complexes.

La figure (4.12) montre que l'augmentation du coefficient d'amortissement entraîne une diminution des valeurs des fonctions d'impédances inverses. Nous remarquons une légère différence en basse fréquence, alors qu'il n'y a aucune différence en haute fréquence. L'influence de l'amortissement sur les fondations enterrées suit la même allure que pour les fondations superficielles, mais de manière plus atténuée (fig.4.13).

#### 4.5 Effet de l'enterrement

En réalité, les fondations sont toujours enterrées dans le sol. L'enterrement augmente significativement la rigidité dynamique des fondations puisque la surface de contact entre la fondation et le sol augmente. On note d'après la figure (4.14) que l'enterrement affecte légèrement la partie réelle des fonctions d'impédances horizontale et verticale.

#### 4.6 Effet du type de contact

Les conditions de contact à l'interface sol-fondation peuvent varier. Le contact parfait entre le sol et la fondation engendre la vibration du sol adjacent à la fondation. Tous les degrés de liberté sont couplés. La deuxième condition de contact, qualifiée par le terme "relâché" est souvent supposée. Les degrés de liberté sont découplés; i.e, la réponse dans une direction n'est pas affectée par la force et les déplacements dans les autres directions. Par exemple, si la réponse dans la direction verticale est considérée, il est supposé qu'aucune force n'est développée dans la direction horizontale.

Les figures (4.15) et (4.16) présentent l'influence du type de contact sur les fonctions d'impédances. En ce qui concerne les fondations superficielles, les conditions aux limites relâchées ou parfaites induisent les mêmes résultats, alors que dans le cas des fondations enterrées, la fonction d'impédance inverse de balancement caractérise une différence entre les résultats obtenus pour les conditions aux limites relâchées et celles obtenues pour les conditions aux limites parfaites. Cela peut justifier la non applicabilité des conditions aux limites relâchées pour l'évaluation des fonctions d'impédances de balancement des fondations enterrées. Les fonctions d'impédances horizontale et verticale restent invariantes vis à vis du type de conditions aux limites.

#### 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, après une brève définition et interprétation des fonctions d'impédances. Nous avons développé une formulation intégró-matricielle pour le calcul de la réponse dynamique des fondations filantes rigides superficielles et enterrées. Nous avons aussi fourni quelques résultats avec interprétations sur l'influence de la discrétisation du champ libre de part et d'autre de la fondation, l'influence des propriétés mécaniques du sol telles que le coefficient de Poisson, et l'amortissement, l'effet de l'enterrement et le type de contact sol-fondation.

Dans le chapitre suivant, nous étudions avec détaille la réponse dynamique des fondations rigides sous excitations sismiques modélisées par l'incidence oblique des ondes de différents types/ tel que les ondes P, SV ou de Rayleigh ainsi que de leur combinaison.

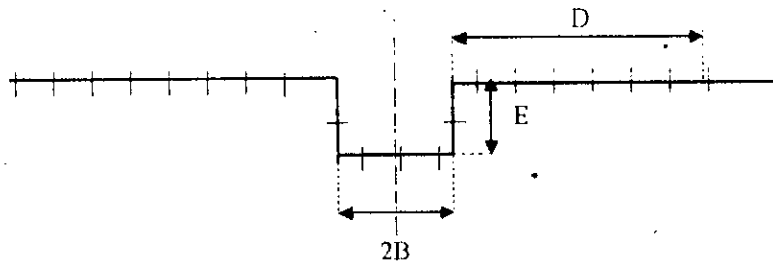


Figure 4.3 Discretisation et Notation de la fondation enterrée

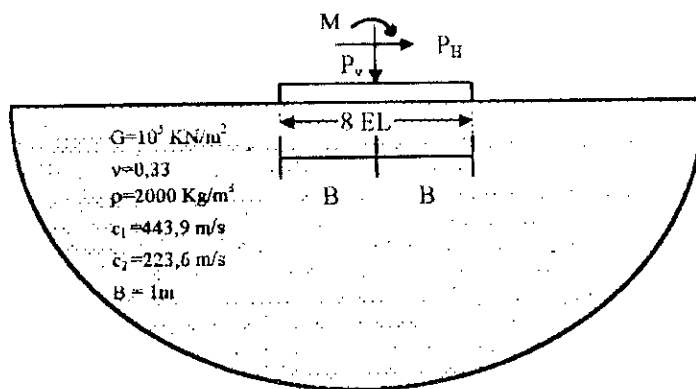


Figure 4.4 Discretisation et Géométrie d'une fondation superficielle

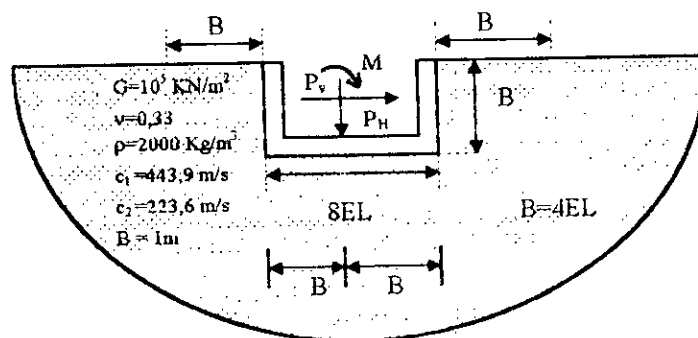


Figure 4.5 Géométrie et Discretisation d'une fondation enterrée

FILANTES

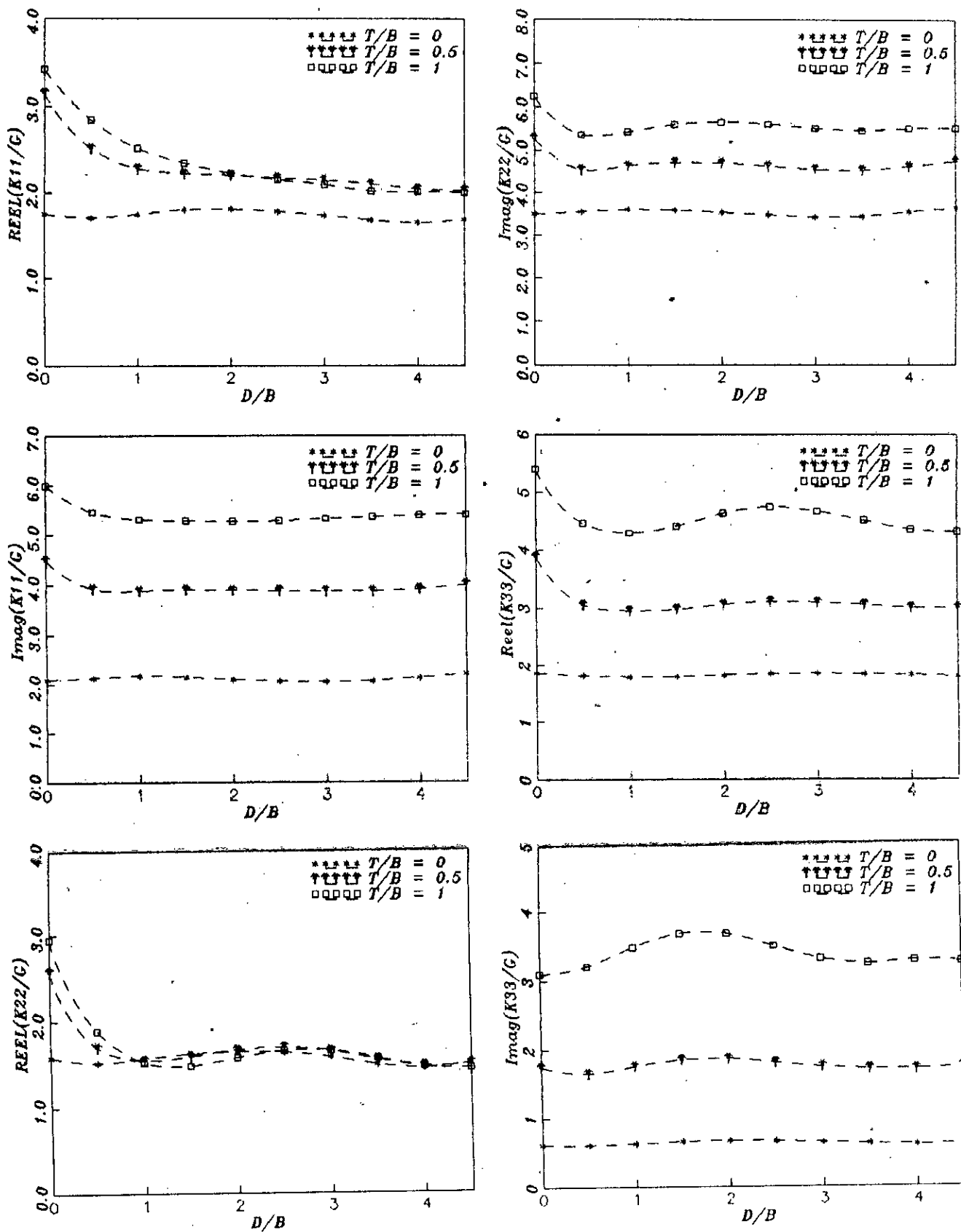


FIGURE 4.6 Effet de la discretisation du champ libre sur les fondations superficielles et entrees



FILANTES

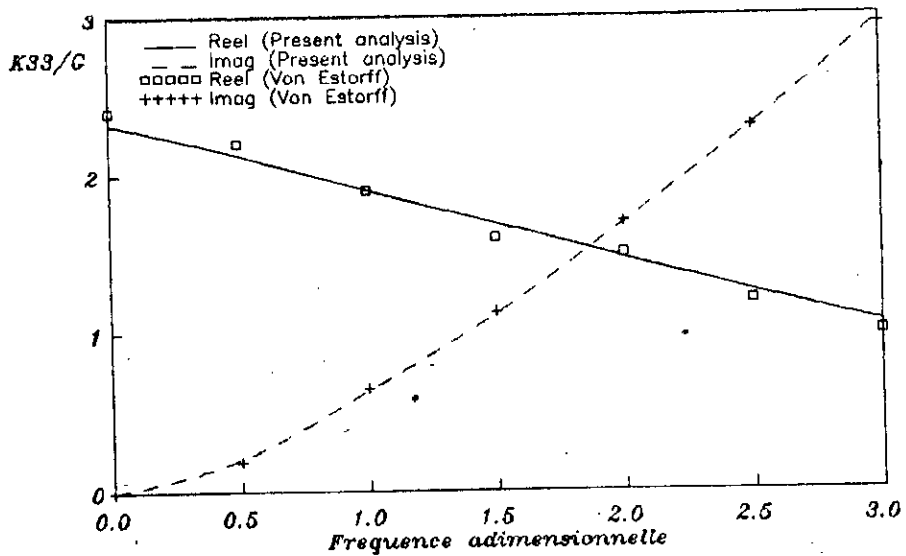
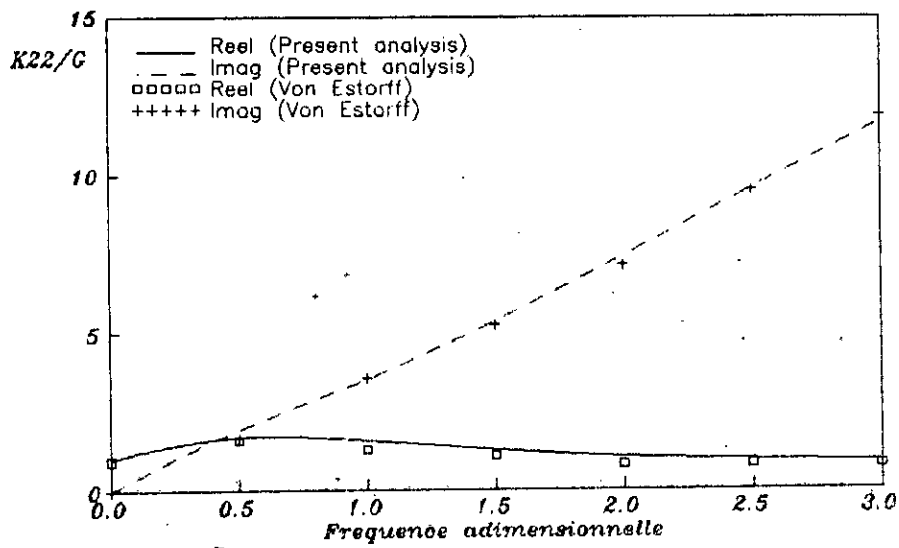
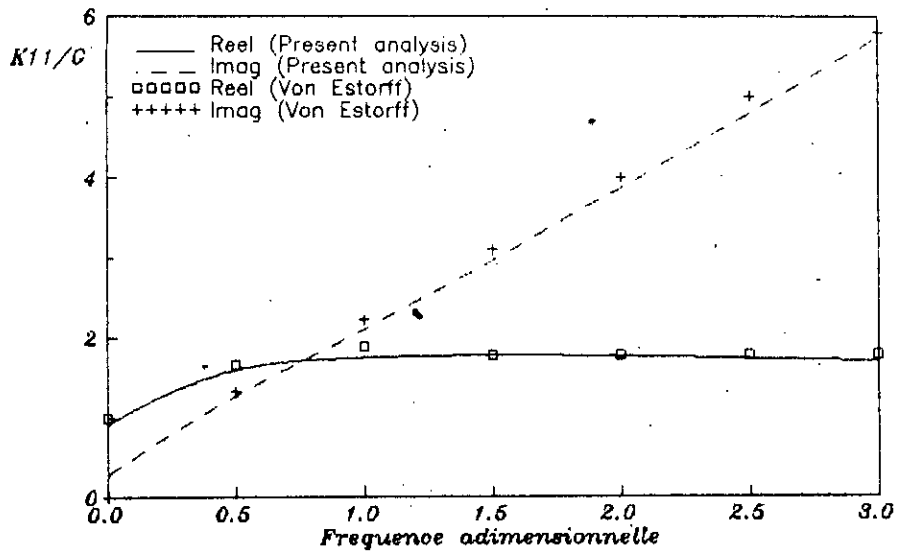


FIGURE 4.7 Comparaison avec les resultats publies  
Conditions aux limites-relachees  
(fondation superficielle)

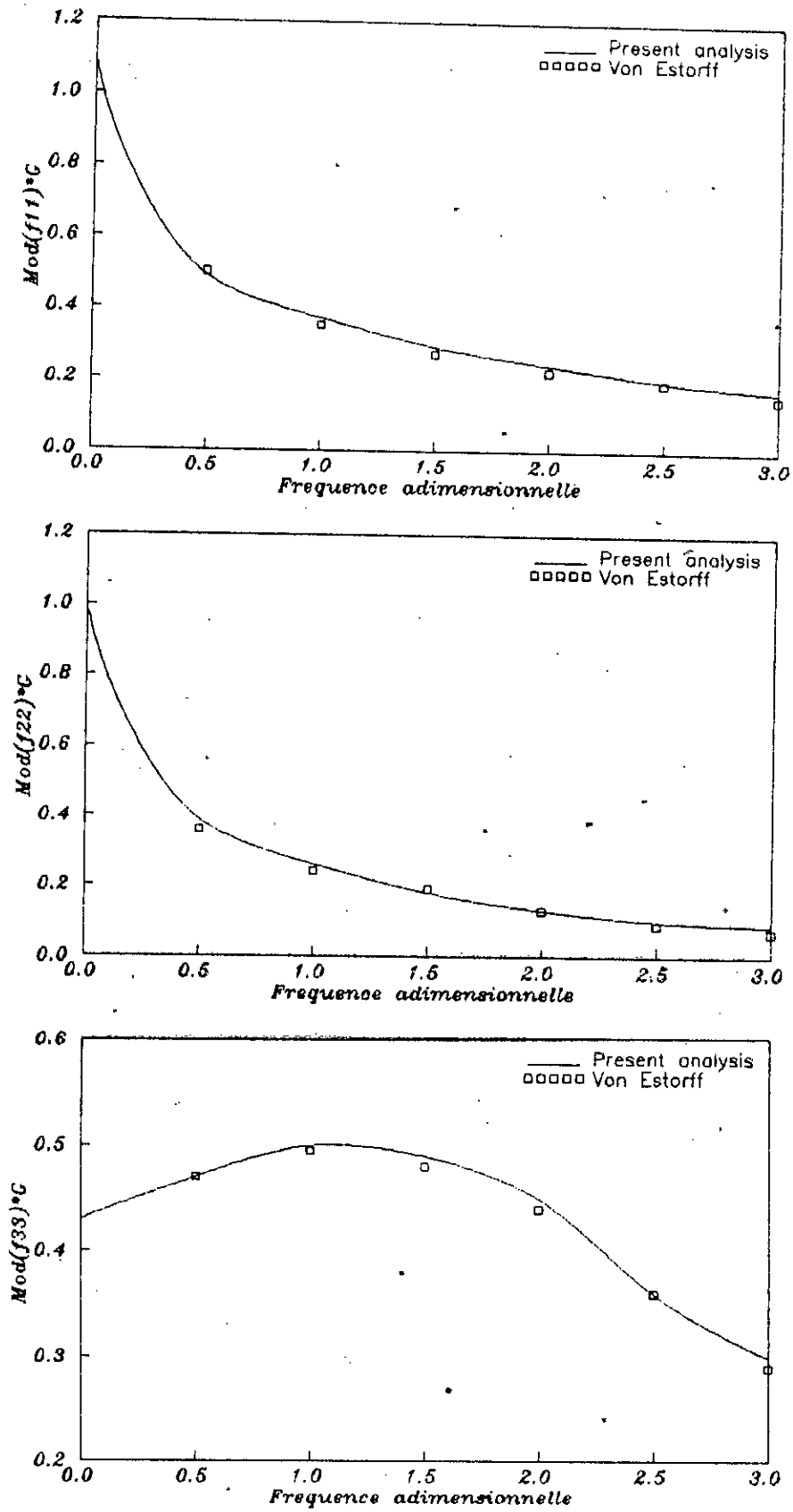


FIGURE 4.8 Comparaison avec les resultats publies  
Conditions aux limites relachees  
(fondation superficielle)

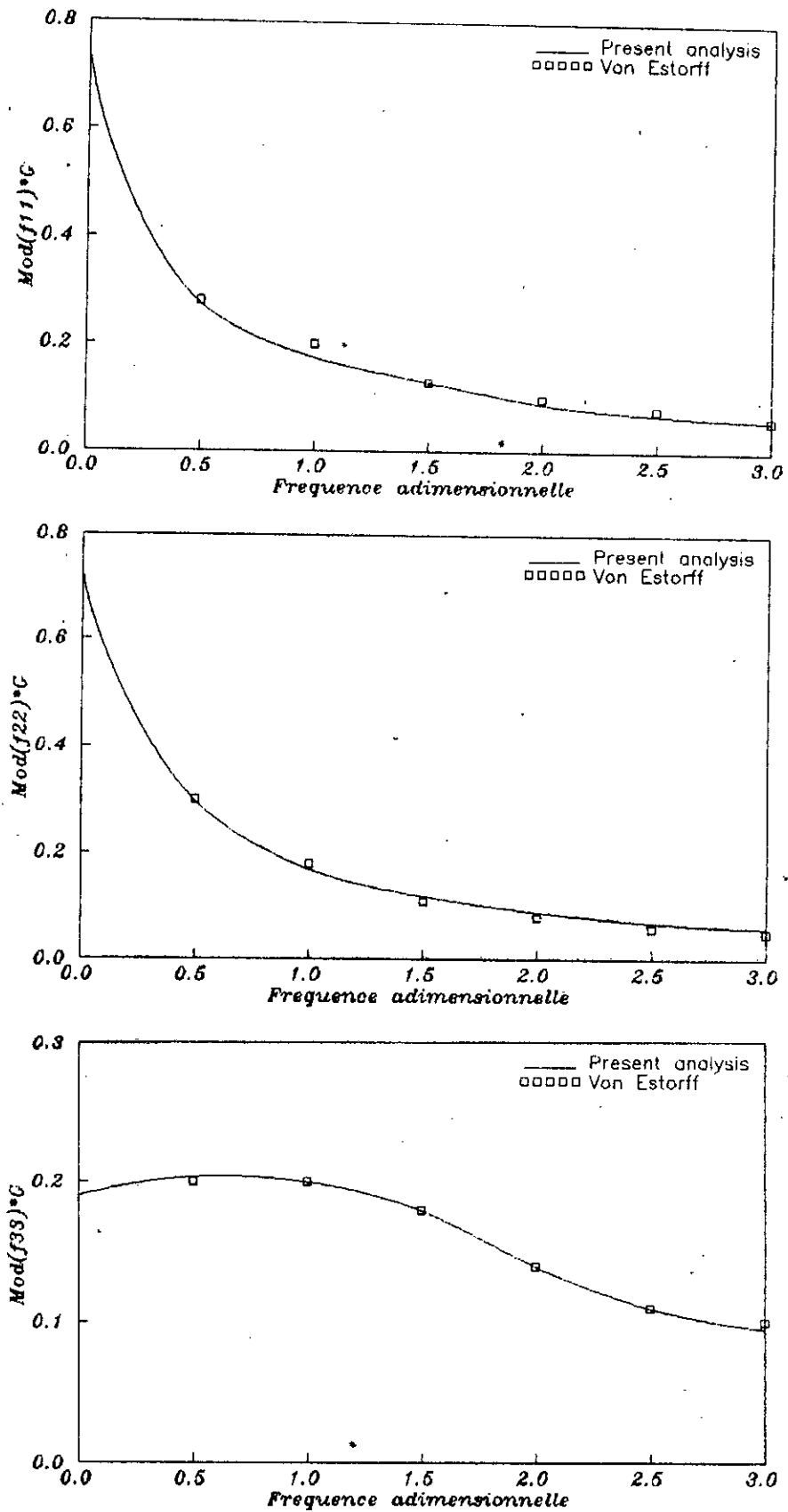


FIGURE 4.9 Comparaison avec les resultats publies  
 Conditions aux limites parfaites  
 (fondation entree  $T/B = 1$ )

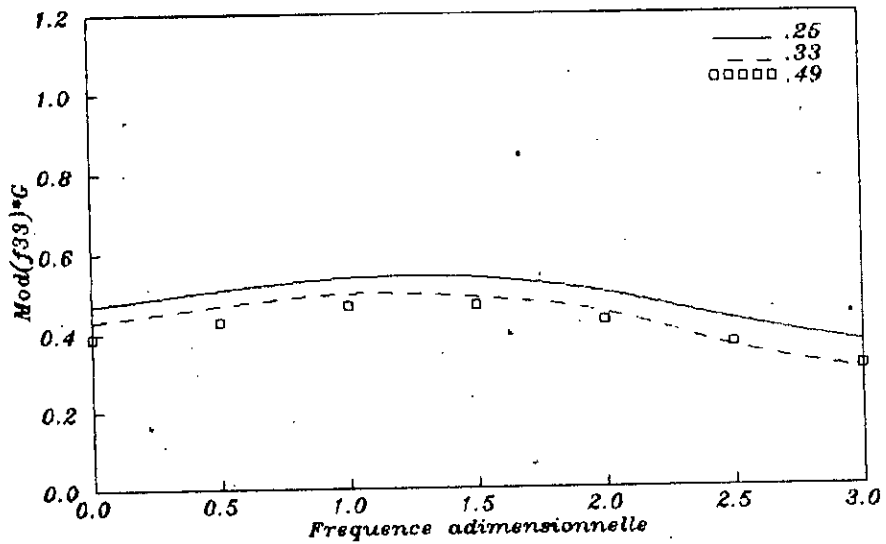
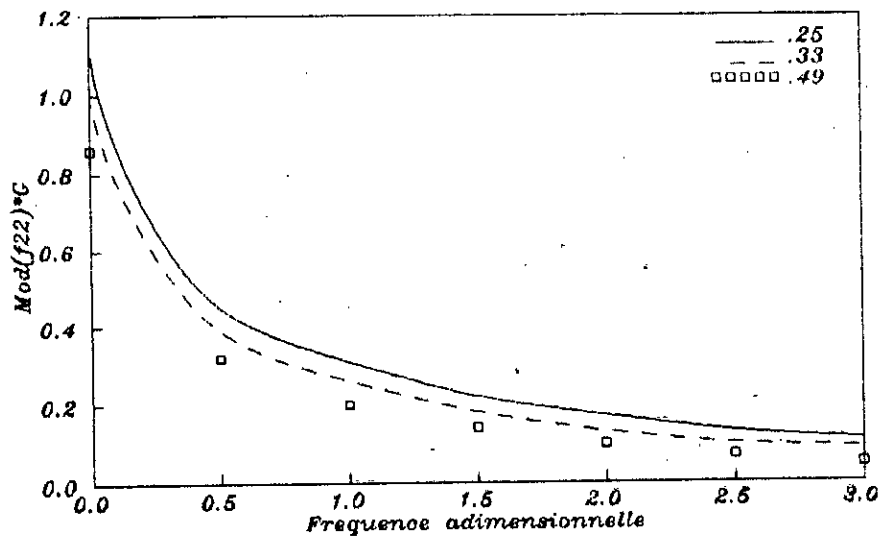
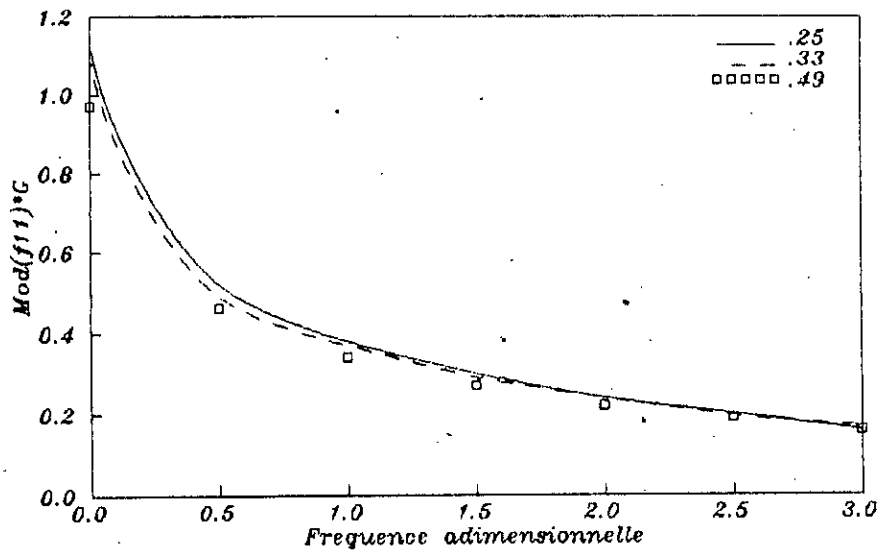


FIGURE 4.10 Effet de coefficient du Poisson :  
Fondation superficielle

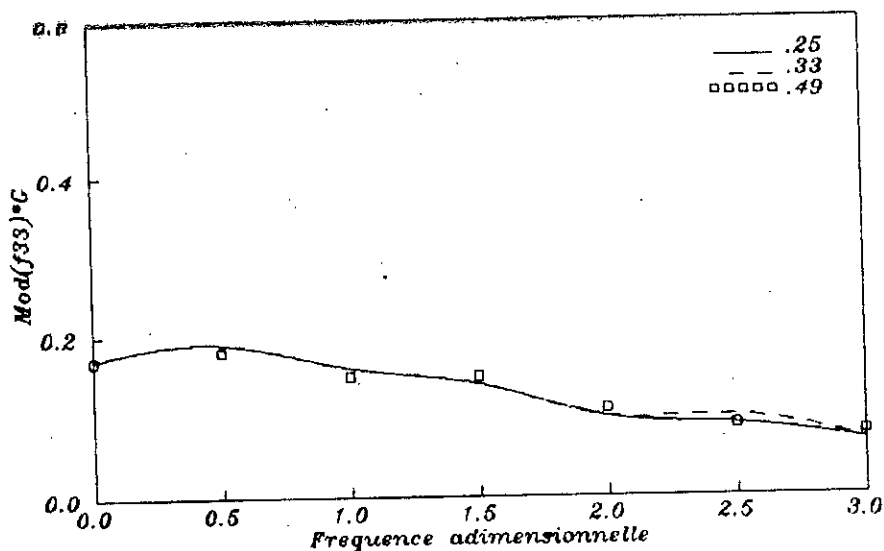
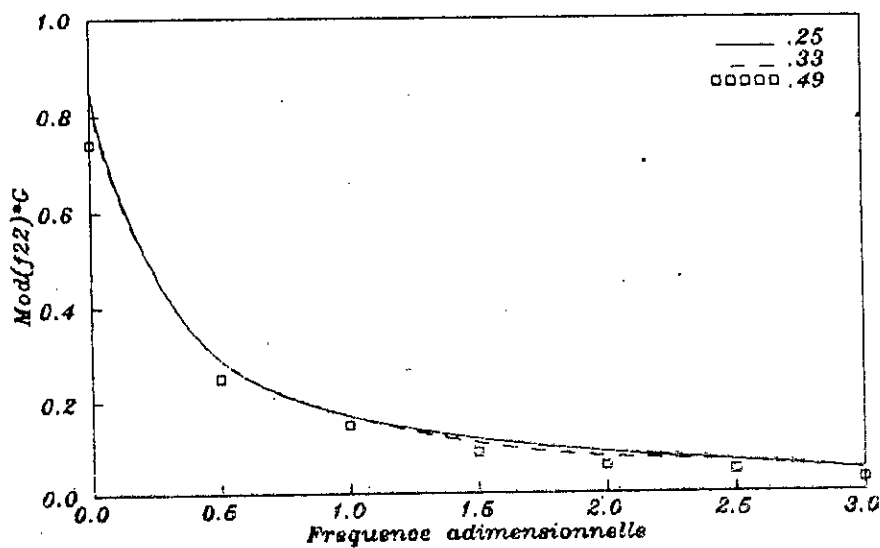
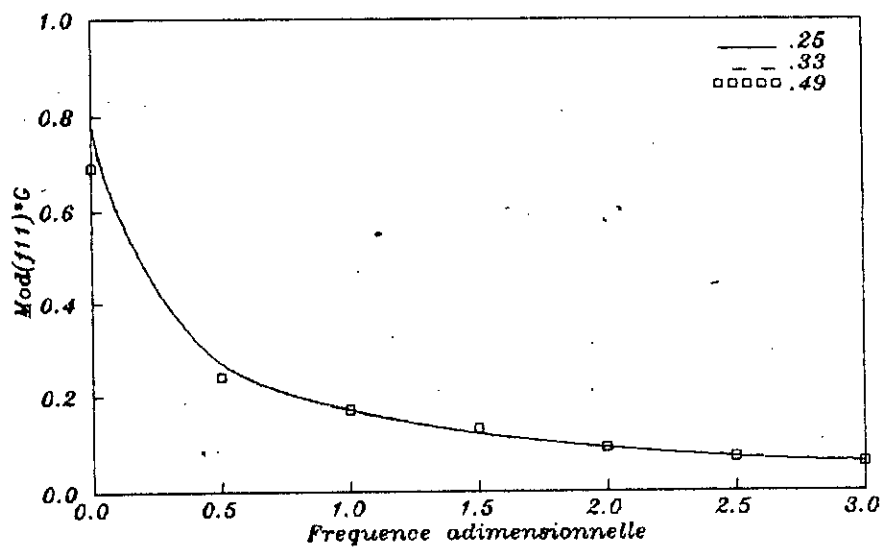


FIGURE 4.11 Effet du l'effet du Poisson :  
Fondation enteree ( T/B = 1 )

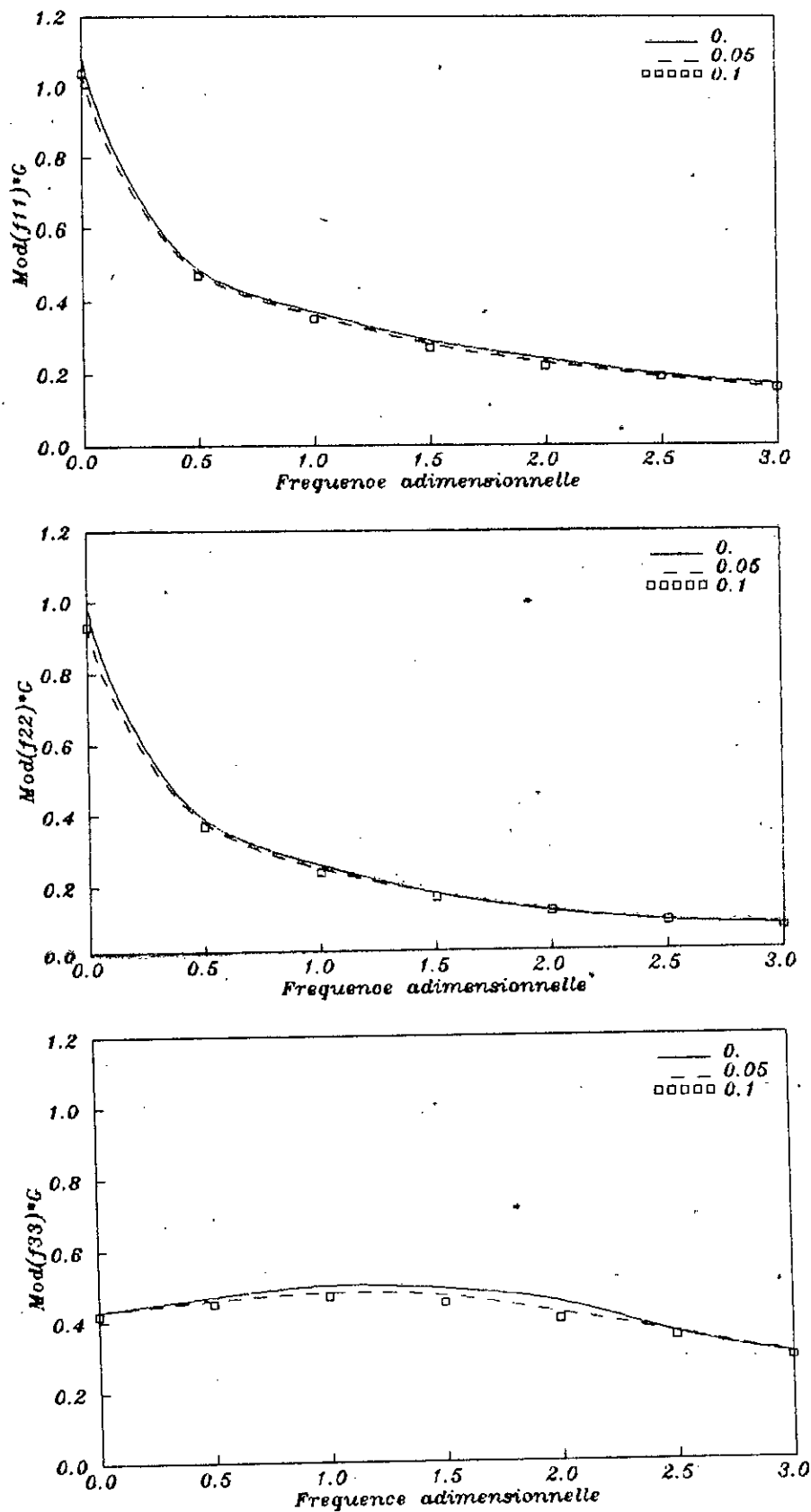


FIGURE 4.12 Effet de l'amortissement  
Fondation superficielle

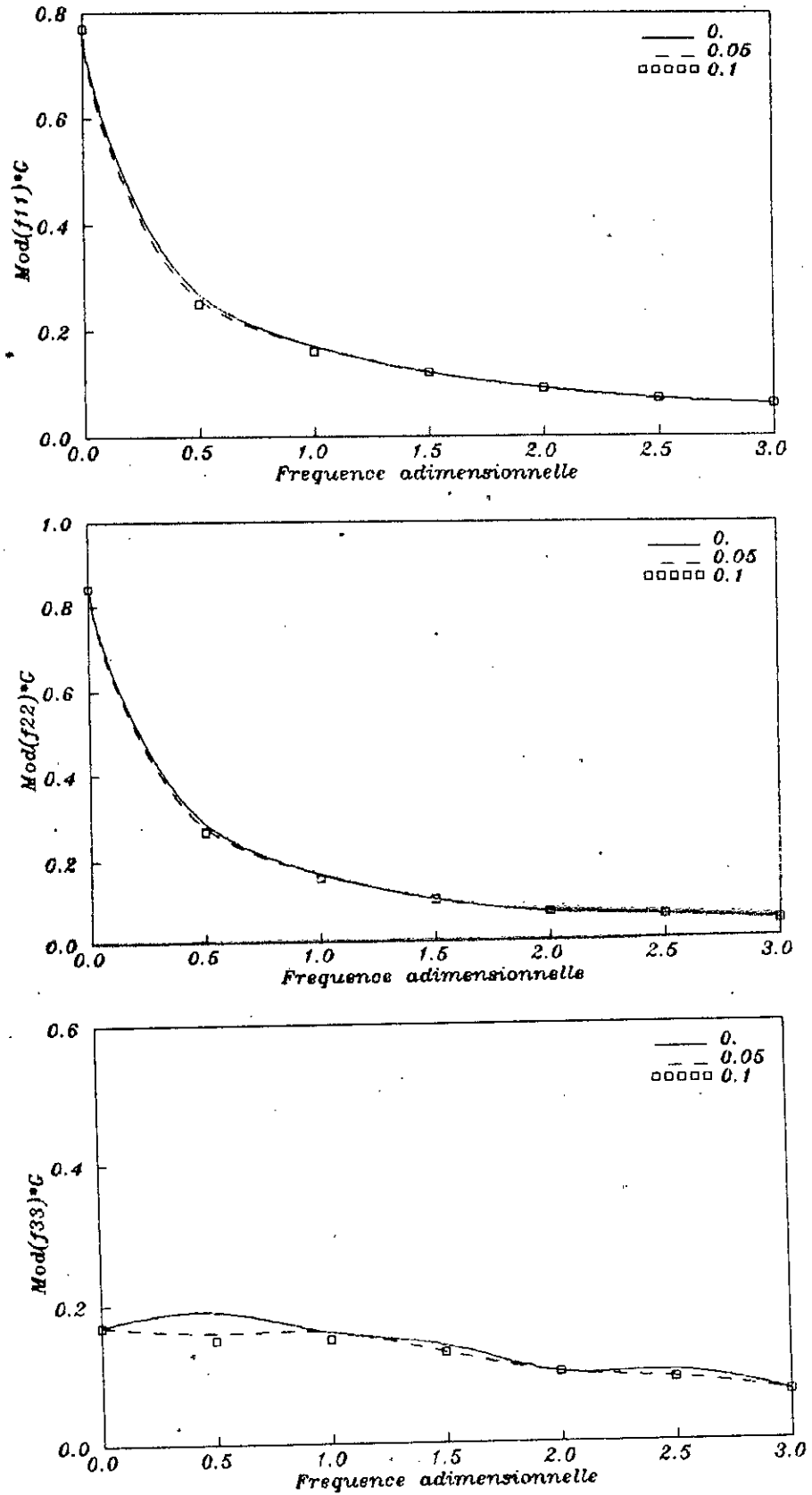


FIGURE 4.13 Effet de l'amortissement :  
Fondation enterree ( T/B = 1 )

FILANTES

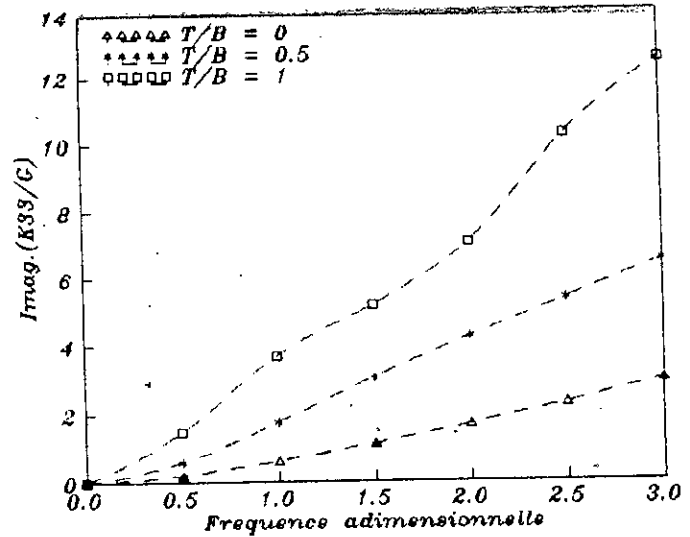
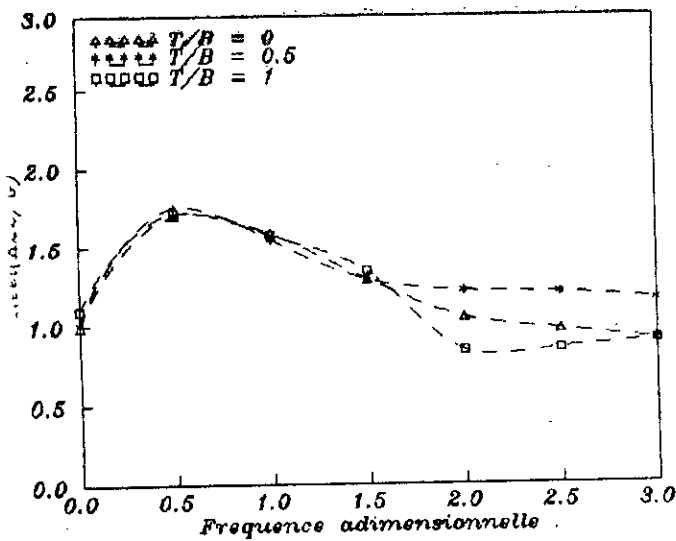
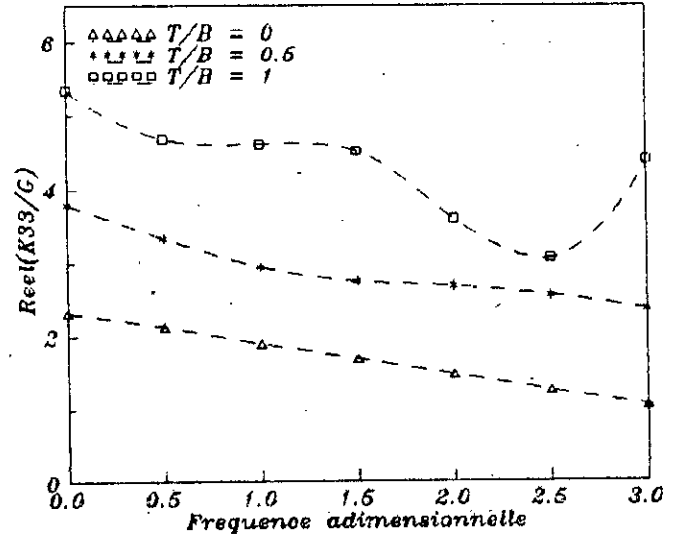
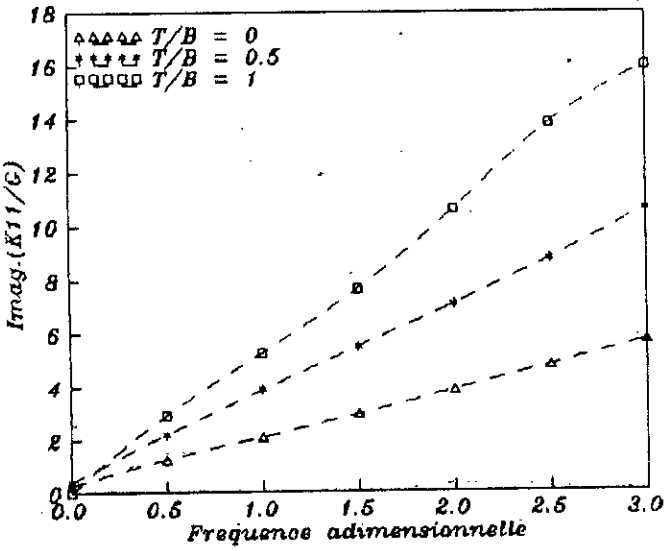
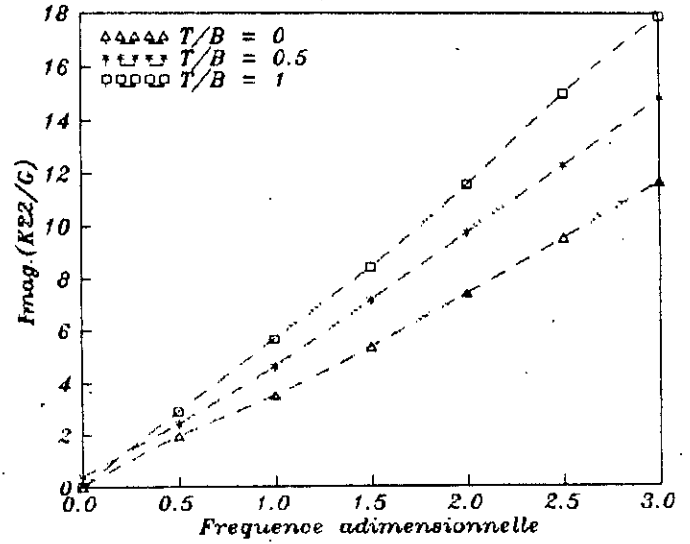
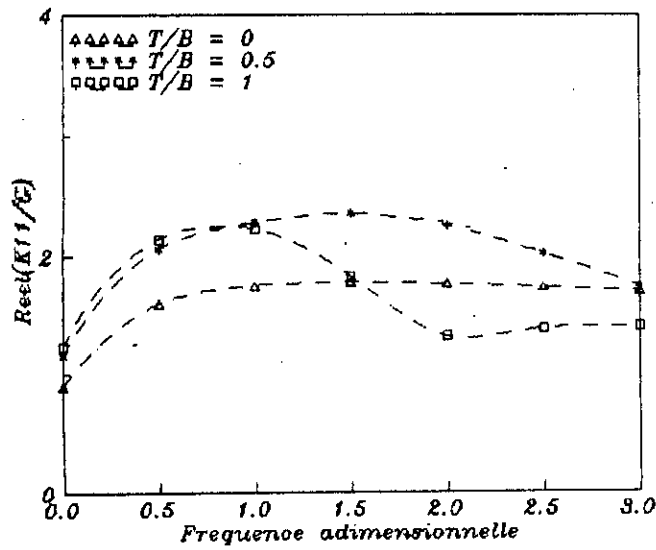


FIGURE 4.14 Effet de l'enterrement



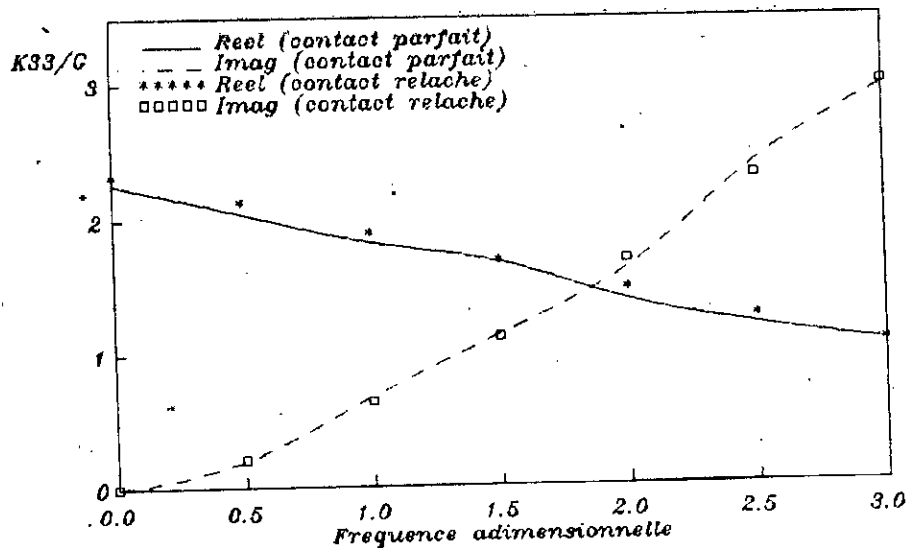
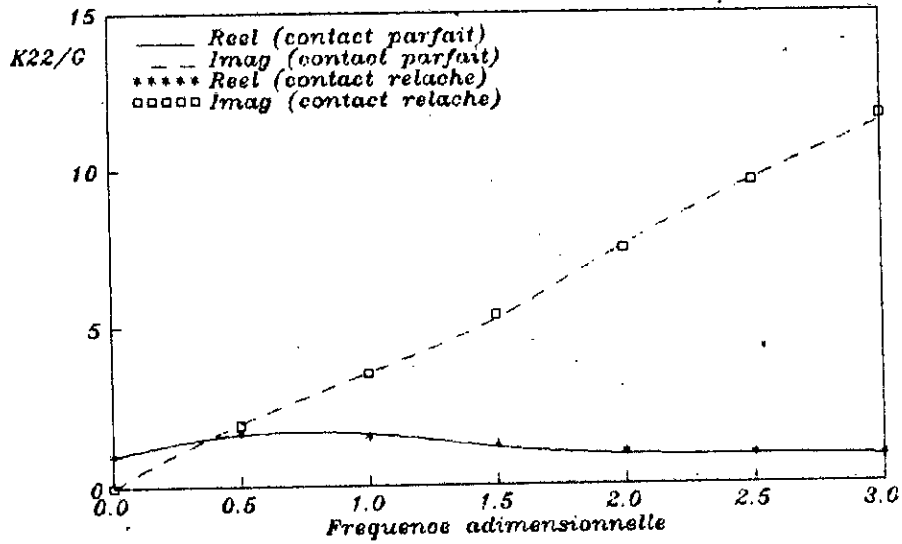
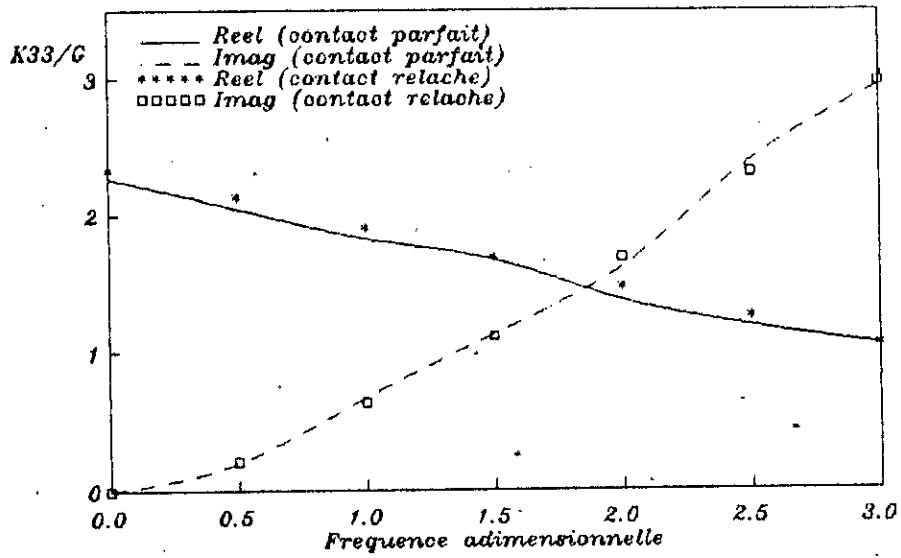


FIGURE 4.15 Effet du type de contact sol-fondation : Fondation superficielle

FILANTES

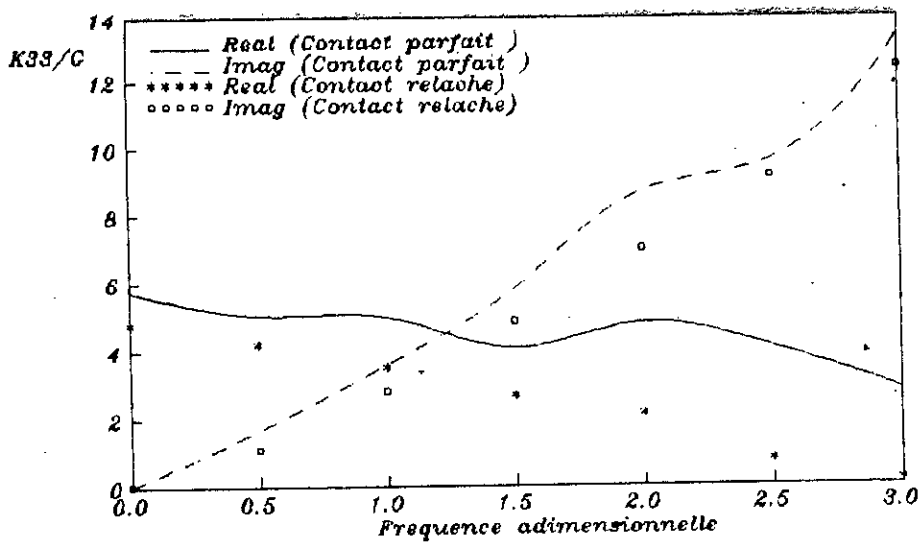
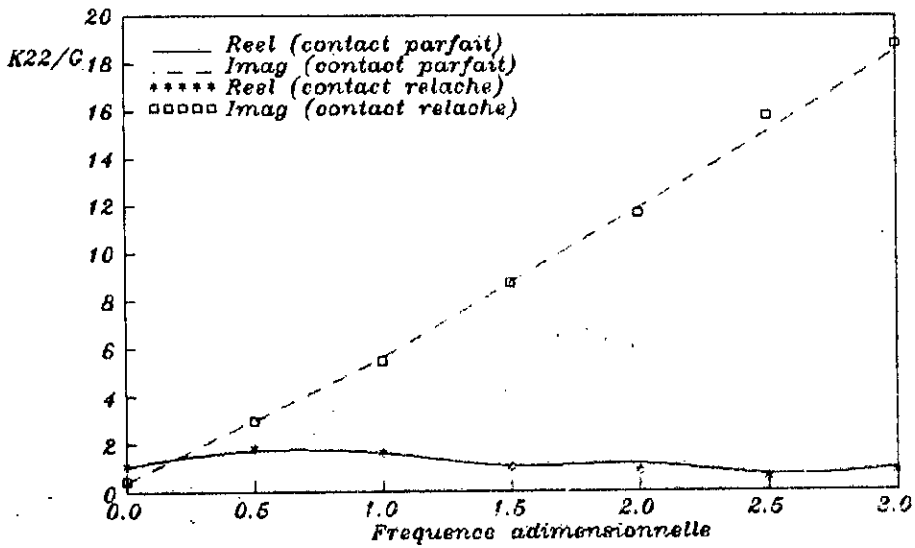
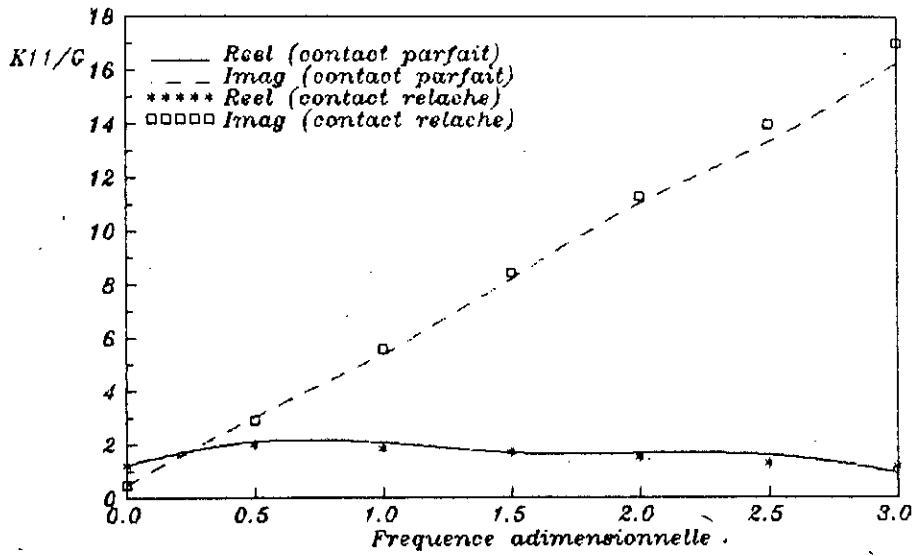


FIGURE 4.16 Effet du type de contact sol-fondation : fondation entree (  $T/B = 1$  )

## Chapitre 5

# REPONSE SISMIQUE DE FONDATIONS FILANTES SOLLICITEES PAR L'INCIDENCE D'ONDES DE TYPES P, SV ET DE RAYLEIH

*"Lorsqu'un théoricien trouve un résultat nouveau,  
personne n'y croit sauf lui!  
lorsqu'un expérimentateur trouve un résultat nouveau,  
tout le monde y croit sauf lui!"*

JEAN LEMAITRE

## Chapitre 5

### ANALYSE DE LA REPOSE SISMIQUE DE FONDATIONS FILANTES SOLLICITEES PAR L'INCIDENCE d'ONDES PLANES DE TYPES P, SV ET DE RAYLEIGH

#### 5.1. Introduction

Le comportement d'une construction lors d'un séisme et les dommages qui peuvent en résulter sont conditionnés, selon les caractéristiques de l'ouvrage, par le mouvement engendré par les actions du sol à la base de la construction. Le mouvement résultant de l'action superposée des ondes sismiques parvenant au point considéré est extrêmement complexe.

- Il s'agit d'un mouvement tridimensionnel "chaotique",
- Il varie d'un point à l'autre de la surface du sol,
- Il est influencé par les caractéristiques géométriques de la fondation : interaction cinématique.

Dans l'hypothèse de la propagation verticale des ondes, le déplacement est identique en tout point de la fondation superficielle et il est égal à celui en champ libre. La fondation ne subit alors que des mouvements de translation. Cette hypothèse peut être fondée dans le cas où le foyer du tremblement de terre se trouve à une profondeur suffisante, ou lorsque les couches de surface sont suffisamment molles pour avoir filtré par réfraction les ondes à incidence faible par rapport à l'horizontale. En revanche, elle n'est plus valable dans les situations contraires de sol dur et de foyer peu profond où les ondes obliques et de surface contribuent de façon non négligeable au mouvement en champ libre.

La détermination des solutions analytiques du problème d'interaction cinématique est très difficile. C'est pourquoi on ne

trouve qu'un nombre assez restreint de ces solutions. Ainsi Kobori et al. [62] ont analysé la vibration d'un disque circulaire reposant sur un demi-espace élastique sollicité par une onde incidente oblique de type SH en réduisant le problème à la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm. En utilisant une approche similaire, tout en séparant l'effet cinématique de l'effet inertiel, Luco [66] a déterminé la réponse torsionnelle d'un disque et d'une fondation enterrée hémisphérique excitée par une onde incidente inclinée de type SH. Apsel et Luco [9] ont généralisé ces derniers résultats au cas d'une fondation enterrée ellipsoïdale. Wong et Trifunac [121] ont analysé le cas d'une fondation filante avec un enterrement semi-elliptique, sollicité par une onde SH.

Par ailleurs, plusieurs investigations scientifiques ont contribué à l'enrichissement des méthodes approchées pour l'évaluation de la réponse sismique des fondations. Nous mentionnons les travaux de Ray et al. [91] qui ont proposé de prendre la moyenne pondérée du mouvement en champ libre généré le long du contact sol-fondation. Pour le cas des fondations enterrées, une bonne formulation est obtenue par Iguchi [51,52] en additionnant un terme qui prend en compte l'effet des contraintes générées par le mouvement de champ libre à l'interface sol-fondation. Nous citons aussi les travaux de Pais et Kausel [86] qui sont une mise en oeuvre dans un contexte général de la méthode d'Iguchi pour certaines formes géométriques de fondations telles que les fondations circulaires et rectangulaires.

En ce qui concerne les autres formes géométriques, l'utilisation des méthodes numériques est nécessaire. Wong et Luco [119] ont évalué la réponse dynamique d'une fondation rectangulaire rigide, limitée par un demi-espace et excitée par une onde sismique oblique. La discrétisation de la zone de contact entre le sol et la fondation en un nombre limité de sous-régions où on suppose un état de contrainte constant. Day (référence [3] dans [86]) utilise la

M.E.F., pour représenter le mouvement d'entrée d'une fondation rigide hémisphérique et cylindrique pour une onde SH horizontale et verticale. La méthode des équations intégrales aux frontières (M.E.I.F.) a été appliquée pour la première fois aux problèmes de diffraction d'onde sismique par Dominguez [32] en 1978. Il a étudié dans le domaine des fréquence, la réponse des fondations tridimensionnelles, enterrées dans un sol visco-élastique et excitées par l'incidence des ondes planes de types SH, SV et P. Récemment, Karabalis et Beskos [55], Spyarakos et Beskos [98,99] ont mené une étude similaire en bi et tri-dimensionnel, dans le domaine des temps. L'effet du sol sous-jacent et celui d'un substratum non rigide sur l'amplification du site et sur la réponse de fondations filantes sous sollicitations sismiques de type P et SV, enterrées dans un demi-espace visco-élastique a été analysé par Dominguez et Abascal [34].

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode des équations intégrales à l'analyse sismique des fondations filantes sollicitées par l'incidence d'ondes planes de types P, SV et de Rayleigh en supposant que le sol est homogène et élastique.

## 5.2. Formulation intégrale

La représentation intégrale des équations de l'élastodynamique en absence des sources à l'infini c-à-d une onde incidente venant de l'infini est définie dans l'équation (3.4).

Le cas du problème de la propagation d'onde élastique dans un demi-espace, dont la frontière  $\Gamma$  est composée du plan définissant la surface du massif, et  $\Gamma_R$  étant la surface d'un demi cylindre pour le problème bidimensionnel de rayon R que nous ferons tendre vers l'infini et de centre x, impose certaines restrictions sur le comportement du champ de déplacement  $u(x)$  à l'infini. Ces restrictions sont définies par la condition de radiation sous la

forme intégrale suivante

$$\int_{\Gamma_R} [U_{ij}^{\omega}(x,y)t_j^{(n)}(x)d\Gamma_R(x) - T_{ij}^{(n)\omega}(x,y)u_j(x)d\Gamma_R(x)] = \frac{1}{2} u_i^g(y) \quad (5.1)$$

$R \longrightarrow +\infty$

avec  $u^g = u^{inc} + u^{ref}$

$u^g$  le champ de déplacement libre

$u^{inc}$  le champ de déplacement incident

$u^{ref}$  le champ de déplacement réfléchi

Le champ de déplacement diffracté par la fondation est définie comme

étant  $u^{dif} = u - u^g$  où  $u$  est le champ de déplacement total, satisfaisant l'équation intégrale (3.4). Ainsi en tenant compte de l'équation (5.1), l'équation (3.4) devient

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \int_{\Gamma} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y)u_j(x)ds(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^{\omega}(x,y)t_j^{(n)}(x)ds(x) + \frac{1}{2} u_i^g(y) \quad (5.2)$$

Supposons maintenant que le contour soit divisé en  $n$  éléments, et que les champs de déplacement et de traction soient constants au sein des éléments, l'équation intégrale (5.2) se met sous la forme discrétisée suivante

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \sum_{e=1}^n u_j^e \int_{\Gamma_e} T_{ij}^{(n)\omega}(x,y)ds_e(x) = \sum_{e=1}^n t_j^e \int_{\Gamma_e} U_{ij}^{\omega}(x,y)ds_e(x) + \frac{1}{2} u_i^g(y) \quad (5.3)$$

où  $u_i^e$  et  $t_i^e$  sont des composantes constantes des déplacements nodaux et des tensions nodales au sein de l'élément  $e$ .

Sous forme matricielle, l'équation (5.3) devient

$$c \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^n H_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} t_j + \frac{1}{2} u_i^g(y) \quad (5.4)$$

ou sous la forme condensée

$$\hat{H} \mathbf{u} = G \mathbf{t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^g \quad (5.5.a)$$

$$\hat{H} = H + \frac{1}{2} I \quad (5.5.b)$$

où  $I$  est la matrice unité,

$\mathbf{u}^g$  est le vecteur de déplacement en champ libre

L'équation (5.5) sera utilisée pour la détermination de la réponse dynamique de la fondation. Les éléments de frontières sont divisés en deux parties. La première partie identifiée par l'indice  $c$  désigne les éléments de contact sol-fondation; la deuxième partie identifiée par l'indice  $l$ , désigne les éléments de la surface libre. en vertu de ce partitionnement, l'équation (5.5.a) se présente comme suit

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & H^{cl} \\ H^{lc} & H^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} & G^{cl} \\ G^{lc} & G^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^c \\ \mathbf{t}^l \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{gc} \\ \mathbf{u}^{gl} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

or le vecteur contrainte  $\mathbf{t}^l$  est nul (surface libre), d'où

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & H^{cl} \\ H^{lc} & H^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{lc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^c \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{gc} \\ \mathbf{w}^{gl} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

D'après l'équation (5.7), nous pouvons écrire le système



d'équation suivant

$$H^{cc} u^c + H^{cl} u^l = G^{cc} t^c + \frac{1}{2} u^{gc} \quad (5.8.a)$$

$$H^{lc} u^c + H^{ll} u^l = G^{lc} t^c + \frac{1}{2} u^{gl} \quad (5.8.b)$$

de l'équation (5.8.b), on a

$$u^l = (H^{ll})^{-1} \left[ G^{lc} q^c + \frac{1}{2} u^{gl} - H^{lc} u^c \right] \quad (5.9)$$

remplaçons (5.9) dans (5.8.a), nous pouvons déterminer le vecteur contrainte à l'interface sol-fondation en fonction de son homologue le vecteur déplacement d'où

$$q^c = \left[ G^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc} \right]^{-1} \left[ \left( H^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} H^{lc} \right) u^c + \frac{1}{2} \left( H^{cl} (H^{ll})^{-1} u^{gl} - u^{gc} \right) \right] \quad (5.10)$$

utilisant les équations (4.12), (4.13) et (4.14) nous pouvons montrer que

$$F = T^t A \left[ G^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc} \right]^{-1} \left[ H^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} H^{lc} \right] T u_o + \frac{1}{2} T^t A \left[ G^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc} \right]^{-1} \left[ H^{cl} (H^{ll})^{-1} u^{gl} - u^{gc} \right]$$

ou

$$F = K u_o + \frac{1}{2} T^t A \left[ G^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc} \right]^{-1} \left[ H^{cl} (H^{ll})^{-1} u^{gl} - u^{gc} \right] \quad (5.12)$$

où K est la matrice d'impédance définie comme étant

$$K = T^t A \left[ G^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc} \right]^{-1} \left[ H^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} H^{lc} \right] T \quad (5.13)$$

il en découle que le vecteur déplacement de la fondation en

l'absence de sollicitations sous formes de forces harmoniques est défini comme étant

$$u_f = \frac{1}{2} K^{-1} T^t A \left[ G^{cc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc} \right]^{-1} \left[ u^{gc} - H^{cl} (H^{ll})^{-1} u^{gl} \right] \quad (5.14)$$

### 5.3. Présentation et analyse des résultats

Trois types d'onde sismique (P, SV et de Rayleigh) sont considérés dans cette étude. La réponse de la fondation filante superficielle (fig.4.4) à une incidence oblique des ondes est représentée par les composantes horizontale  $u_{f1}$ , verticale  $u_{f2}$  et de balancement  $u_{f3}$  du déplacement de son centre de gravité. Les amplitudes normalisées du déplacement de la fondation excitée par les différents types d'ondes P, SV et de Rayleigh  $|u_{f1}/u_{g1}|$ ,  $|u_{f2}/u_{g2}|$  et  $|u_{f3}/u_{g3}|$  (où  $u_{g1}$  et  $u_{g2}$  sont respectivement les composantes horizontale et verticale du déplacement en champ libre) sont définies comme étant les fonctions de transfert du mouvement en champ libre au mouvement de la fondation. Ces fonctions représentées dans les figures (5.1), (5.2) et (5.3) pour les cinq valeurs de  $\theta$  (angle d'incidence de l'onde harmonique par rapport à l'horizontale), en fonction de la fréquence adimensionnelle  $\omega_0$  variant de 0 à 9.

Les résultats observés dans la figure (5.1) montre que la réduction des composantes horizontale et verticale du déplacement de la fondation par l'effet de l'onde SV est remarquable aux fréquences moyennes et élevées pour les ondes non verticale. Cette réduction est plus importante pour les ondes de faible incidence (inférieur à  $45^\circ$ ) que pour les ondes de grande incidence. Nous observons également un développement important du balancement aux fréquences moyennes. Ce dernier se réduit aux fréquences supérieures. Cette réduction est plus accentuée pour les ondes de faible incidence. L'effet des ondes P sur la réponse des fondations filantes (fig.5.2)

est le même qualitativement que l'effet des ondes SV. Quantitativement, la réduction des déplacements de translation est moins accentuée que celle engendrée par le passage des ondes SV. La réduction est relativement lente avec l'augmentation des fréquences. On note la même remarque en ce qui concerne le balancement engendré par le passage des ondes P. Dans le cas des ondes de Rayleigh, on observe une réduction très sévère des mouvements de translation (fig.5.4). Les mouvements de translation s'atténuent rapidement dans la plage des fréquences adimensionnelles entre 0 et 2. L'onde de surface développe aussi le mode de balancement pour qu'il puisse atteindre son maximum dans les environs de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = 2$ , et de s'atténuer rapidement pour les fréquences moyennes et élevées.

#### 5.4. Conclusion

La méthode des équations intégrales aux frontières constitue un outil de calcul précis et efficace qui s'adapte particulièrement bien à l'étude dynamique des fondations superficielles et enterrées dans un milieu homogène. Dans ce chapitre, nous avons exposé la formulation matricielle des équations intégrales aux frontières pour le calcul de la réponse sismique de la fondation filante rigide, celle-ci est posée sur un demi-espace homogène et élastique et excitée par divers types d'ondes sismiques (P, SV, et de Rayleigh) selon plusieurs angles d'incidence.

Pour les trois types d'excitation, nous pouvons conclure que les déplacements de translation se réduisent significativement aux fréquences moyennes et élevées. La réduction est plus importante pour les ondes de faible incidence (inférieur à  $45^\circ$ ) que pour les ondes de grande incidence.

Nous observons également aux fréquences moyennes un développement important du balancement, lequel se réduit aux fréquences supérieures. Cette réduction est plus accentuée pour les ondes de faible incidence.

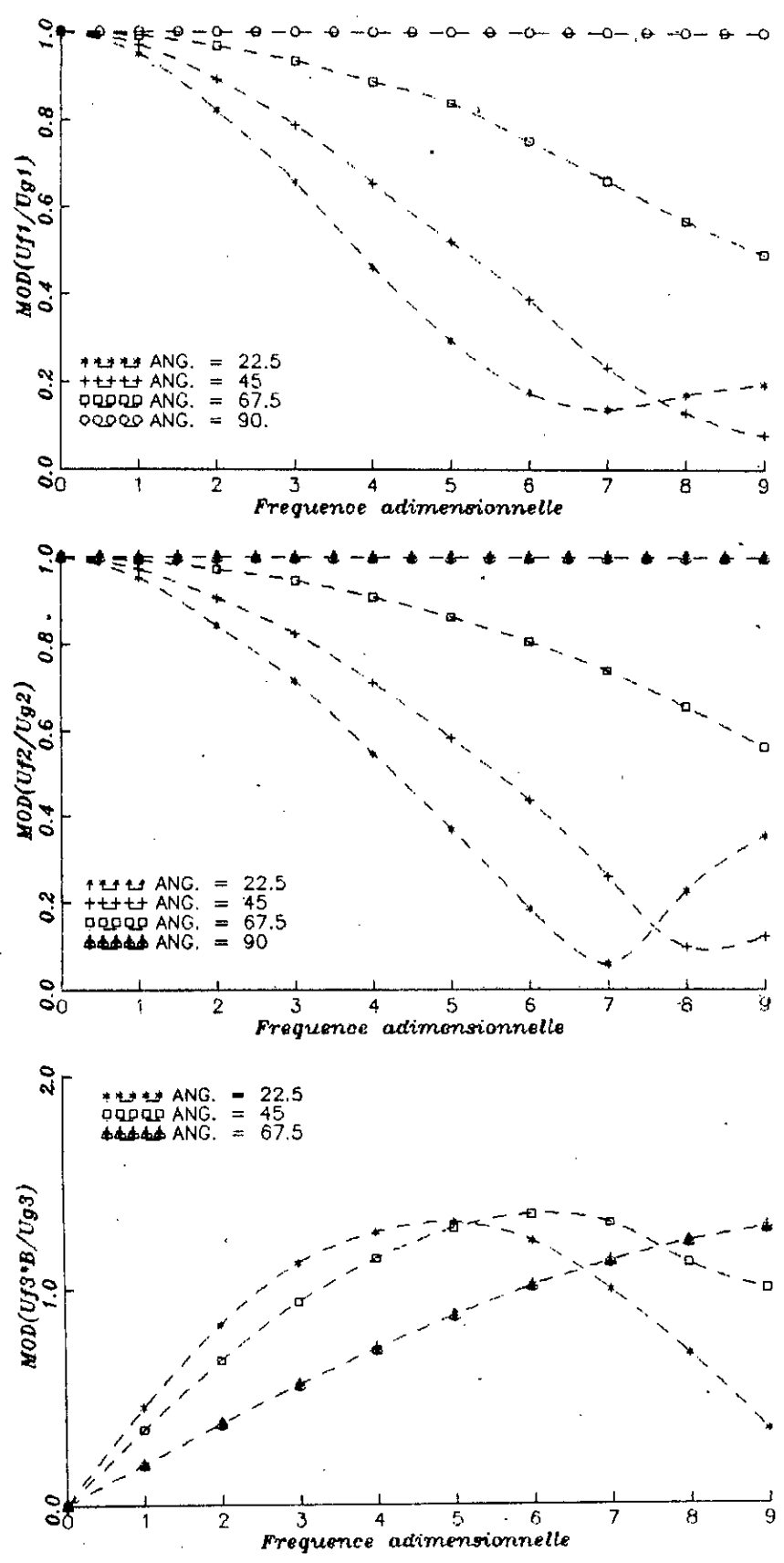


FIGURE 5.1 Fonctions de transfert :  
Effet de l'onde P

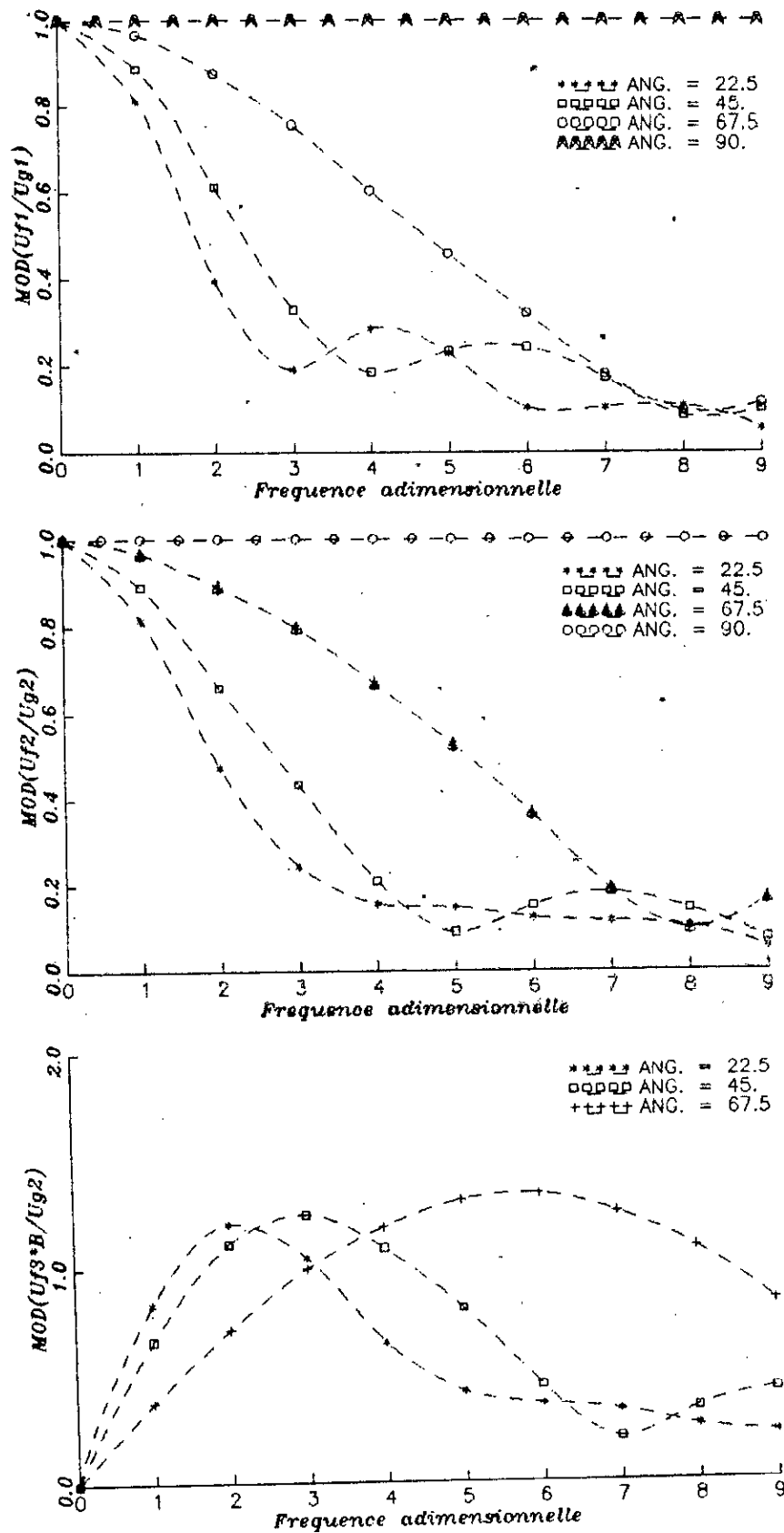


FIGURE 5.2 Fonctions de transfert :  
Effet de l'onde SV

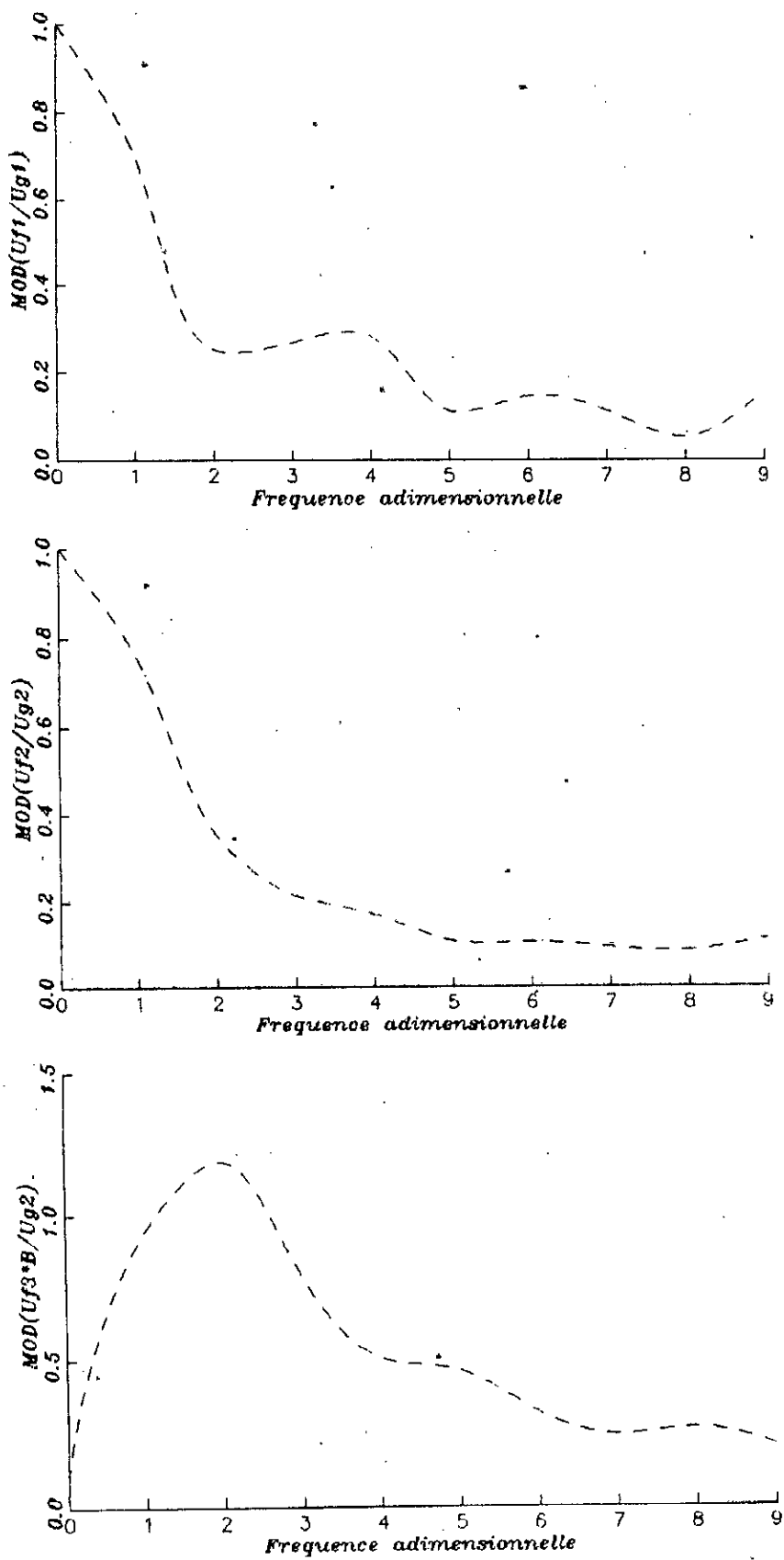


FIGURE 5.3 Fonctions de transfert  
Effet de l'onde du Rayleigh

## Chapitre 6

# NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DES VIBRATIONS ALEATOIRES

*"Car il est plus facile,  
une fois qu'on a acquis une certaine connaissance des questions,  
d'en imaginer ensuite la démonstration,  
que si l'on recherchait celle-ci sans aucune notion préalable".*

ARCHIMEDE

## Chapitre 6

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE  
DES VIBRATIONS ALEATOIRES

## 6.1. Introduction

L'étude des propriétés statistiques nécessaires à la caractérisation d'un phénomène aléatoire relève de la théorie des processus aléatoires. Ces dernières années, la théorie des processus aléatoires s'est développée. Elle constitue le fondement pour l'analyse stochastique des structures. Parmi les applications importantes de la théorie des processus aléatoires, on citera l'analyse des vibrations aléatoires des systèmes mécaniques. Les vibrations aléatoires constituent une discipline qui combine la théorie des processus aléatoires et la dynamique des structures. Leur principal objectif est d'obtenir les caractéristiques probabilistes de la réponse (output) d'un système pour des caractéristiques connues de sollicitation (input).

Les méthodes d'analyse des vibrations aléatoires, exposées dans cette section, donnent la possibilité d'étudier les processus dynamiques qui se manifestent dans les systèmes mécaniques (possibilité de déterminer les caractéristiques probabilistes des déplacements des points du système et de leurs deux premières dérivées) et d'obtenir des informations relatives aux propriétés statistiques du système, indispensables à l'évaluation de son niveau de fiabilité.



## 6.2. Processus aléatoires

Si un phénomène physique est aléatoire, alors chaque échantillon  $X(t)$  de ce phénomène (mesure ou enregistrement temporel) est le résultat de circonstances uniques, qui ne se répéteront pas à l'occasion d'autres mesures indépendantes de ce même phénomène. Un ensemble complet d'échantillons  $X(t)$  (fonction aléatoire) constitue un processus aléatoire. On appelle une fonction aléatoire une fonction pour laquelle à chaque valeur donnée de l'argument (par exemple le temps) il correspond une variable aléatoire.

Lorsqu'un processus aléatoire est défini par plusieurs paramètres, on l'appelle en conséquence champ aléatoire. Les champs aléatoires sont essentiellement des fonctions aléatoires multidimensionnelles, c'est à dire dépendant de plus d'un paramètre.  $X(t)$  représente un champ aléatoire dans lequel  $t$  correspond à un vecteur qui peut dépendre de plusieurs paramètres (le temps, la position dans l'espace, etc.).

### 6.2.1 Caractérisation d'un processus aléatoire

#### a) Fonction de densité de probabilité

D'une manière générale, pour caractériser les processus aléatoires de façon complète dans le sens probabiliste, il est nécessaire de spécifier les densités de probabilité conjointe d'ordres croissants suivantes

$$\begin{array}{ll}
 P_x(x, t) & \text{d'ordre 1} \\
 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) & \text{d'ordre 2} \\
 \vdots & \\
 P_x(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) & \text{d'ordre } n
 \end{array} \quad (6.1)$$

Cependant, dans le cas particulier de processus aléatoires Gaussiens une caractérisation basée uniquement sur les statistiques du premier et du second ordre, contient toutes les informations nécessaires pour une description complète du processus.

## b) Moments

Un processus aléatoire peut être caractérisé par ses moments, comme suit

$$E [X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x P_x(x, t) dx$$

$$E [X(t_1) X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (6.2)$$

$$E [X(t_1) X(t_2) \dots X(t_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \dots x_n P_x(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Les premiers moments sont d'une importance pratique considérable et ont reçu les notations et les appellations suivantes

L'espérance mathématique

$$m_x(t) = E [X(t)] \quad (6.3)$$

La fonction d'auto-corrélation

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E [X(t_1) X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (6.4)$$

La fonction d'auto-variance

$$\Gamma_{xx}(t_1, t_2) = E [(X(t_1) - m_{x_1})(X(t_2) - m_{x_2})] = \quad (6.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m_{x_1})(x(t_2) - m_{x_2}) P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

avec  $m_{x_1} = m_x(t_1)$  et  $m_{x_2} = m_x(t_2)$

D'autres fonctions utiles et qui sont d'ailleurs reliées aux deux premiers moments sont

La variance

$$\sigma_x(t) = \sqrt{E [(X(t) - m_x(t))^2]} \quad (6.7)$$

Le coefficient de corrélation

$$\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{xx}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2)} \quad (6.8)$$

Par ailleurs, lorsqu'il s'agit de deux processus aléatoires  $X(t)$  et  $Y(t)$ , la dépendance statistique qui les relie peut s'exprimer à travers

La fonction d'inter-corrélation

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E [X(t_1)Y(t_2)] \quad (6.9)$$

La fonction d'inter-covariance

$$\Gamma_{xy}(t_1, t_2) = E [(X(t_1) - m_{x_1})(Y(t_2) - m_{y_2})] \quad (6.10)$$

avec  $m_{x_1} = m_x(t_1)$  et  $m_{y_2} = m_y(t_2)$

Les coefficient d'inter-corrélation

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_y(t_2)} \quad (6.11)$$

**6.2.2 Processus stationnaire**

Un processus aléatoire est dit stationnaire ou strictement stationnaire, si les distributions de probabilités obtenues pour l'ensemble ne dépendent que des temps relatifs et non absolus ( $t_i$ ) ou encore, si sa structure de probabilité est invariante vis-à-vis d'un changement de l'origine des temps ou d'une translation dans le temps. Cela veut dire que la densité de probabilité du 1<sup>er</sup> ordre est indépendante du temps et que celles d'ordre supérieur dépendent que des différences relatives entre les instants considérés. Ceci implique

$$\begin{aligned}
 P_x(x, t) &= P_x(x, t+\tau) && \text{indépendant de } t \\
 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) &= P_x(x_1, t_1; x_2, t_1 + \tau) && \text{indépendant de } t \text{ mais} \\
 &\vdots && \text{fonction de } \tau \\
 &\vdots && \\
 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= P_x(x_1, t_1; x_2, t_1 + \tau; \dots; x_n, t_1 + \tau_{n-1}) \\
 &&& \text{indépendant de } t \text{ mais fonction} \\
 &&& \text{de } \tau_1, \dots, \tau_{n-1}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Il découle de ce qui précède, que les moments individuels sont constants et les moments conjoints sont fonction de la différence des arguments  $(t_i - t_j)$ .

$$E [X^n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n P_x[X(t)] dx = \text{constante} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
 E [X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} P_x[x_1, x_2, \dots, x_n] dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
 &= R_{XX}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

avec  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$

Un processus est dit faiblement stationnaire ou stationnaire au sens large, si seulement sa moyenne et sa fonction d'auto-corrélation satisfont les conditions de stationnarité

$$E [X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x P_x(x) dx = m_x = \text{cte} \tag{6.15}$$

de même pour un tel processus, la variance est indépendante du temps, en effet

$$E [(X(t) - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 P_x(x) dx = \sigma_x^2 = \text{cte} \tag{6.16}$$

Les fonctions d'auto-corrélation  $R_x(\tau)$  et d'auto-variance  $\Gamma_x(\tau)$  sont aussi indépendantes du temps et ne dépendent que de la différence  $\tau$

entre les instants considérés, en effet

$$E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau) = R_x(\tau) \quad (6.17)$$

$$E[(X(t_1) - m_x)(X(t_2) - m_x)] = \Gamma_{xx}(t_1, t_2) = \Gamma_{xx}(\tau) = \Gamma_x(\tau) \quad (6.18)$$

les processus aléatoires, utilisés en engineering, ont toujours un début et une fin et ne peuvent donc pas être vraiment stationnaires, mais pour des considérations pratiques, il est très souvent adéquat de supposer que le processus est stationnaire pour l'essentiel de la durée, ou bien il peut être divisé en plusieurs tranches qui sont approximativement stationnaires.

#### a) Propriétés des fonctions d'auto-corrélation et d'auto-variance

##### La fonction d'auto-corrélation

$$R_x(0) = E[x^2] = S_x \quad (6.19)$$

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau) \quad (6.20)$$

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = S_x \quad (6.21)$$

##### La fonction d'auto-variance

$$\Gamma_x(-\tau) = \Gamma_x(\tau) \quad (6.22)$$

$$\Gamma_x(\tau) = R_x(\tau) - m_x^2 \quad (6.23)$$

$$|\Gamma_x(\tau)| \leq \Gamma_x(0) = \sigma_x^2 \quad (6.24)$$

La fonction d'auto-corrélation tend vers la valeur du carré de la moyenne quand la différence des instants est infiniment large ( $\tau \rightarrow \infty$ ) et ceci dans le cas où le processus ne contient aucune composante périodique. En d'autres termes, la fonction de covariance diminue, en l'absence de composantes périodiques, quand l'écart

entre les instants augmente. ainsi, on pourra avoir:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma_{XX}(\tau) = 0 \quad (6.25)$$

et on aboutit finalement à

$$R_{XX}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m_X^2 \quad (6.26)$$

Il s'ensuit que la fonction d'auto-corrélation d'un processus stationnaire  $R_X(\tau)$  est réelle, paire et atteint son maximum à l'origine ( $\tau=0$ ). La fonction d'auto-covariance possède les mêmes propriétés.

### Fonction d'inter-corrélation

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (6.27)$$

$$\left| R_{XY}(\tau) \right| \leq \left[ R_{XX}(0) \cdot R_{YY}(0) \right]^{1/2} \quad (6.28)$$

En général, les fonctions de cross-corrélation  $R_{XY}(\tau)$  ne sont ni symétriques ( $R_{XY}(\tau) \neq R_{YX}(\tau)$ ), ni paires ( $R_{XY}(\tau) \neq R_{XY}(-\tau)$ ).

On constate que pour la plupart des processus aléatoires, la corrélation entre 2 processus devient très faible, lorsque l'écart entre les instants est large, et par conséquent, la fonction de inter-corrélation tend vers le produit des moyennes des 2 processus quand l'écart tend vers l'infini

$$R_{XY}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m_X m_Y \quad (6.29)$$

### NOTA

Les fonctions d'auto-covariance et d'inter-covariance ont, respectivement, les mêmes propriétés que celles d'auto-corrélation et de cross-corrélation.

## b) Moyenne temporelle et Processus ergodique

Considérons un processus stationnaire  $X(t)$ , sa moyenne temporelle est définie par

$$S = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \langle x(t) \rangle_T \quad (6.30)$$

Un processus est dit ergodique, si en plus de la stationnarité, les moyennes temporelles, sur un échantillon, (réalisation), et d'ensemble sont identiques.

Pour des considérations pratiques, seulement les ergodicités de la moyenne et de la fonction d'auto-corrélation seront étudiées (processus faiblement stationnaire).

Un processus est dit ergodique dans la moyenne ssi

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle x(t) \rangle_T \quad (6.31)$$

Un Processus est dit ergodique dans la corrélation ssi

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle x(t) x(t+\tau) \rangle \quad (6.32)$$

## 6.2.3 Décomposition spectrale d'un processus aléatoire

## a) Transformée de Fourier

Il est très important de faire une analyse spectrale (décomposition fréquentielle), d'un processus aléatoire. Soit une fonction réelle  $h(t)$ , sa transformée de Fourier est définie par

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (6.33)$$

où  $H(\omega)$  constitue l'amplitude spectrale de la fonction considérée. L'existence de  $H(\omega)$  est garantie si  $h(t)$  est absolument intégrable, i.e, si l'intégrale suivante a une valeur finie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (6.34)$$

La transformée inverse est définie par

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (6.35)$$

La notion de transformée de Fourier sera utilisée, afin de définir la décomposition spectrale d'un processus aléatoire stationnaire  $X(t)$ .

### b) La fonction de densité spectrale de puissance

les processus aléatoires stationnaires  $X(t)$ , ne possèdent pas de transformée de Fourier, puisque, un échantillon d'un tel processus ne s'annule pas à l'infini, il n'est pas absolument intégrable. un moyen de contourner cette difficulté consiste à considérer la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation  $R_X(\tau)$  du processus considéré. Celle-ci étant la transformée de Fourier inverse de la fonction de densité spectrale de puissance.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_X(\omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \cdot \exp(-i\omega\tau) d\tau \end{array} \right. \quad (6.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \cdot \exp(i\omega\tau) d\omega \end{array} \right. \quad (6.37)$$

Les relations (6.36) et (6.37) sont connues sous le nom de "relations de Wiener-khintchine".

Pour  $\tau=0$ , à partir de l'équation (3.37), une relation importante s'établit:

$$R_X(0) = E. [X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \cdot d\omega \quad (6.38)$$

La fonction de densité spectrale de puissance comme le montre la relation (6.38), est une mesure de la distribution, dans le domaine des fréquences, de la moyenne de la valeur au carré  $E [X^2(t)]$ , ou encore, elle décrit la répartition de l'énergie moyenne du processus. La densité spectrale de puissance donne aussi une indication sur la décomposition spectrale du signal  $X(t)$ .



En effet, en considérant la transformée de Fourier tronquée d'un processus stationnaire  $X(t)$

$$\bar{X}(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (6.39)$$

$S_X(\omega)$  est liée aussi, d'une façon directe, à  $\bar{X}(\omega, T)$  qui est la décomposition fréquentielle du signal.

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (2\pi/T) E [ |\bar{X}(\omega, T)|^2 ] \quad (6.40)$$

Cette équation définit  $S_X(\omega)$  comme la limite d'une fonction positive par conséquent  $S_X(\omega) \geq 0$ .

Pour un signal réel, la fonction d'auto-corrélation  $R_X(\tau)$  étant réelle et paire il en est de même pour la fonction de densité spectrale  $S_X(\omega)$ .

Les signaux, ayant une densité de spectrale puissance constante, sont appelés Bruit blanc.

$$S_X(\omega) = S_0 \quad (6.41)$$

Sa fonction d'auto-corrélation est définie comme

$$R_X(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (6.42)$$

où  $\delta(\tau)$  est la fonction de Dirac

Un tel processus n'est pas physiquement réalisable puisque sa variance n'est pas bornée. Il constitue cependant une idéalisation très importante dans l'étude de la réponse des systèmes linéaires.

Un signal peut être caractérisé par une frange de fréquences large ou étroite. A ce titre, un processus, ayant un contenu spectral large ou étalé est un processus à Bande large (Wide band), tandis que, celui, dont le contenu spectral est réduit ou étroit est un processus à Bande étroite (Narrow band).

## c) Fonction de densité spectrale de puissance unilatérale

Dans la littérature, il est fréquent de rencontrer une densité de puissance spectrale unilatérale,  $G_x(f)$ , définie par

$$\int_0^{\infty} G_x(f) df = E[X^2] \quad (6.43)$$

avec  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  : fréquence (Hz)

La relation entre  $S_x(\omega)$  et  $G_x(f)$  est

$$G_x(f) = 4\pi S_x(2\pi f) \quad (6.44)$$

## d) Fonction de densité spectrale de puissance croisée

La fonction de densité de puissance spectrale croisée de deux processus aléatoires  $X(t)$  et  $Y(t)$  est définie également par:

$$S_{xy}(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cdot \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (6.45)$$

Elle existe si  $S_{xx}(\omega)$  et  $S_{yy}(\omega)$  existent.  $S_{xy}(\omega)$  est généralement complexe et satisfait la relation

$$S_{yx}(\omega) = S_{xy}^*(\omega) \quad (6.46)$$

où '\*' signifie complexe conjugué

Une relation similaire à (6.40) établit que

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (2\pi/T) E [ |\bar{X}(\omega, T) \cdot \bar{Y}^*(\omega, T)| ] \quad (6.47)$$

$S_{xy}(\omega)$  vérifie la relation,

$$|S_{xy}(\omega)|^2 \leq S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega) \quad (6.48)$$

### 6.2.4 Fonctions d'auto-corrélation et densité spectrale des processus aléatoire dérivés

#### Fonctions d'auto-corrélation

Les deux premières fonctions d'auto-corrélation de processus dérivés sont définies par

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) = R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} [R_x(\tau)] \quad (6.49)$$

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) = \frac{d^4}{d\tau^4} [R_x(\tau)] \quad (6.50)$$

Un processus  $X(t)$  faiblement stationnaire est orthogonal à sa dérivée  $\dot{X}(t)$ .

$$E [X(t) \cdot \dot{X}(t)] = 0 \quad (6.51)$$

#### Fonction de densité spectrale

Les deux premières fonctions de densités spectrales de processus dérivés sont définies par

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{\dot{x}}(\omega) \quad (6.52)$$

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega) \quad (6.53)$$

### 6.3 Réponse d'un système linéaire à un degré de liberté à une sollicitation aléatoire

En considérant les systèmes linéaires invariant dans le temps, la réponse de ces derniers peut être déterminée dans le domaine temporel ou fréquentiel.

#### 6.3.1 Domaine temporel

La réponse temporelle unitaire d'un système initialement au repos est la réponse impulsionnelle  $h(t)$ , causée notamment par une impulsion de dirac  $\delta(t)$ .

En se basant sur le principe de superposition, la réponse temporelle ou encore la relation entrée-sortie (Input-output) pour

un système à seul degré de liberté, supposé initialement au repos, prend la forme d'un produit de convolution (intégrale de Duhamel).

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau & (6.54) \\ &= h * x \end{aligned}$$

Tout système physiquement réalisable satisfait la condition  $h(\tau) = 0$  pour  $\tau < 0$  (la réponse ne peut précéder l'excitation) est dit système causal.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau \quad (6.55)$$

ou encore si l'excitation est à support positif ( $x(t) = 0$   $t < 0$ )

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau \quad (6.56)$$

Remarque: Si le système n'est pas initialement au repos, la réponse due à l'effet des conditions initiales peut être ajoutée en raison du principe de superposition.

### 6.3.2 Domaine fréquentiel

De manière analogue, la réponse fréquentielle unitaire de ce système est la fonction de transfert  $H(\omega)$ , causée par une excitation harmonique unitaire  $\exp(i\omega t)$ . Celle-ci est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h(t)$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt \quad (6.57)$$

La relation entrée-sortie du système, en vertu des principes de superpositions et de la transformée de Fourier, prend la forme d'une simple multiplication.

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (6.58)$$

### 6.3.3 Réponse stationnaire à une excitation aléatoire stationnaire

En supposant, à juste titre, que la réponse d'un système, soumis à une excitation aléatoire stationnaire, est stationnaire, ceci facilitera le problème, en permettant l'utilisation des fonctions de corrélation et de densités de puissance spectrale. De ce fait, des relations entrée-sortie pour ces fonctions peuvent être établies

#### La moyenne

$$m_Y = H(0) \cdot m_X \quad (6.59)$$

#### La fonction d'auto-corrélation

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) \cdot h(\theta_2) \cdot R_{XX}(\tau + \theta_1 - \theta_2) \cdot d\theta_1 d\theta_2 \quad (6.60)$$

#### La fonction de densité spectrale de puissance

$$S_{YY}(\omega) = H(\omega) H(\omega)^* S_{XX}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) \quad (6.61)$$

Comme on peut le constater dans les expressions (6.59) à (6.61), les réponses temporelles et fréquentielles s'expriment, respectivement, par des produits de convolutions et des multiplications. Ceci rend la résolution des systèmes plus simple dans le domaine fréquentiel.

En plus de la simplicité, la relation (6.61) est l'une des plus importantes expressions dans la théorie des vibrations aléatoires, puisqu'elle joue un rôle clé dans l'évaluation des réponses stochastiques (variances) et plus précisément la valeur extrême de la réponse (peak response) qu'on peut voir ultérieurement.

### 6.4 Statistiques du pic de la réponse à une excitation Gaussienne

L'intérêt porté aux caractéristiques de réponses des systèmes structuraux soumis à des excitations sismiques stationnaires est très grand. Parmi ces caractéristiques quelques unes, telles que la

fonction de distribution cumulative, la moyenne et la variance de la réponse maximale sur un intervalle de temps spécifié, sont fondamentales pour la détermination de la fiabilité des structures existantes ou pour la conception de structures futures.

Trouver ces caractéristiques à partir de la densité spectrale de puissance spectrale est un problème très délicat. Ce problème n'a pas reçu, à ce jour, de solutions rigoureuses, même dans le cas simple de la réponse d'un oscillateur linéaire à un bruit blanc Gaussien. Cependant sous certaines conditions, des résultats acceptables peuvent être trouvés. En supposant que la structure est linéaire et soumise à une excitation Gaussienne de moyenne nulle, sa réponse sera aussi un processus Gaussien et de moyenne nulle. Dans ces conditions Vanmarcke [ ] a exprimé la distribution cumulative du pic de la valeur absolue de la réponse sur une durée  $\tau$  défini par

$$R_{\tau} = \max_{\tau} |R(t)| \quad (6.62)$$

comme étant

$$F_{R_{\tau}}(r) = [1 - \exp(-s^2/2)] \exp\left[-\nu\tau \frac{1 - \exp\{(-\pi/2)^{1/2} \delta_{\theta} s\}}{\exp(-s^2/2) - 1}\right], \quad r > 0 \quad (6.63)$$

$s$  représente une amplitude normalisée donnée par

$$s = \frac{r}{\sigma_R} = \frac{r}{\lambda^{1/2}} \quad (6.64)$$

alors que

$$\nu = \frac{\sigma_R}{\pi \sigma} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda_2 / \lambda_0} \quad (6.65)$$

est le taux moyen de passage du processus de réponse par la valeur zéro

$$\delta_{\theta} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}}, \quad \delta_{\theta} = \delta^{1,2} \quad (6.66)$$

$\delta$  est le facteur de forme de la densité spectrale de la réponse et

dont la valeur varie entre 0 et 1 (une faible valeur de  $\delta$  marque un processus en bande étroite)

La moyenne et l'écart type de  $R_\tau$  sont en général obtenus respectivement par les relations

$$\bar{R}_\tau = p \sigma_R \quad (6.67)$$

$$\sigma_{R_\tau} = q \sigma_R \quad (6.68)$$

où  $p$  et  $q$  sont les facteurs de pic qui s'expriment en fonction des moments spectraux sur une durée  $\tau$  (généralement prise égale à la durée de la phase forte de l'excitation) par les formules suivantes

$$p = \sqrt{2 \text{Ln}(\nu_\circ \tau)} + \frac{0,5772}{\sqrt{2 \text{Ln}(\nu_\circ \tau)}} \quad (6.69)$$

$$q = \frac{1,2}{\sqrt{2 \text{Ln}(\nu_\circ \tau)}} - \frac{5,4}{13 + (2 \text{Ln}(\nu_\circ \tau))^{3,2}} \quad (6.70)$$

où

$$\nu_\circ \tau = \left\{ \begin{array}{ll} \max(2,1; 2\delta\nu\tau) & 0 < \delta < 1 \\ 0,45 & \\ (1,63\delta - 0,38)\nu\tau & 0,1 < \delta < 0,69 \\ \nu\tau & 0,69 < \delta < 1 \end{array} \right\} \quad (6.71)$$

$\nu_\circ \tau$  est le taux équivalent des passages par zéro statistiquement indépendants.

### 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé les notions fondamentales de la théorie des vibrations aléatoires indispensables pour prédire les caractéristiques statistiques de la réponse d'une structure connue à une excitation aléatoire de caractéristiques statistiques connues.

A travers cette introduction sur la théorie des vibrations aléatoires, nous avons vu que pour la classe des systèmes linéaires, la relation entrée-sortie s'exprime par des produits de convolution dans le domaine des temps et des multiplications dans le domaine des

fréquences. Il s'ensuit que la plupart des traitements s'effectuent plus simplement dans le domaine des fréquences. La facilité avec laquelle la relation entrée-sortie s'exprime dans le domaine des fréquences n'est d'ailleurs pas la seule caractéristique attrayante des systèmes linéaires. En effet la réponse d'un système linéaire à une excitation Gaussienne est également Gaussienne. De tels processus sont entièrement caractérisés par leurs propriétés statistiques du deuxième ordre, i.e, la moyenne et la fonction d'auto-corrélation ou de la densité spectrale de puissance, ce qui est d'ailleurs l'ordre maximum pour lequel il est possible d'obtenir des informations expérimentales sur la structure statistique d'un phénomène. Aussi, nous avons vu que connaissant les caractéristiques statistiques de la réponse aléatoire d'une structure, celle-ci peut être exprimée alternativement comme le pic de la valeur absolue de la réponse sur la durée de l'observation.

En se basant sur les éléments de base de la théorie des vibrations aléatoires vus dans ce chapitre et sur l'évaluation déterministe de la réponse sismique de fondations, vue dans le chapitre 5, nous enchaînons en dernier sur l'approche probabiliste de l'évaluation de la réponse de fondations.



## Chapitre 7

# REPONSE PROBABILISTE DE FONDATIONS FILANTES

*"Savoir ce que l'on sait ce que l'on sait  
et  
ce que l'on ne sait pas ce que l'on ne sait pas,  
voilà la véritable science".*

CONFUCIUS

## Chapitre 7

## REPONSE PROBABILISTE DE FONDATIONS

## 7.1. Introduction

Classiquement, l'évaluation de la réponse sismique des structures, suppose que tous les points de la surface du sol voisins de la fondation sont animés de mouvement pratiquement identiques et synchrones [54,97,108]. En d'autres termes, le mouvement de la fondation est synchronisé avec le mouvement en champ libre qui est supposé uniforme. Cependant, cette hypothèse n'est strictement valide que dans le cas où les vibrations du sol résultent d'une propagation verticale spatialement uniforme des ondes sismiques (ondes cohérentes) ou bien les dimensions de la base de la structure sont considérées petites relativement aux longueurs d'ondes sismiques.

En réalité, deux points considérés sont animés l'un par rapport à l'autre de déplacements différentiels [4,46,65]. En effet, quand le front d'onde est plan et se propage de manière cohérente dans un milieu parfaitement homogène, il sollicite la fondation suivant un angle fini, et par conséquent deux points de l'interface sol-fondation distants d'une longueur finie sont animés de mouvements différentiels. Ce phénomène connu sous le vocable de "Wave passage" (passage d'onde) a été étudié à l'occasion de nombreux travaux de recherche [19,39,67,82,84,94,114].

Plusieurs facteurs additionnels contribuent à la variabilité spatiale du déplacement du sol en champ libre. Le train d'ondes issu des différents points d'une source (faille) étendue a pour effet d'induire une interférence entre les arrivées simultanées d'ondes à la surface du sol selon divers angles d'incidence. Ce train d'ondes

est altéré différemment en phase et en amplitude par la complexité caractérisant la structure souterraine du sol (non homogénéité, anisotropie, présence d'aspérités, etc...) durant sa propagation de la source à la surface du sol et par les réflexions et les diffractions dues à la présence de la fondation. Ces effets, contribuant à la variabilité spatiale du déplacement du sol peuvent être classés sous le vocable de "l'effet de l'incohérence" qui est la perte de cohérence que subissent les ondes sismiques au cours de leur trajet du foyer au site considéré.

Plusieurs approches ont été proposées pour estimer les effets de la variabilité spatiale du mouvement du sol en champ libre sur la réponse sismique de fondations. Nous citons ici trois approches importantes.

La première approche estime les effets de la variabilité spatiale du mouvement du sol en champ libre sur la réponse de fondations étendue en se basant sur une représentation analytique du mouvement du sol en champ libre dans le domaine fréquentiel et sur l'utilisation de la moyenne spatiale pondérée dont le poids est classiquement une fonction linéaire de la position. En ce qui concerne la variabilité spatiale, les caractéristiques aléatoires spatiales du mouvement du sol sont représentées par l'intercorrélation ou la fonction de cohérence entre les mouvements en deux points distincts. Cette approche a été utilisée par Hoshiya et Ishii [47] pour l'évaluation de l'interaction cinématique de fondations rectangulaires enterrées. Dans cette étude seul l'effet de l'incohérence du mouvement du sol est pris en considération; l'effet de passage d'onde est négligé. Harichandran [45] a étudié l'effet de l'interaction cinématique sur des fondations superficielles rectangulaires étendues rigides en utilisant un modèle stochastique de la variabilité spatiale du mouvement du sol basé sur les résultats fournis par le SMART1 (Strong Motion Array Recorded Near Taiwan), opérationnel depuis 1980 à Lotung, Taiwan. Les effets de passage d'onde ainsi que les effets de l'incohérence sont considérées. Veletsos et Prasad [109], en se basant sur le modèle

stochastique de la variabilité spatiale du mouvement du sol proposé par Harichandran et Vanmarcke [46], ont analysé l'interaction cinématique et inertielle de structures supportées par des fondations circulaires superficielles et rigides. L'effet de passage d'onde relatif à une onde de type SH se propageant obliquement est pris en compte. Cette première approche est simple et peut être recommandée à l'étude de fondations de différentes géométries. Ses limitations sont :

- i) Les résultats dépendent de choix du modèle stochastique de la variabilité spatiale du mouvement du sol,
- ii) La moyenne pondérée ne prend pas en compte le problème de contact existant réellement entre la fondation et le sol.

La deuxième approche, plus proche de la réalité, se base sur une représentation analytique de la variabilité spatiale du mouvement du sol. Cette approche ne néglige pas le problème de contact sol-fondation et considère ce problème comme étant un problème aux valeurs limites de nature mixte. La formulation mène à une représentation intégrale de la réponse de la fondation en termes de mouvement du sol en champ libre et des contraintes de contact entre la fondation et le sol. Luco et Wong [71] ont présenté une procédure pseudo-analytique déterminant la réponse dynamique de fondations superficielles rigides reposant sur un demi-espace élastique et sollicitées par un mouvement sismique basé sur un modèle stochastique de la variabilité spatiale du mouvement de sol en champ libre. Une application numérique est présentée en particulier pour le cas d'une fondation rectangulaire. Luco et Mita [68] ont étudié le cas d'une fondation circulaire reposant sur un demi-espace élastique en suivant pratiquement la même démarche que dans [71].

La troisième approche découle des travaux de Kausel et Pais [57] et Pais et Kausel [87]. Elle consiste à mettre en oeuvre un modèle physique décrivant la variabilité spatiale du mouvement du sol en champ libre par l'effet de la propagation d'onde stochastique de type SH dans un milieu homogène sous divers angles d'incidence. Il

est supposé que le mouvement de la fondation est le résultat de la superposition des ondes planes stationnaires non corrélées arrivant suivant plusieurs angles et possédant la même densité spectrale de puissance. Une méthode approchée proposée par Igushi [51,52] est utilisée par Pais et Kausel [87] pour l'évaluation de la réponse sismique de fondations cylindriques et rectangulaires enterrées sollicitées par l'incidence des ondes stochastiques de types SH.

Plusieurs types d'ondes sont normalement présentes dans le sol durant le séisme (P, SV, SH, Rayleigh, Love, etc.). Dans notre travail, nous présentons une analyse de l'interaction cinématique de fondations bidimensionnelles sollicitées individuellement par les ondes stochastique P, SV et Rayleigh ainsi que par leur combinaison se propageant dans un sol homogène sous différentes angles. L'évaluation de L'interaction cinématique due à la propagation d'onde stochastique est accomplie par la méthode des équations intégrales aux frontières représentée dans les chapitres précédents.

## 7.2 Caractérisation spectrale du mouvement de la fondation

### 7.2.1 Formulation

Dans le chapitre précédent, nous avons définie les fonctions de transfert  $T_i$  reliant les composantes en champ libre avec les composantes du mouvement de fondations filantes rigides comme étant

$$u_i^f = T_i u_i^g \quad (7.1)$$

où  $T_i$  sont les fonctions de transfert définies comme suit

$$T_i = \frac{u_1^f}{u_1^g} \quad \text{amplitude de déplacement horizontal de la fondation normalisée par rapport au déplacement horizontal du mouvement en champ libre,}$$

$$T_2 = \frac{u_2^f}{u_2^g}$$
 amplitude de déplacement vertical de la fondation normalisée par rapport au déplacement vertical du mouvement en champ libre,

$$T_3 = \frac{u_3^f B}{u_2^g}$$
 amplitude de déplacement vertical induit par le mode de balancement de la fondation normalisé par rapport au déplacement vertical du mouvement en champ libre.

avec

$u_1^f$ ,  $u_2^f$ , et  $u_3^f$  sont les composantes horizontale, verticale et de balancement respectives du déplacement de centre de la fondation, et  $u_1^g$ ,  $u_2^g$  sont respectivement les composantes horizontale et verticale du déplacement de champ libre de la surface de sol.

Le mouvement en champ libre  $u_i^g$  est supposé le résultat de la propagation d'onde de type P, SV ou de Rayleigh. Si on attribue aux différents types d'onde sismique, la même densité spectrale de puissance  $S_g(\omega)$ , alors la densité spectrale de puissance du mouvement de la fondation sollicitée par une seule onde de type P, SV ou de Rayleigh suivant un angle d'incidence  $\theta_i$ , est exprimée de la sorte

$$S_{\theta_i}(\omega) = |T_{\theta_i}|^2 S_g(\omega) \quad (7.2)$$

Jusqu'à présent nous avons supposé que l'excitation était due à une seule onde se propageant suivant une direction définie au préalable, et avait une densité spectrale de puissance  $S_g(\omega)$ . En réalité, les ondes sismiques peuvent arriver suivant plusieurs directions en même temps, donc cette formulation doit être étendue à ce cas. Considérons deux ondes sismiques arrivant suivant différents angles d'incidence  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (par rapport à l'horizontale). Le mouvement résultant de la fondation  $u_f(t)$  peut être exprimé dans le domaine du temps comme la somme des mouvements produits par chaque onde

$$u_f(t) = u_{\theta_1}(t) + u_{\theta_2}(t) \quad (7.3)$$

La fonction d'autocorrection de  $u_f$  est donc

$$R_{u_f}(\tau) = E [u_f(t) u_f(t+\tau)] = E [u_{\theta_1}(t) u_{\theta_1}(t+\tau)] + E [u_{\theta_2}(t) u_{\theta_2}(t+\tau)] / \\ + E [u_{\theta_1}(t) u_{\theta_2}(t+\tau)] E [u_{\theta_1}(t+\tau) u_{\theta_2}(t)] \quad (7.4)$$

La transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation est donnée par la densité spectrale de puissance suivante

$$S_{u_f}(\omega) = S_{\theta_1}(\omega) + S_{\theta_2}(\omega) + S_{\theta_1\theta_2}(\omega) + S_{\theta_1\theta_2}^*(\omega) \quad (7.5)$$

Supposons que l'inter-densité spectrale de puissance entre deux ondes sismiques soit nulle, de même pour le mouvement de la fondation induit. l'équation (7.5) s'écrit comme étant

$$S_{u_f}(\omega) = S_{\theta_1}(\omega) + S_{\theta_2}(\omega) \quad (7.6)$$

Si on a  $m$  ondes arrivant suivant différentes angles  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ , donc

$$S_{u_f}(\omega) = \sum_{i=1}^m S_{\theta_i}(\omega) \quad (7.7)$$

supposons que les ondes arrivent suivant des angles différents et ont des densités spectrales de puissance spectrale définissant la même variation avec la fréquence, mais pas nécessairement les mêmes amplitudes ( $S_{\theta_i}(\omega) = u_{\theta_i}^2 S_g(\omega)$ ), d'où

$$S_{u_f}(\omega) = S_g(\omega) \sum_{i=1}^m |T_{\theta_i}|^2 u_{\theta_i}^2 \quad (7.8)$$

ou

$$S_{u_f}(\omega) = |T_f|^2 S_g(\omega) \quad (7.9)$$

avec

$$|T_f|^2 = \sum_{i=1}^m |T_{\theta_i}|^2 u_{\theta_i}^2 \quad (7.10)$$

on définit

$$|T_f^-| = \sqrt{\frac{S_f(\omega)}{S_g(\omega)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m |T_{\theta_i}|^2 u_{\theta_i}^2} \quad (7.11)$$

comme étant la fonction de transfert

dans le but de comparer les résultats pour chaque cas, il convient de normaliser les fonctions de transfert par rapport à la somme des carrés de l'intensité de chaque onde  $u_{\theta_i}^2$ , d'où

$$|T_f^{\text{nor}}| = \sqrt{\frac{S_f(\omega)}{S_g(\omega)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m |T_{\theta_i}|^2 u_{\theta_i}^2 / \sum_{i=1}^m u_{\theta_i}^2} \quad (7.12)$$

### 7.2.2 Interprétation des résultats

La formulation décrite dans la section précédente est appliquée dans le cas de fondation filante rigide superficielle. En se référant à l'équation (7.12), les valeurs des fonctions de transfert dues à l'interaction cinématique  $T_{\theta_i}$  sont évaluées pour les deux modes de translation (horizontal et vertical) et de balancement par la méthode des équations intégrales aux frontières présentée dans les chapitres précédents. On suppose que les ondes arrivent continuellement entre deux directions extrêmes. Nous avons choisi 4 secteurs définissant l'arrivée des ondes (fig.7.1).

Trois types d'onde sismique (P, SV et de Rayleigh) sont considérés dans cette étude. Les figures (7.2) à (7.9) présentent les résultats de la valeur absolue de la fonction de transfert,



relative à chaque composante du mouvement induit dans la fondation pour les quatre secteurs (fig.7.1) et en fonction de la fréquence adimensionnelle variant de 0 à 9. Les courbes représentées dans les figures sont en concordance avec leurs correspondants présentées dans le chapitre 5, i.e, l'effet de la variabilité spatiale ( dans son volet incohérence) sur le mouvement de la fondation est qualitativement le même que l'effet de l'onde de passage. Les mêmes conclusions obtenues dans le chapitre 5 peuvent être appliquées dans ce chapitre. Pour les trois types d'excitation (P, SV et de Rayleigh) ainsi que leur combinaison, nous pouvons conclure que les déplacements de translation se réduisent significativement aux fréquences moyennes et élevées. La réduction est plus importante pour les ondes de faible incidence que pour les ondes de grande incidence. Nous observons également aux fréquences moyennes un développement important du balancement, lequel se réduit aux fréquences supérieures. Cette réduction est plus accentuée pour les ondes de faible incidence.

### 7.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué l'effet de l'incohérence du mouvement de sol sur la réponse de fondations rigides bidimensionnelles. On a supposé dans cette étude que l'incohérence du mouvement du sol est due à la superposition des ondes planes stationnaires de différents types (P, SV et de Rayleigh) non corrélées arrivant suivant plusieurs angles et possédant la même densité spectrale de puissance. Les résultats de cette investigation montrent que l'effet de l'incohérence du mouvement du sol sur la réponse de fondations est qualitativement similaire à l'effet de passage d'onde. Les deux effets réduisent significativement les composantes du mouvement de translation aux fréquences moyennes et élevées et développent, aux fréquences moyennes, une composante rotationnelle de la réponse, laquelle se réduit aux fréquences supérieures.

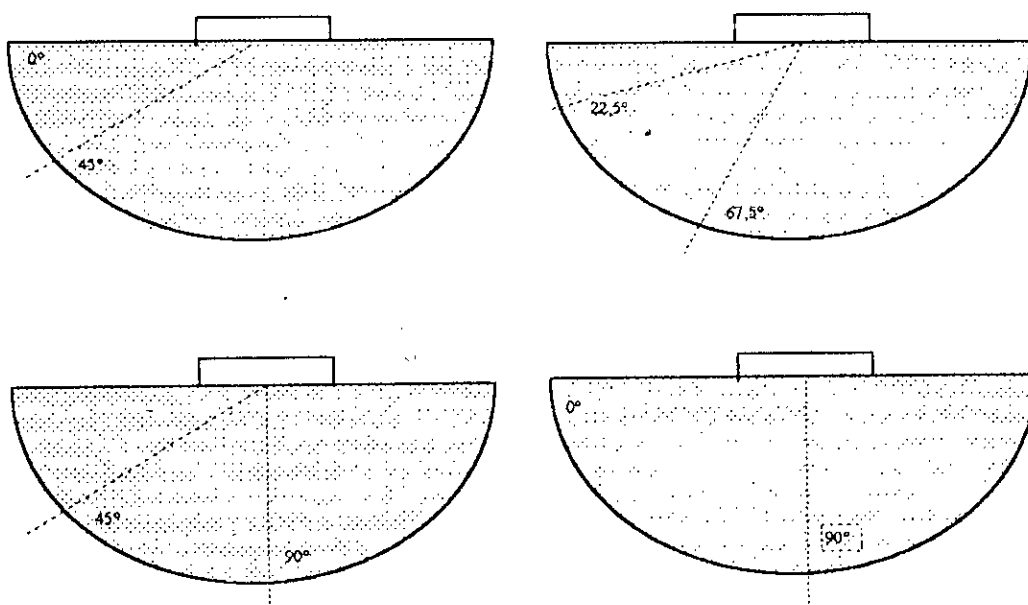


Figure 7.1 Secteurs définissant l'arrivées des ondes entre deux directions extrêmes

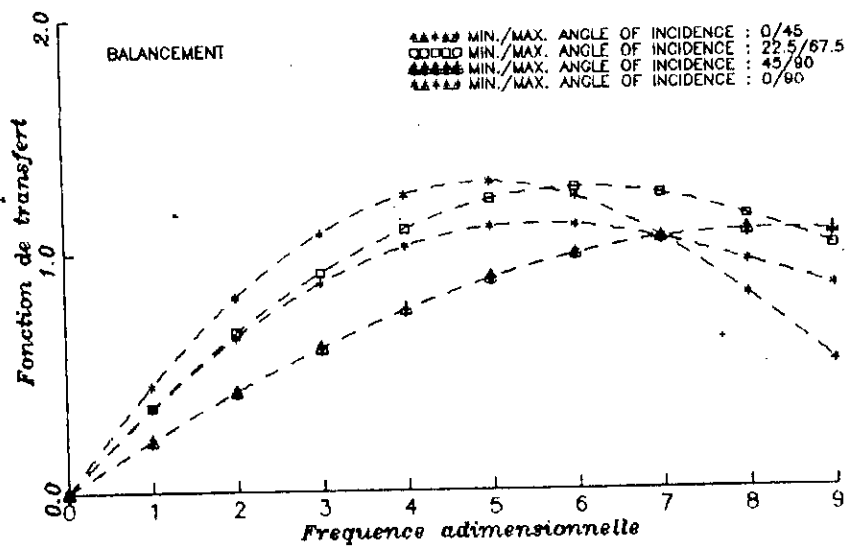
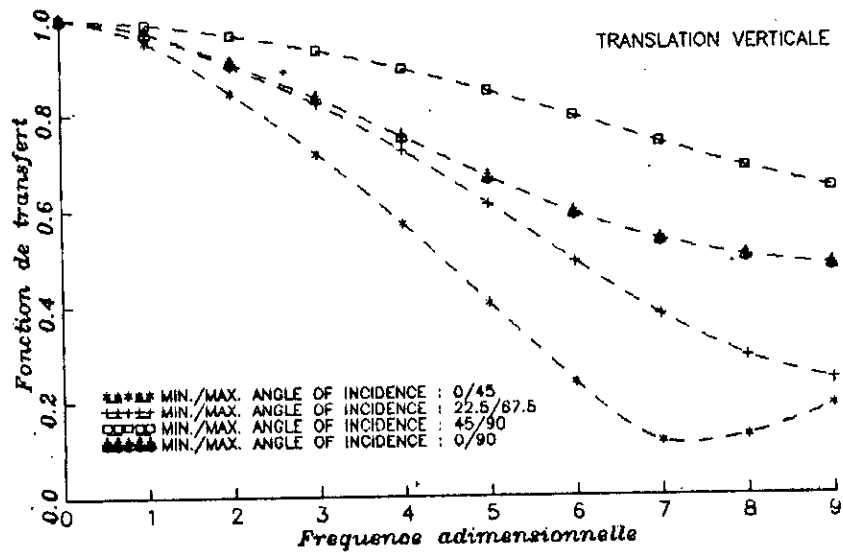
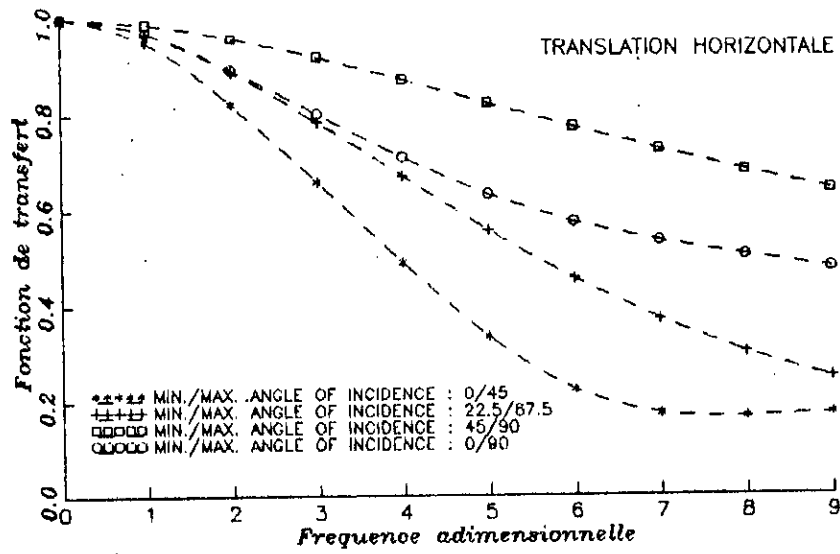


FIGURE 7.2 Fonctions de transfert  
Effet de l'onde P

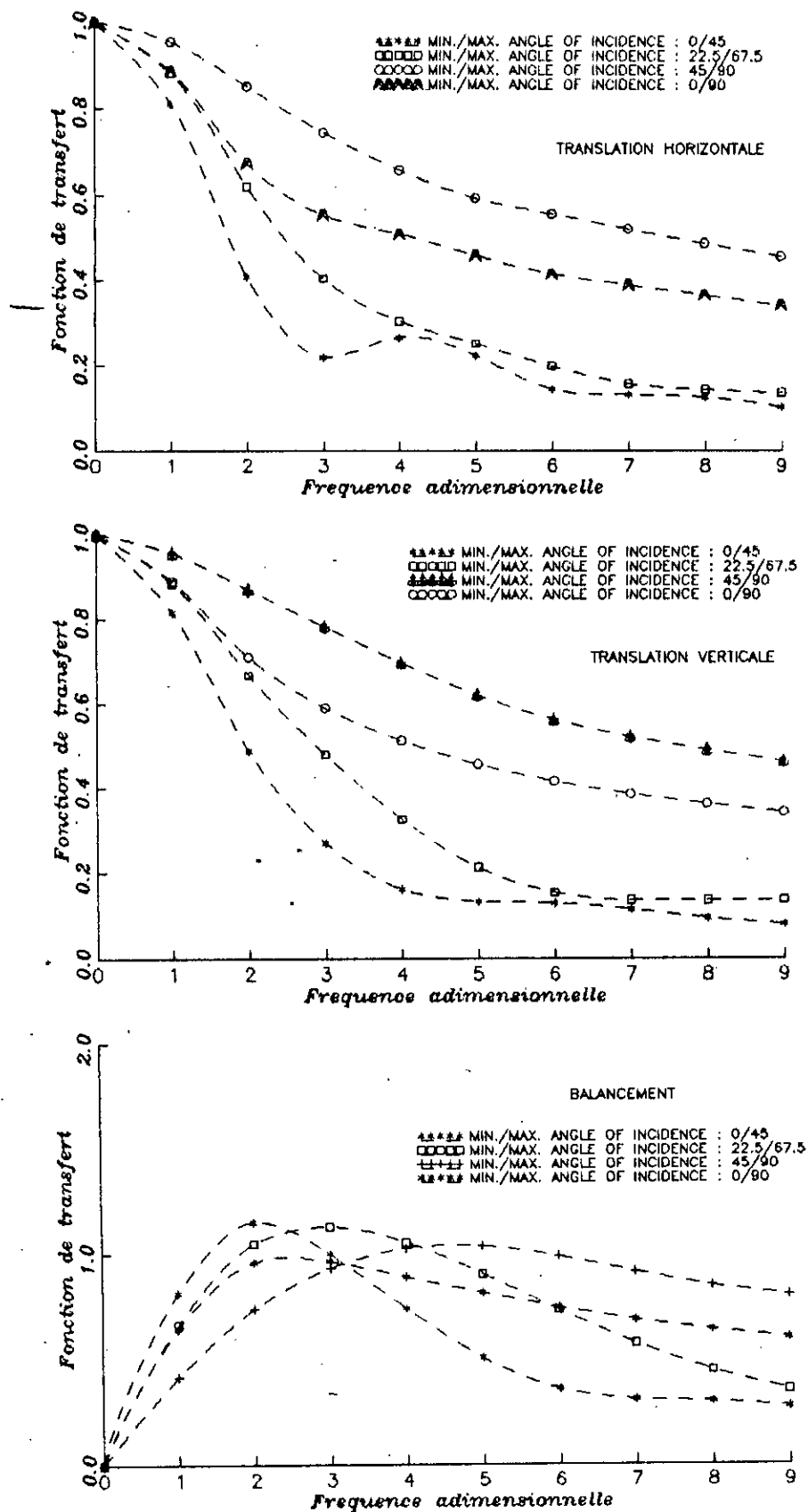


FIGURE 7.3 Fonctions de transfert Effet de l'onde SV

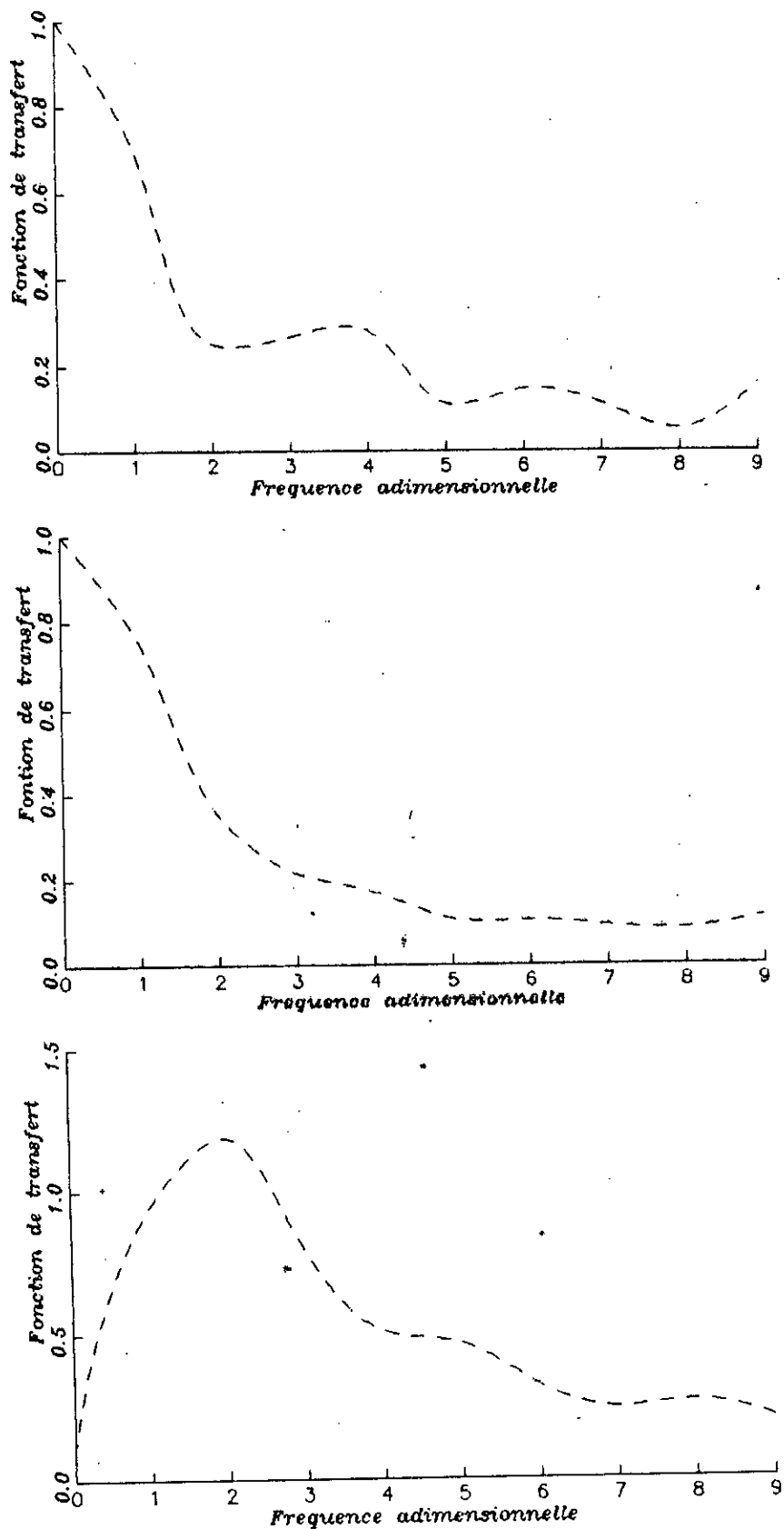


FIGURE 7.4 Fonctions de transfert  
Effet de l'onde du Rayleigh

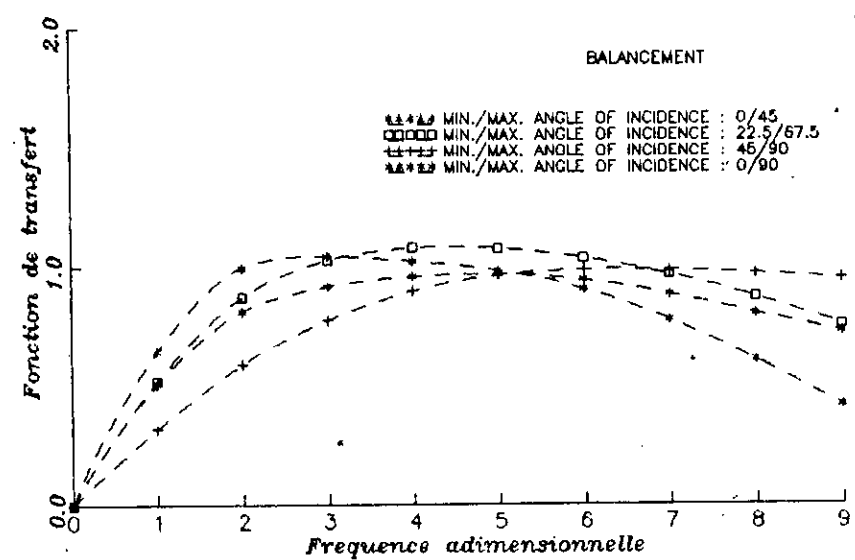
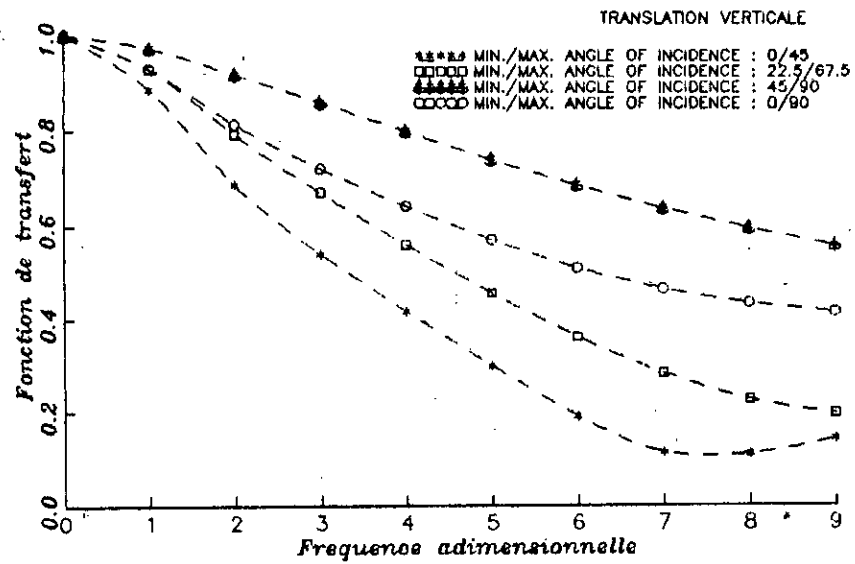
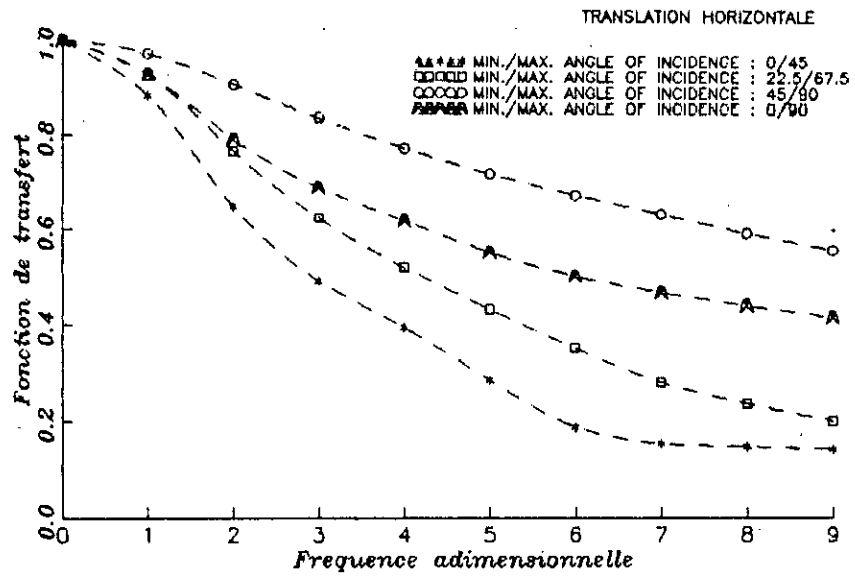


FIGURE 7.5 Fonctions de transfert  
 Effet de la combinaison des ondes P et SV

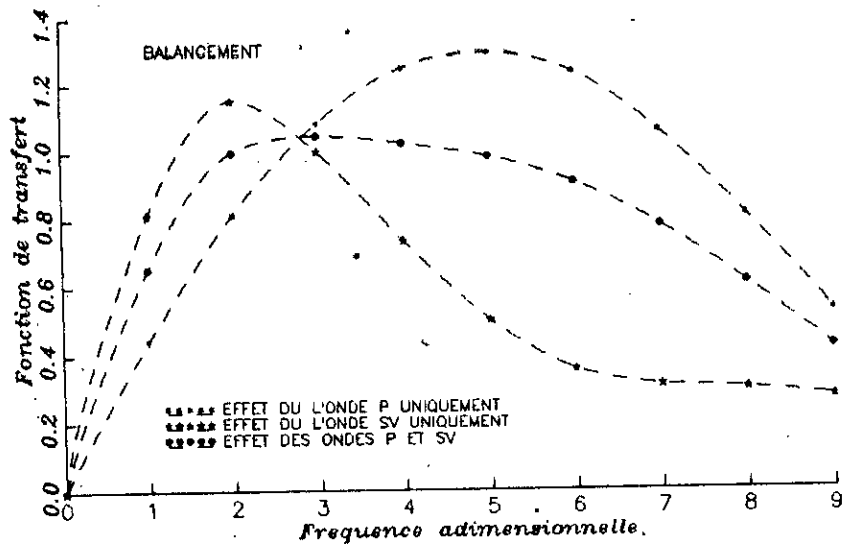
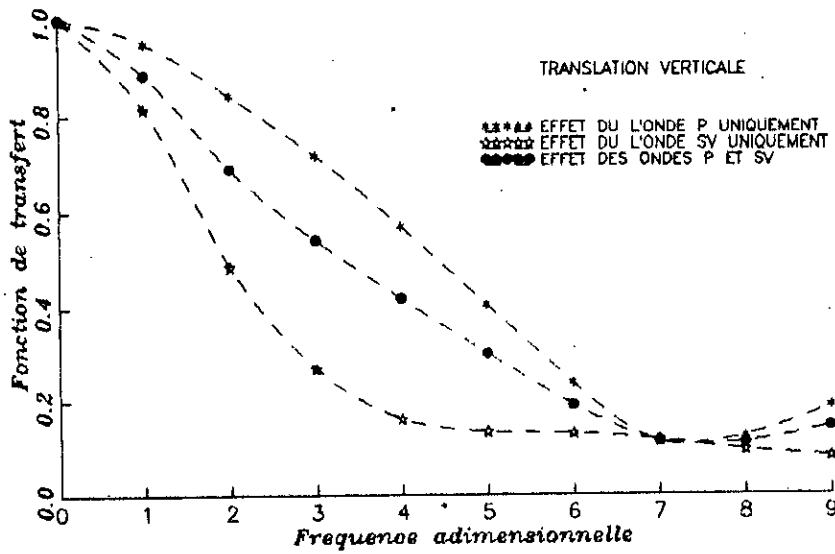
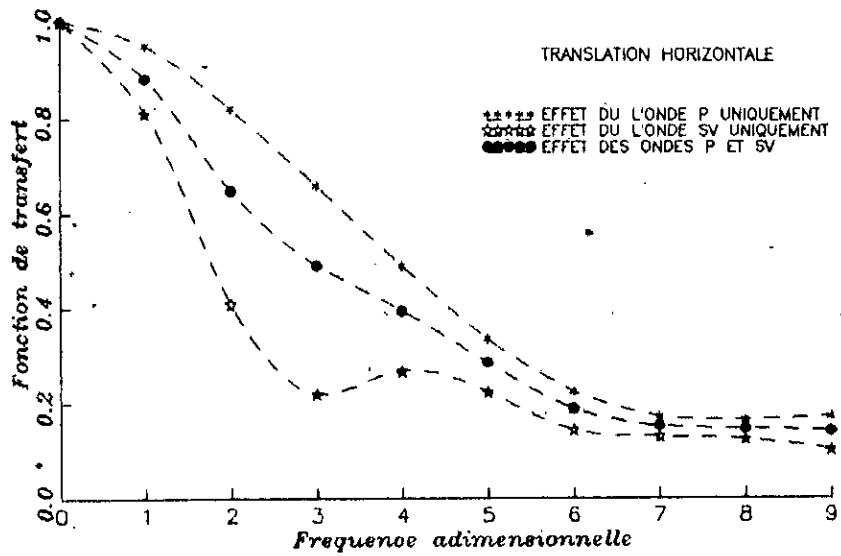


FIGURE 7.6 Effet de la nature des ondes incidentes

MIN. ANG. = 0.  
 MAX. ANG. = 45.

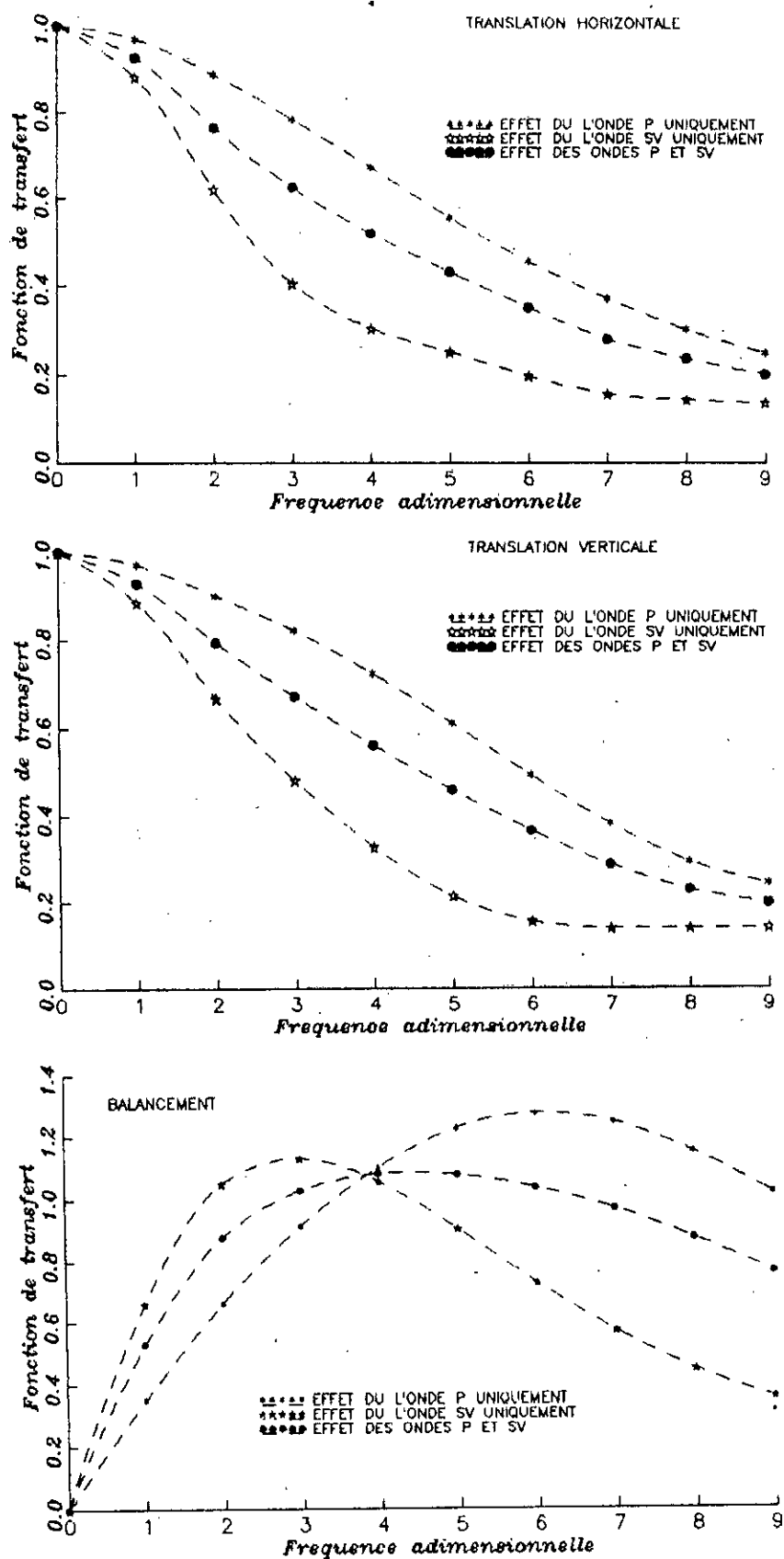


FIGURE 7.7 Effet de la nature des ondes incidentes

MIN. ANG. = 22.5

MAX. ANG. = 67.5



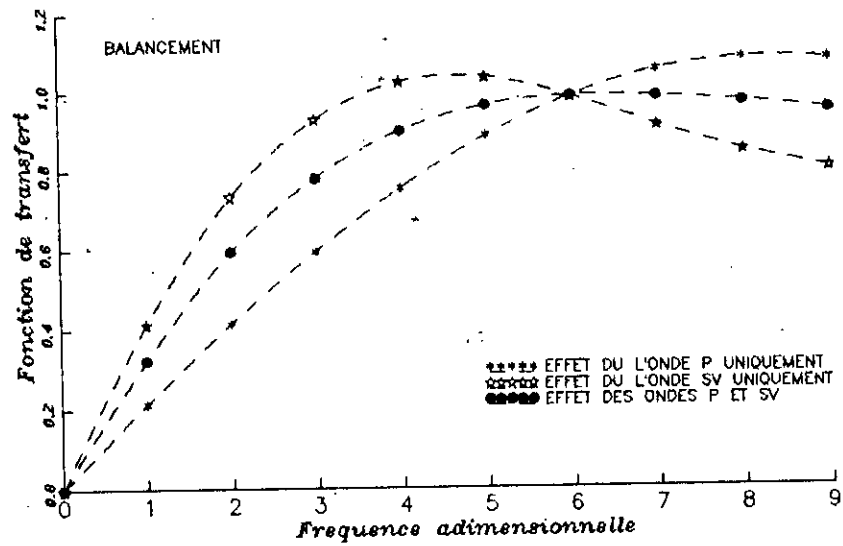
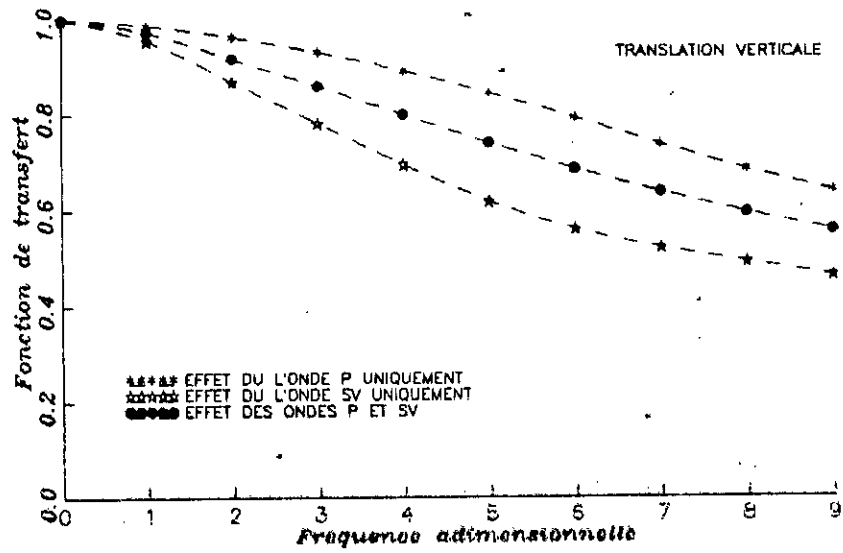
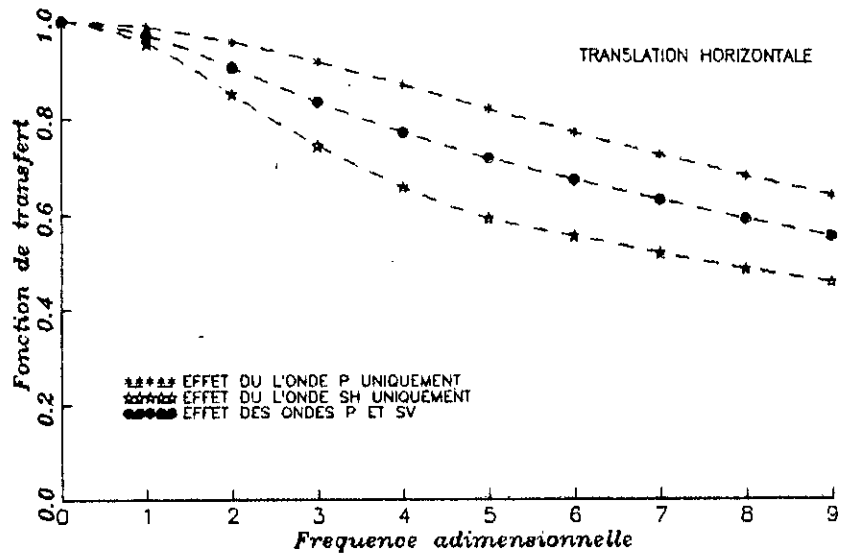


FIGURE 7.8 Effet de la nature des ondes incidentes

MIN. ANG. = 45.  
 MAX. ANG. = 90.

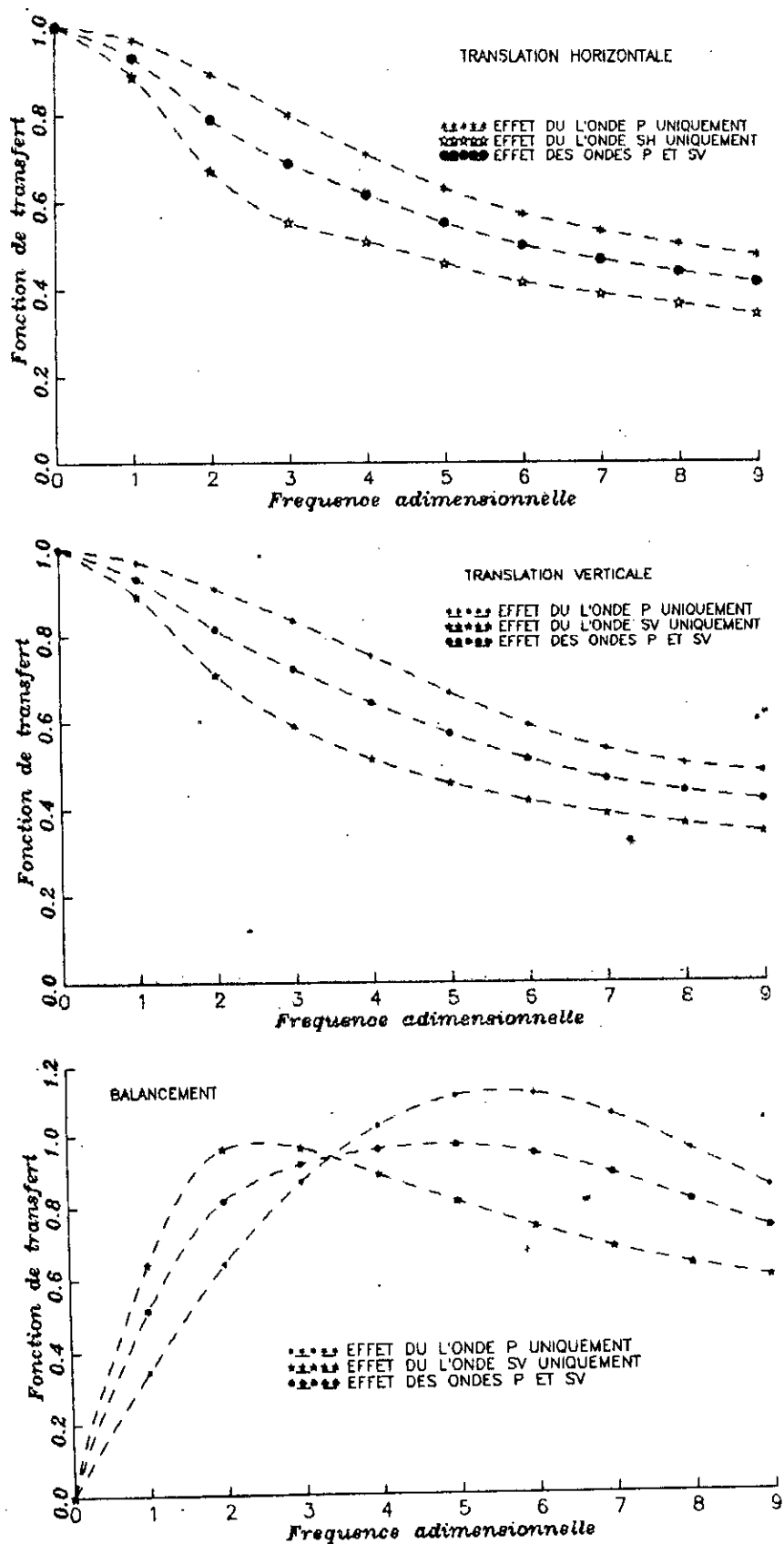


FIGURE 7.9 Effet de la nature des ondes incidentes

MIN. ANG. = 0.  
 MAX. ANG. = 90.

*CONCLUSION GENERALE  
ET  
RECOMMANDATIONS FUTURES*

*"Tout est dit ... tout reste à faire".*

*LUDOWING VAN BEETHOVEN*

## CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS POUR RECHERCHE FUTURES

Tout au long de ce travail nous nous sommes intéressés à la modélisation numérique des problèmes dynamiques mettant en jeu les phénomènes d'interaction sol-fondation. Pour cela nous avons opté pour la méthode des équations intégrales aux frontières qui constitue un outil de calcul précis et efficace. En effet, elle permet de modéliser rigoureusement, d'une part les domaines infinis, et d'autre part, au sein du solide, le milieu continu ce qui lui vaut d'être beaucoup plus précise que la méthode des éléments finis notamment pour la détermination des contraintes qui sont sujettes à des erreurs.

Dans le premier chapitre, à travers la définition littéraire et phénoménologique de l'interaction sol-structure, nous avons pu mettre en relief son intérêt et l'exigence de sa prise en compte dans la conception des ouvrages en génie civil. Nous avons également exposé les aspects théoriques et techniques de méthodes d'analyse telles que l'approche directe et l'approche par sous-structures. L'avantage majeur de l'approche globale est sa capacité à prendre en compte les hétérogénéités résultant soit des variations de profils, soit des variations des caractéristiques du sol provenant des non linéarités géométrique plus prononcées caractérisant certains zones (angles des radiers...). La méthode des sous-structures est une méthode par étape, i.e., analyse le problème d'interaction sol-structure en plusieurs parties successives. Chacune de ces étapes de calcul est, bien entendu, plus facile à résoudre du point de vue de la modélisation ou du traitement en comparaison avec le problème global; elles conduisent à des résultats dont la

superposition donne la solution finale. En plus de la facilité d'emploi, la méthode de sous structures permet de porter certaines modifications sans avoir à reprendre l'analyse en entier; ce qui est un avantage non négligeable du point de vue traitement numérique. A titre d'exemple, une modification des caractéristiques de la structure ne requiert qu'une nouvelle analyse dynamique de la structure sans refaire celle du sol. La méthode des sous structures présente aussi l'avantage d'identifier la contribution de chaque composante (interaction cinématique ou inertielle) dans le phénomène global d'interaction.

Dans le deuxième chapitre, après avoir rappelé la formulation en déplacement des équations de l'élastodynamique, l'application du théorème de réciprocité à deux états élastodynamiques, la signification des fonctions de Green, nous avons présenté la formulation intégrale des équations de l'élastodynamique. Nous avons également déduit une représentation intégrale du problème semi-infini avec ou sans source émettrice d'ondes sismiques à l'infini, tout en montrant que les conditions de radiation de Sommerfeld à l'infini sont prises en compte implicitement dans la formulation. Enfin quelques définitions sur les différents types d'ondes sismiques ainsi que leurs modélisation mathématique en champ libre ont été évoquées.

A travers le troisième chapitre, nous avons développé le traitement analytique et numérique de la méthode des équations intégrales en vue de son utilisation pour l'étude des problèmes de l'élastodynamique stationnaire, bidimensionnelle. Nous avons en particulier mis au point une méthode d'intégration analytique permettant de résoudre les problèmes liés aux singularités, ce qui permet d'éviter les imprécisions dans les calculs numériques.

Dans le quatrième chapitre, Nous avons formulé une approche intégró-matricielle pour le calcul de la réponse dynamique des fondations filantes rigides superficielles et enterrées. Nous avons interprété quelques résultats relatifs à l'influence de la

discrétisation du champ libre de part et d'autre de la fondation, l'influence des propriétés mécaniques du sol telles que le coefficient de Poisson, et l'amortissement, l'effet de l'enterrement et le type de contact sol-fondation.

Dans le cinquième chapitre, nous avons exposé la formulation matricielle des équations intégrales aux frontières pour le calcul de la réponse sismique de la fondation filante et rigide, posée sur un demi-espace homogène et élastique et excitée par divers types d'ondes sismiques (P, SV, et de Rayleigh) selon plusieurs angles d'incidence. Pour les trois types d'excitation, nous pouvons conclure que les déplacements de translation se réduisent significativement aux fréquences moyennes et élevées. La réduction est plus importante pour les ondes de faible incidence (inférieur à  $45^\circ$ ) que pour les ondes de grande incidence. Nous observons également pour les fréquences moyennes un développement important du balancement, qui se réduit aux fréquences supérieures; cette réduction est plus accentuée pour les ondes de faible incidence.

5000 010

Dans le sixième chapitre, nous avons exposé les notions fondamentales de la théorie des vibrations aléatoires indispensables pour prédire les caractéristiques statistiques de la réponse d'une structure sujette à une excitation aléatoire connue. A travers cette introduction sur la théorie des vibrations aléatoires, nous avons vu que pour la classe des systèmes linéaires, la relation entrée-sortie s'exprime par des produits de convolutions dans le domaine des temps ce qui équivaut à des multiplications dans le domaine des fréquences. Il s'ensuit que la plupart des résultats s'expriment plus simplement dans le domaine des fréquences. La facilité avec laquelle la relation entrée-sortie s'exprime dans le domaine des fréquences n'est d'ailleurs pas la seule caractéristique attrayante des systèmes linéaires. En effet la réponse d'un système linéaire à une excitation Gaussienne est également Gaussienne. De tels processus sont entièrement caractérisés par les propriétés statistiques du deuxième ordre, à savoir la moyenne et la fonction

d'auto-corrélation ou de la densité spectrale de puissance ce qui est d'ailleurs l'ordre maximum pour lequel il est possible d'obtenir des informations expérimentales sur la structure statistique d'un phénomène. En outre, nous avons vu que connaissant les caractéristiques statistiques de la réponse aléatoire d'une structure, celle-ci peut être exprimée alternativement comme le pic de la valeur absolue de la réponse sur une durée de l'observation. En se basant sur les éléments de base de la théorie des vibrations aléatoires vus dans ce chapitre et sur l'évaluation déterministe de la réponse sismique de fondations; vue dans le chapitre cinq, nous avons abordé le dernier chapitre avec l'évaluation de l'effet de l'incohérence du mouvement du sol sur la réponse de fondations rigides bidimensionnelles. On a supposé dans cette étude que l'incohérence du mouvement du sol est due à la superposition des ondes planes stationnaires de différents types (P, SV et de Rayleigh) non corrélées arrivant suivant plusieurs angles et possédant la même densité spectrale de puissance. Les résultats de cette investigation montrent que l'effet de l'incohérence du mouvement du sol sur la réponse de fondations est qualitativement similaire à l'effet du passage d'onde. Les deux effets réduisent significativement les composantes du mouvement de translation aux fréquences moyennes et élevées et développent aux fréquences moyennes une composante rotationnelle de la réponse, laquelle se réduit aux fréquences supérieures.

L'ensemble du travail présenté dans cette thèse laisse la possibilité de poursuivre cette recherche dans les deux voies suivantes

La première voie, consiste à généraliser cette étude pour le cas d'un sol visco-élastique multicouches en utilisant les fonctions de Green associées, le cas de fondations filantes flexibles en utilisant un couplage d'éléments finis et d'éléments de frontières, le cas de fondations géométriquement tridimensionnelles telles que les fondations axisymétrique ou rectangulaire, le cas de

l'interaction fondation-sol-fondation, ou le cas de l'interaction sol-fondation en intégrant un modèle cinématique de source sismique (étude de l'influence des paramètres de sources: profondeur, pendage, direction de glissement, azimuth, termes de radiation des ondes).

La deuxième voie, concerne l'évaluation de l'effet de l'incohérence du mouvement de sol sur la réponse de fondations rigides bidimensionnelles. On supposera dans ce cas que l'incohérence du mouvement du sol vient de la superposition des ondes planes stationnaires corrélées de différents types arrivant suivant plusieurs angles et ne possédant pas la même densité de puissance spectrale. Cette étude peut être aussi étendue aux cas d'ondes sphériques.



# *ANNEXES*

*"Autant j'apprends, autant je deviens bête".*

VICTOR HUGO

## Annexe 1

## PROPRIETES FONDAMENTALES DE LA FONCTION DE DIRAC

$$* \quad \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$* \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t),$$

$$* \quad \delta(t) = \delta(-t),$$

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \phi(t),$$

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) \delta'(t-\tau) d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = - \phi'(t)$$

où  $\delta'(t-\tau)$  est la dérivée de la fonction  $\delta$ ,

## Annexe 2

## FONCTIONS DE BESSEL MODIFIÉES

Equation différentielle

$$z^2 u'' + zu' - (z^2 + n^2)u = 0, \quad n \geq 0$$

Pour  $z > 0$  cette équation différentielle admet comme solutions linéairement indépendantes les fonctions de Bessel modifiées d'ordre  $n$  suivantes :  $I_n(z)$  et  $K_n(z)$ .

Représentations intégrales de Poisson  $n > 0$ 

$$I_n(z) = \frac{(z/2)^n}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1/2)} \int_{-1}^1 \operatorname{ch} zs(1 - s^2)^{n-1/2} ds,$$

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \frac{1}{\Gamma(n + 1/2)} \int_0^\infty e^{-s} s^{n-1/2} \left(1 + \frac{s}{2z}\right)^{n-1/2} ds$$

Représentation intégrales de Sommerfield pour  $K_n(z)$ 

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} \psi + n \psi} d\psi = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} \psi} \operatorname{ch}(n\psi) d\psi, \quad \operatorname{Re}(z) < 0,$$

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\infty e^{-t - \frac{z^2}{4t}} t^{-n-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Comportement asymptotique pour  $z \rightarrow +\infty$ 

$$I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} [1 + o(1/z)], \quad K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [1 + o(1/z)],$$

Relation entre les fonctions  $I_n(z)$  et  $K_n(z)$  pour différentes valeurs de  $n$

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \quad K_{-n}(z) = K_n(z)$$

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(z) - I_n(z)}{\sin n\pi}$$

### Développements en séries

$$I_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(k+n+1)},$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \{ \ln(z/2) + \gamma \} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k-1)! (z/2)^{2k-n} \\ + \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+n}}{k!(k+n)!} [\phi(k) + \phi(k+n)]$$

où  $\phi(p) = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/p$  ,  $\phi(0) = 0$

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad n > 0$$

et  $\gamma = 0,5772156\dots$  désigne la constante d'Euler.

pour  $n=0$

$$K_0(z) = -I_0(z) \{ \ln(z/2) + \gamma \} - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} (1+1/2) + \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} (1+1/2+1/3) \\ + \dots$$

### Formules de récurrence pour les fonctions de Bessel modifiées

$$I_{n+1}(z) = I_{n-1}(z) - \frac{2n}{z} I_n(z)$$

$$K_{n+1}(z) = K_{n-1}(z) - \frac{2n}{z} K_n(z)$$

$$I_n'(z) = 1/2 \{ I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z) \}$$

$$K_n'(z) = -1/2 \{ K_{n-1}(z) + K_{n+1}(z) \}$$

$$z I_n'(z) = z I_{n-1}(z) - n I_n(z)$$

$$z K_n'(z) = -z K_{n-1}(z) - n K_n(z)$$

$$z I_n'(z) = z I_{n+1}(z) + n I_n(z)$$

$$z K_n'(z) = -z K_{n+1}(z) + n K_n(z)$$

$$\frac{d}{dz} \{ z^n I_n(z) \} = z^n I_{n-1}(z)$$

$$\frac{d}{dz} \{ z^n K_n(z) \} = -z^n K_{n-1}(z)$$

$$\frac{d}{dz} \{z^{-n} I_n(z)\} = z^{-n} I_{n+1}(z) \quad \frac{d}{dz} \{z^{-n} K_n(z)\} = -z^{-n} I_{n+1}(z)$$

### Intégration analytique de $K_0$ (sr/c)

Nous avons vu dans le chapitre 3, que les intégrales apparaissant dans les équations (3.14) et (3.15) ne sont pas singulières. Leurs intégrations peuvent être effectuées comme suit

Ecrivons dans tout d'abord,  $K_0$  (sr/c) sous sa forme polynomiale [5].

On pose  $z = sr/c = i\omega r/c$  et  $Y_1 = (z/2)^2$ ;  $Y_2 = (z/3,75)^2$

$$d'où K_0(z) = (-\ln(z/2) * I_0(z)) + (P_1 + P_2 * Y_1 + P_3 * Y_1^2 + P_4 * Y_1^3 + P_5 * Y_1^4 + P_6 * Y_1^5 + P_7 * Y_1^6)$$

$$\text{avec } I_0(z) = Q_1 + Q_2 * Y_2 + Q_3 * Y_2^2 + Q_4 * Y_2^3 + Q_5 * Y_2^4 + Q_6 * Y_2^5 + Q_7 * Y_2^6$$

$$\text{en posant } a = \omega/c \text{ d'où } Y_1 = -\frac{a^2 r^2}{2^2} ; Y_2 = -\frac{a^2 r^2}{3,75^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K_0(z) = & -(\ln(a/2) + \pi i/2) * (Q_1 - Q_2 \frac{a^2 r^2}{3,75^2} + Q_3 \frac{a^4 r^4}{3,75^4} - Q_4 \frac{a^6 r^6}{3,75^6} \\ & + Q_5 \frac{a^8 r^8}{3,75^8} - Q_6 \frac{a^{10} r^{10}}{3,75^{10}} + Q_7 \frac{a^{12} r^{12}}{3,75^{12}}) - \ln(r) * (Q_1 - Q_2 \frac{a^2 r^2}{3,75^2} + Q_3 \frac{a^4 r^4}{3,75^4} \\ & - Q_4 \frac{a^6 r^6}{3,75^6} + Q_5 \frac{a^8 r^8}{3,75^8} - Q_6 \frac{a^{10} r^{10}}{3,75^{10}} + Q_7 \frac{a^{12} r^{12}}{3,75^{12}}) + P_1 - P_2 \frac{a^2 r^2}{2^2} + P_3 \frac{a^4 r^4}{2^4} \\ & - P_4 \frac{a^6 r^6}{2^6} + P_5 \frac{a^8 r^8}{2^8} - P_6 \frac{a^{10} r^{10}}{2^{10}} + P_7 \frac{a^{12} r^{12}}{2^{12}} \end{aligned}$$

Après intégration de  $K_0(z)$  on aura

$$\int_0^r K_0(sr/c) dr = (P_1 + Q_1(A - \ln(r_1) + 1))r_1 -$$

$$\left(\frac{P_2}{2^2} + \frac{Q_2}{3,75^2} (A - \ln(r_1) + \frac{1}{3})\right) \frac{r_1^3 a^2}{3} + \left(\frac{P_2}{2^2} + \frac{Q_2}{3,75^2} (A - \ln(r_1) + \frac{1}{3})\right) \frac{r_1^9 a^2}{3}$$

$$- \left(\frac{P_3}{2^4} + \frac{Q_3}{3,75^4} (A - \ln(r_1) + \frac{1}{5})\right) \frac{r_1^5 a^2}{5} + \left(\frac{P_4}{2^6} + \frac{Q_4}{3,75^6} (A - \ln(r_1) + \frac{1}{7})\right) \frac{r_1^7 a^6}{7}$$

$$- \left(\frac{P_5}{2^8} + \frac{Q_5}{3,75^8} (A - \ln(r_1) + \frac{1}{9})\right) \frac{r_1^9 a^9}{9} + \left(\frac{P_6}{2^{10}} + \frac{Q_6}{3,75^{10}} (A - \ln(r_1) + \frac{1}{11})\right) \frac{r_1^{11} a^{10}}{11}$$

$$- \left(\frac{P_7}{2^{12}} + \frac{Q_7}{3,75^{12}} (A - \ln(r_1) + \frac{1}{13})\right) \frac{r_1^{13} a^{12}}{13}$$

avec  $A = -\ln(a/2) \pm \pi/2i$  et  $r_1 < 2c/\omega$

et

$$P_1 = -0.57721566$$

$$P_2 = 0.42278420$$

$$P_3 = 0.23069756$$

$$P_4 = 0,03488590$$

$$P_5 = 0,00262698$$

$$P_6 = 0,00010750$$

$$P_7 = 0,00000740$$

$$Q_1 = 1.25331414$$

$$Q_2 = -0,07832358$$

$$Q_3 = 0,02189568$$

$$Q_4 = -0,01062446$$

$$Q_5 = 0,00587872$$

$$Q_6 = -0,00251540$$

$$Q_7 = 0,00053208$$

## *REFERENCES*

## REFERENCES

- [1] ABASCAL, R., and DOMINGUEZ, J., 1984. "Dynamic Behavior of Strip Footings on Non-homogeneous Viscoelastic Soils," Proc. of International Symposium on Dynamic Soil-Structure Interaction, Minneapolis, pp.25-35.
- [2] ABASCAL, R., and DOMINGUEZ, J., 1986. " Vibrations of Footings on Zoned Viscoelastic Soils," Journal of Eng. Mech., Vol.112, No.5, pp. 433-447.
- [3] ABE, Y., M. SUGIMOTO, N. OBKI, Y. SUZOKO, J. JIDO, Y. HAMAMIZU and T. HIROMATSU, 1984. " Dynamic Behavior of Pile Foundation During Earthquakes," Proceedings of the Eight World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, Vol.3, pp.585-592.
- [4] ABRAHAMSON, N.A., and Bolt, B.A, 1985. " The Spatial Variation of the Phasing of Seismic Strong Motion," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.75, No.5, pp.1247-1264.
- [5] ABROMOWITZ, M., and STEGUN, I.A., 1970. Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., New York, USA.
- [6] ACHENBACH, J.D., 1973. Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, Amsterdam.
- [7] AHMAD, S., and A.S.M. ISRAIL, 1988. " Dynamic Compliance of Vertically Loaded Strip Foundations in Multilayered Viscoelastic Soils," Technical Report , NCEER-88-0017, New York at Buffalo.
- [8] ANTES, H., and VON ESTORFF, O., 1989. " Dynamic Response Analysis of Rigid Foundations and of Elastic Structures by Boundary Element Procedures," Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.8, No.2., pp.68-74.
- [9] APSEL, R.J. and LUCO, J.E., 1976., " Torsional Response of Rigid Embedded Foundations," Journal of the Eng. Mech. Division, ASCE, Vol.102, No. EM6, pp.957-970.
- [10] ARGYRIS, J.H., P.C. DUNNE, and T. ANGELOPOULOS, 1973. " Dynamic Response by Large Step Integration, " Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.2, pp.185-203.
- [11] BATHE, K.J., and E.L.WILSON, 1973. " Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods," International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.1, pp.283-291.
- [12] BERRAH, K.M. 1991. Notes de cours de mécanique des milieux Continus, E.N.P.



- [13] BERRAH, K.M. 1993. Notes de cours de Vibrations Aléatoires, E.N.P.
- [14] BESKOS, D., 1987. " Boundary Element Methods in Dynamic Analysis," App. Mech. Rev., Vol.40, No.1, pp.1-23.
- [15] BIELAK, J., 1976. "Modal Analysis for Building-Soil Interaction," Journal of the Engineering Mechanics Div., ASCE, Vol.102, No.EM5, pp.771-786.
- [16] BOUCHON, M., 1978. " The Importance of the Surface or Interface P-Wave in Near-Earthquake Studies," Bull. Seism. Soc. Ame. Vol.68, pp.1293-1311.
- [17] BREBBIA, C.A., 1978. The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London.
- [18] BREBBIA, C.A., WROBEL, L.C., and TELLES. J.C.F., 1984. boundary Element Techniques. Theory and Application in Engineering, Springer-Verlag, New York, USA.
- [19] BYCROFT, G.N., 1980. " Soil-Foundation Interaction and Differential Ground Motions," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.8, pp.397-404.
- [20] CLOUGH R.W., and PENZIEN, J., 1975. "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, New York
- [21] CREPEL, J.M., 1983. " Modélisation Tridimensionnelle de l'Interaction Sol-Structure par des Eléments Finis et Infinis," Thèse de Docteur Ingénieur, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris, France.
- [22] CRUSE, T.A. and RIZO, F.L., 1968. " A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I," Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.22, pp. 244-259.
- [23] CRUSE, T.A., 1968. "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II," Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.22, pp. 341-355.
- [24] COOLEY, J.M, and J.W. TUKEY, 1965. " An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," Mathematics of Computation, Vol.19, pp.297-301.
- [25] DANGLA, P., 1990. " Couplage Eléments Finis Equations Intégrales en Elastodynamique et Interaction Sol-Structure," Rapport des Laboratoires, Série: Mécanique et Mathématiques Appliquées, MA-4, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, France.
- [26] DASGUPTA, G., 1976. " A Numerical Solution for Viscoelastic Half-Planes," Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.102, No.EM4, pp.601-612.

- [27] DELEUZE, 1967. " Réponse à un mouvement sismique d'un édifice posé sur un sol élastique," I.T.B.T.P , No.234, pp. 883-902.
- [28] DER KIUREGHIAN, A., 1980., " Structural Response to Stationary Excitation," Journal of the Eng. Mech. Division, ASCE, Vol.106, No.EM6, pp.1195-1213.
- [29] DER KIUREGHIAN, A.; 1981., " A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems," Earthquake Eng. and Struc. Dynamics, Vol.9, pp.419-435.
- [30] DEZFULIAN, H., and H.B. SEED, 1971." Response of Non Uniform Soil Deposits to Travelling Seismic Waves," Journal of the Soil Mech. and Foundations Div., ASCE, Vol.97, No.SM1, pp.27-46.
- [31] DOMINGUEZ, J., 1978. " Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations " Report No.R78-20, Dept. of Civil Eng., M.I.T, Cambridge, USA.
- [32] DOMINGUEZ,J., 1978. "Response of Embedded Foundations to Travelling Waves," Report No.R78.24, Dept. of Civil Eng., MIT, Cambridge, USA.
- [33] DOMINGUEZ,J., 1984. "Application of Boundary Element Methods in Elastodynamics," in BETECH 85, C.A.Brebbia and B.J.Nage, Eds Springer-Verlag, Berlin, pp.105-127.
- [34] DOMINGUEZ, J., and R. ABASCAL, 1989. " Seismic Response of Strip Footings on Zoned Viscoelastic Soils," Journal of Eng. Mechanics, Vol.115, No.5, pp. 913-934.
- [35] ETTOUNEY, M.M and J.M. ROESSET, 1976." Transmitting Boundaries: A Comparaison," Report No.76-8, Dept. of Civil Eng., M.I.T, Cambridge, USA.
- [36] FU, C.S., and Z.D. YU, 1984. " Analysis of Dynamic Behavior Including the Effects of an Adjacent Building," Proceedings of the Eighth World Conference on Earthquake Engineering, Sanfrancisco, Vol.3, pp.833-840.
- [37] GAZETAS, G., 1983. " Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art," International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.2, No.1, pp.2-42.
- [38] GAZETAS, G.C., and J.M. ROESSET, 1976."Forced Vibrations of Srip Footings on Layred Soils,"Proceedings of National Structural Engineering, Conference, ASCE. Madison, Wisconsin, Vol.1, pp.115-131.
- [39] GHAFFAR, A.M., and TRIFUNAC, M.D., 1977. " Antiplane Dynamic Soil-Bridge Interaction for Incident Plane SH-Waves," Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.5, pp.107-129.
- [40] HADID, M., and BERRAH, M.K., 1995. "Boundary Element Method Applied to Elastodynamic Problems: Application to Soil-Foundation Interaction," Algerian Journal of Technology, Ecole Nationale Polytechnique, Serie A, Vol.11, No.1, (à para\*tre).

- [41] HADID, M., et BERRAH, M.K., 1995. "Evaluation des Impédances dynamiques de fondations filantes par la méthode des intégrales aux frontières," Algérie Equipement, Ecole Nationale des Travaux Publics, (à paraître).
- [42] HADID, M., et BERRAH, M.K., 1996. "Analyse de la réponse sismique de Fondations Filantes Sollicitées par l'Incidence des Ondes planes de types P, SV et de Rayleigh en utilisant la méthode des équations intégrales aux frontières," Algérie Equipement, Ecole Nationale des Travaux Publics, (à paraître).
- [43] HADJLAN, A.H., and LUCO, J.E., 1977. "On the Importance of Layered on Impedance Functions," Proceedings of the sixth World Conference on Earthquake Engineering - New Delhi.
- [44] HARDIN, B.O., and DRNEVICH, V.P., 1972. "Shear Modulus and Damping in Soils," J. of Soil Mech. and Foundation, ASCE, Vol.98, No.SM6, pp.603-624, and No.SM7, pp.667-692.
- [45] HARICHANDRAN, R.S., 1987. "Stochastic Analysis of Rigid Foundation Filtering," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.15, pp.889-899.
- [46] HARICHANDRAN, R.S., and VANMARCKE, E.H., 1986. "Stochastic Variation of Earthquake Ground Motion in Space and Time," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.112, No.2, pp.154-174.
- [47] HOSHIYA, M., and ISHII, K., 1983. "Evaluation of Kinematic Interaction of Soil Foundation Systems by a Stochastic Model," Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.2, No.3, pp.128-134.
- [48] HOUSNER, G.W., 1957. "Interaction of Building and Ground During an Earthquake," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.47, No.3, pp.179-186.
- [49] IDRIS, I.M., and K.SADIGH, 1976. "Seismic SSI of Nuclear Power Plant Structures," Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol.102, No.GT7, pp. 663-682.
- [50] IDRIS, I.M., and H.B. SEED, 1968. "Seismic Response of Horizontal Soil Layers," Journal of the Soil Mech. and Foundations Div., ASCE, Vol.94, No.SM4, pp. 1003-1031.
- [51] IGUSHI, M., 1982. "An Approximate Analysis of Input Motions for Rigid Embedded Foundations," Trans. of Architectural Inst. of Japan, No.315, May, pp.61-75.
- [52] IGUSHI, M., 1984. "Earthquake Response of Embedded Cylindrical Foundations to SH and SV Waves," Proceedings of the Proceedings World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, Vol.3, pp.1081-1088.

- [53] IGUSHI, M., and J.E. LUCO, 1981. " Dynamic Response of Flexible Rectangular Foundations on Elastic Half-Space," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.9, No.239, pp.239-249.
- [54] JENNINGS, P.C., and J.BIELAK, 1973. " Dynamics of Building-soil Interaction," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.63, No.1, pp.9-49.
- [55] KARABALIS, D.L., and BESKOS, D.E., 1984. " Dynamic Response of 3D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method," Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol.12, pp.73-94.
- [56] KAUSEL, E., Lecture notes for the course Advanced Structural Dynamics, M.I.T., Spring 1988.
- [57] KAUSEL, E., and PAIS, A., 1987. " Stochastic Deconvolution of Earthquake Motions," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.113, No.2, pp.266-277.
- [58] KAUSEL, E., and ROESSET, J.M., 1975. " Dynamic Stiffness of Circular Foundations," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.101, No.EM6, pp.771--785.
- [59] KAUSEL, E., and TASSOULS, J.L. 1981. " Transmitting Boundaries: a Closed Form Comparaision," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.71, pp.143-159.
- [60] KAUSEL, E., ROESSET, J.M., and CHRISTIAN, J.T., 1977. "Non Linear Behavior in Soil-Structure Interaction," Journal of Geot. Eng. Div., ASCE, Vol.102, No.GT11, pp.1159-1170.
- [61] KAUSEL, E., J.M. ROESSET, and G. WAAS, 1975. " Dynamic Analysis of Footings on Layered Media, " Journal of the Eng. Mech. Division, ASCE, Vol.101, No. EM5, pp. 679-693.
- [62] KOBORI, T., MINAI, R. and SHINOZAKI, Y., 1973. " Vibration of a Circular Disk on an Elastic Half-Space Subjected to Plane Waves," Theoretical and Applied Mechanics, Vol.21, pp.109-119, Univ. of Tokyo Press.
- [63] LEE, T.H., and D.A. WESLEY, 1984., "A Three-Dimensional Non linear Soil-Structure Interaction Analysis Considering the Elasto-Plastic Soil Behavior," Proceedings of the Eight World Conference on Earthquake Engineerig , San Fransisco, Vol.3, pp.953-960.
- [64] LIU, S.C., and L.W.FAGEL, 1971. "Earthquake Interaction by Fast Fourier Transform," Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.29, No.4, pp. 1223-1237.
- [65] LOH, C-H., 1985. " Analysis of the Spatial Variation of Seismic Waves and Ground Movements from Smart 1 Array Data," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.13, pp.561-581.
- [66] LUCO, J.E., 1976. " Torsional Response of Structures for SH Waves: The Case of Hemispherical Foundations," Bull. Seism. Soc. Amer., Vol.66, No.1, pp.109-123.

- [67] LUCO, J.E., and MITA, A., 1987. " Response of a Circular Foundation on a Uniform Half-Space to Elastic Waves," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.15, pp.105-118.
- [68] LUCO, J.E., and MITA, A., 1987. " Response of a Circular Foundation to Spatially Random Ground Motion," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.113, No.1, pp.1-15.
- [69] LUCO, J.E., and R.A. WESTMAN, 1971. " Dynamic Response of Circular Footings," Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.97, No.EM5, pp. 1381-1395.
- [70] LUCO, J.E., and WESTMANN, R.A., 1971." Dynamic Response of Rigid Footing Bonded to an Elastic Halfspace, " Journal of Applied Mech., ASME, Vol.39, pp.527-534.
- [71] LUCO, J.E., and WONG, H.L., 1986. " Response of Rigid Foundation to a Spatially Random Ground Motion," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.14, pp.891-908.
- [72] LYSMER, J., 1970." Lumped Mass Method for Rayleigh Waves," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.60, No.1, pp. 89-104.
- [73] LYSMER, J., 1978." Analytical Procedures in Soil Dynamics: State of the Art, " ASCE Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Pasadena, California.
- [74] LYSMER, J., 1979. " Finite Element Analysis of Soil-Structure Interaction, " Appendix A to " Analysis of Soil-Structure Interaction Effects for Nuclear Power Plants," Report by the Ad Hoc Group on Soil Structure Interaction of the Committee on Nuclear Structures and Materials of the Structural Division of ASCE.
- [75] LYSMER, J., and KUHLEMEYER, R.L., 1969." Finite Dynamic Model for Infinite Media, " Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.95, No.EM4, pp.859-877.
- [76] LYSMER, J. and RICHART, F.E., J.R., " Dynamic Response of Footings to Vertical Loading, " Journal of Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol 92, No. SM1, 1966, pp. 65-91.
- [77] LYSMER, J., and G. WAAS, 1972." Shear Waves in Plane Infinite Structures," J.of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.98, No.EM1, pp. 85-105.
- [78] LYSMER, J., H.B. SEED, and P.B. SCHNABEL, 1971. " Influence of Base Rock Characteristics on Ground Response, " Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.61, No.5, pp.1213-1231.

- [79] LYSMER, J., T. UDAKA, C. TSAI, and H.B. SEED, 1975. " Flush : A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems," Earthquake Eng. Research Center Report No.R75-30, University of California, Berkeley, USA.
- [80] MAHAPATRA, R.C, and S.P. DASGUPTA, 1990. " Elasto-Plastic Modelling of Plane Geomechanics Problems," Computers and Structures, Vol.37. NO.4, pp. 481-502.
- [81] MIYAHARA, F., and J.G. ERGATOUDIS, 1976. " Matrix Analysis of Structure-Foundation Interaction," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.102, No.ST1, pp.251-265.
- [82] MORGAN, J.R., HALL, W.J., and NEWMARK, N.M., 1983. " Seismic Response Arising from travelling Waves," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.109, No.4, pp.1010-1027.
- [83] NEWMARK, N.M., 1959. " A Method of Computation for Structural Dynamics," Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.85, No.EM3, pp.67-94.
- [84] NEWMARK, N.M., 1969. " Torsion of Symmetrical Buildings," Proceedings of the Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, A-3, pp.19-32.
- [85] NOVAK, M., and BEREDUGO, Y., " The Effect of Embedment Footing Vibrations,"
- [86] PAIS, A., and KAUSEL, E., 1989. "On Rigid Foundations Subjected to Seismic Waves," Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol.18, pp.475-489.
- [87] PAIS, A., and KAUSEL, E., 1990. " Stochastic Response of Rigid Foundations," Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol.19, pp.611-622.
- [88] PECKER, A., 1984. " Interaction Sol-Structure," Chapitre VII, Dynamique des sols, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France.
- [89] PREMONT, A., 1990: Vibrations Aléatoires et Analyse Spectrale, Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Lausanne, Suisse.
- [90] RAINER, J.H., 1971. " Structure-Ground Interaction in Earthquakes," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.97, No.EM5, pp.1431-1451.
- [91] RAY, D., and JHAVERI, D.P., 1978. "Effective Seismic Input Through Rigid Foundation Filtering," Nuclear Eng. and Design, 45, pp.185-195.
- [92] ROESSET, J.M., R.V. WHITMAN, and R. DOBRY, 1973. " Modal Analysis for Structures with Foundation Interaction," Journal Struct. Div., ASCE, Vol.99, No.ST3, pp.399-416.

- [93] ROSENBLUETH, E., and I. HERRERA, 1964. " On a Kind of Hysteretic Damping," Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.90, No.EM4.
- [94] SCANLAN, R.H., 1976. " Seismic Wave Effects on Soil-Structure Interaction," Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol.4, pp.379-388.
- [95] SCHNABEL, P., H.B. SEED, and J. LYSMER, 1972. " Modification of Seismograph Records for Effects of Local Soil Conditions," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.62, No.6, pp.1649-1664.
- [96] SEED, H.B. and I.M. IDRIS, 1969. "Influence of Soil Conditions on Ground Motions During Earthquakes," Journal of the Soil Mech. and Foundations Div., ASCE, Vol.95, No.SM1, pp. 99-137.
- [97] SEED, H.B., J. LYSMER, and R. HWANG, 1975. " Soil-Structure Interaction Analysis for Seismic Response," Journal Geot. Eng. Div., ASCE, Vol.101, No.GT5, pp.439-457.
- [98] SPYRAKOS, C.C, and BESKOS, D.E., 1986. " Dynamic Response of Rigid Strip Foundation by Time domain Boundary Element Method," International Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol.23, pp. 1547-1565.
- [99] SPYRAKOS, C.C, and BESKOS, D.E., 1986. " Dynamic Response of Flexible Strip Foundation by Boundary and Finite Element," Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.5, pp.84-96.
- [100] THAU, S.A, A. UMEK , and R. ROSTAMIAM, 1974. "Seismic Motion of Buildings with Buried Foundations," Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.100, No.EM5, pp.919-933.
- [101] TRIFUNAC, M.D., 1972. " Interaction of a Shear Wall with the Soil for Incident Plane Waves," Bull. Seism. Soc. of America, Vol.62, No.1, pp-63-83.
- [102] TASI, N-C, 1974. "Modal Damping for Soil Structure Interaction," Journal of the Eng. Mechanics Div., ASCE, Vol.100, No.EM2, pp.323-341.
- [103] VAISH, A.K., and A.K.CHOPRA, 1974. " Earthquake Finite Element Analysis of Structure-Foundation Systems," Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.100, No.EM6, pp.1101-1116.
- [104] VALERA, J.E., H.B. SEED, C.F. TSAI, and J.LYSMER, 1977. " Seismic Soil-Structure Interaction Effects at Humboldt Bay Power Plant," Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol.103, No.GT10, pp.1143-1161.
- [105] VANMARCKE, E.H., 1972., " Properties of Spectral Moments with Applications to Random Vibration," Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.98, No.EM2, pp.425-446.
- [106] VANMARCKE, E.H., 1975., " On the Distribution of the First-Passage Time for Normal Stationary Random Processes," Journal of Applied Mech., Vol.42, pp.215-220.

- [107] VANMARCKE, E.H. 1983. Random Fields: Analysis and Synthesis, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- [108] VELETSOS, A.S., and MEEK, J.W., 1974. " Dynamic Behavior of Building-Foundation Systems," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.3, pp.121-138.
- [109] VELETSOS, A.S., and PRASAD, A.M., 1989. " Seismic Interaction of Structures and Soils: Stochastic Approach," Journal of Struct. Eng., Vol.115, No.4, pp.935-956.
- [110] VELETSOS, A.S., and VERBIC, B., 1973." Vibration of Viscoelastic Foundations, " Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.2, pp.87-102.
- [111] VELETSOS A.S, and VERBIC, B., 1974." Basic Response Functions for Elastic Foundations," Journal of the Engineering Mechanics Div., ASCE, Vol.100, No.EM2, pp.183-202.
- [112] VELETSOS, A.S., and WEI, Y.T.,1971. " Lateral and Rocking Vibration of Footings," Journal of the Soil Mech and Foundation Div.,ASCE, Vol.97. No.SM9, pp. 1227-1248.
- [113] VON ESTORFF, O., PAIS, A., and KAUSEL, E., 1989. " Some Observations on Time Domain and Frequency Domain Boundary Elements," Int. J. for Num. Meth. in Engineering.
- [114] WERNER, S.D., LEE, L.C., WONG, H.L., and TRIFUNAC, M.D., 1979. " Structural Response to Travelling Seismic Waves," Journal of Structural Division, ASCE, Vol.105, No.12, pp.2547-2564.
- [115] WHITMAN, R.V., 1982. " Eighteen Years of Soil-Structure Interaction," Structural Engineering: Research, Education and Practice, Proceeding of the Symposium held at M.I.T., pp.16-17.
- [116] WHITMAN, R.V., J.N.PROTONOTARRIOS, and M.F.NELSON, 1973." Case Study of Dynamics Soil-Structure Interaction, " Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol.99, No.SM11, pp.997-1009.
- [117] WOLF, J. P., 1985. "Dynamic Soil-Structure Interaction," Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, USA.
- [118] WONG, H.L., and J.E. LUCO, 1976. " Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape, " Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.4, pp.579-587.
- [119] WONG, H.L. and LUCO, J.E., 1978. "Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely Incident Seismic Waves," Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol.6, pp.3-16.
- [120] WONG, H.L., and J.E. LUCO, 1986." Dynamic Interaction Between Rigid Foundations in a Layered Half Space," Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.3, pp.149-158.



- [121] WONG, H.L., and TRIFUNAC, M.D., 1974. "Interaction of a Shear Wall with the Soil for Incident Plane SH-Waves: Elliptical Rigid Foundation," Bull. Seism. Soc. Amer., Vol.64, pp.1825-1842.
- [122] YOSHIDA, K., T. SATO, and H. KAWASE, 1984. "Dynamic Response of Foundations Subjected to Various Types of Seismic Waves," Proceedings of the Eighth World Conference on Earthquake Engineering San Francisco, Vol.3, pp.745-752.