

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



*Ecole Nationale Polytechnique*  
*Département de Génie Mécanique*

*Projet de Fin d'Etudes*

*Pour l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat*  
*en Génie Mécanique*

*Thème*

*Etude de Mode Mixte de Rupture I et II :*  
*Approche par la Méthode des*  
*Discontinuités de Déplacements*

*Etudié par :*

*SELMi Farouk*

*Proposé et dirigé par :*

*BELKACEMI Y*

*Juin 2008*

# ملخص

الهدف من هذا العمل هو تحديد معاملي شدة الضغط من أجل الطراز المزدوج للتشقق I و II بطريقة عدم استمرار الانتقالات.

قمنا في بداية الأمر بالتذكير بأهم التعاريف الخاصة بميكانيك التشققات الخطية و قدمنا الصياغة العددية لطريقة عدم استمرار الانتقالات، بعد ذلك أثبتنا أن هذه الطريقة لا تعطي نتائج جيدة بجوار طرفه الشق لأن العنصر طرفه شق ثابت يعطي عدم استمرارية انتقال تير معدومة عند نهاية الشق، لأجل ذلك اقترحنا عنصر طرفه شق على شكل قطع مكافئ، و في الأخير تحققنا من خلال بعض الأمثلة أن هذا العنصر يعطي نتائج جيدة.

**كلمات مفتاحية :** ميكانيك التشققات، الشق، طريقة عدم استمرار الانتقالات، معامل شدة الضغط، عنصر طرفه شق.

## Résumé

*Le but de ce travail est le détermination des facteurs d'intensité de contrainte pour le mode I, II et mixte I + II de rupture par la méthode des discontinuités de déplacements.*

*Un code de calculé basé sur la méthode des discontinuités des déplacements à été construit. La première version du programme utilise des éléments constants. Les résultats sont donc influencés par le fait que l'élément pose un problème d'incompatibilité du champ de déplacement pour le dernier élément représentant la tête de fissure . Un élément parabolique ou élément bout de fissure est couplé avec l'élément constant pour respecter la continuité de déplacement en bout de fissure. Une technique a consisté à faire varier la longueur de l'élément parabolique pour améliorer les résultats relatifs au calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode I et II. Les exemples traités de milieux fissurés de différentes configurations confirment une diminution significative des erreurs.*

**Mots clés :** mécanique de la rupture, fissure, méthode des discontinuités de déplacements, facteurs d'intensité de contrainte, élément bout de fissure.

## ABSTRACT

*The aim of this study is to explore and determine the stress intensity factors for the mixed mode of fracture using the displacement discontinuity method.*

*The important definitions concerning the linear fracture mechanics and the numerical formulation of the displacement discontinuities method are presented. The constant displacement discontinuity element doesn't respect the continuity of the displacement at crack type a special element which can be called as degenerated or hybrid or parabolic element is presented. The results with the presence of this element are presented. The results of the stress intensity factors on mixed modes are carried out using various lengths of the parabolic element. The results are presented and discussed using several of fractured practical simples.*

**Key words:** fracture mechanics, crack, displacement discontinuity method, stress intensity factor, crack tip element.

# *Dédicaces*

*Je dédie ce travail*

*A mes parents et ma femme*

*A mes frères et sœurs*

*A tout ma famille et mes amis*

# *Remerciement*

*En premier lieu je remercie ALLAH qui m'a aidé à compléter ce travail*

*Je tiens particulièrement à exprimer mes remerciements et mes profonds respects à monsieur BELKACEMI Y qui a proposé et dirigé ce travail, pour son suivi et leurs conseils*

*Je remercie également l'ensemble des membres du jury qui on accepter d'examiner mon travail*

*Enfin je remercie tous qui on participés dans ce travail*

# Sommaire

<i>Introduction Générale</i> .....	1
------------------------------------	---

---

## *Chapitre I*                      *Généralités sur la mécanique de la rupture*

---

<i>I.1. Introduction</i> .....	5
<i>I-2 Modes fondamentaux de rupture</i> .....	5
<i>I-3 Approche Locale</i> .....	6
I-3-1 Champ de contrainte et de déplacement au voisinage du front de fissure.	6
I-3-2 Facteurs d'intensité des contraintes.....	9
I-3-2-1 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes.....	9
I-3-2-2 Principe de superposition.....	10
<i>I-4 Approche Globale ou Energétique</i> .....	10
I-4-1 Le taux de restitution d'énergie.....	10
I-4-2 Calcule de $G$ en fonction des champs de déplacements et de contraintes sur les frontières du domaine fissuré.....	11
I-4-3 relation entre $G$ et $K$ .....	12
<i>I-5 Mode mixte de rupture</i> .....	12
I-5-1 Introduction.....	12
I-5-2 Champ de contrainte et déplacement.....	13
I-5-3 Le taux de restitution d'énergie.....	13
I-5-4 Propagation d'une fissure.....	13
I-5-4-1 Taux de restitution d'énergie maximale.....	14
I-5-4-2 Contrainte tangentielle maximale.....	14

<i>I-6 Conclusion.....</i>	15
----------------------------	----

---

---

<b><i>Chapitre II</i></b>	<b><i>La méthode des éléments de frontières</i></b>
---------------------------	---

---

---

<i>II-1 Introduction.....</i>	17
<i>II-2 Problème intérieur / problème extérieur.....</i>	17
<i>II-3 Méthode Directe.....</i>	18
II-3-1 Théorème de réciprocité et ces conséquences.....	18
II-3-2 Coefficients d'influence.....	19
<i>II-4 méthode des discontinuités de déplacements.....</i>	21
II-4-1 Discontinuité de déplacement dans un solide infini.....	21
II-4-2 Procédure numérique.....	24
II-4-3 Coefficients d'influence.....	25
II-4-4 Construction de système d'équations.....	26
II-4-5 Conditions de symétrie.....	27
<i>II-5 Conclusion.....</i>	28

---

---

<b><i>Chapitre III</i></b>	<b><i>Elément bout de fissure et application de la MDD aux milieux fissurés</i></b>
----------------------------	---

---

---

<i>III-1 Introduction.....</i>	30
<i>III-2 Problème de fissure sous pression.....</i>	30
<i>III-3 Elément bout de fissure.....</i>	32
III-3-1 Introduction.....	32
III-3-2 Elément bout de fissure non constant.....	32
III-3-3 Elément parabolique adopté.....	33
III-3-4 Généralisation.....	34
<i>III-4 Calcule numérique de facteur d'intensité de contraintes.....</i>	36

<i>III-5 Effet de la longueur de l'élément bout de fissure.....</i>	37
<i>III-6 Structure de programme.....</i>	37

---

<b><i>Chapitre IV</i></b>	<b><i>Exemples, résultats et interprétations</i></b>
---------------------------	--

---

<i>IV-1 introduction.....</i>	44
<i>IV-2 Exemples des domaines continus.....</i>	44
IV-2-1 Plaque percées soumise à une traction bi axiale.....	44
IV-2-2 Cylindre épais sous pression .....	45
<i>IV-3 Choix de nombre d'éléments pour la discrétisation de la fissure .....</i>	46
<i>IV-4 Fissure inclinée dans un plan infini.....</i>	47
<i>IV-5 Fissure inclinée dans un plan infini sous une charge bi axiale.....</i>	48
<i>IV-6 Fissure dans un domaine semi-infini.....</i>	50
<i>IV-7 Fissure débouchant dans une barre sollicitée en quatre points.....</i>	53
<i>IV-8 Fissure émanant d'un trou.....</i>	55
<i>IV-9 Fissure dans une plaque circulaire radialement tendu.....</i>	57
<i>IV-10 Deux fissures croisées dans un domaine infini.....</i>	58
<i>IV-11 fissure débouchant dans une plaque.....</i>	61
<i>IV-12 Conclusion.....</i>	62
<b><i>Conclusion Générale.....</i></b>	64
<b><i>Références bibliographiques.....</i></b>	65

# Sommaire des figures

<b>Fig.1</b>	<i>Méthodes de discrétisation.....</i>	2
<b>Fig.1.1</b>	<i>Modes fondamentaux de rupture.....</i>	6
<b>Fig.1.2</b>	<i>Champ de contraintes au voisinage du front de la fissure.....</i>	7
<b>Fig.1.3</b>	<i>élément géométrique pour le calcul de facteur d'intensité des contraintes.....</i>	9
<b>Fig.1.4</b>	<i>Exemple de superposition.....</i>	10
<b>Fig.1.5</b>	<i>taux de restitution d'énergie.....</i>	10
<b>Fig.1.6</b>	<i>Fissure inclinée dans une plaque en traction.....</i>	12
<b>Fig.1.7</b>	<i>Propagation d'une fissure inclinée selon un angle <math>\alpha</math> par rapport au plan de la fissure.....</i>	13
<b>Fig.2.1</b>	<i>Problème intérieur / problème extérieur.....</i>	18
<b>Fig.2.2</b>	<i>Définition des coordonnées locales.....</i>	19
<b>Fig.2.3</b>	<i>Discontinuité de déplacement.....</i>	21
<b>Fig.2.4</b>	<i>Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire.....</i>	23
<b>Fig.2.5</b>	<i>Représentation d'une courbe divisée en <math>N</math> discontinuités de déplacements.....</i>	24
<b>Fig.2.6</b>	<i>symétrie par rapport à la ligne <math>y = y^*</math>.....</i>	27
<b>Fig.2.7</b>	<i>symétrie par rapport à la ligne <math>x = x^*</math> et <math>y = y^*</math>.....</i>	28
<b>Fig.3.1</b>	<i>Fissure sous pression.....</i>	30
<b>Fig.3.2</b>	<i>Distribution de discontinuité de déplacement.....</i>	31
<b>Fig.3.3</b>	<i>Représentation de l'élément parabolique.....</i>	33
<b>Fig.3.4</b>	<i>Distribution de discontinuité de déplacement.....</i>	34

<b>Fig.4.1</b>	<i>Plaque percées soumise à une traction bi axiale.....</i>	44
<b>Fig.4.2</b>	<i>Champ de contraintes pour la plaque percée.....</i>	45
<b>Fig.4.3</b>	<i>Cylindre épais sous pression.....</i>	45
<b>Fig.4.4</b>	<i>Champ de contraintes pour un cylindre épais sous pression.....</i>	45
<b>Fig.4.5</b>	<i>Le facteur d'intensité de contrainte en fonction de nombre d'éléments <math>N</math>.....</i>	46
<b>Fig.4.6</b>	<i>Fissure inclinée dans un domaine infini.....</i>	47
<b>Fig.4.7</b>	<i>Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de l'inclinaison de la fissure.....</i>	47
<b>Fig.4.8</b>	<i>Fissure inclinée sous une charge bi axiale.....</i>	49
<b>Fig.4.9</b>	<i>Fissure débouchant dans un domaine semi infini .....</i>	50
<b>Fig.4.10</b>	<i>Fissure débouchant dans une plaque finie.....</i>	51
<b>Fig.4.11</b>	<i>Comparaison entre les <math>K_I^*</math> analytique et numérique pour différents valeurs de <math>W/a</math>.....</i>	52
<b>Fig.4.12</b>	<i>Fissure débouchant dans une barre sollicitée en quatre points.....</i>	53
<b>Fig.4.13</b>	<i>Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de <math>s</math>.....</i>	54
<b>Fig.4.14</b>	<i>fissure émanant d'un trou.....</i>	55
<b>Fig.4.15</b>	<i>Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de <math>a/r</math> et de <math>\theta</math>.....</i>	56
<b>Fig.4.16</b>	<i>Fissure dans une plaque circulaire radialement tendue.....</i>	57
<b>Fig.4.17</b>	<i>Variation de <math>K_I^*</math> en fonction de <math>a/r</math> pour <math>s = 0</math>.....</i>	57
<b>Fig.4.18</b>	<i>fissures croisées dans un domaine infini.....</i>	59
<b>Fig.4.19</b>	<i>Facteurs d'intensité de contrainte fonction de <math>\theta</math> pour une pression uni axiale.....</i>	60
<b>Fig.4.20</b>	<i>fissure débouchant dans une plaque finie.....</i>	61
<b>Fig.4.21</b>	<i>Facteurs d'intensité de contrainte en fonction de <math>y</math>.....</i>	62

# Sommaire des tableaux

<b>Tab.3.1</b>	<i>L'erreur sur les facteurs d'intensité de contraintes en fonction de <math>r_a</math>.....</i>	37
<b>Tab.4.1</b>	<i>Erreur sur le champ de contraintes pour le cylindre épais.....</i>	46
<b>Tab.4.2</b>	<i>Comparaison entre la MDD et la MEF.....</i>	48
<b>Tab.4.3</b>	<i>Facteurs d'intensité de contraintes obtenus analytiquement.....</i>	49
<b>Tab.4.4</b>	<i>Facteurs d'intensité de contraintes obtenus numériquement.....</i>	50
<b>Tab.4.5</b>	<i>Comparaison entre les <math>KI^*</math> analytique et numérique pour différents valeurs de <math>W/a</math>.....</i>	52
<b>Tab.4.6</b>	<i>Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de <math>s</math>.....</i>	54
<b>Tab.4.8</b>	<i>Nombre de division de cercle en fonction de rapport <math>a/r</math>.....</i>	55
<b>Tab.4.9</b>	<i>Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de <math>a/r</math> pour <math>\theta = 0</math>....</i>	55
<b>Tab.4.10</b>	<i>Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de <math>a/r</math> et de <math>\theta</math>.....</i>	56
<b>Tab.4.11</b>	<i>Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de <math>a/r</math> et <math>s/r</math>.....</i>	58
<b>Tab.4.12</b>	<i>Facteur d'intensité de contraintes pour <math>\theta = 0</math>.....</i>	59
<b>Tab.4.13</b>	<i>Facteurs d'intensité de contrainte fonction de <math>\theta</math> pour une traction simple.....</i>	60
<b>Tab.4.14</b>	<i>comparaison des facteurs d'intensité de contraintes.....</i>	61

## *Notations*

<b>Symbole</b>	<b>Description</b>	<b>Unité</b>
$\sigma_{ij}$	Champ de contrainte	N / mm <sup>2</sup>
$u_i$	Champ de déplacement	mm
$K_I$	Facteur d'intensité de contrainte en mode I	Mpa $\sqrt{m}$
$K_{II}$	Facteur d'intensité de contrainte en mode II	Mpa $\sqrt{m}$
$K_{III}$	Facteur d'intensité de contrainte en mode III	Mpa $\sqrt{m}$
$r$	Rayon au voisinage de la pointe de fissure	mm
$E$	Module d'élasticité	MPa
$\nu$	Coefficient de poisson	–
$G$	Taux de restitution d'énergie	kJ / mm <sup>2</sup>
$W_p$	Energie potentielle totale	kJ
$da$	Élément de longueur de la fissure	mm
$dA$	Incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure	mm <sup>2</sup>
$W_C$	Energie cinétique	kJ
$2A\gamma_s$	Energie de surface	kJ
$G_C$	Energie critique de déformation élastique par unité de surface de la fissure	kJ / mm
$\Omega_T$	Frontière où on impose de forces surfaciques	–
$\Omega_U$	Partie complémentaire de $\Omega_T$	–
$T_i$	Forces surfaciques	N
$\varepsilon_{ij}$	Champ des déformations	mm
$W(\varepsilon)$	Energie de déformation	kJ

$\mu$	Module de cisaillement	MPa
$\beta$	Angle d'inclinaison de la fissure	°
$\alpha$	Direction de propagation de la fissure	°
$k_i(\alpha)$	Facteurs d'intensité de contraintes locaux à l'extrémité de la déviation	$Mpa\sqrt{m}$
$G_{max}$	Le maximum de taux de restitution d'énergie	$kJ / mm^2$
$\sigma_{\theta\theta max}$	Contrainte normale maximale	$N / mm^2$
$K_{IC}$	Facteur d'intensité de contrainte critique	$Mpa\sqrt{m}$
$N$	Nombre des segments	–
$F_n$	Force normale	N
$F_s$	Force tangentielle	N
$B_{ij}, A_{ij}$	Coefficients d'influence	
$D_i$	Discontinuité de déplacement	mm
$[u_i]$	Ouverture de la fissure	mm
$[u_y]^*$	Ouverture de la fissure normalisée	–
$r_a$	Rapport entre la longueur de l'élément parabolique et constant	–
$(P_{ij})_0$	Chargement à l'infini	$N / mm^2$
$asym$	Axe de symétrie	–
$xsym$	Position de l'abscisse de l'axe de symétrie	–
$ysym$	Position de l'ordonnée de l'axe de symétrie	–
$nedc$	Nombre d'éléments qui discrétisent le contour	–
$nds$	Nombre de division de chaque élément	–
$xds$	L'abscisse de débit d'élément	–
$yds$	L'ordonnée de débit d'élément	–

$x_{fs}$	L'abscisse de fin d'élément	–
$y_{fs}$	L'ordonnée de fin d'élément	–
$tcl$	Type de conditions aux limites	–
$cls$	Conditions aux limites tangentielles	
$sln$	Conditions aux limites normales	
$nbf$	Nombre des bouts de fissures	–
$nsbf(i)$	Le numéro qui définit le bout de fissure $i$	–
$s_i$	Champs de contrainte normalisés	–
$K_i^*$	Facteurs d'intensité de contraintes normalisés	–

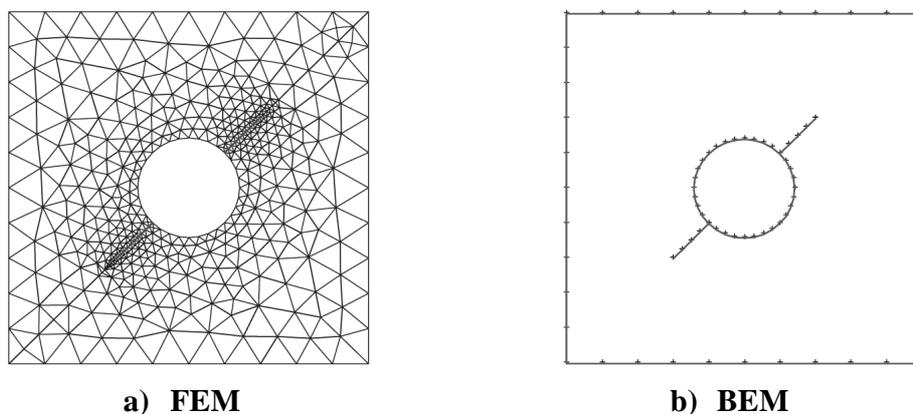
# ***Introduction générale***

---

La théorie de la fissuration décrit le comportement des solides ou structures présentant des discontinuités macroscopiques à l'échelle de la structure, discontinuités linéiques dans les milieux considérés comme bidimensionnels, discontinuités surfaciques dans les milieux tridimensionnels. La théorie de la fissuration permet de prévoir l'évolution de la fissure microscopique jusqu'à la rupture complète de la structure. Des règles scientifiques ont été conçues pour caractériser ses fissures et leurs effets pour prédire quand elles deviendraient dangereuses, cette science est appelée mécanique de la rupture.

Le premier écueil dans l'utilisation des concepts de mécanique de la rupture réside dans la détermination de facteur d'intensité de contraintes traduisant la singularité du champ de contrainte au voisinage du fond de fissure. Les solutions exactes au problème pour la détermination des facteurs d'intensité de contrainte sont en nombre très limitées. Par ailleurs, il est rare qu'une situation réelle, où géométrie et chargement sont souvent complexes, soit résolvable analytiquement. Cependant, il est des situations où l'on ne peut pas se contenter de valeurs approchées, et où il est alors nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques [1].

Les principales méthodes numériques qui sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de mécanique de la rupture sont : la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontière (BEM) [2]. La méthode des éléments finis consiste en la subdivision de milieu continu en un nombre fini de parties (éléments finis) [3]. La méthode des éléments de frontière se limite à une subdivision de la frontière en éléments joints les unes aux autres [4].



**Fig.1 Méthodes de discrétisation**

La méthode des éléments de frontière offre des avantages certains dans des configurations de problèmes dont les domaines sont infini et dans les problèmes de propagation des fissures. La méthode des éléments finis (FEM) nécessite un remaillage après chaque changement durant la propagation de fissure, tandis pour la méthode des éléments de frontière (BEM), la propagation de fissure se fait par addition d'éléments) [5]. Néanmoins, La méthode des éléments finis étendu (extended finite element method) [38], prend en compte les problèmes de mécanique de la rupture.

La méthode des éléments de frontière a été développée suivant deux approches l'une d'elles est d'origine mathématique basée sur des théorèmes classiques de la théorie du potentiel d'où le nom de méthode directe [6]. L'autre approche est physique et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités, placées tout au long du contour discrétisé en segments de droites, et de là, calculer les paramètres aux limites désirés, cette méthode est connue sous le nom de méthode indirecte.

La méthode des contraintes fictives (méthode de discontinuité de contraintes) [7], et la méthode des discontinuités de déplacements (MDD) représentent deux formulations indirectes qui existent [8].

L'objectif du présent travail est la mise au point d'un code de calcul basé sur la méthode des discontinuités de déplacements pour l'étude de mode mixte de rupture dans le plan. Il s'agit du mode d'ouverture ou traction I, mode de cisaillement II et de mode mixte. Nous avons choisi la méthode des discontinuités de déplacements car celle-ci, à travers le calcul des discontinuités de déplacements normales et tangentielles permet de déterminer directement les facteurs d'intensité de contraintes [9].

Ainsi le travail se présente comme suite :

On s'intéresse dans le premier chapitre au rappel des principes de base de la mécanique linéaire de la rupture.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la méthode des discontinuités de déplacements.

Le troisième chapitre est axé sur la présentation d'un élément bout de fissure parabolique. L'élément parabolique sert à assurer la continuité du champ de déplacement en bout de fissure. L'organisation du programme est présenté.

En quatrième chapitre, nous traitons des exemples des domaines fissurées pour la comparaison entre l'élément simple et parabolique sur les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte. Une étude particulière est menée pour mettre en évidence l'effet de la taille de l'élément bout de fissure dans le but d'améliorer les résultats recherchés.

# ***Chapitre I***

---

## ***Généralités sur la mécanique de la rupture***

- 1) Introduction*
- 2) Modes fondamentaux de rupture*
- 3) Approche locale*
- 4) Approche globale*
- 5) Mode mixte de rupture*
- 6) Conclusion*

## I-1 Introduction

La mécanique de la rupture peut être définie comme la science de l'étude du comportement d'une structure fissurée. Deux approches sont généralement utilisées en mécanique de la rupture :

1. La première s'intéresse à l'analyse du champ des contraintes en tête de fissure. C'est l'approche par le facteur d'intensité de contrainte. Elle relie les facteurs d'intensité de contrainte au champ de contrainte en tête de fissure.
2. La deuxième approche est énergétique et dite approche globale et due à Griffith. Elle procède par le calcul de l'énergie disponible pour la propagation de fissures dans la structure considérée.

Les fissures peuvent être considérées comme des défauts formés durant une étape de fabrication ou se produire durant le fonctionnement.

Selon la nature du matériau et les conditions d'exploitation on distingue deux types de rupture, à savoir la rupture ductile et la rupture fragile. Une rupture ductile est caractérisée par une zone de déformation plastique non négligeable avant et durant la propagation de la fissure (mécanique non linéaire de la rupture). La rupture fragile est caractérisée par l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture) [10]. C'est le cas de notre étude.

Lors de ce chapitre nous allons essayer d'introduire un aperçu sur la mécanique de la rupture avec les hypothèses suivantes : le matériau est homogène élastique et isotrope, le chargement est supposé statique, on s'intéresse aux problèmes plans.

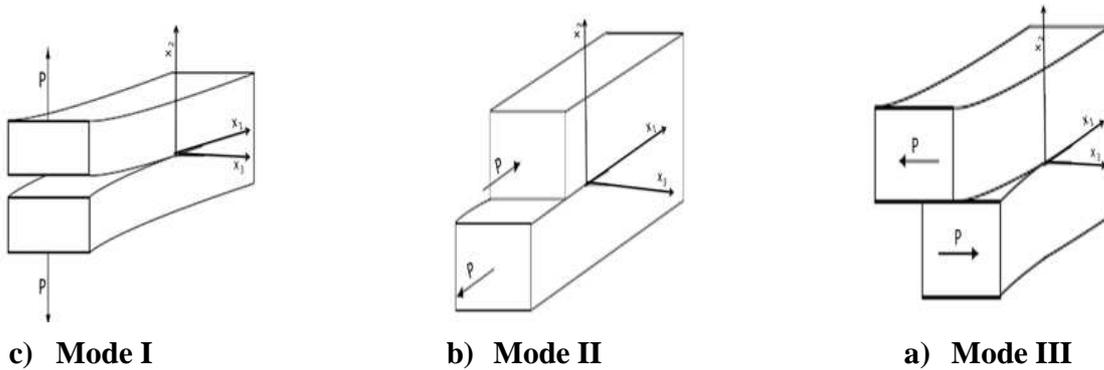
## I-2 Modes fondamentaux de rupture

Considérons une fissure dans un milieu plan. Selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissure on distingue, trois cinématiques remarquables du déplacement relatif des lèvres de la fissure [11] représentant les trois modes fondamentaux de rupture. Elles sont représentées dans le repère orthonormé  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  (fig.1.1).

- **Mode I** : ou mode d'ouverture (fig.1.1.a), il est caractérisé par une sollicitation de traction perpendiculaire au plan de la fissure, ce mode est le plus dangereux.

- **Mode II** : ou mode de cisaillement plan (fig.1.1.b), il est caractérisé par une sollicitation de cisaillement dans le plan de la fissure dont l'action est perpendiculaire au front de la fissure.

- **Mode III** : ou mode de cisaillement antiplan (fig.1.1.c), il est caractérisé par une sollicitation de cisaillement parallèle au plan de la fissure dont l'action est parallèle au front de la fissure.



*Fig.1.1 Modes fondamentaux de rupture*

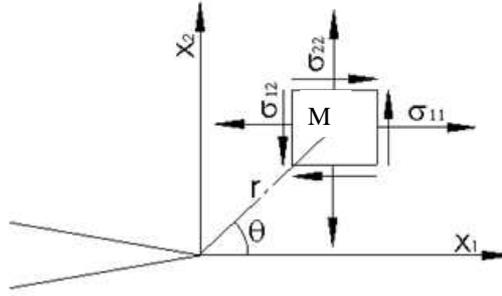
### I-3 Approche Locale

Cette approche consiste à déterminer les paramètres de mécanique de la rupture à l'aide des champs de contraintes et de déplacement locaux en pointe de fissure. Pour définir ces champs en pointe de fissure, nous introduirons la notion de facteurs d'intensité des contraintes.

#### I-3-1 Champ de contrainte et de déplacement au voisinage du front de fissure

Les champs de contrainte et de déplacement proche du front de la fissure sont des paramètres nécessaires à connaître. Ces champs gouvernent le processus de la rupture qui a lieu à la pointe de la fissure. Pour cela nous allons faire une étude des contraintes et déplacements au voisinage de la pointe de fissure dans le cas des trois modes de rupture.

Ces contraintes ont été calculées par Westergaard à l'aide de la fonction d'Airy [12, 13] et par Irwin à l'aide de la théorie de l'élasticité [1]. Elles sont exprimées par les relations (1.1), avec les notations de la (fig.1.2).



**Fig.1.2** Champ de contraintes au voisinage du front de la fissure

La figure (fig.1.2) représente schématiquement les contraintes sur un élément centré sur un point M repéré par les coordonnées polaires  $r, \theta$  par rapport à l'extrémité d'une fissure sollicitée en mode d'ouverture ou mode I.

Pour le Mode I, les contraintes et déplacements au voisinage du front de fissure s'écrivent :

$$[\sigma] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (1.1.a)$$

$$u_1 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} [C_1 - \cos \theta] \quad (1.1.b)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} [C_1 - \cos \theta]$$

Avec  $C_1 = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  en contraintes planes,  $C_1 = 3 - 4\nu$  en déformations planes.

La discontinuité ou saut de déplacement  $[u_2]$  selon l'axe  $\vec{x}_2$  est:

$$[u_2] = u_2(r, \pi) - u_2(r, -\pi) = \frac{8K_I}{E} C_2 \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (1.1.c)$$

Avec  $C_2 = 1$  en contraintes planes,  $C_2 = 1 - \nu^2$  en déformations planes.

On Remarque qu'à la pointe de la fissure, les contraintes sont singulières en  $r^{(-1/2)}$  et que le déplacement d'ouverture tend vers 0 comme  $r^{1/2}$ .

Pour le Mode II, les contraintes et déplacement sont :

$$[\sigma] = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) & \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (1.1.d)$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} [C_1 + 2 + \cos \theta] \quad (1.1.e)$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} [C_1 - 2 + \cos \theta]$$

La discontinuité ou saut de déplacement  $[u_1]$  selon l'axe  $\vec{x}_1$  est:

$$[u_1] = u_1(r, \pi) - u_1(r, -\pi) = \frac{8K_{II}}{E} C_2 \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (1.1.f)$$

Enfin, pour le Mode III, les contraintes et déplacement s'écrivent comme suit :

$$[\sigma] = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.g)$$

$$u_3 = \frac{4K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.1.h)$$

$$u_1 = u_2 = 0$$

La discontinuité ou saut de déplacement  $[u_3]$  selon l'axe  $\vec{x}_3$  est:

$$[u_3] = u_3(r, \pi) - u_3(r, -\pi) = \frac{8K_{III}}{E} (1 + \nu) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (1.1.i)$$

### I-3-2 Facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs  $K_I, K_{II}$  et  $K_{III}$  introduits dans les équations (1.1) sont fonction fois de la géométrie et de la nature des sollicitations. Ils sont appelés facteurs d'intensité de contrainte et s'expriment en  $MPa\sqrt{m}$ . Ils caractérisent la singularité du champ de contrainte.

### I-3-2-1 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes peuvent être déterminés si l'on connaît les expressions des composantes non nulles des contraintes et déplacement. Ces calculs peuvent être menés dans le cas analytique en utilisant la méthode de Westergaard [11]. Dans les modèles numériques, il est plus judicieux d'utiliser les sauts de déplacement  $[u_i]$  comme par exemple les approximations dues à Blanford [14] en utilisant deux points de collocations. Dans notre cas, nous optons pour le calcul utilisant les sauts de déplacement.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{22} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2] \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{12} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_1] \\ K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{23} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_3] \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu}{C_1+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (4[u_2]_{r/4} + [u_2]_r) \right\} \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu}{C_1+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (4[u_1]_{r/4} + [u_1]_r) \right\} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

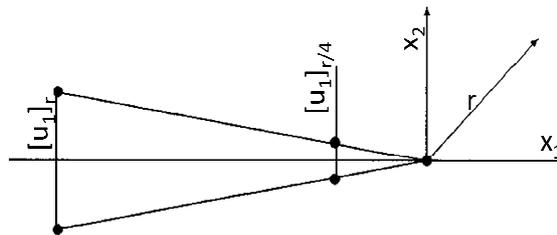


Fig.1.3 Élément géométrique pour le calcul de facteur d'intensité des contraintes

### I-3-2-2 Principe de superposition

Cette méthode, la plus couramment utilisée, consiste à ramener le problème traité à une suite de problèmes déjà résolus et dont les facteurs d'intensité de contraintes sont connus [15].

Exemple (fig.1.4)  $K_I^{(a)} = K_I^{(b)} + K_I^{(c)} + K_I^{(d)}$  (1.4)

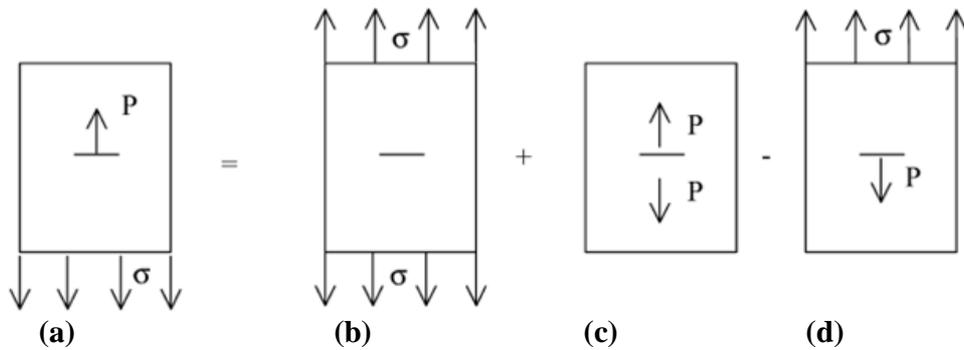


Fig.1.4 Exemple de superposition

## I-4 Approche Globale ou Energétique

La propagation de fissure est un phénomène dissipateur d'énergie. Dans la théorie de Griffith, l'énergie consommée est la différence entre l'état énergétique du système avant et après fissuration. Cette énergie peut s'assimiler à une énergie de surface, et Griffith a postulé que c'était une caractéristique intrinsèque du matériau.

### I-4-1 Le taux de restitution d'énergie

Noté  $G$ , le taux de restitution d'énergie représente l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité. Elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale  $W_p$  pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure  $a$ , à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur  $da$  [16] (fig.1.5).

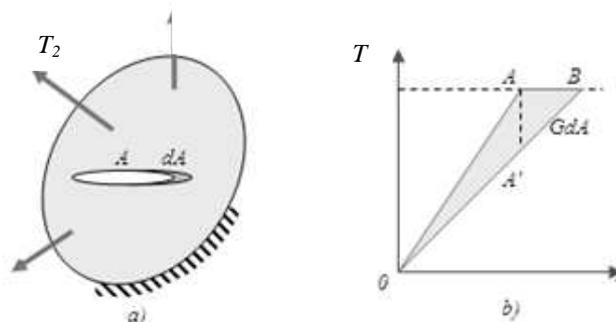


Fig.1.5 taux de restitution d'énergie

$$G \text{ est défini par : } G = - \frac{dW_P}{dA} \quad (1.5)$$

Appliquons le premier principe au système de la figure (1.5.a), le système est fermé, pas d'échange de chaleur et de travail avec l'extérieur [17]

$$W_P + 2\gamma dA + dW_C = 0 \quad (1.6)$$

On remplace (1.6) dans (1.5),  $G$  devient :

$$G = 2\gamma s + \frac{dW_C}{dA} \quad (1.7)$$

Pour des chargements quasi statiques,  $W_C = 0$  d'où

$$G = G_C = 2\gamma s \quad (1.8)$$

Le paramètre  $G_C$ , appelé énergie critique par unité de surface de la fissure est considéré comme paramètre intrinsèque du matériau.

## I-4-2 Calcul de $G$ en fonction des champs de déplacements et de contraintes sur les frontières du domaine fissuré

Considérons le problème plan en élasticité linéaire. On impose sur la frontière  $\Omega_T$  du domaine fissuré des forces surfaciques  $T_i$  et sur la partie complémentaire  $\Omega_U$  les déplacements  $u_i$ . Le taux de restitution d'énergie par unité d'épaisseur du solide est [11]:

$$G = - \frac{\partial}{\partial A} \int_{\Omega} W(\varepsilon) d\omega + \int_{\Omega_T} T_i \frac{du_i}{dA} ds \quad (1.8)$$

La dérivée de l'énergie de déformation est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial A} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( T_i \frac{du_i}{dA} + u_i \frac{dT_i}{dA} \right) ds \quad (1.9)$$

Combinons les équations (1.8) (1.9) et prenons compte de  $\frac{du_i}{dA} = 0$  sur  $\Omega_U$ , on obtient le taux de restitution d'énergie comme suit :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( T_i \frac{du_i}{dA} - u_i \frac{dT_i}{dA} \right) ds = \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} T_i \frac{du_i}{dA} ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega_U} u_i \frac{dT_i}{dA} ds \quad (1.10)$$

L'expression ci-dessus permet le calcul de  $G$  connaissant les champs de déplacement et de contrainte sur les contours extérieurs.

### I-4-3 Relation entre $G$ et $K$

Il est possible de relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensités de contraintes par [18]:

$$\begin{aligned} G_I &= \frac{C_2}{E} K_I^2 \\ G_{II} &= \frac{C_2}{E} K_{II}^2 \\ G_{III} &= \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

## I-5 Mode mixte de rupture

### I-5-1 Introduction

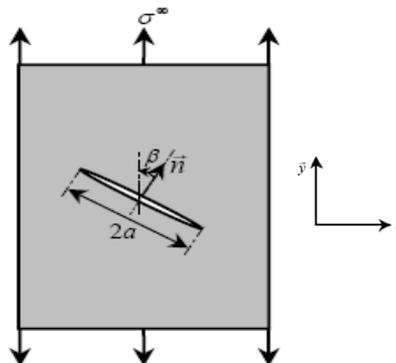
La figure (1.6) représente une fissure inclinée traversant une plaque soumise à une traction simple. Si la fissure n'était pas inclinée ( $\beta = 0^\circ$ ), le chargement appliqué conduirait à du mode I pur. Pour montrer comment l'inclinaison de la fissure entraîne du mode II [19], on calcule le vecteur contrainte dans le plan de la fissure. Ce vecteur s'écrit :

$$\vec{T}(m, \vec{n}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = (\sigma^\infty \cos \beta) \vec{y} \quad (1.12)$$

$$\vec{T}(m, \vec{n}) = \begin{pmatrix} N \\ T \end{pmatrix} = \sigma^\infty \cos \beta \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\infty \cos^2 \beta \\ \sigma^\infty \cos \beta \sin \beta \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

On remarque que le vecteur contrainte dans le plan de fissure se décompose en une contrainte normale  $N$  (traction) et une contrainte tangentielle  $T$  (cisaillement), Dans le cas présent, nous sommes en mode mixte I - II.

Dans cette partie, nous allons étudier les problèmes de mode mixte I - II pour mettre en évidence les champs de contrainte et déplacement, facteur d'intensité de contrainte.



**Fig1.6 Fissure inclinée dans une plaque en traction**

### I-5-2 Champ de contrainte et déplacement

En utilisant le principe de superposition, l'état de contrainte à la pointe de la fissure est obtenu facilement. Pour un mode mixte I - II, la contrainte est la somme des contraintes de chaque mode de chargement [12].

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (1.14)$$

Les déplacements sont obtenus à partir des équations (1.1.b) et (1.1.e)

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} [C_1 - \cos \theta] + \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} [C_1 + 2 + \cos \theta] \\ u_2 &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} [C_1 - \cos \theta] + \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} [C_1 - 2 + \cos \theta]\end{aligned}\quad (1.15)$$

### I-5-3 Le taux de restitution d'énergie

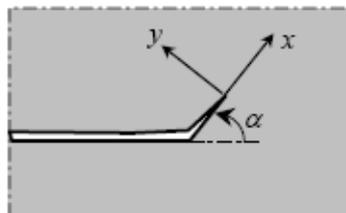
Lorsque deux modes de sollicitation sont présents, l'énergie de propagation  $G$  est additive [16]:  $G = G_I + G_{II}$  (1.16)

Le taux de restitution d'énergie, dans le cas d'une propagation dans le plan de la fissure principale, pour le mode I et II, s'écrit en fonction des facteurs d'intensité de contraintes :

$$G = \frac{C_2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (1.17)$$

### I-5-4 Propagation d'une fissure

Supposons une propagation infinitésimale d'une fissure initialement inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à la direction de chargement (fig.1.6). En se plaçant dans le plan de la fissure, nous avons en début de propagation, la situation représentée sur la figure (1.7).



**Fig.1.7 Propagation d'une fissure inclinée selon un angle  $\alpha$  par rapport au plan de la fissure**

Les facteurs d'intensité de contraintes locaux à l'extrémité de la déviation d'angle  $\alpha$  noté  $k_I(\alpha)$  et  $k_{II}(\alpha)$ , diffère des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  de la fissure initiale [20]. Les facteurs d'intensité de contraintes en mode I et II à l'extrémité de la déviation, sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_I(\alpha) &= K_I \left( \frac{3}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\alpha}{2} \right) + K_{II} \left( -\frac{3}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\alpha}{2} \right) \\ k_{II}(\alpha) &= K_I \left( \frac{1}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\alpha}{2} \right) + K_{II} \left( \frac{1}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\alpha}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

On présentera dans ce qui suit, les deux principaux critères utilisés dans le cas de matériaux élastiques isotropes [21].

#### I-5-4-1 Taux de restitution d'énergie maximale –Critère de Griffith

L'énergie de Griffith  $G(\alpha)$  à l'extrémité de la déviation, s'exprime par

$$G = \frac{C_2}{E} [k_I^2(\alpha) + k_{II}^2(\alpha)] \quad (1.19)$$

Les maximums de  $G(\alpha)$ , correspondent aux points où  $k_I$  est maximum et  $k_{II} = 0$ . Ainsi, le maximum de l'énergie de Griffith est donné par :

$$G_{max} = \frac{C_2}{E} k_I^2(\alpha^*) \quad (1.20)$$

Où  $(\alpha^*)$  est l'angle pour lequel les valeurs de l'énergie  $G$  sont maximales.

La fissure se propage lorsque  $G_{max}$  atteint la valeur critique  $G_C$ . C'est le critère de Griffith en énergie

#### I-5-4-2 Critère en contrainte tangentielle maximale

Erdogan et Sih ont fait les deux hypothèses suivantes :

- La fissure se propage radialement dans la direction pour laquelle la contrainte normale est maximale  $\sigma_{\theta\theta_{max}}$  (le cisaillement  $\sigma_{r\theta}$  est nul).

- La fissure se propage lorsque  $\sqrt{2\pi r} \sigma_{\theta\theta_{max}} = K_{IC}$  (1.21)

Pour le mode mixte I - II la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \quad (1.22)$$

En dérivant  $\sigma_{\theta\theta}$  :

$$\sqrt{2\pi r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = -\frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)] \quad (1.23)$$

La direction  $\alpha$  de propagation sera donnée par :

$$K_I \sin \alpha + K_{II}(3 \cos \alpha - 1) = 0 \quad (1.24)$$

Le critère de propagation sera :

$$\cos \frac{\alpha}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \alpha \right] = K_{IC} \quad (1.25)$$

Où  $K_{IC}$  est le Facteur d'intensité de contrainte critique.

## I-6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a mis en évidence que les facteurs d'intensité de contrainte peuvent s'exprimer en fonction des discontinuités ou du saut de déplacement. Etant donné que la simulation des problèmes de solides fissurés dans cette étude est prise en compte en utilisant la méthode des discontinuités de déplacement, les facteurs d'intensité de contraintes seront donc calculés en utilisant les sauts de déplacement.

# ***Chapitre II***

---

## ***La méthode des éléments de frontières***

- 1) *Introduction*
- 2) *Problème intérieur / problème extérieur*
- 3) *Méthode directe*
- 4) *Méthode des discontinuités de déplacements*
- 5) *Conclusion*

## II-1 Introduction

Beaucoup de problèmes pratiques dans différents domaines de l'ingénieur tels que la mécanique des fluides, les transferts de chaleur et de masse, la mécanique des solides et la rupture peuvent être représentés par des équations aux dérivés partielles. Pour approcher les solutions analytiques de ces problèmes, souvent difficile à déterminer par une solution directe des équations différentielles, plusieurs méthodes numériques ont été mises on place. Parmi les méthodes numériques disponibles, la méthode des équations intégrales (méthode des éléments de frontière) est l'une des plus adaptées en mécanique de la rupture.

Le principe de la méthode des éléments de frontières consiste à transformer des équations aux dérivées partielles dans le volume de la pièce en équations intégrales sur le contour. Alors on ramène ainsi l'étude d'une pièce mécanique à l'étude en surface. La discrétisation de celle-ci permet de transformer les équations intégrales en un système d'équations linéaires et de déterminer les déplacements et contraintes en chaque point du contour. On peut ensuite obtenir les grandeurs à l'intérieur de la pièce à l'aide des relations intégrales simples.

Dans ce chapitre nous allons faire une brève présentation de la méthode directe. La méthode des discontinuités de déplacements est ensuite présentée avec plus de détail étant donné que c'est la méthode choisie dans notre étude.

## II-2 Problème intérieur / problème extérieur

Un problème est dit intérieur (fig.2.1.a) quand le domaine à étudier est fini et est limité par un contour  $C$ , c'est l'exemple d'un disque. Dans le cas d'un domaine infini, exemple d'une cavité à l'intérieur d'un domaine infini, on a affaire à un problème extérieur (fig.2.1.b). C'est particulièrement à ce dernier type de problèmes que la méthode des éléments de frontière est la plus avantageuse. L'étude se limite seulement à une discrétisation de la frontière puis étendre la résolution au reste du domaine.

Le contour d'un domaine fini est traversé suivant le sens horaire, tandis que celui d'un domaine infini est traversé suivant le sens trigonométrique [22].

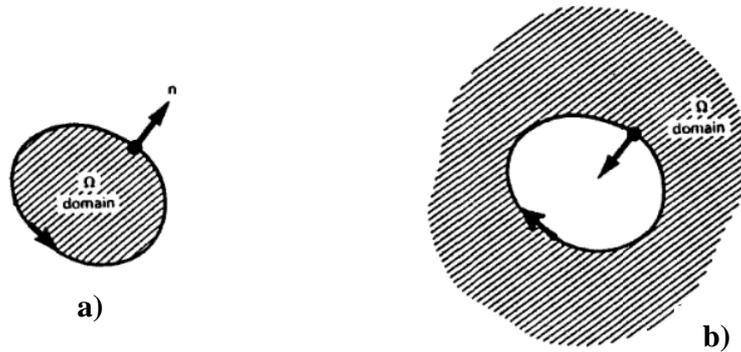


Fig.2.1 Problème intérieur / problème extérieur

## II-3 Méthode Directe

### II-3-1 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti et ses conséquences

C'est un théorème qui lie entre les solutions de deux problèmes d'élasticité linéaire sur un même domaine  $\Omega$  [23].

Supposons que le premier problème est caractérisé par des déplacements  $u_s, u_n$  et des contraintes  $\sigma_s, \sigma_n$  sur le contour  $C$  de domaine  $\Omega$ . Le deuxième problème est caractérisé par des déplacements  $u'_s, u'_n$  et des contraintes  $\sigma'_s, \sigma'_n$  sur le même contour  $C$  du même domaine  $\Omega$ . Le théorème de réciprocité s'écrit :

$$\int_C (\sigma_s u'_s + \sigma_n u'_n) ds = \int_C (\sigma'_s u_s + \sigma'_n u_n) ds \quad (2.1)$$

On recherche la solution du premier problème. La solution du deuxième est connue.

Le contour  $C$  peut être approximé par  $N$  segments de ligne reliés entre. L'équation (2.1) peut être représentée comme suit :

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Delta C^j} (\sigma_s u'_s + \sigma_n u'_n) ds = \sum_{j=1}^N \int_{\Delta C^j} (\sigma'_s u_s + \sigma'_n u_n) ds \quad (2.2)$$

Si on assume que les déplacements et contraintes de problème qu'on essaye de résoudre sont constants sur chaque segment de contour, l'équation (2.2) devient :

$$\sigma_s^j \int_{\Delta C^j} u'_s ds + \sigma_n^j \int_{\Delta C^j} u'_n ds = u_s^j \int_{\Delta C^j} \sigma'_s ds + u_n^j \int_{\Delta C^j} \sigma'_n ds \quad (2.3)$$

Où  $\sigma_s^j, \sigma_n^j$  et  $u_s^j, u_n^j$  sont les valeurs des contraintes et déplacements au centre de  $j^{\text{ème}}$  segment.

Comme nous avons  $N$  segments, nous avons  $4N$  paramètres ( $\sigma_s^j, \sigma_n^j, u_s^j$  et  $u_n^j, j = 1, N$ ), la moitié de ces paramètres sont les conditions aux limites Les autres sont les inconnus du problème. Il faut donc  $2N$  équations similaires à (2.3) pour résoudre le problème. Les  $2N$  équations peuvent être trouvées en appliquant des forces normales et tangentielles au centre de chaque élément  $i$  le long de la frontière.

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_s^j \int_{\Delta C^j} u_s'(F_s^i) ds + \sigma_n^j \int_{\Delta C^j} u_n'(F_s^i) ds \\ & = u_s^j \int_{\Delta C^j} \sigma_s'(F_s^i) ds + u_n^j \int_{\Delta C^j} \sigma_n'(F_s^i) ds \\ & \sigma_s^j \int_{\Delta C^j} u_s'(F_n^i) ds + \sigma_n^j \int_{\Delta C^j} u_n'(F_n^i) ds \\ & = u_s^j \int_{\Delta C^j} \sigma_s'(F_n^i) ds + u_n^j \int_{\Delta C^j} \sigma_n'(F_n^i) ds \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad j = \overline{1, N} \quad (2.4)$$

### II-3-2 Coefficients d'influence

Les équations (2.4) peuvent être écrites sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} B_{ss}^{ij} \sigma_s^j + B_{sn}^{ij} \sigma_n^j &= A_{ss}^{ij} u_s^j + A_{sn}^{ij} u_n^j \\ B_{ns}^{ij} \sigma_s^j + B_{nn}^{ij} \sigma_n^j &= A_{ns}^{ij} u_s^j + A_{nn}^{ij} u_n^j \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad j = \overline{1, N} \quad (2.5)$$

Pour faciliter le calcul des coefficients  $B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, \dots$  etc., nous allons utiliser des systèmes de coordonnées locales  $(\bar{x}, \bar{y})$  où l'origine est liée au centre du  $j^{\text{ème}}$  segment de contour (fig.2.2). Les composantes de forces  $F_s^i$  et  $F_n^i$  s'écrivent dans le repère  $(\bar{x}, \bar{y})$  par les relations (2.6)

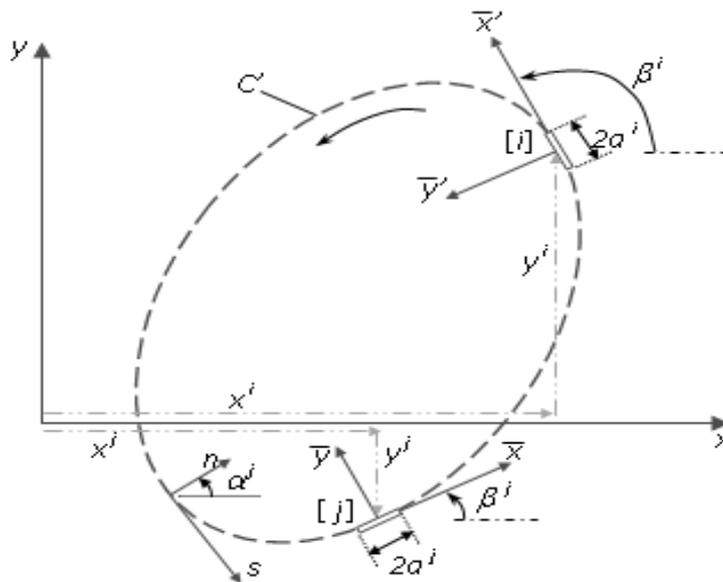


Fig.2.2 Définition des coordonnées locales

$$\begin{aligned} F_{\bar{x}} &= F_s^i \cos \gamma - F_n^i \sin \gamma \\ F_{\bar{y}} &= F_s^i \sin \gamma + F_n^i \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{Où } \gamma = \beta^i - \beta^j$$

Les déplacements  $u_s'$ ,  $u_n'$  et les contraintes  $\sigma_s'$ ,  $\sigma_n'$  sont donnés par [8]. Grâce aux relations (2.7) et (2.8), où  $C_{\bar{x}}$  et  $C_{\bar{y}}$  sont les coordonnées du centre de  $i^{\text{eme}}$  segment.

$$\begin{aligned} u_s' &= \frac{F_s^i}{2\mu} \left[ (3 - 4\nu)g \cos \gamma - (\bar{x} - C_{\bar{x}}) \cos \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + C_{\bar{y}} \sin \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right] \\ &+ \frac{F_n^i}{2\mu} \left[ -(3 - 4\nu)g \sin \gamma + (\bar{x} - C_{\bar{x}}) \sin \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + C_{\bar{y}} \cos \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} u_n' &= \frac{F_s^i}{2\mu} \left[ (3 - 4\nu)g \sin \gamma - (\bar{x} - C_{\bar{x}}) \cos \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + C_{\bar{y}} \sin \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right] \\ &+ \frac{F_n^i}{2\mu} \left[ (3 - 4\nu)g \cos \gamma + (\bar{x} - C_{\bar{x}}) \sin \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + C_{\bar{y}} \cos \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_s' &= F_s^i \left[ (1 - 2\nu) \sin \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + (1 - 2\nu) \cos \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} - (\bar{x} - C_{\bar{x}}) \cos \gamma \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + C_{\bar{y}} \sin \gamma \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right] \\ &+ F_n^i \left[ (1 - 2\nu) \cos \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} - (1 - 2\nu) \sin \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + (\bar{x} - C_{\bar{x}}) \sin \gamma \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + C_{\bar{y}} \cos \gamma \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right] \\ \sigma_n' &= F_s^i \left[ 2\nu \cos \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + 2(1 - \nu) \sin \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} - (\bar{x} - C_{\bar{x}}) \cos \gamma \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2} + C_{\bar{y}} \sin \gamma \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2} \right] \\ &+ F_n^i \left[ -2\nu \sin \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + 2(1 - \nu) \cos \gamma \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + (\bar{x} - C_{\bar{x}}) \sin \gamma \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2} + C_{\bar{y}} \cos \gamma \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

La fonction  $g(\bar{x}, \bar{y})$  est donnée par

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \ln \left[ (\bar{x} - C_{\bar{x}})^2 + (\bar{y} - C_{\bar{y}})^2 \right]^{1/2} \quad (2.9)$$

Dans les équations (2.7) et (2.8) la fonction  $g$  et ses dérivés sont évalués pour  $\bar{y} = 0$ .

On remplace les équations (2.7) et (2.8) dans (2.4) et on intègre entre  $-a^j$  et  $+a^j$ . On considère que  $F_s^i$  et  $F_n^i$  sont égales à 1. Les relations (2.10) et (2.11) donnent les coefficients d'influence en fonction de  $\bar{T}_1, \bar{T}_5$  représentant l'intégrale  $\int_{-a^j}^{+a^j} g(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}$  et ses dérivés évalués à  $\bar{y} = 0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{ss}^{ij} = \int_{-a}^{+a} u'_s(F_s^i) d\bar{x} = \frac{1}{2\mu} [(3 - 4\nu) \cos \gamma \bar{T}_1 + C_{\bar{y}}(\sin \gamma \bar{T}_2 - \cos \gamma \bar{T}_3)] \\ B_{sn}^{ij} = \int_{-a}^{+a} u'_n(F_s^i) d\bar{x} = \frac{1}{2\mu} [(3 - 4\nu) \sin \gamma \bar{T}_1 + C_{\bar{y}}(\cos \gamma \bar{T}_2 + \sin \gamma \bar{T}_3)] \\ B_{ns}^{ij} = \int_{-a}^{+a} u'_s(F_n^i) d\bar{x} = \frac{1}{2\mu} [-(3 - 4\nu) \sin \gamma \bar{T}_1 + C_{\bar{y}}(\cos \gamma \bar{T}_2 + \sin \gamma \bar{T}_3)] \\ B_{nn}^{ij} = \int_{-a}^{+a} u'_n(F_n^i) d\bar{x} = \frac{1}{2\mu} [(3 - 4\nu) \cos \gamma \bar{T}_1 - C_{\bar{y}}(\sin \gamma \bar{T}_2 - \cos \gamma \bar{T}_3)] \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ss}^{ij} = (1 - 2\nu) \sin \gamma \bar{T}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \bar{T}_3 + C_{\bar{y}}(\sin \gamma \bar{T}_4 + \cos \gamma \bar{T}_5) \\ A_{sn}^{ij} = -(1 - 2\nu) \cos \gamma \bar{T}_2 + 2(1 - 2\nu) \sin \gamma \bar{T}_3 + C_{\bar{y}}(\cos \gamma \bar{T}_4 - \sin \gamma \bar{T}_5) \\ A_{ns}^{ij} = (1 - 2\nu) \cos \gamma \bar{T}_2 - 2(1 - \nu) \sin \gamma \bar{T}_3 + C_{\bar{y}}(\cos \gamma \bar{T}_4 - \sin \gamma \bar{T}_5) \\ A_{ss}^{ij} = (1 - 2\nu) \sin \gamma \bar{T}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \bar{T}_3 - C_{\bar{y}}(\sin \gamma \bar{T}_4 + \cos \gamma \bar{T}_5) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

## II-4 Méthode des discontinuités de déplacements

La méthode des discontinuités de déplacements se base sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité de déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini. Elle consiste à diviser (discrétiser) le segment de droite en une série de  $N$  éléments reliés les uns aux autres. Ainsi, connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donné, en sommant les effets de tous les éléments [8].

### II-4-1 Discontinuité de déplacement dans un solide infini

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite dans le plan  $x, y$  d'un solide infini est spécifié par la condition que le déplacement soit continu partout sauf sur le segment en question (soit la partie  $-a < x < a$ , pour  $y = 0$ ) (fig.2.3).

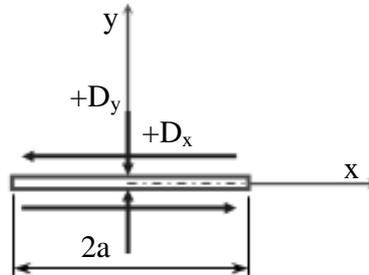


Fig.2.3 Discontinuité de déplacement

Le saut du déplacement sur le segment de longueur  $2a$  est désigné par  $D_i = (D_x, D_y)$ . On définit la discontinuité de déplacement  $D_i$  comme la différence de déplacement entre les deux côtés du segment

$$\begin{aligned} D_x &= u_x(x, 0^-) - u_x(x, 0^+) \\ D_y &= u_y(x, 0^-) - u_y(x, 0^+) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les déplacements et contraintes sont donnés par Crouch comme suit

$$\begin{aligned} u_x &= D_x [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \\ u_y &= D_x [(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] + D_y [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,yy}] \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu D_x [2f_{,xy} + yf_{,xyy}] + 2\mu D_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2\mu D_x [-yf_{,xyy}] + 2\mu D_y [f_{,yy} - yf_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2\mu D_x [f_{,yy} + yf_{,yyy}] + 2\mu D_y [-yf_{,xyy}] \end{aligned} \quad (2.14)$$

La fonction  $f(x,y)$  introduite dans les équations (3.13) (3.14) est donnée par (3.15). Cette fonction est la même que  $\int_{-a}^{+a} g(x,y)dx$  définie précédemment

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \left( \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right. \\ &\left. - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Il est facile de vérifier que les déplacements sont continus en tous points du solide infini, sauf à travers le segment de la ligne  $y=0$  sur  $|x| \leq a$  où ils sont discontinus conformément à la définition (2.12).

La multiformité du champ de déplacement est due à la fonction arctg en se référant à la fonction (2.15). Pour les déplacements le long de la ligne  $y = 0$ , on distingue trois cas différents en étudiant  $\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right]$ .

(1)  $|x| > a$  et  $y = 0$

$$\begin{cases} u_x(x, 0) = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x, 0) = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \end{cases} \quad (2.16)$$

(2)  $|x| < a$  et  $y = 0^+$ 

$$\begin{cases} u_x(x, 0^+) = -\frac{1}{2}D_x - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x, 0^+) = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2}D_y \end{cases} \quad (2.17)$$

(3)  $|x| < a$  et  $y = 0^-$ 

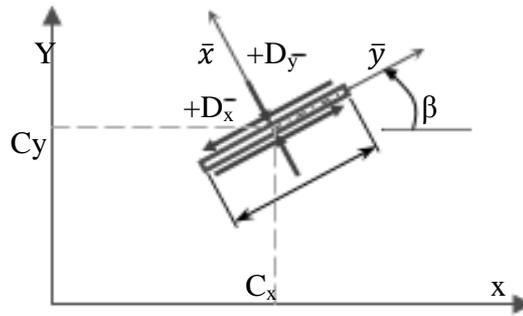
$$\begin{cases} u_x(x, 0^-) = +\frac{1}{2}D_x - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x, 0^-) = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2}D_y \end{cases} \quad (2.18)$$

Les contraintes le long de ligne  $y = 0$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, 0) &= -\frac{a\mu}{2\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2-a^2} \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= -\frac{a\mu}{2\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2-a^2} \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= -\frac{a\mu}{2\pi(1-\nu)}D_x \frac{1}{x^2-a^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

On remarque à partir de (2.19) que les contraintes sont singulières pour  $x = \pm a$ , et ils sont continus et finis partout sur  $y = 0$ .

Les contraintes et déplacements des équations (2.13) et (2.14) sont exprimés suivant un repère local lié à la discontinuité de déplacement (fig.2.4)



**Fig.2.4** Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire

$$\begin{aligned} u_x &= D_{\bar{x}}[-(1-2\nu)\sin\beta\bar{F}_2 + 2(1-\nu)\cos\beta\bar{F}_3 + \bar{y}(\sin\beta\bar{F}_4 - \cos\beta\bar{F}_5)] \\ &\quad + D_{\bar{y}}[-(1-2\nu)\cos\beta\bar{F}_2 - 2(1-\nu)\sin\beta\bar{F}_3 - \bar{y}(\cos\beta\bar{F}_4 + \sin\beta\bar{F}_5)] \\ u_x &= D_{\bar{x}}[(1-2\nu)\cos\beta\bar{F}_2 + 2(1-\nu)\sin\beta\bar{F}_3 - \bar{y}(\cos\beta\bar{F}_4 + \sin\beta\bar{F}_5)] \\ &\quad + D_{\bar{y}}[-(1-2\nu)\sin\beta\bar{F}_2 + 2(1-\nu)\cos\beta\bar{F}_3 - \bar{y}(\sin\beta\bar{F}_4 - \cos\beta\bar{F}_5)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2\mu D_{\bar{x}}[2 \cos^2 \beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7)] \\
&\quad + 2\mu D_y[-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7)] \\
\sigma_{yy} &= 2\mu D_{\bar{x}}[2 \sin^2 \beta \bar{F}_4 - \sin 2\beta \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7)] \\
&\quad + 2\mu D_y[-\bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7)] \\
\sigma_{xy} &= 2\mu D_{\bar{x}}[\sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7)] \\
&\quad + 2\mu D_y[-\bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7)]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

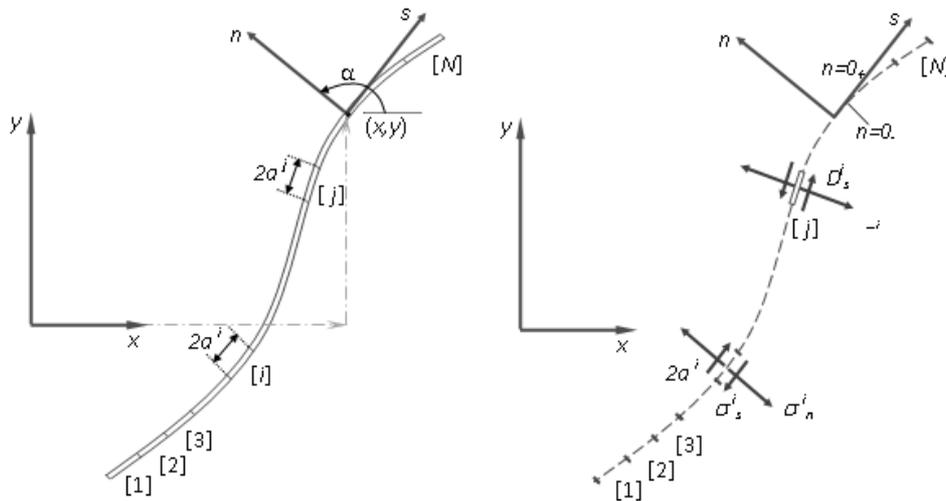
$$\begin{aligned}
\text{Avec } \bar{F}_1 &= f(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{F}_2 = f_{,\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{F}_3 = f_{,\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{F}_4 = f_{,\bar{x}\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) \\
\bar{F}_5 &= f_{,\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) = -f_{,\bar{y}\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{F}_6 = f_{,\bar{x}\bar{y}\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{F}_7 = f_{,\bar{y}\bar{y}\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y})
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Les expressions de transformation de coordonnées sont :

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= (x - C_x) \cos \beta + (y - C_y) \sin \beta \\
\bar{y} &= -(x - C_x) \sin \beta + (y - C_y) \cos \beta
\end{aligned} \tag{2.23}$$

## II-4-2 Procédure numérique

On considère un ensemble de  $N$  segments de droites, parfaitement reliés les uns aux autres et formant une courbe quelconque comme représenté dans la figure (fig.2.5). La longueur de chacun de ces segments est notée par  $2a^i$



**Fig.2.5 Représentation d'une courbe divisée en  $N$  discontinuités de déplacements**

Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local  $(s, n)$  comme le montre la figure (fig.2.5) de l'élément  $j$  et dont les composantes  $D_s^j$  et  $D_n^j$  sont données par les expressions :

$$\left\{ D_s^j = u_s^{j-} - u_s^{j+} \quad D_n^j = u_n^{j-} - u_n^{j+} \right\} \quad (2.24)$$

Les contraintes normales et tangentielles au milieu de l'élément  $i$  peuvent être exprimées en fonction des composantes de discontinuité de déplacement de l'élément  $j$ .

Le champ de contraintes est obtenu en tenant compte de l'effet de tout les  $N$  éléments (discontinuités), il est donné par :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad j = \overline{1, N} \quad (2.25)$$

On déduit le champ de déplacement avec la même technique :

$$\left. \begin{aligned} u_s^i &= B_{ss}^{ij} D_s^j + B_{sn}^{ij} D_n^j \\ u_n^i &= B_{ns}^{ij} D_s^j + B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad j = \overline{1, N} \quad (2.26)$$

$A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}, B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij}$  Sont les coefficients d'influence.

### II-4-3 Coefficients d'influence

Soit un contour  $C$ , sur lequel on considère deux éléments distincts «  $i$  » et «  $j$  » reliés chacun à un repère local  $(\bar{x}', \bar{y}')$  et  $(\bar{x}, \bar{y})$  respectivement (fig.2.3.1).

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x} \cos \gamma + \bar{y} \sin \gamma \\ \bar{y}' &= -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.27)$$

Où  $\gamma = \beta^i - \beta^j$  (inclinaison de  $i^{eme}$  élément par rapport au  $j^{eme}$ ).

Les déplacements et les contraintes de l'élément  $i$  peuvent être écrits dans le repère lié à l'élément  $j$  par une transformation de coordonnées :

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}'}^i &= u_{\bar{x}}^i \cos \gamma + u_{\bar{y}}^i \sin \gamma \\ u_{\bar{y}'}^i &= -u_{\bar{x}}^i \sin \gamma + u_{\bar{y}}^i \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}'\bar{x}'}^i &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i \cos^2 \gamma + 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i \sin^2 \gamma \\ \sigma_{\bar{y}'\bar{y}'}^i &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i \sin^2 \gamma - 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i \cos^2 \gamma \\ \sigma_{\bar{x}'\bar{y}'}^i &= -(\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i) \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Les contraintes et déplacements normaux et tangentiels sont obtenus en remplaçant les équations (2.20) et (2.21) dans (2.28) et (2.29), après avoir posé :

$$D_s^j = D_{\bar{x}}^j, D_n^j = D_{\bar{y}}^j, u_s^i = u_{\bar{x}'}^i, u_n^i = u_{\bar{y}'}^i, \sigma_s^i = \sigma_{\bar{x}'\bar{y}'}^i, \text{ et } \sigma_n^i = \sigma_{\bar{y}'\bar{y}'}^i \quad (2.30)$$

$$\left. \begin{aligned} u_s^i &= D_s^j [(1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \beta \bar{F}_5)] \\ &+ D_n^j [-(1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \beta \bar{F}_5)] \\ u_n^i &= D_s^j [(1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5)] \\ &+ D_n^j [(1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5)] \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad j = \overline{1, N} \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= 2\mu D_s^j [-\sin 2\gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7)] \\ &+ 2\mu D_n^j [-\bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7)] \\ \sigma_n^i &= 2\mu D_s^j [2 \sin^2 \gamma \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7)] \\ &+ 2\mu D_n^j [-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7)] \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad j = \overline{1, N} \quad (2.32)$$

#### II-4-4 Construction de système d'équations

Le système d'équations algébrique est formé en considérant les conditions aux limites de chaque élément.

Si des contraintes  $\sigma_s^i = (\sigma_s^i)_0$  et  $\sigma_n^i = (\sigma_n^i)_0$ , sont les conditions aux limites imposé au  $i^{eme}$  élément, les  $i^{eme}$  équations de système sont :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_s^i)_0 &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ (\sigma_n^i)_0 &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} j = \overline{1, N} \quad (2.33)$$

Si des déplacements  $u_s^i = (u_s^i)_0$  et  $u_n^i = (u_n^i)_0$ , sont les conditions aux limites imposées au  $i^{eme}$  élément, les  $i^{eme}$  équations du système sont :

$$\left. \begin{aligned} (u_s^i)_0 &= B_{ss}^{ij} D_s^j + B_{sn}^{ij} D_n^j \\ (u_n^i)_0 &= B_{ns}^{ij} D_s^j + B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} j = \overline{1, N} \quad (2.34)$$

Si les conditions mixtes «  $u_s^i = (u_s^i)_0$  et  $\sigma_n^i = (\sigma_n^i)_0$  » ou «  $u_n^i = (u_n^i)_0$  et  $\sigma_s^i = (\sigma_s^i)_0$  » sont les conditions aux limites imposé au  $i^{eme}$  élément, les  $i^{eme}$  équations de système sont données par la sélection de l'équation appropriée (2.33) ou (2.34) pour chaque condition.

Pour  $i = 1, N$ , nous obtenons un système linéaire de  $2N$  équations à  $2N$  inconnus, les inconnus sont les composantes normales et tangentielles de la discontinuité de déplacement, on représente le système d'équations comme suit :

$$\left. \begin{aligned} b_s^i &= C_{ss}^{ij} D_s^j + C_{sn}^{ij} D_n^j \\ b_n^i &= C_{ns}^{ij} D_s^j + C_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = \overline{1, N} \quad j = \overline{1, N} \quad (2.35)$$

Les quantités  $b_s^i$  et  $b_n^i$  sont les conditions aux limites sur les contraintes et déplacements connus, et  $C_{ss}^{ij}, \dots$  etc., sont les coefficients d'influence correspondent aux équations (2.33) et (2.34).

Après avoir déterminé les composantes normales et tangentielles de la discontinuité de déplacement, on peut facilement déterminer le reste des contraintes et déplacements en n'importe quel point du solide.

### II-4-5 Conditions de symétrie

Une ligne de symétrie existe dans certain problèmes lorsque les propriétés élastiques du matériau, la géométrie de frontière et les conditions de chargement sont tous symétriques par rapport à la ligne en question. Comme les propriétés d'un matériau homogène et isotrope sont indépendantes de la position et des directions, on ne considère que la symétrie géométrique.

On peut noter aussi deux conséquences physiques pour une ligne de symétrie. Dans la première, aucun déplacement normal ne se produit à travers la ligne. Dans la deuxième, aucune contrainte tangentielle n'agit le long de cette ligne.

L'utilisation de la symétrie pour la résolution des problèmes d'élasticité par la méthode de discontinuité de déplacement est d'une extrême importance, quand on sait que le système d'équations se réduit de moitié (cas de la simple symétrie) (fig.2.6), ou du quart (cas de la double symétrie) (fig.2.7)

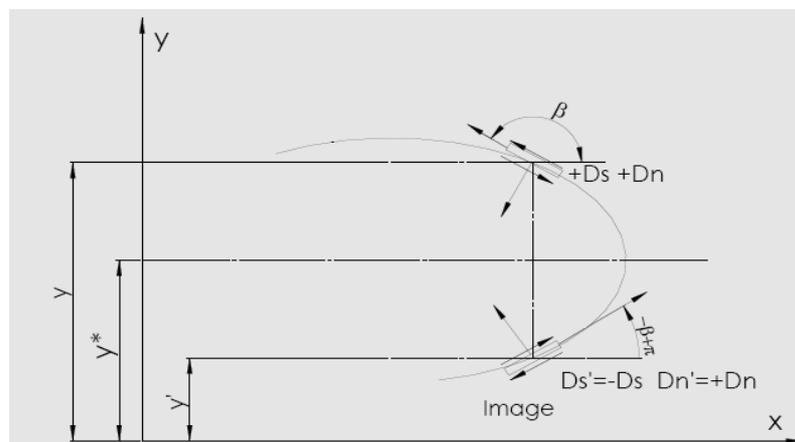


Fig.2.6 symétrie par rapport à la ligne  $y = y^*$

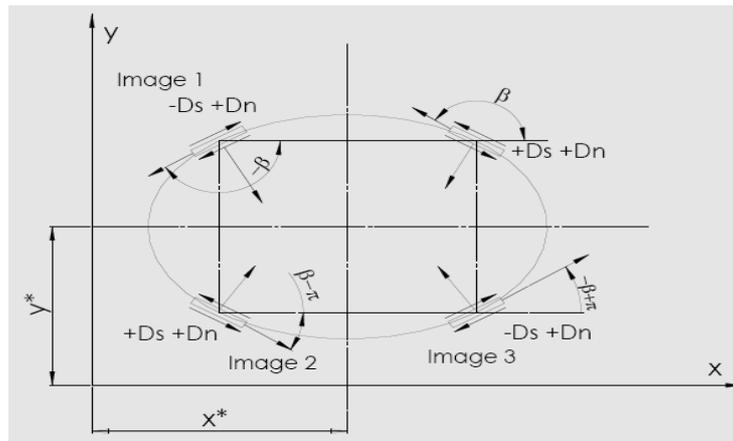


Fig.2.7 symétrie par rapport à la ligne  $x = x^*$  et  $y = y^*$

Etant symétrique, l'élément  $j$  et son image  $j^*$  auront des composantes tangentielles (discontinuités de déplacements, contraintes et déplacements) égales en valeur algébriques mais de signe opposées, tandis que les composantes normales (discontinuités de déplacements, contraintes et déplacements) sont égales et de même signe. Ceci se traduit par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 D_n^{j^*} &= D_n^j & D_s^{j^*} &= -D_s^j \\
 \sigma_n^{j^*} &= \sigma_n^j & \sigma_s^{j^*} &= -\sigma_s^j \\
 u_n^{j^*} &= u_n^j & u_s^{j^*} &= -u_s^j
 \end{aligned}
 \tag{2.4.5.1}$$

## II-5 Conclusion

Pour conclure ce chapitre, on peut considérer que la méthode des discontinuités de déplacement apparaît comme l'une des méthodes des éléments de frontière les mieux adaptées pour traiter les milieux fissurés.

# ***Chapitre III***

---

## ***Elément bout de fissure et application de la MDD aux milieux fissurés***

- 1) Introduction*
- 2) Problème de fissure sous pression*
- 3) Elément bout de fissure*
- 4) Calcule numérique de facteur d'intensité de contrainte*
- 5) Effet de la longueur de l'élément parabolique*
- 6) Structure de programme*

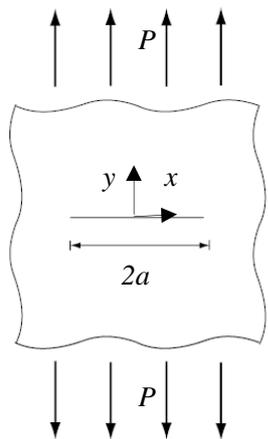
### III-1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons étudiés la méthode des discontinuités de déplacements. Cette méthode donne de bons résultats pour un milieu continu ou fissuré confirmés par les résultats du chapitre IV.

Nous exploitons la méthode pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte. Etant donné l'incompatibilité du champ de déplacement posé par l'élément simple, un élément dit bout de fissure est présenté pour prendre en charge ce problème.

### III-2 Problème de fissure sous pression

Le problème d'une fissure dans un domaine plan infini soumis à une traction à l'infini est représenté par la figure (3.1) avec les conditions suivantes.



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{yy} = -P \\ u_y = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty, y = 0 \\ |x| < a, y = 0 \\ |x| \geq a, y = 0 \end{array} \quad (3.1)$$

**Fig.3.1** *Plaque infinie avec fissure centrale en traction*

La solution analytique de l'ouverture normale de fissure est donnée par [24] (3.2), où  $a$  est la demi-longueur de la fissure.

$$[u_y](x) = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+) = -\frac{2(1-\nu)}{\mu} Pa \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (3.2)$$

Pour la solution numérique, on divise la fissure en  $N$  éléments. Chaque élément représente une discontinuité de déplacement.  $D_y^i$  pour  $i = 1, N$ . Les  $N$  discontinuités de déplacements sont déterminées par la solution du système linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues, les contraintes sont données par la deuxième équation du système (2.19).

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{-a\mu}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \quad (3.3)$$

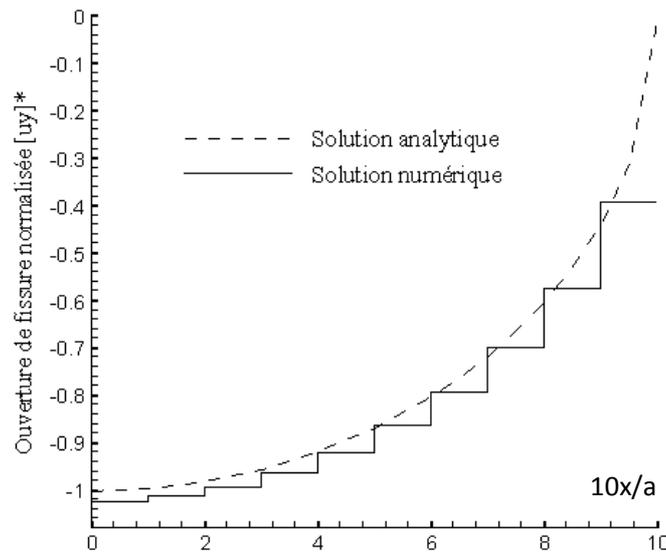
Si la discontinuité de déplacement  $D_y^i$  correspondant au segment de longueur  $2a^j$  centré au point  $x = x^j, y = 0$ , la contrainte au point  $x = x^i$  due à cette discontinuité s'écrit :

$$\sigma_{yy}(x^i, 0) = \frac{-a^j\mu}{\pi(1-\nu)} D_y^j \frac{1}{(x^i - x^j)^2 - a^{j2}} \quad (3.4)$$

Par superposition, la contrainte au point  $x = x^i, y = 0$  due aux discontinuités de déplacements en tout élément  $N$  est :  $\sigma_{yy}(x^i, 0) = \sigma_{yy}^i = A^{ij} D_y^j$  (3.5)

Où  $A^{ij}$  sont les coefficients d'influence, ils sont définis par :

$$A^{ij} = \frac{-a^j\mu}{\pi(1-\nu)} \frac{1}{(x^i - x^j)^2 - a^{j2}} \quad (3.6)$$



**Fig.3.2 Distribution de discontinuité de déplacement**

La figure (3.2) représente les solutions analytique et numérique de la discontinuité de déplacement pour une fissure dans un plan infini avec des valeurs arbitraire de  $a, \mu, \nu, P$

( $[u_y]^*$  discontinuité de déplacement normalisée),  $[u_y]^* = \frac{[u_y]}{\frac{2(1-\nu)}{\mu} Pa}$  (3.7)

### III-3 Elément bout de fissure

#### III-3-1 Introduction

La figure (3.2) montre que la méthode de discontinuité de déplacement donne d'assez bonne résultats pour l'évaluation numérique de la solution relative à une distribution du déplacement entre les deux lèvres d'une fissure avec une discrétisation de la fissure en 20 éléments pour les points loin de bout de la fissure. Au voisinage du bout de fissure, les résultats sont moins satisfaisants.

En mécanique de la rupture, une meilleure approche de la solution au voisinage du bout de la fissure est très importante pour l'évaluation des paramètres de la rupture, ce qui impose de trouver de meilleures approches.

#### III-3-2 Elément bout de fissure non constant

Un élément bout de fissure constant donne une discontinuité non nulle à l'extrémité de la fissure. Pour assurer la continuité du déplacement en bout de fissure, cela il faut choisir un nouvel élément bout de fissure.

Les équations donnant les coefficients s'influence pour le nouvel élément peuvent être déduites de l'équation donnant la contrainte  $\sigma_{yy}$ , sur la ligne  $y = 0$ , la contrainte  $\sigma_{yy}$  est définie par:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{-\mu}{2\pi(1-\nu)} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-a}^a [u_y(r)] \frac{dr}{(x-r)^2 + y^2} \quad (3.8)$$

Si nous remplaçons  $[u_y(r)] = D_y$  (discontinuité constante) dans (3.8), nous allons trouver (3.3).

Plusieurs élément bout de fissure on été proposés :

- Élément linéaire [25] :  $[u_y(r)] = \alpha r$  (3.9)

- Élément quadratique [25] :  $[u_y(r)] = \alpha r^2 + \beta r + \gamma$  (3.10)

- Élément parabolique [26.27.28] :  $[u_y(r)] = \alpha \sqrt{r-a}$  (3.11)

- Élément puissant [29] :  $[u_y(r)] = \alpha r^{1/2} + \beta r^{3/2}$  (3.12)

### III-3-3 Élément parabolique adopté

Le déplacement relatif entre les lèvres de la fissure au voisinage du front de la fissure est donné par l'équation  $[u_y] = \frac{8K_I}{E} C_2 \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$ . Comme  $\frac{8K_I}{E} C_2 \sqrt{\frac{1}{2\pi}} = \text{const} \Rightarrow [u_y] \propto \sqrt{r}$ . Nous allons choisir un élément bout de fissure parabolique défini par (3.13) et avec les notations de la figure (3.3)

$$[u_y(r)] = \alpha \sqrt{r} \quad (3.13)$$

L'élément parabolique est représenté pour le bout de fissure gauche par la figure (fig.3.3).

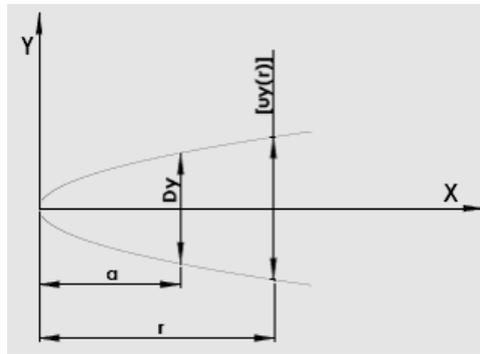


Fig.3.3 Représentation de l'élément parabolique gauche

En injectant l'expression (3.13) dans l'équation (3.8) de la contrainte où  $\alpha = D_y/\sqrt{a}$  et les notations de (fig.3.3)

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{-\mu}{2\pi(1-\nu)} D_y \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{2a} \frac{\sqrt{r/a}}{(x-r)^2 + y^2} dr \quad (3.14)$$

L'intégrale pour  $x > 0$  est donné par :

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{-\mu}{2\pi(1-\nu)} D_y \left[ \frac{\sqrt{2}}{x-2a} + \frac{1}{2\sqrt{ax}} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x}+\sqrt{2a}} \right| \right] \quad (3.15)$$

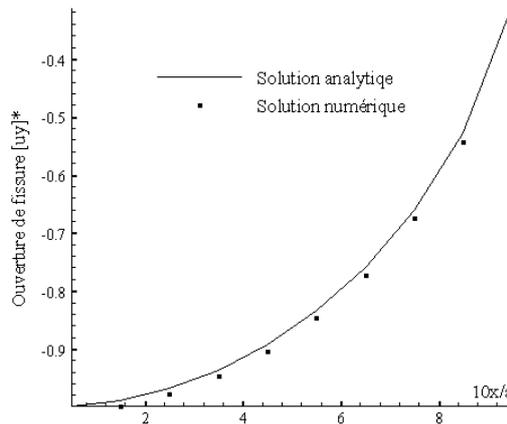
Des expressions similaires peuvent être écrites pour le bout droit de la fissure.

Suivant le même procédé du paragraphe (III-2), et si le premier et le dernier élément sont les éléments bout de fissure, il s'en suit des équations (3.3) et (3.15) que les coefficients d'influence sont :

$$\begin{cases} A^{ij} = \frac{-a^j \mu}{\pi(1-\nu)} \frac{1}{(x^i - x^j)^2 - a^{j^2}} & j = 2, N-1 \\ A^{ij} = \frac{-\mu}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\sqrt{2}}{s-2a^j} + \frac{1}{2\sqrt{a^j s}} \ln \left| \frac{\sqrt{s}-\sqrt{2a^j}}{\sqrt{s}+\sqrt{2a^j}} \right| \right] & j = 1 \text{ et } j = N \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\text{Avec } s = a^j + |x^i - x^j| \quad (3.17)$$

Reprenons l'exemple de la figure (fig.3.1) en utilisant l'élément bout de fissure. Le graphe suivant représente les solutions analytique et numérique de la discontinuité de déplacement avec un élément bout de fissure parabolique.



**Fig.3.4 Distribution de discontinuité de déplacement**

On remarque à partir de la figure (3.4) que l'élément parabolique donne de bons résultats au voisinage du front de fissure. L'erreur n'est que de 6% alors que l'élément simple donne une erreur relative de 26%.

### III-3-4 Généralisation

Dans les équations (2.13) (2.14), nous avons introduit les dérivés d'une fonction  $f(x, y)$ . Cette fonction est obtenue comme suit :

$$D_i f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a D_i(r) \ln[(x-r)^2 + y^2]^{1/2} dr \quad (i = x \text{ ou } y) \quad (3.18)$$

Pour un élément parabolique, les champs des contraintes et déplacements sont définis de la même manière que (2.13) (2.14). La discontinuité constante  $D_i$  est remplacée par  $D_i(r) = D_i \sqrt{r/a}$  dans (3.18).

La fonction  $f(x, y)$  et ces dérivées sont définies comme suit :

$$f(x, y) = A_0 \int_0^{2a} r^{0.5} \ln[(x-r)^2 + y^2]^{0.5} dr \quad (3.19)$$

$$\text{Avec } A_0 = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)a^{0.5}} \quad (3.20)$$

$$f_{,x}(x, y) = A_0 \int_0^{2a} r^{0.5} \frac{x-r}{(x-r)^2+y^2} dr = A_0(xA_1 - A_2) \quad (3.21)$$

$$f_{,y}(x, y) = A_0 \int_0^{2a} r^{0.5} \frac{y}{(x-r)^2+y^2} dr = A_0yA_1 \quad (3.22)$$

$$f_{,xy}(x, y) = -2A_0 \int_0^{2a} r^{0.5} \frac{y(x-r)}{\{(x-r)^2+y^2\}^2} dr = -2A_0yA_{22} \quad (3.23)$$

$$f_{,xx}(x, y) = A_0 \int_0^{2a} r^{0.5} \left[ \frac{-y}{(x-r)^2+y^2} + \frac{2y}{\{(x-r)^2+y^2\}^2} \right] dr = A_0(-yA_1 + 2y^2A_{21}) \quad (3.24)$$

$$f_{,xyy}(x, y) = A_0 \int_0^{2a} r^{0.5} \left[ \frac{-2(x-r)}{\{(x-r)^2+y^2\}^2} + \frac{8y^2(x-r)}{\{(x-r)^2+y^2\}^3} \right] dr = A_0(-A_{22} + 8y^2A_{32}) \quad (3.25)$$

$$f_{,yyy}(x, y) = A_0 \int_0^{2a} r^{0.5} \left[ \frac{-6y}{\{(x-r)^2+y^2\}^2} + \frac{8y^3}{\{(x-r)^2+y^2\}^3} \right] dr = A_0(-6A_{21}y + 8y^3A_{31}) \quad (3.26)$$

Où

$$A_1 = \rho^{-1} \left[ 0.5 \left( \cos \varphi - \frac{x}{y} \sin \varphi \right) \ln \frac{2a-2(2a)^{0.5}\rho \cos \varphi + \rho^2}{2a+2(2a)^{0.5}\rho \cos \varphi + \rho^2} \right. \\ \left. + \left( \sin \varphi + \frac{x}{y} \cos \varphi \right) \arctan \frac{2\sqrt{2a}\rho \sin \varphi}{\rho^2-2a} \right] \quad (3.27)$$

$$A_2 = \rho \left[ 0.5 \left( \cos \varphi + \frac{x}{y} \sin \varphi \right) \ln \frac{2a-2(2a)^{0.5}\rho \cos \varphi + \rho^2}{2a+2(2a)^{0.5}\rho \cos \varphi + \rho^2} \right. \\ \left. + \left( -\sin \varphi + \frac{x}{y} \cos \varphi \right) \arctan \frac{2\sqrt{2a}\rho \sin \varphi}{\rho^2-2a} \right] \quad (3.28)$$

$$A_{21} = 0.5\rho^{3/2} \left[ \frac{2xa-x^2+y^2}{y^2(x^2+y^2)((x-2a)^2+y^2)} - \frac{y^2-x^2}{y^2(x^2+y^2)^2} \right] \\ + 0.25 \frac{(-xA_2+(3x^2+y^2)A_1)}{y^2(x^2+y^2)} \quad (3.29)$$

$$A_{22} = 0.5\rho^{3/2} \left[ \frac{2x-2a}{(x^2+y^2)((x-2a)^2+y^2)} - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \right] \\ + 0.25 \frac{A_2-2xA_1}{(x^2+y^2)} \quad (3.30)$$

$$A_{31} = 0.25\rho^{3/2} \left[ \frac{2xa - x^2 + y^2}{y^2(x^2 + y^2)((x-2a)^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{y^2(x^2 + y^2)^3} \right] + 0.125 \frac{-3A_{22} + (6x^2 + 5y^2)A_{21}}{y^2(x^2 + y^2)} \quad (3.31)$$

$$A_{32} = 0.25\rho^{3/2} \left[ \frac{2x - 2a}{(x^2 + y^2)((x-2a)^2 + y^2)^2} - \frac{2x}{(x^2 + y^2)^3} \right] + 0.125 \frac{3A_{22} - xA_{21}}{(x^2 + y^2)} \quad (3.32)$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/4} \quad (3.33)$$

$$\varphi = 0.5 \arctan \frac{y}{x} \quad (3.34)$$

### III-4 Calcul numérique du facteur d'intensité de contraintes

La méthode la plus simple pour calculer les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  est d'utiliser les relations (1.2)

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2] \quad (3.35)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_1]$$

La méthode de discontinuité de déplacement permet d'évaluer les discontinuités de déplacements en tous points de la fissure. On peut calculer facilement les facteurs d'intensité de contraintes en considérant l'élément bout de fissure.

Les relations suivantes donnent les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction des discontinuités de déplacement normale et tangentiel.

$$K_I = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{a^j}} D_y^j$$

$$K_{II} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{a^j}} D_x^j \quad (3.36)$$

Avec  $j = I$  pour  $K_I$  et  $K_{II}$  gauche et  $j = N$  pour  $K_I$  et  $K_{II}$  droite.

### III-5 Effet de la longueur de l'élément bout de fissure

La précision sur les facteurs d'intensité de contraintes obtenus en utilisant l'élément bout de fissure parabolique varie avec le rapport entre la longueur de l'élément bout de fissure et la longueur des autres éléments qui discrétisent la fissure. Le tableau (3.1) donne les erreurs relatives  $E$  équation (3.37) obtenues sur les facteurs d'intensité de contraintes pour la fissure de la figure (fig.3.1) en fonction de différents rapports  $r_a$  défini par l'équation (3.38)

$$E = 100 \frac{K_I^{\text{numérique}} - K_I^{\text{analytique}}}{K_I^{\text{analytique}}} \quad (3.37)$$

$$r_a = \frac{a_{\text{bout de fissure}}}{a_{\text{constant}}} \quad (3.38)$$

**Tab.3.1 L'erreur sur les facteurs d'intensité de contraintes en fonction de  $r_a$**

$r_a$	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.05	1.10	1.15
$E\%$	13.69	10.67	8.35	6.53	5.05	4.41	3.83	3.10
$r_a$	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55
$E\%$	2.80	2.35	1.93	1.55	1.19	0.85	0.53	0.24

Le meilleur résultat en termes de facteur d'intensité de contrainte est obtenu pour un rapport  $r_a$  supérieur 1,5.

Dans la suite du travail, nous optons pour cette valeur.

### III-6 Structure de programme

Notre programme est écrit en Fortran F90. Il est constitué de quatre parties :

La 1<sup>ère</sup> Partie du programme comporte la lecture des principales données et la discrétisation de domaine et affecte à chaque élément sa position, son orientation et ses conditions aux limites.

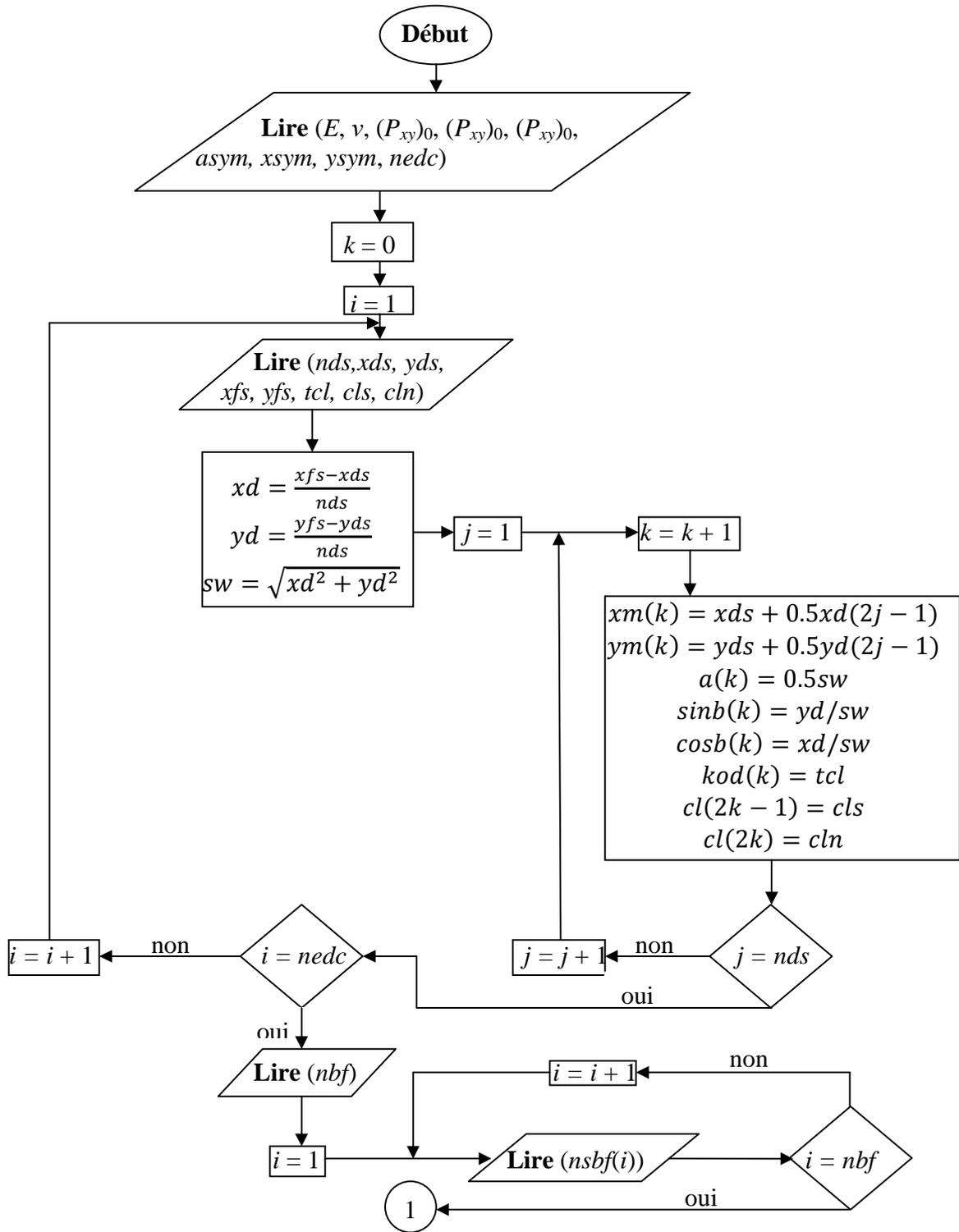
La 2<sup>ème</sup> Partie construit le système d'équations. On récupère les données à partir de la 1<sup>ère</sup> partie puis on calcule les coefficients d'influences entre chaque couple d'éléments de la frontière du corps.

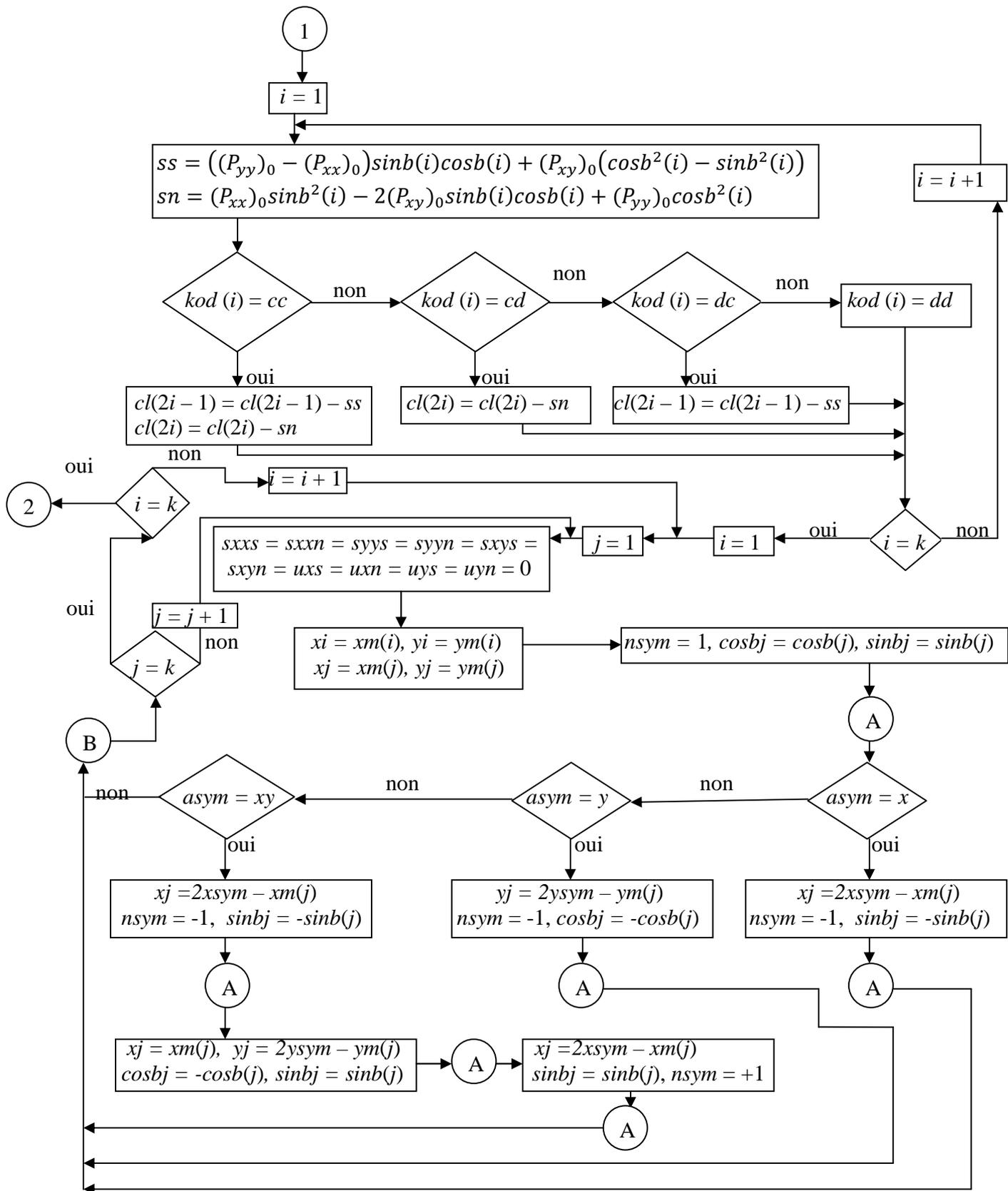
La 3<sup>ème</sup> Partie est dédiée à la résolution du système d'équations obtenu en 2<sup>ème</sup> Partie pour obtenir les composantes de discontinuité de déplacement de chaque élément. Ces résultats vont être utilisés pour la détermination des champs de contraintes et déplacement inconnus, et la détermination des facteurs d'intensité de contraintes dans le cas des structures fissurées.

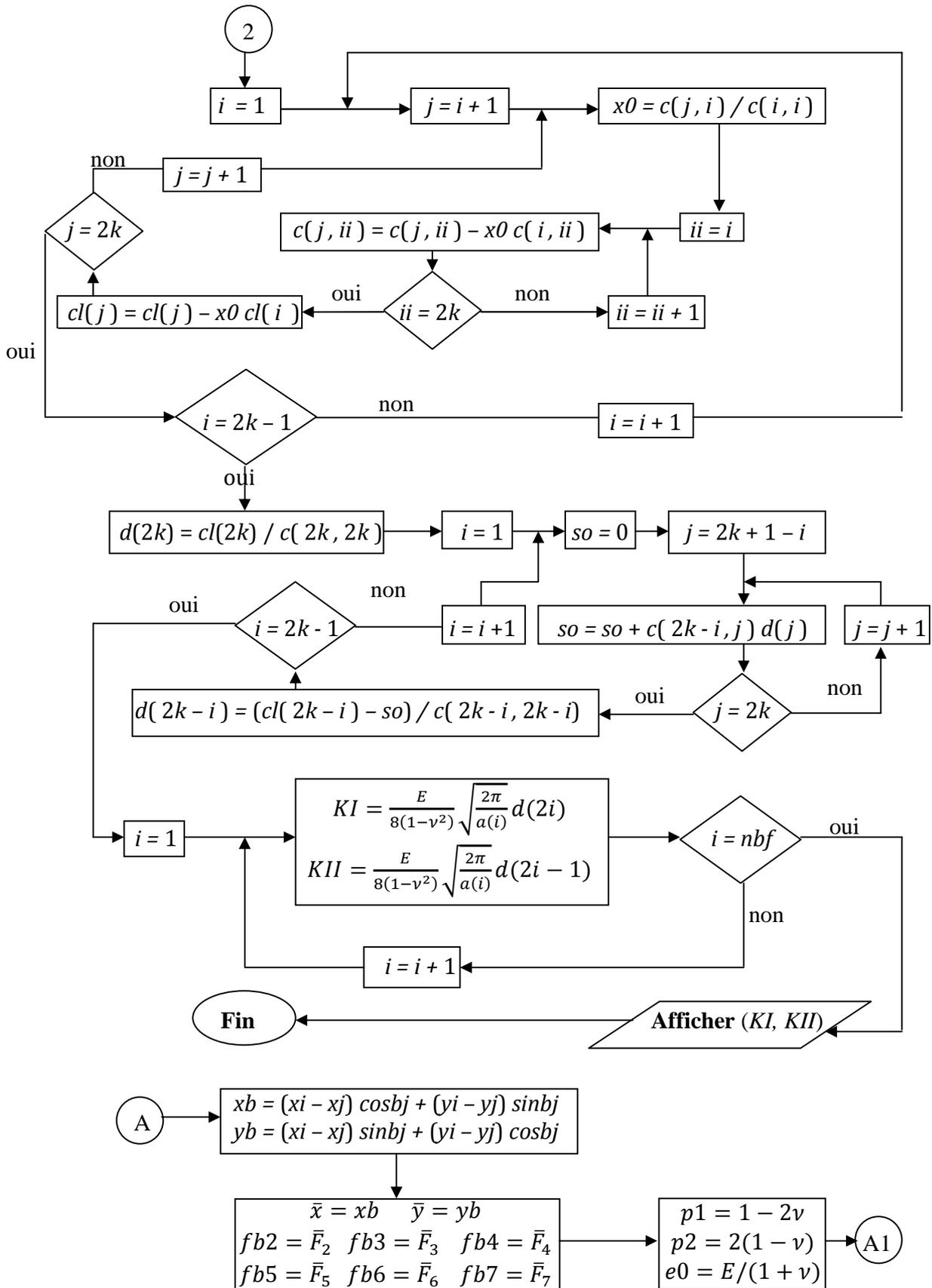
Enfin, dans la 4<sup>ème</sup> Partie, on détermine les contraintes et les déplacements aux points spécifiés du domaine étudié.

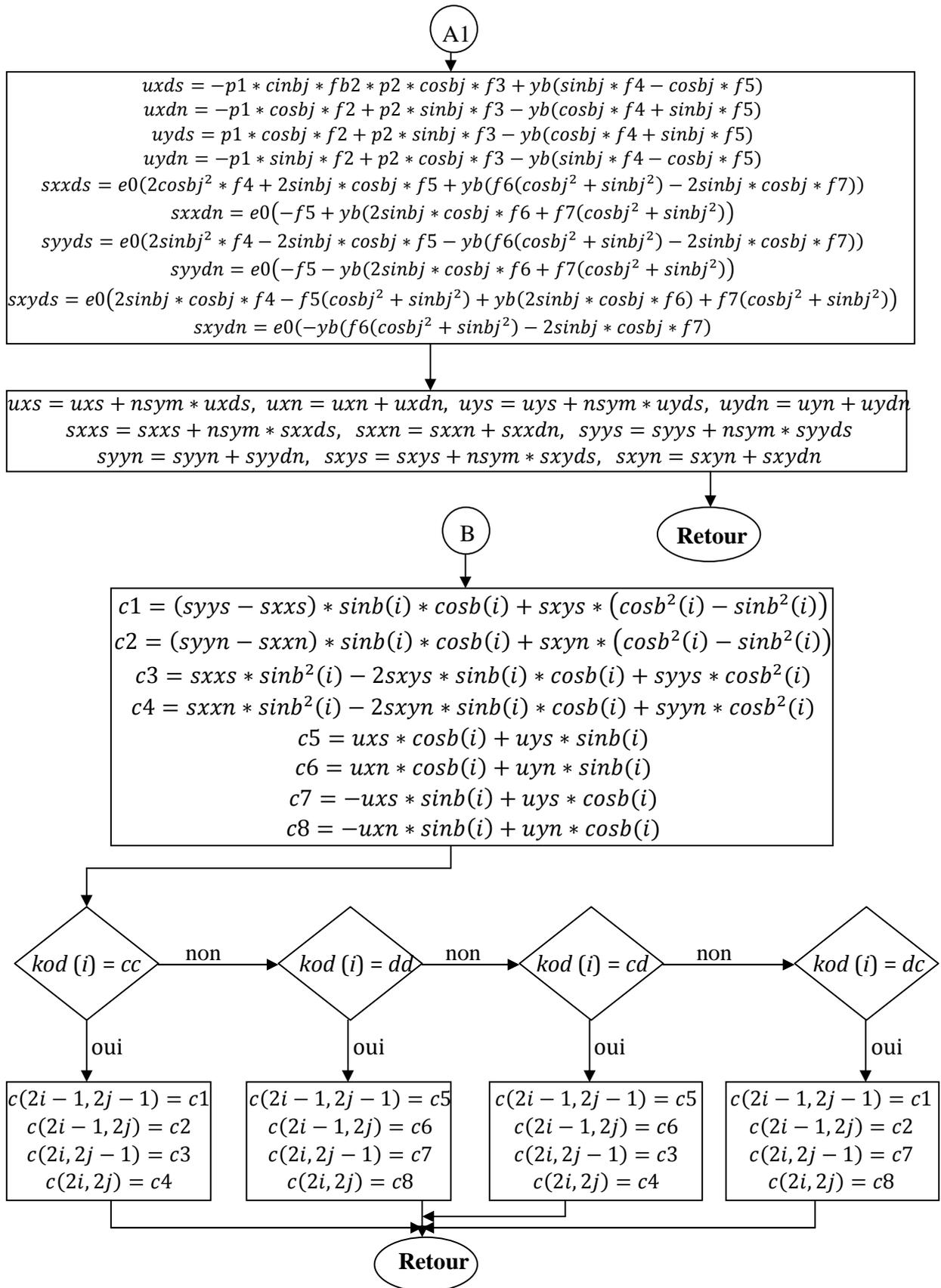
Pour des raisons pratique de représentation, l'organigramme ci-dessous ne reprend que les étapes de calcul du facteur d'intensité de contrainte utilisant l'élément simple.

Mais le programme complet est repris en annexe.









# ***Chapitre IV***

---

## ***Exemples, résultats et interprétations***

- 1) *introduction*
- 2) *Exemples des domaines continus*
- 3) *Choix de nombre d'éléments pour la discrétisation de la fissure*
- 4) *Fissure inclinée dans un plan infini*
- 5) *Fissure inclinée dans un plan infini sous une charge bi axiale*
- 6) *Fissure dans un domaine semi-infini*
- 7) *Fissure débouchant dans une barre sollicitée en quatre points*
- 8) *Fissure émanant d'un trou*
- 9) *Fissure dans une plaque circulaire radialement tendu*
- 10) *Deux fissures croisées dans un domaine infini*
- 11) *fissure débouchant dans une plaque*
- 12) *Conclusion*

## IV-1 introduction

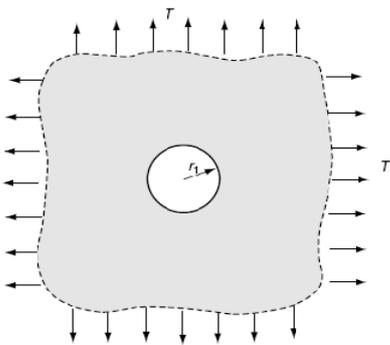
Dans ce chapitre, nous traitons un nombre d'exemples pratiques en mécanique de la rupture qui peuvent être simulés numériquement par la méthode des discontinuités de déplacements (MDD) en bidimensionnel. L'élément bout de fissure est introduit et des comparaisons avec l'élément simples sont faites. Le mode mixte de rupture est pris en compte.

## IV-2 Exemples des domaines continus

Dans cette partie nous allons prendre deux exemples qui ont des distributions de contraintes connus et ils sont représentés dans les réf [30] et [31], on compare les résultats numériques et analytiques pour voir l'efficacité de la MDD pour les milieux continus.

### IV-2-1 Plaque percées soumise à une traction bi axiale

On considère dans cet exemple une plaque infinie percée soumise à une traction bi axiale figure (fig.4.1). La solution analytique du champ de contrainte pour se problème est donnée par (4.1)



$$\begin{aligned}\sigma_r &= T \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= T \left( 1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right)\end{aligned}\quad (4.1)$$

**Fig.4. 1 Plaque percées soumise à une traction bi axiale**

La figure (fig.4.2) représente les champs de contrainte normalisés  $s_1 = \sigma_r/T$  et  $s_2 = \sigma_\theta/T$  obtenus par la méthode de discontinuité de déplacement et par la solution analytique

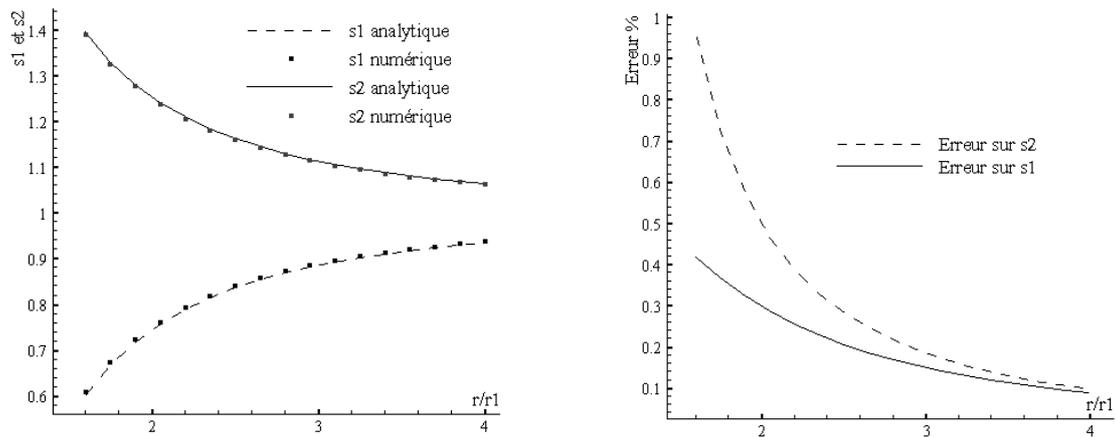


Fig.4.2 Champ de contraintes pour la plaque percée

### IV-2-2 Cylindre épais sous pression

La figure 4.3 représente un cylindre épais de longueur infinie chargé radialement sur sa surface intérieure et extérieure. Le champ de contraintes est donné par les relations (4.2).

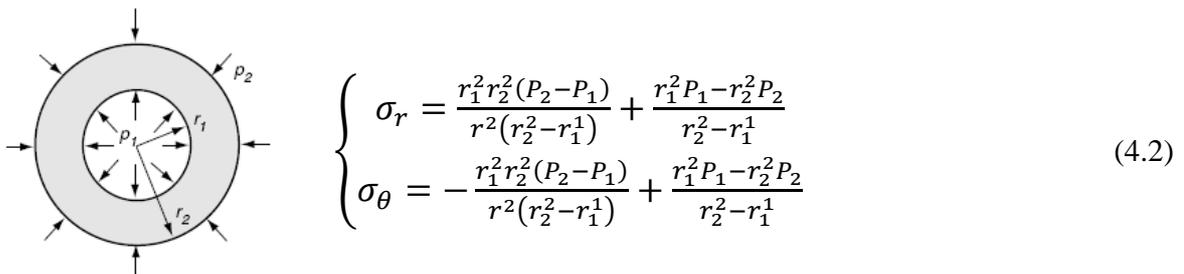


Fig.4.3 Cylindre épais sous pression

La figure (fig.4.4) représente les champs de contrainte  $s_1 = \sigma_r/P_1$  et  $s_2 = \sigma_\theta/P_1 s_1$  obtenus par la MDD et par la solution analytique. Dans cet exemple, on prend  $r_2 = 3r_1$  et  $P_2 = 2P_1$

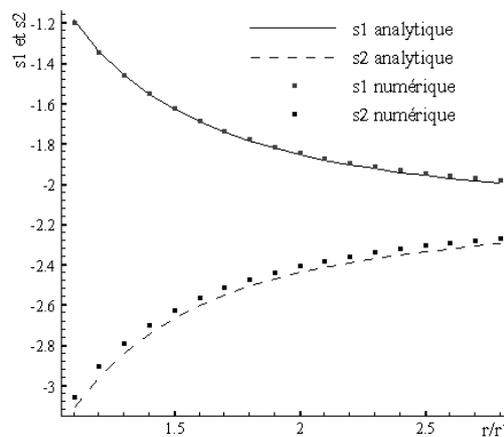


Fig.4.4 Champ de contraintes pour un cylindre épais sous pression

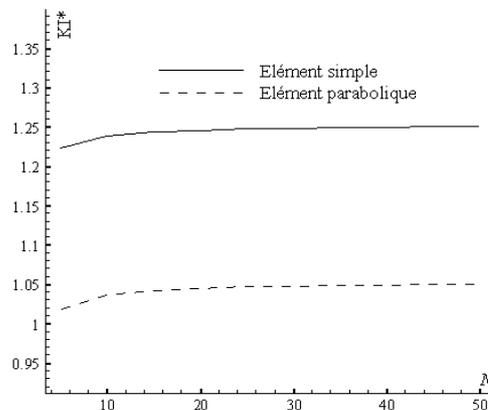
**Tab.4.1 Erreur sur le champ de contraintes pour le cylindre épais**

$r/r_1$	Erreur % s1	Erreur % s2
1.1	0.546	1.582
1.5	0.229	1.408
2.0	0.596	1.234
2.5	0.738	1.142
2.8	0.806	1.0922

Les deux exemples précédents sont des exemples types et ne présentent pas de difficultés. Les erreurs sont très satisfaisantes. Ces deux exemples sont présentés dans le but de montrer l'efficacité et la simplicité pour simuler des milieux continus.

### IV-3 Choix du nombre d'éléments pour la discrétisation de la fissure

Le premier problème d'un milieu fissuré concerne une plaque infinie présentant une fissure de longueur  $2a$  soumise à une traction (cas du mode I pur). Les deux courbes suivantes concernent les résultats du facteur d'intensité de contrainte normalisé  $K_I^*$  (fig.4.5) obtenues avec l'élément simple et parabolique en fonction du nombre d'éléments  $N$ .

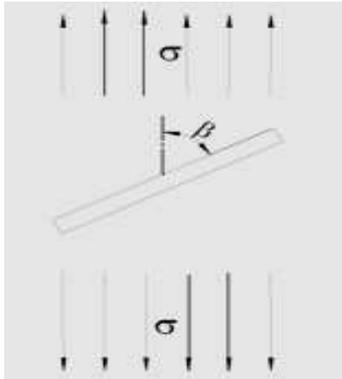


**Fig.4.5 Le facteur d'intensité de contrainte en fonction de nombre d'éléments  $N$**

Cet exemple permet de proposer une discrétisation comme suit. On fixe 40 éléments dans le cas d'une discrétisation en éléments simples. Dans le cas d'une discrétisation avec éléments simples couplés avec un élément parabolique on procède comme suit. 18 éléments et deux éléments paraboliques (soit 20 éléments au total) sont utilisés dans le cas d'un rapport  $r_a = 1$ , 28 éléments simples couplés avec deux éléments paraboliques (soit un total de 30 éléments) dans le cas d'un rapport  $r_a = 1.5$ .

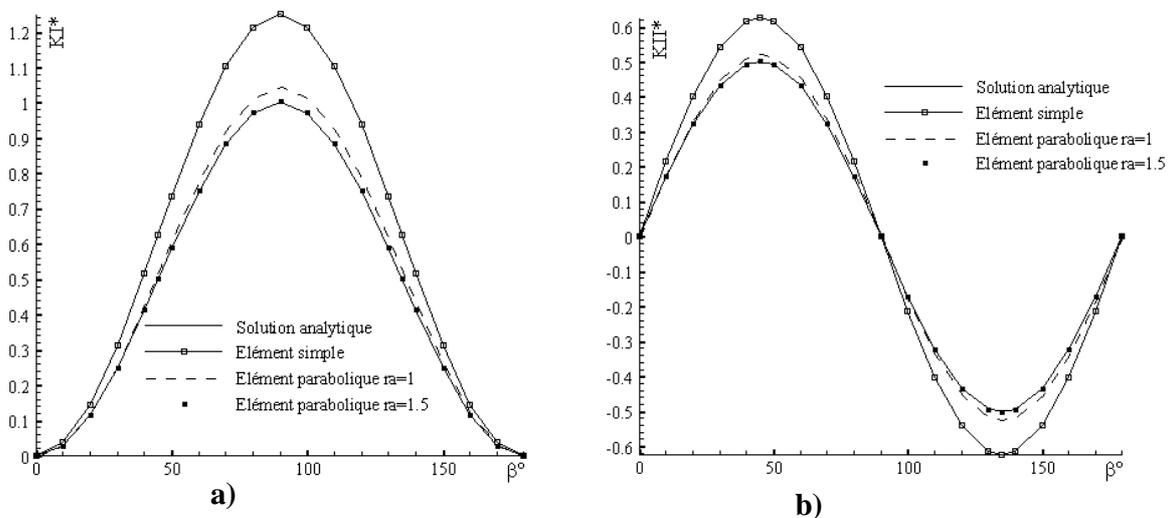
## IV-4 Fissure inclinée dans un plan infini

L'exemple suivant concerne une plaque supposée infini présentant une fissure inclinée d'un angle  $\beta$ , par rapport à l'axe de traction. Les facteurs d'intensité de contraintes sont donnés analytiquement par [1]:



$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \sin \beta \sqrt{\pi a} \begin{bmatrix} \sigma \sin \beta \\ \sigma \cos \beta \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

**Fig.4.6 Fissure inclinée dans un domaine infini**



**Fig.4.7 Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de l'inclinaison de la fissure**

Les graphes (4.7.a) (4.7.b) représentent les facteurs d'intensité de contraintes normalisés en fonction de l'angle d'inclinaison  $\beta$ . Les résultats numériques sont comparables avec la solution exacte mais nous avons une meilleure convergence avec une discrétisation utilisant l'élément parabolique. L'erreur est de 25% avec l'élément simple (40 éléments), elle est de 4.5% avec une discrétisation utilisant 18 éléments simple et deux éléments paraboliques ( $r_a=1$ ) et 0.4% pour

$r_a=1.5$  soit une discrétisation utilisant 28 éléments simples et deux éléments paraboliques seulement.

Par comparaison, cet exemple nécessite un très grand nombre de nœuds avec une discrétisation en éléments finis. Car pour prendre en charge les dimensions infinies, nous devons prendre des dimensions très grandes et raffiner très finement au niveau des fronts de fissure.

A titre de comparaison, l'exemple de la réf [32] utilise la méthode des éléments finis pour la détermination des  $K_I$  et  $K_{II}$ . Dans cet exemple, 5336 nœuds sont utilisés. Le tableau suivant donne une comparaison avec nos résultats (MDD avec  $r_a = 1.5$ ) et les résultats de réf [32] (MEF)

**Tab.4.2 Comparaison entre la MDD et la MEF**

$\beta^\circ$	MEF		MDD	
	$K_I^* / \sin^2 \beta$	$K_{II}^* / \sin \beta \cos \beta$	$K_I^* / \sin^2 \beta$	$K_{II}^* / \sin \beta \cos \beta$
10	1.0189	1.0066	1.0033	1.0041
20	1.0145	1.0088	1.0034	1.0037
30	1.0112	1.0078	1.0040	1.0039
40	1.0123	1.0069	1.0039	1.0039
50	1.0115	1.0069	1.0039	1.0039
60	1.0105	1.0052	1.0039	1.0039
70	1.0102	1.0035	1.0040	1.0037
80	1.0093	1.0033	1.0039	1.0041

La solution exacte pour  $K_I^* / \sin^2 \beta$  et  $K_{II}^* / \sin \beta \cos \beta$  est 1. On remarque à partir de tableau (tab.4.2) que nos résultats sont comparables avec les résultats obtenus par la méthode des éléments finis avec seulement 30 éléments au total. Un autre avantage réside aussi dans la prise en compte de la propagation. Chose qui reste très compliquée dans le cas d'une étude en éléments finis.

#### IV-5 Fissure inclinée dans un plan infini sous une charge bi axiale

L'exemple suivant reprend la géométrie du problème précédent avec un chargement bi axial proportionnel représenté sur la figure (4.8). La solution analytique est donnée par l'équation (4.4). Dans ce cas une discrétisation en 20 éléments soit  $r_a=1$  a été utilisées.

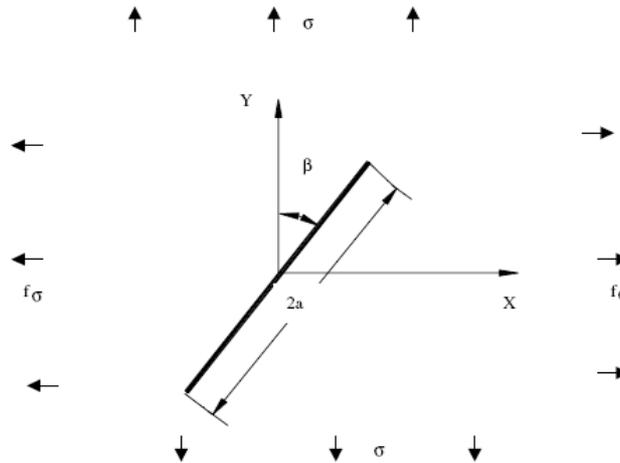


Fig.4.8 Fissure inclinée sous une charge bi axiale

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \sqrt{\pi a} \begin{bmatrix} \sin^2 \beta + f \cos^2 \beta \\ \cos \beta \sin \beta (1 - f) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Les deux tableaux (4.3) et (4.4) suivants présentent respectivement les résultats analytiques et numériques du facteur d'intensité de contrainte normalisés en mode I et II.

Tab.4.3 Facteurs d'intensité de contraintes obtenus analytiquement

$\beta^\circ$	$f = 0.25$		$f = 0.5$		$f = 2$		$f = 4$	
	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$
15	0.3002	0.1875	0.5335	0.1250	1.9330	-0.2500	3.7990	-0.7500
30	0.4375	0.3248	0.6250	0.2165	1.7500	-0.4330	3.2500	-1.2990
45	0.6250	0.3750	0.7500	0.2500	1.5000	-0.5000	2.5000	-1.5000
60	0.8125	0.3248	0.8750	0.2165	1.2500	-0.4330	1.7500	-1.2990
75	0.9498	0.1875	0.9665	0.1250	1.0970	-0.2500	1.2010	-0.7500

Tab.4.4 Facteurs d'intensité de contraintes obtenus numériquement

$\beta^\circ$	$f = 0.25$		$f = 0.5$		$f = 2$		$f = 4$	
	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$
15	0.3141	0.1961	0.5581	0.1308	2.0221	-0.2615	3.9742	-0.7846
30	0.4577	0.3397	0.6538	0.2265	1.8307	-0.4530	3.3999	-1.3589
45	0.6538	0.3923	0.7846	0.2615	1.5692	-0.5231	2.6153	-1.5692
60	0.8500	0.3397	0.9153	0.2265	1.3076	-0.4530	1.8307	-1.3589
75	0.9936	0.1961	1.0111	0.1308	1.1162	-0.2615	1.2563	-0.7846

L'erreur maximale est de 5% avec l'utilisation d'un rapport  $r_a = 1$ . Elle peut être améliorée significativement si on utilise  $r_a = 1.5$ . Ceci n'a pas été fait faute de temps.

#### IV-6 Fissure dans un domaine semi-infini

Dans cet exemple nous allons étudier l'efficacité de la MDD dans les domaines semi-infinis. Pour cela, on considère l'exemple d'une fissure débouchante soumise à l'infini à une traction  $\sigma$  et un cisaillement  $\tau$  (fig.4.9). Les facteurs d'intensité de contraintes sont donnés par [1]:

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = 1.1215\sqrt{\pi a} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

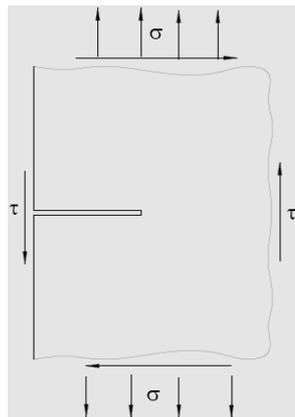
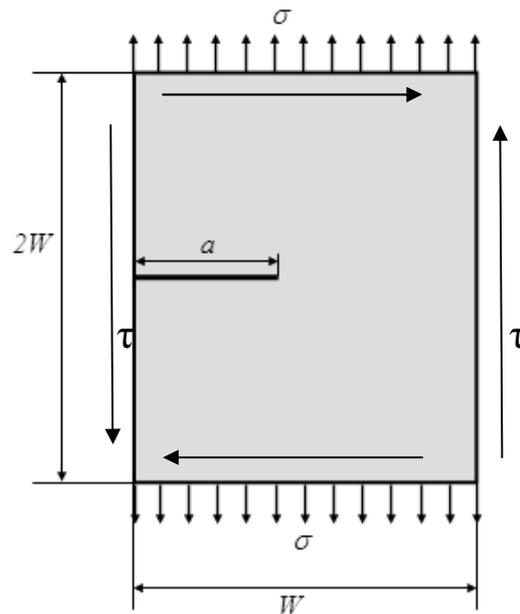


Fig.4.9 Fissure débouchant dans un domaine semi infini

La méthode des discontinuités de déplacement peut prendre en charge les domaines semi infinis. Mais dans la formulation qui nous concerne, nous ne pouvons traiter que les milieux finis ou infinis. Il existe une autre formulation de la MDD pour les domaines semi-infinis [33].

On va supposer un domaine fini (fig.4.10) avec des dimensions très grandes devant les dimensions de la fissure pour éviter les phénomènes de bords.



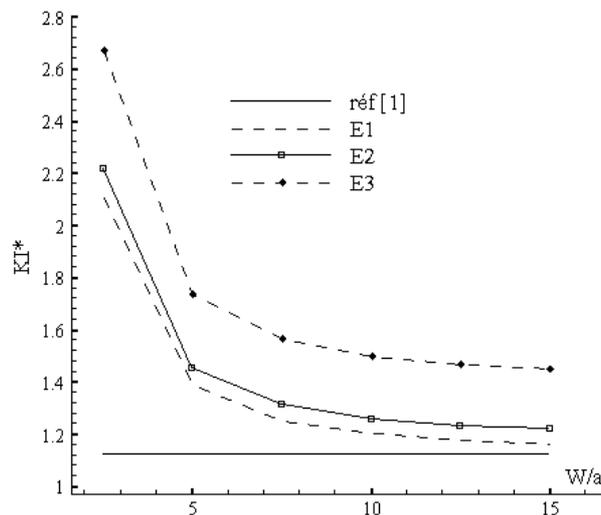
**Fig.4.10 Fissure débouchant dans une plaque finie**

Le tableau (tab.4.5) représente le facteur d'intensité de contrainte  $K_I^*$  en fonction du rapport  $W/a$ , où  $E_1$  est la valeur de  $K_I^*$  obtenue avec l'élément parabolique  $ra = 1.5$ ,  $E_2$  est la valeur de  $K_I^*$  obtenue avec l'élément parabolique  $ra = 1$  et  $E_3$  est la valeur de  $K_I^*$  obtenue avec l'élément simple.

Pour la discrétisation, on divise la fissure en 20 éléments. La plaque est discrétisée selon la condition que tous les éléments de frontière ont approximativement la même longueur.

Tab.4.5 Comparaison entre les  $K_I^*$  analytique et numérique pour différents valeurs de  $W/a$ 

$W/a$	$K_I^* [1]$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\frac{(E_1 - K_I^* [1])}{K_I^* [1]}$	$\frac{(E_2 - K_I^* [1])}{K_I^* [1]}$	$\frac{(E_3 - K_I^* [1])}{K_I^* [1]}$
					$K_I^* [1]$	$K_I^* [1]$	$K_I^* [1]$
2.5	1.1215	2.1080	2.2173	2.6693	0.88	0.98	1.38
5.0	1.1215	1.3889	1.4545	1.7377	0.24	0.30	0.55
7.5	1.1215	1.2541	1.3123	1.5652	0.12	0.17	0.40
10.0	1.1215	1.2038	1.2593	1.5011	0.07	0.12	0.34
12.5	1.1215	1.1792	1.2334	1.4698	0.05	0.10	0.31
15.0	1.1215	1.1653	1.2187	1.4520	0.04	0.09	0.29

Fig.4.11 Comparaison entre les  $K_I^*$  analytique et numérique pour différentes valeurs de  $W/a$ 

On remarque que les résultats numériques convergent vers la solution donnée par [1] en augmentant les dimensions de la plaque par rapport à la dimension de la fissure. On obtient de bon résultats pour un rapport  $a/W$  supérieur ou égale à 10. Ce rapport peut être utilisé pour considérer que la plaque est de dimension infinie dans certains problèmes. Donc la MDD permet d'étudier les domaines semi-infini, mais le nombre d'éléments qui discrétisent le contour est relativement élevé. Par exemple, pour un rapport  $a/W = 10$ , la plaque est discrétisée en 1200 éléments.

### IV-7 Fissure débouchant dans une barre sollicitée en quatre points

Dans le cas de la flexion trois points avec fissure au milieu, essai très utilisé en mécanique de la rupture, on est en mode I pur. L'exemple de l'essai suivant en flexion quatre points est utilisé pour faire intervenir le mode mixte. La barre est représentée sur la figure (4.12). Où  $F$  est la force appliquée,  $a$  est la longueur de la fissure,  $W$  est la largeur de barre,  $d$  est la distance entre la force et le milieu de la barre.  $L$  est la distance entre le support et le milieu de la barre.  $s$  est la distance entre la fissure et le milieu de la barre. L'épaisseur de la barre est prise égale à l'unité.

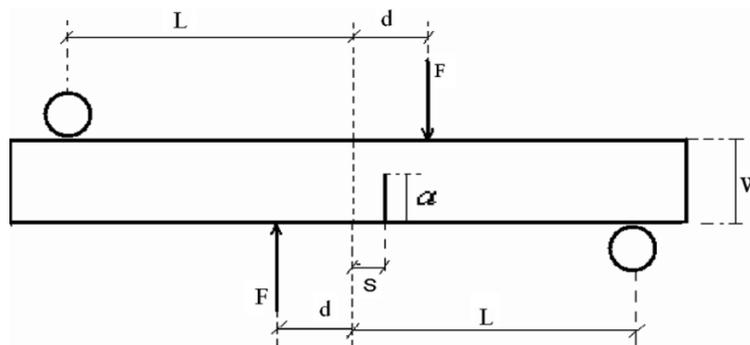


Fig.4.12 Fissure débouchant dans une barre sollicitée en quatre points

Les facteurs d'intensité de contrainte sont donnés par [34]:

$$K_I = \frac{6sQ}{W^2} \sqrt{\pi a} F_I \left( \frac{a}{W} \right) \quad (4.6)$$

$$K_{II} = \frac{Q}{W^{1/2}} \frac{(a/W)^{3/2}}{(1-a/W)^{1/2}} F_{II} (a/W)$$

Les fonctions  $F_I$  et  $F_{II}$  sont définis par :

$$F_I = 1.121 \left( \frac{a}{W} \right) + 3.740 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 3.873 \left( \frac{a}{W} \right)^3 - 19.05 \left( \frac{a}{W} \right)^4 + 22.55 \left( \frac{a}{W} \right)^5 \quad 0 \leq \frac{a}{W} \leq 0.7 \quad (4.7)$$

$$F_{II} = 7.264 - 9.37 \left( \frac{a}{W} \right) + 2.740 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 1.87 \left( \frac{a}{W} \right)^3 - 1.04 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \quad 0 \leq \frac{a}{W} \leq 1$$

La charge  $Q$  est défini par :

$$Q = \frac{F(L-d)}{L} \quad (4.8)$$

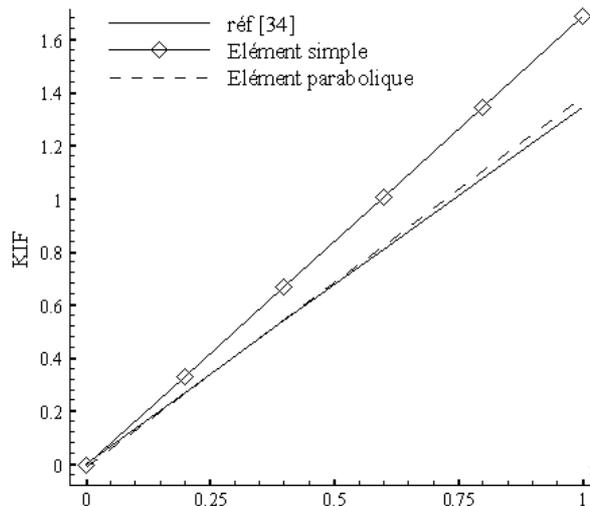
Dans le tableau suivant, les facteurs d'intensité de contraintes normalisés par la force  $F$  obtenus par les relations (4.6) et par la MDD utilisant une discrétisation en élément simple et parabolique  $r_a = 1$ , sont :

$$K_I^F = K_I / (F\sqrt{\pi a}) \text{ et } K_{II}^F = K_{II} / (F\sqrt{\pi a}) \quad (4.9)$$

Pour l'application numérique on prend les dimensions suivantes :  $a = 1$ ,  $W = 2$ ,  $L = 5$ ,  $d = 2$  et on fait varier  $s$  entre 0 et 1.

**Tab.4.6 Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de  $s$**

s	Réf [34]		Elément simple		Elément parabolique	
	$K_I^F$	$K_{II}^F$	$K_I^F$	$K_{II}^F$	$K_I^F$	$K_{II}^F$
<b>0</b>	0.0000	0.4108	-0.0064	0.5281	-0.0053	0.4425
<b>0.2</b>	0.2689	0.4108	0.3294	0.5333	0.2718	0.4468
<b>0.4</b>	0.5377	0.4108	0.6665	0.5378	0.5500	0.4506
<b>0.6</b>	0.8066	0.4108	1.0049	0.5406	0.8293	0.4530
<b>0.8</b>	1.0756	0.4108	1.3448	0.5392	1.1098	0.4519
<b>1.0</b>	1.3443	0.4108	1.6853	0.5298	1.3908	0.4439



**Fig.4.13 Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de  $s$**

Les résultats numériques obtenus avec l'élément parabolique sont proches de celle de [34].  $K_I^F$  varie linéairement avec  $s$  comme le montre l'équation (4.6) dans les deux cas de discrétisation.

Si la fissure est au milieu de la barre, le moment fléchissant est égal à zéro et l'effort tranchant est différent de zéro. Dans ce cas, nous sommes en mode II pur ( $K_I = 0$ ). Cela est traduit

par nos résultats où  $K_I$  est très petit pour  $s = 0$  et peut être considéré comme nul devant  $K_{II}$ . Cela est dû à l'interaction entre la force et la fissure. Si les forces sont loin de la fissure, l'interaction diminue et le mode I disparaît [35] et [36].

## IV-8 Fissure émanant d'un trou

Dans cet exemple, on applique la méthode de discontinuité de déplacement à une fissure émanant d'un trou dans un domaine infini (fig.4.14). On compare nos résultats avec les résultats de la réf. [1] qui donne les facteurs d'intensité en fonction de  $\alpha$

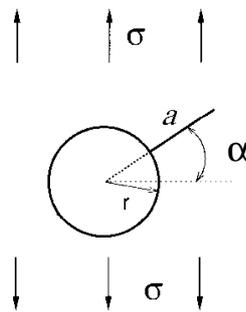


Fig.4.14 fissure émanant d'un trou

Pour la discrétisation, on divise la fissure en 20 éléments pour l'élément parabolique, et le cercle est discrétisé uniformément. Le tableau (4.8) montre le nombre d'éléments sur le cercle en fonction du rapport  $a/r$ .

Tab.4.8 Nombre de division du cercle en fonction de rapport  $a/r$ .

$a/r$	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0
$N$	314	251	210	157	126	063	042

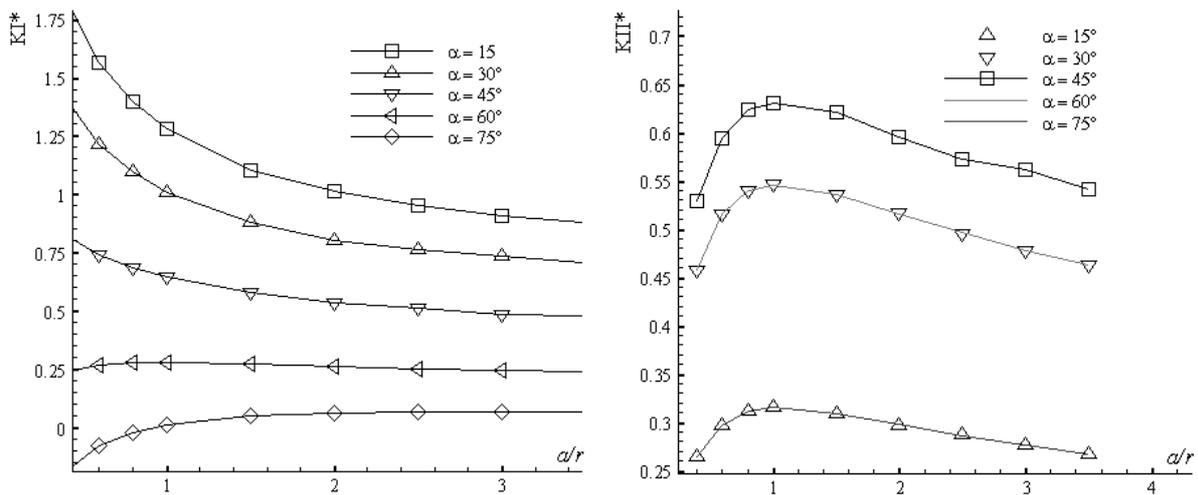
Tab.4.9 Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de  $a/r$  pour  $\alpha = 0$

$a/r$	$K_I^*$				Erreur %		
	Réf [1]	$E_3$	$E_2$	$E_1$	$E_3$	$E_2$	$E_1$
<b>0.4</b>	1.860	2.3638	1.9873	1.8969	27.09	6.84	1.98
<b>0.5</b>	1.730	2.1669	1.8240	1.7458	25.25	5.43	0.91
<b>0.6</b>	1.640	2.0117	1.6934	1.6221	22.66	3.26	1.09
<b>0.8</b>	1.470	1.7875	1.5308	1.4416	21.60	4.13	1.93
<b>1.0</b>	1.370	1.6395	1.3901	1.3446	19.67	2.01	1.85
<b>2.0</b>	1.060	1.2614	1.0869	1.0660	19.00	2.54	0.57
<b>3.0</b>	0.940	1.0908	0.9753	0.9365	16.04	3.76	0.37

Les résultats numériques sont conformes avec les résultats de réf [1]. Nous calculons dans ce qui suit, les facteurs d'intensité de contraintes en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure par la méthode de discontinuité de déplacement dans le cas d'un élément parabolique avec  $r_a = 1$ .

**Tab.4.10 Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de  $a/r$  et de  $\alpha$**

$a/r$	$\alpha = 15^\circ$		$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 45^\circ$		$\alpha = 60^\circ$		$\alpha = 75^\circ$	
	$K_I^*$	$K_{II}^*$								
<b>0.4</b>	1.8335	0.2650	1.4072	0.4574	0.8249	0.5287	0.2427	0.4578	-0.1834	0.2644
<b>0.6</b>	1.5651	0.2972	1.2155	0.5153	0.7430	0.5945	0.2685	0.5154	-0.0784	0.2972
<b>0.8</b>	1.3968	0.3114	1.0994	0.5398	0.6871	0.6232	0.2787	0.5393	-0.0211	0.3114
<b>1.0</b>	1.2785	0.3153	1.0092	0.5473	0.6459	0.6307	0.2800	0.5458	0.0124	0.3152
<b>1.5</b>	1.1049	0.3089	0.8790	0.5357	0.5790	0.6210	0.2735	0.5359	0.0505	0.3091
<b>2.0</b>	1.0117	0.2972	0.8018	0.5175	0.5375	0.5955	0.2630	0.5152	0.0630	0.2975
<b>2.5</b>	0.9506	0.2868	0.7647	0.4956	0.5104	0.5729	0.2542	0.4970	0.0672	0.2861
<b>3.0</b>	0.9093	0.2760	0.7338	0.4774	0.4848	0.5616	0.2465	0.4776	0.0682	0.2761
<b>3.5</b>	0.8803	0.2673	0.7091	0.4632	0.4769	0.5414	0.2400	0.4630	0.0685	0.2672

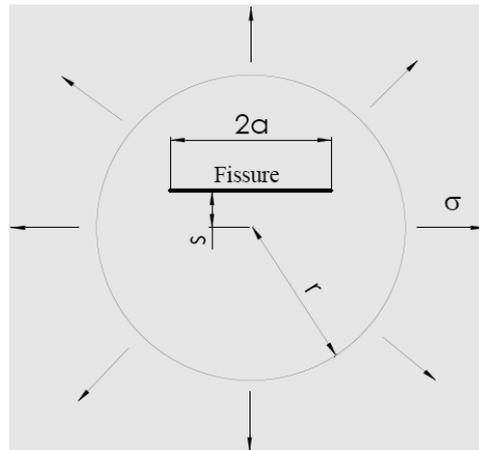


**Fig.4.15 Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de  $a/r$  et de  $\alpha$**

En remarque à partir des (fig.4.15) que les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  ont la même évolution pour les différents angles d'inclinaison  $\alpha$ . Certains rapports doivent être étudiés avec plus de détails et s'intéresser aussi à la variation de  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de  $\alpha$ .

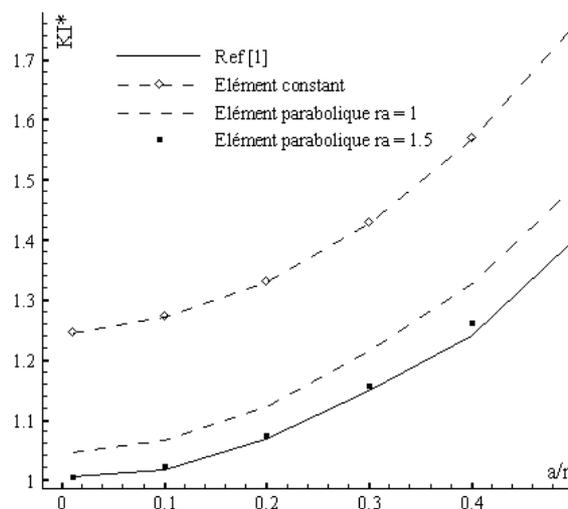
### IV-9 Fissure dans une plaque circulaire radialement tendu

La géométrie et le chargement de cet exemple sont représentés dans la figure (4.16).



**Fig.4.16 Fissure dans une plaque circulaire radialement tendu**

Le graphe (4.17) montre la variation de  $K_I^*$  pour  $s = 0$  donné numériquement et par la réf [1]. Pour le nombre d'éléments qui discrétisent le cercle, on respecte la procédure de l'exemple IV-8



**Fig.4.17 Variation de  $K_I^*$  en fonction de  $a/r$  pour  $s = 0$**

Le tableau suivant représente la variation des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  pour différents valeurs de  $a/r$  et  $s/r$ .

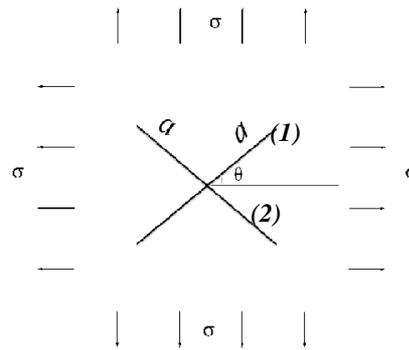
**Tab.4.11 Facteurs d'intensité de contraintes en fonction de  $a/r$  et  $s/r$**

$a/r$	$s/r = 0.1$		$s/r = 0.2$		$s/r = 0.3$		$s/r = 0.4$	
	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$
<b>0.01</b>	1.0053	-0.0000	1.0053	-0.0000	1.0053	-0.0000	1.0054	-0.0000
<b>0.1</b>	1.0216	-0.0002	1.0232	-0.0005	1.0263	-0.0010	1.0316	-0.0017
<b>0.2</b>	1.0754	-0.0019	1.0815	-0.0042	1.0932	-0.0074	1.1131	-0.0124
<b>0.3</b>	1.1603	-0.0061	1.1731	-0.0132	1.1976	-0.0229	1.2390	-0.0376
<b>0.4</b>	1.2754	-0.0133	1.2968	-0.0286	1.3375	-0.0489	1.4061	-0.0790
<b>0.5</b>	1.4317	-0.0242	1.4651	-0.0518	1.5284	-0.0881	1.6352	-0.1413
$a/r$	$s/r = 0.5$		$s/r = 0.6$		$s/r = 0.7$		$s/r = 0.8$	
	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$
<b>0.01</b>	1.0055	-0.0000	1.0056	-0.0000	1.0060	-0.0000	1.0071	-0.0001
<b>0.1</b>	1.0407	-0.0029	1.0576	-0.0057	1.0930	-0.0128	1.1855	-0.0381
<b>0.2</b>	1.1468	-0.0213	1.2073	-0.0391	1.3275	-0.0813	1.6203	-0.2067
<b>0.3</b>	1.3083	-0.0627	1.4301	-0.1104	1.6688	-0.2157	2.2545	-0.5164
<b>0.4</b>	1.5208	-0.1289	1.7224	-0.2213	2.1221	-0.4235	3.1320	-1.0207
<b>0.5</b>	1.8162	-0.2287	2.1408	-0.3912	2.8141	-0.7656	4.4803	-1.7709

Dans cet exemple la puissance de l'élément parabolique avec  $ra=1.5$  est bien montrée. On doit veiller à faire attention dans le cas de grand rapport de  $s/r$  sur l'effet des résultats et cela particulièrement sur le mode II. Ceci est valable aussi dans le cas de l'exemple IV-8

#### **IV-10 Deux fissures croisées dans un domaine infini**

L'intérêt de cet exemple réside dans le fait de faire une comparaison avec les résultats de « extended finite element method » disponibles [37]. L'exemple suivant concerne deux fissures croisées dans un plan infini avec une traction bi axiale à l'infini  $P_{xx} = \sigma$ ,  $P_{yy} = \sigma$  donné en figure (4.18).



**Fig.4.18 fissures croisées dans un domaine infini**

Le tableau (4.12) montre le facteur d'intensité de contrainte normalisé  $K_I^*$  pour  $\theta = 0$ , obtenu par la méthode de discontinuité de déplacement et la méthode des éléments fini étendu (XFEM) « extended finite element method » [37] comparé avec le facteur d'intensité de contrainte normalisé  $K_I^*$  donné par [38].

**Tab.4.12 Facteur d'intensité de contraintes pour  $\theta = 0$**

	Réf [38]	XFEM	Elément simple	Elément parabolique $r_a$ = 1	Elément parabolique $r_a$ = 1.5
$K_I^*$	0.8641	0.8653	1.0717	0.8950	0.8631

Nos résultats donnent les différences suivantes par rapport à la réf [38]. Les résultats donnés par une discrétisation en éléments simples donnent une erreur de 24.02%. En faisant intervenir l'élément parabolique avec  $r_a = 1$ , l'erreur chute à 3.58% alors qu'elle n'est que de 0.12 avec  $r_a = 1.5$ . L'élément parabolique avec  $r_a = 1,5$  a donné des résultats très proches de celle de réf [38].

En constate aussi que les facteurs d'intensité de contrainte obtenus par l'élément parabolique  $r_a = 1.5$  sont très proches des facteurs d'intensité de contrainte obtenus par la méthode des éléments fini étendu. Afin de mettre en évidence le mode mixte, dans la suite de l'exemple, nous allons évaluer les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  pour différentes valeurs de  $\theta$  et avec une pression  $\sigma = P_{yy}$ .

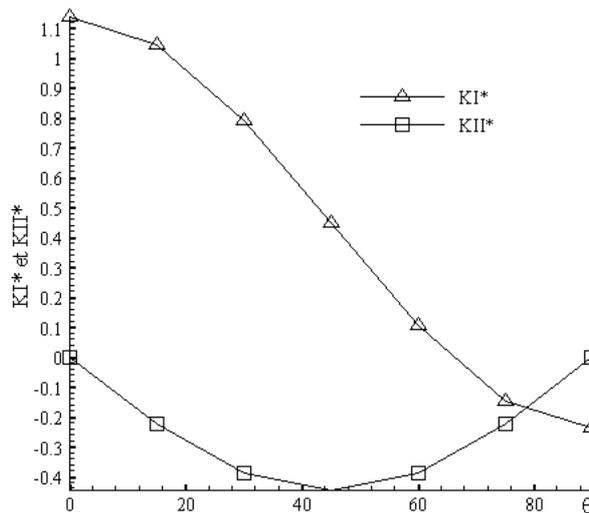
Tab.4.13 Facteurs d'intensité de contrainte fonction de  $\theta$  pour une traction simple.

$\theta^\circ$	$r_a = 1$		$r_a = 1.5$	
	$K_I^*$	$K_{II}^*$	$K_I^*$	$K_{II}^*$
0	1.1348	0.0000	1.0863	0.0000
15	1.0427	-0.2238	0.9981	-0.2142
30	0.7911	-0.3876	0.7473	-0.3710
45	0.4475	-0.4475	0.4284	-0.4284
60	0.1039	-0.3876	0.0995	-0.3709
75	-0.1477	-0.2238	-0.1414	-0.2142
90	-0.2398	0.0000	-0.2296	0.0000

Les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  représentés dans le tableau (tab.4.13) concernent la fissure (1),

Pour la fissure (2),  $K_{II}^{(2)}(\theta) = -K_{II}^{(1)}(\theta)$  et  $K_I^{(2)}(\theta) = K_I^{(1)}(\theta + \pi)$ .

On remarque que les facteurs d'intensité de contrainte de la fissure (1) ont la même évolution que ceux de l'exemple IV-4 avec des valeurs de  $K_I$  et  $K_{II}$  supérieures. Cela est dû à l'influence de la deuxième fissure.

Fig.4.18 Facteurs d'intensité de contrainte fonction de  $\theta$  pour une traction simple.

### IV-11 fissure débouchant dans une plaque

L'exemple suivant concerne une fissure débouchante dans une plaque fini. La base de la plaque est bloquée en déplacement et soumise à un cisaillement unitaire  $\tau = 1$ . La plaque est représentée sur la figure (4.19) présente les dimensions suivantes :  $a = 3.5$ ,  $W = 7$  et  $L = 10$ . Le module de Young fictif est pris égal à  $E^* = 10^5$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ . Toutes les unités consistent avec celle de  $E$ .

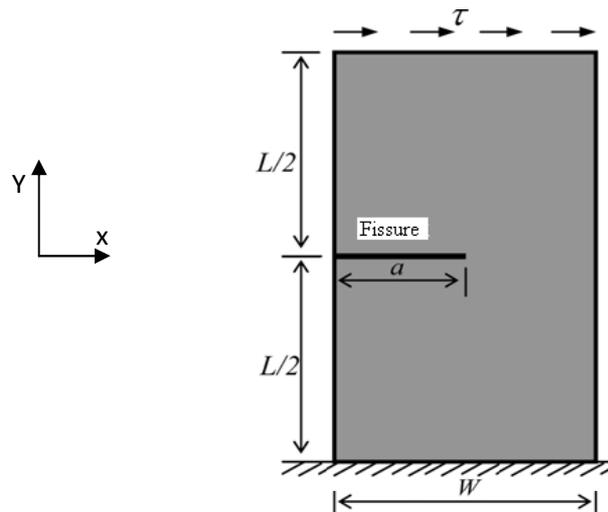


Fig.4.19 fissure débouchant dans une plaque fini

La plaque est modélisée par la méthode de discontinuité de déplacement. Les résultats sont représentés dans le tableau (4.14) et sont comparés avec les méthodes : « Hybrid crack type element (HCE) » [39] « Scaled boundary finite element (SBFE) » [40].

Tab.4.14 comparaison des facteurs d'intensité de contraintes

$K_I$					$K_{II}$				
SBFE	HCE	$E_3$	$E_2$	$E_1$	SBFE	HCE	$E_1$	$E_2$	$E_3$
33.95	34	40.27	34.69	33.16	4.52	4.55	5.20	4.69	4.49

Nos résultats sont comparables avec celle des réf [39] et [40]. Le graphe suivant montre l'évolution de facteurs d'intensité de contraintes en fonction de la position de la fissure suivant y par la MDD avec élément parabolique.

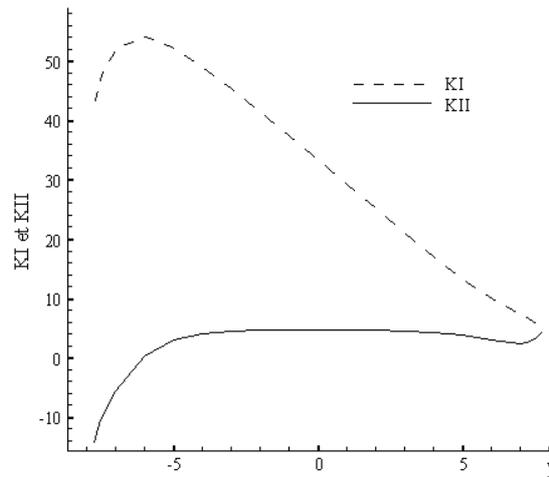


Fig.4.20 Facteurs d'intensité de contrainte en fonction de y

## VI-12 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons testé l'élément bout de fissure parabolique pour différents exemples des milieux fissurés. Les résultats obtenus montrent que l'élément parabolique permet une amélioration considérable de la convergence par rapport à l'élément simple. L'ouverture de fissure, les facteurs d'intensité de contraintes en mode I, II et mixte peuvent être pris en compte et bien évalués. Le rapport entre les dimensions de l'élément parabolique et l'élément simple estimé à  $ra=1.5$  semble optimiser les résultats. L'efficacité et la souplesse de la méthode a été testé en confrontant nos résultats et ceux obtenus de la littérature à savoir des XFEM et SBFE et « hybrid crack tip element », qui est proche de notre formulations

# ***Conclusion générale***

---

Dans ce travail nous avons utilisé la méthode de discontinuité de déplacement pour la modélisation des problèmes de l'élasticité et de la mécanique de la rupture, en s'intéressant particulièrement aux modes I, II et mixte.

Dans le cas d'élément constant, l'incompatibilité du champ de déplacement a été levé en faisant intervenir un élément bout de fissure parabolique qui permet d'avoir un champ de déplacement continu en bout de fissure. Cet élément est exploité pour calculer les facteurs d'intensité de contrainte en modes I, II et mixte.

Le code de calcul construit, basé sur la méthode des discontinuités de déplacements et utilisant l'élément parabolique a permis de traiter les exemples présentés dans le dernier chapitre. Les résultats obtenus ont montré l'efficacité de la méthode.

Les exemples présentés ont consisté à tester l'élément bout de fissure parabolique pour différents exemples des milieux fissurés.

Les résultats obtenus montrent que l'élément parabolique permet une amélioration considérable de la convergence par rapport à l'élément simple.

L'ouverture de fissure, les facteurs d'intensité de contraintes en mode I, II et mixte peuvent être pris en compte et bien évalués.

Le rapport entre les dimensions de l'élément parabolique et l'élément simple estimé à  $ra=1,5$  semble optimiser les résultats.

L'efficacité et la souplesse de la méthode a été testé en confrontant nos résultats à ceux obtenus de la littérature à savoir des XFEM et SBFE et « *hybrid crack tip element* », qui est proche de notre formulation. Ceux-ci sont très satisfaisants. En faisant le bilan entre la souplesse de la méthode et le temps investi pour traiter les problèmes, on peut conclure que la méthode est très efficace.

# Références bibliographiques

- [1] **Barthélémy B**, « *Notions pratiques de mécanique de la rupture* ». Edition Eyrolles, (1980).
- [2] **Boukhalkhal A**, « *Extension de la méthode de discontinuité de déplacements pour la simulation de la rupture dans les Multicouches* ». Mémoire de magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, (2007).
- [3] **Zienkiewicz O.C, Taylor R.L, Zhu J.Z**, « *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* ». Butterworth-Heinemann, Sixth edition, (2005).
- [4] **Schanz M, Steinbach O**, « *Boundary element analysis* ».Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (2007).
- [5] **Kebir H**, « *Approches déterministe et probabiliste de la prévision de la durée de vie de structure aéronautique à l'aide de la méthode des équations intégrales duales* ». Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, (1998).
- [6] **Brebbia C.A, Dominguez J**, « *Boundary elements: an introductory course* ». Mc Graw-Hill, Ind Edition, (1989).
- [7] **Bobet A, Mutlu O**, « *Stress and displacement discontinuity element method for undrained analysis* ». Engineering Fracture Mechanics 72, 1411–1437, (2005).
- [8] **Crouch S.L, Starfield A.M**, « *Boundary Element Method in Solid Mechanics with Application in Rock Mechanics and Geological Mechanics* ». Allen et Unwin, London, Boston, (1983).
- [9] **Shou K.J, Crouch S.L**, A «*higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems*». Int. J. Rock Mech. Min. Sci. et Geomech. Abstr. Vol. 32, No. 1, pp 49-55, (1995).
- [10] **Leblond J.B**, « *Mécanique de la rupture fragile et ductile* ». Hermès science publications, (2003).

- [11] **Lemaitre J, Chaboche J.L**, « *Mécanique des matériaux solides* ». Edition Dunod Paris (1986).
- [12] **Perez N**, « *Frature mechanics* ». Kluwer Academic Publishers, (2004).
- [13] **Gdoutus E.E**, « *Frature mechanics: an introduction* ». Published by Springer, (2005)
- [14] **Hosseini-Tehrani P, Eslami M.R, Daghyani H.R** « *Dynamic crack analysis under coupled thermoelastic assumption* ». Journal of Applied Mechanics, Vol. 68, (2001).
- [15] **Shukla A**, « *Practical Fracture Mechanics in Design* ». Marcel Dekker, (2005)
- [16] **Broek D**, « *Elementary engineering fracture mechanics* ». Marinus Nijhoff Publishers, (1982).
- [17] **François D**, « *Endommagements et rupture de matériaux* ». EDP Sciences Editions, (2004).
- [18] **Fronçois D**, « *Comportement mécanique des matériaux* ». Edition Masson, (1978).
- [19] **Zeghloul A**, « *Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture* ». Université de Metz, (2003).
- [20] **Meggiolaro M.A, Miranda A.C.O, Castro J.T.P, Martha L.F**, « *Stress intensity factor equations for branched crack growth* ». Engineering Fracture Mechanics 72, 2647–2671(2005)
- [21] **Chang J, Xu J, Mutoh Y**, « *A general mixed-mode brittle fracture criterion for cracked materials* ». Engineering Fracture Mechanics 73, 1249–1263, (2006).
- [22] **Becker A.A**, « *The boundary element method in engineering: a complete course* ». McGraw-Hill Book Company, (1992).
- [23] **Sokolnikoff I.S**, « *Mathematical theory of elasticity* ». McGraw-Hill Book Company, (1946).
- [24] **Sneddon I.N**, « *Fourier Transforms* ». Dover Publications, (1995).
- [25] **Sahnoun M**, « *Description du chemin de propagation droite et circulaire par la méthode des discontinuités de déplacement en champs complexe* ». Mémoire de magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, (1994).

- [26] **Yan X**, « *An efficient and accurate numerical method of stress intensity factors calculation of a branched crack* ». Journal of Applied Mechanics, Vol. 72, (2005)
- [27] **Yan X**, « *Stress intensity factors for interacting cracks and complex crack configurations in linear elastic media* ». Engineering Failure Analysis 14, 179–195, (2007).
- [28] **Yan X**, « *Multiple crack fatigue growth modeling by displacement discontinuity method with crack-tip elements* ». Applied Mathematical Modelling 30, 489–508, (2006)
- [29] **Amoura N**, « *Etude des milieux viscoélastiques linéaire fissurés : simulation numérique et validation expérimentale* ». Mémoire de magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, (1997).
- [30] **Timoshenko S.P, Goodier J.N**, « *Theory of elasticity* ». McGraw-Hill Book Company, (1961).
- [31] **Saad M.H**, « *Elasticity: theory, applications, and numerics* ». Elsevier Butterworth–Heinemann, (2005).
- [32] **Kim J.H, Paulino G.H**, « *T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method* ». Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192, 1463–1494, (2003).
- [33] **Chen W.T**, « *Displacement Discontinuity over a Transversely Isotropic Elastic Half-Space* ». IBM Journal, (1994).
- [34] **Shahani A.R, Tabatabaei S.A**, « *Computation of mixed mode stress intensity factors in a four-point bend specimen* ». Applied Mathematical Modelling 32, 1281–1288, (2008)
- [35] **Shih C.F, Asaro R.J**, « *Elastic–plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: part I-small scale yielding* ». J. Appl. Mech. 55, 299–316, (1988).
- [36] **He M.Y, Hutchinson J.W**, « *Asymmetric four-point crack specimen* ». J. Appl. Mech. 67, 207–209, (2000).
- [37] **Daux C, Moes N, Dolbow J, Sukumar N, Belytschko T**, « *Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method* ». Int. J. Numer. Meth. Engng, 48, 1741-1760, (2000).

- [38] **Cheung Y, Wang Y, Woo C**, « *A general method for multiple crack problems in a finite plate* ». Computational Mechanics, 10, 335-343, (1992).
- [39] **Xiao Q.Z, Karihaloo B.L, Liu X.Y**, « *Direct determination of SIF and higher order terms of mixed mode cracks by a hybrid crack element* ». International Journal of Fracture, 125, 207-225, (2004).
- [40] **Shrestha S, Ohga M**, « *Scaled Boundary Finite Element Method for Various Crack Problems* ». Steel Structures 7, 277-287, (2007)