

M0042/95A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

BIBLIOTHEQUE — المكتبة

Ecole Nationale Polytechnique

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En : **ELECTRONIQUE**

Option : **Télécommunications**

Par

Nassira CHERID

THEME

Conception de contrôleurs PID par les méthodes d'ajustage automatique et optimisation appliquées aux systèmes monovariables (SISO) et multivariables (TITO)

Soutenue devant le jury composé de :

Dr A. Zerguerras	Maître de Conférences (ENP)	: Président
Mr M.S.Ait cheikh	Chargé de cours (ENP)	: Rapporteur
Dr R. Aksas	Chargé de cours (ENP)	: Examineur
Dr M.S.Bouchrit	Chargé de cours (ENP)	: Examineur
Dr C. Larbes	Chargé de cours (ENP)	: Examineur

Novembre 1995

ECOLE POLYTECHNIQUE 10, Avenue Hassen Badi -El-HARRACH- ALGER

Résumé

Le contrôleur Proportionnel Intégral Dérivé (PID) est très utilisé dans le milieu industriel. Sa popularité réside dans sa simplicité et sa robustesse. Le but recherché dans ce travail est d'analyser des techniques de calcul du contrôleur PID, en particulier la technique d'ajustage automatique et la technique d'optimisation (utilisant le principe de minimisation d'un critère quadratique), et de développer un programme de calcul regroupant les différentes méthodes et critères. La méthode d'ajustage utilise le relais contrôleur afin d'estimer les paramètres du point critique, ensuite on détermine les paramètres du contrôleur par une des méthodes d'ajustage basée sur la connaissance de ce point. Comme première étape, on a fait une analyse des différentes méthodes basées sur la connaissance du point critique, ensuite le calcul de ce point par l'introduction de la notion de fonction de transfert généralisée. Des contrôleurs PID modifiés sont proposés, ils apportent des améliorations aux paramètres dynamiques du système.

Pour voir si les résultats obtenus par cette technique avec ces différentes méthodes sont performants, on analyse une seconde technique d'ajustage qui est l'optimisation. Celle-ci présente plusieurs critères, ISE (intégrale de l'erreur quadratique), ITSE (ISE pondéré par le temps) ainsi que d'autres. On remarque que cette technique donne d'excellents résultats quelque soit le système étudié, même si ce dernier présente un retard. Cependant, les résultats trouvés par ajustage automatique ne sont pas très loin de ceux trouvés par optimisation, en particulier lorsqu'on utilise les contrôleurs modifiés avec les structures 2 et 3.

Ce résultat donne à la méthode d'ajustage toute son importance, vu que cette dernière est facile à mettre en oeuvre et ne nécessite pas un temps de calcul important. En outre, la connaissance du système étudié (fonction de transfert) n'est pas exigée. Cette méthode donne des caractéristiques de robustesse vis à vis de la perturbation comparables à celles données par optimisation. En conclusion, nous pouvons dire que l'ajustage automatique est une technique très intéressante qui permet d'aboutir à des systèmes compensés assez performants. Deux autres méthodes sont proposées dans le cadre de cette étude, elles permettent de trouver le contrôleur optimal par simple ajustage automatique. Ces méthodes sont basées sur le critère ITSE.

Après avoir obtenu des résultats satisfaisants sur des systèmes à une entrée/une sortie (SISO), on a appliqué cette technique (méthode de Ziegler-Nichols généralisée) sur des systèmes TITO (deux entrées/deux sorties). Un programme regroupant les différentes méthodes et critères analysés est développé dans le cadre de cette étude.

Liste des symboles

ω_c	Pulsation critique
K_c	Gain critique
T_c	Période critique
a	Amplitude du point critique
τ	Temps mort (retard)
T	Constante de temps du système d'ordre un
K	Gain statique du système
k	Gain normalisé du système
θ	Temps mort normalisé
K_p	Constante proportionnelle
T_i	Contante d'intégration
T_d	Constante de dérivation
$G(s)$	Fonction de transfert du système
$G_c(s)$	Fonction de transfert du contrôleur
h	Amplitude du relais
Δ	Demi-largeur de l'hystérésis
$N(a)$	Fonction de description de l'élément non linéaire
β	Facteur de pondération
J	Fonction de coût
t	Temps
$r, R(s)$	Entrée du système
$u, U(s)$	Sortie du contrôleur
$y, Y(s)$	Sortie du système
$e, E(s)$	Signal d'erreur du système en boucle fermée
T_m	Temps de montée
T_r	temps d'établissement
D	Dépassement
t_f	constante du filtre
k_0	Facteur de couplage
d	Facteur de stabilité

LISTE DES FIGURES

		page
figure 1.1	Réponse transitoire en boucle ouverte.....	3
figure 1.2	Réponse transitoire en boucle fermée	4
figure 1.3	Diagramme de Nyquist du stème.....	5
figure 1.4	Schéma d'un contrôleur adaptatif avec modèle de référence.....	8
figure 2.1	Réponses indicielles (a) système a minimum de phase, (b) système amorti.....	17
figure 2.2	Relation entre β et k	18
figure 2.3	Relation entre les variables d'intégration de Z-N et Z-N améliorée.....	19
figure 2.4	Procédure d'ajustage automatique (Auto-tuning).....	21
figure 2.5	Détermination du point critique avec relais (a) relais idéal, (b) avec hystérésis.....	23
figure 2.6	Réponses indicielles du système de l'exemple 2.4.1.....	28
figure 2.7	Réponses indicielles du système de l'exemple 2.4.2.....	30
figure 2.8	Réponses indicielles et commandes du système d'ordre un avec retard (exemple 2.4.3).....	32
figure 2.9	Réponses et commandes du système d'ordre 2 avec retard important (exemple 2.4.4).....	33
figure 2.10	Réponse en fréquence du système d'ordre 2 avec retard important (exemple 2.4.4) avec la méthode d'Astrom-Hagglund.....	34
figure 2.11	limitation de l'action intégrale par zone morte.....	36
figure 2.12	Limitation de l'action intégrale par élément limiteur.....	36
figure 2.13	Structure 1 : contrôleur PID idéal.....	37
figure 2.14	Structure 2 : limitation de l'action dérivée.....	38
figure 2.15	Structure 3 : limitation de l'action dérivée.....	38
figure 2.6	Commandes et Réponses du système 2.4.1 avec la structure 2.....	40
figure 2.17	Commandes et Réponses du système 2.4.1 avec la structure 3.....	41
figure 2.18	Réponse du système d'ordre 3 avec les contrôleurs des structures 1,2 et 3	43
figure 2.19	Influence du filtre sur les paramètres dynamiques du système de l'exemple 2.6.2.....	45
figure 2.20	Sensibilité du système à une perturbation constante (système de l'exemple 2.6.2 avec un contrôleur de structure 2).....	47
figure 2.21	sensibilité du système à une perturbation fonction de la commande(système de l'exemple 2.6.2 avec la structure 2).....	49
figure 2.22	Sensibilité à la variation des paramètres du système de l'exemple 2.6.2.....	50
figure 3.1	Schéma bloc d'un système bouclé.....	53
figure 3.2	Réponse d'un système à un échelon.....	53
figure 3.3	Réponses du système 3.5.1 avec un contrôleur de structure 1.....	63
figure 3.4	Réponses du système 3.5.1 avec des contrôleurs de structure 2.....	65
figure 3.5	Sensibilité à la perturbation du système d'ordre 4 à pôles triple avec les critères d'optimisation.....	66

figure 3.6	Réponses du système de l'exemple 3.5.2.....	68
figure 3.7	Réponses du système de l'exemple 3.5.3 avec les critères de performance.....	70
figure 3.8	Réponses du système de l'exemple 3.5.4.....	72
figure 4.1	Réponses du système d'ordre 4 à pôles triples(exemple 4.4.1).....	79
figure 4.2	Réponses de l'exemple 4.4.2(système d'ordre 2 avec grand retard)....	80
figure 4.3	Réponses du système d'ordre cinq(système de l'exemple 4.4.3).....	81
figure 4.4	Réponses du système à phase minimale(exemple 4.4.4).....	82
figure 5.1	Système MIMO.....	85
figure 5.2	Système à 2 entrées / 2 sorties (TITO).....	85
figure 5.3	Découplage d'un système TITO.....	89
figure 5.4	Système découplé.....	90
figure 5.5	Procédure d'ajustage automatique d'un système TITO.....	94
figure 5.6	Réponse du système non découplé de l'exemple 5.8.1.....	101
figure 5.7	Réponse du système découplé de l'exemple 5.8.1.....	101
figure 5.8	Réponses indicielles du système non découplé de l'exemple 5.8.2....	104
figure 5.9	Réponses indicielles du système découplé de l'exemple 5.8.2.....	105
figure 6.1	Déroulement du programme SISO vue par l'utilisateur.....	108
figure 6.2	Déroulement du programme TITO.....	110

LISTE DES TABLEAUX

		page
Tableau 2.1	Formules d'ajustage de Ziegler- Nichols.....	13
Tableau 2.2	Paramètres des contrôleurs et Indices de performance du Système d'ordre 4 de l'exemple 2.4.1.....	27
Tableau 2.3	Paramètres des contrôleurs et Indices de performance du système de l'exemple 2.4.2.....	30
Tableau 2.4	Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système d'ordre un avec temps mort (exemple 2.4.3).....	31
Tableau 2.5	Paramètre des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système d'ordre 2 avec retard (exemple 2.4.4).....	34
Tableau 2.6	Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques de l'exemple 2.4.1 avec la structure 2.....	40
Tableau 2.7	Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système de l'exemple 2.4.1 avec la structure 3.....	41
Tableau 2.8	Paramètre des contrôleurs et paramètres dynamiques de l'exemple 2.6.2.....	43
Tableau 2.9	Paramètres des contrôleurs et paramètres dynamiques du système de l'exemple 2.6.2 (contrôleur de structure 3 avec du filtre).....	44
Tableau 3.1	Paramètres des contrôleurs et paramètres dynamiques donnés par les critères d'optimisation (système 3.5.1).....	64
Tableau 3.2	Paramètres des contrôleurs de l'exemple 3.5.2 avec les critères d'optimisation.....	68
Tableau 3.3	Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système de l'exemple 3.5.3.....	70
Tableau 3.4	Paramètres des contrôleurs et indices de performance du système d'ordre cinq (exemple 3.5.4).....	72
Tableau 4.1	Paramètres des contrôleurs et indices de performance de l'exemple 4.4.2 (système d'ordre 2 avec un grand retard).....	79
Tableau 4.2	Paramètres des contrôleurs et indices de performance de l'exemple 4.4.3 (système d'ordre cinq).....	81
Tableau 4.3	Paramètres des contrôleurs et indices de performance de l'exemple 4.4.4 (système à phase minimale avec perturbation).....	82
Tableau 5.1	Formules de Ziegler-Nichols généralisée.....	92
Tableau 5.2	Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques de l'exemple 5.8.1.....	101
Tableau 5.3	Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système non découplé de l' exemple 5.8.2	102
Tableau 5.4	Paramètres des contrôleurs et Paramètres du système découplé de l'exemple 5.8.2.....	105

Sommaire



Chapitre 1

Page

Introduction

1.1 Introduction...	1
1.2 Comportement dynamique et calcul de contrôleur PID.....	2
1.3 Algorithmes des contrôleurs PID	5
1.4 Méthodes de conception de contrôleurs PID	7

Chapitre 2

Conception de contrôleur de PID par la méthode d'ajustage automatique

2.1 Introduction	11
2.2 Méthodes de calcul des paramètres du contrôleur PID	12
2.2.1 Méthode de Ziegler-Nichols	12
2.2.2 Méthode de Astrom-Hagglund	13
2.2.3 Méthode des pôles dominants	15
2.2.4 Méthode de Zigler-Nichols améliorée	17
2.3 Détermination du point critique (K_c, W_c)	20
2.3.1 Méthode de la fonction de transfert équivalente ou généralisée	21
2.3.1 Méthode de Tsykin	23
2.3.3 Méthode de simulation	25
2.4 Exemples d'application.....	27
2.5 Structures modifiées des contrôleurs PID	35
2.5.1 Action intégrale.....	35
2.5.2 Action dérivée	36
2.6 Exemples	39
2.7 Influence du filtre sur les paramètres dynamiques du système	43

2.8	Sensibilité aux perturbations et aux variations des paramètres	45
2.8.1	Sensibilité à une perturbation.....	46
2.8.2	Sensibilité à la variation des paramètres	49
2.9	Conclusion	51

Chapitre 3

Conception de contrôleurs PID par la méthode d'optimisation

3.1	Introduction	52
3.2	Intégrale du critère de performance	53
3.2.1	Intégrale de l'erreur quadratique (ISE)	54
3.2.2	Intégrale de l'erreur quadratique pondérée par le temps (ITSE).....	55
3.2.3	Intégrale de l'erreur quadratique pondérée par l'exponentielle	58
3.2.4	Modification du critère de performance (ISE)	58
3.2.5	Intégrale de la valeur absolue de l'erreur	59
3.3	Algorithme de calcul	59
3.4	Méthode de simulation	61
3.5	Exemples d'application	62
3.6	Analyse et calcul théorique	73
3.6.1	Exemple de calcul théorique.....	73
3.7	Conclusion	75

Chapitre 4

Calcul d'un contrôleur PID optimal par ajustage automatique

4.1	Introduction.....	76
4.2	Méthode de Ziegler-Nichols modifiée.....	76
4.3	Méthode d' Aström-Hagglund modifiée	77
4.4	Exemples	78
4.5	Conclusion ..	83

Chapitre 5

Conception des contrôleurs PID pour les systèmes multivariables

5.1	Introduction ..	84
5.1.1	Définition d'un système MIMO.....	85
5.1.2	Définition d'un système à deux entrées / deux sorties.....	85
5.2	Interaction	86
5.3	Découplage.....	88
5.4	Technique d'ajustage automatique.....	90
5.4.1	Méthode de Ziegler-Nichols généralisée aux systèmes MIMO.....	91
5.4.2	Procédure d'ajustage automatique d'un système TITO	92
5.5	Détermination du cycle limite	94
5.6	Méthode de la caractéristique du lieu géométrique.....	96
5.7	Méthode d'optimisation.....	98
5.7.1	Calcul des contrôleurs PID pour les systèmes non-découplés.....	98
5.7.2	Calcul des contrôleurs PID pour des systèmes découplés.....	100
5.8	Exemples illustratifs	100
5.9	Conclusion	106

Chapitre 6

Le programme 'AJUST' pour la conception de contrôleurs PID

6.1	Introduction.....	107
6.2	Structure du programme SISO	108
6.2.1	Caractéristiques principales du programme.....	108
6.2.2	Structure vue par l'utilisateur	108
6.3	Structure du programme TITO.....	110
6.3.1	Structure vue par l'utilisateur	110
6.4	Structure interne du programme	111

6.5 Dialogue	111
6.6 Conclusion.....	112

Chapitre7

Conclusion générale	113
----------------------------------	------------

Bibliographie	115
----------------------------	------------

Annexe	117
---------------------	------------

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

Le contrôleur de type Proportionnel Intégral Dérivé est très utilisé dans les milieux industriels à cause de sa robustesse et de sa simplicité. De nombreux travaux ont attiré l'attention sur les avantages potentiels offerts par ce dernier, même si en théorie d'autres contrôleurs donnent de meilleures performances. De nombreuses procédures conceptuelles ainsi que de nombreux algorithmes de calcul nécessaires à sa conception ont été proposés [12,13]. Son algorithme de contrôle s'est développé durant plusieurs décennies, sa popularité réside dans sa mise en oeuvre facile. Malgré cette grande popularité, le contrôleur PID reste faiblement ajusté en pratique. Souvent il est ajusté manuellement, à travers des essais ou expériences, ce qui donne des erreurs dans la procédure. Plusieurs approches ont été développées dans le domaine d'ajustage des contrôleurs PID [4,5, 6,7]. Les techniques de compensations sont de plus en plus développées, comparées à la méthode d'ajustage proposée par Ziegler-Nichols en 1942, qui consistait à obtenir une oscillation stable, permettant d'obtenir par la suite les paramètres du contrôleur. Les contrôleurs sont allés vers une phase de développement ou des méthodes telles l'auto-ajustage, la méthode du gain pré-programmé et l'adaptation sont introduites à partir des années 50. Le contrôle adaptatif consiste à obtenir une commande variable dans le temps utilisée pour l'ajustage des régulateurs afin de réaliser certaines performances quand les paramètres du procédé sont inconnus ou varient dans le temps. Le contrôle adaptatif se résume en un ajustage automatique de manière continue afin de compenser les variations dynamiques du procédé. Il existe plusieurs approches à la commande adaptative [3]; commande adaptative à gain pré-programmé, Commande adaptative auto-ajustable (self-tuning regulator 'STR') [2], Commande adaptative à modèle de référence 'MRAC' [16,17] et l'Ajustage automatique (Auto-tuning) [3,2].

Les techniques utilisées en ajustage automatique (Auto-tuning) et en adaptatif sont similaires. Dans les deux cas on distingue deux types de méthodes, directes et indirectes. La méthode directe ajuste les paramètres du contrôleur à partir des paramètres du système en

boucle fermée. La méthode indirecte définit un modèle du système et détermine ensuite les paramètres du contrôleur à partir de ce modèle.

La méthode de Ziegler-Nichols est un concept de base utilisé dans l'ajustage des contrôleurs PID. Deux types d'essais sont recommandés[13], ils donnent des renseignements sommaires mais suffisants pour la détermination des paramètres du contrôleur. L'un s'effectue en boucle ouverte, le second en boucle fermée.

L'ajustage automatique (auto-tuning) est une nouvelle procédure d'ajustage des contrôleurs PID [3, 4]. Pour réaliser cet ajustage, des éléments externes sont reliés à la boucle de contrôle durant la phase d'ajustage, une fois cette phase terminée les paramètres du contrôleur sont déterminés à partir de l'estimation du point critique du système. Un contrôleur de type PID idéal ou PID modifié [12, 18] est sélectionné après une analyse de la réponse transitoire du système.

Connaissant les paramètres du point critique, on calcule les paramètres du contrôleur par la méthode de Ziegler-Nichols ou par la méthode de Astrom-Hagglund [4, 5, 6]. Il est possible aussi de calculer les paramètres du PID par la méthode des pôles dominants [6, 7]. Comme la méthode de Ziegler-Nichols donne des réponses souvent assez oscillatoires avec des dépassements importants, une modification proposée [15] permet d'apporter des améliorations sur la méthode initiale de Ziegler-Nichols appelée méthode de Ziegler-Nichols modifiée.

Une autre possibilité d'estimation de la qualité de la régulation peut être recherchée avec l'idée de minimiser l'erreur, qui évolue au cours de la régulation. On définit une grandeur J , dénommée fonction de coût, qui permet une mesure objective de l'évolution de l'erreur. Plusieurs fonctions de coût, peuvent être déterminées avec chacune ses particularités. Parmi les plus utilisées (ISE) l'intégrale du carré de l'erreur, (IAE) l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur. D'autres types de fonctions permettent de diminuer la contribution de certains termes parfois prépondérants en multipliant le terme à intégrer par un terme de pondération. [10, 9, 19].

1.2 Comportement dynamique et calcul de contrôleurs PID

Les méthodes d'ajustage utilisent les paramètres dynamiques du système afin de déterminer les paramètres du contrôleur. Les paramètres dynamiques sont obtenus grâce à la

réponse du système à un signal test (échelon, rampe ou sinusoïdal). L'analyse du système est faite soit à partir de la réponse transitoire soit de la réponse fréquentielle.

L'ajustage des régulateurs consiste en premier lieu à déterminer un modèle du processus puis à calculer les paramètres du régulateur en utilisant différentes méthodes.

Les formules développées pour ajuster les contrôleurs PID utilisent deux paramètres importants, la fréquence critique et le gain critique du processus. Ces derniers peuvent être déterminés de deux façons différentes à partir de la réponse transitoire ou à partir de la réponse en fréquence.

La réponse transitoire consiste à tracer la réponse du système en boucle ouverte à un signal test (échelon), on mesure le temps mort, la constante de temps dominante puis on remplace le système par un modèle simple. La réponse en fréquence nous permet d'obtenir un modèle simple mais avec une plus grande description.

Réponse indicielle

La réponse transitoire d'un système en boucle ouverte est en général de la forme suivante (figure 1.1) pour une entrée indicielle.

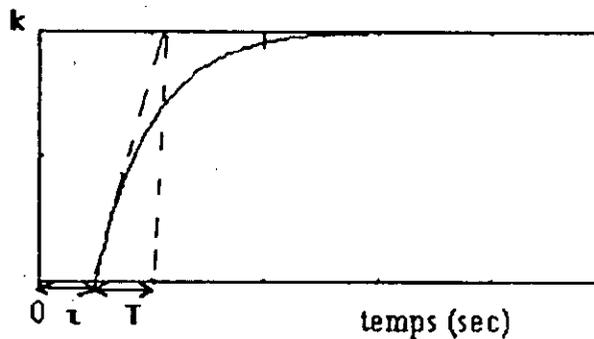


figure 1.1 Réponse transitoire en boucle ouverte

De cette réponse on peut déduire trois paramètres, le gain K , la constante de temps T et le retard τ . Ces paramètres sont déterminés si le système est stable. La fonction de transfert d'un tel système est donnée par une approximation du premier ordre avec retard

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{Ts + 1} \quad (1.1)$$

le gain K est égal au rapport de la valeur statique du signal de sortie et l'amplitude du signal d'entrée. T et τ sont représentées sur la courbe de la figure 1.1. L'analyse de la réponse du système en boucle fermée est particulièrement intéressante dans le contrôle des systèmes. En général, cette réponse présente des oscillations (figure 1.2)

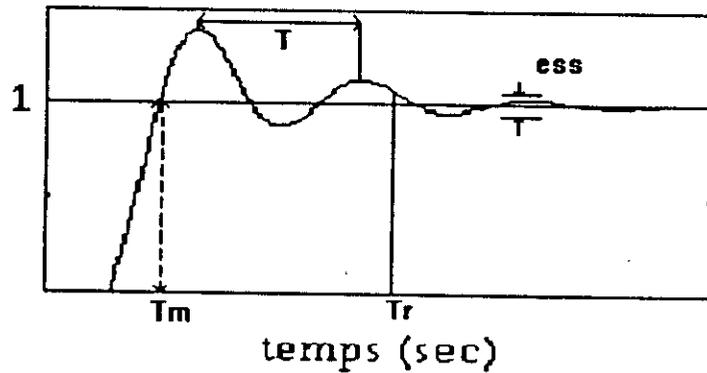


figure 1.2 Réponse transitoire en boucle fermée

Le régime transitoire doit posséder deux qualités fondamentales, qu'il est difficile à concilier. Il doit être bien amorti tout en demeurant assez rapide.

Le degré d'amortissement est caractérisé par les dépassements successifs. On considère principalement le premier dépassement. Ce dernier ne doit pas dépasser un certain pourcentage de la valeur définitive.

Pour apprécier la rapidité de la réponse on définit deux grandeurs importantes qui sont le temps de montée T_m et le temps de réponse T_r définis sur la figure 1.2.

En général les performances désirées sont, une réponse transitoire assez rapide ce qui donne un temps de réponse faible, un bon amortissement, un dépassement raisonnable et une erreur statique quasiment nulle. Ces indices sont dépendants les uns des autres et il est difficile de les réaliser ensemble, on diminue le temps de réponse au dépend du dépassement ou l'inverse .

Réponse en fréquence

La réponse en fréquence d'un système est donnée par l'amplitude $A(\omega)$ et la phase $\varphi(\omega)$, associés à la sortie du système lorsqu'on applique à l'entrée une fonction sinus ou cosinus caractérisée par la pulsation ω .

Considérons un système linéaire, pour une entrée sinusoïdale, la sortie du système sera un signal sinusoïdal après la phase transitoire. Le signal de sortie sera déphasé et amplifié. La relation entre l'amplitude et la phase du système est donnée en figure 1.3.

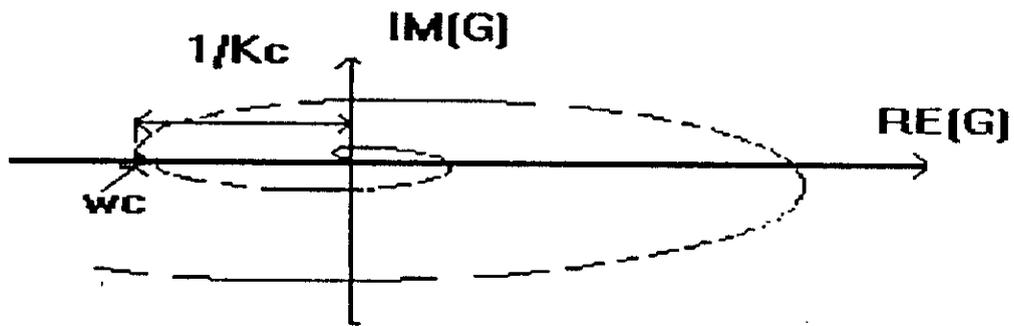


figure 1.3 Diagramme de Nyquist du système

$$G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.2)$$

$G(j\omega)$ représente la réponse en fréquence du système

$$A(\omega) = |G(j\omega)| \quad \text{amplitude}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) \quad \text{phase}$$

Le diagramme de Nyquist donne les caractéristiques dynamiques essentielles, en particulier le point critique. Ce point correspond à l'intersection de la réponse du système en boucle ouverte de $G(j\omega)$ avec la partie négative de l'axe des réels. Ce point est caractérisé par deux paramètres importants qui sont respectivement le gain critique et la fréquence critique représenté en figure 1.3.

le gain critique correspondant à la fréquence critique est égale à K_c avec

$$K_c = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} \quad (1.3)$$

et une phase

$$\arg G(j\omega_c) = -\pi \quad (1.4)$$

Ces deux paramètres sont utilisés dans les différentes méthodes d'ajustage des contrôleurs PID. Pour qualifier le degré de stabilité d'un système on fait appel à deux notions complémentaires, la marge de phase et la marge de gain.

1.3 Algorithme des contrôleurs PID

L'algorithme de base des contrôleurs PID se présente comme suit

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt + K_p T_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (1.5)$$

avec $u(t)$ la grandeur de commande et $e(t)$ l'erreur ou variable à contrôler, K_p constante proportionnelle, T_i constante d'intégration et T_d constante de dérivation.

Compensateur proportionnel

Le contrôleur proportionnel est un des contrôleur les plus simple à réaliser et à calculer, il est donné par la fonction suivante:

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) \quad (1.6)$$

$r(t)$ représente la référence et $y(t)$ représente la variable contrôlée à la sortie du système, la sortie du contrôleur dans ce cas est proportionnelle à la différence entre la référence et le signal de sortie. Le gain détermine la variation de la sortie du contrôleur par rapport à la variation de l'erreur. Ce compensateur bien qu'il soit le plus simple et le plus couramment utilisé des compensateurs est insuffisant car il présente des inconvénients, le plus important est l'erreur statique (précision en régime permanent).

Compensateur proportionnel Intégral (PI)

Beaucoup de systèmes posent comme condition essentielle la précision. Dans ce cas l'addition d'un élément intégrateur améliore la précision en régime permanent. L'équation décrivant le contrôleur PI est donnée par.

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + \frac{K_p}{T_i} \int [r(t) - y(t)] dt \quad (1.7)$$

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt$$

la fonction de transfert du contrôleur est:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) \quad (1.8)$$

Pour obtenir une réponse satisfaisante en boucle fermée on doit ajuster K_p et T_i . L'équation (1.7) montre l'influence de la constante d'intégration sur la vitesse du contrôleur, la présence de la composante d'intégration permet d'atteindre un niveau haut de précision.

Compensateur proportionnel Intégral Dérivé PID

Dans ce compensateur on introduit une action de dérivation, celle ci permet une amélioration de la réponse transitoire du système car elle impose les valeurs de la fréquence naturelle et du facteur d'amortissement. La constante de dérivation détermine le facteur d'accélération. L'équation décrivant le contrôleur PID est donnée par l'équation ci-dessous

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt + K_p T_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (1.9)$$

La fonction de transfert d'un contrôleur idéal PID est:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (1.10)$$

1.4 Méthode de conception de contrôleurs PID

La règle de calcul proposée par Ziegler-Nichols en 1942 permet de déterminer les paramètres des contrôleurs PID à partir de la réponse transitoire du système. Il existe deux types d'essais développés par Ziegler-Nichols. Le premier détermine les paramètres du contrôleur à partir de l'estimation du retard et de la constante de temps du procédé en boucle ouverte [1, 3, 4]. Le second utilise plutôt la connaissance du point critique déterminé en boucle fermée. Les règles de Ziegler-Nichols sont très utilisées dans le contrôle des systèmes industriels. Une autre méthode très utilisée également et aussi populaire que celle de Ziegler-Nichols est celle de Cohen et Coon [1]. Cette méthode est basée sur l'estimation de la réponse transitoire en boucle ouverte par une fonction du premier ordre avec un retard.

Méthode d'ajustage automatique

L'ajustage automatique des contrôleurs PID consiste à ajuster les paramètres de façon automatique. Cette méthode s'est développée en combinant les procédures d'identifications du système avec le calcul des paramètres du PID à l'aide des méthodes de conception telle que les méthodes de Ziegler-Nichols, marge de gain et marge de phase ou celle des pôles dominants. L'une de ces méthodes, proposée par Aström [3, 4] place un relais sur la boucle de contrôle durant la phase d'ajustage afin de déterminer les paramètres du point critique du système.

Méthode de réglage adaptatif

Dans un grand nombre de systèmes de contrôle il est important d'atteindre un contrôle qui soit autant que possible insensible aux variations des paramètres. Une approche susceptible d'améliorer cette situation concerne l'utilisation de contrôleurs adaptatifs. Les effets engendrés par une variation des paramètres du système asservi sont réduits par une adaptation des gains du contrôleur. Il existe de nombreuses procédures conceptuelles et des algorithmes de calcul efficaces.

L'algorithme de contrôle adaptatif fût un des algorithmes les plus exploités durant les décennies passées. Le but est d'ajuster les paramètres du contrôleur automatiquement et de manière continue. Il existe plusieurs approches du contrôle adaptatif, les deux principales approches sont l'auto-ajustable (self-tuning 'STR') et le modèle de référence (MRAC).

L'auto-ajustable (STR) consiste en un algorithme d'identification comme la méthode des moindres carrés récursive ou comme la méthode de placement des pôles qui permettent de déterminer les paramètres du PID [16, 17].

Le MRAC qui, lui repose sur les principes suivants.

Le système est constitué de trois blocs (figure 1.4) : un système asservi, un contrôleur, et un modèle d'adaptation des gains.

Lorsque les paramètres du système asservi et les gains du contrôleur ont les valeurs nominales, le comportement de la sortie du système correspond à celui de la sortie désirée qui est procurée par un modèle de référence.

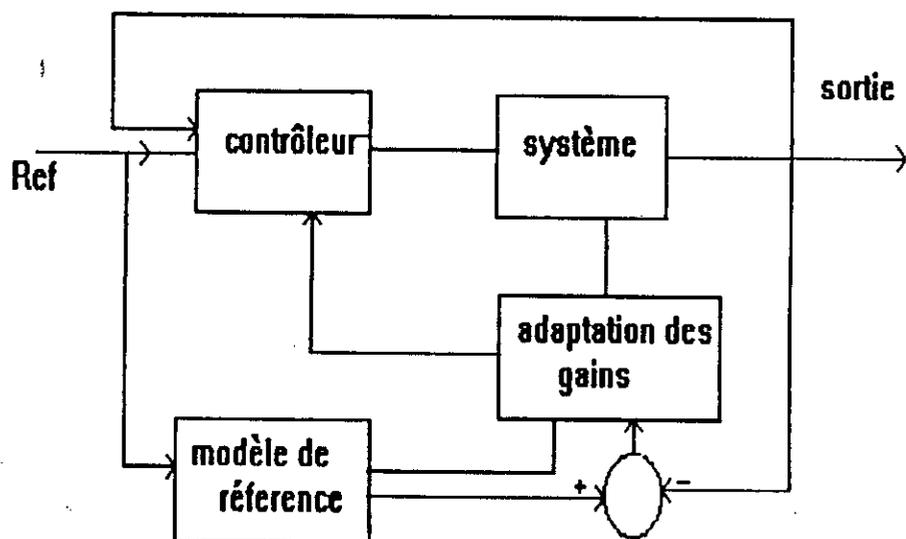


figure 1.4 schéma d'un contrôleur adaptatif avec modèle de référence

Méthode d'optimisation

Si la fonction de transfert du système est connue, les paramètres du contrôleur PID peuvent être déterminés en minimisant un critère qu'on appelle indice de performance. Un certain nombre d'indices de performance peuvent être utilisés, l'intégral de l'erreur quadratique qu'on note (ISE) est celle qui est la plus utilisée [18, 19]. L'intégrale de la valeur absolue de l'erreur (IAE) est un autre indice de performance qui est aussi utilisé que le premier, seulement il ne peut être calculé dans le domaine fréquentiel. D'autres critères comme l'intégrale de l'erreur absolue pondérée par le temps (ITAE) ou l'intégrale de l'erreur quadratique pondérée par le temps (ITSE) ainsi que d'autres variantes seront analysées. Le contrôleur PID optimal est trouvé à partir de la minimisation de l'un de ses critères, ce qui permet d'obtenir une réponse satisfaisante du système en boucle fermée. L'un des avantages du (ISE) et (ITSE) est le calcul facile dans le domaine fréquentiel.

Situation du problème

Le problème principal consiste à calculer les paramètres du contrôleur PID (K_p, T_i, T_d), les plus adéquats et voir leur influence sur les paramètres dynamiques du système considéré. Pour effectuer ce calcul plusieurs méthodes s'offrent à nous plus complexes les unes que les autres. La solution serait de trouver une méthode qui soit facile à mettre en oeuvre, qui nécessite le minimum d'informations sur le système étudié et qui donne des résultats acceptables et même bons. Parmi celles-ci la méthode d'Ajustage Automatique présente ces caractéristiques vu qu'elle nécessite la détermination que de deux paramètres, la fréquence critique ω_c et le gain critique K_c . De plus l'étude de cette méthode rentre dans le cadre du projet de recherche du laboratoire d'automatique qui travaille sur la conception de contrôleurs pour les systèmes non linéaires régis par la fonction de transfert généralisée.

Comme certains systèmes ont des paramètres variables dans le temps, la méthode d'ajustage automatique pourrait être utilisée comme une étape d'initialisation.

Objectifs visés

L'étude vise à faire une synthèse des différentes méthodes d'ajustage automatique des contrôleurs (Auto-tuning) et une analyse des techniques d'optimisations. Il s'agit aussi de développer un Programme regroupant les méthodes d'ajustage automatique et critères d'optimisation.

Le programme développé pourra être utilisé en tant qu'outil didactique aussi bien qu'outil de recherche permettant la comparaison avec d'autres méthodes. Plusieurs variantes de contrôleurs PID sont mises en oeuvre afin d'améliorer les paramètres dynamiques du système. Ces paramètres concernent les dépassements trop longs dans le temps, effet de l'intégrateur sur la commande et les brusques variations de la consigne qui influent sur la commande et se répercutent sur la sortie du système. Le programme 'Ajust' est constitué de deux principaux programmes. Le premier concerne les systèmes à une entrée/une sortie (SISO), ce dernier est constitué d'un programme principal et d'un ensemble de procédures chacune vouée à une fonction bien définie. Le second concerne les systèmes à deux entrées/deux sorties (TITO), il présente une structure similaire au premier.

Le présent travail se divise en six chapitres. Le premier concerne les méthodes d'ajustage en général. Dans le chapitre 2 la méthode d'ajustage automatique est passée en revue avec une synthèse des différentes méthodes qui permettent le calcul des paramètres du contrôleur.

Le chapitre 3 est entièrement consacré à la méthode d'optimisation, une analyse de plusieurs critères est faite. Dans le chapitre 4, on analyse deux méthodes basées sur la connaissance du point critique donnant des performances comparables à celle obtenues par optimisation. Le chapitre 5 est consacré aux systèmes multivariables (MIMO) et en particulier aux systèmes TITO avec une application de l'algorithme de Ziegler-Nichols généralisé aux systèmes TITO. La notion de découplage est abordée dans cette section. Des exemples illustrent les différentes méthodes vues dans les chapitres 2,3 et 4. Une description du programme développé est donnée en chapitre 6 suivie par une conclusion.

L'algorithme de calcul utilisant la technique d'ajustage automatique ne nécessite pas la connaissance du système afin de déterminer les paramètres du contrôleur. La méthode de Ziegler-Nichols donne des performances dynamiques acceptables vu qu'elle nécessite très peu d'informations sur le système et ses caractéristiques dynamiques. Un meilleur ajustage est donné par la méthode d'optimisation. Cette méthode par rapport à la précédente exige la connaissance de la fonction de transfert du système.

L'accent est bien évidemment mis sur ces deux méthodes ajustage automatique et optimisation qui sont indépendantes. Elles peuvent être utilisées aussi bien l'une que l'autre dans des cas différents. Bien que la première soit plus simple à utiliser, la seconde donne des systèmes compensés plus performants.

Chapitre 2

Conception de contrôleurs PID par la méthode d'ajustage automatique

2.1 Introduction

L'ajustage automatique des contrôleurs PID ne nécessite pas de modèle mathématique du système comme cela est utilisé en général dans les milieux industriels. Dans cette partie nous analyserons les méthodes d'ajustage appliquées aux systèmes à une entrée / une sortie (SISO). Beaucoup de recherches et travaux ont été enregistrés dans le domaine de l'ajustage automatique. Les premières méthodes proposées par Ziegler-Nichols, Chien-Hrones-Reswick sont des méthodes basées sur le principe de l'optimisation (rendre minimal l'indice de performance J selon le critère IAE) du système. Ces méthodes concernent donc essentiellement la précision dynamique. Depuis, beaucoup de recherches et travaux ont été enregistrés dans ce domaine. Parmi ces nouvelles méthodes, on trouve les méthodes de la marge de Gain et la marge de phase ou méthode de Astrom-Hagglund [4, 5, 6] ainsi que d'autres méthodes. Ces méthodes sont basées sur le concept du gain critique et la fréquence critique déterminés à partir du point critique donné à l'aide du diagramme de Nyquist du système en boucle ouverte. La méthode de Ziegler-Nichols ainsi que d'autres méthodes d'ajustage sont décrites en section 2.2. La procédure d'ajustage automatique ainsi que les procédures de calcul du point critique sont décrites en section 2.3, il est possible d'ajuster le contrôleur automatiquement lorsqu'on introduit un relais dans la boucle de contrôle afin d'identifier le point critique [3,4,5,6]. Si les réponses du système compensé ne sont pas entièrement satisfaisantes nous faisons appel en section 2.5 à des structures de contrôleurs PID modifiées[12, 18].

2.2 Méthodes de Calcul des paramètres du contrôleur PID

La méthode de Ziegler -Nichols est un concept de base utilisé dans l'ajustage des contrôleurs PID. La procédure est basée sur la connaissance du point critique du système en boucle ouverte, en ce point le système présente une phase de 180° et entre en oscillation. Connaissant les paramètres du point critique, les paramètres du contrôleur sont calculés par la méthode de Ziegler-Nichols en utilisant des formules empiriques. La méthode de Ziegler-Nichols a connu quelques transformations et a donné de nouvelles méthodes basées toujours sur la connaissance du point critique. Ces méthodes introduisent de nouvelles contraintes, permettant d'apporter des améliorations par rapport à la méthode de Ziegler-Nichols. Ces nouvelles méthodes sont, les méthodes de la Marge de Gain et la Marge de Phase, la méthode des pôles dominants ou bien par une dernière méthode proposée par Hang et al qui permet d'apporter des améliorations à la méthode de Ziegler-Nichols appelée méthode de Ziegler-Nichols améliorée, la modification consiste à changer le signal de commande en introduisant un facteur de pondération β dans la composante proportionnelle.

2.2.1 Méthode de Ziegler-Nichols

Ziegler et Nichols ont déterminé [3, 4, 19], à partir de simulation de divers modèles de systèmes physiques, les paramètres du contrôleur minimisant l'indice de performance J selon le critère IAE (intégrale de l'erreur absolue). Deux types d'essais sont recommandés par Ziegler-Nichols pour la détermination des paramètres du contrôleur. L'un s'effectue en boucle ouverte c'est l'essai indiciel, le second est un essai en boucle fermée car parfois il s'avère difficile d'ouvrir la boucle de contrôle, on réalise dans ce cas un essai de pompage.

1. Réponse transitoire (essai indiciel)

La première méthode proposée par Ziegler-Nichols est basée sur la réponse en boucle ouverte du système afin de déterminer les paramètres du contrôleur PID. Dans le cas où le système ne présente ni intégration ni pôles complexes dominants, la réponse en boucle ouverte est donnée en figure 1.1. On trace la tangente au point d'inflexion de la réponse indicielle (figure 1.1), on mesure τ le retard, T la constante de temps et K le gain statique.

Les études de Ziegler-Nichols sur le modèle donné par l'équation 1.1 choisi pour représenter le système en vue de minimiser le critère IAE ont conduit à proposer les valeurs données par le tableau 2.1. Les formules proposées sont valables pour des valeurs de τ / T dans l'intervalle $[0.1, 1]$.

2. Réponse en fréquence (essai en boucle fermée)

Lorsque le système présente une intégration ou est instable en boucle ouverte, il n'est plus possible d'ouvrir la boucle, on réalise un essai de pompage en boucle fermée. Pour cela on fait en sorte que T_i la constante d'intégration soit infinie, la constante de dérivation T_d nulle, on augmente K_p le gain proportionnel jusqu'à sa valeur critique $K_{osc} = K_c$ qui porte le système à l'oscillation avec une période $T_{osc} = T_c$. Ziegler et Nichols proposent de régler les contrôleurs avec les valeurs suivantes (tableau 2.1). Cette méthode n'est pas pratique à mettre en oeuvre pour le calcul du point critique. La méthode de Ziegler-Nichols consiste à donner une réponse correspondant à un amortissement de 0.22 pour un système équivalent d'ordre deux.

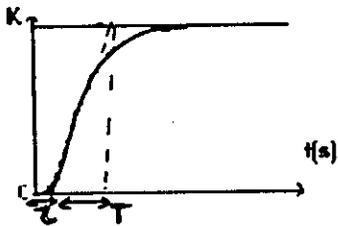
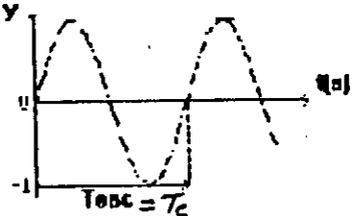
Type de contrôleur	Essai indiciel			Limite de pompage, K_c, T_c		
Transmittance du régulateur $G_c(s)$						
	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P K_p	$(1/K) \cdot T/\tau$			$0.5 K_c$		
PI $K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$	$(0.9/K) T/\tau$	3.3τ		$0.45 K_c$	$0.83 T_c$	
PID $K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)$	$(1.2/K) T/\tau$	2τ	0.5τ	$0.6 K_c$	$0.5 T_c$	$0.125 T_c$

Tableau 2.1 formules d'ajustage de Ziegler-Nichols

2.2.2 Méthode de Åström-Hagglund

La méthode d'Astrom-Hagglund [5, 6] est basée sur le déplacement du point critique (diagramme de Nyquist) du système $G(j\omega)$ en une autre position située sur $G(j\omega) G_c(j\omega)$ en

choisissant un contrôleur PI ou PID. Cette méthode est donnée en terme de marge de phase ou de marge de gain.

Méthode de la Marge de gain

La marge de gain représente la plus petite variation de gain qui doit être introduite dans la fonction de transfert du système en boucle ouverte afin de rendre le système instable en boucle fermée. La marge de gain est définie au point w_x où l'argument de la fonction de transfert en boucle ouverte est -180° .

$$Mg = 1/|G(jw_x)|$$

Mg représente une mesure de la distance exprimée en dB. Distance entre le point critique 0 dB et le gain du système à la pulsation w_x .

$$K_p = K_c / Mg \quad (2.1)$$

Mg: marge de gain

K_c : gain critique

Souvent l'action proportionnelle seule, reste insuffisante et l'introduction d'une action intégrale devient nécessaire. Comme la réponse en fréquence du régulateur PID est de la forme:

$$Gc(jw) = K_p \left[1 + \frac{1}{jwT_i} + jwT_d \right] \quad (2.2)$$

$$\text{le gain } K_p = K_c / Mg \quad (2.3)$$

$$T_d = \frac{1}{w_c^2 T_i} \quad (2.4)$$

La constante d'intégration est choisie en général de façon à obtenir $T_d = T_i / 4$.

Méthode de la Marge de phase

La marge de phase représente la plus petite variation de phase qui doit être introduite dans la fonction de transfert du système en boucle ouverte afin de rendre instable le système en boucle fermée. La marge de phase est définie comme étant la valeur algébrique de l'angle φ qui sépare l'axe réel négatif du point du lieu de Nyquist pour lequel le module du gain est égal à 1.

$$|G(jw_\varphi)| = 1. \quad (2.5)$$

Supposons que le point p sur la courbe de Nyquist en boucle ouverte soit connu tel que

$$G_p = r_p e^{j(\pi + \varphi_p)} \quad (2.6)$$

Supposons que le contrôleur introduit déplace le point P en à un nouveau point A tel que

$$G_A = r_A e^{j(\pi + \varphi_A)} \quad (2.7)$$

En marge de phase ceci correspond à $r_A = 1$ et $\varphi_A = \varphi_m$

φ_m correspond à la marge de phase désirée, le contrôleur sera représenté par l'équation (2.8).

$$G_c(j\omega) = r_c e^{j\varphi_c} \quad (2.8)$$

ce qui donne un gain de boucle (équation 2.9).

$$r_A e^{j(\pi + \varphi_A)} = r_c r_p e^{j(\pi + \varphi_c + \varphi_p)} \quad (2.9)$$

avec $r_A = r_p r_c$ et

$$\varphi_A = \varphi_c + \varphi_p$$

Le contrôleur a un module $r_c = r_A / r_p$ et une phase $\varphi_c = \varphi_A - \varphi_p$

Si la marge de phase est $\varphi_m = \varphi_A$ alors

$$\tan \varphi_m = \left(\omega c T_d - \frac{1}{\omega c T_i} \right) \quad (2.10)$$

$$\text{on choisit } T_i = \alpha T_d \quad (2.11)$$

$$T_d = \frac{1}{2\omega c} \left\{ \tan \varphi_m + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + \tan^2 \varphi_m} \right\} \quad (2.12)$$

$$K_p = \frac{\cos(\varphi_m)}{|G(j\omega c)|} = k c \cos \varphi_m \quad (2.13)$$

2.2.3 Méthode des pôles dominants

Le comportement transitoire entrée/sortie est fonction de la localisation dans le plan complexe des racines de l'équation caractéristique du système en boucle fermée [4, 7]. Si on ne peut limiter à deux l'ordre de la fonction de transfert désirée, on peut envisager de déplacer les autres pôles loin de l'axe imaginaire. Les pôles dominants recherchés seront placés au voisinage des demi-droites d'amortissement ξ , la pulsation naturelle ω_n doit être

choisie la plus grande possible afin d'améliorer la rapidité de la réponse, l'équation caractéristique du système en boucle fermée est.

$$1+G(s) = 1 + G_c(s) G_o(s) = 0 \quad (2.14)$$

avec deux pôles $s_1 = -\sigma + j\omega_1$; $s_2 = -\sigma + j\omega_2$

$G_c(s)$ représente la fonction de transfert du contrôleur et $G_o(s)$ celle du système à compenser. Le développement limité de l'équation (2.14) en appliquant la série de Taylor autour de $s=j\omega$, nous permet d'écrire

$$1+G(s) = 1+G(-\sigma + j\omega) = 1 + G(j\omega) + \sigma G'(j\omega) + \dots = 0 \quad (2.15)$$

$$G'(j\omega) = dG(j\omega) / d\omega$$

si on néglige les termes σ^2 , σ^3 ,... de la série de Taylor on obtient

$$-\sigma = \frac{(1+G(j\omega))}{G'(j\omega)} \quad (2.16)$$

$$G'(j\omega) = \frac{G(j\omega_2) - G(j\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} \quad (2.17)$$

En général pour avoir de bons résultats ω_2 doit être proche de ω_1 et de celle du point critique, d'où les fonctions de transfert du système compensé seront pour les fréquences désirées ω_1 et ω_2 données par :

$$\begin{cases} G(j\omega_1) = G_o(j\omega_1)G_c(j\omega_1) = c_1 + jd_1 \\ G(j\omega_2) = G_o(j\omega_2)G_c(j\omega_2) = c_2 + jd_2 \end{cases} \quad (2.18)$$

$$G_c(j\omega) = Kp(1+sTd + \frac{1}{sTi})$$

Supposons que la fréquence des pôles complexe soit ω_2 avec $G(j\omega_1)$ et $G(j\omega_2)$ connus.

$$\sigma = \frac{\xi\omega_2}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{avec } \xi \text{ facteur d'amortissement}$$

remplaçant σ par sa valeur dans l'équation (2.16) on obtient:

$$\frac{G(j\omega_2) - G(j\omega_1)}{G(j\omega_2) + 1} = -(\omega_2 - \omega_1) \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_2} = L \quad (2.19)$$

En remplaçant $G(j\omega_1)$ et $G(j\omega_2)$ par leurs valeurs on obtient le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} c_2 - c_1 - L(1 + c_2) = 0 \\ d_2 - d_1 - Ld_2 = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Si ξ ainsi que Ti/Td sont donnés, on peut déterminer facilement les paramètres Ti et Kp à partir du système d'équations (2.20).

2.2.4 Méthode de Ziegler-Nichols améliorée

La méthode d'ajustage Ziegler-Nichols réalise une réponse oscillatoire avec un grand dépassement, des améliorations apportées par Hang [15] à la méthode de Ziegler-Nichols permettent d'obtenir des systèmes plus performants. Cette méthode utilise le temps mort et le gain normalisés pour modifier les paramètres trouvés initialement par Ziegler-Nichols. Un facteur de pondération β est introduit dans le terme proportionnel pour réduire le dépassement. La loi de contrôle est modifiée comme suit (équation 2.21):

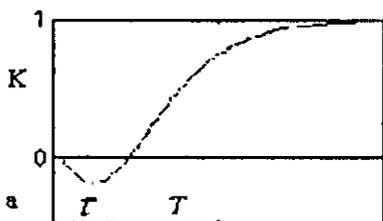
$$U_c = K_p \left[(\beta r - y) + \frac{1}{T_i} \int e dt - T_d \frac{dy_f}{dt} \right] \quad (2.21)$$

Le gain normalisé k est défini comme étant le produit du gain critique K_c par le gain statique du système K (figure 2.1).

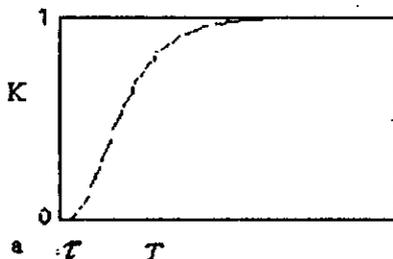
$$k = K_c \cdot K \quad (2.22)$$

Le temps mort normalisé θ est défini comme étant le rapport entre le temps mort apparent τ et la constante de temps apparente T du système en boucle fermée (figure 2.1).

$$\theta = \tau/T = a/K \quad (2.23)$$



(a) système a minimum de phase



(b) système amorti

figure 2.1 Réponses indicielles

Les équations suivantes sont données par Hang[15] à partir de l'étude d'exemples typiques de fonctions de transfert.

$$k = \frac{2(11\theta + 13)}{(37\theta - 4)} \quad (2.24)$$

De nouvelles lois d'ajustage sont suggérées par Hang.

Pour des gains normalisés grands ou retards normalisés faibles.

$$2.25 < k < 15$$

$$0.16 < \theta < 0.57$$

Les formules de Ziegler-Nichols sont maintenues et l'utilisation du facteur de pondération β dans le terme proportionnel réduit le dépassement suivant les applications entre 10% et 20% avec les valeurs de β données par les formules empiriques données par les équations (2.25) et (2.26).

$$\beta = \frac{15-k}{15+k} \quad \text{pour un dépassement de 10\%} \quad (2.25)$$

$$\beta = \frac{36}{27+5k} \quad \text{pour un dépassement de 20\%} \quad (2.26)$$

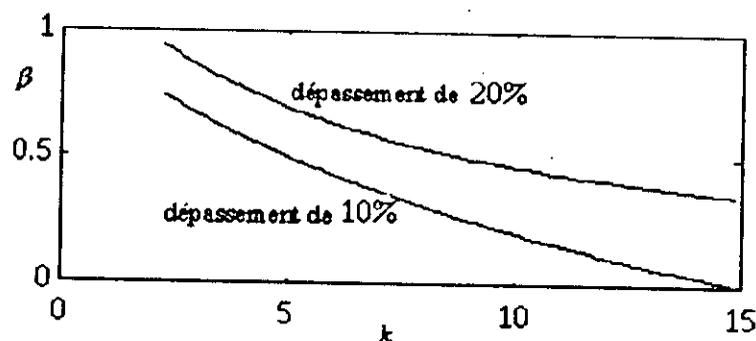


figure 2.2 Relation entre β et k

Lorsque le gain normalisé est faible et le retard normalisé est important dans ce cas:

$$1.5 < k < 2.25$$

$$0.57 < \theta < 0.96$$

Une modification est introduite dans les formules de Ziegler-Nichols, la variable d'intégration change et prend la valeur donnée par l'équation ci-dessous.

$$T_i = 0.5 \cdot \mu \cdot T_c \quad (2.27)$$

μ représente le rapport entre les variables d'intégration de Ziegler-Nichols modifiée et Ziegler-Nichols.

$$\mu = (4/9) \cdot k \quad (2.28)$$

$$\beta = \frac{8}{17} \left(\frac{4}{9} k + 1 \right) \quad (2.29)$$

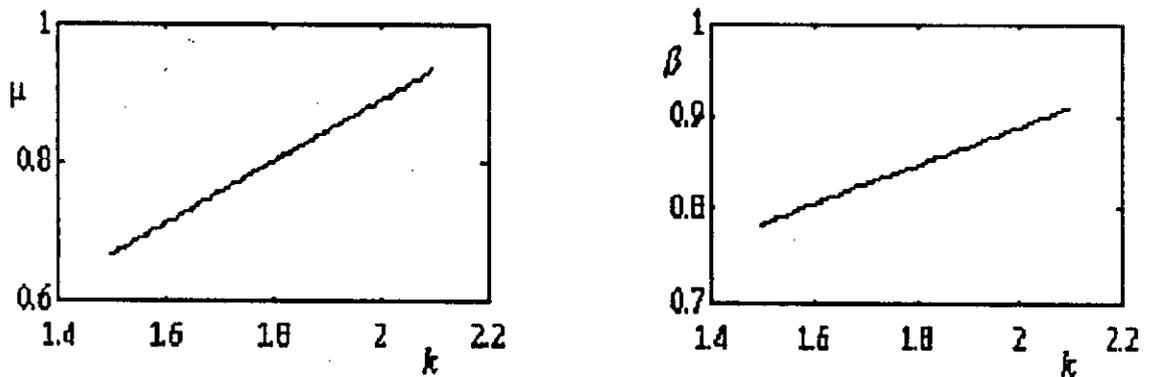


figure 2.3 Relation entre les variables d'intégration de Z-N et Z-N améliorée

La méthode de Ziegler-Nichols a connu elle aussi des améliorations avec l'ajustage des contrôleurs PI. Si le contrôleur choisi est un PI (proportionnel -intégral), les lois d'ajustage sont modifiées et sont fonction du gain normalisé k .

$$K_p = \frac{5(12+k)}{6(15+14k)} K_c \quad 1.2 < k < 15 \quad (2.30)$$

$$T_i = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{15} k + 1 \right) T_c \quad 1.2 < k < 15 \quad (2.31)$$

Les améliorations apportées à la méthode de Ziegler-Nichols sont basées sur l'étude par des simulations sur trois exemples types de systèmes. En dehors des limites dues aux intervalles des gains et constante de temps normalisés, cette méthode permet d'obtenir des performances dynamiques assez intéressantes entre autres la réduction du dépassement.

2.3 Détermination du point critique (K_c, W_c)

Dans les méthodes d'ajustage étudiées, la connaissance du point critique est nécessaire. Ce point représente l'intersection du diagramme de Nyquist avec l'axe réel négatif. Dans La méthode originale de Ziegler-Nichols le point critique est déterminé par les étapes suivantes:

Un régulateur proportionnel est relié au système, on augmente graduellement son gain jusqu'à l'obtention d'oscillations. Ce procédé a ses inconvénients car il est difficile de contrôler l'amplitude du système. La procédure se complique encore d'avantage si la constante de temps du système est grande ainsi que la présence de bruit et d'autres facteurs. Une nouvelle méthode fûe introduite par Astrom-Hagglund [4,5,6]. Pour déterminer le gain et la fréquence critique, un relais contrôleur est relié en série avec le système comme l'indique la figure 2.4, le système opère avec le relais comme contrôleur en mode d'ajustage (A) et avec le contrôleur PID en mode de contrôle (C). En mode d'ajutage (A) l'erreur (e) est un signal périodique, les paramètres du point critique, amplitude a et W_c sont déterminés approximativement à partir du premier harmonique de l'oscillation en utilisant la méthode de la fonction de transfert généralisée. En pratique, la période de l'oscillation est déterminée en mesurant le temps entre les zéros successifs, son amplitude est estimée en mesurant la valeur crête à crête lorsque le système opère en mode d'ajustage. Les méthodes d'estimation sont faciles à mettre en oeuvre car elles sont basées sur le comptage et la comparaison. L'amplitude de l'oscillation est contrôlée par le niveau de sortie du relais. Le relais avec hystérésis réduit le bruit et permet de déplacer le point critique ailleurs que sur l'axe réel négatif. L'emploi de relais dans les systèmes de commande provient de la simplicité de ces organes car on transforme le relais en organe de commande proportionnelle en le faisant vibrer [8,14]. Dans le cas des asservissements par relais le problème des oscillations à été étudié et résolue de façon rigoureuse grâce aux travaux de Hamel et Tsytkin.

Si la fonction de transfert du système est connue, le cycle limite avec relais se déduit facilement grâce à différentes méthodes analytiques ou par simulations. Trois méthodes pour la détermination du gain critique et la fréquence critique sont décrites.

- Méthode de la fonction de transfert généralisée
- Méthode de Tsytkin
- Méthode de simulation

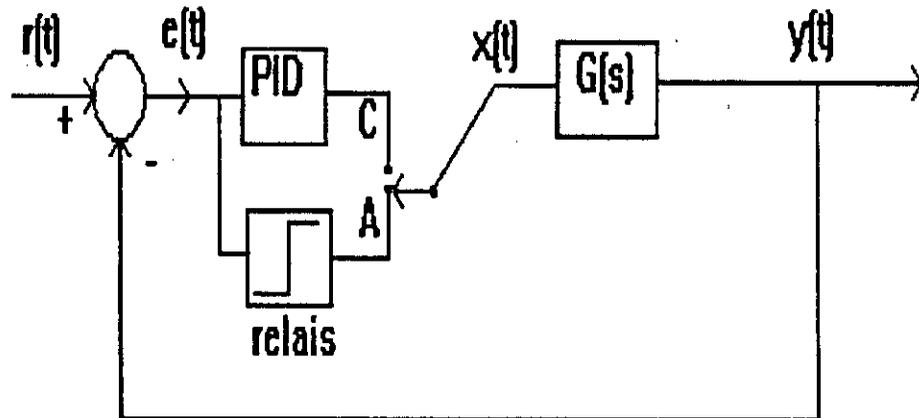


figure2.4 Procédure d'ajustage automatique(auto-tuning)

2.3.1 Méthode de la fonction de transfert généralisée

La fonction de description ou fonction de transfert généralisée est simple est facile à utiliser dans l'analyse des systèmes non linéaire. L'élément non linéaire est représenté par sa fonction de description ou gain équivalent, dont la fonction de transfert dépend de l'amplitude (a) uniquement du signal d'entrée du relais $e(t)$ (figure 2.4).

En présence d'une oscillation limite symétrique de fréquence $\omega / 2\pi$, la sortie $x(t)$ de l'élément non linéaire est un signal carré. La grandeur $x(t)$ peut être décomposée en série de Fourier.

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{w}{\pi} \int_0^{\tau} x(t) \cos(nwt) dt \\
 b_n &= \frac{w}{\pi} \int_0^{\tau} x(t) \sin(nwt) dt
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

En régulation automatique, le système réglé présente généralement un comportement de filtre passe bas. Lorsque le système est filtré, on peut négliger tous les harmoniques. De plus si la caractéristique statique de cet élément est symétrique par rapport à l'origine (symétrie impaire), on assimile $x(t)$ à son premier harmonique. Il en résulte le signal donné par l'équation (2.34).

$$x(t) = a_1 \cos(wt) + b_1 \sin(wt) \tag{2.34}$$

$$x(t) = X_1 \sin(wt + \varphi_1) \tag{2.35}$$

X_1 représente l'amplitude, φ_1 représente la phase du signal de sortie de l'élément non linéaire.

$$N(a, w) = (X_1 / a) e^{j \varphi_1} \tag{2.36}$$

La fonction de l'équation (2.36) sera considérée comme la fonction de transfert généralisée de l'organe non linéaire de module $B(a, w) = (X_1 / a)$ et de phase $\varphi_1(a, w)$.

Cette fonction peut être représentée par une famille de lieux de transfert généralisés gradué en w , un lieu par valeur de a . Si $N(a, w)$ ne dépend que de l'amplitude, on appelle $N(a)$ gain équivalent et l'élément non linéaire.

$$N(a) = B(a) e^{j \varphi_1} \tag{2.37}$$

Dans le cas où l'élément non linéaire fait partie d'un asservissement (figure 2.4), avec un système linéaire de fonction de transfert $G(s)$, l'équation caractéristique est donnée par (2.38).

$$1 + N(a) G(s) |_{s=jw} = 0 \tag{2.38}$$

La condition d'oscillation est donnée pour:

$$G(jw) = - N(a)^{-1} = C(a)$$

$C(a)$ est un nombre complexe de module $B(a)^{-1}$ et d'argument $[\pi - \varphi_1]$, il représente le lieu critique de l'élément non linéaire. La fréquence et l'amplitude de l'oscillation sont obtenues par la résolution du système d'équations (2.39).

$$\begin{cases}
 \operatorname{Re}\{1 + N(a)G(jw)\} = 0 \\
 \operatorname{Im}\{N(a)G(jw)\} = 0
 \end{cases}
 \tag{2.39}$$

La solution de ce système donne la valeur de la fréquence critique et l'amplitude de l'oscillation du point critique. Pour déterminer le lieu critique, on trace la fonction $(N(a))^{-1}$ dans le plan complexe ainsi que le diagramme de Nyquist du système ($G(s)$) en boucle ouverte. Lorsque l'élément non linéaire est un relais idéal avec une amplitude h alors le lieu critique est représenté par l'axe réel négatif et le point critique sera donné par l'intersection de la courbe $G(j\omega)$ avec la partie négative de l'axe des réels (figure 2.5 (a)), son gain et sa période sont donnés par l'équation ci-dessous.

$$\begin{cases} K_c = \frac{a\pi}{4h} \\ T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \end{cases} \quad (2.40)$$

Pour déterminer d'autres points d'intersection avec la courbe de Nyquist on utilise des relais avec hystérésis. Si le relais présente une amplitude h une demie-largeur d'hystérésis $\pm \frac{\epsilon}{2} = \Delta$. Son lieu critique est la demie droite horizontale d'ordonnée $-\frac{\pi \epsilon}{4h^2}$ (figure 2.5 (b))

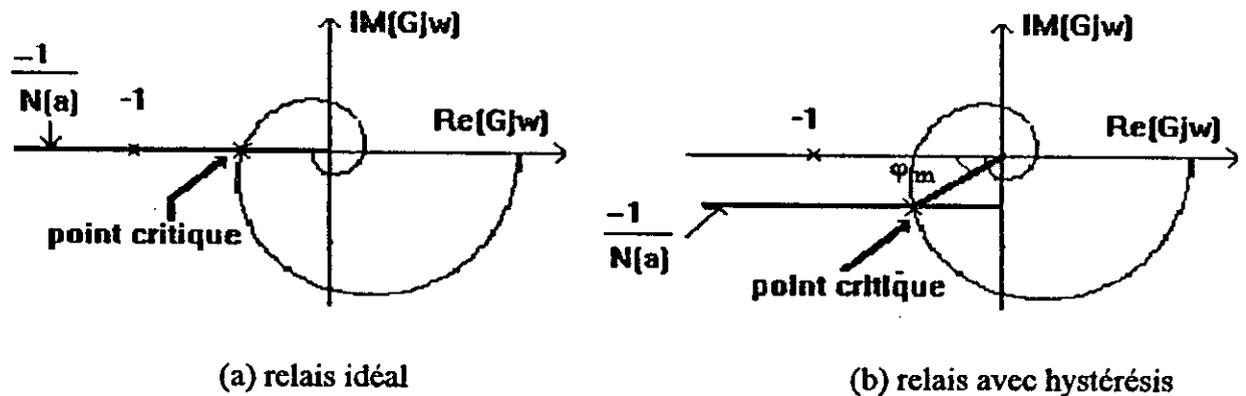


figure 2.5 Détermination du point critique avec relais

2.3.2 Méthode de Tsypkin

Cette méthode tient compte de tous les harmoniques. Supposons que $e(t)$ soit l'entrée du relais et $x(t)$ sa sortie[14]. En présence d'une oscillation limite de fréquence $\omega/2\pi$ la sortie $x(t)$ de l'organe non linéaire (relais) est un signal carré. En choisissant $t = 0$ à l'instant du début d'une impulsion positive l'expression x est:

$$x(t) = hu(t) - 2hu\left(t - \frac{\pi}{w}\right) + 2hu\left(t - \frac{2\pi}{w}\right) - \dots \quad (2.41)$$

Ou sous forme de développement de Fourier

$$x(t) = \frac{4h}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right] \quad (2.42)$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4h}{n\pi} \sin(n\omega t) \quad \text{avec } n = 2i-1$$

Si l'ensemble linéaire est caractérisé par la fonction de transfert $G(s)$ avec $s = j\omega$ alors

$$G(jn\omega) = g(n\omega) e^{j\phi(n\omega)} \quad (2.43)$$

la sortie du système étant:

$$y(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} g(n\omega) \sin(n\omega t + \phi(n\omega)) \right] \quad (2.44)$$

Si le système travaille en régulateur on a $r(t) = 0$ alors $e(t) = -y(t)$, la condition de commutation de (-) à (+) à l'instant $t = T/2 = \pi/\omega$ est obtenue pour

$$\begin{cases} e\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \Delta \\ \frac{d}{dt}\left(e\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right) < 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{w} \frac{d}{dt}\left(e\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right) = \frac{4h}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} g(n\omega) \cos \phi(n\omega) < 0 \quad (2.46)$$

$$e\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{4h}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} g(n\omega) \sin \phi(n\omega) = \Delta$$

On peut donner de ces conditions l'interprétation suivante, soit la fonction de w

$$\Lambda(w) = \frac{1}{w} \frac{d}{dt}\left(e\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right) + je\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \quad (2.47)$$

$$\text{Im} \Lambda(w) = e\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \quad (2.48)$$

$$\text{Re} \Lambda(w) = \frac{1}{w} \frac{d}{dt}\left(e\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right)$$

d'ou les conditions de périodicité

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Lambda(w) &= e\left(\frac{\pi}{w}\right) = \Delta \\ \operatorname{Re} \Lambda(w) &= \frac{1}{w} \frac{d}{dt} \left(e\left(\frac{\pi}{w}\right) \right) < 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Si on trace le vecteur OM qui représente le nombre complexe $\Lambda(w)$, le point M décrira une courbe dans le plan complexe lorsque w varie. Cette courbe caractérise la portion de l'élément linéaire $G(s)$ et représente le lieu de Tsytkin.

En présence d'hystérésis les conditions de périodicité s'interprètent comme l'intersection du lieu de Tsytkin l'horizontale d'ordonnée $(-\Delta)$ ou bien avec l'axe réel négatif si le relais est idéal.

Construction du lieu de Tsytkin à partir du lieu de transfert $G(jw)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Lambda(w) &= \frac{4h}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} g(nw) \sin \phi(nw) \\ \operatorname{Re} \Lambda(w) &= -\frac{4h}{\pi} \sum_{i=1}^n g(nw) \cos \phi(nw) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\text{avec } G(jnw) = U(nw) + j V(nw) \quad (2.51)$$

$$U(nw) = g(nw) \cos \phi(nw) \quad (2.52)$$

$$V(nw) = g(nw) \sin \phi(nw) \quad (2.53)$$

ce qui nous permet d'écrire les équations (2.50) sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Lambda(w) &= \frac{4h}{\pi} \sum U(nw) = \frac{4h}{\pi} [U(w) + U(3w) + U(5w) + \dots] \\ \operatorname{Im} \Lambda(w) &= \frac{4h}{\pi} \sum \frac{1}{n} V(nw) = \frac{4h}{\pi} \left[V(w) + \frac{1}{3} V(3w) + \frac{1}{5} V(5w) + \dots \right] = \Delta \end{aligned} \quad (2.54)$$

Si on néglige les termes des fréquences hautes, la validité de cette approximation est liée à l'étouffement des hautes fréquences d'où l'approximation de l'équivalent harmonique. Le principe de la méthode est basé sur la généralisation de la fonction de transfert pour le cas des systèmes linéaires. L'approximation de l'équivalent harmonique donne $V(w) = -\Delta \pi / 4 h$

2.3.3 Méthode de simulation

La simulation représente un outil très utile, elle permet d'obtenir le cycle limite avec une résolution non graphique ce qui permet d'obtenir le point critique avec plus de précision, pour cela on doit exciter le système placé en mode d'ajustage par des conditions initiales. Une fois que le système ait atteint un régime oscillatoire stable, on mesure la période. L'amplitude de l'oscillation sera déterminée en mesurant la valeur crête à crête. La procédure de simulation à mettre en oeuvre doit comporter les étapes suivantes:

1. Une fois l'état oscillatoire atteint par le système, on calcul les points de zéro-croisement en procédant par une comparaison des signes du signal de sortie. Nous utilisons une méthode d'interpolation pour effectuer ce calcul (la méthode d'interpolation Lagrangienne).
2. La procédure de calcul des points de zéro-croisement ne s'arrête que si la période d'oscillation se stabilise en réalité on s'arrête une fois que la différence entre les périodes est faible (on fixe un écart de tolérance donné). Ces valeurs de périodes et d'amplitudes seront stockées dans un fichier.
3. La période de l'oscillation ainsi que son amplitude représente la moyenne des périodes et respectivement la moyenne des amplitudes des pics mesurés.
4. Le gain critique K_c est estimé à partir de l'équation 2.40, a représentant l'amplitude moyenne mesurée.

Pour le calcul du cycle limite nous avons le choix entre une de ces méthodes, soit la méthode de simulation ou la méthode graphique.

Le choix s'est porté sur la méthode graphique (méthode de la fonction de transfert généralisée), celle-ci nous permet de tracer deux courbes, la première représente le diagramme de Nyquist de $G(j\omega)$ et la seconde courbe représente la fonction ou l'inverse de la fonction de transfert généralisée ($-1/N(a)$).

L'intersection entre les deux courbes nous donne un point qui n'est autre que le point critique avec ses coordonnées, gain critique et fréquence critique.

2.4 Exemples d'application

Plusieurs exemples sont donnés afin de tester les méthodes d'ajustage analysées précédemment. Les performances de la méthode de Ziegler-Nichols sont comparées aux performances données par les méthodes d'ajustage d' Astrom-Hagglund, Pôles dominants et Ziegler-Nichols améliorée. Pour effectuer cette étude comparative plusieurs modèles seront considérés.

Exemple 2.4.1 Système d'ordre 4

$$G(s) = \frac{1.025}{0.387s^4 + 3.272s^3 + 7.859s^2 + 6.043s + 0.617}$$

Les paramètres du point critique sont respectivement $K_c = 12.7324$ et $W_c = 1.625$ rad / s, les paramètres du contrôleur PID obtenues par application des différentes méthodes sont donnés dans le tableau 2.2 et les réponses en boucle fermée du système compensé sont données en figure 2.6. On remarque pour cet exemple que la méthode de Ziegler-Nichols donne le plus grand dépassement, une nette amélioration est apportée par les méthodes des pôles dominants et Aström-Hagglund en terme de dépassement et temps de réponse. La méthode de Ziegler-Nichols améliorée donne la même réponse que celle donnée par la méthode de Ziegler-Nichols car le facteur de pondération $\beta = 1$ dans ce cas.

Méthodes	Parametres du PID			Indices de performance		
	K_p	T_i	T_d	D%	$T_m(s)$	$T_r(s)$
Ziegler-Nichols	7.6394	1.9332	0.4833	66.25	1.55	12.95
poles dominants $\xi = 0.5$ et $\alpha = 3.5$	7.0297	2.7161	0.7760	33.75	1.55	5.05
Astrom-Hagglund $\varphi = 45^\circ$ et $\alpha = 3.5$	9.0032	2.6533	0.7581	40.79	1.35	3.85

Tableau 2.2 Paramètres des contrôleurs et Indices de performance du système de l'exemple 2.4.1

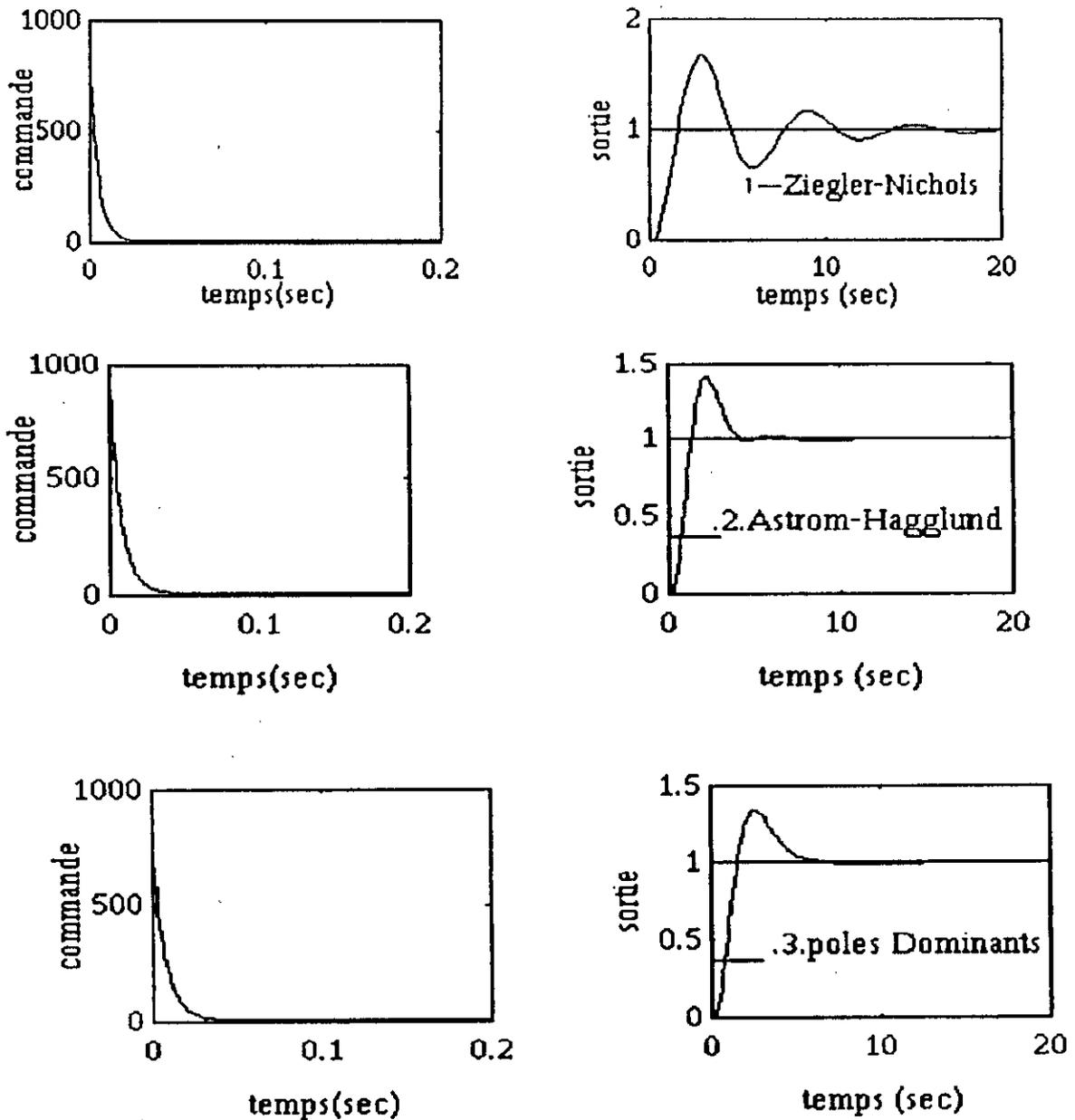


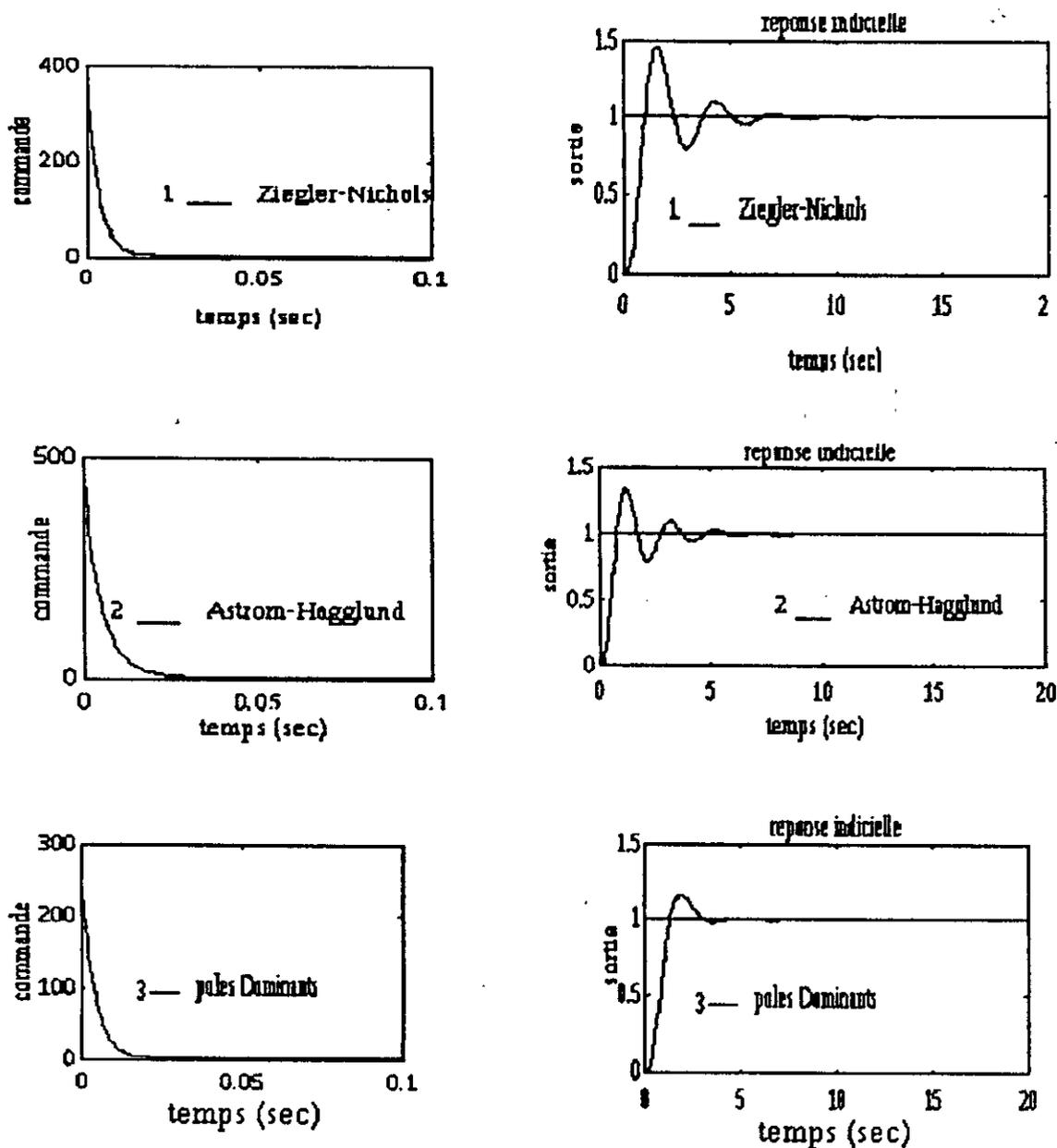
figure 2.6 Réponses indicielles et commandes du système de l'exemple 2.4.1
(système d'ordre 4)

Exemple 2. 4.2 Système d'ordre 4 à pôles triple

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)\left(\frac{s}{3}+1\right)^3}$$

Le gain critique ainsi que la fréquence critique obtenues par la méthode de transfert généralisée sont respectivement $K_c = 6.3662$ et $W_c = 2.465$ rad/s. Les paramètres des PID déterminés à partir de ces valeurs par les différentes méthodes sont reportés dans le tableau 2.3. La marge de phase choisie pour la méthode de Astrom-Hagglund est de 45° et un facteur

d'amortissement ξ de 0.5 pour la méthode des pôles dominants. Les réponses en boucle fermée du système compensé données par les quatre contrôleurs PID sont reportées en figure 2.7. La méthode de Ziegler-Nichols améliorée avec un gain normalisé $k = 6.3662$ avec un facteur de pondération $\beta = 0.4911$ donne une réponse avec un dépassement beaucoup plus faible que la méthode de Ziegler-Nichols avec temps de montée assez important. La méthode de Astrom-Hagglund donne une réponse avec un dépassement plus faible et un temps d'établissement réduit par rapport à la méthode de Ziegler-Nichols, cette réponse est fonction de la marge de phase choisie. La méthode des pôles dominants donne une réponse d'un système d'ordre deux avec un dépassement et un temps de réponse fonction de l'amortissement ξ choisi.



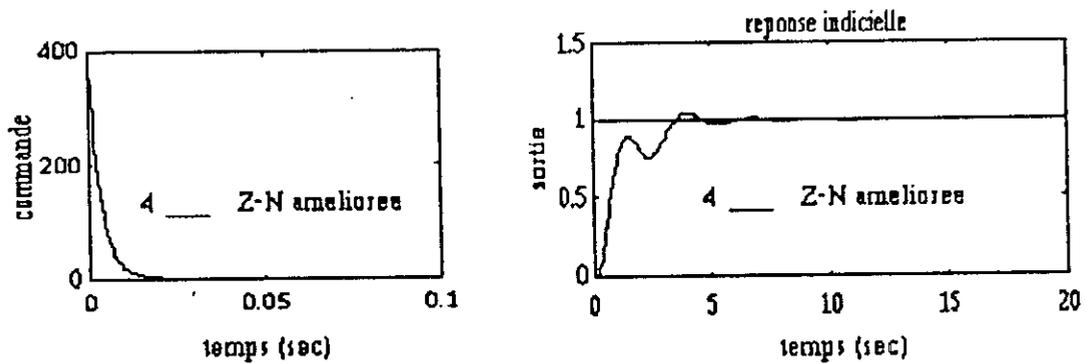


figure 2.7 Réponses indicielles de l'exemple 2.4.2 (système d'ordre 4 à pôles triple)

Méthodes	Paramètres du contrôleur PID			β	Indices de performance		
	K_p	T_i	T_d		D%	T_m (s)	T_r (s)
Ziegler-Nichols	3.8197	1.2747	0.3187	1	45.68	0.95	4.75
poles dominants	2.3569	1.3939	0.3983	1	16.96	1.25	2.65
Z-N améliorée	3.8197	1.3402	0.3351	0.4911	4.553	3.55	3.35
Astrom-Hagglund	4.5016	1.7494	0.4998	1	34.34	0.75	3.55

Tableau 2.3 Paramètres des contrôleurs et Indices de performance du système de l'exemples 2.4.2

Exemple 2.4.3 Système d'ordre 1 avec temps mort(faible retard)

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts + 1}$$

$$\tau = 0.5$$

$$T = 1$$

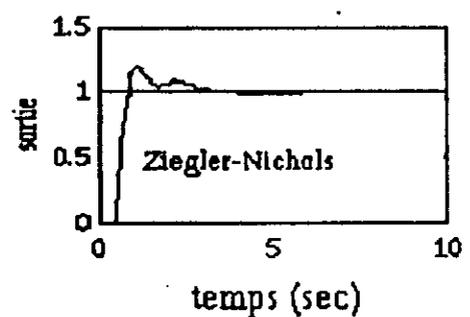
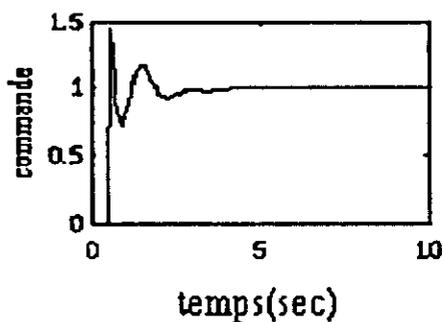
Les paramètres du cycle limite obtenu sont $K_c = 3.1831$ et $W_c = 3.728$, l'existence d'un temps mort peut introduire une distortion dans l'oscillation ce qui fait que le point calculé par la méthode de la fonction de transfert généralisée soit un peu éloigné du point réel. Les paramètres sont donnés dans le tableau 2.4, les commandes et réponses du système compensé par les différentes méthodes en figure 2.8, on remarque que la méthode d'Astrom-Hagglund avec une marge de phase égale à 45° donne une réponse avec un dépassement important et un temps de réponse plus important que celui donné par les autres méthodes, en plus de cela la réponse est très oscillatoire. Si on diminue la marge de phase (30°) le temps de réponse devient plus faible cependant le dépassement augmente.

Si on augmente la marge de phase à (60°) le dépassement est réduit et le temps de réponse augmente, la réponse reste oscillatoire dans les trois cas. La méthode donne une réponse

moins bonne que celle donnée par la méthode de Ziegler-Nichols à cause du retard, la méthode de Ziegler-Nichols améliorée donne une réponse avec un dépassement nul car le dépassement donné par la méthode de Ziegler-Nichols n'est pas très important pour ce genre de système. La méthode des pôles dominant présente une réponse avec un dépassement qui dépasse les 40% résultat plutôt médiocre.

Méthodes	Paramètres des contrôleurs PID			β	Paramètres dynamiques		
	K_p	T_i	T_d		Dépass %	$T_m(s)$	$T_r(s)$
Ziegler-Nichols	1.9099	0.8404	0.2101	1	18.57	0.825	2.675
poles dominants	2.1028	0.6618	0.1891	1	41.18	0.775	2.075
Z-N modifiée	1.9099	0.8404	0.2101	0.6499	—	—	2.375
Astrom-Hagglund $\varphi = 45^\circ$ et $\alpha = 3.5$	2.2508	1.1535	0.3596	1	44.81	0.675	8.125
Astrom-Hagglund $\varphi = 60^\circ$ et $\alpha = 3.5$	1.5915	1.7637	0.5039	1	17.32	0.725	9.725
Astrom-Hagglund $\varphi = 30^\circ$ et $\alpha = 3.5$	2.7566	0.8391	0.2397	1	64.44	0.675	5.575

Tableau 2.4 paramètres des contrôleurs et paramètres dynamiques du système d'ordre un avec temps mort (exemple 2.4.3)



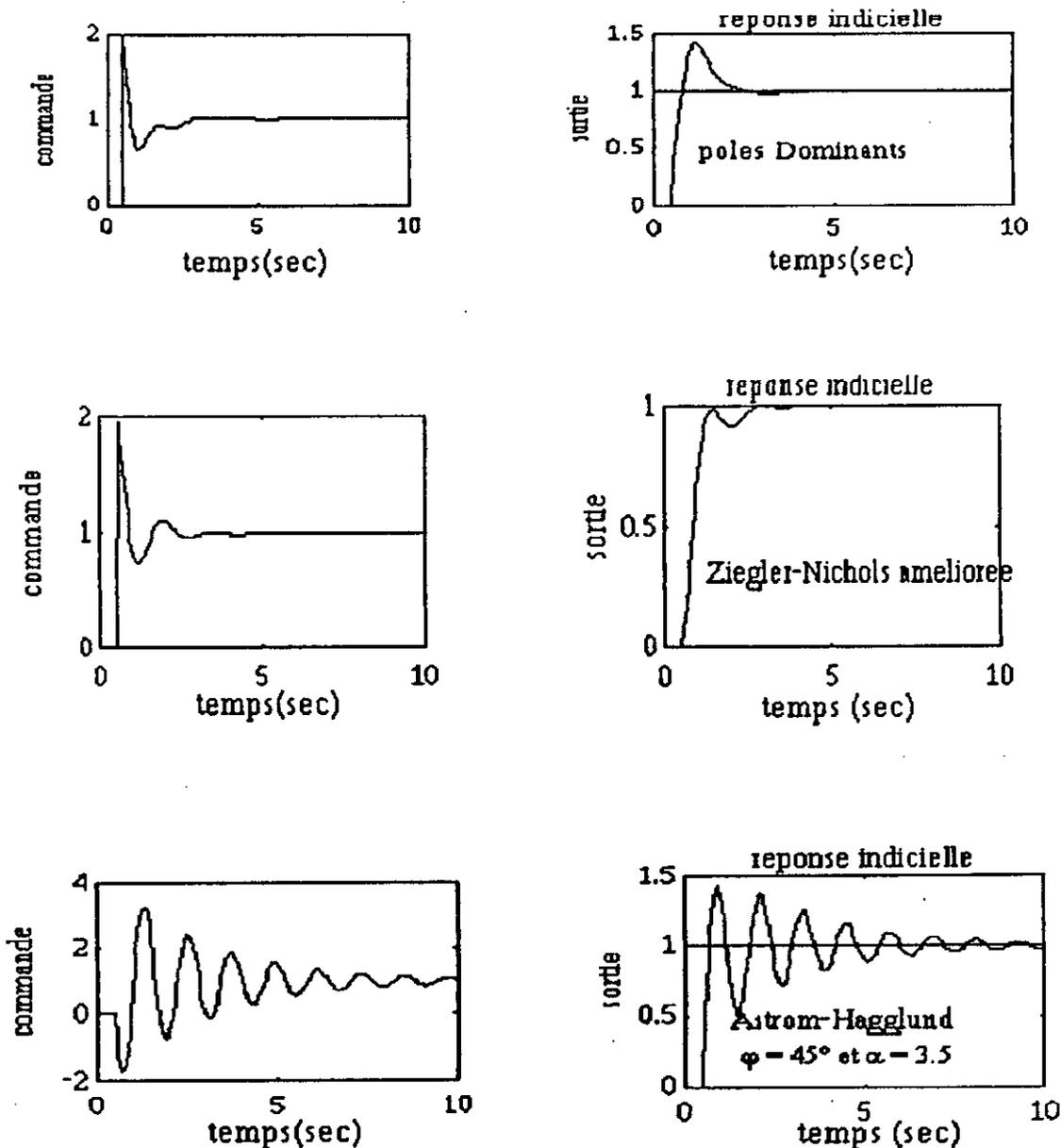


figure2.8 Réponses indicielles et commandes de l'exemple 2.4.3
(système d'ordre un avec temps mort)

La méthode d' Astrom-Hagglund est basée sur la réponse du système en boucle fermée avec une marge de phase spécifiée utilisée afin d'ajuster les paramètres du contrôleur. On remarque que plus la marge de phase imposée est grande plus le dépassement est faible.

Exemple 2.4.4 système d'ordre 2 avec un retard important

$$G(s) = \frac{0.33e^{-18.5s}}{134s^2 + 18.5s + 1}$$

Ce système présente un grand retard, le point critique calculé à comme paramètre un gain critique $K_c = 6.3662$ et un $W_c = 0.0793$. On remarque qu'avec le contrôleur PID calculé par la méthode de Astrom-Hagglund le système diverge, le système compensé est instable sa réponse en fréquence est donnée en figure 2.10, nous remarquons que le point critique s'est déplacé est se trouve à l'extérieur du cercle unité. Les méthodes de Ziegler-Nichols et Ziegler-Nichols améliorée donnent la même réponse car dans ce cas $\beta = 1$. Les réponses du système avec les différentes méthodes sont données en figure 2.9 et les paramètres sont donnés dans le tableau 2.5.

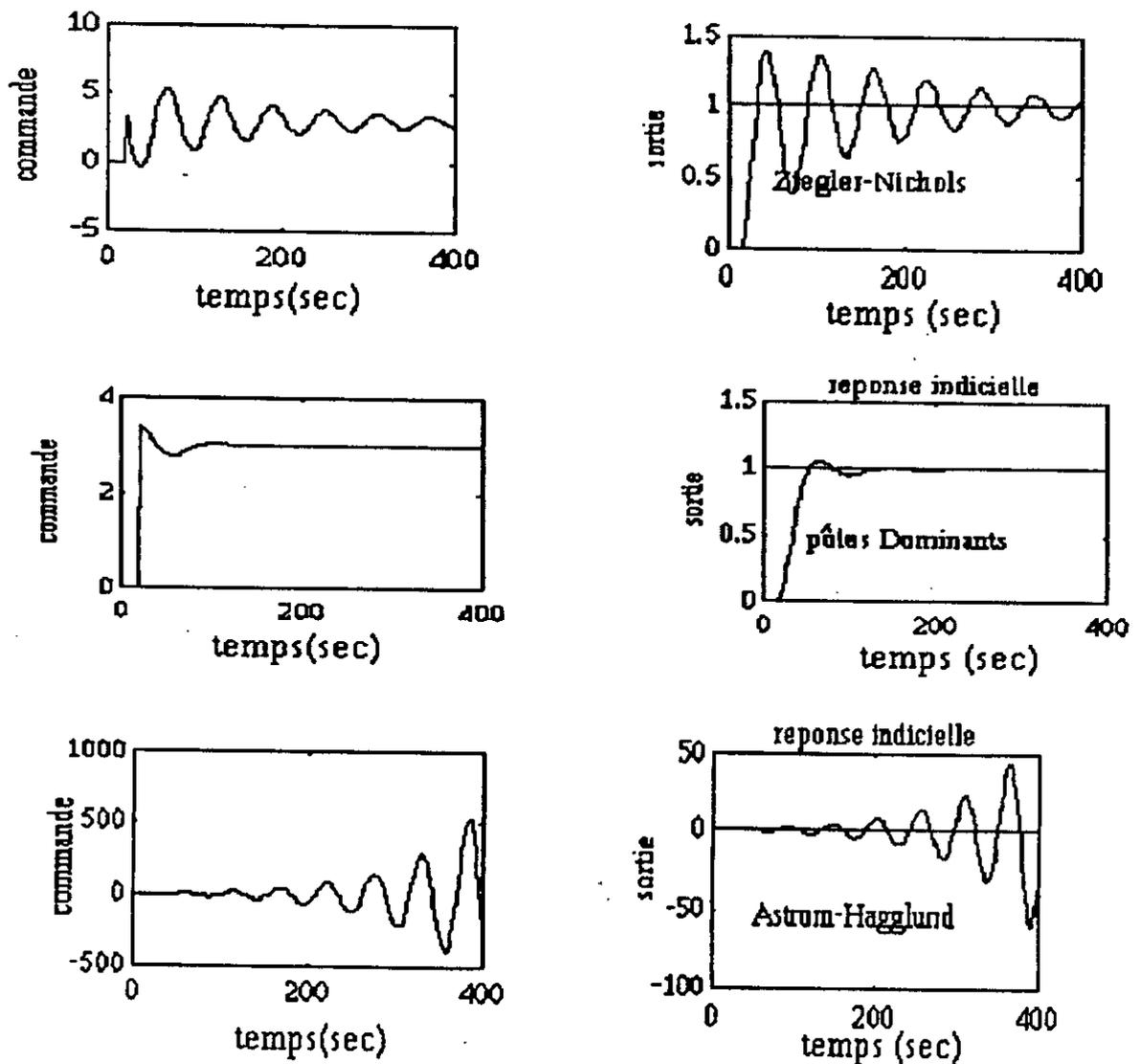


figure 2.9 Réponses du système de l'exemple 2.4.4 (ordre 2 avec retard important)

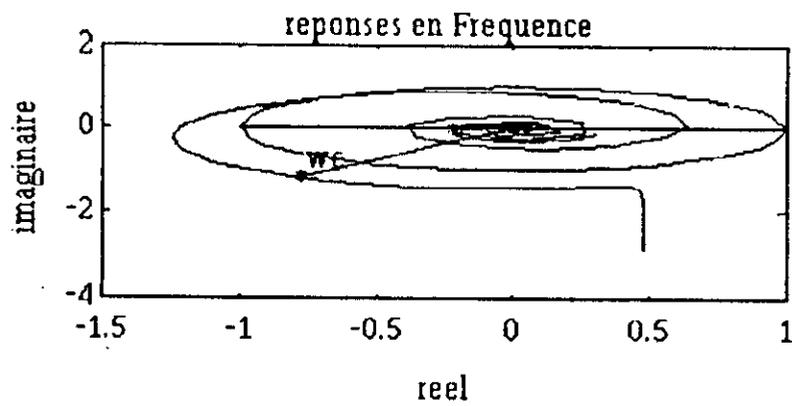


figure 2.10 Réponse en fréquence du système d'ordre 2 avec retard (méthode d'Astrom-Hagglund)

Méthodes	Paramètres du PID			Paramètres dynamiques		
	K_p	T_i	T_d	D %	$T_m(s)$	$T_r(s)$
Ziegler-Nichols	3.8197	39.6064	9.9016	32.1	33	391
poles dominants $\xi = 0.5$ et $\alpha = 3.5$	2.0752	23.2585	6.6453	5.61	53	67
Astrom-Hagglund $\varphi = 45^\circ$ et $\alpha = 3.5$	4.5016	54.3285	15.5310	—	—	—

Tableau 2.5 Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système d'ordre 2 avec retard (exemple 2.4.4)

A partir des résultats enregistrés avec les systèmes des exemples 2.3 et 2.4 nous pouvons dire que si le système présente un temps mort ou un retard important, le système diverge avec le contrôleur déterminé par la méthode d'Astrom-Hagglund. Cette méthode s'avère être très sensible à un retard. Elle n'est donc pas recommandée dans le cas de ce genre de systèmes, en dehors de ce cas elle permet d'obtenir de bons résultats, fonction de la marge de gain ou de la marge phase désirée. Dans tous nos exemples nous avons pris une marge de phase de 45° . La méthode des pôles dominants permet d'obtenir des résultats fonction des paramètres imposés par l'utilisateur, car dans ce cas on fixe la fonction de transfert du système en boucle fermée avec un modèle du second ordre à amortissement fixe. Le dépassement indiciel est fixé par ξ .

Les contrôleurs utilisés sont des contrôleurs ayant la structure 1 (figure 2.13), les figures 2.6 et 2.7 montrent que le signal de commande fourni par ce type de contrôleur pour toutes les méthodes utilisées est des centaines de fois plus grand que la consigne, ce qui amène la chaîne d'asservissement à la saturation inévitable. Le signal de commande U comporte une pointe initiale très importante lors du changement de consigne, ce problème sera résolu par une modification de la structure du contrôleur idéal.

2.5 Structures modifiées des contrôleurs PID

Comme vu précédemment un PID possède trois actions. Ce sont ces trois paramètres qu'on ajuste pour obtenir la réponse désirée en boucle fermée. Cependant plusieurs problèmes peuvent apparaître lorsqu'on utilise un contrôleur PID idéal. L'utilisation des constantes d'intégration et de dérivation peuvent occasionner d'importants dépassements. Si le signal d'erreur croît alors la sortie de l'intégrateur augmente aussi, ceci fait que le signal atteint ses limites. Lorsque ce phénomène se produit l'action intégrale continue à intégrer jusqu'à atteindre un état de saturation. Ce problème arrive souvent lorsque l'action intégrale est présente dans le système et maintient des dépassements indésirables. Lorsque le point de référence change rapidement l'action dérivation produit subitement un changement à la sortie du contrôleur qui tend à conduire le processus dans une zone non linéaire.

Pour résoudre les problèmes dus aux actions de dérivation et d'intégration et aboutir à une performance satisfaisante du système en boucle fermée on modifie le contrôleur PID.

2.5.1 Action Intégrale

Si l'erreur initiale est assez grande à l'entrée du contrôleur, la sortie de l'intégrateur sera très importante ce qui fait que le signal atteint ses limites très rapidement, dans ce cas l'action intégrale continue à intégrer et le système entre en zone de saturation.

Pour éviter ce problème, la sortie de la branche d'intégration est limitée par l'introduction d'un élément non linéaire (zone morte) placée dans la branche de rétroaction comme le montre la figure 2.11, lorsque $U_i(t)$ est trop grand (en dehors des limites de la zone morte) l'entrée de l'intégrateur diminue, ce qui réduit la sortie de l'intégrateur. La limitation de l'action d'intégration n'exclue pas le problème car la sortie du contrôleur est dans la zone de

saturation. On peut prévenir cette saturation en utilisant une rétroaction. Il existe plusieurs approches pour résoudre ce problème comme dans le cas de la figure 2.12.

L'entrée de l'intégrateur représente la différence entre le signal d'erreur et un signal $x(t)$, ce dernier est nul dans le cas où la sortie du contrôleur est faible devant le seuil de saturation, dans ce cas le système est contrôlé par un PID linéaire (travaillant dans sa zone linéaire). Si la sortie du contrôleur dépasse le seuil de saturation, $x(t) > 0$ ce qui réduit le signal d'entrée de l'intégrateur.

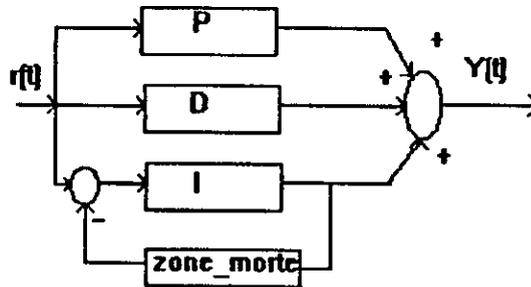


figure 2.11 Limitation de l'action intégrale par zone morte

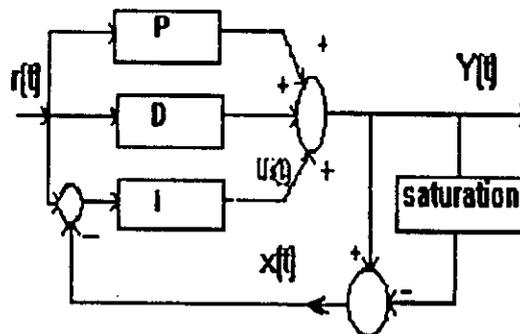


figure 2.12 Limitation de l'action intégrale par élément limiteur

2.5.2. Action dérivée

Il n'est pas souhaitable que les signaux hautes fréquences puissent être fortement amplifiés, ceci afin d'éviter que les signaux à variation rapide présent à l'entrée du correcteur ne se retrouvent dans le signal de commande. On réalise donc une forme du PID idéal filtré. Il faut filtrer tout en autorisant la dérivation [12],[18].

Contrôleur 1a:

$$\text{PID idéal } G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.16)$$

Il existe plusieurs possibilités de filtrer les signaux haute-fréquence et de réduire l'effet des signaux à variation rapide.

Contrôleur 1b:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) / (1 + t_f s) \quad (2.18)$$

Dans ce cas le filtre est placé à la sortie du PID idéal

contrôleur 1c:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{(1 + t_f s)}\right) \quad \text{avec } t_f = T_d/N \quad (2.17)$$

Dans ce cas le filtre est placé directement dans le circuit dérivateur, si $t_f=0$, dans ce cas les deux contrôleurs (1b) et (1c) sont identiques et représentés par la même structure celle de la figure 2.13.

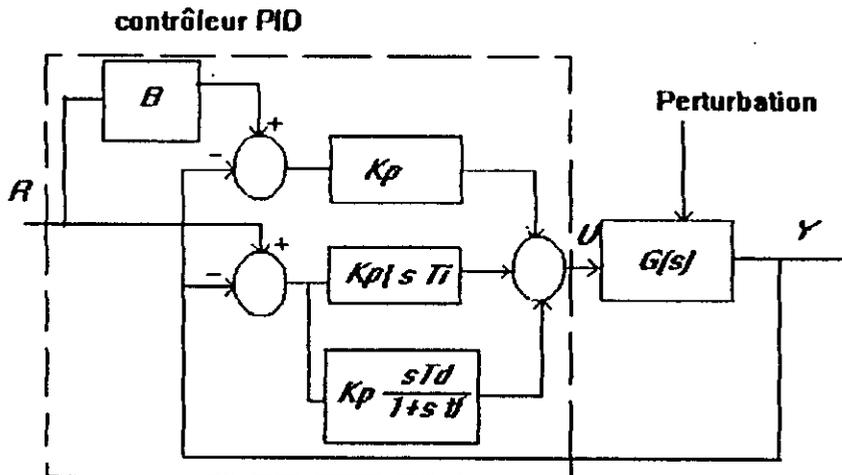


figure 2.13 Structure 1 contrôleur IDEAL

Contrôleur2:

Si le contrôleur est idéal et si $r(t)$ est un échelon, l'entrée de l'action dérivée est égale à $e(t)$, signal d'erreur.

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

La sortie de la composante de dérivation est donnée pour un contrôleur idéal par l'équation ci-dessous.

$$T_d \frac{de(t)}{dt} = T_d \frac{d[r(t) - y(t)]}{dt} = T_d \frac{dr(t)}{dt} - T_d \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.19)$$

$\frac{dr(t)}{dt}$ est causée par la brusque variation de l'entrée $r(t)$. pour éliminer cette composante

deux autres structures sont proposées en figures 2.14 et 2.15.

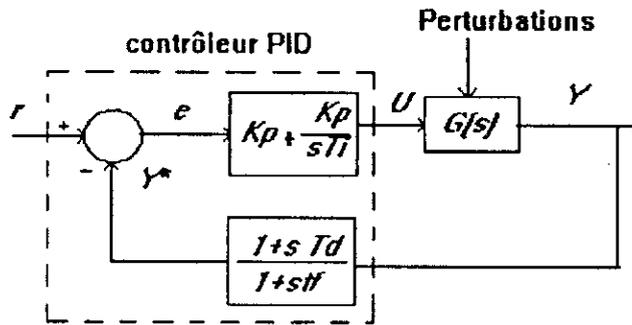


figure 2.14 Structure 2 limitation de l'action dérivé

Dans la structure 2, pour la mise en oeuvre on prend $tf \ll Td$, cependant $tf \neq 0$ car le terme $1 + stf$ est nécessaire afin d'éliminer les bruits de hautes fréquence. La figure 2.14 représente un contrôleur de type PI lorsque $Td = tf = 0$. En régime permanent $Y^* = Y$, la comparaison se fait entre le signal d'entrée (la référence) et le signal Y^* . Le signal d'entrée de la composante de dérivation et le signal de sortie.

$$U(s) = E(s)(Kp + Kp / sTi)$$

$$U(s) = (R(s) - Y^*(s))(Kp + Kp/sTi)$$

$$U(s) = [(R(s) - ((1 + Tds)/(1 + tfs))Y(s))] [Kp + Kp/sTi] \tag{2.20}$$

Dans cette expression la composante $Td \frac{dr(t)}{dt}$ n'apparaît pas.

Une seconde structure pour corriger ce problème est proposée en figure 2.15.

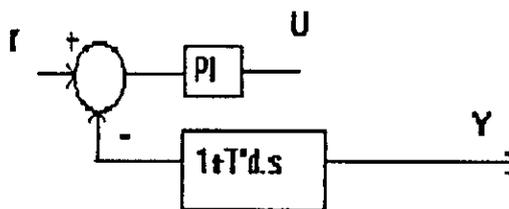


figure 2.15 Structure 3 limitation de l'action dérivé

$$U(s) = Kp'(1 + \frac{1}{Ti's})(R(s) - (1 + Td's)Y(s))$$

la composante de $U(s)$ fonction de $Y(s)$ est

$$U(s) = -Kp'(1 + Td's + \frac{1}{Ti's} + \frac{Td'}{Ti'})Y(s)$$

$$U(s) = \left[\left\{ \frac{Kp'(1 + (Td' + Ti')s + Td'Ti's^2)}{sTi'} \right\} Y(s) \right] \tag{2.21}$$

si on le compare à un contrôleur PID idéal, ce dernier aura comme paramètres

$$T_i = T_i' + T_d'$$

$$K_p = K_p' \left(1 + \frac{T_d'}{T_i'} \right)$$

$$T_d = \frac{T_d' T_i'}{T_i' + T_d'}$$

La valeur maximale de la constante de dérivation est obtenue lorsque $T_i' = T_d'$, dans ce cas les nouvelles valeurs des paramètres seront comme suit

$$K_p' = K_p / 2$$

$$T_i' = T_i / 2 \tag{2.22}$$

$$T_d' = 2T_d$$

La constante de dérivation n'apparaît de cette façon que pour la composante $Y(s)$.

Le premier terme de l'équation 2.19 est nulle, cette action n'est plus fonction des brusques variations du signal d'entrée. Ce type de correction donne une fonction de transfert en boucle fermée assez intéressante, elle a l'avantage de ne pas saturer le signal de commande lors des brusque variation du signal d'entrée.

Les structures mises en oeuvre sont la structure 1 (figure 2.13), la structure 2 (figure 2.14) et la structure 3 (figure 2.15). Nous allons voir les modifications apportées par les structures 2 et 3 par rapport à la structure 1.

2.6 Exemples

Exemple 2.6.1 Fonction de transfert de l'exemple 2.4.1

L'exemple 2.4.1 a été compensé par un contrôleur de structure 1 (figure 2.13) en section 2.4. Nous allons voir comment les contrôleurs de la structure 2 (figure 2.14) et de la structure 3 (figure 2.15) modifient les paramètres dynamiques du système compensé.

Les signaux de commande et les réponses du système compensé par les méthodes d'ajustage sont données en figure 2.16 avec la structure 2 et en figure 2.17 avec la structure 3. Les paramètres des contrôleurs et les paramètres dynamiques sont reportés dans les tableaux 2.6 et 2.7. Nous remarquons une amélioration au niveau de la commande, cette dernière ne varie plus de façon aussi rapide (figure 2.6) avec le contrôleur de la structure 1 (PID idéal). Les pics de tension ne sont plus aussi importants. Les systèmes compensés par les contrôleurs de structure 2 et structure 3 sont plus performants. Le dépassement est plus faible avec la

structure 2 et beaucoup plus faible encore avec la structure 3. Les temps de réponse ne sont pas particulièrement plus importants.

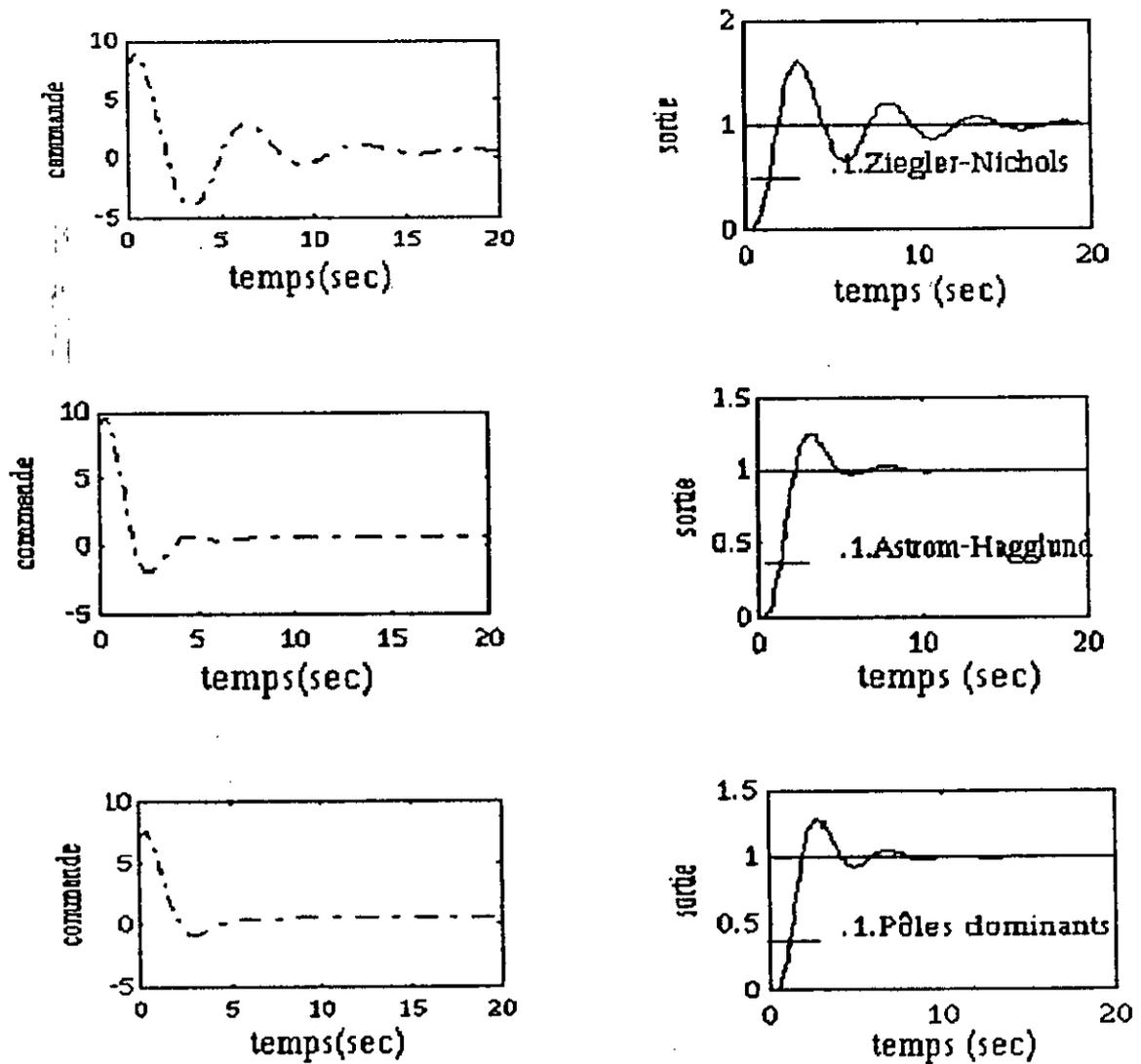


figure2.16 Commandes et Réponses du système 2.4.1 avec un contrôleur de structure 2

Méthodes	Paramètres des contrôleurs			Paramètres dynamiques		
	K_p	T_i	T_d	dépas %	T_m (s)	T_r (s)
Ziegler-Nichols	7.6394	1.9332	0.4833	62.56	1.95	14.15
Aström-Hgglund	7.0297	2.7161	0.7760	25.9	2.25	4.65
Pôles dominants	9.0032	2.6533	0.7581	28.83	1.95	7.05

Tableau 2.6 Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques de l'exemple 2.4.1 avec la structure 2

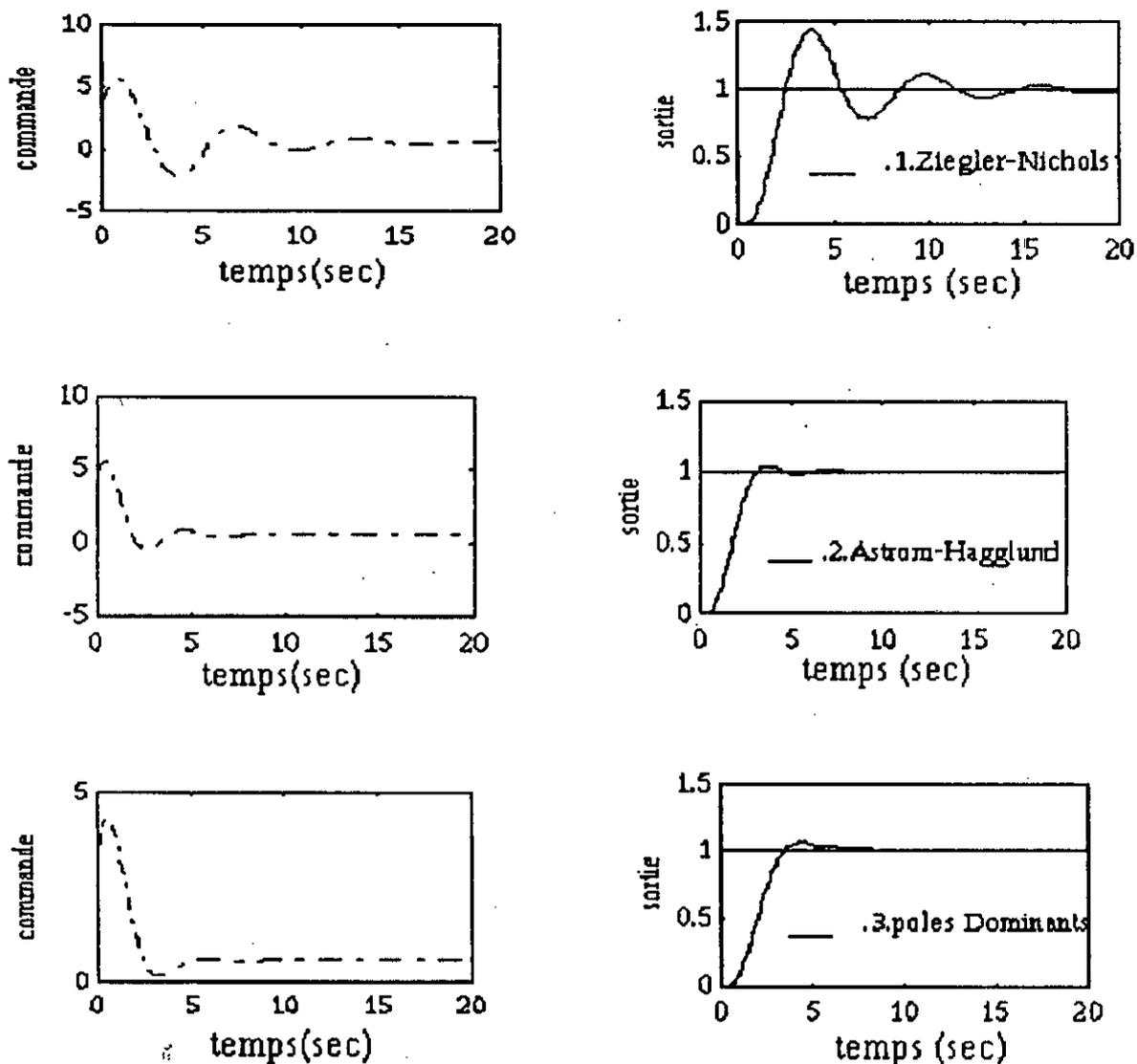


figure2.17 Commandes et Réponses du système 2.4.1 avec le contrôleur de structure 3

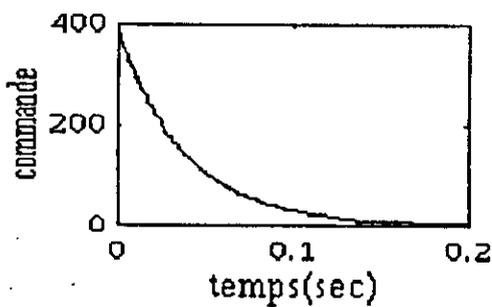
Méthodes	Paramètres des contrôleurs			Paramètres dynamiques		
	K_p'	T_i'	T_d'	dépas %	T_m (s)	Tr (s)
Ziegler-Nichols	3.8197	0.9666	0.9666	44.18	2.45	12.85
Aström-Hgglund	3.5148	1.3580	1.5521	6.075	3.45	5.05
pôles dominants	4.5016	1.3267	1.5162	3.527	3.05	2.85

Tableau 2.7 Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques de l'exemple 2.4.1 avec la structure 3

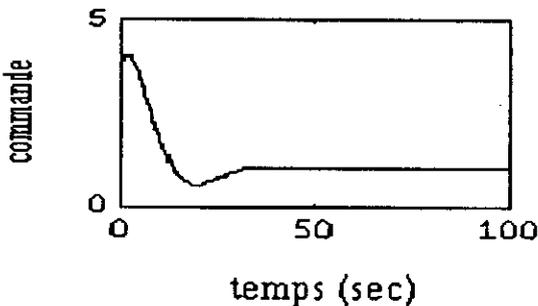
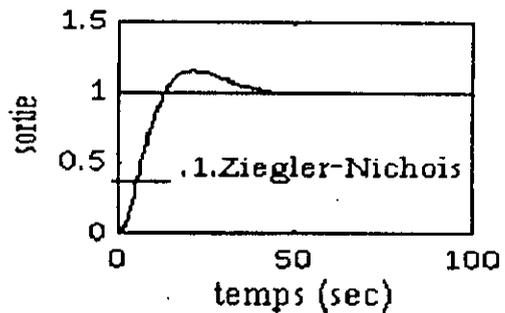
Exemple 2.6.2 : Système d'ordre 3

$$G(s) = \frac{1}{(4s+1)^2(20s+1)}$$

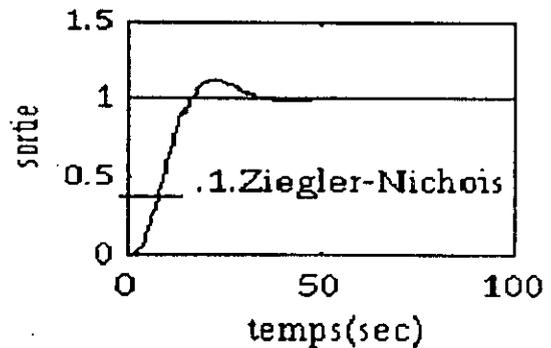
Soit le système de fonction de transfert $G(s)$, l'application de la méthode de Ziegler-Nichols avec un PID de structure 1 se présente avec les caractéristiques données dans le tableau 2.8. Si on refait la même opération avec un contrôleur ayant une structure 2 ou 3 on constate une amélioration des réponses en terme de dépassement au dépend de la vitesse. Le contrôleur de structure 1 présente le temps de montée le plus faible car sa commande présente un pic de tension très important, il y'a une surtension alors que le contrôleur de structure 2 présente une réponse presque équivalente avec une commande bien plus faible. Le système compensé par le contrôleur de structure 3 donne un dépassement plus faible car le terme proportionnel est deux fois plus faible que le terme proportionnel des deux autres structures, le système est moins rapide car la constante d'intégration est réduite de moitié elle aussi et le signal de commande présente un faible pic. Les paramètres sont donnés dans le tableau 2.8 et les réponses du système compensés sont donnés en figures 2.18. Pour tous les exemples considérés nous avons pris un contrôleur filtré avec une constante de temps $t_f = 0.01 T_d$.

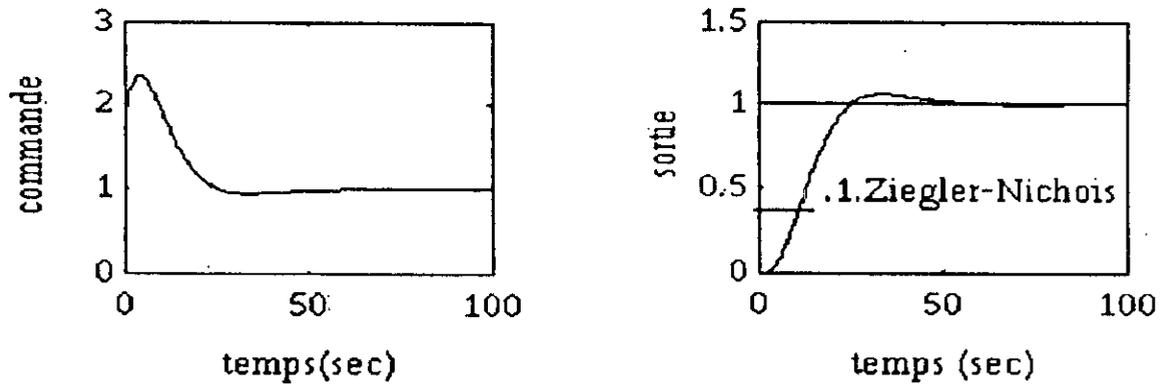


Structure 1 $t_f/T_d = 0.01$



Structure2 $t_f/T_d = 0.01$





Structure3 $t_f / T_d = 0.01$

figure 2.18 Réponse du système avec les contrôleurs des structures 1 ,2 et 3

Méthode	paramètres des contrôleurs			paramètres dynamiques		
	K_p	T_i	T_d	dépas %	T_m (s)	T_r (s)
structure 1	3.8197	15.5151	3.8788	15.48	12.75	34.75
structure2	3.8197	15.5151	3.8788	12.54	16.25	30.75
structure3	1.9099	7.7575	7.7575	6.101	24.75	38.75

Tableau 2.8 Paramètres des contrôleurs et paramètres dynamiques de l'exemple 2.6.2

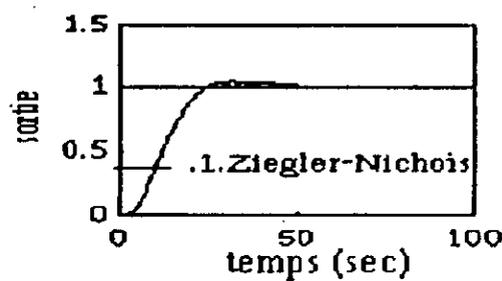
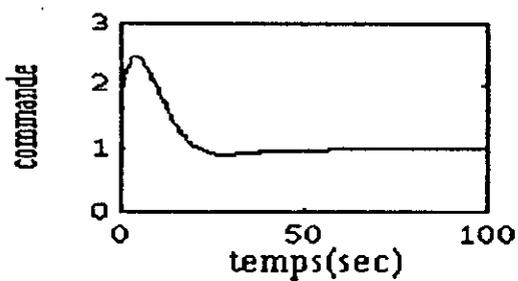
avec les différentes structures

2.7 Influence du filtre sur les paramètres dynamiques du système

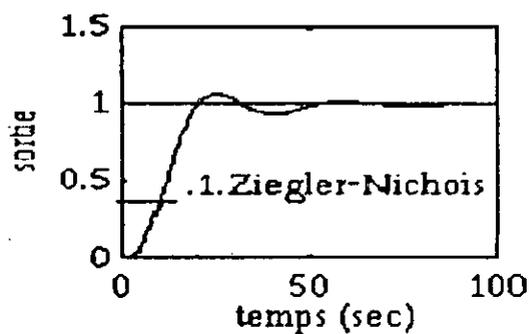
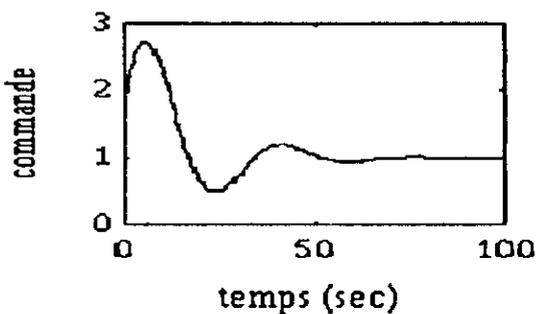
Les courbes présentées en figure 2.19 comparent les commandes et les réponses du système 2.6.2 compensé avec un contrôleur de structure 3 filtré. On remarque que le nombre d'oscillations augmente avec le rapport t_f / T_d . Si la constante t_f est faible devant T_d le nombre d'oscillations diminue, le dépassement diminue et le temps de montée augmente. Le rôle du filtre sert à éliminer les signaux de fréquence élevée sans annuler l'action de dérivation. La valeur la plus adéquate correspond à $t_f = 0.1T_d$. Les Paramètres dynamiques du système sont reportés dans le tableau 2.9.

Méthode Ziegler-Nichols	Paramètres des contrôleurs			Paramètres dynamiques		
	K_p	T_i	T_d	Dépas %	T_m (s)	T_r (s)
structure 3 $tf/Td=1$	1.9099	7.7575	7.7575	14.11	18.75	86.75
structure 3 $tf/Td=0.5$	---	---	---	6.388	20.75	43.25
structure3 $tf/Td=0.1$	---	---	---	4.734	24.25	21.75
structure3 $tf/Td=0.01$	1.9099	7.7575	7.7575	6.101	24.75	38.75

Tableau 2.9 Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système de l'exemple 2.6.2 (contrôleur de structure 3 avec filtre)



structure 3 $tf/Td = 0.1$



structure 3 $tf/Td = 0.5$

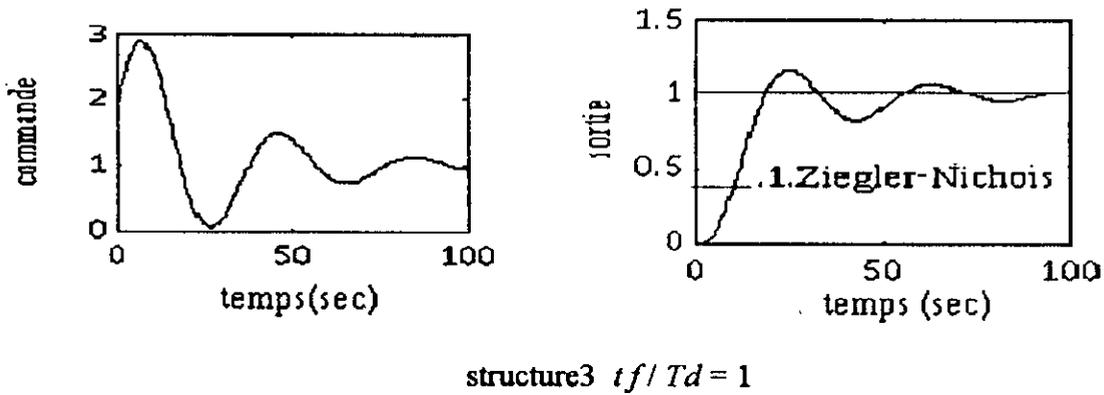


figure2.19 Influence du filtre sur les paramètres dynamiques du système de l'exemple 2.6.2

2.8 Sensibilité aux perturbations et aux variations des paramètres

Initialement la contre réaction à été introduite pour réduire l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler. Mais en fait les perturbations affectant l'ensemble du système de commande sont de deux type[11].

- ___ Les perturbations agissant sur les variables à réguler.
- ___ Les perturbations paramétriques agissant sur les performances du système de commande.

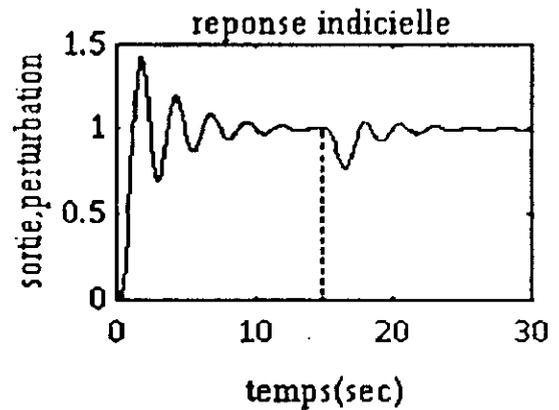
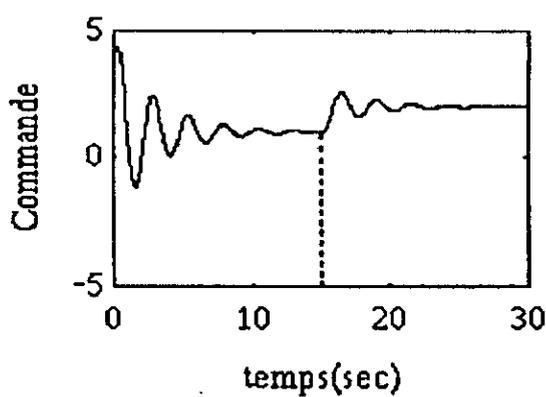
Les perturbations paramétriques rassemblent les variations de dynamique, de gain statique, de retard... Si lors du dimensionnement du régulateur, les variations paramétriques du système ne sont pas prises en compte, les performances dynamiques et statiques se dégradent, il serait donc intéressant de trouver un moyen qui maintienne les paramètres variables à l'intérieur d'un domaine aussi étroit que possible pour que, les performances du procédé restent dans des limites acceptables, dans ce cas on peut qualifier la commande de robuste. Si les paramètres du système varient dans un large domaine, engendrant une dégradation des performances, on fait appel à d'autres méthodes de commande.

2.8.1 Sensibilité à une perturbation

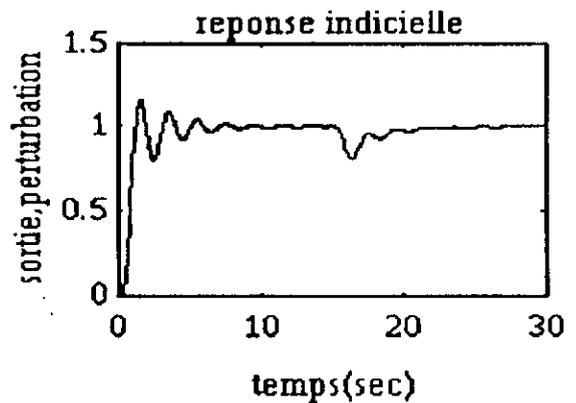
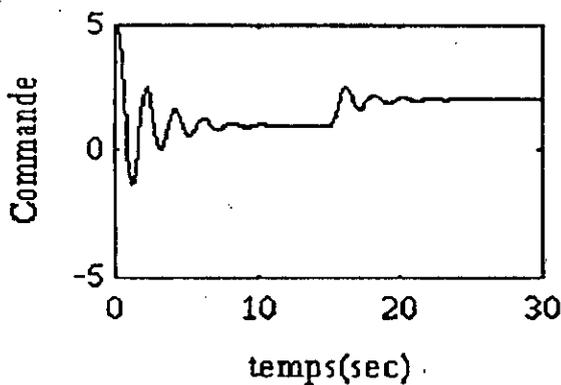
a) Constante

Nous nous intéressons ici à une perturbation constante (figure 2.13), qui peut être représenté par une charge ou toutes autres variations .

Prenons le système 2.4.2 et appliquant une perturbation constante égale à la consigne. Les courbes de la figure 2.20 nous montrent que les méthodes d'ajustage donnent des contrôleurs PID robuste face aux perturbations. Cependant des quatre méthodes analysées, la méthode des pôles dominants est la plus robuste car c'est celle qui efface les effets de la perturbation le plus rapidement.



(a) Ziegler -Nichols



(b) Astrom-Haggund

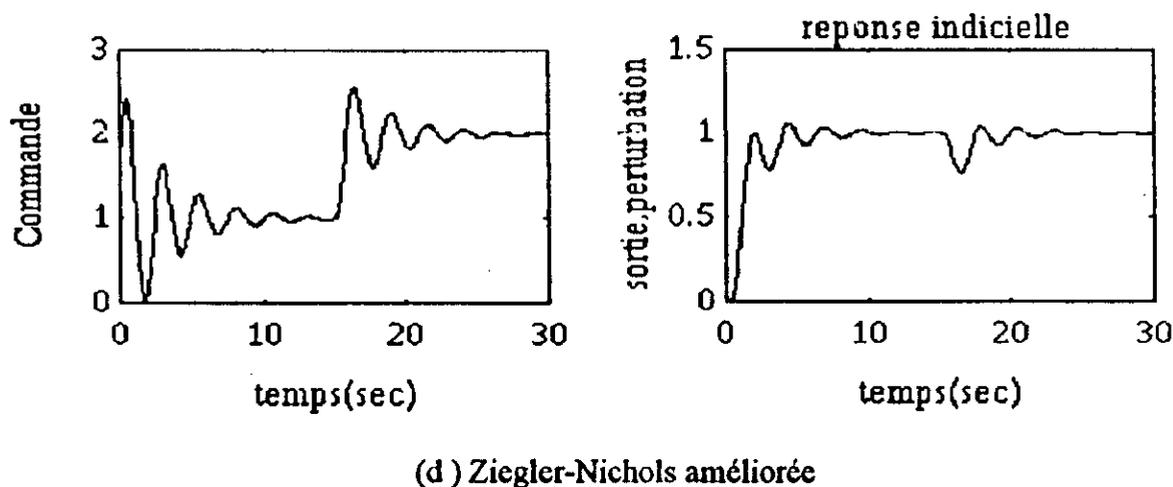
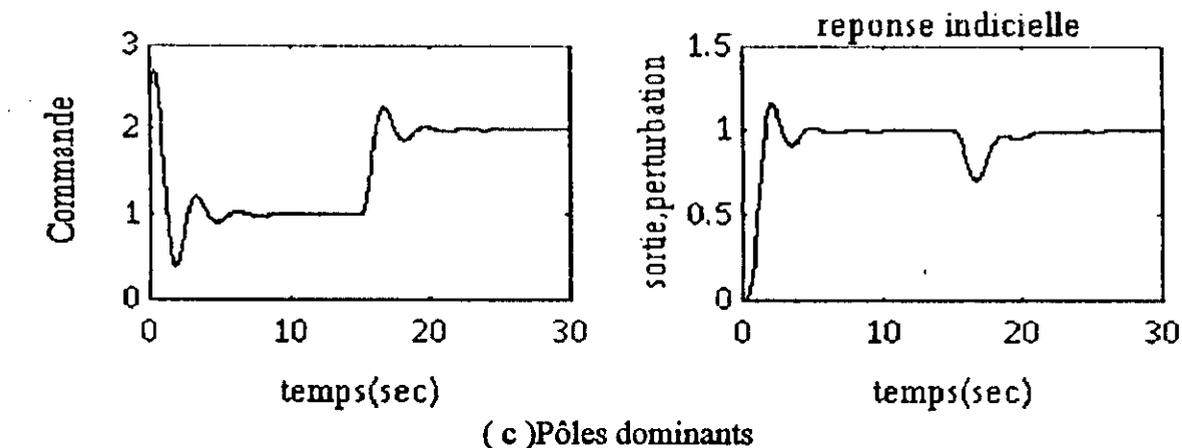
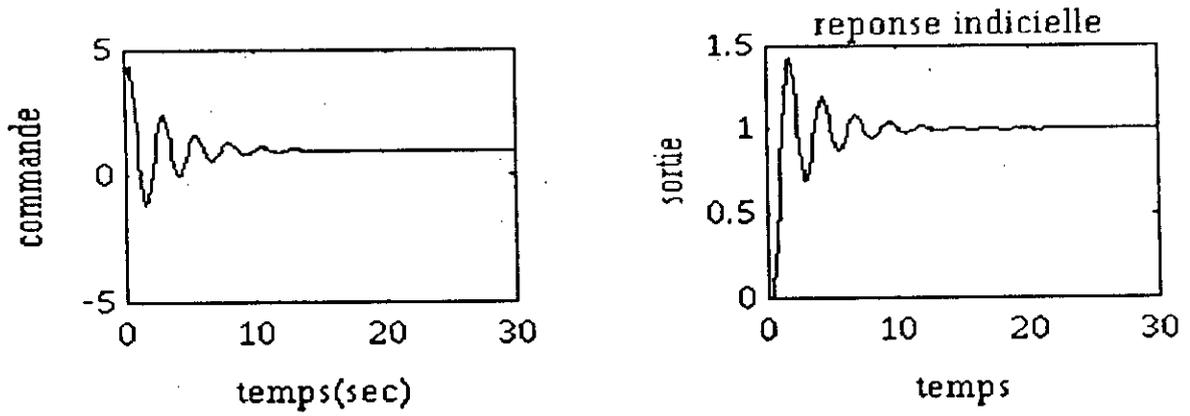


figure 2.20 Sensibilité du système à une perturbation constante (système de l'exemple 2.6.2 avec un contrôleur de structure 2)

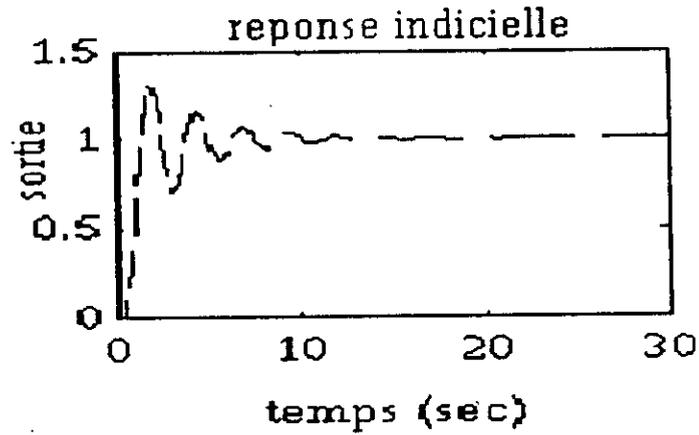
b) Fonction de la commande

Si on applique une perturbation constante de 10%, 20% et 50% de la valeur maximale de la commande. Les réponses données en figure 2.21 avec la méthode de Ziegler- Nichols pour les différentes perturbations montrent que le contrôleur déterminé est robuste pour des perturbations de 10% et 20% car les performances dynamiques se trouvent dans une marge limitée. Si la perturbation est assez grande la différence risque d'être importante bien que l'erreur statique est quasiment nulle.



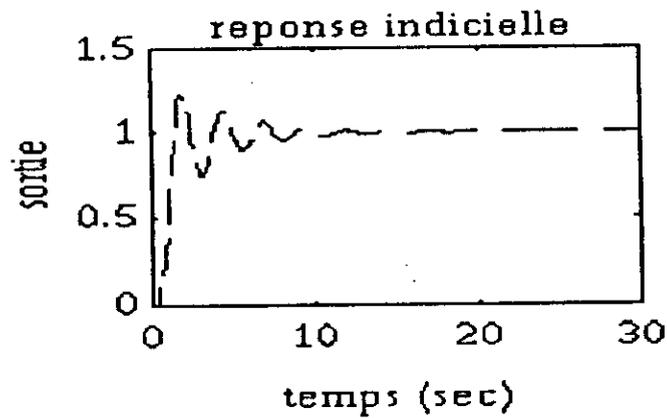
Sans perturbation

dépassement = 42.24% ; $T_m = 1.125$ s ; $T_r = 8.325$ s



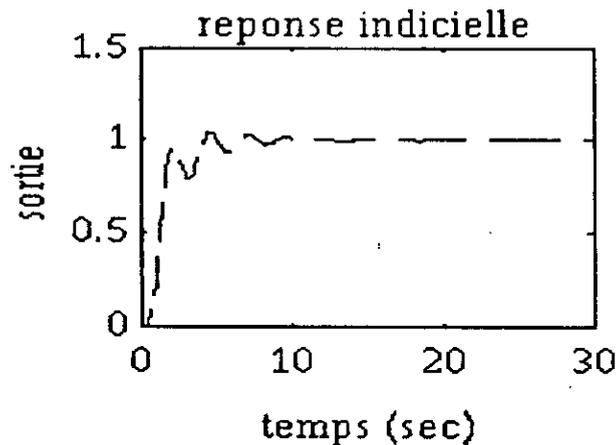
Perturbation égale à de 10% de la commande

dépassement = 32.01% ; $T_m = 1.275$ s ; $T_r = 8.175$ s



Perturbation égale à 20% de la commande

dépassement = 21.79% ; $T_m = 1.425$ s ; $T_r = 87.125$ s



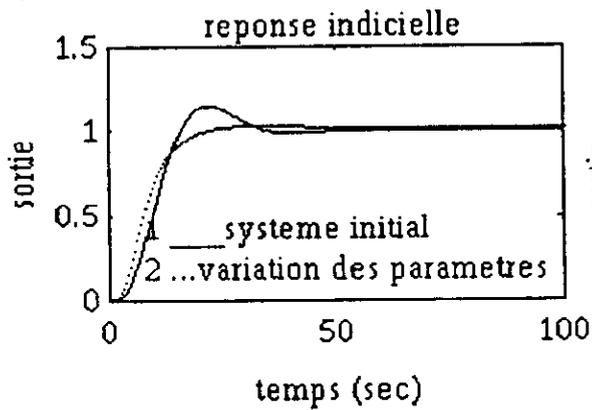
Perturbation égale à 50% de la commande
dépassement = 4.629 % ; $T_m = 4.125$ s ; $T_r = 6.075$ s

figure 2.21 Sensibilité du système à une perturbation fonction de la commande (système de l'exemple 2.6.2)

2.8.2 Sensibilité à la Variation des paramètres

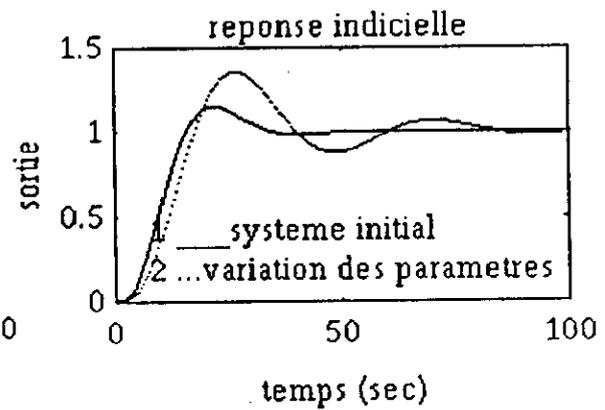
Les paramètres que nous avons fait varier dans ce cas sont le gain statique du système et la constante de temps ce qui correspond à la position du pôle double pour cet exemple. En terme de variation nous avons envisagé des variations deux fois plus grande et deux fois plus petite, des variations de $\pm 50\%$ autour de leurs valeurs initiales qui est une variation importante, une fois le contrôleur déterminé par la méthode de Ziegler-Nichols nous faisons varier l'un des paramètres et voir comment réagit le système compensé.

On remarque sur les courbes de la figure 2.22 que le contrôleur déterminé par la méthode d'ajustage, méthode de Ziegler-Nichols est robuste. Il est pratiquement insensible à la variation du gain (figures 2.22 (c) et (d)), à l'introduction d'un temps mort (figure 2.22 (e)). Lorsque on fait varier la constante de temps de $\pm 50\%$ on remarque en figure 2.22 (a) et figure 2.22(b) que la réponse donnée par le système avec la méthode de Ziegler-Nichols est plus qu'acceptable. Pour cette étude on s'est contenté uniquement de la méthode de Ziegler-Nichols car c'est la méthode qui a donné le plus grand dépassement. En conclusion on peut dire que la méthode d'ajustage automatique est robuste, elle peut donner un système insensible à la variation des paramètres et aux perturbations.



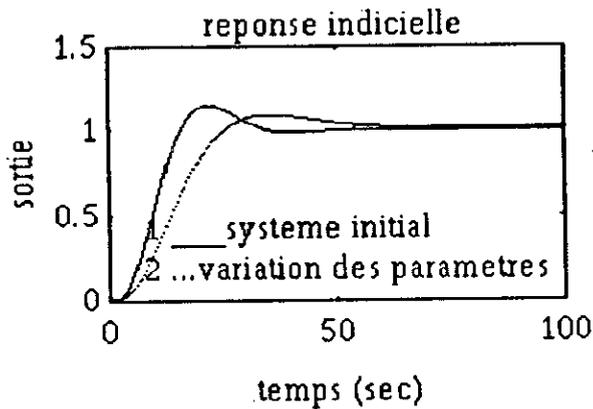
(a)

Variation de la constante de temps de -50%



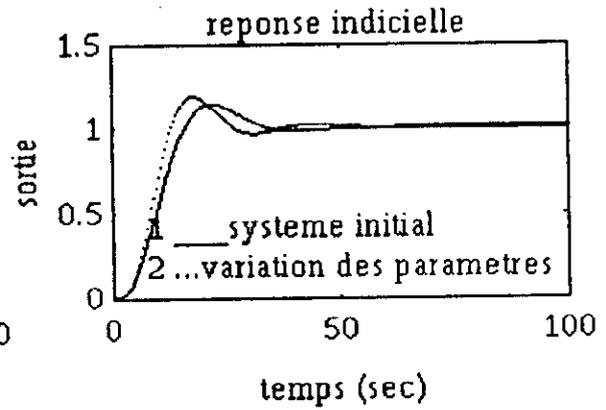
(b)

Variation de la constante de temps de +50%



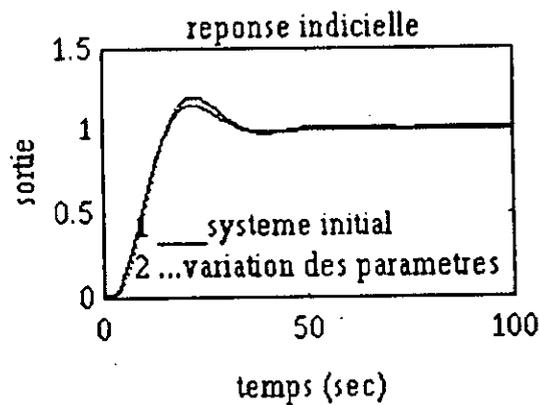
(c)

Variation du gain de -50%



(d)

Variation du gain de +50%



(e)

Introduction d'un temps mort

figure 2.22 Sensibilité à la variation des paramètres du système de l'exemple 2.6.2

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons passé en revue plusieurs méthodes d'ajustage automatique des contrôleurs PID. Nous avons remarqué après l'analyse de quelques exemples que la méthode de Ziegler-Nichols est la méthode qui donne en générale les plus mauvais résultats car elle impose moins de contraintes, cependant ces résultats restent acceptables et peuvent toujours servir de valeurs initiales. La méthode de Astrom-Hagglund quant à elle apporte de grandes améliorations à la méthode de Ziegler-Nichols, elle donne de très bons résultats sauf pour les systèmes possédant un retard. Plus le retard est grand, plus le résultat est mauvais ce qui nous permet de dire que la méthode n'est pas conseillée pour l'ajustage de ce genre de système. La méthode des pôles dominants est une méthode qui permet d'approximer le système par un système d'ordre deux, il suffit d'imposer le facteur d'amortissement pour obtenir le système compensé désiré. La dernière méthode analysée apporte une amélioration à la méthode de Ziegler-Nichols, elle apporte des améliorations au dépassement, le seul inconvénient de cette méthode c'est sa validité dans certains intervalles uniquement. Afin de résoudre certains problèmes provoqués par les actions intégration et dérivation des structures modifiées de contrôleurs PID sont introduites ce qui a permis d'améliorer les performances dynamiques du système. En conclusion la méthode d'ajustage automatique est une méthode très facile à utiliser en particulier lorsque la fonction de transfert est inconnue. Pour apprécier les performances données par cette technique nous allons analyser une autre technique d'ajustage qui est supposée performante.

Chapitre 3

Conception de contrôleurs PID par la méthode d'optimisation

3.1 Introduction

D'un point de vue théorique la performance d'un système est examinée à l'aide du temps de montée T_m , du temps d'établissement T_r , du dépassement et de l'erreur statique. En d'autre terme une bonne performance c'est avoir une réponse rapide, un faible dépassement et une erreur statique quasiment nulle. Si on analyse le système de la figure 3.1, on désire tout simplement avoir $e(t) \rightarrow 0$ pour $t \geq 0$.

Les méthodes utilisant le critère de performance quadratique tiennent compte de la réponse dynamique du système. Ce qui donne généralement une bonne performance dynamique. Durant les quarante dernières années plusieurs approches ont été développées pour trouver le critère qui donne la réponse optimale. L'intégral du carré de l'erreur (ISE) est un critère très utilisé seulement, il présente un inconvénient. De cette minimisation résulte un signal'erreur souvent oscillatoire dû à l'erreur initiale qui contribue de façon assez significative sur les paramètres dynamique du système, car ce critère met en évidence les écarts transitoires de fortes amplitudes par rapport à ceux de faibles amplitudes. Par conséquent lorsqu'on veut pondérer faiblement le début du régime transitoire et simultanément pondérer fortement la valeur de l'erreur en fin de régime transitoire, on pondère le critère (ISE) par le temps ce qui donne le critère (ITSE) [19,20]. D'autres critères sont utilisés comme l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur (IAE) et l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur pondérée par le

facteur temps (ITAE), ce critère met en évidence les valeurs de l'erreur en fin de régime transitoire. Le contrôleur optimal est obtenu par la minimisation de l'un de ces critères.

3.2 Intégrale du critère de performance

Les performances dynamiques optimales peuvent être considérées comme une réponse temporelle qui donne la valeur minimale de J . L'intégrale du critère de performance est exprimée de différentes manières, cependant un système de contrôle est considéré comme optimal si l'indice de performance sélectionné est minimisé par la variation des paramètres du contrôleur. Les paramètres optimaux dépendent directement du critère sélectionné.

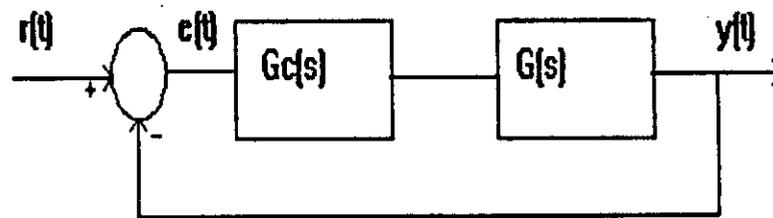


figure 3.1 schéma bloc d'un système bouclé

Pour évaluer la qualité d'une régulation il faut connaître l'évolution du signal d'erreur en régime transitoire. Cette évaluation peut se faire à partir du critère de qualité. On définit la grandeur J , dénommée fonction de coût, qui permet une mesure objective de l'évolution de l'erreur (figure 3.1), cette technique consiste à minimiser l'aire hachurée figure 3.2. Cette aire s'exprime par une intégrale de $|e(t)|$ ou de $e^2(t)$.

$$J = \int_0^{\infty} \phi[|e(t), t|] dt \quad (3.1)$$

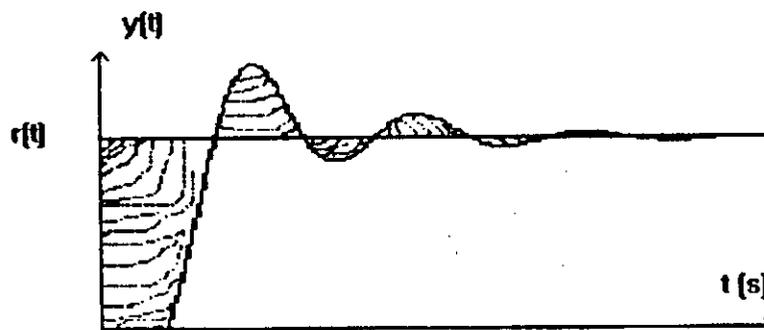


figure 3.2 réponse d'un système à un échelon

3.2.1 Intégrale de l'erreur quadratique(ISE)

L'intégral de l'erreur quadratique (ISE) [19, 22] est un critère de performance très utilisé dans le contrôle des systèmes. Dans ce cas la fonction à minimiser J est donnée par l'équation 3.2.

$$J = \int_0^{\infty} [(e(t)^2)] dt \quad (3.2)$$

En plus de sa mise en oeuvre facile, cet indice présente un autre avantage celui d'être facile à analyser et à calculer. Une solution analytique peut être obtenue dans le domaine fréquentiel.

$$J(\theta) = \int_0^{\infty} e^2(\theta, t) dt \quad \text{avec } \theta = \{Kp, Ti, Td\}. \quad (3.3)$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + Gc(s)G(s)} \quad (3.4)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$Gc(s) = Kp(1 + sTd + \frac{1}{sTi})$$

R(s) signal d'entrée (référence), supposons que le signal d'entrée soit $r(t) = 1, t > 0$

R(s) = 1/s, dans ce cas E(s) s'exprime par

$$E(s) = \frac{TiD(s)}{TisD(s) + N(s)Kp(TiTds^2 + Tis + 1)} \quad (3.5)$$

$$E(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (3.6)$$

Pour exprimer le signal d'erreur dans le domaine fréquentiel on doit remplacer le retard s^{-1} il existe par son approximation de Padé d'ordre 2 ou d'ordre 3 [11].

$$e^{-s\tau} = \frac{12 - 6s\tau + s^2\tau^2}{12 + 6s\tau + s^2\tau^2}$$

celle au troisième ordre est donnée par la relation suivante:

$$e^{-s\tau} = \frac{120 - 60s\tau + 12s^2\tau^2 - s^3\tau^3}{120 + 60s\tau + 12s^2\tau^2 + s^3\tau^3}$$

dans le domaine fréquentiel l'intégrale de l'erreur quadratique est exprimée par:

$$J(\theta) = \int_0^{\infty} e^2(\theta, t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)} ds \quad (3.7)$$

Cette intégrale peut être calculée par itération en utilisant l'Algorithme d'intégration de Åström [1]. La fonction $E(s)$ donnée par l'équation (3.6) ainsi que $A(s)$ ne doit pas posséder de racines dans la partie droite du plan complexe ni sur l'axe des imaginaires.

$$J = \sum_{k=1}^n \beta_k^2 / (2\alpha_k) = \sum_{k=1}^n (b_1^k)^2 / (2a_0^k a_1^k) \quad (3.8)$$

$$\beta_k = b_1^k / a_1^k \quad ; \quad \alpha_k = a_0^k / a_1^k$$

Les valeurs b_1^k , a_1^k et a_0^k sont données par le système suivant

$$\begin{aligned} \text{Avec} \quad A(s) &= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n \\ B(s) &= b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + b_3 s^{n-3} + \dots + b_n \\ A(s) &= \bar{A}(s) + \tilde{A}(s) \end{aligned}$$

$$\bar{A}(s) = a_0 s^n + a_2 s^{n-2} + a_4 s^{n-4} + \dots = 1/2[A(s) + (-1)^n A(-s)]$$

$$\tilde{A}(s) = a_1 s^{n-1} + a_3 s^{n-3} + a_5 s^{n-5} + \dots = 1/2[A(s) - (-1)^n A(-s)]$$

Les polynômes $A_k(s)$ et $B_k(s)$ sont donnés respectivement par les relations ci-dessous

$$\begin{aligned} A_k(s) &= a_0^k s^n + a_1^k s^{n-1} + a_2^k s^{n-2} + \dots + a_n^k \\ B_k(s) &= b_1^k s^{n-1} + b_2^k s^{n-2} + b_3^k s^{n-3} + \dots + b_n^k \end{aligned}$$

$$A_{k-1}(s) = A_k(s) - \alpha_k s \tilde{A}_k(s)$$

$$B_{k-1}(s) = B_k(s) - \beta_k \tilde{A}_k(s)$$

$$A_n(s) = A(s) \quad ; \quad B_n(s) = B(s);$$

Dans le domaine fréquentiel

$$J_1(\theta) = \int_0^{\infty} \{te(\theta, t)\}^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s)F(-s)ds \quad (3.10)$$

utilisant la transformée de Laplace

$$L\{t^n e(t)\} = (-1)^n \frac{d^n E(s)}{ds^n} \quad (3.11)$$

si n=1

$$L\{te(t)\} = (-1) \frac{dE(s)}{ds} \approx F(s)$$

$$F(s) = \frac{B(s)A'(s) - A(s)B'(s)}{(A(s))^2}$$

Les pôles de F(s) doivent être dans la partie gauche du plan complexe. Si les pôles de A(s) se trouvent dans la partie gauche du plan complexe, le système est stable. La procédure de calcul peut être étendue à des valeurs de n grandes. Si n = 2, nous aurons

$$J(\theta) = \int_0^{\infty} \{t^2 e(\theta, t)\}^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} P(s)P(-s)ds \quad (3.12)$$

avec

$$P(s) = L\{t^2 f(t)\} = -d(F(s))/ds$$

lorsque n est supérieur à 2 le calcul devient difficile

Le critère ITSE est insensible à l'erreur initiale mais diminue l'erreur statique. Ce critère permet d'obtenir les caractéristiques du système, avec des dépassements faibles et des oscillations bien amorties, ce critère est amélioré par rapport au critère ISE grâce à la pondération par le temps: équation (3.9).

Dans le domaine fréquentiel ce dernier est exprimé par l'équation (3.10).

La procédure de calcul peut être étendue à des valeurs de n grandes. Si n = 2, le but de cette optimisation sera la minimisation de la fonction . Lorsque n est supérieur à 2 le calcul devient difficile

3.2.3 Intégrale de l'erreur quadratique pondérée par l'exponentiel

Une autre possibilité est la pondération par une exponentielle fonction de β [20]. La fonction est donnée par la fonction (3.13).

$$J_{\beta}(\theta) = \int_0^{\infty} ((e(\theta,t)e^{\beta t})^2) dt = 1/2\pi j \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s-\beta)E(-s-\beta) ds \quad (3.13)$$

$$\beta > 0 \quad ; \quad \beta = \alpha / T_c \quad (3.14)$$

Avec T_c période du cycle limite (critique) du système, période déterminée par la méthode d'ajustage automatique et α un facteur fixé de façon à obtenir un bon amortissement. Si α est trop grand cela implique un grand amortissement. En général cette valeur est fixée à 1.5 pour les contrôleurs PID et 0.8 pour les contrôleurs PI.

Au lieu de pondérer l'erreur on peut introduire d'autres modifications et avoir une nouvelle variante.

$$J(\theta) = \int_0^{\infty} ((e(\theta,t)e^{\beta t})^2 - e(\theta,t)^2) dt \quad (3.15)$$

Pour calculer ce critère il faut connaître la période d'oscillation critique T_c .

3.2.4 Modification du critère de performance ISE

Si on pondère la vitesse de l'erreur nous obtenons un nouveau critère de performance ISE1.

$$J(\theta) = \int_0^{\infty} \left\{ e^2(\theta,t) + r \left(\frac{de}{dt} \right)^2 \right\} dt \quad (3.16)$$

$$B(s) = L\left(\frac{de}{ds}\right) = sE(s) - e(0) \quad (3.17)$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)G_c(s)} = \frac{R(s)}{Q(s)+P(s)} \quad (3.18)$$

Si le signal d'entrée est un signal échelon unitaire alors $e(0) = 1$, ce qui donne

$$B(s) = \frac{Q(s)}{Q(s)+P(s)} - 1 = -\frac{P(s)}{Q(s)+P(s)} \quad (3.19)$$

Une évaluation de cette intégrale dans le domaine fréquentiel est donnée par

$$J(\theta) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \{E(s)E(-s) + r.B(s)B(-s)\} ds \quad (3.20)$$

La résolution numérique est obtenue par application de l'algorithme d'intégration de Aström, pour chaque valeur du facteur de pondération r on aura une valeur de J et un contrôleur correspondant.

Il est possible d'introduire des modifications dans le critère ISE et obtenir le critère ISE2.

$$J(\theta) = \int_0^{\infty} \left\{ e^2(\theta, t) + r \left(t \frac{de}{dt} \right)^2 \right\} dt \quad (3.21)$$

3.2.5 Intégrale de la valeur absolue de l'erreur

L'intégrale de la valeur absolue IAE est aussi un des critères les plus utilisés. Il est sensible aux erreurs faibles car il tient compte de la même façon des erreurs positives et des erreurs négatives. Il permet d'obtenir des réponses assez bonnes avec un amortissement raisonnable et un faible dépassement, cependant ce critère ne peut être évalué dans le domaine fréquentiel à moins que le système ne présente pas de dépassement.

$$J(\theta) = \int_0^{\infty} |e(t, \theta)| dt \quad (3.22)$$

Dans ce cas comme dans le précédent on peut introduire le temps comme facteur de pondération, ce qui donne une nouvelle variante qui sera l'intégral de l'erreur absolue pondérée par le temps (ITAE).

$$J = \int_0^{\infty} t |e(t, \theta)| dt \quad (3.23)$$

Ce critère est insensible à l'erreur initiale mais pondère légèrement les autres erreurs ce qui peut donner une erreur relativement importante dans le temps, cependant il permet d'assurer un temps de réponse faible. Les deux critères sont évalués par calcul.

3.3 Algorithme de calcul

La méthode d'autoréglage des paramètres des contrôleurs PID par l'utilisation du calcul de l'indice de performance est développée comme suit:

Un contrôleur est relié en série avec le procédé (voir figure 3.1), ce contrôleur a comme équation $G_c(s) = K_p(1 + T_d s + 1/T_i s)$

la fonction de transfert du procédé est donnée par :

$G(s) = N(s)/D(s)$, si $G(s)$ est fonction d'un retard alors l'approximation de Padé sera utilisée pour donner une fonction approximative. Supposons que le signal d'entrée soit un échelon alors $r(t) = 1$,

$$t > 0, R(s) = 1/s$$

Le signal d'erreur $E(s)$ sera dans ce cas donné par les équations (3.4), (3.5) et (3.6).

Ce calcul se fait dans le domaine de fréquence et la minimisation de $J(\theta)$ est fonction des paramètres du PID avec $\theta = \{K_p, T_i, T_d\}$.

La détermination des paramètres à comme objectif la minimisation d'une fonctionnelle du type de $J(\theta)$.

Le critère quadratique pondéré par le temps est:

$$J_n(\theta) = \int_0^{\infty} t^n e(\theta, t)^2 dt$$

La transformée de Laplace donne

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n d^n F(s)/ds^n$$

$$F(s) = L\{f(t)\} \text{ si } n=1$$

$$L\{t f(t)\} = -dE(s)/ds = F(s)$$

d'ou l'indice de performance de l'équation (3.10).

$$\text{avec } F(s) = \frac{B(s)A'(s) - A(s)B'(s)}{(A(s))^2}$$

$$A'(s) = a_0 n s^{n-1} + a_1 (n-1) s^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

$$B'(s) = b_1 (n-1) s^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

On peut utiliser deux méthodes pour calculer les paramètres du contrôleur optimal en minimisant la fonction désirée. La première est une méthode de simulation qui calcule la fonction à minimiser J en ajustant les paramètres du contrôleur PID. Le minimum peut être calculé par la méthode du Gradient conjugué ou en utilisant les fonctions du Progiciel Matlab comme la fonction `Fmins.m` qui permet de déterminer le minimum d'une fonction à plusieurs variables en utilisant la méthode du Simplex.

3.4 Méthode de simulation

On fait varier un des trois paramètres du PID tout en gardant les deux autres constant. Les critères utilisés sont de la forme suivante

$$J_{\alpha}(\theta) = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^2(\theta, t) dt \quad (3.24)$$

$\alpha = 0, 1, 2, \dots$

$$\theta = \{K_p, T_i, T_d\}$$

La valeur de ces fonctions est obtenue par simulation du système en boucle fermée avec une entrée échelon unitaire, la valeur minimale est calculée en utilisant la méthode d'interpolation quadratique. Supposons que θ_i^1 soit la valeur initiale, on introduit un pas h_0 , $\theta_i^2 = \theta_i^1 + h_0$, on calcul J_1 et J_2 pour des valeurs de θ^2 et θ^1 respectivement.

Si $J_1 > J_2$, on augmente le pas h_0 et on calcul $\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + 2^{k-1} h_0$ ce qui correspond à J^{k+1} jusqu'à ce que $J^{k+1} > J^k$. Si par contre $J_1 < J_2$, on calcul $\theta_i^k = \theta_i^k - 2^{k-1} h_0$, qui correspond à la valeur de J_{k+1} jusqu'à ce que $J_{k+1} < J_k$.

La valeur minimale de $J(\theta^*)$ se trouve sûrement entre θ_i^{k-1} et θ_i^{k+1} , en posant $\theta_i^{k+2} = \min\{\theta_i^k\}$, d'où $x_a = x_b - d$

$$x_c = x_b + d$$

La valeur de θ qui permet de trouver le minimum est déterminée par la méthode d'interpolation. L'opération est répétée jusqu'à obtention des trois paramètres du PID qui satisfassent le critère.

La mise en oeuvre des deux méthodes a été faite bien que les résultats exposés en 3.5 sont obtenus par la première méthode.

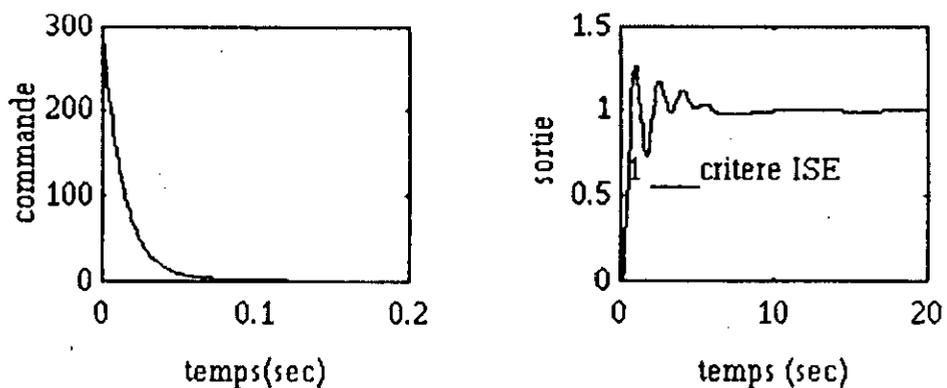
3.5 Exemples d'application

Plusieurs critères de performance ont été vus dans ce chapitre, les performances données par le critère ISE sont comparées aux performances données par d'autres critères. Pour effectuer cette étude comparative plusieurs exemples seront considérés et pour permettre une étude comparative avec les méthodes d'ajustage certains exemples seront repris.

Exemple 3.5.1 Système d'ordre 4 à pôles triple

Le système analysé est celui de l'exemple 2.4.2, système d'ordre 4 à pôles triple.

Le critère ISE donne une réponse présentant des oscillations, le tableau 3.1 résume les résultats obtenus, les réponses sont reportées en figure 3.3. Sur ces réponses nous remarquons que les réponses données par les critères ISE pondérés par le temps ISTE et IST2E donnent de meilleures performances dynamiques que le critère ISE. Le contrôleur de structure 2 permet d'obtenir (figure 3.4) des systèmes compensés avec des paramètres dynamiques améliorés, cette structure permet d'éviter la pointe de tension initiale provoquée par le brusque changement de la consigne. Pour ce qui est du temps de réponse les deux structures sont équivalentes. Les deux autres critères analysés sont les critères ISE1 modifié et ISE2 modifié, ces derniers donnent des réponses améliorées par rapport au critère ISE, ces réponses sont fonction du facteur de pondération de la vitesse r .



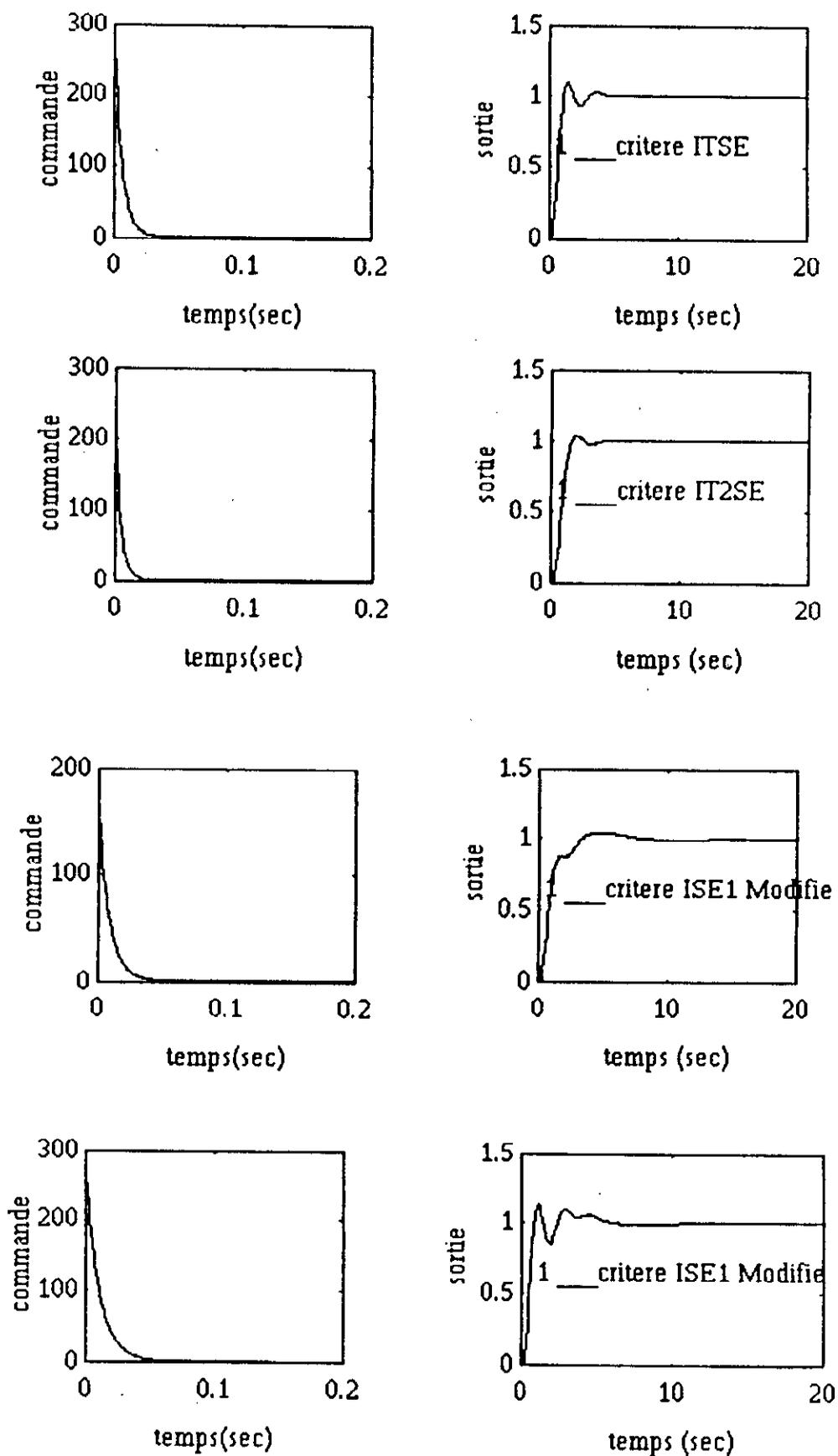
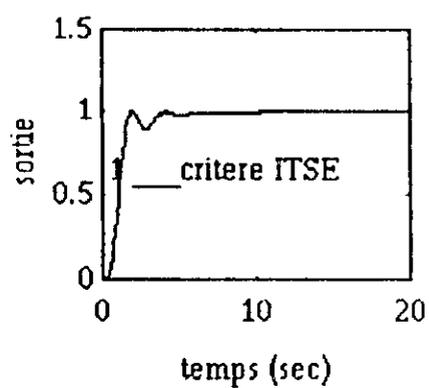
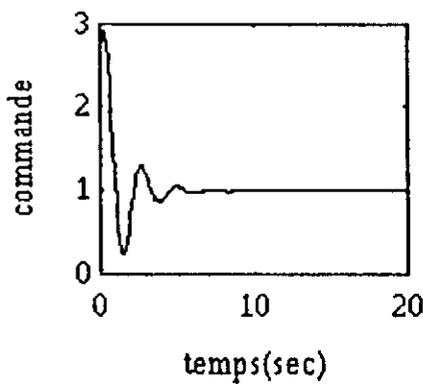
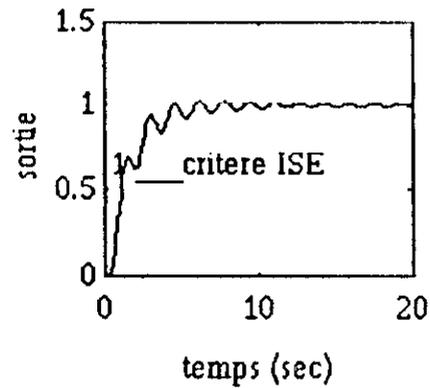
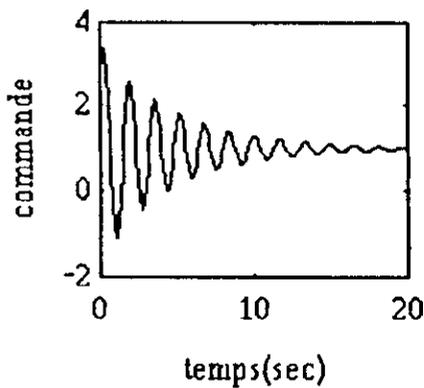


figure 3. 3 Réponses du système 3.5.1 avec contrôleur de structure 1

Critère	Paramètres du contrôleur PID et Indices de performances						
	Kp	Ti	Td	Dépas %	Tm(s)	Tr(s)	J
ISE	2.8743	0.8037	1.3629	25.94	0.65	4.45	0.3913
ISTE	2.6764	1.5673	0.5921	9.62	1.05	2.65	0.0895
IST ² E	2.0340	1.6332	0.4547	3.894	1.55	1.45	0.1243
ISE1(r=0.5)	1.5530	1.2884	0.8603	4.462	3.25	2.85	0.9430
ISE2(r = 0.5)	2.630	1.0023	1.0375	14.09	0.85	4.75	0.7845

Tableau 3.1 Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques donnés par les critères d'optimisation (système 3.5.1)



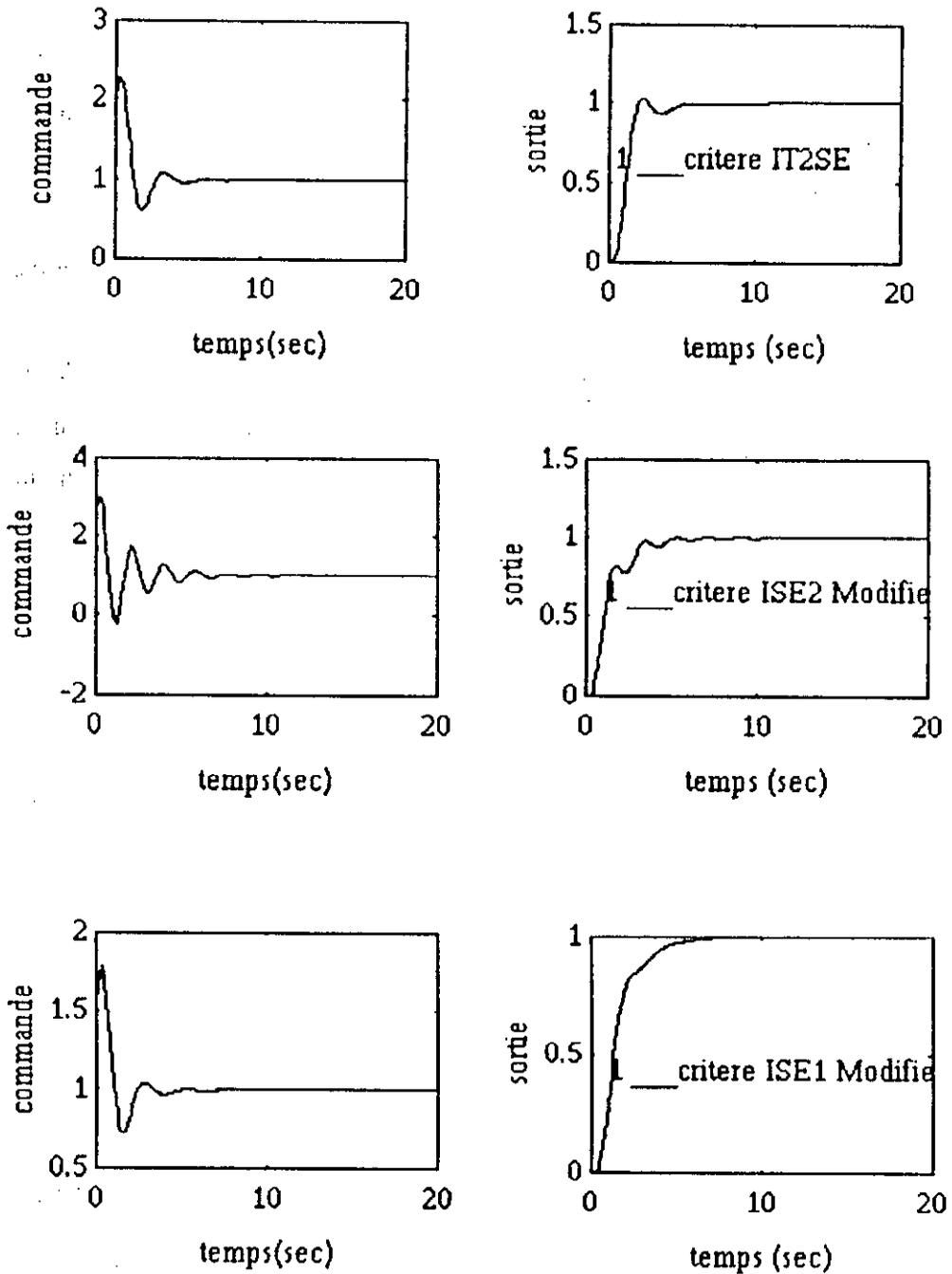
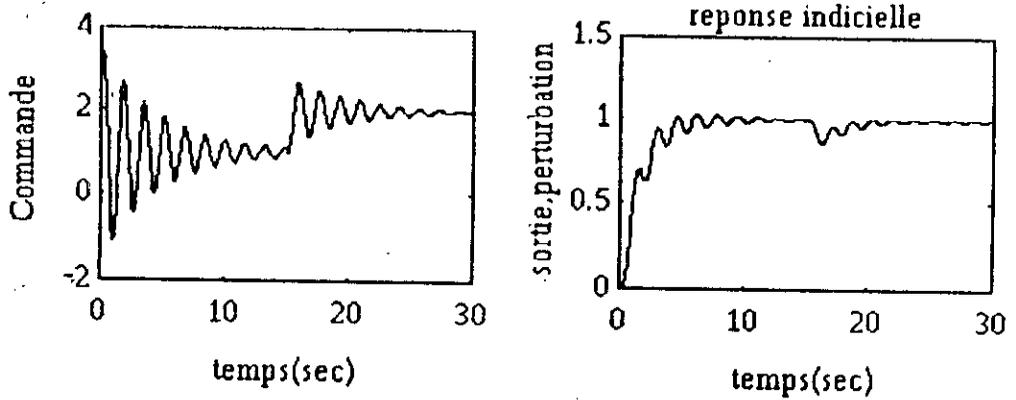


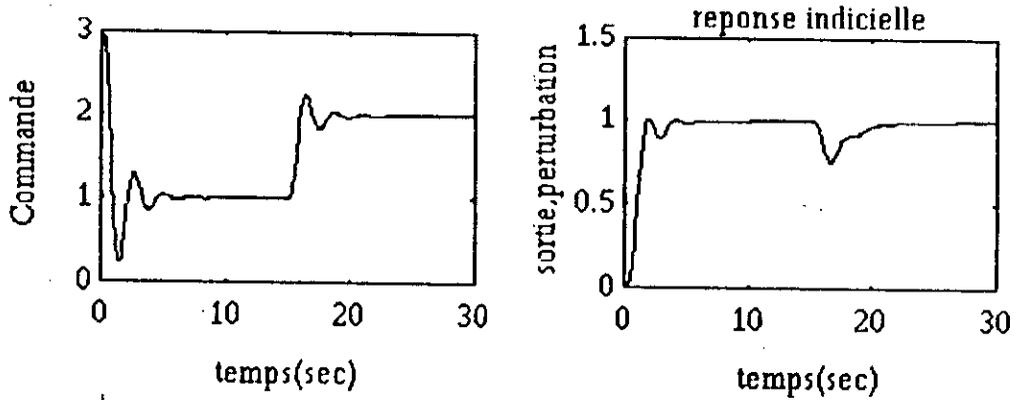
figure 3.4 Réponses du système 3.5.1 avec des contrôleurs de structure2

Sensibilité à une perturbation constante

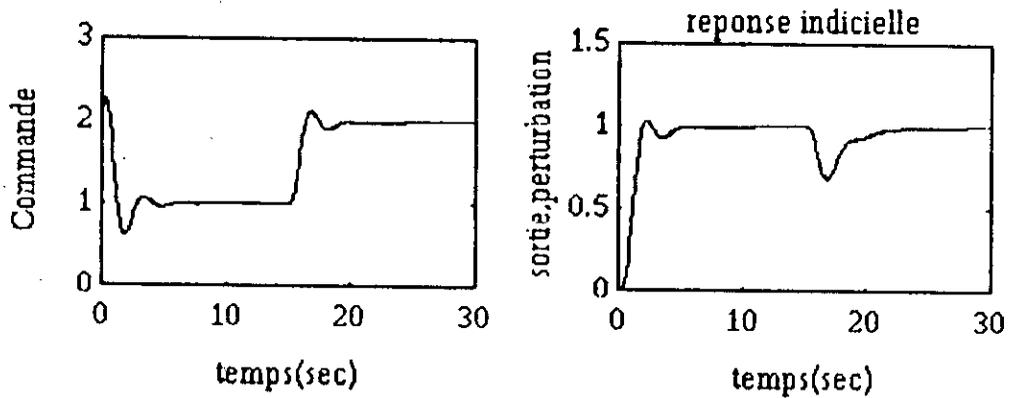
Les critères ISTE et IST2E effacent rapidement l'effet de la perturbation plus vite que le critère ISE qui donne la aussi une réponse oscillatoire. Les critères ISTE et IST2E sont moins sensibles aux perturbations que le critère ISE (figure 3.5).



Critère ISE



Critère ISTE



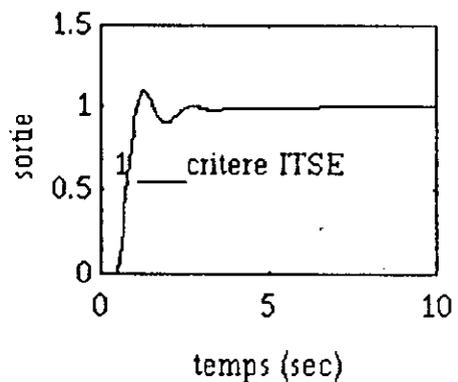
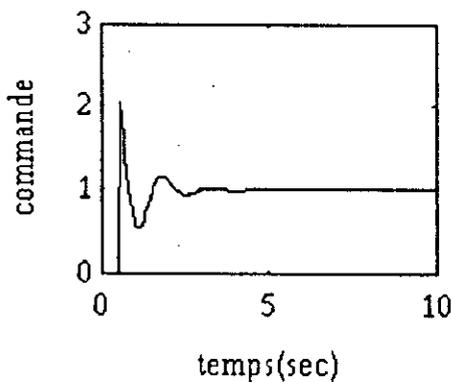
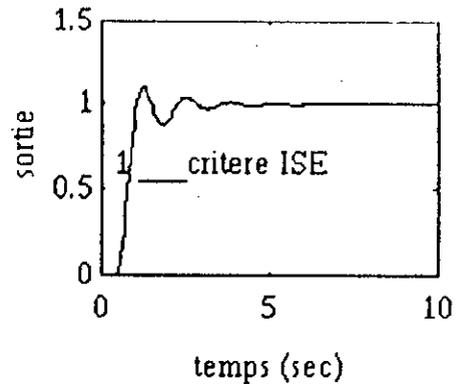
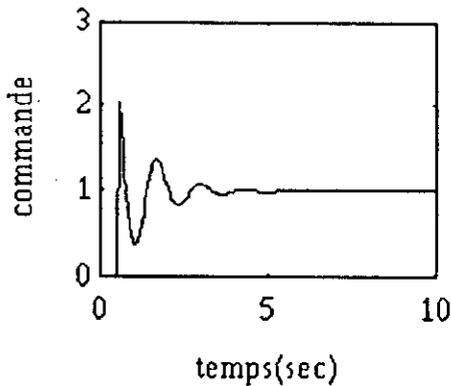
Critère IST2E

figure 3.5 Sensibilité à une perturbation constante du système d'ordre 4 à pôles triples avec les critères d'optimisation

Exemple 3.5.2 : Système d'ordre 1 avec un temps mort

La fonction de transfert analysée est la fonction de transfert de l'exemple 2.4.3.

Les paramètres des contrôleurs PID optimaux sont donnés dans le tableau 3.2, la figure 3.6 donne les réponses du système en boucle fermée pour les différents PID trouvés par l'application de différents critères. On voit clairement que le critère ITSE et IT2SE donnent les meilleures réponses, celles-ci suivent la référence, rapidement, et donnent un dépassement plus faible. Les critères ISE1 modifié et ISE2 modifié sont fonction du facteur de pondération, elles donnent des réponses avec un dépassement nul. Les réponses trouvées par optimisation dans le cas de ce genre de système sont meilleures que celle trouvées par la méthode d'ajustage de Astrom-Hagglund et cela malgré le fait que le système présente un temps mort.



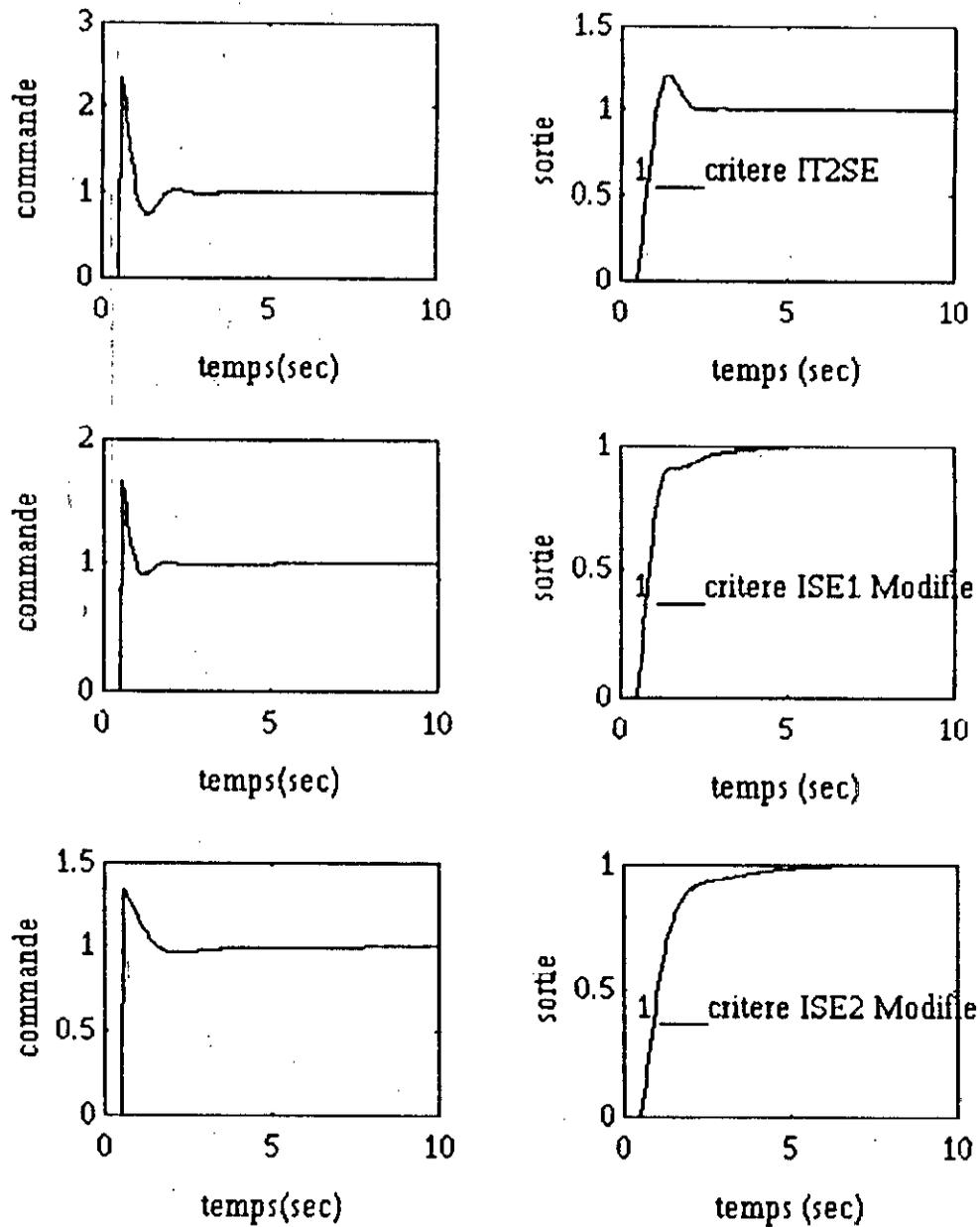


figure 3.6 Réponses indicielles du système de l'exemple 3.5.2 avec les critères d'optimisation

Critère	Paramètres du contrôleur PID			J
	K_p	T_i	T_d	
ISE	1.9536	0.9969	0.2676	0.5385
ISTE	1.9360	1.1545	0.2059	0.0639
IST²E	1.7189	0.7564	0.1891	0
ISE2(r=0.5)	1.4518	1.2243	0.2046	0.8933
ISE1(r = 0.5)	0.9933	1.2396	0.0482	1.1903

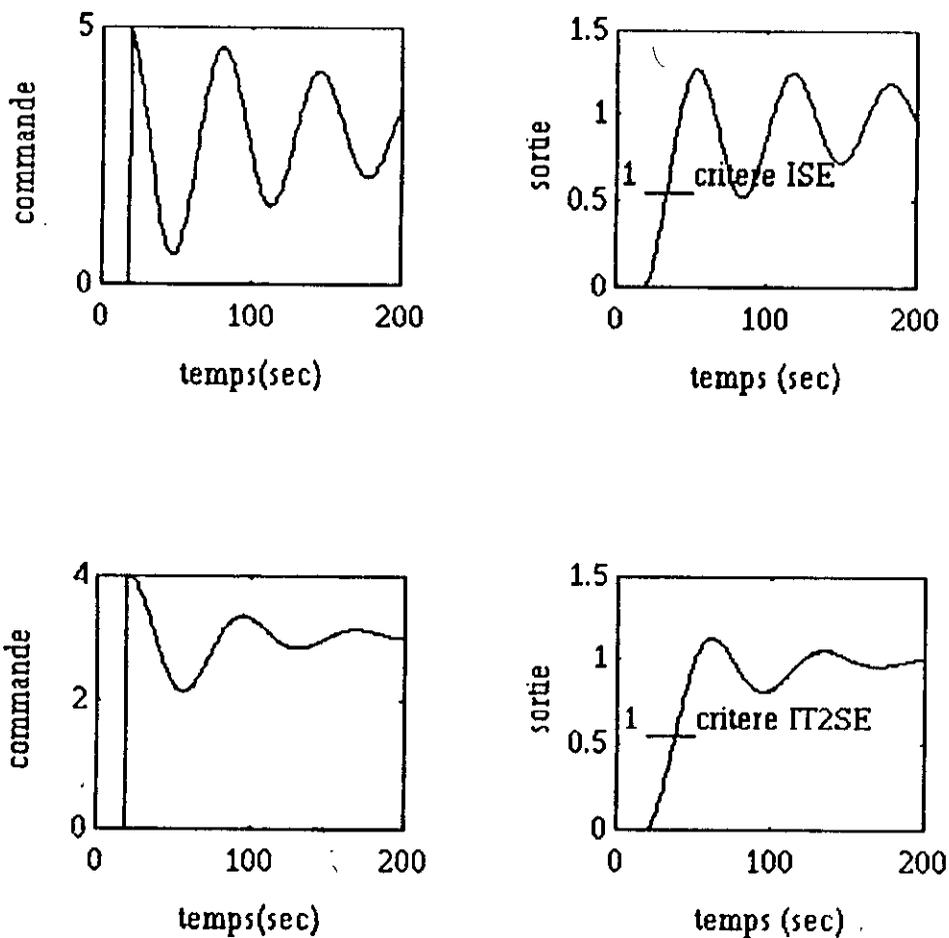
Tableau 3. 2 Paramètres des contrôleurs de l'exemple 3.5.2 avec les critères d'optimisation

Exemple 3.5.3 : Système d'ordre 2 avec un grand retard

La fonction de transfert est la fonction de transfert de l'exemple 2.4.4

Les paramètres du contrôleur PID obtenus par la minimisation des trois critères de performance sont donnés dans le tableau 3.3 et les réponses correspondantes sont reportées en figure 3.7. Ces résultats permettent de tirer les conclusions suivantes:

Les critères ISE pondérés (ITSE) et (IT2SE) donnent une assez bonne réponse dans le cas des systèmes présentant un large retard alors que la méthode de Ziegler-Nichols ainsi que le critère ISE donnent des réponses oscillatoires avec un dépassement plus important bien que le critère ISE donne un dépassement plus faible par rapport à la méthode de Ziegler-nichols.



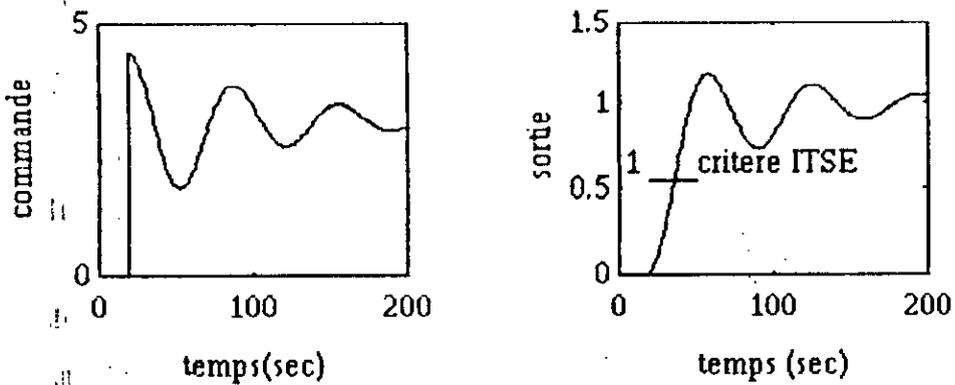


figure 3.7 Réponses indicielles du système de l'exemple 3.5.3 avec les critères de performance

Critères	Paramètres du contrôleur PID et Paramètres dynamiques					
	K_p	T_i	T_d	Depas %	$t_m(s)$	$t_r(s)$
ISE	3.4377	35.6458	8.9114	30.86	41.5	---
ISTE	2.4177	21.2457	11.1988	18.26	46.5	198.8
IST ² E	2.1774	21.7434	9.2434	12.34	51.25	136.3

Tableau 3.3 Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système de l'exemple 3.5.3

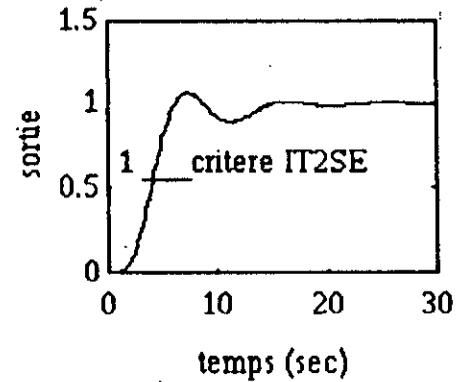
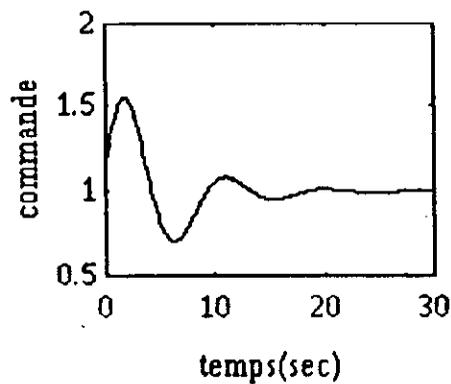
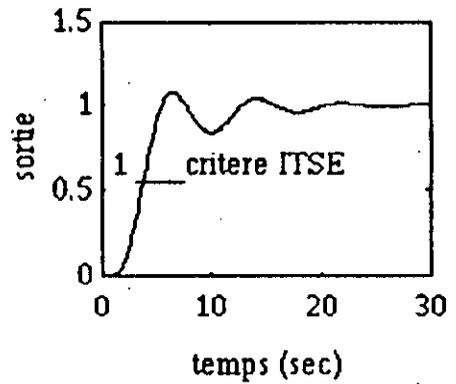
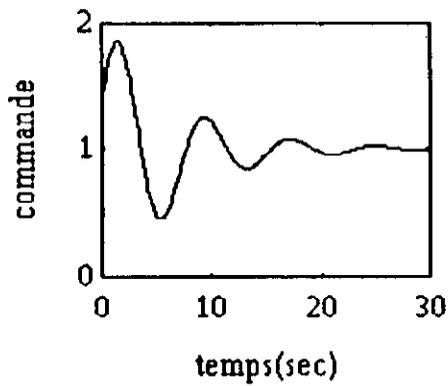
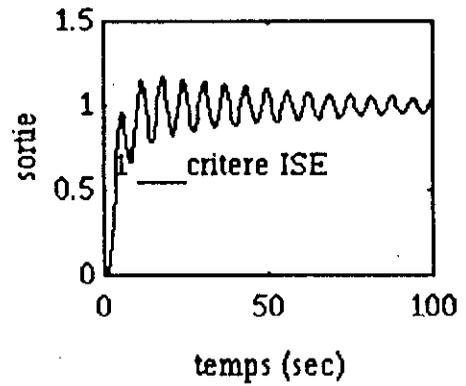
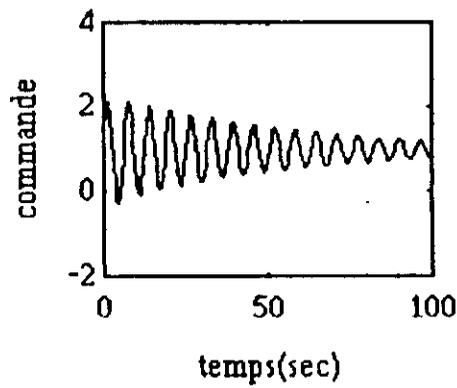
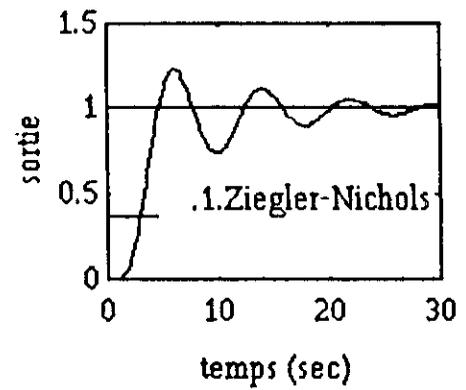
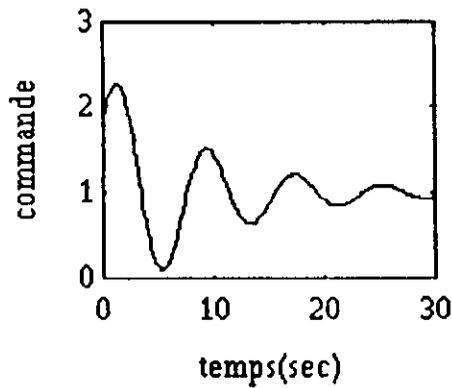
Exemple 3.5.4 Système d'ordre cinq

Nous allons tester les critères de performance sur un système d'ordre élevé, ce système est représenté par une fonction de transfert $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^5}$$

La figure 3.8 représente les réponses du système en boucle fermée, correspondant aux contrôleurs PID déterminés par les différents critères. Les paramètres des contrôleurs sont reportés dans le tableau (3.4). Nous analysons les réponses données par la méthode de Ziegler-Nichols ainsi que les réponses données par certains critères de performance. La figure (3.8) montre que la méthode de Ziegler-Nichols ainsi que le critère IES donnent des réponses oscillatoire alors que le critère ISTE donne une meilleure réponse en terme de dépassement et d'amortissement, ce qui donne un bon ajustage du système. Le critère IST²E donne quant à lui une réponse qui suit convenablement la référence avec un faible dépassement et un bon amortissement. Les critères ISE1 modifié et ISE2 modifié donnent des réponses oscillatoires

avec un meilleur amortissement par rapport au critère ISE, ces deux critères sont fonction de la valeur du facteur de pondération choisie.



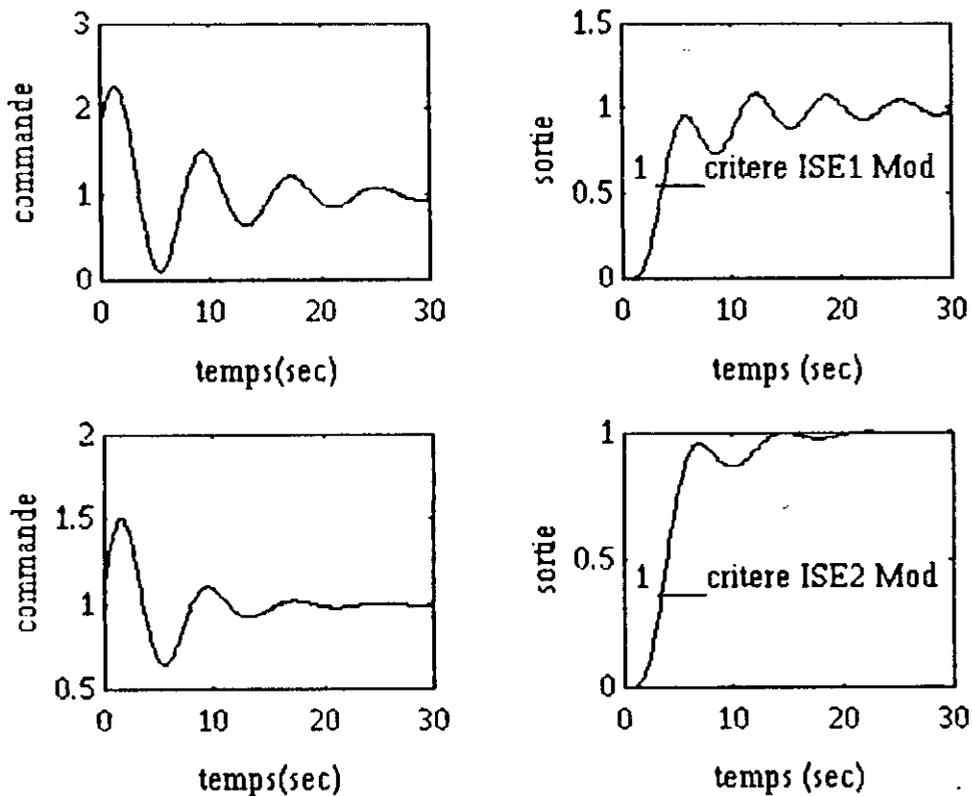


figure3.8. Réponses indicielles du système de l'exemple 3.5.4 avec les critères d'optimisation

Critères	Paramètres des contrôleurs PID et Paramètres dynamiques					
	K_p	T_i	T_d	Depas %	$t_m(s)$	$t_r(s)$
Ziegler-Nichols	1.9099	4.4471	1.1118	20.55	4.7525	26.78
ISE	1.5375	2.226	3.0292	4.795	11.02	98.25
ISTE	1.4435	3.4251	1.5952	7.344	5.475	12.08
IST2E	1.1759	3.5516	1.2294	6.395	6.075	13.43
ISE1 modifié	1.4137	2.421	2.7805	10.08	10.88	26.33
ISE2 modifié	1.1405	3.2250	1.9090	---	---	12.52

Tableau 3.4 Paramètres des contrôleurs et indices de performance du système d'ordre cinq (exemple 3.5.4)

3.6 Analyse et calcul théorique

En réalité, il est difficile ou quasiment impossible d'obtenir la valeur minimale de l'indice de performance avec des valeurs finies des paramètres pour tous les systèmes. Prenons comme exemple un système d'ordre un, sans retard et qui sera compensé avec un contrôleur PID.

Soit $G(s)$ sa fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{(s+a)}$$

avec $G_c(s) = K_p(1 + sTd + 1/sTi)$

la fonction de l'erreur est donnée par l'équation suivante $E(s)$

$$E(s) = \frac{(a+s)Ti}{K_p + sTi(a + K_p) + s^2Ti(1 + K_pTd)} = \frac{B_0s + B_1}{d_0s^2 + d_1s + d_2}$$

$$B_1 = aTi ; B_0 = Ti$$

$$d_0 = (Ti + K_pTdTi) ; d_1 = Ti(a + K_p) ; d_2 = K_p$$

La fonction $J(\theta)$ obtenue par application du critère d'optimisation ISE est

$$J(\theta) = \frac{B_0^2 d_1 - B_1^2 d_0}{2d_0 d_1 d_2} = \frac{1}{2d_2} \left(\frac{B_0^2}{d_0} - \frac{B_1^2}{d_1} \right)$$

En différenciant cette fonction par rapport à K_p , Ti et Td on obtient trois équations qui ne s'annulent jamais pour des valeurs finies des ces trois variables. Ce problème est fréquent lorsque la fonction de transfert n'est pas fonction d'un retard et aussi lorsque la différence entre l'ordre du dénominateur et numérateur est inférieur ou égal à 4. En général si on désire trouver le contrôleur optimal d'un système de ce genre il suffit d'introduire un faible retard dans la fonction du système.

3.6.1 Exemple de calcul théorique

Supposons que la fonction de transfert du système soit donnée par

$$G(s) = 2/s$$

$$R(s) = 1/s$$

l'erreur est donnée par la transformée de Laplace suivante:

$$E(s) = R(s)/(1+G(s)) = 1/(s+2) = \Lambda(s)/B(s)$$

dans le domaine temporel l'erreur sera exprimée par

$$e(t) = e^{-2t}$$

son indice de performance ITSE (intégral de l'erreur quadratique pondérée par le temps) est

$$J(\theta) = \int_0^{\infty} \{t e(\theta, t)\}^2 dt = 1/2\pi j \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s)F(-s)$$

$$F(s) = (A'(s)B(s) - B'(s)A(s)) / [A(s)]^2 = 1/(s+2)^2$$

en appliquant le théorème des résidus

$$1/2\pi j \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Res}(z=ai) f(z)$$

le résidu du pôle d'ordre n est égal à

$$\text{Res}\{f(z)\} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}_{z=a}$$

Γ étant le contour, constitué de Γ_C le long de l'axe des imaginaires et le cercle Γ_R de rayon R entourant le plan. Pour ce système le pôle est égal à 2.

$$\begin{aligned} J &= 1/2\pi j \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{(s+2)^2} \frac{1}{(-s+2)^2} ds \\ &= \int_{\Gamma_C} \frac{1}{(s+2)^2} \frac{1}{(-s+2)^2} ds + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(s+2)^2} \frac{1}{(-s+2)^2} ds \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{Res}(s=-2) \frac{1}{(s+2)^2} \frac{1}{(-s+2)^2} \\ &= \frac{d}{ds} \left((s+2)^2 \frac{1}{(s+2)^2} \frac{1}{(-s+2)^2} \right)_{s=-2} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{2(2-s)}{(2-s)^4} \right\}_{s=-2} = 1/32$$

$$J = J_1 = \int_{\Gamma_C} \frac{1}{(s+2)^2} \frac{1}{(-s+2)^2} ds = 1/32$$

lorsque le rayon $R \rightarrow \infty$, $J_2 \rightarrow 0$

si nous intégrons J directement dans le domaine temporel nous obtenons

$$J = \int_0^{\infty} \{t e^{-2t}\}^2 dt = \int_0^{\infty} \{t^2 e^{-4t}\} dt = 1/32$$

3.7 Conclusion

La méthode d'optimisation avec le critère ISE permet de trouver les paramètres du contrôleur PID optimal assez simplement. Ce critère pondère de façon égale l'erreur, il possède l'inconvénient de ne pas tenir compte des faibles erreurs, ce qui donne en général une réponse assez oscillatoire avec un temps d'établissement T_r assez important. Une amélioration de la réponse transitoire est obtenue si on utilise le critère ISTE (ISE pondéré par le temps), dans ce cas l'erreur sera pondérée différemment, l'amélioration vient du fait que l'erreur initiale, qui est inévitable, soit pondérée faiblement par le facteur temps introduit dans ce critère. Les résultats obtenus par l'utilisation de critères d'optimisation donnent effectivement des réponses avec des paramètres dynamiques plus performants que ceux donnés par la méthode d'ajustage automatique (chapitre 2) en particulier la méthode de Ziegler-Nichols bien que les autres variantes donnent des réponses avec des paramètres très proches de ceux donnés par les critères de performance. Comme on l'a déjà dit pour évaluer un critère nous avons besoin de connaître sa fonction de transfert, si on veut obtenir le contrôleur optimal il faut donner les paramètres du contrôleur initial. Comme les résultats obtenus par les deux méthodes ne sont pas très divergents et que la méthode d'ajustage automatique est moins contraignante.

Chapitre 4

Calcul d'un contrôleur PID optimal par ajustage automatique

4.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, les méthodes d'ajustage conventionnelles sont basées principalement sur la réponse en fréquence et sur la connaissance du point critique (K_c, ω_c). Les résultats obtenus par ces différentes méthodes et en particulier par la méthode de Ziegler-Nichols donne des réponses transitoires assez oscillatoires, la méthode de Aström-Hagglund basée quant à elle sur la marge de gain et la marge de phase donne de meilleurs résultats que la méthode de Ziegler-Nichols mais pas dans tous les cas comme nous l'avons remarqué dans le cas de l'exemple 2.4.4 ou le délai est assez grand.

Au chapitre 3, nous avons remarqué que la méthode d'optimisation par application des critères de performances donne de très bons résultats en particulier le critère ITSE (intégral de l'erreur quadratique pondérée par le temps). En conclusion la méthode d'optimisation est plus performante que la méthode d'ajustage, méthode faisant appelle aux paramètres du point critique. L'application de la méthode d'optimisation exige la connaissance de la fonction de transfert exacte du système, chose difficile à avoir dans certain cas. La méthode de Ziegler-Nichols permet de donner des paramètres qui peuvent être utilisés comme valeurs initiales dans la méthode d'optimisation pour faciliter le calcul.

4.2 Méthode de Ziegler-Nichols modifiée

En milieu industriel beaucoup de systèmes sont approximés par un modèle d'ordre faible, ce modèle caractérise la réponse dynamique du système. Le modèle le plus simple est

un modèle d'ordre un avec un délai représenté en figure 1.1, dans le cas où le système initial ne possède pas de pôles résonnant ni d'intégrateur.

La fonction de transfert d'ordre un avec délai est donnée par la fonction (1.1), où

K : gain statique

τ : temps mort

T : constante de temps

$$G(j\omega c) = \frac{K e^{-j\omega c \tau}}{(j\omega c)T + 1}$$

à la fréquence $\omega = \omega_c$

$$|G(j\omega c)| = \frac{1}{K_c} = \frac{K}{\sqrt{(1+T^2\omega c^2)}}$$

$$K_c K = k = \sqrt{(1+T^2\omega c^2)}$$

k : gain normalisé

et une phase

$$\tau\omega c + \tan^{-1} T\omega c = 180^\circ$$

Les paramètres du contrôleur PID donnés par des formules d'ajustage fonction du gain normalisé k des paramètres du point critique K_c et de la fréquence critique ω_c .

$$K_p = 0.509 K_c$$

$$T_i = \alpha T_d$$

$$\alpha = 0.412 (3.302 k + 1)$$

on remarque par rapport à la méthode de Ziegler-Nichols une diminution de la constante proportionnelle qui passe de 0.6 à 0.509, cette diminution engendre une diminution du dépassement. Le rapport entre les constantes d'intégration et de dérivation est fonction du gain normalisé.

4.3 Méthode de Aström-Hagglund modifiée

La méthode de Aström-Hagglund vue au chapitre 2 est basée sur le déplacement du point critique à un nouveau point ayant une marge de phase de $\phi = 180^\circ + \phi_m$ et une marge de gain unité. Nous avons remarqué que la méthode donne des réponses très mal amorties,

proche de l'instabilité dans le cas des systèmes possédant un délai (retard) assez important et ceci est dû à la marge de gain qui est réduite dans le cas où le délai est important (exemple 2.4.4). Grâce à l'approximation du système par une fonction d'ordre un avec un délai et avec l'application des critères d'optimisation ISE, ITSE, IT2SE on obtient un nouveau point ayant une autre amplitude m et une phase ϕ tel que

$$|G_c(j\omega_c)G(j\omega_c)| = m$$

$$\phi(j\omega_c) = -180^\circ + \phi(j\omega_c)$$

les formules d'ajustage sont:

$$\phi = 33.8^\circ (1 - 0.97 e^{-0.45k})$$

$$m = 0.614 (1 - 0.233 e^{-0.347k})$$

La marge de gain et la marge de phase sont toutes les deux fonctions du gain normalisé. Les paramètres du contrôleur PID dans ce cas sont donnés par :

$$K_p = (m \cos \phi) / |G(j\omega_c)| = m K_c \cos \phi$$

$$T_i = \alpha T_d$$

$$T_d = \frac{1}{2\omega_c} \left\{ \tan \phi + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + \tan^2 \phi} \right\}$$

4.4 Exemples

Exemple 4.4.1

Fonction de transfert de l'exemple 2.4.2

Les méthodes de Ziegler-Nichols améliorée et Astrom-Hagglund améliorée donnent des réponses avec des performances identiques, elles apportent des améliorations en terme de dépassement et en terme de temps de réponse par rapport aux méthodes de Ziegler-Nichols et Astrom-Hagglund. Elles donnent par ailleurs des réponses qui avec des performances proches des réponses données par les critères ISTE et IST2E pour le système 2.4.2 analysé.

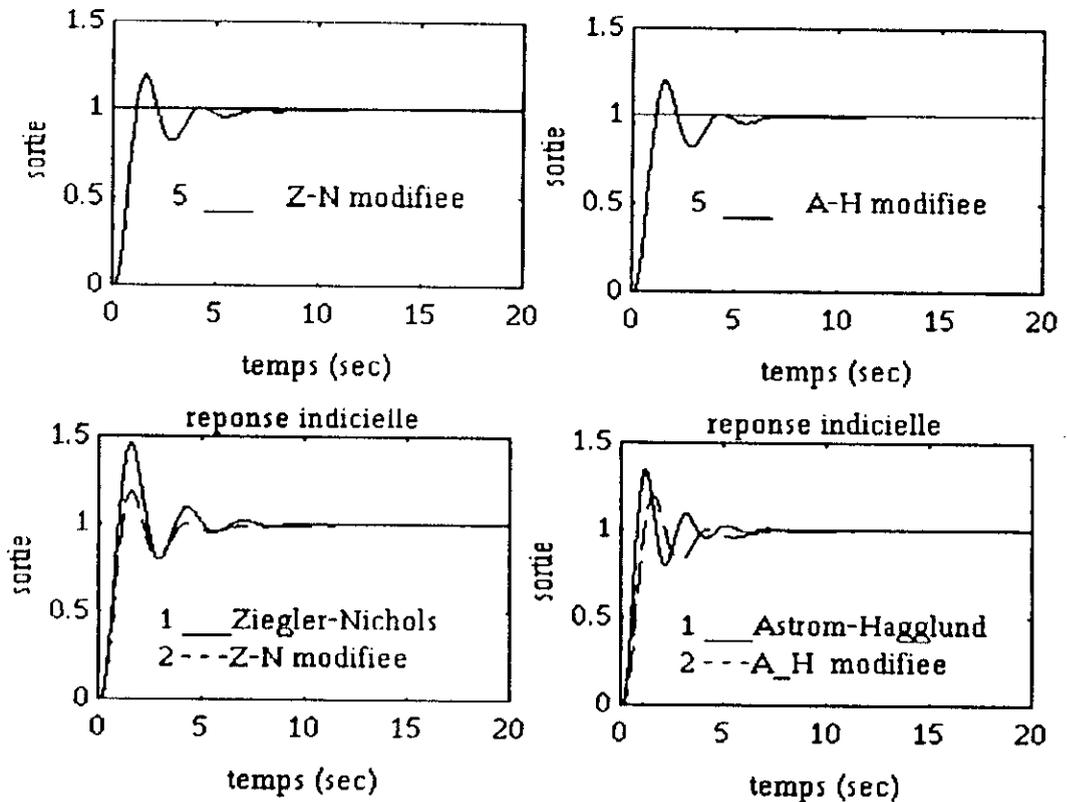


figure 4.1 réponses du système d'ordre 4 à pôles triple(système de l'exemple 4.4.2)

Exemple 4.4.2 Système d'ordre 2 avec un grand retard

Fonction de transfert de l'exemple 2.4.4

L'exemple 4.4.2 représente un système d'ordre deux avec un retard important (système de l'exemple 2.4.4). Le tableau 4.1 donne les paramètres des contrôleurs et les indices de performances du système compensé. On remarque que les nouvelles méthodes de Ziegler-Nichols modifiée et Astrom-Hagglund modifiée donnent un système plus performant, avec un dépassement plus faible et un temps de réponse nettement plus faible alors que la méthode de Ziegler-Nichols donne une réponse mal amortie alors que la méthode de Astrom-Hagglund donne un système instable (figure 4.2).

contrôleur	Paramètres des contrôleurs			indices de performances		
	Kp	Ti	Td	Dépass %	Tm(s)	Tr(s)
Ziegler-Nichols	3.8197	39.6064	9.9016	30.81	33	319
Z-N modifiée	3.2468	32.9166	9.9772	20	35	147
A-H modifiée	3.2520	32.2478	9.7745	20.81	35	149

Tableau 4.1 Paramètres des contrôleurs et Indices de performances de l'exemple 4.4.2

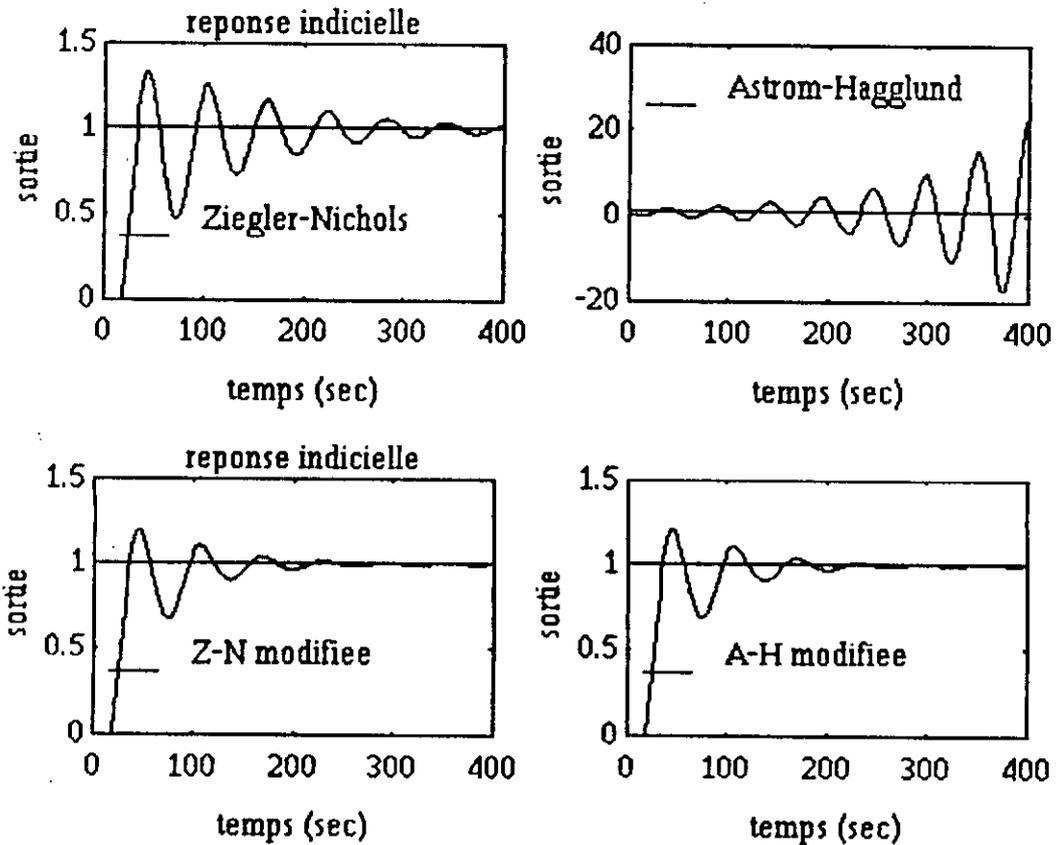


figure 4.2 Réponses de l'exemple 4.4.2(système d'ordre 2 avec un grand retard)

Exemple 4.4.3 Système d'ordre cinq (exemple 3.5.4)

Les paramètres du point critique sont respectivement $\omega_c = 0.7272$ rad/s et 2.885. Le tableau 4.2 résume les paramètres des PID calculés par les quatre méthodes ainsi que les indices de performances du système compensé. Les réponses du système compensé sont reportées en figure 4.3. La marge de phase utilisée dans la méthode d' Astrom-Hagglund est de 45° . Les résultats trouvés montrent que les méthodes classiques donnent des dépassements élevés et des temps d'établissement importants alors que les réponses données par les nouvelles méthodes donnent des réponses avec un faible dépassement et un temps d'établissement relativement court. Dans ce cas la méthode d' Astrom-Hagglund est celle qui donne la réponse la moins rapide à la perturbation .

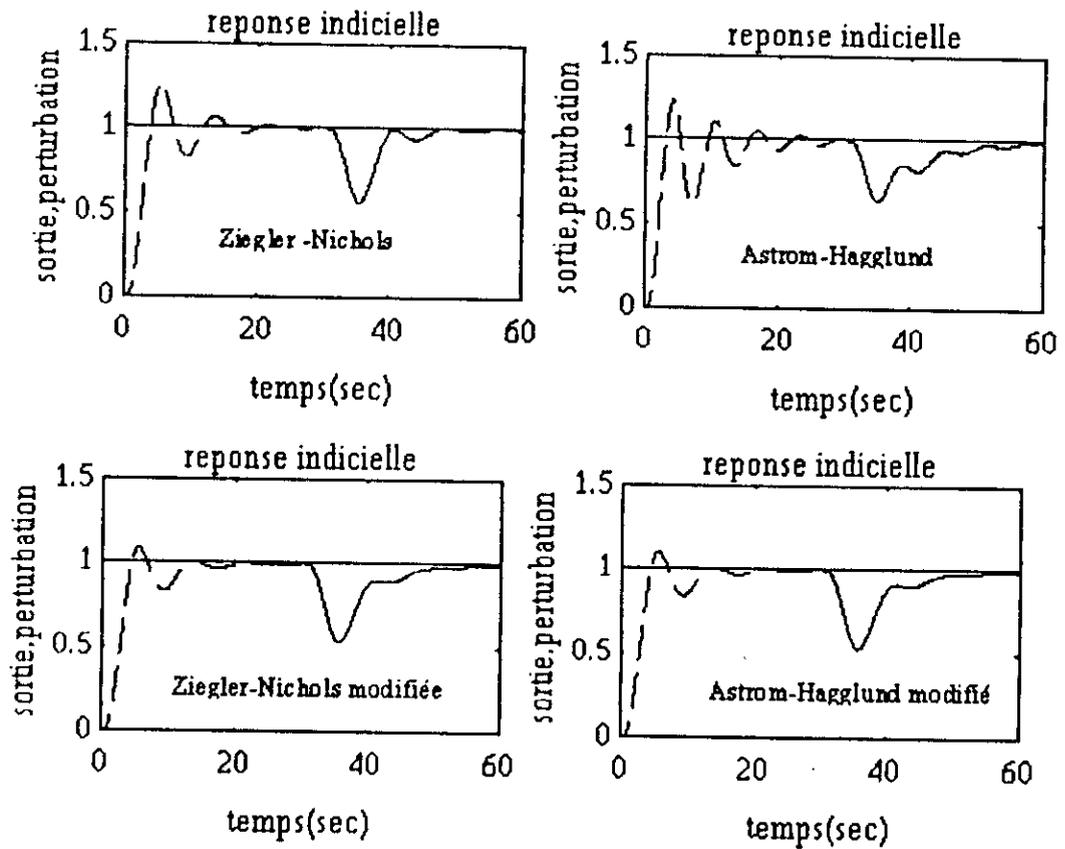


figure4.3 Réponses du système d'ordre cinq (système de l'exemple 4.4.3)

contrôleur	Paramètres des contrôleurs			indices de performance		
	Kp	Ti	Td	Dépass %	Tm(s)	Tr(s)
Ziegler-Nichols	1.9099	4.2638	1.0659	23.53	3.675	13.88
Astrom-Hagglund	2.2508	6.8348	1.7087	22.76	3.075	20.78
ISTE(Z-N modifiée)	1.6234	5.3396	1.1141	9.056	4.425	11.77
Gain-Phase(A-H)	1.6257	5.16	1.0766	10.56	4.4250	11.77

Tableau 4.2 Paramètres des contrôleurs et indices de performance de l'exemple 4.4.3

Exemple 4.4.4 Système à phase minimale avec perturbation

$$G(s) = \frac{(1-1.5s)}{(1+s)^3}$$

Analysons les réponses des nouvelles méthodes avec un système à phase minimale de fonction de transfert $G(s)$ en appliquant une consigne et une perturbation au système.

Le tableau 4.3 donne les paramètres des contrôleurs déterminés par les trois méthodes et résume les performances du système avec les différentes méthodes des réponses à la consigne et à la perturbation données en figure 4.4. Les nouvelles méthodes de Ziegler-nichols et d'Astrom-Hagglund modifiées donnent des réponses en poursuite assez rapides avec des dépassements très acceptables et une réponse plus rapide à la perturbation que la méthode classique de Ziegler-Nichols. Ces nouvelles méthodes donnent des systèmes compensés avec une bonne poursuite et une bonne régulation car ils suivent de plus près la consigne et effacent rapidement la perturbation.

contrôleur	Paramètres des contrôleurs			Indices de performance		
	Kp	Ti	Td	Dépass %	Tm(s)	Tr(s)
Ziegler-Nichols	0.873	3.473	0.868	---	---	16.13
Z-N modifiée	0.742	2.091	0.869	8.925	10.4	14.02
A-H modifiée	0.740	2.161	0.898	4.875	8.775	10.27

Tableau 4.3 Paramètres des contrôleurs et Indices de performance de l'exemple 4.4.4

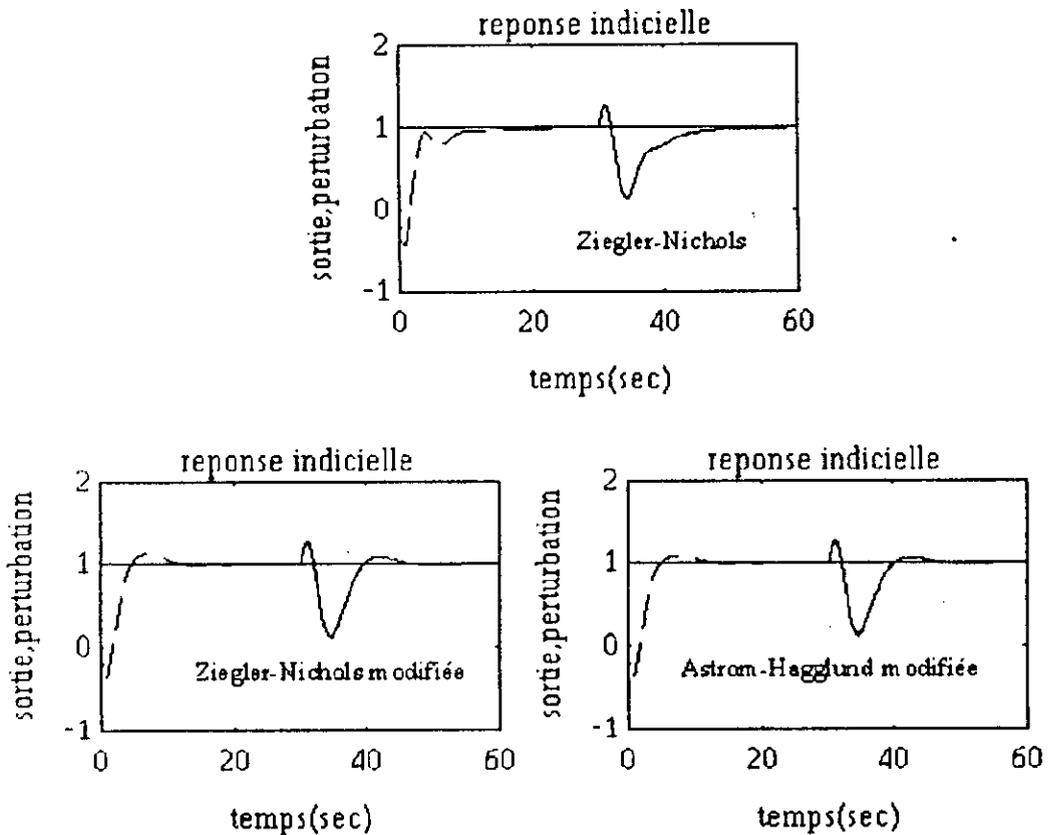


figure 4.4 Réponses du système à phase minimale (exemple 4.4.4)

4.5 Conclusion

Ces deux méthodes permettent d'obtenir des réponses aussi bonnes que celles obtenues avec la méthode d'optimisation, elles donnent des résultats plus performants que ceux donnés par la méthode d'ajustage basée sur la connaissance du point critique. Cependant ces deux méthodes ont un inconvénient, elles ne s'appliquent pas à tous les systèmes car les paramètres calculés sont valables dans un intervalle, dans ce cas le retard normalisé se trouve dans un intervalle $[0.1 \quad 1]$. Si le retard est en dehors de cet intervalle, on doit appliquer d'autres formules pour obtenir des réponses améliorées.

Chapitre 5

Conception des contrôleurs PID pour les systèmes multivariables

5.1 Introduction

La commande de systèmes multivariables constitue maintenant un sujet d'étude important en raison de ses implications dans le domaine industriel et des problèmes qu'elle soulève. De tels systèmes, dont la taille est souvent grande, peuvent être caractérisés par la présence de plusieurs sorties à réguler ou au moyen de plusieurs commandes, sans que l'importance des interactions entre les différentes entrées/sorties n'autorise les méthodes monovariables. L'approche multivariable cherche à commander le système. Parmi les différentes manières d'aborder le sujet on peut distinguer les méthodes qui cherchent à découpler le système multivariable avant de le commander, et les méthodes qui le considère globalement.

La conception des contrôleurs PID pour les systèmes multivariables (MIMO) est beaucoup plus difficile que celle des systèmes monovariables (SISO) à cause de l'interconnexion des boucles. Cette interconnexion apporte une grande influence sur les performances du système. Pour comprendre la nature des systèmes MIMO il faut commencer par faire une analyse des différents problèmes, comme l'interaction, comment l'éliminer et comment obtenir les bonnes paires de variables excitées/observées.

Une méthode d'ajustage automatique est proposée pour les systèmes MIMO, on utilise le relais contrôleur afin de déterminer le point critique. La méthode de conception est basée sur la méthode de Ziegler-Nichols généralisée aux systèmes multivariables [24].

La seconde méthode de conception est basée sur la localisation de la position désirée à une fréquence bien déterminée sur la caractéristique du lieu géométrique.

Une troisième méthode de conception est la méthode d'optimisation décrite pour les systèmes SISO au chapitre 3 qui peut être appliquée aux systèmes MIMO.

5.1.1 Définition d'un système MIMO

Un système multivariable (MIMO) est considéré comme un système contenant un processus avec n entrées U_i et n sorties Y_i contrôlées par n contrôleurs représenté par la figure 4.1. Pour faciliter cette analyse prenons un système avec $n = 2$ qu'on appelle système TITO ce dernier présente une analyse fondamentale qui pourra être généralisée aux systèmes MIMO.

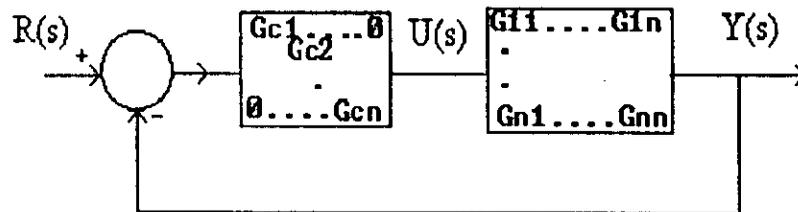


figure 5.1 système MIMO

5.1.2 Systèmes à deux entrées/deux sorties

Un système à deux entrées/deux sorties (TITO) est un système constitué de deux boucles interconnectées (figure 5.2). Cette interaction peut rendre le système instable si elle est importante.

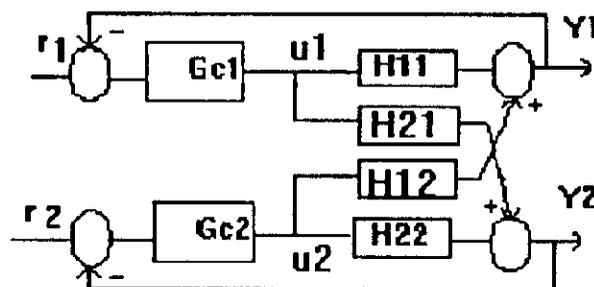


figure 5.2 Système à 2 entrées / 2sorties (TITO)

5.2 Interaction

L'interaction représente l'influence des variables d'une boucle sur les autres boucles. Pour déterminer l'importance de cette interaction entre les différentes boucles de contrôle on calcule la matrice de gains relatifs. Ce gain mesure l'influence d'une variable excitée U_j sur une variable observée Y_i , il est donné par l'expression suivante:

$$\lambda_{ij} = \frac{(\partial Y_i / \partial U_j)_{U_i}}{(\partial Y_i / \partial U_j)_{Y_j}} \approx \frac{(\Delta Y_i / \Delta U_j)_{U_i}}{(\Delta Y_i / \Delta U_j)_{Y_j}} \quad (5.1)$$

$(\partial Y_i / \partial U_j)_{U_i}$ gain évalué en boucle ouverte

$(\partial Y_i / \partial U_j)_{Y_j}$ gain des autres boucles fermées

λ_{ij} indique de quelle façon varie le gain d'une boucle lorsque l'autre boucle est fermée, cas du système à deux-entrées/deux-sorties (TITO).

Pour un système TITO, les gains relatifs sont déterminés facilement en fonction des gains statiques .

$$K_{11} = \partial Y_1 / \partial U_1 |_{U_2}; \quad K_{12} = \partial Y_1 / \partial U_2 |_{U_1}$$

$$K_{21} = \partial Y_2 / \partial U_1 |_{U_2}; \quad K_{22} = \partial Y_2 / \partial U_2 |_{U_1}$$

K_{ij} est le gain relatif de la variable contrôlée i par rapport à la variable sélectionnée j . Le processus TITO est décrit par le système d'équations (5.2):

$$\begin{cases} Y_1 = K_{11}U_1 + K_{12}U_2 \\ Y_2 = K_{21}U_1 + K_{22}U_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

La matrice de gains relatifs est déduite à partir du système d'équations

$$\partial Y_1 / \partial U_1 |_{U_2} = K_{11}$$

$$\Delta K = (K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})$$

$$\partial Y_1 / \partial U_1 |_{Y_2} = \Delta K / K_{22}$$

$$\lambda_{11} = K_{11} K_{22} / \Delta K \tag{5.3}$$

$$\lambda_{12} = - K_{12} K_{21} / \Delta K$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{11} ; \lambda_{21} = \lambda_{12};$$

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} = 1$$

1. Si $K_{ij} = 0$, alors $\lambda_{ij} = 0$, ceci implique que la $j^{\text{ème}}$ variable excitée n'a pas d'influence sur la $i^{\text{ème}}$ variable observée.
2. Si on choisit des paires de variables excitées/ observées de façon à avoir des gains négatifs (λ_{ii}) il peut en résulter un système instable ou inverse, c'est le genre d'appariement à éviter.
3. Si $\lambda_{ii} = 1$, dans ce cas il n'y a pas d'interaction entre la boucle i et les autres boucles. Pour un système TITO, ce cas se présente si l'un ou les deux éléments (K_{12} et/ou K_{21}) = 0.
4. Si λ_{ii} s'écarte de 1 l'interaction augmente.

En analysant cette matrice de gains on peut trouver les paires de variables excitées/observées adéquates.

On définit un facteur de couplage k_0 par le rapport suivant:

$$k_0 = K_{12} K_{21} / K_{11} K_{22} \tag{5.4}$$

$$k_0 = -\lambda_{12} / \lambda_{11} = -\lambda_{21} / \lambda_{22}$$

Ce rapport définit le type de couplage.

$k_0 > 0$ couplage > 0

$k_0 < 0$ couplage < 0

si $k_0 = 0$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1$ dans ce cas, les paires de variables sélectionnées /contrôlées sont:

($U_1 \text{ --- } Y_1$) et ($U_2 \text{ --- } Y_2$)

Si $k_0 \gg 1$, $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 1$ dans ce cas les paires de variables sont:

($U_1 \text{ ----- } Y_2$) et ($U_2 \text{ --- } Y_1$)

Pour ce système on définit un nouveau facteur de couplage

$$k'0 = 1 / k_0. \tag{5.5}$$

Il est important d'avoir de bonnes paires de variables pour un système donné, car sa stabilité en dépend à cause de l'interaction existante. Un système peut être instable alors que chacune de ses boucles peut être stable.

Plus $|k_0|$ augmente, plus la stabilité du système diminue, dans ce cas il faut reconfigurer le système. Pour vérifier la stabilité du système, il est proposé un calcul du facteur de stabilité[4].

$$d = \frac{\det(K)}{\prod_{i=1}^n K_{ii}} = \frac{(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})}{\prod_{i=1}^n K_{ii}} \quad (5.6)$$

$\det(K)$ est le déterminant de la matrice de gains statiques et K_{ii} sont les éléments qui se trouvent sur la diagonale. Pour un système TITO :

$$d = \det(K) / K_{11} K_{22} = 1 - k_0 \quad (5.7)$$

L'interaction peut produire des effets indésirables. Ceux ci peuvent être réduits par une bonne reconfiguration des boucles. Cependant l'interaction peut être assez grande, ce qui empêcherait un contrôle satisfaisant, dans ce cas l'utilisation d'une technique de découplage permettra de trouver un bon contrôleur. Pour un système TITO cette technique permet d'obtenir un système avec deux boucles indépendantes.

5.3 Découplage

Le découplage se présente de la manière suivante: On veut compenser un système dynamique linéaire multivariable constant de sorte que le système compensé soit découplé, c'est à dire qu'on puisse commander indépendamment les sorties du système par des entrées correspondantes, une telle structure peut être très avantageuse.

Découplage d'un système TITO

Soit le système représenté par sa matrice de transfert ou le nombre d'entrées est m et égal au nombre de sorties. Pour un système TITO, $m = 2$

$$H = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$$

Les H_{ij} pour $i \neq j$ représentent les transmittances de couplage. Dans le cas où la matrice H peut être mise sous forme diagonale.

$$HD = \text{diag}\{HD_{ii}\} \text{ avec } HD_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \quad (5.8)$$

Le système est dit découplé, ainsi chaque sortie influence une et une seule. Il suffit donc de réaliser les conditions suivantes:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial U_2} \Big|_{U_1} = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial U_1} \Big|_{U_2} = 0$$

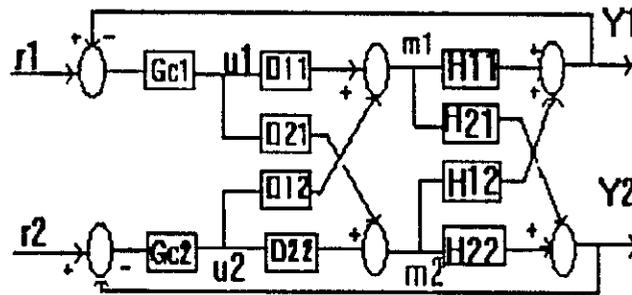


figure 5.3 découplage d'un système TTTO

Il suffit de trouver une matrice de transfert en boucle ouverte identique à HD tel que

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}D_{11} + H_{12}D_{21} & H_{11}D_{12} + H_{12}D_{22} \\ H_{21}D_{11} + H_{22}D_{21} & H_{21}D_{12} + H_{22}D_{22} \end{bmatrix} = [A]$$

Les relations entre variables sélectionnées /variables contrôlées sont:

$$[Y] = [A][U]$$

pour satisfaire l'équation (5.9) on doit avoir:

$$D_{12} \cdot H_{11} + D_{22} \cdot H_{12} = 0 \quad (5.10)$$

$$D_{21} \cdot H_{22} + D_{11} \cdot H_{21} = 0 \quad (5.11)$$

Pour éliminer l'effet de la boucle une sur la boucle deux et inversement on pose:

$$D_{11} = D_{22} = 1 \quad (5.12)$$

Les équations (5.10), (5.11) et (5.12) donnent les relations suivantes:

$$D_{12} = - H_{12} / H_{11} \quad (5.13)$$

$$D_{21} = - H_{21} / H_{22} \quad (5.14)$$

En appliquant cette technique de découplage au système de la figure 5.2, l'interaction est éliminée et un système modifié est obtenu, ce système à deux boucles indépendantes (figure 5.4) avec des fonctions:

$$He1 = H_{11} (1 - H_{12} H_{21} / H_{11} H_{22}) \quad (5.15)$$

$$He2 = H_{22} (1 - H_{12} H_{21} / H_{11} H_{22}) \quad (5.16)$$

La non-interaction étant réalisée, le problème se réduit à la compensation de boucles monovariables. a ce stade plusieurs possibilités sont envisageables telle l'application de la méthode de Ziegler-Nichols ou l'optimisation quadratique.

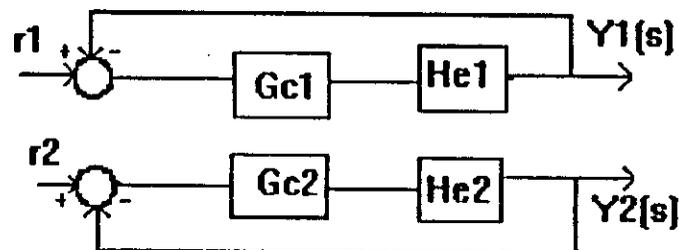


figure 5.4 système découplé

5.4 Technique d'ajustage automatique

Dans cette technique le relais joue un rôle très important dans la détermination du point critique. Par cette approche la détermination des paramètres du PID devient automatique. Les paramètres du point critique sont tout d'abord déterminés grâce au relais contrôleur ensuite les paramètres du PID seront obtenus en utilisant la méthode généralisé de Ziegler-Nichols comme pour les systèmes SISO.

5.4.1 Méthode de Ziegler-Nichols généralisée aux systèmes MIMO

La méthode est utilisée dans le processus de contrôle pour la détermination des paramètres des PID. Pour les systèmes à variable unique, Niederlinski (1971) selon [4] adapta la méthode aux systèmes multivariables. Il utilise le gain critique et la fréquence critique pour calculer les paramètres des PID placés dans chaque boucle en utilisant la méthode de Ziegler-Nichols, cette procédure est appelée méthode généralisée et se présente comme suit:

1. On choisit n facteurs de pondération C_i ($i = 1, \dots, n$) pour un contrôle de qualité relative des n variables à contrôler.
2. On utilise la meilleure configuration entrée/sortie et on place un contrôleur proportionnel pour obtenir une oscillation stable ce qui donne la relation suivante:

$$\frac{K_{c_i} H_{ii}(0)}{K_{c_{i+1}} H_{i+1,i+1}(0)} = \frac{C_i}{C_{i+1}} \quad i=1, \dots, n-1 \tag{5.7}$$

K_{c_i} : gain du contrôleur proportionnel qui permet de déterminer le gain critique correspondant $K_{c_{icr}}$.

3. On détermine la fréquence critique Ω_c et le gain critique du contrôleur $K_{c_{icr}}$ pour le système avec $K_{c_{icr}} / H_{ii}(0)$.
4. On calcul ensuite les paramètres du contrôleur par la méthode de Ziegler-Nichols généralisée aux système multivariable donné par le tableau (5.1). Le choix du coefficient α_i dépend du rapport

$$\alpha_i = \Omega_c / W_{c_i} \tag{5.18}$$

Si $\alpha_i \ll 1$

On choisit le facteur de pondération α_i proche de la borne supérieure.

Si $\alpha_i \approx 1$

Le facteur de pondération a_i choisi doit être proche de la borne inférieure.

5. Si le contrôle n'est pas satisfaisant alors on change la valeur C_i , facteur de pondération et on refait le travail à partir de l'étape 2.

contrôleur	K_p	T_i	T_d
P	$a_1 K_{cicr}$		
PI	$a_2 K_{cicr}$	$0.8 T_{cr}$	
PID	$a_3 K_{cicr}$	$0.5 T_{cr}$	$0.12 T_{cr}$
$0.5 \leq a_1 \leq \sqrt{0.5}$ $0.45 \leq a_2 \leq \sqrt{0.45}$ $0.6 \leq a_3 \leq \sqrt{0.6}$			

Tableau 5.1 formules de Ziegler-Nichols généralisée

Le choix du facteur de pondération joue un rôle important dans la détermination des performances du contrôleur.

5.4.2 Procédure d'ajustage automatique d'un système TITO

L'utilisation de la méthode de Ziegler-Nichols pour déterminer les paramètres du contrôleur PID nécessite la connaissance du gain et de la fréquence critique du système multivariable. La méthode de conception proposée par Niederlinski pour déterminer le point critique consiste à introduire un contrôleur proportionnel dans chaque boucle et à augmenter graduellement leur gain jusqu'à obtention d'une oscillation stable. Cette procédure n'est pas facile à rendre automatique de plus il n'est pas évident de garder l'amplitude de l'oscillation à un niveau raisonnable par ce procédé[21].

1. Le gain et la fréquence critique seront obtenus en plaçant un relais dans une des boucles tout en maintenant la variable manipulée de l'autre boucle à une valeur constante. De cette façon on détermine un point critique qui varie légèrement lorsque le relais est placé dans la seconde boucle. Après avoir obtenu toutes les données, la formule de Ziegler-Nichols est appliquée pour obtenir les paramètres du contrôleur PID. La méthode de conception

proposée par Niederlinski est automatisée, cependant celle ci présente des inconvénients qui sont cités ci-dessous.

2. Pour la méthode proposée, dans une boucle on maintient constante une des variables manipulées, on place un relais dans la seconde boucle et ceci pour calculer le point critique de la boucle contenant le relais. Il est vrai que l'interaction sera considérée comme une entrée constante. Cette entrée provoque une oscillation asymétrique générée par le relais ce qui donne un point critique incorrect.

3. Dans le premier cas, l'oscillation est mesurée autour d'une constante et non autour de la valeur zéro. Cette constante dépend de l'interaction entre boucle et de la valeur de la variable manipulée, par ce fait il sera difficile de mesurer le point critique.

4. Pour déterminer le gain et la fréquence critique du système couplé, un contrôleur proportionnel est utilisé dans une des deux boucles. Il s'avère très difficile de contrôler l'amplitude de l'oscillation durant la mesure.

Des améliorations ont été apportées par une approche de Zgorzelski [24] pour déterminer les paramètres du PID. La procédure proposée utilise deux relais contrôleurs, cette procédure est mise en oeuvre de la façon suivante:

1. Les gains statiques du système seront déterminés en boucle ouverte ensuite la matrice de gains relatifs sera calculée en utilisant les equations 5.3. La meilleure configuration sera obtenue en changeant les paires entrées/sorties décrites précédemment.

2. Lorsque le système est placé en mode d'ajustage, les deux relais placés en diagonale seront remplacé par deux régulateurs et le point critique de chaque boucle est obtenu en mettant à zéro l'amplitude du relais contrôleur de l'autre boucle. Alors K_{cicr} et W_{ci} des deux boucles seront déterminés.

3. En mode d'ajustage le rapport des amplitudes des relais contrôleurs $\eta = h1/h2$ est adapté à une valeur appropriée puis on tire la période T_{cr} et l'amplitude A_i de l'oscillation . Ensuite la fréquence critique Ω_{cr} et le gain critique K_{cicr} sont déterminés approximativement par:

$$\Omega_{cr} = T_{cr}/2 \quad (5.19)$$

$$K_{cicr} = 4h_i/\pi A_i \quad (5.20)$$

4. Les paramètres des contrôleurs PID sont calculés en utilisant la méthode généralisée de Ziegler-Nichols tableau 5.1, alors que le gain du contrôleur proportionnel est déterminé par l'équation (5.19).

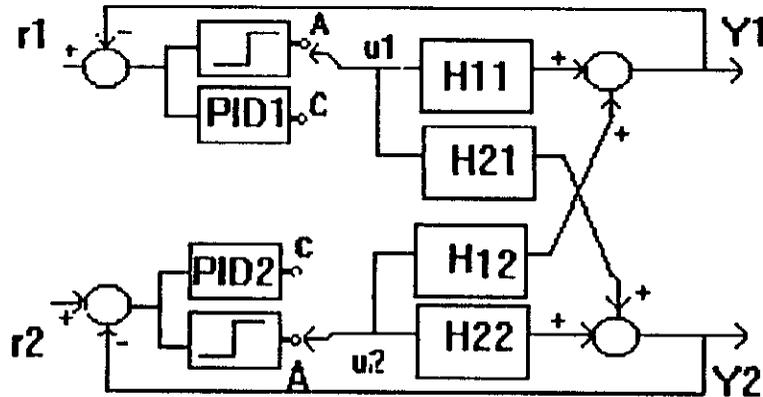


figure 5.5 Procédure d'ajustage automatique d'un système TITO

Le système est placé en mode de contrôle ou une vérification appropriée est faite pour trouver si le contrôle est satisfaisant. Si la qualité du contrôle n'est pas satisfaisante on refait la procédure de réglage en essayant un autre rapport η et on la reprend à partir de l'étape 3.

Le rapport η est utilisé pour déterminer les coefficients C_i .

Les étapes de (1 à 4) peuvent être facilement implantées. Il est facile de simuler le comportement dynamique du système en utilisant le module TITO grâce au logiciel Matlab.

5.5 Détermination du cycle limite

La fonction de description est utilisée pour analyser la caractéristique d'un système multivariable avec des éléments non linéaires. Supposons que les signaux injectés aux entrées des relais soient de forme sinusoïdale représentés par un vecteur x , les éléments non linéaires sont décrits par la matrice $N(a)$ [23].

$N(a) = \text{diag}\{N_1, N_2\}$. Si le système est entré en oscillation alors on a:

$$H(j\omega)N(a)x = -x \quad (5.21)$$

$$[I+H(j\omega)N(a)]x = 0 \quad (5.22)$$

la condition d'oscillation est:

$$\det[I+H(j\omega)N(a)] = 0 \quad (5.23)$$

l'équation caractéristique d'un système à deux entrées deux sorties est:

$$(1+H_{11}N_1)(1+H_{22}N_2) - H_{12}H_{21}N_1N_2 = 0 \quad (5.24)$$

La fréquence et l'amplitude de l'oscillation peuvent être alors déterminées. Supposons que la fréquence des cycles limites des boucles soit la même, le vecteur d'entrée x est donné par l'expression suivante:

$$x = [a_1 \cos(\omega t) \quad a_2 \cos(\omega t + \phi)]'$$

qui s'écrit:

$$-x_1 = H_{11}N_1 x_1 + H_{12}N_2 x_2 \quad (5.25)$$

$$-x_2 = H_{12}N_1 x_1 + H_{22}N_2 x_2 \quad (5.26)$$

Les quatre inconnues ω , a_1 , a_2 et ϕ sont déterminées par le système d'équations (5.24).

Si la solution de l'équation (5.25) est identique à (5.26) cela implique que la fréquence d'oscillation est la même. Le gain critique est donné par l'équation (5.20). D'une autre façon si l'oscillation du système avec relais n'est pas sinusoidale à l'entrée du relais, le gain critique obtenu à partir de l'équation (5.20) sera approximatif.

On peut déterminer le cycle limite en utilisant la simulation du système avec relais et ceci peut nous donner une solution exacte du cycle limite. La zone de stabilité du système (TITO) avec un contrôleur proportionnel est obtenue approximativement en utilisant le contrôle avec relais. En changeant le rapport des amplitudes des relais, les gains critiques ou les valeurs limites des gains proportionnels sont obtenus. Pour les systèmes SISO la stabilité est déterminée directement à partir du diagramme de Nyquist, pour les systèmes multivariables, la stabilité est déterminée à partir du module. Cette méthode est adaptée aux système TITO. L'équation (5.24) peut s'écrire sous la forme:

$$(H_{11} + 1/N_1)(H_{22} + 1/N_2) - H_{12}H_{21} = 0 \quad (5.27)$$

Le choix du rapport des amplitudes des relais influence la détermination des paramètres du PID. Généralement, la grandeur du rapport h_i/h_j est utilisée pour la détermination des données du point critique afin d'ajuster les contrôleurs et avoir les meilleures performances de la boucle i . Dans le cas où l'oscillation à l'entrée des relais est identique aux deux boucles, dans ce cas le rapport entre les gains critique est donné par le rapport (5.28)[23].

$$K_{c,1}/K_{c,2} = (K_{21} (h_1/h_2) + K_{22}) / (K_{11} + K_{12} (h_2/h_1)) \quad (5.28)$$

ceci se produit dans le cas où les fonctions de transfert ont des numérateurs constants, de même signe et le même dénominateur.

5.6 Méthode du lieu géométrique

L'idée de déplacer le point critique en boucle ouverte sur la courbe de Nyquist du procédé à la position désirée est utilisée pour le calcul des paramètres du PID. Comme pour les systèmes SISO [23] cette méthode sera appliquée aux systèmes TITO. La stabilité d'un système TITO est déterminée par son module ou lieu géométrique. Si le système considéré est celui de la figure 5.2, système possédant deux relais contrôleurs avec $h_1 A_2 / h_2 A_1 = 1$, la fréquence du cycle limite est la fréquence à laquelle la caractéristique à la plus grande amplitude qui coupe l'axe des réels (partie négative). La méthode de conception est basée sur le déplacement de ce point à la position désirée grâce à l'utilisation de contrôleurs PID. Autrement dit cette méthode de conception consiste à modifier le gain et la phase afin d'obtenir la caractéristique appropriée pour avoir une stabilité et de bonnes performances en boucle fermée. Supposons que le système soit stable en boucle ouverte et que la fréquence critique ainsi que les gains critiques soient connus K_{c1} , K_{c2} , Ω_c , les contrôleurs ont des fonctions de transfert que l'on peut représenter sous la forme matricielle suivante.

Soit G_{c_i} la fonction de transfert du contrôleur PID

$$G_{c_i} = K_{p_i} \left(1 + \frac{1}{sT_{i_1}} + sT_{d_i} \right) \quad i = 1, 2 \quad (5.29)$$

$$G_c = \begin{vmatrix} G_{c1} & 0 \\ 0 & G_{c2} \end{vmatrix}$$

$$G_c = \begin{vmatrix} K_{p1}(1 + \frac{1}{sT_{i1}} + sT_{d1}) & 0 \\ 0 & K_{p2}(1 + \frac{1}{sT_{i2}} + sT_{d2}) \end{vmatrix}$$

$$T_{d_i} = \frac{\tan(\phi) + \sqrt{4/\alpha + \tan^2(\phi)}}{2\Omega_c}$$

$$T_{i_i} = \alpha T_{d_i} \quad (5.30)$$

$$K_{p_i} = mK_{c_i} \cos(\phi)$$

$$\det\{H(s)G_c(s)\} = |H(s)||G_c(s)| = \prod_{i=1}^2 \pi \mu_i(s) \quad (5.31)$$

$$G_c(j\Omega_c) = \begin{vmatrix} mK_{c1} & 0 \\ 0 & mK_{c2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \angle \phi & 0 \\ 0 & 1 \angle \phi \end{vmatrix} = K_a K_b \quad (5.32)$$

la phase ϕ et l'amplitude m requises sur le lieu géométrique à la fréquence Ω_c sont obtenues en posant:

$$\begin{cases} \Omega_c T_{d_i} - \frac{1}{\Omega_c T_{i_i}} = \tan \phi \\ |H(j\Omega_c)G_c(j\Omega_c)| = m \end{cases} \quad (5.33)$$

i indique la boucle i , nous remarquerons que les constantes d'intégration et de dérivation sont indépendantes de la boucle i puisqu'elles sont les mêmes pour les deux boucles.

Si la valeur de m est fixée à un, la caractéristique à une marge de phase ϕ_m , en d'autres termes si on désire avoir une marge de gain G_m , la caractéristique du lieu géométrique est obtenue en posant les paramètres du PID à:

$$K_{p_i} = K_{c_i} / G_m \quad (5.34)$$

$$T_{d_i} = 1 / T_{i_i} \Omega_c^2 \quad (5.35)$$

Dans le cas où les phases des contrôleurs sont différentes, il sera difficile de trouver la caractéristique du lieu géométrique du système compensé. L'effet des contrôleurs PID sur la caractéristique du lieu géométrique du procédé est obtenu à partir de l'équation (5.31) par le système d'équations donnant le module et la phase de la nouvelle caractéristique $\mu i(j\omega)$. La caractéristique compensée ne donne pas la position désirée.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \log |\mu i(j\omega)| &= \sum_{i=1}^2 \log |Gc_i(j\omega)| + \sum_{i=1}^2 \log |\lambda_i(j\omega)| \\ \sum_{i=1}^2 \angle \mu i(j\omega) &= \sum_{i=1}^2 \angle Gc_i(j\omega) + \sum_{i=1}^2 \angle \lambda_i(j\omega) \end{aligned} \quad (5.36)$$

5.7 Méthode d'optimisation

Les paramètres du contrôleur optimal peuvent être obtenus par la minimisation de certains indices de performances [22]. L'indice de performance ISE pondéré par le temps a donné de bons résultats pour les systèmes SISO. Dans cette partie la même procédure est utilisée pour ajuster les contrôleurs PID des systèmes TITO. La matrice de contrôle $Gc(s)$ est une matrice diagonale

$$Gc = \begin{vmatrix} Gc1 & 0 \\ 0 & Gc2 \end{vmatrix} \quad (5.37)$$

5.7.1 Calcul des contrôleurs PID pour les systèmes non-découplés

Ce calcul se présente sous deux aspects pour les systèmes interactifs, si l'interaction entre les deux boucles est faible, les éléments de la diagonale de la matrice de transfert du système sont dominants.

La méthode utilisée pour les systèmes SISO sera reconduite dans le cas des systèmes TITO. Une seconde approche est de calculer les contrôleurs en minimisant l'erreur du système grâce aux critères de performance. Supposons que le système TITO à la structure représentée en figure 5.2, le signal d'erreur est donné par le vecteur suivant

$$E(s) = R(s) - Y(s) = (1 + H(s)Gc(s))^{-1}R(s) \quad (5.38)$$

$R(s)$ et $Y(s)$ sont des vecteurs (2,1), $H(s)$ est une matrice (2,2) et $Gc(s)$ est une matrice (2,2).

$$E(s) = \begin{bmatrix} 1 + H_{11}G_{c1} & H_{12}G_{c2} \\ H_{21}G_{c1} & 1 + H_{22}G_{c2} \end{bmatrix}^{-1} R(s) \quad (5.39)$$

$$E(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + H_{22}G_{c2} & -H_{12}G_{c2} \\ -H_{21}G_{c1} & 1 + H_{11}G_{c1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\Delta = \det |1 + H(s)Gc(s)|$$

Pour un système multivariable, on peut trouver différentes possibilités suivant l'entrée excitée et la sortie observée. La possibilité consiste à construire un critère de choix qui pondère les différentes réponses du système.

$$J = \int_0^{\infty} F(e_i/i) dt \quad (5.41)$$

e_i/i est l'erreur de la boucle i , on peut aussi minimiser J avec une contrainte posée sur J_1 tel que

$$J_1 = \int_0^{\infty} F(Y_j/i) dt < C \quad i \neq j \quad (5.42)$$

Y_j/i représente la sortie de la boucle j due au signal d'entrée sur la boucle i .

On peut aussi calculer un autre critère de performance qui consiste en la minimisation d'une fonction J_2

$$J_2 = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \alpha_1 F(e_i/i) dt \quad (5.43)$$

avec (e_i/i) signal d'erreur de la boucle i et α_i un facteur de pondération, comme on peut aussi calculer une fonction générale

$$J_3 = \int_0^{\infty} \{ \alpha_1 F(e_1/i) + \alpha_2 F(Y_2/i) \} dt \quad (5.44)$$

il est clair que l'indice de performance est minimisé pour différentes combinaisons d'entrées/sorties.

Si l'interaction est trop grande, la méthode proposée ne donne pas de bons résultats, dans ce cas la technique de découplage sera appliquée au système.

5.7.2 Calcul des contrôleurs PID pour les systèmes découplés

1. On applique la technique de découplage ce qui permet de donner deux boucles indépendantes ce qui donne un système équivalent à deux systèmes SISO.
2. On applique la procédure d'optimisation aux deux boucles séparément ce qui nous permet de trouver les paramètres des contrôleurs PID en appliquant l'intégrale du critère de performance.

5.8 Exemples illustratifs

Exemple 5.8.1 système avec une interaction non négligeable.

le système décrit par la fonction de transfert suivante

$$G(s) = \frac{1}{2s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5.5s + 1} \begin{vmatrix} (1.5s + 1) & 0.6(0.75s + 1) \\ 0.8(0.75s + 1) & 0.8(1.2s + 1) \end{vmatrix}$$

calcul de la matrice de gains relatifs (M.G.R):

$$M.G.R = \begin{vmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{vmatrix} \text{ avec } \det(M.G.R) = 4$$

calcul du facteur de stabilité d:

$$d = 0.4$$

Les paramètres des relais sont $h_1 = (2, 0.2)$ et $h_2 = (2, 0.1)$, les paramètres des points critiques du système non découplé sont respectivement $K_{c1} = 6.3662$; $K_{c2} = 6.3662$ et $W_{c1} = W_{c2} = 1.0714$ rd/s.

Le système découplé a comme paramètres des point critiques $K_{c1} = K_{c2} = 12.7324$ et $W_{c1} = 1.3195$; $W_{c2} = 1.0714$ rd/s et comme fonctions de transfert Ge_1 et Ge_2 .

$$Ge_1 = \frac{0.6094s^2 + 0.75s + 0.1667}{s^3 + 5.66s^4 + 8.33s^3 + 6.0833s^2 + 2.33s + 0.33}$$

$$Ge_2 = \frac{0.39s^2 + 0.48s + 0.1067}{s^3 + 5.66s^4 + 8.33s^3 + 6.0833s^2 + 2.33s + 0.33}$$

Les paramètres des contrôleurs sont donnés dans le tableau 5.2, les courbes des figures 5.6 et 5.7 représentent les réponses respectivement des systèmes non-découplé et découplé, nous remarquons que les performances dynamiques du système sont meilleurs dans le cas ou on travaille avec un système découplé vu que l'interaction entre boucles est non négligeable. Cette différence est due au calcul du cycle limite.

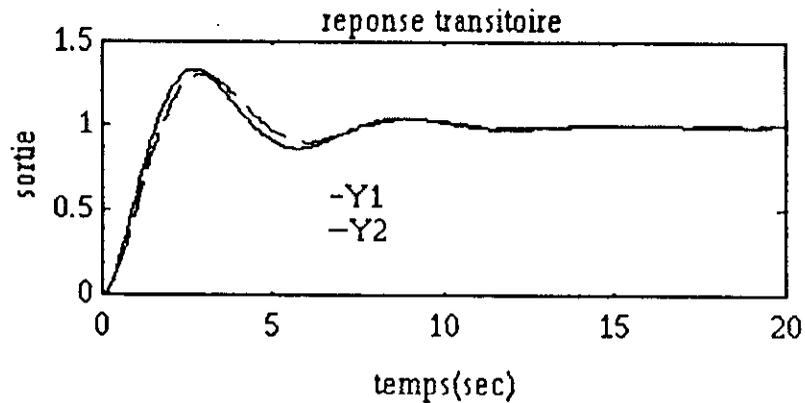


figure 5.6 Réponse du système non découplé de l'exemple 5.8.1

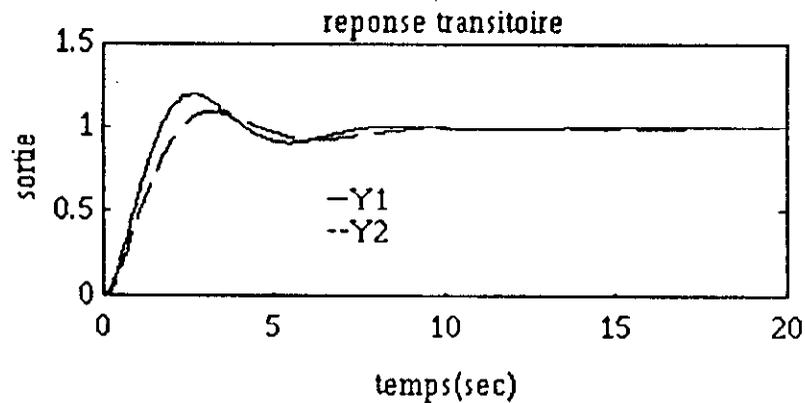


figure 5.7 Réponse du système découplé de l' exemple 5.8.1

Contrôleur		K_p	T_i	T_d	D%	T_m	T_r
Z_N (N.D.C)	B1	3.8197	2.9321	0.7037	33.19	1.55	6.95
	B2	3.8197	2.9321	0.7037	30.62	1.75	7.05
Z_N (D.C)	B1	7.6394	1.8603	0.5714	19.05	1.65	6.55
	B2	7.6394	2.5821	0.70.37	8.912	2.25	7.25

Tableau 5.2 Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques de l'exemple 5.8.1

Exemple 5.8.2 Système d'ordre 4 avec une interaction négligeable

1. Système non découplé

$$G(s) = \frac{1}{(1+20s)(1+4s)^2} \begin{vmatrix} 4.5 & -1 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$$

calcul de la matrice de gains relatifs (M.G.R.):

$$\text{M.G.R} = \begin{vmatrix} 0.9574 & 0.0426 \\ 0.0426 & 0.9574 \end{vmatrix} \quad \text{avec } \det(\text{M.G.R}) = 0.9148$$

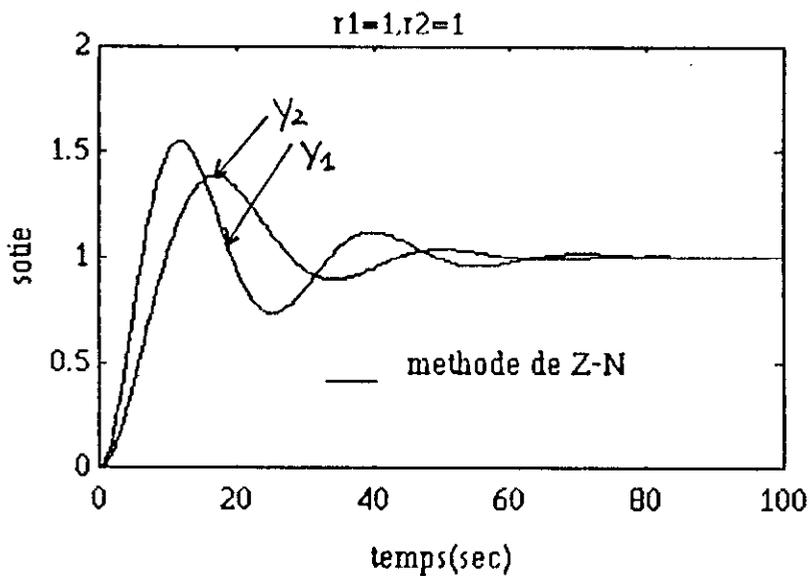
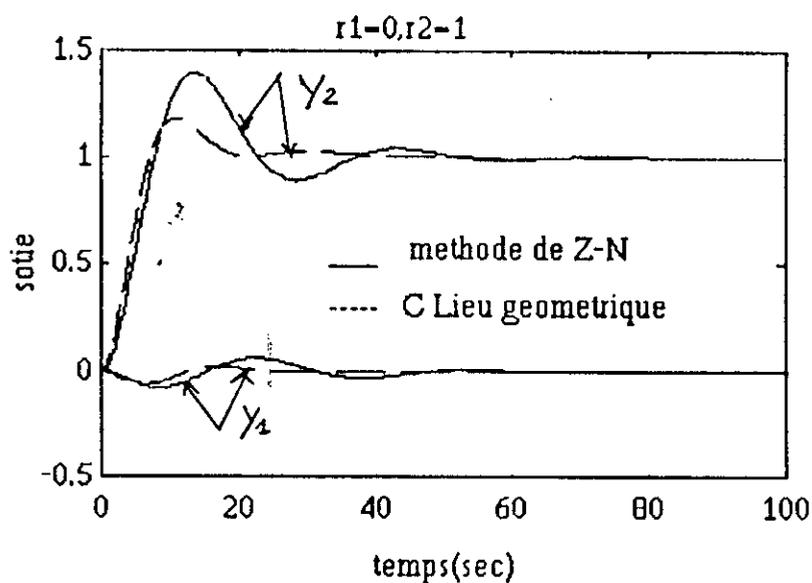
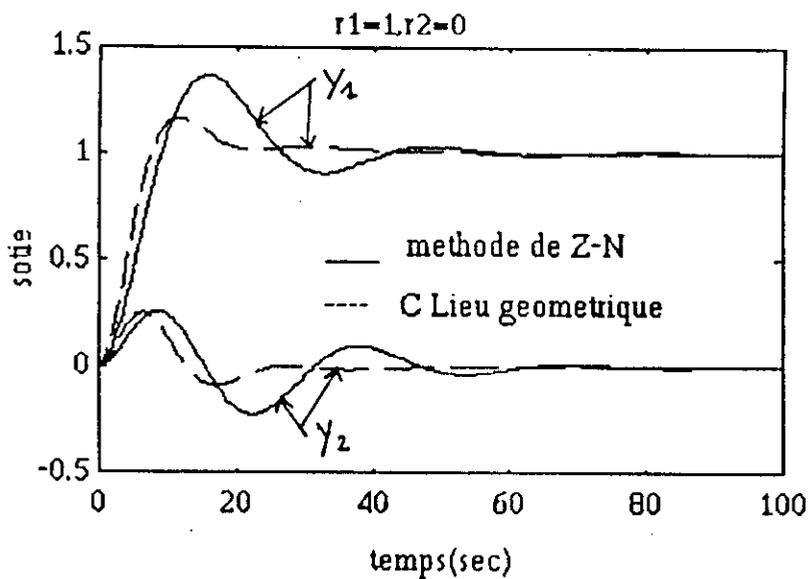
calcul du facteur de stabilité d:

$$d = 1.044$$

Utilisant des relais avec un rapport $\eta = 2$, la fréquence et les gains sont respectivement $\omega_{c1} = \omega_{c2} = 0.2494$ rad/s et $K_{c1} = 2.1221$ pour la boucle une et $K_{c2} = 1.0610$ pour la boucle deux. Le tableau 5.3 donne les paramètres des PID pour les deux méthodes de Ziegler-Nichols généralisée et la méthode de la caractéristique du lieu géométrique. Pour la méthode du lieu géométrique on désire obtenir une marge de phase de 45° et une amplitude de 1, la réponse du système en boucle fermée est donnée en figure 5.8 on remarque une diminution du dépassement du temps de réponse avec la méthode du lieu géométrique par rapport à la méthode de Ziegler-Nichols.

Contrôleur		K_p	T_i	T_d	D%	T_m	Tr
Z_N (N.D)	B1	1.2732	12.5982	3.0236	37.98	9.75	40.25
	B2	0.7427	12.5982	3.0236	54.12	6.25	45.75
lieu géom (N.D)	B1	1.5005	17.2906	4.9402	15.23	8.25	19.25
	B2	0.7503	17.2906	4.9402	32.6	5.25	20.75
$\phi_m = 45^\circ, A = 1$							

Tableau 5.3 Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système non découplé de l'exemple 5.8.2



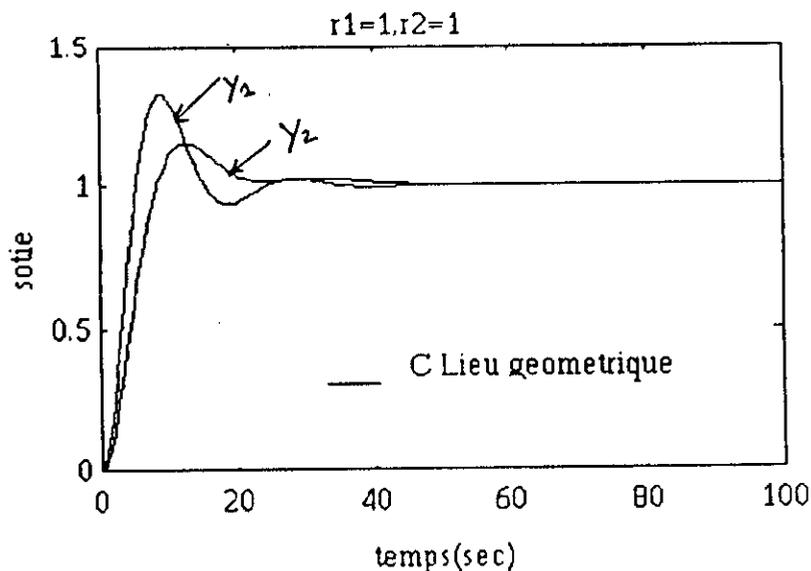


Figure 5.8 Réponses indicielles du système non découplé de l'exemple 5.8.2

2. Système découplé

En appliquant la technique de découplage à l'exemple 5.2 nous obtenons un système composé de deux boucles indépendantes. Les paramètres des contrôleurs PID pour les différentes méthodes sont donnés dans le tableau 5.4

$$G1(s) = \frac{0.0147}{s^3 + 0.55s^2 + 0.05s + 0.0031}$$

$$G2(s) = \frac{0.0366}{s^3 + 0.55s^2 + 0.05s + 0.0031}$$

Paramètres des relais amplitudes et demi-largeur de l'hystérésis:

$$h1(1,0.1), h2(1,0.2)$$

Le système découplé de l'exemple 5.2 donne comme paramètres des points critiques respectivement $W_{c1} = 0.263 \text{ rad / s}$, $K_{c1} = 2.1221$ et $W_{c2} = 0.2494 \text{ rad / s}$, $K_{c2} = 0.9095$, on remarque une légère variation des points critiques par rapport aux points calculés pour le système non découplé. La figure 5.9 montre que les résultats obtenus ne sont pas très différents de ceux obtenus avec le système non découplé, ceci est dû à la faible interaction entre boucles. On remarque aussi que la méthode du lieu géométrique donne de meilleurs résultats.

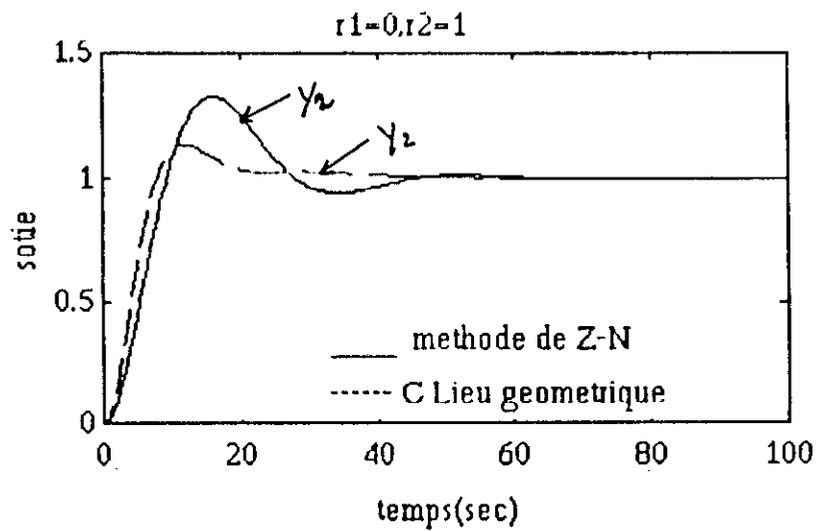
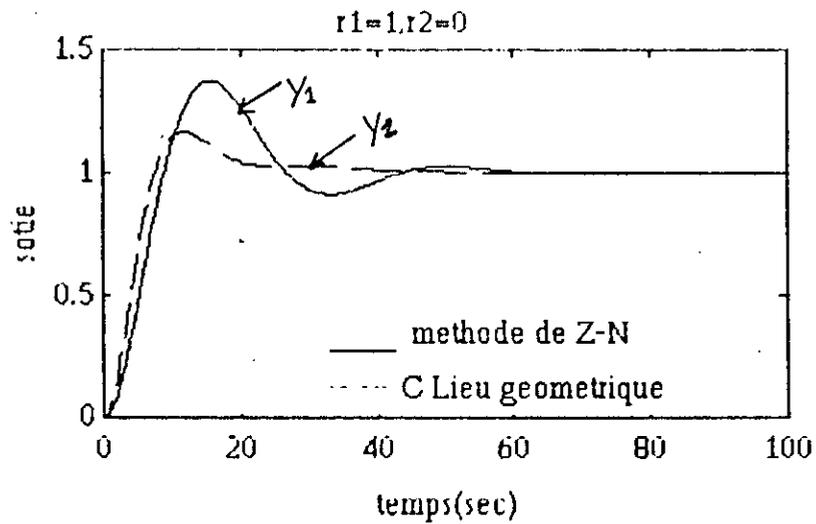


figure 5.9 Réponses indicelles du système découplé l'exemple 5.8.2

Contrôleur		K_p	T_i	T_d	D%	T_m	T_r
Z_N (DC)	B1	1.2732	11.9253	2.8621	37.29	9.25	38.75
	B2	0.5457	12.5982	3.0236	33.08	9.25	37.75
lieu géom (DC)	B1	1.5005	16.3671	4.6763	16.4	7.75	18.75
	B2	0.6431	17.2906	4.9402	13.39	7.75	18.25

Tableau 5.4 Paramètres des contrôleurs et Paramètres dynamiques du système découplé de l'exemple 5.8.2

5.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons appliqué la méthode d'ajustage automatique aux systèmes à deux entrées/deux sorties. Les paramètres du contrôleur PID pour le système TITO sont déterminés par application de la méthode de Ziegler-Nichols généralisée aux systèmes MIMO donc applicable aux systèmes TITO. Le point critique de chaque boucle est obtenue en plaçant un relais dans chaque boucle (méthode de Astrom). Comme dans le cas des systèmes SISO la méthode de Ziegler-Nichols donne des réponses acceptables qui peuvent servir de réponses initiales avec une oscillation non négligeable. Dans la majeure partie des cas ce résultat est fonction du calcul du point critique qui ne tient pas compte de l'interaction.. La méthode de la caractéristique du lieu géométrique donne relativement de meilleurs résultats que la première méthode. Afin d'améliorer ces réponses et en particulier lorsque le système présente une interaction non négligeable, le découplage s'avère être une étape nécessaire car il permet de donner de meilleurs résultats, on remarque que la méthode du lieu géométrique donne des résultats similaires à la méthode de Ziegler-Nichols sans découplage.

Chapitre 6

Le programme 'AJUST' pour la conception de contrôleurs PID

6.1 Introduction

Le programme 'AJUST' se compose de deux parties ou de deux programmes principaux, le premier pour la conception de contrôleurs de type P, PI, PID ou PID modifiés pour compenser les systèmes à une entrée/une sortie (SISO). Le deuxième programme développé dans le cadre de cette étude concerne le calcul des paramètres des contrôleurs PID pour les systèmes à deux entrées/deux sorties TITO.

La fonction du programme SISO est de déterminer les paramètres du contrôleur PID et de donner un système compensé avec des paramètres dynamiques acceptables. Le calcul des paramètres du contrôleur se fait par deux méthodes de conception:

- Ajustage automatique (auto-tuning)
- Optimisation

Comme pour le programme SISO, la fonction du programme TITO est de permettre la détermination des paramètres des contrôleurs de chaque boucle et de donner un système compensé avec des paramètres dynamiques acceptables. Le calcul se fait par deux méthodes d'ajustage:

- Méthode de Ziegler-Nichols généralisée
- Méthode de la caractéristique du lieu géométrique

6.2 Structure du programme SISO

6.2.1 Caractéristiques principales

1. Capacité à déterminer les paramètres du contrôleur et à simuler le comportement statique et dynamique du système à compenser.
2. Représentation numérique et graphique des résultats
3. Exécution rapide

Ce programme a été écrit en Matlab sur micro ordinateur, sa structure générale est constituée d'un programme principal SISO et d'un certain nombre de sous programmes ou modules, dont chacun est voué à une fonction essentielle.

6.2.2 Structure vue par l'utilisateur

Le déroulement du programme SISO est représenté par la figure ci-dessous:

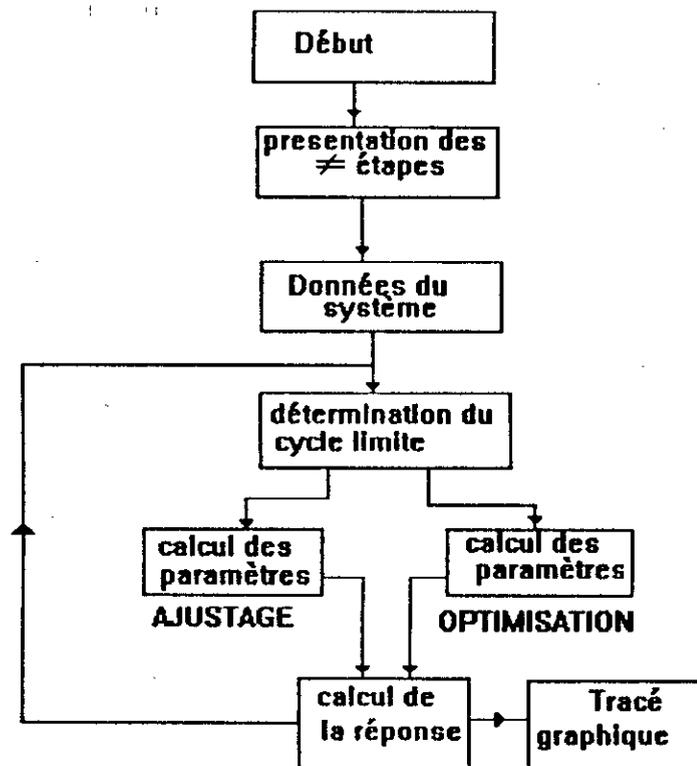


figure 6.1 Déroulement du programme SISO vue par l'utilisateur

Étape 1: Assignation des données

L'utilisateur peut fournir les paramètres de son système de deux manières différentes:

- par lecture des données stockées dans un fichier lors d'une précédente opération,
- par introduction directe des données sous forme de fonction de transfert ou d'équation d'état.

Étape 2: Calcul du cycle limite

Le calcul du cycle limite se fait par la méthode graphique, l'utilisateur après un choix de ses intervalles d'amplitude et de fréquence voit apparaître sur son écran deux courbes dans le plan complexe. La première courbe représente le diagramme de Nyquist du système en boucle ouverte, la seconde représente la fonction de transfert généralisée de l'élément non linéaire (relais). Si les deux courbes se coupent, cela implique qu'il y'a oscillation, le point de croisement sélectionné représente le point critique d'amplitude a et de fréquence ω_c suivi d'un calcul de K_c .

Étape 3: Calcul des paramètres du contrôleur

L'utilisateur a le choix entre les deux méthodes de conception proposées:

- Méthode d'ajustage automatique (voir chapitre 2).
- Méthode d'optimisation (voir chapitre 3).

Étape 4: Calcul de la réponse du système

Dans cette étape, l'utilisateur peut avoir la réponse de son système en boucle ouverte, la réponse en boucle fermée ou bien celle du système compensé par le contrôleur déterminé auparavant. Ces réponses sont stockées dans un fichier en vue de comparaison entre les méthodes d'ajustage ou entre les différents critères d'optimisation, afin de sélectionner celle, ou celui, qui donne les meilleurs performances dynamiques du système compensé, en l'occurrence le meilleur contrôleur,.

Étape 5: Tracé graphique

Une fois les calculs terminés, l'utilisateur peut regrouper les résultats trouvés avec les différentes méthodes utilisées. Il fait appel au module de tracé, qui lui même est fonction de plusieurs autres modules. Aussi, il peut sauvegarder ces tracés en vue d'une impression.

Étapes 6: Représentation fréquentielle

Le programme permet à l'utilisateur d'avoir un tracé fréquentiel s'il le désire.

Remarque:

La méthode d'optimisation est indépendante des paramètres du cycle limite. Cependant le calcul du contrôleur optimal serait plus simple si l'utilisateur donne des valeurs initiales.

La méthode d'optimisation présente deux variantes

1. méthode de calcul (domaine des fréquences)
2. méthode numérique (simulation)

La méthode numérique (simulation) nécessite un temps de calcul, un choix judicieux des valeurs initiales et un temps de simulation. Cette dernière est nécessaire pour le calcul du contrôleur optimal pour certains critères (IAE et ITAE).

6.3 Structure du programme TITO

Les caractéristiques du programme TITO sont identiques à celles du programme SISO.

6.3.1 Structure vue par l'utilisateur

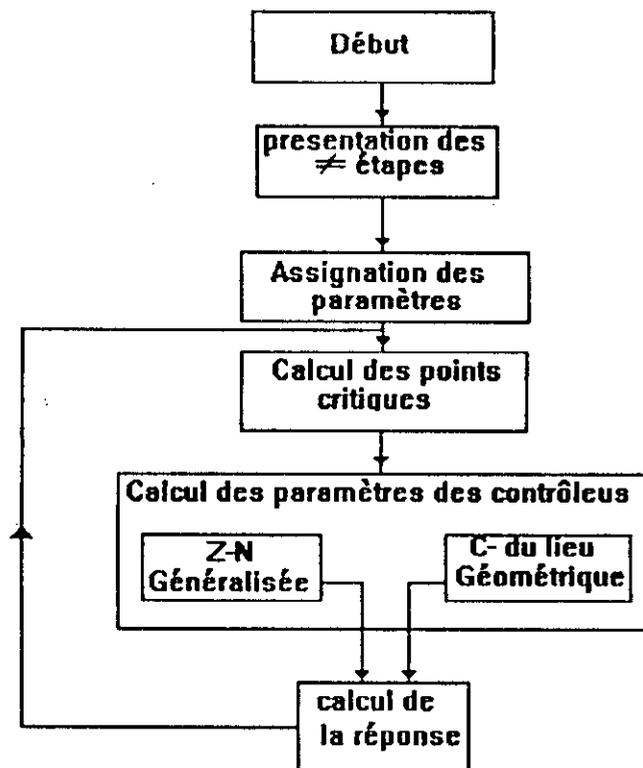


figure 6.2 Déroulement du programme TITO

Étape 1: Assignment des données

L'utilisateur a le choix, soit par lecture d'un fichier sauvegardé au préalable ou de les introduire directement.

Étape 2: Calcul des cycles limites

Les points critiques des boucles sont déterminés, comme pour le programme SISO, par la méthode graphique. La présence de points de croisement indique l'existence de cycle limite. Dans cette étape on calcule aussi la matrice de gains relatifs et le facteur de stabilité. A ce niveau on distingue deux phases, soit on calcule le point critique du système non découplé ou bien celui du système découplé en faisant appel à la procédure de découplage.

Étape 3: Calcul des paramètres des contrôleurs

On détermine les paramètres du système en utilisant une des deux méthodes proposées dans le chapitre 4.

Étape 4: Calcul des réponses du système

Dans cette étape on calcule les réponses transitoires du système, on exécute le tracé des courbes, on détermine les paramètres dynamiques du système compensé et on peut procéder à la comparaison des réponses données par les deux méthodes. Aussi, ces courbes peuvent être sauvegardées pour l'impression.

6.4 Structure interne du programme

La logique interne des programmes SISO et TITO prend la forme telle qu'illustrée en figures 5.1 et 5.2. Les blocs identifiés représentent les différentes procédures, ces dernières sont inter-reliées par des relations hiérarchiques, de cette façon, la mise en oeuvre des fonctions ou étapes décrites est quasiment directe.

6.5 Dialogue

Le type de dialogue choisit est le type menus, le système présente une liste de choix possibles parmi lesquels l'utilisateur effectue sa selection . Ce type de dialogue est très utilisé car il convient aussi bien à la selection de commandes qu'à l'entrée de paramètres, en

plus lorsque le nombre de commandes est important, l'utilisation de menus est conseillée. Il faut cependant décomposer ces commandes en plusieurs niveaux (sous menus).

6.6 Conclusion

Le programme 'AJUST' permet à l'utilisateur de se familiariser avec les méthodes d'ajustage automatique et d'optimisation. Sa mise en oeuvre est bien plus simple que celle des autres méthodes connues telle que la commande adaptative ou il est nécessaire de fournir un modèle de référence adéquat et nécessite une initialisation du système.

Le programme permet de faire une comparaison entre les méthodes d'ajustage automatique (auto-tuning) et les critères d'optimisation. Les expériences de simulation sont exécutées dans les chapitres 2, 3 et 4 avec le programme SISO et dans le chapitre 5 avec le programme TITO.

Chapitre 7

Conclusion générale

Sur la base des résultats présentés dans ce travail, il nous est permis de constater que la méthode d'ajustage automatique (Auto-tuning), appliquée aux systèmes à une entrée / une sortie (SISO) est de conception assez simple, bien définie et efficace. Le calcul des paramètres du contrôleur se fait de façon aisée. Ces résultats confirment les performances en fiabilité et robustesse du contrôleur PID. Par ailleurs sa mise en oeuvre ne présente pas de difficulté particulière grâce au Logiciel Matlab. Une comparaison des résultats entre les différentes méthodes d'ajustage automatique souligne l'amélioration des paramètres dynamiques obtenus par Auto-tuning.

La méthode d'optimisation appliquée aux systèmes (SISO) est aussi de conception assez simple surtout pour certains critères que l'on peut calculer de façon analytique. Le calcul dans le domaine fréquentiel est assez simple et facile à mettre en oeuvre. Une comparaison des résultats montre que le critère ISE donne un résultat moins bon que les critères ITSE et IT2SE.

Une analyse comparative des performances des systèmes avec les méthodes d'ajustage automatique et optimisation nous permet d'énoncer les conclusions suivantes:

En choisissant la méthode de la fonction de transfert généralisée qui est une méthode approximative, on peut avoir avec la méthode de Astrom-Hagglund dans le cas des systèmes avec un retard des réponses assez oscillatoires à la limite de la stabilité. Le retard provoque une déformation de l'oscillation ce qui donne une marge de phase très réduite. En dehors de ce cas la méthode de Astrom-Hagglund, des pôles dominants et de Ziegler-Nichols améliorée donnent des systèmes compensés avec un bon compromis entre le dépassement et le temps de réponse, les performances sont améliorées par rapport à la méthode de Ziegler-Nichols.

La méthode d'optimisation est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle, les paramètres dynamiques sont fonctions du coût à minimiser. Les résultats obtenus par cette méthode et en particulier ceux obtenus par les critères ISE pondérés par le temps sont nettement meilleurs que ceux donnés par le critère ISE.

L'ajustage par optimisation nécessite la connaissance de la fonction de transfert du système à compenser ce qui constitue un inconvénient majeur.

Cette étude nous a permis de voir que la méthode d'ajustage automatique donne des résultats très acceptables, comparables aux performances données par la méthode d'optimisation surtout si on choisit la structure³ du contrôleur où l'action de dérivation est dans la boucle de retour. Les méthodes de Ziegler-Nichols et d'Astrom-Hagglund modifiées sont deux autres méthodes empiriques déterminées par l'application du critère d'optimisation ISTE. Elles donnent des résultats semblables à ceux donnés par le critère ISTE ce qui fait que l'on peut déterminer le contrôleur optimal par ajustage automatique et cela même si la fonction de transfert du système est inconnu.

L'extension de la méthode d'ajustage automatique avec la méthode de Ziegler-Nichols généralisée aux systèmes à deux entrées deux sorties (TITO) donne de bons résultats dans le cas où l'interaction entre boucles est faible. Si l'interaction est grande on prévoit le module de découplage qui permet de donner un système compensé avec des performances dynamiques assez bonnes. Pour améliorer les réponses on a étudié une deuxième méthode, la méthode de la caractéristique du lieu géométrique qui permet une amélioration par rapport à la méthode de Ziegler-Nichols.

La méthode d'optimisation n'a pas été appliquée aux systèmes (TITO) car elle est assez complexe, elle nécessite donc une mise en oeuvre difficile. Cependant si on applique le découplage, l'optimisation se réduit à la même méthode que celle appliquée aux systèmes (SISO).

La version PC MATLAB nous a permis de combler la tâche désirée et d'atteindre une performance de calcul satisfaisante, cependant, avec la version MATLAB\SIMULINK on pourrait améliorer la structure et surtout la performance du programme.

Nous pourrions nous intéresser aux problèmes de plus grande dimension où la complexité est d'un niveau bien plus grand.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Astrom, K.J., Introduction to stochastic control theory, Academic Press Inc., 1970
- [2] Astrom, K.J and Winttermark., on self tuning regulators, Automatica., N°9, pp185 - 199, 1973
- [3] Astrom, K.J., Haggglund, T., Hang, C.C., Ho, W.K., Automatic tuning and Adaptation for PID controller-A survey, IFAC, Int symp on Adaptative systems in control and signal processing Grenoble, France, july 1-3, 1992
- [4] Astrom,K.J., Haggglund,T., Afrequency domain method for automatic of simple feedback loops, Departement of automatic control Institue of technology Lund, SWEDEN, 1985
- [5] Astrom,K.J.,Haggglund,T., Automatic tuning of simple Regulators for Phase and Amplitude Margins specifications, Automatica vol 20 N°5 pp 645 1984
- [6] Astrom,K.J,Haggglund,T.,Automatic Tuning of simple regulators, Proceeding IFAC 9 th World congress Budapest, 1984.
- [7] Astrom,K.J., Haggglund,T., Automatic tuning on PID controllers based on dominant pole design, IFAC Adaptative control of chemical Process,Frankfurt am Main, 1988
- [8] Atherton,D.P., Nonlinear control engineering, Describing Function Analysis and Design, Van Nortrand Reinhold, london, 1975
- [9] Atherton,D.P., Research on PID Controller Design, University of sussex. December 1993
- [10] Boje,E., Eitelberg,E., On Identification of Time Delay Via the Approximation, Departement of Electrical And Engineering, University of Durban-Westville Private Bag X54000, Durban 4000, South Africa
- [11] Bordeneuve-Guibe, J., Commande predictive adaptative, application à des procédé thermique. These universitaire Paul Sabatier toulouse, 1990
- [12] Eitelberg,Eduard., A regulating and tracking PI(D) controller, 1986
- [13] Gerry,J.P., A Comparaison of PID Control Algorithms, control Engineering March Gerry Engineering software hockport, IL 1987
- [14] Gille, j.ch., Decaulne, P., Pelegrin., Systèmes asservis non linéaires. Dunod 5^{ème} Edition, 1988
- [15] Hang, C.C., Astrom, K.J and Ho,W.K., Refinements of the Ziegler Tuning formula, IEE Proceeding-D, vol. 138, N°2, pp 111-118, 1991

- [16] Landau, L.D., Identification et commande des systèmes, ED Hermes, Paris, 1988
- [17] Landau, L.D., Dugard, L., Commande Adaptative, aspects pratique et théorique, ed. Masson, Paris, 1986
- [18] Mantz, R.J., Tacconi, J.E., Complementary rules to Ziegler and Nichols' rules for regulating and tracking controller, Int.J. Control, vol 49, N°5, 1465-1471, 1989
- [19] Maret, L., Régulation automatique, Presse Polytechniques Romandes, pp 319-393, 1987
- [20] Yoshikazu Nishikawa., Nobuo Sannomiya., Tokuji Ohta and Haruki Tanaka., A method for aut-tuning of PID control parameters, Automatica, vol.20 N°3, pp 321-332, 1984
- [21] Zhuang, M., Atherton, D.P., PID Controller Design for a TITO system, Proceeding, AC'93, san Fransisco, pp 3176-3177, may 1993.
- [22] Zhuang, M and Atherton D.P., Tuning PID controllers whith Integral performance critéria, control'91, Edinburgh, pp 481-486, march 1991
- [23] Zhuang, M., Atherton, D.P., PID controller Design for A TITO System, school of engineering and applied science, University of sussex, 1993
- [24] Zgorzelski, P., Automatic tuning PID Regulator for two-input two-output systems, Proc.of the IASTED international symposium Modelling Identification and Control, 1988

Annexe

Le programme 'AJUST' est constitué de deux programmes principaux SISO et TITO qui font appel à des fonctions du logiciel Matlab.

Les procédures développées dans programme SISO.m sont :

menupr.m, donnée.m, graphlcy.m, chpara.m, stepresp.m, fqres.m, et optmpc.m .

Les procédures développées dans le programme TITO.m sont:

intrdon.m, stanaly.m, chpid.m, et stpmv.m .

1. SISO.m :

A l'appel du programme SISO, le menu principal apparaît à l'écran et offre à l'utilisateur l'une des étapes suivantes:

1. donnée.m: Permet d'introduire les paramètres du système sous forme de fonction de transfert ou équation d'état. Elle permet aussi de faire une sauvegarde et de faire appel à des paramètres déjà stockés.

2. graphlcy.m: Calcule les paramètres du point critique en traçant le diagramme de Nyquist du système en boucle ouverte et de tracer la fonction de transfert généralisée et de sélectionner le critique.

3. clpara.m: Calcule les paramètres du contrôleur par les différentes méthodes étudiées aux chapitres 2 et 3 (voir 3.7). Elle fait appel aux procédures suivantes:

- dmpole.m
- modZN.m
- modAH.m

4. stepresp.m: Calcule les réponses du système :

- _ en boucle ouverte
- _ en boucle fermée
- _ compensé

Aussi, elle fait appel aux procédures suivantes:

- stepop.m
- stepcl.m
- steprem.m

5. fgres.m: Donne la réponse en fréquence du système:

- _ Tracé de Nyquist
- _ Tracé de Bode
- _ Calcul de la marge de gain et de la marge de phase

6. optmpe.m: Calcule le contrôleur optimal en utilisant deux méthodes:

- optmcal.m
- simint.m

7. simplot.m: Donne la réponse du système compensé par Ajustage automatique ou par Optimisation, elle permet de trouver jusqu'à 4 courbes sur un même graphe.

2. TITO.m:

A l'appel du programme TITO, le menu principal apparaît à l'écran et offre à l'utilisateur l'une des étapes suivantes:

1. intrdon.m: Sert à introduire les données, comme dans le cas du système SISO, pour un système à deux entrées / deux sorties.

2. stanaly.m: Analyse le système avec:

- _ calcul de la matrice de gains relatifs
- _ calcul du facteur de stabilité

_ détermination du cycle limite (points critiques de chaque boucle), en faisant appel aux procédures `graphlc.m` des systèmes découplé et non découplé.

3. `clpid.m`: Calcule les paramètres du contrôleur PID en faisant appel aux procédures:

- `geneZN.m`

- `mvloci.m`

4. `stpmv.m`: Permet de tracer les différentes réponses avec les méthodes étudiées pour les systèmes découplés ou non découplés:

- `septito.m` (non découplé)

- `septit1.m` (découplé)