

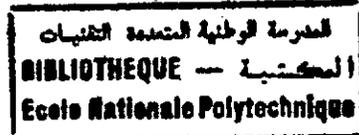
10/98

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Nationale Polytechnique

Département de Génie Mécanique



Étude du Phénomène de Rupture des Structures des
Systèmes Micro-Électro-Mécaniques par la Méthode des
Éléments Libres de Galerkin et la Méthode des Discontinuités
des Déplacements

Projet de Fin d'Étude

Présenté en Vue de l'Obtention du Diplôme

d'Ingénieur d'État en Génie Mécanique

Proposé par :

A. K. Tayebi*
Y. Belkacemi†

Étudié par :

N. Tayebi
Nouredine

Dirigé par :

Y. Belkacemi†
A. K. Tayebi*
M. Medjrab†

* Department of Civil and Environmental Engineering
Cornell University
Cornell University, Ithaca, New York 14853, USA

† Département de Génie Mécanique
École Nationale Polytechnique
10 Avenue Hassen Badi, El-Harrach, Alger 16200, Algérie

Promotion
Juin 1998



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Nationale Polytechnique

Département de Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Étude du Phénomène de Rupture des Structures des
Systèmes Micro-Électro-Mécaniques par la Méthode des
Éléments Libres de Galerkin et la Méthode des Discontinuités
des Déplacements

Projet de Fin d'Étude

Présenté en Vue de l'Obtention du Diplôme

d'Ingénieur d'État en Génie Mécanique

Proposé par :

A. K. Tayebi*
Y. Belkacemi†

Étudié par :

N. Tayebi

Dirigé par :

Y. Belkacemi†
A. K. Tayebi*
M. Medjrab†

* Department of Civil and Environmental Engineering
Cornell University
Cornell University, Ithaca, New York 14853, USA

† Département de Génie Mécanique
École Nationale Polytechnique
10 Avenue Hassen Badi, El-Harrach, Alger 16200, Algérie

Promotion
Juin 1998

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

© École Nationale Polytechnique

Dédicace

Je voudrai dédier ce travail à mes très chers et bien-aimés parents, lumière de ma vie et l'étincelle qui a gardé pour toujours la flamme de l'espérance éveillée en moi et qui, j'espère, verront à travers ce travail le fruit de leur amour et de leur éducation.

C'est avec beaucoup d'amour et de gratitude et du plus profond de mon cœur que je dédie ce travail à mon frère aîné le bien aimé Kamel qui n'a pas hésité à sacrifier son travail, ses intérêts et son temps libre pour mettre à ma disposition l'apport de son génie intellectuel, épicé d'amour fraternel, pour que je puisse finaliser ce travail et réaliser mon rêve que je croyais irréalisable.

À la mémoire de mes deux grands-mères ; Au nouveau membre de la famille, ma nièce Tima Jr qui, sans l'avoir encore vu, a apporté tant de joie et de bonheur dans la maison ; À mon frère Redha et ma sœur Amina ; À mes tantes, oncles, cousins et cousines ; À tous mes amis, je leur dédie le fruit de ce travail.

ملخص

الأجهزة الميكرو كهرو ميكانيكية "أو" أم ك م" هي التسمية المعطاة للممارسة لصنع وتركيب مركبات ميكانيكية وكهرو بائية منمنمة والتي تصنع عن طريق أساليب أو مناهج تشبه تلك التي تستعمل من أجل صنع المركبات الكهرو بائية. أساليب صنع "أم ك م" هم جهد 20 سنة بحث وتطوير، بينما لا توجد هناك معلومات كثيرة عن التصرف الميكانيكي للمواد المكونة لـ "أم كم" مقارنة مع هذه التقنية المكلفة بناظجة نظرا لما ورثته من الميكرو كهرو بائية. إذن الخصائص المطاطية مثل الثوابت المطاطية، المقاومة الحادة، مقاومة الإنشقاق وخصائص التعب هم صفات أساسية ضرورية من أجل صنع أجهزة ميكرو كهرو ميكانيكية صالحة. هذه الخصائص المكتسبة عن طريق بنيات إختبار عن مقاييس "أم ك م" هن عامة ناقصة. جوابا على هذا الوضع، أردنا أن ندرس عدديا ظاهرة الإنشقاق في هذه الأجهزة ومقارنتها مع نتائج موجودة إما عدديا أو تجريبيا.

المسلكان العدديان المستعملان في هذه الدراسة هما طريقة العناصر الحرة لفالركين وطريقة الإنقطاعات الإنتقالية الطريقة الأولى هي طريقة جد حديثة والتي تمتاز لعدم استعمالها حلقات. من أجل هذا الإمتياز سميت هذه الطريقة "طريقة بدون حلقات" أما الطريقة الثانية المعروفة نوعا ما والتي هي صورة من طريقة العناصر الحدودية، والتي أعطت براهينها في ميدان الإنشقاق لكن ليس في مقاييس ميكرو سكوبية.

النماذج المدروسة هم عموما 7,5 إلى 15 ميكرو متر سمكا، 28 إلى 100 ميكرو متر إرتفاعا و 500 إلى 1000 ميكرو متر طولا بالنسبة للنماذج المصنوعة من السيليكون و 3 إلى 5 مرات أكبر للنماذج المصنوعة من الأكريليك عامل شدة الجهود قدر بإستعمال الطريقتين وقورن مع نتائج موجودة سابقا من أجل الحصول إلى صلة عامة لظاهرة الإنشقاق في هذه الأجهزة.

Résumé

“Les systèmes micro-électro-mécaniques” ou SMEM (MEMS en anglais) est l'appellation donnée à ou la généralisation de cette pratique qui consiste en la fabrication et la combinaison des composants mécaniques et électroniques miniaturisés et qui sont fabriqués en utilisant des procédés similaires à ceux utilisés pour la fabrication des composants électroniques. Les techniques de fabrication des SMEM sont le produit de deux décennies de recherche et de développement, en revanche très peu d'informations sont connues à propos du comportement mécanique des matériaux des SMEM comparées à celles de cette technologie assez mature de la fabrication héritée de la micro-électronique. Ainsi, les propriétés mécaniques telles que les constantes élastiques, la résistance limite, la résistance à la rupture et les propriétés de la fatigue sont des quantités fondamentales nécessaires pour la conception de systèmes micro-électro-mécaniques fiables. Ces propriétés acquises à partir de structures test à l'échelle des SMEM sont généralement manquantes. En réponse à cette situation, nous avons décidé d'étudier numériquement le phénomène de rupture de ces systèmes et de les comparer avec des résultats déjà acquis soit expérimentalement, soit numériquement.

Les deux procédés numériques utilisés dans cette étude sont la méthode des éléments libres de Galerkin et la méthode des discontinuités des déplacements. La première méthode est une méthode récemment développée et qui a l'avantage de ne pas utiliser de maillage, d'où l'appellation “Méthode sans Maillage” (Meshless Method). Alors que la deuxième méthode, assez connue, qui est une variante de la méthode des éléments aux frontières et qui a fait ses preuves dans le domaine de la rupture mais pas à l'échelle microscopique.

Les spécimens étudiés sont généralement de $7.5-15\mu m$ d'épaisseur, $28-100\mu m$ de largeur et $500-1000\mu m$ de longueur pour les structures en silicone et d'une échelle trois à cinq fois plus grande pour celles en acrylique. Le facteur d'intensité des contraintes K_I est calculé avec les deux méthodes puis comparé avec des résultats déjà obtenus pour pouvoir obtenir une corrélation générale.

Abstract

Micro-Electro-Mechanical Systems, or MEMS, is the name given to the practice of making and combining miniaturized mechanical and electronic components. MEMS devices are made using manufacturing processes that are similar, and in some cases identical, to those required for crafting electronic components. The fabrication techniques used to manufacture MEMS are the results of two decades of research and development. In contrast to these relatively mature fabrication techniques, very little is known about the mechanical behavior of MEMS materials. Thus, mechanical properties such as elastic constants, ultimate strength, fracture strength, and fatigue properties are fundamental quantities that are needed for the design of reliable micro-electro-mechanical systems. These properties acquired from test structures at the length scale of MEMS are currently lacking. In response to this problem, we have decided to study numerically the fracture phenomenon of these microsystems and to compare them with the results already obtained either experimentally or numerically.

The two numerical processes used in this study are the element free Galerkin method and the displacement discontinuity method. The first mentioned method is a method newly developed which has the advantage of not using meshes, that is why it is called "Meshless Method". On the other hand, the second method which is known and which is a variant of the boundary element method has already given its proof in fracture mechanics but not at the microscopic scale.

The studied specimens are generally $7.5-15\mu m$ thick, $28-100\mu m$ wide, and $500-1000\mu m$ long for structures made of silicon, and three to five times greater for structures made of acrylic. The stress intensity factor K_I has been computed by the two methods and has been compared with results already obtained, and a good correlation has been obtained.

Remerciements



Personne ne peut aller loin dans la vie sans l'aide, le support et l'orientation d'autrui. Du tout début, je voudrais remercier mes merveilleux parents qui m'ont offert le support dont j'avais besoin par tous les moyens possibles dans tous les aspects de ma vie. Leurs encouragements ont toujours été une lumière qui éclaira mon chemin et guida tous pas et événements dans ma vie.

J'ai une large dette de gratitude à mon promoteur Monsieur Yacine Belkacemi qui m'a toujours encouragé dans mes études. Il est louable dans le fait qu'il m'ait donné une grande liberté au choix de mon sujet ainsi que les méthodes de recherches. Ses recommandations et la richesse des idées qu'il me donnait à chaque rencontre m'ont permis d'être concentré dans la perfection de mon travail. Toute ma reconnaissance et mon profond respect vont à mon oncle Ali Boutalbi qui m'a soutenu en permanence et qui m'a offert toutes les possibilités d'une formation complète d'ingénieur. Je voudrais remercier aussi mon frère aîné Kamel qui a co-dirigé ce travail et qui, malgré les milliers de kilomètres qui nous séparent, a pu suivre chaque pas de ce travail et illuminer tous points sombres rencontrés durant son accomplissement. Mes remerciements vont également à l'étudiant en poste graduation Monsieur M. Medjerab qui par sa collaboration m'a permis de mener à bien ce travail. Je voudrais remercier tout particulièrement le Professeur Roberto Ballarini et le Professeur Martin Dunn qui m'ont apporté leur aide durant ce dernier mois. Je voudrais remercier Messieurs Bennour, Madani, Ait Ali, Rechak, Younsi, Benkoussas, Tiliouine et Berrah ainsi que Mademoiselle Amor pour l'aide qu'ils m'ont apporté.

Je voudrais remercier mon frère Redha et ma sœur Amina ainsi que mes tantes, oncles : Si Cheikh et Hadj El-Hachemi, cousins et cousines pour leur soutien et surtout Khalti Khadra qui n'a pas cessé de prier Dieu pour moi. Mes remerciements vont à Sabri qui dans une période très critique m'a apporté son aide et son soutien. Je voudrais remercier Naima pour l'aide très précieuse qu'elle m'a apporté. Nadjib est aussi remercié pour l'aide apportée et j'espère avoir fait autant pour lui. Enfin je voudrais remercier tous mes amis pour leur soutien ; ceux du Lycée Technique/Rue Didouche Mourad : Mourad, Hakim, Mounir et Mourad ; ceux du Lycée Technique/Polytechnique : Nadjib, Nassim, Sofiane, Boudjema et Farés ; mes amis et camarades de la promotion 98 de Genie Mécanique : Nadjib, Mehdi, Hamdane,

Hakim, Kais, Smain, Younes, Omar, Sara, Awatif, Hakim, Sofiane et Johny , et j'espère leur avoir apporté également mon soutien ; ceux de l'ALC : Mokrane, Mona, Naima, Sofiane, Roya, Nadira, Abderahmane, Maya, Louisa, Hichame, Farid et les autres, sans oublier My Teacher Zahia ; ceux de Polytechnique : Omar, Mohcene, Djamil, Amine, Youcef, Smain et les autres ; et tous mes autres amis que je n'ai pas cité.

A toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail ; je leur dis merci.

Sommaire



1	Introduction	1
1.1	Motivation et objectif de cette étude	5
1.2	Lignes directrices	8
2	Les Systèmes Micro-Électro-Mécaniques	9
2.1	Matériaux de fabrication des systèmes micro-électro-mécaniques	10
2.1.1	Le silicone	10
2.1.2	Autres matériaux	13
2.2	Processus de fabrication des systèmes micro-électro-mécaniques SCREAM .	13
2.2.1	D'un point de vue structurel	14
2.2.2	Brève Description du Processus	17
2.2.3	Aspects techniques et références pour le processus SCREAM	21
2.2.4	Autres techniques de fabrication des SMEM	21
2.3	Caractéristiques mécaniques des structures et des matériaux des SMEM	22
2.3.1	Contraintes résiduelles	22
2.3.2	Module de Young	23
3	La Méthode des Éléments Libres de Galerkin	26
3.1	La méthode des éléments libres de Galerkin	28
3.1.1	Les interpolateurs des moindres carrés	28
3.1.2	Le choix de la fonction de poids	29
3.2	Principe variationnel et implémentation numérique	31
3.2.1	Principe variationnel	31
3.2.2	Les équations de discretisation	34
3.2.3	Implémentation numérique	36
4	La Méthode des Discontinuités des Déplacements	39
4.1	La méthode des discontinuités des déplacements	40
4.1.1	Discontinuité de déplacement dans un solide infini	40
4.2	Problème intérieur/extérieur	42
5	Concepts de la Mécanique de la Rupture	44
5.1	Concepts de la mécanique de la rupture	45

5.2	Modes fondamentaux de rupture	47
5.3	Implémentation de la méthode des éléments libres de Galerkin à la mécanique de la rupture	48
5.4	Implémentation de la méthode des discontinuités des déplacements à la mécanique de la rupture/Calcul numérique de l'énergie d'avancement G	50
6	Résultats et Interprétations	52
6.1	Test du rapiéçage	52
6.2	Barre Cantilever	54
6.3	Plaque percée	57
6.4	Effets des trous sur la rupture des structures SMEM en polysilicone	59
6.5	Rupture des micro-dispositifs SMEM en polysilicone	61
6.6	Rupture des microstructures à entailles en silicone monocristallin et en acrylique	66
6.6.1	Test de flexion d'une barre en acrylique à entaille	67
6.6.2	Test de flexion d'une barre en silicone monocristallin anisotrope à entaille d'angle 70.53°	69
6.6.3	Rupture d'une structure en T	72
6.6.4	Test de flexion d'une barre en silicone monocristallin anisotrope à entaille d'angle 125.26°	75
7	Conclusion	78
	Références	81
	Appendice A, Convergence de L'approximation de u	89
	Appendice B, Principe Variationnel ; Multiplicateurs de Lagrange ; Espaces de Sobolev	91
B.1	Principe Variationnel	91
B.2	Les multiplicateurs de Lagrange	91
B.3	Les espaces de Sobolev	92
	Appendice C, Sources d'Informations Concernant les Systèmes Micro-Électro-Mécaniques	93
C.1	Journaux de publications	93
C.2	Archives de conférences	93
C.3	Sites web	94

Liste des Figures

1.1	ADXL50, Un accéléromètre commercial type SMEM développé par Analog Devices	3
a.	Le dispositif SMEM	3
b.	Vue de dessus du dispositif	3
c.	Gros plan de la structure mécanique	3
d.	Gros plan des lamelles capteurs de la structure mécanique	3
1.2	Exemples de dispositifs SMEM de types	4
a.	Capteur de pression	4
b.	Gyroscope	4
c.	Capteur d'écoulement de gaz	4
d.	Capteur d'humidité et de température	4
1.3	Exemples de dispositifs SMEM de types actionneurs	5
a.	Étalage de miroirs, gros plan du miroir montrant les barres de support	5
b.	Vanne tournante	5
c.	x, y, z étages pour un scrutateur optique	5
d.	Système de relais	5
1.4	Cycle de développement typique pour la fabrication d'un dispositif SMEM	6
2.1	Système cristallin du silicium : Structure diamant dans un système cristallin cubique	11
a.	Liaisons covalentes en trait gras	11
b.	Localisation des atomes par rapport au plan de base du treillis cubique	11
2.2	De gauche à droite, ce système électromécanique montre un actionneur composé de barres fixées des deux cotés utilisées comme un ressort	14
2.3	Gros plan d'un actionneur à plaques parallèles	15
2.4	Gros plan d'un actionneur montrant un vide étroit entre des barres adjacentes	15
2.5	Support fixe montrant la connexion entre de larges sections et de fines barres	16
2.6	Section droite d'une barre SCREAM typique	16
2.7	Processus SCREAM	18
a.	Déposition du masque d'oxyde PECVD	18
b.	Déposition du photoresiste	18
c.	Transfert du modèle du photoresiste à l'oxyde	18

d.	Décapage pour définir la structure SCREAM	18
2.8	Processus SCREAM (continuation)	19
e.	Oxydation des côtés en utilisant l'oxyde PECVD	19
f.	Evacuation des résidus suivie d'un second décapage pour augmenter la distance entre les barres et le fond	19
g.	Décapage suivi par la métallisation	19
2.9	Mesure des contraintes résiduelles par la méthode de la courbure de la gaufrette ...	22
3.1	Approximation pour satisfaire les conditions aux limites par des éléments finis	34
3.2	Structure cellulaire pour une quadrature dans la MELG, Domaines d'influence de deux points sont montrés	38
4.1	les composantes d'une discontinuité de déplacement	41
4.2	Discretisation dans le cas d'un contour fermé	42
4.3	La convention pour la traversée des contours	43
a.	Cavité	43
b.	Disque	43
c.	Anneau	43
5.1	Propagation de la fissure	46
5.2	Modes fondamentaux de sollicitation en mécanique de la rupture	48
a.	Mode 1	48
b.	Mode 2	48
c.	Mode 3	48
5.3	Système de coordonnées local au niveau de la pointe de la fissure	49
5.4	Distribution nodale utilisée pour les problèmes de fissuration	49
a.	Distribution complète	49
b.	Gros plan au niveau de la pointe de la fissure	49
5.6	Domaine de l'intégrale J	50
6.1	Test du rapiéçage	53
6.2	La solution $u(x, y)$ pour le test du rapiéçage	53
6.3	Barre Cantilever	54
6.4	Distribution du déplacement u_x	55
a.	Solution exacte	55
b.	Solution par la MELG	55
6.5	Distribution de la contrainte de cisaillement par rapport à y pour un x quelconque .	56
6.6	Plaque carrée comme portion d'une plaque infinie avec un trou circulaire et	

sujet à un champ de contrainte T suivant σ_x	57
6.7 Distribution de la contrainte normale σ_x par rapport à y pour $x = 0$	58
6.8 Photographie d'un prototype de spécimen troué	59
a. Photographie du spécimen	59
b. Gros plan d'une région fissurée du spécimen	59
6.9 La forme des trous	60
6.10 Schéma du modèle mathématique réduit	60
6.11 Spécimen de micro-rupture en polysilicone	62
a. Spécimen Typique	62
b. Image de dislocation	62
6.12 Dessin schématique du spécimen de micro-rupture	62
a. Le spécimen	62
b. Les variables et les dimensions utilisées pour le modèle mathématique	62
6.13 Modèle mathématique du spécimen de micro-rupture	63
6.14 Variation de la force appliquée par la sonde par rapport à la distance entre le point d'application de la sonde et la pointe de la fissure pour les trois longueurs du ligament non-fissuré	64
a. MDD	64
b. MELG	64
6.15 Variation du facteur d'intensité de contraintes par rapport à la distance entre le point d'application de la sonde et la pointe de la fissure pour les trois longueurs du ligament non-fissuré	66
a. MDD	65
b. MELG	66
6.16 Barre en acrylique à entaille avec γ variable	67
6.17 Barre en silicone anisotrope avec un angle de l'entaille $\gamma = 70.53^\circ$	70
6.18 Vue de dessus d'une structure en T en silicone (l'épaisseur $t=15\mu m$)	73
a. Structure intacte $w_f=8\mu m, 28\mu m$ et $48\mu m$	73
b. Structure fissurée	73
c. Un côté de la barre fissurée	73
d. Le plan de rupture	73
6.19 Structure en T en silicone anisotrope	74
6.20 Barre en silicone anisotrope avec un angle de l'entaille $\gamma = 125.26^\circ$	75

Liste des Tableaux

2.1	Propriétés du Silicone	12
2.2	Configuration des tests pour extraire le module de Young	23
2.3	Modules de Young du silicone monocristallin mesuré utilisant des structures test de l'échelle des SMEM. Ils sont comparés avec les résultats dans la case hachurée qui ont été mesuré à partir d'une structure test macroscopique	24
2.4	Constantes élastiques du silicone monocristallin mesuré à partir de structures test macroscopiques	24
3.1	Algorithme pour le code numérique de la MELG	38
6.1	Comparaison des valeurs prédites et mesurées	61
6.2	Facteur d'intensité de contraintes K_I pour une structure en flexion avec $a=1.78 \text{ mm}$ ($a/h=0.1$)	68
6.3	Facteur d'intensité de contraintes K_I pour une structure en flexion avec $a=3.56 \text{ mm}$ ($a/h=0.2$)	68
6.4	Facteur d'intensité de contraintes K_I pour une structure en flexion avec $a=5.33 \text{ mm}$ ($a/h=0.3$)	68
6.5	Facteur d'intensité de contraintes K_I pour une structure en flexion avec $a=7.11 \text{ mm}$ ($a/h=0.4$)	69
6.6	Facteur d'intensité de contraintes pour une barre à entaille d'angle 70.53° avec quatre différentes profondeurs de l'entaille	71
6.7	Facteur d'intensité de contraintes pour une structure en T d'angle 90° en silicone pour trois différentes valeurs de w_I	74
6.8	Facteur d'intensité de contraintes pour une barre à entaille d'angle 125.26° avec deux différentes profondeurs de l'entaille correspondant à deux longueurs de rainure	77

Nomenclature

a	\equiv	profondeur de l'entaille [m]
A	\equiv	section droite de la barre [m ²]
α	\equiv	coefficient influant sur la constante c
b	\equiv	vecteur représentant les forces de volumes
β	\equiv	angle de rotation [°]
c	\equiv	constante qui contrôle la distance d_l entre x et x_l
c_l	\equiv	distance maximale entre x et x_l [m]
C_{ij}	\equiv	constantes élastiques [Pa]
d_l	\equiv	distance entre x et x_l [m]
d_{ml}	\equiv	rayon du domaine d'influence de x_l [m]
D	\equiv	matrice d'élasticité
D_i	\equiv	discontinuité de déplacement du segment [m]
E	\equiv	module de Young [Pa]
E_s	\equiv	module de Young du substrat
$E_{\langle 100 \rangle}$	\equiv	module de Young dans la direction $\langle 100 \rangle$ [Pa]
$E_{\langle 110 \rangle}$	\equiv	module de Young dans la direction $\langle 110 \rangle$ [Pa]
$E_{\langle 111 \rangle}$	\equiv	module de Young dans la direction $\langle 111 \rangle$ [Pa]
ε	\equiv	tenseur de déformation
f	\equiv	déflexion de la barre à une distance L à partir du bout de la barre [m]
$\phi_l(x)$	\equiv	fonctions de formes
G	\equiv	taux de restitution d'énergie [J]
G_c	\equiv	taux de restitution d'énergie critique [J]
γ	\equiv	angle de l'entaille [°]
γ_e	\equiv	énergie de surface du matériau [J]
Ω	\equiv	domaine d'étude considéré
Ω_x	\equiv	domaine d'influence d'un point x
Γ	\equiv	contour du domaine Ω
H^0	\equiv	espaces de Sobolev d'ordre 0
H^1	\equiv	espaces de Sobolev d'ordre 1

I	\equiv	moment d'inertie de la barre [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
k	\equiv	constante influant sur la fonction de poids
K	\equiv	matrice de rigidité
K_I	\equiv	facteur d'intensité de contrainte [$\text{Pa}\cdot\text{m}^2$]
K_{Ic}	\equiv	facteur d'intensité de contrainte critique [$\text{Pa}\cdot\text{m}^2$]
L	\equiv	longueur de la barre [m]
λ	\equiv	multiplicateurs de Lagrange
m	\equiv	degré de la base polynomiale
n	\equiv	vecteur normal au domaine Ω
n	\equiv	nombre de points dans le voisinage d'un point x appartenant au domaine d'influence
$N_I(x)$	\equiv	fonctions de formes en MEF
ν	\equiv	coefficient de poisson
ν_s	\equiv	coefficient de poisson du substrat
$p(x)$	\equiv	base polynomiale
S_I	\equiv	ensemble des nœuds appartenant au domaine d'influence d'un point x_I
σ	\equiv	tenseur de contraintes [Pa]
σ_r	\equiv	contrainte maximale à la rupture [Pa]
σ_n	\equiv	contrainte nominale
σ_x	\equiv	contrainte normale suivant l'axe ox [Pa]
σ_y	\equiv	contrainte normale suivant l'axe oy [Pa]
σ_{xy}	\equiv	contrainte de cisaillement [Pa]
σ_f^0	\equiv	contrainte biaxiale initiale sur le film [Pa]
t_s	\equiv	épaisseur du substrat [m]
t_f	\equiv	épaisseur du film [m]
\bar{t}	\equiv	contrainte imposée sur Γ_I [Pa]
u	\equiv	champ de déplacements [m]
\bar{u}	\equiv	déplacement imposé sur Γ_u [m]
u_x	\equiv	composante du déplacement suivant ox [m]
u_y	\equiv	composante du déplacement suivant oy [m]
$w_I(x)$	\equiv	fonction de poids pour un point x_I

$w(x)$ \equiv fonction de poids

W_u \equiv terme qui renforce les conditions aux limites essentielles

x \equiv point quelconque

x_I \equiv point considéré

Chapitre 1



Introduction

L'industrie électronique connue pour son habileté à fabriquer des millions d'éléments microscopiques dans une surface pas plus grande qu'un timbre-poste, a actuellement commencé à inspirer une technologie qui a atteint un degré de développement dépassant celui produisant les micro-ordinateurs et les machines cellulaires. Ainsi, cette technologie a pu introduire une nouvelle ère, celle des systèmes micro-électro-mécaniques

Utilisant des matériaux et des procédés de micro-électronique, les chercheurs ont pu façonner des barres, des engrenages, des membranes et même des moteurs microscopiques qui peuvent être déployés pour faire bouger des atomes ou ouvrir et fermer des valves qui pompent des micro-litres de liquide. La grandeur de ces éléments mécaniques est mesurée en microns telle une fraction de la largeur du cheveu humain, et, comme les transistors, on peut en fabriquer des millions en même temps.

Dans les cinquante années à venir, l'engineering structurel du silicone pourra avoir un impact sur la société aussi important que celui de la miniaturisation électronique durant la précédente décennie car jusqu'à maintenant le calcul électronique et les circuits de mémoire aussi puissants qu'ils soient ne portaient que du simple principe d'exciter des électrons et de les faire passer à travers des fils minuscules. C'est pour cela que des dispositifs micro-mécaniques ont été conçus pour alimenter des systèmes électroniques avec une ouverture plus utile pour le monde de la physique, en leur permettant de capter et de contrôler le mouvement, la lumière, le son, la chaleur et autres forces physiques.

Le couplage des systèmes mécaniques et électroniques permettra un bon technologique formidable dans diverses disciplines scientifiques ainsi qu'en engineering. Ainsi, des milliers de barres avec une section droite de moins d'un micron pourront mettre en mouvement des sondes électriques minuscules qui liront et écriront assez de données pour emmagasiner une

petite bibliothèque d'information sur une surface de la grandeur d'un microcircuit. Des valves pourront injecter des doses de drogues dans les veines sanguines à des intervalles de temps très précis. Des systèmes d'inertie et de guidance pourront aider à localiser la position de combattants militaires et diriger les armes avec une grande précision sur des cibles parfois imperceptibles.

“Les systèmes micro-électro-mécaniques” ou SMEM (MEMS en anglais) est l'appellation donnée à ou la généralisation de cette pratique qui consiste en la fabrication et la combinaison des composants mécaniques et électroniques miniaturisés et qui sont fabriqués en utilisant des procédés similaires à ceux utilisés pour la fabrication des composants électroniques. Les composants micro-électroniques sont utilisés pour actionner les microstructures, capter tous leurs changements ou bien les deux à la fois en permettant aux composants mécaniques d'effectuer leurs tâches avec une grande précision.

Les applications des SMEM incluent plusieurs types de capteurs et d'actionneurs tels que les accéléromètres, les capteurs à pression, les gyroscopes, les valves, les pompes, les réflecteurs/miroirs, les télévisions de projection et qui ne contiennent que de simples composants mécaniques minuscules généralement modélisés comme un système masse-ressort.

Un bon exemple d'un dispositif complètement fonctionnel des SMEM est montré dans la fig. 1.1. qui représente un microaccéléromètre créé par la firme américaine “Norwood”. L'examen rapide de ce dispositif suggère qu'il contient un système similaire à celui d'un circuit intégré de très grande échelle. Toutefois, après un examen plus approfondi du circuit, on note que le dispositif contient non seulement des éléments électroniques mais aussi une microstructure qui se déplace quand une contrainte d'inertie est appliquée. Le matériau constituant la microstructure est le polysilicone. Le dispositif est capable de capter ou de détecter une accélération de $-50g$ à $+50g$ avec une sensibilité de 19 m.V/g , avec $g=9.81 \text{ m/s}^2$. Le voltage d'entrée est de 5 V et celui de sortie est de 0.85 à 2.75 V . il contient également un amplificateur d'inertie qui peut augmenter le voltage de sortie de 0.25 V à 4.75 V , et aussi un circuit qui peut être utilisé pour actionner la microstructure et vérifier ses fonctions.

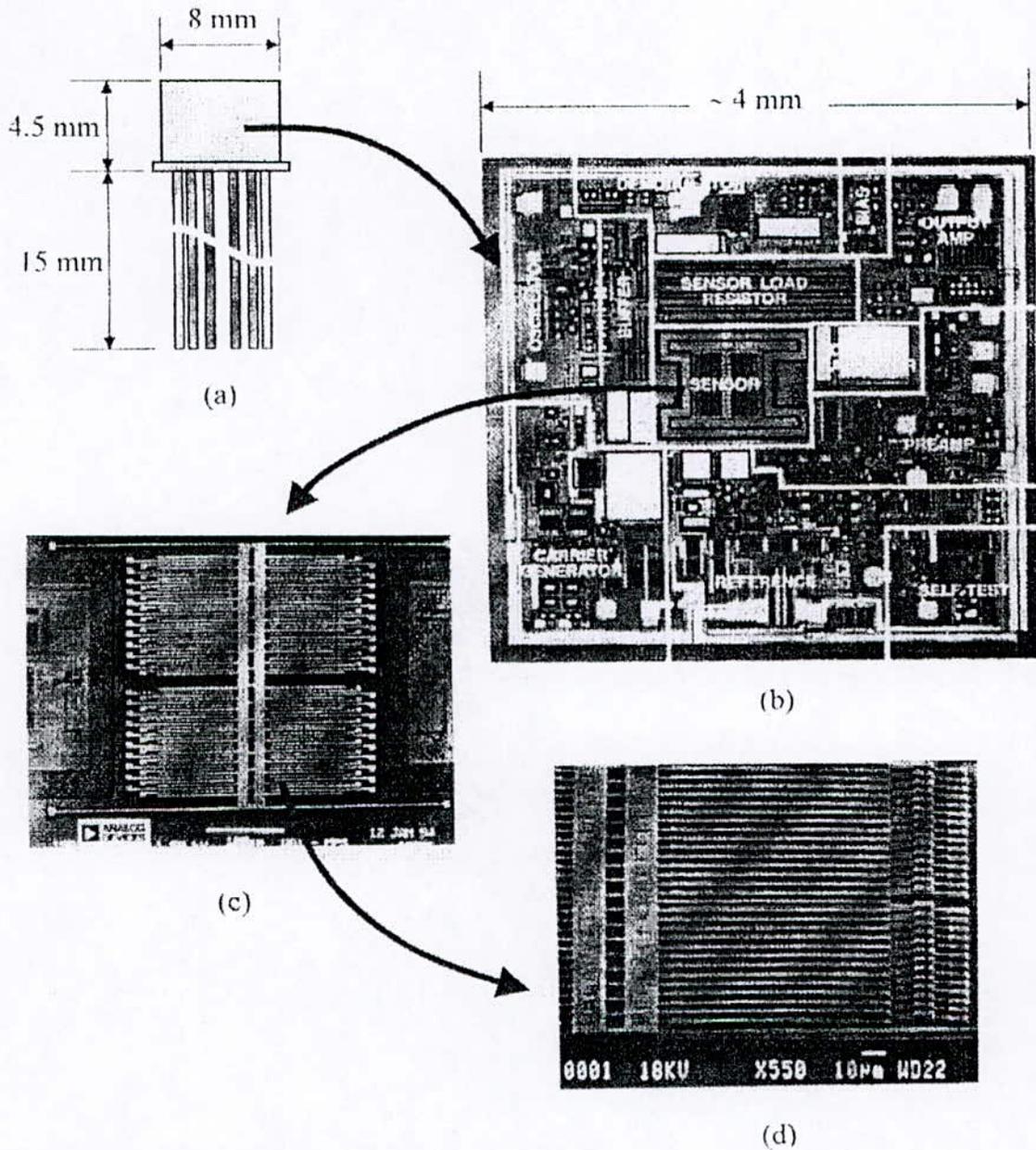


Figure 1.1 : ADXL50, Un accéléromètre commercial type SMEM développé par Analog Devices : (a) Le dispositif SMEM, (b) Vue de dessus du dispositif, (c) Gros plan de la structure mécanique et (d) Gros plan des lamelles capteurs de la structure mécanique.

D'autres dispositifs de SMEM sont illustrés dans les figures 1.2 et 1.3. Ils montrent respectivement des prototypes de capteurs et d'actionneurs en cours de conception.

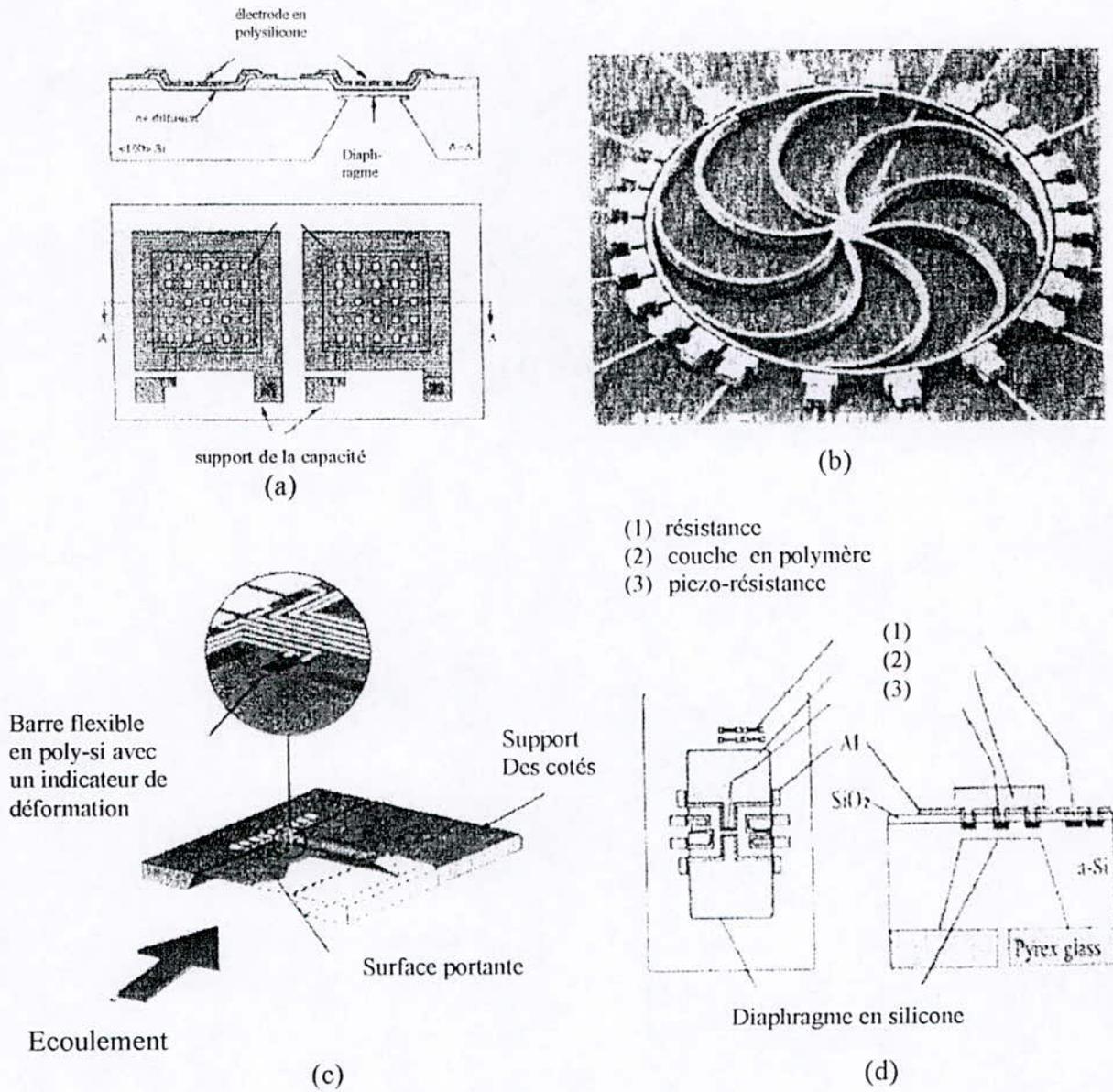
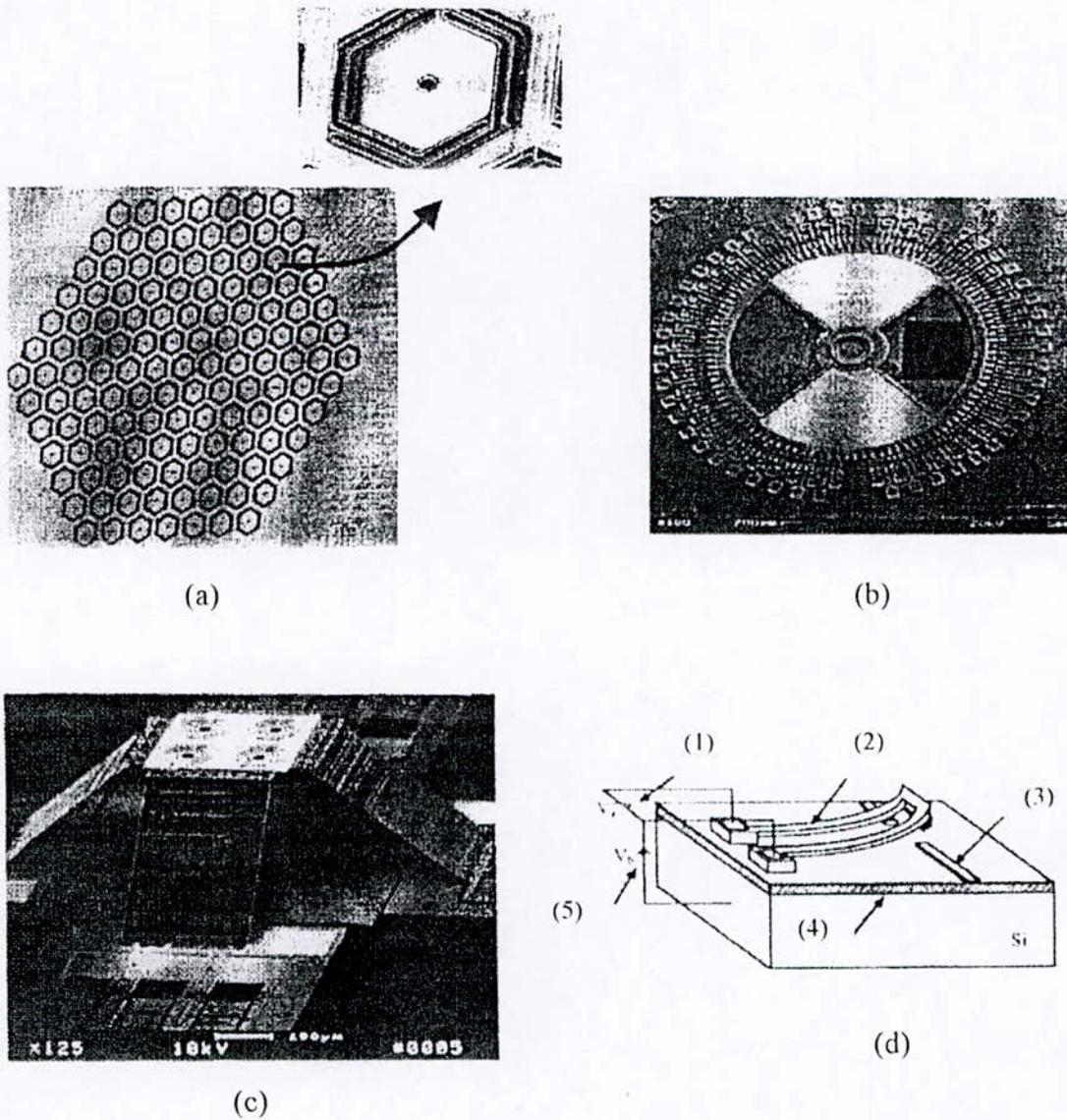


Figure 1.2 : Exemples de dispositifs SMEM de types capteurs (Ils n'est montré que les composant mécaniques) : (a) Capteur de pression, (b) Gyroscope, (c) Capteur d'écoulement de gaz et (d) Capteur d'humidité et de température.



- (1) commande thermique
- (2) barre cantilever $\text{TaSi}_2/\text{SiO}_2$
- (3) ligne de signal
- (4) couche d'isolation
- (5) commande électrostatique

Figure 1.3 : Exemples de dispositifs SMEM de types actionneurs (Ils n'est montrés que les composant mécaniques) : (a) étalage de miroirs, gros plan du miroir montrant les barres de support, (b) Vanne tournante, (c) x, y, z étages pour un scrutateur optique et (d) système de relais.

Ces dispositifs SMEM ont été conçus en utilisant des procédés de fabrication en lot similaires à ceux utilisés pour la fabrication des structures micro-électroniques. On peut en fabriquer plusieurs en même temps et cela quel que soit le dispositif (dispositif à une seule ou plusieurs gaufrettes).

1.1 Motivation et objectif de cette étude

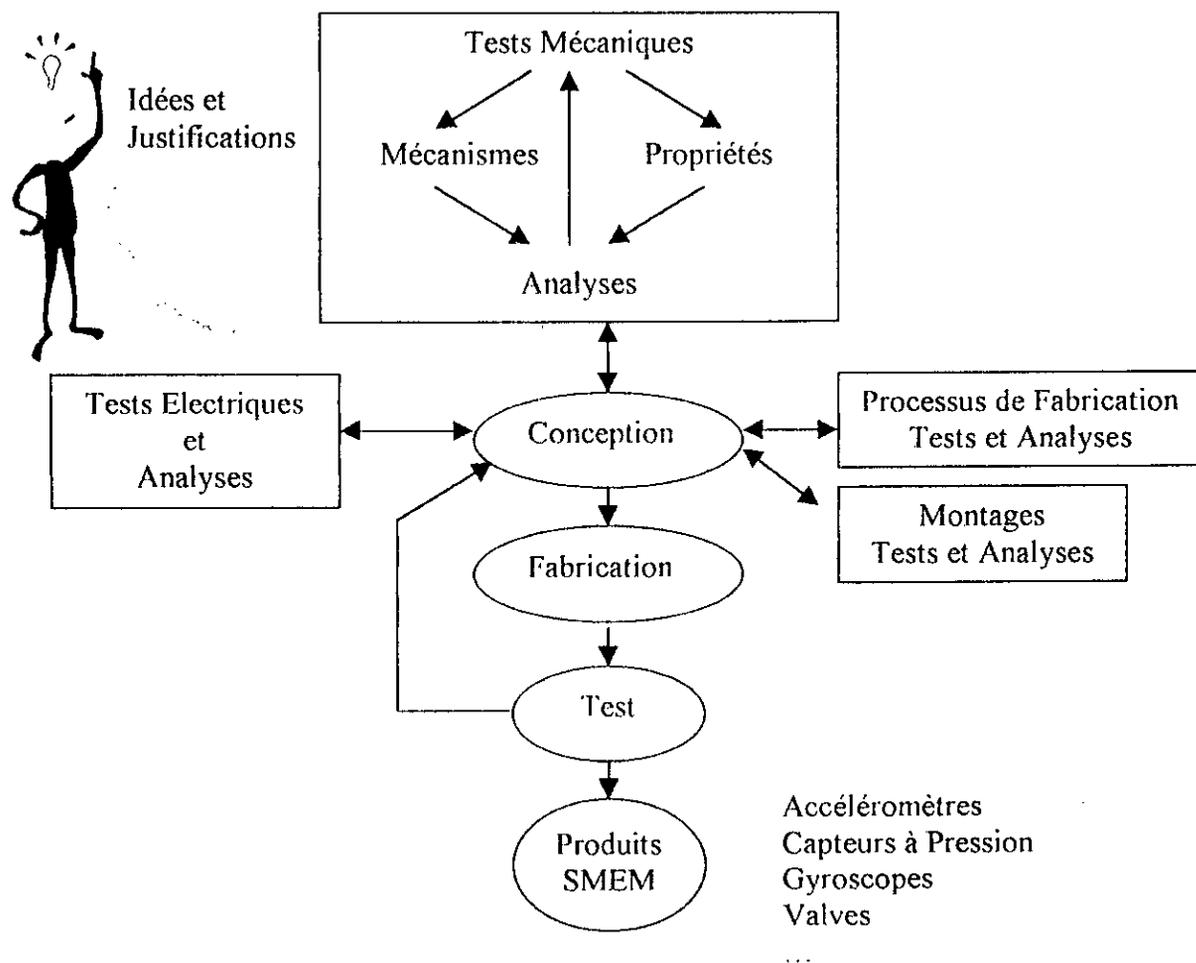


Figure 1.4 : Cycle de développement typique pour la fabrication d'un dispositif SMEM

Plusieurs dispositifs de SMEM partagent un cycle de développement commun. Une simplification de ce cycle est montrée dans la fig. 1.4. Il existe généralement trois principaux processus nécessaires pour progresser d'une idée à un produit actuel SMEM. Les trois processus sont la conception, la fabrication et le test. Le processus "conception" exige une connaissance des propriétés des composants des SMEM ; électroniques et mécaniques. Chaque composant est conçu, analysé et testé séparément, ensuite les résultats sont regroupés par le centre de conception où est analysée l'interaction des deux composants. Le centre de conception requiert également une connaissance des processus de fabrication des composants de chaque dispositif ainsi qu'une connaissance assez suffisante des composants électriques et mécanique, des processus de fabrication, des processus de montage et leurs interactions, et cela pour que la performance désirée du dispositif d'un SMEM soit accomplie d'une manière précise.

La technologie des SMEM est méconnue si ce n'est inconnue en Algérie. Ainsi l'étude faite ici pourra durant les années à suivre se développer à travers d'autres axes de recherches qui seront faites ici à l'École Nationale Polytechnique, non seulement au Département de Génie Mécanique, mais aussi aux Départements d'Electronique, d'Automatique, d'Electrotechnique et de Génie Civil. Le focus de cette étude est dirigé principalement sur le comportement mécanique des composants mécaniques et plus précisément sur le phénomène de rupture des dispositifs de SMEM, car si les techniques de fabrication des SMEM sont le produit de deux décennies de recherche et de développement, en revanche très peu d'informations sont connues à propos du comportement mécanique des matériaux des SMEM comparées à celles de cette technologie assez mature de la fabrication héritée de la micro-électronique.

Cette étude intéresse l'analyse des champs de contraintes et du phénomène de rupture des matériaux composant les SMEM (silicone mono et polycristallin ainsi que l'acrylique). En réalité, les structures SMEM sont généralement le sujet de plusieurs modes de chargement en un espace tridimensionnel, alors que dans cette étude, seulement la déformation bidimensionnelle et le premier mode de rupture sont considérés. Toutefois, l'extension de cette étude aux déformations tridimensionnelles ainsi qu'aux autres modes de rupture est recommandée pour de futures études.

1.2 Lignes directrices

Une revue de la littérature concernant la technologie des SMEM est présentée dans le chapitre 2 contenant une petite introduction historique des SMEM, une description détaillée du silicone et une brève description d'autres matériaux utilisés dans la fabrication des dispositifs de SMEM ainsi que les différentes étapes de l'un des processus de fabrication de ces dispositifs.

Dans le chapitre 3, la méthode des éléments libres de Galerkin est introduite. Il contient une introduction générale à la méthode, les interpolateurs des moindres carrés, le principe variationnel, les équations de discretisation et la procédure numérique de la méthode.

Le chapitre 4 introduit la méthode des discontinuités des déplacements. Il contient la définition de la méthode, la discontinuité de déplacement dans un solide infini et la procédure numérique.

Dans le chapitre 5, le principe de la mécanique de la rupture est présenté. Il contient les principaux concepts de la mécanique de la rupture, l'approche globale de Griffith, les modes fondamentaux de la rupture et l'implémentation des deux méthodes à ce principe est introduit aussi. Dans le chapitre 6, des exemples vont être traités et discutés en les comparant à d'autres résultats déjà obtenus.

Finalement, une conclusion de cette étude est résumée dans le chapitre 7 avec quelques recommandations pour de futures études.

Chapitre 2

Les Systèmes Micro-Électro-Mécaniques

La fabrication de petites machines presque invisibles a été l'un des rêves de l'humanité. De telles machines appelées systèmes micro-électro-mécaniques (SMEM) sont composées d'éléments mécaniques et électriques. Tandis que les dispositifs électriques tels que les capteurs et les circuits électroniques étaient bien établis techniquement par le fait de la technologie avancée des microcircuits, l'étude des dispositifs mécaniques tels que les micro-mécanismes et les micro-actionneurs n'a commencé par contre que durant cette dernière décennie, juste avec le début de l'industrie des SMEM.

Ainsi la technologie des micro-machines nous a permis de fabriquer des micro-actionneurs et des parties micro-mécaniques qui associées aux composants électriques produisent des dispositifs SMEM. Toutefois, les petites dimensions des composants mécaniques de ces systèmes ont toujours représenté une caractéristique essentielle de cette technologie de pointe. Cette dernière a deux autres caractéristiques, qui, associées à la miniaturisation regroupent toutes les conditions nécessaires à la fabrication des SMEM. Ces trois conditions, généralement appelées les 3 M sont :

- La miniaturisation
- La multiplicité
- La micro-électronique

La miniaturisation est considérée comme la caractéristique la plus importante. Toutefois, la simple miniaturisation des machines macroscopiques n'est pas possible à cause des effets produits par la diminution des dimensions de ces machines. Donc, il est essentiel d'étudier les propriétés de ces systèmes à l'échelle microscopique.

Comme un essaim de fourmis transportant un grand morceau de nourriture, le travail en groupe de plusieurs micro-éléments peut remplir une grande tâche, même si un seul dispositif ne peut produire qu'une petite force ou effectuer un simple mouvement. La multiplicité est alors considérée comme la clé des micro-systèmes réussis.

L'intégration de la micro-électronique est essentielle pour le déplacement des micro-éléments et les composants mécaniques, et cela pour qu'ils puissent coopérer avec les autres éléments dans le but de remplir une tâche bien précise.

Ainsi, des issues technologiques fondamentales doivent être considérées et cela pour réunir toutes les conditions nécessaires à la fabrication de dispositifs SMEM avec les caractéristiques mentionnées ci-dessus. Ces issues fondamentales sont les matériaux, les processus de fabrication et les dispositifs (composants mécaniques et électriques).

2.1 Matériaux de fabrication des systèmes micro-électro-mécaniques

2.1.1 Le silicium

Le matériau le plus généralement utilisé en micro-électronique et en SMEM est le silicium. Le silicium (Si) appartient à la classe IVA du tableau périodique et est considéré comme un métalloïde/semi-conducteur à cause de ces propriétés qui sont entre le métal et le non-métal. Il a un nombre atomique égal à 14 et une masse atomique égale à 28,0855. Ses voisins dans le tableau périodique sont le bore (B, 5, IIIA, métalloïde, 10,811 pour le symbole, le nombre atomique, le groupe, le type et la masse atomique respectivement), le carbone (C, 6, IVA, non-métal, 12,011), le nitrogène (N, 7, VA, non-métal, 14,0067), l'aluminium (Al, 13, IIIA, métal, 26,9815), le phosphore (P, 15, VA, non-métal, 30,9738), le gallium (Ga, 31, IIIA, métal, 69,723), le germanium (Ge, 32, IVA, métalloïde, 72,61) et l'arsenic (As, 33, VA, métalloïde, 74,9216). Le silicium a une structure diamant dans un système cristallin cubique comme le montre la fig. 2.1. La structure diamant est caractérisée par le fait que chaque atome est directement lié à quatre autres atomes disposés autour de lui, aux sommets d'un tétraèdre dont il occupe le centre la distance entre cet atome et ces atomes aux sommets est de $d=2.35 \text{ \AA} = 2.35 \times 10^{-10} \text{ m}$. La distance entre les atomes des sommets est quant à elle égale à $a=5.42 \text{ \AA}$.

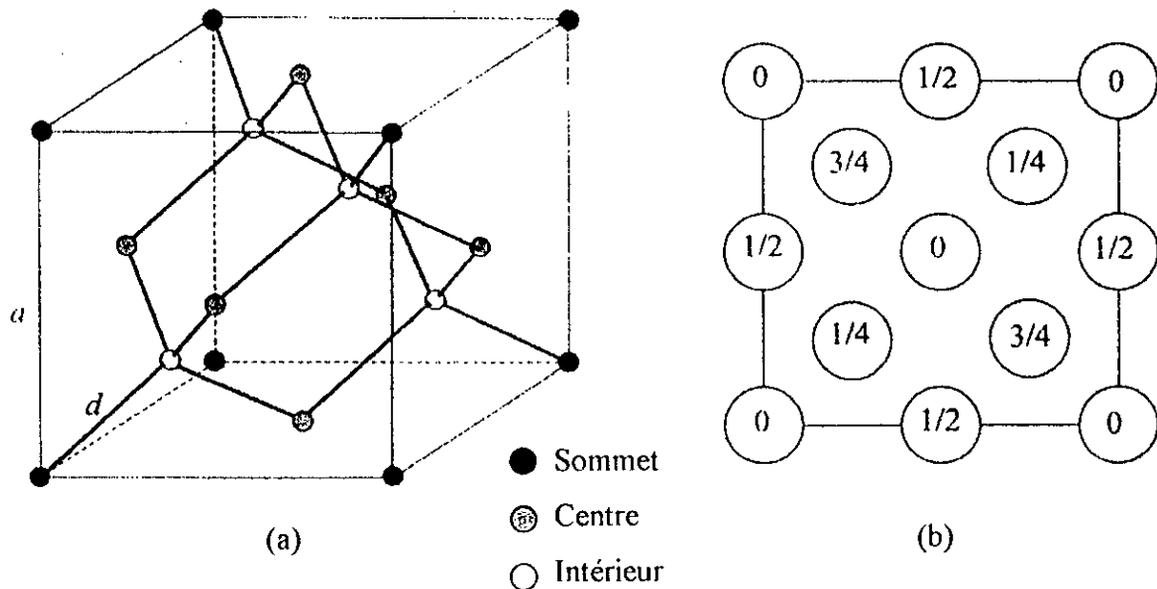


Figure 2.1 : Système cristallin du silicium : Structure diamant dans un système cristallin cubique. (a) Liaisons covalentes en trait gras et (b) Localisation des atomes par rapport au plan de base du treillis cubique.

Les distances entre les plans équivalents sont égales à $5,42 \text{ \AA}$ pour les plans $\{100\}$, $3,84 \text{ \AA}$ pour les plans $\{110\}$, et $3,13 \text{ \AA}$ pour le plan $\{111\}$. Le rapport de densités atomiques dans les plans principaux est égal à $D_{\{100\}} : D_{\{110\}} : D_{\{111\}} = 1 : 1,414 : 1,155$. Les atomes dans ces plans ont un rapport de liaison égal à $2 : 1 : 1$ respectivement. On obtient alors le rapport des densités de liaison qui sera égal à $B_{\{100\}} : B_{\{110\}} : B_{\{111\}} = 1 : 0,707 : 0,707$. La dissolution du cristal et le décapage anisotrope sont relatifs à la densité de liaison, donc ils diminuent dans la direction $\langle 111 \rangle$. Les autres propriétés du silicium sont dictées dans le tableau 2.1. la plus part des valeurs sont obtenues en utilisant des structures test en silicium et dans plusieurs cas, la dépendance directionnelle n'est pas notée.

Tableau 2.1 : Propriétés du Silicone

Propriétés	Valeur	Unité	Temp. (°C)	Ref.
Densité	2,33	Gm/cm ³	25	93
Point de Fusion	1412	°C		93
Point d'Ébullition	3145	°C		93
Température Critique	4920	°C		93
Pression Critique	1450	atm		93
Conductivité Thermique	2,26	W/cm/°C	-269	93
	8,84		-273	
	1,68		0	
	0,762		227	
Chaleur Spécifique	0,171	Cal/gm/°C	27	93
	0,1840		100	
	0,2215		1300	
Dureté	7	(Mohs)		93
	1000	(Vickers)		
	250	(Brinell)		
Constantes Elastiques	C ₁₁	GPa	27	79,88,93
	C ₁₂			
	C ₄₄			
	E _{<100>}			
	E _{<110>}			
	E _{<111>}			
	Résistance			
$\sigma_{it<100>}$ (A=2-8*10 ⁻¹⁰ m ²)	1-5	GPa		79,88,93
$\sigma_{u<100>}$ (A=2*10 ⁻¹⁰ -7*10 ⁻⁴ m ²)	0,4-3			
Facteur d'Intensité de Contraintes Critique		Mpa m ^{0.5}		27,79,88,93
	K _{Ic{100}}			
	K _{Ic{110}}			
	K _{Ic{111}}			

Il existe deux sortes de silicone, le silicone monocristallin et le silicone polycristallin la différence entre les deux consiste dans le fait que ce dernier est en forme polycristalline, i.e. comme un ensemble de grains multiples avec différentes orientations cristallines. La grandeur des grains du silicone polycristallin utilisé dans les dispositifs des SMEM est généralement de 30-50 nm dépendant des paramètres du procédé. Dans les applications des SMEM, le polysilicone est utilisé sous forme de fins ou larges films. Ces derniers sont obtenus par condensation de la vapeur du silicone.

2.1.2 Autres matériaux

Même si le silicone est le matériau le plus couramment utilisé, plusieurs autres matériaux sont utilisés pour fabriquer les dispositifs SMEM. Ils renferment le nitrite du silicone qui est un isolant, le dioxyde de silicone qui est diélectrique, le carbure de silicone qui est utilisé comme un matériau structurel à haute température.

2.2 Processus de fabrication des systèmes micro-électro-mécaniques

SCREAM

SCREAM qui veut dire en anglais Single-Cristal Reactive-Etching and Metalisation et en français Décapage réactif et métallisation d'un monocristallin est une série d'étapes développée à l'Université de Cornell (Ithaca, New York, USA) utilisé pour fabriquer des dispositifs micro-mécaniques. Cette série d'étapes commence avec seulement une gaufrette en silicone. Le silicone monocristallin, l'un des matériaux les plus purs au monde est maintenant considéré comme le matériau n°1 dans l'industrie des semi-conducteurs pour la fabrication des circuits intégrés. C'est pour cette raison que des efforts formidables ont été fournis pour le développement des outils de traitement du silicone pour la fabrication des dispositifs incluant le SCREAM qui est principalement basé sur la fabrication des SMEM. Une brève description concernant les outils de fabrication des structures SCREAM est développée dans la section 2.2.1.

2.2.1 D'un point de vue structurel

Les structures SCREAM sont composées principalement d'un arrangement plan de barres. Comme montré dans les figures 2.2-2.5, des structures élaborées peuvent être sculptées à partir de silicium monocristallin. Les barres sont des structures composites dont le substrat est en silicium monocristallin. Comme illustré dans la figure 2.6, les couches qui revêtent le substrat en silicium sont composées d'une couche interne de dioxyde de silicium SiO_2 et une couche externe d'aluminium. Pour tous les contacts électriques, la couche d'aluminium joue le rôle des surfaces conductibles pour les actionneurs électrostatiques.

Sans le revêtement, le substrat de silicium monocristallin des structures est totalement libre de toutes contraintes. Toutefois, les couches d'oxyde de silicium et d'aluminium introduisent des contraintes intrinsèques et thermiques durant la fabrication. Étant un processus à basse température, i.e. moins de 300°C , les contraintes thermiques peuvent être généralement négligées. Pour les structures présentées avec composants typiquement Cantilever de $500\mu\text{m}$ de long, les contraintes intrinsèques et thermiques n'affectent pas beaucoup la conception. Pour des structures plus longues ou d'épaisseurs de moins de $10\mu\text{m}$, quelques précautions de fabrication, qui seront traitées ultérieurement doivent être retenues, [1, 73, 84].

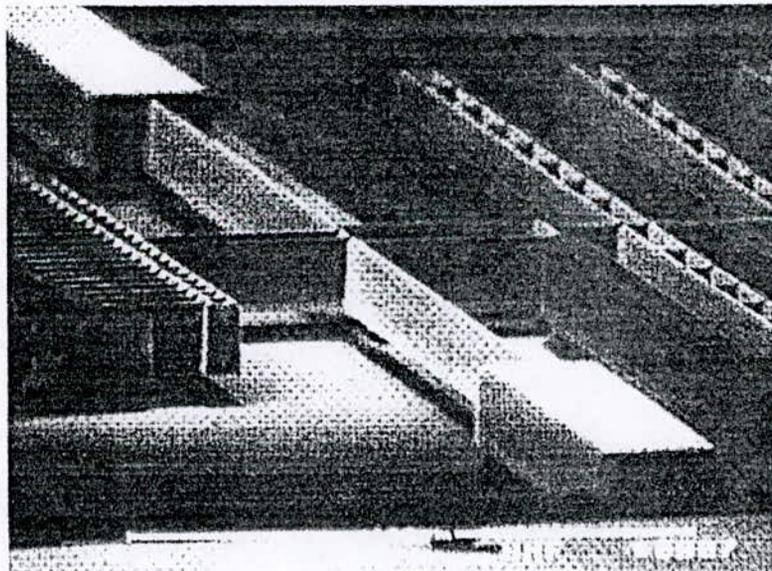


Figure 2.2 : De gauche à droite, ce système électromécanique montre un actionneur composé de barres fixées des deux côtés utilisées comme un ressort.

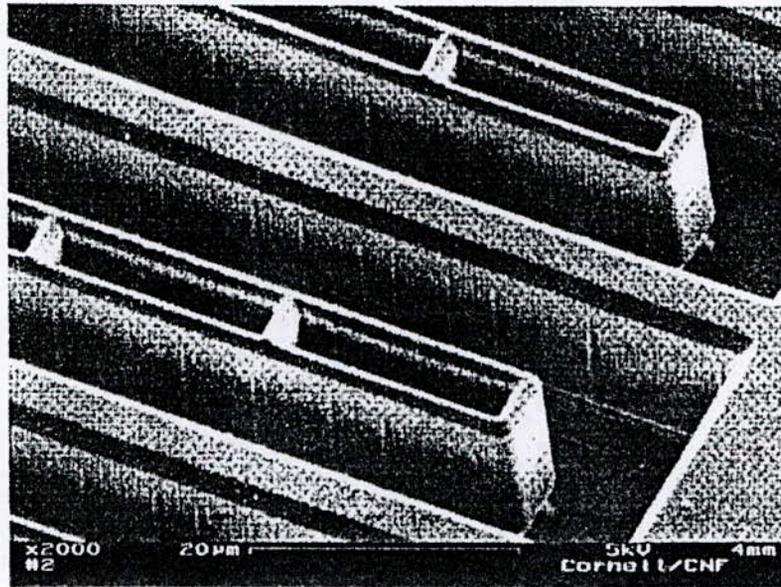


Figure 2.3 : Gros plan d'un actionneur à plaques parallèles.

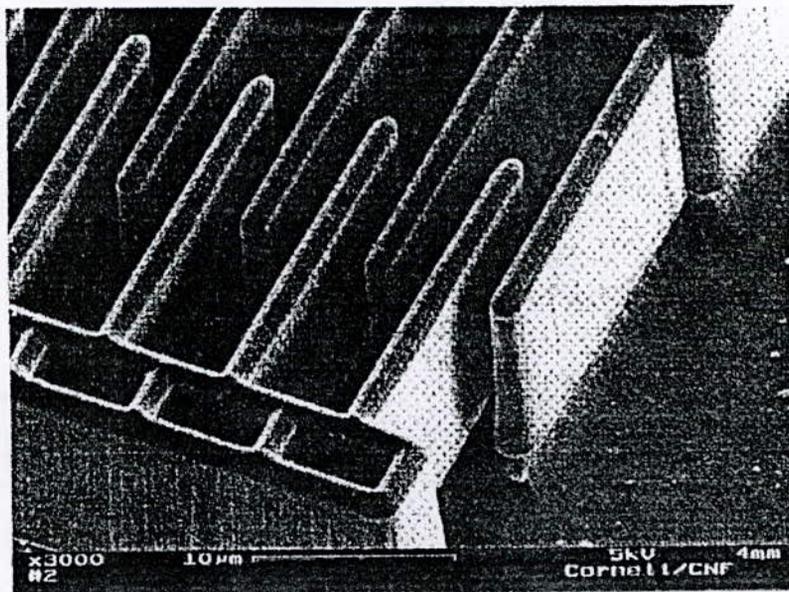


Figure 2.4 : Gros plan d'un actionneur montrant un vide étroit entre des barres adjacentes

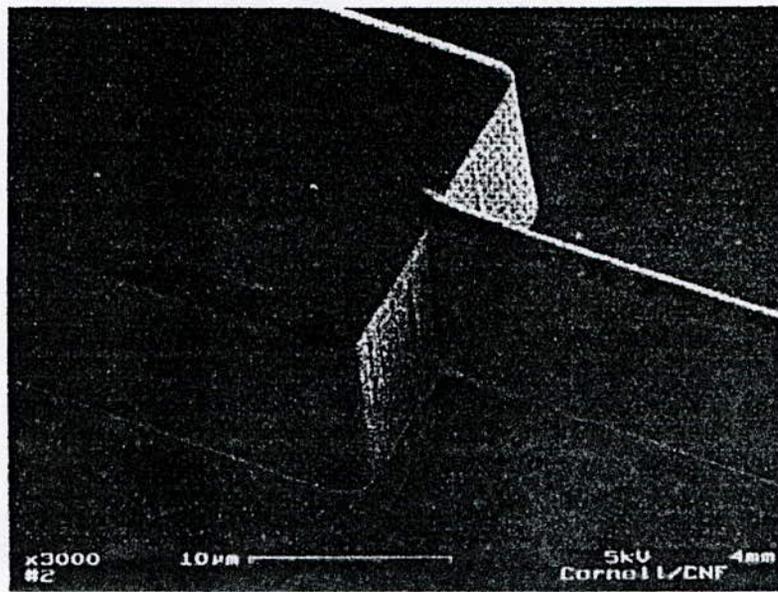


Figure 2.5 : Support fixe montrant la connexion entre de larges sections et de fines barres

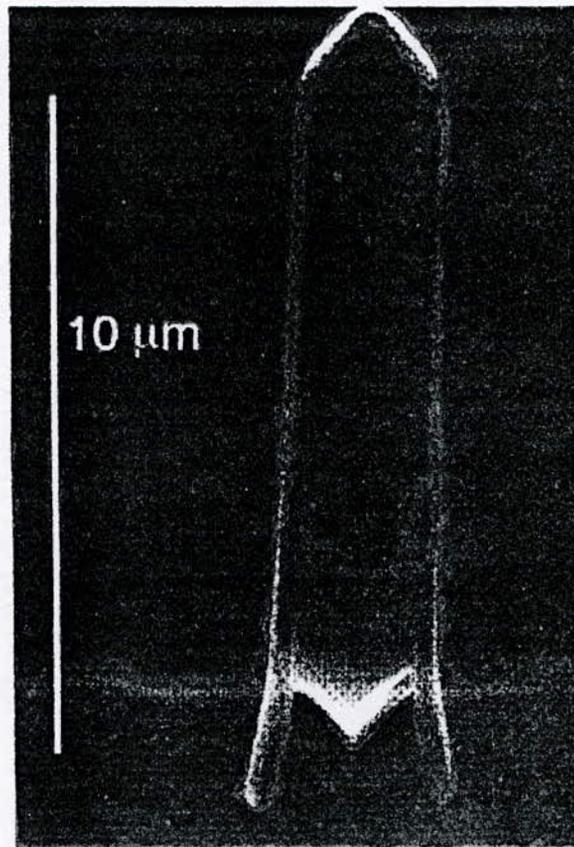


Figure 2.6 : Section droite d'une barre SCREAM typique.

2.2.2 Brève Description du Processus

L'étude du processus SCREAM a pour dessein de mieux faire connaître les techniques de fabrication des structures SMEM, de donner une idée des mécanismes de fabrication de ces structures et les limites qu'il impose (pour une description plus détaillée voir ref. [73]).

Le processus SCREAM commence avec une gaufrette en silicone. Dans la première étape, le dioxyde de silicone est déposé sur la surface de la gaufrette utilisant un système de déposition chimique intensifiée à vapeur de plasma (en anglais PECVD system, ce qui veut dire Plasma Enhanced Chemical Vapor Deposition). Eventuellement cette couche sert comme un masque décapant pour protéger le silicone qui est en dessous. L'épaisseur de la couche, montré dans la figure 2.7.a est de l'ordre de 1 à $2,5\mu m$.

La couche du photorésiste "OCG 895i, 16,5cs" est déposée sur la gaufrette. Le polymère peut s'étaler même sur une épaisseur de $1,5\mu m$. Des régions du photorésiste sont exposées aux rayons U.V et s'altèrent chimiquement. Ces régions altérées se dissolvent quand elles sont placées dans une solution développée [73] ; tandis que les régions non-exposées ne le sont pas. Après cela, le photorésiste est exposé à l'image du dispositif micro-mécanique. Cela est accompli à l'aide d'un masque à projection. Une source de lumière le polit à travers un masque de chrome avec un modèle du dispositif micro-mécanique à l'intérieur. L'image du dispositif passe à travers un système de loupes de réduction 10x et sur la gaufrette. Puisque la gaufrette est de 3 pouces de diamètre et les dispositifs micro-mécaniques de surface de l'ordre de $5 \times 5 \text{ mm}^2$, il y a donc une place assez spacieuse pour répéter le modèle sur la même gaufrette en une configuration similaire.

Une solution développée [73] dissout les régions exposées à la lumière. Il en résulte une structure montrée sur la figure 2.7.b. A ce niveau du processus, le modèle de la structure est complètement défini.

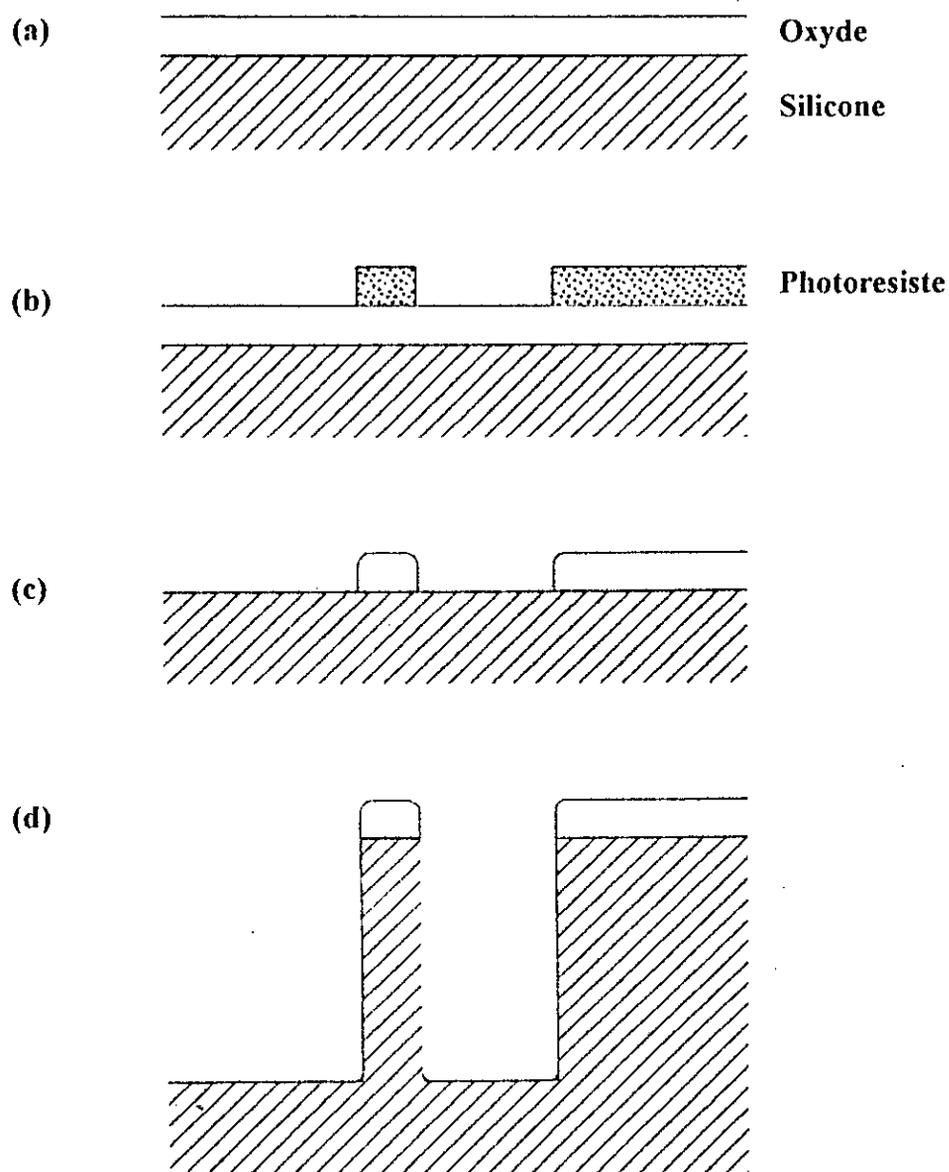


Figure 2.7 : Processus SCREAM : (a) Déposition du masque d'oxyde PECVD, (b) Déposition du photoresiste, (c) Transfert du modèle du photoresiste à l'oxyde, (d) Décapage pour définir la structure SCREAM.

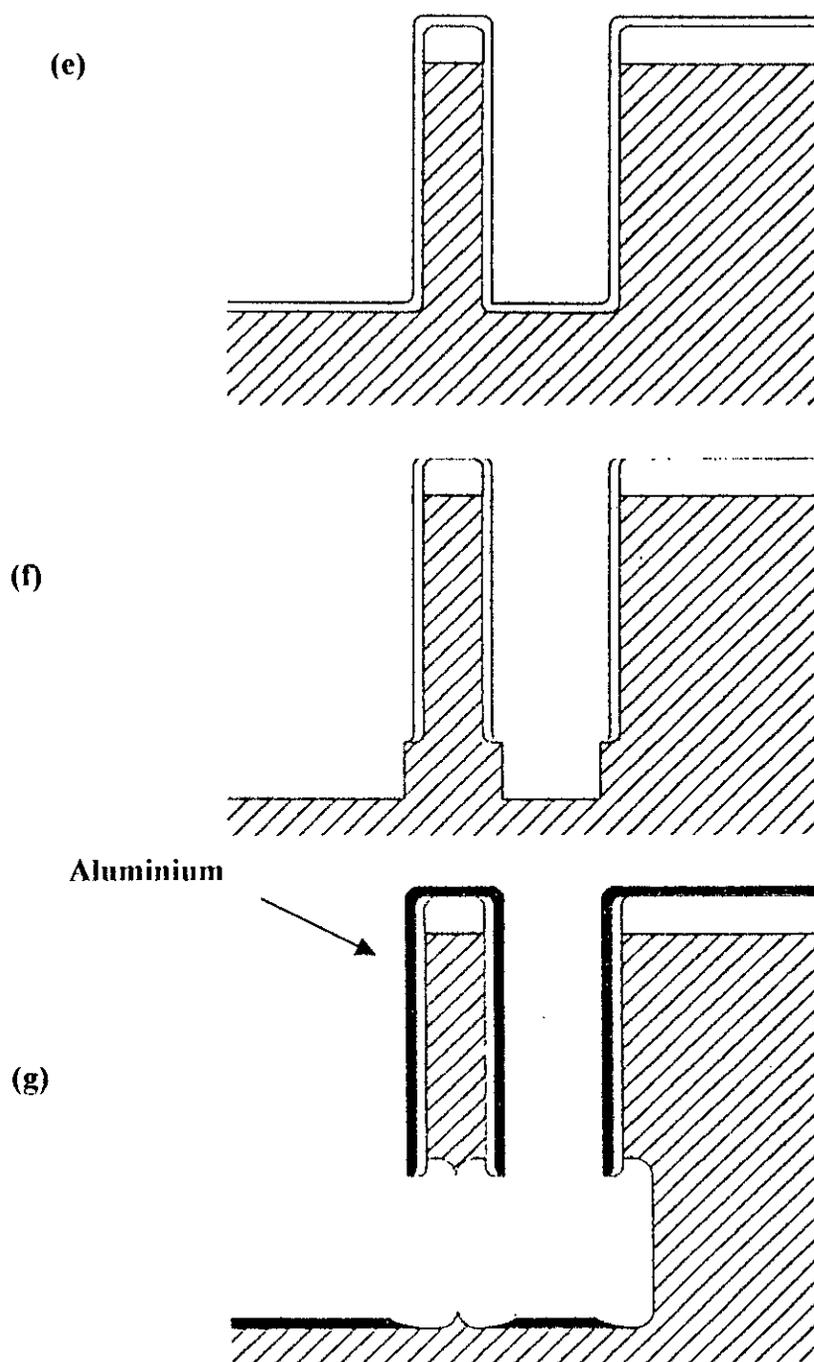


Figure 2.8 : Processus SCREAM (continuation), (e) Oxydation des côtés en utilisant l'oxyde PECVD, (f) Evacuation des résidus suivie d'un second décapage pour augmenter la distance entre les barres et le fond, (g) décapage suivi par la métallisation

Pour transférer le modèle photoresiste dans le dioxyde de silicone, on utilise un décapant à ions "MRC MODEL 720". Utilisant le CHF_3 comme gaz décapant, le dioxyde de silicone est décapé plus rapidement que le photoresiste et le silicone exposé. Après transfert du modèle vers l'oxyde, le photoresiste est dégarni en utilisant un plasma O_2 dans un décapant réactif à ions. Comme montré sur la figure 2.7.c, le processus de décapage du dioxyde essentiellement vertical.

Il est à noter que l'oxyde forme un masque pour le silicone exactement comme fait le photoresiste pour l'oxyde. Dans un décapant réactif à ions "Plasma Therm. PK-1250" utilisant le Cl_2 et le BCL_3 , le model est transféré au silicone comme le montre la figure 2.7.d.

Une autre couche d'oxyde, moins épaisse que la première est déposée utilisant comme pour la première couche le système PECVD. Cette couche protège les parois latérales du silicone durant les étapes de décapage restantes. Toutefois, on note dans la figure 2.8 que le silicone n'est plus accessible. L'étape suivante, un décapant réactif à ions "Plasma Therm. 72 RIE" utilisant le CHF_3 change la forme par un décapage vertical du dioxyde de silicone. Les parois latérales restent intactes à cause de la nature verticale prédominante du décapant.

Pour augmenter la distance entre la structure barre et le niveau du silicone, un second décapage réactif à ions utilisant le Cl_2 est effectué. Ainsi, comme indiqué sur la figure 2.8.f, pour former une barre, il suffit de tailler le silicone sur les côtés de la barre. Cette étape exige l'utilisation d'un décapant réactif à ions "Plasma Therm. 72 RIE" utilisant le SF_6 (isotrope). Après cette étape, il en résulte une structure barre comme montrée sur la figure 2.8.g. On remarque des rebords d'oxyde qui se penchent sur les deux cotés de la barre. Ces rebords sont très importants pour l'isolation électrique entre les structures adjacentes.

Dans la dernière étape, une couche d'aluminium est postillonnée sur la surface de la gaufrette utilisant un système de déposition "CVC AST-601". Cette couche couvre toutes les surfaces transversales et latérales. Des régions de la barre masquées par les rebords de l'oxyde ne sont pas recouvertes par la couche d'aluminium. Cette cassure dans la couverture d'aluminium fournit l'isolation électrique pour chaque partie du silicone couverte d'aluminium et d'oxyde.

2.2.3 Aspects techniques et références pour le processus SCREAM

Chaque application des SMEM a ses propres exigences. Il existe donc un nombre considérable de variations. Dans cette section sont fournies des références pour aider le lecteur à comprendre les processus relatifs au SCREAM.

Généralement, les barres fabriquées par le processus SCREAM sont de 1 à 2 μm de largeur et de 6 à 20 μm de longueur. Utilisant des techniques telles que la lithographie, des barres de moins de 1 μm de largeur et de plus de 100 μm de longueur ont été construites [1, 7, 73].

L'isolation électrique des structures SCREAM n'est pas seulement confinée à l'utilisation des couches isolantes d'aluminium servant comme couche externe des structures. Il existe d'autres versions de processus SCREAM à haute température qui isolent électriquement les barres de silicone par l'oxydation des segments des barres en silicone [73].

Quand les structures commencent à dépasser 1 mm de long, On doit prendre en compte dans la conception les étapes du processus où la structure est soumise aux contraintes thermiques et intrinsèques présentes dans les films qui couvre la structure [1, 7, 73, 84].

Le silicone monocristallin n'est pas le seul type de substance utilisé dans les processus SCREAM. Le Gallium Arsénite a aussi était utilisé [73].

2.2.4 Autres techniques de fabrication des SMEM

Les SMEM ne sont pas toujours fabriqués en utilisant le processus SCREAM. D'autres processus tels que le microusinage de surfaces polycristallines [7] ; le processus développé par la LIGA [95] ; et le processus de gaufrettes dissoutes [1, 7] sont d'autres exemples utilisés pour la fabrication des SMEM. Ces méthodes peuvent souvent être définies comme un microusinage en vrac ou un microusinage des surfaces. Dans le microusinage en vrac, le substrat est utilisé comme le matériau structurel principal (le processus SCREAM appartient à cette catégorie), alors que dans le microusinage des surfaces, les matériaux déposés sont utilisés comme matériau structurel principal.

2.3 Caractéristiques mécaniques des structures et des matériaux des SMEM

Différant des propriétés électriques, les propriétés mécaniques des matériaux et structures des SMEM sont presque inconnues et leur connaissance est très récente. Toutefois, des recherches pour caractériser ces propriétés ont été développées, les plus connues ont été menées par Orgawa [79], Tai [94] et Sharpe [88, 89]. Dans cette section, des méthodes de tests micro-mécaniques dirigées pour mesurer les propriétés mécaniques des structures et matériaux des SMEM sont passées en revue.

2.3.1 Contraintes résiduelles

Dans certains processus de fabrication, il peut y avoir un réchauffement de quelques centaines de degrés celsius ou plus, de même qu'un refroidissement jusqu'à la température ambiante. A cause des coefficients d'expansion thermique des différents matériaux composant la structure, il peut y avoir des contraintes résiduelles considérables dans les composants des structures SMEM qui peuvent créer des problèmes. Ainsi, elles peuvent être à l'origine d'une délamination du film ou bien une rupture prématurée des structures. Des efforts dans la fabrication des structures SMEM ont été fournis pour réduire ces contraintes. Les contraintes résiduelles sont généralement mesurées en utilisant l'équation de Stoney couplée aux mesures de la courbure du système film/substrat[84]. L'équation de Stoney est donnée par $\sigma_f^0 = \frac{E_s}{6(1-\nu_s)} \frac{t_s^2}{t_f} \frac{2f}{L^2}$, où σ_f^0 est la contrainte biaxiale initiale sur le film, E_s et ν_s sont le module de Young et le coefficient de poisson du substrat, t_s et t_f les épaisseurs du substrat et du film et f la déflexion de la barre à une distance L à partir du bout de la barre.

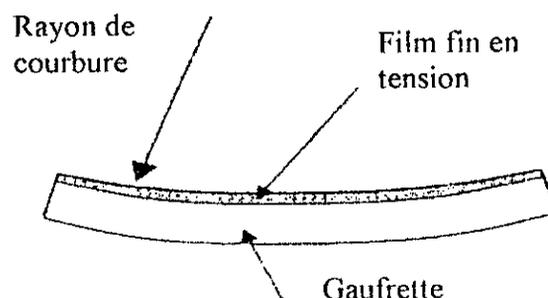
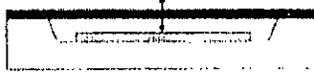
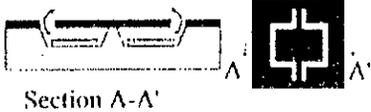


Figure 2.9 : Mesure des contraintes résiduelles par la méthode de la courbure de la gaufrette.

2.3.2 Module de Young

Différents tests qui peuvent être utilisés pour extraire le module de Young des matériaux des SMEM dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2 : Configuration des tests pour extraire le module de Young

Structure Test	Méthode	Notes
<p>Barre Cantilever</p> 	<p>Statique Excitation Electrique Résonance</p>	<p>Réfs. : Peterson (1982), 93[†] (+) Test de niveau de la gaufrette (-) Barres bouclées (-) Support flexible</p>
<p>Barre Double Cantilever</p> 	<p>Statique Excitation Electrique Résonance</p>	<p>Réfs. : 94 (+) Test de niveau de la gaufrette (-) Contrainte/Déformation résiduelle (-) Support flexible (-) Equation compliquée</p>
<p>Miroir en Torsion</p> 	<p>Statique Résonance</p>	<p>Réfs. : Petersen (1982), 93[†] (+) Test de niveau de la gaufrette (-) Amortissement (-) Equation compliquée</p>
<p>Membrane</p> 	<p>Statique Excitation Electrique</p>	<p>Réfs. : Allen, et al. (1987), Artz et al (1992), 93[†] (+) Test de niveau de la gaufrette (-) Support flexible (-) Equation compliquée</p>
<p>Barre en Traction</p> 	<p>Statique</p>	<p>Réfs. : Ding et al. (1990), Read (1996), 93[†], 88 (+) Contrainte résiduelle réduite (+) Equation simple (+) moins de paramètres mes-urés, donc moins d'incertitude</p>



Gaufrette en Silicone



Electrode



Matériau testé

(+) Avantage

(-) Inconvénient

Les résultats des premières tentatives (de 1988 à 1990) ont créé plus de questions que de réponses à propos du module de Young du silicone monocristallin à l'échelle des dispositifs SMEM (échelle microscopique). Par exemple, comme le montre le tableau 2.3, le module de Young reporté pour un silicone monocristallin dans la direction $\langle 110 \rangle$ varie de 120 à 220 GPa. Ceci est un contraste total avec les résultats des tests effectués sur un volume macroscopique du silicone monocristallin, comme montré dans le tableau 2.4 qui diffèrent d'un maximum de 2%. Donc, en se basant sur ces résultats reportés, le module de Young pour le silicone monocristallin à l'échelle des SMEM n'est pas bien assimilé.

Tableau 2.3 : Modules de Young du silicone monocristallin mesuré utilisant des structures test de l'échelle des SMEM. Ils sont comparés avec les résultats dans la case hachurée qui ont été mesurés à partir d'une structure test macroscopique.

$E_{\langle 100 \rangle}$ (Gpa)	$E_{\langle 110 \rangle}$ (Gpa)	$E_{\langle 111 \rangle}$ (Gpa)	Méthode	Référence
	177		Statique/Barre Cantilever	Johanson, et al. (1988), 93 [†]
	163		Statique/Barre Cantilever	Weih, et al. (1988), 93 [†]
	220		Statique/Barre Double Cantilever	Najafi et Suzuki (1989), 93 [†]
	140		Statique/Barre Cantilever	41
	120		Statique/test en traction	Ding et Schweitz (1990), 93 [†]
130,2	168,9	187,5	Ultrasonique sur un Volume Macroscopique	Mason (1958), 93 [†]

Tableau 2.4 : Constantes élastiques du silicone monocristallin mesuré à partir de structures test macroscopiques.

C_{11} (Gpa)	C_{12} (Gpa)	C_{44} (Gpa)	Références
167,4	65,23	79,57	McSkimin, et al. (1951), 93 [†]
165,7	63,9	79,56	Mason, 93 [†]
167,5	65,0	80,1	Hobstetter, 93 [†]
165,8	63,9	79,6	McSkimin et Andreatch, 93 [†]

† : les valeurs ont été tirées de la référence [93] qui à son tour les avait tirées des références citées qui n'était pas disponibles durant cette étude.

Les recherches qui ont été faites pour caractériser mécaniquement ces microstructures sont peu abondantes. Donc, si l'on observe bien, il n'est pas facile d'établir le pourquoi de ces différents résultats. Toutefois, il semble que le test de ces microstructures n'est pas fiable. Une partie de ces difficultés inclut la manipulation, l'alignement et la prise de la microstructure ainsi que la friction et le calibrage des appareils de mesure. Il a été établi et suggéré que les incertitudes de mesure et le calcul incorrect des déplacements sont les causes probables des résultats inconsistants.

L'erreur la plus notable est l'assomption d'un support rigide pour des modèles mathématiques de cantilever et de membranes où les supports de ces structures ne sont, en fait que peu fiables. Une petite déformation du support peut introduire un déplacement additionnel. Comme résultats, les propriétés dérivées deviennent incorrectes. En supposant que le modèle analytique est correct, il peut se produire des incertitudes de mesure qui ont besoin d'être analysées avec beaucoup d'attention.

Chapitre 3

La Méthode des Éléments Libres de Galerkin

La modélisation des formes arbitraires et la propagation des fissures est un élément essentiel dans la prédiction de la durée de vie des composants mécaniques. Toutefois, en dépit de l'importance de ce problème, il est resté l'un des problèmes insolubles du calcul numérique lorsqu'il est vu dans son contexte général. Il n'existe aucune méthode disponible aujourd'hui qui peut modéliser une propagation arbitraire d'une fissure dans une large variété de situations exigée dans l'analyse en engineering telle que les matériaux non-linéaires, les matériaux anisotropes et les problèmes avec forces thermiques et contraintes résiduelles.

Durant la précédente décennie, deux approches ont été développées pour résoudre les problèmes de propagation des fissures :

1. La méthode des éléments finis (MEF).
2. La méthode des éléments aux frontières.

Chacune des deux méthodes a des inconvénients substantiels qui excluent son application à plusieurs problèmes d'engineering très importants.

L'inconvénient majeur de la méthode des éléments finis est qu'elle entraîne des efforts considérables d'où peuvent découler des erreurs substantielles. Il est presque impossible de mailler automatiquement des éléments finis pour une propagation arbitraire d'une fissure. C'est pour cela que la plus part des méthodes développées jusqu'à maintenant entraînent une analyse interactive où l'ingénieur guide ou refait un maillage après chaque étape. Plus encore, le remaillage exige l'interpellation des variables dépendantes telles que les déplacements, les déformations et les contraintes à une nouvelle série de nœuds et de points quadratiques. C'est pour cela que des techniques variées de projection sont utilisées, mais elles engendrent également des erreurs additionnelles dans la solution du problème.

La méthode des éléments aux frontières évite une large partie du maillage qui est associée à la méthode des éléments finis car seulement la surface de la fissure ou, en deux dimensions la ligne représentant la fissure a besoin d'être maillée. Toute fois, la méthode des éléments aux frontières exige une fonction de Green pour les équations aux dérivées partielles qui en découlent bien qu'elle soit un peu limitée dans le domaine des problèmes qu'elle peut traiter. La plus part des problèmes traités par cette méthode sont pour des matériaux élastiques isotropes en bi et en tridimensionnel. Même avec cette implémentation, la présence des fissures cause des difficultés substantielles, d'où la création de techniques spécialisées telles que la subdivision du domaine et les méthodes hypersingulaires qui doivent être utilisées pour résoudre ce genre de problèmes.

Dans des articles récents, Belytschko et al [16 à 24] ont décrit une nouvelle méthode pour la solution des problèmes avec des géométries arbitraires. Cette méthode est appelée la méthode des éléments libre de Galerkin (MELG) (en anglais *element free Galerkin method*). Ce procédé numérique est similaire à celui des éléments finis sauf que celui ci n'exige aucun maillage. La MELG utilise la méthode des moindres carrés (MMC) pour approximer les variables dépendantes. Les interpolateurs de la MMC utilisent un support ou un domaine d'influence pour définir la connectivité entre les points au lieu d'un maillage comme utilisé en MEF. La connectivité devient une liste des points les plus proches pour un point donné que leurs valeurs sont utilisées pour approximer la valeur en ce point. La MELG utilise les interpolateurs des moindres carrés dans la procédure d'approximation de Galerkin pour générer le système d'équations linéaires.

La MELG est une méthode appelée méthode sans maillage (en anglais *meshless method*) et qui a l'avantage de bien s'adapter aux problèmes de large déformation ou des problèmes où la géométrie change continuellement tels que la propagation des fissures. Cet avantage provient du fait qu'il n'y a pas de maillage, donc les problèmes tels que la direction d'une maille ou la complication du maillage ne se posent plus. Pour cette méthode, la fissure est simplement considérée comme une extension de la fissure. Tous les points se trouvant dans la partie opposée doivent être éliminés du domaine d'influence. Donc la fissure peut passer à travers un corps suivant une direction quelconque, éliminant ainsi la relation d'influence entre les points de chaque coté de la fissure.

3.1 La méthode des éléments libres de Galerkin

3.1.1 Les interpolateurs des moindres carrés

Considérons la fonction $u(x)$ avec $x=(x, y)$ qui est définie sur le domaine Ω . Pour un point arbitraire $x \in \Omega$, on définit un petit domaine Ω_x entourant le point x avec $\Omega_x \subset \Omega$. Pour tout point $x \in \Omega_x$, la fonction $u(x)$ est approximée par :

$$u(x) = \sum_j^m p_j(x) a_j(x) = p^T(x) a(x) \quad (3.1)$$

où les $p_j(x)$ sont des monômes dans l'espace de coordonnées $x^T = [x, y]$ qui formes une base. Une base linéaire en unidimensionnel est donnée par :

$$p^T(x) = [1, x], \quad m = 2 \quad (3.2a)$$

et une base quadratique par :

$$p^T(x) = [1, x, x^2], \quad m = 3 \quad (3.2b)$$

Tandis qu'en bidimensionnel, la base linéaire est donnée par :

$$p^T(x) = [1, x, y], \quad m = 3 \quad (3.3a)$$

et une base quadratique par :

$$p^T(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2], \quad m = 6 \quad (3.3b)$$

Les coefficients $a_j(x)$ dans l'équation (3.1) sont aussi fonctions de x ; $a(x)$ est obtenu en utilisant les techniques de la méthode des moindres carrés qui consiste en la minimisation de l'expression suivante :

$$J = \sum_i^n w(x - x_i) [p^T(x_i) a(x) - u_i]^2 \quad (3.4)$$

où n est le nombre de points dans le voisinage de x pour les quels la fonction de poids $w(x - x_i) \neq 0$, et u_i est la valeur nodale de u pour $x = x_i$. Ce voisinage de x précédemment défini par Ω_x est appelé domaine d'influence de x ou cercle d'influence en bidimensionnel.

La stabilité de J dans l'équation (3.4) par rapport à $a(x)$ conduit aux relations linéaires suivantes entre $a(x)$ et u_i :

$$A(x) a(x) = B(x) u \quad (3.5)$$

ou bien par :

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u \quad (3.6)$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont des matrices définies par :

$$A(x) = \sum_I^n w_I(x) p^T(x_I) p(x_I), \quad w_I(x - x_I) \quad (3.7)$$

$$B(x) = [w_1(x)p(x_1), w_2(x)p(x_2), \dots, w_n(x)p(x_n)] \quad (3.8)$$

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (3.9)$$

les variables dépendantes sont après cela exprimées en terme des fonctions de formes $\phi_I(x)$ où :

$$u^h(x) = \sum_I^n \phi_I(x) u_I \quad (3.10)$$

les fonctions de formes sont définies par :

$$\phi_I(x) = \sum_J^m p_J(x) (A^{-1}B(x))_{JI} \quad (3.11)$$

Les dérivées partielles de $\phi_I(x)$ sont obtenues comme suit :

$$\phi_{I,i}(x) = \sum_J^m \left\{ p_{J,i}(A^{-1}B)_{JI} + p_J(A_{,i}^{-1}B + A^{-1}B_{,i})_{JI} \right\} \quad (3.12)$$

où

$$A_{,i}^{-1} = -A^{-1} A_{,i} A^{-1} \quad (3.13)$$

et l'indice suivant la virgule représente la dérivée. Il est à noter que l'équation (3.10) n'est plus polynomiale même si les fonctions de base $p(x)$ le sont. Toutefois, si les valeurs nodales de $u(x)$ sont obtenues à partir d'un polynôme, alors, se sera reproduit exactement par $u^h(x)$ [76] (voir appendice A). Plus encore, si la fonction de poids $w_I(x)$ est continue et est continûment dérivable jusqu'au $k^{\text{ème}}$ ordre, les fonctions de formes $\phi_I(x)$ sont aussi continues et continûment variable jusqu'au $k^{\text{ème}}$ ordre. Donc si $k=\infty$, alors $\phi_I(x) \in C^\infty$. Ainsi, pour obtenir des résultats exacts, le coefficient $a(x)$ dans l'équation (3.6) ne doit pas être supposé constant, i.e. le terme $(A_{,i}^{-1}B + A^{-1}B_{,i})_{JI}$ ne doit pas être négligé dans l'équation (3.12).

3.1.2 Le choix de la fonction de poids

Les fonctions de poids $w_I(x) = w(x - x_I)$ jouent un rôle important dans la performance de la méthode. Elles doivent être choisies de telle sorte qu'elles soient positives et qu'une solution unique $a(x)$ soit assurée ; elles doivent aussi avoir des valeurs relativement grandes pour des x_I proches de x et relativement petites pour des valeurs de x_I plus distantes ; en

d'autres termes, elles doivent diminuer en magnitude lorsque la distance entre x et x_I augmente. C'est pour cela qu'on va considérer des fonctions de poids qui dépendent seulement de la distance entre les deux points comme suit :

$$w(x - x_I) = w_I(d) \quad (3.14)$$

où $d = \|x - x_I\|$ est la distance entre les deux points x et x_I . Ou plus spécifiquement, on considère des fonctions de poids de la forme suivante :

$$w_I(x) = w_I(d^{2k}) \quad (3.15)$$

où $w_I(d^{2k})$ est supposée être continue et continûment dérivable par rapport à d jusqu'au $n^{\text{ème}}$ ordre.

On va maintenant considérer des conditions pour lesquelles la constante k doit satisfaire pour s'assurer que les premières n dérivées de la fonction de poids $w_I(d^{2k})$ par rapport à x ou y en bidimensionnel existent pour un point nodal x_I . pour commencer, on considérera la première dérivée de la fonction de poids $w_I(d^{2k})$ par rapport à x . On a :

$$\frac{\partial w_I}{\partial x} = 2kd^{2k-1} \frac{\partial w_I}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial x} = 2k(x - x_I) d^{2k-2} \frac{\partial w_I}{\partial x} \quad \text{en 2D} \quad (3.16)$$

Il est à noter que la limite de $(x - x_I)/d$ lorsque x tend vers x_I n'existe pas. Donc la dérivée ci-dessus n'existe que si $k > 1/2$. Concernant sa deuxième dérivée par rapport à x , on a :

$$\frac{\partial^2 w_I}{\partial^2 x} = 2k(2k-2)(x - x_I)^2 d^{2k-4} \frac{\partial w_I}{\partial d} + 2kd^{2k-2} \frac{\partial^2 w_I}{\partial d^2} + 4k^2(x - x_I)^2 d^{4k-4} \frac{\partial^2 w_I}{\partial^2 d} \quad \text{en 2D} \quad (3.17)$$

Donc la dérivée ci-dessus n'existe que si $k \geq 1$. En calculant la $n^{\text{ème}}$ dérivée de la fonction de poids $w_I(d^{2k})$ par rapport à x , on en déduit les conclusions suivantes :

- (i) Si k est un entier positif, la dérivée de la fonction de poids $w_I(d^{2k})$ par rapport à x ou y existe jusqu'au $k^{\text{ème}}$ ordre.
- (ii) Si k n'est pas un entier positif mais supérieur à $n/2$ ($k > n/2$) alors la dérivée de la fonction de poids $w_I(d^{2k})$ par rapport à x ou y existe jusqu'au $n^{\text{ème}}$ ordre.

Le choix de la fonction de poids est plus ou moins arbitraire tant que la fonction de poids est positive et est continûment dérivable jusqu'au degré désiré. Il existe plusieurs fonctions de poids ; les plus utilisées sont les fonctions de poids exponentielles et coniques. Elles sont définies par :

(i) La fonction de poids exponentielle :

$$w_I(d_I^{2k}) = \begin{cases} \frac{e^{-(d_I/c)^{2k}} - e^{-(d_{ml}/c)^{2k}}}{(1 - e^{-(d_{ml}/c)^{2k}})}, & d_I \leq d_{ml} \\ 0, & d_I > d_{ml} \end{cases} \quad (3.18)$$

(ii) La fonction de poids conique :

$$w_I(d_I^{2k}) = \begin{cases} 1 - (d_I/d_{ml})^{2k}, & d_I \leq d_{ml} \\ 0, & d_I > d_{ml} \end{cases} \quad (3.19)$$

Pour la fonction de poids exponentielle, c est une constante qui contrôle la distance d_I entre x et x_I avec $d_I = \|x - x_I\|$; d_{ml} est le rayon du domaine d'influence de x_I . Il doit être choisi de telle manière à ce que la matrice A dans l'équation (3.6) ne soit pas singulière.

Il est à noter que quand c décroît, on obtient de grandes valeurs aux points x_I proches de x et de petites valeurs aux points x_I assez distants de x . Généralement, c est définie comme suit :

$$c = \alpha c_I \quad (3.20)$$

où

$$\begin{cases} 1 \leq \alpha \leq 2 \\ c_I = \max_{J \in S_I} \|x_J - x_I\| \end{cases} \quad (3.21)$$

où S_I est l'ensemble des nœuds appartenant au domaine d'influence de x_I . Si les nœuds sont uniformément distancés, alors c_I dans l'équation (2.21) est la distance maximale entre les nœuds. Mais si les nœuds sont distribués arbitrairement, alors c_I peut être définie comme une longueur caractéristique du domaine d'intégration qui contient le point x_I .

3.2 Principe variationnel et implémentation numérique

3.2.1 Principe variationnel

On considère le problème bidimensionnel suivant avec de petits déplacements dans le domaine Ω de contour Γ . L'équation d'équilibre est :

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (3.22)$$

où σ est le tenseur de contraintes qui correspond au champ de déplacements u ; b est le vecteur représentant les forces de volumes.

Les conditions aux limites sont données par :

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (3.23)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (3.24)$$

où la barre superposée représente les valeurs aux frontières imposées et n est le vecteur normal au domaine Ω .

La forme variationnelle de l'équation d'équilibre est posée comme suit. On considère les fonctions d'essais $u(x) \in H^1$ et les multiplicateurs de Lagrange $\lambda \in H^0$ [103] (voir appendice B) ; et les fonctions test $\delta v(x) \in H^1$ et $\delta \lambda \in H^0$. Donc si :

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta v \cdot \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta v \cdot b \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta v \cdot \bar{t} \, d\Gamma - \delta W(u, \nabla_s \lambda)_u = 0, \forall \delta v \in H^1, \delta \lambda \in H^0 \quad (3.25)$$

alors les équations (3.22) à (3.24) sont satisfaites. Dans l'équation ci-dessus, $\nabla_s \delta v$ représente la partie symétrique de $\nabla \delta v$; H^1 et H^0 représentent respectivement les espaces de Sobolev d'ordre 1 et 0 [66] (voir appendice B) et δW_u est un terme qui renforce les conditions aux limites essentielles.

Le terme δW_u est nécessaire car contrairement à la méthode des éléments finis et puisque $\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij}$, il ne suffit pas de poser les déplacements nodaux pour renforcer les conditions aux limites essentielles. Plusieurs formes de W_u sont possibles. Dans la référence [21] les multiplicateurs de Lagrange sont utilisés, donc :

$$W_u(u, \lambda) = \int_{\Gamma_u} \lambda \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma \quad (3.26)$$

$$\delta W_u(u, \lambda) = \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta v \cdot \lambda \, d\Gamma \quad (3.27)$$

Cependant, il existe une autre forme alternative qui est plus efficace numériquement. Elle est donnée dans la référence [72] comme suit :

$$W_u(u, \lambda) = \int_{\Gamma_u} t(\delta v) \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma \quad (3.28)$$

donc

$$\delta W_u(u, \lambda) = \int_{\Gamma_u} t(\delta \lambda) \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta v \cdot t \, d\Gamma \quad (3.29)$$

où $t = \sigma \cdot n$ est la traction le long de la frontière.

Dans des articles récents [23, 54, 63], une autre approche a été développée. Elle introduit une modification à l'approximation de la méthode des moindres carrés qui permet de

satisfaire les conditions aux limites essentielles avec une même précision que celle de la méthode des éléments finis.

Pour implanter ce traitement des conditions aux limites, des éléments finis sont placés le long des frontières essentielles comme montré dans la figure 3.1. On dénote le sous-domaine le long des frontières essentielles qui est dans les limites de ces éléments par Ω_B . On a donc :

$$u^{elg}(x) = \sum_I^n \phi_I(x) u_I \quad (3.30)$$

et

$$u^{ef}(x) = \sum_{I=1}^4 N_I(x) u_I \quad (3.31)$$

où N_I sont les fonctions de formes des éléments finis et ϕ_I sont celles des éléments libres de Galerkin. Après cela, on considère la nouvelle approximation qui est :

$$\tilde{u}^h(x) = \begin{cases} u^{elg}(x) + v(x)(u^{ef}(x) - u^{elg}(x)) & x \in \Omega_B \\ u^{elg}(x) & x \in \Omega_E \end{cases}$$

(3.32)

avec $\Omega_E = \Omega - \Omega_B$. La fonction $v(x)$ est donnée par :

$$v(x) = \sum_I N_I(x), \quad x \in \Gamma_u \quad (3.33)$$

i.e. la somme est prise aussi sur tous les nœuds des éléments finis qui sont sur la frontière essentielle. La fonction est la même que celle utilisée par Belytschko et al [22].

Il est clair que l'approximation est continue puisque à l'interface de l'élément fini adjacent à la région des éléments libres de Galerkin, on a $v(x) = 0$ et donc $\tilde{u}^h(x)$ devient $u^{elg}(x)$. Toutefois la dérivée de $\tilde{u}^h(x)$ subit un saut à travers l'interface avec une magnitude de ce saut égale à $v_{,j}(x)(u^{ef}(x) - u^{elg}(x))$ pour un point x sur l'interface. Les dérivées sont aussi discontinues à travers les frontières des éléments.

La nouvelle approximation peut être écrite comme suit :

$$\tilde{u}^h(x) = \sum_I^n \tilde{\phi}_I(x) u_I \quad (3.34)$$

avec

$$\tilde{\phi}_i(x) = \begin{cases} (1 - \nu(x))\phi_i(x) + \nu(x)N_i(x) & x \in \Omega_B \\ \phi_i(x) & x \in \Omega_E \end{cases} \quad (3.35)$$

Il pouvait être noté que les équations (3.35) représentent un support de l'interpolation des éléments libres de Galerkin et des éléments finis. Plus, le point d'évaluation est proche de la frontière essentielle, plus l'approximation est équivalente à celles des éléments finis ; plus le point d'évaluation est loin de la frontière essentielle, plus l'approximation est équivalente à celle des éléments libres de Galerkin. En d'autres mots, il est bien claire que sur la frontière, l'approximation est à cent pour cent équivalente à celle des éléments finis, tandis qu'au-dessus de l'interface entre Ω_B et Ω_E , l'approximation est complètement équivalente à celle des éléments libres de Galerkin.

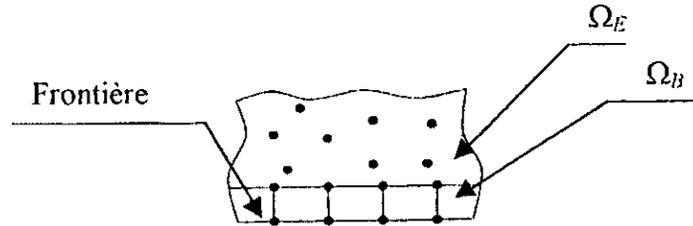


Figure 3.1 : Approximation pour satisfaire les conditions aux limites par des éléments finis.

Donc, il existe trois approches élémentaires pour satisfaire les conditions aux limites. Il est à signaler que c'est la deuxième approche qui sera utilisée dans cette étude.

3.2.2 Les équations de discretisation

Considérons maintenant une élasticité linéaire où :

$$\varepsilon = \nabla_s u \quad (3.36)$$

et

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad (3.37)$$

On considère les équations de discretisation de la forme variationnelle de l'équation (3.25) avec les conditions aux limites essentielles des équations (3.28) et (3.29). La solution approximative u et la fonction test δv sont construites à partir de l'équation (3.11). les

équations de discretisation finales peuvent être obtenues en substituant les fonctions d'essais et les fonctions test dans la forme variationnelle (3.25), ce qui donne :

$$Ku = f \quad (3.38)$$

où K et f sont constituées de sous-matrices K_{IJ} (2×2) et f_I (2×1) données par :

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega - \int_{\Gamma_u} \phi_I S N D B_J d\Gamma - \int_{\Gamma_u} B_I^T D^T N^T S \phi_J d\Gamma \quad (3.39)$$

et

$$f_I = \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_I b d\Omega - \int_{\Gamma_u} B_I^T D^T N^T S \bar{u} d\Gamma \quad (3.40)$$

où

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \text{pour un état de contraintes planes} \quad (3.41)$$

ou bien

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \text{pour un état de déformations planes} \quad (3.42)$$

$$B_I = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$N = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_x \\ 0 & n_x & n_x \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

avec

$$s_x = \begin{cases} 1 & \text{si } u_x \text{ est imposée sur } \Gamma_u \\ 0 & \text{si } u_y \text{ est imposée sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.46)$$

$$s_y = \begin{cases} 0 & \text{si } u_x \text{ est imposée sur } \Gamma_u \\ 1 & \text{si } u_y \text{ est imposée sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.47)$$

où la virgule représente une dérivée partielle par rapport à la variable indiquée ; E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de poisson.

3.2.3 Implémentation numérique

Dans le but de calculer les intégrales dans les équations (3.39) et (3.40), une structure indépendante des nœuds et formée de cellules est utilisée. Cette procédure est détaillée dans la figure 3.2. Comme il peut être noté, en plus du fait qu'elles soient indépendantes des nœuds, les cellules sont aussi arrangées d'une manière régulière. Elles ont l'avantage de faciliter l'identification des nœuds et de fournir une structure pour le calcul numérique des intégrales des équations (3.39) et (3.40).

L'organisation du programme, montrée dans le tableau 3.1 est similaire à celle du programme de la méthode des éléments finis. En formant l'équation, chaque cellule est considérée à son tour et une quadrature de Gauss est exécutée. Pour exécuter cette quadrature, le domaine d'influence de chaque point doit être déterminé. Le domaine d'influence de deux points typiques est aussi montré dans la figure 3.2. comme il peut être observé, le domaine d'influence ne peut jamais dépasser une frontière externe ou interne. Donc pour un point quadratique près d'une fissure, le domaine d'influence de x_Q est limité aux points x_i qui peuvent être connectés à x_Q sans intersecter les frontières du domaine.

Les contributions d'une quadrature dépendent des nœuds dans le domaine d'influence du point x_Q . Chaque point quadratique contribue seulement aux équations correspondant aux nœuds qui sont à l'intérieur du domaine d'influence. Donc, dans les équations finales, il n'y a pas de relation entre les nœuds qui ne sont pas à une distance spécifiée (correspondante au domaine d'influence) et sa contribution à la matrice K disparaît.

La vérification de l'étape 2c dans le tableau 3.1 est nécessaire pour prendre correctement en considération les frontières intérieures telles que les trous et les fissures. Comme indiqué sur la partie droite de la figure 3.2, le domaine d'influence d'un point ne dépasse pas la frontière adjacente à ce point. Donc, seulement les points x_i qui sont connectés à x_Q sans intersecter aucune frontière sont dans le domaine d'influence de x_Q .

Dans la quadrature de Gauss à l'intérieur de chaque cellule, le nombre de points quadratiques dépend du nombre de nœuds dans la cellule. Une quadrature de $n_Q \times n_Q$ est généralement utilisée avec $n_Q = \sqrt{m} + 3$, où m est le nombre de nœuds dans chaque cellule.

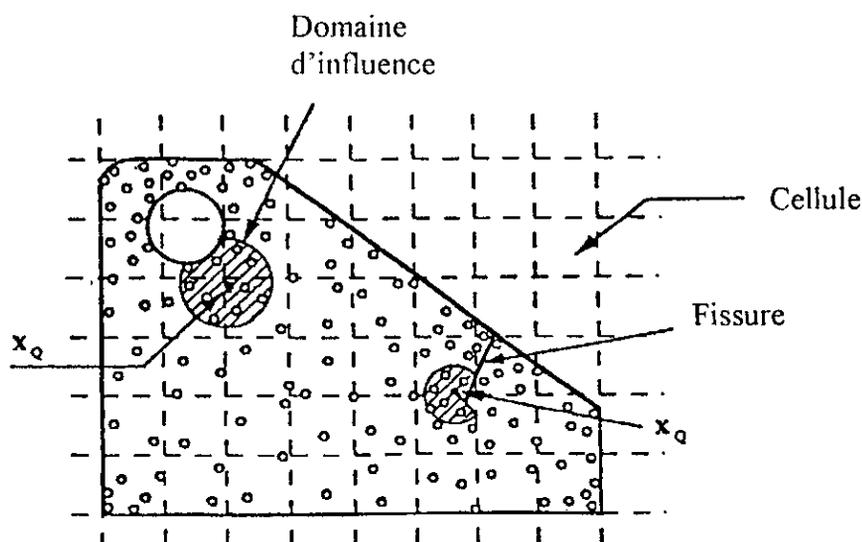


Figure 3.2 : Structure cellulaire pour une quadrature dans la MELG, Domaines d'influence de deux points sont montrés.

Généralement, la structure cellulaire décrite dans la figure 3.2 donne de très bons résultats quand la cellule tout entière est à l'intérieur du domaine. Mais pour des domaines avec des frontières courbes, une situation peut se dégager où seulement une portion de la cellule appartient au domaine. Pour cela, il suffit juste d'étudier le statut de la cellule en testant ses sommets. Des algorithmes pour vérifier la géométrie numériquement sont employés pour déterminer si les sommets appartiennent au domaine. Si les quatre sommets sont à l'intérieur du domaine, l'intégration peut être faite et si les quatre sommets sont à l'extérieur du domaine, la cellule est ignorée. Les autres cas possibles correspondent aux configurations où juste une portion de la cellule appartient au domaine. Le sommet de la cellule qui est à l'extérieur du domaine est détecté et les coordonnées des points d'intersection entre les extrémités du domaine et la cellule sont identifiés. Donc la partie de la cellule qui n'appartient pas au domaine ne sera pas prise en considération et la procédure quadratique peut alors commencer.

Tableau 3.1 : Algorithme pour le code numérique de la MELG

-
1. Boucle sur le domaine Ω
 2. Boucle sur les points quadratiques x_Q dans une cellule C
 - a. Si le point quadratique est en dehors du domaine d'influence, alors aller à 2g ;
 - b. Vérification de tous les nœuds dans la cellule et les cellules voisines pour déterminer les n nœuds $x_I, I = 1$ à n dans le domaine d'influence de x_Q ,
 - c. Si un segment de frontière existe dans les cellules avoisinant la cellule C et si $x_I - x_Q$ intersecte ce segment, alors aller à 2g ;
 - d. Calcul de $\phi_I(x_Q)$ et $\phi_{I,i}(x_Q)$ au point quadratique ;
 - e. Evaluation des contributions à l'équation (3.38) ;
 - f. Assemblage des contributions aux nœuds ;
 - g. Fin du si
 3. Fin de la boucle sur les points quadratiques de C
 4. Fin de boucle sur les cellules
-

Chapitre 4

La Méthode des Discontinuités des

Déplacements

Dans la mécanique des solides, plusieurs problèmes pratiques incluent l'étude des solides contenant une fine ouverture ou une fissure qui peuvent être dues à un défaut de fabrication ou imposées (le cas d'une ouverture seulement) par la géométrie de ces solides. Une fissure a généralement deux surfaces ou frontières. Ainsi, il peut s'en dégager un problème dû aux effets des éléments placés le long d'une surface de la fissure qui ne peuvent être distinguées des effets des éléments placés le long de l'autre surface. Une méthode appelée la méthode des éléments aux frontières peut, toutefois faire face à ce problème. Cette méthode se résulte d'une réduction substantielle dans la préparation des données et un petit système d'équations algébriques à résoudre numériquement. Plus encore, cette simple description du solide implique que des régions à haute concentration de contraintes peuvent être modélisées aussi efficacement qu'une haute concentration de maillage.

La méthode des éléments aux frontières évite une large partie du maillage qui est associée à la méthode des éléments finis car seulement la surface de la fissure ou, en deux dimensions la ligne représentant la fissure a besoin d'être maillée. Toutefois, elle exige une fonction de Green pour les équations aux dérivées partielles qui en découlent bien qu'elle soit un peu limitée dans le domaine des problèmes qu'elle peut traiter. La plus part des problèmes traités par cette méthode intéressent des matériaux élastiques isotropes en bi et en tridimensionnel. Même avec cette implémentation, la présence des fissures cause des difficultés substantielles, d'où la création de techniques spécialisées telles que la subdivision du domaine et les méthodes hypersingulaires qui doivent être utilisées pour résoudre ce genre de problèmes.

Dans cette étude, l'une de ces méthodes hypersingulières est étudiée, car la méthode des éléments aux frontières a été développée suivant deux approches ; l'une d'elles est d'origine mathématique basée sur les théorèmes classiques de la théorie du potentiel qui consiste à mettre en place des équations algébriques reliant directement les paramètres aux limites inconnus à ceux connus d'où le nom de méthode directe. L'autre approche est physique et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités, placées tout au long du contour, et de là, à calculer les paramètres aux limites désirées. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode indirecte telle que celle qu'on va étudier et qui est appelée la méthode des discontinuités des déplacements (MDD).

4.1 La méthode des discontinuités des déplacements

Une discontinuité, dans le déplacement, peut être visualisée comme étant une fissure droite (rectiligne) composée de deux surfaces (lèvres) disjointes se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre.

La méthode des discontinuités des déplacements se base sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité constante du déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini. Elle consiste à diviser (discretiser) le segment de droite en une série de N éléments, reliés les uns aux autres, et de considérer constante la discontinuité sur chacun de ces éléments. Ainsi, en connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donné, en sommant les effets de tous les éléments.

4.1.1 Discontinuité de déplacement dans un solide infini

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite fini dans le plan x, y d'un solide infini est spécifié par la condition que le déplacement soit continu partout sauf sur le segment en question. Le segment de droite peut être choisi pour occuper une certaine portion de l'axe x , soit la portion $|x| \leq a, y=0$. Si on considère ce segment comme une fissure droite on pourra alors distinguer ses 2 surfaces en disant que l'une des surfaces est sur le côté positif de $y = 0$, notée $y=0_+$ et que l'autre est sur le côté négatif notée $y=0_-$. En passant d'un côté à l'autre du segment le déplacement subit un changement constant désigné

par $D_i = (D_x, D_y)$, on définit la discontinuité de déplacement D_i comme la différence de déplacement entre les 2 côtés du segment comme suit :

$$D_i = u_i(x, 0_-) - u_i(x, 0_+) \quad (4.1)$$

ou bien :

$$D_x = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \quad (4.2)$$

$$D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+)$$

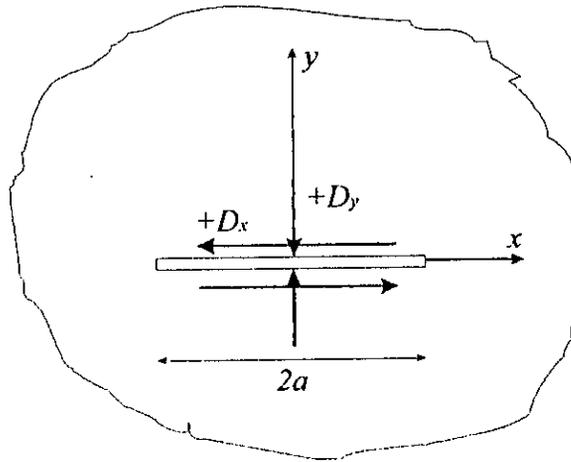


Figure 4.1 : Les composantes d'une discontinuité de déplacement

La solution du problème posé est donnée par Crouch [37], les déplacements et les contraintes peuvent être écrits comme suit :

$$u_x = D_x [2 (1-\nu) f_{,y} - y f_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu) f_{,x} - y f_{,xy}] \quad (4.3)$$

$$u_y = D_x [(1-2\nu) f_{,x} - y f_{,xy}] + D_y [2 (1-\nu) f_{,y} - y f_{,xx}]$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 G D_x [2 f_{,xy} + y f_{,xyy}] + 2 G D_y [f_{,yy} + y f_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2 G D_x [-y f_{,xyy}] + 2 G D_y [f_{,yy} - y f_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2 G D_x [f_{,yy} + y f_{,yyy}] + 2 G D_y [-y f_{,xyy}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

où la fonction $f(x, y)$ est définie par :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right. \\ &\quad \left. - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

La méthode des discontinuités des déplacements est une procédure qui permet de trouver une approximation discrète à la distribution régulière du déplacement relatif (i.e. la discontinuité de déplacement) qui existe en réalité. Chaque segment est un élément de la frontière et représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local s, n comme le montre la figure 4.2.

Il est à noter que les conditions aux limites peuvent être en déplacements comme elles peuvent être en contraintes ou bien les deux à la fois. Toutefois, si les éléments joints les uns aux autres forment un contour fermé, alors la même procédure sera suivie (par exemple le cas d'une cavité dans un domaine infini ou un disque) comme montré aussi sur la figure 4.2.

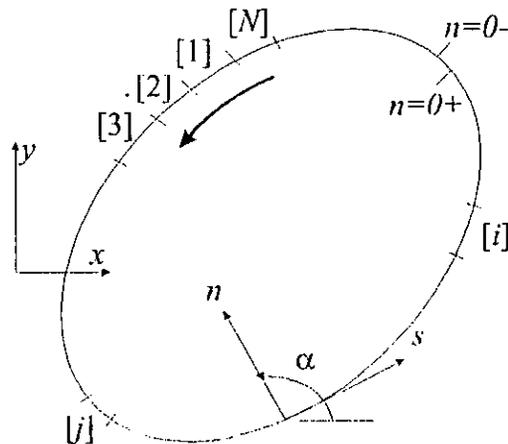


Figure 4.2 : Discretisation dans le cas d'un contour fermé

4.2 Problème intérieur/extérieur

Trois exemples illustrent la convention de signe adoptée dans le paragraphe précédent pour différencier entre les problèmes extérieurs et intérieurs.

Les figures (4.3a) (4.3b) définissent des contours circulaires pour, respectivement, un trou dans un domaine infini et un disque.

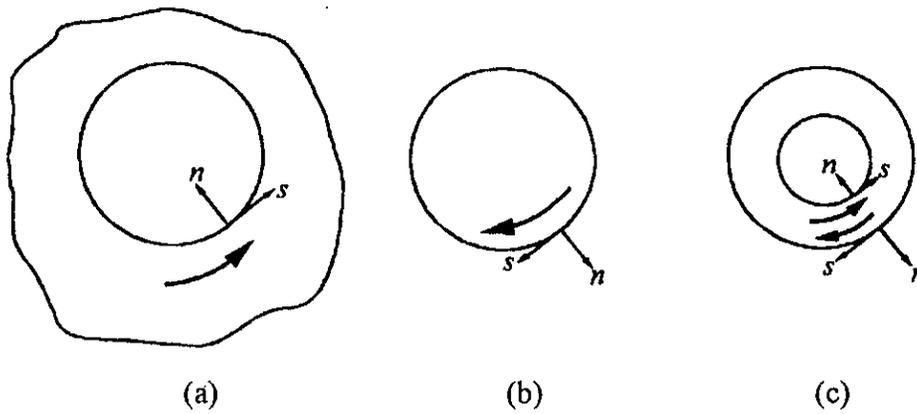


Figure 4.3 : La convention pour la traversée des contours. (a) cavité, (b) disque et (c) anneau

Le premier exige que le contour soit traversé dans le sens contraire des aiguilles d'une montre alors, que le second exige le contraire. Le troisième exemple monté sur la figure (4.3c) montre un disque circulaire avec un trou concentrique dont les limites intérieure et extérieure doivent être traversées en sens contraires. Toutefois, dans le cas des problèmes intérieurs, quelques précautions doivent être prises pour éviter le mouvement de corps rigides.

Chapitre 5

Concepts de la Mécanique de la Rupture

Les fissures sont généralement coûteuses et leur présence augmente le temps et les efforts dépensés en maintenance et en réparation. Elles peuvent, en dernier lieu, conduire à la rupture totale de la structure qui dans certains cas peut mettre en danger la vie humaine. Malheureusement, le concept de réparation ne peut être appliqué aux structures SMEM du fait de leurs dimensions et de la précision dont elles font l'objet. Un comité national américain a estimé le coût des conséquences de la rupture à 4% du produit national total. Il devient alors impératif d'essayer de réduire ces effets.

Généralement, lorsqu'on considère quelques applications des SMEM (e. g., les accéléromètres pour le système de déploiement d'airbag dans les automobiles et les dispositifs chirurgicaux), il devient évident que la fiabilité des structures SMEM est d'une importance primordiale. Les constantes élastiques, la résistance limite à la rupture, le facteur d'intensité de contraintes, le taux de restitution d'énergie et autres sont des propriétés mécaniques nécessaires pour concevoir des structures fiables. Elles peuvent être utilisées pour établir des chargements structurels maximaux, prédire la rupture et estimer la durée de vie des structures SMEM.

Puisque les fissures ne peuvent être éliminées, des procédures doivent être établies pour quantifier et prédire le comportement des structures fissurées et cela dans des conditions de fonctionnement. Les fissures, elles-mêmes, peuvent être considérées comme de petits défauts formés durant une étape de fabrication. Elles peuvent se produire durant le fonctionnement ; ou peuvent être le résultat d'une déprédation (fatigue, corrosion, ect...) de la structure. Des règles scientifiques systématiques ont été conçues pour caractériser ces fissures et leurs effets pour prédire quand elles deviendraient dangereuses. Cette science est appelée mécanique de la rupture et ses deux principales caractérisations sont le facteur d'intensité des contraintes et le taux de restitution d'énergie.

Ainsi, la mécanique de la rupture peut être définie comme la science de l'étude du comportement d'une structure avec ses fissures. Cette dernière prend en compte des défauts majeurs préexistants ou induits dans le matériau. La rupture complète de la structure de l'échantillon est alors décrite en fonction du comportement de ces défauts qui est régi par des critères de propagation. Deux approches sont généralement utilisées en mécanique de la rupture :

1. L'analyse du champ des contraintes en tête de fissure, c'est l'approche par les facteurs d'intensité de contraintes ou l'intégrale J , dite théorie locale. Elle relie les facteurs d'intensité de contraintes au champ de contraintes en tête de fissure.
2. L'approche globale énergétique due à Griffith qui procède par le calcul de l'énergie disponible pour la propagation de fissures dans la structure considérée. Cette énergie dépend du potentiel total du système.

5.1 Concepts de la mécanique de la rupture

La rupture est caractérisée, au moins localement, par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties de part et d'autre d'une surface géométrique. Cette fissure initiale est soit créée par endommagement sous l'effet de sollicitations, soit un défaut créé lors de l'élaboration du matériau ou lors de sa mise en forme.

La première analyse du comportement de la rupture contenant des discontinuités a été développée par Griffith. L'analyse était basée sur le fait d'assumer que la rupture naissante dans des matériaux fragiles idéaux se produisait quand la valeur de l'énergie élastique fournie au niveau du bout de la fissure durant un accroissement incrémental de la longueur de la fissure est égale à ou plus grande que celle au niveau de la pointe de la fissure. A partir de cette approche qui consiste en la conservation de l'énergie totale, on peut établir le critère de propagation donné par :

$$G = 2\gamma_e \quad (5.1)$$

Où G est le taux de restitution d'énergie qui représente l'énergie de déformation élastique par unité de surface de la fissure qui est disponible pour une extension infinitésimale de la fissure et γ_e l'énergie de surface du matériau.

En fait, le critère de propagation s'exprime sous la forme :

$$G \geq G_c = 2\gamma_u \quad (5.2)$$

Le paramètre G_c , appelé énergie critique de déformation élastique par unité de surface de la fissure est considéré comme paramètre intrinsèque du matériau.

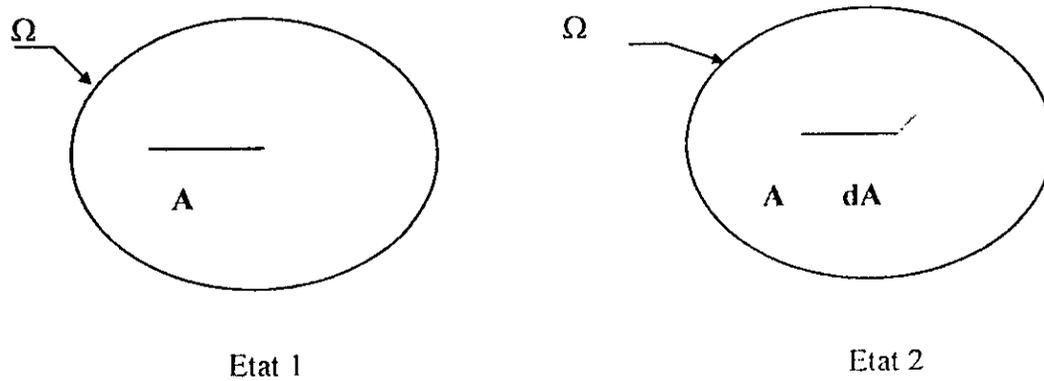


Figure 5.1 : Propagation de la fissure

On va maintenant calculer G en fonction des champs de déplacement et de contrainte sur les frontières du domaine fissuré. Pour cela, Considérons le problème plan en élasticité linéaire. On impose sur la frontière Ω_T du domaine fissuré, des forces surfaciques T_i , et sur la partie complémentaire Ω_U , les déplacements u_i .

G s'écrit sous la forme :

$$G = -\frac{d}{dA} \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}) d\Omega + \int_{\Omega} T_i \frac{du_i}{dA} d\Gamma \quad (5.3)$$

En utilisant le théorème des travaux virtuels, on transforme le terme U_o on aura alors :

$$\frac{d}{dA} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(T_i \frac{du_i}{dA} + u_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (5.4)$$

d'où G devient :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(T_i \frac{du_i}{dA} + u_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (5.5)$$

L'expression ci-dessus permet le calcul de G connaissant les champs de déplacement et de contrainte sur les contours extérieurs. Dans le cadre de nos applications, Ω_U n'existera pas en générale ($\Omega_U = 0$).

5.2 Modes fondamentaux de rupture

La mécanique de la rupture en champ élastique linéaire est basée sur une procédure analytique qui relie la distribution du champ de contraintes au niveau de la pointe de la fissure aux contraintes nominales appliquées à la structure, aux dimensions, à la forme et à l'orientation de la fissure ainsi que les propriétés mécaniques.

Le principe fondamental de la mécanique de la rupture est que le champ de contrainte au niveau de la fissure dans la structure peut être caractériser par un simple paramètre K appelé facteur d'intensité de contraintes qui a pour unité $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Ce paramètre K est relié aux contraintes nominales σ dans la structure et à la dimension de la fissure pressente a .

Parce que la rupture de la plus part des composants mécaniques est causée par la propagation des fissures, une compréhension de la distribution du champ de contrainte au niveau de la fissure est essentielle pour déterminer la fiabilité des structures. Parce que la mécanique de la rupture est basée sur l'analyse des contraintes, une évaluation quantitative de la fiabilité des structures est possible.

Pour établir des méthodes de l'analyse des contraintes pour les fissures dans un domaine élastique, il est pratique de définir trois types de mouvements relatifs de deux surfaces de fissure. Ces modes de déplacement (figure 5.2) représentent la déformation locale d'un élément infinitésimal contenant une fissure. Mode d'ouverture ou mode 1 (figure 5.2a), associé à des déplacements locaux symétriques par rapport aux plans x - y et x - z . Il est caractérisé par une sollicitation de traction perpendiculaire au plan de la fissure. Mode de cisaillement ou mode 2 (figure 5.2b), associé à des déplacements locaux symétriques par rapport au plan x - y et obliquement symétriques par rapport au plan x - z . Il est caractérisé par une sollicitation de cisaillement dans le plan de la fissure dont l'action est perpendiculaire au plan de la fissure. Le mode de déchirement ou mode 3 (figure 5.2c), associé à des déplacements locaux qui sont obliquement symétriques par rapport au plans x - y et x - z . Il est caractérisé par une sollicitation de cisaillement parallèle au plan de la fissure dont l'action est parallèle au front de la fissure.

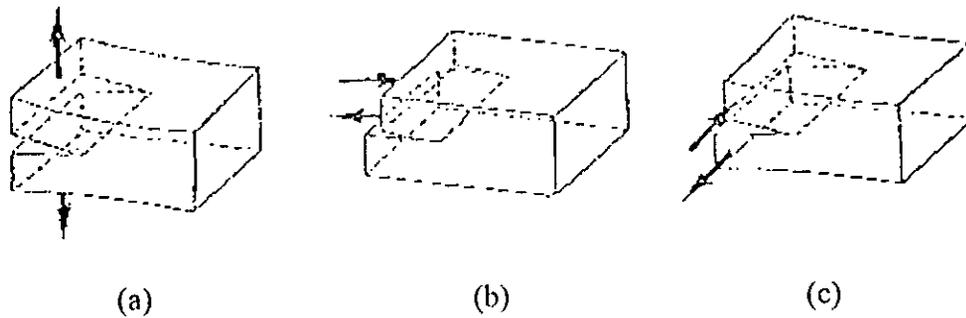


Figure 5.2 : Modes fondamentaux de sollicitation en mécanique de la rupture.

(a) Mode 1, (b) Mode 2, (c) Mode 3

Chacun de ces modes de déformation correspond à un champ de contraintes au niveau de la fissure. Dans n'importe quel problème les déformations au niveau de la fissure peuvent être considérées comme une ou plusieurs combinaisons de ces modes de déplacement. Plus encore, le champ de contrainte au niveau de la fissure peut être aussi considéré comme une ou plusieurs combinaisons des trois champs de contraintes de base. La plus part des situations de rupture correspondent au mode 1, c'est pour cela que l'étude présentée ici se base principalement sur le phénomène de rupture des systèmes micro-électro-mécaniques dans le mode 1 de rupture.

En se basant sur l'analyse originale faite par Griffith sur des composants en verre avec des fissures, il est clair que la longueur caractéristique est la longueur de la fissure dans la structure. Par conséquent, le facteur d'intensité de contrainte K doit dépendre directement de la contrainte nominale σ et la racine carrée de la longueur de la fissure a . dans tous les cas, la forme générale du facteur d'intensité de contraintes est donnée par :

$$K = \sigma \cdot \sqrt{a} \cdot f(g) \quad (5.6)$$

où $f(g)$ est un paramètre qui dépend du spécimen et de la géométrie de la fissure.

5.3 Implémentation de la méthode des éléments libres de Galerkin à la mécanique de la rupture

Pour la méthode des éléments libres de Galerkin, la fissure est simplement considérée comme une extension de la fissure. Tous les points se trouvant dans la partie opposée doivent

être éliminés du domaine d'influence. Donc la fissure peut passer à travers un corps suivant une direction quelconque, éliminant ainsi la relation d'influence entre les points de chaque côté de la fissure. Donc après avoir établi le code de calcul suivant le tableau 3.2 (chapitre 3), il suffit d'utiliser les valeurs calculées (contraintes et déplacements) aux points où se situe la fissure pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes et cela en utilisant l'intégrale J (voir Barsom [14]). Ainsi, pour déterminer le domaine de l'intégrale J , il faut définir un système de coordonnées local au niveau de la pointe de la fissure comme le montre la figure 5.3.

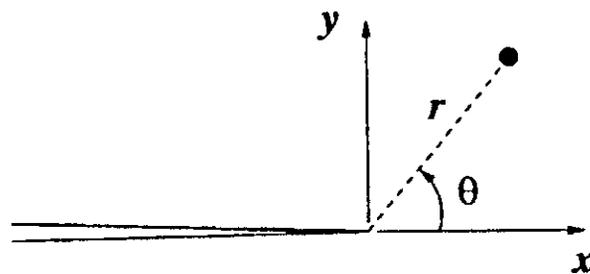
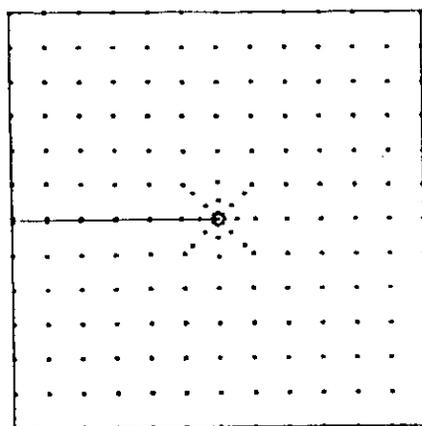
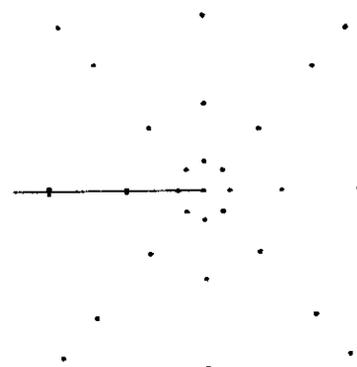


Figure 5.3 : Système de coordonnées local au niveau de la pointe de la fissure.

où r représente la distance à partir de la pointe de la fissure et θ l'angle à partir de la tangente de la fissure. Après cela, il faut définir le domaine de l'intégrale J et procéder à un raffinement nodal au niveau de la pointe de la fissure pour capter le champ de contraintes singulier pour un bon calcul du facteur d'intensité de contraintes. Les figures 5.4 et 5.5 montrent le domaine de l'intégrale J ainsi que le raffinement généralement utilisé au niveau de la pointe de la fissure.



(a)



(b)

Figure 5.4 : Distribution nodale utilisée pour les problèmes de fissuration. (a) distribution complète, (b) gros plan au niveau de la pointe de la fissure.

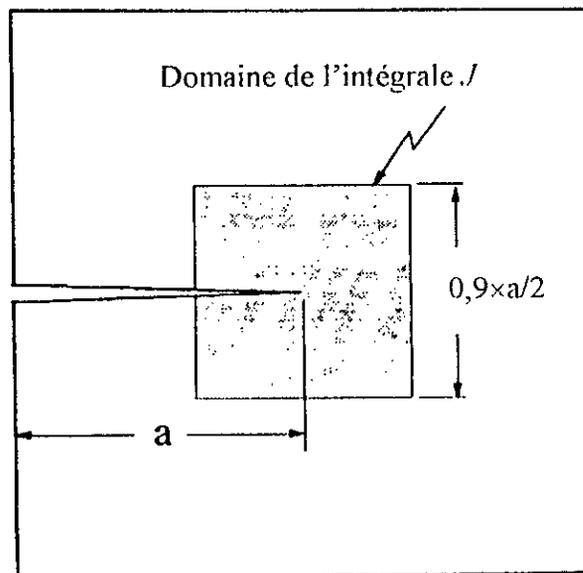


Figure 5.5 : Domaine de l'intégrale J

où a définit la longueur de la fissure.

5.4 Implémentation de la méthode des discontinuités des déplacements à la mécanique de la rupture/Calcul numérique de l'énergie d'avancement G

La méthode des discontinuités des déplacements telle qu'elle vient d'être présentée permet de déterminer les champs de contraintes et de déplacements sur la frontière et en tout point de la structure. Le calcul du taux de restitution d'énergie G a été fait en considérant deux états d'équilibre très proches (figure 5.1).

Sur ce schéma, la fissure d'aire A dans l'état 1 est supposée se propager dans l'état 2 d'un incrément δA dans la même direction de la fissure. On rappelle que pour une fissure plane d'épaisseur unité, le paramètre A est la longueur de la fissure.

En contraintes imposées l'expression (5.5) s'écrit :

$$G = \frac{1}{2} \int T_i \frac{du_i}{dl} d\Gamma \quad (5.7)$$

Ecrivons cette expression sous forme incrémentale, désignons par u_i^1 et u_i^2 , les champs de déplacements avant et après progression de la fissure de dl .

Le terme sous le signe intégrale s'écrit :

$$T_i \, du_i = T_i (u_i^2 - u_i^1) \quad (5.8)$$

Alors (5.7) s'identifie à :

$$G \, dl = \int_{\Omega} T_i (u_i^2 - u_i^1) \, d\Gamma + \int_{\Gamma} T_i (u_i^2 - u_i^1) \, d\Gamma \quad (5.9)$$

Ou bien :

$$G \, dl = \int_{\Omega} T_i (u_i^2 - u_i^1) \, d\Gamma + \int_{\Gamma} T_i (D_i^2 - D_i^1) \, d\Gamma \quad (5.10)$$

Ainsi, le calcul numérique de G se fera, en discretisant l'expression (5.10). On obtiendra une somme des produits $T_i (u_i^2 - u_i^1)$ sur le contour Ω et des produits $T_i (D_i^2 - D_i^1)$ sur la fissure.

La méthode des discontinuités des déplacements présente un avantage particulier pour le calcul de G . En effet, dans le calcul de l'état 2, la matrice obtenue à l'état 1 n'est pas modifiée. La matrice actuelle des coefficients d'influences est construite en complétant la précédente avec les lignes et les colonnes correspondant au segment propagé.

Chapitre 6

Résultats et Interprétations

Dans ce chapitre, nous allons traiter des exemples et cela en utilisant nos deux codes de calcul correspondant à la méthode des éléments libres de Galerkin et la méthode des discontinuités des déplacements. Les trois premiers exemples traitent des problèmes d'élasticité linéaire dans le but de valider le code de calcul de la méthode des éléments libres de Galerkin (MELG) et d'illustrer sa performance en l'absence de singularités telles que les fissures. Dans le domaine de la micro-mécanique, les dimensions et les caractéristiques prises sont celles des structures en silicone utilisées pour la fabrication des systèmes micro-électromécaniques et ceci à part le premier exemple qui représente le test du rapiéçage. Les autres exemples traitent le phénomène de rupture. Ces exemples ont été déjà traités, utilisant généralement des procédés expérimentaux ou numériques appliquant la méthode des éléments finis. Nos résultats seront comparés aux leurs et seront discutés et interprétés. Il est à noter aussi que tous les exemples sont en bidimensionnel et concernant la méthode des éléments libres de Galerkin, la distribution nodale est toujours régulière avec une base linéaire bidimensionnelle $P(x)=[1, x, y]$.

6.1 Test du rapiéçage

Ce premier exemple numérique est appelé test du rapiéçage standard, montré sur la figure 6.1. Dans ce test du rapiéçage, les déplacements sont imposés sur toutes les frontières extérieures par des fonctions linéaires de x et de y . la solution analytique de cet exemple est donnée par Mukhrjee et al [75] par :

$$u = x + y \quad (6.1)$$

Dans cet exemple, la méthode des éléments libres de Galerkin est utilisée. La fonction de poids exponentielle est considérée avec $k=1$, $c_1=0.2$, $\alpha=1$ et $d_m=c$. La discretisation utilisée correspond à un nombre de nœuds égal à 6×6 et un nombre de cellules égal à 2×2 avec un nombre de points quadratiques de Gauss pour l'intégration numérique de 2×2 pour chaque cellule.

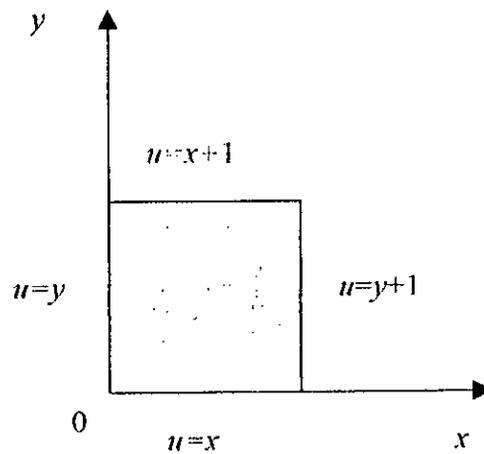


Figure 6.1 : Test du rapiéçage.

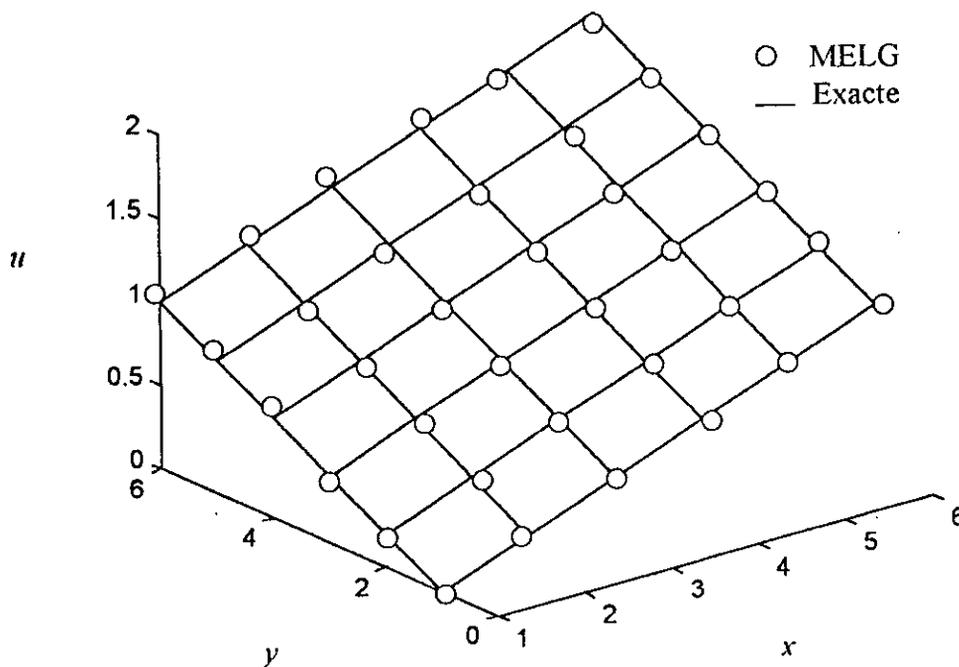


Figure 6.2 : la solution $u(x, y)$ pour le test du rapiéçage.

Les résultats analytiques et numériques sont montrés sur la figure 6.2 qui reflète parfaitement la convergence de la solution numérique vers la solution analytique.

6.2 Barre Cantilever

Le comportement de la méthode des éléments libres de Galerkin est aussi étudié pour une barre Cantilever (voir figure 6.3) pour laquelle la solution exacte est donnée par :

$$u_x = -\frac{P}{6EI} \left(y - \frac{D}{2}\right) [(6L - 3x)x + (2 + \bar{\nu})(y^2 - 2Dy)] \quad (6.2a)$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[3\bar{\nu}(y^2 - 2Dy) + \frac{1}{2}D^2(L - x) + \frac{1}{4}(4 + 5\bar{\nu})D^2x + (L - \frac{1}{3}x)3x^2 \right] \quad (6.2b)$$

où

$$I = \frac{D^3t}{12} \quad (6.2c)$$

$$\bar{E} = \begin{cases} E & \text{pour un état de contrainte plane} \\ E/(1 - \bar{\nu}^2) & \text{pour un état de déformation plane} \end{cases} \quad (6.2d)$$

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{pour un état de contrainte plane} \\ \nu/(1 - \nu) & \text{pour un état de déformation plane} \end{cases}$$

(6.2e)

Les contraintes correspondantes sont :

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{P}{I} (L - x) \left(y - \frac{1}{2}D\right) \quad (6.3a)$$

$$\sigma_y(x, y) = 0 \quad (6.3b)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\frac{Py}{2I} (y - D) \quad (6.3c)$$

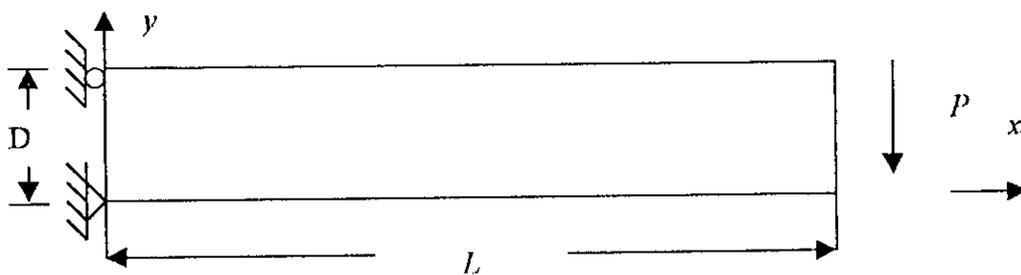
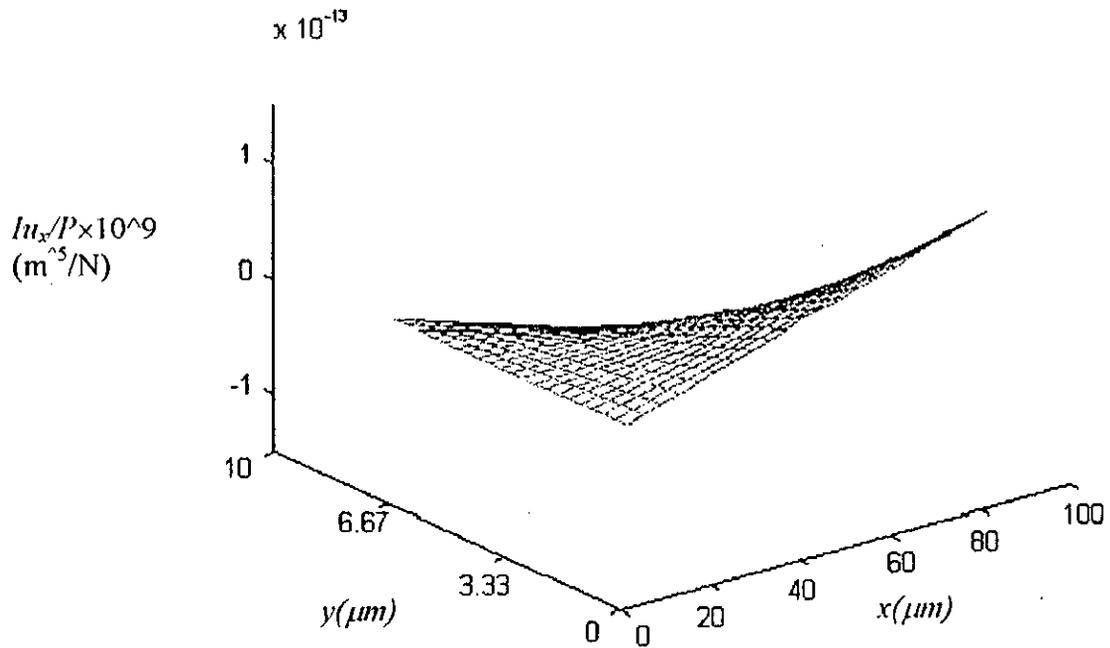


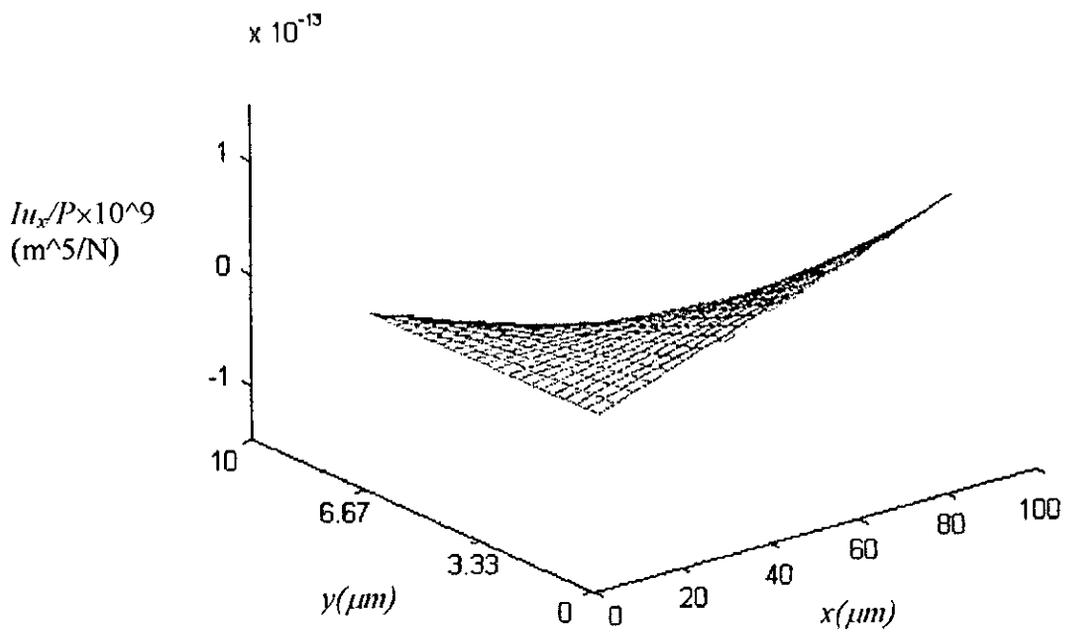
Figure 6.3 : Barre Cantilever.

Le matériau considéré est le silicium monocristallin de caractéristiques $E = 165$ GPa et $\nu = 0.3$. L'exemple est considéré en déformation plane. La barre est caractérisée par une largeur $D = 10 \mu\text{m}$, une longueur $L = 100 \mu\text{m}$ et d'une épaisseur $t = 1 \mu\text{m}$. La distribution nodale est égale à 25×10 et celle des cellules à 9×4 avec un nombre de points quadratiques de 2×2 pour

l'intégration numérique pour chaque cellule. La fonction de poids est toujours exponentielle avec $k=1$, $c_j=0.6\mu\text{m}$, $\alpha=2$ et $d_{mj}=c$.



(a)



(b)

Figure 6.4 : Distribution du déplacement u_x . (a) solution exacte, (b) solution par la MELG.

Les figures 6.4.a et 6.4.b montrent la variation des déplacements u_x en fonction de x et de y . on peut voir clairement que les résultats obtenus par la MELG (figure 6.4.b) dupliquent parfaitement la solution exacte (figure 6.4.a).

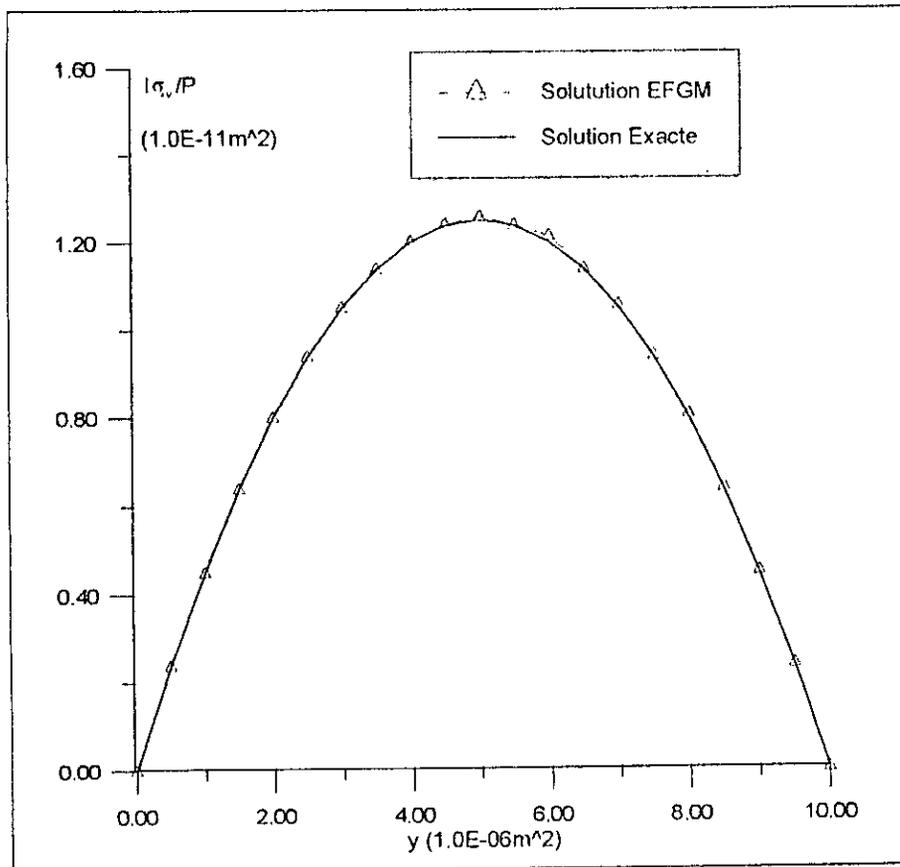


Figure 6.5 : Distribution de la contrainte de cisaillement par rapport à y pour un x quelconque.

La figure 6.5 montre la variation de la contrainte tangentielle σ_{xy} pour un x donné. Pour comparaison, les résultats obtenus utilisant la solution exacte sont aussi mentionnés. Il est à noter que la solution obtenue par la MELG satisfait les conditions aux limites correspondantes à $y = 0$ et $y = 10\mu m$. L'intégrale rajoutée à la forme variationnelle pour consolider les conditions aux limites est hautement recommandée pour la précision de la méthode.

6.3 Plaque percée

Cet exemple est basé sur la solution exacte pour une plaque infinie soumise à un chargement dirigé suivant l'axe ox . Pour modéliser ce problème, seulement un petit domaine carré est considéré et cela comme le montre la figure 6.6. La solution exacte pour les contraintes est utilisée pour imposer les tractions sur les frontières extérieures. Pour raison de symétrie, seulement le quart du domaine est modélisé. Les conditions de symétrie sont imposées sur les côtés gauche et inférieur de la plaque ainsi que les conditions aux frontières intérieures du trou qui sont nulles. La solution exacte pour les contraintes est :

$$\sigma_x(x,y) = T \left(1 - \frac{a^2}{r} \left\{ \frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right\} + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right) \quad (6.4a)$$

$$\sigma_y(x,y) = T \left(-\frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right\} - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right) \quad (6.4b)$$

$$\sigma_{xy}(x,y) = T \left(-\frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta - \sin 4\theta \right\} + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \right) \quad (6.4c)$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires.

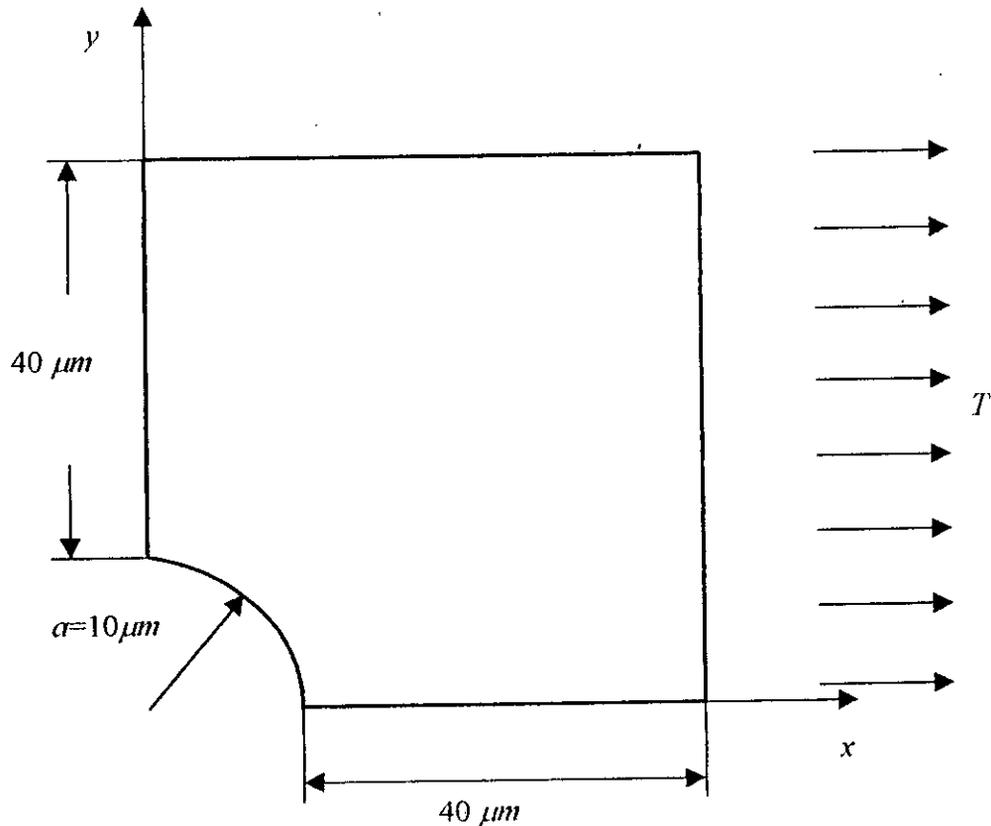


Figure 6.6 : Plaque carrée comme portion d'une plaque infinie avec un trou circulaire et sujet à un champ de contrainte T suivant ox .

Les conditions aux limites données par la solution exacte sont imposées sur le côté droit ($x = 50\mu m$) et le côté supérieur ($y=50\mu m$). L'état de déformation plane est considéré en utilisant comme matériau le silicone monocristalin de caractéristiques $E= 160$ Gpa et $\nu = 0.3$. Le nombre de nœuds est égal à 100 et la distribution des cellules est de 5×5 . La fonction de poids est toujours exponentielle avec $k=1$, $c_j= 1.5\mu m$, $\alpha=1$ et $d_{ml}= c$.

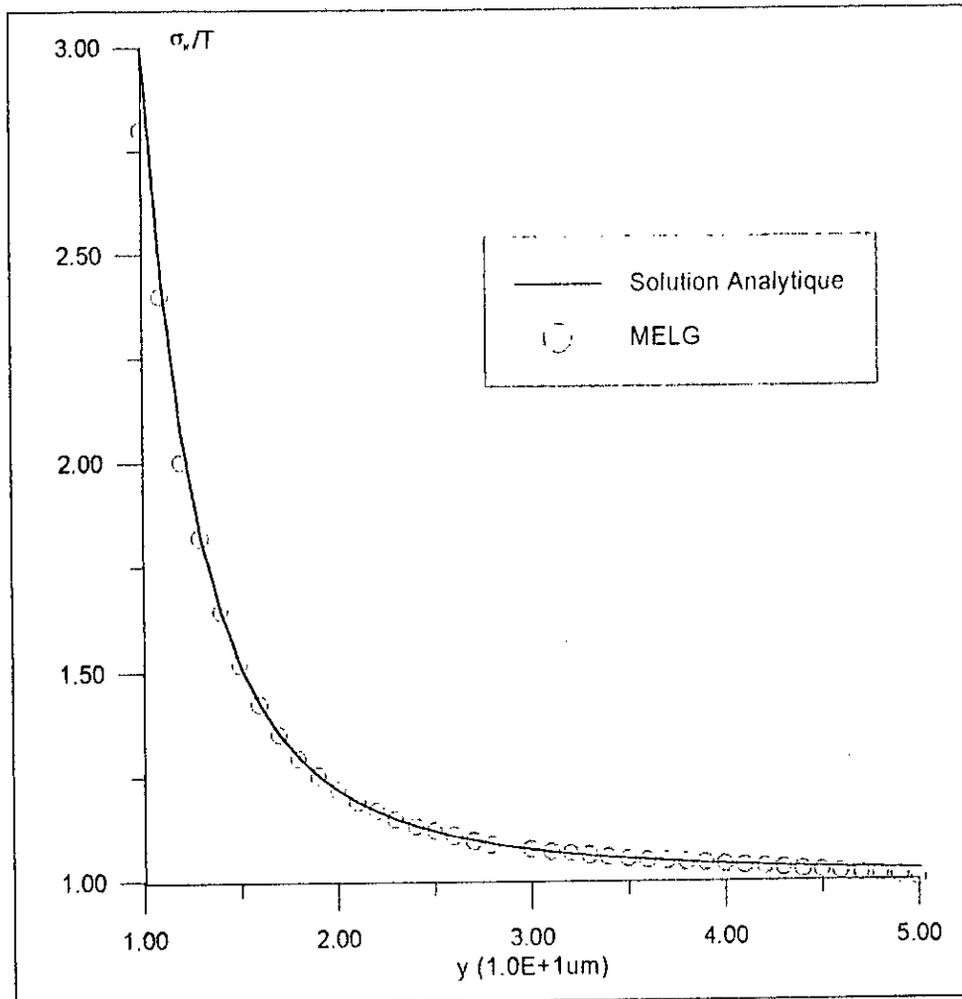


Figure 6.7 : Distribution de la contrainte normale σ_x par rapport à y pour $x = 0$.

Le rapport entre la contrainte σ_x et le chargement T à $x = 0$ obtenu par la MELG est donnée dans la figure 6.7. A part le fait que les résultats obtenus par la MELG correspondent presque aux résultats analytiques, on peut noter aussi que la contrainte décroît le long de l'axe oy pour atteindre T .

6.4 Effets des trous sur la rupture des structures SMEM en polysilicone

Pour de larges parties en mouvement des systèmes micro-électro-mécaniques, les trous sont nécessaires pour faciliter le déclenchement du mécanisme. Toutefois, ces trous ont tendance à affaiblir la structure. Cet exemple a pour but de déterminer la contrainte limite à la rupture. Il a été déjà traité par Sharpe et al [89] en couplant des résultats expérimentaux avec des résultats numériques utilisant la méthode des éléments finis. Un exemple d'un micro-dispositif où les trous sont requis est montré sur la figure 6.8.

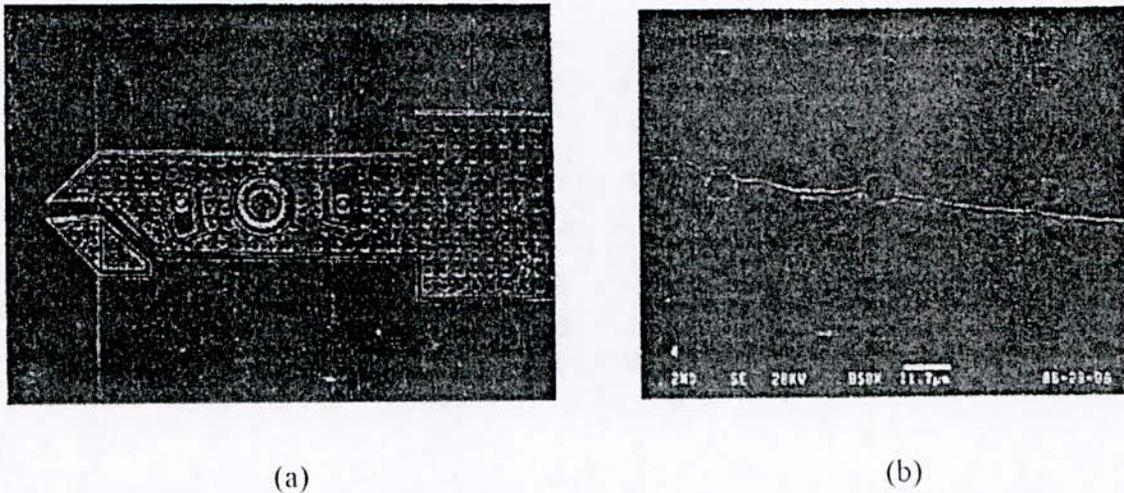


Figure 6.8 : Photographie d'un prototype de spécimen troué. (a) Photographie du spécimen, (b) Gros plan d'une région fissurée du spécimen

Le spécimen utilisé est en polysilicone (silicone polycristallin) et a une largeur de $600\mu\text{m}$ et une épaisseur de $3.5\mu\text{m}$. les trous sont spécifiés comme étant carrés ronds comme le montre la figure 6.9. Sharpe et al avaient considéré une déformation élastique du spécimen en contrainte plane. A cause du grand nombre de trou et de la symétrie translationnelle, seulement une portion du spécimen avec un seul trou à été analysée. Un champ de contrainte uniaxial $\sigma=100\text{ MPa}$ selon l'axe oy . Cette portion possède une symétrie par rapport aux axes ox et oy . Seul le quart de la portion est considéré (voir figure 6.10). Les conditions aux limites son aussi montrée sur la figure 6.10.

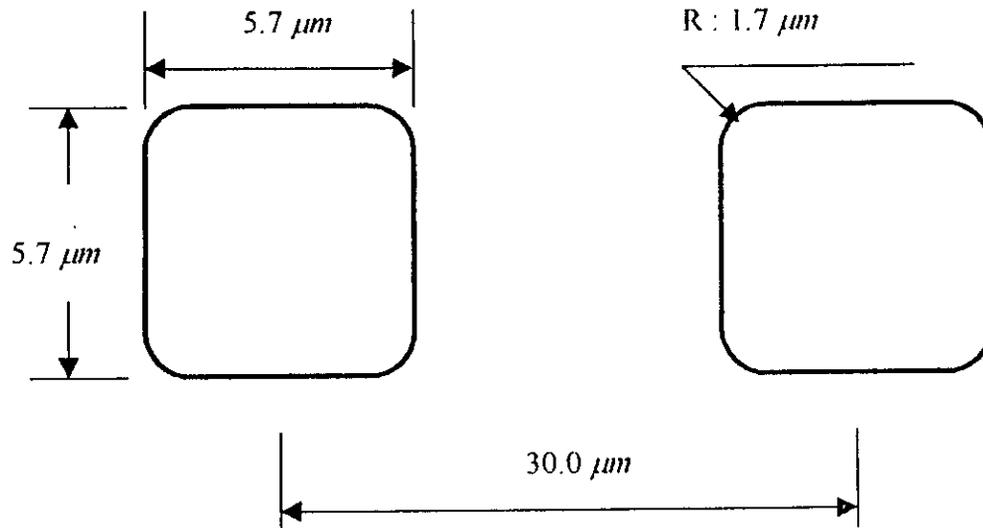


Figure 6.9 : La forme des trous.

Le polysilicone utilisé a été considéré comme étant isotrope et ses propriétés sont $E = 149$ GPa et $\nu = 0.3$. Pour notre exemple, nous utiliserons les mêmes caractéristiques et suppositions faites par Sharpe et al. Les deux méthodes i.e. MDD et MELG sont utilisées aussi.

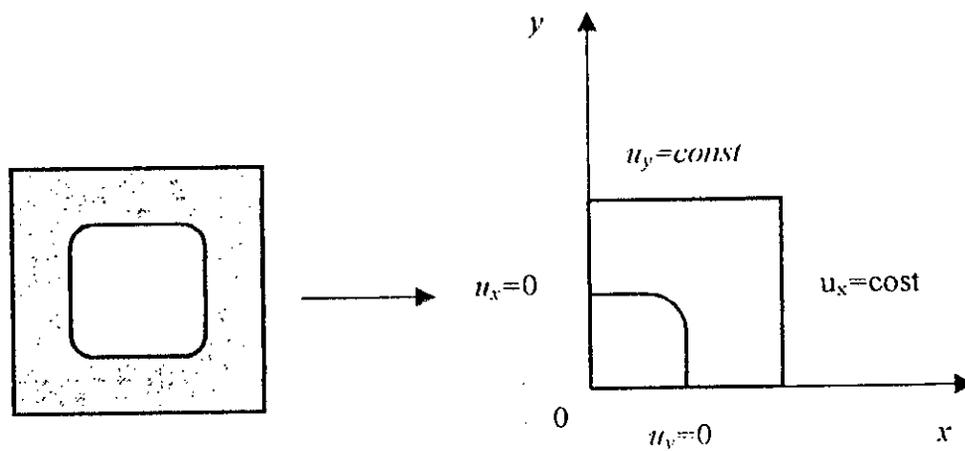


Figure 6.10 : Schéma du modèle mathématique réduit

Pour la méthode des éléments libres de Galerkin, on a considéré un nombre de nœuds égal à 500 et une distribution des cellules de 5×5 avec un nombre quadratique de Gauss de 2×2 pour effectuer l'intégration numérique. La fonction de poids est toujours exponentielle

avec $k=1$, $c_f=0.8\mu m$, $\alpha=1$ et $d_m=c$. Tandis que pour la méthode des discontinuités des déplacements, on a considéré une double symétrie, discretisé le quart de trou en 100 éléments, la partie chargée en 50 éléments et la partie libre en 50 éléments aussi.

Sharpe et al [89] avaient supposé que la rupture se produisait lorsque la contrainte maximale au niveau de la frontière du trou était égale à la résistance maximale à la rupture du polysilicone σ_r . Le tableau 6.1 montre les résultats retrouvés par les deux méthodes qui sont comparés à ceux retrouvés par Sharpe et al numériquement en utilisant la MEF où ils avaient utilisé 432 éléments et aussi expérimentalement.

Tableau 6.1 : Comparaison des valeurs prédites et mesurées.

	MELG	MDD	MEF (Sharpe et al [89])	Expérimentalement (Sharpe et al [89])
σ_r (GPa)	0.39	0.40	0.42	0.5

Les résultats obtenus par la MELG et la MDD son assez proche du résultat numérique obtenu par Sharpe et al, mais sont assez loin du résultat expérimental.

6.5 Rupture des micro-dispositifs SMEM en polysilicone

Cet exemple a été traité par Ballarini et al [13] dans le but d'étudier le comportement mécanique et plus spécifiquement les caractéristiques de rupture des structures en polysilicone relativement fines (jusqu'à $7.5\mu m$). Fabriquées en utilisant des procédures identiques à celles utilisées pour la fabrication des structures SMEM. La figure (6.11) montre le spécimen étudié. La couche qui constitue le masque est en CHF_3 , cependant, seulement le substrat i.e. le polysilicone est considéré pour cette étude.

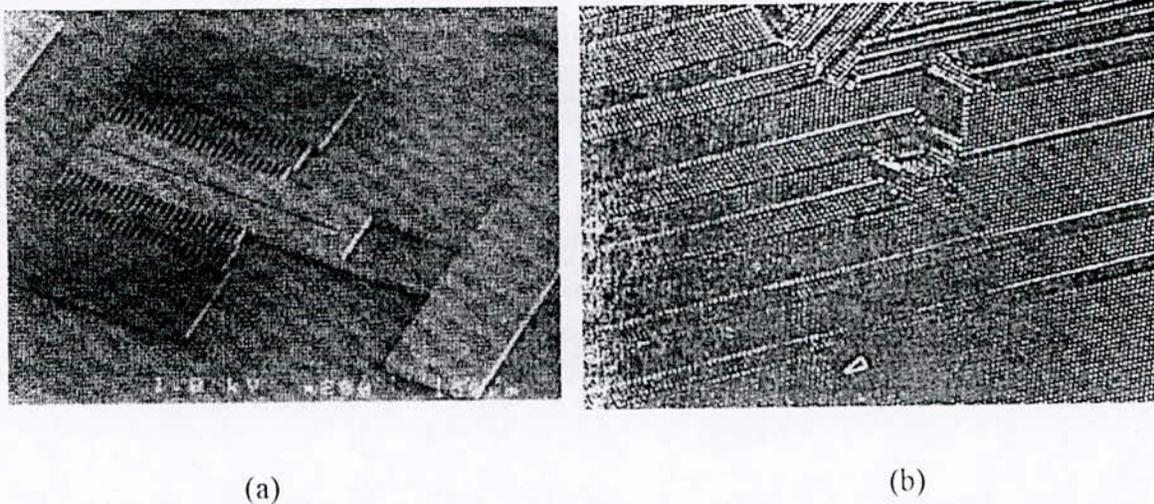


Figure 6.11 : Spécimen de micro-rupture en polysilicone. (a) Spécimen Typique, (b) Image de dislocation.

Un dessin schématique du spécimen de rupture sans chargement est montré sur la figure 6.12.a. L'épaisseur est de $7.5\mu m$ et la longueur du ligament non-fissuré x de 6, 10 et $20\mu m$. la distance a correspondante à l'excitation de la commande du balai a été considérée infinie (dans notre cas nous l'avons considérée égale à 1 cm). Pour causer la rupture de ce spécimen, une sonde rigide a été utilisée pour écarter l'entaille de $2\mu m$ de large comme montré sur la figure 6.12.a.

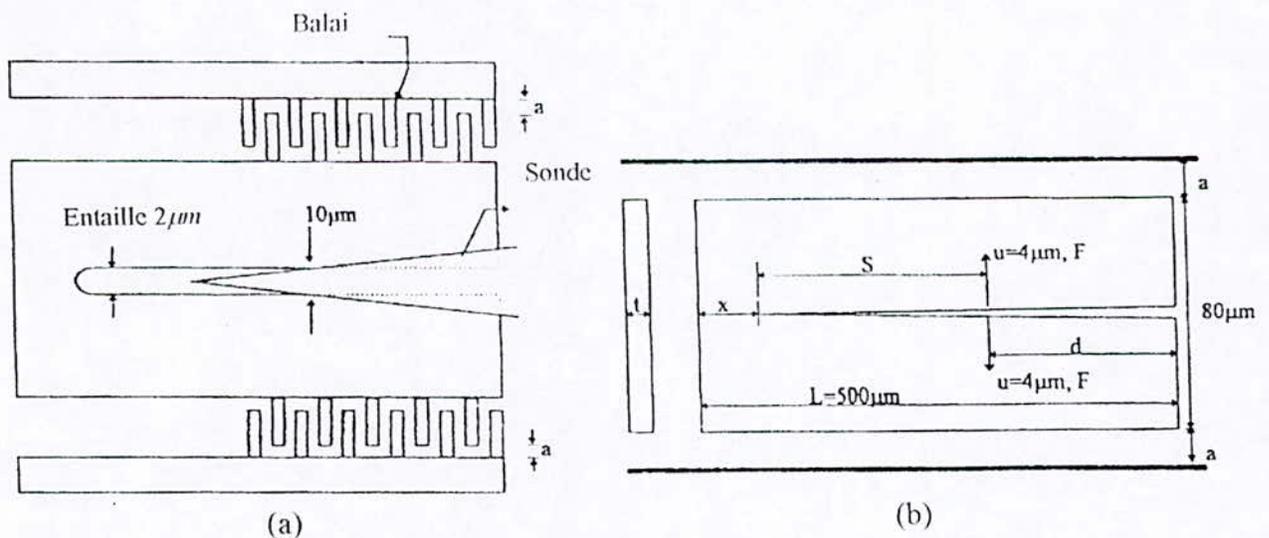


Figure 6.12 : Dessin schématique du spécimen de micro-rupture. (a) le spécimen, (b) les variables et les dimensions utilisées pour le modèle mathématique.

Pour des convenances de calcul, le modèle mathématique montré sur la figure 6.12.b a été utilisé et pour des raisons de symétrie par rapport à ox , seulement la partie supérieure a été considérée. Les conditions aux limites correspondantes à zéro déplacement suivant oy et zéro force (contrainte de cisaillement) suivant ox ont été représentées par des appuis simples et les barres fines montrées sur la figure 6.11 ont été représentées par des appuis simples dans la figure 6.13.

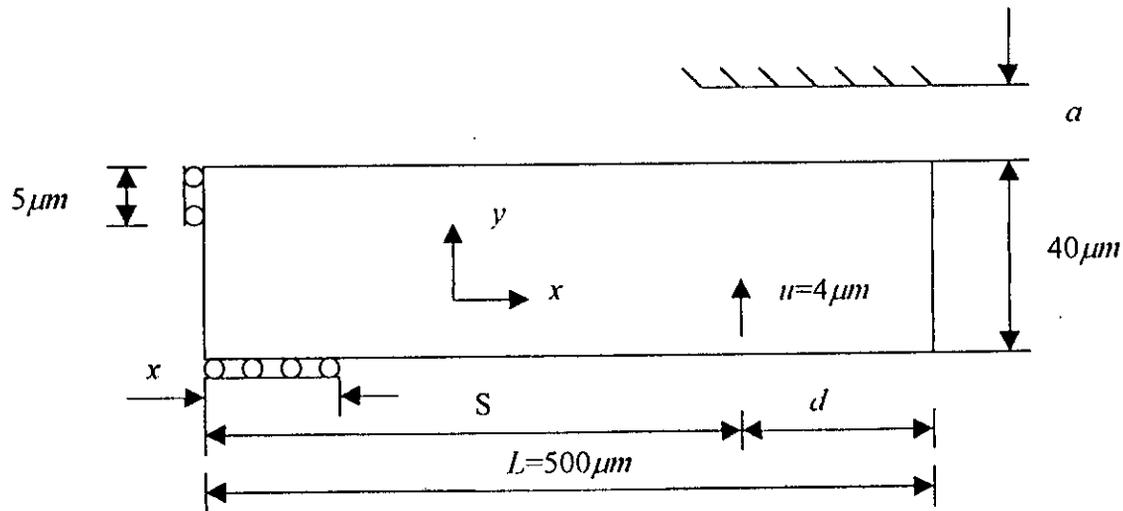
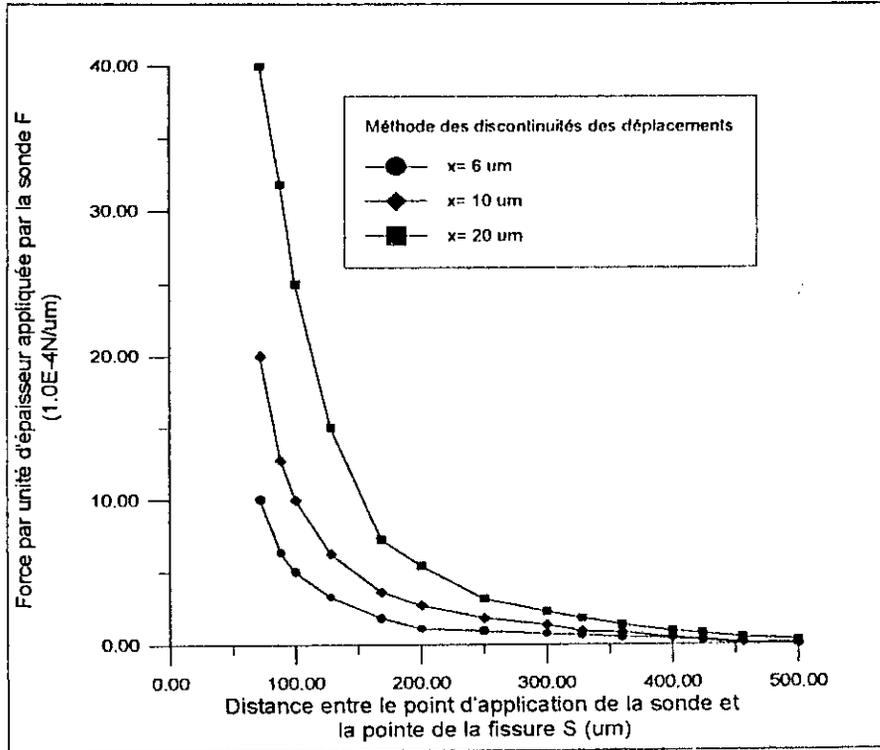


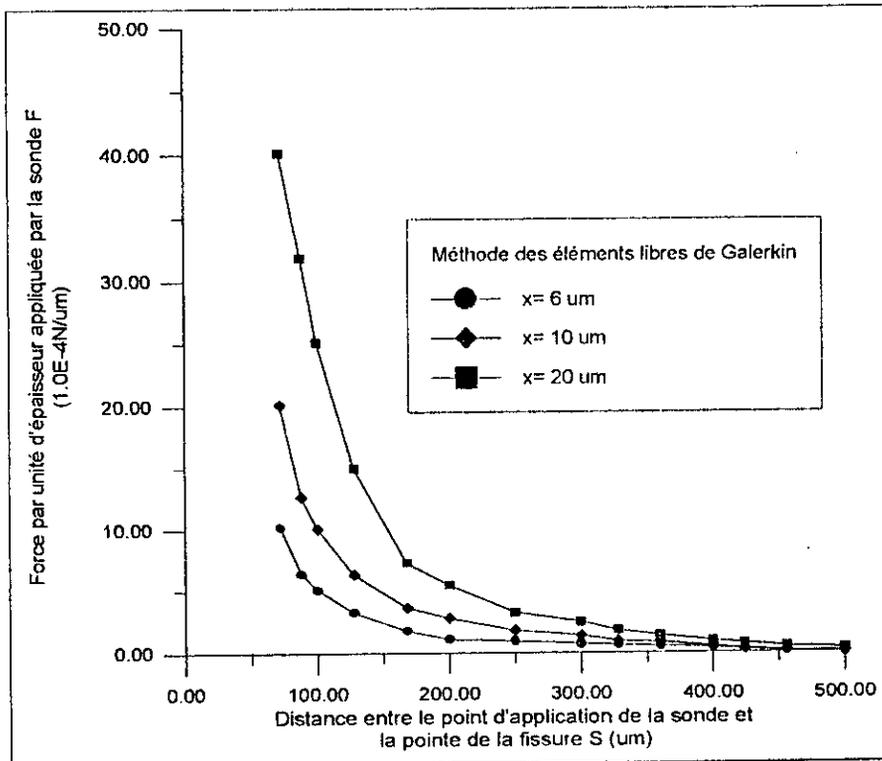
Figure 6.13 : Modèle mathématique du spécimen de micro-rupture.

Le matériau utilisé est le polysilicone considéré comme isotrope et a comme caractéristiques $E = 160 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.22$. Pour la fissure, le déplacement produit par la sonde est égal à $4 \mu\text{m}$. Ballarini et al avait utilisé la méthode des éléments finis utilisant un maillage raffiné au niveau de pointe de la fissure. Pour notre cas, nous avons utilisé les mêmes suppositions faites par eux et cela en utilisant nos deux méthodes la MDD et la MELG.

Pour la méthode des éléments libres de Galerkin, on a considéré un nombre de nœuds égale à 600 éléments et une distribution de cellules de 4×50 avec un nombre de points quadratique pour effectuer l'intégration numérique égal à 2×2 . La fonction de poids est exponentielle avec $k=1$; $c_f = 9 \mu\text{m}$, $\alpha = 1$ et $d_m = c$. Alors que pour la méthode des discontinuités des déplacements, on a considéré bien sûr une symétrie par rapport à ox et discretisé la partie de la fissure en 150 éléments, la partie supérieure en 75 éléments et les parties libres droite et gauche en 75 éléments aussi.



(a)

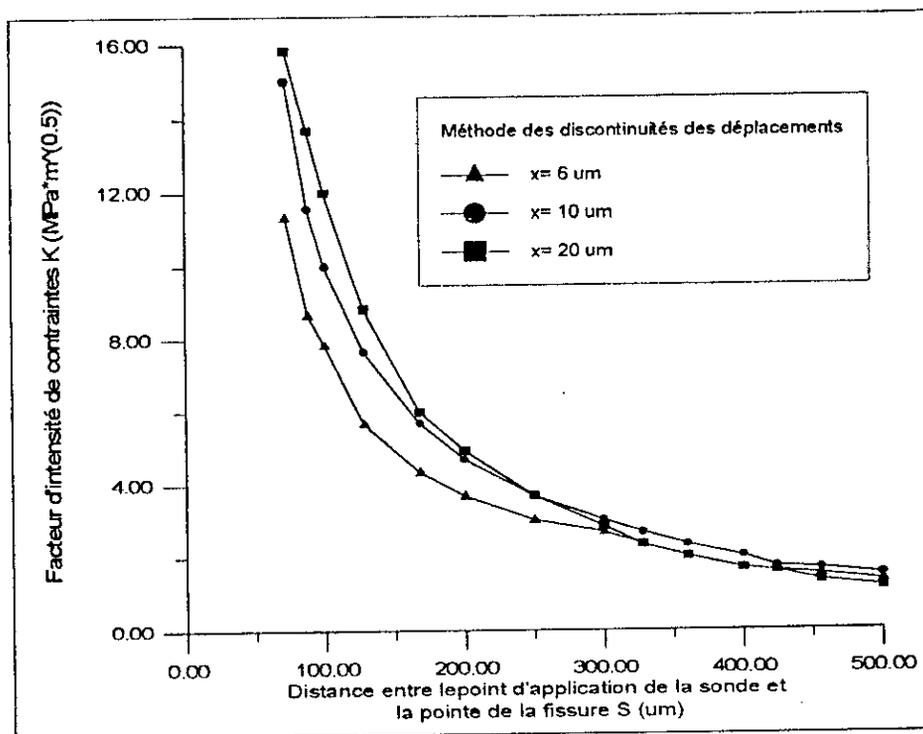


(b)

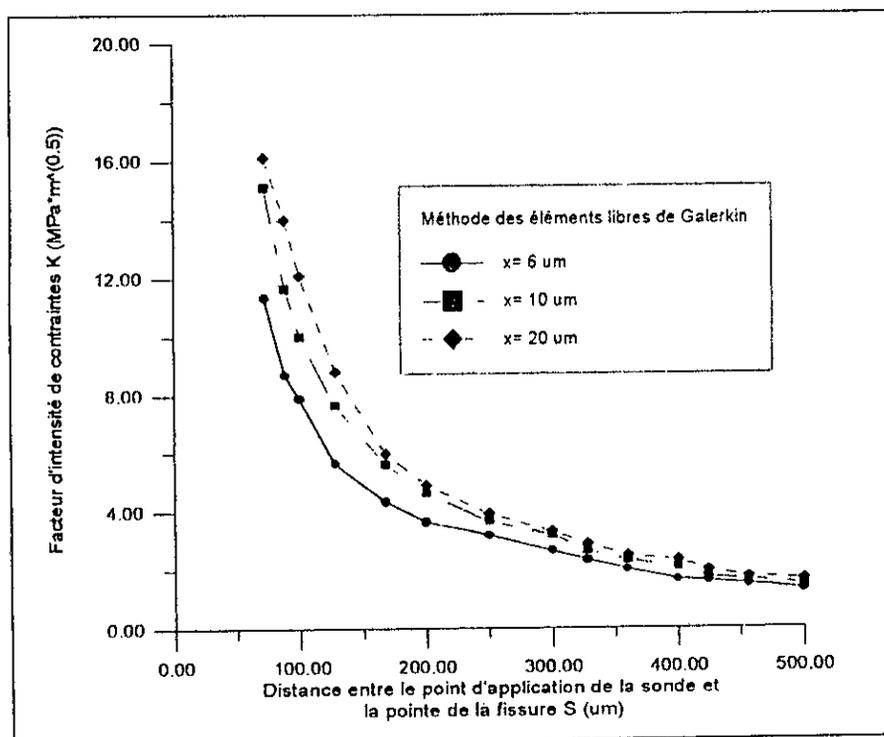
Figure 6.14 : Variation de la force appliquée par la sonde par rapport à la distance entre le point d'application de la sonde et la pointe de la fissure pour les trois longueurs du ligament non-fissuré. (a) MDD, (b) MELG.

Les résultats du calcul sont montrés sur les figures 6.14.a et 6.14.b qui montrent la variation de la force par unité d'épaisseur pour des valeurs du ligament non-fissuré $x= 6, 10$ et $20\mu m$ respectivement et cela en considérant que $a = \infty$ qui représente les déplacements des points sur la surface supérieure du spécimen et qui est égale à la distance libre parcourue par la commande du balai. La figure 6.14.a représente les résultats obtenus par la MDD et la figure 6.14.b ceux obtenus par la MELG. On peut noter que les deux figures sont en concordance et sont presque identiques aux résultats obtenus par Ballarini et al utilisant la MEF. On Peut noter aussi que plus la sonde est près de la pointe de la fissure, plus la force requise pour maintenir la fissure ouverte à $4\mu m$ est grande.

Les figures 6.15.a et 6.15.b représentent la variation du facteur d'intensité de contraintes respectivement pour la MDD et la MELG et cela pour les mêmes valeurs du ligament fissuré avec $a=\infty$. On peut noter ici la même chose que pour la variation de la force car les deux figures sont en concordance et sont presque identiques à celles obtenues par Ballarini et al utilisant toujours la MEF. Il est à noter aussi que le facteur d'intensité de contrainte suit la même tendance que la force, i.e. plus la sonde se rapproche de la pointe de la fissure, plus le facteur d'intensité de contrainte K_I augmente.



(a)



(b)

Figure 6.15 : Variation du facteur d'intensité de contraintes par rapport à la distance entre le point d'application de la sonde et la pointe de la fissure pour les trois longueurs du ligament non-fissuré. (a) MDD, (b) MELG.

6.6 Rupture des microstructures à entailles en silicone monocristallin et en acrylique

Dans cette section, nous allons étudier le phénomène de rupture dans des microstructures à entailles qui ont été déjà étudiées par Suwito [93] expérimentalement et numériquement utilisant la MEF. Suwito avait utilisé une analyse asymptotique concernant la rupture des structures isotropes et anisotropes à entailles et avait implémenté la MEF à cette analyse. Dans notre cas, nous avons juste considéré les contours extérieurs, i.e. toutes les frontières ainsi que l'entaille en supposant une fissure initiale au niveau de l'entaille. Le premier exemple traite la rupture d'un matériau isotrope qui est l'acrylique à des dimensions un peu plus grandes que celles des structures SMEM, alors que les trois autres sont en silicone mono-cristallin considéré par contre comme anisotrope et les dimensions utilisées sont de l'ordre de celles des structures SMEM. La MELG est considérée pour les trois derniers exemples.

6.6.1 Test de flexion d'une barre en acrylique à entaille

Suwito avait effectué une série de tests sur des structures en acrylique à entailles de différents angles. Les dimensions principales étaient égales à $L=76.2\text{ mm}$, $b=12.7\text{ mm}$ et $h=17.8\text{ mm}$ avec des angles de l'entaille $\gamma=60^\circ$, 90° et 120° . Pour chaque angle de l'entaille, quatre profondeurs de l'entaille ont été utilisées : $a=1.78\text{ mm}$, 3.56 mm , 5.33 mm et 7.11 mm (voir figure 6.16), ce qui correspond à un rapport de a/h de 0.1, 0.2, 0.3 et 0.4 respectivement. Suwito avait considéré l'acrylique comme étant un matériau isotrope de caractéristiques $E=2.3\text{ GPa}$ et $\nu=0.36$ et en de déformation plane. Il avait combiné des résultats expérimentaux avec des résultats numériques utilisant comme toujours la MEF. Pour raisons de symétrie, il avait considéré la moitié de la structure en utilisant un maillage hautement raffiné de 1308 éléments rectangulaires et 4016 éléments, ce qui correspondait à 8032 degrés de liberté.

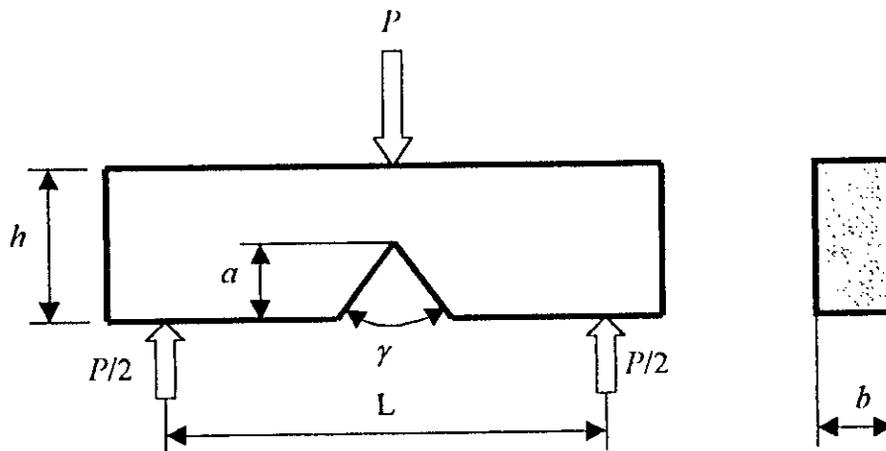


Figure 6.16 : Barre en acrylique à entaille avec γ variable.

Pour notre étude, les mêmes suppositions ont été faites mais sans avoir utilisé l'analyse asymptotique. Les deux méthodes ont été utilisées, i.e. la méthode des éléments libres de Galerkin et la méthode des discontinuités des déplacements.

Pour la méthode des éléments libres de Galerkin, on a considéré un nombre de nœuds égal à 800 éléments et une distribution des cellules de 8×50 avec un nombre de points quadratiques pour chaque cellule égal à 2×2 pour effectuer l'intégration numérique. La fonction de poids étant toujours exponentielle avec $k=1$, $c_I=0.2\text{ mm}$, $\alpha=1$ et $d_{ml}=c$.

Alors que pour la méthode des discontinuités des déplacements, on a considéré bien sûr une symétrie par rapport à oy , puis discretisé la partie supérieure en 75 éléments, la partie gauche en 75 éléments et la partie oblique qui représente l'entaille en 100 éléments.

Les résultats obtenus pour différents angles et différents rapports a/h sont montrés sur les tableaux 6.2-6.5. Il est à noter que la force P appliquée sur la structure correspond à la force critique de rupture P_r qui est calculée à partir de la relation $\sigma_r = 3 P_r L / (2bh^2)$ où σ_r est la résistance à la rupture qui est donnée dans les tableaux pour chaque cas.

Tableau 6.2 : Facteur d'intensité de contraintes K_I pour une structure en flexion avec $a=1.78 \text{ mm}$ ($a/h=0.1$).

	$\gamma=60^\circ, \sigma_r=17.29 \text{ MPa}$	$\gamma=90^\circ, \sigma_r=19.52 \text{ MPa}$	$\gamma=120^\circ, \sigma_r=25.05 \text{ MPa}$
	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$
Suwito, MEF	0.580	0.882	2.047
MELG	0.510	0.809	1.694
MDD	0.459	0.769	1.269

Tableau 6.3 : Facteur d'intensité de contraintes K_I pour une structure en flexion avec $a=3.56 \text{ mm}$ ($a/h=0.2$).

	$\gamma=60^\circ, \sigma_r=12.95 \text{ MPa}$	$\gamma=90^\circ, \sigma_r=13.95 \text{ MPa}$	$\gamma=120^\circ, \sigma_r=18.67 \text{ MPa}$
	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$
Suwito, MEF	0.606	0.857	1.988
MELG	0.546	0.803	1.732
MDD	0.501	0.778	1.596

Tableau 6.4 : Facteur d'intensité de contraintes K_I pour une structure en flexion avec $a=5.33 \text{ mm}$ ($a/h=0.3$).

	$\gamma=60^\circ, \sigma_r=8.78 \text{ MPa}$	$\gamma=90^\circ, \sigma_r=11.48 \text{ MPa}$	$\gamma=120^\circ, \sigma_r=14.41 \text{ MPa}$
	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$
Suwito, MEF	0.531	0.900	1.935
MELG	0.492	0.819	1.854
MDD	0.443	0.741	1.793

Tableau 6.5 : Facteur d'intensité de contraintes K_I pour une structure en flexion avec $\alpha=7.11 \text{ mm}$ ($\alpha/h=0.4$).

	$\gamma=60^\circ, \sigma_r=7.35 \text{ MPa}$	$\gamma=90^\circ, \sigma_r=8.97 \text{ MPa}$	$\gamma=120^\circ, \sigma_r=9.55 \text{ MPa}$
	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$
Suwito, MEF	0.576	0.907	1.660
MELG	0.512	0.826	1.503
MDD	0.451	0.751	1.450

A partir de ces tableaux, il devient clair que pour un angle et une profondeur donnée de l'entaille et en considérant une seule méthode, la valeur du facteur d'intensité de contraintes varie dans un intervalle restreint. Il est à noter aussi que les valeurs obtenues par la MELG et la MDD sont assez loin des valeurs obtenues par Suwito en utilisant la MEF. Cette différence peut être expliquée par le fait qu'on n'avait pas utilisé l'analyse asymptotique de la rupture des structures à entailles et aussi du fait du nombre de nœuds utilisé par Suwito qui était égal à 4016 nœuds. Cependant, on peut noter que le facteur d'intensité de contrainte K_I décroît avec l'angle de l'entaille. Mais pour une variation de la profondeur de l'entaille, le K_I varie faiblement. Donc, on peut suggérer que le facteur d'intensité de contraintes K_I peut être utilisé pour corrélérer l'initiation de la rupture de telles structures avec un angle de l'entaille donné.

6.6.2 Test de flexion d'une barre en silicone monocristallin anisotrope à entaille d'angle 70.53°

Cet exemple également traité par Suwito sur la même forme de barre que la précédente, mais à des dimensions de l'ordre de celles utilisées dans des structures SMEM. Pour cet exemple, l'angle de l'entaille est de $\gamma=70.53^\circ$ et les dimensions sont $L=20\text{mm}$, $b=1.5\text{mm}$ et $h=1.08\text{mm}$ pour des profondeurs de l'entaille ont été utilisées : $\alpha=0.093\text{mm}$, 0.147mm , 0.164mm et 0.210mm (voir figure 6.17).

Suwito avait considéré le silicone comme étant anisotrope. La matrice d'élasticité D en tridimensionnel est donnée par l'équation (6.5). L'exemple traité étant en bidimensionnel et puisque la matrice étant en tridimensionnel, Suwito n'avait considéré que les éléments correspondant au plan oxy : i.e. σ_x , σ_y et σ_{xy} . Suwito avait déclaré aussi que les matériaux anisotropes testés en flexion le long des directions principales du matériau ne présente aucune

déformation en cisaillement par rapport à ces directions et que la déformation était indépendante. Parallèlement, la contrainte de cisaillement produit seulement des déformations en cisaillement. Donc en d'autres termes, il n'y a aucun couplage entre les déformations en traction ou en cisaillement. Selon son point de vue, ceci n'était pas applicable lorsque le spécimen était testé sous des angles arbitraires aux directions principales. Ainsi le spécimen était étudié de telle manière que le nouveau système de coordonnées (x, y) est un angle β par rapport aux directions initiales. Pour cet exemple l'angle β est égal à 90° .

Comme pour l'exemple précédant, Suwito avait combiné des résultats expérimentaux avec des résultats numériques utilisant comme toujours la MEF. Pour raisons de symétrie, il avait considéré la moitié de la structure en utilisant un maillage hautement raffiné de 1363 éléments rectangulaires et 4272 éléments, ce qui correspondait à 8458 degrés de liberté.

$$D = \begin{bmatrix} 165.7 & 63.9 & 63.9 & 0 & 0 & 0 \\ 63.9 & 194.36 & 35.24 & 0 & 0 & 0 \\ 63.9 & 35.24 & 194.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 79.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 79.56 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

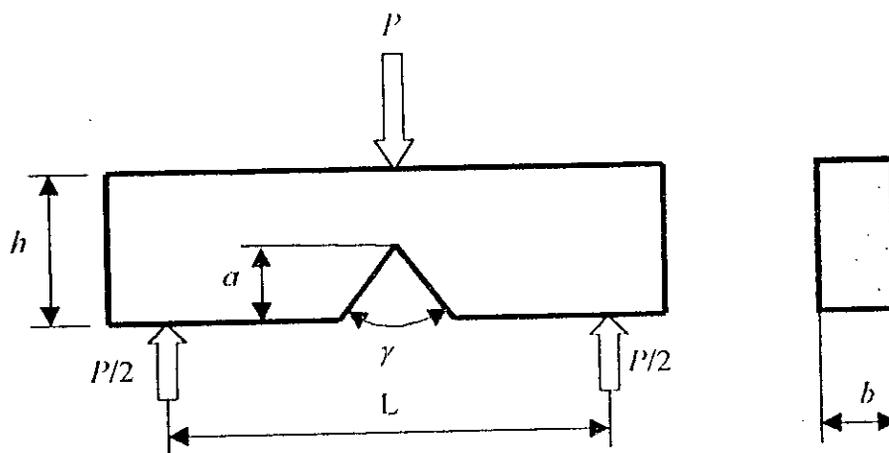


Figure 6.17 : Barre en silicone anisotrope avec un angle de l'entaille $\gamma = 70.53^\circ$.

Toujours comme l'exemple précédent, on a considéré les mêmes suppositions que Suwito sans utiliser bien sûr l'analyse asymptotique. Seule la méthode des éléments libres de

Galerkin a été utilisée ici puisque la méthode des discontinuités des déplacements ne peut être appliquée aux milieux anisotropes.

Pour notre code de calcul, nous avons considéré un nombre de nœuds égal à 800 éléments et une distribution des cellules de 8×50 avec un nombre de points quadratiques pour chaque cellule égal à 2×2 pour effectuer l'intégration numérique. La fonction de poids étant toujours exponentielle avec $k=1$, $c_j = 0.07 \text{ mm}$, $\alpha = 1$ et $d_{mj} = c$. Les résultats obtenus sont représentés sur le tableau 6.6. Comme tout à l'heure, la force P appliquée sur la structure correspond à la force critique de rupture P_r qui est calculée à partir de la relation $\sigma_r = 3 P_r L / (2bh^2)$ où σ_r est la résistance à la rupture qui est donnée dans le tableau 6.6 pour chaque cas.

Tableau 6.6 : Facteur d'intensité de contraintes pour une barre à entaille d'angle 70.53° avec quatre différentes profondeurs de l'entaille.

	$K_I \text{ (MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$			
	$a=0.093 \text{ mm}$ $\sigma_r = 86.19 \text{ MPa}$	$a=0.147 \text{ mm}$ $\sigma_r = 61.90 \text{ MPa}$	$a=0.164 \text{ mm}$ $\sigma_r = 61.15 \text{ MPa}$	$a=0.210 \text{ mm}$ $\sigma_r = 52.60 \text{ MPa}$
Suwito, MEF	0.81	0.73	0.76	0.74
MELG	0.67	0.66	0.62	0.68

Les résultats obtenus par Suwito et par la MELG sont assez différents. Comme pour l'exemple précédent, cette différence peut être expliquée par le fait qu'on n'avait pas utilisé l'analyse asymptotique de la rupture des structures à entailles et aussi du fait du nombre de nœuds utilisé par Suwito qui était égal à 4016 nœuds. Cependant, on peut noter à partir des données de la rupture que pour une méthode donnée (MEF ou MELG), il n'y a pas une différence significative entre les K_I pour différentes valeurs de la profondeur de l'entaille. Donc, comme la conclusion faite précédemment, le K_I peut caractériser la rupture de ce genre de barres et cela pour n'importe quelle profondeur de l'entaille. Toutefois, il dépend de l'angle de l'entaille. On peut donc essayer de retrouver une relation empirique entre ces deux précédents paramètres.

6.6.3 Rupture d'une structure en T

Un autre exemple étudié par Suwito pour analyser la rupture d'une structure pareille à celles des structures SMEM où des transitions brusques de profondeurs existent. Cette structure sous forme d'un T est montrée sur les figures 6.18 et 6.19. Elle a des coins de 90° au niveau de la transition de profondeur entre w_1 et w_2 et une section droite trapézoïdale. Exactement comme l'exemple précédent, Suwito avait considéré le silicone comme étant anisotrope. La matrice d'élasticité D en tridimensionnel est donnée par l'équation (6.6). L'exemple traité étant en bidimensionnel et puisque la matrice est en pseudo-plan, Suwito avait considéré que les éléments correspondant au plan oxy : i.e. σ_x , σ_y et σ_{xy} . Pour les mêmes considérations que l'exemple précédant, une rotation de la matrice d'élasticité a été effectuée et cela avec un angle de rotation β égal à 45° .

Comme pour l'exemple précédant, Suwito avait combiné des résultats expérimentaux avec des résultats numériques utilisant comme toujours la MEF. Pour raisons de symétrie par rapport à oy , il avait considéré la moitié de la structure en utilisant un maillage hautement raffiné de 1662 éléments rectangulaires et 5167 éléments, ce qui correspondait à 10198 degrés de liberté.

$$D = \begin{bmatrix} 165.7 & 63.9 & 63.9 & 0 & 0 & 0 \\ 63.9 & 165.7 & 63.9 & 0 & 0 & 0 \\ 63.9 & 63.9 & 165.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 79.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 79.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 79.56 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Comme les exemples précédents, on a considéré les mêmes suppositions que Suwito sans utiliser bien sûr l'analyse asymptotique. Ici, seulement la méthode des éléments libres de Galerkin a été utilisée puisque la méthode des discontinuités des déplacements ne peut être appliquée aux milieux anisotropes.

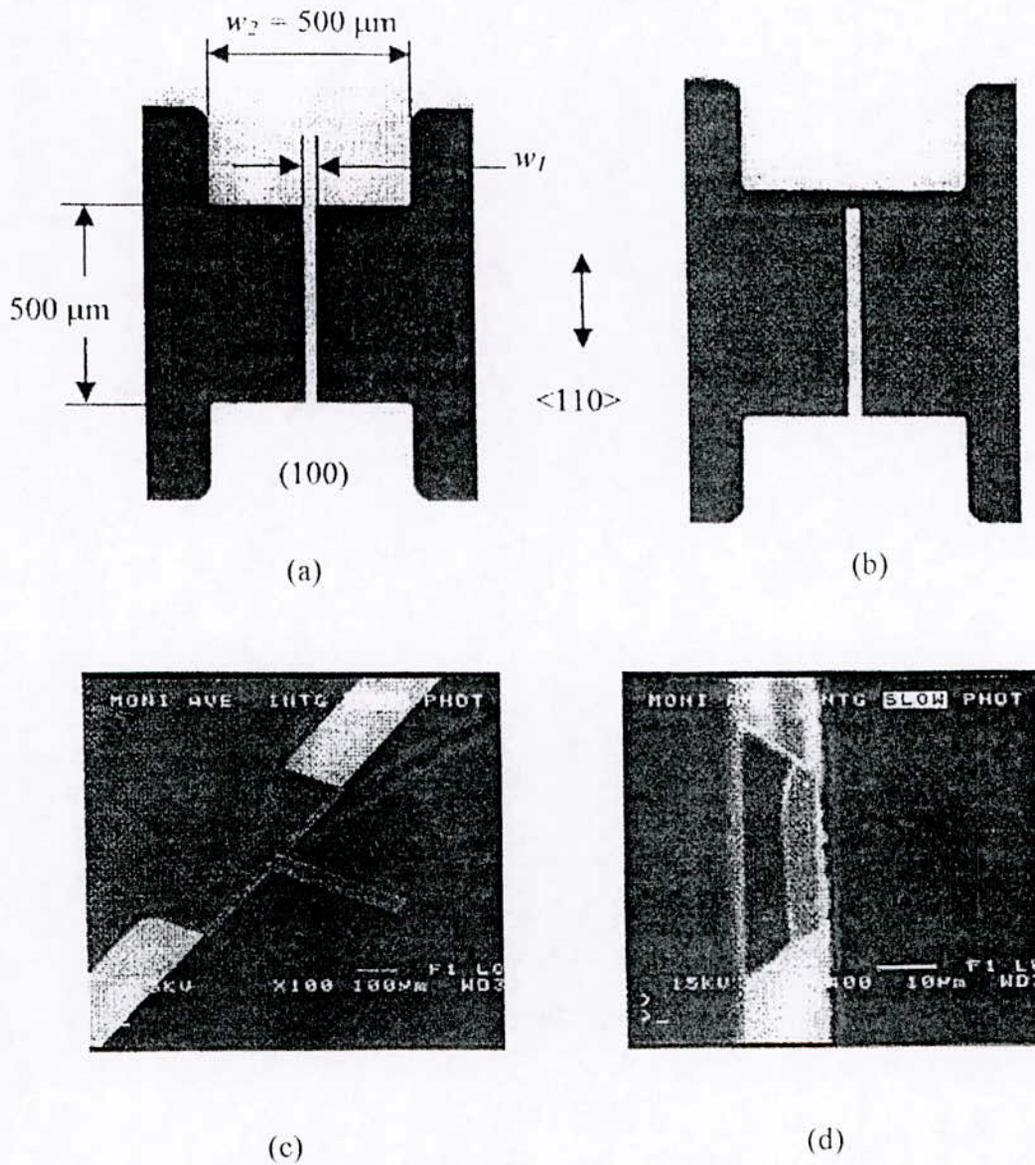


Figure 6.18 : Vue de dessus d'une structure en T en silicone (l'épaisseur $t=15\mu\text{m}$). (a) structure intacte $w_1=8\mu\text{m}$, $28\mu\text{m}$ et $48\mu\text{m}$, (b) structure fissurée, (c) un côté de la barre fissurée et (d) le plan de rupture.

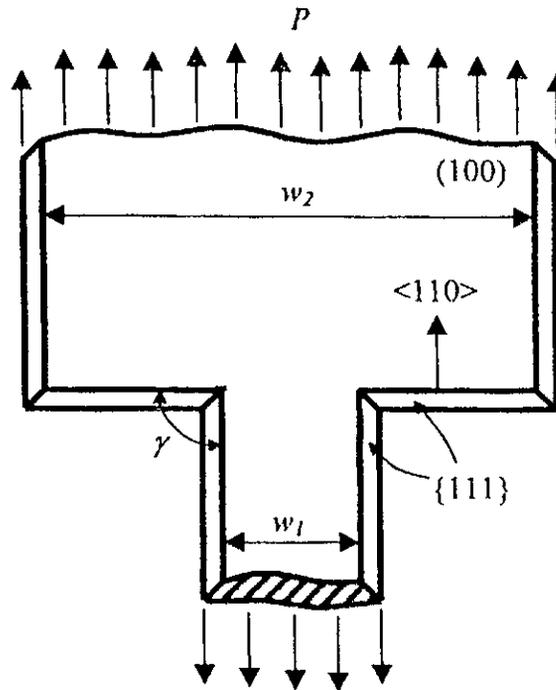


Figure 6.19 : Structure en T en silicone anisotrope

Pour notre code de calcul, nous avons considéré un nombre de nœuds égal à 800 éléments et une distribution des cellules de 8×50 avec un nombre de points quadratiques pour chaque cellule égal à 2×2 pour effectuer l'intégration numérique. La fonction de poids étant toujours exponentielle avec $k=1$, $c_f=6\mu m$, $\alpha=1$ et $d_{mi}=c$. Les résultats obtenus sont représentés sur le tableau 6.6. Comme tout à l'heure, la force P appliquée sur la structure correspond à la force critique de rupture P_r qui est calculée à partir de la relation $\sigma_r=3 P_r L/(2bh^2 A)$ où A est la section trapézoïdale de la structure et σ_r est la résistance à la rupture qui est donnée dans le tableau 6.7 pour chaque cas.

Tableau 6.7 : Facteur d'intensité de contraintes pour une structure en T d'angle 90° en silicone pour trois différentes valeurs de w_1 .

	K_I (MPa·m ^{0.5})		
	$w_1=8\mu m$ $\sigma_r=951.4$ MPa	$w_1=28\mu m$ $\sigma_r=674.2$ MPa	$w_1=48\mu m$ $\sigma_r=554.7$ MPa
Suwito, MEF	2.09	2.09	2.10
MELG	1.603	1.589	1.627

Encore une fois, les résultats obtenus par Suwito et par la MELG sont assez différents. Comme pour l'exemple précédent, cette différence peut être expliquée par le fait qu'on n'avait pas utilisé l'analyse asymptotique de la rupture des structures à entailles et aussi du fait du nombre de nœuds utilisé par Suwito qui était égal à 5167 nœuds. Cependant, on peut noter à partir des données de la rupture que pour une méthode donnée (MEF ou MELG), il n'y a pas une différence significative entre K_I pour différentes valeurs de la profondeur w_I . Donc, comme précédemment, le K_I peut caractériser la rupture de ce genre de barres et cela pour n'importe quelle profondeur w_I . Toutefois, il dépend de l'angle de l'entaille. On peut donc essayer de retrouver une relation empirique entre ces deux précédents paramètres. Ce comportement a des applications sur des structures SMEM fabriquées en silicone où les coins comme ceux de la structure étudiée sont souvent rencontrés. Donc, ce critère de rupture peut être utilisé pour prédire la rupture au niveau des coins. Toutefois, pour que cela soit effectif, il faut que le domaine de l'intégrale I soit un peu plus étendu pour que la zone du processus de rupture domine les singularités élastiques.

6.6.4 Test de flexion d'une barre en silicone monocristallin anisotrope à entaille d'angle 125.26°

Cet exemple est pareil à celui étudié dans la section 6.6.2 sauf que celui-ci possède une sorte de rainure au niveau de l'entaille. Toujours déjà traité par Suwito, les caractéristiques de celui-ci sont : l'angle de l'entaille $\gamma = 125.26^\circ$ et les dimensions $L=20mm$, $b=1.5mm$ et $h=1.08mm$ pour des profondeurs de l'entaille $a=0.211mm$ et $0.213mm$ correspondant à une longueur de la rainure $d=0.184mm$ et $0.029mm$ (voir figure 6.20).

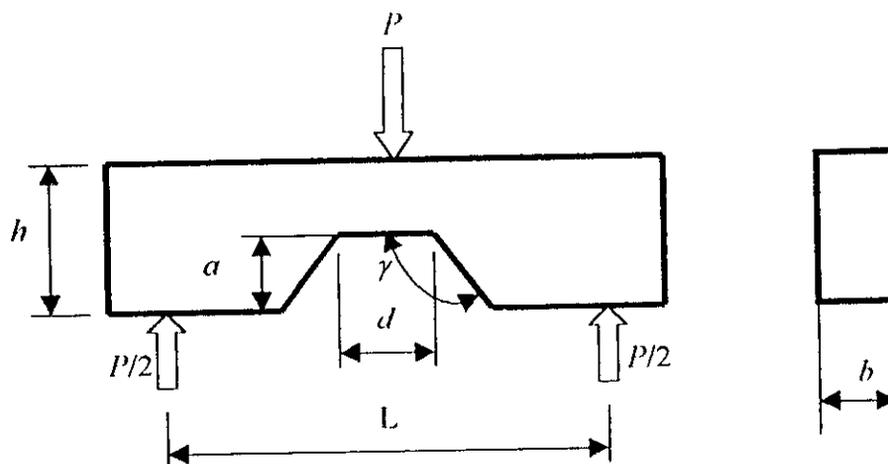


Figure 6.20 : Barre en silicone anisotrope avec un angle de l'entaille $\gamma = 125.26^\circ$.

Suwito avait considéré le silicone comme étant anisotrope. La matrice d'élasticité D en tridimensionnel est donnée par l'équation (6.7). L'exemple traité étant en bidimensionnel et pour les mêmes considérations que précédemment (voir exemple 6.6.2) Suwito avait effectué une rotation de cette matrice et cela d'un angle β égal à 62.63° . Les plans principaux étaient $\langle 110 \rangle$ et $\langle 001 \rangle$. Comme pour l'exemple précédant, Suwito avait combiné des résultats expérimentaux avec des résultats numériques utilisant comme toujours la MEF. Pour raisons de symétrie, il avait considéré la moitié de la structure en utilisant un maillage hautement raffiné de 1849 éléments rectangulaires et 5666 éléments, ce qui correspondait à 11247 degrés de liberté.

$$D = \begin{bmatrix} 186.09 & 49.57 & 57.84 & 0 & 0 & -15.98 \\ 49.57 & 202.63 & 41.3 & 0 & 0 & 4.28 \\ 57.84 & 41.3 & 194.36 & 0 & 0 & 11.7 \\ 0 & 0 & 0 & 56.96 & 11.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11.7 & 73.5 & 0 \\ -15.98 & 4.28 & 11.7 & 0 & 0 & 65.23 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Comme les exemples précédents, on a considéré les mêmes suppositions que Suwito sans utiliser bien sûr l'analyse asymptotique. Comme pour les deux exemples qui précèdent, seulement la méthode des éléments libres de Galerkin a été utilisée puisque la méthode des discontinuités des déplacements ne peut être appliquée aux milieux anisotropes.

Pour notre code de calcul, nous avons considéré un nombre de nœuds égal à 800 éléments et une distribution des cellules de 8×50 avec un nombre de points quadratiques pour chaque cellule égal à 2×2 pour effectuer l'intégration numérique. La fonction de poids étant toujours exponentielle avec $k=1$, $c_l = 0.07mm$, $\alpha = 1$ et $d_{nl} = c$. Les résultats obtenus sont représentés sur le tableau 6.8. Comme tout à l'heure, la force P appliquée sur la structure correspond à la force critique de rupture P_r qui est calculée à partir de la relation $\sigma_r = 3 P_r L / (2bh^2)$ où σ_r est la résistance à la rupture qui est donnée dans le tableau 6.8 pour chaque cas.

Tableau 6.8 : Facteur d'intensité de contraintes pour une barre à entaille d'angle 125.26° avec deux différentes profondeurs de l'entaille correspondant à deux longueurs de rainure.

	K_I (MPa·m ^{0.5})	
	$\alpha=0.211mm$ $d=0.184mm$ $\sigma_r=186.11$ MPa	$\alpha=0.213mm$ $d=0.029mm$ $\sigma_r=157.18$ MPa
Suwito, MEF	6.35	6.60
MELG	3.945	4.129

Les résultats obtenus par Suwito et par la MELG sont assez différents. Comme pour les exemples précédents, cette différence peut être expliquée par le fait qu'on n'avait pas utilisé l'analyse asymptotique de la rupture des structures à entailles et aussi du fait du nombre de nœuds utilisé par Suwito qui était égal à 5666 nœuds. Cependant, on peut noter à partir des données de la rupture que pour une méthode donnée (MEF ou MELG), il n'y a pas une différence significative entre les K_I pour différentes valeurs de la profondeur de l'entaille et de longueurs de la rainure. Donc, le K_I peut caractériser la rupture de ce genre de barres et cela pour n'importe quelle profondeur de l'entaille et de longueur de rainure. Toutefois, il dépend de l'angle de l'entaille. On peut donc essayer de retrouver une relation empirique entre ces deux précédents paramètres.

Chapitre 7

Conclusion

Nous avons développé une technique numérique pour étudier le comportement de la rupture des matériaux SMEM. Comme l'industrie des SMEM continue de croître, l'étude du comportement des matériaux SMEM doit suivre cette lancée. Toutefois, les procédures expérimentales et numériques développées pour l'étude des spécimens à l'échelle macroscopique ne peuvent être nécessairement utilisées pour l'étude des spécimens SMEM et cela à cause des effets produits par la miniaturisation.

Ainsi, l'analyse de la rupture des structures isotropes et anisotropes contenant des coins pointus (i.e. entailles) a été traitée dans le dessein de donner une analyse rationnelle pour la conception des structures SMEM. Même si l'analyse asymptotique concernant la fatigue et la rupture des structures à entailles n'a pas été utilisée, on a pu extraire une relation entre le facteur d'intensité de contraintes K_I correspondant au mode I de rupture, et l'angle de l'entaille γ . Il a été apparent que le K_I croît lorsque l'angle de l'entaille croît. Donc il est possible de corrélérer le K_I empiriquement comme fonction de l'angle de l'entaille. Toutefois, la base théorique pour une telle corrélation n'est pas très développée pour que cela soit réalisé. Plus encore, on a pu établir, par les résultats obtenus, que le facteur d'intensité de contraintes K_I pouvait caractériser la rupture des spécimens à entailles étudiés et cela pour un angle d'entaille donné. Toute fois, il est à noter que durant tout le travail, nous avons considéré que la zone plastique et les zones inélastiques qui sont souvent présentes dans ce genre de structures étaient trop petites.

Durant ce travail, nous avons appliqué aussi une nouvelle méthode numérique appelée méthode des éléments libre de Galerkin. Appelée méthode sans maillage (meshless method en anglais), elle a l'avantage de bien s'adapter aux problèmes de larges déformations ou des problèmes où la géométrie change continuellement tels que la propagation des fissures. Cet avantage provient du fait qu'il n'y a pas de maillage, donc les problèmes tels que la direction de la maille où la complication du maillage ne se posent plus. Ainsi la fissure est simplement considérée comme un prolongement de la frontière. Certes, les résultats obtenus par cette

méthode durant ce travail sont peut convainquantes comparés à ceux de la MDD et ceux obtenus par d'autres études, mais il est à signaler que dans tous les exemples de rupture étudiés par cette méthode ont montré que le pourcentage d'erreurs variait seulement entre 0 et 1%. Il est à signaler aussi que faute de problèmes de géométrie, seulement une distribution nodale régulière à été utilisée alors qu'il était impératif d'utiliser un raffinement nodal circulaire près de la pointe de la fissure pour capter le champ de contraintes singulier avec une précision suffisante pour pouvoir avoir un calcul précis du facteur d'intensité de contraintes. Ce qui peut expliquer la différence des résultats entre ceux obtenus dans ce travail et ceux obtenus dans d'autres références.

Enfin, nous pourrions conclure de ces résultats divergents que l'accroissement de la fissure dans une structure en silicone mono ou polycristallin utilisée dans les dispositifs SMEM doit être considéré durant le processus de conception. Les fissures peuvent être introduites ailleurs que durant l'utilisation des dispositifs SMEM, donc le comportement de la propagation de la fissure démontré dans ce travail et dans des travaux précédents n'est probablement pas limité aux fissures initiées durant le fonctionnement. Il est possible que la rugosité des surfaces extérieures et les vides tels que les trous agissent comme des fissures. Ainsi, vu la dimension des structures SMEM une petite extension de la fissure peut provoquer une rupture. Les concepteurs des dispositifs SMEM doivent considérer le pire des cas de fissuration et cela pour chaque dispositif. Ils doivent anticiper l'extension la plus rapide de la fissure et déterminer le temps de rupture pour qu'ils puissent prévoir un cycle de renouvellement.

Durant ce travail, plusieurs points et considérations n'ont pas été soulevés et qui pourraient faire l'objet de travaux de recherches durant les années à venir :

- Durant ce travail, nous n'avons pas pris en considération l'analyse asymptotique concernant la rupture des structures à entaille. De plus, dans la méthode des éléments libres de Galerkin, nous n'avions pas utilisé de raffinement nodal près de la pointe de la fissure.
- L'analyse asymptotique de la rupture peut être aussi élargie aux chargements et déformations en tridimensionnel et peuvent être utilisées comme base d'une analyse tridimensionnelle des structures à entailles. Une telle étude est hautement recommandée

pour établir le phénomène de rupture des structures en silicone à entailles où la fissure peut s'initier au niveau des coins tridimensionnels.

- Dans notre travail, nous avons considéré que la zone plastique et les zones inélastiques étaient trop petites par rapport à la zone de la concentration des contraintes au niveau de l'entaille.
- L'étude faite ici, peut être aussi élargie à l'étude du phénomène de rupture dans les structures multicouches, puisque, généralement, le substrat est protégé par une couche d'oxyde de silicone et d'aluminium. Il peut être donc intéressant d'étudier la rupture au niveau des coins de ce genre de structure où la fissure peut commencer au niveau du substrat et se propager jusqu'au niveau de la couche.

Références

- [1] Adams, S.G., "Design of electrostatic activators to tune the effective stiffness of MEMS", PhD dissertation, Cornell University, August 1996.
- [2] Adjerid, S., and Flaherty, J.E., "A Moving Mesh Finite Element Method with local refinement for parabolic partial differential equations", Computer Methods, in Applied Mechanics and Engineering (1986) 3-26 1986 Elsevier Science Publishers B. V.
- [3] Aliabadi, M. H., and Brebbia, C.A., "Advances in Boundary Element Methods for fracture mechanics", Computational Mechanics Publications, Southampton Boston.
- [4] Aliabadi, M. H., and Rooke, D. P., "Numerical Fracture Mechanics", Computational Mechanics publications, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [5] Aluru, N. R., and White, J., "A coupled Numerical Technique for Self-consistent Analysis of Microelectromechanical Systems", DSC-Vol.59, Microelectromechanical Systems (MEMS), ASME 1996.
- [6] Aluru, N. R., and White, J., "An efficient numerical technique for electromechanical simulation of complicated micro electromechanical structures", Sensors and Actuators A58 (1997) 1-11, 1997 Elsevier Science S. A.
- [7] Antonsson, E. K., "Structured Design, Methods for MEMS", Engineering and Applied Science, California Institute of technology, October 1996.
- [8] Athavale, M. M., Yang, H. Q., and Przekwas, A. J., "Coupled Fluid Thermo-Structures Simulation Methodology for MEMS Applications", 3D2.08P, 1997 International Conference on solid state sensors and actuators, Chicago, June 16-19-1997.
- [9] Babuska, I., Chaudra, J., and Flaherty, J.E., "Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations", Siam, Philadelphia 1983.
- [10] Babuska, I., and Gui, W., "Basic of Feed back and adaptive Approaches in the Finite Element Method", computer methods in applied mechanics and Engineering 58 (1996), pp. 27-42, 1996 Elsevier Science publishers.
- [11] Babuska, I., Henshaw, W. D., EOliger, J., Flaherty, J.E., Hopcroft, J.E, and Tezduyar, Tayfun, "Modeling, Mesh Generation, and adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations", Springer - Verlag, 1986.
- [12] Babuska, I., Zienkiewicz, O. C., Gago, J., and De A. Oliveria, E.R, "Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations", A Wiley-interscience Publication.

- [13] Ballarini, R., Mullen, R.L., Yin, Y., Kahn, H., Stenmer, S., and Heuer, A.H., "The Fracture Toughness of Polysilicon microdevices", *J. Master. Res*, Vol 12, N° 4, Apr 1997, 1997 Materials Research Society, pp. 915-922.
- [14] Barsom, J. M., and Rolfe, S. T., "Fracture and Fatigue Control in Structures", Prentice-Hall, Inc0, 1987.
- [15] Beerschwinger, U. N., Milne, G., Yang, S. J., Reuben, R. L., Saugster, A. J., and Ziad, H., "Coupled Electrostatic and Mechanical FEA of a Micromotor", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 3, N° 4, December 1994.
- [16] Beissel, S., and Belytschko, T., "Nodal Integration of the Element Free Galerkin Method", *Journal of Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, pp. 49-74.
- [17] Belytschko, T., Gu, L., and Lu, Y.Y., "Fracture and Crack Growth by Element-Free Galerkin Methods", *Journal of Mater. Sci. Eng*, 1995, pp. 519-534.
- [18] Belytschko, T., Krongauz, Y., Fleming, M., Organ, D., and Liu, W.K., "Smoothing and Accelerated Computations in the Element Free Galerkin Method", Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, December 1995.
- [19] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., and Krysl, P., "Meshless Methods: AN Overview and Recent Developments", Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, May 1996.
- [20] Belytschko, T., Lu, Y.Y., and Gu, L., "Crack Propagation by Element-Free Galerkin Methods", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 51, N° 2, pp. 295-315, 1995, 1995 Elsevier Science Ltd.
- [21] Belytschko, T., Lu, Y.Y., and Gu, L., "Element -Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 37, (1994), pp. 229 – 256.
- [22] Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., and Tabbara, M., "Element-Free Galerkin Method for Static and Dynamic Fracture, *International Journal for Solids Structures*, Vol. 32, 1994, pp. 2547-2570.
- [23] Belytschko, T., Organ, D., and Krongauz, Y., "A coupled finite element-element free Galerkin method", *Journal of Computational Mechanics*, 1995, pp. 186-195.
- [24] Belytschko, T., and Tabbara, M., "Dynamic Fracture using Element Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, 1996, pp. 923-938.
- [25] Berlin, Andrew A., and Gabriel, Kaigham J., "Distributed MEMS, New Challenges for computation", *IEEE Computational Science & Engineering*, January - march 1997, pp. 12-29.

- [26] Biran, Adrian, and Breiner, Moshe, "MATLAB For Engineers", Addison-Wesley Publishing Company.
- [27] Boutry, M., Bosseboeuf, A., Bourouin, T., Grand Champ, T.P., and Dufour-Gergam, E., "Accuracy of thin film stress measurements with C.Si microbeams fabricated by dry etching". J. Vac. SCI. Technology B. 15(5), Sep/Oct, 1997.
- [28] Brebbia, C.A., and Aliabadi, M.H., "Adaptive finite and boundary element methods", Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, Co-published with Elsevier Applied Science London, New York.
- [29] Brebbia, C.A., and Dominguez, J., "Boundary Elements an Introductory Course", Computational Mechanics Publications.
- [30] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C., "Boundary Element Technics", Springer Verlag Publishing Series.
- [31] Cheng, Jung-Ho, "Adaptive grid optimization for structural analysis. Geometry based approach", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 107 (1993), pp. 1-22, 1993 Elsevier Science Publishers B. V.
- [32] Chung, Won Jee, Feng, Hongwei, VonPreissig, Fred J., Nejhad, Mehrdad N. Ghasemi, and yuh, Jun ku , "Developmrnt of a Finite Element Analysis: Based Numerical Solution for Vurtual Rapid Prototyping of Piezo-electric MEMS", Microelectromechanical Systems (MEMS), ASME 1996, pp. 313-318.
- [33] Connally, J.A, and Brown, S.B., "Micromechanical Fatigue Testing", Experimental Mechanics, June 1993, pp. 89-90.
- [34] Connally, J.A., and Brown, S.B., "Slow Crack Growth in Single-Crystal Silicon", Science Vol. 256, 12 June 1992.
- [35] Cordes L. W., and Moran, B., "Treatment of Material Discontinuity in the Element Free Galerkin Method", Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996.
- [36] Crary, Seldem B., Ogesh, Y., and Glanchandani, B., "Parametric Modeling of a Micro accelerometer using I.Optimal Design Of Experiments for Finite Element Analysis", Center For integrated Sensors and Circuits, University of Michigan, U.S.A., DSC-Vol. 59, Microelectromechanical systems (MEMS), ASME 1996.
- [37] Crouch, S.L., and Starfield, A.M., "Boundary Element Methods in Solid Mechanics", Allen and Unwin, 1983.
- [38] Devoe, Don L., and Pisano, Albert P., "Modeling and Optimal Design of Piezoelectric Cantilever Microactuators", Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 6, N° 3, September 1997, pp. 266-270.
- [39] Dillard, David A., Taylor, Mark W., Andruet, Raul, and Holzer, Siegfried M., "Simple Two- and Three-Dimension Adhesive Finite Elements For Stress Analysis

- and Energy Release Rate Calculations in Adhesively Bonded Joints”, *Fatigue and Fracture Mechanics*, 27th Volume.
- [40] Dilmi, R., et Boukria, H., “Application de la Methodes des Contraintes Fictives aux Milieux Anisotropes, PFE, Departement de Génie Mécanique, Ecole Nationale Polytechnique, 1995.
- [41] Ericson, Frederic, Johansson, Stefan, and Schweitz, Jan-Ake, “Hardness and Fracture Toughness of Semiconducting materials studies by indentation and Erosion Techniques”, *Materials Science and Engineering*, A 105/106 (1988); pp. 131-141.
- [42] Fan, L., Howe, R., and Muller, R., “Fracture Toughness Characterization of Brittle Thin Films”, Vol. 2, pp. 872-874, June 1990.
- [43] Fleming, M., Chu, Y.A., Moran, B., and Belytschko, T., “Enriched Element Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 40, 1997, pp. 1483-1504.
- [44] Fujita, Hiroyuki, “A Decade of MEMS and its future”, Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, 1997 IEEE.
- [45] Funk, J., Bühler, J., Korvink, J.G., and Baltes, H., “Thermomechanical modeling of an actuated micromirror”, *sensors and actuators A* 46-47 (1995), pp. 632-636, Elsevier Science S. A.
- [46] Funk, J., Korvink, J.G., Bächtold, M., Bühler, J., and Baltes, H., “Coupled 3D Thermo-electro-mechanical Simulations of Micro-actuators”, ETH-ZÜRICH, Physical Electronics Laboratory, 1996 IEEE.
- [47] Funk, Jörg M., Korvink, J.G., Bühler, Johannes, Bachtold, Martin, and Baltes, Henry, “Solidis: A Tool For Microactuator simulation in 3-D”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol.6, N° 1, March 1997, 1997 IEEE, pp. 70-82.
- [48] Gabriel, K. J., “Engineering Microscopic Machines”, *Scientific American*, September 1995.
- [49] Ghemour, M., Hillal, A., “Etude Numérique du Phenomene de Rupture autour d’unclusion par la méthode des discontinuités des déplacements”, PFE, Département de Génie Mécanique, Ecole Nationale Polytechnique, 1997.
- [50] Gerstle, Walter H., Lenke, Lary R., and Heo, Gwanghee, “Stress Intensity Factor Calibration of Edge Notched Beam”, *Fatigue and Fracture Mechanics*, 27th Volume.
- [51] Gilbert, J. R., Legtenberg, R., and Senturia, S. D., “3D Coupled Electro-Mecahnics for MEMS : Application of cosolve – EM”, 1995 IEEE, pp. 122-132.
- [52] Goh, Siang –Huat, “Probabilistic FE Analyses of shallow foundations using Monte Carlo Simulations”, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, May 1997.

- [53] Gray, L.J., Martha, Luiz F., and Ingrassia, A.R., "Hypersingular integrals in Boundary element Fracture analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 29, pp. 1135-1158.
- [54] Hegen, D., "Element Free Galerkin Method in Combination with Finite Element Approaches", *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19996, pp. 143-166.
- [55] Heim, D., Xiao, L., and Mear, M.E., "Boundary Element Dislocation Density Methodology for Analysis of Cracks in Anisotropic Solids", *Fatigue and Fracture Mechanics*, 27th Volume.
- [56] Hsieh, S.H., "Parallel processing for Nonlinear Dynamics simulations of Structures Including Rotating Bladed-disk Assemblies", PhD dissertation school of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, report to NASA Lewis Research Center, May 1993.
- [57] Hung, Elmer S., Yang, Yao-Joe, and Senturia, Stephen D., "Low-order Models for fast dynamical Simulation - MEMS Microstructures", 4A2.03, 1997 International conference on solid-state sensors and actuators, Chicago. June 16-19-1997.
- [58] Jones, Peter T., Johnson, George C., and Howe, Roger T., "Micromechanical Structures For Fracture Testing of Brittle Thin Films", DSC-Vol.59, *Microelectromechanical Systems (MEMS)*, ASME 1996, pp. 325-348.
- [59] Kaljevic, I., and Saigal, S., "An improved Element Free Galerkin Formulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 1997.
- [60] Korvink, J.G., Funk, J., Roos, M., Wachutka, G., and Baltes, H., "SESES: A Comprehensive MEMS Modelling System", Laboratory for physical electronics, ETH -Zurich, 1994 IEEE.
- [61] Kriegel, Walter, Steiner, Peter, Folkmer, Bernd, and Lang, Walter, "Micro Therm : a program for thermal modeling of microstructures", *Sensors and actuators A46-47 (1995)* 635-639 Elsevier Science S. A.
- [62] Krongauz, Y., and Belytschko, T., "Consistent Pseudo-Derivatives in Meshless Methods", *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics*, 1997, pp. 371-386.
- [63] Krongauz, Y., and Belytschko, T., "Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations using finite elements", 1996, pp. 133-145.
- [64] Krystl, P., and Belytschko, T., "Analysis of Thin Plates by the Element Free Galerkin Method", *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics*, 1995, pp. 20-35.
- [65] Krystl, P., and Belytschko, T., "Analysis of thin Shells by the Element Free Galerkin Method", *Journal of Computational Mechanics, International Journal of Solids Structures*, 1996, pp. 3057-3080.

- [66] Krystl, P., and Belytschko, T., "Element Free Galerkin Method: Convergence of the Continuous and Discontinuous Shape Functions", *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics*, 1997, pp. 257-277.
- [67] Kwon, Young W., and Bang, Hyochoong, "The Finite Element Method using MATLAB", *CRC Mechanical Engineering Series*, 1997.
- [68] Landy, M. A., Armen, H., Jr., and Eidinoff, H. L., "Enhanced Stop-Drill Repair Procedure for Crack Structures", *American Society for Testing and Materials*, Philadelphia, 1986, pp. 190-220.
- [69] Lefevre, Y., Mazenc, Lajoie M., Sarrante, E., and Camon, H., "First steps towards design, simulation, modeling and fabrication of electrostatic micromotors", *sensors and actuators A46-47 (1995) 645-648*, 1996 Elsevier Science S. A.
- [70] Lerch, Ph., Romanowicz, B., Paratte, L., De Rooij, N. F., and Renaud, P. H., "Numerical Simulation of Planar Electrostatic Wobble Motors", *Sensors and Actuators*, A46-47 (1995) pp. 640-644. 1996 Elsevier Science S. A.
- [71] Ljung, Per B., "Sequential Solutions of Field Equations using a Single BEM Mode", *DSC-VOL 59, Microelectromechanical Systems (MEMS) ASME* 1996.
- [72] Lu, Y. Y., Belytschko, T., and Gu, L., "A New Implementation of the Element Free Galerkin Method", *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics*, 1994, pp. 397-414.
- [73] Macdonald, N.C., "Scream Microelectromechanical systems", *Microelectronic engineering* 32 (1996) 49-73, 1996 Elsevier.
- [74] Marxer, C., Gretilat, M. A., De Rooij, N. F., Bätting, R., Anthamatten, O., Valk, B., and Vogel, P., "Reliability Consideration for electrostatic polysilicon actuators using as an example the REMO component", *sensors and actuators AG1 (1991) 449-454*, 1997 Elsevier Science S. A.
- [75] Mukherjee, Y. X., and Mukherjee, S., "On Boundary Conditions in the Element Free Galerkin Method", *Journal of Computational Mechanics*, 1997, pp. 264-270.
- [76] Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P., "Generalizing the finite element Method : Diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, Springer Verlag 1992.
- [77] Noor, Ahmed K., and Oden, J. Tinsley, "State-Of-the-Art Surveys on Computational Mechanics", *The American Society of Mechanical Engineers*.
- [78] Ochoa, O. O., and Reddy, J.N., "Finite Element Analysis of Composite Laminates", *Klumer Academic Publishers*.
- [79] Orgawa, H., Suzuki, K., Kaneko, S., Ishikawa, Y., and Kitahara, T., "Measurements of Mechanical Properties of Microfabricated Thin Films", *Mechanical Engineering*

Laboratory, AIST, MITI Department of Advanced Machinery, Namiki 1-2, Tsukuba Ibaraki, 305 Japan.

- [80] Osterberg, P., Yie, H., Cai, X., White, J., and Senturia, S., "Self-Consistent Simulation and Modeling of Electrostatically Deformed Diaphragms", Massachusetts Institute of Technology, Cambridge MA, U.S.A, 1994 IEEE, pp. 28-32.
- [81] Pecters, Eric, "Challenges in commercializing MEMS", IEEE Computational Science & Engineering, pp. 44-54.
- [82] Petersen, Kurt E., "Silicon as a mechanical material", Proceedings of the IEEE, Vol. 70, N° 5 May 1982.
- [83] Ponthot, J. P. and Belytschko, T., "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Formulation for Element Free Galerkin Methods", Journal of Computer Methods in Applied Mechanics, 1998, pp. 19-46.
- [84] Saif, M. T. A., and MacDonald, N.C., "Planarity of Large MEMS", Journal of Micro-electromechanical Systems, Vol.5, No.2, June 1996.
- [85] Schroth, Andreas, Blochwitz, Torsten and Gerlach, Gerald, "Simulation of a complex sensor system using coupled simulation programs", sensors and actuators A 54 (1996) pp. 632-635, 1996 El Sevier science S. A.
- [86] Senturia, Stephen D., Harris, Robert M., Johnson, Brian P., Kim, Songmin, Nabors, Keith, Shulman, Matthew A., and White, Jacob K., "A Computer-Aided Design System for Microelectromechanical Systems (MEMCAD)", Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. N° 1, March 1992, pp. 3-13.
- [87] Senturia, Stephen D., Aluru, Nara Yan, and White, Jacob, "Simulating the Behavior of MEMS Devices, computational Method and Needs", 1997, IEEE Computational Science and Engineering, pp. 30-43.
- [88] Sharpe, William N., Jr., Yuan, Bin, Vaidyanathan, Ranji, and Edwards, Richard L., "Measurements of Yong's Modulus, Poisson's Ratio, and tensile strength of polysilicon", John Hopkins University, Maryland USA.
- [89] Sharpe, William N., Jr., Vaidyanathan, Ranji, Yuan, Bin, Bao, Gang, and Edwards, Richard L., "Effect of etch Holes on the mechanical properties of polysilicon", J. Vac.Sci, Technol.B 15(5), Sep/Oct 1997.
- [90] Shi, F., "Simulation and analyses of MEMS with applications of sensitivity analysis and optimization", PhD dissertation, Cornell University, May 1995.
- [91] Strouboulis, T., and Haque, K.A., "Recent experiences with error estimation and adaptivity, par I : Review of error estimators for scalar elliptic problems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 97 (1992), pp. 399-436, 1992 Elsevier Science Publishers B. V.

- [92] Stronboulis, T., Haque, K.Á., “Recent experiences with error estimation and adaptivity, Part II: Error estimation for H-adapture approximations on grids of triangles and quadrilaterals”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 100 (1992), pp. 359-430, 1992 Elsevier Science Publishers B. V.
- [93] Suwito, W., “Fracture of Notched Silicon Microstructures”, PhD Dissertation, University of Colorado at Boulder, 1997.
- [94] Tai, Y.C., and Muller R.S., “Fracture Strain of LPCVD Polysilicon”, *Berkeley Sensor and Actuator*, University of California at Berkeley, USA, 1988 IEEE.
- [95] Tang, W. Chikeung, “Electrostatic Comb drive for resonant sensor and actuator applications”, PhD Dissertation, Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley, November 1990.
- [96] Trimmer, W., “Grand in purpose insignificant in size”, *Belle Mead Research*, 1997 IEEE.
- [97] Trimmer, William S., “Micro mechanics and MEMS, Classic and Seminal”, 1990, IEEE Industrial Electronics Society, Sponsor, Inc, New York.
- [98] Timoshenko, S. P. and Goudier, J. N., “Theory of Elasticity”, 3rd Edn, McGraw-Hill, NewYork, 1970.
- [99] Van Arsdell, William W., “Subcritical Crack Growth in Polysilicon MEMS”, PhD Dissertation, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, USA, June 1997.
- [100] Van Loan, Charles F., “A Matrix Vector Approach using MATLAB: Introduction to Scientific Computing”, *The MATLAB Curriculum Series*, 1993.
- [101] Wilson, Howard B., and Turcotte, Louis H., “Advanced Mathematics and Applications using MATLAB, CRC Mechanical Engineering Series.
- [102] Yang, T. Y., “Finite Element Structural Analysis”, *Prentice-Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics*.
- [103] Zienkevicz, O.C., “Finite Element Methods”, Volume 1, McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.
- [104] Zienkevicz, O.C., “Finite Element Methods”, Volume 2, McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.

Appendice A

Convergence de L'approximation de u

Pour établir le fait que les valeurs nodales seront reproduit exactement par $u^h(x)$ lorsqu'elles sont obtenues à partir d'un polynôme pour $u(x)$, nous allons considérer une fonction $u(x)$ ayant un développement en séries de Taylor jusqu'au $k^{\text{ème}}$ ordre autours d'un point \bar{x} exprimé ici en unidimensionnel pour raisons de simplicité par :

$$u(\bar{x} + y) = u(\bar{x}) + y \left(\frac{du}{dx} \right)_{\bar{x}} + \dots + \frac{y^k}{k!} \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)_{\bar{x}} + \frac{y^{k+1}}{(k+1)!} \varepsilon(\bar{x}, y) \quad (\text{A.1})$$

ou bien :

$$u(\bar{x} + y) = \begin{bmatrix} 1 & y & \dots & y^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(\bar{x}) \\ \left(\frac{du}{dx} \right)_{\bar{x}} \\ \dots \\ \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)_{\bar{x}} \end{Bmatrix} + \frac{y^{k+1}}{(k+1)!} \varepsilon(\bar{x}, y) \quad (\text{A.2})$$

ou encore :

$$u(\bar{x} + y) = p(y)^T \{ \alpha \} + \frac{y^{k+1}}{(k+1)!} \varepsilon(\bar{x}, y) \quad (\text{A.3})$$

On va considérer maintenant l'approximée de $u(x)$ au point \bar{x} définie dans l'équation (3.10) par :

$$u^h(x) = p(x)^T \{ a(\bar{x}) \} \quad (\text{A.4})$$

qui peut être transféré par un changement des coordonnées d'origine $x \rightarrow y = x - \bar{x}$ en :

$$u^h(\bar{x} + y) = p(x - \bar{x})^T [Q(\bar{x})] \{ a(\bar{x}) \} = p(y)^T \{ \alpha(\bar{x}) \} \quad (\text{A.5})$$

Pour un exemple bidimensionnel, si la base polynomiale est linéaire, i.e. $p^T(x) = [1, x, y]$, alors :

$$[Q(\bar{x})] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{y} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Donc l'approximée $u^h(\mathbf{x})$ peut être considérée comme une estimée du développement en séries de Taylor de u jusqu'au $k^{\text{ème}}$ ordre exprimé par l'équation A.3. Cela justifie les estimées des dérivées proposées dans l'équation (3.12), exprimées ici par :

$$\left(\frac{\delta^j u}{\delta x^j} \right)_{\bar{x}} = \alpha_j^{\bar{x}} \cdot j!, \quad j \leq k. \quad (\text{A.7})$$

De plus, on peut considérer que (voir référence [76]):

$$\{\alpha\} - \{\alpha^{\bar{x}}\} = \begin{bmatrix} \zeta^{k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \xi \end{bmatrix} \frac{1}{(k+1)!} \{\text{vecteur indépendant de } \xi\} \quad (\text{A.8})$$

où ξ est une constante reliée à la grandeur du domaine d'influence du point \bar{x} utilisé dans l'approximation.

Ainsi, il existe une constante $\kappa(\bar{x})$ tel que :

$$\left| \left(\frac{d^j u}{dx^j} \right)_{\bar{x}} \left(\frac{\delta^j u}{\delta x^j} \right)_{\bar{x}} \right| < \kappa(\bar{x}) \frac{\xi^{k+1-j}}{(k+1)!}, \quad j = 0, \dots, k \quad (\text{A.9})$$

Des résultats similaires sont obtenus pour plus d'une dimension. Des détails mathématiques additionnels sont donnés dans la référence [76].

Appendice B

Principe Variationnel ;

Multiplicateurs de Lagrange ;

Espaces de Sobolev

Qu'est ce que le principe variationnel, les multiplicateurs de Lagrange, les espaces de Sobolev, et comment peuvent-ils être utilisés ? C'est pour répondre à ces questions que cet appendice est adressé.

B.1 Principe Variationnel

Le principe variationnel spécifie une quantité scalaire (une fonction) Π qui est définie par une intégrale de la forme :

$$\Pi = \int_{\Omega} F(u, \frac{\partial}{\partial x} u, \dots) d\Omega + \int_{\Gamma} E(u, \frac{\partial}{\partial x} u, \dots) d\Gamma \quad (\text{B.1})$$

où u est la fonction inconnue et F et E sont des opérateurs spécifiés. La solution du problème continu est une fonction u qui rend Π stationnaire par rapport à un petit changement δu . Donc, pour une solution du problème continu, la variation est :

$$\delta \Pi = 0 \quad (\text{B.2})$$

Pour la méthode des éléments libres de Galerkin, le principe variationnel est défini dans le chapitre 3 par l'équation (3.15) où ont été introduits les multiplicateurs de Lagrange et les fonctions test.

B.2 Les multiplicateurs de Lagrange

Considérons le problème de rendre la fonction Π stationnaire, sujette à l'inconnue u obéissant à quelques relations différentielles additionnelles :

$$C(u) = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{B.3})$$

On peut introduire cette contrainte en formant une autre fonction :

$$\bar{\Pi}(u, \lambda) = \Pi(u) + \int_{\Omega} \lambda^T C(u) d\Omega \quad (\text{B.4})$$

où λ est un ensemble de fonctions de coordonnées indépendantes sur le domaine Ω connu sous le nom des multiplicateurs de Lagrange. La variation de la nouvelle fonction est maintenant :

$$\delta \bar{\Pi}(u, \lambda) = \delta \Pi(u) + \int_{\Omega} \delta \lambda^T C(u) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda^T \delta C(u) d\Omega \quad (\text{B.5})$$

et puisque $C(u) = 0$ (donc $\delta C = 0$) et, simultanément $\delta \Pi = 0$.

Identiquement, les contraintes peuvent être introduites au niveau de quelques points ou sur les frontières du domaine. Pour l'instant, si on exige que u obéisse à :

$$E(u) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{B.6})$$

On peut ajouter à la fonction originelle le terme :

$$\int_{\Gamma} \lambda^T E(u) d\Gamma \quad (\text{B.7})$$

où λ est maintenant une fonction inconnue définie seulement sur Γ . Alternativement, si la contrainte C est applicable seulement à un ou plusieurs points, alors le simple rajout de $\lambda^T C(u)$ à ces points à la fonction générale Π qui va introduire un nombre discret de contraintes.

Il devient donc possible de toujours introduire des fonctions additionnelles λ et modifier Π pour inclure n'importe quelle contrainte imposée. Dans la discretisation, on doit utiliser des fonctions test pour décrire u et λ qui sont définies dans le chapitre 3 par l'équation (3.15) et qui appartiennent aux espaces de Sobolev d'ordre un et zéro.

B.3 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont définis par l'ensemble :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m \right\} \quad (\text{B.8})$$

où les espaces $L^p(\Omega)$ sont définis par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \in M(\Omega) : \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\} \quad (\text{B.9})$$

où $M(\Omega)$ est un ensemble de fonctions mesurables dans le sens de Lebesgue.

Appendice C

Sources d'Informations Concernant les Systèmes Micro-Électro-Mécaniques

La technologie SMEM est activement développée à travers le monde entier. En plus des références utilisées dans cette étude, on peut retrouver une documentation beaucoup plus large dans les journaux de publications, les archives de conférences, les rapports techniques et les sites web. Nous avons inclus ici une liste partielle de telles sources.

C.1 Journaux de publications

- IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems.
- Journal of Applied Physics.
- Applied Physics Letters.
- Journal of Micromechanics and Microengineering.
- Sensors and Actuators.
- IBM Journal of Research and Development.

C.2 Archives de conférences

- Proceedings of the International Society for Optical Engineering.
- Digest of Technical Papers from Conference on Solid-State Sensors and Actuators.

C.3 Sites web

- <http://mems.isi.edu/>
- <http://mems.mcnc.org/>
- <http://mems.engr.wisc.edu/>
- <http://bsac.eecs.berkeley.edu/>
- <http://www-mtl.mit.edu/home.html>
- <http://www.mdl.sandia.gov/Micromachine/>
- <http://www.isit.fhg.de/>
- <http://muresh.et.tudelft.nl/dimes/index.html>
- <http://itri.loyola.edu/mems/toc.html>
- <http://www.mech.nagoya-u.ac.jp/dept-e.html>