

23/96

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
Département : Génie Mécanique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

ANALYSES DES PLAQUES MINCES  
ANISOTROPIQUES EN FLEXION PAR  
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Proposé par :

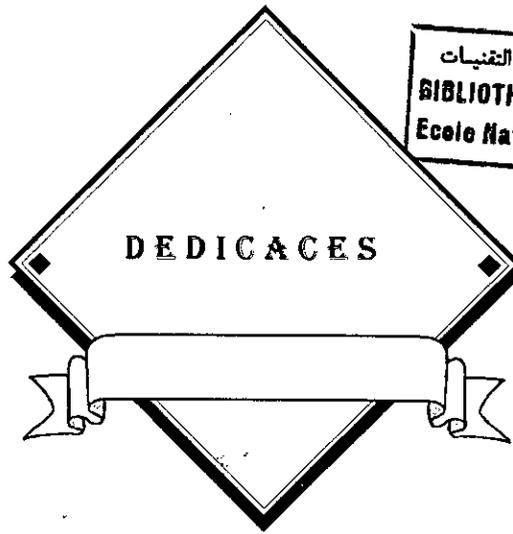
D. SAADOUN  
D. MECHERI

Présentée par :

A. SAHI

Abdenacer

Promotion 1995/1996



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*C'est avec une joie immense que je dédie ce travail :*

*A ma mère*

*A mon père*

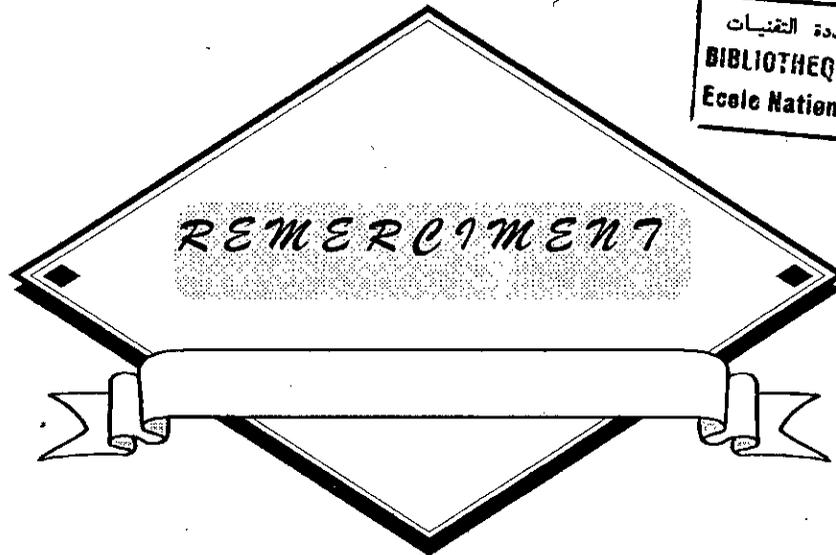
*A mon frère et mes sœurs*

*A toute ma famille*

*A mes amis*

*A tous ceux qui me sont chers.*

**Abdennacer**



Louange a « ALLAH » qui m'a donné la force et le courage d'entreprendre et d'achever ce travail.

Je remercie vivement mes deux enseignants Mr : **A.AMMICHE** et **J MECHERI** pour leurs aides, leurs conseils et leurs encouragements tout au long de mon travail.

Je remercie aussi mes amis pour leurs aides et disponibilités.  
Mes vifs remerciements au personnel de la bibliothèque, du périodique et du centre de calcul de l'E.N.P.

Ainsi que tous les enseignants qui ont contribué a ma formation, trouvent ici l'expression de mon profonde gratitude.

A tous ceux qui m'ont assisté de près ou de loin.

A. SAHI

## ملخص

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

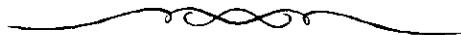
في هذا العمل، سوف نقوم بإيجاد حقل الانتقالات و حقل الإجهادات لصفحة رقيقة لا متماثلة الخواص خاضعة لاجهاد الإنشاء، و ذلك باستعمال طريقة العناصر المنتهية. وكذا إعداد برنامج حاسوبي بإمكانه القيام بهذا العمل، و المقارنة بين مختلف النماذج التجزئية.

## Abstract

In this work, we are going to determinate the field of both displacements and stresses of an unisotropic thin plate subject to a bending stress, by using the finite element method. Also, we elaborate a computer program which does this work, and compares the different model partitions.

## Résumé

Dans ce travail, nous allons déterminer les champs de déplacement et de contrainte d'une plaque mince anisotrope, soumise à une flexion, en utilisant la méthode des éléments finis. Nous avons aussi élaboré un programme informatique, qui effectue ces taches et compare les différents modèles de discretisations.



# SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## INTRODUCTION

### **CHAPITRE I : THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE..... 1**

I-1.Introduction.....	1
I-2.Etat de contrainte en un point.....	1
I-2.1.Tenseur de contrainte.....	1
I-2.2.Equations d'équilibre.....	3
I-3.Etat de déformation.....	4
I-3.1.Tenseur de déformation.....	4
I-3.2.Equation de compatibilité.....	7
I-4.Lois constitutives(lois de Hooke-Duhamel ).....	8
I-5.Equation générale de la théorie de l'élasticité linéaire.....	13
I-6.Problème de l'élasticité plane.....	14
I-5.1.Contraintes planes.....	15
I-5.2.déformation plane.....	15

### **CHAPITRE II : FLEXION DES PLAQUES MINCES ANISOTROPES..... 17**

II.1.Introduction.....	17
II.2.Plaques minces avec faible flèche : Théorie de KIRCHOFF.....	18
II.2.1.Déplacement et Déformation.....	19
II-2.2.Relation déformations - Contraintes.....	20
II.2.3.Efforts Internes.....	21
II-2.4.Calcul des contraintes.....	24
II-2.5.Champ de contraintes dans une direction quelconque.....	24
II.2.6.Equation d'équilibre.....	25
II-2.7.L'énergie interne de déformation de flexion.....	27
II-3.Condition aux limites.....	28
II-3.1.Bord encastré.....	28
II-3.2.Bord simplement appuyé.....	29
II-3.3.Bord libre.....	29
II-4.Méthodes de résolution de l'équation gouvernante.....	29
II-4.1.Méthode variationnelles.....	29
II-4.2.Méthodes numériques.....	30

<b>Chapitre III : METHODE DES ELEMENTS FINIS</b>	<b>31</b>
III-1.Introduction.....	31
III-2.Formulation déplacements.....	32
III-3.Déroulement d'un calcul de structures par M.E.F.....	33
III-4.Expose des principes énergétiques.....	33
III-4.1.Principe du travail virtuel.....	34
III-4.2.Principe de stationnarité de l'énergie de déformation.....	34
III-4.3.Principe du minimum de l'énergie de déformation.....	34
III-5.Formulation de la M.E.F base sur les déplacements.....	35
III-5.1.Formulation des équations d'équilibre.....	35
III-5.2.Formulation en coordonnées généralisées.....	38
III-6.Convergence.....	39
III-6.1. Convergence monotone.....	40
III-6.2. Convergence non monotone.....	41
III-6.3. Path-test.....	42
<b>CHAPITRE IV: ANALYSE STATIQUE DES PLAQUES MINCES PAR LA M.E.F....</b>	<b>43</b>
IV-1. Introduction.....	43
IV-2.Elementes classique de Kirchhoff.....	43
IV-2.1. Elément rectangulaire non conforme à 12 d.d.l.....	43
IV-2.1.1. Fonction de déplacements.....	45
IV-2.1.2. Formulation de la matrice de rigidité.....	47
IV-2.1.2 Vecteur des charges équivalentes.....	50
iv-2.2 Elément rectangulaire conforme a16 d.d.l.....	50
IV-2.2.1 Fonction de déplacements.....	50
IV-2.2.2.Formulation de la matrice de rigidité.....	54
V-2.2.3.Vecteur des charges équivalentes.....	55
IV-3.Elément de Kirchhoff sous forme discrète.....	56
IV-3.1.Aspect général.....	56
IV-3.2.Eléments DKT et DKQ.....	57
<b>CHAPITRE V:PRESENTATION DU PROGRAMME M.E.F.....</b>	<b>63</b>
V-1.Introduction.....	63
V-2.Structure du Programme M.E.F.....	64
V-3.Description du programme M.E.F.....	65
V-4.Characteristiques et performances du programme.....	66

**CHAPITRE VI : RESULTATS ET INTERPRETATION.....68**

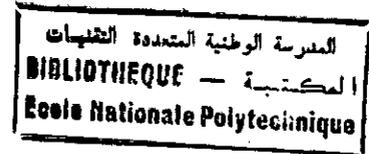
VI-1. Analyse d'une plaque mince carré isotropique avec les formulations R12, R16, DKT ET DKQ.....	68
VI-2. Analyse d'une plaque mince carré orthotropique avec la formulation DKT.....	81
VI-3. Analyse d'une plaque mince circulaire orthotrope encastrée chargée uniformément.....	87

**CONCLUSION**

**ANNEXE**

**REFERANCES**

## INTRODUCTION :



Dans le passé, les matériaux étaient considérés comme homogènes et isotrope, cette approximation simplifiait les calculs. Aujourd'hui cette démarche nous conduit vers des résultats erronés, car *la grande évolution technologique exige de prendre en compte la caractéristique de l'anisotropie des matériaux.*

Dans plusieurs domaine (Aérodynamique, Géophysique, Physique de l'état solides, Conception des nouveaux matériaux ), les études se trouvent confrontées au problèmes d'anisotropie, il est question de calculer la stabilité des corps anisotropique, par la détermination des champs de contraintes et de déformations, l'étude théorique de l'élasticité des corps anisotropiques débouche sur la formulation d'équations différentielles aux dérivées partielles, qui ne peuvent être résolues que pour des cas simples.

Dans ce mémoire, nous avons introduis, la méthodes des éléments finis pour l'élaboration d'un programme informatique qui nous permet de faire une analyse statique de plaque minces (en particulier un matériaux anisotropique).

Notre travail s'articule sur l'étude du modèle des éléments de Kirchhoff ; leur application à notre modèle considéré; puis sur l'étude comparative des performances de chacun de ces éléments.

# CHAPITRE I

## THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE

« Car il est plus facile une fois qu'on acquis  
une certaine connaissance des équations, d'en  
imaginer en suite la démonstration, que si l'on  
recherchait celle-ci sans aucune notion préalable. »

ARCHIMED

# CHAPITRE I

## THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE

### I-1.Introduction:

Tous les matériaux de construction possèdent, à des degrés différents, la propriété élastique, c'est à dire que si les forces extérieures, qui provoquent la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaît en même temps que la force qui lui a donnée naissance.

Les plaques dont il est question dans cette présente étude sont supposées constituées d'un matériau linéaire élastique. Par conséquent, nous exposons dans ce premier chapitre les concepts fondamentaux de la théorie de l'élasticité, particulièrement les concepts de contraintes, de déformation et d'énergie.

Du fait de la complexité de ces équations, la solution exacte, n'existe que pour les problèmes simples et souvent des hypothèses simplificatrices sont émises pour la résolution des problèmes de grande complexités.

### I-2.Etat de contrainte en un point :

#### I-2.1. Tenseur de contrainte :

Deux types de forces extérieures sont susceptibles d'agir sur un corps :

1°- Les forces dites volumiques qui sont distribuées dans tout le volume du corps telle que la force de gravitation.

2° - Les forces dites surfacique réparties sur toute la surface du corps telle que la pression hydrostatique.

Dans un grand nombre de cas, les forces volumiques sont négligées ou considérées comme uniformes.

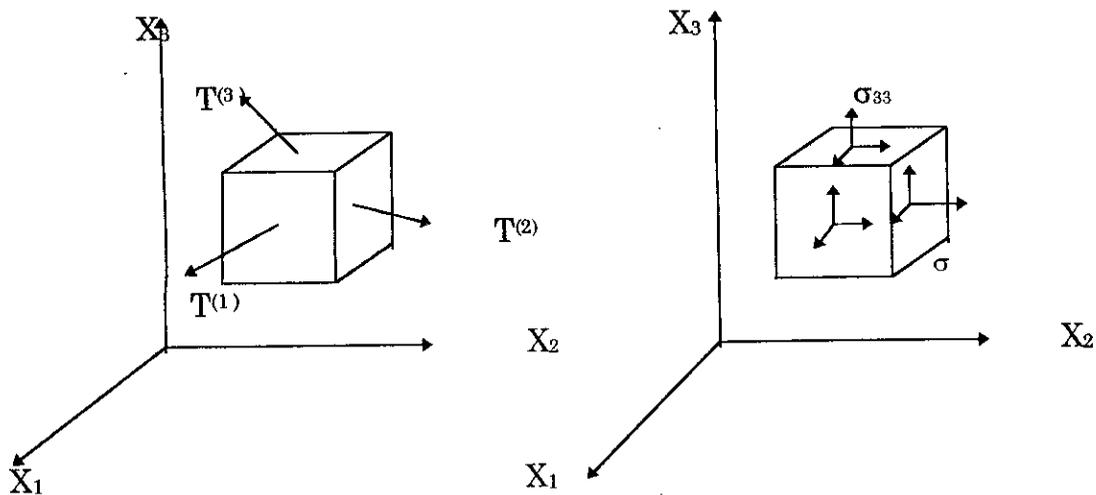


Figure I.1 : Contraintes

Soit un parallélépipède infinitésimale découpé dans un milieu continu (fig I.1). Les forces surfaciques sont représentées sur trois faces rectangulaires de l'élément. L'exposant indiquant la face sur laquelle s'exerce la force. On désigne par  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$ , les trois composantes du vecteur  $T^{(1)}$  selon les axes  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  respectivement.

En général :

$$T^{(1)} = \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$$

$$T^{(2)} = \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$$

$$T^{(3)} = \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$$

Ou alors :

$$T_j^{(i)} = \sigma_{ij} \quad (\text{I-1})$$

Les neuf quantités  $\sigma_{ij}$  sont appelées contraintes, ce sont des forces par unité de surface. Le premier indice indique la direction de la normale à la face tandis que le second indique la direction de la contrainte elle-même.

Quand les trois vecteurs  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$  et  $T^{(3)}$  agissent en un point selon trois plans perpendiculaires connus, il est possible de déterminer le vecteur contrainte s'exerçant en ce point selon un plan de normal extérieur  $\vec{n}$  arbitrairement orienté en utilisant la formule de Cauchy :

$$T_i^{(n)} = T \sigma_{ij} \quad (\text{I-2})$$

où  $T$  est le tenseur contrainte relatif au point considéré :

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(x_1, x_2, x_3)} \quad (I.3)$$

Les termes diagonaux sont appelés contraintes normales et souvent désignés par  $\sigma_i$ , tandis que les termes extra-diagonaux sont appelés contraintes de cisaillements .

### I-2.2. Equations d'équilibre :

Ecrivons la loi de Newton en un point P quelconque appartenant à un élément de masse  $dm$ :

$$df = 0$$

où  $df$  représente la somme de toutes les forces surfacique et volumiques agissant sur l'élément. En intégrant cette équation sur un domaine arbitraire de volume  $V$  et de frontière surfacique  $S$ , parmi les forces surfaciques, seules celles qui agissent sur  $S$  subsistent ( troisième loi de Newton) :

$$\oint_S T_i^{(n)} dA + \int_D B_i dV = 0$$

or :

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$$

$$\oint_S \sigma_{ij} n_j dA + \int_D B_i dV = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_D (\sigma_{ij,j} + B_i) dV = 0$$

Comme le domaine est arbitraire :

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.4)$$

Cette équation traduit l'équilibre en un point selon trois directions.

En dynamique, cette équation devient une équation du mouvement :

$$\sigma_{ij,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.5)$$

### I-3. Etat de déformation :

#### I-3.1 Tenseur de déformation :

Nous cherchons à présent un moyen pour exprimer les déformations de notre solide. Pour cela, on considère une configuration initiale dans laquelle les deux points P et Q de la figure (I-2) sont distant d'une quantité  $\Delta y$ .

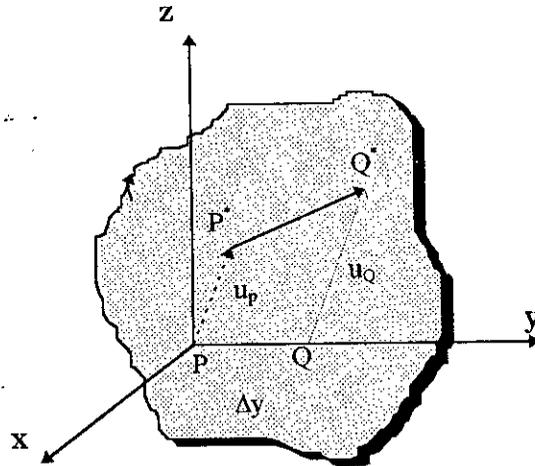


Figure I.2 : Déformation d'un segment linéaire

Après déplacement et déformation, P passe à P\* et Q à Q\*.

On projette  $\overline{P^*Q^*}$  sur l'axe des Y :

$$\overline{(P^*Q^*)_y} = \Delta y + (u_y)_Q - (u_y)_P$$

En exprimant  $(u_y)_Q$  comme une série de Taylor en terme de  $(u_y)_P$  :

$$(u_y)_Q = (u_y)_P + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_P \Delta y + \dots$$

En substituant ce développement de  $(u_y)_Q$  dans l'expression de  $\overline{(P^*Q^*)_y}$ , on obtient :

$$\overline{(P^*Q^*)_y} = \Delta y + [(u_y)_P + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_P \Delta y + \dots] - (u_y)_P$$

$$\overline{(P^*Q^*)_y} - \Delta y = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_P \Delta y + \dots$$

En divisant par  $\Delta y$  et, en prenant la limite de chaque terme quand  $\Delta y$  tend vers zéro, on obtient :

$$\frac{\overline{(P^*Q^*)_y} - \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy}$$

L'indice P peut à présent disparaître du fait de la coalescence des points P et Q.

Dans le cas des petites déformations, nous avons:  $(\overline{P^*Q^*}) \approx (\overline{P^*Q^*})_y$ , Ce qui permet de dire que  $\epsilon_{yy}$  représente l'allongement par unité de longueur au point P dans la direction de l'axe des Y.

De la même façon, nous définissons :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

nous considérons à présent les segments  $\overline{PR}$  et  $\overline{PQ}$  de longueur respective  $\Delta x$  et  $\Delta y$ . Quand l'élément subit une déformation, les points P, Q et R passent à  $P^*, Q^*$  et  $R^*$  respectivement.

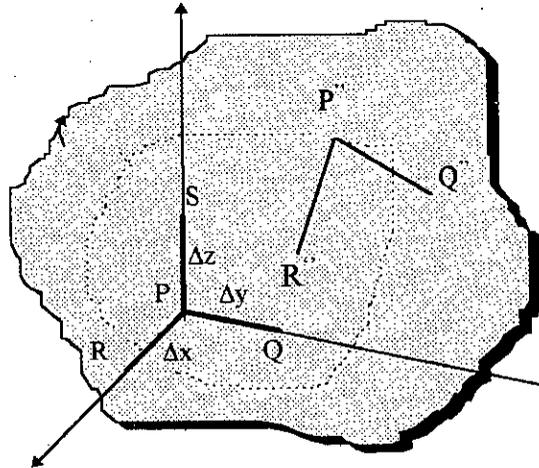


Figure I-3 : Déformation des segments linéaires.

Nous projettons les segments  $\overline{P^*R^*}$  et  $\overline{P^*Q^*}$  sur le plan (X,Y) c à d sur le plan que forment les segments avant déformation.

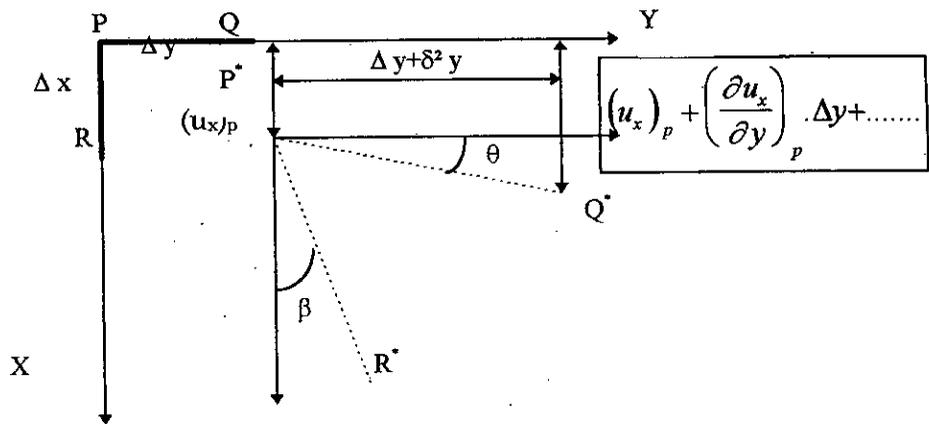


Figure I-4 : Projection des segments déformés .

Nous notons que  $\theta$  représente l'angle entre  $\overline{P^*Q^*}$  et l'axe des Y tandis que  $\beta$  est l'angle que forme  $\overline{P^*R^*}$  et l'axe des x. En exprimant le déplacement du point Q dans la direction X en terme de  $(u_x)_P$  comme suit :

$$(u_x)_Q = (u_x)_P + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_P \Delta y + \dots$$

La composante de la projection de  $\overline{P^*Q^*}$  selon Y est :  $dy + \delta^2 y$ , ou  $\delta^2 y$  est un incrément de second ordre pour les petites déformation.

L'angle  $\theta$  peut à présent être exprimé comme suit

$$\text{tg}\theta = \frac{(\partial u_x / \partial y)_P \Delta y + \dots}{\Delta y + \delta^2 y}$$

En faisant tendre  $dy$  vers 0, les termes d'ordre supérieurs dans le numérateur s'annule ainsi que l'incrément du second ordre  $\delta^2 y$ .

$$\text{tg}\theta \approx \theta \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

d'une façon analogue :

$$\text{tg}\beta \approx \beta \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

La somme  $(\theta + \beta)$  peut être directement liée à la déformation du cisaillement comme suit :

$$(\theta + \beta) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$$

les déformations sont supposées petites, on peut dire alors, que  $\gamma_{ij}$  représente la variation de l'angle droit initialement formé par deux segments de droites infinitésimales dans la  $i^{\text{ème}}$  et la  $j^{\text{ème}}$  direction en un point.

Les composantes du tenseur de déformation sont liés à celle du champ de déplacement par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.6)$$

Nous considérons à présent, l'effet de ces déformation sur un parallélépipède infinitésimale.



Figure 1.5 : Déformation d'un cube élémentaire.

En absence de déformation de cisaillement, les faces du parallélépipède demeure orthogonales entre elle, alors que sa position et son orientation peut changer comme le peuvent ses dimensions et son volume. En présence des déformations de cisaillement, les faces du parallélépipède peuvent perdre leurs perpendicularités mutuelles transformant ainsi les rectangles en parallélogrammes.

En résumé, nous pouvons dire que les déformations normales affectent la taille de l'élément tandis que les déformations de cisaillement modifient sa forme.

### 1-3.2 Equation de compatibilité :

Nous considérons les relations déplacements - déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Si le champ de déplacement est connue, il est facile de trouver les six composantes du tenseur de déformation en substituant les expressions de  $u_i$  dans les équations ci-dessus. Le problème inverse qui consiste à retrouver le champ de déplacement à partir d'un champ de déformation donné, n'est pas si simple. En effet, cela revient à intégrer un système de six équations aux dérivées partielles à trois inconnues.

Pour assurer l'intégrabilité de ce système, nous imposons une certaine restriction sur les termes du tenseur  $\varepsilon_{ij}$ .

Les équations qui traduisent mathématiquement cette condition d'intégrabilité sont dite **équations de compatibilité** et sont données par :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{kl,ij} = 0 \quad (I.7)$$

En raison de la symétrie des indices et de la présence d'identité, le nombre de ces équations se réduit à six.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

#### I-4 Lois constitutives (lois de Hooke-Duhamel) :

Dans les sections précédentes, on a décrit le tenseur de contrainte résultant des considérations d'équilibre et le tenseur de déformation résultant des considérations cinématique.

Ces deux tenseurs sont en effet liés entre eux par des relations appelées **lois constitutives**. En générale, ces relations dépendent la température et le temps comme d'autres variables.

La plus simple relation qui puisse exister entre contraintes et déformation est une relation linéaire de la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (I.9)$$



En effet, lorsque les constantes élastiques  $C_{ij}$  en un point, ont les mêmes valeurs pour toutes paires du systèmes de coordonnées qui sont une réflexion l'un de l'autre par rapport à un plan, alors ce plan est appelé plan de symétrie élastique pour le matériau en ce point.

### 1°- Cas d'un plan de symétrie :

Considérons un matériau composite à fibres longue qui présente une symétrie matérielle par rapport au plan (2-3) (fig I.6)

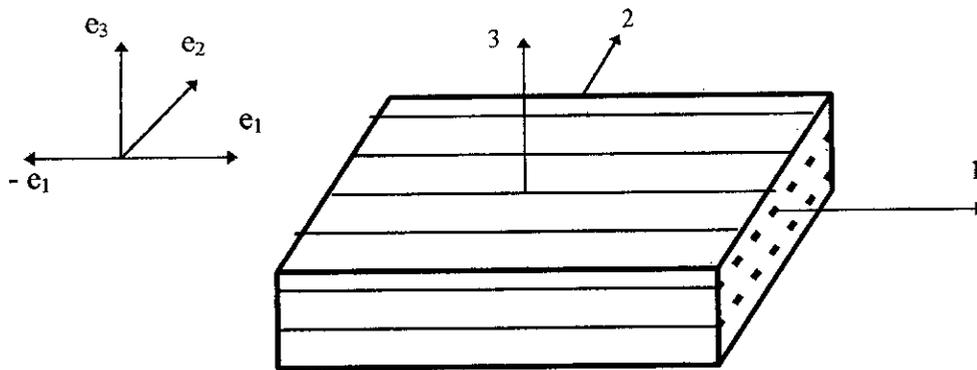


Figure 1.6 : Matériau Composite

D'où

$$C_{15} = C_{16} = C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0.$$

Donc, le nombre de coefficient distincts se réduit à :

$$21-8 = 13 \text{ coefficients.}$$

### 2°- Cas de symétrie orthotrope( matériau orthotrope) :

Dans ce cas, il existe deux plans perpendiculaires de symétries élastiques (ex : plans (1-2) et (2-3)) et en plus des constantes nulles du cas précédent. On a :

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{36} = 0$$

nous montrons, alors que le nombre de constantes élastiques indépendantes est réduit à  $13-4 = 9$ . La loi de comportement élastique exprimée dans les axes dits d'orthotrope, définie au moyen du trièdre construit sur les deux plans orthogonaux et leurs intersection, peut s'écrire sous la forme suivante, appelée notation ingénieur car elle fait apparaître les modules d'élasticités et les coefficients de poisson :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{I-10})$$

- $E_1, E_2$  et  $E_3$  sont les modules d'élasticités longitudinaux
- $G_{23}, G_{13}$  et  $G_{12}$  sont les modules de cisaillement
- $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$  sont les coefficients de poisson.

De plus, la symétrie de la matrice de la loi de comportement ci-dessus entraîne les égalités :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (\text{I.11})$$

### 3° Matériau isotrope transverse :

On appelle matériau isotrope transverse, un matériau linéairement élastique, homogène, pour lequel tout plan passant par un axe privilégié est un axe de symétrie mécanique.

Nous montrons que la loi de comportement ne fait intervenir que cinq coefficient élastiques indépendant.

Ainsi se comportera le composite fibre-matrice ( figure I-7). L'axe privilégié dont il est question dans la définition est l'axe  $\ell$ . Les fibres sont disposées régulièrement dans le sens long  $\ell$ , toute direction perpendiculaire aux fibres représente le sens transverse  $t$ .

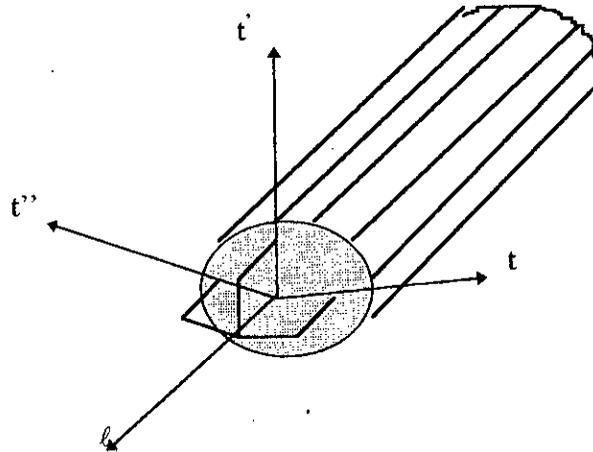


Figure I.7 : Matériau Isotrope Transverse

La relation de comportement s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{tt'} \\ \varepsilon_{t't'} \\ \gamma_{tt'} \\ \gamma_{t'l} \\ \gamma_{tl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_t} & -\frac{\nu_{tt'}}{E_t} & -\frac{\nu_{tt}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{tt'}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & -\frac{\nu_{t't}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{tt}}{E_t} & -\frac{\nu_{t't}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_t)}{E_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{tt}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{tt}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{tt} \\ \sigma_{tt'} \\ \sigma_{t't'} \\ \sigma_{tt'} \\ \sigma_{t'l} \\ \sigma_{tl} \end{Bmatrix} \tag{I.12}$$

- Les coefficient élastiques indépendant sont :
  - Le module de Young dans le sens long  $\ell$  :  $E_t$
  - Le module de Young dans le sens travers  $t$  :  $E_t$
  - Le module de glissement dans tout plan  $lt$  :  $G_{tt}$
  - Les coefficients de poisson :  $\nu_{tt}$  et  $\nu_{t'}$ .

\* La symétrie des coefficients élastiques entraîne l'égalité :

$$\frac{\nu_{tt}}{E_t} = \frac{\nu_{t'}}{E_t} \tag{I.13}$$

Nous noterons l'expression du module du cisaillement dans le plan transverse  $t$

et  $t'$ , Il s'exprime par :

$$\frac{E_t}{2(1+\nu_t)} \quad (I.14)$$

Cette Expression traduit bien une nature transverse isotrope.

#### 4°- Matériau isotrope :

Si les valeurs des constantes  $C_{ij}$  sont indépendantes du système de coordonnées, le matériau est alors dit isotrope et le nombre de constantes indépendantes est réduit à deux ( $E, \nu$ ).

$E$  : Module de Young ;

$\nu$  : coefficient de poisson ;

La loi de Hooke-Duhamel pour un matériau isotrope est :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (I.15)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij} + \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} \quad (I.16)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficient de Lamé.

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (I.17)$$

### **1-5. Equation générale de la théorie de l'élasticité linéaire :**

Le système d'équations nécessaire à la résolution d'un problème d'élasticité linéaire en tout point comprend :

Les équations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

Les équations contraintes-déformations :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

En particulier :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Les équations déformation-déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Ce système est donc formé de 15 équations à 15 inconnues les fonctions de déplacement ne sont pas explicitement inclus, nous devons nous assurer que les équations de compatibilité sont satisfaites.

Il existe trois types de conditions aux limites, aux quelles correspondent trois problèmes.

***Problème du premier type :***

Dans ce type de problème, le champ de contrainte est imposé en tout points de la frontière et on doit déterminer les champs de déplacement et de contraintes en tout points du milieu considéré

***Problème du deuxième type :***

Le champ de déplacement en tout point de la frontière du milieu considéré constitue les données aux limites de ce type de problème, tandis que ses inconnues sont les champs de contraintes et de déformation en tout point du corps.

***Problème mixte :***

Dans ce type de problème, il faut déterminer les champs de déplacements et de contraintes en tout point du milieu en ayant comme données le champs de contraintes sur une partie  $S_1$  de la frontière et le champ de déplacement sur l'autre partie  $S_2$ .

Les problèmes envisagés précédemment sont des cas particuliers des problèmes mixtes.

## **I-6 Problème de l'élasticité plane:**

La solution rigoureuse des problèmes tridimensionnels n'existe que pour quelques cas simples. Par conséquent, nous sommes souvent amené à simplifier les problèmes de façon à obtenir une solution mathématique qui puisse interprété raisonnablement le problème physique.

Pour illustrer ceci, nous exposons à présent deux cas particuliers de problèmes où les équations sont simplifiées.

### 1-5.1. Contraintes planes :

Les solutions du type contraintes planes sont souvent adoptées et peuvent être considérées comme de bonne approximation, par exemple, dans le cas d'une plaque mince chargée dans son plan.

Un cas de contraintes planes est caractérisé par :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (I.18)$$

Pour un matériau orthotrope la relation déformation-contrainte est donnée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (I.19)$$

Par inversion, nous obtenons le vecteur contrainte :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{E}_x & \nu_{xy} \overline{E}_x & 0 \\ \nu_{yx} \overline{E}_y & \overline{E}_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (I.20)$$

avec :

$$\overline{E}_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}$$

$$\overline{E}_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}$$

Pour un matériau isotrope :

$$E_x = E_y = E \text{ et } \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$$

### 1-5.2. déformation plane :

Nous arrivons à la même simplification du problème lorsqu'on considère la solution inverse à celle d'un cas de contrainte plane, celle dans laquelle la dimension du corps dans la direction de l'axe Z est très étendue. Un exemple de ce genre de problème est celui d'un barrage de retenue soumis à l'action d'une pression transversale qui reste constante sur toute sa longueur.

En effet, toute portion du corps située à une distance considérable de ses extrémités subit une déformation plane et les déplacements de tous les points du corps déformé se trouvent dans des plans perpendiculaires à ce dernier.

Un cas de déformation plane est caractérisé par :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (I.21)$$

Les relations contraintes - déformations pour un matériau isotrope en déformation plane sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (I.22)$$

La contrainte  $\sigma_{zz}$ , bien que celle-ci ne soit pas toujours nulle, n'apparaît pas dans les relations ci-dessus. Cependant, elle peut être obtenue à partir de la relation  $\varepsilon_{zz}=0$  comme suit :

$$\left. \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{Bmatrix} \right\} \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (I.23)$$

## CHAPITRE II

# FLEXION DES PLAQUES MINCES ANISOTROPES

« Une loi est un modèle qui n'est plus (ou pas encore !) contesté un modèle devient une loi.....on sombre dans l'oubli. »

**BOILEAU**

## CHAPITRE II

### FLEXION DES PLAQUES MINCES ANISOTROPES

#### II.1 Introduction :

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane ( $x, y$ ) et par une épaisseur notée  $h$  petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Elle peut être constituée de matériau homogène ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

Une plaque, contrairement à une membrane, possède une rigidité à la flexion résultant de son épaisseur et de l'élasticité du matériau qui la constitue.

Comme exemples de plaques, on peut citer :

- Le plancher d'un immeuble
- La coque d'un navire.
- Le piston du vérin .

Les propriétés de flexion d'une plaque dépendent essentiellement de son épaisseur par rapport à ses autres dimensions, ainsi une plaque est dite mince si son épaisseur est petite par rapport à ses autres dimension (de l'ordre du 1/15), sinon elle est dite épaisse.

On distingue trois sortes de plaques :

- a) Les plaques minces avec faible flèche ( $w \ll h$ ).
- b) Les plaques minces avec grande flèche.
- c) Les plaques épaisses.

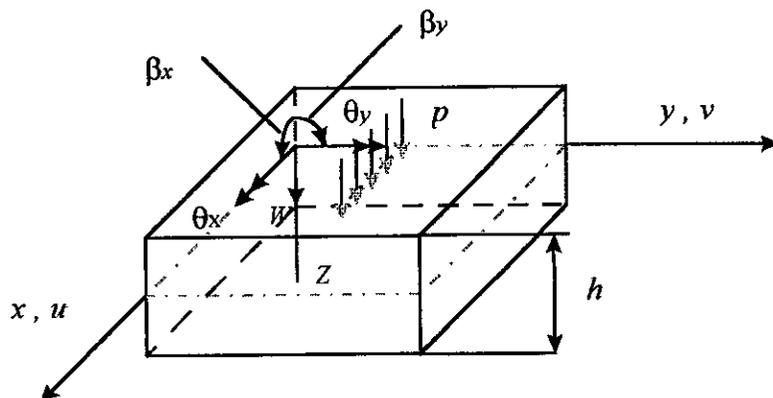


Figure II.1 : Élément plaque en flexion

## II.2 Plaques minces avec faible flèche : Théorie de KIRCHOFF

Pour ce type de plaques, les hypothèses fondamentales sur le comportement sont les suivantes :

**H.1 :** Les contraintes normales  $\sigma_{zz}$  selon la direction transversale, sont négligées par rapport aux autres contraintes :

$$\sigma_{zz} = 0$$

**H.2 :** Il n'y a pas de déformation dans le plan moyen de la plaque avant, pendant et après déformation.

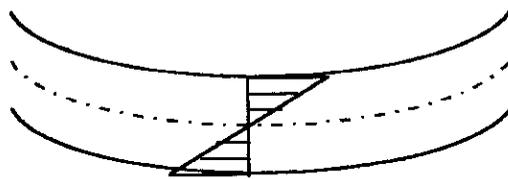


Figure II-2 Plaques minces a petites flèches.

**H.3 :** Les points de la plaque situés initialement sur une normale au plan moyen de la plaque demeurent sur celle-ci après flexion.

Les déformations de cisaillement sont donc négligées :  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ .

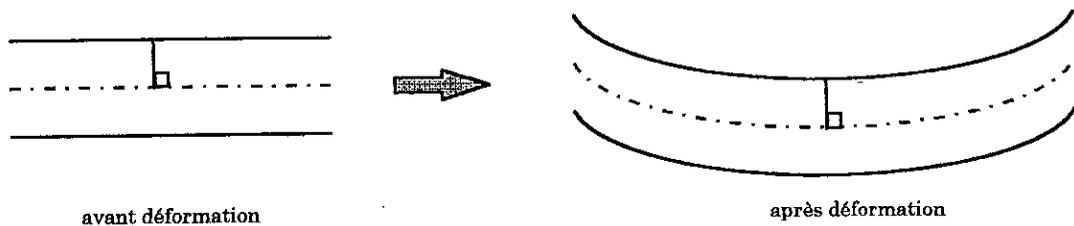


Figure II-3 Conservation des normales .

**H.4 :** Il n'y a pas de déformation selon la direction transversale.

C'est à dire, qu'un élément linéaire conserve sa longueur après déformation on a dans ce cas :

$$\epsilon_{zz} = 0$$

Ces hypothèses sont appelées hypothèses de KIRCHOFF et permettent de déterminer les déplacements, déformations et contraintes du système.

**II.2.1 Déplacement et Déformation :**

\*L'hypothèse 4 implique :

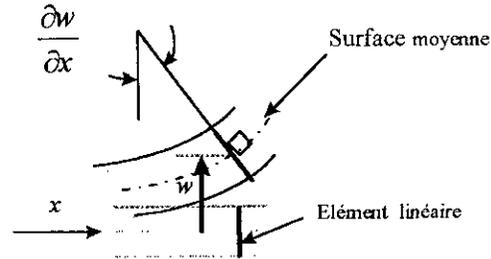
$$\epsilon_{zz} = 0 \tag{II-1}$$

sachant que

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Alors :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



**Figure II.4 Déformation d'un élément linéaire.**

Ce qui montre immédiatement que  $w$  est indépendant de  $z$  :

$$w = w(x, y) \tag{II.2}$$

\*L'hypothèse 3 implique :

$$\gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \tag{II-3}$$

Sachant que :

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Alors :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{II.4a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{II.4b}$$

En intégrant ces deux équations différentielles et en tenant compte du fait que :

$u = v = 0$  en tout point de la surface moyenne.

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \tag{II.5a}$$

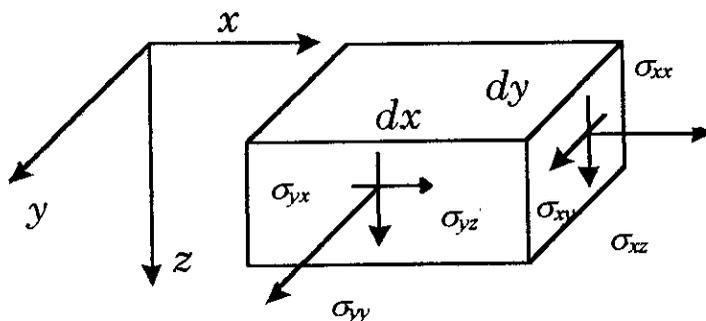
$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \tag{II.5b}$$

Sachant également que :  $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$  ,  $\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$  et  $\gamma_{xy} = (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$

$$\text{nous obtenons : } \epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} , \quad \epsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} , \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{II.6}$$

**II-2.2 Relation déformations - Contraintes :**

On peut également obtenir les contraintes en utilisant la loi de HOOKE généralisée :



**Figure II.5 Contraintes**

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= S_{11} \sigma_x + S_{12} \sigma_y + S_{16} \sigma_{xy} \\ \epsilon_y &= S_{12} \sigma_x + S_{22} \sigma_y + S_{26} \sigma_{xy} \\ \epsilon_z &= S_{16} \sigma_x + S_{26} \sigma_y + S_{66} \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (II.7)$$

La résolution de ce système avec les contraintes comme inconnues, donne:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -z \left( C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ \sigma_y &= -z \left( C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ \tau_{xy} &= -z \left( C_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (II.8)$$

Les constantes  $C_{ij}$  sont exprimés en fonction de  $S_{ij}$  par la relation

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{\Delta} (S_{22}S_{66} - S_{26}^2), & C_{22} &= \frac{1}{\Delta} (S_{11}S_{66} - S_{16}^2), \\ C_{12} &= \frac{1}{\Delta} (S_{16}S_{26} - S_{12}S_{66}), & C_{66} &= \frac{1}{\Delta} (S_{11}S_{22} - S_{12}^2), \\ C_{16} &= \frac{1}{\Delta} (S_{12}S_{26} - S_{22}S_{16}), & C_{26} &= \frac{1}{\Delta} (S_{12}S_{16} - S_{11}S_{26}), \end{aligned} \right\} \quad (II-9)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Pour déterminer les deux dernières contraintes :  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$ , on utilise les équations d'équilibres suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.10a})$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.10b})$$

En considérant à  $z = \pm h/2$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  dans les surfaces extérieures qui donnent :

$$\tau_{zx} = \frac{1}{2} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left[ C_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3C_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + C_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \quad (\text{II.11a})$$

$$\tau_{zy} = \frac{1}{2} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left[ C_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3C_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + C_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \quad (\text{II.11b})$$

### II.2.3 Efforts Internes :

Les moments de flexion et de torsion par unité de longueur peuvent être obtenus par intégration des contraintes sur l'épaisseur de la plaque :

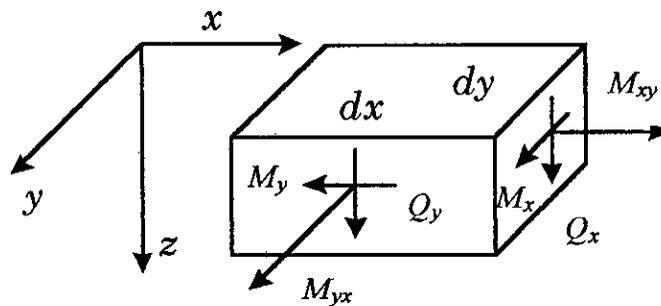


Figure II-5 Efforts résultants

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{II.12a})$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{II.12b})$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{II.12c})$$

Les forces  $Q_x$  et  $Q_y$  sont les forces de cisaillement par unité de longueur agissant sur les surfaces normales aux directions  $x$  et  $y$  respectivement.

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = - \left( D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (\text{II.13a})$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = - \left( D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (\text{II.13b})$$

Les constantes  $D_{ij}$  s'obtiennent à partir des constantes  $C_{ij}$  par la formule :

$$D_{ij} = C_{ij} \cdot \frac{h^3}{12} \quad (\text{II.14})$$

$D_{ij}$  représentent les rigidités de la plaque anisotrope :

$D_{11}$ ,  $D_{22}$  les rigidités à la flexion autour des axes  $y$  et  $x$  respectivement ;

$D_{66}$  rigidité à la torsion.

$D_{16}$ ,  $D_{26}$  rigidités additionnelles.

Dans le cas d'une plaque orthotrope de direction principales  $x$ ,  $y$  quatre coefficients sont nécessaires :

Les équations (II.7), (II.12), et (II.13) deviennent :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_2} (\sigma_y - \nu_2 \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (\text{II.15})$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.16})$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.17})$$

où

$E_1, E_2$  : Modules de Young

$\nu_1, \nu_2$  : coefficients de poisson

$G$  : Module de cisaillement

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_k = \frac{G h^3}{12} \quad (\text{II.18})$$

$D_1, D_2$ , et  $D_3$ , sont les rigidités de flexion et de torsion dans les directions principales de l'élasticité :

$$D_3 = D_1 \nu_2 + 2 D_k \quad (\text{II.19})$$

les rigidités additionnelles sont nulles dans les directions principales.

Pour une plaque isotrope, nous avons :

$$E_1 = E_2 = E, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

ainsi toutes les rigidités  $D_{ij}$  sont réduites à une rigidité  $D$  :

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{II.20})$$

les formules (II.16) et (II.17) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.21})$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.22})$$

$$\text{où : } \quad (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$$

**II-2.4 Calcul des contraintes :**

## 1°- contraintes de flexion

La contrainte normale due au moment de flexion par unité de longueur  $M_x$  est :

$$\sigma_x = \frac{12 M_x}{h^3} z \quad (\text{II-23a})$$

$$* \sigma_{x \max} = \sigma_x \Big|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{6 M_x}{h^2}$$

De même pour  $M_y$  :

$$\sigma_y = \frac{12 M_y}{h^3} z \quad (\text{II-23b})$$

$$* \sigma_{y \max} = \sigma_y \Big|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{6 M_y}{h^2}$$

## 2°- Contrainte de torsion

Le moment de torsion provoque une contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{12 M_{xy}}{h^3} z \quad (\text{II-24})$$

$$* \tau_{xy \max} = \tau_{xy} \Big|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{6 M_{xy}}{h^2}$$

## 3°- Contrainte due a l'effort tranchant

Dans une section rectangulaire la répartition des contraintes de cisaillement est parabolique et on a la relation comme suit :

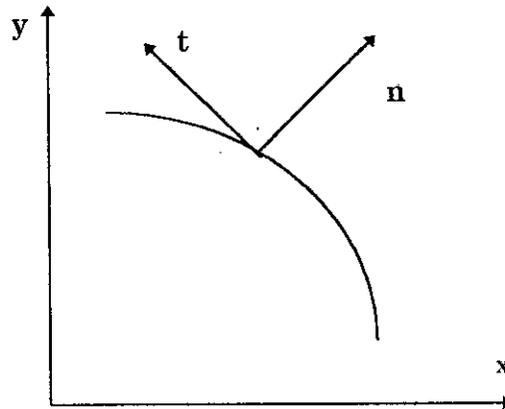
$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \frac{6 Q_x}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \frac{6 Q_y}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-25})$$

Ces contraintes sont toujours très faibles.

**II-2.5 Champ de contraintes dans une direction quelconque :**

Dans une direction arbitraire : n

Les efforts internes dans le repère (n, t) sont exprimés en fonction des efforts internes dans le repère (x, y) par :

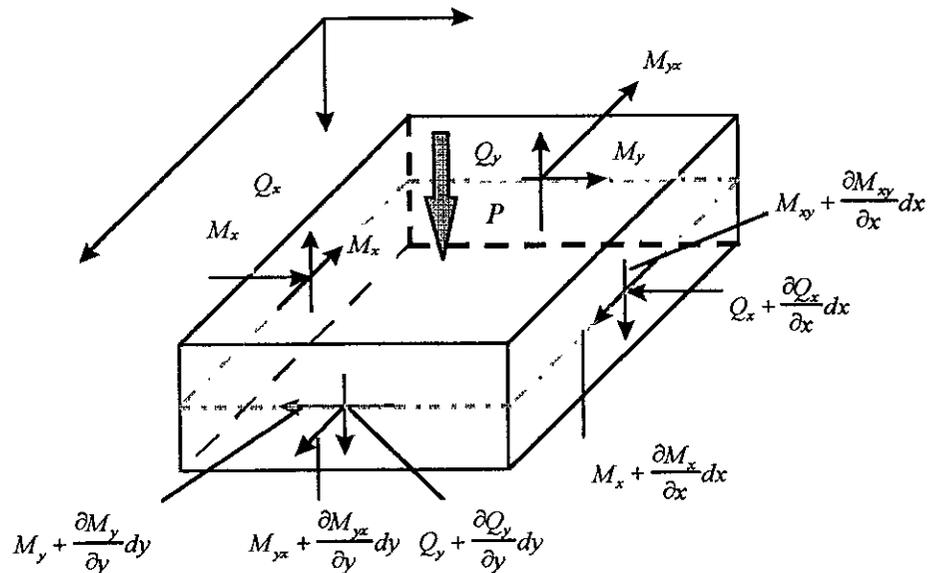


$$\left. \begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2(n, x) + M_y \cos^2(n, y) + 2 M_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y), \\ M_m &= (M_y - M_x) \cos(n, x) \cos(n, y) + M_{xy} [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)], \\ Q_n &= Q_x \cos(n, x) + Q_y \cos(n, y); \end{aligned} \right\} \quad (II.26)$$

$$\sigma_n = \frac{12 M_n}{h^3} z, \quad \tau_m = \frac{12 M_m}{h^3} z, \quad \tau_n = \frac{6 Q_n}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (II.27)$$

### II.2.6 Equation d'équilibre

A partir de l'ensemble des équations précédemment établies, on peut formuler l'équation d'équilibre de l'élément infinitésimal ci-dessous en écrivant les équations d'équilibre (I-4) de la façon suivante :



Figure(II-6) Equilibre d'un élément différentiel.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-28})$$

En multipliant l'équation (II-28a) par  $z$  et en intégrant sur l'épaisseur de la plaque :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = 0$$

$$\text{or : } \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = \left( z \tau_{xz} \right)_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz$$

En utilisant (II-13a) et sachant que les contraintes de cisaillement sont nulles sur les faces d'équations  $z = \pm \frac{h}{2}$

on obtient :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (\text{II-29})$$

D'une façon analogue :

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (\text{II-30})$$

En intégrant la troisième équation d'équilibre (II-28c) sur l'épaisseur de la plaque :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\text{Ceci implique : } \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \sigma_{zz}(z) \Big|_{z=-h/2} - \sigma_{zz}(z) \Big|_{z=h/2}$$

or :

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=-h/2} = -p$$

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=h/2} = 0$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0 \quad (\text{II-31})$$

En éliminant  $Q_x$  et  $Q_y$  de l'équations ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -P \quad (\text{II-32})$$

En substituant les équations (II.13) dans l'équation (II.31), on obtient une équation différentielle de quatrième ordre de la flexion d'une plaque anisotrope

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P \quad (\text{II-33})$$

En particulier, si la plaque est orthotrope avec les axes (x, y) coïncident avec les axes principaux, nous obtenons :

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P \quad (\text{II-34})$$

Pour une plaque isotrope

$$D_1 = D_2 = D_3 = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

et de l'équation (II-34), on obtient l'équation biharmonique non homogène suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (\text{II-35})$$

ou :

$$\nabla^4 w = \frac{P}{D} \quad (\text{II-36})$$

Cette équation appelée équation de Sophie-Germain.

### II-2.7 L'énergie interne de déformation de flexion :

- Pour une plaque anisotrope :

$$U_f = \frac{1}{2} \iint [D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}] dx dy \quad (\text{II-37})$$

- Pour une plaque orthotrope :

$$U_f = \frac{1}{2} \iint [D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2] dx dy \quad (\text{II.38})$$

on peut représenter l'énergie interne de déformation de flexion sous la forme *matricielle* comme suit:

$$U_f = \frac{1}{2} \iint \langle \chi \rangle [D] \{ \chi \} dx dy \quad (\text{II.39})$$

où :

$$\{ \chi \} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{Vecteur de courbure.}$$

[D] Matrice de rigidité du matériau.

### II-3 Condition aux limites :

Le déplacement  $w$  doit satisfaire aux équations différentielles d'équilibre en tout point intérieur de la plaque et aux conditions aux limites en tout point de la frontière de celle-ci.

#### II-3.1 Bord encasté :

Pour un bord encasté, la flèche  $w$  est nulle ainsi que les rotations des normales à la surface moyenne non fléchie et donc :

$$w|_{x=a} = \beta_x|_{x=a} = \beta_y|_{x=a} = 0$$

Notons que dans la théorie de Kirchhoff  $\beta_x = -\partial w / \partial y$  et  $\beta_y = \partial w / \partial x$  et la condition  $\beta_x(x = a) = 0$  veut dire que le plan tangent à la surface moyenne fléchie le long de ce bord coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque.

### II-3.2 Bord simplement appuyé :

Si le bord de la plaque est simplement appuyé la flèche  $w$  le long de ce bord est nulle. Cependant, ce bord peut tourner librement autour de l'axe  $y$  ( $x = a$ ), c'est à dire qu'il n'existe pas de moment de flexion par rapport à l'axe  $y$  le long de ce bord.

La représentation des conditions aux limites est alors :

$$w|_{x=a} = M_x|_{x=a} = 0$$

On a aussi  $\beta_x|_{x=a} = 0$  puisque la rotation autour de l'axe  $x$  n'est pas permise.

### II-3.3 Bord libre :

Si le bord est entièrement libre, cela veut dire que ce bord ne subit ni moment de torsion ou de flexion ni forces de cisaillement transversal et alors :

$$Q|_{x=a} = M_x|_{x=a} = M_{xy}|_{x=a} = 0$$

## II-4 Méthodes de résolution de l'équation gouvernante :

La résolution de l'équation gouvernante peut se faire par différentes méthodes que l'on peut classer en deux catégories.

### II-4.1 Méthode variationnelles :

On exprime  $w$  sous la forme :

$$w = \sum_n a_n f_n(x,y)$$

où  $f_n(x,y)$  sont des fonctions qui vérifient les conditions aux limites. Les inconnues du problème sont les coefficients  $a_n$  qui seront déterminés en minimisant l'énergie potentielle totale. Parmi ces méthodes, on citer :

- la méthode de Ritz
- la méthode de Galerkin

### **II-4.2 Méthodes numériques**

La résolution analytique des problèmes de flexion n'existe que pour des problèmes de géométrie simple et de conditions aux limites régulières. En effet, la résolution de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne le comportement flexionnel d'une plaque est fastidieuse et parfois même impossible c'est pourquoi on a recours aux méthodes numériques qui se sont

avérées être un outil puissant , pratique et essentiel pour le calcul des structures. Parmi ces méthodes, on peut citer :

- la méthode des différences finies
- la méthode des éléments finis
- la méthodes des éléments aux frontières

Nous développerons, dans la présente étude la méthode des éléments finis que nous détaillerons dans un prochain chapitre.

## Chapitre III

# METHODE DES ELEMENTS FINIS

« La pensée n'est qu'un éclair au milieu  
d'une longue nuit, mais cet éclair qui est tout »

HENRI POINCARRE

## Chapitre III

### METHODE DES ELEMENTS FINIS

#### III-1. Introduction :

Les projets que l'ingénieur est amené à réaliser deviennent, du fait de l'évolution actuelle de la technologie de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères (projets aéronautiques, nucléaires . . . ).

Afin de pouvoir maîtriser ces projets, l'ingénieur doit avoir recours à des modèles permettant de simuler le comportement de systèmes physiques complets, comportement décrit d'ailleurs par des équations aux dérivées partielles. Cependant même en se rapportant à des modèles, les projets restent très complexes et même carrément insolubles sans l'outil informatique.

La méthode des éléments finis comme outil d'analyse essentiel , comme cela été dit précédemment, suivi l'avènement de l'ordinateur comme outil de calcul indispensable. Ainsi, l'utilisation de cette méthode sur ordinateur permet d'établir et de résoudre les équations gouvernantes de problèmes complexes de manière efficace.

La méthode des éléments finis à été développée sur la base de fondements physique reliés à la mécanique des structures puis s'est généralisée à d'autres domaines telles la dynamique des fluides. L'appellation « méthode des éléments finis » revient au professeur Ray W.Clough de l'université de BERKELEY qui utilisa la méthode pour une analyse en contraintes planes, depuis, des recherches approfondies ont été effectuées et le nombre de publications se rapportant à cette méthode ne se comptent plus.

Aujourd'hui, le concept de la méthode des éléments finis est très large, même en se contondant au domaine de l'analyse des structures, la méthode peut en effet être utilisée de différentes manières ainsi, différentes approches sont possibles :

- Approche par la méthode **de déplacements**.
- Approche par la méthode **des forces**.
- Et enfin l'approche par la méthode **mixte**.

### III-2. Formulation déplacements :

La méthode des éléments finis basée sur les déplacements peut être vue comme une extension de la méthode des déplacements qui a été très longtemps utilisée (elle l'est encore de nos jours) dans l'analyse des poutres et treillis .

Les différentes étapes de résolution sont :

- a) - Idéalisations (modélisations) de la structure comme un assemblage d'éléments liés entre eux aux noeuds. On la met ainsi sous une forme analysable.
- b) - Considération des déplacements aux noeuds comme inconnues.
- c) - Etablissement des équations d'équilibre forces-déplacements aux noeuds et résolution de ces équations.
- d) - Calcul des distributions des contraintes internes des éléments.
- e) - Interprétation des résultats.

Il est à noter que les étapes les plus importantes sont l'idéalisation du problème et l'interprétation des résultats.

Le principe de base de la M.E.F est la discrétisation de la structure à analyser c'est à dire que cette dernière est mise sous forme d'un assemblage d'éléments finis connectés entre eux aux noeuds (joints).

Dans la réalité, tout problème est de nature tri-dimensionnelle, cependant ,il n'est pas toujours étudié en tant que tel et donc ainsi, la première étape est de décider du type de modèle à adopter.

A titre d'exemple, pour les problèmes relevant de la mécanique des structures l'ingénieur recherche la répartition des contraintes et le champ de déplacement dans la structure afin de vérifier que les conditions de résistance et les spécifications de flèche ,par exemple , sont bien respectées pour cela, l'opérateur doit définir des équations gouvernantes dont la solution doit satisfaire les conditions d'équilibre et de compatibilité puis résoudre celles-ci qui se présentent comme des équations aux dérivées partielles (lorsque le problème est de nature continue).

**Remarque :** Les bases théoriques de la M.E.F reposent d'une part sur la formulation énergétique et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

### III-3. Déroulement d'un calcul de structures par M.E.F :

Un calcul de structure par la M.E.F comporte quatre étapes fondamentales qui sont :

1°)- *Modélisation et discrétisation de la structure* : cette étape consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des matériaux (on opère un choix de la théorie et des équations constitutives décrivant le matériau), et à subdiviser la structure en un ensemble d'éléments de façon à représenter au mieux la structure à étudier. Cette subdivision tient compte de deux paramètres fondamentaux : le type d'élément à utiliser et la finesse de cette discrétisation.

2°)- *Evaluation des propriétés de l'élément* : c'est dans notre cas, le calcul des matrices de rigidité et des vecteurs de charges de chaque élément.

3°)- *Résolution du problème de la structure discrétisée* : cette étape consiste en la résolution d'un système d'équations linéaires et ce, en choisissant un algorithme de résolution ayant le meilleur rapport du nombre d'opérations à la facilité de programmation possible.

**Remarque :** Le choix de l'algorithme n'influe pas sur la qualité du résultat (en dehors des erreurs d'arrondis), c'est le modèle de formulation et la finesse de discrétisation qui fixe celle-ci.

4°)- *Interprétation des résultats* : C'est un problème important de la M.E.F et l'utilisation des graphiques apparaît aujourd'hui comme la solution la plus pratique pour résoudre ce problème.

### III-4. Exposé des principes énergétiques:

Dans un problème de mécanique, trois conditions doivent être satisfaites afin de pouvoir obtenir la solution exacte, ce sont :

- les conditions d'équilibre
- les conditions de compatibilité
- les lois de comportement contraintes-déformations.

Dans la M.E.F, les deux dernières conditions à savoir les conditions de compatibilité et de comportement, sont généralement satisfaites, cependant la première condition n'est pas satisfaites, qu'approximativement ce qui confère à cette méthode son caractère quelque peu imprécis. Cette erreur peut cependant être fortement réduite en augmentant le nombre d'éléments.

Comme nous l'avons dit précédemment, notre approche se fait par la méthode de déplacements en utilisant la formulation variationnelle qui garantit la symétrie de la matrice de rigidité.

La méthode variationnelle se base sur le principe des travaux virtuels qui constitue le fondement des principes variationnels tels : le principe de stationnarité de l'énergie de déformation ou du minimum de l'énergie de déformation.

#### III-4.1. Principe du travail virtuel :

Pour qu'un corps déformable soit en équilibre, il faut et il suffit que le travail des forces extérieures soit égal au travail de déformation pour tout champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible (vérifiant les conditions aux limites)

$$\delta w = \delta u \quad (\text{III-1})$$

#### III-4.2. Principe de stationnarité de l'énergie de déformation :

On a :  $\Pi = w - u$

$\Pi$  : énergie potentielle

**THEOREME :** « De tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles, celui satisfaisant aux conditions aux limites correspond à une énergie potentielle totale  $\Pi$  stationnaire . si le système est stable, l'énergie potentielle totale est minimum dans la configuration réelle du système (par définition) ».

$$\delta \Pi = \delta ( u - w ) \quad (\text{III-2})$$

#### III-4.3. Principe du minimum de l'énergie de déformation :

Si on choisit, dans un corps élastique, des déplacements virtuels nuls aux points d'application des forces extérieures, alors :  $\delta w = 0$  . donc en se basant sur le principe précédent :

$$\delta \Pi = \delta ( u - w ) = 0 \Rightarrow \delta u = 0 \quad (\text{III-3})$$

### III-5. Formulation de la M.E.F base sur les déplacements :

#### III-5.1. Formulation des équations d'équilibre :

Notre problème consiste en la détermination des déplacements, déformations et contraintes dans la structure représentée ci-dessus sous l'effet du chargement extérieur et des conditions aux limites données. Pour cela il nous faut tout d'abord établir les équations d'équilibre en utilisant le principe de stationnarité de l'énergie potentielle totale du système, principe d'ailleurs équivalent aux principe des travaux virtuels. ce principe est le suivant :

$$\delta \Pi = 0$$

avec  $\Pi = w - u$

ou :

$\Pi$  est l'énergie potentielle totale

$u$  est l'énergie de déformation

$w$  est le travail des charges

ou :

$$\{U^*\} = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix}$$

$$\{F^i\} = \begin{Bmatrix} F_X^i \\ F_Y^i \\ F_Z^i \end{Bmatrix}; \quad \{f^B\} = \begin{Bmatrix} f_X^B \\ f_Y^B \\ f_Z^B \end{Bmatrix}; \quad \{f^S\} = \begin{Bmatrix} f_X^S \\ f_Y^S \\ f_Z^S \end{Bmatrix}$$

Soit  $\{U\}$  le vecteur déplacement :  $\{U\}^T = \langle u \ v \ w \rangle$ .

Les déformations correspondant à  $\{U\}$  sont :

$$\{\epsilon\}^T = \langle \epsilon_{XX} \ \epsilon_{YY} \ \epsilon_{ZZ} \ \epsilon_{YZ} \ \epsilon_{XZ} \ \epsilon_{XY} \rangle \text{ et les contraintes correspondant}$$

$$\text{à } \{\epsilon\}^T \text{ sont : } \{\sigma\}^T = \langle \sigma_{XX} \ \sigma_{YY} \ \sigma_{ZZ} \ \sigma_{YZ} \ \sigma_{XZ} \ \sigma_{XY} \rangle.$$

Le principe des travaux virtuels stipule que l'équilibre de système n'est vérifié que si pour tout champ de déplacements virtuels compatible (satisfaisant les conditions aux limites de type déplacement) imposé aux système, il y a égalité des travaux intérieur et extérieur ce qui en terme mathématique devient :

$$\int_V \langle \epsilon^* \rangle \langle \sigma \rangle dV = \int_V \langle U^* \rangle \langle f^B \rangle dV + \int_S \langle U^* \rangle \langle f^S \rangle dS + \sum_i \langle U^i \rangle \langle F^i \rangle \tag{III-4}$$

Dans la M.E.F ,on suppose que le milieu est discrétisé en un ensemble d'éléments ayant chacun son propre système de coordonnées (système de coordonnées locales). Le déplacement  $\{u^{(m)}\}$  au niveau de l'élément m s'écrit comme une fonction des déplacements nodaux. Par conséquent :

$$\{u^{(m)}\} = [H^m] \{\hat{u}\} \tag{III-5}$$

$$\{u^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} u^{(m)} \\ v^{(m)} \\ w^{(m)} \end{Bmatrix}$$

et  $\{\hat{U}\}^T = \langle u_1 v_1 w_1 \dots u_n v_n w_n \rangle$  est le vecteur de dimensions  $3n$  ( $n$  : nombre de noeuds ) regroupant les déplacements nodaux .

$[H^{(m)}]$  matrice d'interpolation des déplacements.

**Remarques :**

1°- Bien que  $\{\hat{u}\}^T$  renferme tous les déplacements nodaux, il faut savoir que seuls ceux de l'élément affectent les déplacements et les déformations au sein de celui-ci.

$$\{u^{(m)}\} = [H^m] \{u\} \Rightarrow \{\epsilon^{(m)}\} = [B^{(m)}] \{\hat{u}\} \tag{III-6}$$

où :  $[B^{(m)}]$  est la matrice déformations-déplacements nodaux.

2°-les lignes de  $[B^{(m)}]$  sont le résultat de différentiation et combinaison des lignes de  $[H^{(m)}]$ .

L'équation (III-4) peut se réécrire comme suit :

$$\sum_m \int_{V^{(m)}} \langle \epsilon^{(m)} \rangle [C^{(m)}] dV^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \langle u^{*(m)} \rangle \{f^{B^{(m)}}\} dV^{(m)} + \sum_m \int_{S^{(m)}} \langle u^{*(m)} \rangle \{f^{S^{(m)}}\} dS + \sum_i \langle U^{*i} \rangle \{F^i\} \tag{III-7}$$

$m = 1,2,\dots,k$  : nombre total d'éléments.

Les différentes intégrations (volumiques et surfaciques) ont lieu au niveau de chaque élément en référence au système de coordonnées qui lui attaché. Ainsi, le calcul des intégrales peut se faire de manière efficace.

Les relations contraintes-déformations à l'intérieur de l'élément sont :

$$\{\sigma^{(m)}\} = [C^{(m)}] \{\epsilon^{(m)}\} \tag{III-8}$$

En combinant les équations (III-6),(III-7) et (III-8), on obtient :

$$\langle \hat{U}^* \rangle \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dV^{(m)} \right] \{ \hat{U} \} = \langle \hat{U}^* \rangle \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{ f^{B(m)} \} dV^{(m)} \right] + \langle \hat{U}^* \rangle \left[ \left( \sum_m \int_{S^{(m)}} [H^{S(m)}]^T \{ f^{S(m)} \} dS \right) + \{ F^i \} \right] \quad (III-9)$$

où :

$\langle \hat{U}^* \rangle$  : est le vecteur déplacement indépendant de l'élément considéré

$\{ F \}$  : est le vecteur des forces extérieures.

En éliminant de l'équation (III-9) le terme  $\langle \hat{U}^* \rangle$ , on obtient :

$$\left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dV^{(m)} \right] \{ \hat{U} \} = \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{ f^{B(m)} \} dV^{(m)} \right] + \left[ \left( \sum_m \int_{S^{(m)}} [H^{S(m)}]^T \{ f^{S(m)} \} dS \right) + \{ F^i \} \right] \quad (III-10)$$

et cette équation peut donc être écrite comme suit :

$$[K] \{ U \} = \{ R \} \quad (III-11)$$

et ceci est particulièrement vrai pour  $\{ U \} = \{ \hat{U} \}$ .

où :

$$\left. \begin{aligned} \{ R \} &= \sum_m \{ R_B^{(m)} \} + \{ R_S^{(m)} \} + \{ R_C \} \\ \{ R_B^{(m)} \} &= \sum_m \int_{V^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{ f^{B(m)} \} dV^{(m)} \\ \{ R_S^{(m)} \} &= \sum_m \int_{S^{(m)}} [H^{S(m)}]^T \{ f^{S(m)} \} dS \\ \{ R_C \} &= \{ F^i \} \\ [K] &= \sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dV^{(m)} \end{aligned} \right\} \quad (III-12)$$

les équations (III-12) et (III-13) représentent respectivement le vecteur chargement et la matrice de rigidité élémentaire.

**Remarque :**

- 1°- L'équilibre est satisfait en tout noeud.
- 2°- La condition de compatibilité est satisfaite dans la mesure où les éléments finis sont compatibles.
- 3°- La loi constitutive du matériau est satisfaite.

**III-5.2. Formulation en coordonnées généralisées :**

Revenons à l'équation (III-5) qui est :

$$\{u^{(m)}\} = [H^{(m)}] \{\hat{u}\}$$

Parmi toutes les classes de fonction possibles que l'on peut utiliser pour décrire les déplacements à l'intérieur d'un élément, la classe des fonctions polynomiales est celle qui s'adapte le mieux car les concepts d'interpolation polynomiale sont communément utilisés pour approcher des fonctions inconnues. En plus, les polynômes sont facilement dérivables et de ce fait les déformations peuvent facilement s'obtenir .

Considérant le cas d'un élément tridimensionnel pour lequel les déplacements  $u$  ,  $v$  et  $w$  sont des fonctions des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  on a en général :

$$\left. \begin{aligned} u(x,y,z) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy... \\ v(x,y,z) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4z + b_5xy... \\ u(x,y,z) &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + c_5xy.. \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-14)}$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; c_1, c_2, \dots, c_n$  sont appelées *coordonnées généralisées*.

Les relations des équations (III-14) s'écrivent sous forme matricielle comme suit :

$$\{u\} = \langle \Phi \rangle \{a\} \quad \text{(III-15)}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$\langle \Phi \rangle$  : regroupe les termes de la base polynomiale.

$\{ a \}$  : vecteur des coordonnées généralisées.

pour exprimer les coordonnées généralisées en termes de déplacements nodaux , en substituant les coordonnées de ceux-ci d'une façon appropriée,

on obtient :

$$\{\hat{u}\} = [A]\{a\} \quad (\text{III-16})$$

En supposant que l'on puisse inverser la matrice A, on arrive à l'équation suivante :

$$\{a\} = [A]^{-1}\{\hat{u}\} \quad (\text{III-17})$$

En substituant l'équation (III-17) dans l'équation (III-15), on aboutit à :

$$\{u\} = \langle \Phi \rangle [A]^{-1} \{\hat{u}\} = [H]\{\hat{u}\} \quad (\text{III-18})$$

et donc :

$$[H] = \langle \Phi \rangle [A]^{-1} \quad (\text{III-19})$$

Comme le vecteur déformation s'obtient à partir de différentiations des déplacements et que la matrice A ne contient que des constantes, on a :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\hat{u}\} \quad (\text{III-20})$$

$$[B] = [E][A]^{-1} \quad (\text{III-21})$$

E étant la matrice liant les déformations aux coordonnées généralisées :

$$\{\varepsilon\} = [E]\{a\} \quad (\text{III-22})$$

### III-6. Convergence:

En se basant sur ce qui précède, on peut donc dire qu'en général une analyse en élément finis nécessite l'idéalisation du problème physique en un modèle mécanique. Le tableau ci-dessous résume et explique parfaitement concept.

#### Problème physique réel

Géométrie, Matériau, Chargement, Conditions aux limites

#### Idéalisation

(modèle mécanique)

Aspect cinématique	Plaque de Kirchhoff et de Mindelin , barres et treillis
Matériau	Isotrope, anisotrope , élastique, élasto-plastique
Condition aux limites	Concentré, réparti.

#### Solution éléments finis

Choix des éléments et procédures de résolution

Tableau III-1

Si l'on compare la solution éléments finis à la solution exacte, on voit qu'il y a toujours une différence qui, si petite soit elle. Donc la solution élément finis est une solution approximative et étudier la convergence de ce type de solution revient donc à détecter les sources des erreurs. En dehors des erreurs d'arrondis qui dépendent de la précision de l'ordinateur utilisé et que l'on ne peut donc pas imputer à la méthode elle-même, les erreurs sont essentiellement celles présentées dans le tableau (III-2). Les erreurs les plus importantes étant les erreurs dues à la finesse de la discrétisation, on ne parlera dans ce qui suit que de celle-ci

Source de l'erreur	Manifestation de l'erreur
Discrétisation	Utilisation des fonctions d'interpolation pour les différents éléments
Intégration numérique dans l'espace	Evaluation des matrices élémentaires en utilisant de l'intégration numérique, superposition modale.
Solution des équations d'équilibre statique et dynamique	Méthode d'intégration directe, Superposition modale, Gauss-seidel, Jacobi.

Tableau III-2

### III-6.1. Convergence monotone :

Pour que la solution converge de façon monotone, il faut que les éléments soient complets et compatibles. La précision de la solution augmentera avec le nombre d'éléments. On dira alors que la solution converge vers la solution exacte.

La condition de complétude d'un élément réside dans le fait que les fonctions de déplacement de l'élément puissent représenter les déplacements de corps rigide et que les états de déformations restent constantes.

La condition de compatibilité signifie que les déplacements au sein de l'élément et aux frontières de ceux-ci (aux frontières interéléments donc), doivent être continus. Si les dérivées sont également des déplacements (ce qui est le cas par exemple pour les plaques de Kirchhoff

$$w, \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \theta_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}),$$

alors cette condition devient équivalente à la condition de continuité  $C^1$  qui s'énonce comme suit : Si les déplacements et leurs dérivées sont continues au sein des éléments et aux frontières, alors les éléments sont dits de continuité  $C^1$  (cette condition de convergence s'explique par le fait que les fonctions de déplacement doivent être continues au moins jusqu'à l'ordre  $m-1$  où  $m$  est l'ordre de dérivation le plus haut de la fonction d'énergie  $\Pi$ ).

Cette condition de compatibilité peut s'expliquer physiquement par le fait qu'aucun vide n'apparaît entre les éléments lorsque l'assemblage est chargé (la continuité de  $w$  et de ses dérivées assure la continuité des déplacements à travers l'épaisseur de l'élément).

### III-6.2. Convergence non monotone :

En pratique, on voit souvent que de bons résultats sont obtenus par la M.E.F., et ce, bien que certaines conditions de continuité aient été violées. Dans certains de ces cas, la condition de continuité inter-éléments, n'était pas préservée et dans d'autres cas, les éléments utilisés contenaient certaines incompatibilités inter éléments, cependant, le résultat final, est le même dans les deux cas, autrement dit, les déplacements ou leurs dérivées entre éléments ne sont pas vérifiés jusqu'à l'ordre nécessaire pour que toutes les conditions de compatibilité soient satisfaites, les éléments sont alors dites *incompatibles*.

Si les éléments utilisées sont incompatibles (non conformes), alors l'énergie potentielle n'est pas nécessairement minimum et la convergence monotone n'est plus assurée, on a cependant besoin d'établir la convergence (même si elle n'est pas monotone) et les conditions pour cela sont que la complétude soit toujours assurée et que les éléments passent avec succès le path-test.

**III-6.3. Path- test :**

Pour qu'un élément quelconque puisse être soumis au path-test, il faut qu'il contienne au moins un noeud à l'intérieur de ses frontières. On charge les noeuds des frontières et on applique à l'élément le nombre d'appuis nécessaires pour éviter tout mouvement du corps rigide. On détermine les solutions analytiques et numériques, si les deux solutions sont sensiblement égales alors le test est vérifié et la convergence de la solution pour un problème utilisant ce type d'éléments sera assurée.

**CHAPITRE IV**

**ANALYSE STATIQUE DES PLAQUES MINCES PAR**

**LA M.E.F**

« Notre ennemi dans l'étude c'est la  
suffisante ; quiconque veut réellement apprendre doit  
commencer par s'en débarrasser, s'instruire sans  
jamais s'estimer satisfait et enseigner sans jamais »  
se laisser telle doit être notre attitude.

**MAO TSE-TONG**

## CHAPITRE IV

### ANALYSE STATIQUE DES PLAQUES MINCES PAR LA M.E.F

#### IV-1. Introduction :

Nous avons, dans les chapitres précédents, exposé les fondements de la mécanique des milieux continus, ainsi que l'étude statique des plaques minces anisotropes. Nous avons également présenté la M.E.F et son application à la statique des structures. Dans ce qui suit, nous allons faire une application de la M.E.F pour l'analyse des plaques minces, pour cela, en utilisant deux types d'éléments. En premier lieu, les éléments basés sur la théorie « continue » de Kirchhoff (pour les modèles déplacements compatibles exige une continuité  $C^1$  de  $w$ ) et en deuxième lieu, les éléments basés sur l'introduction des hypothèses de Kirchhoff sous forme discrète (comme DKT et DKQ).

#### IV-2. Elements classique de Kirchhoff :

##### *IV-2.1. Elément rectangulaire non conforme à 12 d.d.l :*

Il est plus aisé de formuler un élément de forme rectangulaire qu'un élément de n'importe quel autre forme pour la simple raison que les cotes de l'élément sont parallèles aux axes de coordonnées.

Un élément rectangulaire typique à 4 noeuds coïncidant avec les sommets du rectangle est représenté sur la figure (IV-1). L'élément a une longueur  $a$ , une largeur  $b$  et une épaisseur  $h$ .

Nous supposons que l'origine du système de coordonnées coïncide avec le noeud 1 et que chacun des quatre noeuds a 3 d.d.l, qui sont :

$w$  : déplacement transversal.

$\theta_x$  : rotation autour de l'axe  $x$

$\theta_y$  : rotation autour de l'axe  $y$ .

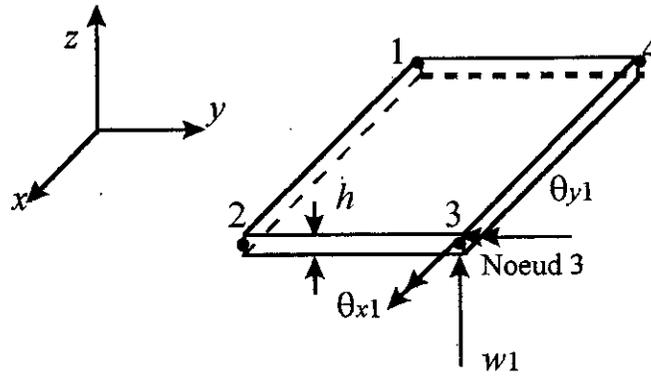


Figure IV-1 : Élément rectangulaire pour la flexion des plaques

Sachant que la présente formulation se fait dans le cadre de la théorie de Kirchhoff on a :

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y \quad ; \quad \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_x \tag{IV-1}$$

Ainsi, le vecteur de déplacement en tout point de l'élément est :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \tag{IV-2}$$

Dans le cas de flexion des plaques l'état de déformation en un point est représenté en terme de courbures par:

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{IV-3}$$

Un état de contrainte plane se présente dans le cas d'une plaque mince ,et nous aurons en tout point le vecteur contrainte :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{IV-4}$$

où  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion autour des axes x et y respectivement, et  $M_{xy}$  est le moment de torsion dans le plan (x , y) .



Cet élément a aussi 3 termes de déformation constantes  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ .

Les 3 constantes  $\alpha_4 x^2$ ,  $\alpha_6 y^2$  et  $\alpha_5 xy$  respectivement.

Afin de vérifier la conformité de l'élément, nous considérons la fonction de déplacement  $w$  le long du bord 2-3 d'équation  $x=a$  :

$$w(x,y)|_{x=a} = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3$$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \Big|_{x=a} = a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2$$

Les constantes  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont définies de façon unique par les valeurs des *d.d.l* aux noeuds 2 et 3.

$$w(a,0) = a_1 = (w)_2$$

$$w(a,b) = a_1 + a_2 b + a_3 b^2 + a_4 b^3 = (w)_3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(a,0) = a_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(a,b) = a_2 + 2a_3 b + 3a_4 b^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3$$

Comme les 4 valeurs des *d.d.l* sont communes aux 2 éléments adjacents au bord 2-3, ces 2 éléments ont la même fonction de déplacement transversal le long de ce bord. La compatibilité inter-élémentaire de  $w$  le long de ce bord (dans la direction  $y$ ) entraîne celle des pentes  $\frac{\partial w}{\partial y}$ .

Nous considérons à présent la pente normale  $\frac{\partial w}{\partial x}$  le long de ce même bord :

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=a} = a_5 + a_6 y + a_7 y^2 + a_8 y^3$$

Les 4 constantes ne peuvent être déterminées de façon unique, à partir des équations :

$$\frac{\partial w(a,0)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial w(a,b)}{\partial x}$$

Ainsi les 2 fonctions adjacentes ,auront 2 fonctions indéfinies pour  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , et la compatibilité inter-élémentaire des pentes normales le long du bord 2-3 ne sera pas satisfaite.

Cet élément ne satisfait pas le critère de convergence. C'est donc un élément non conforme et la solution obtenue à partir d'un maillage d'éléments de ce type ne sera pas une solution à énergie potentielle minimale. Cependant, la convergence de cet élément a été établie de façon théorique.

IV-2.1.2. Formulation de la matrice de rigidité

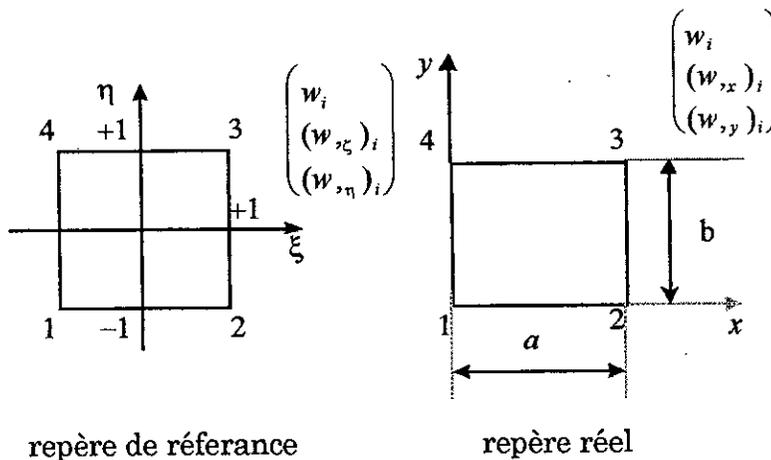
Il est plus facile de travail dans un repère de référence que dans un repère réel. Alors , la fonction de déplacement  $w$  :

$$w = \langle \Phi \rangle \{ \alpha \} \tag{IV-7}$$

où

$$\langle \Phi \rangle = \langle 1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \zeta \eta \quad \eta^2 \quad \zeta^3 \quad \zeta^2 \eta \quad \zeta \eta^2 \quad \eta^3 \quad \zeta^3 \eta \quad \zeta \eta^3 \rangle$$

$$\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \rangle$$



Le vecteur déplacement en tout point alors s'écrira :

$$\{ u \} = \begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{\partial}{\partial \zeta} \\ -\frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} w = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{\partial}{\partial \zeta} \\ -\frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \langle \Phi \rangle \{ \alpha \} \tag{IV-8}$$

pour déterminer les 12 constantes  $\alpha_i$ , on écrit la relation (IV-2) pour les 4 noeuds (-1,-1), (1,-1),(1,1) et (-1,1).

Alors ,on obtient le système d'équations :

$$\{u_n\}_\zeta = [A]\{\alpha\} \quad \text{avec} \quad \{u_n\}_\zeta^T = \langle (w_i \ \beta_{\zeta i} \ \beta_{\eta i}) \quad i = 1,4 \rangle$$

où  $A$  est une matrice de dimension  $(12*12)$ , qui s'exprime en fonction des coordonnées normalisées des noeuds.

Par inversion nous avons :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{u_n\}_\zeta \quad (\text{IV-9})$$

Nous pouvons à présent exprimer le déplacement au sein de l'élément sous la forme standard

$$w = \langle \Phi \rangle [A]^{-1} \{u_n\}_\zeta = \langle N \rangle_\zeta \{u_n\}_\zeta \quad (\text{IV-10})$$

Les fonctions  $\langle N \rangle_\zeta$  correspondent aux variables nodales  $\{u_i\}_\zeta$ .

$$\langle N \rangle_\zeta = \langle (N_{1i} \ N_{2i} \ N_{3i}) \quad i = 1,4 \rangle \quad (\text{IV-11})$$

Pour le  $i^{\text{ème}}$  noeud ,nous avons:

$$\begin{aligned} N_{1i} &= \frac{1}{8}(1+\zeta\zeta_i)(1+\eta\eta_i)(2+\zeta\zeta_i+\eta\eta_i-\zeta^2-\eta^2) \\ N_{2i} &= \frac{1}{8}\zeta_i(1+\zeta\zeta_i)^2(1+\eta\eta_i)(\zeta\zeta_i-1) \\ N_{3i} &= \frac{1}{8}\eta_i(1+\zeta\zeta_i)(1+\eta\eta_i)^2(\eta\eta_i-1) \end{aligned} \quad (\text{IV-12})$$

La transformation des variables nodales s'écrit (voir l'Annexe) :

$$\begin{aligned} \{u_n\}_\zeta &= \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_{\zeta u} \\ \beta_{\eta i} \end{Bmatrix} & \{u_n\} &= \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix} \\ \{u_n\}_\zeta &= \begin{bmatrix} [T_1] \\ [T_2] \\ [T_3] \\ [T_4] \end{bmatrix} \{u_n\} & [T_i] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & [J(\zeta_i)] & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour notre élément rectangulaire

$$[J(\zeta_i)] = \begin{bmatrix} a/2 & 0 \\ 0 & b/2 \end{bmatrix}$$

Alors, le déplacement transversal :

$$w = \left\langle \dots (N_{1i} \frac{a}{2} N_{2i} \frac{b}{2} N_{3i}) \dots \right\rangle \{u_n\} = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (IV-13)$$

Le vecteur déformation de (IV-3) s'écrit :

$$\{\chi\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} w$$

La transformation des dérivées secondes en  $x$  aux dérivées secondes en  $\zeta$  :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = [T_1] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} + [T_2] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \end{array} \right\}$$

Pour notre cas :  $[T_1] = [0]$  et

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 4/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/ab \end{bmatrix}$$

Le résultat des produits matricielles donne :

$$\{\chi\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} w = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{4}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ -\frac{4}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ -\frac{8}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \end{array} \right\} \langle N \rangle \{u_n\} \quad (IV-14)$$

Nous posons:

$$[B] = \begin{Bmatrix} \frac{4}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ \frac{4}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{8}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \end{Bmatrix} \langle N \rangle \quad (IV-15)$$

La matrice de rigidité élémentaire est :

$$[K^e] = \int [B]^T [D] [B] dA \quad (IV-16)$$

La transformation de l'intégrale :

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \text{Det} J d\zeta d\eta \quad (IV-17)$$

IV-2.1.2 Vecteur des charges équivalentes :

Pour un chargement uniforme  $f_z$  constant, le vecteur de charge équivalent :

$$\langle f_n \rangle = \int_A \langle N \rangle f_z dA \quad (IV-18)$$

La transformation de l'intégrale :

$$\langle f_n \rangle = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle N \rangle f_z \text{det} J d\zeta d\eta \quad (IV-19)$$

Un schéma de Gauss 3X3 donne une intégration exacte

### **IV-2.2 Elément rectangulaire conforme a16 d.d.I**

IV-2.2.1 Fonction de déplacements :

Si l'on désire avoir un élément présentant une continuité  $C^1$  nous pouvons utiliser l'interpolation de Hermite dans laquelle la fonction de déplacement  $\Phi$  et ses dérivées aux noeuds, jusqu'à l'ordre  $m-1$ , peuvent être considérées comme degrés de liberté.

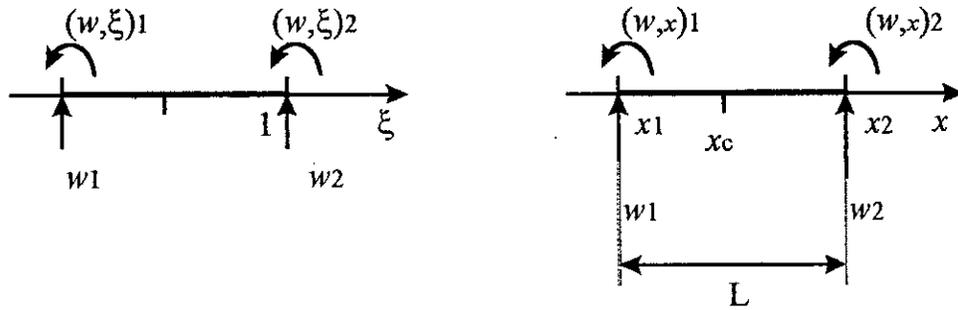


Figure IV-3 :Élément poutre en flexion.

Ainsi pour un élément linéaire reliant les noeuds 1 et 2 (Fig.IV-3) cette fonction de déplacement s'écrit :

$$\Phi = N_1(\Phi)_1 + N_1\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_1 + \dots + N_m\left(\frac{d^{m+1}\Phi}{dx^{m+1}}\right)_1 + N_{m+1}(\Phi)_2 + N_{m+2}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_2 + \dots + N_{2m}\left(\frac{d^{m+1}\Phi}{dx^{m+1}}\right)_2$$

où les  $N_i$  sont des polynômes de Hermites d'ordre  $2m-1$ .

Ces polynômes s'écrivent en fonction de la coordonnée normale  $\zeta = 2(x-x_c) / L$ , sous la forme :

$$N_i = (C_1)_i + (C_2)_i\zeta + (C_3)_i\zeta^2 + (C_4)_i\zeta^3 + \dots + (C_{2m})_i\zeta^{(2m-1)}$$

Nous disposons de  $2m$  conditions pour calculer chacune des constantes,  $(C_j)_i ; j = 1, 2, \dots, 2m$  relatives au polynôme. en effet ,  $N_i$  et ses dérivées appropriées prennent la valeur unité au noeud  $i$  et zéro ailleurs.

Pour l'élément unidimensionnel considéré ci-dessous les 4 polynômes de Hermite dans le repère de référence sont :

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{1}{4}(-\zeta^3\zeta_i + 3\zeta\zeta_i + 2) \\ H_i &= \frac{1}{4}(\zeta^3 + \zeta^2\zeta_i - \zeta - \zeta_i) \end{aligned} \quad i = 1, 2 \quad (IV-20)$$

Le déplacement transversal  $w$  :

$$w = \langle G_1 \ H_1 \ G_2 \ H_2 \rangle \{u_n\}_\zeta = \langle N \rangle_\zeta \{u_n\}_\zeta ; \quad w = \langle N \rangle_x \{u_n\}_x \quad (IV-21)$$

Les variables nodales sur l'élément de référence et sur l'élément réel sont différentes à cause des dérivations en  $\zeta$  et en  $x$  :

$$\{u_n\}_\zeta = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_{\zeta 1} \\ w_2 \\ w_{\zeta 2} \end{Bmatrix} ; \{u_n\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_{x1} \\ w_2 \\ w_{x2} \end{Bmatrix}$$

$$\{u_n\}_\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} \end{bmatrix} \{u_n\} ; L = x_2 - x_1$$

finalement les fonctions de formes deviennent :

$$w = \left\langle G_1 \frac{L}{2} H_1 \quad G_2 \frac{L}{2} H_2 \right\rangle \{u_n\} = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (\text{IV-22})$$

En ce qui concerne notre élément plaque, nous pouvons déterminer une fonction de déplacement à compatibilité inter-éléments et possèdent tout les états de déformation uniforme en utilisant les notions d'interpolation abordées ci-dessus. Ainsi en prenant  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  comme 4<sup>eme</sup> degrés de liberté (communément appelé gauchissement), en chaque noeud la fonction de déplacement  $w$  peut s'écrire comme un polynôme d'HERMITE bicubique complet à 16 termes comme suit :

$$w(x, y) = w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 [G_i(\xi)G_i(\eta)w_i + H_i(\xi)G_i(\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_i + G_i(\xi)H_i(\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_i + H_i(\xi)H_i(\eta)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)_i] \quad (\text{IV-23})$$

Le passage des variables nodales de l'élément de référence aux variables nodales de l'élément réel, se fait en utilisant une matrice de transformation  $T$  construite à partir de la matrice Jacobienne, et des matrices  $[C_1]$  et  $[C_2]$  évaluées en chaque noeud  $i$ .

Il se fait de la manière suivante :

$$\{u_i\}_c = [T_i]\{u_i\}$$

$$[T_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab/4 \end{bmatrix}$$

avec :  $a = x_2 - x_1$  ,  $b = y_2 - y_1$

finalement nous trouvons :

$$w(x,y) = w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 [G_i(\xi)G_i(\eta)w_i + \frac{a}{2}H_i(\xi)G_i(\eta)(\frac{\partial w}{\partial \xi})_i + \frac{b}{2}G_i(\xi)H_i(\eta)(\frac{\partial w}{\partial \eta})_i + \frac{ab}{4}H_i(\xi)H_i(\eta)(\frac{\partial w}{\partial \xi \partial \eta})_i]$$
(IV-24)

D'une façon générale, ce polynôme peut être obtenu à partir du triangle de Pascal :

$$w = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3) (b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3)$$
(IV-25)

De l'équation (IV-25) nous voyons que la fonction de déplacements  $w$ , contient les termes relatifs aux mouvements de corps rigides ( $C_1$ ,  $C_2 x$  et  $C_3 y$ ), ainsi que ceux relatifs aux 3 états de déformations constantes ( $C_4 x^2$ ,  $C_5 xy$  et  $C_6 y^2$ ).

Pour établir la compatibilité inter éléments de la pente normale  $\frac{\partial w}{\partial x}$  le long du bord 2-3 (la compatibilité inter éléments de  $w$  et de  $\frac{\partial w}{\partial y}$  étant analogue à celle de l'élément a 12 d.d.l.), nous considérons :

$$\left. \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \right|_{x=a} = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3$$

où les 4 constantes peuvent être définies de façon unique par les 4 conditions suivantes :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_2 \quad \text{pour } y = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_3 \quad \text{pour } y = b$$

La compatibilité inter élément de la pente normale est donc vérifiée le long du bord 2-3. Elle l'est aussi le long des 3 autres bords.

Cette fonction de déplacement satisfait aux critères de la convergence monotone et l'élément est alors conforme.

IV-2.2.2 Formulation de la matrice de rigidité :

La relation (IV-3) reste valable nous avons donc :

$$\{ \chi \} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} w \tag{IV-26}$$

En substituant (IV-24) dans l'équation ci-dessus :

$$\{ \chi \} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \langle N \rangle \{ u_n \}$$

$$[B] = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \langle N \rangle \tag{IV-27}$$

Et en exprimant les dérivées secondes en x à partir des dérivées premières et secondes en  $\xi$ . Nous obtenons la relation suivante : (voir Annexe )

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Dans notre cas :  $[T_1] = [0]$  et

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 4/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/ab \end{bmatrix}$$

Le résultat des produits matricielles donne :

$$\{ \chi \} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} w = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ -\frac{4}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ -\frac{8}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \end{Bmatrix} \langle N \rangle \{ u_n \} \quad (IV-28)$$

$$[B] = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ -\frac{4}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ -\frac{8}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \end{Bmatrix} \langle N \rangle \quad (IV-29)$$

La matrice de rigidité élémentaire est :

$$[K^e] = \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (IV-30)$$

La transformation de l'intégrale :

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \text{Det} J d\zeta d\eta \quad (IV-31)$$

V-2.2.3 Vecteur des charges équivalentes :

Pour un chargement uniforme  $f_z$  constant, le vecteur de charge équivalent :

$$\langle f_n \rangle = \int_A \langle N \rangle f_z dA \quad (IV-32)$$

La transformation de l'intégrale :

$$\langle f_n \rangle = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle N \rangle f_z \text{det} J d\zeta d\eta \quad (IV-33)$$

$$\langle f_n \rangle = f_z \frac{ab}{4} \left\langle \begin{array}{ccc} a & b & ab \\ 1 & -\frac{a}{6} & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{36} \\ 1 & -\frac{a}{6} & -\frac{b}{6} & -\frac{ab}{36} \end{array} \right\rangle \quad (IV-34)$$

Un schéma de Gauss 4X4 donne une intégration exacte (un schéma 2X2 donne un mode parasite pour un élément)

### IV- 3. Élément de Kirchhoff sous forme discrète :

#### IV-3.1. Aspect général :

Plusieurs éléments finis de plaques ont été proposés à partir de 1968 permettant d'obtenir des solutions numériques des problèmes de plaques minces en accord avec les hypothèses de Kirchhoff. Les éléments de types Kirchhoff-discret, décrits dans cette section, ont les caractéristiques suivantes :

- L'énergie interne de déformation de flexion est :

$$U_f^e = \frac{1}{2} \int_A \langle \chi \rangle [D] \{ \chi \} dA. \quad (IV-35)$$

- L'énergie de CT est négligée :  $U_c^e = 0$ . (IV-36)

- Les hypothèses de Kirchhoff sont introduites sous forme particulière sur le contour, ou éventuellement à l'intérieur de l'élément.

Plusieurs techniques ont été utilisées pour satisfaire les relations cinématiques traduisent que les déformations de CT sont nulles. Ces techniques sont :

a) Collocation sur les côtés

$$\gamma_{sz} = 0 \quad (\text{en certains points}) \quad (IV-37)$$

b) Sous forme intégrale sur les côtés  $i, j$

$$\int_i^j \gamma_{sz} ds = 0 \quad (IV-38)$$

c) Collocation en des points internes à l'élément

$$\gamma_{xz} = 0 ; \gamma_{yz} = 0 \quad (IV-39)$$

d) Sous forme intégrale sur l'élément

$$\int_A \gamma_{xz} dA = 0 ; \int_A \gamma_{yz} dA = 0 \quad (IV-40)$$

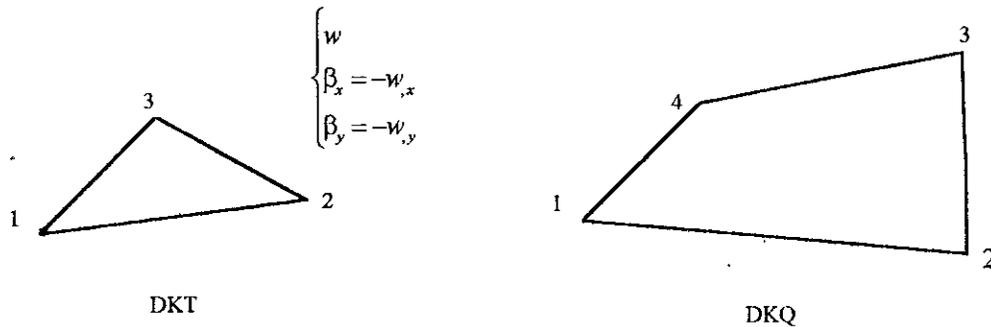
La continuité  $C^0$  de  $\beta_x$  et  $\beta_y$  est en général maintenue après l'introduction des relations de Kirchhoff sous forme discrète.

**IV- 3.2 Eléments DKT et DKQ :**

Les éléments DKT ( Discrète Kirchhoff Triangle ) et DKQ ( Discrète Kirchhoff Quadrilatéral) ont 3 et 4 noeuds et 3 d.d.l par noeud :

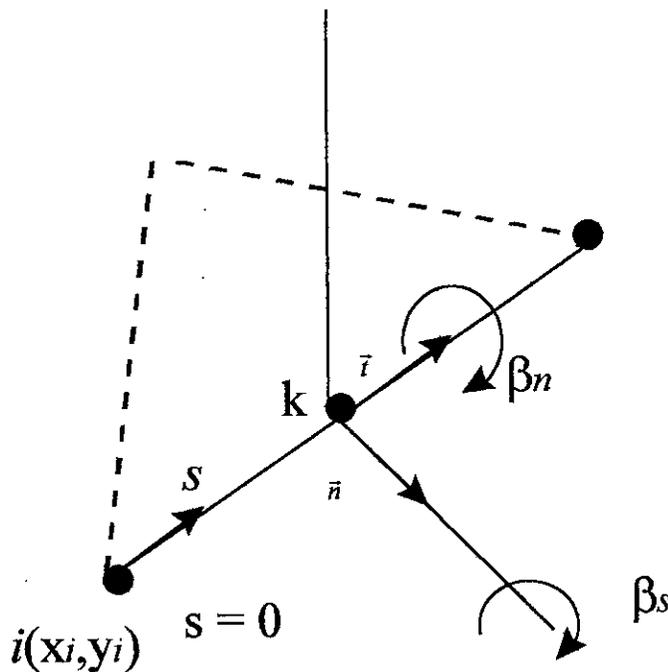
$$\langle u_n \rangle = \langle (w \ \beta_{x_i} \ \beta_{y_i}) \quad i = 1, n \rangle \tag{IV-41}$$

$n = 3$  pour DKT,  $n = 4$  pour DKQ



Les approximations  $C^0$  de  $\beta_x(\xi, \eta)$  et de  $\beta_y(\xi, \eta)$  sont telles que :

- La rotation  $\beta_s$  (dans le plan  $sz$  où  $s$  est la coordonnée le long des côtés ) est quadratique en  $s$ .



- La rotation  $\beta_n$  (dans le plan  $nz$  où  $n$  est la direction normale aux côtés) est linéaire en  $s$  ( $n$  est dirigé vers l'extérieur de l'élément)

$$\beta_x = \langle N \rangle \{ \beta_{x_n} \} + \langle P_x \rangle \{ \alpha \} ; \quad \beta_y = \langle N \rangle \{ \beta_{y_n} \} + \langle P_y \rangle \tag{IV-42}$$

$$\langle N \rangle = \langle N_i \quad i = 1, n \rangle ; \langle \beta_{xb} \rangle = \langle \beta_{xi} \quad i = 1, n \rangle ; \langle \beta_{yb} \rangle = \langle \beta_{yi} \quad i = 1, n \rangle$$

$$\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_k \quad k = n+1, 2n \rangle ; \quad k \text{ milieu du côté } i$$

$$\langle P_x \rangle = \langle (P_k C_k) \quad k = n+1, 2n \rangle ; \langle P_y \rangle = \langle (P_k S_k) \quad k = n+1, 2n \rangle$$

$$C_k = x_{ji}/L_k ; \quad S_k = y_{ji}/L_k ; \quad L_k = \sqrt{x_{ji}^2 + y_{ji}^2} \tag{IV-43}$$

Les fonctions  $N_i$  et  $P_i$  sont données dans le tableau (IV-1).

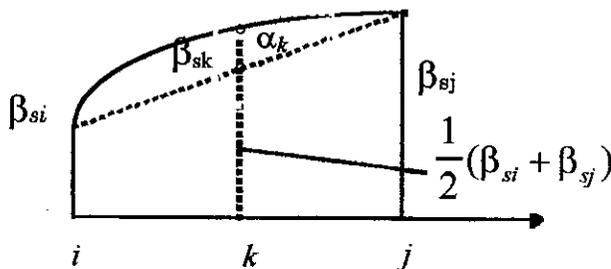
	$N_i (i = 1, n)$	$P_k (k = n+1, 2n)$
	$N_1 = \lambda = 1 - \zeta - \eta$ $N_2 = \zeta$ $N_3 = \eta$	$P_4 = 4\zeta \lambda$ $P_5 = 4\zeta \eta$ $P_6 = 4\eta \lambda$
	$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \zeta)(1 - \eta)$ $N_2 = \frac{1}{4}(1 + \zeta)(1 - \eta)$ $N_3 = \frac{1}{4}(1 + \zeta)(1 + \eta)$ $N_4 = \frac{1}{4}(1 - \zeta)(1 + \eta)$	$P_5 = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)(1 - \eta)$ $P_6 = \frac{1}{2}(1 + \zeta)(1 - \eta^2)$ $P_7 = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)(1 + \eta)$ $P_8 = \frac{1}{2}(1 - \zeta)(1 - \eta^2)$

Tableau (IV - 1) Fonctions  $N_i$  et  $P_k$  pour DKT et DKQ.

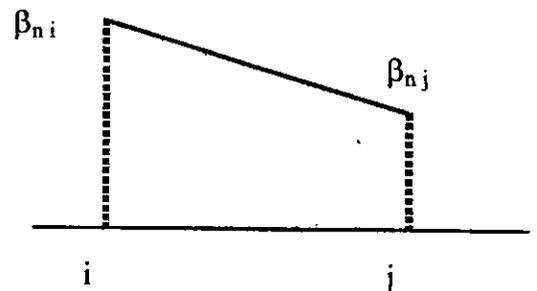
Les variables  $\alpha_k$  sont associés à la variation quadratique de  $\beta_s$  sur les côtés :

$$\beta_s = (1 - s')\beta_{si} + s'\beta_{sj} + 4s'(1 - s')\alpha_k ; \quad \beta_n = (1 - s')\beta_{ni} + s'\beta_{nj}$$

$$0 \leq s' = \frac{s}{L_k} \leq 1 \tag{IV-44}$$



Variation de  $\beta_s$



Variation de  $\beta_n$

Les rotations  $\beta_s$  et  $\beta_n$  où les directions  $s$  et  $n$  sont relatives au côté  $k$  sont reliées à  $\beta_x$  et  $\beta_y$  par

$$\begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-45})$$

L'hypothèse de Kirchhoff est introduite sur le contour de l'élément sous la forme suivante : (de type IV-38)

$$\int_i^j \gamma_{sz} ds = \int_i^j (w_{,s} + \beta_s) ds = 0 \quad (\text{IV-46})$$

En utilisant (IV-44) et (IV-45) on obtient :

$$w_j - w_i + \frac{L_k}{2} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi} + C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) + \frac{2}{3} L_k \alpha_k = 0 \quad (\text{IV-47})$$

d'où nous tirons l'expression de  $\alpha_k$  en fonction des variables nodales des noeuds  $i$  et  $j$  :

$$\alpha_k = \frac{3}{2L_k} (w_j - w_i) - \frac{3}{4} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi} + C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) = 0 \quad k = n+1, 2n \quad (\text{IV-48})$$

En substituant la relation (IV-48) dans (IV-42), nous obtenons les expressions explicites des rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  en fonction des 9 (ou 12) variables nodales  $\{u_n\}$  (éq. IV-41) :

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (N_{i1}^x & N_{i2}^x & N_{i3}^x) \\ (N_{i1}^y & N_{i2}^y & N_{i3}^y) \end{bmatrix} \quad i = 1, n \quad \{u_n\} \quad (\text{IV-49})$$

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m ; \quad N_{i2}^x = N_i - \frac{3}{4} P_k C_k^2 - \frac{3}{4} P_m C_m^2$$

$$N_{i3}^x = -\frac{3}{4} P_k C_k S_k - \frac{3}{4} P_m C_m S_m$$

$$N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m ; \quad N_{i2}^y = N_i^x$$

$$N_{i3}^y = N_i - \frac{3}{4} P_k S_k^2 - \frac{3}{4} P_m S_m^2$$

Les fonctions  $N_i$ ,  $P_k$  et  $P_m$  sont définis dans le tableau (IV-1)

Les indices  $k$  et  $m$  sont relatifs aux deux côtés ayant le sommet  $i$  comme point commun (tableau (IV - 2)).

	noeud sommet $i$	côté $k (i - j)$	côté $m (i - j)$
DKT	1	4(1 - 2)	6(3 - 1)
	2	5(2 - 3)	4(1 - 2)
	3	6(3 - 1)	5(2 - 3)
DKQ	1	5(1 - 2)	8(4 - 1)
	2	6(2 - 3)	5(1 - 2)
	3	7(3 - 4)	6(2 - 3)
	4	8(4 - 1)	7(3 - 4)

Tableau (IV - 2) indice  $i$ ,  $k$  et  $m$  pour DKT et DKQ.

L'énergie interne de déformation de flexion d'un élément est :

$$U_f^e = \frac{1}{2} \int_A \langle \chi \rangle [D] \{ \chi \} dA = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [K^e] \{ u_n \}. \quad (\text{IV-50})$$

avec

$$\langle \chi \rangle = \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle; \quad \{ \chi \} = [B] \{ u_n \} \quad (\text{IV-51})$$

$$[B] = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} \langle N_{,\xi}^x \rangle - J_{12} \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -J_{21} \langle N_{,\xi}^y \rangle + J_{11} \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -J_{21} \langle N_{,\xi}^x \rangle + J_{11} \langle N_{,\eta}^x \rangle + J_{22} \langle N_{,\xi}^y \rangle - J_{12} \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix}$$

où  $J_{ij}$  sont les termes du Jacobien de la transformation géométrique définie par :

$$x = \sum_{i=1,n} N_i x_i ; \quad y = \sum_{i=1,n} N_i y_i$$

Les fonctions  $N_i$  étant définie dans le tableau (IV - 1), les termes de  $[J]$  et

$J = \det [J]$  sont rappelés dans l'annexe A.

- La matrice de rigidité  $[K^e]$  est :

$$[K^e] = \int_A [B]^T [D] [B] J d\xi d\eta. \quad (\text{IV-52})$$

\*Pour DKT et  $[D]$  constant,  $[K^e]$  est obtenue exactement avec 3points d'intégrations de Hammer puisque  $[B]$  est linéaire en  $\xi$  et  $\eta$ .

\* Pour DKQ, un schéma de Gauss 3X3 permet une intégration exacte pour un rectangle, cependant, une intégration 2X2 est généralement adoptée même pour une forme quadrilatérale, car cette sous-intégration est suffisante pour conserver un rang correct.

**- Les contraintes et les moments**

Lorsque les variables nodales  $\{u_n\}$  sont connues, nous pouvons évaluer les courbures en utilisant (IV-51), les moments et les contraintes planes sont donnés par :

$$\{\chi\} = [B]\{u_n\}; \{M\} = [D]\{\chi\}; \{\sigma(\zeta, \eta, z)\} = z[C]\{\chi\} \quad (\text{IV-53})$$

avec  $z = \pm \frac{h}{2}$  sur les faces.

Ces contraintes peuvent être évaluées aux points d'intégrations numérique sur les côtés ou aux sommets, les contraintes sont discontinues d'un élément à l'autre, et un champ continu peut être défini par une technique de lissage.

- Les efforts tranchants peuvent être obtenus en utilisant les équations d'équilibres :  $T_x = M_{x,x} + M_{xy,y}$  ;  $T_y = M_{xy,x} + M_{y,y}$  (IV-54)

- Les contraintes de CT sont également obtenues à partir des équations d'équilibres en contraintes ( éq.II-10.)

$$\sigma_{xz} = \int_{-t}^t (\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y}) dz ; \sigma_{yz} = \int_{-t}^t (\sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dz \quad (\text{IV-55})$$

**- Vecteur des charges équivalentes .**

Aucune interpolation n'a été introduite pour  $w(x, y)$ . Les considérations ci-dessus permettent de considérer qu'une approximation cohérente est de type cubique (avec  $w, w_x, w_y$  aux sommets). On observe cependant qu'une approximation linéaire de  $w$  permettrait toujours d'obtenir (IV-47) et donc les matrices de rigidités (éq.IV-52). Une autre possibilité pour définir  $w$  sur l'élément, résulte de l'hypothèse qu'avant l'introduction des relations de Kirchhoff ( éq.IV-51 et 52),  $w$  est quadratique :

$$w = \langle N \rangle \{w_n\} + \langle P \rangle \{\Delta w_n\} \quad (\text{IV-56})$$

Les fonctions  $N_i$  et  $P_k$  sont données dans le tableau (IV-1), et

$$\langle w_n \rangle = \langle w_i \quad i = 1, n \rangle ; \langle \Delta w_n \rangle = \langle \Delta w_k \quad k = n+1, 2n \rangle \quad (\text{IV-57})$$

En exprimant que  $\gamma_{sz} = 0$  aux sommets  $i$  et  $j$ , nous obtenons :

$$\Delta w_k = \frac{L_k}{8} (\beta_{sj} - \beta_{si}) \quad (\text{IV-58})$$

Soit, en utilisant (IV-45)

$$\Delta w_k = \frac{1}{8} L_k C_k (\beta_{sj} - \beta_{si}) + \frac{1}{8} L_k S_k (\beta_{yj} - \beta_{yi}) \quad (\text{IV-59})$$

avec  $L_k C_k = x_j - x_i$  et  $L_k S_k = y_j - y_i$

En introduisant (IV-59) dans (IV-56), nous obtenons :

$$w = \langle N^w \rangle \{ u_n \} \quad (\text{IV-60})$$

avec  $\langle N^w \rangle = \langle (N_{i1}^w \ N_{i2}^w \ N_{i3}^w) \quad i = 1, n \rangle$ ;  $N_{i1}^w = N_i$

$$N_{i2}^w = -\frac{1}{8} P_k L_k C_k + \frac{1}{8} P_m L_m C_m ; \quad N_{i3}^w = -\frac{1}{8} P_k L_k S_k + \frac{1}{8} P_m L_m S_m$$

Où  $N_i$ ,  $P_k$  et  $P_m$  sont définis dans le tableau (IV-1) et les indices  $i$ ,  $k$  et  $m$  dans le tableau (IV-2).

Pour le calcul du vecteur des charges équivalentes, nous pouvons, compte tenu des discussions précédentes, considérer  $w$  comme cubique (type Hermite) ou quadratique ou linéaire. Avec  $w$  quadratique et  $f_z$  constant, nous obtenons DKT et DKQ.

$$\langle f_n \rangle = \int_A \langle N^w \rangle f_z dA \quad (\text{IV-61})$$

La transformation de l'intégrale :

$$\langle f_n \rangle = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle N^w \rangle f_z \det J d\xi d\eta \quad (\text{IV-62})$$

## **CHAPITRE V**

### **PRESENTATION DU PROGRAMME M.E.F**

« Les gens de qualité savent tout sans avoir rien appris »

**MOLIERE**

## CHAPITRE V

### PRESENTATION DU PROGRAMME M.E.F

#### V-1. Introduction :

L'utilisation pratique de la méthode des éléments finis est basée sur l'algèbre matricielle et l'utilisation de l'ordinateur comme outil de calcul. Cependant, dans le cas d'une analyse de type d'éléments finis les matrices globales sont souvent d'un grand ordre, ainsi la résolution des grands systèmes occasionnent des erreurs d'arrondi parfois énormes. Heureusement, ces matrices sont systématiques et creuses, c'est à dire qu'elles ne contiennent que très peu de termes non nuls. Il convient donc de mettre en œuvre des techniques particulières pour éviter aussi bien de stocker les termes nuls que d'effectuer des opérations dont l'un des opérandes est nul.

Mathématiquement, la M.E.F. revient à poser le problème en terme résolution d'un système d'équations simultanées, écrit sous forme :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

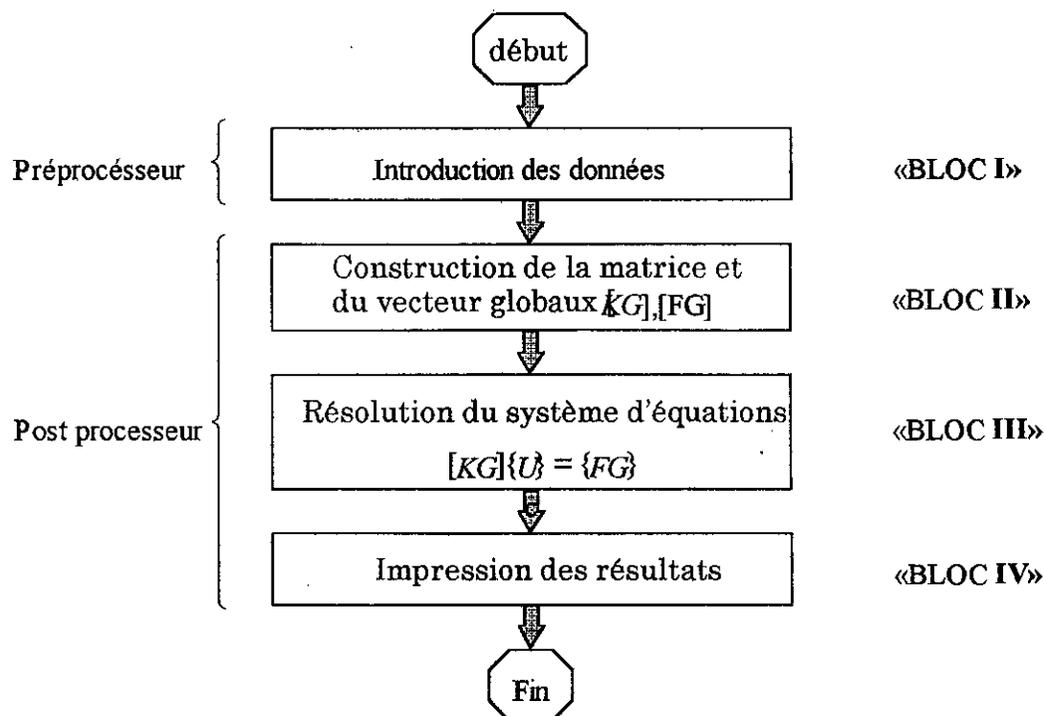
L'efficacité d'un programme informatique dépend essentiellement de deux facteurs qui sont :

- 1 - Le Coût en terme de calcul est en place mémoire.
- 2 - Les techniques numériques utilisées.

Nous développons dans le présent chapitre comment nous avons tenu compte de ces deux facteurs lors de l'élaboration du programme informatique.

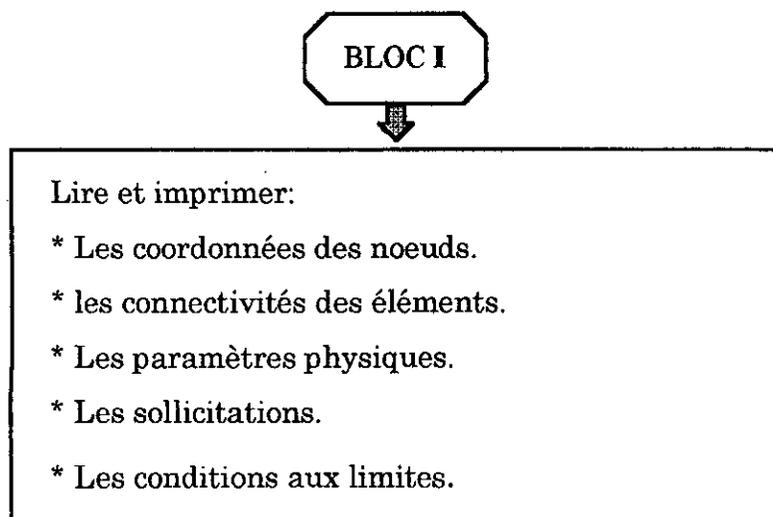
## V.2 Structure du Programme M.E.F

Notre Programme M.E.F à la structure suivante :



FigureV-1: Blocs fonctionnels du programme(M.E.F)

Chaque Bloc enchaîne l'exécution :



**BLOC III**

- \* Modification  $[KG]$  et  $\{FG\}$  pour prendre en compte les
- \* Triangulariser  $[KG]$ .
- \* Calculer la solution  $\{U\}$ .
- \* Calculer les variables  
(gradient, contrainte, réaction, énergie)

**BLOC II**

- Pour chaque élément:
- \* Extraire les informations liées a cet élément
  - \* Construire la matrice et le vecteur élémentaires  $[KE]$  ,  $\{FR\}$
  - \* Assemble  $[KE]$  et  $\{FR\}$  dans  $[KG]$  et  $\{FG\}$

**V-3. Description du programme M.E.F :**

Le programme principal enchaîne l'exécution des bloc fonctionnels sous le contrôle d'un utilisateur, en appelant les sous programmes correspondant à chaque bloc (Macro-instruction).

A : Programme principal

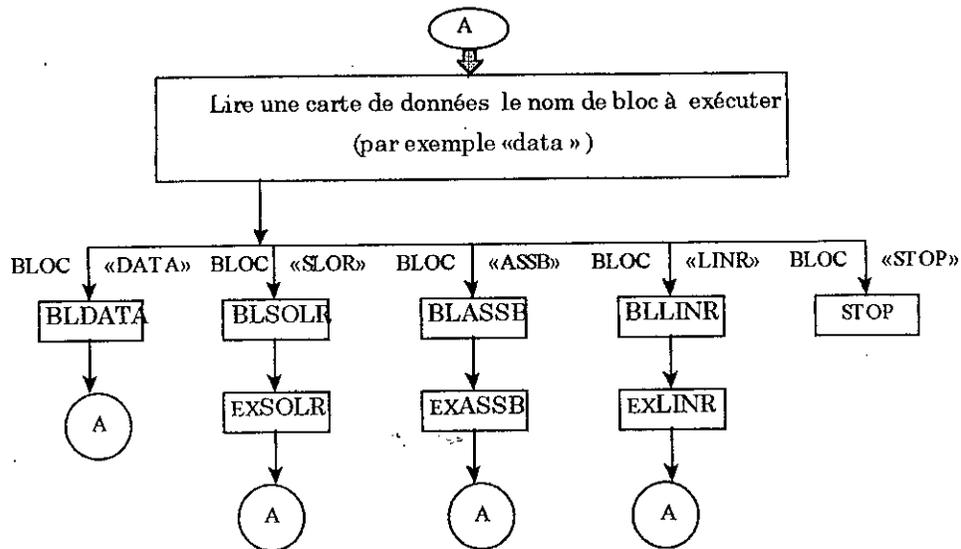
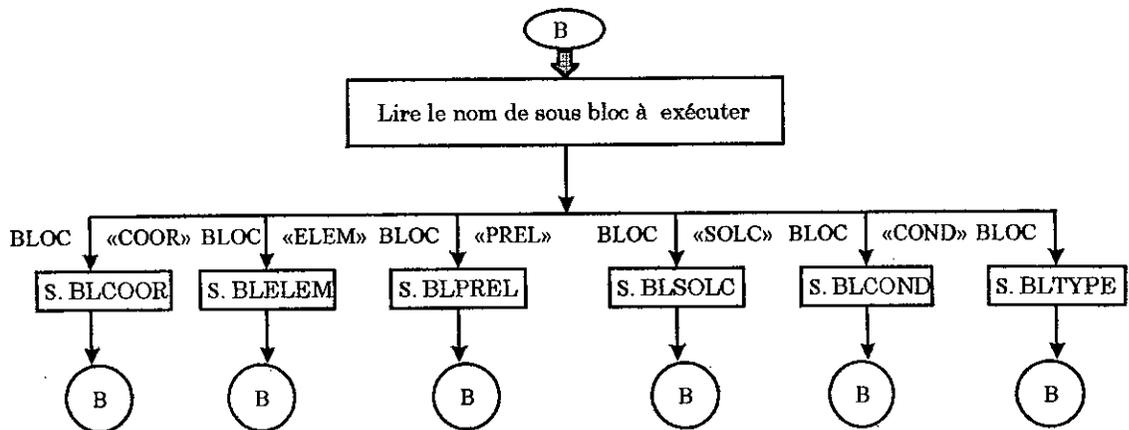


Figure (V-2) Structure du programme principal.

De la même façon pour le bloc « DATA », mais on utilise des sous macro instruction (sous bloc), comme l'illustre la figure (V- 3).

B : Sous programme de bloc « DATA »



#### V-4. Caractéristiques et performances du programme

Notre programme ainsi construit procure certaines caractéristiques qui le rendent très performant ,elles consistent dans les points suivants :

- **Au niveau de sa structure :**

Sa construction en blocs enchaînés , permet de traiter les macro-instructions et de les exécuter .

- **extensibilité :**

Notre programme peut ,sans difficulté être élargi , à d'autres blocs ,sans pour autant présenter des problèmes de connectivite avec les autres . ainsi nous pouvons traiter le problème dynamique (par exemle) en ajoutant un module à notre programme ,en exploitant les résultats déjà obtenus

- **maillage automatique :**

Nous pouvons ,par ce programme réaliser les maillages de n'importe quelle structure rectangulaire ou circulaire ,cela nous évitera de faire appel au logiciel existant (gain matériel)

- **bibliothèque d'éléments :**

Notre programme est dote d'une bibliothèque d'éléments ,qui contient les formulations utilisées dans ce mémoire .En outre ,il est possibles d'effectuer des décritisations différentes sur la même structure .

- **large champs d'application :**

Nous pouvons ,utiliser notre programme dans plusieurs domaines , de ce faite il peut être utilise dans le traitement d'un problème en M.D.F ou de transfert de chaleur ,ou de construction.

# CHAPITRE VI

## RESULTATS ET INTERPRETATIONS

« Lorsqu'un théoricien trouve un résultat nouveau, personne n'y  
croit sauf lui,  
lorsqu'un expérimentateur trouve un résultat, tout le monde croit  
sauf lui ».

**J.LEMAIRE**

## CHAPITRE VI

### RESULTATS ET INTERPRETATIONS

#### VI-1. Analyse d'une plaque mince carré isotropique avec les formulations R12, R16, DKT, ET DKQ, :

Pour les applications qui vont suivre , on adoptera les éléments de discrétisations , on a présenté pour un nombre d'élément fixé les différents types de maillages correspondants ( figure VI-1 ).

*a)- Analyse d'une plaque mince carré avec R12, R16, DKT et DKQ, pour une charge concentrique :*

Nous nous sommes penché, au premier lieu sur le calcul du pourcentage d'erreur sur la flèche au centre  $W_c$ , puis sur le moment  $M_x$  au milieu du côté encastré et de la réaction  $R$  concentré au coin.

i/ \* Sur la figure(VI-2), on dresse les deux graphes donnant le pourcentage d'erreur de la flèche au centre  $W_c$  en fonction du nombre d'éléments  $N$  pour les deux types de conditions aux limites étudiés. On constate aisément que les éléments de discrétisation convergent vers la solution théorique.

\* Le nombre d'élément  $N$  influe directement sur la rapidité de la convergence, car pour la formulation R16 on observe les caractéristiques d'une solution qui vérifie amplement le critère à l'énergie potentielle minimale. La grande précision est due à la compatibilité inter-élément , et ce pour R16. DKT et DKQ,

ii/ Sur la figure (VI-3), on a représenté les deux graphes du  $M_x$  et  $R$  en fonction du nombre d'élément, on observe aussi une nette convergence monotone vers la solution théorique. Ceci est dû pour R16, DKT et DKQ à la vérification du critère de l'énergie potentielle minimale et à la compatibilité inter-élément.

**b)- Analyse d'une plaque mince carré avec R12, R16, DKT et DKQ, pour une charge uniformément répartie:**

De même que pour une charge concentrée. On adopte les formulations R12, R16, DKT et DKQ qui sont représentés ci-dessous (figure VI-1).

i/ Pour la flèche au centre :

les deux graphes figure (VI-4) donnent le pourcentage d'erreur en fonction du nombre N, nous renseignent sur la convergence monotone des formulations d'éléments.

ii/ Pour le moment au centre  $M_c$  :

De même, on constate que la convergence est vérifiée aussi.

- Les résultats ainsi trouvés ici, sont en directe liaison avec ceux trouvés pour une charge concentrée et l'interprétation est la même.

**c)- Etudes des Iso-moments**

Dans ce cas, nous nous contenterons d'étudier une plaque carré mince soumise à une charge uniformément distribuée, avec un appui simple continue au contour en utilisant la formulation DKT. Ce choix est guidé par le fait que pour l'élément DKT, le nombre de noeuds par élément est le moindre que les autres formulations.

i) Étude des champs de moments :

Dans la figure (VI-5), nous avons représenté les trois graphes des trois isomoment  $M_x$ ,  $M_y$ , et  $M_{xy}$  sur le quart de la plaque considéré.

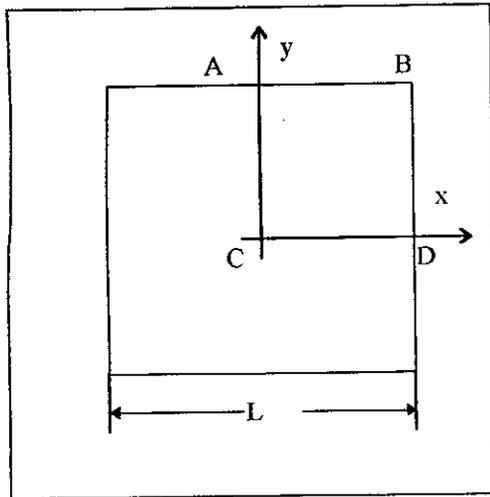
Nous constatons que les moments  $M_x$  et  $M_y$  s'annulent sur les deux cotés du quart de la plaque et qu'ils prennent leurs valeurs maximales au centre de la plaque.

ii) Optimisation de la plaque :

En utilisant le cercle de Mohr, nous calculons les quantités  $M_{max}$ ,  $M_{min}$  et  $M_{xy_{max}}$  dans le but d'évaluer entre autre les régions faibles de la plaque.

Sur les trois graphes, nous avons représenté les isomoments  $M_{max}$ ,  $M_{min}$ ,  $M_{xy_{max}}$  et le moment de Mises sur le quart de la plaque.

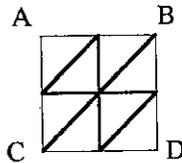
Ces représentations nous permettent de localiser les points faibles de la plaque qui correspondent dans ce cas au centre de la plaque ( figure VI-6 ).



- condition de symétrie :  
 $\beta_x = 0$  sur CA ;  $\beta_y = 0$  sur CD
- condition aux limites :
  - Encastrement :  
 $w = \beta_x = \beta_y = 0$  sur ABD
  - Appui simple :  
 $w = \beta_x = 0$  sur AB  
 $w = \beta_y = 0$  sur BD
- Matériau Isotrope (Aluminium)
  - $E = 710^{10} \text{Pa}$
  - $\nu = 0.3$
  - $h = 0.05 \text{ m}$
  - $L = 2 \text{ m}$

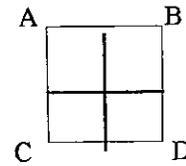
• Maillage considérés :

- Cas élément triangulaire  $N = 8$ .



Maillage A

- Cas élément rectangulaire  $N = 4$ .



Maillage B

• Solution de Kirchhoff :

■ Pour une charge concentrée  $P = -3000 \text{ N}$ :

$$(D = Eh^3/12(1 - \nu^2), \nu = 0.3)$$

- Encastrement :  $w_c = 5.610^{-3} PL^2/D$

$$|M_{xD}| = 0.1257 P$$

- Appui simple :  $w_c = 11.610^{-3} PL^2/D$

$$R = |2M_{xy}|_B = 0.1219 P$$

■ Pour une charge répartie  $f_z = f = -3000 \text{ Pa}$ :

$$(D = Eh^3/12(1 - \nu^2), \nu = 0.3)$$

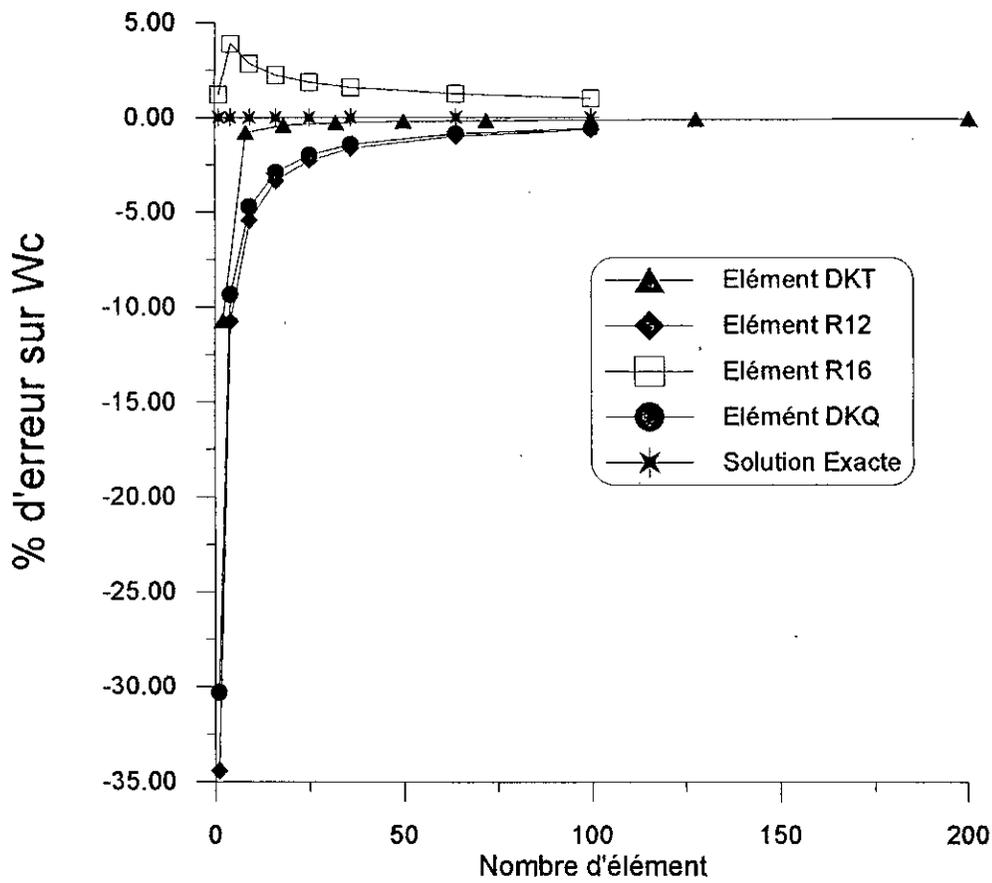
- Encastrement :  $w_c = 0.0012610^{-3} f L^4/D$

$$M_C = -0.0513 f L^2$$

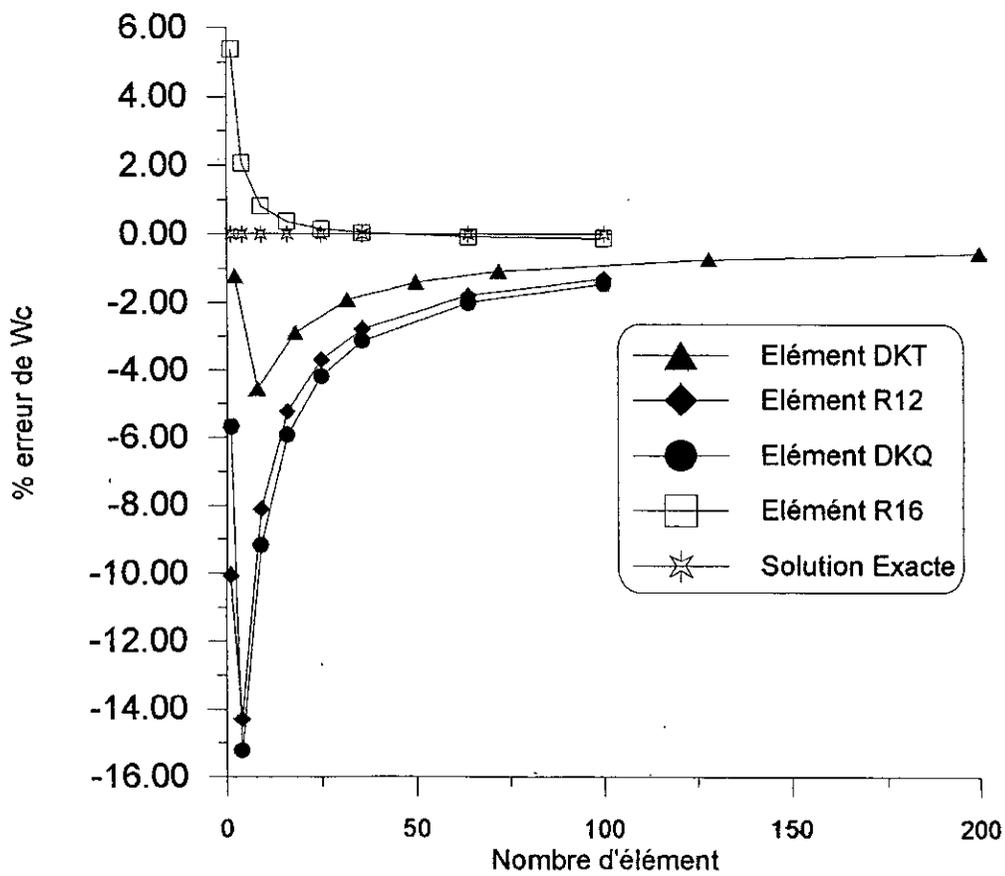
- Appui simple :  $w_c = 0.0040610^{-3} f L^4/D$

$$M_C = 0.0479 f L^2$$

Figure(VI-1). Plaque carrée ; Données :

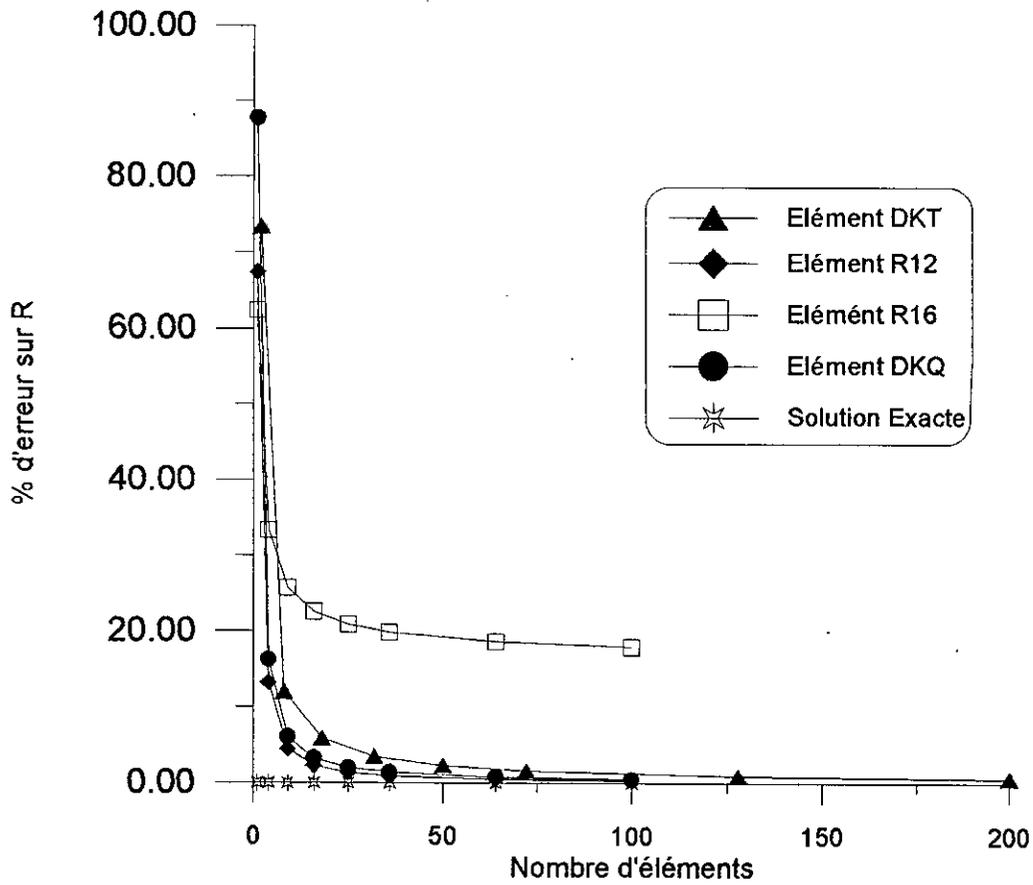


a) Plaque simplement supportée

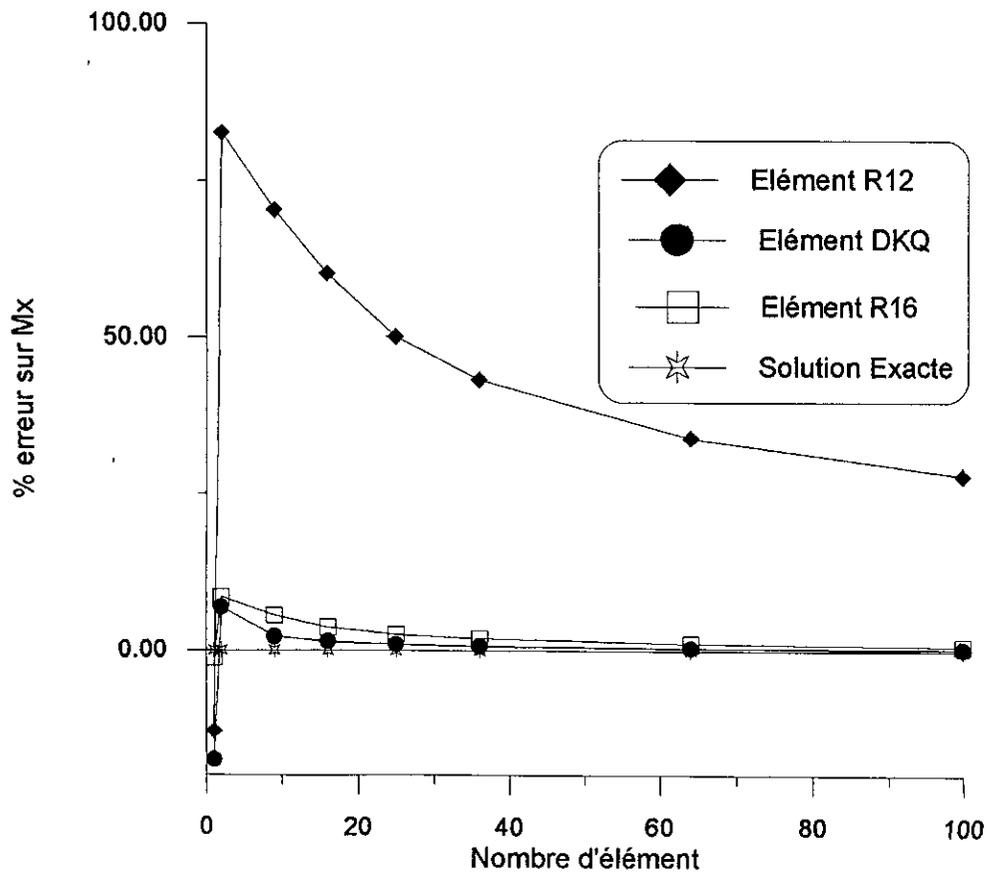


b) Plaque encastree

Figure VI-2 : Plaque carrée encastree et S-S.  
Erreur sur  $w_c$  pour R12, R16, DKT et DKQ

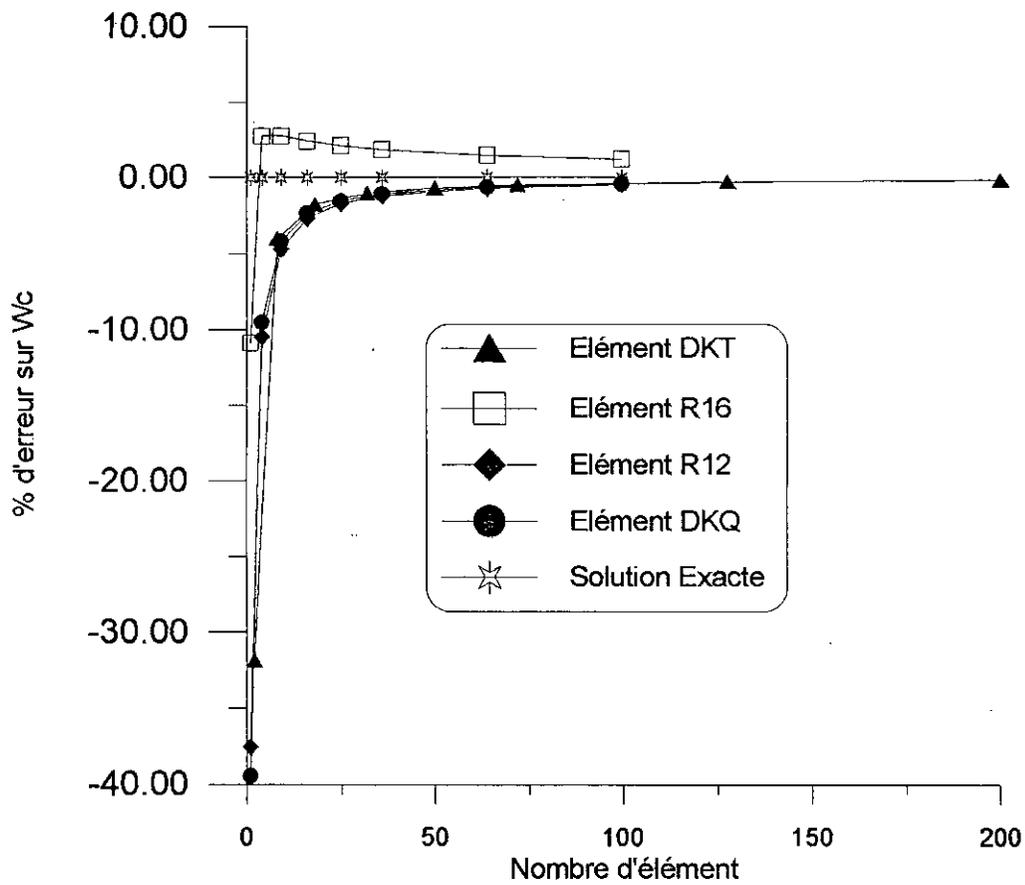


a) Plaque simplement supportée

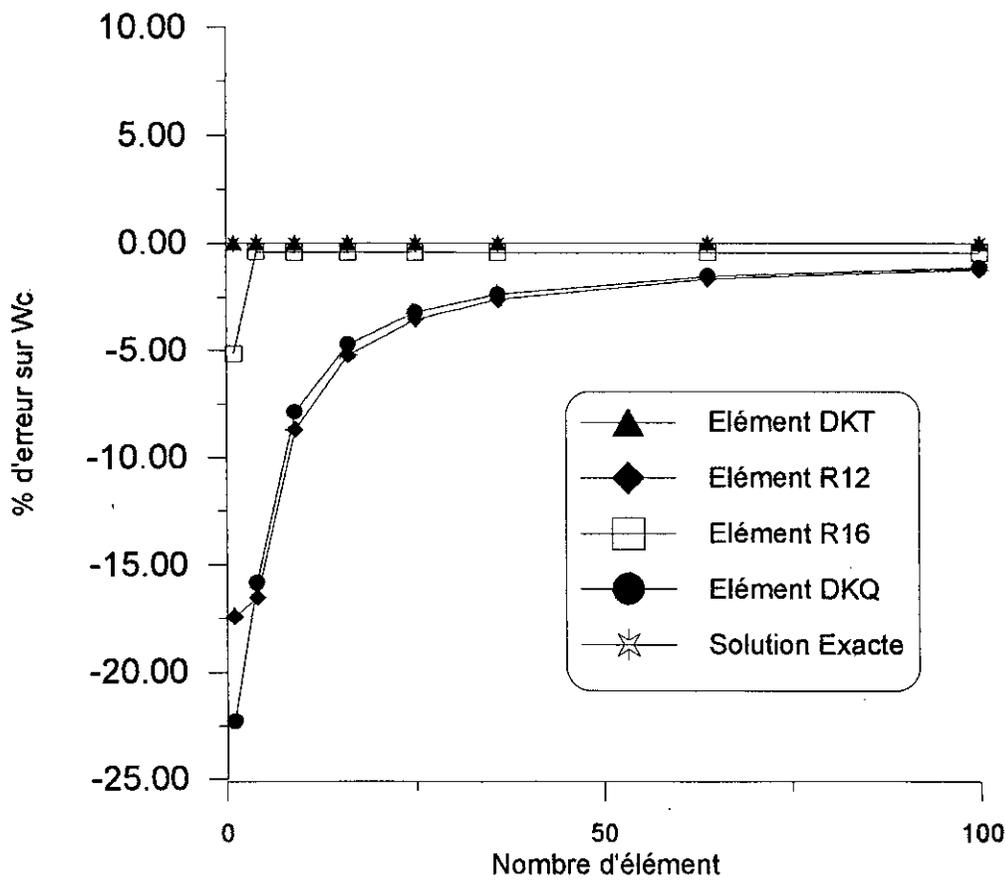


b) Plaque encastree

Figure VI-3 : Plaque carrée encastree et S-S  
Erreur sur un moment et une réaction au coin.

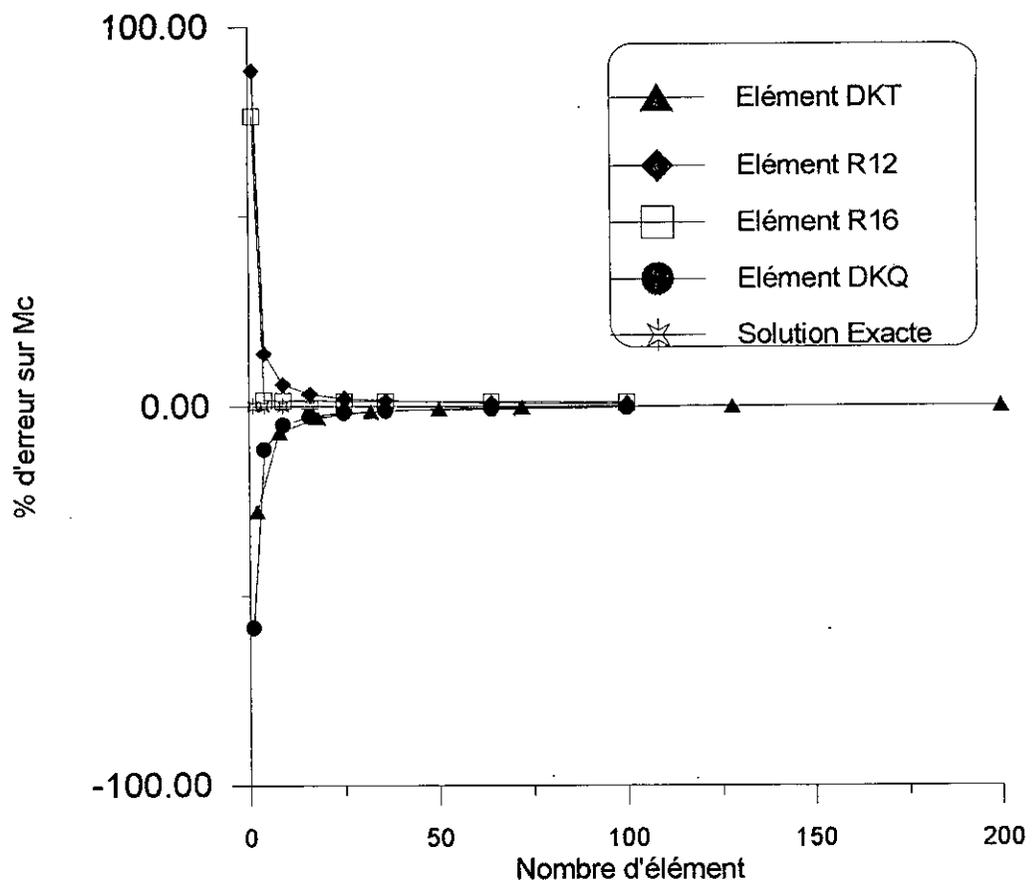


a) Plaque simplement supportée

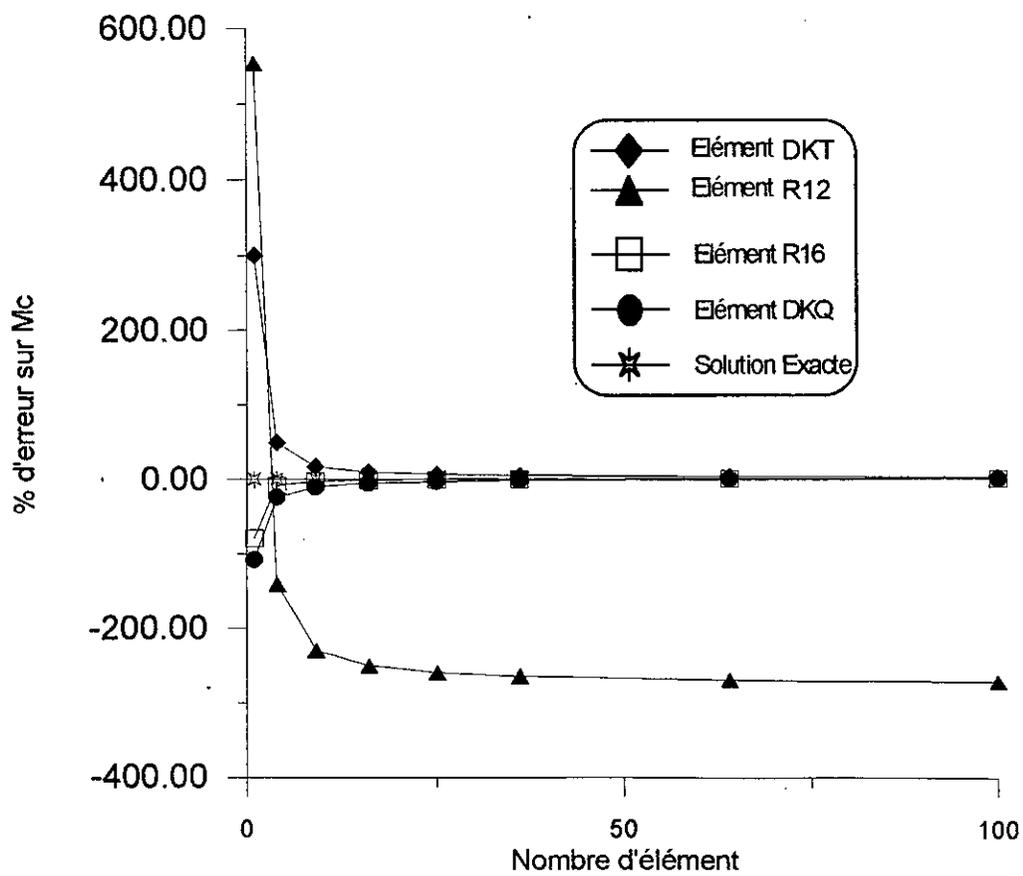


b) Plaque Encastree

Figure VI-4a : Plaque carrée encastree et S-S chargée uniformément  
Erreur sur  $W_c$  pour R12, R16, DKT et DKQ

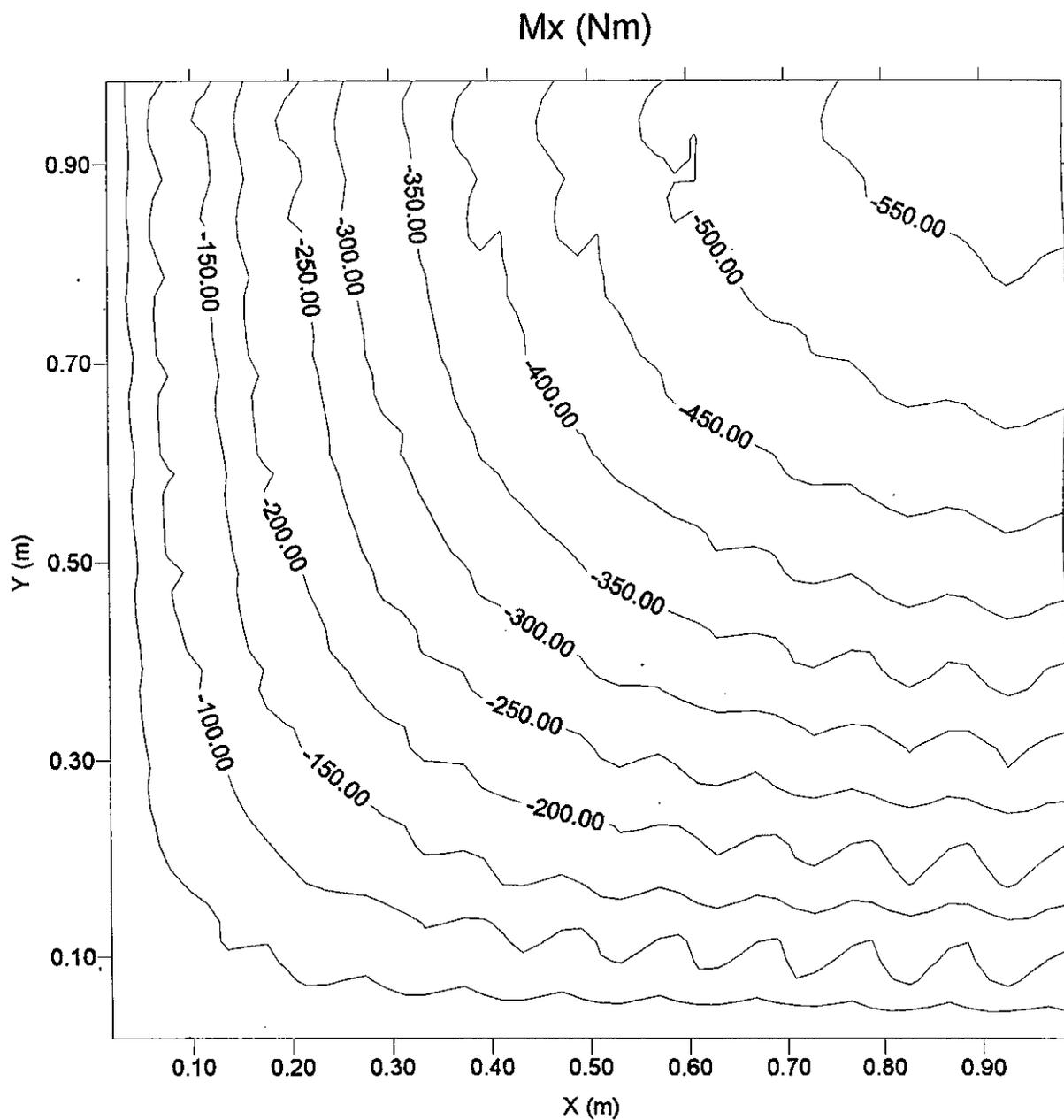


a) Plaque simplement supportée

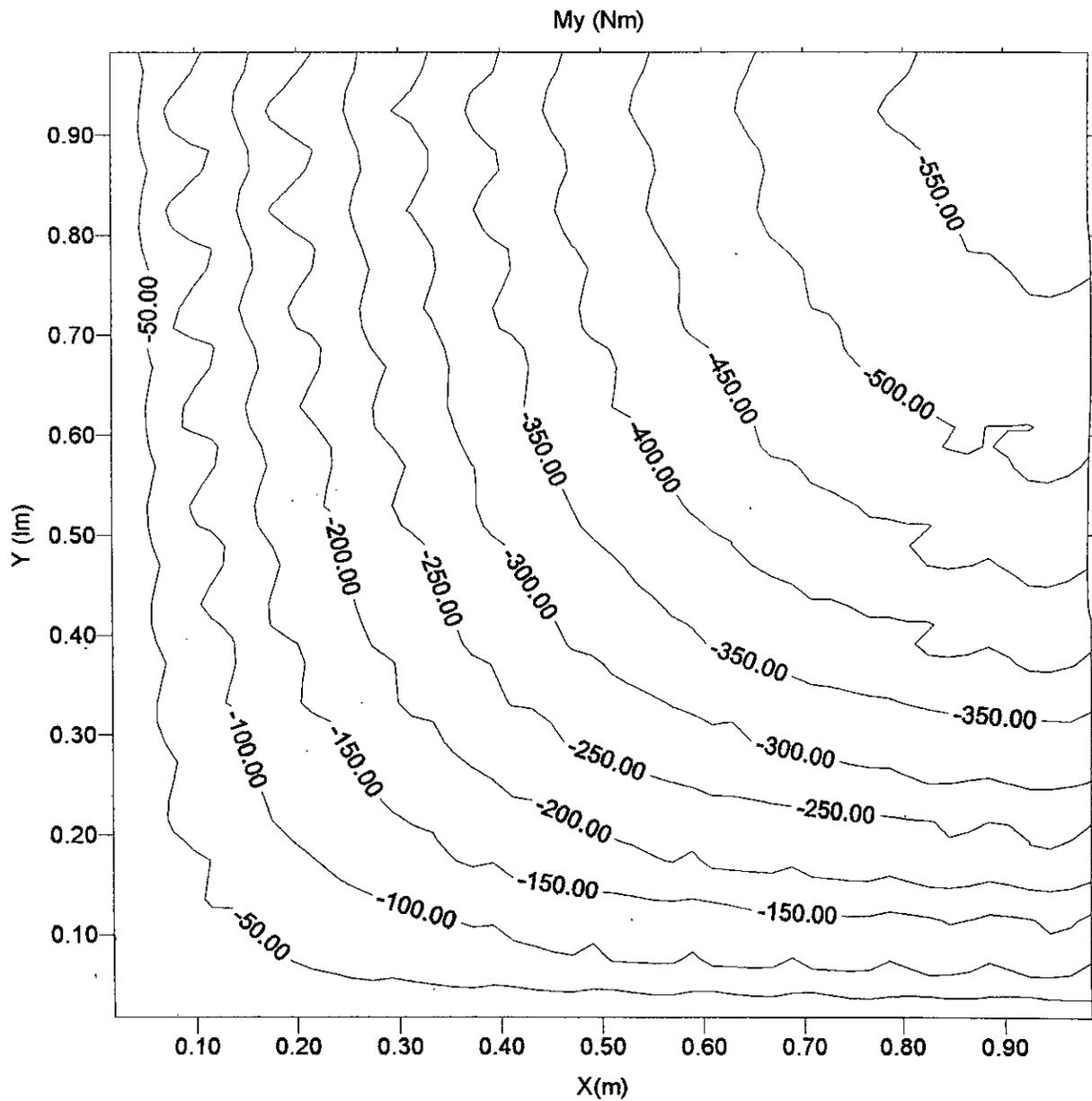


b) Plaque encastée

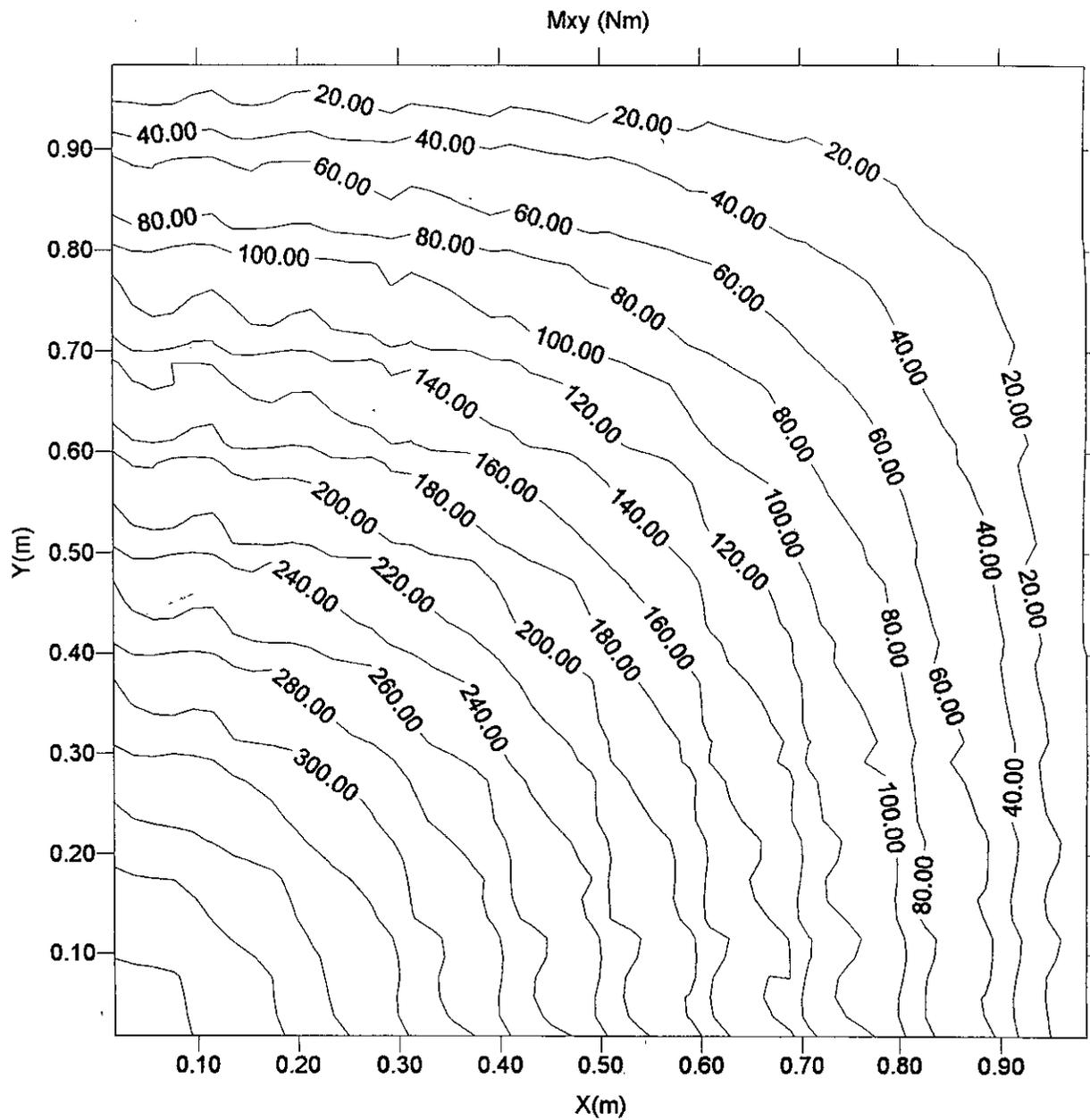
Figure VI.4b : Plaque carrée encastée et S-S chargée uniformément  
Erreur sur le moment au centre pour R12, R16, DKT et DKQ



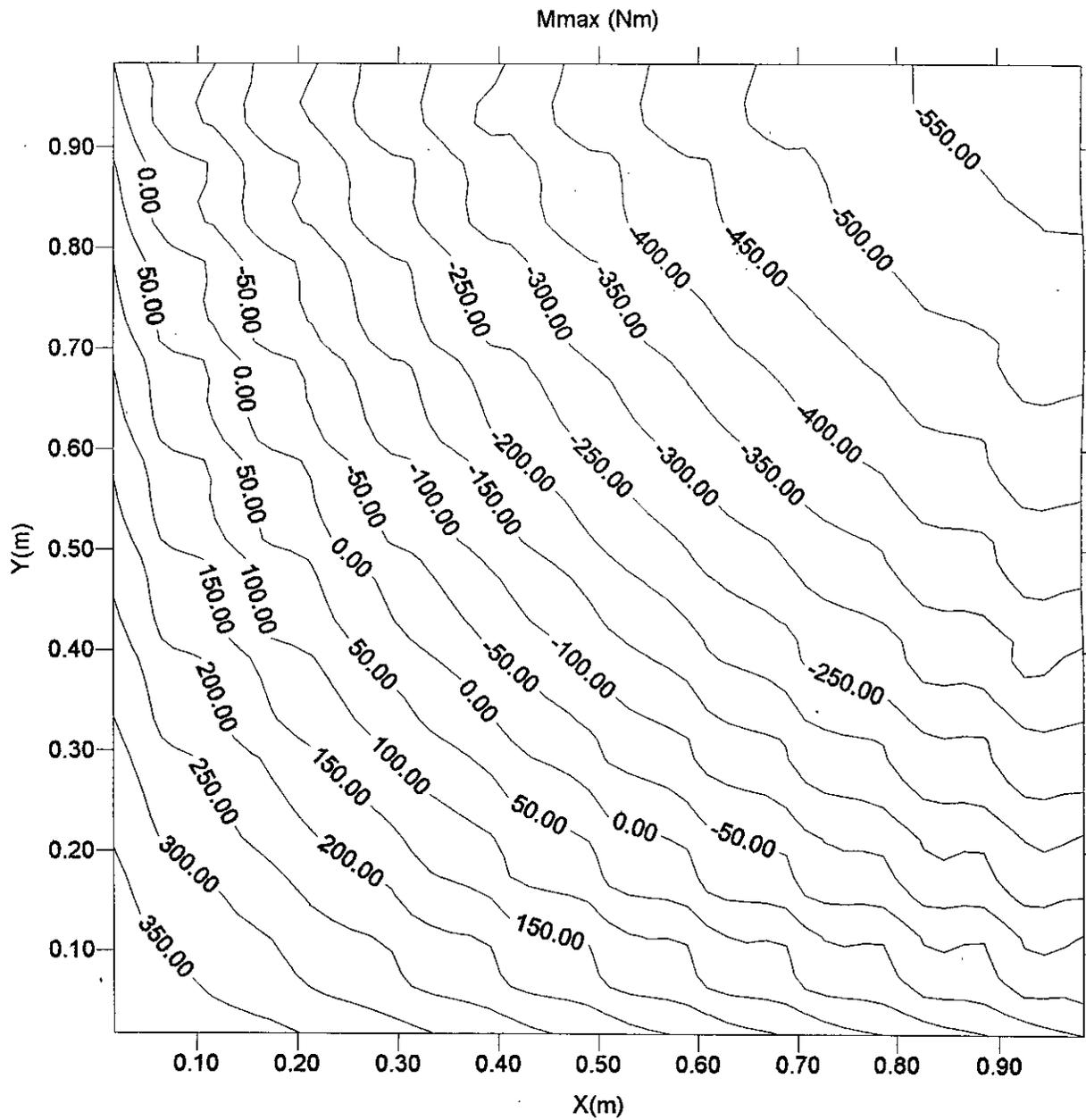
**Figure VI.5.a : Le moment  $M_x$  (Nm)**



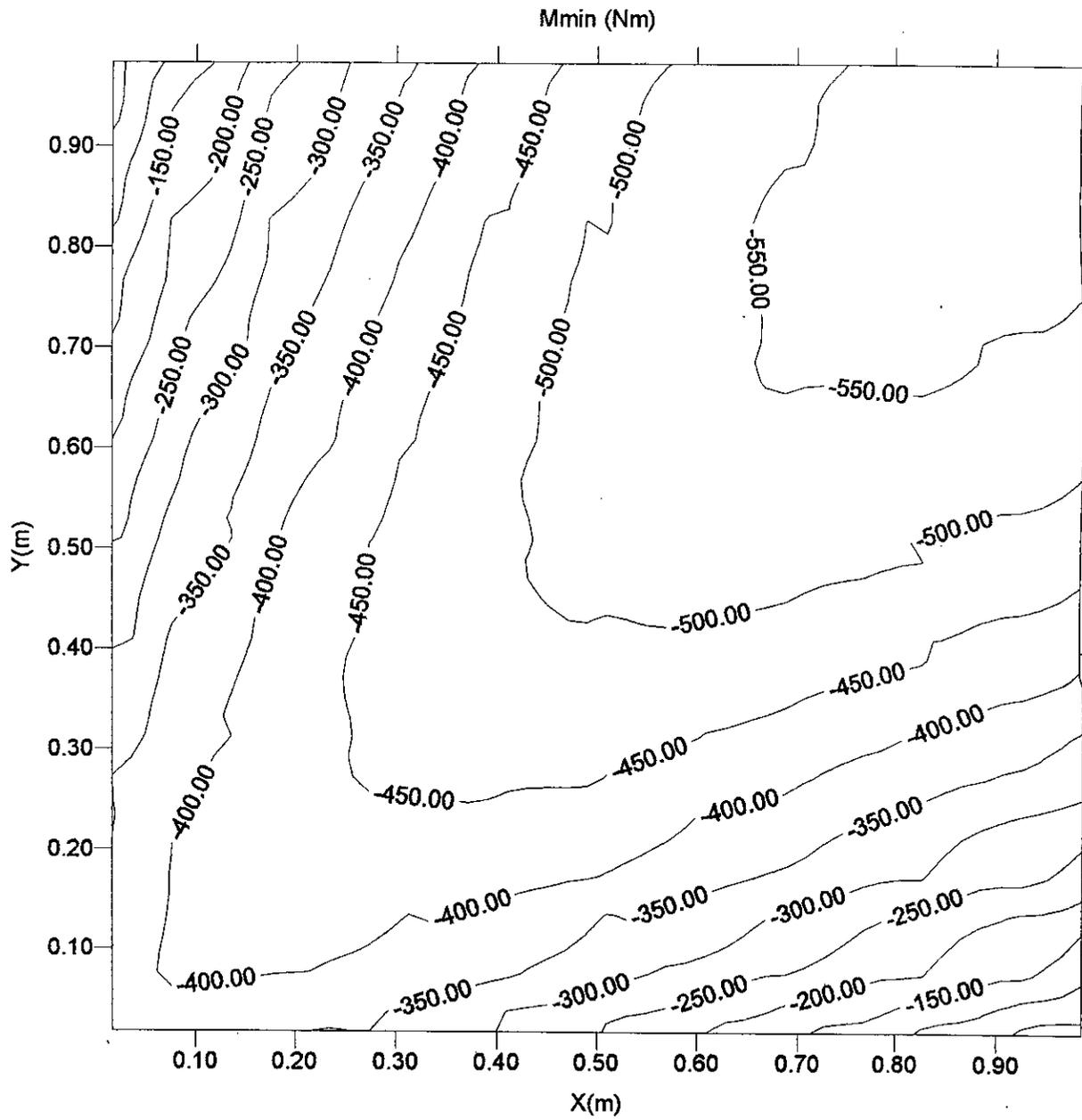
**Figure VI.5.b : Moment  $M_y$  (Nm) pour une plaque simplement supportée soumise à une charge répartie uniforme**



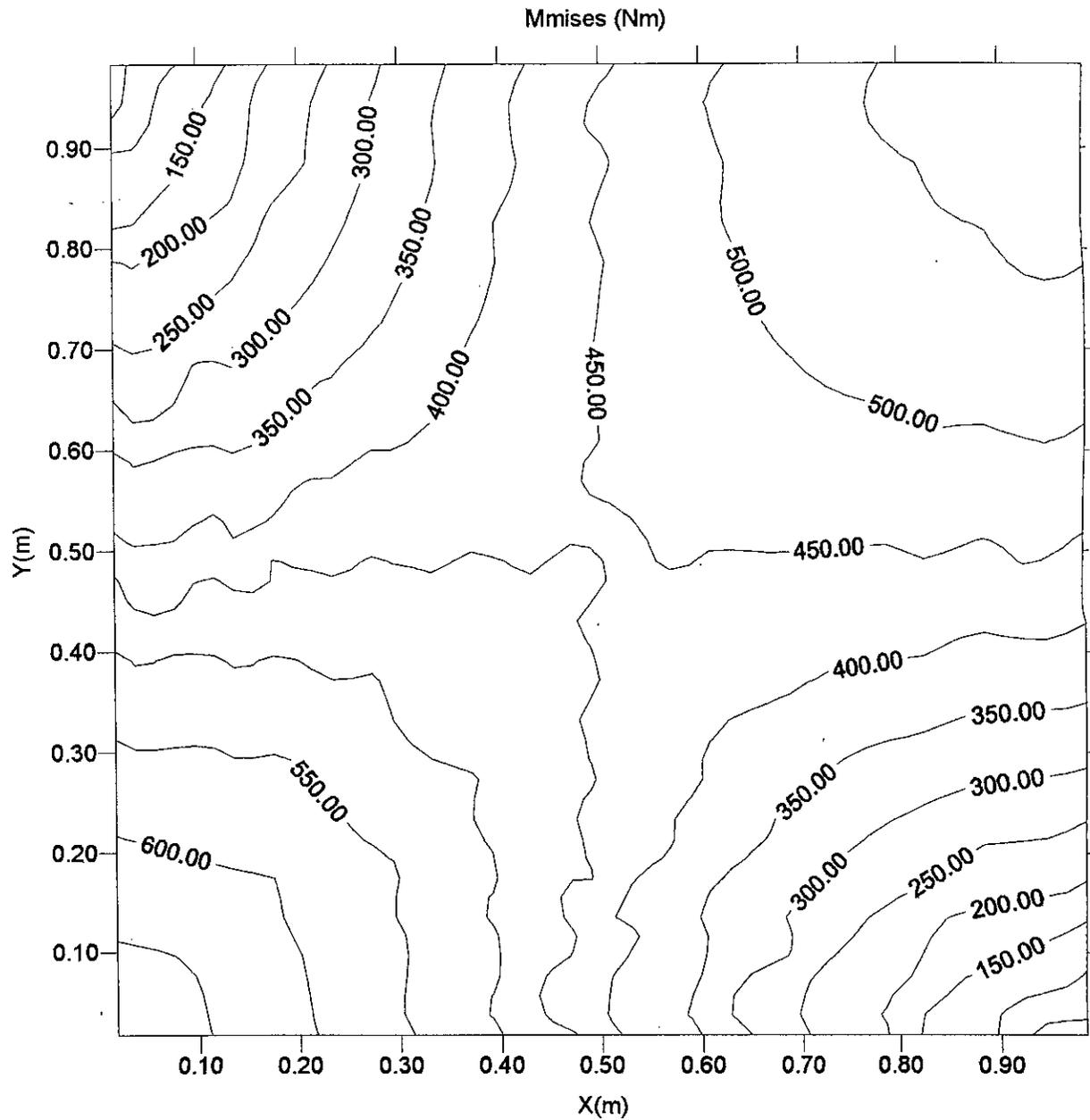
**Figure VI.5.c : Moment  $M_{xy}$  (Nm) pour une plaque simplement supportée soumise à une charge répartie uniforme**



**Figure VI.6.a : Moment  $M_{max}$  (Nm) pour une plaque simplement supportée soumise à une charge répartie uniforme**



**Figure VI.6.b : Moment  $M_{min}$  (Nm) pour une plaque simplement supportée soumise à une charge répartie uniforme**



**Figure VI.6.c : Moment  $M_{mises}$  (Nm) pour une plaque simplement supportée soumise à une charge répartie uniforme**

## VI-2. Analyse d'une plaque mince carré orthotropique avec la formulation DKT

Comme nous l'avons évoqué aux chapitres I et II, d'une plaque mince carrée orthotropique, le module de Young prend une valeur différente selon qu'on soit sur une ligne longitudinale ou transversale, cette différence s'accroît surtout en laminage.

Dans ce qui suivra, nous adopterons la formulation DKT, pour le calcul de la flèche tout au long de la médiane d'une plaque carrée, pour 200 éléments.

a) Sur la figure (VI-7), nous observons que la flèche  $W_m$  prend une valeur supérieure à celle d'une plaque isotrope, ceci nous indique l'importance de prendre en compte la caractéristique d'orthotropie.

b) Etude de la déformée de la plaque mince carré orthotropique :

Nous donnons le graphe qui représente la déformée de la plaque. Nous constatons que la flèche maximale est atteinte au centre de la plaque (figure VI-8)

Les isomoments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont représentés sur les graphes de la figure (VI-9), ils présentent une même allure que <sup>celle</sup> aux établis pour une plaque mince isotrope, leurs valeurs par contre sont plus importantes.

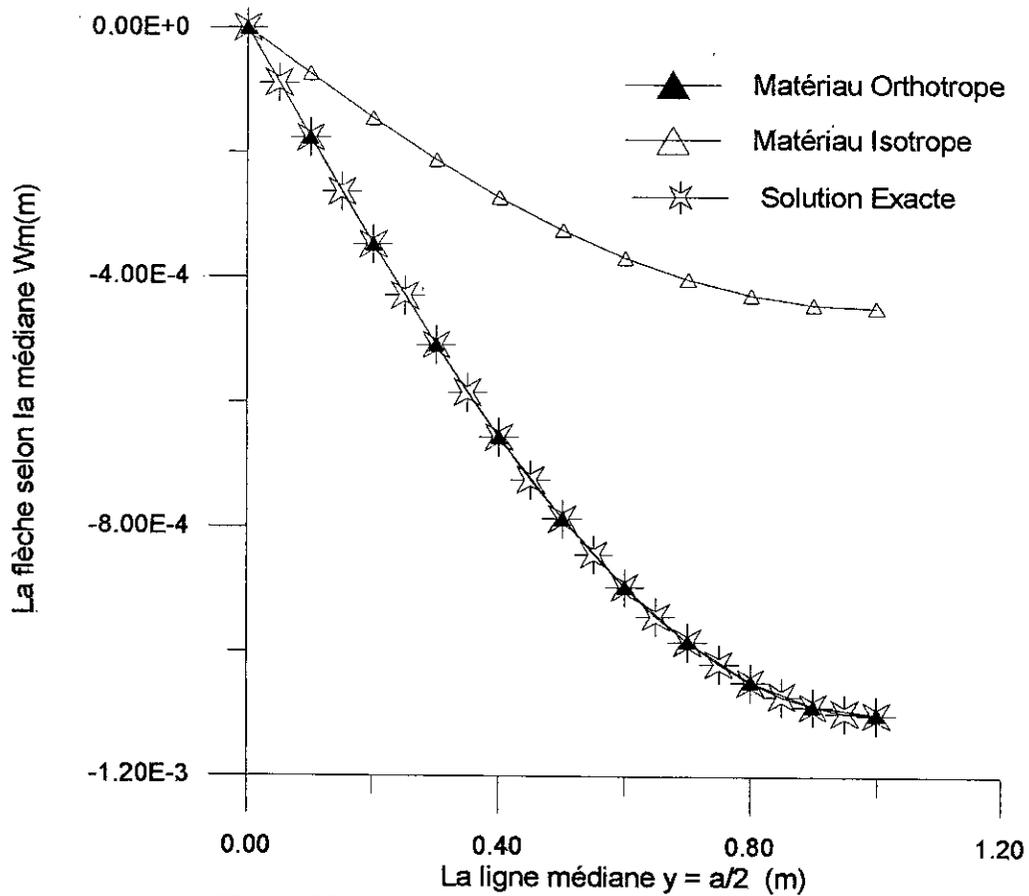
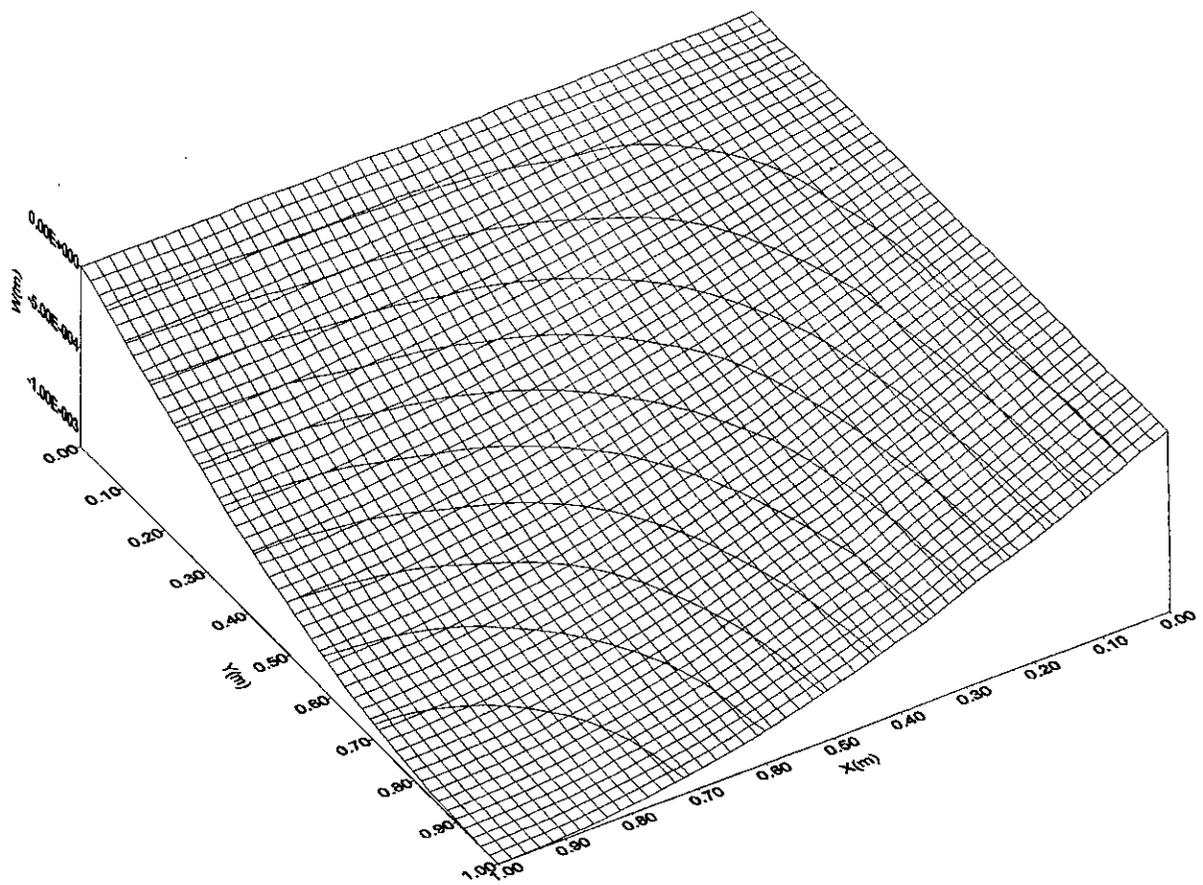
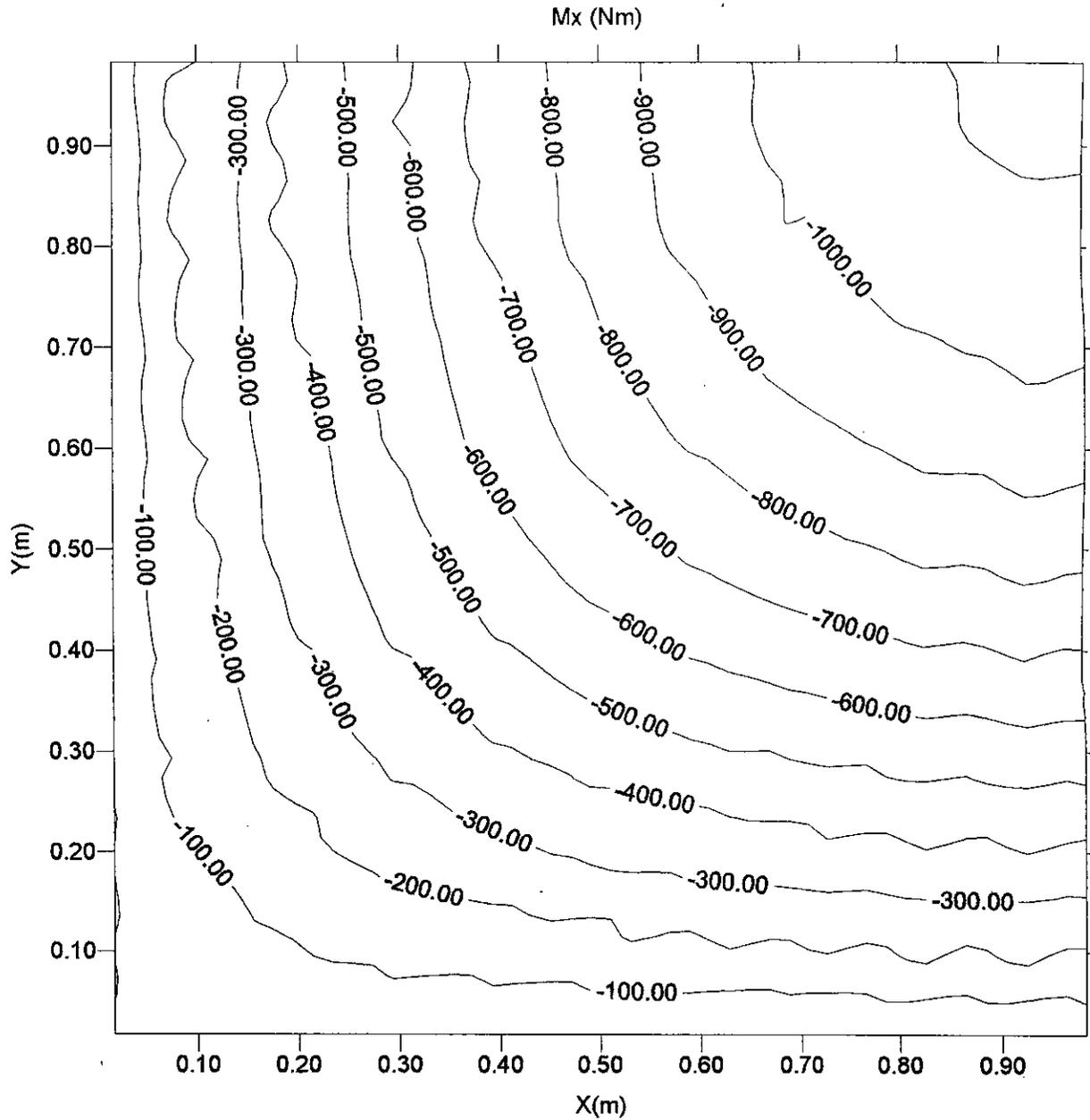


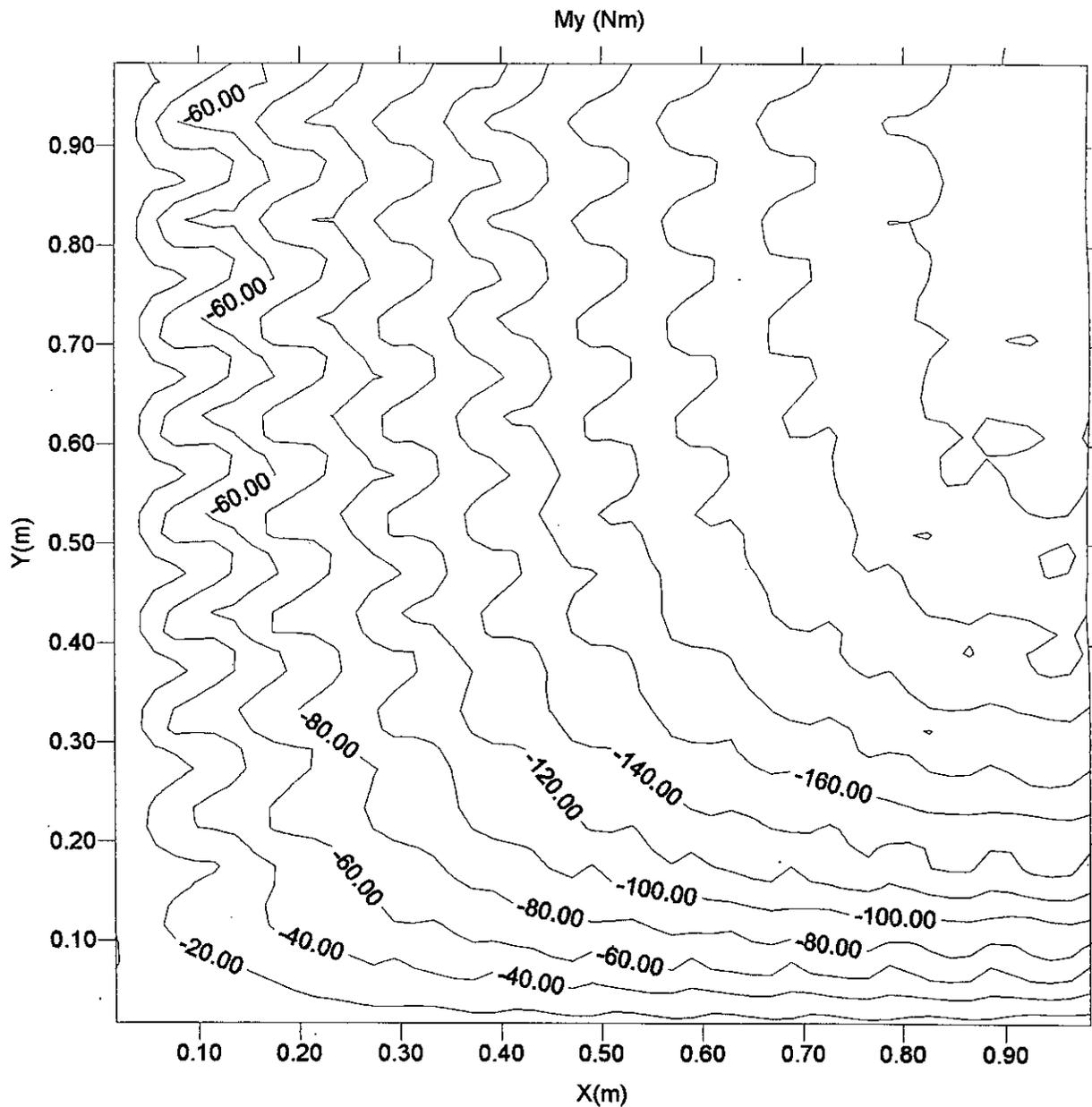
Figure V.7: Flèche selon la médiane d'une plaque carrée (Elément triangulaire DKT pour 200 éléments)



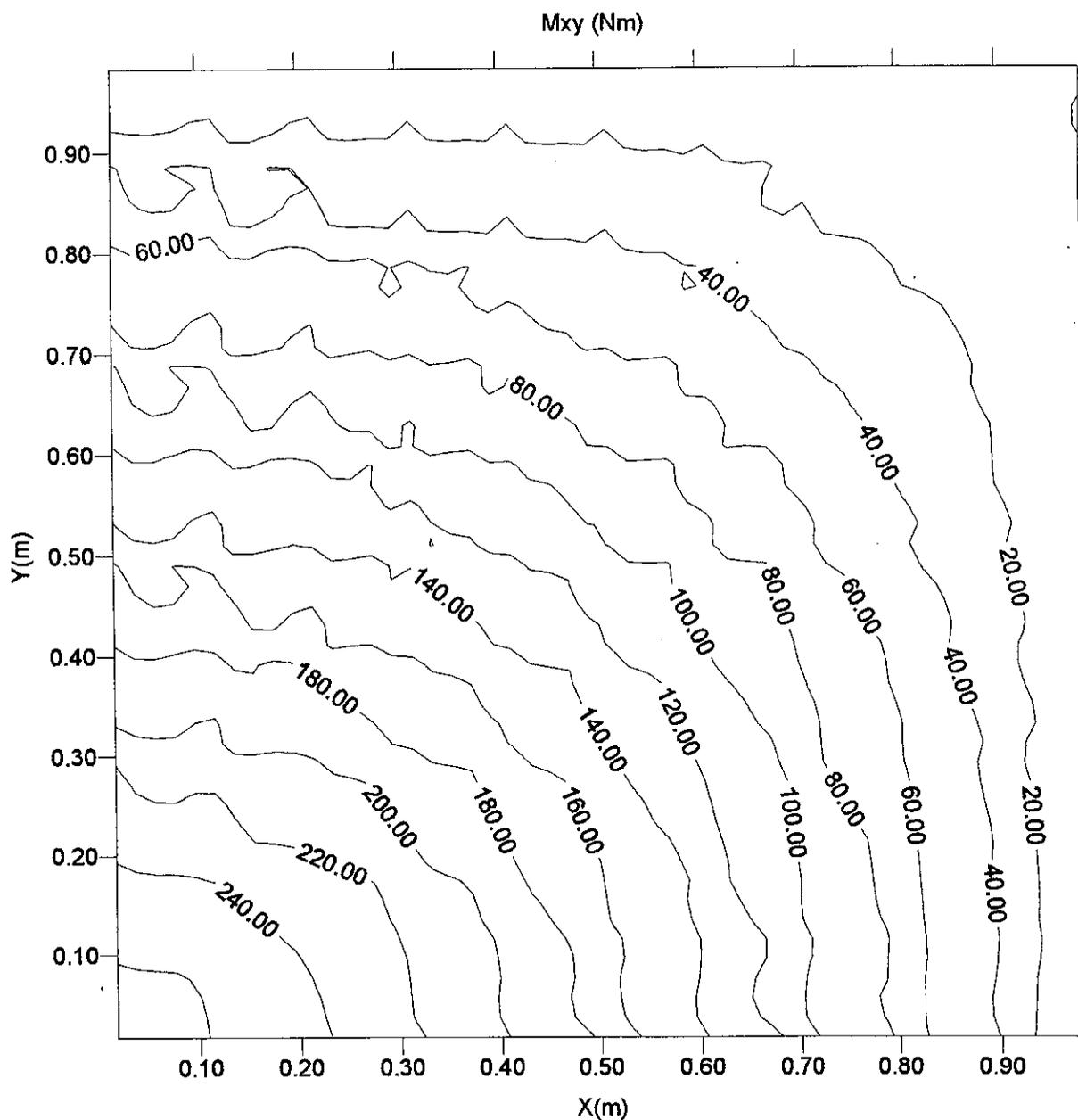
**Figure VI.8 : La déformée de la plaque carrée simplement supportée soumise à une charge répartie uniformément.**



**Figure VI.9.a : Le moment  $M_x$  de la plaque simplement supportée soumise à une charge répartie uniforme**



**Figure VI.9.b : Le moment  $M_y$  de la plaque simplement supportée soumise à une charge répartie uniforme**



**Figure VI.9.c : Le moment  $M_{xy}$  de la plaque simplement supportée soumise à une charge répartie uniforme**

### VI-3. Analyse d'une plaque mince circulaire orthotrope encadrée chargée uniformément :

Dans cette section nous utiliserons une plaque circulaire mince encadrée, chargée uniformément (figure VI-10).

Pour cette plaque nous nous contenterons d'étudier le quart de la plaque, car elle présente une double symétrie (géométrique et de chargement)

#### a) Etude de la flèche médiane et du moment médian d'une plaque mince circulaire par la formulation DKT.

##### i) La flèche médiane

Nous avons calculé la flèche  $w_m$ , pour différentes discretisations (6,24,54,96,384). Le graphe obtenu nous renseigne sur la convergence de la formulation vers la solution théorique. Nous observons que le nombre d'éléments influe sur la rapidité de la convergence, ceci est dû au fait que cette solution vérifie les critères de l'énergie potentielle minimale et compatibilité interéléments (figure VI-11).

##### ii) moment médian $M_{xm}$ :

De même pour la flèche médiane, le graphe de la figure (VI-12) donne le moment médian en fonction du nombre d'élément présente les mêmes caractéristiques.

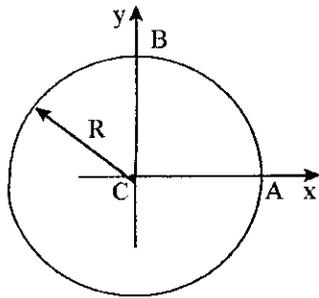
#### b) Etude comparative des éléments R12, DKT et DKQ :

Nous avons essayé de tester les performances des formulations R12, DKT et DKQ pour une plaque circulaire encadrée et chargée uniformément. Cette étude nous a permis de constater que les formulations DKT et DKQ sont les plus performantes, car leur convergence est plus rapide, ceci est dû à la compatibilité interélément (figure VI-13).

#### d)- Etude des champs de moments :

Dans la figure (VI-14), nous avons représenté les trois graphes des trois isomoments  $M_x$ ,  $M_y$ , et  $M_{xy}$  sur le quart de la plaque considéré.

Nous constatons que les moments  $M_x$  et  $M_y$  sont plus importants sur le contour du quart de la plaque, là où nous avons fixé l'encastrement.



- condition de symétrie :  
 $\beta_x = 0$  sur CA ;  $\beta_y = 0$  sur CD
- condition aux limites :  
 ■ Encastrement :  
 $w = \beta_x = \beta_y = 0$  sur ABD

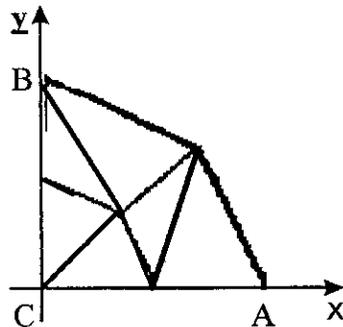
- Matériau Orthotrope (Verre/Epoxyde )

- $E_x = 3.910^{10} \text{Pa}$
- $E_y = 0.810^{10} \text{Pa}$
- $\nu_{xy} = 0.26$
- $G_{xy} = 0.810^{10} \text{Pa}$
- $h = 0.05 \text{ m}$
- $R = 1 \text{ m}$

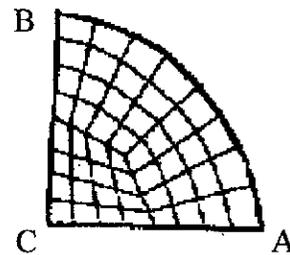
- Maillages considérés

\*Cas élément triangulaire(DKT)

\*Cas élément Quadrilatéral(DKQ)



N = 6



N = 58

- Solution de Timoshenko :

- Pour une charge répartie  $f_z = f = -3000 \text{ Pa}$ :

- Encastrement :

$$w = \frac{f(R^2 - r^2)^2}{64D'}$$

$$M_x = \frac{f}{16D'} [(D_1 + D_1 \nu_2)(R^2 - r^2) - 2(D_1 x^2 + \nu_1 D_2 y^2)]$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; D' = \frac{1}{8}(3D_1 + 2D_3 + 3D_2)$$

Figure(VI-10). Plaque circulaire orthotropique ; Données :

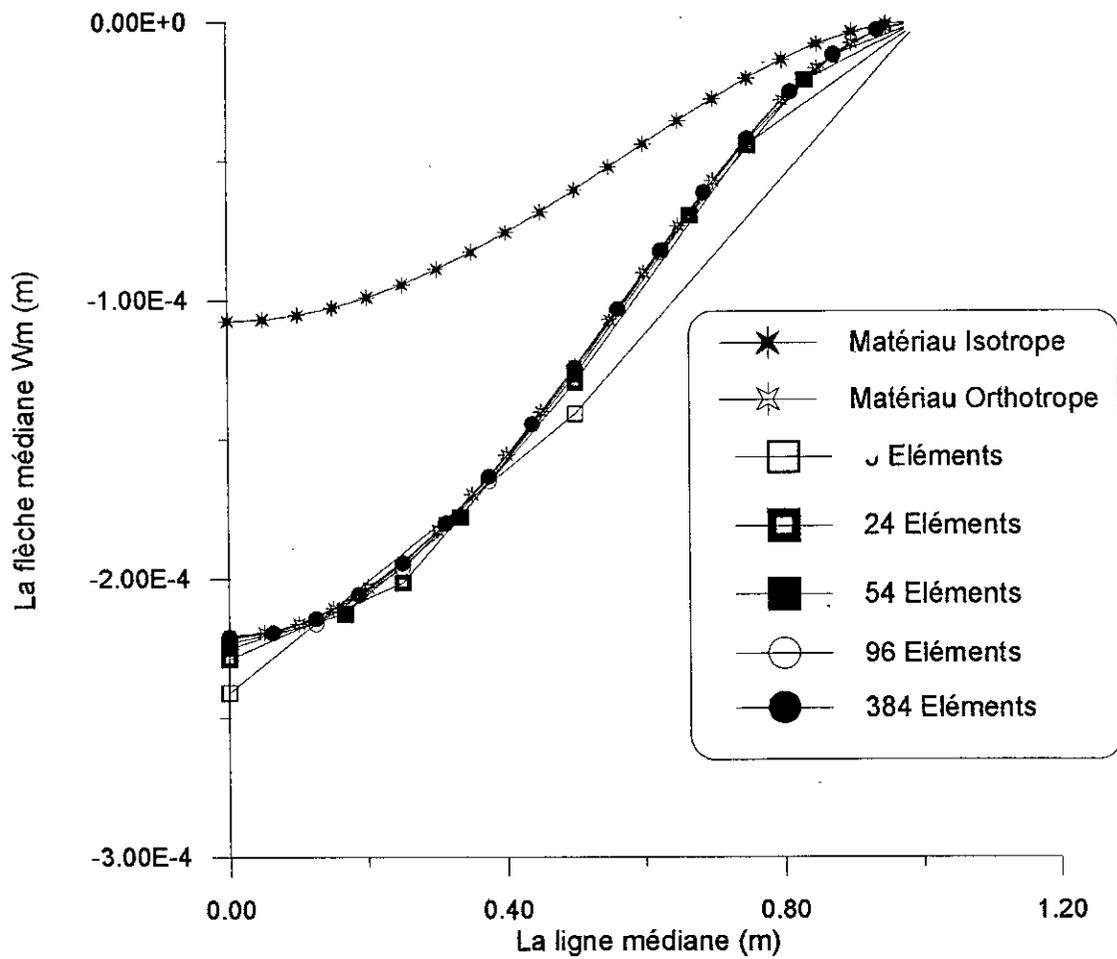


Figure (VI.11): Flèche selon la médiane d'une plaque circulaire (Elément DKT)

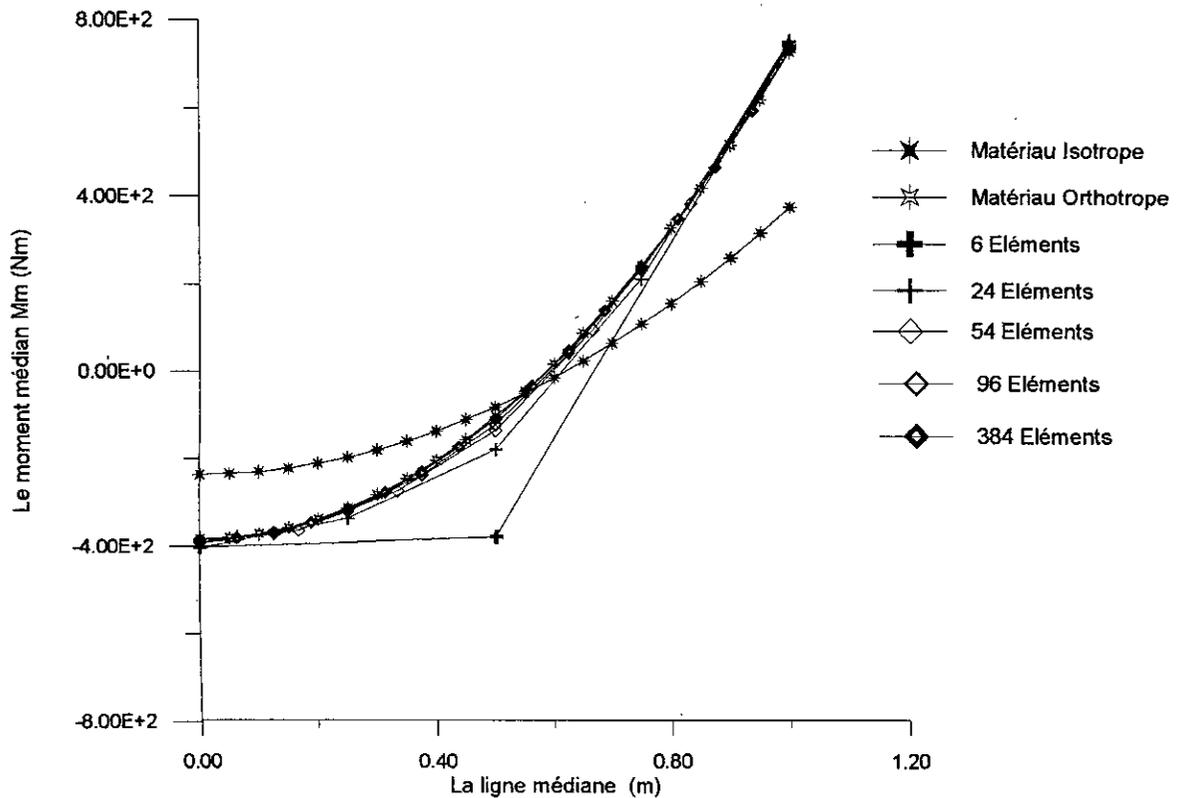


Figure VI. 12 : Répartition de  $M_x$  sur la médiane d'une plaque circulaire orthotrope.

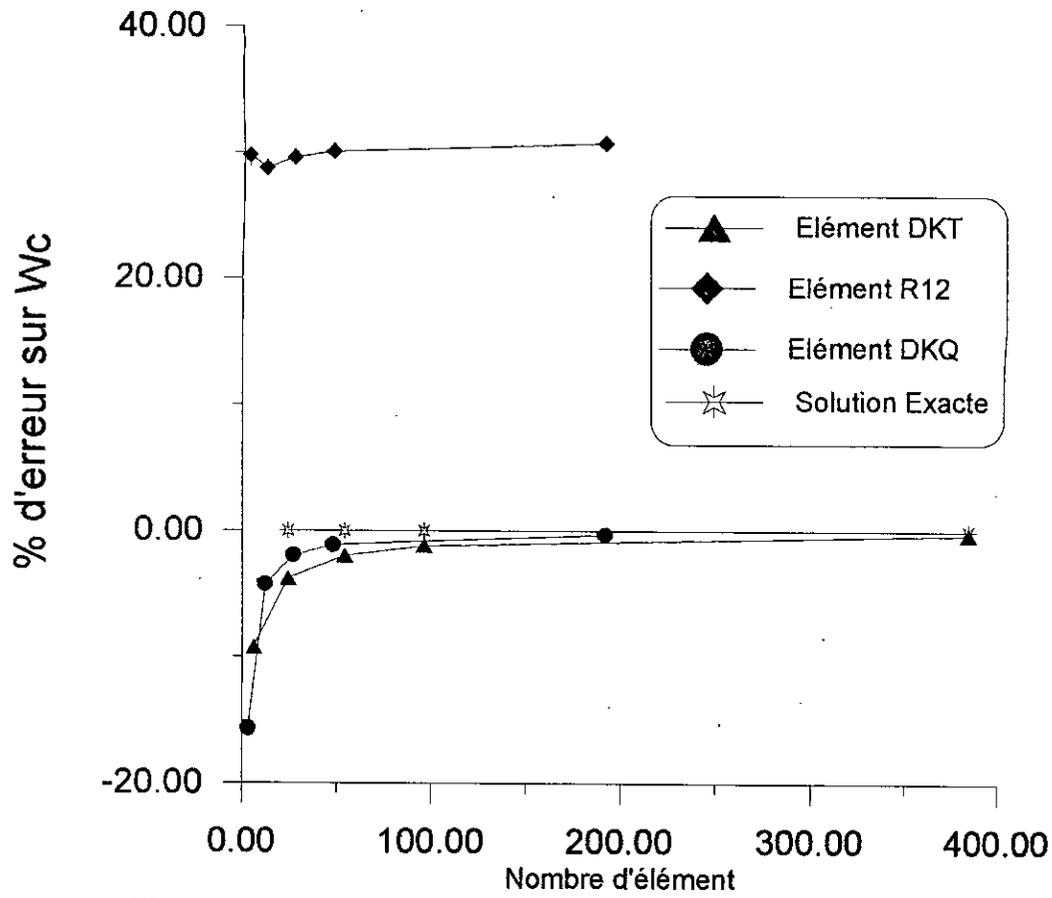


Figure VI.13a : La flèche au centre  $W_c$  d'une plaque circulaire orthotrope

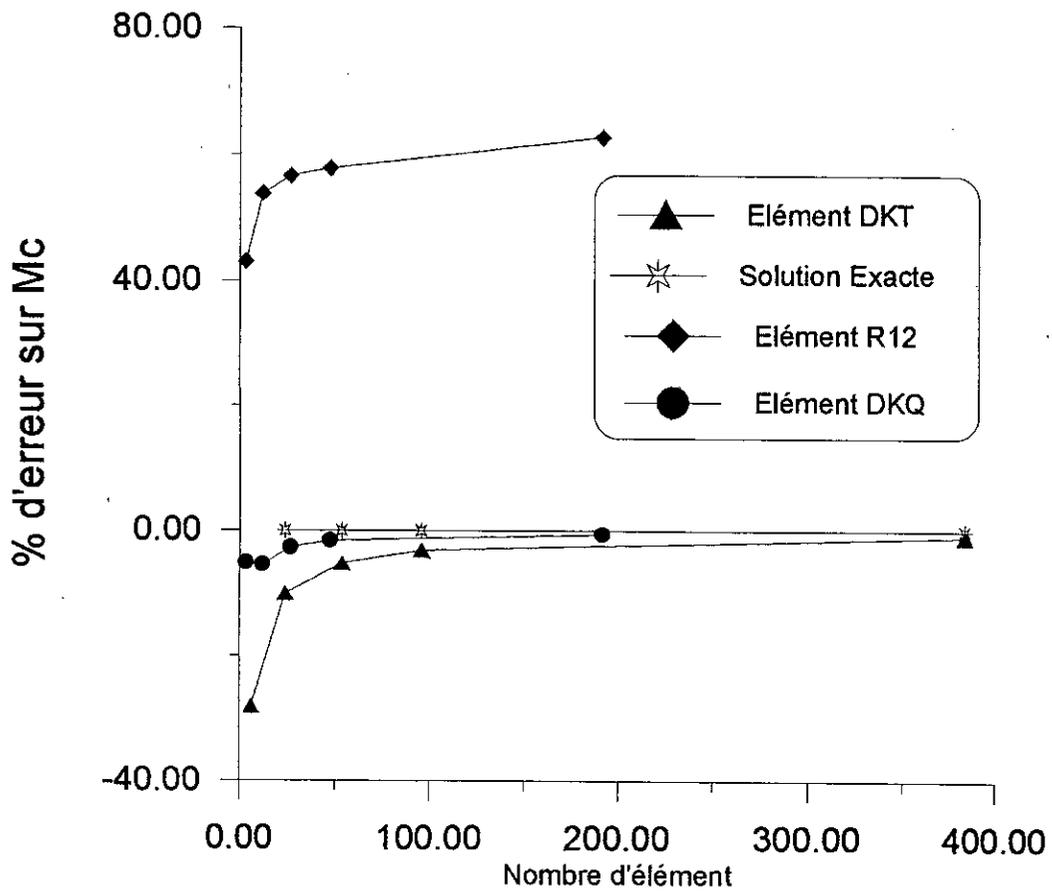
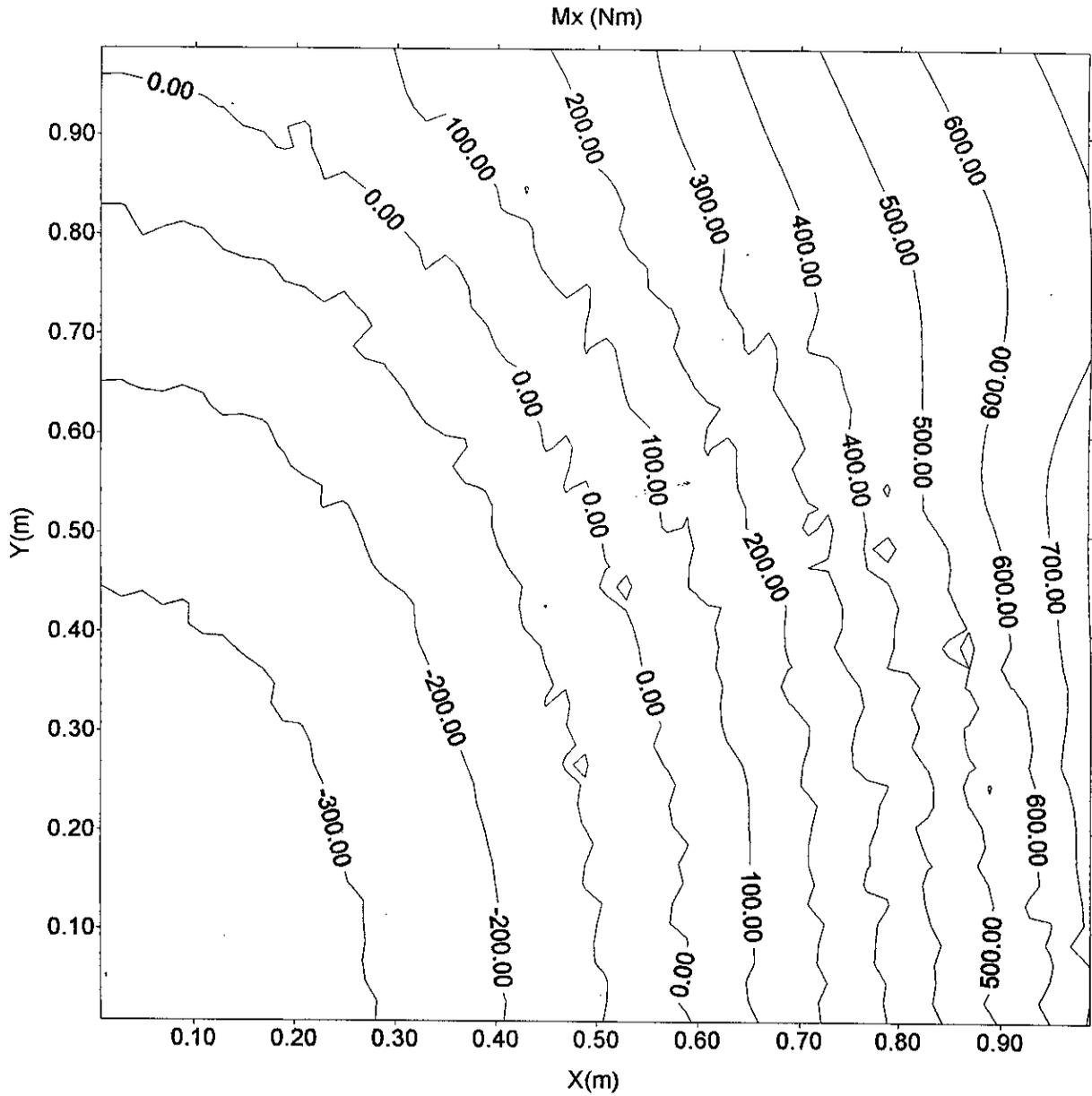


Figure VI.13b : Le moment au centre  $M_c$  d'une plaque circulaire orthotrope



**Figure VI.14.a : Le Moment  $M_x$  (Nm) de la plaque encadrée soumise à une charge répartie uniforme**

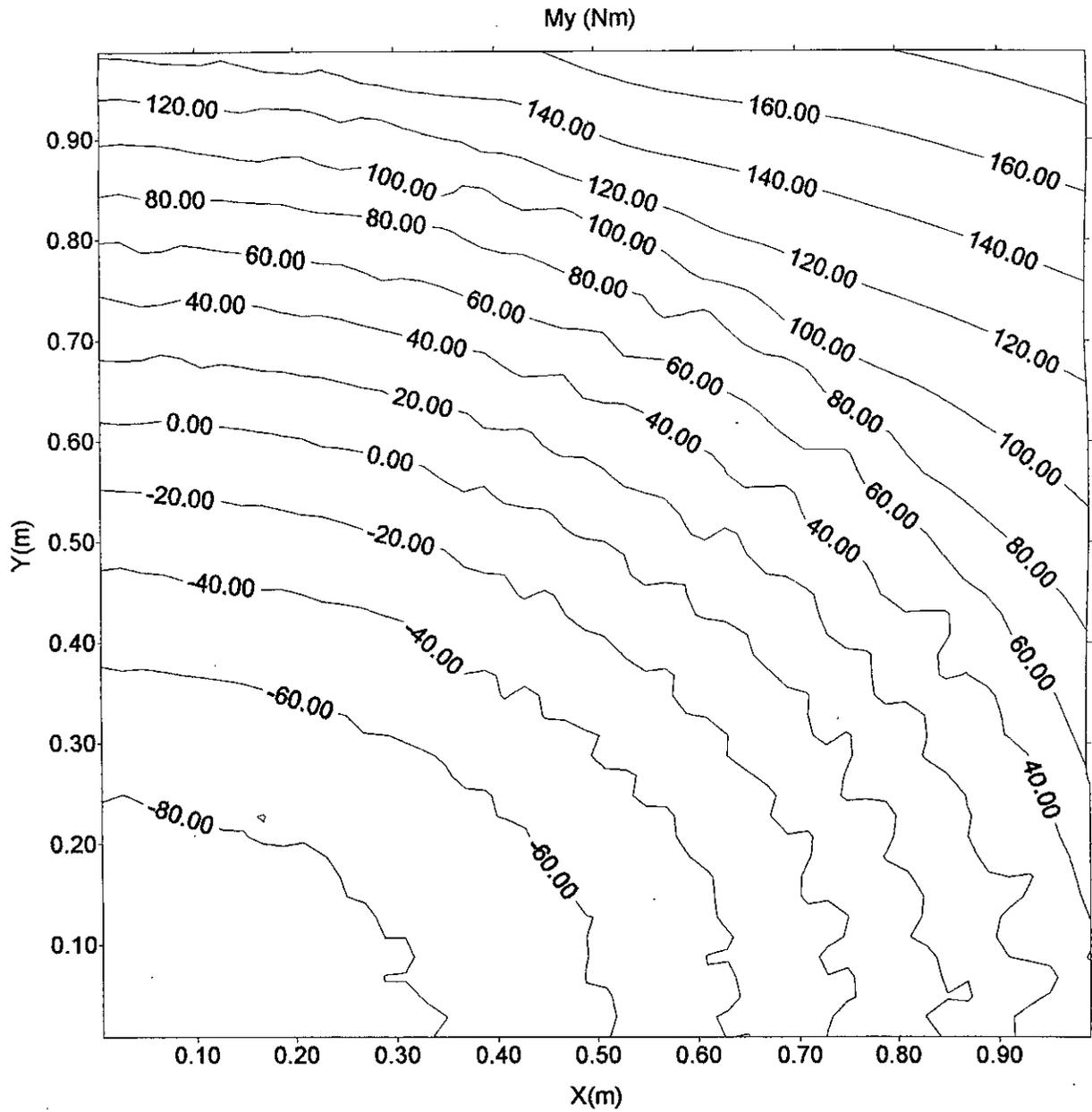


Figure VI.14.b : Le Moment  $M_y$  (Nm) de la plaque encastree soumise à une charge répartie uniforme

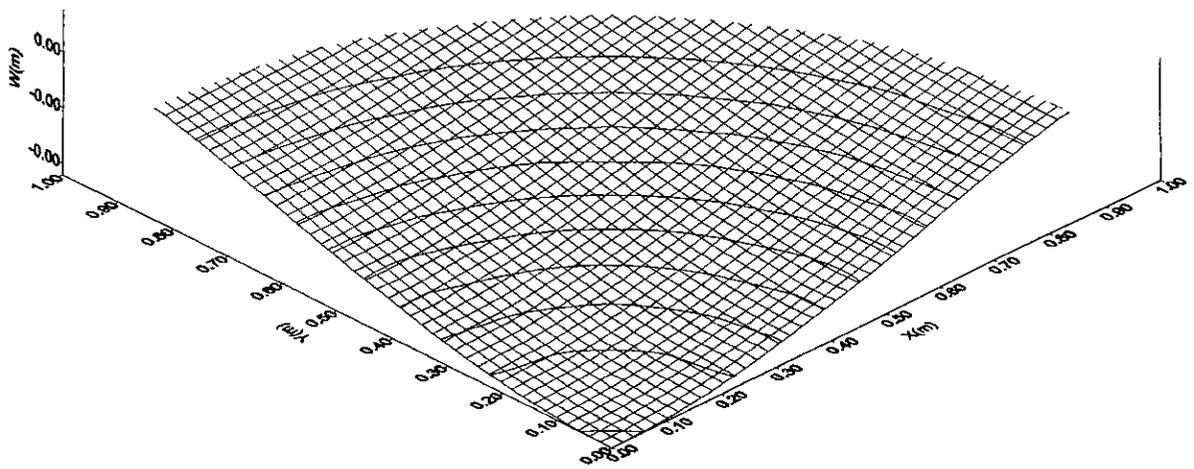


Figure VI.13 : La déformée de la plaque encastree soumise à une charge répartie uniforme

## **CONCLUSION**

## CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons élaboré un programme qui calcule, la flèche d'une plaque minces orthotropique, ainsi que la détermination numérique du champs de contrainte ( moment ), ce calcul nous a permis de déterminer l'influence de la caractéristique de l'anisotropie du matériau(prise en compte dans ce programme).

L'erreur observée, nous pousse à conclure à la nécessité de la prise en compte de l'anisotropie dans l'élaboration du modèle étudié.

En outre, nous avons pu mettre en évidence la performance des formulations des éléments de Kirchhoff ( classique et discrètes ) quant à la convergence de ceux-ci vers la solution du problème, ainsi la formulations DKT s'est avéré la plus appropriée, vu ces performances qui résident dans sa capacité à traiter tout les types géométriques de la structure, et du nombre restreint de noeuds par élément( 3 noeuds) et de nombre de degré de liberté par noeud( 3 d.d.l).

### **Perspectives :**

Au cours de ce mémoire, nous avons opté pour une « approche déplacement » de la méthode des éléments finis, mais il serait judicieux de faire *l'approche mixte*, qui traduit exactement le phénomène réel, en considérant les conditions aux limites de déplacement et de forces.

Ce travail paraît moins astreignant vu les performances de notre programme ( il consistera a ajouter des éléments spécifiques à cet approche), nous jugeons aussi que l'études des plaques

épaisses ( introduction de l'effet de cisaillement transverse ) ne présenterait plus de problèmes majeurs en programmation, car les variables nodales ( $w, \beta_x, \beta_y$ ) sont indépendantes, ce qui facilite l'utilisation des éléments isoparamétriques.

En dernier lieu, nos résultats nous pousse à élargir notre champs d'étude à l'étude dynamique des plaques minces et épaisses, car nous pensons que l'embûche qui réside dans la détermination de la matrice masse élémentaire peut être surmontée par l'utilisation des fonctions de formes déjà formulées dans ce travail, puis résoudre le problème par les méthodes numériques classiques.



## ANNEXE

## ANNEXE

### TANSFORMATION DES OPERATEURS DE DERIVATION

- *L'approximation de déplacement nodale de la fonction exacte  $U_{ex}(x)$  :*

$$U_{ex}(x) \approx u(x) = \langle N_1(x) \ N_1(x) \dots \dots \dots N_n(x) \rangle \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\} = \langle N(x) \rangle \{U_n\}$$

$u_1, u_1, u_3, \dots, u_n$  les valeurs de  $u_{ex}$  au  $n^{\circ}$  noeuds d'interpolation de l'élément

- *Remplacement de l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence :*

$$U_{ex}(\zeta) \approx u(\zeta) = \langle N(\zeta) \rangle \{U_n\}$$

- \* *Transformation linéaire de la géométrie de l'élément est :*

$$\tau: \quad \zeta \rightarrow x = x(\zeta) = \langle N(\zeta) \rangle \{x_n\}$$

$$X = \langle x, y, z \rangle$$

$$\zeta = \langle \zeta, \eta, \xi \rangle$$

Cette transformation est bijective :

$$\tau^{-1}: \quad x \rightarrow \zeta = \zeta(x)$$

Cette transformation inverse nous permis de rapporter  $\zeta(x)$  pour obtenir l'approximation sur l'élément réel :

$$u(\zeta(x)) = \langle N(\zeta(x)) \rangle \{U_n\} = \langle N(x) \rangle \{U_n\} = u(x)$$

**\*Dérivées premières :**

on calcule les dérivées en  $\zeta$  d'une fonction à partir de ses dérivées en  $x$  :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

ou

$$\{a_\zeta\} = [J]\{a_x\}$$

[J] la matrice Jacobienne de la transformation géométrique  
inversement on a :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix}$$

ou :

$$\{a_x\} = [J]\{a_\zeta\}$$

**\*Transformation d'une intégrale :**

$$\int_{V^*} f(x) dx dy dz = \int_{V'} f(x(\zeta)) \det[J] d\zeta d\eta d\xi$$

$\det[J]$  déterminant de la matrice Jacobienne

**\*Calcul des termes de [J]**

On sait que :

$$\langle x, y, z \rangle = \langle \bar{N}(\zeta) \rangle \left[ \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} \right]$$

$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  sont les coordonnées  $x, y$  et  $z$  des noeuds géométriques de l'élément

compte tenu que :

$$[J] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \langle x \ y \ z \rangle$$

On aura :

$$[J] = \begin{Bmatrix} \langle \bar{N}_{,\zeta} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle \end{Bmatrix} \left[ \begin{Bmatrix} \{x_n\} \\ \{y_n\} \\ \{z_n\} \end{Bmatrix} \right]$$

**\*Dérivées secondes :**

De la même manière que pour des dérivées premiers, nous donnons les dérivées secondes en x à partir des dérivées premières et secondes en  $\zeta$  :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi} \end{Bmatrix}$$

ou :

$$\{\partial_x^2\} = [T_1] \{\partial_\zeta\} + [T_2] \{\partial_\zeta^2\}$$

Les matrices  $[T_1], [T_2]$  s'obtiennent de la manière suivante :

$$[T_1] = -[T_2][C_1][J]$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & j_{13}^2 & 2j_{11}j_{12} & 2j_{12}j_{13} & 2j_{13}j_{11} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & j_{23}^2 & 2j_{21}j_{22} & 2j_{22}j_{23} & 2j_{23}j_{21} \\ j_{31}^2 & j_{32}^2 & j_{33}^2 & 2j_{31}j_{32} & 2j_{32}j_{33} & 2j_{33}j_{31} \\ \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{13}j_{23} & j_{11}j_{22} & j_{12}j_{23} & j_{11}j_{23} \\ & & & + j_{12}j_{21} & + j_{13}j_{22} & + j_{13}j_{21} \\ j_{21}j_{31} & j_{22}j_{32} & j_{23}j_{33} & j_{21}j_{32} & j_{22}j_{33} & j_{21}j_{33} \\ & & & + j_{22}j_{31} & + j_{23}j_{32} & + j_{23}j_{31} \\ j_{31}j_{11} & j_{32}j_{12} & j_{33}j_{13} & j_{31}j_{12} & j_{32}j_{13} & j_{31}j_{13} \\ & & & + j_{32}j_{11} & + j_{33}j_{12} & + j_{33}j_{11} \end{bmatrix}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{11} \ J_{12} \ J_{13} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \langle J_{21} \ J_{22} \ J_{23} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{31} \ J_{32} \ J_{33} \rangle \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \langle J_{11} \ J_{12} \ J_{13} \rangle + \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{21} \ J_{22} \ J_{23} \rangle \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{21} \ J_{22} \ J_{23} \rangle + \frac{\partial}{\partial \eta} \langle J_{31} \ J_{32} \ J_{33} \rangle \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{31} \ J_{32} \ J_{33} \rangle + \frac{\partial}{\partial \xi} \langle J_{11} \ J_{12} \ J_{13} \rangle \right) \end{bmatrix}$$

## REFERENCES

[1].S.G LEKHNITSKI

- « Anisotropic plates »
- « Theory of elasticity of a anisotropic elastic body »

[2].S. TIMOSHENKO & S. WOINOWSKY-KREIGER

- « Theory of plates and shells »

[3].LHERMITE

- « Résistance des matériaux théorique et expérimentale»

[4].S. LAROZE

- « Résistance des matériaux et structure »

[5].GAY

- « Matériaux composites »

[6].O.C.ZIENKIEWICZ

- « The finite element method »

[7].O.C.ZIENKIEWICZ & Y.K.CHEUNG

- « The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs »

[8].J.L. BATOZ & G. DHATT

- « Modélisation des structures par éléments finis »

[9].T.Y.YANG

- « Finite element structural analysis »

[10].G.DHATT & G. THOUZOT

- « Une présentation de la méthode des éléments finis »

[11].K.J.BATHE & E.L. WILSON

- « Numerical methods in finite elements analysis»

[12].P. LASCAUX & R. THEODOR

- « Analyse numérique matricielle appliquée a l'art de l'ingénieur »



## ملخص

في هذا العمل، سوف نقوم بإيجاد حقل الانتقالات و حقل الإجهادات لصفحة رقيقة لا متماثلة الخواص خاضعة لاجهاد الإنشاء، و ذلك باستعمال طريقة العناصر المنتهية. وكذا إعداد برنامج حاسوبي بإمكانه القيام بهذا العمل، و المقارنة بين مختلف النماذج التجزئية.

## Abstract

In this work, we are going to determinate the field of both displacements and stresses of an unisotropic thin plate subject to a bending stress, by using the finite element method. Also, we elaborate a computer program which does this work, and compares the different model partitions.

## Résumé

Dans ce travail, nous allons déterminer les champs de déplacement et de contrainte d'une plaque mince anisotrope, soumise à une flexion, en utilisant la méthode des éléments finis. Nous avons aussi élaboré un programme informatique, qui effectue ces taches et compare les différents modèles de discrétisations.