

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

14/96

وزارة التربية الوطنية

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

APPLICATION DE LA METHODE DES CONTRAINTES  
FICTIVES AUX MILIEUX ELASTIQUES  
ANISOTROPES, HOMOGENES ET MULTICOUCHES.  
PRISE EN COMPTE DU FROTTEMENT ENTRE INTERFACES

Proposé par :

Y.BELKACEMI

Étudié par :

M.MEDJERAB  
B.K.HACHI

Dirigé par :

Y.BELKACEMI  
D.MECHRI

PROMOTION 1996

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

APPLICATION DE LA METHODE DES CONTRAINTES  
FICTIVES AUX MILIEUX ELASTIQUES  
ANISOTROPES, HOMOGENES ET MULTICOUCHES.  
PRISE EN COMPTE DU FROTTEMENT ENTRE INTERFACES

Proposé par :

Y.BELKACEMI

Etudié par :

M.MEDJERAB  
B.K.HACH

Dirigé par :

Y.BELKACEMI  
D.MECHRI

PROMOTION 1996

## ERRATA:

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
 المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
 Ecole Nationale Polytechnique

PAGE:	ARGUMENT:	ERREUR :	REEMPLACER PAR:
P-32	EXEMPLE 5.1	La 1 <sup>ère</sup> et la 2 <sup>ème</sup> COUCHE NON DESIGNES	1 <sup>ère</sup> couche : tube 2 <sup>ème</sup> couche : milieu infini
P-39	DERNIERE LIGNE.	et celle de $\sigma_{yy}$ de plus en plus négative	pour la 2 <sup>ème</sup> couche <b>et</b> de plus en plus petite et négative pour la 1 <sup>ère</sup> .
P-A.2	FORMULE DE G <sub>12</sub> (dénominateur) EN DERNIERE LIGNE.	$1/E_{45^\circ}$	$4/ E_{45^\circ}$
P-A.6	APPLICATION NUMERIQUE SUR E <sub>1</sub> (dénominateur) EN 6 <sup>ème</sup> LIGNE.	$8.56634*10^{-4}$	$8.56034*10^{-4}$

# SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION.....	1
<b>CAPITRE1-GENERALITES</b>	
1.1-Définitions.....	3
1.1.1-Contrainte.....	3
1.1.2-Déformation.....	3
1.2-Contraintes planes.....	3
1.3-Déformations planes.....	4
1.4-Lois de HOOK généralisé.....	4
<b>CHAPITRE2-L'ANISOTROPIE DES MATERIAUX</b>	
2.1-Introduction.....	5
2.2-Théorie d'élasticité en anisotropie.....	5
2.3-L'orthotropie et l'isotropie transverse.....	6
2.4-Loi de comportement en contraintes et en déformations planes.....	7
<b>CAPITRE3-APPLICATION DE LA METHODE DES CONTRAINTES FICTIVES AUX MILIEUX MONOCOUCHEES</b>	
3.1-Introduction.....	10
3.2-Formulation dans le cas isotrope.....	10
3.2.1-Problème de KELVIN en déformation plane.....	10
3.2.2-Traction simple sur un segment de droite.....	11
3.2.3-Procédure numérique.....	15
3.2.4-Transformation des coordonnées.....	17
3.2.5-Les coefficients d'influences.....	18
3.2.6-Le problème intérieur extérieur.....	21
3.3-Formulation dans le cas anisotrope.....	23
3.3.1-Formulation intégrale du problème de KELVIN.....	23
<b>CAPITRE4-APPLICATION DE LA METHODE DES CONTRAINTES FICTIVES AUX MILIEUX MULTICOUCHEES</b>	
4.1-Introduction.....	26
4.2-Les milieux multicouches.....	26
4.3-La méthode des contraintes fictives en multicouches.....	27
4.4-Prise en compte du frottements entre interfaces.....	30
4.5-Organigramme du programme réalisé.....	31
<b>CHAPITRE5-EXEMPLES,RESULTATS ET INTERPRETATIONS</b>	
5.1-Tube fretté dans un milieu infini.....	32
5.1.1-Pas de serrage,ni de chargement a l'infini.....	33
5.1.2-Influence du serrage.....	34
5.1.3-Influence du rapport des caractéristiques mécaniques.....	35
5.1.4-Influence du chargement a l'infini.....	36

5.2-Essai brésilien en multicouches.....	37
5.3-Problème de fissuration.....	40
5.4-Effet d'un nœud dans une planche de sapin.....	42
5.5-Plaque infinie percée et frette avec tube qui est chargé tangentiellement sur le contour.....	44
5.6-Influence du rapport $r_{c1}/r_{c2}$ de deux anneaux concentriques encastres à l'extérieur et chargés tangentiellement à l'intérieur.....	46
5.7-Plaque finie percée et composée de deux couches à fibres croisées.....	49
<b>CONCLUSION</b> .....	<b>52</b>

## **BIBLIOGRAPHIE**

## **ANNEXE**

## REMERCIEMENTS

Nous remercions Monsieur Y.BELKACEMI d'avoir eu l'amabilité de nous avoir consacré son attention et de nous avoir soutenu et encourager tout le long de la période du projet.

On remercie également monsieur D.MECHERI qui par sa collaboration nous a permis de mener a bien ce travail.

Nos remerciements s'adressent également à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail.

## ملخص

عدة طرق عددية حللت وبحثت كل المسائل المتعلقة بالمشاكل الميكانيكية ذات الطبقات الواحدة كتحديد حقول الإجهادات والانتقالات. تشمل هذه الدراسة في تحليل إجهادات الطبقات المتفاضلية على الحدود أو النهايات غير المباشرة والتوزيع هي طريقة الإجهادات الإحصائية في حل المسائل المتعلقة بالمشاكل الميكانيكية ذات الطبقات المتعددة، وكذلك طرق تحليل الإجهادات الميكانيكية وتوليد وسط هتباين الحوامى الميكانيكية (وهو الخشب الأبيض).

## RESUME

Plusieurs méthodes numériques ont été développées pour l'étude de champ de contraintes et celui de déplacements dans les solides isotropes et monocouche.

La présente étude est consacrée à l'application de la méthode des contraintes fictives pour la modélisation des matériaux anisotropes et multicouches. Un code de calcul a été développé en deux dimensions pour les problèmes en état de contraintes et de déformations planes. Le frottement aux interfaces est pris en compte. Une méthode pratique pour la détermination des constantes élastiques des matériaux anisotropes (le matériau utilisé est le bois blanc) a aussi été présentée.

## ABSTRACT

Several numerical methods for the study of the field of stresses and that of displacements within the mono-layered bodies were developed.

The present study is confined to the application of the method of fictitious stresses for the modelling of anisotropic and multi-layered materials, a computing code was developed in two dimensions for the problems in state of plane stresses and deformations. A practical method for the determination of elastic constants for anisotropic materials (the material used here is the white-wood) was also been developed.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION



## INTRODUCTION



Le développement de l'économie d'un pays nécessite le regroupement et l'application d'idées diverses de techniciens travaillant dans tous les secteurs de l'industrie . L'ingénieur bien formé est considéré comme une source d'idées qui tend toujours à rendre efficaces et performantes les richesses naturelles qui l'entourent en exploitant au mieux celle-ci avec les techniques les plus avancées qui existent.

En effet , c'est cet esprit créatif remarquable qui a fait de l'industrie la colonne vertébrale de l'économie de tout pays développe dans ce siècle . Avec des applications très délicates , l'industrie moderne se montre plus exigeante , surtout dans le domaine ou le droit a l'erreur est impardonnable ,comme l'aéronautique , l'espace , la navigation et tous les domaines ou l'erreur met en danger la vie de l'homme.

Ce souci a permis , entre autre ,aux matériaux composites , en général , et aux stratifiés ou multicouches , qui représentent une anisotropie artificielle produite a partir de milieux isotropes ou anisotropes , de remarquer leurs présence , sinon s'imposer , dans les applications pratiques très importantes dans les domaines cités ci-dessus ,cela grâce a leurs propriétés très spécifiques , telles que leurs stabilité a la corrosion ,leurs facilité de mise en oeuvre , leurs grande résistance , ainsi que leurs force d'adaptation , sans pour cela oublier leurs hautes performances ,dues essentiellement a leurs propriétés mécaniques élevées , ainsi qu'à leurs remarquables isolations thermiques et sonores.

Il est donc indispensable de maîtriser de mieux en mieux les exigences de sécurité . Dans l'énergie nucléaire et dans les transports notamment , que des économies de matière et d'énergie susceptibles d'être apportées par une meilleure durabilité des pièces . Les calculs nécessitent une évaluation correcte du champ de contraintes et de déformations qui existe dans les pièces .

En effet , depuis quelques années , le calcul numérique est de plus en plus adopté grâce aux ordinateurs pour approcher la solution analytique souvent difficile ou impossible a obtenir directement et pour éviter les mesures toujours délicates .

Parmi les méthodes numériques utilisées , on peut citer :

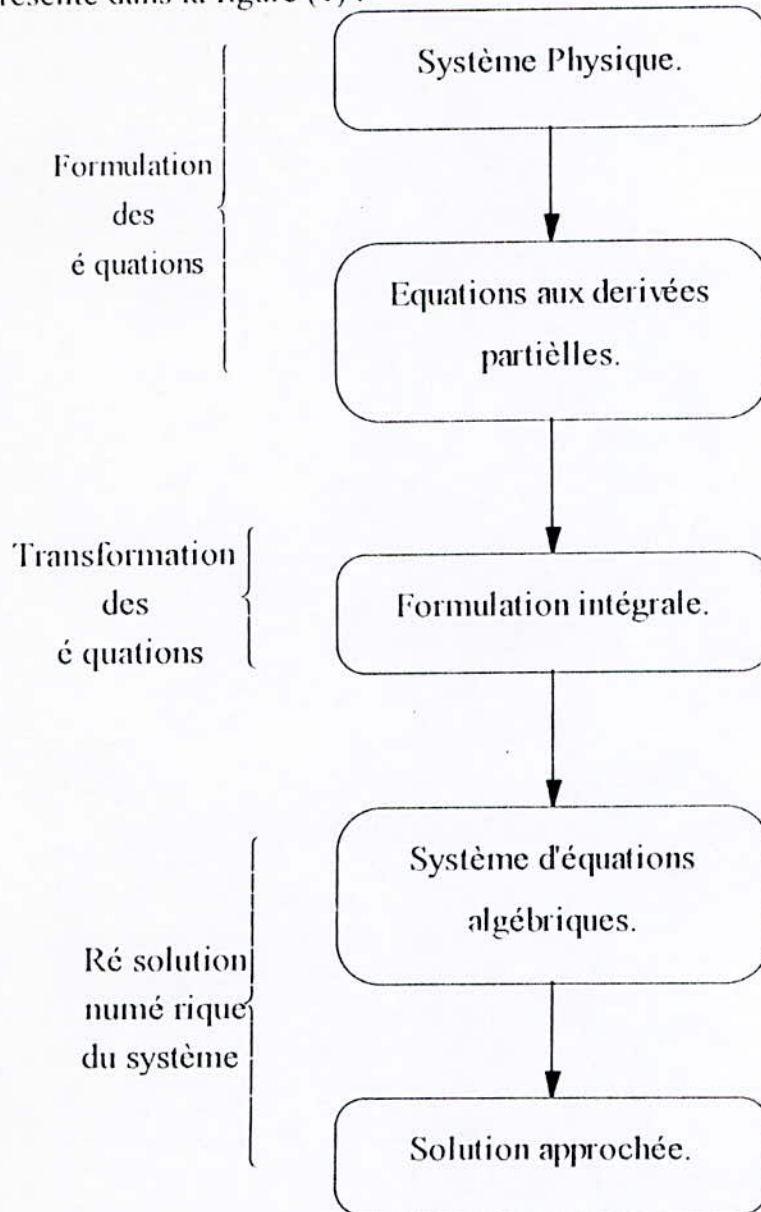
- La méthode des éléments finis : Qui donne le moyen de déterminer très correctement la façon dont travaillent les pièces mais elle reste très coûteuse surtout quand il s'agit d'un maillage fin .

- La méthode intégrale aux frontières : Qui est une nouvelle technique moins chère que la méthode des éléments finis et qui s'illustre par sa simplicité et sa variété d'application . Elle se base sur la solution analytique d'un problème singulier simple qui une fois obtenue , sera utilisée pour construire la solution numérique pour des problèmes plus complexes .

Cependant , cette évolution du calcul numérique exige parallèlement une approche plus élaborée des essais mécaniques pour fournir les données nécessaires aux mécaniciens .

Le principe de la méthode intégrale aux frontières est la transformation des équations de volumes en relation intégrale reliant les paramètres connus a ceux inconnus , et donc la réduction d'un problème tridimensionnel en un autre

bidimensionnel (ou d'un problème bidimensionnel en un autre unidimensionnel ) et ainsi l'obtention de système d'équations algébriques d'ordre inférieur (de plus en plus petit ) facile à résoudre . Ce principe peut être structuré dans l'organigramme présenté dans la figure (1) .



**FIG. 1. ORGANIGRAMME SIMPLIFIÉ DES MÉTHODES INTEGRALES AUX FRONTIÈRES .**

Le but de notre étude , en outre de présenter une méthode pratique pour la caractérisation d'un matériau anisotrope en deux dimensions , est de présenter un code de calcul permettant le calcul des contraintes et des déplacements dans un milieu anisotrope et multicouches en utilisant la méthode des contraintes fictives , qui est l'une des méthodes intégrales aux frontières .

**CHAPITRE 1**

**GENERALITES**

**1-1 DEFINITIONS:**

**1-1.1 Contrainte :** Les composants du tenseur de contraintes  $\sigma_{ij}$  sont les contraintes agissantes sur le plan de normale parallèle à l'axe (i) dans la direction (j).

*Nb: -Les contraintes de traction sont comptées positives.*

-Un solide est en équilibre si le tenseur de contrainte est symétrique ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) et qu'il vérifie les conditions d'équilibres suivantes :

$$\sigma_{\mu,j} + F_i = 0 \quad (1.1.1.1)$$

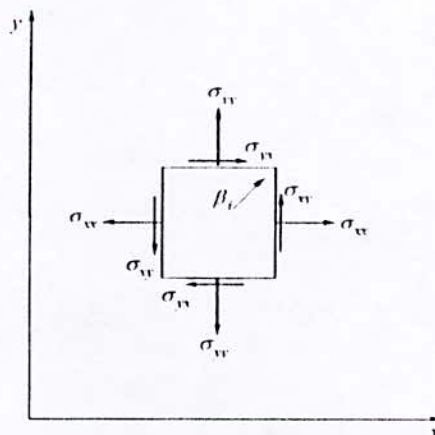
Où  $\sigma_{\mu,j} = \frac{\partial \sigma_{\mu}}{\partial j}$  et  $F_i$  sont les forces de volumes

**1-1.2 déformation :** Les composantes du tenseur de déformation  $\epsilon_{ij}$  sont données en terme déplacements  $u_i$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{yx} &= \epsilon_{xy} & \epsilon_{zx} &= \epsilon_{xz} & \epsilon_{zy} &= \epsilon_{yz} \end{aligned} \quad (1.1.2.1)$$

**1-2 CONTRAINTES PLANES :** On dit qu'un solide est en état de contraintes plane dans le plan x,y (voir fig. 1.2.1) si nous avons:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.2.1)$$



**Fig .1.2.1 contraintes plane**

*Nb : Le cas de contraintes plane est utilisé quand il s'agit des problème ou le milieu est mince dans la direction de l'axe (z) par exemple les tôles minces .*

**1-3 DEFORMATION PLANE :** On dit qu'un solide est en état de déformation plane parallèle aux plan xy si les composantes du tenseur de déformation sont tels que :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (1.3.1)$$

On à alors une relation entre les composantes du tenseur de déformation qui est induite par les relations de compatibilité (SOKOLNIKOFF 1959,P.28) qui est la suivante:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{2 \partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.3.2)$$

*Nb: Le cas de déformation plane est utilisé quand il s'agit des problème ou le milieu est infinie suivant la direction de l'axe (z) par exemple l'étude des barrages.*

**1.4 LOIS DE HOOK GENERALISE :** Un solide est dit élastique s'il y a une relation entre les contraintes et les déformations, et il est dit linéairement élastique si les composantes du tenseur des contraintes peuvent être exprimé par une combinaison linéaire des composantes du tenseur de déformation ou inversement .Dans ce cas , la loi est appelée la loi de HOOK généralisée et elle est donnée par la relation

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{trace} \bar{\sigma} \delta_{ij} \quad (1.4.1)$$

E: est le module de YOUNG ou module d'élasticité

$\nu$ : est le coefficients de Poisson.

$\delta_{ij}$  : opérateur de CRONEKER

$\delta_{ij} = 1$  pour  $i=j$

$\delta_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$

une relation entre les composantes du tenseur de contrainte et celui des déformations peuvent être donne par :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = 2G \left[ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (1.4.2)$$

Avec:  $G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)}$

**CHAPITRE 2**

**L'ANISOTROPIE DES  
MATERIAUX**

**2.1-INTRODUCTION:** Pour des raisons de simplification des calculs, une grande partie des matériaux a été simplement considérée comme isotrope . Ceci conduisait à des incertitudes qui sont par fois trop importantes .L'évolution de la technologie exige l'étude des matériaux en mettant en considération la variation des caractéristiques élastiques des matériaux dans les différentes directions.

**2.2-THEORIE D'ELASTICITE EN ANISOTROPIE:**Dans le cas le plus général d'élasticité la loi de Hook généralisée s`exprime par:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{13}\sigma_{zz} + s_{14}\tau_{yz} + s_{15}\tau_{xz} + s_{16}\tau_{xy} , \\ \epsilon_{yy} &= s_{21}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} + \dots + s_{26}\tau_{xy} , \\ &\dots \\ 2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} &= s_{61}\sigma_{xx} + s_{62}\sigma_{yy} + \dots + s_{66}\tau_{xy} . \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

Et la forme inverse est:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{12}\epsilon_{yy} + c_{13}\epsilon_{zz} + c_{14}\gamma_{yz} + c_{15}\gamma_{xz} + c_{16}\gamma_{xy} , \\ \sigma_{yy} &= c_{21}\epsilon_{xx} + c_{22}\epsilon_{yy} + \dots + c_{26}\gamma_{xy} , \\ &\dots \\ \sigma_{xy} &= c_{61}\epsilon_{xx} + c_{62}\epsilon_{yy} + \dots + c_{66}\gamma_{xy} . \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

On aura Avec ces équations 36 variables indépendantes  $S_{ij}$  qui sont les constantes élastiques du matériau.

Si un potentiel élastique  $W$  (énergie de déformation élastique par unité de volume) existe , le nombre de variables indépendantes se réduit a 21 variables.

Tels que:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{xx}} , \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{yy}} , \quad \dots , \quad \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \quad (2.2.3)$$

Si on calcule des dérivées partielles mixtes de  $W$  ,on trouve que :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{yy}} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \epsilon_{xx}} , \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{zz}} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \epsilon_{xx}} \quad (2.2.4)$$

ce qui nous donne  $C_{ij} = C_{ji}$  ( $i,j=1,2,\dots,6$ ),et avec des relations binomiales on obtient  $S_{ij} = S_{ji}$  ( $i,j=1,2,\dots,6$ ) et les relations (2.2.1) et (2.2.1) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{13}\sigma_{zz} + s_{14}\tau_{yz} + s_{15}\tau_{xz} + s_{16}\tau_{xy} , \\ \epsilon_{yy} &= s_{12}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} + \dots + s_{26}\tau_{xy} , \\ &\dots \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_{xx} + s_{26}\sigma_{yy} + \dots + s_{66}\tau_{xy} ; \end{aligned} \right\} \quad (2.2.5)$$

Et:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{12}\epsilon_{yy} + c_{13}\epsilon_{zz} + c_{14}\gamma_{yz} + c_{15}\gamma_{xz} + c_{16}\gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} &= c_{12}\epsilon_{xx} + c_{22}\epsilon_{yy} + \dots + c_{26}\gamma_{xy} \\ &\dots \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\epsilon_{xx} + c_{26}\epsilon_{yy} + \dots + c_{66}\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

dans ce cas l'énergie de déformation élastique est:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} s_{11} \sigma_{xx}^2 + s_{12} \sigma_{xx} \sigma_{yy} + s_{13} \sigma_{xx} \sigma_{zz} + s_{14} \sigma_{xx} \tau_{yz} + s_{15} \sigma_{xx} \tau_{xz} \\ &+ s_{16} \sigma_{xx} \tau_{xy} + \frac{1}{2} s_{22} \sigma_{yy}^2 + s_{23} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + s_{24} \sigma_{yy} \tau_{xz} \\ &+ s_{25} \sigma_{yy} \tau_{yz} + s_{26} \sigma_{yy} \tau_{xy} + \frac{1}{2} s_{33} \sigma_{zz}^2 + s_{34} \sigma_{zz} \tau_{xz} \\ &+ s_{35} \sigma_{zz} \tau_{yz} + s_{36} \sigma_{zz} \tau_{xy} + \frac{1}{2} s_{44} \tau_{yz}^2 + s_{45} \tau_{yz} \tau_{xz} \\ &+ s_{46} \tau_{yz} \tau_{xy} + \frac{1}{2} s_{55} \tau_{xz}^2 + s_{56} \tau_{xz} \tau_{xy} + \frac{1}{2} s_{66} \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

\*Symetrie élastique : Par fois la composition et la structure interne du matériau possède du plan de symétrie. Ceci va diminuer le nombre des constantes élastiques indépendantes à 13 constantes.

Dans le cas de trois plans de symétrie élastiques le matériau est appelé orthotrope, et le nombre des constantes élastiques indépendantes diminue à 9 constantes

### 2.3- L'ORTHOTROPIE ET L'ISOTROPIE TRANSVERSE :

Les deux formes simplifiées de l'anisotropie sont connues par l'orthotropie et l'isotropie transverse. Les pièces en bois, les roches,....., peuvent être considérés comme des solides orthotropes ou isotropes transverses. Pour l'orthotropie on a neuf constantes indépendantes, et pour l'isotropie transverse on a que cinq constantes indépendantes.

Ces deux types de d'anisotropie ne peuvent être distingués l'un de l'autre dans un problème plan. Dans ce cas il nous reste que quatre constantes indépendantes dans les relations contraintes déformations.

Imaginons un solide constitué par des fibres de différentes tailles dans les trois directions x, y et z (voir fig 2.3.1). Cette présentation de l'isotropie est une représentation fictive, c'est uniquement pour montrer que les propriétés sont différentes selon les directions choisies.



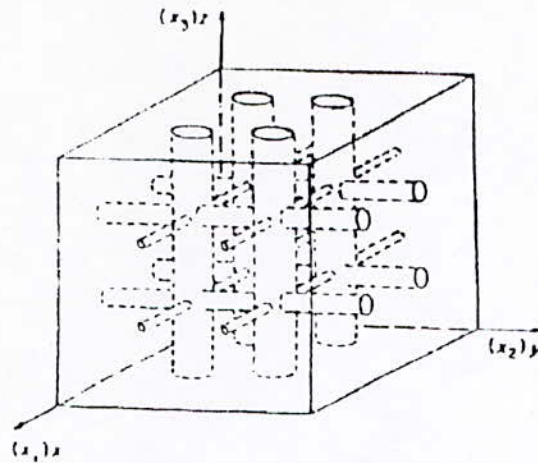


FIG 2.3.1 corps orthotrope

Parmi les neuf constantes indépendantes des corps orthotropes, trois lient les déformations normales avec les contraintes normales ( $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ ) avec ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ ). Ces constantes sont les modules de Young. Les trois autres constantes sont les coefficients de Poisson qui lient les déformations normales avec les contraintes normales des autres plans du corps. Les trois dernières constantes lient les déformations angulaires avec les contraintes de cisaillement des mêmes plans.

Les matériaux isotropes transverses ont la même allure globale que les matériaux orthotropes sauf qu'ils ont le même comportement dans les directions  $x$  et  $z$  (voir fig 2.3.1). Dans ce cas on aura que cinq constantes élastiques indépendantes, deux modules de Young et deux coefficients de Poisson et un module de cisaillement.

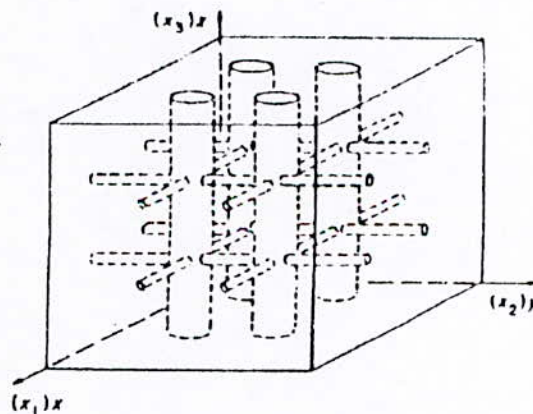


FIG .2.3.2 Les corps isotropes transverses

**2.4- LOI DE COMPORTEMENT EN DEFORMATION ET EN CONTRAINTE PLANE :** Pour le cas général (l'orthotropie), la loi de comportement est donnée par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{xx} + \frac{1}{E_y} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_{yy} + \frac{1}{E_z} \sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G_{yz}} \sigma_{yz} \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2G_{xz}} \sigma_{xz} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G_{xy}} \sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

tel que:

$E_i$  : Module de Young selon la direction  $i$ .

$\nu_{ij}$  : Coefficient de poisson dans le plan  $ij$

$G_{ij}$  : Module de cisaillement dans le plan  $ij$

On peut écrire aussi ces relations sous la forme simplifiée suivante:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{13}\sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{yy} &= s_{21}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} + s_{23}\sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{zz} &= s_{31}\sigma_{xx} + s_{32}\sigma_{yy} + s_{33}\sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}s_{44}\sigma_{yz} \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}s_{55}\sigma_{xz} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}s_{66}\sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Tel que  $S_{ij}=S_{ji}$  (condition de symétrie)

\*Pour le cas de contrainte plane, prenons le plan d'étude le plan  $x,y$  et on aura:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

par conséquent les relations (2.4.2) deviennent:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} \\
 \varepsilon_{yy} &= s_{12}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}s_{66}\sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Et:  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$  et  $\varepsilon_{zz} = s_{13}\sigma_{xx} + s_{23}\sigma_{yy}$ .

Exprimons les contraintes en fonctions des déformations on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (s_{22}\varepsilon_{xx} - s_{12}\varepsilon_{yy}) / (s_{11}s_{22} - s_{12}^2) \\ \sigma_{yy} &= (-s_{12}\varepsilon_{xx} + s_{11}\varepsilon_{yy}) / (s_{11}s_{22} - s_{12}^2) \\ \sigma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} / s_{66}\end{aligned}\quad (2.4.4)$$

Ces équations contiennent quatre constantes  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{66}$  et pour le cas de déformation plane définie par:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \Rightarrow \begin{aligned}\sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{zz} &= -(s_{13}\sigma_{xx} + s_{23}\sigma_{yy}) / s_{33}\end{aligned}$$

Les équations (2.4.2) nous donnent:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= (s_{11} - s_{13}^2 / s_{33})\sigma_{xx} + (s_{12} - s_{13}s_{23} / s_{33})\sigma_{yy} \\ \varepsilon_{yy} &= (s_{12} - s_{13}s_{23} / s_{33})\sigma_{xx} + (s_{22} - s_{23}^2 / s_{33})\sigma_{yy} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} s_{66}\sigma_{xy}\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

La forme inverse de ces équations est :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} &= c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} &= 2c_{66}\varepsilon_{xy}\end{aligned}\quad (2.4.6)$$

Avec:

$$\begin{aligned}c_{11} &= (s_{22} - s_{23}^2 / s_{33}) / s_0^2 \\ c_{12} &= -(s_{12} - s_{13}s_{23} / s_{33}) / s_0^2 \\ c_{22} &= (s_{11} - s_{13}^2 / s_{33}) / s_0^2 \\ c_{66} &= 1 / s_{66}\end{aligned}\quad (2.4.6)$$

On remarque que si on considère  $S_{13}$  et  $S_{23}$  nuls, l'étude d'état de contrainte plane et l'étude d'état de déformation plane deviennent identiques.

**Remarque :** Une méthode pratique pour la caractérisation des matériaux anisotropes en deux dimensions a été présentée dans l'annexe .

**CHAPITRE 3**

**APPLICATION DE LA  
METHODE DES  
CONTRAINTES FICTIVES  
AUX MILIEUX  
MONOCOUCHEs**

**3-1 INTRODUCTION :** Beaucoup de problèmes pratiques dans différents domaines de l'ingénieur tels que , la mécanique des fluides, les transferts de chaleur et de masse , la mécanique des solides , l'élastostatique et autres peuvent être représentés par des équations aux dérivés partielles régissant l'intérieur d'un domaine ( $\Omega$ ) délimité par un contour ( $\partial\Omega$ ) sur lequel des conditions aux limites sont prescrites.

Pour approcher les solutions analytiques de ces problèmes , souvent difficiles à déterminer par la résolution directe de ces équations , plusieurs méthodes numériques ont été mises en place ou l'on peut noter la domination de la méthode des éléments finis (MEF), et à un degré moins important celle des éléments de frontières (BEM) , généralement connues sous le nom des équations intégrales aux frontières en tant qu'outil numérique très puissante , est aussi doté d'une haute précision et d'une souplesse étonnante.

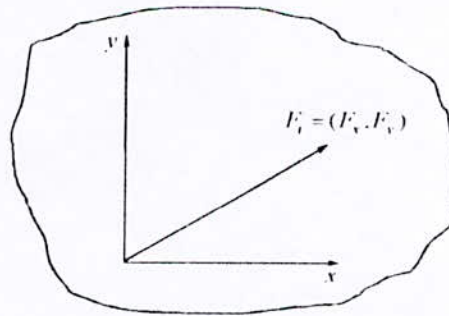
En effet, depuis une trentaine d'années, RIZZO (1967) a appliqué cette méthode (BEM) en bidimensionnelle et CRUSE (1969) en tridimensionnelle . Pour la résolution des problèmes d'élasticité linéaire.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la méthode des contraintes fictives en milieu monocouche (isotrope et anisotrope) qui est l'une des méthodes Intégrales aux frontières.

### 3-2 FORMULATION DANS LE CAS ISOTROPE :

#### 3-2.1 Problème de KELVIN en déformation plane :

Le problème de KELVIN en déformation plane représenté dans la Figure (3-2-1-1) ((SKOLNIKOFF 1959, P 396-9) Crouch 1983 ) par une coupe perpendiculaire à l'axe Z d'un solide infini chargé d'une ligne de force concentrée  $F_i$  selon cet axe et de composantes  $F_x$  et  $F_y$  suivant l'axe des abscisses et celui des coordonnées respectivement.



*Fig. 3-2-1-1 Problème de KELVIN en déformation plane.*

GREEN à donné la solution de ce problème en terme d'une fonction d'influence  $g(x,y)$  d'expression :

$$g(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \ln(x^2 + y^2)^{1/2} \quad (3.2.1.1)$$

Les déplacements peuvent être donne par les relations :

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{F_x}{2G} [(3-4\nu)g - xg_{,x}] + \frac{F_y}{2G} [-yg_{,x}] \\
 u_y &= \frac{F_x}{2G} [-xg_{,y}] + \frac{F_y}{2G} [(3-4\nu)g - yg_{,y}]
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1.2}$$

Où  $g_x$  et  $g_y$  représentent  $\partial g/\partial x$  et  $\partial g/\partial y$ .

Les contraintes peuvent être calculées par les relations déformation déplacement et cela de comportement en déformation plane, on trouve alors:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= F_x [2(1-\nu)g_{,xx} - xg_{,xxx}] + F_y [2\nu g_{,xy} - yg_{,xxx}] \\
 \sigma_{yy} &= F_x [2\nu g_{,xx} - xg_{,xxx}] + F_y [2(1-\nu)g_{,yy} - yg_{,xxx}] \\
 \sigma_{xy} &= F_x [(1-2\nu)g_{,xy} - xg_{,xxy}] + F_y [(1-2\nu)g_{,xy} - yg_{,xxy}]
 \end{aligned}
 \tag{3.2-1-3}$$

**Remarques :**

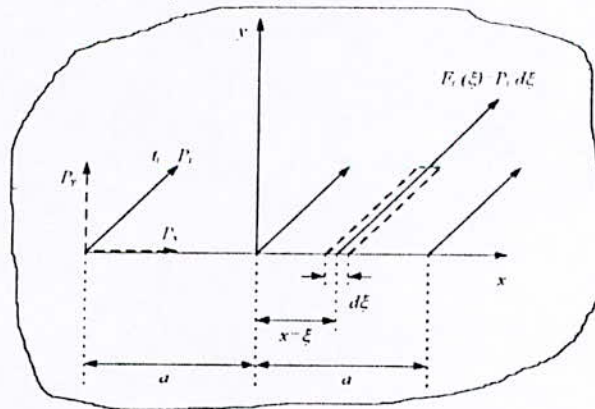
- En absence des forces de volumes ; on peut démontrer que les contraintes (3.2-1-3) satisfont les équations d'équilibre ( $\sigma_{ji,j} = 0$ ).
- Les contraintes sont singulières à l'origine (4.2-1-4)
- Les déplacements sont infinis à l'origine à cause de la présence d'une fonction logarithmique dans la fonction d'influence  $g(x,y)$ .

**3.2-2 Traction simple sur segment de droite :**

Le problème de contraintes  $t_i = P_i$   $i=x$  ou  $y$  de la figure (3.2-2-1) peut être résolu par intégration de la solution de KELVIN.

La solution peut être écrite par une combinaison de la fonction.

$$F_i(\xi) = P_i d\xi
 \tag{3.2-2-1}$$



**Fig 3.2-2-1 : Intégration de la solution de KELVIN**

La solution est donnée en terme d'une fonction d'influence  $f$  qui est donnée par :

$$f(x, y) = \int_a^x g(x - \xi, y) d\xi \quad (3.2.2.2)$$

On à alors:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{P_x}{2G} [(3-4\nu)f - yf_{,y}] + \frac{P_y}{2G} [-yf_{,x}] \\ u_y &= \frac{P_x}{2G} [-yf_{,x}] + \frac{P_y}{2G} [(3-4\nu)f - yf_{,y}] \end{aligned} \quad (3.2.2.3)$$

Et:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= P_x [(3-2\nu)f_{,x} + yf_{,xy}] + P_y [2yf_{,xy} + yf_{,yy}] \\ \sigma_{yy} &= P_x [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] + P_y [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,yy}] \\ \sigma_{xy} &= P_x [2(1-\nu)f_{,y} + yf_{,xy}] + P_y [(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \end{aligned} \quad (3.2.2.4)$$

Cependant, il faut expliciter les aspects mathématiques de la solution analytique donnée ci-dessus du fait qu'elle forme la base de la méthode des contraintes fictives.

1/ Les déplacements sont infinis aux points les plus éloignés de l'origine ( $x = \pm a, y = 0$ ), les relations (3.2-2-3) donnent seulement les déplacements relatifs, il faut donc définir un point de référence et calculer les déplacements par rapport à ce point.

2/D'après les équations (3.2-2-4) on voit bien que les contraintes ne sont pas définies aux points les plus éloignés de l'origine ( $x = \pm a, y = 0$ ). Si on pose  $y=0$  dans les relations (3.2.2.4) on trouve les relations:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{(3-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 \\ &\quad - \frac{2\nu}{4\pi(1-\nu)} P_y \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\ \sigma_{yy} &= +\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} P_y \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\ \sigma_{xy} &= -\frac{1}{2\pi} P_x \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\ &\quad - \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.2.2.5)$$

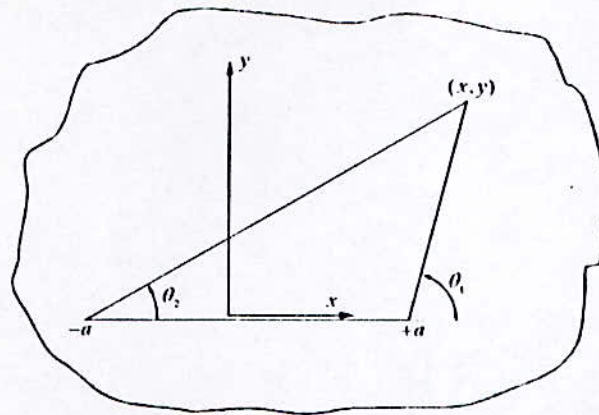


Fig 3.2.2.2: Les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

On définit les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (voir fig. 3.2-2-2)

Tel que :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan \frac{y}{x-a} \\ \theta_2 &= \arctan \frac{y}{x+a} \end{aligned} \quad (3.2.2.6)$$

On aura alors les limites suivantes:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, \quad y = 0, \text{ ou } y = 0_+ \\ +\pi & |x| < a, \quad y = 0_+ \\ -\pi & |x| < a, \quad y = 0_- \end{cases} \quad (3.2.2.7)$$



On à alors trois différents cas à considérer pour calculer les contraintes le long de la ligne  $y=0$  sont :

(a)  $|x| > a, y = 0_+$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x,0) &= -\frac{(3-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 \\ \sigma_{yy}(x,0) &= +\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 \\ \sigma_{xy}(x,0) &= -\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2\end{aligned}\quad (3.2.2.8)$$

(b)  $|x| < a, y = 0_+$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x,0_+) &= -\frac{(3-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 - \frac{\nu}{2(1-\nu)} P_y \\ \sigma_{yy}(x,0_+) &= +\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 - \frac{1}{2} P_y \\ \sigma_{xy}(x,0_+) &= -\frac{1}{2} P_y - \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2\end{aligned}\quad (3.2.2.9)$$

(c)  $|x| < a, y = 0_-$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x,0_-) &= -\frac{(3-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 + \frac{\nu}{2(1-\nu)} P_y \\ \sigma_{yy}(x,0_-) &= +\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 + \frac{1}{2} P_y \\ \sigma_{xy}(x,0_-) &= +\frac{1}{2} P_y - \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2\end{aligned}\quad (3.2.2.10)$$

Il est aussi à remarquer que la discontinuité de contrainte  $\sigma_{ij}(x,0_-) - \sigma_{ij}(x,0_+)$  est :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x,0_-) - \sigma_{xx}(x,0_+) &= \frac{\nu}{1-\nu} P_y \\ \sigma_{yy}(x,0_-) - \sigma_{yy}(x,0_+) &= P_y \\ \sigma_{xy}(x,0_-) - \sigma_{xy}(x,0_+) &= P_y\end{aligned}\quad (3.2.2.11)$$

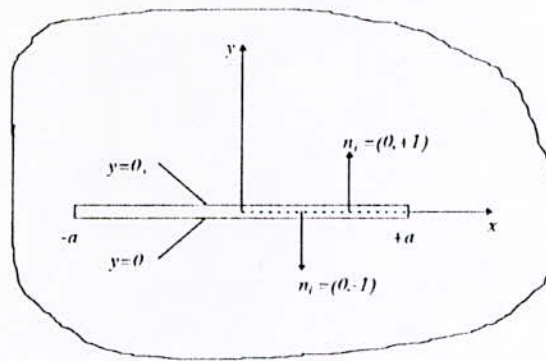


Fig. 3.2-2-3 ligne de discontinuité de contrainte

### 3.2-3 procédure numérique :

La solution donnée précédemment forme la base de la méthode des éléments de frontière. Il s'agit donc de la formulation de l'approche numérique qui traite les problèmes des solides élastiques linéaires. Les considérations physiques nous conduisent à appliquer cette méthode dans les problèmes de cavité des corps infinis (ou finis). Si on considère la cavité de la figure (3.2-3-1) représentés par la courbe (C) et soumise à des contraintes ( $\sigma_s=0$ ,  $\sigma_n = -p$ ) ou (n,s) sont respectivement les coordonnées locales perpendiculaires et tangentes en tout point du contour (C). Si on veut déterminer les contraintes et les déplacement dans le corps dû à ces conditions aux limites, les étapes suivantes sont à suivre :

On divise la courbe C en N segments de droite, la longueur de chacun de ces éléments de frontière i est noté par  $2a$  (si ces éléments sont de plus en plus petits, on a une bonne approximation de la méthode). On considère que chaque élément est soumis sur cas longueur à une contrainte normale  $\sigma_n = -p$  et une contrainte tangentielle nulle. Les conditions aux limites sont :

$$\sigma_n = -P, \sigma_s = 0 \quad \text{pour } i = 1, N \quad (3.2-3-1)$$

Le problème présenté par ces conditions peut être traité numériquement à l'aide du modèle numérique spécifié par la figure (3.2-3-1) ou la courbe (C') est similaire à (C).

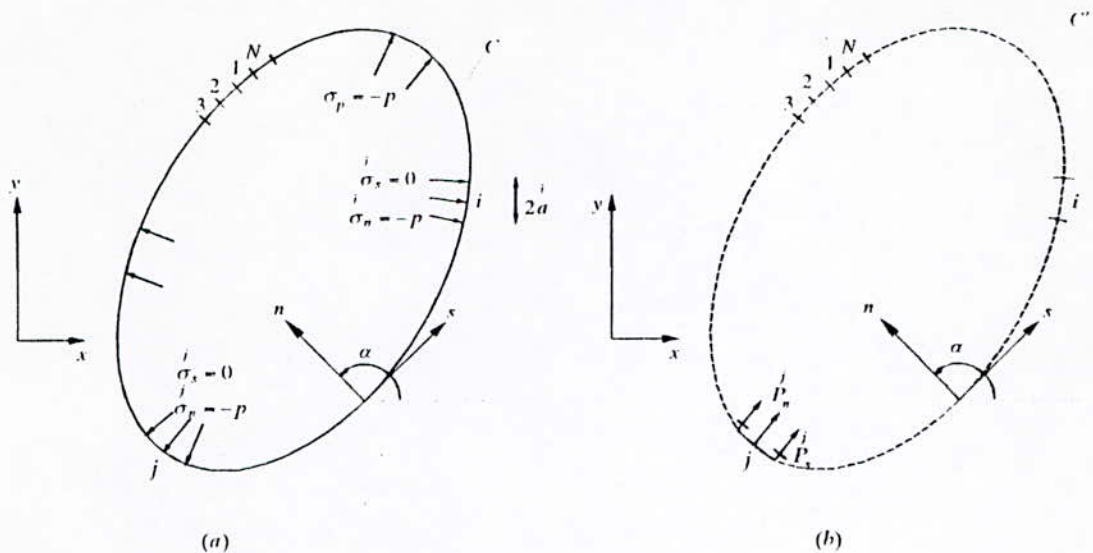


FIG 3.2-3-1 présentation de la méthode de l'élément limite pour le problème de cavité

- (a) : aspect physique .
- (b) : aspect numérique.

Imaginons maintenant que 'il y a sur tout élément J des N éléments de (C') une répartition d'un vecteur contrainte de composantes normales  $P_n^j$  et tangentielle  $P_s^j$ . Il faut noter que les contraintes actuelles sur élément j  $\sigma_n^j$  et  $\sigma_s^j$  ne sont pas les  $P_n^j$  et  $P_s^j$ .

On utilise la solution donnée dans le paragraphe (3.2.2) avec des transformations tenant compte de l'orientation de chaque segment de droite j par rapport à chaque segment de droite i de la courbe (C'). On aura la contribution sur les contraintes actuelles pour le segment i de la courbe (C') définie par :

$$\begin{cases} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} P_n^j \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} P_n^j \end{cases} \quad i = 1, N \quad (3.2-3-2)$$

Tel que  $A_{ss}^{ij}$  ... etc. sont les coefficients d'influences sur les contraintes actuelles dues aux contraintes fictives .  $A_{sn}^{ij}$  par exemple représente la contrainte de cisaillement actuelle au milieu de l'élément i dû à une contrainte normale ( $P_n^j = 1$ ) sur l'élément j.

On peut déterminer dans notre cas les  $P_s^j ; P_n^j$  avec  $j=1, N$  en résolvant le système d'équations (3.2-3-2) et en remplaçant  $\sigma_n = -P, \sigma_s = 0$  pour  $i = 1, N$ .

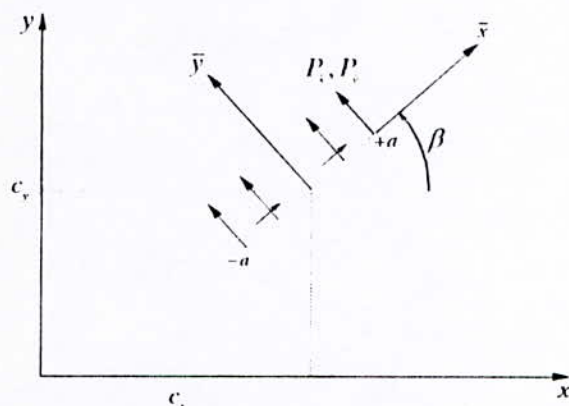
Une fois les valeurs de contraintes fictives  $P_s^j ; P_n^j$  déterminées, on peut calculer les déplacements et les contraintes pour tout point du corps élastique avec une combinaison linéaire des contraintes fictives en utilisant la même procédure que précédemment .

**Remarque:** Les conditions aux limites peuvent être en déplacements comme elles peuvent être en contraintes ou les deux à la fois.

### 3.2-4 transformation des coordonnées :

La méthode des contraintes fictives est basée essentiellement sur la connaissance des coordonnées des points à étudier par rapport au repère local de chaque segment de courbe (C'). Prenons le système de coordonnées local  $(\bar{x}, \bar{y})$  choisi sur la figure (3.2-4-1). Le segment de droite indiqué sur la figure est définie par  $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$ . Les contraintes fictives  $P_x, P_y$  appliquées sur ce segment sont tangentes et normales respectivement au système de coordonnées local et les coordonnées locales sont obtenues par une translation et une rotation par rapport au repère globales  $x, y$ . Les composantes de la translation sont  $c_x$  et  $c_y$  suivant  $x, y$  respectivement, tandis que la rotation est définie par l'angle  $\beta$  positif dans le sens trigonométrique. L'expression de transformation de coordonnées est :

$$\begin{cases} \bar{x} = (x - c_x) \cos \beta + (y - c_y) \sin \beta \\ \bar{y} = -(x - c_x) \sin \beta + (y - c_y) \cos \beta \end{cases} \quad (3.2-4-1)$$



*Fig 3.2-4-1 transformation des coordonnées entre les repères globale et locale*

Dans le système local on aura :

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) = F_1(\bar{x}, \bar{y}) = & \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \bar{y} \left( \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}-a} - \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}+a} \right) \right. \\ & - (\bar{x}-a) \ln \sqrt{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]} \\ & \left. + (\bar{x}+a) \ln \sqrt{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]} \right] \end{aligned}$$

(3.2-4-2)

$$f_{xx} = P_2(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \sqrt{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]} - \ln \sqrt{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]} \right]$$

$$f_{xy} = P_3(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}-a} - \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}+a} \right]$$

$$f_{yy} = P_4(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\bar{y}}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{y}}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right]$$

$$f_{yx} = -f_{xy} = P_5(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\bar{x}-a}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{x}+a}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right]$$

### 3.2-5 Les coefficients d'influences .

Dans la méthode des contraintes fictives les coefficients d'influences sont calculés en utilisant les équations précédentes. Les segments de droite existants sur la frontière du solide infini sont orientés dans des directions arbitraires par rapport au repère globale x,y les éléments i et j ont une longueur de  $2a^i, 2a^j$  orienté de  $\beta^i$  et  $\beta^j$  et ont comme coordonnées  $x^i, y^i$  et  $x^j, y^j$  dans le repère globale respectivement voir fig(3.2.5-1). Les contraintes fictives dans le  $j^{\text{ème}}$  élément sont  $P_x^j$  et  $P_y^j$ . Les déplacements et les contraintes actuelles dans un point quelconque (x,y) du corps dues au contrainte  $P_x^i$  et  $P_y^j$  peuvent se calculer en utilisant les équations (3.2-4-7) et (3.2-4-8), les coordonnées locales  $\bar{x}, \bar{y}$  par rapport au  $j^{\text{ème}}$  élément utilisé dans ces équations sont calculées pour un point de coordonnées x,y par :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x - x^i) \cos \beta^i + (y - y^i) \sin \beta^i \\ \bar{y} &= -(x - x^i) \sin \beta^i + (y - y^i) \cos \beta^i \end{aligned} \quad (3.2-5-1)$$

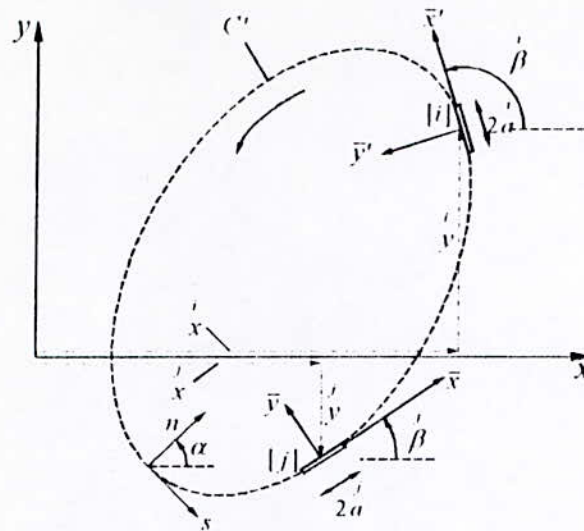


Fig 3.2.5-1 : position et orientation des éléments de limites par rapport au  $j^{me}$  point.

On peut calculer les fonctions  $\bar{F}_k$ ,  $k=1,5$  en utilisant les équations (3.2-5-2) pour définir les coefficients d'influence pour le point  $(x,y)$ . En utilisant les équations (3.2-4-7) et (3.2-4-7) on peut obtenir les contraintes et les déplacements pour ce point dues au contraintes fictives des  $N$  éléments de frontière, on doit faire la somme de toutes les contraintes engendrées par chaque élément sur un élément  $i$ . Les coefficients d'influence de l'élément  $J$  sur  $i$  sont obtenues en remplaçant  $x$  et  $y$  par  $x_j$  et  $y_j$ , on trouve:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - x') \cos \beta + (y - y') \sin \beta \\ \bar{y} &= -(x - x') \sin \beta + (y - y') \cos \beta\end{aligned}\quad (3.2-5-2)$$

On posera dans les équations suivantes :

$$\gamma = \beta^i - \beta^j \quad (3.2.5.3)$$

Les coefficients d'influence sont obtenus en utilisant les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 u_s^i &= \frac{P_s^j}{2G} [(3-4\nu) \cos \gamma \bar{F}_1 - \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_2 - \cos \gamma \bar{F}_3)] \\
 &\quad + \frac{P_n^j}{2G} [(3-4\nu) \sin \gamma \bar{F}_1 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_2 + \sin \gamma \bar{F}_3)] \\
 u_n^i &= \frac{P_s^j}{2G} [-(3-4\nu) \sin \gamma \bar{F}_1 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_2 + \sin \gamma \bar{F}_3)] \\
 &\quad + \frac{P_n^j}{2G} [(3-4\nu) \cos \gamma \bar{F}_1 + \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_2 - \cos \gamma \bar{F}_3)]
 \end{aligned} \tag{3.2.5.4}$$

et:

$$\begin{aligned}
 \sigma_s^i &= P_s^j [-2(1-\nu)(\sin 2\gamma \bar{F}_2 - \cos 2\gamma \bar{F}_3) - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_4 + \cos 2\gamma \bar{F}_5)] \\
 &\quad + P_n^j [(1-2\nu)(\cos 2\gamma \bar{F}_2 + \sin 2\gamma \bar{F}_3) - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_4 - \sin 2\gamma \bar{F}_5)] \\
 \sigma_n^i &= P_s^j [\bar{F}_2 - 2(1-\nu)(\cos 2\gamma \bar{F}_2 + \sin 2\gamma \bar{F}_3) - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_4 - \sin 2\gamma \bar{F}_5)] \\
 &\quad + P_n^j [\bar{F}_3 - (1-2\nu)(\sin 2\gamma \bar{F}_2 - \cos 2\gamma \bar{F}_3) + \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_4 + \cos 2\gamma \bar{F}_5)]
 \end{aligned} \tag{3.2.5.5}$$

Les déplacements et les contraintes au  $i^{\text{ème}}$  segment sont fonction des contraintes fictives  $P_s^j$  et  $P_n^j$  de tout les N element ( $j=1$  à  $N$ ), et ils peuvent être exprimés sous la forme d'une formation algébrique :

$$u_s^i = \sum_{j=1}^n B_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^n B_{sn}^{ij} P_n^j \tag{3.2.5.6}$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^n B_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^n B_{nn}^{ij} P_n^j$$

et

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^n A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^n A_{sn}^{ij} P_n^j \tag{3.2.5.7}$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^n A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^n A_{nn}^{ij} P_n^j$$

# Calcul de contrainte  $\sigma_t = \sigma_{xx}$  le long de frontière :

Le calcul de  $\sigma_n^i$  et  $\sigma_s^i$  est indispensable car il spécifie les conditions aux limites de chaque élément .

Mais il est intéressant de calculer les contraintes  $\sigma_{xx}$  notée par  $\sigma_t$  (voir fig 3.2-5-3).  $\sigma_t$  peut être calculée par l'équation:

$$\begin{aligned} \sigma_t = P_s [ \bar{F}_2 - 2(1-\nu)(\cos 2\gamma \bar{F}_2 + \sin 2\gamma \bar{F}_3) + \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_4 - \sin 2\gamma \bar{F}_5) ] \\ + P_n [ \bar{F}_3 + (1-2\nu)(\sin 2\gamma \bar{F}_2 - \cos 2\gamma \bar{F}_3) - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_4 + \cos 2\gamma \bar{F}_5) ] \end{aligned} \quad (3.2-5-8)$$

et donc une contrainte  $\sigma_t$  égale à:

$$\sigma_t = \sum_{j=1}^n A_{js} P_s + \sum_{j=1}^n A_{jn} P_n \quad (3.2-5-9)$$

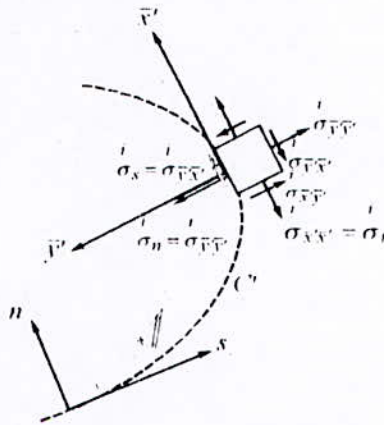


Fig 3.2-5-2 Différentes contraintes appliquées sur un élément i .

3.2.6 Problème intérieur et extérieur :

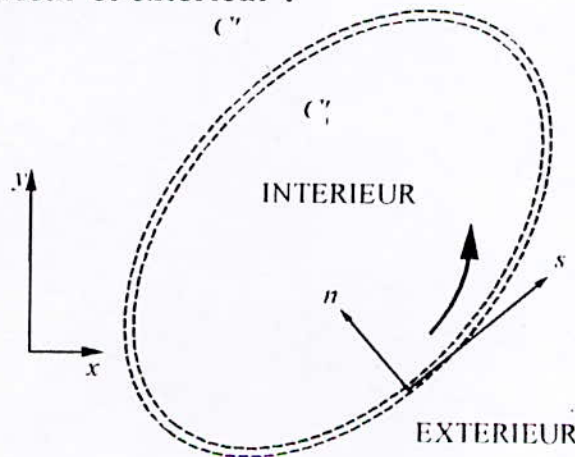


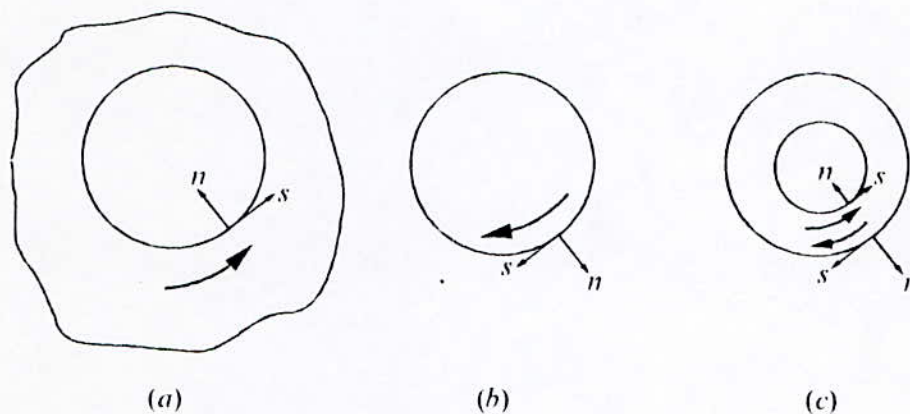
Fig 3.2-6-1 régions de la courbe C' (extérieure et intérieure) .



Pour la simplification du code de calcul en choisissant la convention suivante :

Pour un problème d'un corps fini on parcourt la limite dans le sens des aiguilles d'une montre, tandis que on parcourt la limite dans le sens trigonométrique quand on est dans un problème de cavité.

Trois exemples illustrent la convention de signe adoptée dans ce paragraphe pour différencier entre les problèmes intérieurs et extérieurs (voir fig.3.2.6.2).



*Fig 3.2-6-2 convention pour la traversée du contour .  
(a): cavité (b): disque (c):anneau*

### 3.3 FORMULATION DANS LE CAS ANISOTROPE:

**3.3.1 Problème intégrale de Kelvin:** On cherche dans ce paragraphe la solution du problème illustré dans la figure (3.3.1.1) pour développer la méthode des contraintes fictives pour un solide élastique anisotrope .

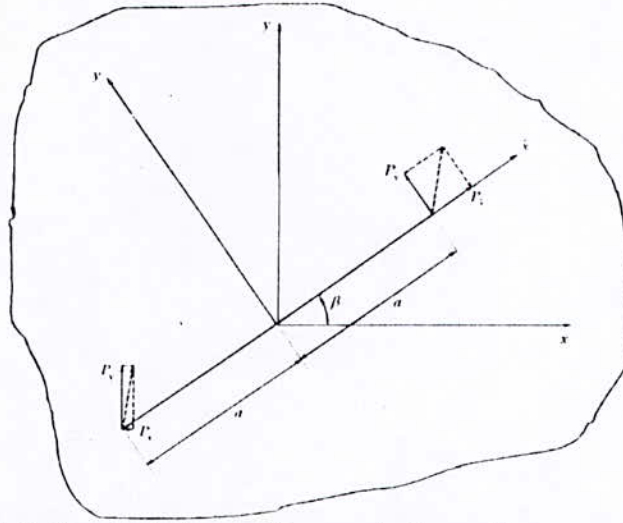


Figure 3.3.1.1 Contraintes uniforme le long du segment  $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$ .

Les systèmes de coordonnées utilisés dans la figure (3.3.1.1) sont reliés par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta \\ y &= \bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta \end{aligned} \quad (3.3.1.1)$$

Les contraintes appliquées sur ce segment peuvent être données dans l'un des deux repères indiqués sur la figure (3.3.1.1) en utilisant les transformations suivantes:

$$\begin{aligned} P_{\bar{x}} &= P_x \cos \beta - P_y \sin \beta \\ P_{\bar{y}} &= P_x \sin \beta + P_y \cos \beta \end{aligned} \quad (3.3.1.2)$$

Les déplacements et les contraintes dus aux contraintes constantes  $P_x$  et  $P_y$  appliquées sur le segment de droite  $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$  sont données par:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{+q_1 q_2}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} P_x \left[ \frac{\gamma_1}{q_1} I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{\gamma_2}{q_2} I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\ &\quad - \frac{-1}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} P_y \left[ I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\ u_y &= \frac{-q_1 q_2}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} P_x \left[ I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\ &\quad - \frac{-1}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} P_y \left[ \frac{q_1}{\gamma_1} I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{q_2}{\gamma_2} I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \end{aligned} \quad (3.3.1.3)$$

Et:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{+q_1 q_2}{2\pi(q_1 - q_2)} P_x \left[ \frac{(1+q_1)}{\gamma_1 q_1} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{(1+q_2)}{\gamma_2 q_2} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
&\quad \frac{+1}{2\pi(q_1 - q_2)} P_y \left[ \frac{(1+q_1)}{\gamma_1^2} I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{(1+q_2)}{\gamma_2^2} I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
\sigma_{yy} &= \frac{-q_1 q_2}{2\pi(q_1 - q_2)} P_x \left[ \frac{\gamma_1(1+q_1)}{q_1} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{\gamma_2(1+q_2)}{q_2} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \quad (3.3.1.4) \\
&\quad \frac{-1}{2\pi(q_1 - q_2)} P_y \left[ (1+q_1) I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - (1+q_2) I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
\sigma_{xy} &= \frac{+q_1 q_2}{2\pi(q_1 - q_2)} P_x \left[ \frac{(1+q_1)}{q_1} I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{(1+q_2)}{q_2} I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
&\quad \frac{-1}{2\pi(q_1 - q_2)} P_y \left[ \frac{(1+q_1)}{\gamma_1} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{(1+q_2)}{\gamma_2} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right]
\end{aligned}$$

Les constantes  $y_1$  et  $y_2$  sont données par:

$$y_1 = y/\gamma_1 \quad \text{et} \quad y_2 = y/\gamma_2 \quad (3.3.1.5)$$

Les paramètres  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $q_1$  et  $q_2$  dans les équations précédentes sont le résultat de certaines combinaisons des constantes élastiques du matériau. En particulier  $\gamma_1^2$ ,  $\gamma_2^2$  sont les deux racines de l'équation caractéristique suivante:

$$C_{11} C_{22} \gamma^4 + [C_{12}(C_{12} + 2C_{66}) - C_{11} C_{22}] \gamma^2 + C_{22} C_{66} = 0 \quad (3.3.1.6)$$

Les constantes  $q_1$  et  $q_2$  sont reliées à  $\gamma_1^2$  et  $\gamma_2^2$  par les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
q_1 &= (C_{11} \gamma_1^2 - C_{66}) / (C_{12} + C_{66}) \\
q_2 &= (C_{11} \gamma_2^2 - C_{66}) / (C_{12} + C_{66})
\end{aligned} \quad (3.3.1.7)$$

Les fonctions  $I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i)$  jusqu'à  $I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i)$  dans ces équations sont définies par:

$$\begin{aligned}
 I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i) &= \frac{\bar{y}}{\gamma_i \Lambda_i} [\theta_1(\gamma_i) - \theta_2(\gamma_i)] - \left( \bar{x} - a + \frac{B_i \bar{y}}{2\Lambda_i} \right) \ln r_1(\gamma_i) + \left( \bar{x} + a + \frac{B_i \bar{y}}{2\Lambda_i} \right) \ln r_2(\gamma_i) \\
 I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i) &= \left( \bar{x} - a + \frac{B_i \bar{y}}{2\Lambda_i} \right) \theta_1(\gamma_i) - \left( \bar{x} + a + \frac{B_i \bar{y}}{2\Lambda_i} \right) \theta_2(\gamma_i) - \frac{\bar{y}}{\gamma_i \Lambda_i} \ln [r_1(\gamma_i) / r_2(\gamma_i)] \\
 I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i) &= -\frac{\cos \beta}{\Lambda_i} \ln [r_1(\gamma_i) / r_2(\gamma_i)] - \frac{\sin \beta}{\gamma_i \Lambda_i} [\theta_1(\gamma_i) - \theta_2(\gamma_i)] \\
 I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i) &= -\frac{\sin \beta}{\gamma_i \Lambda_i} \ln [r_1(\gamma_i) / r_2(\gamma_i)] + \frac{\cos \beta}{\Lambda_i} [\theta_1(\gamma_i) - \theta_2(\gamma_i)]
 \end{aligned} \tag{3.3.1.5}$$

Où nous avons utilisé les notations :

$$\begin{aligned}
 r_1(\gamma_i) &= [A_i(\bar{x} - a)^2 + B_i(\bar{x} - a)\bar{y} + C_i\bar{y}^2]^{1/2} \\
 r_2(\gamma_i) &= [A_i(\bar{x} + a)^2 + B_i(\bar{x} + a)\bar{y} + C_i\bar{y}^2]^{1/2} \\
 \theta_1(\gamma_i) &= \arctan \frac{\bar{y} / (\gamma_i \Lambda_i)}{(\bar{x} - a) + \frac{1}{2} B_i \bar{y} / \Lambda_i} \\
 \theta_2(\gamma_i) &= \arctan \frac{\bar{y} / (\gamma_i \Lambda_i)}{(\bar{x} + a) + \frac{1}{2} B_i \bar{y} / \Lambda_i}
 \end{aligned} \tag{3.3.1.6}$$

Où  $\Lambda_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  sont données par:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_i &= (\gamma_i^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta) / \gamma_i^2 \\
 B_i &= (1 - \gamma_i^2) \sin 2\beta / \gamma_i^2 \\
 C_i &= (\gamma_i^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta) / \gamma_i^2
 \end{aligned} \tag{3.3.1.7}$$

pour  $i = 1, 2$ .

Les équations précédentes peuvent être utilisées pour calculer les coefficients d'influences de la méthode des contraintes fictives pour un solide élastique orthotropiques.

**CHAPITRE 4**

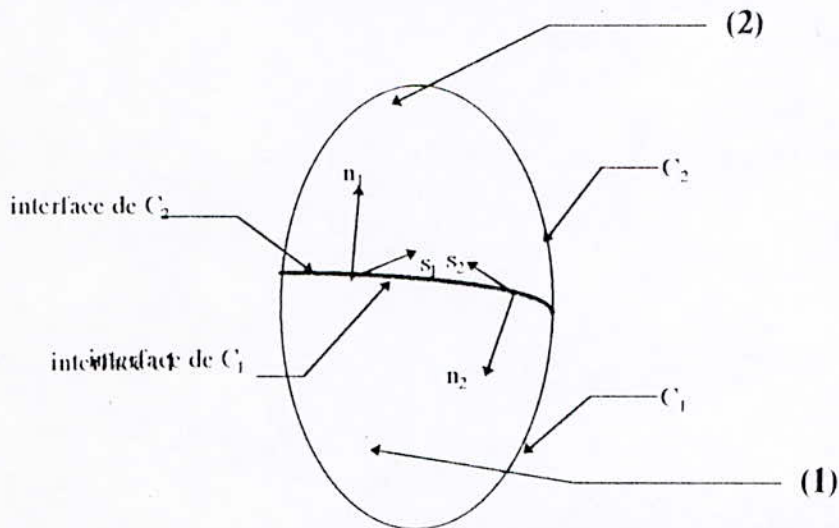
**APPLICATION DE LA  
METHODE DES  
CONTRAINTES FICTIVES  
AUX MILIEUX  
MULTICOUCHES**

**INTRODUCTION :** Les milieux étudiés comprend plus d'un milieu homogène anisotrope. La méthode des contraintes fictives est destinée à résoudre les problèmes des corps homogènes et en élasticité linéaire. On va voir dans cette partie l'application de cette méthode dans des problèmes où le corps est non-homogène.

**4.2 Les milieux multicouches:**

On va supposer que le corps à étudier est composé de deux milieux  $R_1$  et  $R_2$  présentés sur la figure (4.2.1). chaque domaine est supposé anisotrope (orthotrope), homogène et linéairement élastique avec des constantes élastiques  $\nu_{ij}^1, E_i^1$  et  $\nu_{ij}^2, E_i^2$ .

Les contours des frontières  $C_1$  du milieu  $R_1$  et  $C_2$  du milieu  $R_2$  sont parcourus dans le sens des aiguilles d'une montre pour maintenir la convention précédente. Les systèmes locaux des coordonnées sont associés aux deux contours comme le montre la figure(4.2.1). La portion commune des deux milieux définit l'interface entre ces deux milieux. Les systèmes des deux coordonnées locaux  $s_1, n_1$  et  $s_2, n_2$  sont directement opposés le long de l'interface c'est à dire  $s_1 = -s_2$  et  $n_1 = -n_2$ .



**Fig 4.2.1. Corps non-homogène comprend 2 milieux**

Les conditions aux limites du problème dans le corps non-homogène de la figure ci-dessus sont définies par des conditions en déplacements et en contraintes pour la partie d'interface.

Ces conditions de continuités sont définies pour un point Q de l'interface par :

$$\begin{aligned} \sigma_s^{[1]}(Q) &= \sigma_s^{[2]}(Q) \\ \sigma_n^{[1]}(Q) &= \sigma_n^{[2]}(Q) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Et:

$$\begin{aligned} u_s^{[1]}(Q) &= -u_s^{[2]}(Q) \\ u_n^{[1]}(Q) &= -u_n^{[2]}(Q) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Le signe moins qui apparaît dans l'équation (4.2.2) est dû a l'opposition des sens des systèmes  $s_1, n_1$  et  $s_2, n_2$  le long de l'interface.

La solution de problème en question des éléments de frontière peut être donnée en divisant les contours  $C_1$  et  $C_2$  en un nombre de segments de droites jointives et en posant que les déplacements et les contraintes sont constants pour chaque segment du contour .

Avec l'inclusion des portions des contours qui représenté l'interface, on aura  $N_1$  éléments de frontière le long de  $C_1$  et  $N_2$  éléments le long de  $C_2$  . Les deux éléments face à face le long de l'interface des deux milieux doivent être égaux. Deux déplacements et deux contraintes sont associées à chaque élément d'interface et doivent vérifier les conditions de continuité (4.2.1) et (4.2.2) pour que le problème ait une solution.

**43 La méthode des contraintes fictives en multicouches:** On va considérer la procédure numérique de la méthode des contraintes fictives et on va traiter le problème de la figure (4.2.1). Avec les deux milieux  $R_1$  et  $R_2$  , on aura deux problèmes qui sont liés entre eux par les conditions de continuité de l'interface. Comme on a déjà vu dans le cas monocouche, on va associer les contraintes fictives  $P_s$  et  $P_n$  a chaque élément de  $C_1$  et  $C_2$  . Les déplacement et les contraintes dans le milieu  $R_1$  et  $R_2$  sont donnés en fonction de  $P_s^{[1]}$  et  $P_n^{[1]}$  des  $N_1$  éléments de contour  $C_1$  et les déplacements et les contraintes dans le milieu  $R_2$  sont donnés en fonction de  $P_s^{[2]}$  et  $P_n^{[2]}$  des  $N_2$  éléments de contour  $C_2$  .

Notre problème maintenant est de trouver les contraintes fictives  $P_s$  et  $P_n$  dans chaque élément de frontière parmi les  $N=N_1 + N_2$  éléments si les conditions aux limites et les conditions de continuités sont prêtes pour la construction de système algébrique d'équations pour ce problème composé. Il est préférable de numéroter les éléments de frontière des deux milieux consécutivement en commençant par le milieu  $R_1$  de l'élément 1 jusqu'à l'élément  $N_1$  le long de  $C_1$  et de l'élément  $N_1+1$  jusqu'à l'élément  $N_1 + N_2 =N$  le long de  $C_2$  . En se référant aux équations (3.2.3.2), les contraintes sur la frontière de  $R_1$  peuvent être écrites:

$$\begin{aligned} \sigma_s^{[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} A_{ss}^{[1]} P_s + \sum_{j=1}^{N_1} A_{sn}^{[1]} P_n \\ \sigma_n^{[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} A_{ns}^{[1]} P_s + \sum_{j=1}^{N_1} A_{nn}^{[1]} P_n \end{aligned} \quad i=1 \text{ à } N_1 \quad (4.3.1)$$

et les contraintes dans la frontière de milieu  $R_2$  peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} \sigma_s^{[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^{N_2} A_{ss}^{[2]} P_s + \sum_{j=N_1+1}^{N_2} A_{sn}^{[2]} P_n \\ \sigma_n^{[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^{N_2} A_{ns}^{[2]} P_s + \sum_{j=N_1+1}^{N_2} A_{nn}^{[2]} P_n \end{aligned} \quad i=N_1+1 \text{ à } N \quad (4.3.2)$$

et les déplacements des frontières des deux milieux sont:

$$\begin{aligned} u_s^{[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} B_{ss}^{[1]} P_s + \sum_{j=1}^{N_1} B_{sn}^{[1]} P_n \\ u_n^{[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} B_{ns}^{[1]} P_s + \sum_{j=1}^{N_1} B_{nn}^{[1]} P_n \end{aligned} \quad i=1 \text{ à } N_1 \quad (4.3.3)$$

Et:

$$\begin{aligned}
 u_s^{i(2)} &= \sum_{j=N_1+1}^N B_{ss}^{ij(2)} P_s^{j(2)} + \sum_{j=N_1+1}^N B_{sn}^{ij(2)} P_n^{j(2)} \\
 u_n^{i(2)} &= \sum_{j=N_1+1}^N B_{ns}^{ij(2)} P_s^{j(2)} + \sum_{j=N_1+1}^N B_{nn}^{ij(2)} P_n^{j(2)}
 \end{aligned} \quad i=N_1+1 \text{ à } N \quad (4.3.4)$$

Les coefficients d'influence dans les équations (4.3.1) à (4.3.4) sont calculés exactement de la même manière que le cas monocouche, Il est nécessaire d'utiliser les propriétés élastiques de chaque milieu.

Les équations (4.3.1) à (4.3.4) peuvent se mettre sous la forme d'un système algébrique de 2N équations à 2N inconnus (les  $P_s$  et les  $P_n$ )

$$\begin{aligned}
 b_s^i &= \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} P_n^j \\
 b_n^i &= \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} P_n^j
 \end{aligned} \quad i=1 \text{ à } N \quad (4.3.5)$$

Les grandeurs des ces équations sont obtenues en construisant les systèmes (4.3.1) à (4.3.4) et en conservant les conditions aux limites et les conditions de continuité. Chaque élément  $i$  peut être dans la portion libre ou dans l'interface des deux milieux.

Posons en 1<sup>er</sup> temps que l'élément  $i$  appartient à la portion libre du contour  $C_1$  et posons qu'on a des contraintes appliquées a cet élément  $\sigma_s^{i(1)} = (\sigma_s^i)_o$  et  $\sigma_n^{i(1)} = (\sigma_n^i)_o$ . Utilisons les équations (4.3.1) et (4.3.2) pour la détermination de  $b_s^i$  et  $b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij}$  ....etc de l'équation (4.3.5) on aura :

$$\begin{aligned}
 b_s^i &= (\sigma_s^i)_o ; b_n^i = (\sigma_n^i)_o ; \\
 C_{ss}^{ij} &= \begin{cases} \Lambda_{ss}^{ij(1)} & j=1, N_1 \\ 0 & j=N_1+1, N \end{cases} \quad (4.3.6)
 \end{aligned}$$

De la même manière on aura les relations des autres coefficients d'influence  $C_{sn}^{ij}$ ,  $C_{ns}^{ij}$  et  $C_{nn}^{ij}$ .

Prenons le cas où l'élément  $i$  appartient à la portion libre de contour  $C_2$ . Si les déplacements  $u_s^{i(1)} = (u_s^i)_o$  et  $u_n^{i(1)} = (u_n^i)_o$  sont donnés à l'élément  $i$ , et d'après (4.3.3) et (4.3.4) on peut écrire:

$$\begin{aligned}
 b_s^i &= (\sigma_s^i)_o ; b_n^i = (\sigma_n^i)_o ; \\
 C_{ss}^{ij} &= \begin{cases} 0 & j=1, N_1 \\ B_{ss}^{ij(1)} & j=N_1+1, N \end{cases} \quad (4.3.7)
 \end{aligned}$$



Avec des relations similaires on peut exprimer les autres coefficients d'influence, combinons les deux conditions aux limites des deux milieux et faisons un simple arrangement des équations (4.3.6) et (4.3.7) pour obtenir un seul système.

En deuxième temps, considérons que l'élément  $i$  est situé sur la portion d'interface et posons qu'il appartient à  $C_1$ . On aura un élément  $i'$  opposé directement à  $i$  et appartient à l'autre contour  $C_2$ . On aura 4 conditions à vérifiées concernant les deux éléments face à face  $i$  et  $i'$ , deux conditions de continuité de contraintes et deux de déplacements.

Les conditions de continuité en contraintes sont:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_s^{[1]} - \dot{\sigma}_s^{[2]} &= 0 \\ \dot{\sigma}_n^{[1]} - \dot{\sigma}_n^{[2]} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

d'après (4.3.1) et (4.3.2) les quantités  $b_s^i$ ,  $b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij}$ ... etc, de l'équation (4.3.5) seront :

$$\begin{aligned} b_s^i &= \dot{\sigma}_s^{[1]} - \dot{\sigma}_s^{[2]} = 0 ; b_n^i = \dot{\sigma}_n^{[1]} - \dot{\sigma}_n^{[2]} = 0 \tag{4.3.9} \\ C_{ss}^{ij} &= \begin{cases} \dot{\Lambda}_{ss}^{ij} & j=1, N_1 \\ -\dot{\Lambda}_{ss}^{ij} & j=N_1+1, N \end{cases} \tag{4.3.10} \end{aligned}$$

Et identiquement pour les autres coefficients d'influence.

Pour les conditions de continuité en déplacement prenons  $i'$  sur  $C_2$  et  $i$  sur  $C_1$ , et on obtient les deux autres conditions :

$$\begin{aligned} \dot{u}_s^{[1]} + \dot{u}_s^{[2]} &= 0 \\ \dot{u}_n^{[1]} + \dot{u}_n^{[2]} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

En utilisant les équations (4.3.3) et (4.3.4) on peut écrire :

$$\begin{aligned} b_s^i &= \dot{u}_s^{[1]} + \dot{u}_s^{[2]} = 0 ; b_n^i = \dot{u}_n^{[1]} + \dot{u}_n^{[2]} = 0 \tag{4.3.12} \\ C_{ss}^{ij} &= \begin{cases} \dot{B}_{ss}^{ij} & j=1, N_1 \\ \dot{B}_{ss}^{ij} & j=N_1+1, N \end{cases} \tag{4.3.13} \end{aligned}$$

Pour les autres coefficients on utilise des relations similaires.

-Si on considère maintenant le cas ou le contact entre les deux milieux est un serrage (déplacement relatif normal non nul) les équations (4.3.11) deviennent:

$$\begin{aligned} \dot{u}_s^{[1]} + \dot{u}_s^{[2]} &= 0 \\ \dot{u}_n^{[1]} + \dot{u}_n^{[2]} &= -\delta_r \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

tel que  $\delta_r = \text{Serrage}$  en valeur absolue

*Remarque:* Ce cas se présente que dans les problèmes à interface fermée (par exemple les interfaces circulaires).

**4.4 Prise en compte de frottement entre les interfaces:** On peut facilement introduire le facteur frottement dans notre programme de calcul. Ceci n'est possible qu'après le calcul de toutes les contraintes dans l'interface, car on doit faire le test suivant appelé test de glissement pour chaque élément  $i$  de l'interface:

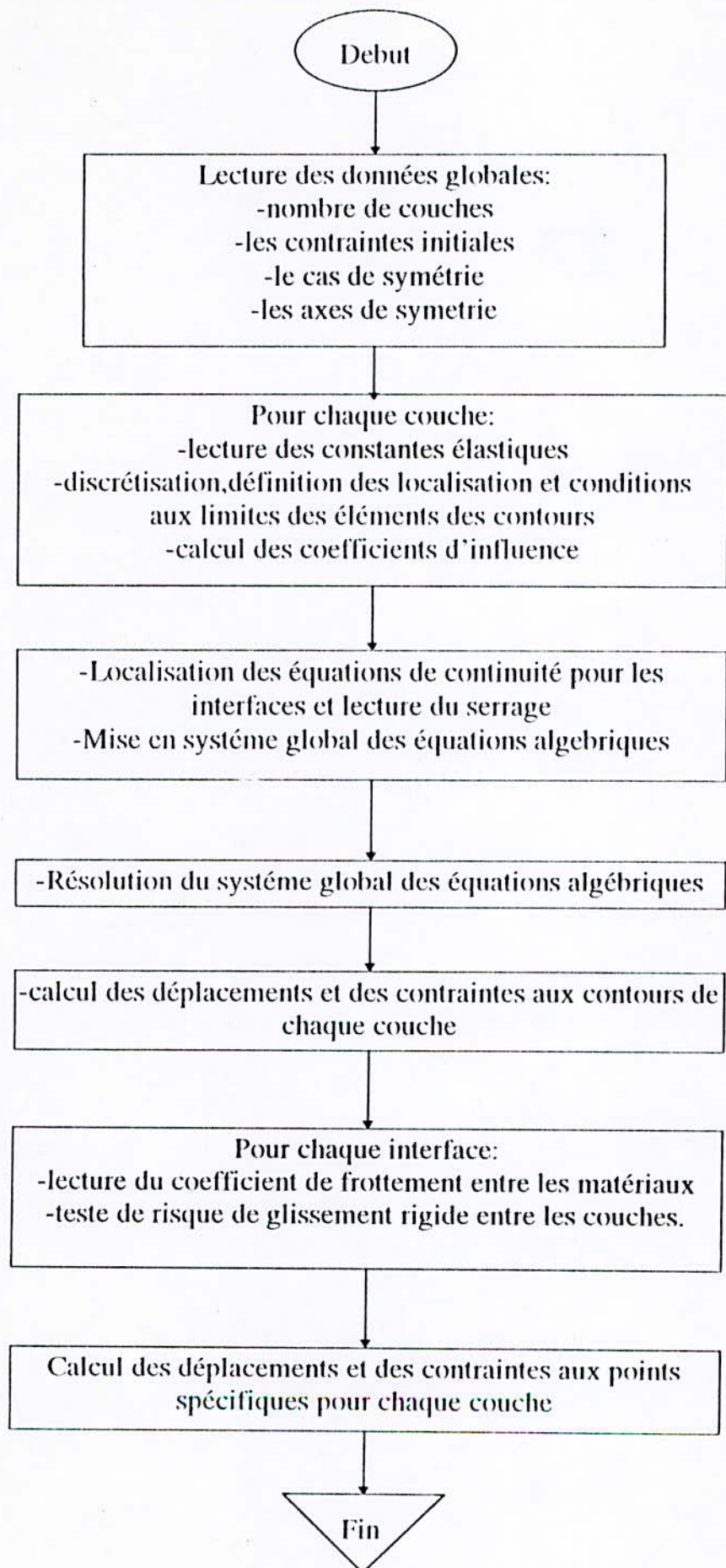
$$\sigma_s^i \leq f * \sigma_n^i \quad (4.4.1)$$

où  $f =$  Coefficient de frottement.

-Il suffit de choisir l'interface d'un seul matériau car on a une continuité de  $\sigma_s$  et  $\sigma_n$  dans l'interface.

On doit avoir au moins un élément de l'interface qui vérifie la condition (4.4.1) pour empêcher le glissement rigide entre les deux couches.

## 4.5 L'organigramme du programme réalisé :

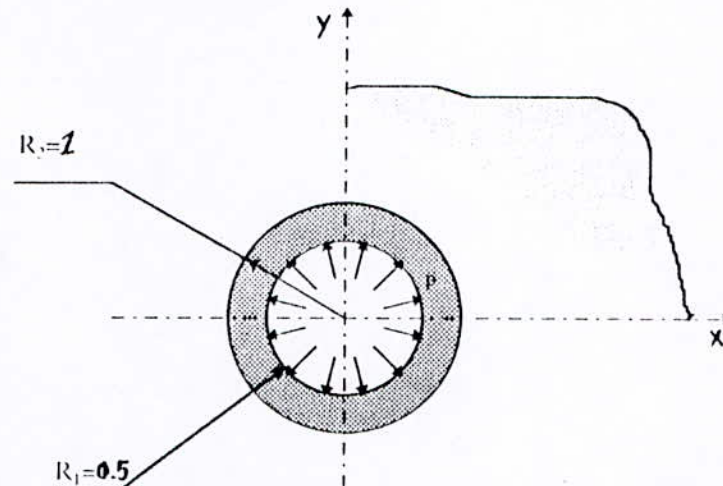


**CHAPITRE 5**

**EXEMPLES, RESULTATS  
ET INTERPRETATIONS**

**REMARQUE :** Les micro-ordinateurs utilisés dans la partie numérique sont un 80386DX40 et un 80486DX66 muni de coprocesseurs mathématiques. Le compilateur fortran utilisé est LAHEY (version 1990 ). Le temps d'exécution des exemples varie entre 5 et 10 minutes suivant la complexité du problème.

**5-1 TUBE FRETTE DANS UN MILIEU INFINI :** Ce problème traite l'influence du serrage, du rapport des caractéristiques mécaniques et du chargement à l'infini sur les valeurs des contraintes calculées sur l'axe des X.



*Figure 5.1.1. Tube fretté dans un milieu infini avec chargement radial (p)*

Les caractéristiques mécaniques de la deuxième couche sont :

$$\begin{aligned} E_1 &= .6 \text{ E5 kPA} \\ E_2 &= 1.2 \text{ E5 kPA} \\ \nu_{12} &= .036 \\ G_{12} &= .07 \text{ E5 kPA} \end{aligned}$$

Ces constantes sont données par S.G.LEKHINISKII 1963 ( HANDBOOK OF AIRPLANE CONSTRUCTION,VOLIII,"THE STABILITY OF AIRPLANE",T.S.AIG,1939 ) pour une planche de contre plaque.

La valeur du chargement est  $P=100 \text{ kPA}$

Pour résoudre ce problème on à considérer:

- Une double symétrie.
- Le nombre d'éléments qui subissent une pression normale est 33 avec une discrétisation de 6 éléments sur un angle de  $3.6^\circ$ .
- Le nombre éléments d'interface est 66 avec une discrétisation de 12 éléments sur un angle de  $3.6^\circ$ .

**5-1-1 PAS DE SERRAGE, NI DE CHARGEMENT A L'INFINIE :**

Les caractéristiques mécaniques de la première couche sont :

$$E_1 = 1.2 \text{ E5}$$

$$E_2 = 2.4 \text{ E5}$$

$$\nu_{12} = 0.036$$

$$G_{12} = 0.14 \text{ E5}$$

Ce sous exemple servira pour la comparaison avec les sous exemples qui suivent.

Les courbes obtenues sont représentées sur les figures (5-1-1-a) et (5-1-1-b):

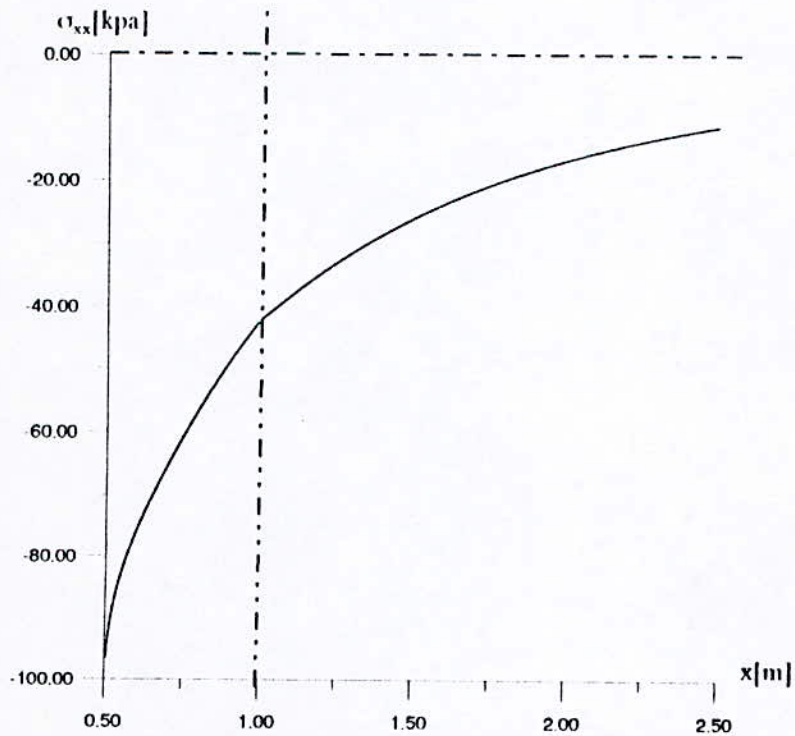


Figure 5.1.1.a : variation de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $x$

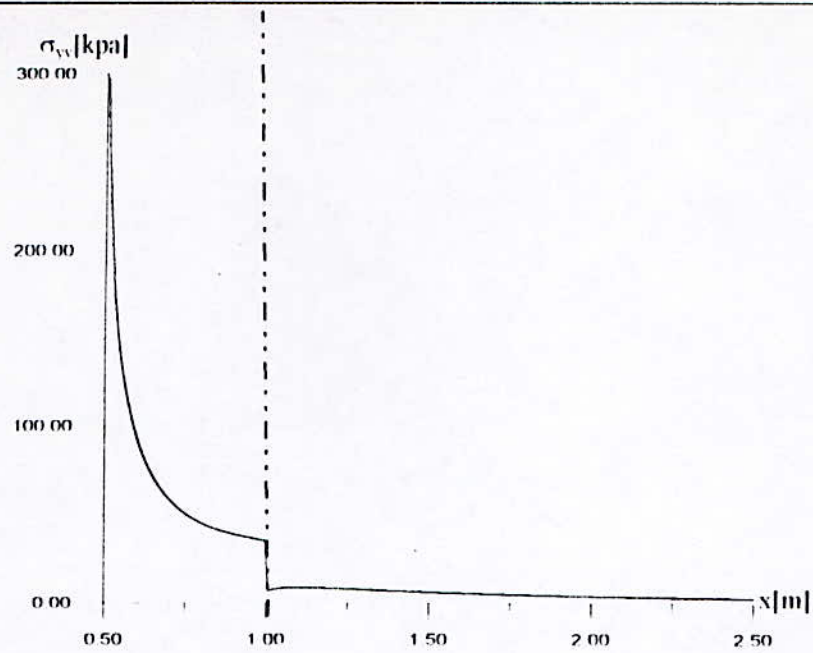


Figure 5.1.1.b: variation de  $\sigma_{yy}$  en fonction de  $x$ .

#### 5-1-2 INFLUENCE DU SERRAGE :

On prend un serrage  $\delta r = .25\text{mm}$

Les caractéristiques mécaniques de la première couche sont celles choisies dans (5-1-1), et le chargement à l'infinie est nulle.

On obtient les courbes suivantes (fig(5-1-2-a) et (5-1-2-b)):

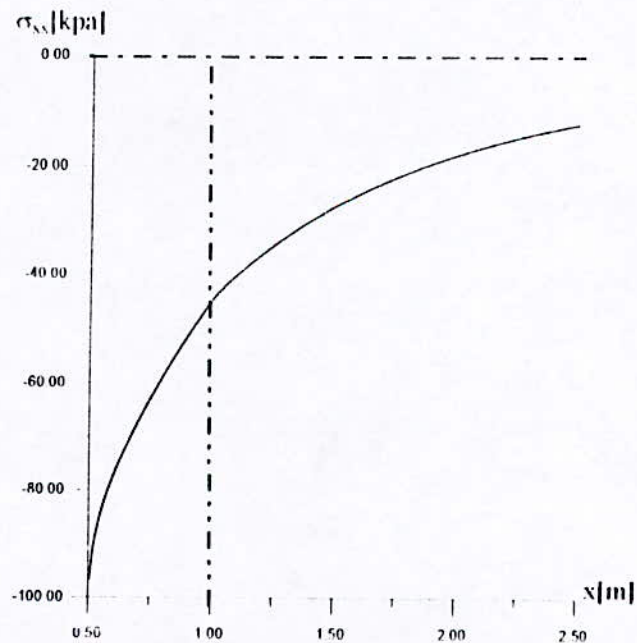


Figure 5.1.2.a : Variation de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $x$

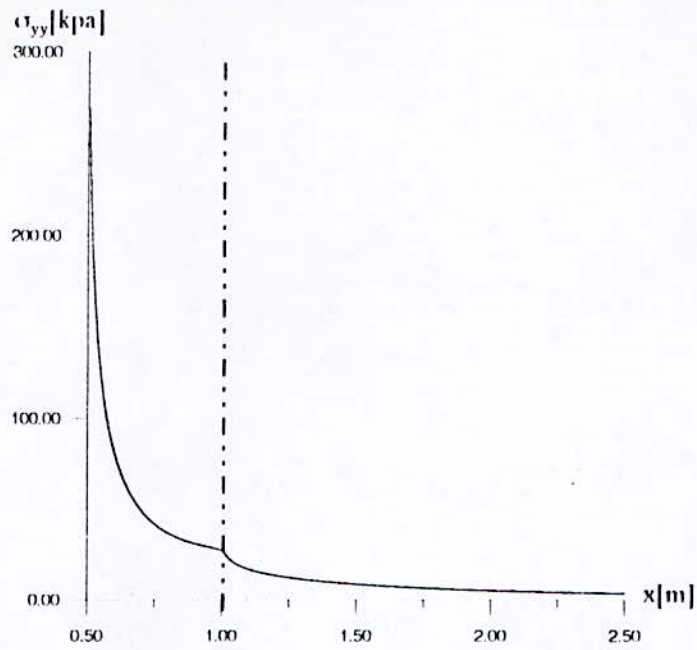


Figure 5.1.2.b: Variation de  $\sigma_{yy}$  en fonction de  $x$

**5-1-3 INFLUENCE DU RAPPORT DES CARRACTERISTIQUES MECANQUES :**

Le serrage et le chargement à l'infinie sont nulles .

Les caractéristiques mécaniques de la première couche sont :

$$\begin{aligned}
 E_1^1 &= 4E_1^2 \\
 E_2^1 &= 4E_2^2 \\
 \nu_{12}^1 &= \nu_{12}^2 \\
 G_{12}^1 &= 4G_{12}^2
 \end{aligned}$$

On obtient les courbes représentées dans les figures (5-1-3-a) et (5-1-3-b) :

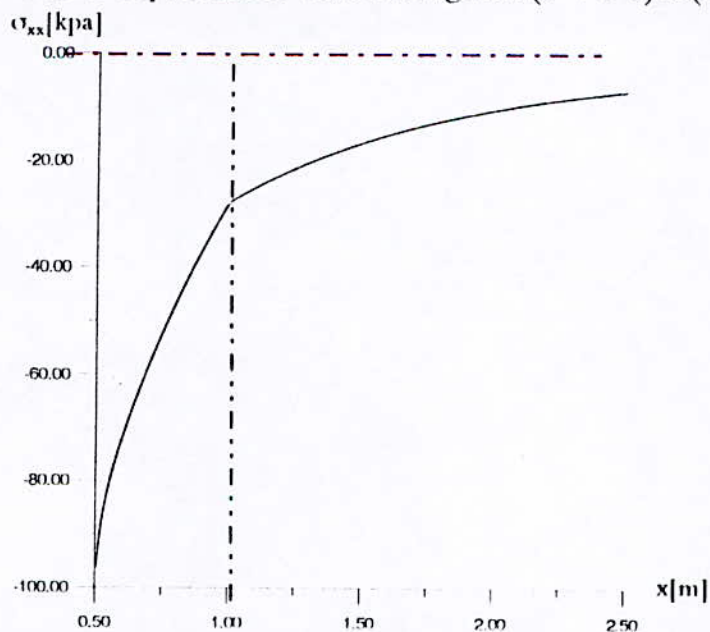


Figure 5.1.3.a: variation de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $x$ .



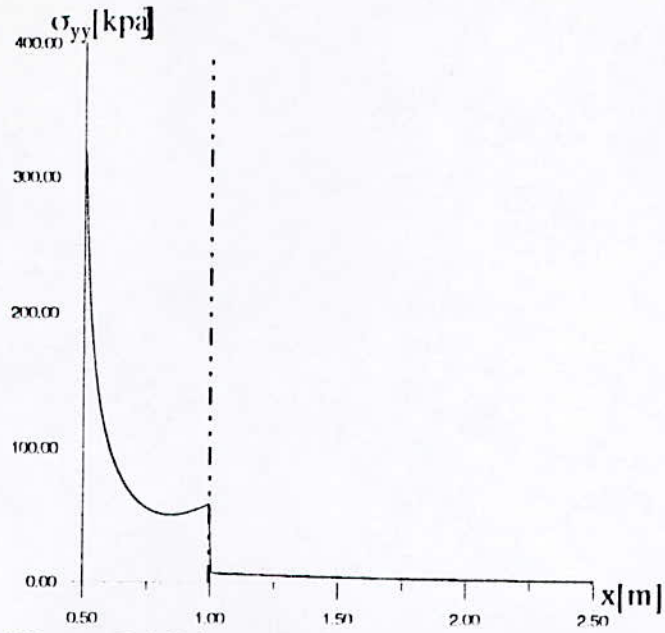


Figure 5.1.3.b: variation de  $\sigma_{yy}$  en fonction de  $x$ .

**5.1-4 INFLUENCE DU CHARGEMENT A L'INFINIE :**

On conserve les caractéristiques mécaniques de (5.1-1), et on prend un serrage nulle.

Le chargement a l'infinie est  $P_{xx}=100\text{kPa}$ .

On obtient les courbes représentées dans les figures (5.1-4-a) et (5.1-4-b) :

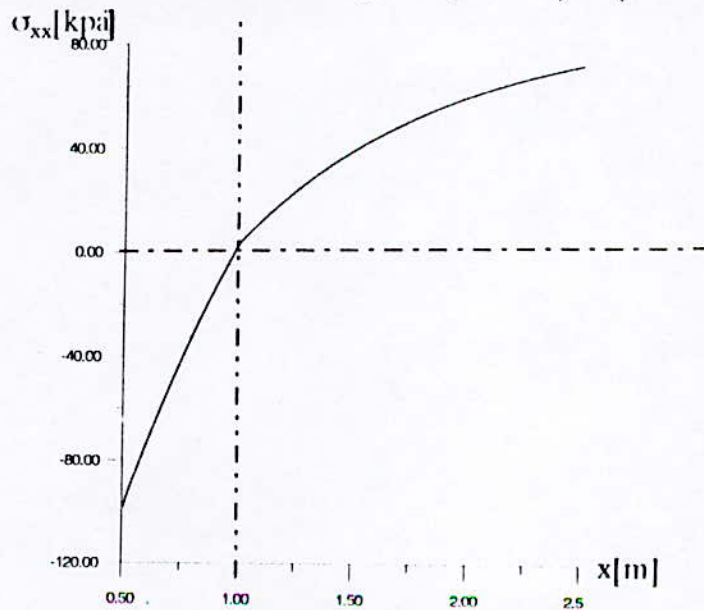


Figure 5.1.4.a: variation de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $x$ .

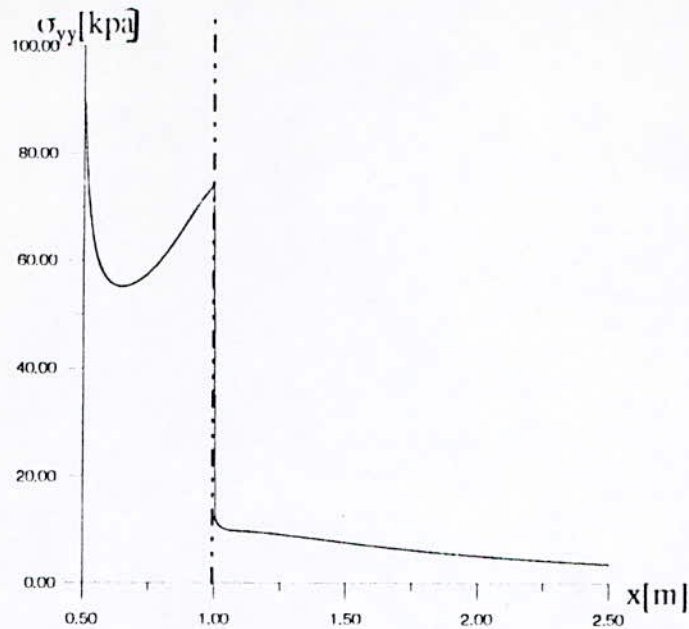


Figure 5.1.4.b: variation de  $\sigma_{yy}$  en fonction de  $x$ .

Pour tous les sous exemples, on remarque que les conditions aux limites sont conservées ( $\sigma_{xx} = -p$ ,  $x = 0.5m$ ) et qu'il y a continuité de  $\sigma_{xx}$  à l'interface (c.a.d  $x = 1m$ ) ce qui est prévisible à cause de l'équilibre sur l'interface.

On remarque pour les sous exemples (5.1-1),(5.1-2) et (5.1-3) que l'axe des  $X$  est une asymptote pour  $\sigma_{xx}$  du fait qu'il n'y a pas un chargement à l'infinie, mais pour le sous exemple (5.1-4)  $P_{xx}$  est l'asymptote de  $\sigma_{xx}$ . On peut en déduire que  $P_{xx}$  représente l'asymptote de  $\sigma_{xx}$ .

On remarque aussi pour les sous exemples (5.1-1),(5.1-3) et (5.1-4) qu'il y a une discontinuité de  $\sigma_{yy}$  qui est due à la discontinuité de matière et la différence de la rigidité des matériaux, mais il y a une valeur du serrage pour laquelle cette discontinuité est nulle (voir (5.1-2)).

On peut dire aussi d'après (5.1-3) que le rapport des caractéristiques mécaniques introduit une nouvelle courbure sur  $\sigma_{xx}$  due au changement des caractéristiques mécaniques de la première couche.

## 5.2 ESSAI BRESILIEN EN MULTICOUCHE :

Ce problème traite l'influence du serrage sur les contraintes sur l'axe des  $Y$  dans le cas d'un disque(1) emmanché dans un tube (2).

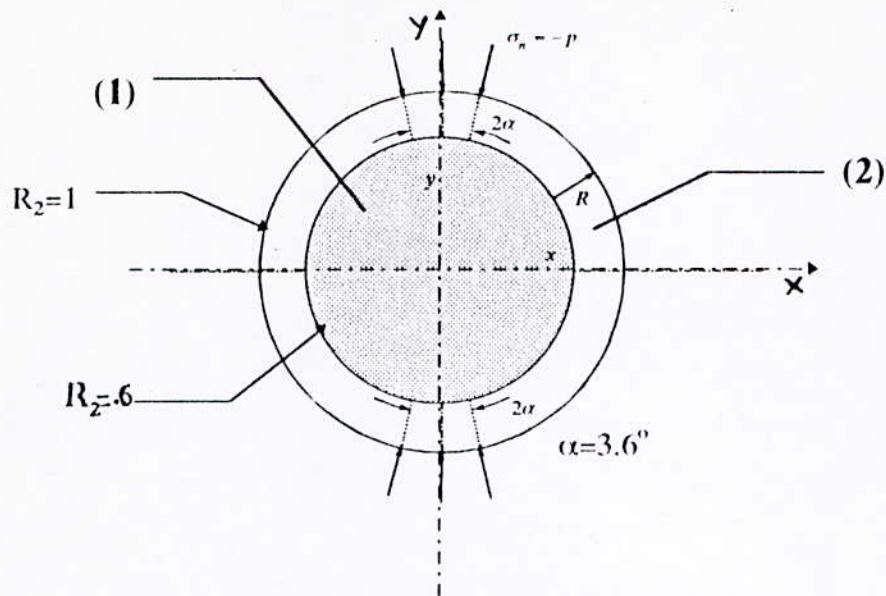


Figure 5.2 Essai brésilien en multicouche

Le matériau utilisé pour cet exemple est le même pour les deux couches, mais avec direction des fibres différentes.

Les caractéristiques mécaniques de la première couche sont:

$$\begin{aligned} E_1 &= 21 \text{ E6 kPA} \\ E_2 &= 1.7 \text{ E6 kPA} \\ \nu_{12} &= 0.21 \\ G_{12} &= 1.4 \text{ E6 kPA} \end{aligned}$$

Ces derniers paramètres sont celles du graphite-époxyde (M.D.SNYDER, T.A.CRUSE, 1974).

Les caractéristiques mécaniques de la deuxième couche sont:

$$\begin{aligned} E_1 &= 1.7 \text{ E6 kPA} \\ E_2 &= 21 \text{ E6 kPA} \\ \nu_{12} &= 0.017 \\ G_{12} &= 1.4 \text{ E6 kPA} \end{aligned}$$

La valeur du chargement est  $P=100 \text{ kPA}$

Pour résoudre ce problème on a à considérer:

- Une double symétrie.
- Le nombre d'éléments qui subissent une pression normale est 12.
- Le nombre d'éléments d'interface est 44 avec une discrétisation de 36 éléments sur un angle de  $86.4^\circ$ .

- Le nombre d'éléments libres est 43.
- trois serrages sont à considérer:
  - #  $\delta_r = 0$  mm
  - #  $\delta_r = 1$  mm
  - #  $\delta_r = 2$  mm

Les abaques (5.2-a) et (5.2-b) obtenus sont les suivants:

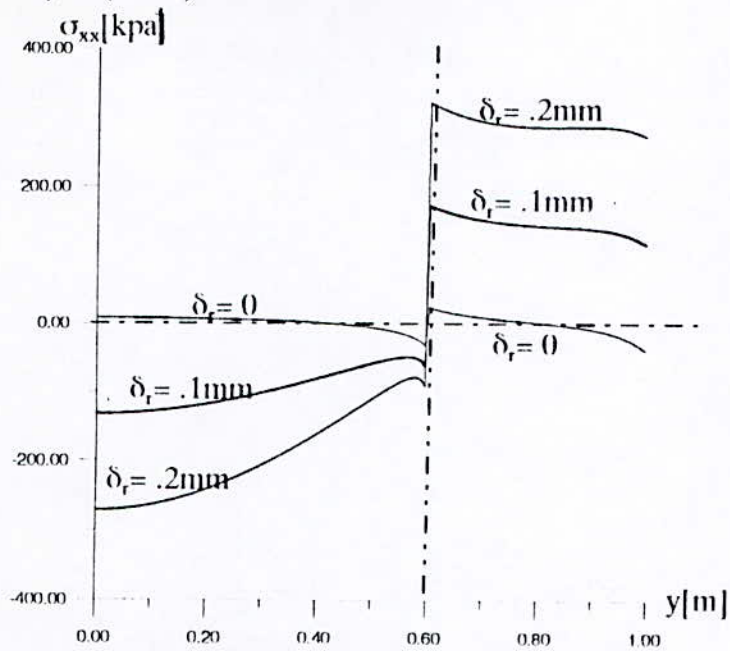


Figure 5.2.a: Variation de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $y$

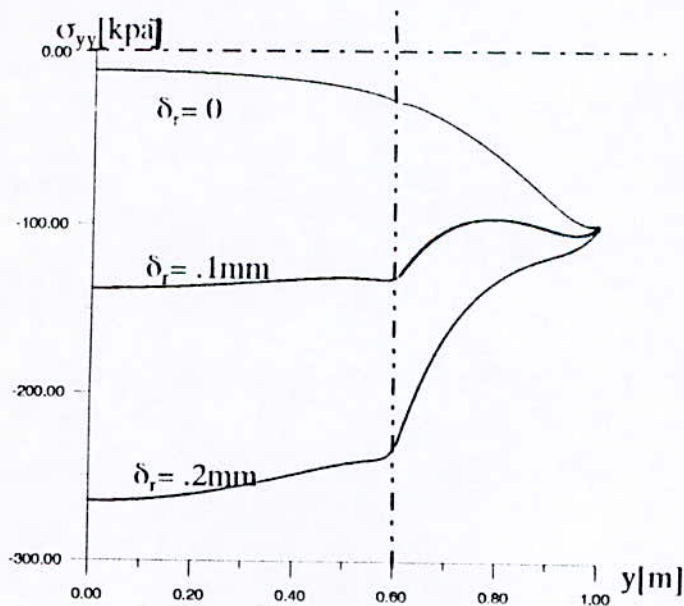


Figure 5.2.b: Variation de  $\sigma_{yy}$  en fonction de  $y$

On remarque qu'à chaque fois qu'on augmente le serrage, la valeur de  $\sigma_{xx}$  devient de plus en plus grande et positive et celle de  $\sigma_{yy}$  de plus en plus petite et négative. Cela

est previsible puisque le serrage conduit a une compression de la premiere couche et une traction de la deuxieme,tandisque  $\sigma_{yy}$  reste négative( compression ) avec des valeurs de plus en plus petite.

On remarque aussi la continuité de  $\sigma_{yy}$  a l'interface ( $y=.6m$ ) et que les conditions aux limites sont respectées ( $\sigma_{yy} = -P, y=1m$ ),et que  $\sigma_{xx}$  est discontinue a l'interface ( $y=.6m$ ) qui est due à la discontinuite de matiereet de la différence de rigidité entre les matériaux

**5.3 PROBLEME DE FISURATION:**

Dans cet exemple, nous allons calculer les contraintes qui agissent dans l'axe X pour pouvoir comparer l'effet de la géometrie des fissures sur le risque de fissuration. Pour cela on considère les deux problèmes representés sur le schéma suivant:

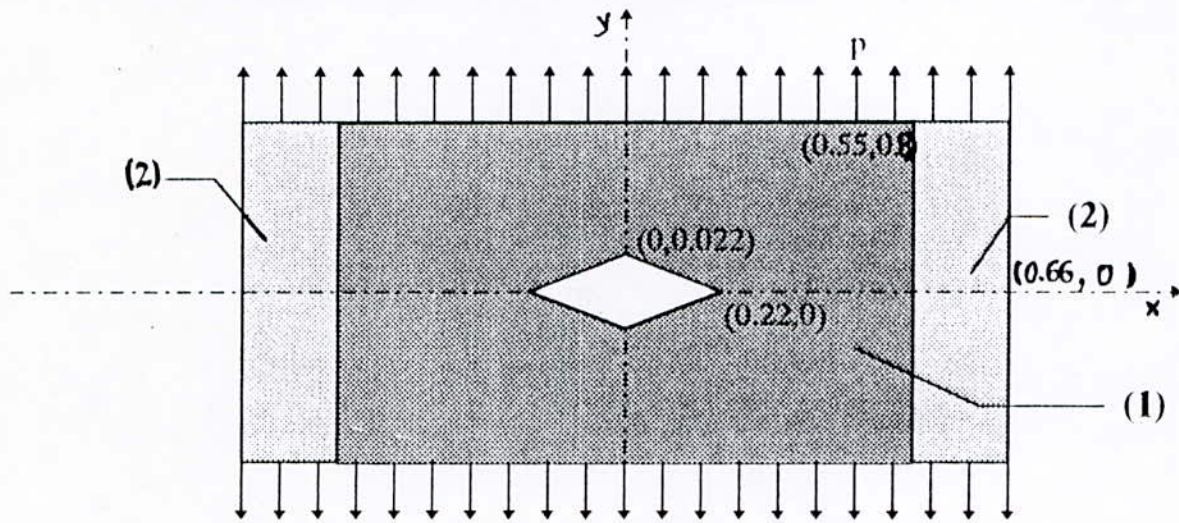


Figure 5.3.a: problème de plaque fissurée à tête aigüe

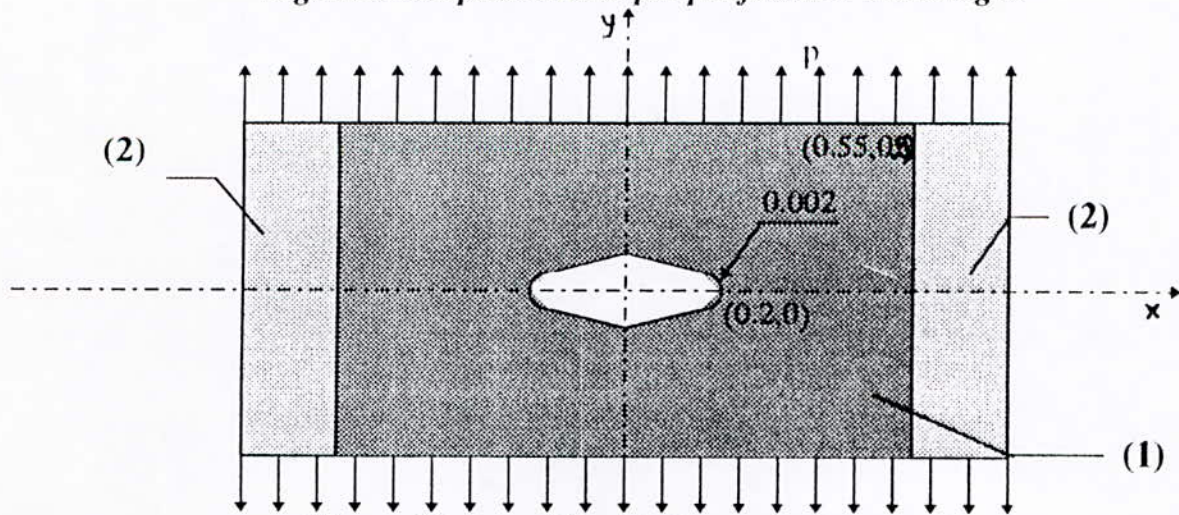


Figure 5.3.b: problème à fissure à tête arrondie

Les caractéristiques mécaniques de la première couche sont:

- $E_1=645 \text{ kPA}$
- $E_2=17000 \text{ kPA}$

$$\nu_{12} = .021$$

$$G_{12} = 870 \text{ kPA}$$

Ces constantes sont données par GREEN et TAYLOR 1945 (S.L.CROUCH 1983) pour une plaque de sapin.

Les caractéristiques mécaniques de la deuxième couche sont:

$$E_1 = 17000 \text{ kPA}$$

$$E_2 = 645 \text{ kPA}$$

$$\nu_{12} = .5535$$

$$G_{12} = 870 \text{ kPA}$$

La valeur du chargement est  $P = 100 \text{ kPA}$

Pour résoudre ce problème on a considéré:

- Une double symétrie.
- la fissure est discrétisée en 45 éléments ( dont 3 sont pour l'arc de cercle dans le cas de fissure avec arrondi ).
- Le nombre d'éléments sur la face chargée est 35 dont 15 éléments appartenant à la première couche.
- Le nombre d'éléments sur la face libre est 40.
- Le nombre d'éléments d'interface est 40.

On a obtenu les courbes représentées dans les figures (5.3-a) et (5.3-b) :

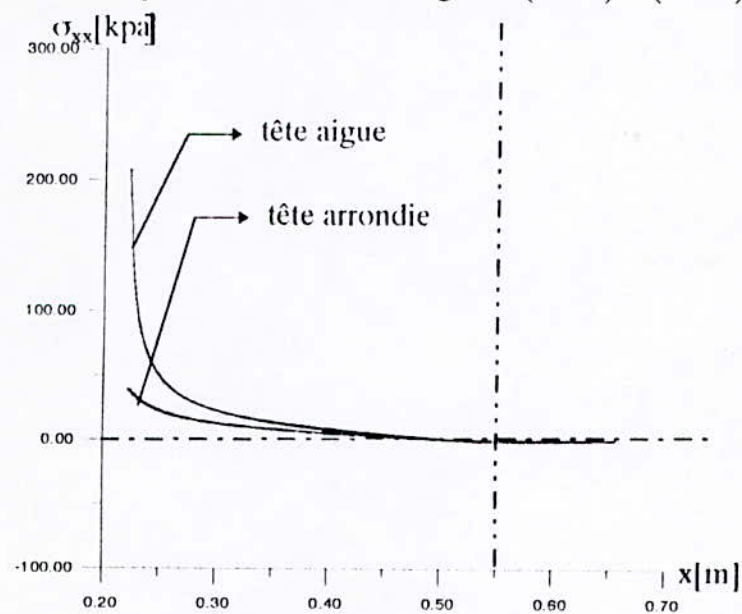


Figure 5.3.a: variation de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $x$

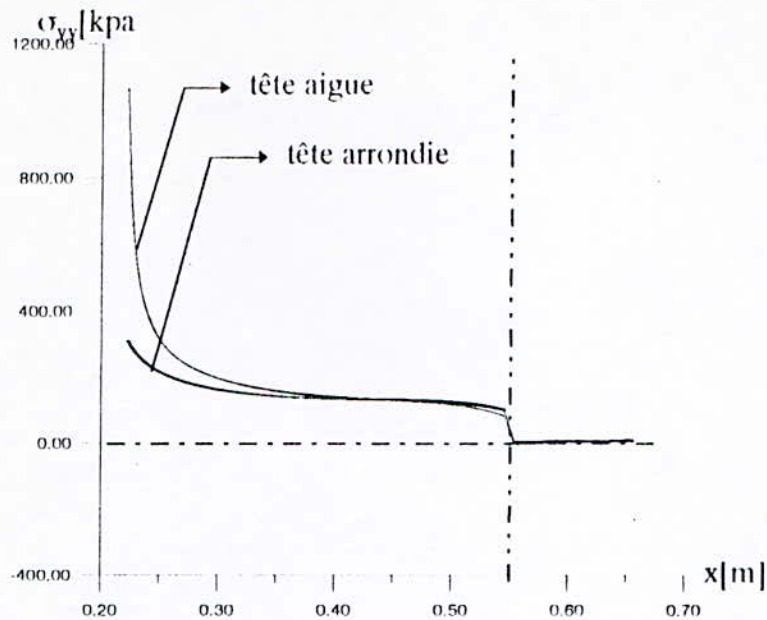


Figure 5.3.b:variation de  $\sigma_{yy}$  en fonction de  $x$

On remarque que  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  tendent vers l'infini en s'approchant de la tête de la fissure. Cependant, on remarque aussi que les contraintes dans le cas de la fissure à tête arrondie sont très petites devant celles de la fissure à tête aigue. Donc le risque de propagation de la fissure est plus grand pour la fissure à tête aigue. On peut aussi remarquer que les valeurs de  $\sigma_{yy}$  sont très supérieures aux valeurs de  $\sigma_{xx}$ . On peut en conclure que s'il y a fissuration, la fissure va se propager suivant l'axe des X.

On remarque une discontinuité de  $\sigma_{yy}$  à l'interface qui est due à la discontinuité de la matière et à la différence de rigidité des deux matériaux.

**5.4 EFFET D'UN NOEUD DANS UNE PLANCHIE DE SAPIN:** Pour pouvoir préciser les lieux les plus dangereux sur l'interface entre le noeud et la planche de sapin (voir schémas), nous allons calculer la contrainte  $\sigma_t$  sur l'interface, pour cela, on considère alors le schéma suivant:

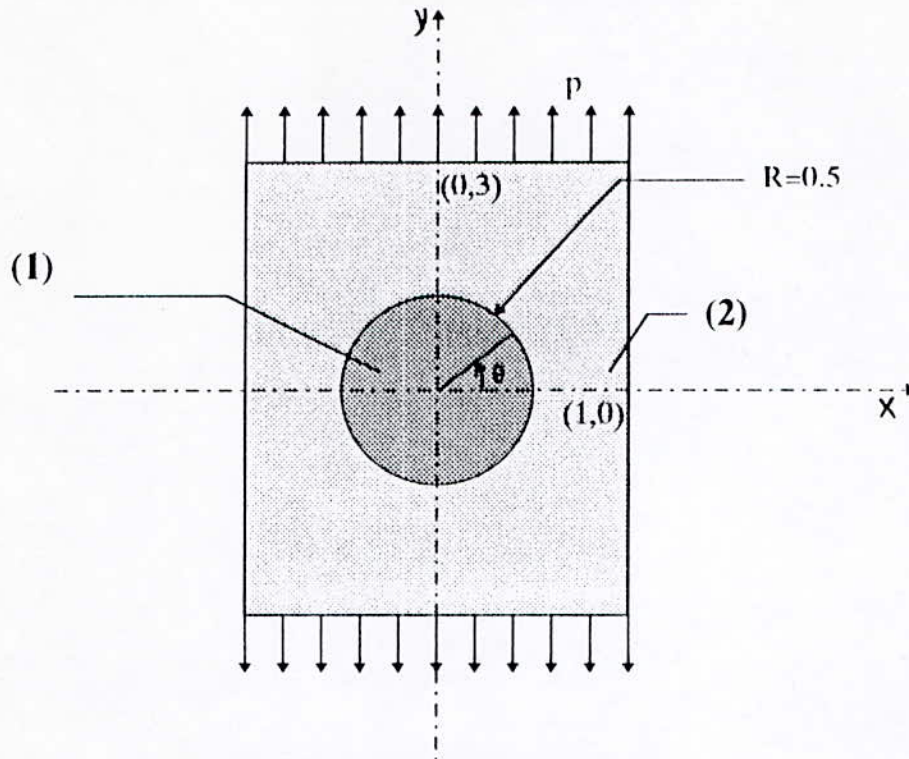


Figure 5.4: Planche de sapin avec noeud

Les caractéristiques mécaniques du noeud sont:

$$\begin{aligned} E_1 &= 6450 \text{ kPA} \\ E_2 &= 170000 \text{ kPA} \\ \nu_{12} &= .021 \\ G_{12} &= 8700 \text{ kPA} \end{aligned}$$

Et les caractéristiques mécaniques de la planche de sapin sont:

$$\begin{aligned} E_1 &= 645 \text{ kPA} \\ E_2 &= 17000 \text{ kPA} \\ \nu_{12} &= .021 \\ G_{12} &= 870 \text{ kPA} \end{aligned}$$

La valeur du chargement est  $P=100 \text{ kPA}$

Pour résoudre ce problème on a considéré:

- Une double symétrie.
- Le nombre d'éléments sur la face chargée est 22.
- Le nombre d'éléments sur la face libre est 45.
- Le nombre d'éléments d'interface est 33.

On a obtenu les courbes représentées dans la figure (5.4-1):



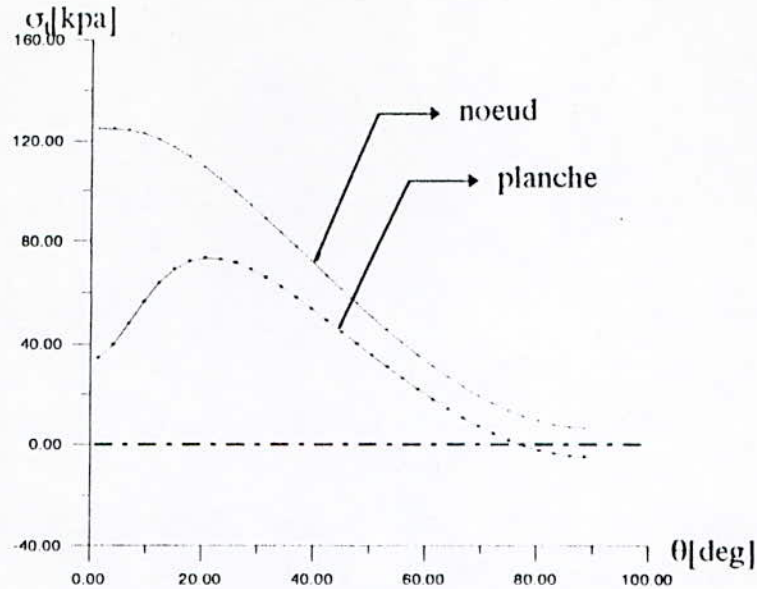


Figure 5.4.1: Variation de  $\sigma_t$  en fonction de  $\theta$

Pour le noeud, la distribution de la contrainte tangentielle ne s'annule pas et elle est décroissante dans l'intervalle  $\theta = 0$  à  $90^\circ$ . Sa valeur maximale  $\sigma_{t,max} = 215 \text{ kPa}$  à  $\theta = 1,36^\circ$ . Donc pour le noeud, ce point représente le point le plus exposé à la rupture.

Pour la planche, la contrainte tangentielle maximale est de  $73 \text{ kPa}$  à  $\theta = 20,45^\circ$ . C'est le point de la planche le plus exposé à la rupture. Il est à noter que la contrainte tangentielle s'annule pour  $\theta = 77^\circ$ .

### 5. 5 Plaque infinie percée frettée avec tube qui est chargé tangentiellement sur le contour :

Les paramètres physiques du tube sont:

$$\begin{aligned} E_1 &= 1.2 \text{ E5} \\ E_2 &= 0.6 \text{ E5} \\ \nu_{12} &= 0.071 \\ G_{12} &= 0.07 \text{ E5} \end{aligned}$$

Et les paramètres physique de la plaque sont:

$$\begin{aligned} E_1 &= 0.6 \text{ E5} \\ E_2 &= 0.3 \text{ E5} \\ \nu_{12} &= 0.071 \\ G_{12} &= 0.035 \text{ E5} \end{aligned}$$

La valeur de chargement est  $P_s = t = 10 \text{ kPa}$   
On veut montrer le risque de glissement .

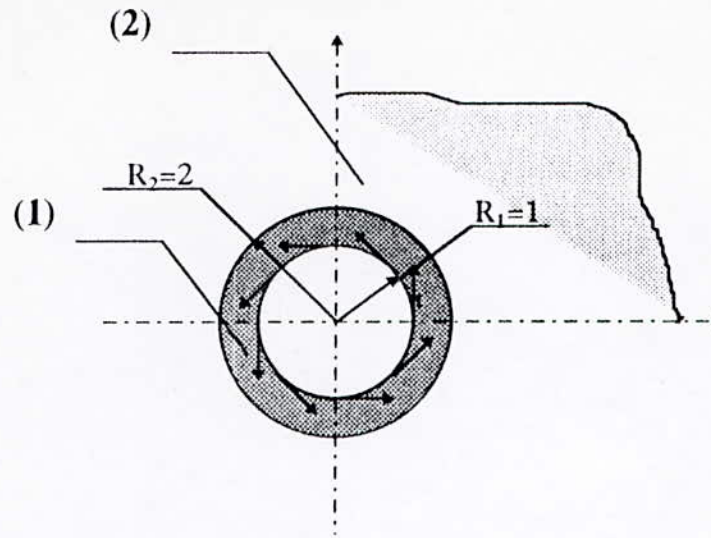


Figure 5.4: plaque infinie avec tube chargé tangentiellement.

$$P_s = t = 10 \text{ kPa}$$

On désire calculer les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  sur le segment limité par les points (1,0) et (5,0) de la figure ci-dessus, pour ce problème on n'a pas de symétrie. Pour qu'on puisse se rapprocher aux arcs de discrétisation, on doit raffiner le plus possible les portions de ces arcs qui sont près de segment de calcul [ (1,0) ; (5,0) ]. On va donc diviser le cercle intérieur du tube en trois arcs :

- Le 1<sup>er</sup> arc d'ouverture ( 0° à 5° ) est discrétisé en (20) éléments .
- Le 2<sup>ème</sup> arc d'ouverture ( 5° à 355° ) est discrétisé en ( 60) éléments .
- Le 3<sup>ème</sup> arc d'ouverture ( 355° à 360° ) est discrétisé en (20) éléments.

Pour l'interface on a considéré la discrétisation des deux matériaux suivante :

- L'arc ( 0° à 5° ) est divisé en (20) éléments .
- L'arc ( 5° à 355° ) est divisé en (60) éléments .
- L'arc ( 355° à 360° ) est divisé en (20) éléments .

En posant que le coefficient de frottement entre les deux matériaux est égale à 0,4 et après plusieurs essais, on trouve que le serrage qui assure l'empêchement du glissement rigide entre les deux matériaux est 0,6 mm. Pour ce serrage, on a obtenu les résultats regroupés sur le graphe suivant:

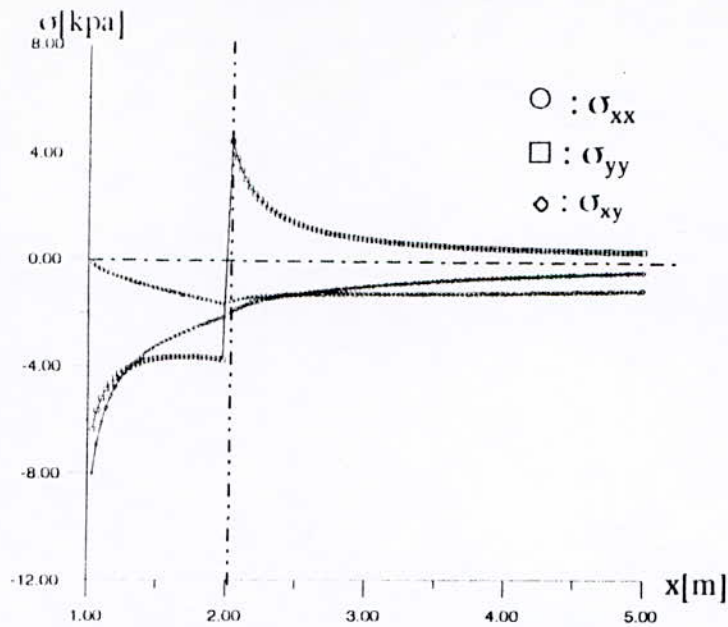


Figure 5.5.1: Variation de contraintes en fonction de x

D'après le graphe on voit que les conditions de continuité sur l'interface de  $\sigma_{xx}$  ( $\sigma_n$ ) et  $\sigma_{xy}$  ( $\sigma_s$ ) sont respectées tandis qu'on a une discontinuité de  $\sigma_{yy}$  qui subit une brusque variation de -4 kPa dans le 1er matériau à environ +4 kPa dans le 2ème matériaux.  $\sigma_{xx}$  atteint sa valeur maximale à l'interface. Par contre  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yy}$  atteignent leurs valeurs maximales à  $r=1m$  pour le 1er matériaux.

On constate aussi que toutes les contraintes tendent vers des valeurs nulles à l'infini.

**5.6. Influence du rapport  $r_{e1}/r_{e2}$  de deux anneaux concentriques encastrés à l'extérieur et chargés tangentiuellement à l'intérieur :**

Soit les deux anneaux circulaires illustrés sur la figure ci-dessous.

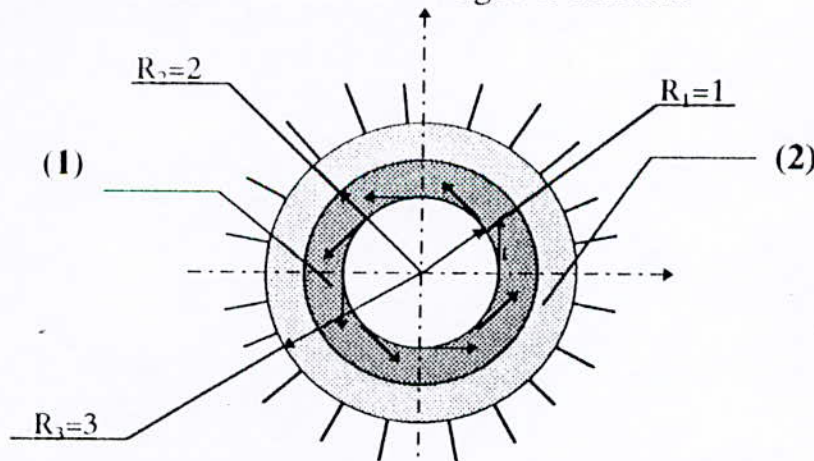


Figure 5.6: deux tubes concentriques chargés tangentiuellement par l'intérieur.

Le tube intérieur a les caractéristique suivantes :

- $E_1=1.2 E5$
- $E_2=0.6 E5$
- $\nu_{12}=0.071$
- $G_{12}=0.07 E5$

et le tube extérieur a les caractéristique suivantes:

$$E_1=0.6 \text{ E5}$$

$$E_2=0.3 \text{ E5}$$

$$\nu_{12}=0.071$$

$$G_{12}=0.035 \text{ E5}$$

Le chargement est  $P_s=t=10\text{kpa}$ .

a) On a commencer par prendre  $r_{e1}/r_{e2}=2/3$ . On suppose un coefficient de frottement entre les deux matériaux égale a 0,4 . Après plusieurs essais ,on trouve que le serrage qui empêche le glissement rigide entre les deux matériaux est 0,3 mm. Pour ce serrage, on a calculé  $\sigma_{xx},\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  sur l'axe des x .On a obtenu les resultats illustrés sur le graphe suivant:

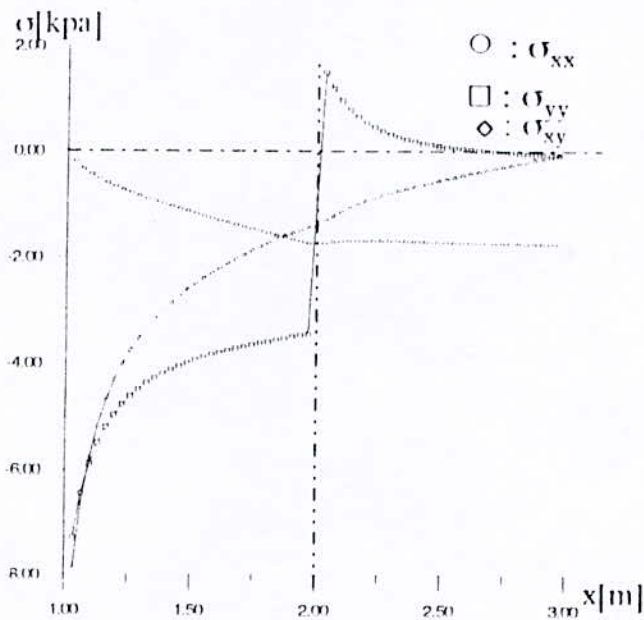


Figure 5.6.1:Variation des contraintes en fonction de x

D'après le graphe les conditions d'interface sont respectées ,  $\sigma_{xx}$  varie de zero à  $r=1\text{m}$  à -2kpa et à -1,9 au niveau de l'encastrement .

$\sigma_{xy}$  varie de sa valeur maximale de -7,88 kpa à  $r=1\text{m}$  à 1,48 kpa à l'interface et à une valeur nulle à  $r=3\text{m}$ .

$\sigma_{yy}$  varie de sa valeur maximale de -7,28 kpa à -3,50 kpa à  $r=2\text{m}$  pour le premier matériaux et une brusque variation à + 1,8 à  $r=2\text{m}$  pour le deuxième matériaux et tend vers zero à  $r=3\text{m}$ .

- b) Dans le deuxieme cas on prend le même problème mais avec  $r_{e1}/r_{e2}=1/5$ ., apres plusieurs essais on trouve que le serrage qui empêche le glissement rigide entre les deux tube est 0,5 mm , ce qui nous donne les resultats de graphe ci-dessous:

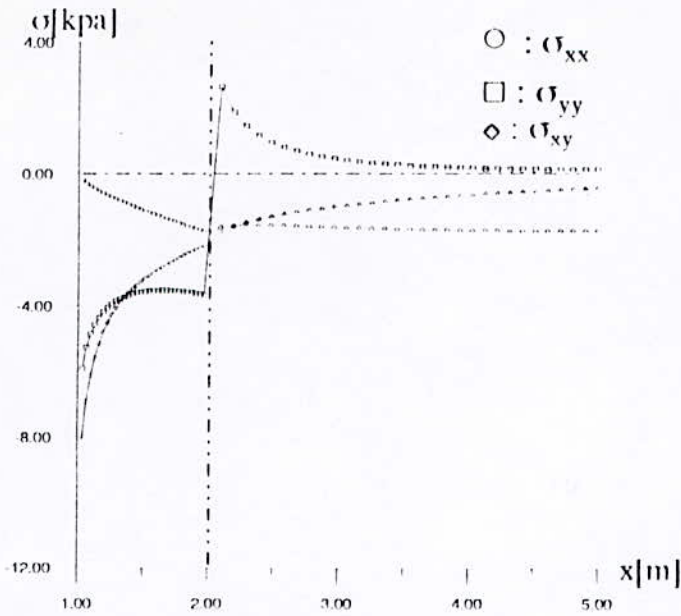


Figure 5.6.2 Variation des contraintes en fonction de  $x$

D'après le graphe on voit que la différence entre  $\sigma_{yy}$  des deux frontière d'interface a augmentée, et on constate que  $\sigma_{xx}$  reste toujours négative et atteint sa valeur maximale en compression dans l'interface,  $\sigma_{xy}$  varie de sa valeur maximale en valeur absolue jusqu'elle tende vers zéro en se rapprochant vers l'encastrement

c) Pour le cas où  $r_{c1}/r_{c2} = 1/10$  on trouve après plusieurs essais que le serrage qui empêche le glissement rigide entre les deux matériaux égale à 0,6 mm et d'après le paragraphe (c) on voit qu'on a pratiquement devant les même résultat trouvés dans l'exemple (5.5) en contraintes et en serrage.

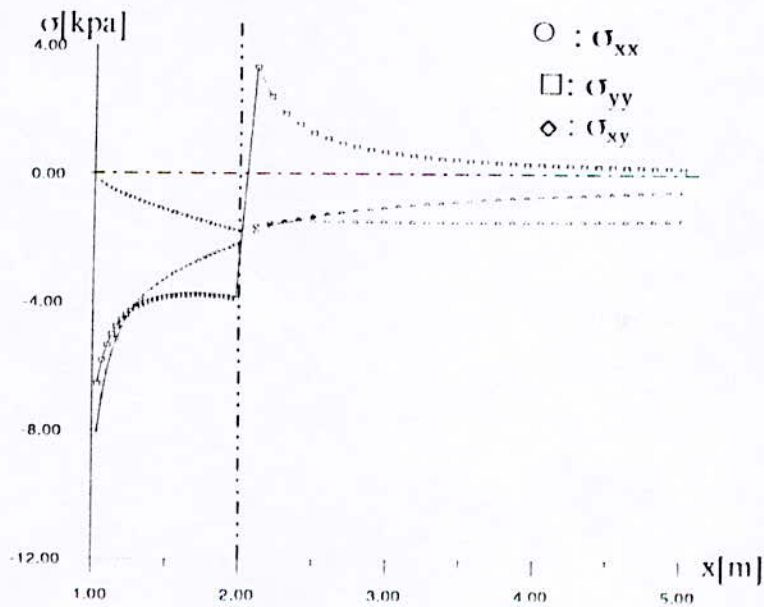


Figure 5.6.3: Variation des contraintes en fonction de  $x$

\* on constate qu'en augmentant le rapport  $r_{c1}/r_{c2}$  le serrage qui bloque la rotation solide entre les deux matériaux augmente.

**5.7. Plaque finie percée et composée de deux couches à fibres croisées :**  
Considérons la plaque présentée dans la Fig (5.7) avec deux couches de même nature mais à fibres croisées.

Les caractéristiques de première couche sont :

$$E_1 = 12 \text{ E4 kpa}$$

$$E_2 = 6 \text{ E4 kpa}$$

$$G_{12} = 0.7 \text{ E4 kpa}$$

$$\nu_{12} = 0.071$$

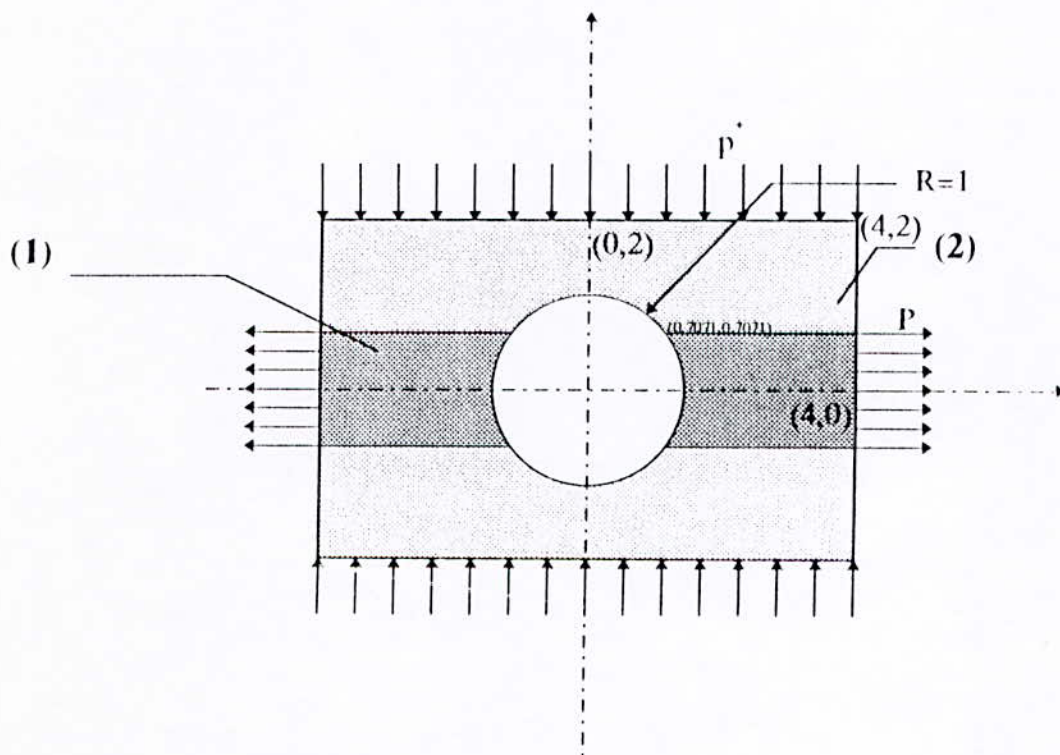
Et on aura par conséquent les caractéristiques de la deuxième couche :

$$E_1 = 6 \text{ E4}$$

$$E_2 = 12 \text{ E4}$$

$$G_{12} = 0.7 \text{ E4}$$

$$\nu_{12} = 0.0355$$

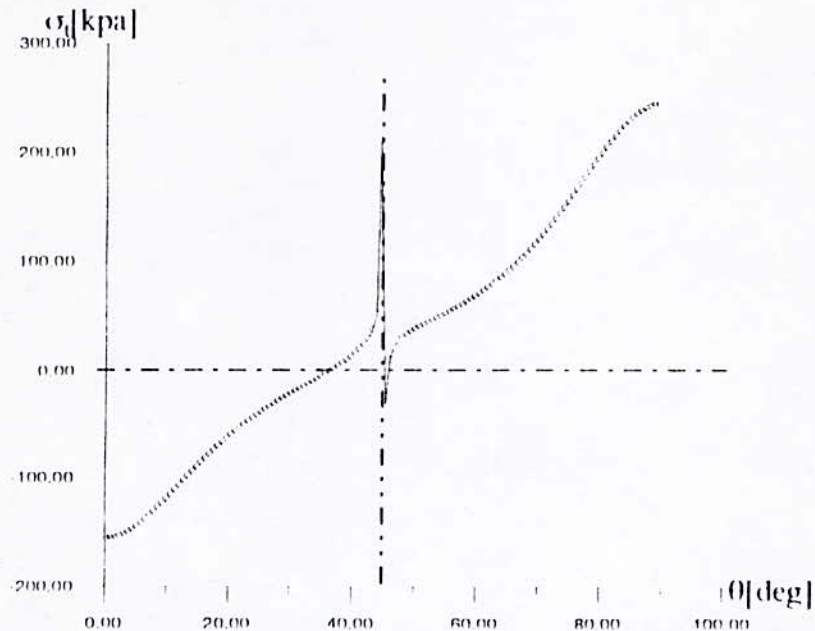


*Figure 5.7: Plaque finie percée et composée de deux matériaux*

Prenons la valeur de chargement  $P=100\text{kpa}$ . On désire trouver la valeur de chargement de compression  $P^*$  sur le segment  $[(0,2),(4,2)]$ , qui empêche le glissement rigide de la première couche.

Après plusieurs essais on a trouvé que  $P^* = -1.77 \text{ kpa}$ . Si pour un coefficient de frottement entre les deux couches est égale à 0.2. Donc on doit appliquer une pression

de -1.77kpa sur le segment supérieur de couche (2) pour empêcher le glissement de la couche (1). Dans ce cas les valeurs de  $\sigma_{00}$  sur le contour de perçage sont calculées et regroupées dans le graphique suivant:



*Figure 5.7.1 Variation de contrainte  $\sigma_0$  en fonction de  $\theta$*

D'après la figure (5.7.1),  $\sigma_{00}$  est discontinue à  $\theta = 45^\circ$ , c'est au niveau de l'interface entre les deux couches ce qui était prévisible.

Elle varie à l'interface de 211kpa en traction pour la première couche à -39kpa en compression pour la deuxième couche.

Elle atteint ses extrêmes à  $\theta = 0^\circ$  où elle est égale à -155kpa (compression), et à  $\theta = 90^\circ$  elle est égale à 249kpa (traction).

# CONCLUSION



Cette étude nous a permis d'apprendre quatre notions utiles pour l'ingénieur pour la résolution de certains problèmes pratiques :

- La première est la méthode des contraintes fictives qui est une méthode souple à utiliser.

- La deuxième discipline porte sur la théorie des milieux anisotropes .

- La troisième est la connaissance d'une méthode pratique pour la caractérisation des matériaux anisotropes en deux dimensions.

- La quatrième porte sur la connaissance des relations à utiliser pour les interfaces entre couches et les conditions de non-glissement entre ces derniers .

Nous avons pu grâce à ces acquis , de construire un code de calcul pour la modélisation des milieux élastiques anisotropes , homogènes et multicouches par utilisation de la méthode des contraintes fictives pour les problèmes plans et de présenter une méthode efficace et économique pour la caractérisation en deux dimensions des matériaux anisotropes .

Nous avons opté pour l'étude du champ de contraintes puisque cette grandeur (contrainte) reste une préoccupation majeure pour l'ingénieur pour le dimensionnement des pièces .

Nous avons pu grâce au code construit , de mettre en évidence l'influence de plusieurs paramètres sur les contraintes , tels que le rapport des modules d'élasticités ( modules de Young et celui de cisaillement ) , la valeur du serrage , le frottements aux interfaces, la valeur des contraintes à l'infinie ( dans le cas des milieux infinis ) , et de la forme des fissures . Un teste de non-glissement a été applique pour certains exemples pour le calcul du serrage et du chargement permettant l'équilibre des couches l'une par rapport à l'autre .

# **BIBLIOGRAPHIE**

H. BOUKRIA-R. DILMI: "Application de methode des contraintes fictives aux milieux anisotropes"

P.F.E promotion 1995.

G. CAIGNAERT-G.P. HENRY: "Exercices d'elasticite"

DUNOD UNIVERSITY, 1978.

S.L. CROUCH-A.M. STARFIELD: "Boundary element method in solid mechanics"

ALLEN et UNWIN, 1983.

T.A. CRUSE - M.D. SNYDER : " Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates".

INTERNATIONAL JOURNAL of FRACTURE, VOL. 1, N°2, Avril 1975 (P.315-328)

D. GAY: "Matériaux composites "

HERMES, 1991.

M. GHOUALI: "Modelisation par la discontinuite des déplacements des milieux multicouche elastique et viscoelastiques"

P.F.E promotion 1992.

R.M. JONES: "Mechanics of composite materials"

SCRIPTA BOOK COMPANY.

LAHEY COMPUTER SYSTEM, inc " Lahey Tools and Libraries Reference Manual".  
Juin 1990

S.G. LEKHNETSKI: "Theorie of elasticite of anisotropic elastique body"

HOLDEN DAY, INC, 1963.

TIMOSHENKO: "Theorie de l'elasticite"

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, CH. BERANGER

Annexe :

**CARACTERISATION  
EXPERIMENTALE DES  
MATERIAUX  
ANISOTROPES EN DEUX  
DIMENSIONS**

## A 1- INTRODUCTION

L'ingénieur mécanicien a besoin de connaître le comportement mécanique des matériaux utilisés pour fabriquer diverses pièces et structures. Se sont les essais mécaniques qui peuvent lui fournir ces données.

En effet, les calculs modernes fournissent un moyen de mieux comprendre le comportement des structures. Et s'étayant ainsi l'une sur l'autre, l'expérience et la théorie conduise à une maîtrise de plus en plus grande de la résistance mécanique des structures.

L'objet de ce chapitre est de présenter une méthode économique et efficace pour la caractérisation ( en deux dimensions ) d'un matériau anisotrope (Le matériau utilisé est le bois blanc).

## A 2-APPAREIL UTILISE:

L'appareil utilisé est un banc de flexion simple, qui se compose d'un système de fixation des éprouvettes (encastrement), d'un système composé d'un comparateur pour mesurer la flèche dans les points voulus, d'un système électrique qui peut à l'aide des jauges fixées sur les éprouvettes de mesurer les déformations et d'un crochet pour charger le dispositif avec des masses (voir fig A 2-1).

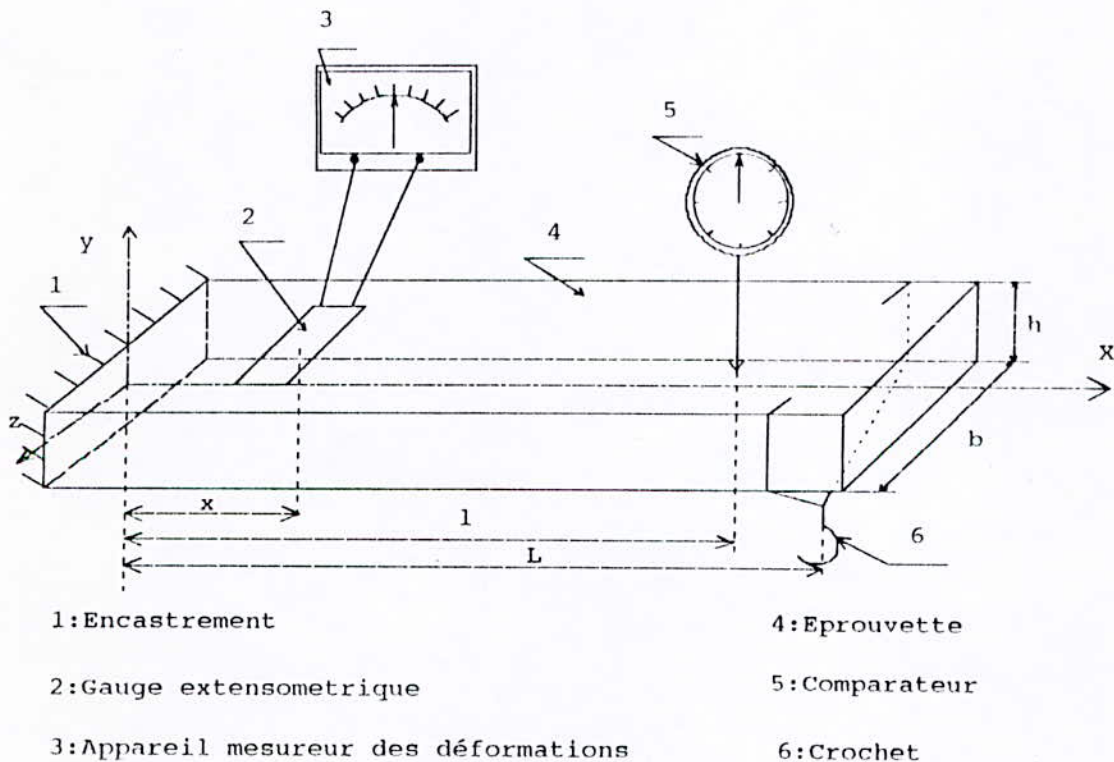


Fig A 2-1 Dispositif de mesure

Cependant, pour la caractérisation on a besoin d'avoir trois éprouvettes :

- une à fibres longitudinales : pour le calcul du module d'élasticité suivant la direction longitudinal noté  $E_1$  et du coefficient de Poisson noté  $\nu_{12}$ .

- Une à fibres transversales : pour le calcul du module d'élasticité suivant la direction transversale noté  $E_2$  .

- Une à fibres inclinés à  $45^\circ$  par rapport à la direction longitudinale de l'éprouvette: pour le calcul du module d'élasticité de la direction inclinée noté  $E_{45}$  et permettant ainsi la détermination du module de cisaillement .

Remarque: il est à remarquer que le mesurage des déformations n'est fait qu'une seule fois , donc on a utilisé qu'une jauge extensométrique fixée sur l'éprouvette à fibre transversale .

### A -3 CARACTÉRISATION DU BOIS BLANC :

#### A -3-1 Rappels théoriques :

Pour le cas de la figure ( A -2-1) , la flèche provoquée par une masse  $m$  est donnée

$$y = \frac{6g l^2 (L-l/3)}{E_x b h^3} . m \quad (\text{A -3-1-1})$$

La pente du graphe  $y = f(m)$  est donnée par :

$$\text{tg } \alpha_x = \frac{6g l^2 (L-l/3)}{E_x b h^3}$$

soit :

$$E_x = \frac{6g l^2 (L-l/3)}{\text{tg } \alpha_x b h^3} \quad (\text{A -3-1-2})$$

ou : Module d'élasticité suivant l'axe  $x$  .

La déformation transversale provoquée par une masse  $m$  est donnée par :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-6g (L-x) v_{12}}{E_x b h^2} . m \quad (\text{A -3-1-3})$$

et la pente du graphe  $\varepsilon_{zz}$  est :

$$\text{tg } \alpha_x = \frac{-6g (L-x) v_{12}}{E_x b h^2}$$

soit :

$$v_{12} = \frac{-\text{tg } \alpha_x E_x b h^2}{6g (L-x)} \quad (\text{A -3-1-4})$$

Le module de cisaillement peut être calculé en fonction de  $E_1$  ,  $E_2$  ,  $E_{45}$  et  $v_{12}$  par la relation ( Robert , M. Jones ( Mechanics of composite material ) p66) :

$$G_{12} = \frac{1}{(1/E_{45}) - (1/E_1) - (1/E_2) - (2v_{12}/E_1)} \quad (\text{A -3-1-5})$$

On peut facilement démontrer que la formule qui donne l'erreur sur le module de YOUNG est :

$$(\Delta E_x/E_x) = (\Delta y/y) + (\Delta b/b) + 3(\Delta h/h) + (\Delta m/m) + (\Delta g/g) + 2(\Delta l/l) + \frac{\Delta L + \Delta l/3}{(L-l/3)} \quad (\text{A-3-1-6})$$

Et celle de l'erreur sur le coefficient de Poisson est :

$$(\Delta \nu_{12}/\nu_{12}) = (\Delta \varepsilon/\varepsilon) + (\Delta E_x/E_x) + (\Delta b/b) + 2(\Delta h/h) + (\Delta m/m) + (\Delta g/g) + \frac{\Delta L + \Delta x}{(L-x)} \quad (\text{A-3-1-7}).$$

L'erreur sur le module d'élasticité est:

$$(\Delta G_{12}/G_{12}^2) = 4(\Delta E_{45}/E_{45}^2) + (\Delta E_1/E_1^2) + (\Delta E_2/E_2^2) + 2[(\Delta \nu_{12}/E_1) + \nu_{12}(\Delta E_1/E_1^2)] \quad (\text{A-3-1-8})$$

**Remarque :** L'indice  $x$  dans les formules précédentes peut être égale à 1,2 ou  $45^\circ$  suivant l'éprouvette utilisée (voir fig A-3-1-1).

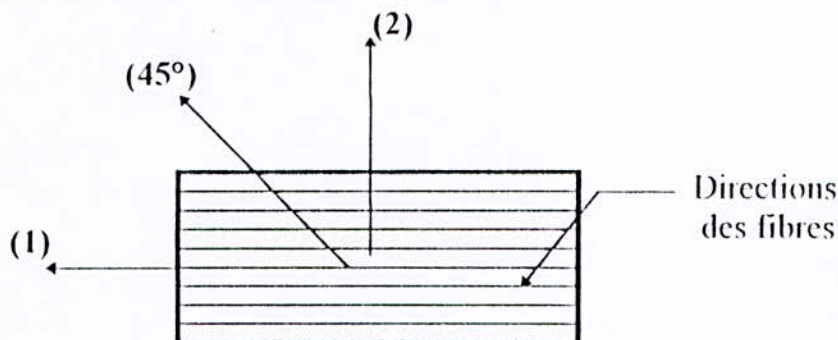


Fig A-3-1-1 : les différents sens d'orientation des fibres .

### A -3-2 :Caractéristiques géométriques des éprouvettes et du chargements:

Ces caractéristiques sont dressées dans le tableau suivant :

Eprouvette (indice)	h[m]	b[m]	L=l[m]	x[m]
1	$15,5 \cdot 10^{-3}$	$29,9 \cdot 10^{-3}$	$225 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-3}$
2	$15,9 \cdot 10^{-3}$	$29,6 \cdot 10^{-3}$	$150 \cdot 10^{-3}$	---
$45^\circ$	$16 \cdot 10^{-3}$	$29,8 \cdot 10^{-3}$	$150 \cdot 10^{-3}$	---

**Remarque :** dans les calculs des erreurs , on admettra que les valeurs des erreurs prises sont :

$\Delta \varepsilon_{xx} = 10^{-6}$  ( précision de l'appareil de mesure des déformations ).

$\Delta b = \Delta h = 10^{-4}$  m ( Mesuré par une pied à coulisse à 1/10 mm ).

$\Delta y = 10^{-5}$  m ( Mesuré par un comparateur à 1/100mm )

$\Delta m = \Delta g = \Delta l = \Delta L = 0$ .

Et on prendra comme référence la dernière expérience .

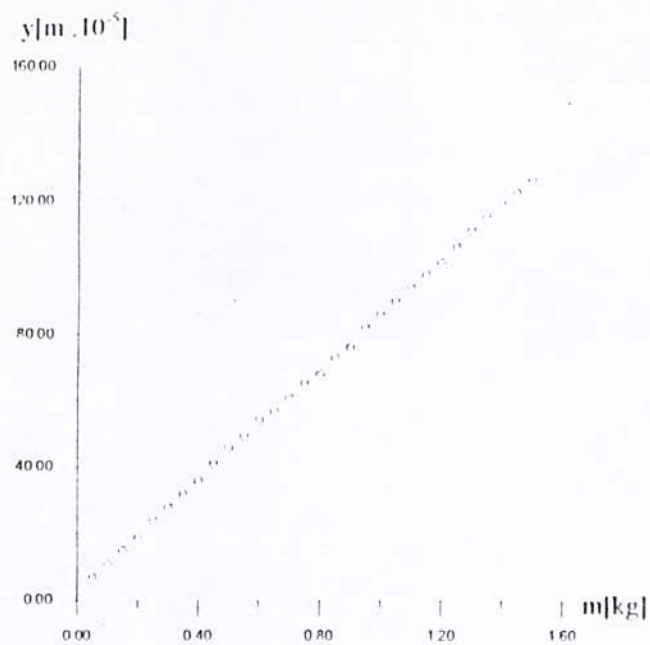
**A 3-3 Résultats , calcul des caractéristiques et des erreurs :****A 3-3-1 Eprouvette à fibres longitudinales :**

Les résultats obtenus sont donnés par le tableau suivant et par les graphes

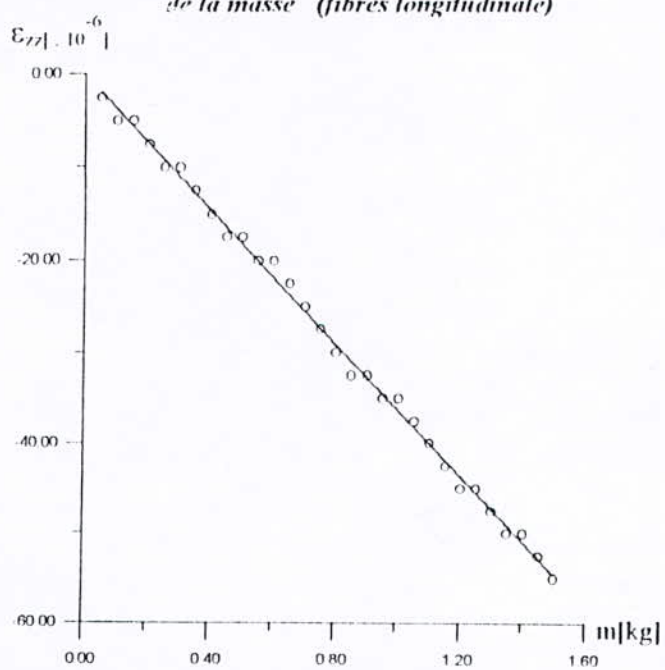
(A-3-3-1-1)et(A-3-3-1-2):

m[kg]	y[m]	$\epsilon_{xx}$
50*10 <sup>-3</sup>	7*10 <sup>-5</sup>	-2.5*10 <sup>-6</sup>
100*10 <sup>-3</sup>	11*10 <sup>-5</sup>	-5*10 <sup>-6</sup>
150*10 <sup>-3</sup>	15*10 <sup>-5</sup>	-5*10 <sup>-6</sup>
200*10 <sup>-3</sup>	19*10 <sup>-5</sup>	-7.5*10 <sup>-6</sup>
250*10 <sup>-3</sup>	24*10 <sup>-5</sup>	-10*10 <sup>-6</sup>
300*10 <sup>-3</sup>	28*10 <sup>-5</sup>	-10*10 <sup>-6</sup>
350*10 <sup>-3</sup>	32*10 <sup>-5</sup>	-12.5*10 <sup>-6</sup>
400*10 <sup>-3</sup>	36*10 <sup>-5</sup>	-15*10 <sup>-6</sup>
450*10 <sup>-3</sup>	41*10 <sup>-5</sup>	-17.5*10 <sup>-6</sup>
500*10 <sup>-3</sup>	46*10 <sup>-5</sup>	-17.5*10 <sup>-6</sup>
550*10 <sup>-3</sup>	49.5*10 <sup>-5</sup>	-20*10 <sup>-6</sup>
600*10 <sup>-3</sup>	54.5*10 <sup>-5</sup>	-20*10 <sup>-6</sup>
650*10 <sup>-3</sup>	57*10 <sup>-5</sup>	-22.5*10 <sup>-6</sup>
700*10 <sup>-3</sup>	61*10 <sup>-5</sup>	-25*10 <sup>-6</sup>
750*10 <sup>-3</sup>	65.5*10 <sup>-5</sup>	-27.5*10 <sup>-6</sup>
800*10 <sup>-3</sup>	68*10 <sup>-5</sup>	-30*10 <sup>-6</sup>
850*10 <sup>-3</sup>	73*10 <sup>-5</sup>	-32.5*10 <sup>-6</sup>
900*10 <sup>-3</sup>	76*10 <sup>-5</sup>	-32.5*10 <sup>-6</sup>
950*10 <sup>-3</sup>	82*10 <sup>-5</sup>	-35*10 <sup>-6</sup>
1000*10 <sup>-3</sup>	86*10 <sup>-5</sup>	-35*10 <sup>-6</sup>
1050*10 <sup>-3</sup>	90*10 <sup>-5</sup>	-37.5*10 <sup>-6</sup>
1100*10 <sup>-3</sup>	94*10 <sup>-5</sup>	-40*10 <sup>-6</sup>
1150*10 <sup>-3</sup>	98*10 <sup>-5</sup>	-42.5*10 <sup>-6</sup>
1200*10 <sup>-3</sup>	101.5*10 <sup>-5</sup>	-45*10 <sup>-6</sup>
1250*10 <sup>-3</sup>	106*10 <sup>-5</sup>	-45*10 <sup>-6</sup>
1300*10 <sup>-3</sup>	111*10 <sup>-5</sup>	-47.5*10 <sup>-6</sup>
1350*10 <sup>-3</sup>	115*10 <sup>-5</sup>	-50*10 <sup>-6</sup>
1400*10 <sup>-3</sup>	119*10 <sup>-5</sup>	-50*10 <sup>-6</sup>
1450*10 <sup>-3</sup>	122*10 <sup>-5</sup>	-52.5*10 <sup>-6</sup>
1500*10 <sup>-3</sup>	126*10 <sup>-5</sup>	-55*10 <sup>-6</sup>





*Fig A-3-1-1 Variation de la flèche en fonction de la masse (fibres longitudinale)*



*Fig A.3.1.2 :Variation de la deformation transversal en fonction de la masse (fibre longitudinale)*

a/ Calcul de  $E_1$  :

La droite qui passe par l'origine et qui approxime au mieux les points des graphes (A-3-3-1-1) est obtenue par la méthode des moindres carré est de pente :

$$\text{tg } \alpha_1 = 8.56034 * 10^{-4}$$

D'après (A-3-1-2) on a :

$$E_1 = \frac{6 * 9.81 (225 * 10^{-3})^2 (225 * 10^{-3} - 225 * 10^{-3} / 3)}{8.56634 * 10^{-4} * 29.9 * 10^{-3} * (15.5 * 10^{-3})^3}$$

soit:

$$E_1 = 4689421345 \text{ Pa}$$

D'après (A-3-1-6) on a:

$$\Delta E_1 = 4689421344.530 [10^{-1} / (29.9 * 10^{-3}) + (3 * 10^{-4}) / (15.5 * 10^{-3}) + 10^{-5} / (126 * 10^{-5})]$$

soit:

$$\Delta E_1 = 143664307 \text{ Pa}$$

d'ou:

$$E_1 = (4689421345 \pm 143664307) \text{ Pa}$$

b/ Calcul de  $v_{12}$ : on procède de la même façon on a alors :

$$\text{tg } \alpha_{12} = -3.64093 * 10^{-5}$$

D'après :(A-3-1-4) on a:

$$v_{12} = \frac{-3.64093 * 10^{-5} * 4689421344.530 * 29.9 * 10^{-3} (15.5 * 10^{-3})^2}{6 * 9.81 * (225 * 10^{-3} - 25 * 10^{-3})}$$

soit:

$$v_{12} = 0.01$$

D'après (A-3-1-6) on a:

$$\Delta v_{12} = 1.04188 * 10^{-2} [10^{-6} / (55 * 10^{-6}) + 143664306.910 / 4689421344.530 + 10^{-1} / (29.9 * 10^{-3}) + 2 * 10^{-1} / (15.5 * 10^{-3})]$$

soit:

$$\Delta v_{12} = 0.00$$

D'où :

$$v_{12} = 0.01 \pm 0.00$$

### A -3-3-2 :Eprouvette à fibres transversales :

Les résultats obtenus sont donnés par le tableau suivant et par le graphe (A-3-3-2-1)

m[kg]	y[m]
$50 \cdot 10^{-3}$	$32 \cdot 10^{-5}$
$100 \cdot 10^{-3}$	$59 \cdot 10^{-5}$
$150 \cdot 10^{-3}$	$92 \cdot 10^{-5}$
$200 \cdot 10^{-3}$	$129.5 \cdot 10^{-5}$
$250 \cdot 10^{-3}$	$161 \cdot 10^{-5}$
$300 \cdot 10^{-3}$	$187 \cdot 10^{-5}$
$350 \cdot 10^{-3}$	$212.5 \cdot 10^{-5}$
$400 \cdot 10^{-3}$	$265 \cdot 10^{-5}$
$450 \cdot 10^{-3}$	$289 \cdot 10^{-5}$
$500 \cdot 10^{-3}$	$324 \cdot 10^{-5}$

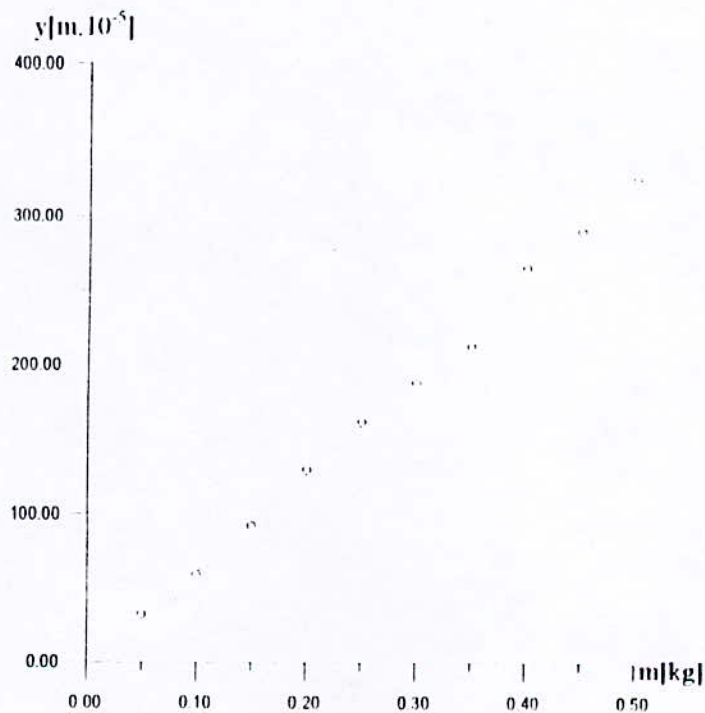


Fig A-3-3-2-1 :Variation de la flèche en fonction de la masse (fibres transversales)

a/Calcul de  $E_2$  :par la méthode des moindres carres , on trouve la pente qui approxime de mieux le graphe

(A-3-3-2-1) et qui passe par l'origine ,on a :

$$\lg \alpha_2 = 6.39974 * 10^{-3}$$

D'après (A-3-1-2) on a:

$$E_2 = \frac{6 * 9.81 (150 * 10^{-3})^2 (150 * 10^{-3} - 150 * 10^{-3} / 3)}{6.39974 * 10^{-3} * 29.6 * 10^{-3} * (15.9 * 10^{-3})^3}$$

soit:

$$E_2 = 173923138 \text{ Pa}$$

D'après (A-3-1-6) on a:

$$\Delta E_2 = 173923137.556. [10^{-1} / (29.6 * 10^{-3}) + (3 * 10^{-1}) / (15.9 * 10^{-3}) + 10^{-5} / (324 * 10^{-5})]$$

soit:

$$\Delta E_2 = 4405947 \text{ Pa}$$

D'où :

$$E_2 = (173923138 \pm 4405947) \text{ Pa}$$

### A-3-3-3: Eprouvette à fibres inclinées à 45° par rapport à l'axe x:

Les résultats obtenus sont donnés par le tableau suivant et par le graphe(A-3-3-3-1).

m[kg]	y[m]	m[kg]	y[m]
$50 * 10^{-3}$	$11 * 10^{-5}$	$550 * 10^{-3}$	$127.5 * 10^{-5}$
$100 * 10^{-3}$	$24 * 10^{-5}$	$600 * 10^{-3}$	$138 * 10^{-5}$
$150 * 10^{-3}$	$35.5 * 10^{-5}$	$650 * 10^{-3}$	$150 * 10^{-5}$
$200 * 10^{-3}$	$48 * 10^{-5}$	$700 * 10^{-3}$	$161 * 10^{-5}$
$250 * 10^{-3}$	$60 * 10^{-5}$	$750 * 10^{-3}$	$170 * 10^{-5}$
$300 * 10^{-3}$	$71.5 * 10^{-5}$	$800 * 10^{-3}$	$181 * 10^{-5}$
$350 * 10^{-3}$	$84 * 10^{-5}$	$850 * 10^{-3}$	$192 * 10^{-5}$
$400 * 10^{-3}$	$95 * 10^{-5}$	$900 * 10^{-3}$	$203 * 10^{-5}$
$450 * 10^{-3}$	$106 * 10^{-5}$	$950 * 10^{-3}$	$214 * 10^{-5}$
$500 * 10^{-3}$	$118.5 * 10^{-5}$	$1000 * 10^{-3}$	$226 * 10^{-5}$

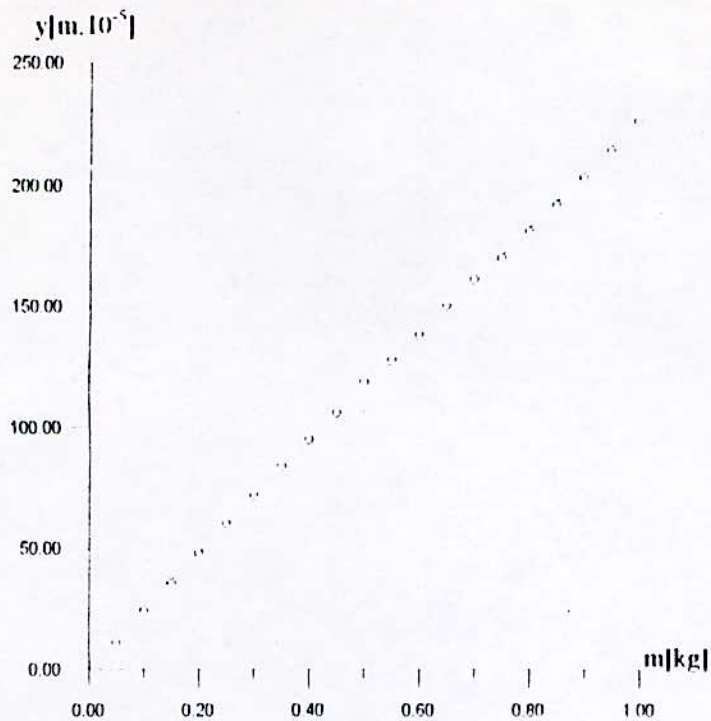


Fig A-3-3-1: Variation de la flèche en fonction de la masse (fibres inclinés à 45°)

a/ Calcul de  $E_{45}$  : on procède de la même façon on a alors :

$$\operatorname{tg} \alpha_{45} = 2.28474 \cdot 10^{-3}$$

D'après (A-3-1-2) on a :

$$E_{45} = \frac{6 \cdot 9.81 (150 \cdot 10^{-3})^2 (150 \cdot 10^{-3} - 150 \cdot 10^{-3} / 3)}{2.28474 \cdot 10^{-3} \cdot 29.6 \cdot 10^{-3} \cdot (16 \cdot 10^{-3})^3}$$

soit:

$$E_{45} = 474886451 \text{ Pa}$$

Et d'après (A-3-1-6) on a :

$$\Delta E_{45} = 474886450.767 [10^{-4} / (29.6 \cdot 10^{-3}) + (3 \cdot 10^{-4}) / (16 \cdot 10^{-3}) + 10^{-5} / (226 \cdot 10^{-5})]$$

soit:

$$\Delta E_{45} = 12598967 \text{ Pa}$$

• D'ou :

$$E_{45} = (474886451 \pm 12598967) \text{ Pa}$$

**A 3-3-4 Calcul des modules de cisaillement :**

D'après (A-3-1-5) on a:

$$G_{12} = \frac{1}{(4/474886450.767)-(1/4689421344.530)-(1/173923137.556)+ \frac{2*1.04118 * 10^{-2}}{4689421344.53}}$$

soit:

$$G_{12} = 405745766 \text{ Pa}$$

et d'après (A-3-1-6) on a:

$$\Delta G_{12} = (405745766.303)^2 \left[ \frac{4*12598967.127}{(474886450.767)^2} + \frac{143664306.010}{(4689421344.530)^2} + \frac{4405946.608}{(173923137.556)^2} + 2* \frac{0.0007*10^{-2}}{(4689421344.530)} + \frac{1.04188*10^{-2}*143664306.91}{(4689421344.53)^2} \right]$$

soit:

$$\Delta G_{12} = 61866958 \text{ Pa}$$

D'où :

$$G_{12} = (405745766 \pm 61866958) \text{ Pa}$$

**A-3-4 Conclusion:**

La méthode utilisée pour la caractérisation en deux dimensions d'un matériau anisotrope (bois blanc) est une bonne méthode car:

a/ Elle est rapide : puisque les mesures des flèches et des déformations sont immédiates

b/ Elle est économique : puisque on n'utilise qu'une seule jauge d'extensométrie, et un matériel disponible à l'école nationale polytechnique.

c/ Elle est précise : puisque on voit bien que l'erreur relative maximale est de 12% (dans le calcul du module de cisaillement).

• Les résultats de caractérisation peuvent être introduites dans le code de calcul développé pour faire une simulation. De plus, le problème de planches avec un noeud peut être pris en compte.