

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

6/96

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المركز الوطني المتعدد التخصصات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

GENIE MECANIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

CALCUL D'UN ECOULEMENT  
AUBE A AUBE PAR LA  
METHODE DES ELEMENTS FINIS

Proposé par ;

Mr M. BOUDJEMAA

Etudié par :

Mr A. CHAIB  
Mr C. KEZRANE

Dirigé par :

Mr M. BOUDJEMAA

PROMOTION

JUIN 1996

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

GENIE MECANIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

CALCUL D'UN ECOULEMENT  
AUBE A AUBE PAR LA  
METHODE DES ELEMENTS FINIS

Proposé par :

Mr M. BOUDJEMAA

Etudié par :

Mr A. CHAIB  
Mr C. KEZRANE

Dirigé par :

Mr M. BOUDJEMAA

PROMOTION

JUIN 1996

إلى والدي الكريمين  
إلى إخوتي الأعزاء، وإلى كل أفراد العائلة  
إلى كل الأحباب والأصدقاء.

- أهدى هذا العمل المتواضع -  
P. ERROUSSI

محمد الشيخ

إلى والدي العزيزين

إلى إخوتي وأحبابي

إلى جميع الأصدقاء

والزملاء

أهدى هذا العمل المتواضع

شعيب عبد العزيز

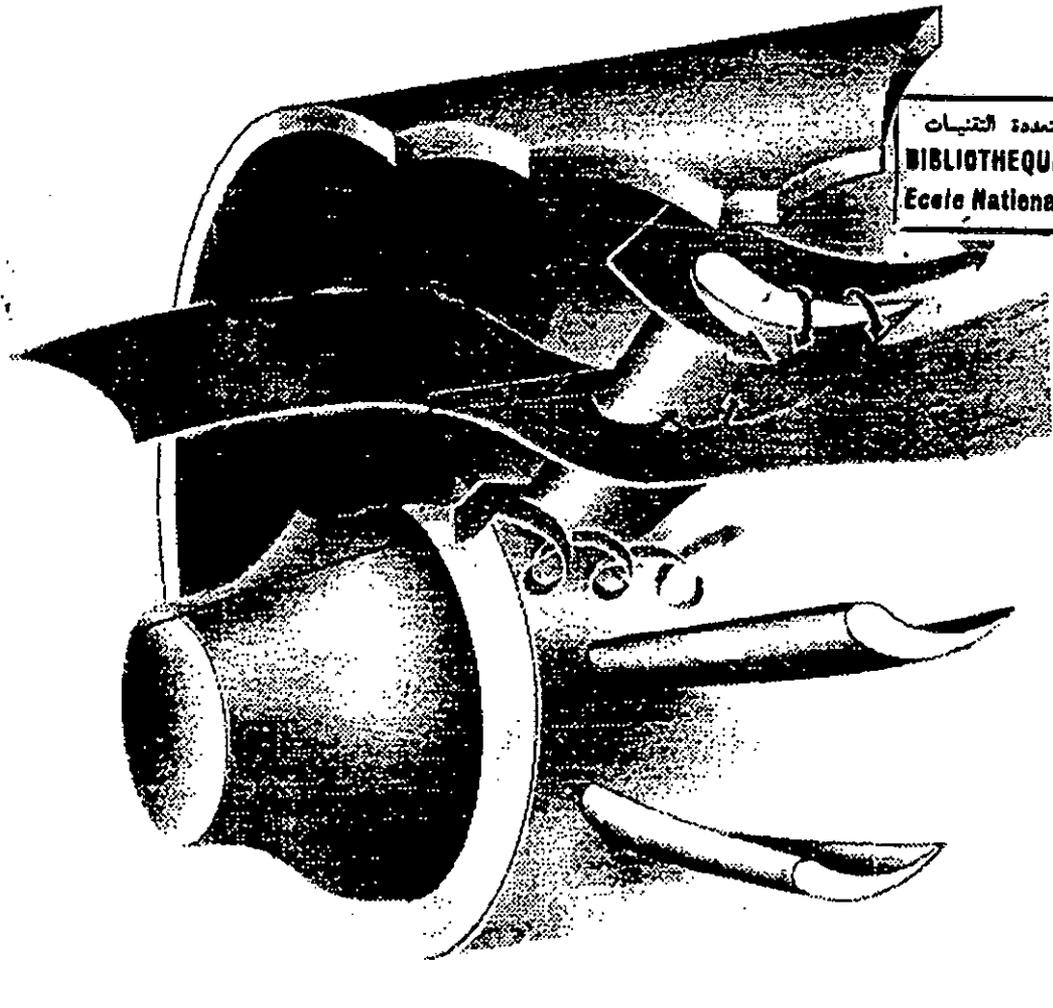
## REMERCIEMENTS

*Nous tenons à remercier notre promoteur M. M. BOUDJEMAA qui a dirigé ce travail. et qui a contribué efficacement par ses idées, sa disponibilité ses remarques pertinentes, a l'accomplissement de ce travail, nous le remercions vivement pour son appui moral dans les moments difficiles et pour les encouragements qu'il nous a prodigués.*

*Nous remercions également tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à notre formation et à cette thèse*

*Nous voudrions associer nos remerciements à toutes l'équipe de la bibliothèque, en particulier ami SALEH.*

*En fin nous remercions toutes les personnes que nous n'avons pas nommés mais qui ont contribué avec leurs conseils, leurs soutien moral, et leurs chaleureux encouragements.*



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

### ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة الإسياب الشبه ثلاثي البعد لمائع مثالي ( غير لزج)، قابل للضغط و مستقر في آلة تربينية مركزية، بإعتماد النموذج المقترح من طرف "C.H.WU" و بإستعمال طريقة العناصر المنتهية .

### ABSTRACT

*In this work we study a quasitridimensional flow of a perfect, compressible and steady fluid through a radial turbomachine adopting C.H.WU's subdivision and using the finite élément méthode .*

### RESUME

*Le but de ce travail est l'étude de m'écoulement quasitridimensionnel d'un fluide parfait, compressible et stationnaire a travers une roue d'une turbomachine centrifuge en adoptant la modélisation de « C.H.WU », et en utilisant la méthode des élément fini .*

## SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
<b>CHAPITRE I:</b>	
<b>MODELISATION DE L'ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL PAR LA METHODE DE C.H.WU</b>	
I.1 INTRODUCTION.....	3
I.2 HYPOTHESES .....	5
I.3 ETUDE DE L'COULEMENT TRIDIMENSIONNEL	
I.3.a ECOULEMENT MERIDIONAL(MOYEN).....	5
I.3.a.1 EQUATION DE CONTINUTE.....	5
I.3.a.2 EQUATION DU MOUVEMENT.....	6
I.3.a.3 EQUATION D'ENERGIE.....	7
I.3.a.4 INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT...9	
I.3.a.5 CONDITION AUX LIMITES.....	10
I.3.b ECOULEMENT AUBE A AUBE	
I.3.b.1 EQUATION DE CONTINUTE.....	12
I.3.b.2 EQUATION DU MOUVEMENT.....	14
I.3.b.3 CONDITION AUX LIMITES.....	14
I.3.b.4 CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKI.....	16
I.4 RECAPITULATION	
I.4.1 PLAN MERIDIONAL.....	17
I.4.2 PLAN AUBE A AUBE .....	17
I.5 CALCUL QUSITRIDIMENSIONNEL	
A° / LA VITESSE RELATIVE .....	18
B° / CALCUL DE LA DENSITE .....	20
C° / LE RAPPORT DE PRESSION .....	21
D° / LA VITESSE DU SON .....	21
E° / CALCUL DU NOMBRE DE MACH .....	22

## CHAPITRE II:

### FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II.1 INTRODUCTION .....	23
TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES.....	24
II.2.1 RESIDUS.....	24
II.2.2 FORMULATION INTEGRALE.....	25
FORME INTEGRALE FAIBLE.....	25
II.2.3 CHOIX DES FONCTIONS DE PONDERATION .....	26
II.2.4 CHOIX DE L'ELEMENT .....	27
II.2.4.1 PROPRIETE MATHEMATIQUE DE L'ELEMENT .....	28
II.2.4.2 SINGULARITE DE LA MATRICE JACOBIENNE .....	28
II.2.4.3 MAILAGE .....	2
II.3 FORMULATION DE LA METHODE PAR LA TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES	
II.3.a. PLAN MERIDIONALE .....	30
II.3.b. PLAN AUBE A AUBE .....	35
II.4 DISCRETISATION .....	38
II.4.a. PLAN MERIDIONAL .....	38
II.4.b. PLAN AUBE A AUBE .....	43
II.5 INTEGRATION NUMERIQUE .....	47
II.5.1. METHODE DE PRODUIT DE GAUSS.....	47
II.5.2. PRECISION DE L'INTEGRATION .....	47
II.6 METHODE DE RESOLUTION .....	49

## CHAPITRE III :

### RESULTATS NUMERIQUES

SCHEMA DE CALCUL .....	50
PRESENTATION DES RESULTATS OBTENUS .....	53

## CONCLUSION GENERALE

## ANNEXES

ANNEXE A

ANNEXE B

## BIBLIOGRAPHIE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

## INTRODUCTION

Devant la complexité de l'étude d'un écoulement réel dans une turbomachine, vu la nature tridimensionnelle, instationnaire et visqueuse, de l'écoulement, les ingénieurs chargés d'appliquer les connaissances de la mécanique des fluides à l'étude de ces machines se voient contraints de recourir à des approximations conçues de façon suffisamment simples, mais conservant cependant un caractère physique acceptable.

La description de l'écoulement dans une turbomachine se fait le plus souvent par superposition des solutions de problèmes classiques d'écoulement moyen et de grille d'aubes. Cette description est portée essentiellement sur le modèle de *C.H.WU* (modèle des surfaces S1-S2) qui consiste en la décomposition fictive de l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels et sur deux familles de surfaces orthogonales à savoir :

- Écoulement moyen ou méridional.*
- Écoulement aube à aube ou à équilibre radial.*

Le but du présent travail est l'élaboration d'une formulation en éléments finis qui permet de modéliser l'écoulement d'un fluide compressible à travers la roue d'une turbomachine centrifuge. L'étude de l'écoulement quasi-tridimensionnel permet de fournir des informations aéro et thermodynamiques du fluide en chaque point de la roue de la turbomachine.

Dans le présent travail l'étude de l'écoulement à travers une turbomachine a été abordé en effectuant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Régime stationnaire.
- Fluide parfait .
- Ecoulement isentropique.
- axisymétrie des surface de courant.

Nous avons structuré ce travail en trois parties essentielles :

Première partie : Etablissement du modèle mathématique qui régit l'écoulement (en utilisant la méthode de *C.H.WU*).

Dexième partie : Formulation du problème par la méthode des éléments finis (en utilisant l'approche résiduelle de *GALERKINE*).

Troisième partie : Dans cette partie on présentera les différents cas testés et les résultats numériques obtenus .

# CHAPITRE I

MODELISATION DE L'ECOULEMENT  
TRIDIMENSIONNEL PAR LA METHODE

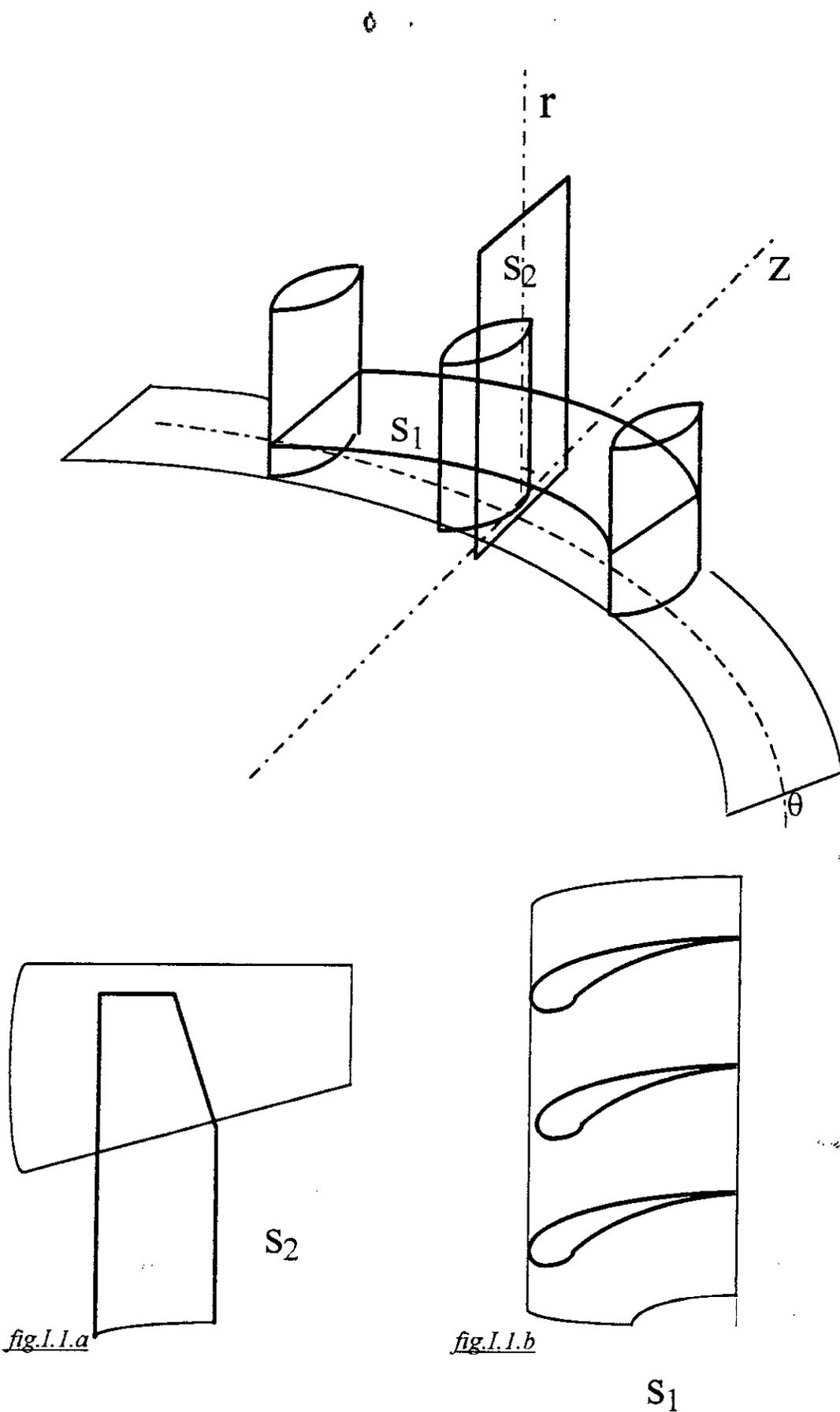
DE C.H.WU

# I. MODELISATION DE L'ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL PAR LA METHODE DE C.H. WU

## I.1. INTRODUCTION :

La modélisation adoptée dans ce travail est celle de C.H.WU, qui se base sur la décomposition de l'écoulement en deux écoulements bidimensionnels :

- Un écoulement qualifié de "*moyen*" ( *through flow* ), dont la principale caractéristique est d'être à symétrie axiale, c'est-à-dire qu'il admet une famille de surfaces de courant de révolution (*S2*). (voir fig.I.1.a).
- Un écoulement de "*grille*" ( *blade to blade* ), dont la surface de courant (*S1*) est décrite dans la roue par l'ensemble des particules fluides se trouvant sur un cercle concentrique à l'axe de la machine.(voir fig.I.1.b).



Modèle des surfaces  $S_1$ - $S_2$

## I.2. HYPOTHESES :

- ①. Fluide parfait : les forces de viscosité sont considérées nulles ( $\mu=0$ ).
- ②. Ecoulement stationnaire : la variation de toute grandeur dans le temps est nulle ( $\partial/\partial t=0$ ).

Les équations de départ sont les équations de conservation de la masse et de l'énergie, l'équation d'état de gaz et l'équation d'évolution de l'entropie, [4], elles seront traduites suivant les deux familles de surfaces.

## I.3. ETUDE DE L'ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL

### I.3.a. ECOULEMENT MERIDIONAL (MOYEN) :

Dans l'étude de l'écoulement méridional, les coordonnées  $r$  et  $z$  sont suffisantes pour définir n'importe quel point de la surface (S2).

La résolution des équations de continuité, de mouvement et d'énergie en bidimensionnel, nécessite l'introduction des dérivées spéciales afin de prendre en considération l'effet géométrique tridimensionnel.

Pour une grandeur  $q(r, \theta, z)$  les dérivées spéciales sont données par :

$$\frac{\bar{\partial} q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta}$$

$$\frac{\bar{\partial} q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta}$$

### I.3.a.1. EQUATION DE CONTINUITÉ :

L'équation de continuité en coordonnées cylindriques (dans un repère relatif lié à la roue) est donnée par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w_\theta] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w_z] = 0 \quad \dots (I.1)$$

avec :  $w_r$ ,  $w_\theta$  et  $w_z$  sont les composantes de  $\vec{W}$ .

introduisons les dérivées spéciales dans (I.1), (voir Annexe A)

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\rho w_z] = c(r, z) \quad \dots (I.2)$$

### I.3.a.2. EQUATIONS DU MOUVEMENT :

Pour un écoulement stationnaire non visqueux l'équation du mouvement dans le repère relatif est :

$$2\bar{\omega} \wedge \bar{W} - \bar{W} \wedge (\nabla \wedge \bar{W}) = -\nabla I + T\nabla S \quad \dots (I.3)$$

avec :  $\bar{W}$  : La vitesse de l'écoulement dans le repère relatif.

$\omega$  : La vitesse angulaire de la roue.

$T$  : La température moyenne.

$S$  : L'entropie.

$I$  : La rothalpie ( $I=H-\omega r V_\theta$ )

$H$  : Enthalpie totale ( $H = h + \frac{V^2}{2} + gz$ )

$V_\theta$  : composante selon  $\theta$  de vitesse dans le repère absolu.

La projection de l'équation vectorielle sur les différents axes est :

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + 2\omega r \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} \quad \dots (I.4.a)$$

$$\frac{w_r}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + 2\omega r \right] - w_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{T}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad \dots (I.4.b)$$

$$-w_r \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + w_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} \quad \dots (I.4.c)$$

avec  $w_\theta = V_\theta - \omega.r$  (composition des vitesses) et après l'introduction des dérivées spéciales, (voir Annexe A) on obtient :

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} + F_r \quad \dots (I.5.a)$$

$$-\frac{w_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) + \frac{w_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) = F_\theta \quad \dots (I.5.b)$$

$$-w_r \left( \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} + F_z \quad \dots (I.5.c)$$

avec : 
$$\bar{F} = -\frac{1}{r \rho n_\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{n}$$

**I.3.a.3. EQUATION D'ENERGIE :**

L'équation de conservation de l'énergie est donnée par :

$$w_r \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial I}{\partial z} = Q \quad \dots (I.6)$$

Pour un écoulement adiabatique ( $Q=0$ ) introduisant les dérivées spéciales, on obtient après calcul :

$$w_r \frac{\partial I}{\partial r} + w_z \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad \dots (I.7)$$

ou bien :

$$T \left( w_r \frac{\partial S}{\partial r} + w_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots (I.8)$$

L'équation (I.8) nous donne la variation d'entropie ( $S$ ).

Pour un fluide non visqueux, le vecteur force  $\vec{F}$  est normal à la surface de courant  $S$ , donc il est normal à la vitesse relative  $\vec{W}$ , ainsi :

$$\vec{W} \cdot \vec{F} = 0 \Leftrightarrow w_r \cdot F_r + w_\theta \cdot F_\theta + w_z \cdot F_z = 0 \quad \dots (I.9)$$

$$\text{et } \vec{W} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow w_r \cdot n_r + w_\theta \cdot n_\theta + w_z \cdot n_z = 0 \quad \dots (I.10)$$

Des deux équations précédentes on obtient :

$$w_\theta = -w_r \frac{F_r}{F_\theta} - w_z \frac{F_z}{F_\theta} \quad \dots (I.11)$$

$$\text{et } w_\theta = -w_r \frac{n_r}{n_\theta} - w_z \frac{n_z}{n_\theta} \quad \dots (I.12)$$

d'où par identification on obtient :

$$\frac{F_r}{F_\theta} = \frac{n_r}{n_\theta} = \text{tg} \lambda \quad \dots (I.13)$$

$$\frac{F_z}{F_\theta} = \frac{n_z}{n_\theta} \text{tg} \mu \quad \dots (I.14)$$

et par suite  $w_\theta = -w_r \operatorname{tg} \lambda - w_z \operatorname{tg} \mu \quad \dots \text{(I.15)}$

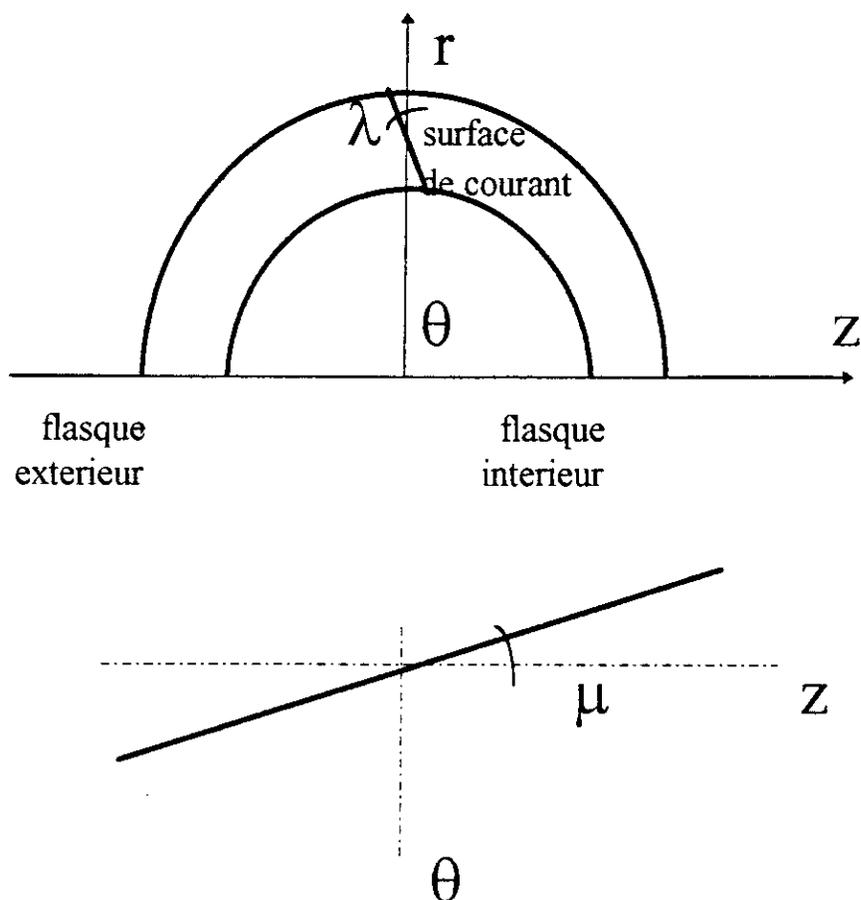


fig.I.2 : Définition de la surface S2

L'équation(I.15) représente la condition géométrique, qui permet au fluide de rester sur la surface moyenne de courant.

Afin d'obtenir une équation pour la fonction de courant, WU [4] a introduit un facteur d'intégration B dans l'équation de continuité de façon à avoir

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\rho B w_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho B w_z) = 0 \quad \dots \text{(I.16)}$$

en dérivant, on obtient:

$$B \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w_r) + (r\rho w_r) \frac{\partial B}{\partial r} + B \frac{\partial}{\partial z}(r\rho w_z) + (r\rho w_z) \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad \dots \text{(I.17)}$$

ou encore :

$$B \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (r \rho w_r) + (r \rho w_r) \frac{\bar{\partial} B}{\partial r} + r B \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (\rho w_z) + (r \rho w_z) \frac{\bar{\partial} B}{\partial z} = 0 \quad \dots (I.18)$$

en divisant par B.r, on aura :

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (r \rho w_r) + \frac{\rho w_r}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial r} + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (\rho w_z) + \frac{\rho w_z}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial z} = 0 \quad \dots (I.19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (r \rho w_r) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (\rho w_z) = - \left[ \frac{\rho w_r}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial r} + \frac{\rho w_z}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial z} \right] \quad \dots (I.20)$$

Le premier membre de l'égalité dans l'équation (I.20) représente l'équation de continuité; ainsi :

$$\left[ \frac{\rho w_r}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial r} + \frac{\rho w_z}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial z} \right] = C(r, z) \quad \dots (I.21)$$

où :  $B = \frac{\text{largeur circonférentielle du canal entre aubes}}{\text{pas d'aube}}$

### I.3.a.4 INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT :

On introduit la fonction de courant de façon à ce que l'équation de continuité soit vérifiée pour tout r, z .

L'équation de continuité est :

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial r} (r \rho B w_r) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (r \rho B w_z) = 0 \quad \dots (I.22)$$

on a :

$$\begin{cases} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} = r \rho B w_z \\ \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} = -r \rho B w_r \end{cases} \quad \dots (I.23)$$

D'après le système (I.23) les composantes de vitesses  $w_r$  et  $w_z$  s'écrivent :

$$w_z = \frac{1}{\rho r B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \quad \dots \text{(I.24)}$$

$$w_r = -\frac{1}{\rho r B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \quad \dots \text{(I.25)}$$

substituons (I.24) et (I.25) dans (I.5.a) et (I.5.c), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r \rho B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r \rho B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{w_z} \left[ \frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - F_r \right] \quad \dots \text{(I.26)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r \rho B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r \rho B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{w_r} \left[ \frac{\partial I}{\partial z} - T \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) - F_z \right] \quad \dots \text{(I.27)}$$

ou  $F_r$  et  $F_z$  sont des forces agissantes sur les aubes, elles sont définies par :

$$F_r = F_\theta \cdot \operatorname{tg} \lambda \quad \dots \text{(I.28)}$$

$$F_z = F_\theta \cdot \operatorname{tg} \mu \quad \dots \text{(I.29)}$$

Les équations (I.26) et (I.27) sont les deux formes de l'équation principale de *WU* [5], ces deux formes sont identiques, cela nous permet d'utiliser l'une des deux formes, pour obtenir une solution de la fonction de courant qui satisfait toutes les équations gouvernant l'écoulement réversible sur la surface de courant moyenne.

D'après Hirsch [6], l'équation (I.27) est particulièrement adaptée quand la vitesse radiale  $w_r$  est plus large, c'est le cas des turbomachines radiales.

### I.3.a.5. CONDITIONS AUX LIMITES :

La fonction de courant, solution de l'équation différentielle (I.27) doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

● sur *AD* : des conditions aérodynamiques ( $V_0, \rho_0, M_0$ ) pas trop loin de la réalité physique.

②  $AB$  et  $CD$  : seront des lignes de courant .

ainsi ;  $\Psi_2 - \Psi_1 = q$

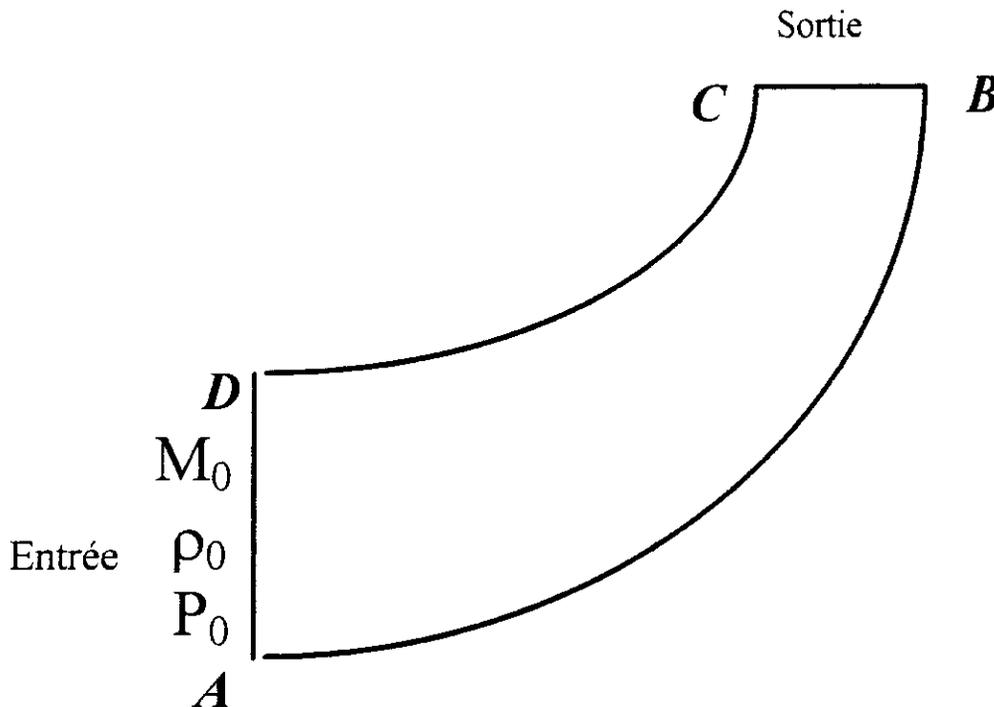
$\Psi_1$  : la valeur de la fonction de courant sur  $AB$ ; flasque intérieur (moyeu).

$\Psi_2$  : la valeur de la fonction de courant sur  $CD$ ; flasque extérieur (cartèr).

$q$  : le débit massique.

③ sur  $BC$  : nous avons adopté une condition simplificatrice qui exprime que l'écoulement est bien " guidé à la sortie du canal " .

Ces conditions seront traduites mathématiquement dans le chapitre suivant pour le calcul de la fonction de courant .



*fig 1.3 : canal méridional*

### I.3.b. ECOULEMENT AUBE A AUBE :

La position d'un point sur la surface (S1) est décrite par ses coordonnées  $m$  et  $\theta$  (voir fig.I.4.a et fig.I.4.b).

on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial m} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} \\ W = w_\theta i_1 + w_m i_2 \\ \frac{w_m}{w_\theta} = \operatorname{tg} \beta = r \frac{d\theta}{dm} \\ w_m^2 = w_z^2 + w_r^2 \end{cases} \quad \dots (I.30)$$

#### I.3.b.1. EQUATION DE CONTINUITÉ :

En prenant compte des hypothèses et des équations (I.30), l'équation de continuité s'écrira comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial m} (\rho r w_m) + \rho w_m k_n = 0 \quad \dots (I.31)$$

avec:  $k_n$ : courbure de la ligne méridienne  $pp'$  tel que :

$$k_n = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial m} \quad \text{où } b: \text{ hauteur d'aubages.}$$

or  $b = f(m)$

d'où l'équation (I.31) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (b \rho w_\theta) + \frac{\partial}{\partial m} (b \rho r w_m) = 0 \quad \dots (I.32)$$

La fonction de courant qui satisfait l'équation (I.32) est telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial m} = b \rho w_\theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -b \rho r w_m \end{cases} \quad \dots (I.33)$$

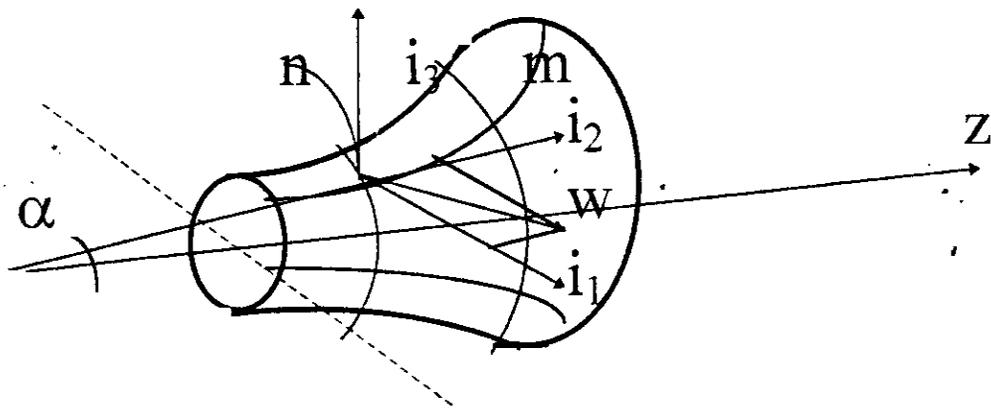


fig.I.4.a

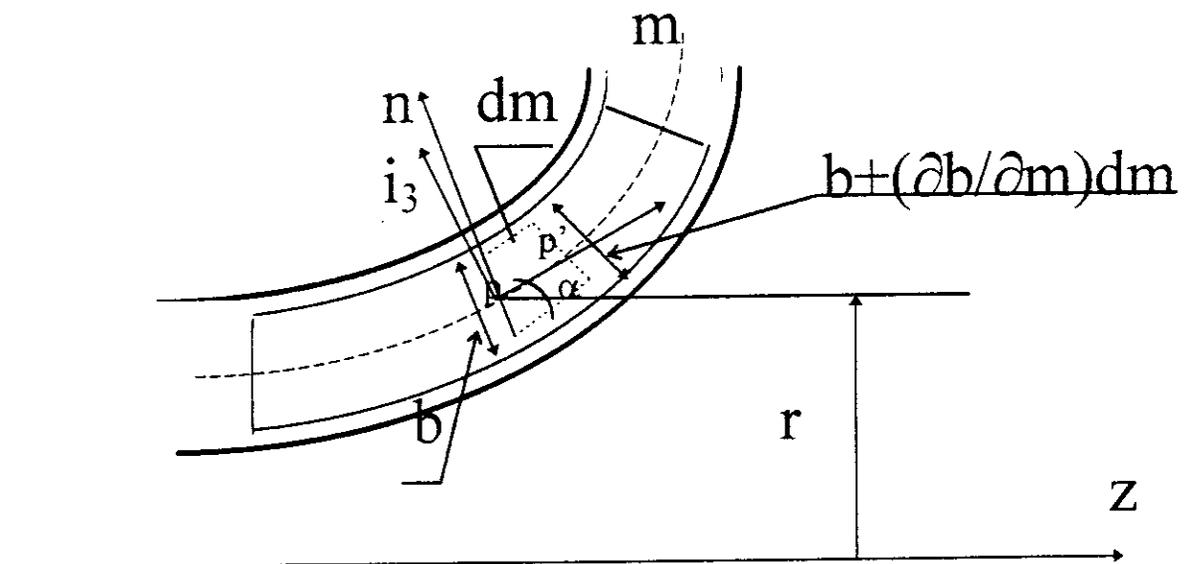


fig.I.4.b

Définition de la surface S1

### I.3.b.2. EQUATION DU MOUVEMENT

La vitesse  $\vec{W}$  doit vérifier l'équation de mouvement simplifiée donnée en coordonnées  $(m, \theta, n)$  par la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{W} + 2\vec{\omega} = & \left[ \frac{\partial w_m}{\partial n} - w_m k_m \right] \vec{i}_1 + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (r w_\theta + \omega r^2) \right] \vec{i}_2 \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial w_m}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial m} (r w_\theta + \omega r^2) \right] \vec{i}_3 = \vec{0} \end{aligned} \quad \dots (I.34)$$

avec :  $k_m = -\frac{1}{w_m} \frac{\partial w_m}{\partial n}$  est la courbure de la surface (S1) au point p .

$n$  : la normale au point p à la surface (S1) .

La projection de l'équation (I.34) sur  $\vec{i}_3$  donne :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial w_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial m} \right) = 2\omega \frac{\partial r}{\partial m} \quad \dots (I.35)$$

En injectant le système (1.33) dans l'équation (1.35), et comme  $b$  et  $r$  ne varient pas en fonction de  $\theta$ , on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{br} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + r \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right] + \frac{\partial r}{\partial m} \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2\omega r \frac{\partial r}{\partial m} \quad \dots (I.36)$$

sachant que :  $\frac{\partial r}{\partial m} = \sin \alpha$

L'équation (I.36) devient :

$$\frac{1}{br} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + r \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right] + \sin \alpha \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2\omega r \sin \alpha \quad \dots (I.37)$$

### I.3.b.3. CONDITIONS AUX LIMITES :

La fonction de courant  $\psi$ , solution de l'équation différentielle (1.37), doit vérifier les conditions aux limites du domaine d'étude, soit une surface de courant (S1) définie par la rotation autour de l'axe de la machine d'une ligne decourant méridienne : celle-ci se trouve découpée périodiquement par les aubes dans la direction périphérique en domaines élémentaires (voir fig.I.5).

Compte tenu de la définition de  $\psi$  et si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont les valeurs de  $\psi$  correspondantes respectivement aux limites  $FG$  et  $BC$  du domaine élémentaire, on doit avoir :

$$\textcircled{1} \quad \psi_2 - \psi_1 = \text{debit masique passant entre } Bc \text{ et } FG$$

ainsi :

$$\psi_1 = 0 \quad \text{sur } BC. \quad (a)$$

$$\psi_2 = q \quad \text{sur } FG. \quad (b)$$

Les conditions (a) et (b) sont équivalentes aux conditions de tangence des vecteurs vitesses à la surface des aubes.

• L'écoulement est supposé uniforme loin à l'amont  $AH$  et à l'aval  $DE$ , et la connaissance de  $\bar{W}$  nous permet de connaître les valeurs de la fonction de courant sur ces frontières.

② On a de plus la condition de périodicité pour les deux domaines comprise entre  $AB, HG$  et  $CD, FE$  qui se traduit par :

$$\psi_{HG} = \psi_{AB} + q$$

$$\psi_{FE} = \psi_{CD} + q$$

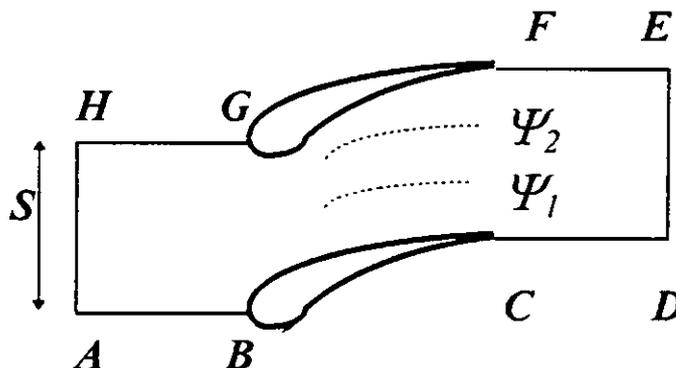


fig.1.5 : Canal aube à aube

### I.3.b.4. CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKI :

En plus des conditions aux limites et des conditions de périodicité de l'écoulement, la condition de *kutta-joukowski* doit être satisfaite, dont l'énoncé est:

Pour un écoulement de fluide parfait autour d'un profil dont l'intrados et l'extrados se terminent suivant une tangente commune, et la ligne de courant issue du bord de fuite doit quitter ce dernier suivant cette tangente.

Vérifier la condition de *kutta-joukowski* sous cette forme pose un problème dans le cas de profils à bord arrondi ou en forme de dièdre, et la position du point d'arrêt n'étant pas connue, une petite erreur commise sur sa détermination peut en effet engendrer une grande erreur dans les résultats. Il est alors préférable de remplacer cette condition par une symétrie de la répartition des pressions ou des vitesses relatives sur l'intrados et l'extrados du profil, le plus près possible du bord de fuite.

En résumé pour un profil donné, à un angle d'attaque donné, le fluide quitte le bord de fuite sans perturbation si :

- Le bord de fuite est un angle fini, donc c'est un point d'arrêt pour  $V_1 = V_2 = 0$
- Le bord de fuite a la forme de biseau, les vitesses quittant l'intrados et l'extrados, sont égales en module, et tangente à la ligne médiane.

## I.4. RECAPITULATION :

### I.4.1. PLAN MERIDIONAL :

Pour un écoulement stationnaire, parfait, axisymétrique et isentropique l'équation de C.H.WU dans le plan méridional est :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r\rho B} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r\rho B} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = -\frac{1}{w} \left[ \frac{\partial l}{\partial z} - T \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rV_\theta) - F_z \right]$$

avec :

$$l = H - \omega \cdot r \cdot V_\theta$$

$$B = \frac{\text{Largeur circonférentielle du canal entre aubes}}{\text{pas d'aube}}$$

$$F_z = F_\theta \cdot \text{tg} \mu$$

### I.4.2. PLAN AUBE A AUBE :

L'équation donnant la fonction de courant de l'écoulement stationnaire, adiabatique et sain "non visqueux" dans une turbomachine centrifuge dans le plan aube à aube est donnée par :

$$\frac{1}{br} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + r \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right] + \sin \alpha \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2\omega r \sin \alpha$$

avec :

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \sin \alpha$$

$$b = f(m) : \text{hauteur d'aubage}$$

## I.5. CALCUL QUASITRIDIMENSIONNEL :

Après avoir déterminé les caractéristiques physiques et thermodynamiques de l'écoulement dans chaque plan ( S1 et S2 ) on procède à un couplage des résultats , cela est possible en imposant deux hypothèses :

- L'axisymétrie de l'une des deux surfaces .
- La rugosité et l'uniformité du champ de vitesse .

L'écoulement dans une roue d'une turbomachine peut être défini par les grandeurs suivantes :

- La vitesse relative .
- La densité du fluide .
- Le rapport de pression .
- Le nombre de Mach.

### A°/ LA VITESSE RELATIVE :

La vitesse relative suivant la ligne d'intersection des deux plans , aube à aube et méridien , s'exprime par :

$$\vec{W} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \psi_1 \wedge \vec{\nabla} \psi_2 \quad \dots \text{(I.38)}$$

Avec :  $\rho$  : est la densité suivant la ligne moyenne .  
 $\psi_1, \psi_2$  : sont respectivement les fonctions de courant .  
sur les deux plans aube à aube et méridien .

L'écriture vectorielle de l'équation II.1 est donnée par :

$$\vec{W} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \end{bmatrix} \quad \dots \text{(I.39)}$$

Pour simplifier cette expression on adopte un certains nombres d'étapes :

• L'écoulement dans le plan méridien (plan axial) se caractérise par:  $\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = 0$

• Utilisons la transformation  $h = r \theta$  qui conduit à la forme

conservée  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial h} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial h}$  en plan méridien, ce qui donne la conservation du long de la ligne  $r \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial h}$  en un point "O" qui caractérise l'écoulement (point O) et un point "O" qui a la masse volumique  $\rho$

et en prenant  $h = h(x, y)$ ,  $r = r(x, y)$ ,  $z = z(x, y)$

on aura :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial h} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}$$

idem pour la fonction de courant  $\Psi_2$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

En substituant ces expressions dans l'équation (I.39) on obtient :

$$\begin{bmatrix} w_u \\ w_z \\ w_r \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ - \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right) \\ + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} \right) \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ - \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} \right) \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \quad \dots (I.40)$$

L'équation (I.40) représente l'expression de la vitesse relative suivant la ligne moyenne, qui a comme module :

$$W = \sqrt{w_u^2 + w_z^2 + w_r^2}$$

ainsi, on obtient l'expression qui donne la densité  $\rho$  en tout point du canal :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \left\{ 1 - \frac{V^2 - 2\omega r V_\theta}{V_0^2} \right\} \quad \dots (I.42)$$

### C°/ LE RAPPORT DE PRESSION :

L'écoulement est supposé adiabatique :

$$pV^\gamma = cte$$

le rapport de pression  $\tau$  est défini par :

$$\tau = \frac{p}{p_0}$$

avec :  $p_0$  la pression à l'amont (entrée),

donc  $\tau$  est définie par : (entrée)

$$\tau = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

Le calcul de la pression à l'entrée est permis en appliquant l'équation de Bernoulli entre l'entrée et l'infini (fluide libre), ce qui donne :

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (W_r^2) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (V_\infty^2 - \omega r^2) \quad \dots (I.43)$$

avec  $P_\infty, V_\infty$  représentent respectivement la pression et la vitesse du fluide à l'infini..

### D°/ LA VITESSE DU SON :

La vitesse du son est exprimée en chaque point par :

$$a = \sqrt{\gamma \tau T} \quad \dots (c)$$

$$a = \sqrt{P_0 \gamma \frac{\tau}{\rho}}$$

$$\text{et } a_0 = \frac{W_0}{M_0}$$

et d'autre part :

$$a_0 = \sqrt{P_0 \gamma \frac{\tau_0}{\rho_0}}$$

puisque  $\tau = 1$  on aura

$$a = \sqrt{\rho \frac{\gamma}{\rho}}$$

ce qui nous permet de calculer la pression à l'entrée  $P_0$  :

$$P_0 = \left( \frac{\omega}{M_0} \right)^2 \frac{\rho_0}{\gamma} \quad \dots (d)$$

substituons l'équation (d) dans (c)

$$\begin{cases} a = \frac{\omega_0}{M_0} \tau^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \\ a = \frac{\omega_0}{M_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \end{cases} \quad \dots (I.44)$$

## E°/ CALCUL DU NOMBRE DE MACH :

Le nombre de Mach est donné par :

$$M = \frac{W}{a} \quad \dots (I.45)$$

avec  $W$  : est la vitesse relative.

# CHAPITRE II

FORMULATION DU PROBLEME PAR

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

## II. FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### II.1 INTRODUCTION :

De jours en jours, la méthode des éléments finis s'affirme comme un instrument très puissant pour la résolution numérique de nombreux phénomènes physiques. Cette méthode dispose d'un bon nombre de techniques utiles et efficaces lui permettant de donner des formulations très poussées pour le traitement des différents problèmes physiques.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Différentes approches sont utilisées pour obtenir ces équations algébriques. nous citerons ici les trois plus connues [2] :

-Approche directe :

A l'origine cette approche a été utilisée pour développer la M.E.F dans la construction aéronautique. Elle utilise les éléments connus dans l'analyse structurale.

-Approche variationnelle :

La méthode des éléments finis a été reformulée à partir de considérations énergétiques et variationnelles. Cette méthode utilise le principe de stationnarité d'une quantité appelée la *FONCTIONNELLE*.

-Approche résuduelle (de *GALERKINE*) :

C'est l'approche la plus générale de la M.E.F. Elle s'applique directement aux équations aux dérivées partielles qui gouvernent le problème physique. Cette approche utilise la *Téchnique des résidus pondérés*.

Dans ce travail on adopte cette dernière approche.

## TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES :

La technique des résidus pondérés permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale, en utilisant des fonctions de pondération .

Cette technique fournit selon le choix des fonctions de pondération tout un ensemble de formulations intégrales [11] .

### II.2.1. RESIDUS :

Pour tout système physique continu stationnaire dont le comportement est représenté par un système d'équations aux dérivées partielles, on peut écrire :

$$L(u) - f_v = 0 \quad \dots \text{(II.1.a)}$$

sur le domaine V

Les conditions aux limites s'écrivant :

$$C(u) = f_s \quad \dots \text{(II.1.b)}$$

sur la surface S .

Des fonctions  $u$  constituent une solution du problème si elles satisfont à la fois (II.1.a) et (I.2.b).

Nous appelons **residus** la quantité  $R(u)$  définie par :

$$R(u) = L(u) - f_v \quad \dots \text{(II.2)}$$

avec:  $R(u) = 0$  quand  $u$  est solution de (II.1).

## II.2.2. FORMULATION INTEGRALE :

La technique des résidus pondérés consiste à rechercher des fonctions  $u$  qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int_V \langle \phi \rangle \{ R(u) \} dv = 0 \quad \dots \text{(II.3)}$$

ou encore

$$W(u) = \int_V \langle \phi \rangle \{ L(u) + f_v \} dv = 0 \quad \dots \text{(II.4)}$$

avec  $\phi$  : fonction de pondération.

Toute solution  $u$  qui vérifie les équations (II.1.a) et (II.1.b) vérifie nécessairement l'équation (II.4); par contre si  $u$  est solution de l'équation (II.5), elle n'est qu'une solution approchée du problème.

### FORME INTEGRALE FAIBLE [11]:

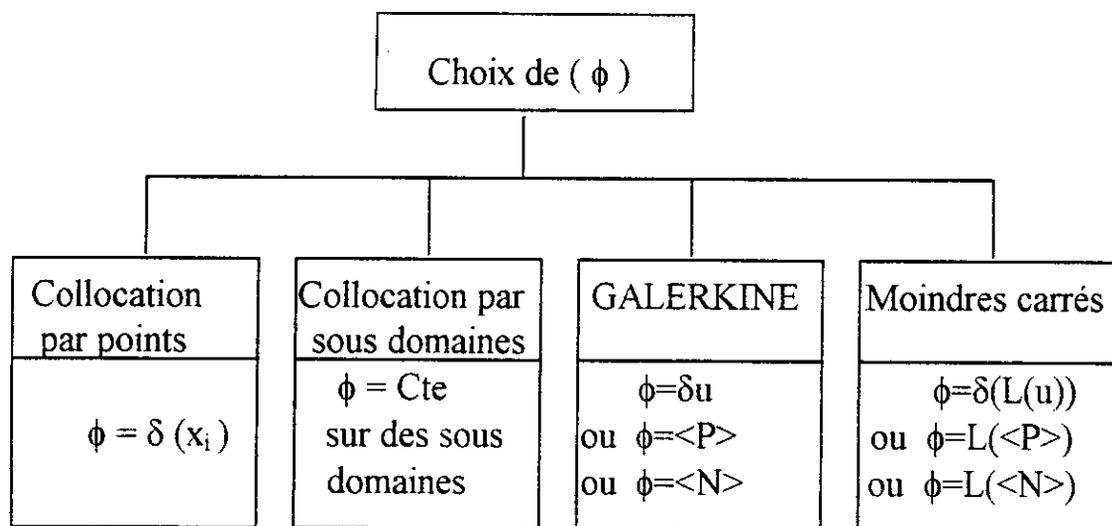
L'intégration par partie de l'équation (II.4) fournit des formes intégrales dites **faibles** qui présentent les avantages suivants :

- L'ordre maximum des dérivées de  $u$  dans la forme intégrale diminue .
- Certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme intégrale faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale, au lieu d'être satisfaites identiquement par  $u$ .

Par contre l'intégration par partie fait apparaître des dérivées de  $\phi$ . Donc les conditions de dérivabilité  $\phi$  augmentent.

### II.2.3. CHOIX DES FONCTIONS DE PONDERATION:

Pour choisir la fonction de pondération  $\phi$ , on a différentes méthodes, qui se résument sur le tableau suivant:

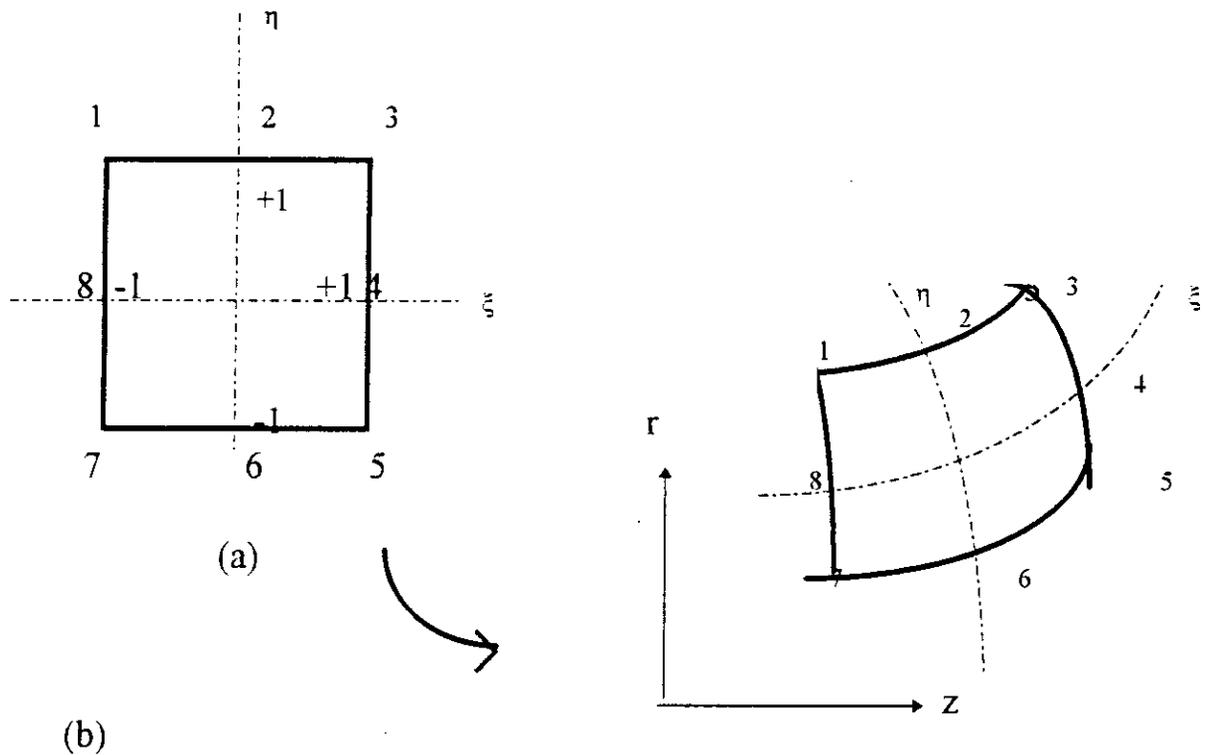


On adopte dans ce travail la méthode de *GALERKINE* qui est d'ailleurs la plus utilisée et on prendra  $\phi = \langle N \rangle$  comme fonction de pondération.

## II.2.4. CHOIX DE L'ELEMENT :

L'élément choisi dans le cadre de ce travail est l'élément isoparamétrique quadratique à huit noeuds .

L'élément de référence et l'élément réel est représenté avec la numérotation des noeuds.



**fig.II.1** : Élément isoparamétrique quadratique à huit noeuds .  
a- élément de référence  
b- élément réel

Cet élément assure une interpolation de la valeur de  $u$  par un polynôme qui prend les mêmes valeurs que  $u$  aux point géométriques : c'est donc un élément Lagrangien.

Sa base polynômiale est :

$$p = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \rangle$$

L'utilisation des éléments courbes permet d'approximer géométriquement les frontières par des segments de parabole.

### II.2.4.1. PROPRIETES MATHEMATIQUES DE L'ELEMENT:

❶ L'élément choisi est de classe  $C^0$  (fonction continue) et non de classe  $C^1$  (fonction continue et dérivable).

❷ L'élément choisi est conforme, c'est à dire qu'il assure la convergence de l'approximation élément fini vers la solution réelle pour le problème linéarisé associé.

❸ L'élément est qualifié isoparamétrique, parceque les fonctions de tranformation géométrique  $\bar{N}(\xi, \eta)$  sont identiques aux fonctions d'interpolation  $N(\xi, \eta)$ . Ceci implique que les noeuds géométriques sont confondus avec les noeuds d'interpolations.

$$z = \sum_{i=1}^8 z_i \bar{N}_i(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 z_i N_i(\xi, \eta) \quad \dots \text{(II.5)}$$

$$r = \sum_{i=1}^8 r_i \bar{N}_i(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 r_i N_i(\xi, \eta)$$

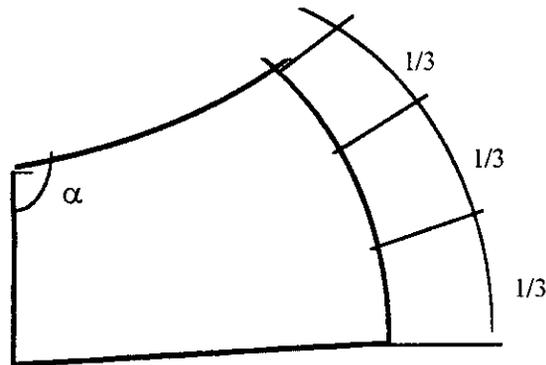
### II.2.4.2. SINGULARITE DE LA MATRICE JACOBIENNE :

La singularité de [J] en un point de l'élément de référence implique que la tranformation isoparamétrique n'est pas bijective.

Cette singularite apparait lorsque l'on déforme beaucoup l'élément de référence. Il est prudent de vérifier que le déterminant de [J] garde un signe constant en tous les points de l'élément de référence.

Pour éviter la singularité dans un élément à huit noeuds, ZIENKIEWICZ [12] propose les conditions suivantes (voir fig.II.2)

- Les 4 angles  $\alpha$  sont inférieurs à  $180^\circ$ .
- Les noeuds milieux sont situés dans le tiers central de chaque côté.

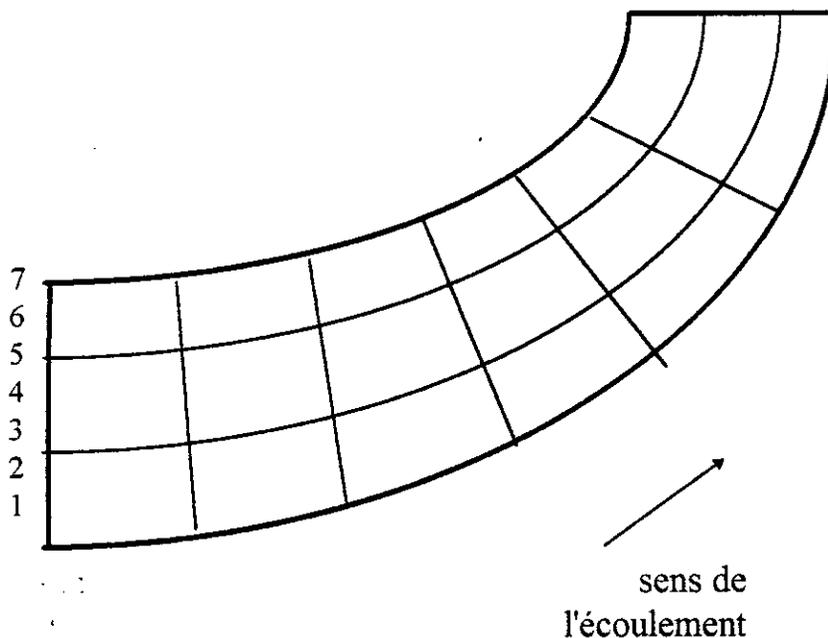
*fig.II.2*

### II.2.4.3. MAILLAGE :

La partition du domaine du  $V$  en éléments  $V^e$  (rectangulaires) doit respecter les deux règles suivantes :

1. Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments.

2. L'ensemble de tous les éléments  $V^e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné  $V$ . Nous excluons en particulier les trous entre éléments.

*fig.II.3: Exemple de maillage*

## II.3 FORMULATION DU PROBLEME PAR LA TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES :

### II.3.a PLAN MERIDIONALE:

D'après le chapitre précédent l'équation (I.27) qui gouverne le problème de l'écoulement dans le plan méridional s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{prb} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{prb} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{w_r} \left[ \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rV_\theta) - F_z \right]$$

cette équation à résoudre est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = -f \quad \text{dans le volume V} \quad \dots \text{(II.6.a)}$$

avec  $k = k(\psi, r, z)$  ,  $f = f(\psi, r, z)$

et les conditions aux limites sont :

$$k \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha(\psi - \psi_0) \quad \text{sur la surface S} \quad \dots \text{(II.6.b)}$$

pour ce plan elles seront:

-sur  $AB$  ,  $\psi = 0$  .

-sur  $CD$  ,  $\psi = q$  ( $q$  est le débit massique) .

-sur  $AD$  , distribution de  $\psi$  donnée .

-sur  $BC$  ,  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  , où  $n$  est la direction moyenne des lignes de courant.

Ce sont des conditions aux limites du type **DIRICHLET** sur une partie de la frontière et du type **NEUMANN** sur l'autre partie.

Le domaine type est donné sur la fig.II.4, qui représente un canal d'une turbomachine radiale.

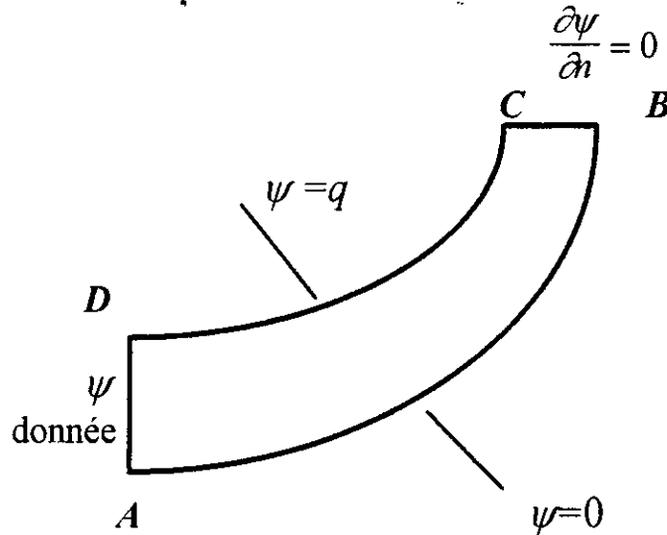


fig.II.4 : Conditions aux limites

Les équations (II.6) peuvent s'écrire :

$$R_v = -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left[ k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + f \right] = 0 \quad \dots (II.7)$$

et les conditions aux limites s'expriment :

$$R_s = \frac{1}{r} \left[ k \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha (\psi - \psi_0) \right] = 0 \quad \dots (II.8)$$

avec  $\alpha = \infty$  sur  $C1 = (AB) \cup (CD) \cup (AD)$ .

$\alpha = 0$  sur  $C2 = (BC)$ .

nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\int_V \phi R_v dv}_{I_1} + \underbrace{\int_S \phi R_s ds}_{I_2} = 0 \quad \dots (II.9)$$

avec  $V =$  volume de fluide

$$dv = 2\pi r d\Omega$$

$S =$  frontière du volume

$$ds = 2\pi r dC$$

ou  $\Omega =$  intersection entre le volume de fluide et le plan méridional.

$C =$  intersection entre la frontière du volume et le plan méridional

$$I_1 = \int_V \phi R_v dv$$

$$I_1 = - \int_V \frac{\phi}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dv - \int_V \frac{\phi}{r} f dv$$

$$I_1 = -2\pi \left( \int_{\Omega} \phi \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \phi f d\Omega \right) \quad \dots \text{(II.10)}$$

or

$$\phi \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - k \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \dots \text{(II.11)}$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - k \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] d\Omega \quad \dots \text{(II.12)} \end{aligned}$$

L'équation(II.10 ) devient :

$$\begin{aligned} I_1 &= -2\pi \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega - 2\pi \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] d\Omega \\ &\quad - 2\pi \int_{\Omega} \phi f d\Omega \quad \dots \text{(II.13)} \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_s \phi R_s ds$$

$$I_2 = 2\pi \int_{C_1} \phi R_s r dC + 2\pi \int_{C_2} \phi R_s r dC \quad \dots \text{(II.14)}$$

sur C1 :

$$C1 = (AB) \cup (CD) \cup (AD) \quad \text{voir fig II.4}$$

Nous vérifions exactement les conditions aux limites, donc :

$$R_s = 0$$

ce qui entraîne :

$$\int_{C_1} \phi R_s r dC = 0 \quad \dots \text{(II.15)}$$

sur C2 :

$$C2 = (BC)$$

$$\alpha = 0 \text{ donc } R_s = \frac{1}{r} \left[ k \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] = 0$$

alors

$$\int_{C_2} \phi R_s r dC = \int_{C_2} \phi k \frac{\partial \psi}{\partial n} dC$$

d'où

$$\int_{C_2} \phi R_s r dC = \int_{C_2} \phi k \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} n_r + \frac{\partial \psi}{\partial z} n_z \right] dC \quad \dots \text{(II.16)}$$

avec :

$$n_r = \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$n_z = \frac{\partial z}{\partial n}$$

... (II.17)

L'équation (II.16) devient par le théorème de divergence [7]

$$\int_{c_2} \phi k \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} n_r + \frac{\partial \psi}{\partial z} n_z \right] dC = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad \dots \text{(II.18)}$$

De l'équation (II.16) et (II.18),  $I_2$  s'écrit :

$$I_2 = 2\pi \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad \dots \text{(II.19)}$$

Alos, l'équation (II.9) devient, en introduisant les équations (II.13) et (II.19):

$$\int_{\Omega} k \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \phi f d\Omega = 0 \quad \dots \text{(II.20)}$$

### II.3.b PLAN AUBE A AUBE :

L'équation (I.36) qui gouverne le problème de l'écoulement dans le plan aube à aube est :

$$\frac{1}{br} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{1}{b\rho} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\partial r}{\partial m} \frac{1}{b\rho} \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2\omega r \frac{\partial r}{\partial m}$$

b et r sont indépendants de  $\theta$  et  $\frac{\partial r}{\partial m} = \sin \alpha$

l'équation (I.36) devient après réarrangement :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2\omega \sin \alpha \quad \dots \text{(II.21)}$$

L'équation à résoudre est de la forme :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial m} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\sin \alpha}{r} k \frac{\partial \psi}{\partial m} = -f \quad \dots \text{(II.22)}$$

dans le volume de contrôle V

V : le volume compris entre deux aubes, le moyeu, le carter, le plan d'entrée et le plan de sortie.

avec  $k = k(\psi, \theta, m)$

et les conditions aux limites sur la surface S sont :

$$k \frac{\partial \psi}{\partial n} + \beta(\psi - \psi_0) = 0 \quad \dots \text{(II.23)}$$

Pour notre problème elles seront :

- sur *BC*,  $\psi = 0$
- sur *FG*,  $\psi = q$  ( $q$  étant le débit massique)
- sur *BG*, distribution de  $\psi$  donnée.
- sur *CF*,  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ , où  $n$  est la direction moyenne des lignes de courant.

Ce sont donc des conditions aux limites du type *DIRICHLET* sur une partie de la frontière et du type *NEUMAN* sur l'autre partie.

L'équation (II.22) peut s'écrire :

$$R_v = -\frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial m} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\sin \alpha}{r} k \frac{\partial \psi}{\partial m} + f \right] = 0 \quad \dots \text{(II.24)}$$

De même que précédemment on cherche des fonctions  $\psi$  qui annulent la forme intégrale :

$$W(\psi) = \int_V \langle \phi \rangle \{ R_v(\psi) \} dV = 0 \quad \dots \text{(II.25)}$$

avec  $V$  = volume de controle

$$dv = r \cdot d\Omega$$

$S$  = frontière du volume de controle

$$ds = r \cdot d\Gamma$$

ou  $\Omega$  = intersection entre le volume controle de fluide et le plan aube à aube.

$\Gamma$  = intersection entre la frontière du volume controle et le plan aube à aube.

$$I_1 = \int_V \phi R_v dv$$

$$I_1 = - \int_V \frac{\phi}{r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial m} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\sin \alpha}{r} k \frac{\partial \psi}{\partial m} \right] dv - \int_V \frac{\phi}{r} f dv$$

$$I_1 = - \int_{\Omega} \phi \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial m} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\sin \alpha}{r} k \frac{\partial \psi}{\partial m} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \phi f d\Omega \quad \dots \text{(II.26)}$$

Intégrons maintenant l'équation (II.26) par partie :

$$\int_{\Omega} \phi \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} \phi k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} dm$$

$$= - \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} \phi k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} n_{\theta} d\Gamma$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial m} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) d\Omega &= - \int_{\Omega} k \frac{\partial \psi}{\partial m} \frac{\partial \phi}{\partial m} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi k \frac{\partial \psi}{\partial m} d\theta \\ &= - \int_{\Omega} k \frac{\partial \psi}{\partial m} \frac{\partial \phi}{\partial m} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi k \frac{\partial \psi}{\partial m} n_m d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\sin \alpha}{r} k \phi \frac{\partial \psi}{\partial m} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\sin \alpha}{r} k \psi \frac{\partial \phi}{\partial m} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\sin \alpha}{r} k \psi \phi d\theta \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\sin \alpha}{r} k \psi \frac{\partial \phi}{\partial m} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\sin \alpha}{r} k \psi \phi n_m d\Gamma \end{aligned}$$

donc l'intégrale  $I_1$  devient:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial m} \frac{\partial \phi}{\partial m} + \frac{\sin \alpha}{r} \psi \frac{\partial \phi}{\partial m} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \phi f_v d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} \phi k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} n_{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial m} n_m + \frac{\sin \alpha}{r} \psi n_m \right] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad \dots \text{(II.27)}$$

Nous avons des termes de contour sur  $\Gamma$ . Ceci permet d'utiliser la condition imposée sur  $\psi$  le long de  $\Gamma_2$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} n_{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial m} n_m = 0 \quad \dots \text{(II.28)}$$

De plus nous pouvons faire disparaître le terme de contour sur  $\Gamma_1$  en imposant:

$$\phi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad \dots \text{(II.29)}$$

La forme intégrale faible de l'équation (I.36) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} W(\psi) &= \int_{\Omega} k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial m} \frac{\partial \psi}{\partial m} + \frac{\sin \alpha}{r} \phi \frac{\partial \psi}{\partial m} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \phi f d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} \frac{\sin \alpha}{r} \phi \psi n_m d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad \dots \text{(II.30)}$$

## II.4 DISCRETISATION :

Pour une approximation type éléments finis de la variable  $\psi$ , on a :

$$\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i N_i \quad \forall i \in [1, n] \quad \dots \text{(II.31)}$$

avec :  $n$  = nombre total des noeuds par élément.

$\psi_i$  = valeur nodale (inconnue).

$N_i$  = fonction d'interpolation (connue).

La fonction de pondération choisie est celle de *GALERKINE* :

$$\phi(z, r) = N(z, r) \quad \dots \text{(II.32)}$$

### II.4.a PLAN MERIDIONAL :

Les dérivées de la fonction  $\psi$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{aligned} \quad \dots \text{(II.33)}$$

en introduisant les expressions (II.31), (II.32) et (II.33) dans (II.20) on trouve:

$$\int_{\Omega} \left\{ k \left[ \frac{\partial N_i}{\partial z} \left( \sum_{j=1}^n \psi_j \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial r} \left( \sum_{j=1}^n \psi_j \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] - f N_i \right\} d\Omega = 0 \quad \dots \text{(II.34)}$$

Nous avons ainsi un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues à résoudre qui peut être représenté sous la forme :

$$[\mathbf{k}]^e [\boldsymbol{\psi}]^e = [\mathbf{f}]^e \quad \dots \text{(II.35)}$$

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega} k \left[ \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega$$

avec :

$$F_i^e = \int_{\Omega} f N_i d\Omega$$

$$\forall i=1, n ; j=1, n$$

Une équation similaire est obtenue pour le volume entier de l'écoulement, en assemblant le système (II.35).

$$\begin{cases} [K][\psi] = [F] \\ K_{ij} = \int_{\Omega} k \left[ \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega \quad \forall i=1,n; j=1,n \quad \dots \text{(II.36)} \\ F_i = \int_{\Omega} N_i d\Omega \end{cases}$$

Nous allons calculer la matrice de rigidité K et le vecteur force F.

Soit un élément dont les huit points géométriques ont pour coordonnées  $(z_i, r_i)_{i=1,8}$

Nous allons alors pour tout point M(z,r) intérieur à l'élément :

$$z = \sum_{i=1}^8 z_i N_i(\xi, \eta) \quad , \quad r = \sum_{i=1}^8 r_i N_i(\xi, \eta) \quad \dots \text{(II.37)}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \quad \dots \text{(II.38)}$$

Donc :

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 z_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^8 r_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^8 z_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^8 r_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \dots \text{(II.39)}$$

Par ailleurs :

$$d\Omega = [J] d\xi d\eta \quad \dots \text{(II.40)}$$

D'où :

$$k_{ij} = \int_{\Omega} k \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial z} \\ \frac{\partial N_j}{\partial r} \end{bmatrix} dr dz \quad \dots \text{(II.41)}$$

$$k_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} K \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} [J^{-1}] [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial z} \\ \frac{\partial N_j}{\partial r} \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad \dots \text{(II.42)}$$

Pour le second membre :

$$f = \sum_{i=1}^8 f_i N_i \quad \dots \text{(II.43)}$$

Donc :

$$F_i = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left( \sum_{i=1}^8 f_i N_i \right) N_i |J| d\xi d\eta \quad \dots \text{(II.44)}$$

L'équation (II.42) prend sa forme explicite, en effectuant tous les produits matriciels que contient cette équation et en se servant de l'annexe [B] .

$$K_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} k(L) \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial N(i)}{\partial \zeta} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial N(i)}{\partial \zeta} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial N(j)}{\partial \zeta} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial N(j)}{\partial \zeta} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^* \\ \left( \frac{\partial N(i)}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial N(i)}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial N(j)}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial N(j)}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \end{array} \right] \frac{1}{|J|} d\xi \quad \dots \text{(II.45)}$$

$$\text{Avec : } K = \frac{1}{prb}$$

D'après l'équation (I.27), on a

$$F = -\frac{1}{w_r} \left[ \frac{\partial \bar{1}}{\partial z} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) - F_z \right] \quad \dots \text{(II.46)}$$

Le vecteur force  $F$  dépend des vitesses relatives  $W_r, W_z$ .

On calcul les composantes  $W_r, W_z$  à partir de la fonction de courant  $\Psi$  en utilisant :

$$W_z = +\frac{1}{\rho \cdot r \cdot b} \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \quad \dots \text{(II.47)}$$

$$W_r = -\frac{1}{\rho \cdot r \cdot b} \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z}$$

La discretisation du système (II.46) se fait , en utilisant l'approximation par éléments finis, on obtient alors :

$$W_z^i = +\frac{1}{\rho_i r_i b_i} \sum_{j=1}^n \Psi_j \frac{\partial N_j}{\partial r} \quad i = 1, \text{NTN} \quad \dots \text{(II.48)}$$

$$W_r^i = +\frac{1}{\rho_i r_i b_i} \sum_{j=1}^n \Psi_j \frac{\partial N_j}{\partial z}$$

Où NTN : le nombre total des noeuds .

Une fois les vitesses  $W_r, W_z$  sont obtenues, on réécrit les différents termes de  $F$  en fonction de ces deux vitesses .

La dérivée de la circularité par rapport à  $z$  donne :

$$\frac{\partial (r V_\theta)}{\partial z} = r \frac{\partial \mathcal{N}_\theta}{\partial z} \quad \dots \text{(II.49)}$$

Avec

$$\frac{\partial \mathcal{N}_\theta}{\partial z} = -1g \lambda \frac{\partial w_r}{\partial z} - 1g \mu \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad \dots \text{(II.50)}$$

La rothalpie I est donnée par :

$$I = h + \frac{V^2}{2} - \omega r V_\theta$$

Où :

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{V^2}{M^2(\gamma - 1)}$$

Alors :

$$h + \frac{V^2}{2} = V^2 \left( \frac{1}{M^2(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \right)$$

D' autre part :

$$V^2 = (w_r^2 + w_z^2 + V_\theta^2) \quad \text{Car } w_r = V_r \quad \text{et} \quad w_z = V_z$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial(V^2)}{\partial z} = 2w_r \frac{\partial w_r}{\partial z} + 2w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} + 2V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \quad \dots \text{ (II.51)}$$

Donc :

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \left[ \frac{1}{M^2(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial(V^2)}{\partial z} - \omega r \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \quad \dots \text{ (II.52)}$$

Et enfin la force  $F_z$  s' ecrit :

$$F_z = \text{tg} \mu \left[ -\frac{w_r}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} + \frac{w_z}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial z} \right] \quad \dots \text{ (II.53)}$$

Avec :

$$\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} = \frac{1}{\rho b} \left[ \text{tg} \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} - \text{tg} \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] + 2\omega r \quad \dots \text{ (II.54)}$$

En remplaçant les équations de (II.49),(II.52)et (II.53) dans (II.46) on trouve l'expression explicite de F.

### II.4.b PLAN AUBE A AUBE :

Les dérivées de  $\psi$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial m} &= \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial m} \end{aligned} \quad \dots \text{(II.55)}$$

la fonction de pondération est

$$\phi(m, \theta) = N(m, \theta) \quad \dots \text{(II.56)}$$

Substituons les équations (II.31), (II.55) et (II.56) dans l'équation (II.30) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \left( \sum_{j=1}^s \psi_j \frac{\partial N_j}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial m} \left( \sum_{j=1}^s \psi_j \frac{\partial N_j}{\partial m} \right) + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial N_i}{\partial m} \left( \sum_{j=1}^s \psi_j N_j \right) \right] \right\} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_2} k \frac{\sin \alpha}{r} N_i \left( \sum_{j=1}^s \psi_j N_j \right) d\Gamma = \int_{\Omega} f N_i d\Omega \end{aligned} \quad \dots \text{(II.57)}$$

De même que le paragraphe II.4.a on a obtenu un système d'équations à  $n$  inconnues qui peut être représenté sous la forme :

$$[\mathbf{k}]^e [\boldsymbol{\psi}]^e = [\mathbf{f}]^e \quad \dots \text{(II.58)}$$

avec:

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega} k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial m} \frac{\partial N_j}{\partial m} + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial N_i}{\partial m} N_j \right] d\Omega$$

$$- \int_{\Gamma_2} k \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial N_i}{\partial m} N_j d\Gamma \quad \forall i=1, n ; j=1, n$$

$$F_i^e = \int_{\Omega} f N_i d\Omega$$

une équation similaire est obtenue pour le volume entier de l'écoulement, en assemblant le système (II.58)

$$[K][\psi]=[F]$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega} k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial m} \frac{\partial N_j}{\partial m} + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial N_i}{\partial m} N_j \right] d\Omega$$

avec :

$$- \int_{\Gamma_2} \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial N_i}{\partial m} N_j d\Gamma$$

$$F_i = \int_{\Omega} f N_i d\Omega$$

$\forall i = 1, n ; j = 1, n$

Soit un élément dont les huit points géométriques ont pour coordonnées

$$(m_i, \theta_i) \quad i = 1, 8$$

Nous avons alors pour tout point  $M(m, \theta)$  intérieur à l'élément

$$\begin{cases} m = \sum_{i=1}^8 m_i N_i(\xi, \eta) \\ \theta = \sum_{i=1}^8 \theta_i N_i(\xi, \eta) \end{cases} \quad \dots \text{ (II.59)}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial m}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial m} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial m} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (II.60)}$$

donc :

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 m_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^8 \theta_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^8 m_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^8 \theta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (II.61)}$$

$$[J^{-1}] = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial m}{\partial \eta} & \frac{\partial m}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad \dots \text{(II.62)}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial m} = \frac{1}{|J|} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right]$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \theta} = \frac{1}{|J|} \left[ -\frac{\partial m}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial m}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right]$$

Donc:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} k \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial m}{\partial \xi} \frac{\partial N(i)}{\partial \eta} - \frac{\partial m}{\partial \eta} \frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial m}{\partial \xi} \frac{\partial N(j)}{\partial \eta} - \frac{\partial m}{\partial \eta} \frac{\partial N(j)}{\partial \xi} \right) \frac{1}{|J|^2} + \left( -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N(i)}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \right) \left( -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N(j)}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N(j)}{\partial \xi} \right) \frac{1}{|J|^2} + \frac{\sin \alpha}{r} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N(i)}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \right) N(j) \frac{1}{|J|} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_2} k \frac{\sin \alpha}{r} N(i) N(j) d\Gamma \quad \dots \text{(II.63)}$$

$$F_e(i) = \int_{\Omega} N(i) \sum_{i=1}^8 N(i) f_i d\Omega \quad \dots \text{(II.64)}$$

$$d\Omega = |J| d\xi d\eta$$

$$d\Gamma = d\theta \quad \text{car } \Gamma_2 \text{ definit par } \begin{cases} m = \text{constant} \\ \theta : \text{varie} \end{cases}$$

$$\text{donc : } d\xi = Js d\eta \quad \text{avec : } \xi = 1$$

$$Js = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (\text{voir Annex : B})$$

$$k_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} k \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial m}{\partial \xi} \frac{\partial N(i)}{\partial \eta} - \frac{\partial m}{\partial \eta} \frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial m}{\partial \xi} \frac{\partial N(j)}{\partial \eta} - \frac{\partial m}{\partial \eta} \frac{\partial N(j)}{\partial \xi} \right) + \left( -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N(i)}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \right) \left( -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N(j)}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N(j)}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{|J|} d\xi d\eta \right. \\ \left. \frac{\sin \alpha}{r} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N(i)}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \right) N(j) |J| \right. \\ \left. - \int_{-1}^{+1} k \frac{\sin \alpha}{r} N(i) N(j) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta \right] \dots \text{(II.65)}$$

avec :

$$k = \frac{1}{\rho_i b_i}$$

$b, r, \alpha$  dépendant de  $m$

le vecteur de force

$$F_e(i) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N(i) \sum_{i=1}^8 N(i) F_i |J| d\xi d\eta \quad \dots \text{(II.66)}$$

avec  $F_i = 2\omega \sin \alpha(i)$

$\omega$  : la vitesse de rotation

## II.5. INTEGRATION NUMERIQUE :

Les calculs de la matrice de rigidité  $k$  et du vecteur force  $F$  reviennent à effectuer des intégrals doubles sur le carré  $(-1,+1) \times (-1,+1)$  bien que les intégrales soient celles de polynômes à deux variables de degré  $\leq 6$ , l'intégration formelle n'est pas aisée à cause du calcul des coefficients de ces polynômes. les méthodes d'intégrations seront donc employées.

### II.5.1. METHODE PRODUIT DE GAUSS :

Pour l'élément de référence carré, la méthode produit est souvent la plus utilisée. Elle peut s'exprimer :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j Y(\xi_i, \eta_j) \quad \dots \text{(II.67)}$$

Où :

$r_1, r_2$  sont les points d'intégrations .

$w_i, w_j$  sont les coefficients de pondération correspondants.

$\xi_i, \eta_j$  sont les coordonnées des points d'intégrations correspondants.

### II.5.2. PRECISION DE L'INTEGRATION :

Par la méthode d'intégration de **Gauss** il faut  $3 \times 3$  points pour intégrer exactement la matrice de rigidité  $K$ . cependant cette méthode est un peu trop précise puisqu'elle intègre des termes  $\xi_i, \eta_j ; i \leq 5, j \leq 5$ .

Très souvent on utilise une intégration à  $2 \times 2$  points pour l'élément quadratique à huit noeuds, celle -ci donne d'excellents résultats. l'intégration est dite Réduite

Pour le vecteur force  $F$ , il faut utiliser  $2 \times 2$  points de Gauss, ou une méthode directe du 3<sup>ème</sup> ordre pour intégrer exactement.

### REMARQUE :

pour l'intégral sur le contour, qui apparait dans le calcul de la matrice de rigidité  $K$  (dans le plan aube à aube), on utilise la méthode de **Gauss** à deux points. Donc l'expression (II.67) devient :

$$\int_{-1}^{+1} Y(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^{r=2} w_i Y(\eta_i) \quad \dots \text{(II.68)}$$

pour que cette approximation soit exacte pour un polynôme de degré  $2r-1=3$ , il faut prendre  $w_1 = w_2 = 1$ ;  $\eta_1 = -\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

On résume les coordonnées et les poids des points d'intégrations adoptés dans notre travail dans le tableau suivant :

points	Coordonnées		poids
	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$
a	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	1
b	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	1
c	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
d	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1

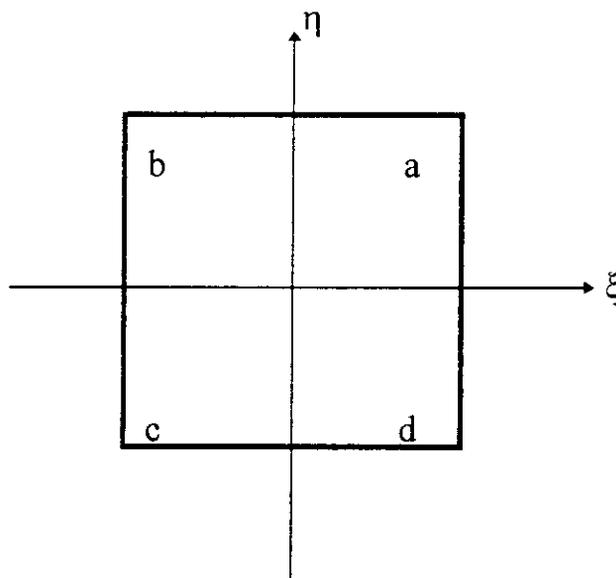


fig.II.5 : Méthode de produit à  $2 \times 2$  points

## II.6. METHODE DE RESOLUTION :

Les fonctions de courant exprimées en chaque point des maillage forme le système d'équations suivant :

$$[K][\psi]=[F]$$

Dans la résolution de ce système on utilise la méthode itérative dite de la *SECANTE*. La procédure de calcul itératif est la suivante :

- On se donne une valeur approchée de  $\psi$  sur le domaine notée  $\psi^{(0)}$  ainsi que toutes les quantités nécessaires pour calculer le second membre ;

- cela permet de calculer les matrices  $K^{(0)}$  et  $F^{(0)}$  ; et la résolution de système d'équation donne la valeur de  $\psi^{(1)}$ .

-on calcule alors  $K^{(1)}$  et  $F^{(1)}$  qui donnent alors  $\psi^{(2)}$  et ainsi de suite.

A l'itération n on aura à résoudre le système :

$$[K^{(n-1)}][\psi^{(n)}]=[F^{(n-1)}]$$

L'introduction d'un facteur de relaxation  $\omega$  dans le calcul de  $\psi$  est indispensable pour que le calcul soit stable numériquement.

$$\psi_i^{(n)} = \psi_i^{(n-1)} + \omega (\psi_i^{(n)} - \psi_i^{(n-1)})$$

le choix du facteur de relaxation joue un rôle prépondérant dans la convergence de la méthode de relaxation, pour le calcul des fonctions de courant on choisit un coefficient de l'ordre de  $10^{-2}$ .

### TEST DE CONVERGENCE:

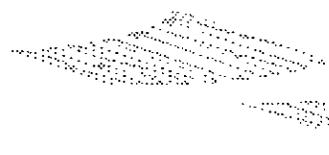
pour la convergence on utilise la notion des erreurs relatives.

Le paramètre de convergence est donc:

$$\varepsilon = \max \left| \frac{\psi_i^{(n)} - \psi_i^{(n-1)}}{\psi_i^{(n)}} \right| \quad i = 1, N$$

# CHAPITRE III

RESULTATS  
NUMERIQUES



## III. RESULTATS NUMERIQUES

Dans ce chapitre on présentera les résultats numériques obtenus dans les différents cas testés sur les deux plans (méridional et aube à aube )

Ces résultats sont obtenus avec les deux programmes fondés sur un schéma itératif à deux niveaux :

### A-PREMIERE SERIE D'ITERATIONS:

Au cours de ces itérations ,la masse volumique  $\rho(\psi,r,z)$  est supposée connue dans tout le champ de l'écoulement, et la seule variable à déterminer est la fonction de courant  $\psi$

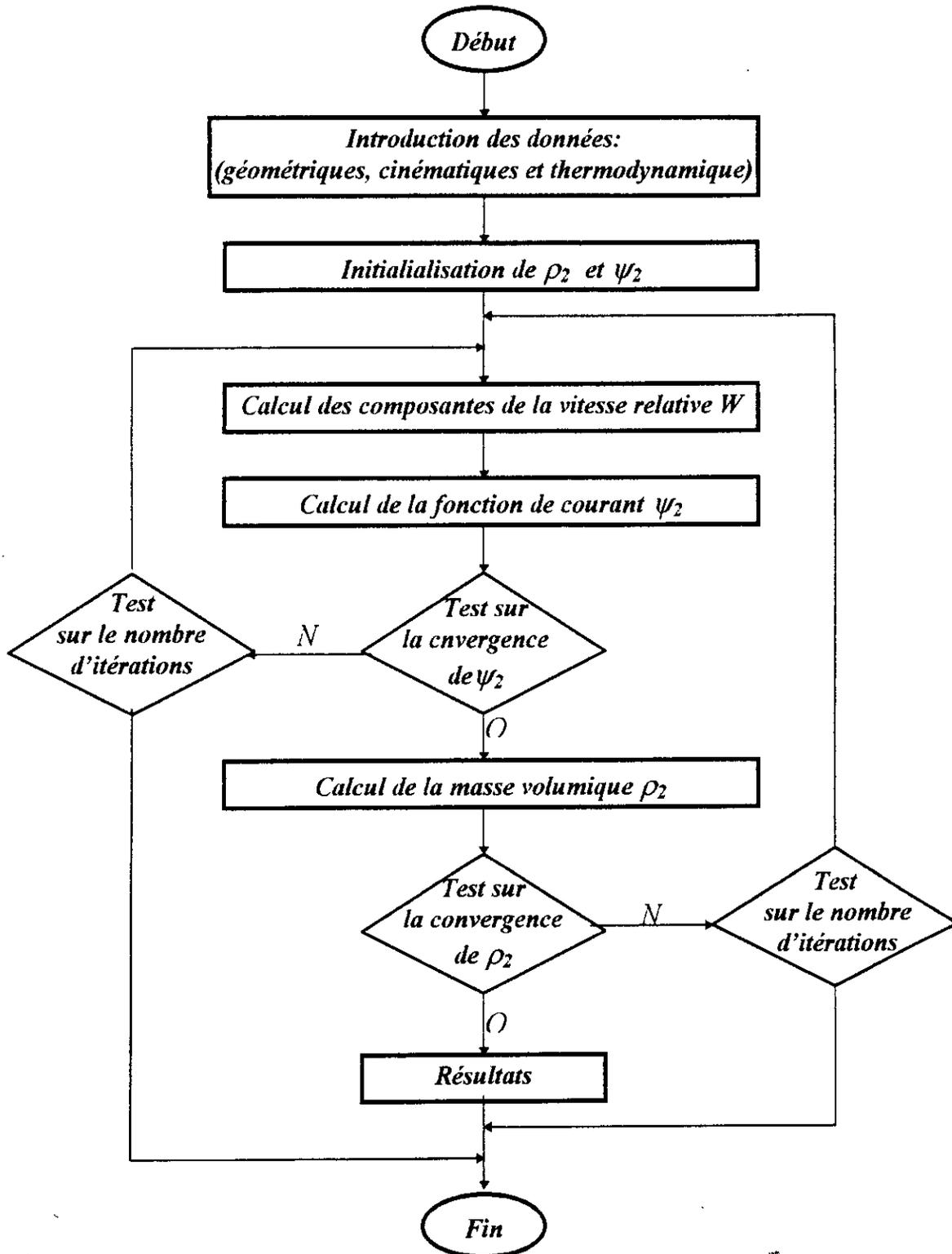
### B-SECONDE SERIE D'ITERATIONS:

Ayant obtenue à l'aide des itérations précédentes une fonction de courant  $\psi$  et donc un champ de vitesse  $V$  ,on calcule la masse volumique et on réinjecte ensuite cette nouvelle valeur de  $\rho$  dans la première série d'itération ,et on procède ainsi jusqu'à convergence .

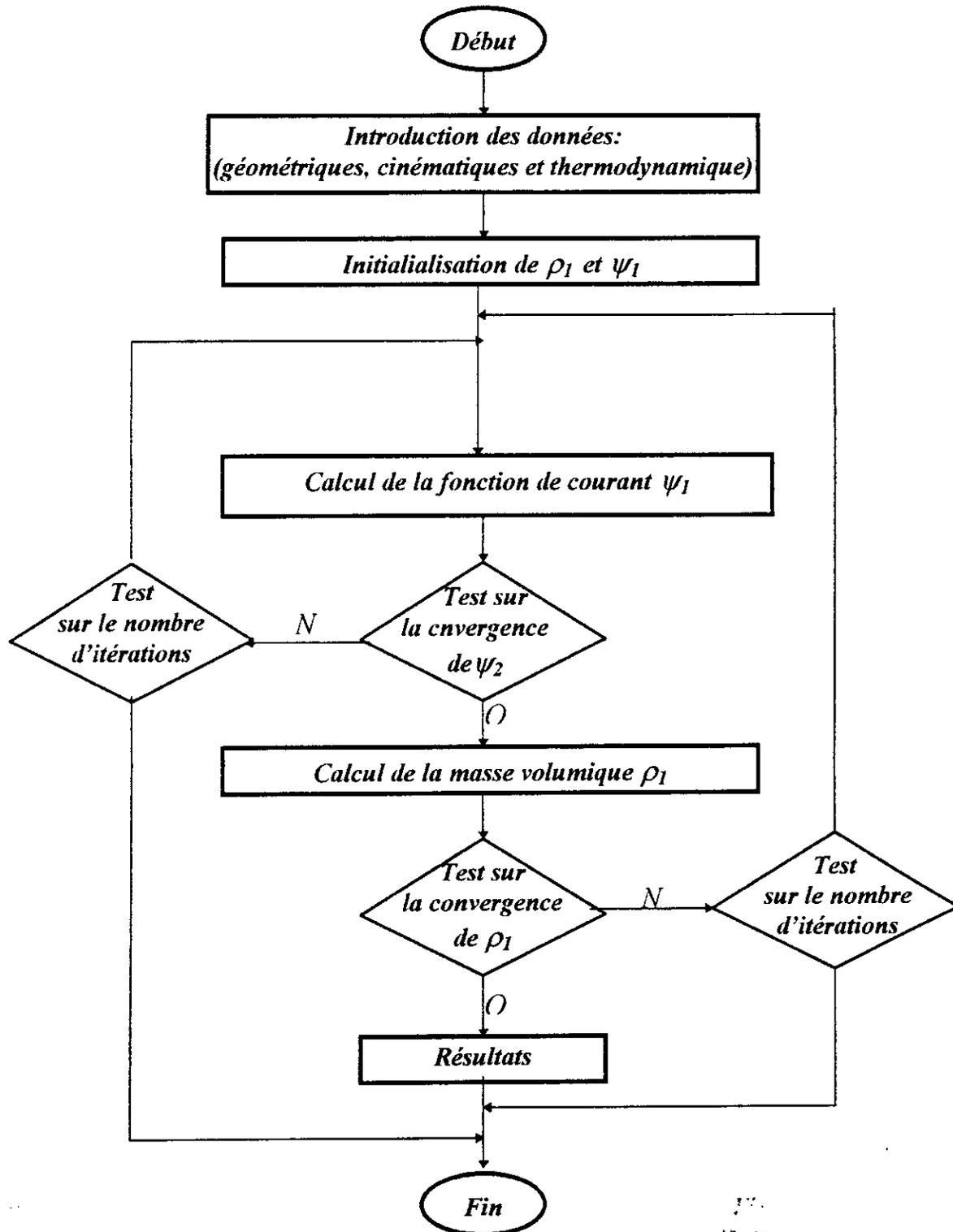
### SCHEMA DU CALCUL :

Les organigrammes de calcul sur les deux plans sont donnés comme suit :

## CALCUL POUR LE PLAN MERIDIONAL



## CALCUL POUR LE PLAN AUBE A AUBE



## **APPLICATION n°1**

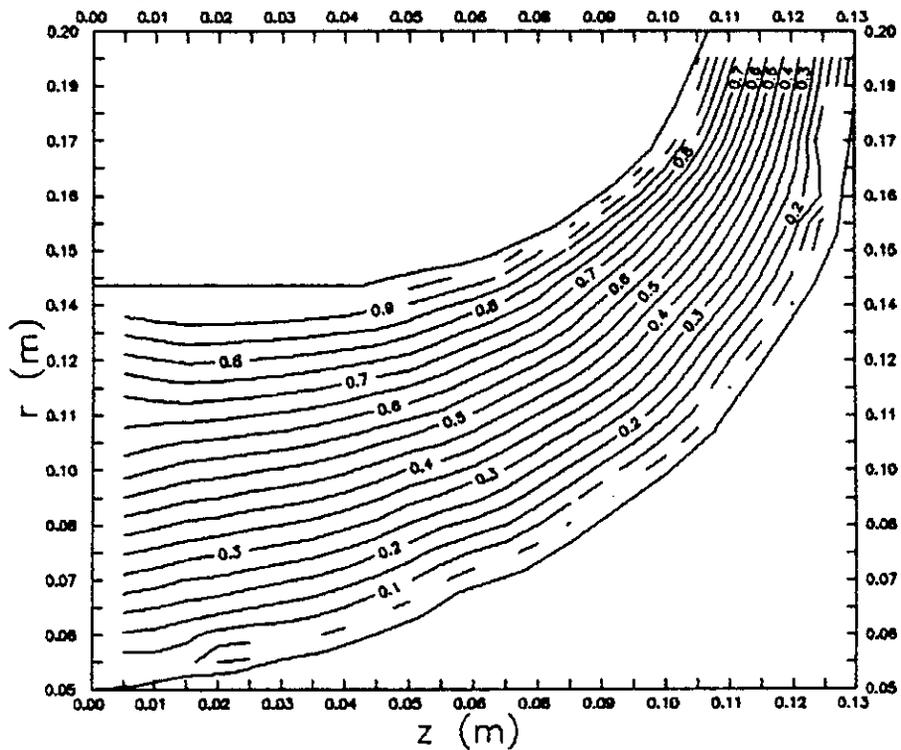
**Avec les conditions d'entrée:**

**le nombre de Mach : 0.2**

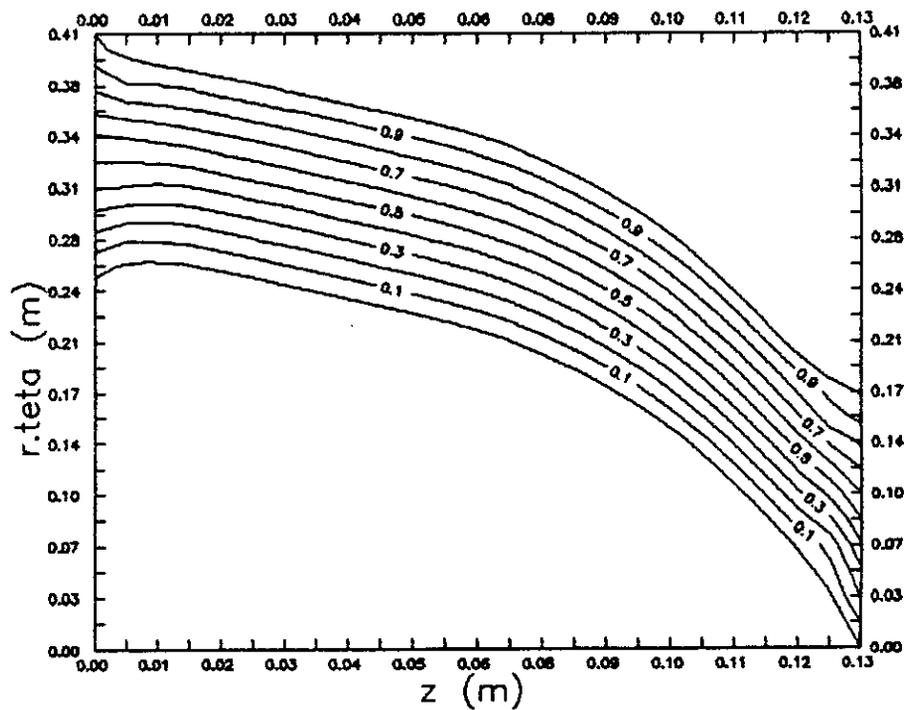
**le débit :  $10 \text{ m}^3/\text{s}$**

**la vitesse de rotation : 125rd/mn**

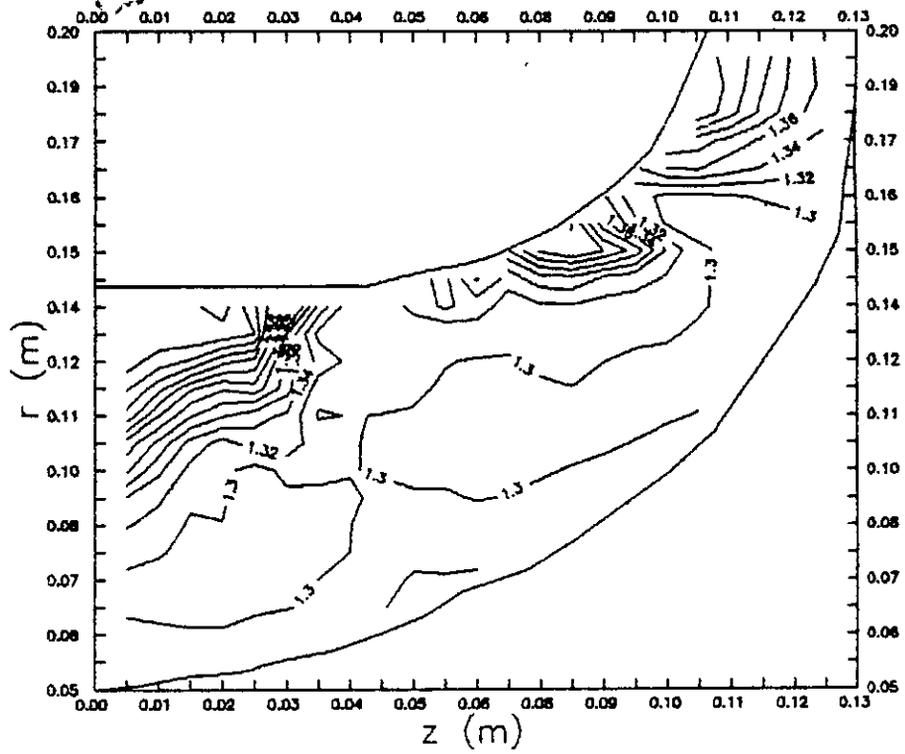
Repartition des lignes de courant  
dans le canal meridional



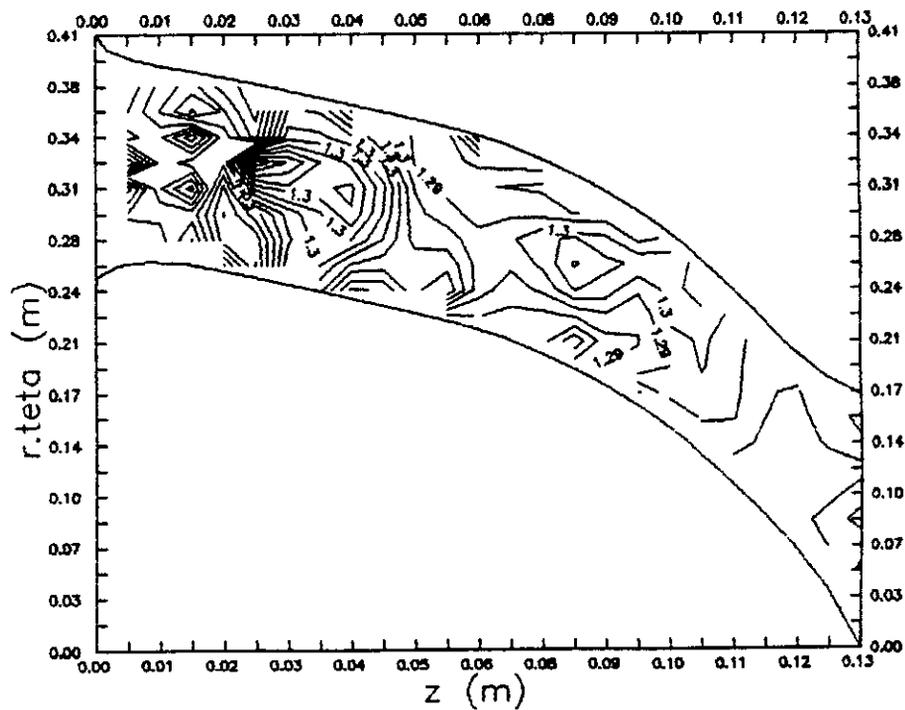
Repartition des lignes de courant  
dans le canal aube a aube



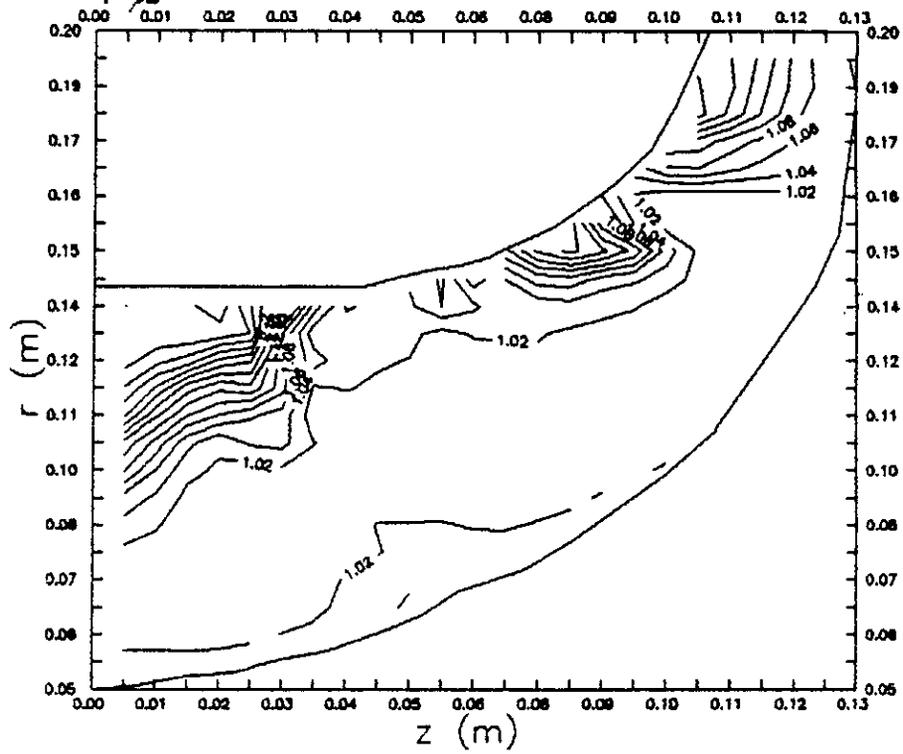
Repartition de la densite  
dans le canal meridional



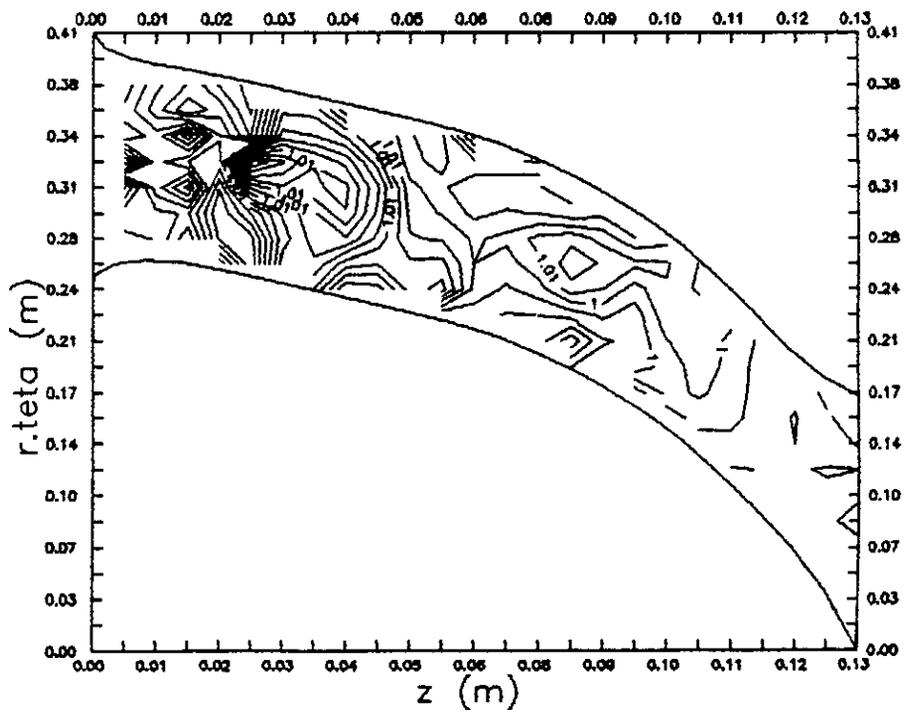
Repartition de la densite  
dans le canal aube a aube



Repartition du taux de compression  
dans le canal meridional



Rpartition du taux de compression  
dans le canal aube a aube



## **APPLICATION n°2**

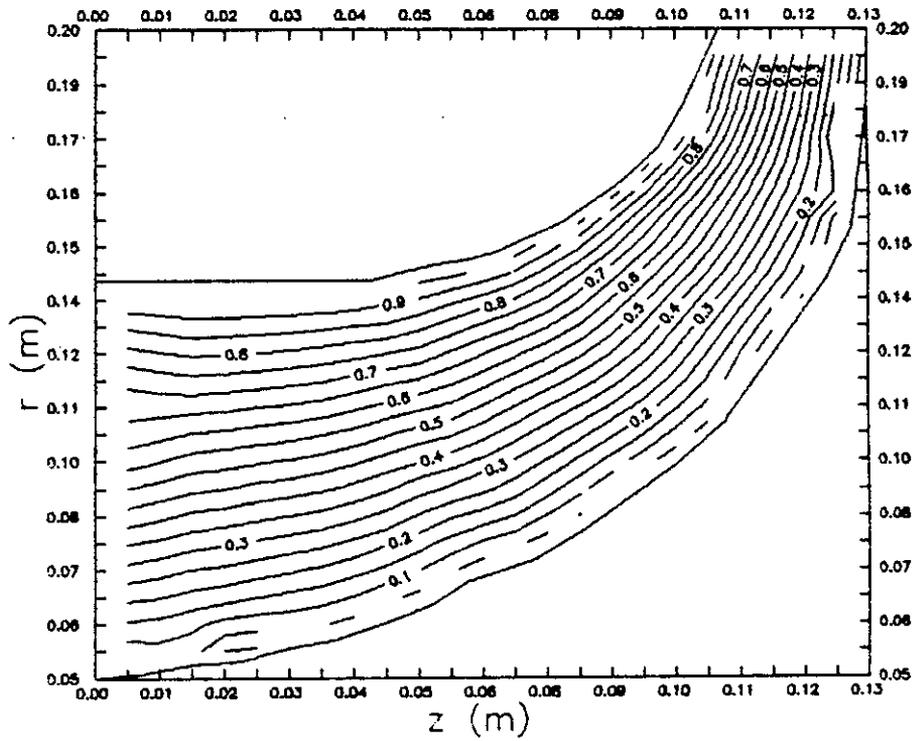
**Avec les conditions d'entrée:**

**le nombre de Mach : 0.4**

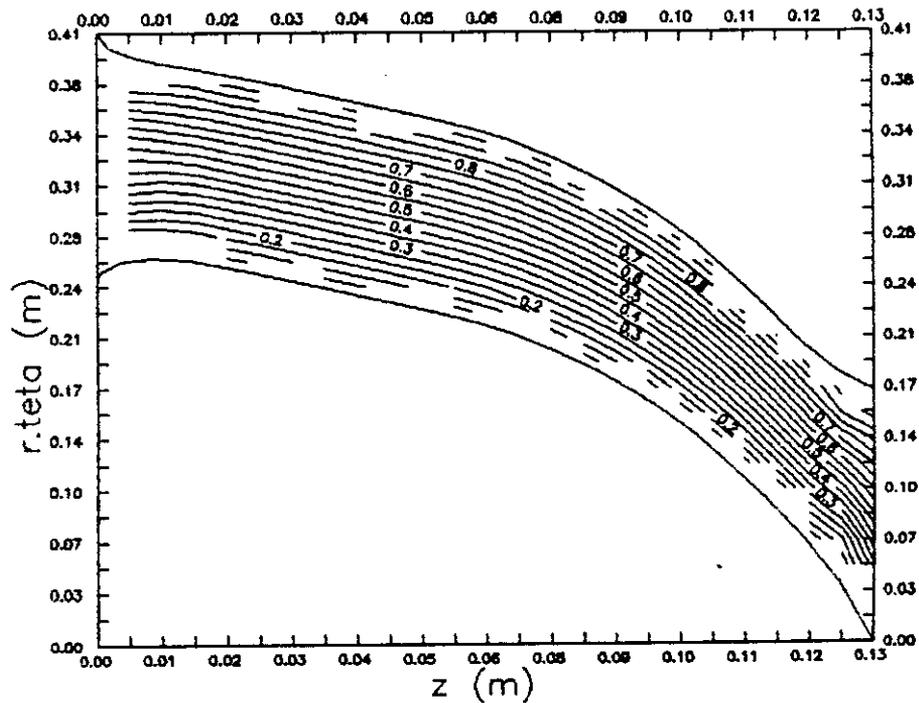
**le débit : 12.5185 m<sup>3</sup>/s**

**la vitesse de rotation : 125rd/mn**

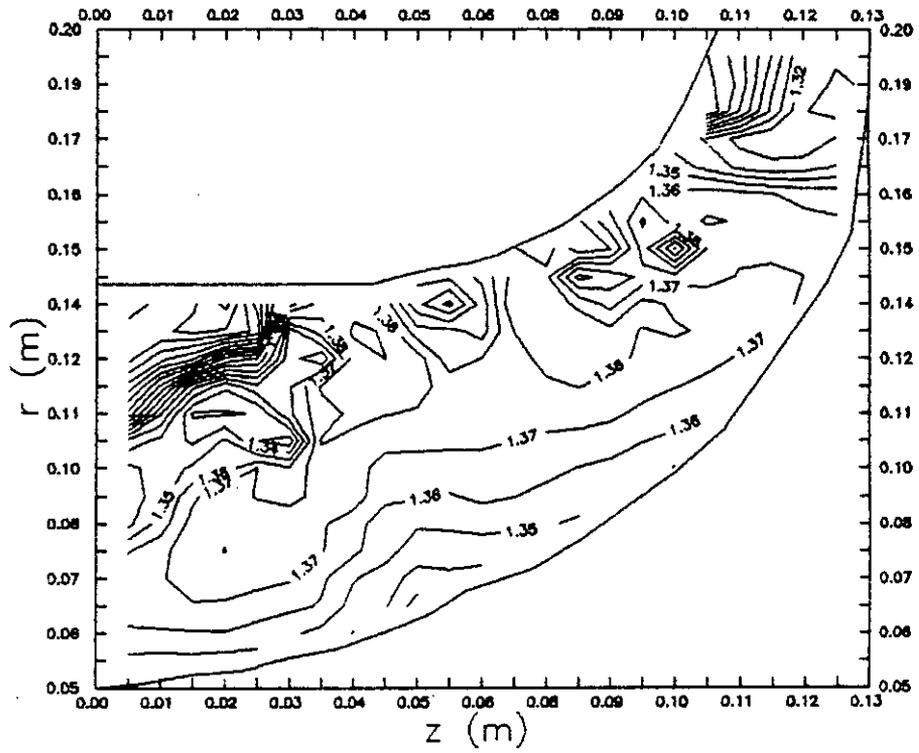
Repartition des lignes de courant  
dans le canal meridional



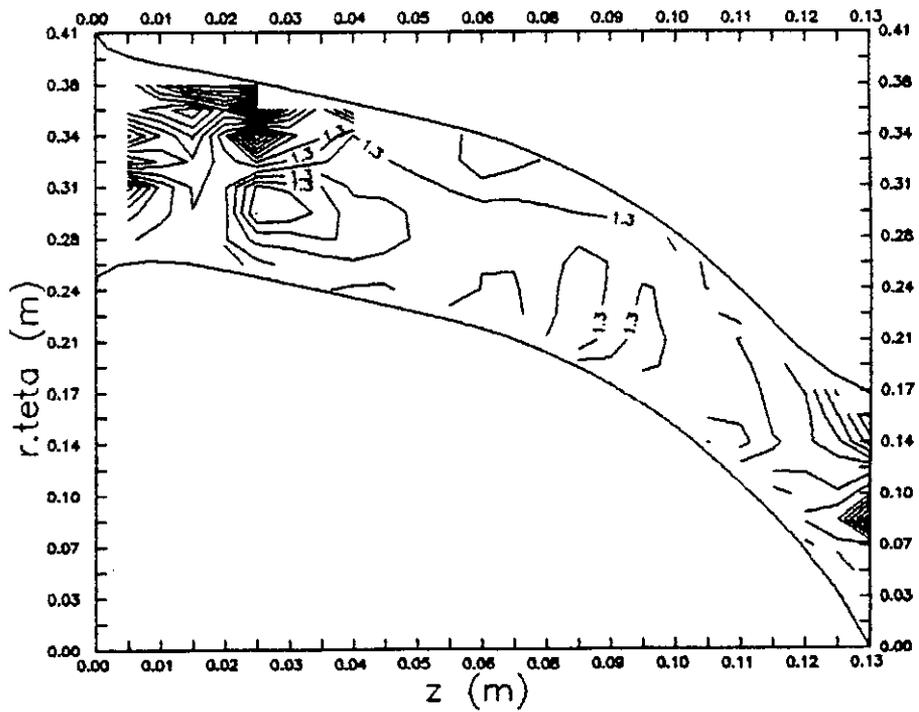
Repartition des lignes de courant  
dans le canal aube a aube



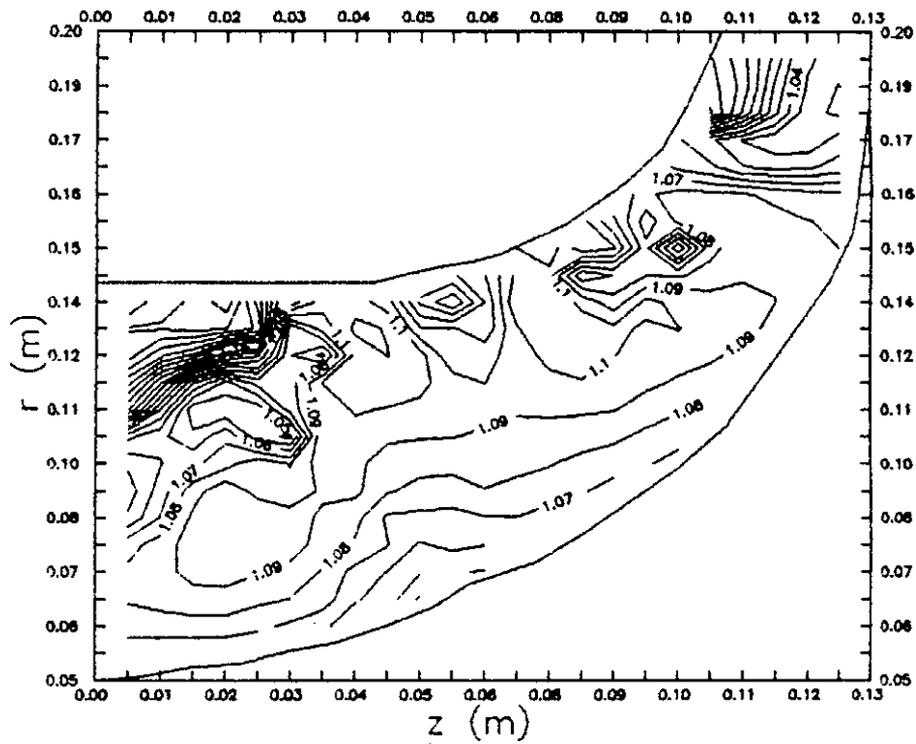
Repartition de la densite  
dans le canal meridional



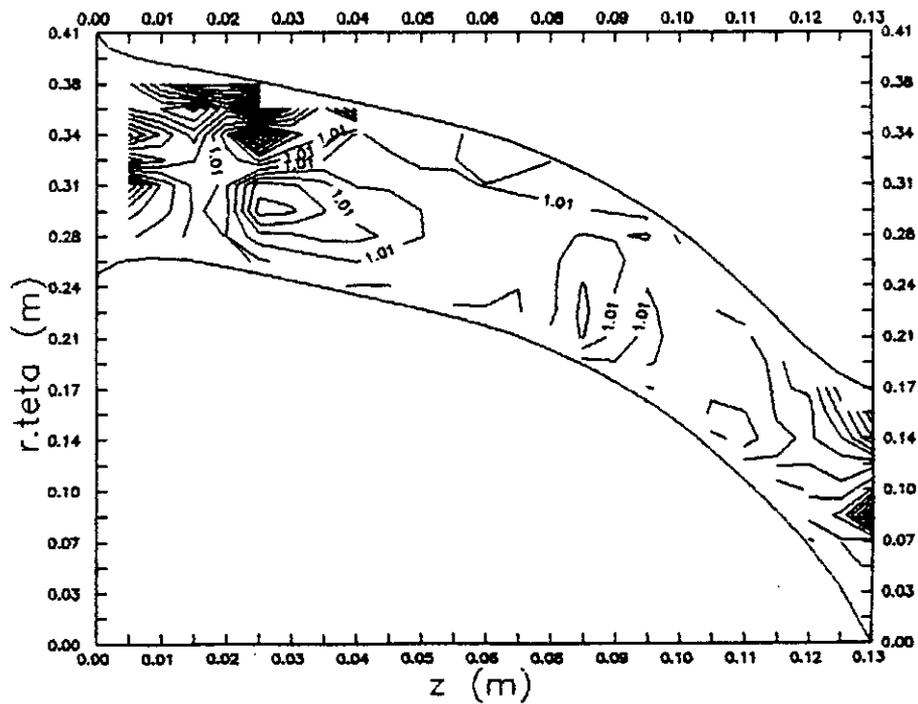
Repartition de la densite  
dans le canal aube a aube



Repartition du taux de compression  
dans le canal meridional



Repartition du taux de compression  
dans le canal aube a aube



## **APPLICATION n°3**

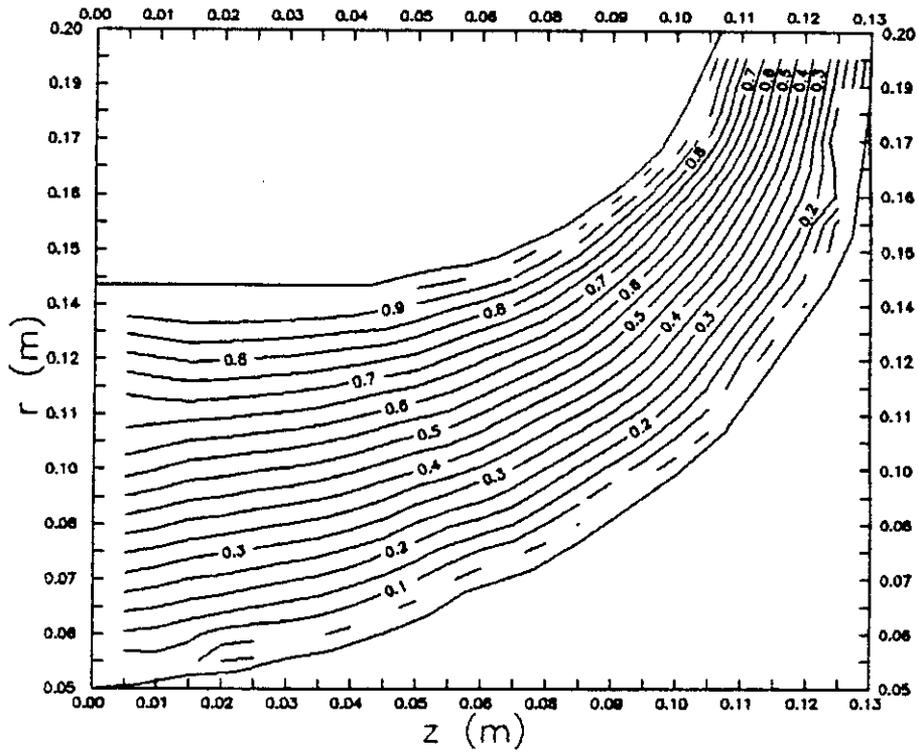
**Avec les conditions d'entrée:**

**le nombre de Mach : 0.6**

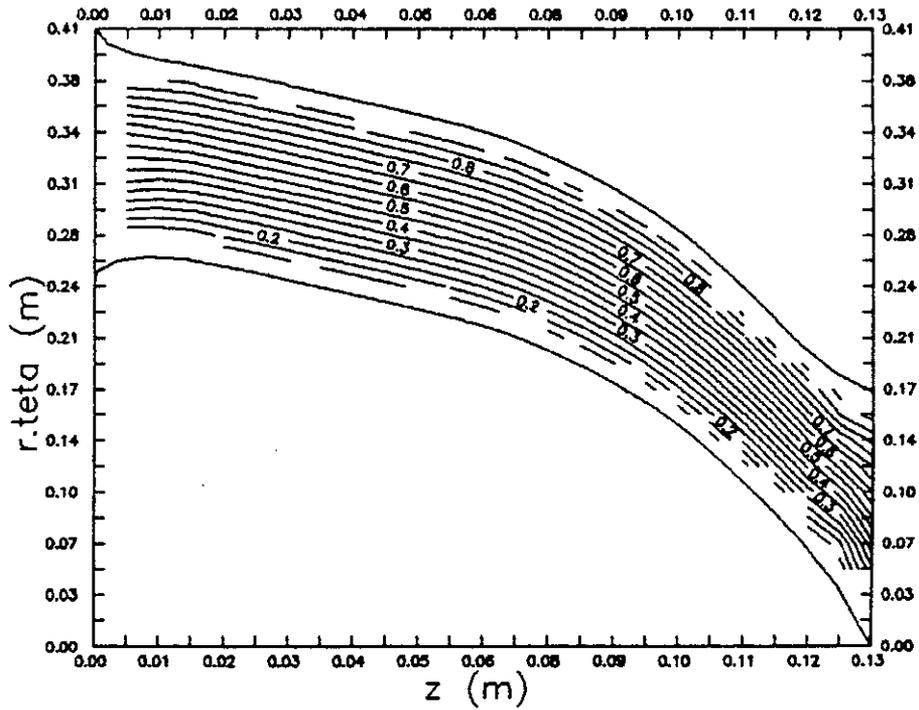
**le débit : 18.7778 m<sup>3</sup>/s**

**la vitesse de rotation : 125rd/mn**

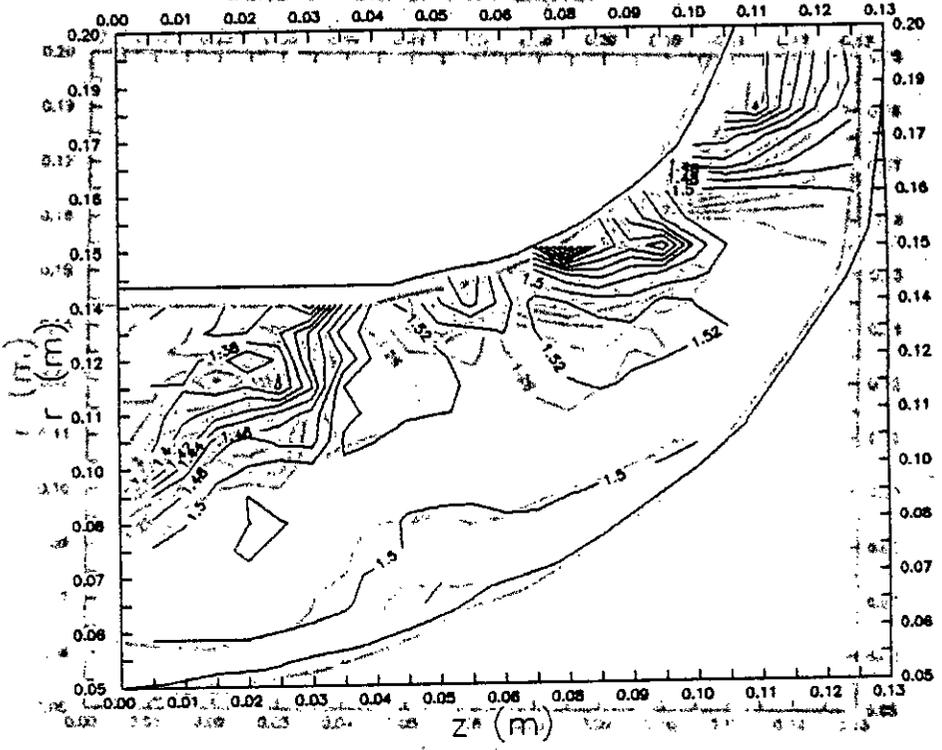
Repartition des lignes de courant  
dans le canal meridional



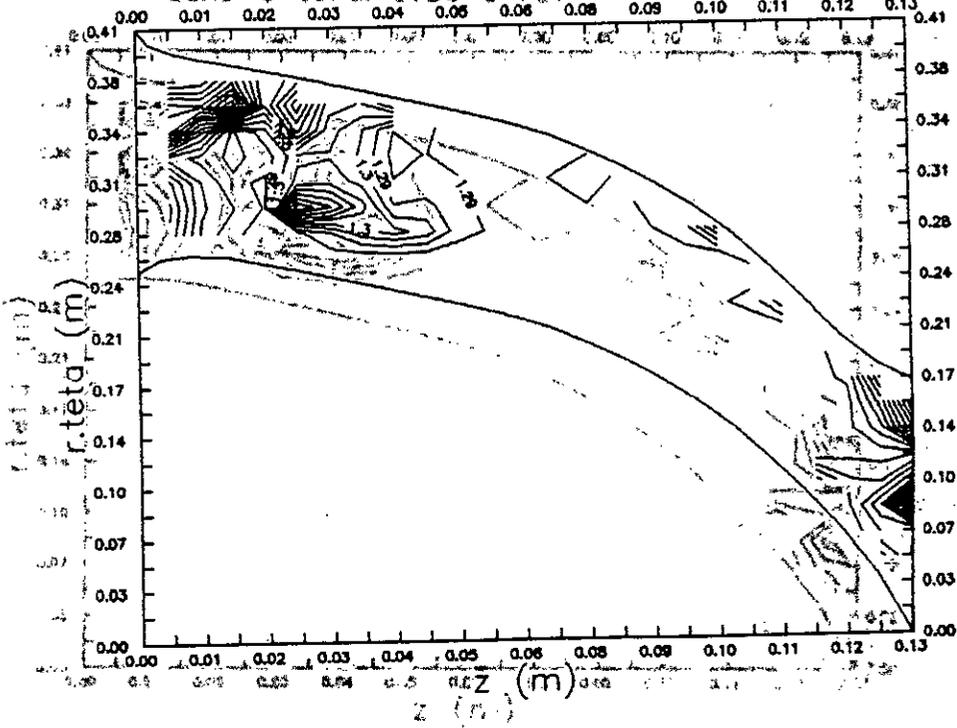
Repartition des lignes de courant  
dans le canal aube a aube



Repartition de la densite  
 dans le canal meridional  
 dans le canal meridional



Repartition de la densite  
 dans le canal aube caube  
 dans le canal aube caube





## **APPLICATION n°4**

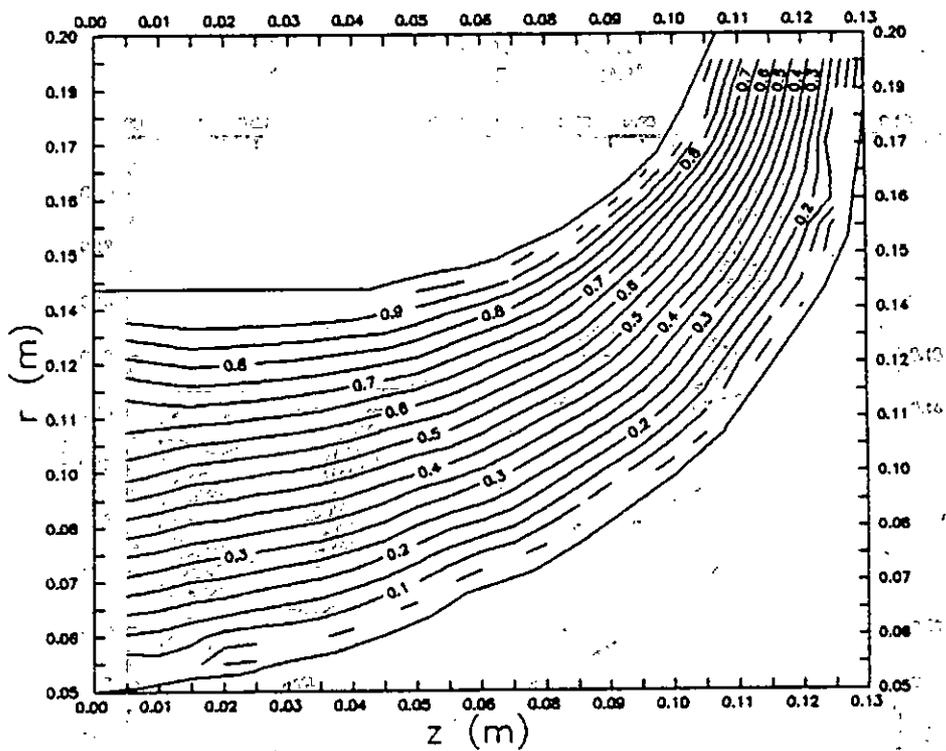
**Avec les conditions d'entrée:**

**le nombre de Mach : 0.8**

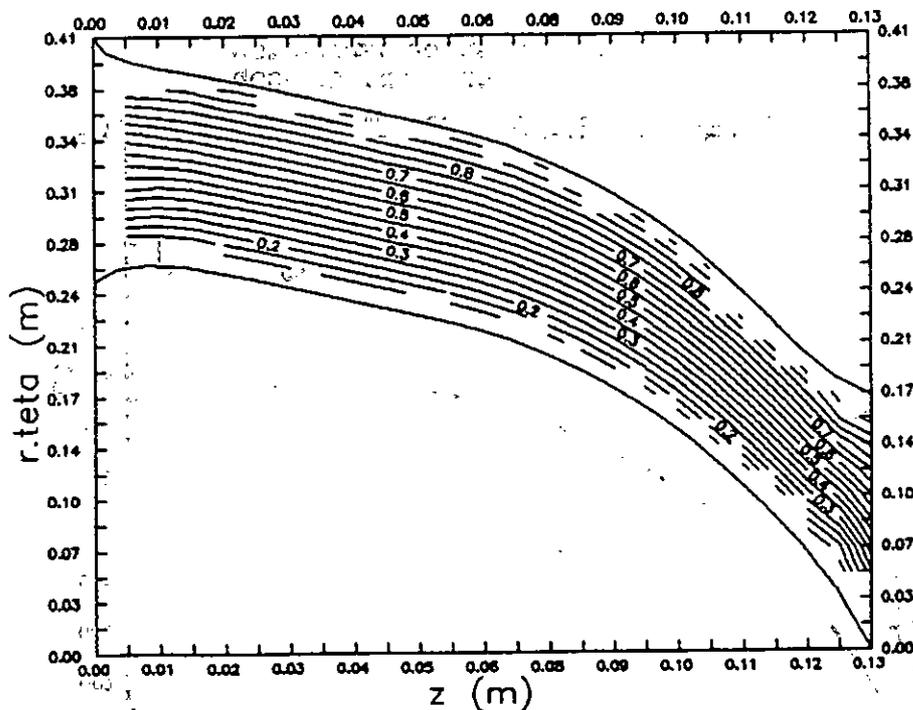
**le débit : 25.037708 m<sup>3</sup>/s**

**la vitesse de rotation : 125rd/mn**

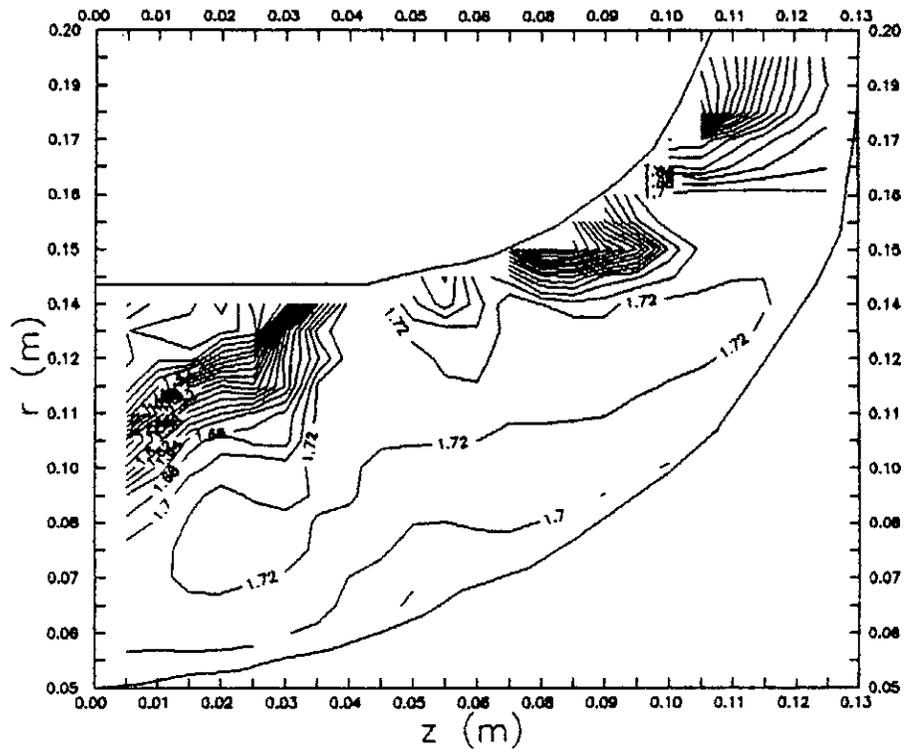
Repartition des lignes de courant dans le canal meridional



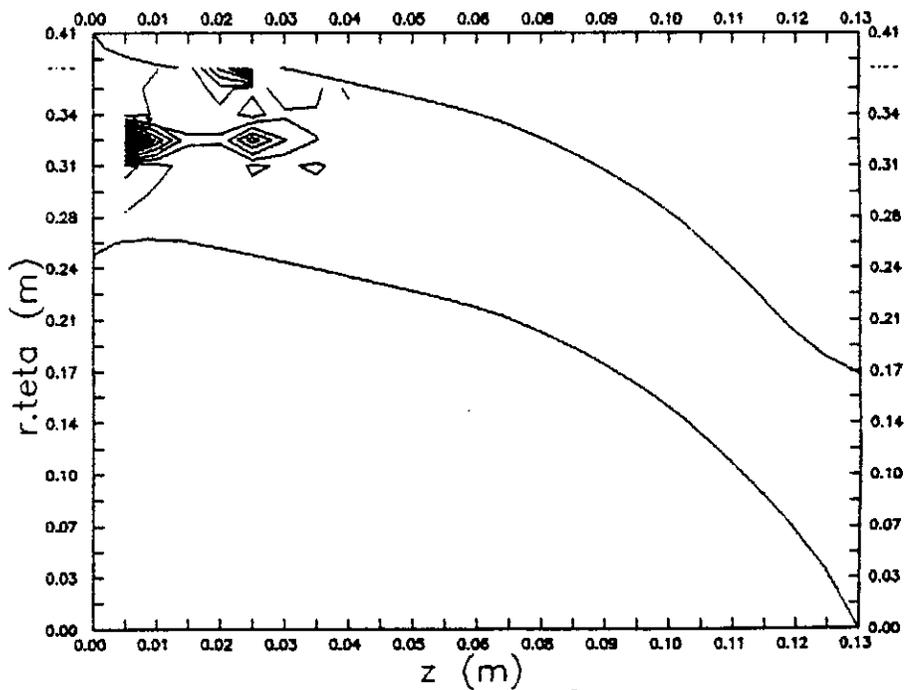
Repartition des lignes de courant dans le canal aube a aube



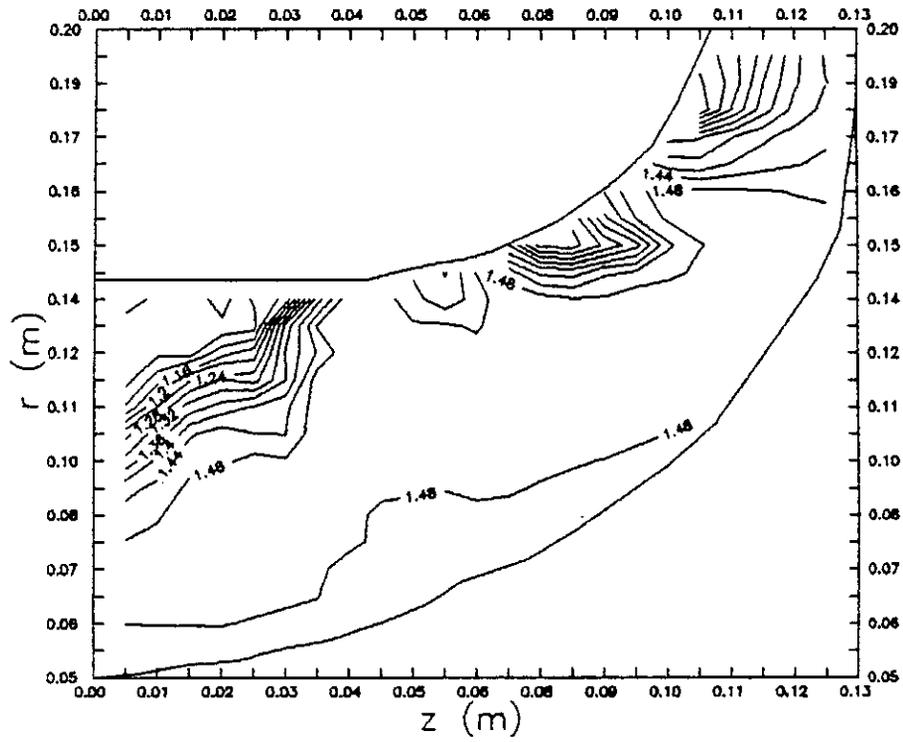
Repartition de la densite  
dans le canal meridional



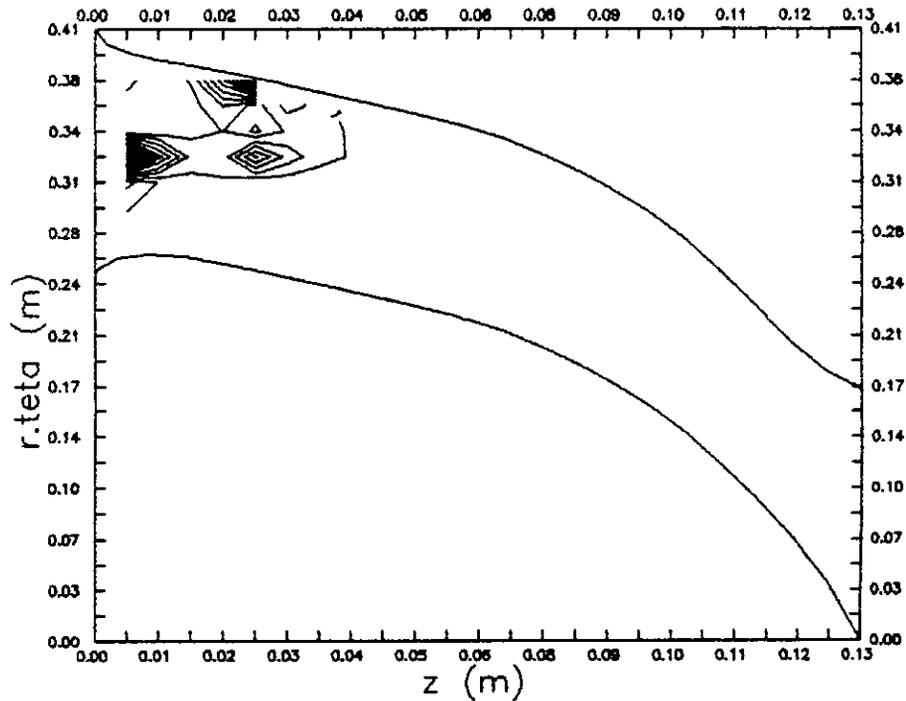
Repartition de la densite  
dans le canal aube a aube



Repartition du taux de compression  
dans le canal meridional



repartition du taux de compression  
dans le canal aube a aube



## **APPLICATION n°5**

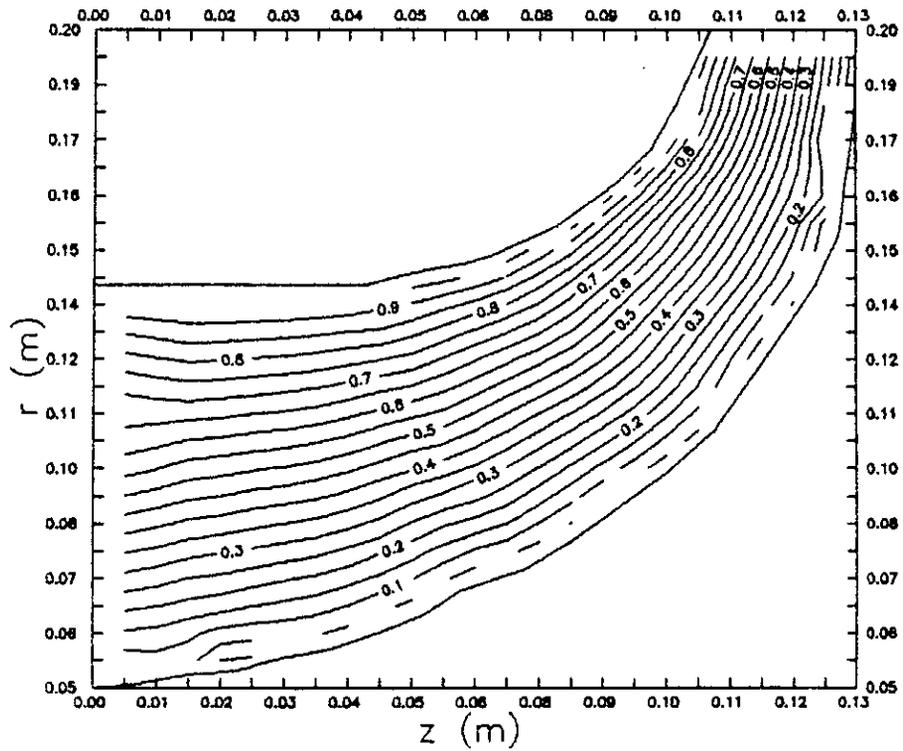
**Avec les conditions d'entrée:**

**le nombre de Mach : 1**

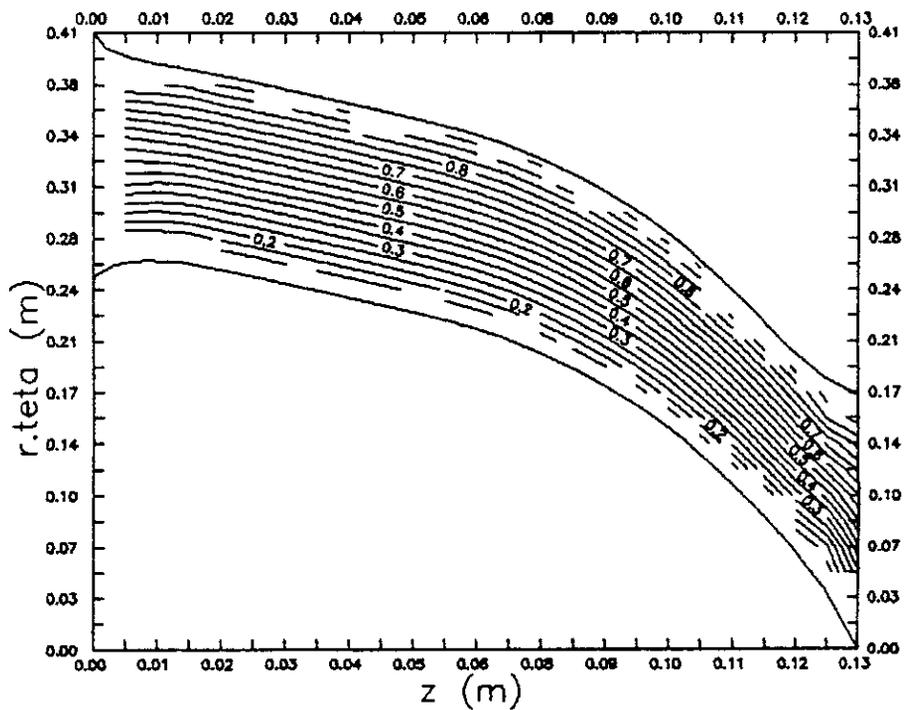
**le débit : 31.2963 m<sup>3</sup>/s**

**la vitesse de rotation : 125rd/mn**

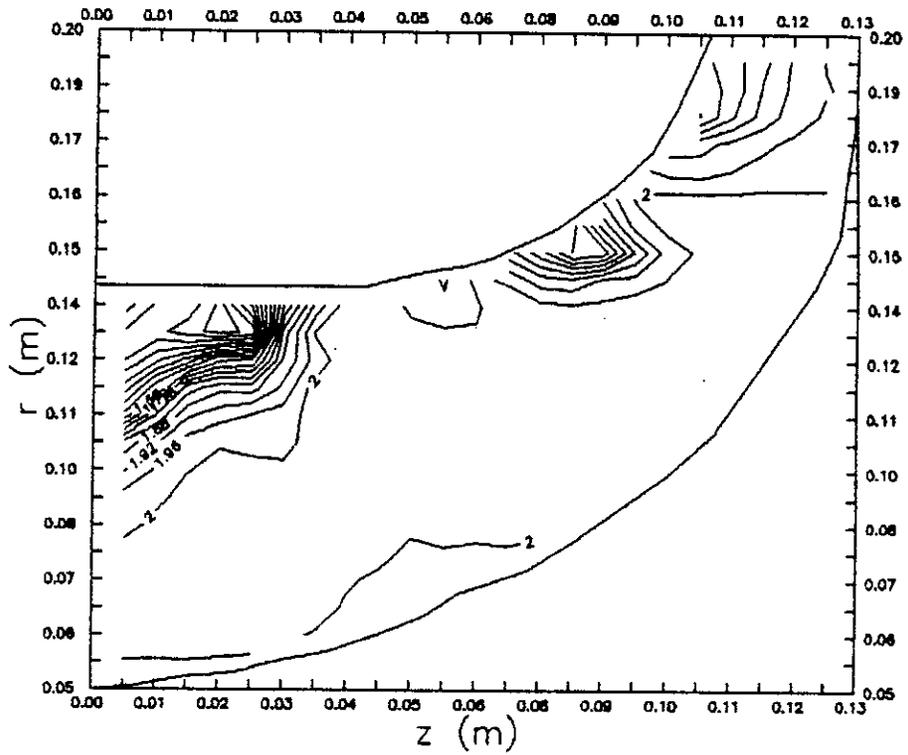
Repartition des lignes de courant  
dans le canal meridional



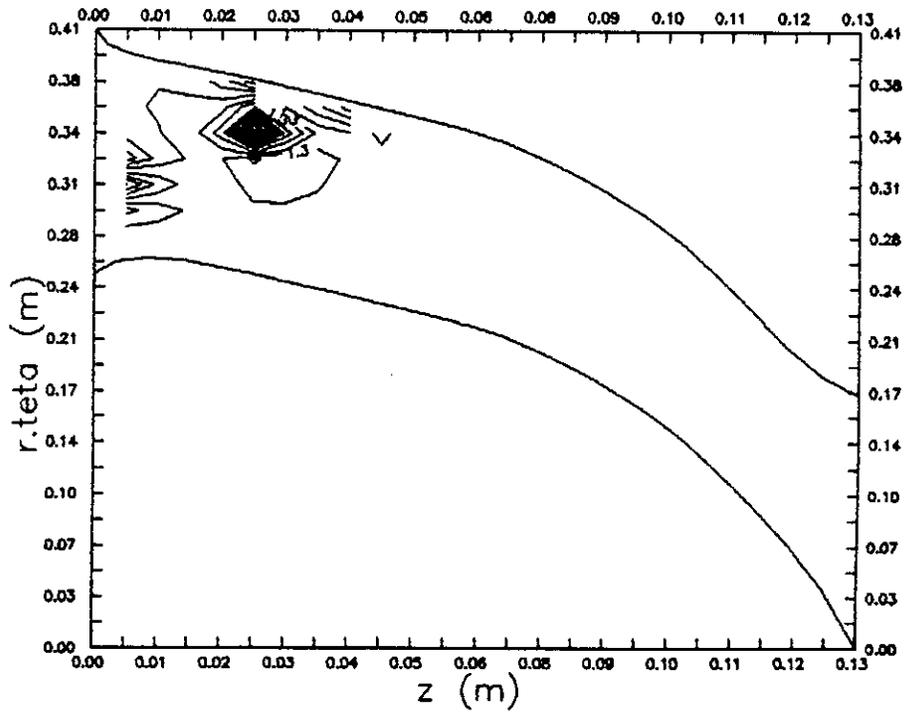
Repartition des lignes de courant  
dans le canal aube a aube



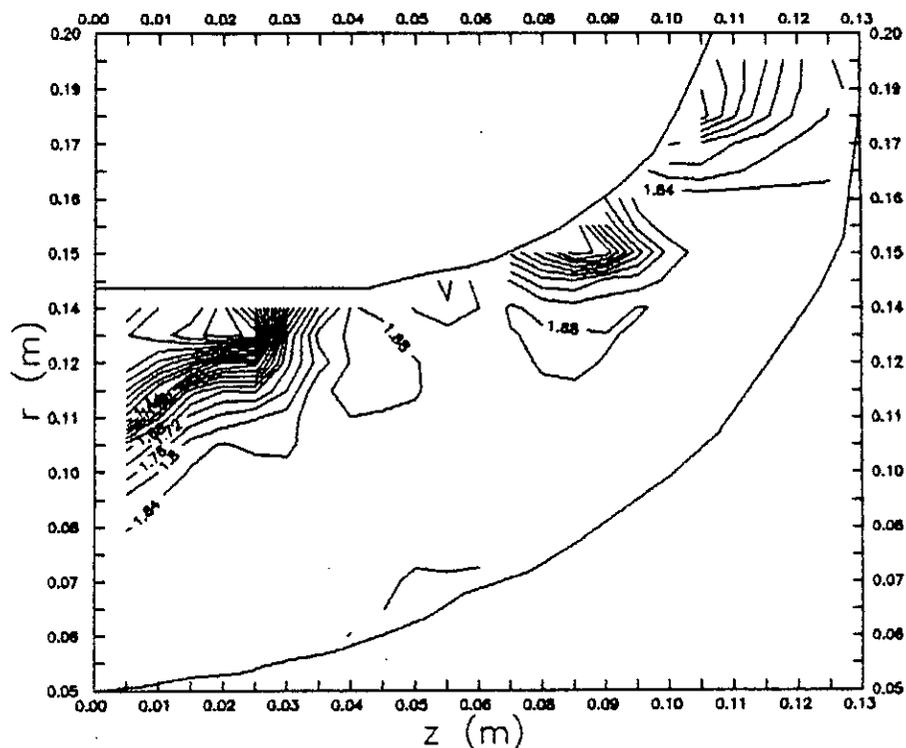
Repartition de la densité  
dans le canal meridional



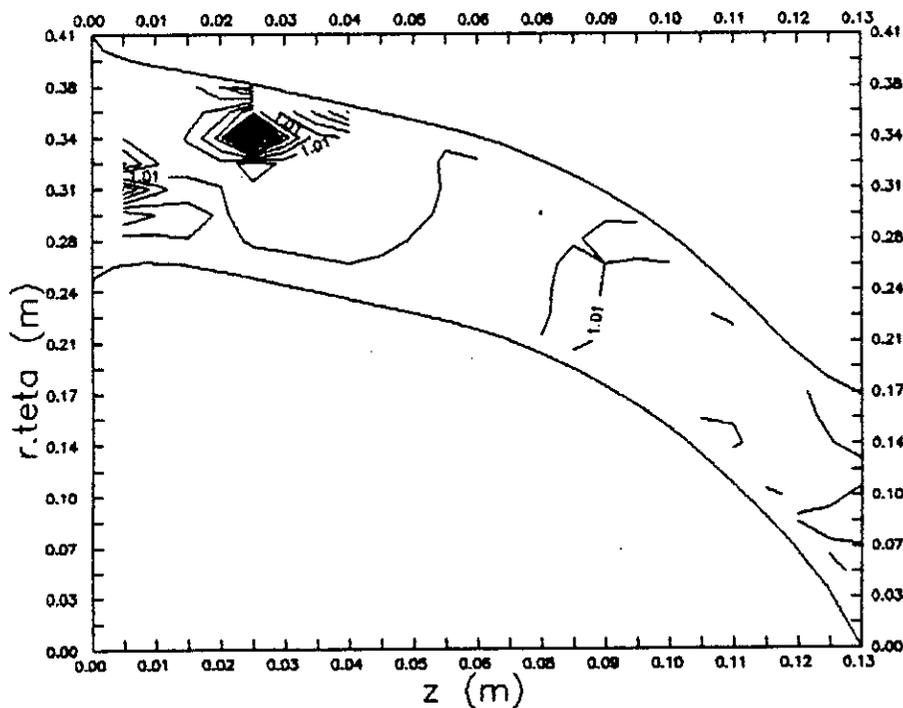
Repartition de la densité  
dans le canal aube a aube



Repartition du taux de compression  
dans le canal meridional



Repartition du taux de compression  
dans le canal aube a aube



## **APPLICATION n°6**

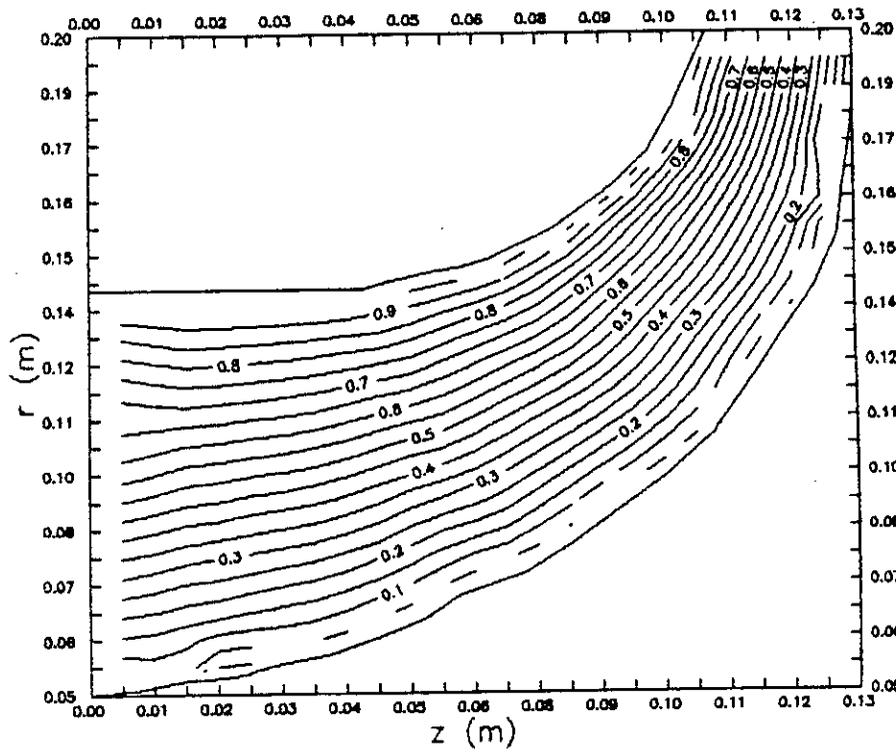
**Avec les conditions d'entrée:**

**le nombre de Mach : 1.2**

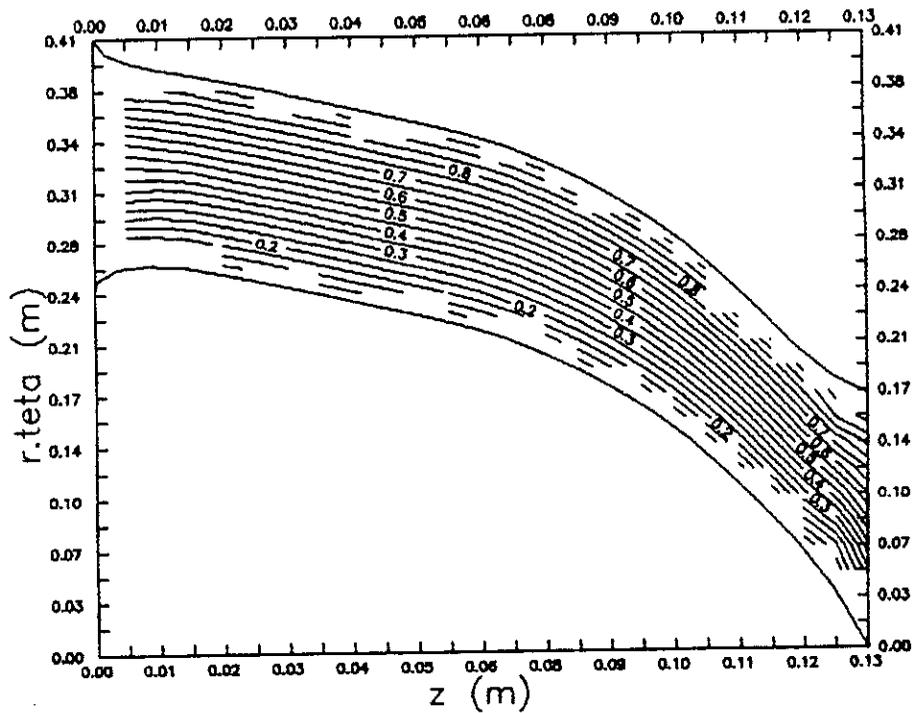
**le débit : 37.555 m<sup>3</sup>/s**

**la vitesse de rotation : 125rd/mn**

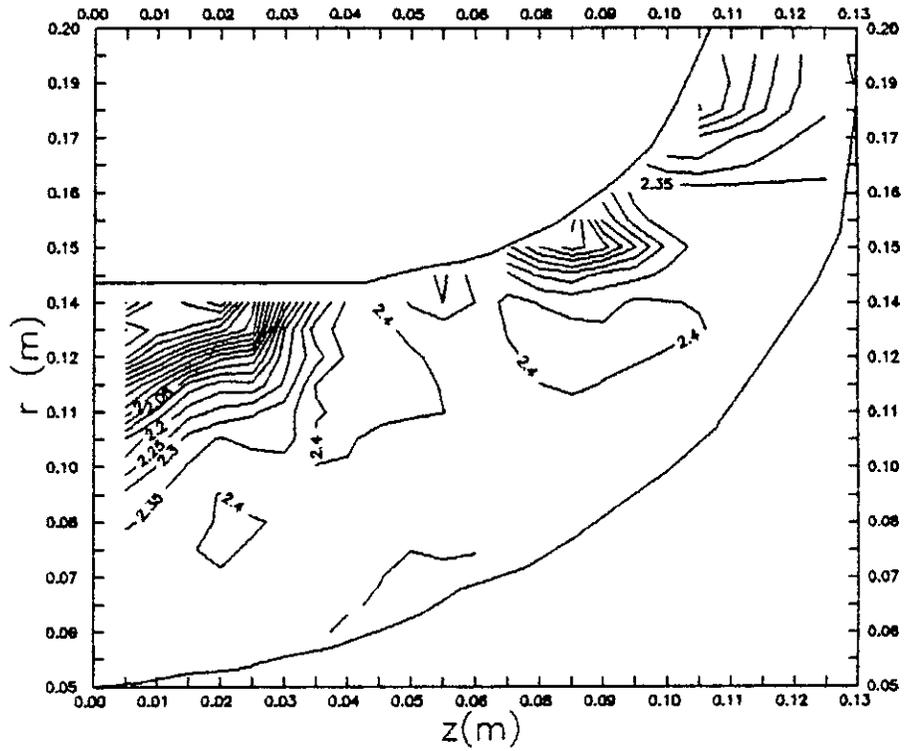
Repartition des lignes de courant  
dans le canal meridional



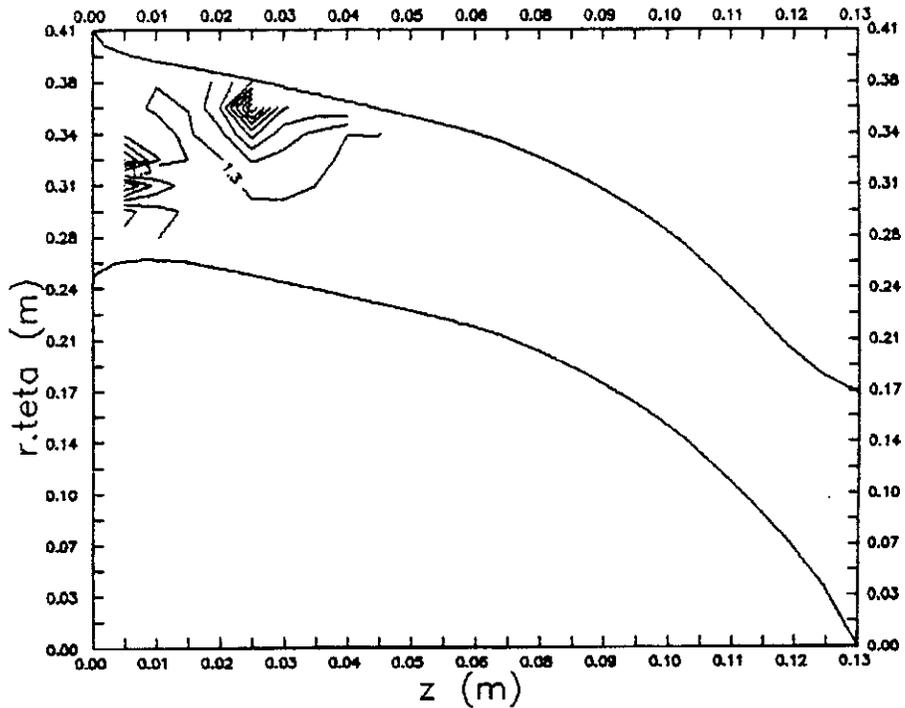
Repartition des lignes de courant  
dans le canal aube a aube



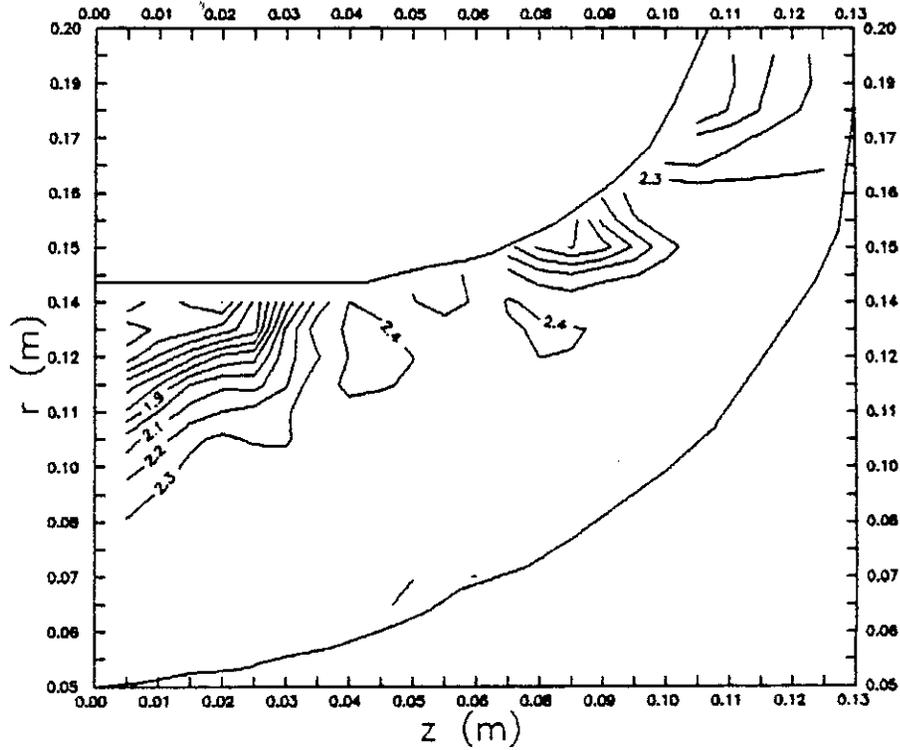
Repartition de la densite  
dans le canal meridional



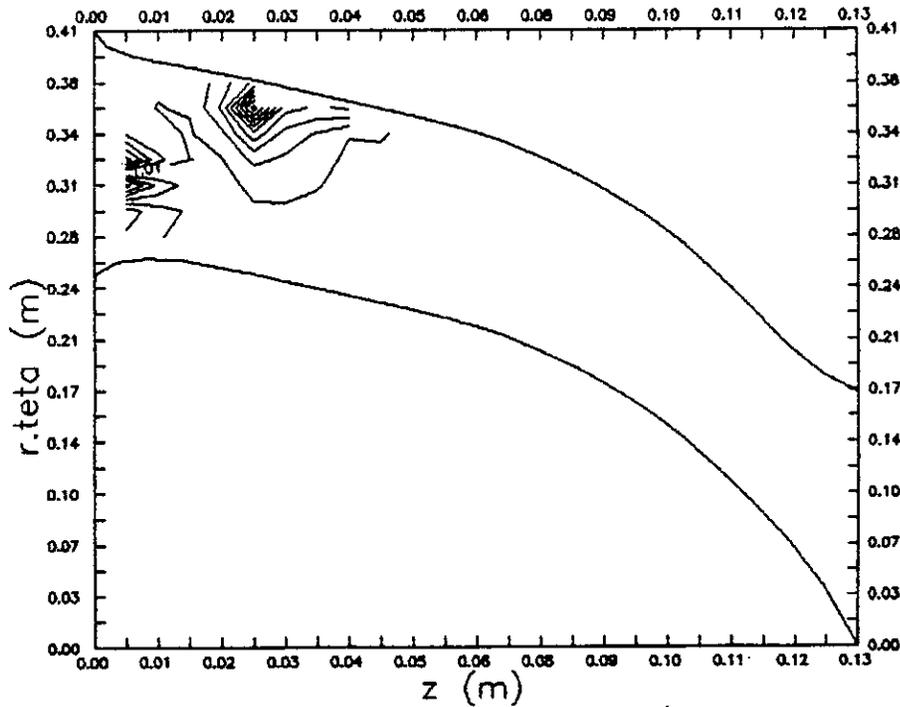
Rpartition de la densite  
dans le canal aube a aube



Repartition du taux de compression  
dans le canal méridional



Repartition du taux de compression  
dans le canal aube a aube



## INTERPRETATION DES RESULTATS

Les résultats des tests effectués sur un compresseur d'aviation , de type centrifuge , donnent une distribution logique des caractéristiques aéro et themodynamique du fluide dans chaque plan .

Dans le plan aube à aube les resultat sont conforme à la réalité , ceci est justifie par le fait que : le plan aube à aube présente une géométrie simple (une canalisation de déviation ) , donc les parametres (taux de compression , la densité) ne doivent subir qu'une très légère variation .

conclusion

# conclusion

Au terme de ce travail, nous pouvons émettre certaines conclusions

- Comme la simplicité et la l'efficacité de la méthode de C.H.WU pour l'analyse de l'écoulement dans les turbomachines .
- Pour la résolution numérique, la méthode des éléments finis s'est avérée un outil précieux grâce aux possibilités qu'elle offre pour le traitement des géométries complexes .

Pour une approche plus concrète de l'étude , il est souhaitable de poursuivre cette étude en incluant des paramètres nouveaux tels que la viscosité - les problèmes de la couche limite - et les pertes , cela en vue de rapprocher au plus des conditions réelles et d'affiner cette étude .

ANNEXES

## ANNEXE A

### DEFINITION DES DERIVEES SPECIALES

( ou dérivées selon une surface de courant )

Si l'on désigne par  $S(r, \theta, z) = 0$  l'équation de la surface de courant, nous avons :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial r} dr + \frac{\partial S}{\partial z} dz + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} (rd\theta).$$

N'étant un vecteur normal à S. La propriété suivante est vérifiée :

$$\frac{n_r}{(\partial S / \partial r)} = \frac{n_z}{(\partial S / \partial z)} = \frac{n_\theta}{(1/r)(\partial S / \partial \theta)} = \frac{1}{\sqrt{(\partial S / \partial r)^2 + (\partial S / \partial z)^2 + ((1/r)(\partial S / \partial \theta))^2}}$$

Nous définissons les dérivées spéciale d'une fonction scalaire  $q(r, \theta, z)$  comme suit:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial r} dr + \frac{\partial q}{\partial z} dz + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} (rd\theta) = \bar{\partial} q dr + \bar{\partial} q dz$$

Or,

$$rd\theta = -\frac{(\partial S / \partial r) dr}{(1/r)(\partial S / \partial \theta)} - \frac{(\partial S / \partial z) dz}{(1/z)(\partial S / \partial \theta)} = -\frac{n_r}{n_\theta} dr - \frac{n_z}{n_\theta} dz.$$

En remplaçant et en identifiant terme à terme, dans la relation précédente nous obtenons :

$$\begin{aligned} \bar{\partial} q / \partial r &= \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} \\ \bar{\partial} q / \partial z &= \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} \end{aligned}$$

## I. INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION DE CONTINUTE :

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho r w_\theta] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho r w_z] = 0 \quad (\text{A.1})$$

Introduction des dérivées spéciales :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{1}{r^2 n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho r w_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w_\theta] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w_z] + \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_z] = 0 \quad (\text{A.2})$$

On aura

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_z] = -\frac{n_r}{r^2 n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho r w_r] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho r w_\theta] - \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho r w_z] \quad (\text{A.3})$$

D'où :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho r w_z] = -\frac{1}{r n_\theta} \left[ n_r \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r w_r) - n_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r w_\theta) - n_z \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r w_z) \right] \quad (\text{A.4})$$

On pose :

$$c(r, z) = -\frac{1}{r n_\theta} \left[ n_r \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r w_r) - n_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r w_\theta) - n_z \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r w_z) \right] \quad (\text{A.5})$$

L'équation (4) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r w_r] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho r w_z] = c(r, z) \quad (\text{A.6})$$

## II. INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION DU MOUVEMENT :

### A. EQUATION DU MOUVEMENT RADIAL :

L'équation du mouvement radial est donnée par :

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) = -\frac{d}{dr} + T \frac{\partial S}{\partial r} \quad (\text{A.7})$$

La dérivée spéciale pour toute quantité Q est donnée par :

$$-\frac{\bar{\partial}(Q)}{\partial r, z} = \frac{\partial(Q)}{\partial r, z} + \frac{n_{r,z}}{rn_\theta} \frac{\partial(Q)}{\partial \theta}$$

ainsi l'équation de mouvement radial devient après introduction des dérivées spéciales :

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) + \frac{n_r}{rn_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (rV_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] + w_z \left( \frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} + \frac{n_z}{rn_\theta} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$-\frac{\bar{\partial} w_z}{\partial r} - \frac{n_r}{rn_\theta} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} = -\frac{\bar{\partial} l}{\partial r} - \frac{n_r}{rn_\theta} \frac{d}{dr} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + T \frac{n_r}{rn_\theta} \frac{\partial S}{\partial \theta}$$

ou encore :

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) \right] + w_z \left( \frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} - \frac{\bar{\partial} w_z}{\partial r} \right) = \frac{n_r w_\theta}{r^2 n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (rV_\theta) - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \quad (\text{A.9})$$

$$-\frac{n_z}{rn_\theta} w_z \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + \frac{n_r w_z}{rn_\theta} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} l}{\partial r} - \frac{n_r}{rn_\theta} \frac{d}{dr} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + T \frac{n_r}{rn_\theta} \frac{\partial S}{\partial \theta}$$

Calcul des expressions  $\frac{d}{dr}$  et  $\frac{\partial S}{\partial \theta}$

\*Calcul de  $\frac{\partial S}{\partial \theta}$

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$TdS = dU + pdv \quad (\text{A.10})$$

avec :  $h = U + pv \Rightarrow dh = dU + pdv + vdp$

D'où :

$$dU = dh - p\,dv - v\,dp$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} T\,ds &= dh - v\,dp \\ \Rightarrow T \frac{\partial s}{\partial \theta} &= \frac{\partial h}{\partial \theta} - v \frac{\partial p}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

avec :

$$v = \frac{1}{\rho}$$

L'équation (A.11) devient :

$$T \frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (\text{A.12})$$

\* Calcul de  $\frac{\partial s}{\partial \theta}$

La rothalpie  $I$  est donnée par :

$$I = H - \omega r V_\theta$$

Avec :  $H$  : enthalpie totale  
 $\omega$  : vitesse angulaire  
 $V_\theta$  : vitesse circumferentielle

où :  $H = h + \frac{V^2}{2}$       Avec :  $h$  : enthalpie statique  
 $V$  : vitesse absolue de particule

d'où :  $I = h + \frac{V^2}{2} - \omega r V_\theta$       (\text{A.13})

or :  $V \begin{cases} w_r \\ w_\theta + \omega r \\ w_z \end{cases} \Rightarrow V^2 = W^2 + \omega^2 r^2 + 2w_\theta \omega r$

on aura :

$$I = h + \frac{W^2}{2} - \omega^2 \frac{r^2}{2}$$

on dérivant par rapport à  $\theta$

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega^2 r^2)$$

après développement on obtient :

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + w_\theta \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \quad (\text{A.14})$$

Substituant les équations (A.12) et (A.14) dans (A.9) on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial \bar{S}}{\partial r} - \frac{n_r}{m_\theta \rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r m_\theta} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} [w_r n_r + w_\theta n_\theta + w_z n_z] & \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Etant donné que  $\bar{n}$  et  $\bar{w}^*$  sont  $\perp$  alors :

$$w_r n_r + w_\theta n_\theta + w_z n_z = 0$$

en fin on aura l'équation du mouvement radial :

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial \bar{S}}{\partial r} - \frac{n_r}{r \rho m_\theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \quad (\text{A.16})$$

où encore

$$-\frac{w_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \right] + w_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial \bar{S}}{\partial r} + F_r \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$F_r = -\frac{n_r}{r \rho m_\theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}$$

## B. EQUATION DU MOUVEMENT CIRCONFÉRENCIEL :

L'équation du mouvement circonferenciel est donnée par :

$$-\frac{w_r}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] - w_z \left( \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r} + \frac{T}{r} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \quad (\text{A18})$$

La dérivée spéciale pour toute quantité  $Q$  est donnée par :

$$\frac{\bar{\partial}(Q)}{\partial r, z} = \frac{\partial(Q)}{\partial r, z} + \frac{n_r, z}{rn_\theta} \frac{\partial(Q)}{\partial \theta}$$

ainsi l'équation du mouvement circonferenciel devient après introduction des dérivées spéciales :

$$\begin{aligned} & \frac{w_r}{r} \left[ \frac{\bar{\partial}}{\partial r}(rV_\theta) + \frac{n_r}{rn_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(rV_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] - w_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} w_\theta}{\partial z} - \frac{n_z}{rn_\theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r} + \frac{T}{r} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

En substituant les équations (A12) et (A14) dans l'équation (A19) on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{w_r}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r}(rV_\theta) + \frac{w_z}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z}(rV_\theta) = -w_r \frac{n_r}{rn_\theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} - w_r \frac{n_z}{rn_\theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} \\ & - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

Ou encore:

$$\frac{w_r}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r}(rV_\theta) + \frac{w_z}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z}(rV_\theta) = -\frac{1}{rn_\theta} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} (w_r n_r + w_\theta n_\theta + w_z n_z) - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} \quad (\text{A21})$$

Avec :

$$w_r n_r + w_\theta n_\theta + w_z n_z = 0 \quad \text{car } \vec{W} \cdot \vec{n} = 0$$

Finalement, l'équation du mouvement circonferenciel s'écrit :

$$-\frac{w_r}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r}(rV_\theta) + \frac{w_z}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z}(rV_\theta) = F_\theta \quad (\text{A22})$$

$$\text{Avec : } F_\theta = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}$$

### C. EQUATION DU MOUVEMENT AXIAL :

L'équation du mouvement axial est donnée par :

$$-w_r \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + w_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} \quad (\text{A.23})$$

de même on introduit les dérivées spéciales :

$$\begin{aligned} & -w_r \left[ \frac{\partial \bar{w}_r}{\partial z} + \frac{n_z}{m_\theta} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial r} - \frac{n_r}{m_\theta} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right] + w_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{w}_\theta}{\partial z} - \frac{n_z}{m_\theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & = -\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{n_z}{m_\theta} \frac{\partial I}{\partial \theta} + T \frac{\partial S}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} \frac{n_z}{m_\theta} \frac{\partial S}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} & -w_r \left[ \frac{\partial \bar{w}_r}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial r} \right] - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{n_z}{m_\theta \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ & - \frac{1}{m_\theta \rho} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} (w_\theta n_\theta + w_z n_z + w_r n_r) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

puisque:  $w_\theta n_\theta + w_z n_z + w_r n_r = 0$

L'équation du mouvement axial deviendra :

$$-w_r \left[ \frac{\partial \bar{w}_r}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial r} \right] - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} + F_z \quad (\text{A.26})$$

avec :

$$F_z = -\frac{n_z}{m_\theta \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

### III. INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION D'ENERGIE :

L'équation d'énergie est donnée par :

$$w_r \frac{\bar{a}}{\bar{r}} + w_\theta \frac{\bar{a}}{\partial \theta} + w_z \frac{\bar{a}}{\bar{z}} = Q \quad (\text{A.27})$$

$Q = 0$  pour un processus adiabatique, ce qui permet d'écrire :

$$w_r \frac{\bar{a}}{\bar{r}} + w_\theta \frac{\bar{a}}{\partial \theta} + w_z \frac{\bar{a}}{\bar{z}} = 0 \quad (\text{A.28})$$

Introduisant les dérivées spéciales dans l'équation (A.28) :

$$w_r \left[ \frac{\bar{\partial I}}{\bar{r}} + \frac{n_r}{m_\theta} \frac{\bar{a}}{\partial \theta} \right] + \frac{w_\theta}{r} \frac{\bar{a}}{\partial \theta} + w_z \left[ \frac{\bar{\partial I}}{\bar{z}} + \frac{n_r}{m_\theta} \frac{\bar{a}}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$w_r \frac{\bar{\partial I}}{\bar{r}} + w_z \frac{\bar{\partial I}}{\bar{z}} = - \frac{w_\theta}{r} \frac{\bar{a}}{\partial \theta} - \frac{n_r}{m_\theta} w_r \frac{\bar{a}}{\partial \theta} - \frac{n_r}{m_\theta} w_z \frac{\bar{a}}{\partial \theta}$$

Où bien :

$$w_r \frac{\bar{\partial I}}{\bar{r}} + w_z \frac{\bar{\partial I}}{\bar{z}} = \frac{n_r}{m_\theta} \frac{\bar{a}}{\partial \theta} [n_r w_r + n_\theta w_\theta + n_z w_z]$$

puisque :  $\vec{n} \vec{W} = 0$

alors on aura :

$$w_r \frac{\bar{\partial I}}{\bar{r}} + w_z \frac{\bar{\partial I}}{\bar{z}} = 0 \quad (\text{A.30})$$

## ANNEXE B

### TRANSFORMATION DES OPERATEURS DE DERIVATION :

Les équations du problème physique étudié sont écrites sur le domaine réel. Cependant, l'approximation sur l'élément réel est souvent compliquée, nous utilisons systématiquement l'approximation sur l'élément de référence.

Toutes les expressions qui impliquent des dérivées en  $z, r$  sont transformées en dérivées en  $\xi, \eta$  grâce à la matrice de transformation dite *matrice jacobienne*  $[j]$ .

### EXPRESSIONS DE LA MATRICE JACOBienne :

La matrice de jacobienne  $[j]$  de la transformation isoparamétrique  $(z, r) \rightarrow (\xi, \eta)$  est donnée par :

$$[j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Pour l'élément quadratique à huit noeuds, les termes de  $[j]$  sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} = J_{11} = & 0,25(1-\eta)(2\xi + \eta)z_1 + \xi(1-\eta)z_2 + 0,25(1-\eta)(2\xi - \eta)z_3 \\ & + 0,5(1-\eta^2)z_4 + 0,25(1+\eta)(2\xi + \eta)z_5 + \xi'(1+\eta)z_6 + 0,25(1+\eta)(2\xi - \eta)z_7 + 0,5(1-\xi^2)z_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi} = J_{12} = & 0,25(1-\eta)(2\xi + \eta)r_1 + \xi(1-\eta)r_2 + 0,25(1-\eta)(2\xi - \eta)r_3 \\ & + 0,5(1-\eta^2)r_4 + 0,25(1+\eta)(2\xi + \eta)r_5 + \xi'(1+\eta)r_6 + 0,25(1+\eta)(2\xi - \eta)r_7 + 0,5(1-\xi^2)r_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \eta} = J_{21} = & 0,25(1-\xi)(2\xi + \eta)z_1 + 0,5(\xi^2 - 1)z_2 + 0,25(1+\xi)(2\xi + \eta)z_3 \\ & - \eta(1+\xi)z_4 + 0,25(1+\xi)(\xi + 2\eta)z_5 + 0,5(1-\xi^2)z_6 - 0,25(1-\xi)(\xi - 2\eta)z_7 + \eta(\xi - 1)z_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \eta} = J_{22} = & 0,25(1+\xi)(2\xi + \eta)r_1 + 0,5(\xi^2 - 1)r_2 - 0,25(1+\xi)(\xi - 2\eta)r_3 \\ & - \eta(1+\xi)r_4 + 0,25(1+\xi)(\xi + 2\eta)r_5 + 0,5(1-\xi^2)r_6 - 0,25(1-\xi)(\xi - 2\eta)r_7 + \eta(\xi - 1)r_8 \end{aligned}$$

**EXPRESSION DE LA MATRICE JACOBIENNE INVERSE :**

La matrice de jacobienne [J] de la transformation isoparamétrique  $(\xi, \eta)$  →

$(z, r)$  est donnée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \xi}{\partial r} \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \end{bmatrix}$$

Avec:

$$[J] = [J^{-1}] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$\text{Ou } \det[J] = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

**EXPRESSION DES DERIVEES PREMIERES :**

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}$$

**EXPRESSION DES DERIVEES SECONDES :**

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix}$$

La matrice  $[T_2]$  est une matrice (  $3 \times 2$  ) dont les éléments sont construits à partir des éléments de la matrice  $[j]$  .

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{12}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{12}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & (j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21}) \end{bmatrix}$$

La matrice  $[T_1]$  est définie par :

$$[T_1] = - [T_2] [C_1] [j]$$

où

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \xi} & \frac{\partial J_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial J_{21}}{\partial \eta} & \frac{\partial J_{22}}{\partial \eta} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial J_{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{21}}{\partial \xi} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial J_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{22}}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix}$$

Noeud	N	$\partial N / \partial \xi$	$\partial N / \partial \eta$	$\partial^2 N / \partial \xi^2$	$\partial^2 N / \partial \eta^2$	$\partial^2 N / \partial \xi \partial \eta$
1	$-0.25 (1-\xi)(1+\eta) (1+\xi-\eta)$	$0.25(2\xi-\eta)(1+\eta)$	$-0.25(1-\xi)(\xi-2\eta)$	$0.5(1+\eta)$	$0.5(1-\xi)$	$-0.25(1-2\xi+2\eta)$
2	$0.5 (1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\xi(1+\eta)$	$0.5(1-\xi^2)$	$-(1+\eta)$	0	$-\xi$
3	$-0.25(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$	$0.25(1+\xi)(\xi+2\eta)$	$0.25(1+\xi)(\xi+2\eta)$	$0.5(1+\eta)$	$0.5(1+\xi)$	$+0.25(1+2\xi+2\eta)$
4	$0.5(1+\xi)(1-\eta^2)$	$0.5(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$	0	$-(1+\xi)$	$-\eta$
5	$-0.25(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$	$0.25(2\xi-\eta)(1-\eta)$	$-0.25(1+\xi)(\xi+2\eta)$	$0.5(1-\eta)$	$0.5(1+\xi)$	$-0.25(1+2\xi-2\eta)$
6	$0.5(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\xi(1-\eta)$	$-0.5(1-\xi^2)$	$-(1-\eta)$	0	$\xi$
7	$-0.25(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$	$0.25(2\xi+\eta)(1-\eta)$	$0.25(1-\xi)(\xi+2\eta)$	$0.5(1-\eta)$	$0.5(1-\xi)$	$0.25(1-2\eta)$
8	$0.5(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-0.5(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$	0	$-(1-\xi)$	$+\eta$

*Les fonctions de formes et leurs dérivées.*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] - H.MESSAOUDI et O.SALAHOUHADJ

*Etude et application d'un élément fini dans un écoulement quasi-tridimensionnel.*

*Projet de fin d'étude*

E.N.P 1994

[2] - S.C.ZERARKA et S.DJOUDI

*Etude d'un écoulement quasitridimensionnel dans une roue de turbomachine par la méthode des éléments finis*

*projet de fin d'étude*

E.N.P 1995

[3] - A.SEKSAF

*Calcul d'un écoulement par la méthode SI/S2 finalisation de logiciel*

*projet de fin d'étude*

E.N.P 1995

[4] - C.BOUSMAN et H.MARSH

*A improved method for calculating the flow in a turbomachine including a consistent loss model*

*journal mechanical engineering science*

1974

[5] - J.P.VEUILLOT

*Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale*

ONERA 1973

[6] - CH.HIRSCH et WARZEE

*An integrated quasitridimensionnel finite element calculation program for turbomachinery flows*

*A.S.M.E. journal of engineering for power .VOL 101 . 1979*

[7] - M.H.VAVRA

*Aero-thermodynamics and flow in turbomachines*

*JOHN WILEY and sons, Inc. LONDON*

1960

- [8] - **S.WAGNER, E.H. HIRCHEL, R. PIRA**  
*Proceedings of the second European computational fluid dynamics  
 Conférence, Stuttgart, Germany September 1994*
- [9] - **D.BUISINE et P.MICHEAU**  
*Ecoulement tridimensionnel dans un roue par la méthode S1-S2  
 Journal de Mec. The .et Appl 1987*
- [10] - **E.CAUDIU et J.F. COMBES**  
*Calcul d'écoulement tridimensionnel dans les turbomachines  
 hydrolique par élément fini  
 E.D.F. Bulletin de la direction des études et recherches.  
 Serie A.N° 2 1988*
- [11] - **G.DHATT et G.TOUZOT**  
*Une présentation de la méthode des éléments finis  
 Deuxième édition 1984*
- [12] - **O.C ZIENKIEWIZ**  
*The finite element method  
 Mc GRAW-HILL, NewYork, 4th édition 1991*
- [13] - **O.C ZIENKIEWIZ**  
*The finite element method in engineering science  
 GRAW-HILL, NewYork, 3rd édition 1977*