

4/97

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

BIBLIOTHEQUE - المكتبة

Ecole Nationale Polytechnique

DÉPARTEMENT GÉNIE MÉCANIQUE

### PROJET DE FIN D'ÉTUDE

#### SUJET

ETUDE NUMERIQUE DU PHENOMENE  
DE RUPTURE AUTOUR  
D'INCLUSION PAR LA METHODE  
DE DISCONTINUITÉ DES  
DEPLACEMENTS

Proposé par :

Y.BELKACEMI

*Moncef  
Amrane*

Etudié par :

M.GHEMOUR

A.HILLAL

Dirigé par :

Y.BELKACEMI

B.K. HACHI

M.MEDJRAB

PROMOTION 1997



E.N.P 10, Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

## DÉDICACES

*Je dédie ce travail à tous ce qui me sont chères :*

*- A commencer par mes parents qui , j'espère , trouveront ici le fruit de leurs amours et leurs souffrances pour moi :*

*- A mon frère et mes soeurs*

*- A ma tante*

*- A Djamel , Farid, Kamel, Said , Samir et tous mes amis*

*- A tous ce qui ont vécu avec moi les pires et heureux moments de ma vie*

*Amrane*

المدرسة الوطنية المتعددة الشعبات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
المدرسة Nationale Polytechnique

*Je dédie ce travail*

*À la mémoire de ma grand-mère*

*Moncef*

## **REMERCIEMENTS**

Nous remercions Monsieur Y.BELKACEMI d'avoir eu l'amabilité de nous avoir consacré son attention et de nous avoir soutenu et encourager tout au long de la période du projet.

Nous remercions également Monsieur B.K.HACHI et Monsieur M.MEDJERAB qui par leur collaboration nous ont permis de mener à bien ce travail.

Nos remerciements s'adressent également à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail.

## RESUME

L'objet de ce travail est la résolution des problèmes liés aux milieux multicouches isotropes ayant un comportement élastique linéaire et l'étude de la propagation des fissures autour d'inclusion en utilisant la méthode de discontinuités de déplacement .

## ABSTRACT

This work consists in the resolution of problems referring isotropes multi-layered materials that have elastic behaviour and study of crack propagation problem around inclusion using one of the boundary elements method which called the displacements discontinuity method.

## ملخص

يهدف هذا الإنجاز إلى حل المسائل المتعلقة بالأوساط المتعددة الطبقات ذات سلوك مرن خطي و نسيق ودراسة مسألة إنتشار الشقاق حول تضمينات وذلك باستعمال "طريقة الإنقطاعات الإنتقالية".

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

## **INTRODUCTION GENERALE :**

Depuis plus d'un demi siècle, les ingénieurs sont de plus en plus conscients du besoin d'évaluation plus précise des contraintes locales dues aux irrégularités géométriques ( défauts, fissures). Pour atteindre la fiabilité et pour éviter des ruptures aux conséquences graves, l'ingénieur doit être persuadé de l'importance des concentrations de contrainte provoquées par de telles irrégularités.

Parmi les problèmes que posent ce genre de situation, le problème de la propagation des fissures, qui représente un problème de mécanique dans lequel les données sont constituées, par la géométrie de la structure , la configuration de fissure initiale, les efforts appliqués, la loi de comportement à la déformation du matériau considéré. Le calcul consiste à trouver les paramètres mécaniques influants sur la propagation de la fissure.

Dans ces calculs, nous considérons des structures bidimensionnelles et nous supposons le comportement linéaire de ces dernières, vu que dans la plupart des cas pratiques, elles travaillent dans le domaine élastique.

L'objet du présent travail est l'étude de la fissuration autour d'inclusions qui peuvent être considérées comme des défauts dans la matière. Nous aurons donc à déterminer le champ de déplacement et de contrainte dans le domaine fissuré et calculer la variable de fissuration  $G$  ( taux de restitution d'énergie). Pour le faire, on appliquera une des méthodes des intégrales de frontière , la méthode de discontinuité du déplacement, qui s'avère très adéquate pour l'étude de la propagation des fissures.

Dans le premier chapitre, on présentera la méthode de discontinuité du déplacement et son application dans le cas des corps homogènes ( monocouches).

Dans le deuxième chapitre notre étude s'élargira à l'application de la méthode de discontinuité du déplacement aux corps non homogènes.

Dans le troisième chapitre des exemples seront traités et interprétés pour valider le code de calcul réalisé en traitant des exemples de domaines non homogènes.

Dans le dernier chapitre, on donnera un rappel un rappel sur la mécanique de rupture où on énoncera des critères de ruptures, ensuite une simulation numérique de la propagation des fissures autour d'inclusion sera faite à l'aide de la méthode de discontinuité du déplacement. Une étude du phénomène de stabilité - instabilité est faite.

# CHAPITRE 1

## APPLICATION DE LA MDD AUX MILIEUX MONOCOUCHEs

En revanche, une deuxième méthode plus adaptée à ce genre de situations est la méthode des éléments de frontière (B.E.M) a vu son apparition.

En effet , la BEM est une méthode basée sur la solution analytique d'un problème simple, tel que celle d'un domaine infini contenant une singularité. La solution singulière obtenue est utilisée pour construire une solution numérique, pour des problèmes plus compliqués.

L'avantage le plus important, que possède cette méthode sur les autres méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis, est qu'elle nécessite seulement une discrétisation de la frontière (comme le montre la figure 1-1-1)

Le principe de cette méthode est la transformation des équations de volumes en relations intégrales reliant les paramètres connus à ceux inconnus, et donc réduction d'un problème tridimensionnel en un autre bidimensionnel ( ou un problème bidimensionnel en un problème unidimensionnel ), et ainsi l'obtention de systèmes équations algébriques d'ordre inférieur plus facile à résoudre .

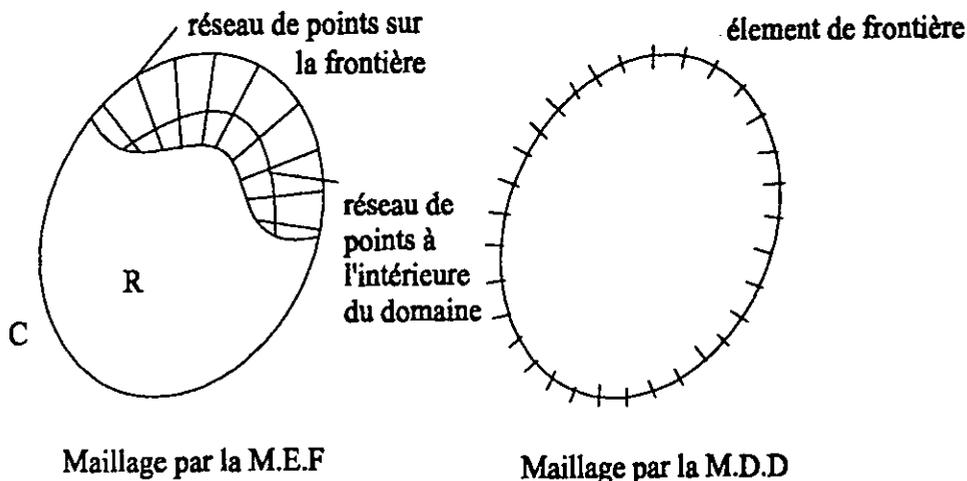


fig 1-1-1 : maillage avec la MEF et avec la BEM

La BEM a été développée suivant deux approches, l'une d'elles est d'origine *mathématique* basée sur les théorèmes classiques de la théorie du potentiel et consiste à mettre en place des équations algébriques reliant directement les paramètres aux limites inconnus à ceux connus d'où le nom de méthode directe .

L'autre approche est *physique* et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités, placées tout au long du contour, et de là , calculer les paramètres aux limites désirés, cette méthode est connue sous le nom de la méthode indirecte telles que la méthode des contraintes fictives et celle des discontinuités, et c'est cette dernière que nous allons utiliser dans notre étude.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode de DD et son application dans cas le cas des corps monocouches isotropes.

## **1-2 LA METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT :**

Une discontinuité, dans le déplacement, peut être visualisée comme étant une fissure droite (rectiligne) composée de deux surfaces (lèvres) disjointes se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre .

La MDD se base sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité constante du déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini.

Elle consiste à diviser (discritiser) le segment de droite en une série de N éléments, reliés les uns aux autres, et de considérer constante la discontinuité sur chacun de ces éléments .

Ainsi et connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donné, en sommant les effets de tous les éléments .

### 1-2-1 DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT DANS UN SOLIDE INFINI :

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite fini dans le plan  $x,y$  d'un solide infini est spécifié par la condition que le déplacement soit continu partout sauf sur le segment en question. Le segment de droite peut être choisi pour occuper une certaine portion de l'axe  $x$ , soit la portion  $|x| \leq a, y=0$ .

Si nous considérons ce segment comme une fissure droite on peut distinguer ses 2 surfaces en disant que l'une des surfaces est sur le côté positif de  $y = 0$ , notée  $y=0_+$  et que l'autre est sur le côté négatif notée  $y=0_-$ .

En passant d'un côté à l'autre du segment le déplacement subit un changement constant désigné par  $D_i = (D_x, D_y)$ , on définit la discontinuité de déplacement  $D_i$  comme la différence de déplacement entre les 2 côtés du segment comme suit :

$$D_i = u_i(x, 0_-) - u_i(x, 0_+) \quad (1.1)$$

ou

$$D_x = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \quad (1.2)$$

$$D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+)$$

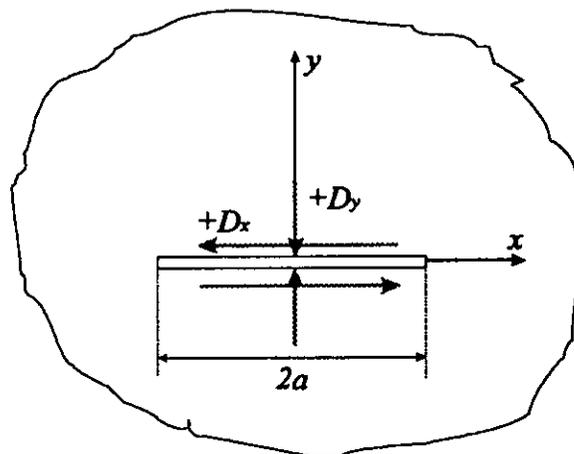


Fig 1.2.1 : les composantes d'une discontinuité de déplacement

La solution du problème posé est donné par Crouch (1976a,b) les déplacements et les contraintes peuvent être écrit comme :

$$u_x = D_x [ 2 (1-\nu) f_{,y} - y f_{,xx} ] + D_y [ - (1-2\nu) f_{,x} - y f_{,xy} ] \quad (1.2.3)$$

$$u_y = D_x [ (1-2\nu) f_{,x} - y f_{,xy} ] + D_y [ 2 (1-\nu) f_{,y} - y f_{,xx} ]$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 G D_x [ 2 f_{,xy} + y f_{,xyy} ] + 2 G D_y [ f_{,yy} + y f_{,yyy} ] \\ \sigma_{yy} &= 2 G D_x [ - y f_{,xyy} ] + 2 G D_y [ f_{,yy} - y f_{,yyy} ] \\ \sigma_{xy} &= 2 G D_x [ f_{,yy} + y f_{,yyy} ] + 2 G D_y [ - y f_{,xyy} ] \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Où la fonction  $f(x, y)$  est définie par :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \left( \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right. \\ &\quad \left. - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Ces équations forment la base de la méthode intégrale étudiée dans ce sujet .

Les déplacements le long de la droite  $y = 0$  sont :

$$u_x = \frac{1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (1.2.6)$$

$$u_y = + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right]$$

les valeurs des limites des termes en arctangent sont les suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, \quad y = 0_+ \text{ ou } y = 0 \\ +\pi & |x| < a, \quad y = 0_+ \\ -\pi & |x| < a, \quad y = 0 \end{cases} \quad (1.2.7)$$

En utilisant ces résultats on trouve qu'on peut considérer trois cas pour évaluer les déplacements le long de la ligne  $y=0$ .

$$(1) \quad |x| > a, \quad y = 0_{\pm}$$

$$\begin{aligned}
 u_x(x,0) &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 u_y(x,0) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|
 \end{aligned}
 \tag{1.2.8}$$

(2)  $|x| < a, y = 0_+$

$$\begin{aligned}
 u_x(x,0_+) &= -\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 u_y(x,0_+) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2} D_y
 \end{aligned}
 \tag{1.2.9}$$

(3)  $|x| < a, y = 0_-$

$$\begin{aligned}
 u_x(x,0_-) &= +\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 u_y(x,0_-) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2} D_y
 \end{aligned}
 \tag{1.2.10}$$

Donc, les déplacements  $u_x$  et  $u_y$  sont continus pour  $|x| > a, y=0$ , mais ont une discontinuité constante  $+D_x$  et  $+D_y$  pour  $|x| < a$ .

De même les contraintes le long de la ligne  $y = 0$  peuvent être évaluées d'après

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\
 \sigma_{yy}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\
 \sigma_{xy}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2 - a^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.2.11}$$

Il est facile de vérifier que, les contraintes sont continues partout sur  $y = 0$  sauf pour  $x = \pm a$  où on note une discontinuité et une singularité due à la présence du terme  $1/(x^2 - a^2)$ .

### 1-3 PROCEDURE NUMERIQUE :

Une généralisation de la procédure numérique décrite au dessous pour le problème d'une discontinuité de déplacement sur un segment de droite est représenté dans la figure (1.3.1), dans ce cas la courbe est quelconque, mais on supposera qu'elle peut être représentée avec une exactitude suffisante avec  $N$  segments de droite, joints les uns aux autres, la longueur de chacun de ces segments est notée par  $2a$  (plus ces éléments sont petits et plus on a une bonne approximation de la méthode. Les positions et orientations de ces segments sont spécifiés par rapport au système de coordonnées  $x, y$  montré dans la figure (1.3.1).

La M.D.D est un moyen de trouver une approximation discrète à la distribution régulière du déplacement relatif (i.e. la discontinuité de déplacement) qui existe en réalité.

Chaque segment est un élément de la frontière et représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local  $s, n$  comme le montre la figure

(1.3.1) et dont les composantes  $D_s$  et  $D_n$  sont données par les expressions :

$$D_s = u_{s-} - u_{s+}$$

(1.3.1)

$$D_n = u_{n-} - u_{n+}$$

Où  $u_s$  et  $u_n$  sont les déplacements, normale et tangentiel.

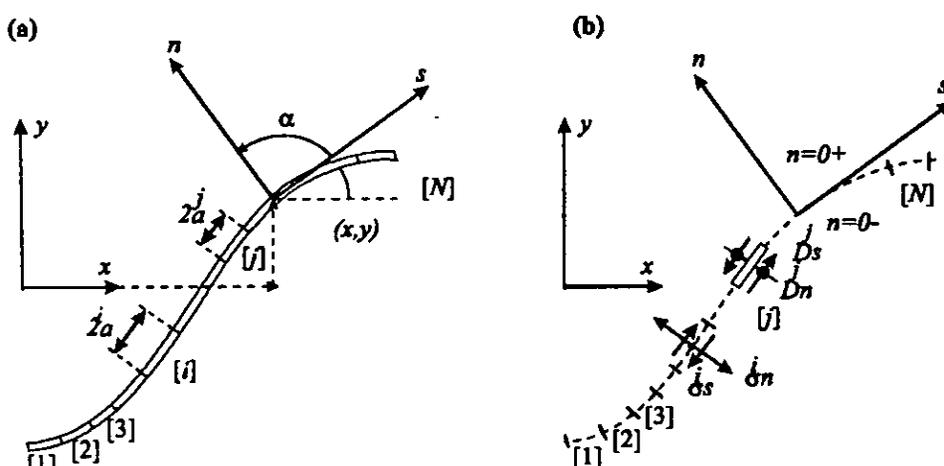


Fig 1-3-1 : Discretisation d'une fissure quelconque en  $N$  segments

Les effets d'une seule discontinuité de déplacement élémentaire sur les contraintes et les déplacements d'un point arbitraire du corps infini peuvent être calculés d'après les résultats fournis par la section (1-2). En particulier les contraintes tangentielles et normales au milieu du  $i^{\text{ème}}$  élément peuvent être exprimées en fonction des composantes de la discontinuité de déplacement du  $j^{\text{ème}}$  élément comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_s^i = A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i = A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{cases} \quad i = 1, N \quad (1.3.2)$$

En utilisant le principe de superposition, et ainsi tenant compte de l'effet des N éléments (discontinuités) on obtient le champ de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{cases} \quad i = 1, N \quad (1.3.3)$$

Tel que  $A_{ss}^{ij}$  . . . etc. sont les coefficients d'influences sur les contraintes dues aux discontinuités de déplacement. Le coefficient  $A_{sn}^{ij}$  par exemple représente la contrainte de cisaillement au milieu de élément  $i$  due à une discontinuité de déplacement normale unitaire ( $D_n^j = 1$ ) sur élément  $j$ .

En spécifiant les valeurs des contraintes  $\sigma_n^i$  et  $\sigma_s^i$  pour chaque élément, on aura alors un système de  $2N$  équations linéaires à  $2N$  inconnues, à savoir les composantes  $D_s^i$  et  $D_n^i$  des discontinuités de déplacements élémentaires. Une fois ces équations résolues, on peut exprimer les contraintes et les déplacements en chaque point du domaine par d'autres combinaisons linéaires des discontinuités de déplacement en utilisant la même procédure que précédemment.

**Remarques :**

- Les conditions aux limites peuvent être en déplacement comme elles peuvent en contraintes ou les deux à la fois.
- Il faut noter que la même procédure peut être suivie dans le cas où les éléments joints les uns aux autres forment un contour fermé( par exemple cas d'une cavité dans un domaine infini ou un disque) comme dans la figure (1.3.2 ).

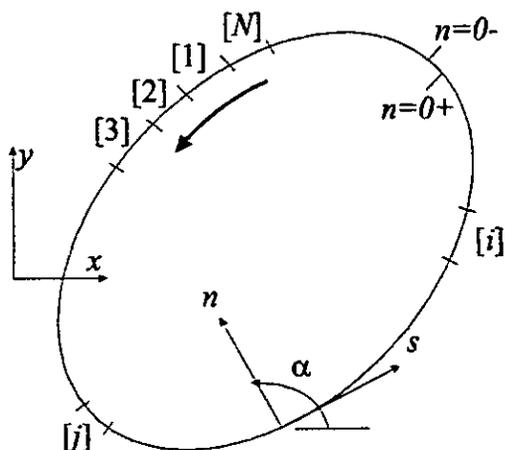


Fig 1-3-2 : Discretisation dans le cas d'un contour fermé

**1-4 RELATIONS DE TRANSFORMATION :**

La méthode de discontinuité de déplacement est basée essentiellement sur la connaissance des coordonnées des points à étudier par rapport au repère local de chaque segment de la courbe (C'). Prenons le système de coordonnées local  $(\bar{x}, \bar{y})$  choisi sur la figure (1.4.1). Le segment de droite indiqué sur la figure est défini par  $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$ . Les discontinuités de déplacement  $D_{\bar{x}}, D_{\bar{y}}$  sont respectivement tangentielle et normales au système de coordonnées local et les coordonnées locales sont obtenues par une translation et une rotation par rapport au repère global  $x, y$ . Les composantes de la translation sont  $c_x$  et  $c_y$  suivant  $x, y$  respectivement, tandis que la rotation est définie par l'angle  $\beta$  positif dans le sens trigonométrique. L'expression de transformation de coordonnées est :

$$\begin{cases} \bar{x} = (x - c_x) \cos \beta + (y - c_y) \sin \beta \\ \bar{y} = -(x - c_x) \sin \beta + (y - c_y) \cos \beta \end{cases} \quad (1.4.1)$$

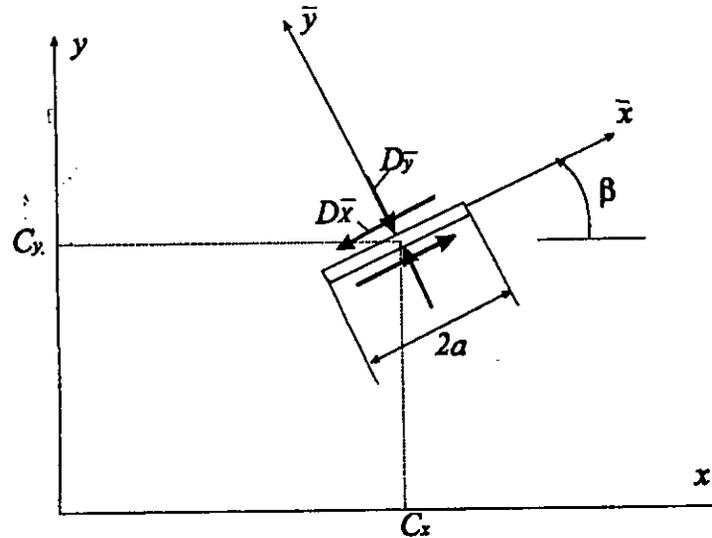


Fig 1-4-1 : Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire

Dans le système local on aura :

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = F_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \bar{y} \left( \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}-a} - \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}+a} \right) - (\bar{x}-a) \ln \sqrt{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} + (\bar{x}+a) \ln \sqrt{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right] \quad (1.4.2)$$

Les déplacements et les contraintes dans le repère local  $(\bar{x}, \bar{y})$  dus aux discontinuités de déplacement  $D_{\bar{x}}, D_{\bar{y}}$  sur le segment  $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$  sont retrouvés en remplaçant  $x$  par  $\bar{x}$  et  $y$  par  $\bar{y}$ .

### 1-5 COEFFICIENTS D'INFLUENCES :

Dans la méthode des discontinuités de déplacement les coefficients d'influences sont calculés en utilisant les équations précédentes, en considérant un domaine infini contenant N segments de droite. Les segments existants sur la frontière du solide

infini sont orientés dans des directions arbitraires par rapport au repère global  $(x, y)$ . Les éléments  $i$  et  $j$  ont une longueur de  $2a^i, 2a^j$  orientés de  $\beta^i$  et  $\beta^j$  et ont comme coordonnées  $x^i, y^i$  et  $x^j, y^j$  respectivement. Les discontinuités de déplacement dans le  $j^{\text{me}}$  élément sont  $D_{\bar{x}}^j$  et  $D_{\bar{y}}^j$ . Les contraintes et les déplacements dans un point quelconque  $(x, y)$  du corps dues aux discontinuités  $D_{\bar{x}}^j$  et  $D_{\bar{y}}^j$  peuvent se calculer en utilisant les équations (1.4.6) et (1.4.7), les coordonnées locales  $\bar{x}, \bar{y}$  par rapport au  $j^{\text{me}}$  élément sont calculées pour un point de coordonnées  $x, y$  par :

$$\begin{cases} \bar{x} = (x - x^j) \cos \beta^j + (y - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} = -(x - x^j) \sin \beta^j + (y - y^j) \cos \beta^j \end{cases} \quad (1.5.1)$$

En choisissant le point  $(x, y)$  comme étant le milieu de l'élément  $i$ , c'est à dire,  $x = x^i$  et  $y = y^i$  les équations (1.5.1) deviennent :

$$\begin{cases} \bar{x} = (x^i - x^j) \cos \beta^j + (y^i - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} = -(x^i - x^j) \sin \beta^j + (y^i - y^j) \cos \beta^j \end{cases} \quad (1.5.2)$$

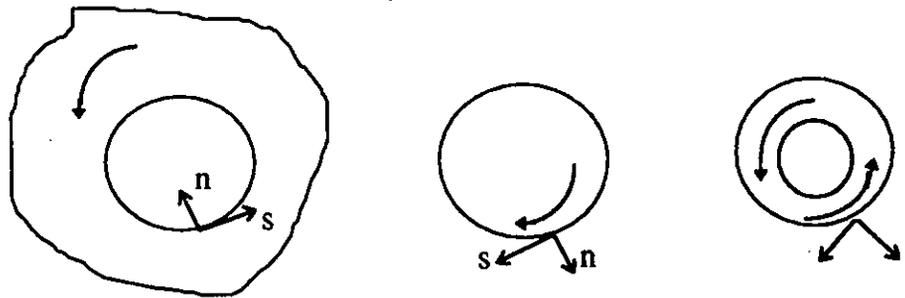
Les coefficients d'influence de l'élément  $j$  sur  $i$  sont obtenues en posant :

$$\gamma = \beta^i - \beta^j \quad (1.5.3)$$

Alors on aura dans le repère local lié au point  $i$  les déplacements et les contraintes comme suit :

$$\begin{aligned} u_s^i &= u_{\bar{x}}^i \cos \gamma + u_{\bar{y}}^i \sin \gamma \\ u_n^i &= -u_{\bar{x}}^i \sin \gamma + u_{\bar{y}}^i \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

extérieure doivent être traversées en sens contraires.



**Fig 6-1 : Convention pour la traversée du contour**

**a) cavité   b) disque   c) anneau**

## **CHAPITRE 2**

# **APPLICATION DE LA MDD AUX MILIEUX MULTICOUCHES**

## 2-1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons utilisé la méthode de discontinuité de déplacement pour résoudre les problèmes des corps homogènes, isotopes et en élasticité linéaire.

Maintenant, nous allons montrer que cette méthode peut être étendue par de simples réarrangements du programme pour résoudre des problèmes où le corps est non-homogène (dans notre cas les milieux multicouches).

## 2-2 LES MILIEUX MULTICOUCHES :

Nous allons présenter un exemple simple de multicouches. On suppose que le corps à étudier est composé de deux milieux R1 et R2 présentes sur la figure (2.2.1). Chaque domaine est supposé isotrope, homogène et linéairement élastique avec des constantes élastiques  $\nu^1, E^1$  et  $\nu^2, E^2$ .

Les frontières  $C_1$  du milieu R1 et  $C_2$  du milieu R2 sont parcourus dans le sens des aiguilles d'une montre pour maintenir la convention précédente (pour les problèmes intérieurs). Les systèmes locaux des coordonnées sont associés aux deux contours comme le montre la figure (2.2.1). La portion commune des deux milieux définit l'interface entre ces deux milieux. Les systèmes des deux coordonnées locaux  $s_1, n_1$  et  $s_2, n_2$  sont directement opposés le long de l'interface c'est à dire  $s_1 = -s_2$  et  $n_1 = -n_2$ . Pour la résolution de ce problème, on définit les conditions aux limites du problème dans le corps non homogène de la figure ci-dessus par des conditions en déplacements et en contraintes pour la partie d'interface.

Ces conditions de continuités sont définies pour un point Q de l'interface par :

$$\begin{aligned}\sigma_s^{[1]}(Q) &= \sigma_s^{[2]}(Q) \\ \sigma_n^{[1]}(Q) &= \sigma_n^{[2]}(Q)\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

Et :

$$\begin{aligned} u_s^{[1]}(Q) &= -u_s^{[2]}(Q) \\ u_n^{[1]}(Q) &= -u_n^{[2]}(Q) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Le signe moins qui apparaît dans l'équation ( 2.2.2 ) est dû à l'opposition des sens des systèmes  $s_1, n_1$  et  $s_2, n_2$  le long de l'interface.

La solution du problème en question des éléments de frontière peut être donnée en divisant les contours  $C_1$  et  $C_2$  en un nombre de segments de droites jointives et en posant que les déplacements et les contraintes sont constant sur chaque segment du contour.

Avec l'inclusion des portions des contours qui représente l'interface, on aura  $N_1$  éléments de frontière le long de  $C_1$  et  $N_2$  éléments le long de  $C_2$ . Les deux éléments face à face le long de l'interface des deux milieux doivent être égaux. Deux déplacements et deux contraintes sont associés à chaque élément d'interface et doivent vérifier les conditions de continuité (2.2.1) et (2.2.2) pour que le problème ait une solution.

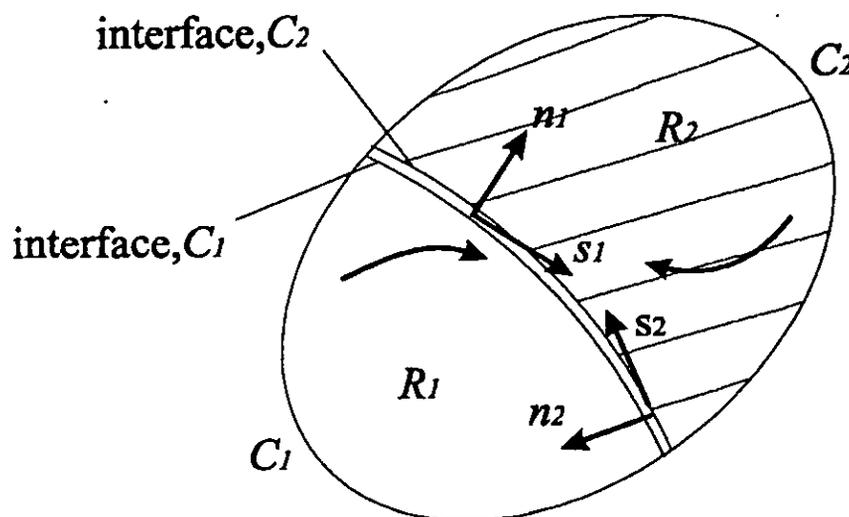


Fig 2.2.1 : Corps non-homogène comprenant 2 milieux

## INTRODUCTION GENERALE :

Depuis plus d'un demi siècle, les ingénieurs sont de plus en plus conscients du besoin d'évaluation plus précise des contraintes locales dues aux irrégularités géométriques ( défauts, fissures). Pour atteindre la fiabilité et pour éviter des ruptures aux conséquences graves, l'ingénieur doit être persuadé de l'importance des concentrations de contrainte provoquées par de telles irrégularités.

Parmi les problèmes que posent ce genre de situation, le problème de la propagation des fissures, qui représente un problème de mécanique dans lequel les données sont constituées, par la géométrie de la structure , la configuration de fissure initiale, les efforts appliqués, la loi de comportement à la déformation du matériau considéré. Le calcul consiste à trouver les paramètres mécaniques influants sur la propagation de la fissure.

Dans ces calculs, nous considérons des structures bidimensionnelles et nous supposons le comportement linéaire de ces dernières, vu que dans la plupart des cas pratiques, elles travaillent dans le domaine élastique.

L'objet du présent travail est l'étude de la fissuration autour d'inclusions qui peuvent être considérées comme des défauts dans la matière. Nous aurons donc à déterminer le champ de déplacement et de contrainte dans le domaine fissuré et calculer la variable de fissuration  $G$  ( taux de restitution d'énergie). Pour le faire, on appliquera une des méthodes des intégrales de frontière , la méthode de discontinuité du déplacement, qui s'avère très adéquate pour l'étude de la propagation des fissures.

Dans le premier chapitre, on présentera la méthode de discontinuité du déplacement et son application dans le cas des corps homogènes ( monocouches).

Dans le deuxième chapitre notre étude s'élargira à l'application de la méthode de discontinuité du déplacement aux corps non homogènes.

Dans le troisième chapitre des exemples seront traités et interprétés pour valider le code de calcul réalisé en traitant des exemples de domaines non homogènes.

Dans le dernier chapitre, on donnera un rappel un rappel sur la mécanique de rupture où on énoncera des critères de ruptures, ensuite une simulation numérique de la propagation des fissures autour d'inclusion sera faite à l'aide de la méthode de discontinuité du déplacement. Une étude du phénomène de stabilité - instabilité est faite.

# CHAPITRE 1

## APPLICATION DE LA MDD AUX MILIEUX MONOCOUCHEs

En revanche, une deuxième méthode plus adaptée à ce genre de situations est la méthode des éléments de frontière (B.E.M) a vu son apparition.

En effet , la BEM est une méthode basée sur la solution analytique d'un problème simple, tel que celle d'un domaine infini contenant une singularité. La solution singulière obtenue est utilisée pour construire une solution numérique, pour des problèmes plus compliqués.

L'avantage le plus important, que possède cette méthode sur les autres méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis, est qu'elle nécessite seulement une discrétisation de la frontière (comme le montre la figure 1-1-1)

Le principe de cette méthode est la transformation des équations de volumes en relations intégrales reliant les paramètres connus à ceux inconnus, et donc réduction d'un problème tridimensionnel en un autre bidimensionnel ( ou un problème bidimensionnel en un problème unidimensionnel ), et ainsi l'obtention de systèmes équations algébriques d'ordre inférieur plus facile à résoudre .

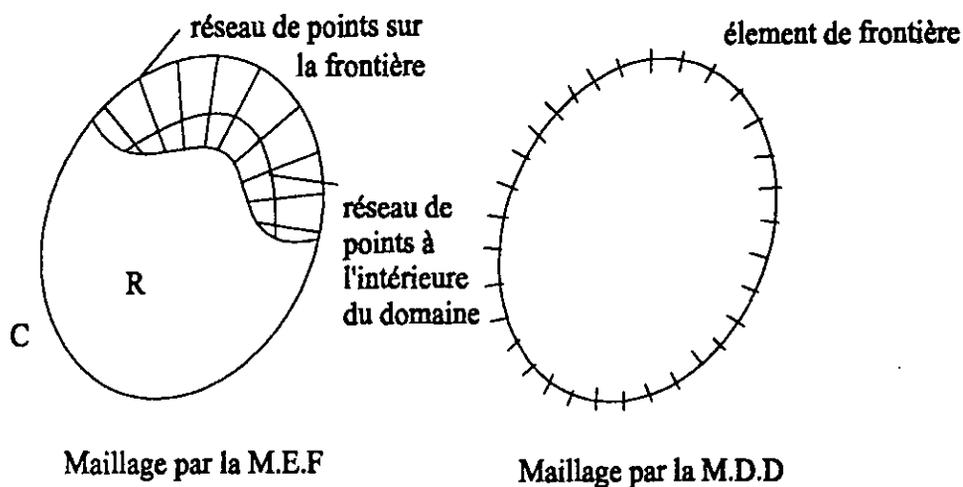


fig 1-1-1 : maillage avec la MEF et avec la BEM

La BEM a été développée suivant deux approches, l'une d'elles est d'origine *mathématique* basée sur les théorèmes classiques de la théorie du potentiel et consiste à mettre en place des équations algébriques reliant directement les paramètres aux limites inconnus à ceux connus d'où le nom de méthode directe .

L'autre approche est *physique* et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités, placées tout au long du contour, et de là , calculer les paramètres aux limites désirés, cette méthode est connue sous le nom de la méthode indirecte telles que la méthode des contraintes fictives et celle des discontinuités, et c'est cette dernière que nous allons utiliser dans notre étude.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode de DD et son application dans cas le cas des corps monocouches isotropes.

## **1-2 LA METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT :**

Une discontinuité, dans le déplacement, peut être visualisée comme étant une fissure droite (rectiligne) composée de deux surfaces (lèvres) disjointes se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre .

La MDD se base sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité constante du déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini.

Elle consiste à diviser (discritiser) le segment de droite en une série de N éléments, reliés les uns aux autres, et de considérer constante la discontinuité sur chacun de ces éléments .

Ainsi et connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donné, en sommant les effets de tous les éléments .

### 1-2-1 DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT DANS UN SOLIDE INFINI :

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite fini dans le plan  $x,y$  d'un solide infini est spécifié par la condition que le déplacement soit continu partout sauf sur le segment en question . Le segment de droite peut être choisi pour occuper une certaine portion de l'axe  $x$ , soit la portion  $|x| \leq a, y=0$ .

Si nous considérons ce segment comme une fissure droite on peut distinguer ses 2 surfaces en disant que l'une des surfaces est sur le côté positif de  $y = 0$ , notée  $y=0_+$  et que l'autre est sur le côté négatif notée  $y=0_-$ .

En passant d'un côté à l'autre du segment le déplacement subit un changement constant désigné par  $D_i = (D_x, D_y)$ , on définit la discontinuité de déplacement  $D_i$  comme la différence de déplacement entre les 2 côtés du segment comme suit :

$$D_i = u_i(x, 0_-) - u_i(x, 0_+) \quad (1.1)$$

ou

$$D_x = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \quad (1.2)$$

$$D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+)$$

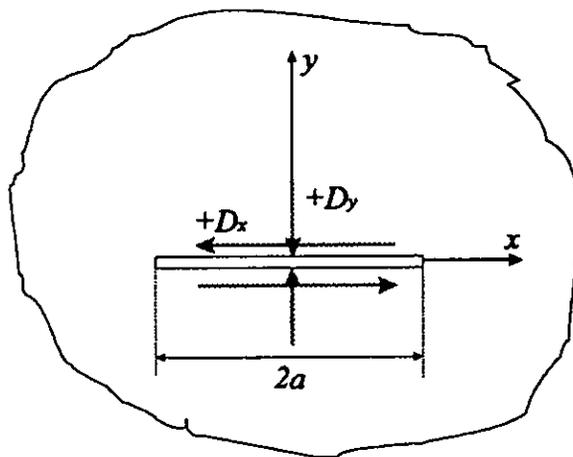


Fig 1.2.1 : les composantes d'une discontinuité de déplacement

La solution du problème posé est donné par Crouch (1976a,b) les déplacements et les contraintes peuvent être écrit comme :

$$u_x = D_x [ 2 (1-\nu) f_{,y} - y f_{,xx} ] + D_y [ - (1-2\nu) f_{,x} - y f_{,xy} ] \quad (1.2.3)$$

$$u_y = D_x [ (1-2\nu) f_{,x} - y f_{,xy} ] + D_y [ 2 (1-\nu) f_{,y} - y f_{,xx} ]$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 G D_x [ 2 f_{,xy} + y f_{,xyy} ] + 2 G D_y [ f_{,yy} + y f_{,yyy} ] \\ \sigma_{yy} &= 2 G D_x [ - y f_{,xyy} ] + 2 G D_y [ f_{,yy} - y f_{,yyy} ] \\ \sigma_{xy} &= 2 G D_x [ f_{,yy} + y f_{,yyy} ] + 2 G D_y [ - y f_{,xyy} ] \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Où la fonction  $f(x, y)$  est définie par :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \left( \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right. \\ &\quad \left. - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Ces équations forment la base de la méthode intégrale étudiée dans ce sujet .

Les déplacements le long de la droite  $y = 0$  sont :

$$u_x = \frac{1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (1.2.6)$$

$$u_y = + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right]$$

les valeurs des limites des termes en arctangent sont les suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, y = 0_{\pm} \text{ ou } y = 0. \\ +\pi & |x| < a, y = 0_{+} \\ -\pi & |x| < a, y = 0. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

En utilisant ces résultats on trouve qu'on peut considérer trois cas pour évaluer les déplacements le long de la ligne  $y=0$ .

$$(1) |x| > a, y = 0_{\pm}$$

$$\begin{aligned} u_x(x,0) &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x,0) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

(2)  $|x| < a, y = 0_+$

$$\begin{aligned} u_x(x,0_+) &= -\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x,0_+) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2} D_y \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

(3)  $|x| < a, y = 0_-$

$$\begin{aligned} u_x(x,0_-) &= +\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x,0_-) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2} D_y \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Donc, les déplacements  $u_x$  et  $u_y$  sont continus pour  $|x| > a, y=0$ , mais ont une discontinuité constante  $+D_x$  et  $+D_y$  pour  $|x| < a$ .

De même les contraintes le long de la ligne  $y = 0$  peuvent être évaluées d'après

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{yy}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{xy}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2 - a^2} \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Il est facile de vérifier que, les contraintes sont continues partout sur  $y = 0$  sauf pour  $x = \pm a$  où on note une discontinuité et une singularité due à la présence du terme  $1/(x^2 - a^2)$ .

### 2.3 LA METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENTS EN MULTICOUCHES :

On va considérer la procédure numérique de la méthode des discontinuités de déplacements et on va traiter le problème de la figure ( 2.2.1) . Avec les deux milieux  $R_1$  et  $R_2$  , on aura deux problèmes qui sont liés entre eux par les conditions de continuité à l'interface. Comme on a déjà vu dans le cas monocouche, on va associer des discontinuités de déplacements  $D_s$  et  $D_n$  à chaque élément de  $C_1$  et  $C_2$  . Les déplacements et les contraintes dans le milieu  $R_1$  sont donnés en fonction de  $D_s^{[1]}$  et  $D_n^{[1]}$  des  $N_1$  éléments du contour  $C_1$  et les déplacements et les contraintes dans le milieu  $R_2$  sont donnés en fonction de  $D_s^{[2]}$  et  $D_n^{[2]}$  des  $N_2$  éléments du contour  $C_2$  .

Notre problème est de trouver les discontinuités de déplacements  $D_s$  et  $D_n$  dans chaque élément de frontière parmi les  $N = N_1 + N_2$  éléments, si les conditions aux limites et les conditions de continuités sont prêtes pour la construction du système algébrique d'équations pour ce problème composé. Il est préférable de numéroté les éléments de frontière des deux milieux consécutivement par le milieu  $R_1$  de élément 1 jusqu'à élément  $N_1$  le long de  $C_1$  et de élément  $N_1 + 1$  jusqu'à l'élément  $N_1 + N_2 = N$  le long de  $C_2$  . En se référant aux équations (1.3.3), les contraintes sur la frontière de  $R_1$  peuvent être écrites :

$$\begin{aligned} \sigma_s^{[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} A_{sj} D_s^{[1]} + \sum_{j=1}^{N_1} A_{sn} D_n^{[1]} \\ \sigma_n^{[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} A_{ns} D_s^{[1]} + \sum_{j=1}^{N_1} A_{nn} D_n^{[1]} \end{aligned} \quad i = 1, N_1 \quad (2.3.1)$$

et les contraintes dans la frontière du milieu  $R_2$  peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \sigma_s^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N A_{ss}^{ij(2)} D_s + \sum_{j=N_1+1}^N A_{sn}^{ij(2)} D_n \\
 \sigma_n^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N A_{ns}^{ij(2)} D_s + \sum_{j=N_1+1}^N A_{nn}^{ij(2)} D_n
 \end{aligned}
 \quad i = N_1+1, N \quad (2.3.2)$$

Et les déplacements des deux frontières des deux milieux sont :

$$\begin{aligned}
 u_s^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} B_{ss}^{ij(1)} D_s + \sum_{j=1}^{N_1} B_{sn}^{ij(1)} D_n \\
 u_n^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} B_{ns}^{ij(1)} D_s + \sum_{j=1}^{N_1} B_{nn}^{ij(1)} D_n
 \end{aligned}
 \quad i = 1, N_1 \quad (2.3.3)$$

Et :

$$\begin{aligned}
 u_s^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N B_{ss}^{ij(2)} D_s + \sum_{j=N_1+1}^N B_{sn}^{ij(2)} D_n \\
 u_n^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N B_{ns}^{ij(2)} D_s + \sum_{j=N_1+1}^N B_{nn}^{ij(2)} D_n
 \end{aligned}
 \quad i = N_1+1, N \quad (2.3.4)$$

Les coefficients d'influence dans les équations (2.3.1) à (2.3.4) sont calculés exactement de la même manière que le cas monocouche, il est nécessaire d'utiliser les propriétés élastiques de chaque milieu.

Les équations de (2.3.1) à (2.3.4) peuvent se mettre sous la forme d'un système algébrique de  $2N$  équations à  $2N$  inconnus ( les  $D_s$  et les  $D_n$  ).

$$\begin{cases}
 b_s^i = \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n \\
 b_n^i = \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n
 \end{cases}
 \quad i = 1, N \quad (2.3.5)$$

Les grandeurs de ces équations sont obtenues en construisant les systèmes ( 2.3.1) à (2.3.4) et en conservant les conditions aux limites et les conditions de

continuité . Chaque élément  $i$  peut être dans la portion libre ou dans l'interface des deux milieux.

Posons en 1<sup>er</sup> lieu que élément  $i$  appartient à la portion libre du contour  $C_1$  et posons qu'on a des contraintes appliquées à cet élément  $\sigma_s^{i[1]} = (\sigma_s^i)_o$  et  $\sigma_n^{i[1]} = (\sigma_n^i)_o$ .

Utilisons les équations (2.3.1) et (2.3.2) pour la détermination de  $b_s^i$ ,  $b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij}$ ...etc de l'équation (2.3.5) on aura :

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij(1)} & j = 1, N_1 \\ 0 & j = N_1 + 1, N \end{cases} \quad (2.3.6)$$

De la même manière on aura les autres coefficients d'influence  $C_{sm}^{ij}$ ,  $C_{ns}^{ij}$  et  $C_{nn}^{ij}$ .

Prenons le cas où élément appartient à la portion libre du contour  $C_2$ . Si les conditions

imposées sont en déplacement  $u_s^{i[2]} = (u_s^i)_o$  et  $u_n^{i[2]} = (u_n^i)_o$ , et d'après (2.3.3) et (2.3.4)

on peut écrire :

$$b_s^i = (u_s^i)_o ; b_n^i = (u_n^i)_o ;$$

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} 0 & j = 1, N_1 \\ B_{ss}^{ij(2)} & j = N_1 + 1, N \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Avec des relations similaires on peut exprimer les autres coefficients d'influence en combinant les deux conditions aux limites des deux milieux et en faisant un simple arrangement des équations (2.3.6) et (2.3.7) on obtient un seul système.

En deuxième temps, considérons que élément  $i$  est situé sur la portion d'interface et posons qu'il appartient à  $C_1$ . On aura un élément  $i^*$  opposé directement à  $i$  et appartenant à l'autre contour  $C_2$ . On aura 4 conditions à vérifier concernant les deux éléments face à face  $i$  et  $i^*$ , deux conditions de continuité de contraintes et deux de déplacements.

Les conditions de continuité en contraintes sont :

$$\begin{aligned} \sigma_s^{i(1)} - \sigma_s^{i^*(2)} &= 0 \\ \sigma_n^{i(1)} - \sigma_n^{i^*(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

d'après (2.3.1) et (2.3.2) les quantités  $b_s^i$ ,  $b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij}$ ...etc, de l'équation (2.3.5) seront:

$$b_s^i = \sigma_s^{i(1)} - \sigma_s^{i^*(2)} = 0 ; b_n^i = \sigma_n^{i(1)} - \sigma_n^{i^*(2)} = 0 \quad (2.3.9)$$

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij(1)} & j = 1, N_1 \\ i^*j(2) & \\ -A_{ss} & j = N_1 + 1, N \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Et identiquement pour les autres coefficients d'influence.

Pour les conditions de continuité en déplacement, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} u_s^{i(1)} + u_s^{i^*(2)} &= 0 \\ u_n^{i(1)} + u_n^{i^*(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

En utilisant les équations (2.3.3) et (2.3.4) on peut écrire :

$$b_s^i = u_s^{i(1)} + u_s^{i^*(2)} = 0 ; b_n^i = u_n^{i(1)} + u_n^{i^*(2)} = 0 \quad (2.3.12)$$

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} B_{ss}^{ij(1)} & j = 1, N_1 \\ i^*j(2) & \\ B_{ss} & j = N_1 + 1, N \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Pour les autres coefficients d'influences on utilise des relations similaires.

- Si on considère maintenant le cas où le contact entre les deux milieux est un serrage ( déplacement relatif normal non nul ) les équations (2.3.11) deviennent :

$$\begin{aligned} u_s^{i(1)} + u_s^{i^*(2)} &= 0 \\ u_n^{i(1)} + u_n^{i^*(2)} &= -\delta_r \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

tel que  $\delta_r$  = Serrage en valeur absolue

**Remarque :**

Ce cas ne se présente que dans les problèmes à interface fermée ( par exemple les interfaces circulaires ).

**2-4 ETUDE DU DECOLLEMENT DE L'INTERFACE :**

Pour les interfaces fermées nous avons introduit dans notre programme de calcul un test vérifiant le risque de décollement de l'interface.

Pour un chargement et un serrage donnés on procède de la manière suivante:

- Après résolution de notre système, on calcule les contraintes sur l'interface et on vérifie si :

$$\sigma_n^i \geq 0$$

on peut déclarer que l'élément  $i$  est libre .

- maintenant on impose de nouvelles conditions aux limites aux éléments décollés , on pose :

$$\sigma_n^i = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_s^i = 0$$

et on résout de nouveau le système avec ces nouvelles conditions. On recommence ce travail jusqu'à ce qu'à l'obtention d'un nombre constant éléments libres . Si le nombre éléments libre est égale au nombre éléments d'interface on peut dire qu'il y a décollement de l'interface.

**CHAPITRE 3**

**RESULTATS**

**ET**

**INTERPRETATIONS**

**Remarque :**

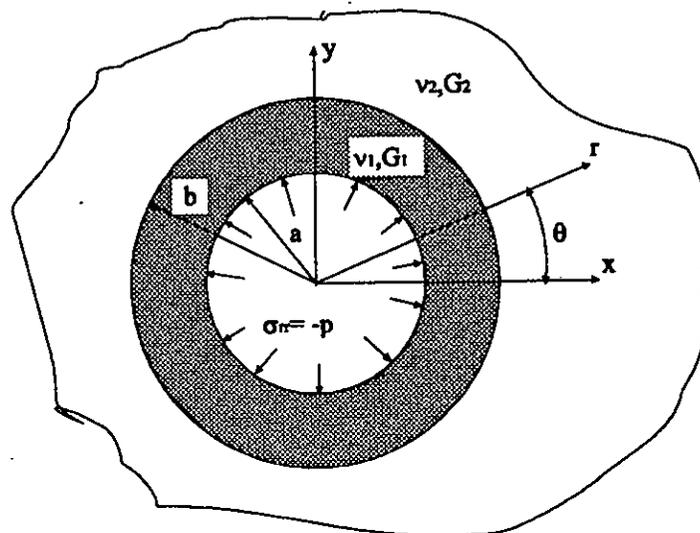
Le micro-ordinateur utilisé dans la partie numérique est un 80486 DX 33 muni d'un coprocesseur mathématique . Le compilateur Fortran utilisé est LAHEY (version 1990). Le temps d'exécution des exemples varie entre 5 et 17 minutes suivant la complexité du problème.

**3-1 UN ANNEAU DANS UNE PLAQUE INFINIE :**

Un anneau (  $\nu_1, E_1$  ) dont le rayon interne  $r = a$  est soumis à une pression radiale

$$\sigma_{rr} = -P.$$

Cet anneau est à l'intérieur d'un trou d'une plaque infinie (  $\nu_2, E_2$  ) non chargée à l'infinie comme schématisée par la figure (3-1-1).



*Fig. 3-1-1 : Anneau dans une plaque infinie*

Connaissant la solution analytique d'un tube simple et qui est définie par ( voir *TIMOSHENKO-FLUGGE* ) :

$$\sigma_{rr} = A - B r^{-2} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = A + B r^{-2}$$

(3-1-1)

$$u_{rr} = \frac{1+\nu}{E} [A(1-2\nu)r + B r^{-1}]$$

En tenant compte des conditions aux limites et celle de continuité, on établit la solution analytique de notre problème :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= \frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}} \left[ \left( P \frac{a^2}{b^2} - P' \right) - (P - P') \frac{a^2}{r^2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= \frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}} \left[ \left( P \frac{a^2}{b^2} - P' \right) + (P - P') \frac{a^2}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} a \leq r \leq b \quad (3.1.2)$$

et pour la deuxième couche :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^2 &= -P' \frac{b^2}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= +P' \frac{b^2}{r^2} \end{aligned} \right\} r \geq b \quad (3.1.3)$$

où :

$$P' = \frac{2(1-\nu_1)P \frac{a^2}{b^2}}{2(1-\nu_1) + \left( \frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (3.1.4)$$

Les caractéristiques mécaniques de la première couche sont :

$$E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$$

$$\nu_1 = 0.25$$

$$P / G_1 = 10^{-3}$$

La valeur du chargement est :  $P = 80 \text{ Mpa}$

Pour la deuxième couche nous avons :

$$E_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$$

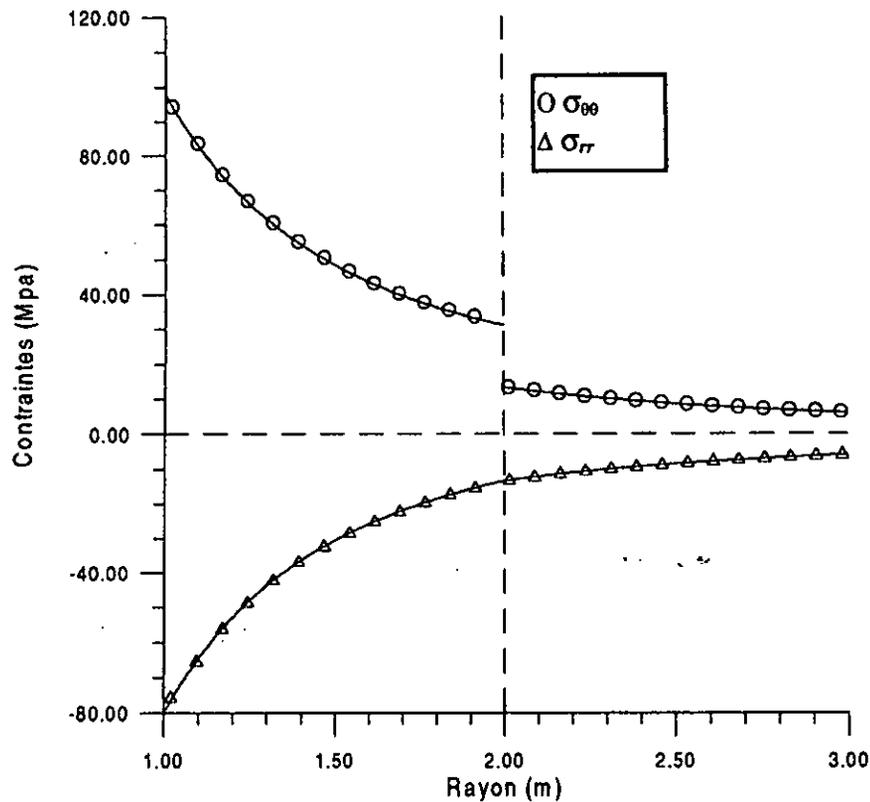
$$\nu_2 = 0.25$$

Et on a posé aussi :  $a / b = 1/2$

Pour résoudre ce problème on a considéré :

- Une double symétrie
- Le nombre d'éléments qui subissent une pression normale est 80.
- Le nombre d'éléments d'interface est 120.

La figure (3-1-2) révèle la convergence des résultats numériques vers la solution analytique



**Fig. 3-1-2 : Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction du rayon**

On remarque qu'à l'encontre des contraintes normales qui sont continues. Les contraintes tangentielles ne le sont pas et présentent une discontinuité au niveau de l'interface. Ceci est dû à la discontinuité de la matière et à la différence de rigidité des matériaux.

Toutefois on note que les contraintes vers la valeur nulle imposée par hypothèse (chargement nul à l'infini).

### 3-2 TUBE FRETTE :

L'exemple précédent peut être traité pour le cas où le rayon externe de l'anneau a une valeur supérieure à  $b$ , et égale à  $b + \delta r$ .

Ce problème admet comme solutions analytiques celles des équations (3.1.2) et (3.1.3), seulement  $P'$  est définie comme suit :

$$P' = \frac{2(1-\nu_1)P \frac{a^2}{b^2} + 2G_1 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{\delta r}{b}}{2(1-\nu_1) + \left(\frac{G_1}{G_2} - 1\right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (3.2.1)$$

La solution numérique de ce problème est obtenue pour  $\frac{\delta r}{b} = -0.5 \cdot 10^{-3}$ , les résultats sont présentés sur la figure (3-2)

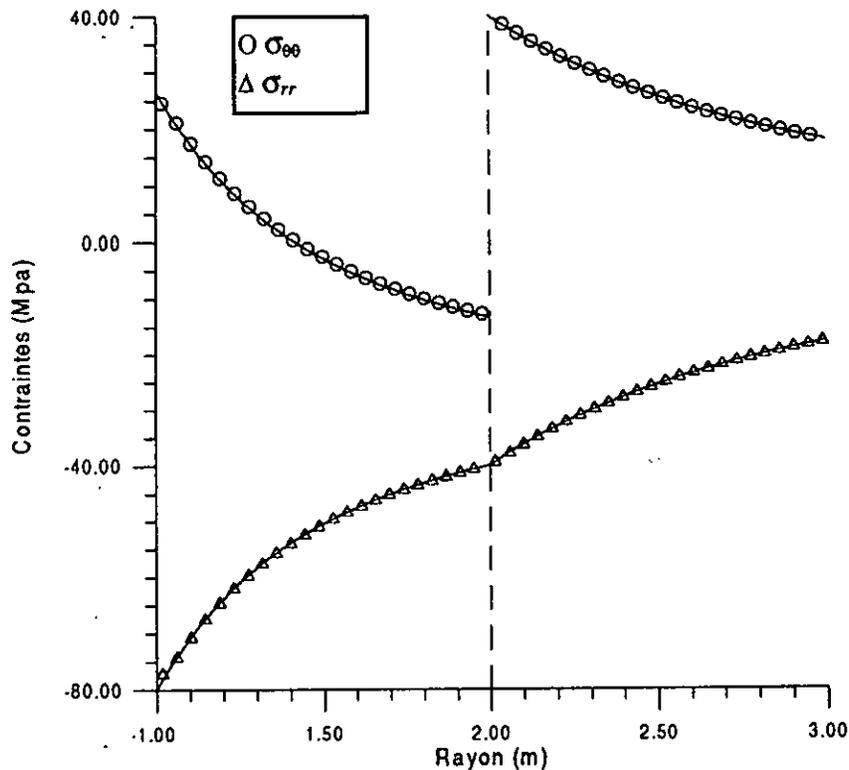


Fig. 3-2 : Variation des contraintes dans un anneau fretté

On remarque que pour les mêmes données que l'exemple précédent, la solution numérique coïncide avec la solution analytique.

Et les conditions de continuité de la contrainte normale est respectée, ainsi que les conditions aux limites.

### 3-3 ANNEAU FRETTE DANS UN AUTRE ANNEAU :

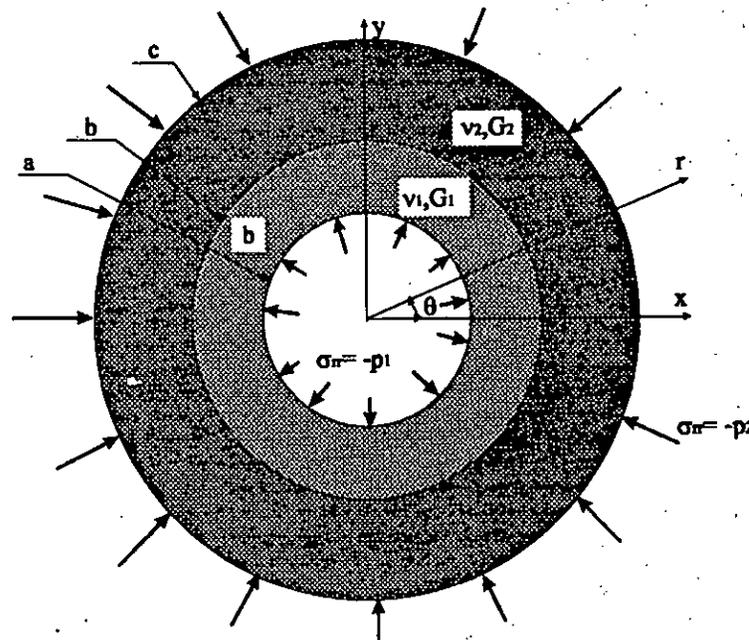


Fig. 3-3 : Anneau fretté dans un autre anneau

La solution analytique est définie par ( voir TIMOSHENKO):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 P_1 - b^2 P}{b^2 - a^2} - \frac{(P_1 - P)}{(b^2 - a^2) r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{a^2 P_1 - b^2 P}{b^2 - a^2} + \frac{(P_1 - P)}{(b^2 - a^2) r^2} \end{aligned} \right\} a \leq r \leq b \quad (3.3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{b^2 P - c^2 P_2}{c^2 - b^2} - \frac{(P - P_2)}{(c^2 - b^2) r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{b^2 P - c^2 P_2}{c^2 - b^2} + \frac{(P - P_2)}{(c^2 - b^2) r^2} \end{aligned} \right\} b \leq r \leq c \quad (3.3.2)$$

Où :

$$P = \frac{P_1 \left( \frac{(1-\nu_1)a^2}{E_1(b^2 - a^2)} + \frac{a^2}{2G_1(b^2 - a^2)} \right) - P_2 \left( \frac{(1-\nu_2)c^2}{E_2(c^2 - b^2)} + \frac{c}{2G_2(c^2 - b^2)} \right)}{\frac{(1-\nu_2)b^2}{E_2(c^2 - b^2)} + \frac{c}{2G_2(c^2 - b^2)} + \frac{(1-\nu_1)b^2}{E_1(b^2 - a^2)} + \frac{a^2}{2G_1(b^2 - a^2)}} \quad (3.3.3)$$

On maintient les mêmes propriétés élastiques que celle de l'exemple précédent soit :

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.25 ; \quad E_1 / E_2 = 2 ;$$

$$\text{On prend } E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Mpa} ; P_1 / G_1 = 10^{-3}$$

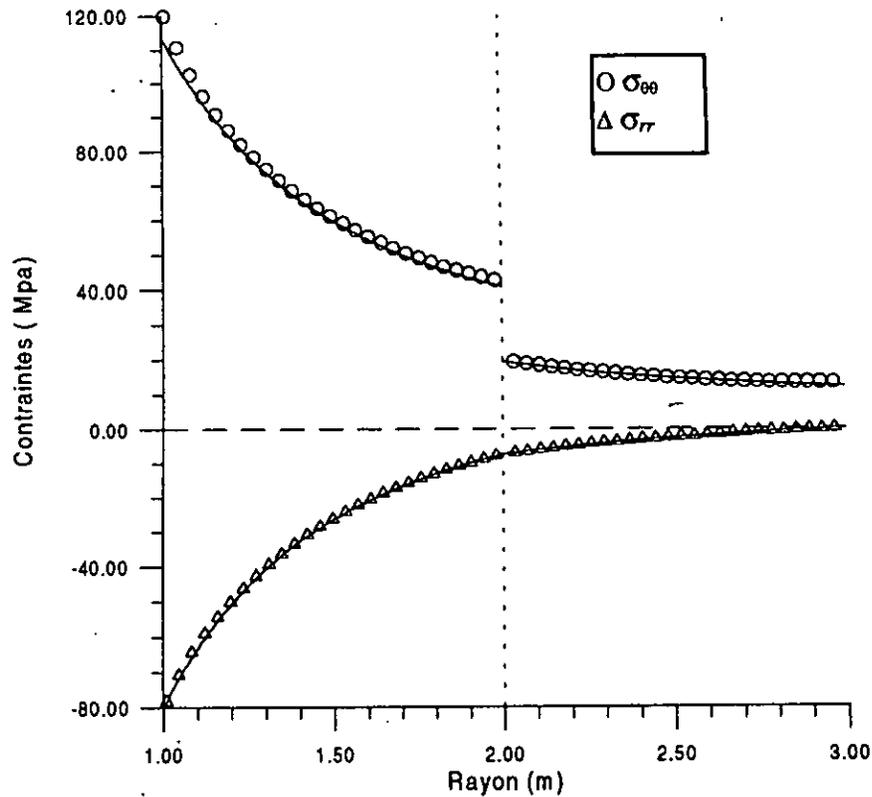
Le rayon interne de l'anneau (1) ( $1 \leq r \leq 2$ ) est soumis à une compression radiale. Le rayon externe de l'anneau (2) ( $2 \leq r \leq 3$ ) n'est pas chargé ( $P_2 = 0$ ).

La figure 3-3-2 illustre les résultats numériques obtenus .

pour la résolution de ce problème on a considéré :

- une double symétrie
- le nombre d'éléments de la face intérieure de l'anneau (1) est 60 .
- le nombre d'éléments d'interface est 100
- le nombre d'éléments de la frontière extérieure de l'anneau (2) est 80.

On remarque la même allure que l'exemple 1 , à l'exception que  $\sigma_{rr}$  atteint la valeur nulle au point  $r = 3$  ( rayon externe de l'anneau 2 ) suivant les conditions aux limites imposées.



*Fig. 3-3-2 : variation des contraintes normales et tangentielles en fonction du rayon*

### 3-4 ANNEAU FRETTE DANS UN AUTRE ANNEAU AVEC CHARGEMENT EXTERIEUR :

Pour les mêmes données, on impose maintenant une compression radiale au rayon externe de l'anneau (2) tel que  $P_2 = 2 P_1$ .

La solution numérique donnée par la figure (3-4) converge vers la solution analytique.

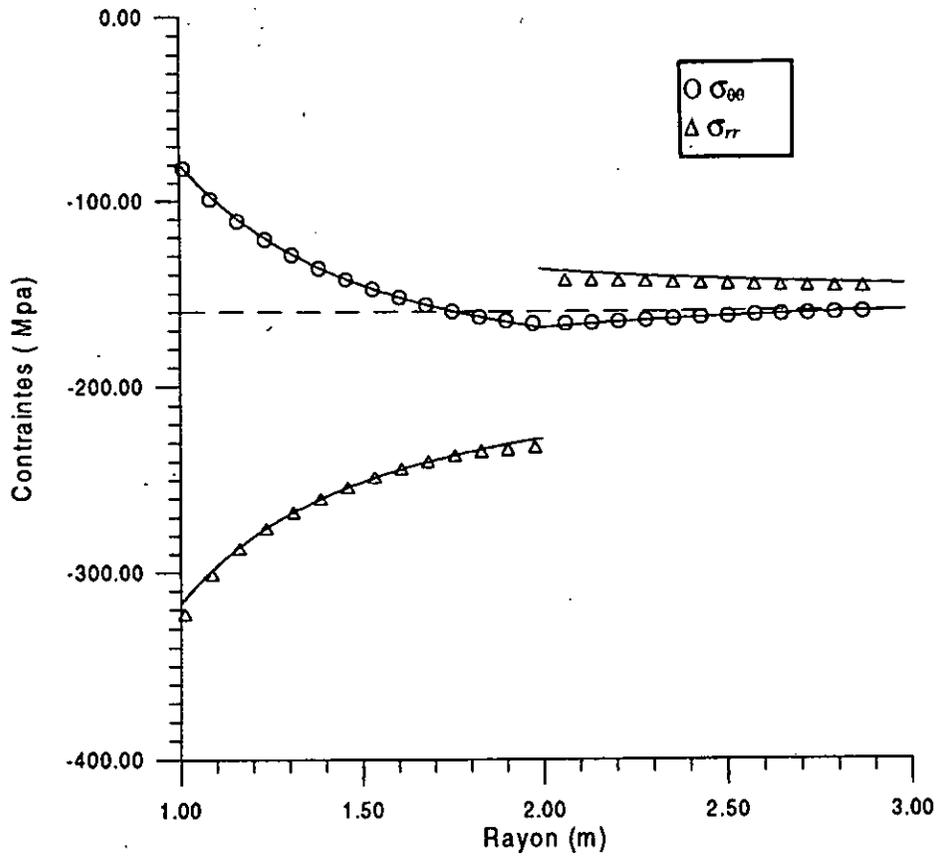
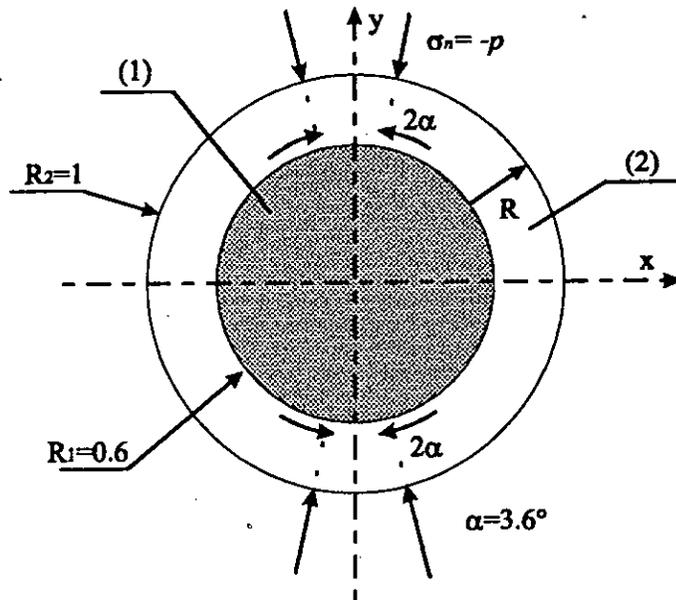


Fig. 3-4 : variation des contraintes normales et tangentielles en fonction du rayon

3-5 ESSAI BRÉSILIEN EN MULTICOUCHE :



3-5-1 : Essai Brésilien en multicouche

Ce problème traite de l'influence du serrage sur les contraintes calculées sur l'axe des Y le cas d'un disque (1) emmanché dans un tube(2).

Les caractéristiques mécaniques de la première couche sont :

$$E_1 = 7.10^4 \text{ Mpa}$$

$$\nu_1 = 0.1$$

Les caractéristiques mécaniques de la deuxième couche sont :

$$E_2 = 1.10^5 \text{ Mpa}$$

$$\nu_2 = 0.25$$

La valeur du chargement est  $P = 100 \text{ Kpa}$ .

Pour résoudre ce problème on a considéré :

- Une double symétrie.
- Le nombre d'éléments qui subissent une pression normale est 12.
- Le nombre d'éléments d'interface est 44 avec une discrétisation de 36 éléments sur un angle de  $86.4^\circ$ .
- Le nombre d'éléments libre est 43.
- trois serrage sont à considérer :
  - #  $\delta r = .0 \text{ mm}$
  - #  $\delta r = .1 \text{ mm}$
  - #  $\delta r = .2 \text{ mm}$

Les abaques (3-5-a) et (3-5-b) obtenus sont les suivants :

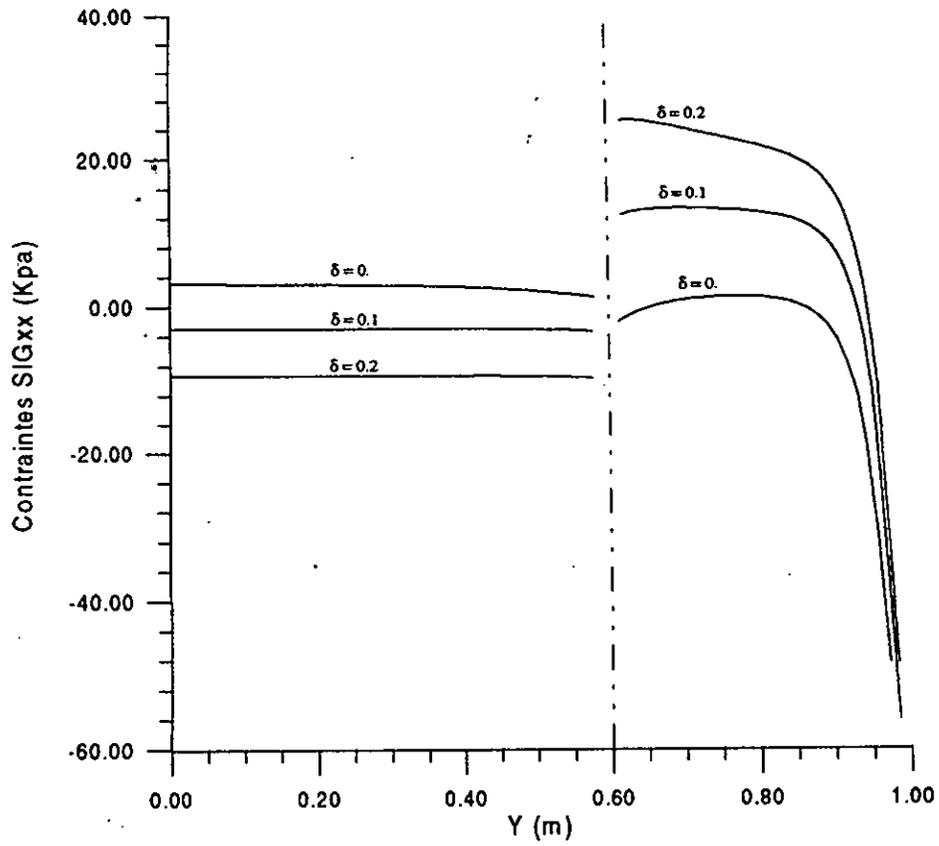


Fig 3-5-a : Variation de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $y$

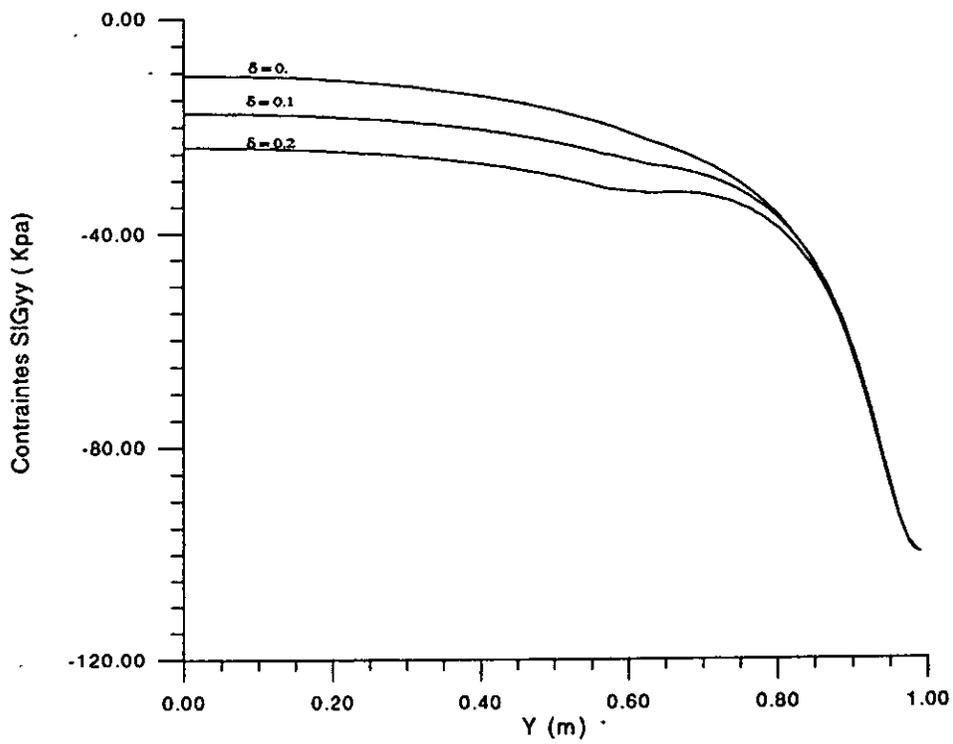


Fig 3-5-b : Variation de  $\sigma_{yy}$  en fonction de  $y$

On remarque qu'à chaque fois qu'on augmente le serrage, la valeur de  $\sigma_{xx}$  devient de plus en plus grande et positive à l'interface de la deuxième couche et de plus en plus petite et négative à l'interface de la première couche. Cela est prévisible puisque le serrage conduit à une compression de la première couche et une traction de la deuxième couche. Tandis que  $\sigma_{yy}$  reste négative (compression) avec des valeurs de plus en plus petites et elle tend vers la valeur du chargement sur la face extérieure du tube donc elle respecte les conditions aux limites.

On remarque aussi la continuité de  $\sigma_{yy}$  à l'interface ( $y = .6 \text{ m}$ ), et que  $\sigma_{xx}$  est discontinue à l'interface qui est dû à la discontinuité de matière et la différence entre la rigidité entre les deux matériaux.

### 3-6 Plaque multicouche sollicitée en compression :

Dans cet exemple nous avons une plaque constituée de deux couches. et sollicitée en compression sur sa face supérieure comme le montre la figure(3-6-1).

On a calculé les contraintes sur la droite  $x = 0$ .

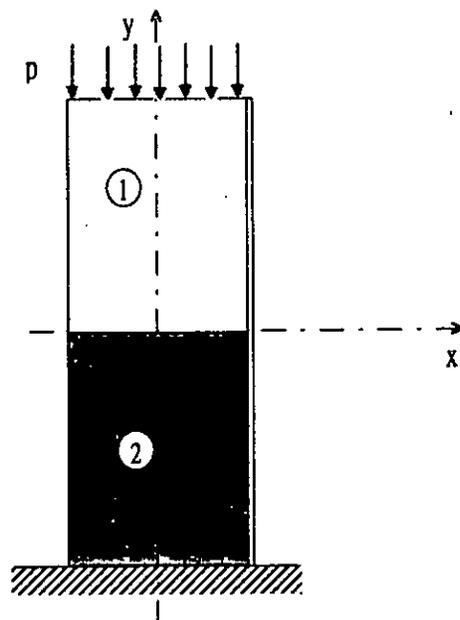


Fig 3-6-1 : Plaque multicouche en compression

Les caractéristiques mécaniques de la première couche sont :

$$E_1 = 10^5 \text{ Mpa}$$

$$\nu_1 = 0.25$$

Et pour la deuxième couche :

$$E_2 = 5 \cdot 10^4$$

$$\nu_2 = 0.20$$

La valeur du chargement  $P = 100 \text{ Mpa}$ .

Pour résoudre ce problème on a considéré :

- une simple symétrie par rapport à  $x = 0$ .
- on a discrétisé la face chargée en 20 éléments .
- on a discrétisé l'interface en 20 éléments.
- La face libre est discrétisée en 100 éléments.
- La face inférieure est discrétisée en 20 éléments.

Les résultats sont regroupés sur la figure (3-6-2)

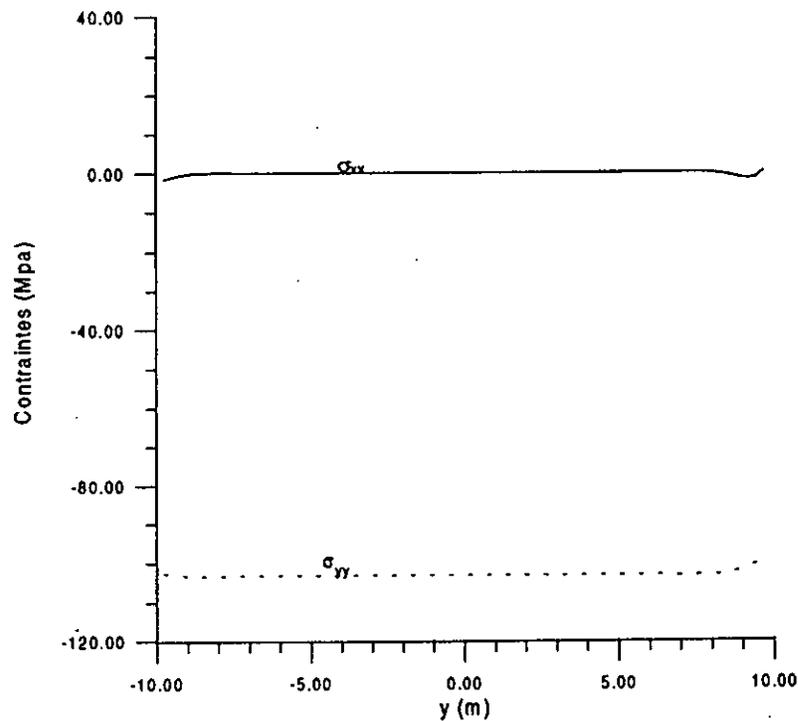


Fig 3-6-2 : variation des contraintes en fonction de y

On remarque que les contraintes  $\sigma_{xx}$  est nulle le long de la plaque, et que  $\sigma_{yy}$  est constante le long de la plaque et égale à la valeur du chargement ( nous retrouvons la solution du problème). C'est exemple a été présenté pour mettre en évidence le contrôle de non interpénétration des éléments au niveau de l'interface.

### 3-7 Test du décollement :

Dans cet exemple on traite le problème de décollement au niveau de l'interface. L'exemple concerne une plaque finie contenant une inclusion de diamètre  $R=0.1m$  (Fig 3-7-1). La plaque est soumise à la traction. Nous allons varier le chargement et étudier le décollement au niveau de l'interface.

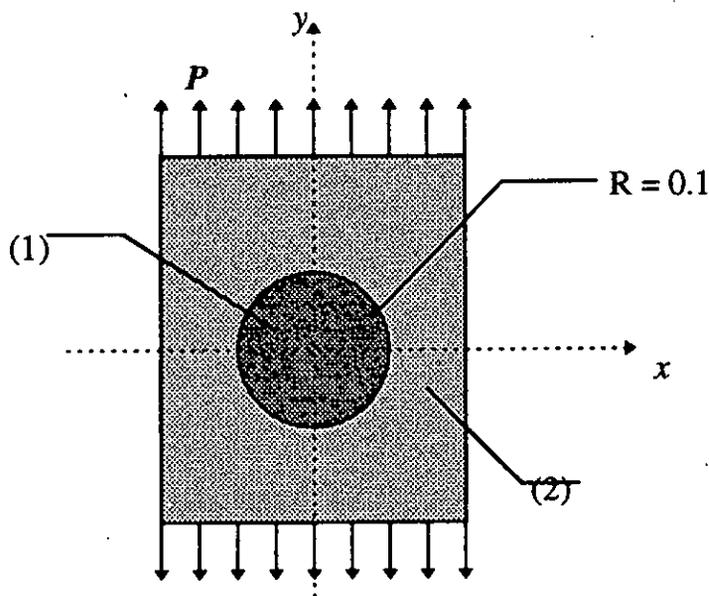


Fig 3-7-1 : Plaque finie contenant une inclusion

Dans un premier temps nous étudions l'influence du rapport des rigidités des deux matériaux sur le décollement, Pour cela nous avons:

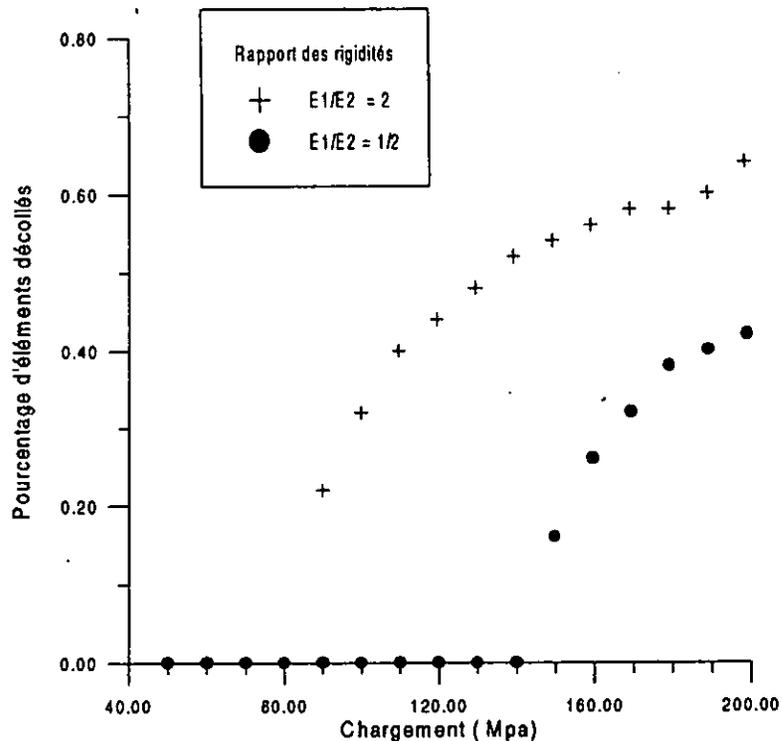
- considéré une double symétrie.
- discrétisé l'interface en 50 éléments .
- discrétisé la partie chargée en 25 éléments.

- discrétisé la partie libre en 25 éléments.
- fait varier le chargement de 50 Mpa à 200 Mpa.

Pour ce premier cas les deux rapports de rigidité considérés sont :

$$E1/E2 = 2 \quad \text{et} \quad E1/E2 = 1/2$$

Les résultats représentant le pourcentage d'éléments décollés au niveau de l'interface en fonction du chargement sont représentés sur la figure (3-7-2).



**Fig 3-7-2 : Pourcentage des éléments décollés en fonction du chargement et de E1/E2**

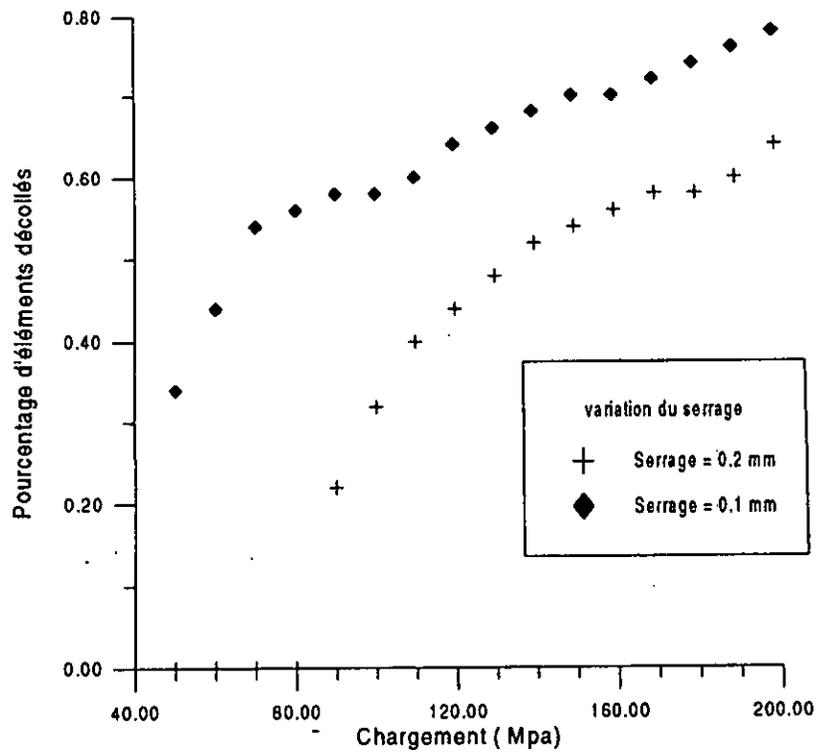
On remarque que le nombre d'éléments décollés est plus élevé lorsque l'inclusion est un matériau plus rigide que la plaque. L'inclusion étant moins rigide que la matrice, celle-ci se déforme plus et assure une surface de contact plus grande que le cas d'une inclusion plus rigide.

Pour l'étude de l'influence du serrage, nous avons pris les deux serrages suivants :

$$\# \delta = 0.1 \text{ mm}$$

$$\# \delta = 0.2 \text{ mm}$$

De même, le pourcentage d'éléments décollés en fonction du chargement sont représentés sur la figure ( 3-7-3) :



**Fig 3-7-3 : Influence du serrage sur le décollement**

On constate que le nombre d'éléments décollés est plus grand dans le cas où le serrage est plus petit puisque, plus le serrage est important, plus la pression de contact est forte.

# **CHAPITRE 4**

## **SIMULATION NUMERIQUE DE LA PROPAGATION DE FISSURE AUTOUR D'INCLUSION**

#### 4-1 INTRODUCTION :

Le calcul des pièces de machines ou de construction ont le plus souvent pour objet de prévenir les déformations importantes et sont en générale fondées sur la théorie de l'élasticité et la résistance des matériaux . Ces théories classiques reposent sur plusieurs hypothèses, parmi lesquelles celle de l'homogénéité et, de l'isotropie du matériau. Moyennant ces simplifications, on arrive à décrire de façon suffisamment précise pour les besoins courant l'état mécanique d'une pièce par un champ de contraintes. Ainsi, on obtient une marge de sécurité contre la déformation importante (plastique).

Mais, on a aussi observé des ruptures soudaines en domaine élastique. Et que cette situation se passait à chaque fois qu'il y avait un défaut (vide). Par ailleurs de nombreux accidents ont montré que de tel défauts peuvent conduire à des ruptures brutales et parfois catastrophiques, lorsque les conditions de chargement et d'environnement sont propices.

D'où le développement de la mécanique de la rupture, qui peut se définir comme la science de l'étude du comportement d'une structure avec ses fissures. Cette dernière prend en compte des défauts majeurs préexistants ou induit dans le matériau. La rupture complète de la structure de l'échantillon est alors décrite en fonction du comportement de ces défauts qui est régi par des critères de propagation. Deux approches sont généralement utilisées en mécanique de la rupture :

- L'analyse du champ des contraintes en tête de fissure, c'est l'approche par les facteurs d'intensité de contraintes, dite *théorie locale*. Elle relie les facteurs d'intensité de contraintes au champ de contraintes en tête de fissure.

- *L'approche globale énergétique* due à GRIFFITH qui procède par le calcul de l'énergie disponible pour la propagation de fissures dans la structure considérée. Cette énergie dépend du potentiel total du système.

Dans ce chapitre, une étude est menée sur des fissures prenant naissance au niveau de cavités ou d'inclusions circulaires. Une étude paramétrique sur les notions de stabilité et d'instabilité est discutée.

#### 4-2 CONCEPTS DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE :

La rupture est caractérisée, au moins localement, par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties de part et d'autre d'une surface géométrique. Cette fissure initiale est soit créée par endommagement sous l'effet de sollicitations, soit un défaut créé lors de l'élaboration du matériau ou lors de sa mise en forme.

##### 4-2-1 APPROCHE GLOBALE : THEORIE ENERGETIQUE DE GRIFFITH :

GRIFFITH a étudié la propagation des fissures en terme d'énergie. Il a émis l'hypothèse que la rupture est consommatrice d'énergie qui sera proportionnelle à l'aire créée. Cette énergie est comparée à la tension de surface et appelée énergie de surface  $\gamma$  laquelle peut être admise comme caractéristique du matériau. L'énergie consommée dans la rupture est d'origine diverse. Il peut s'agir principalement d'énergie nécessaire à la décohésion atomique, et à la relaxation du réseau cristallin.

Pour établir le critère de propagation, écrivons la conservation de l'énergie totale pour un accroissement infinitésimal de la surface de la surface de fissure d'aire  $dA$ , on a :

$$dW_{\text{total}} = dW_{\text{elas}} + dW_{\text{ext}} + dW_s + dW_{\text{cin}} = 0 \quad (4-2-1-1)$$

avec :

$dW_{\text{elas}}$  = variation de l'énergie de déformation élastique.

$dW_{\text{ext}}$  = variation du travail des forces extérieures

$dW_s$  = énergie dissipée dans la séparation =  $2\gamma dA$

$dW_{\text{cin}}$  = variation d'énergie cinétique

Au début de la propagation, il n'y a pas d'énergie cinétique. Le déclenchement de la propagation de la propagation se produit à :

$$-\frac{\partial}{\partial A}(W_{\text{elas}} + W_{\text{ext}}) = 2\gamma \quad (4-2-1-2)$$

En posant :

$$G = - \frac{\partial}{\partial A} (W_{elas} + W_{ext}) = - \frac{\partial V}{\partial A} \quad (4-2-1-3)$$

(V, énergie potentielle du système), le critère de début de propagation du défaut s'écrit

$$G = 2\gamma \quad (4-2-1-4)$$

G est appelée *taux de restitution d'énergie* ou *énergie disponible pour faire avancer la fissure*. En fait, le critère de propagation s'exprime sous la forme:

$$G \geq G_c = 2\gamma \quad (4-2-1-5)$$

Le paramètre  $G_c$ , appelé *énergie critique d'avancement de fissure* est considéré comme paramètre intrinsèque du matériau.

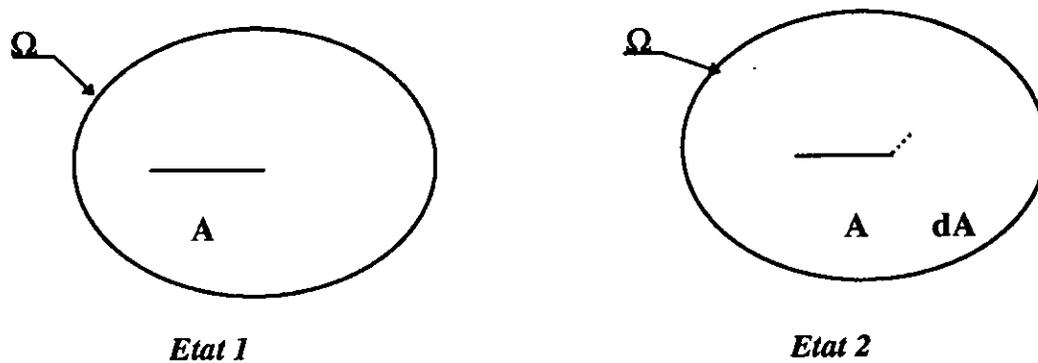


Fig 4-2-1 : Propagation de la fissure

On va maintenant calculer G en fonction des champs de déplacement et de contrainte sur les frontières du domaine fissuré .

Considérons le problème plan en élasticité linéaire. On impose sur la frontière  $\Omega_T$  du domaine fissuré, des forces surfaciques  $T_i$ , et sur la partie complémentaire  $\Omega_U$ , les déplacements  $u_i$ .

G s'écrit sous la forme :

$$G = -\frac{d}{dA} \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}) d\Omega + \int_{\Omega} T_i \frac{du_i}{dA} d\Gamma \quad (4-2-1-6)$$

En utilisant le théorème des travaux virtuels, on transforme le terme  $W_{\text{clas}}$  on aura alors

:

$$\frac{d}{dA} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( T_i \frac{du_i}{dA} + u_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (4-2-1-7)$$

d'où  $G$  devient :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( T_i \frac{du_i}{dA} + u_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (4-2-1-8)$$

L'expression précédente permet le calcul de  $G$  connaissant les champs de déplacement et de contrainte sur les contours extérieurs. Dans le cadre de nos applications,  $\Omega_U$  n'existera pas en générale ( $\Omega_U = 0$ ).

#### 4-2-2 MODES FONDAMENTAUX DE RUPTURE :

En mécanique de la rupture, trois types de sollicitations sont considérés :

- une sollicitation de traction perpendiculaire au plan de la fissure. ce mode est dit "mode 1" ou mode d'ouverture (figure 4-2-2-a )
- une sollicitation de cisaillement dans le plan de la fissure dont l'action est perpendiculaire au plan de la fissure. on parle de "mode 2" ou mode de cisaillement ( figure 4-2-2-b ).

- Une sollicitation de cisaillement parallèle au plan de la fissure dont l'action est parallèle au front de la fissure . Il s'agit ici du " mode 3 " représenté sur la figure (4-2-2-c). Dans les applications que nous envisageons, ce mode sera exclu car il n'apparaît que dans les problèmes non plans.

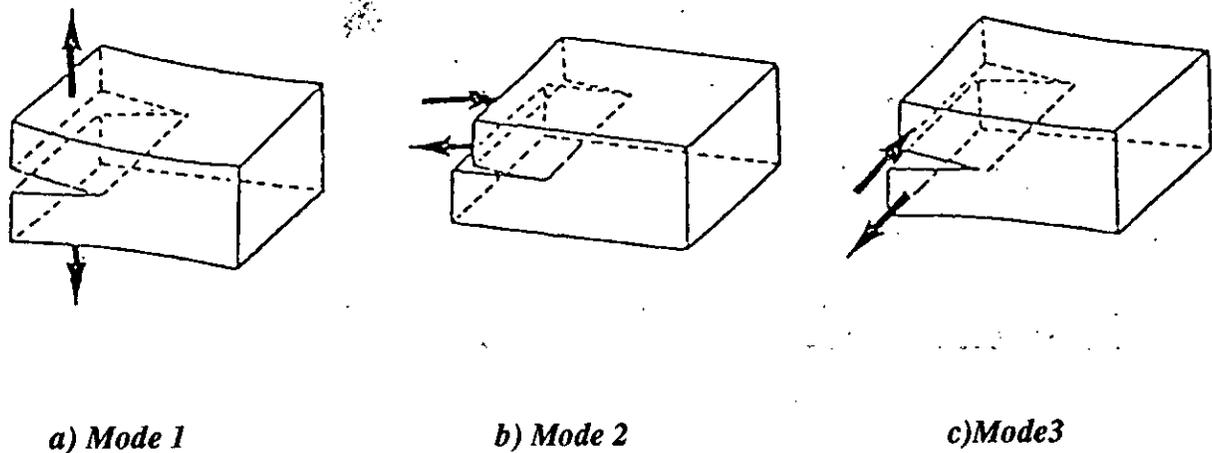


Fig 4-2-2 : Modes Fondamentaux de sollicitation en mécanique de la rupture

#### 4-2-3 RELATION ENTRE G ET K :

Quand la fissure se propage dans sa propre direction, le taux de restitution d'énergie est donné par ( Y.BAMBERGER ) :

- En déformation plane

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (4-2-3-1)$$

- En contrainte plane :

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (4-2-3-2)$$

#### 4-2-4 STABILITE DE LA PROPAGATION DES FISSURES :

Le phénomène de stabilité-instabilité est étudié dans notre cas pour des plaques percées en présence d'inclusion.

Pour un champ cinématiquement admissible, nous rappelons que la condition de début de propagation d'une fissure selon GRIFFITH s'écrit :

$$G = -\frac{\partial V}{\partial A} = G_c \quad (4-2-4-1)$$

où  $V$  est l'énergie potentielle,  $A$  l'aire (en problème plan, il s'agit de la longueur) de la fissure, et  $G_c$  l'énergie critique d'avancement du matériau. Pour décrire la rupture, il faudra savoir si la fissure se propage. Le processus de stabilité dépend de la variation de  $G$  donc de  $\frac{\partial G}{\partial A}$ , autrement dit de  $\frac{\partial^2 V}{\partial A^2}$ .

Soit  $P_c$  la valeur du chargement pour laquelle  $G$  atteint la valeur critique  $G_c$ . Si nous maintenons  $P$  constant à partir de ce moment et pour un champ cinématiquement admissible, les deux situations suivantes peuvent se produire :

**a) Propagation stable :**

C'est le cas où :  $\frac{\partial G}{\partial A} = -\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} < 0$ , alors  $G(P_c, A+dA) < G_c$ . Il faudrait, pour faire avancer la fissure, augmenter le chargement. Ce cas correspond à la rupture contrôlée.

**b) Propagation instable :**

On doit avoir  $\frac{\partial G}{\partial A} = -\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} > 0$ , alors  $G(P_c, A+dA) > G_c$ . La fissure se propagerait sans que la sollicitation soit augmentée. On parle alors de rupture non contrôlée. L'excès d'énergie à charge constante se transforme en énergie cinétique.

On constate donc que le phénomène de la rupture n'est pas une caractéristique intrinsèque du matériau, car son apparition et son extension dépendent du potentiel

total du système, donc, de sa géométrie, des conditions aux limites et de la manière dont sont maintenues ou appliquées les sollicitations au cours de l'évolution.

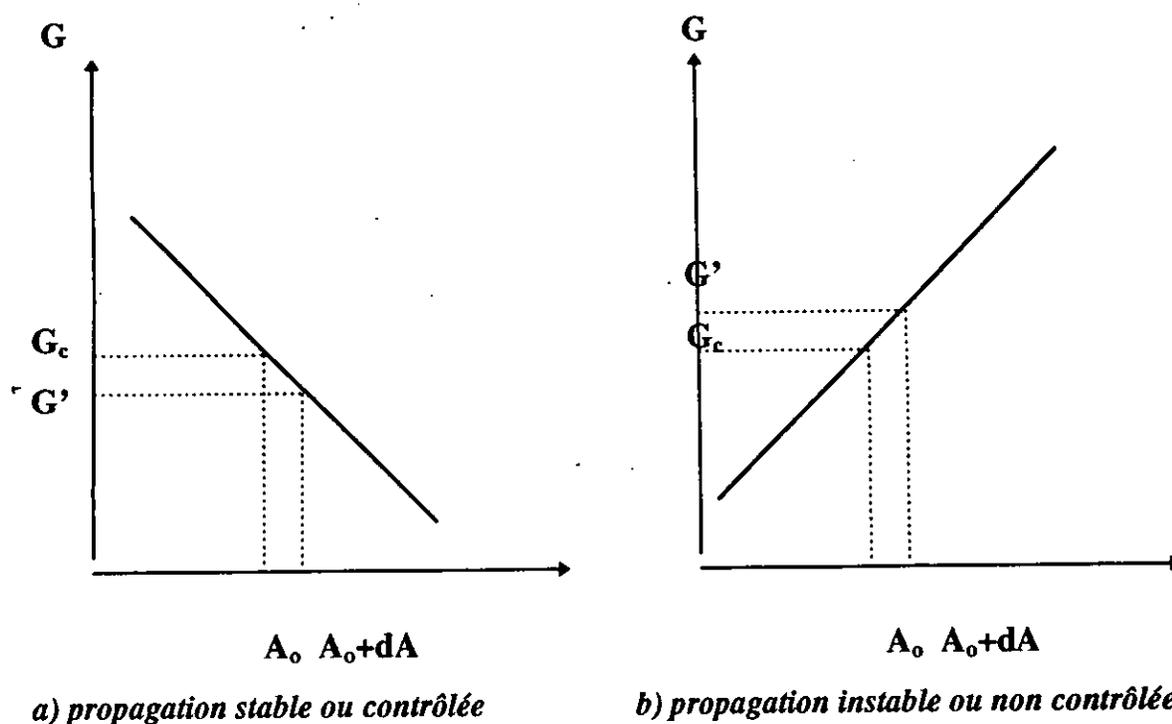


Fig4-2-4 : Discussion de la stabilité de propagation selon l'énergie  $G$

### 4-3 CALCUL NUMERIQUE DE L'ENERGIE D'AVANCEMENT $G$ :

La méthode des discontinuités de déplacement telle qu'elle vient d'être présentée permet de déterminer les champs de contraintes et de déplacements sur la frontière et en tout point de la structure. Le calcul du taux de restitution d'énergie  $G$  a été fait en considérant deux états d'équilibre très proches ( figure 4-2-1).

Sur ce schéma, la fissure d'aire  $A$  dans l'état 1 est supposée se propager dans l'état 2 d'un incrément  $\delta A$  dans la même direction de la fissure. On rappelle que pour une fissure plane d'épaisseur unité, le paramètre  $A$  est la longueur de la fissure.

En contraintes imposées l'expression (4-2-1-8) s'écrit :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \int T_i \frac{du_i}{dl} d\Gamma \quad (4-3-1)$$

Ecrivons cette expression sous forme incrémentale, désignons par  $u_i^1$  et  $u_i^2$ , les champs de déplacements avant et après progression de la fissure de  $dl$ .

Le terme sous le signe intégrale s'écrit :

$$T_i du_i = T_i (u_i^2 - u_i^1) \quad (4-3-2)$$

Alors (4-3-1) s'identifie à :

$$\mathbf{G} dl = \int_{\Omega} T_i (u_i^2 - u_i^1) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_i (u_i^2 - u_i^1) d\Gamma \quad (4-3-3)$$

Ou bien :

$$\mathbf{G} dl = \int_{\Omega} T_i (u_i^2 - u_i^1) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_i (D_i^2 - D_i^1) d\Gamma \quad (4-3-4)$$

Ainsi, le calcul numérique de  $\mathbf{G}$  se fera, en discrétisant l'expression (4-3-4). On obtiendra une somme des produits  $T_i (u_i^2 - u_i^1)$  sur le contour  $\Omega$  et des produits  $T_i (D_i^2 - D_i^1)$  sur la fissure.

La méthode de discontinuité de déplacement présente un avantage particulier pour le calcul de  $\mathbf{G}$ . En effet, dans le calcul de l'état 2, la matrice obtenue à l'état 1 n'est pas modifiée. La matrice actuelle des coefficients d'influences est construite en complétant la précédente avec les lignes et les colonnes correspondant au segment propagé.

#### 4-4 EXEMPLES ET INTERPRETATIONS :

Où constate que dans des corps contenant des inclusions qui sont considérés comme des défauts de matières, une fissuration précoce peut apparaître quand ce corps est soumis à une sollicitation. Pour cela nous introduit sur notre étude ce type de défaut et nous allons voir l'influence du chargement ,de la taille de l'inclusion et de son type (vide ou pleine) sur la propagation de la fissure .Notre modèle de base est une plaque finie ou infinie contenant une inclusion et soumise à une compression.

Néanmoins pour valider notre programme de calcul du taux de restitution d'énergie nous avons traité un premier exemple dont nous avons la solution analytique pour le calcul de  $G$  .

##### 4-4-1 Plaque infinie contenant une cavité et sollicitée en traction :

Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont les suivantes :

$$E = 10^5 \text{ Mpa} , \nu = 0.25$$

Pour ce cas nous considérons un chargement à l'infini  $P = 100 \text{ Mpa}$  .

Et nous supposons l'existence de deux fissures comme le montre la figure (4-4-1)

Pour ce problème on a considéré une simple symétrie par rapport à l'axe  $x = 0$ .

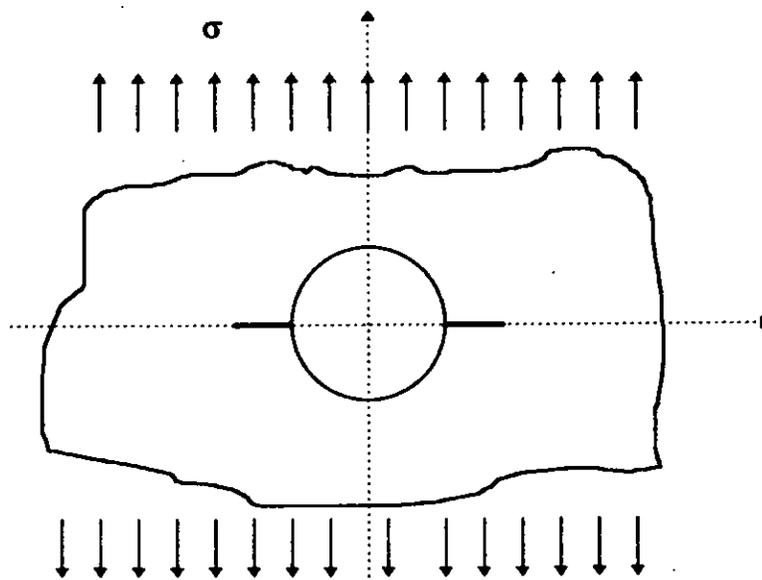


Fig 4-4-1 : Plaque infinie contenant une cavité et soumise à une traction

La solution analytique de ce problème pour le calcul du facteur de concentration de contraintes et donné par l'équation suivante (H.L. Ewalds):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F_2 \left( \frac{a}{a+R} \right) \quad (4-4-1-1)$$

Où  $F_2$  est un facteur de correction donné par l'abaque de la figure(4-4-1-2) en fonction du rapport  $\frac{a}{R+a}$  sachant que :

- $a$  : la longueur de la fissure.
- $R$  : le rayon de la cavité( ou inclusion)

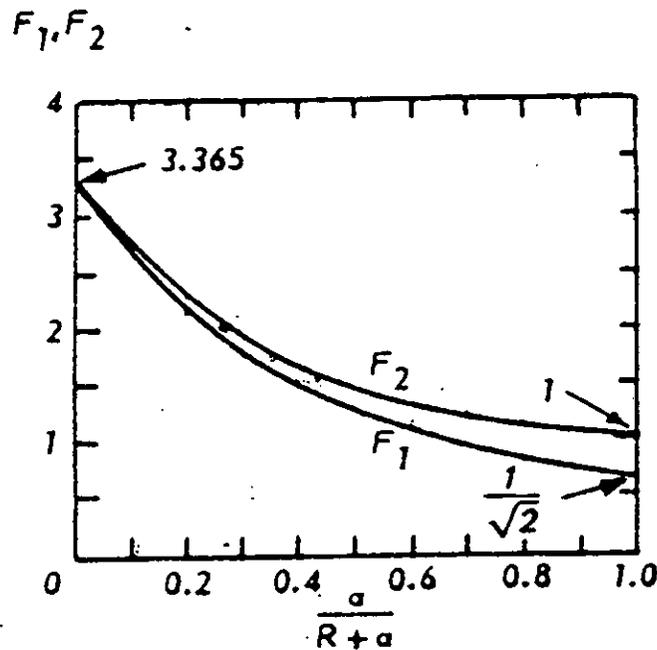


Fig 4-4-1-2 : le facteur de concentration de contraintes

et à partir du coefficient de concentration de contraintes on peut calculer le taux de restitution d'énergie comme suit :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (4-4-1-2)$$

on a obtenu les résultats suivants :

$a / R$	$G_{anal}$	$G_{num}$	$K_{I\ anal}$	$K_{I\ num}$	$E \%$
0.2	0.1990	0.1965	145.693	144.775	1.2

0.4	0.235	0.229	158.324	156.290	2.5
0.5	0.238	0.230	159.332	156.631	3.6
0.6	0.226	0.228	155.263	155.948	0.8

On peut dire qu'on a une bonne approximation de  $G$  avec notre programme de calcul suivant les résultats obtenus dans le tableau précédent.

#### 4-4-2 Plaque infinie contenant une inclusion sollicitée en compression :

Le modèle de base est schématisé sur la figure (4-4-2-1) . Il s'agit d'une plaque contenant une cavité circulaire de rayon  $R$  . Cette plaque, supposée infinie, est soumise à une compression suivant la direction  $yy$  . La position des fissures est justifiée par le critère de la contrainte tangentielle maximale.

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont les mêmes que celles de l'exemple précédent.

Pour résoudre ce problème on a considéré une symétrie simple par rapport à  $y = 0$ .

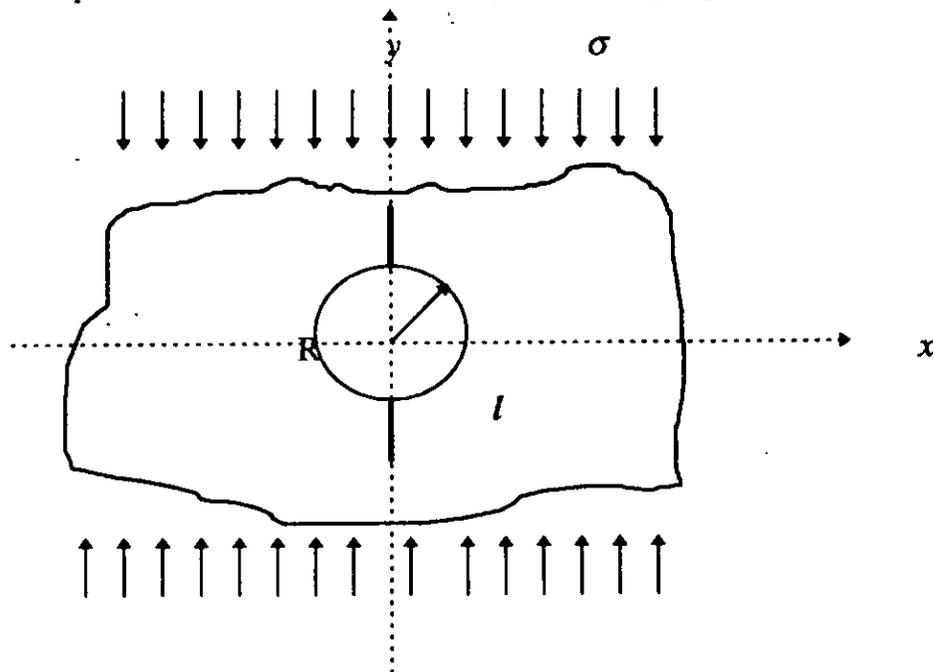


Fig 4-4-2-1 : Plaque infinie contenant deux fissures et sollicitée en compression

Les calculs effectués par la méthode de discontinuité de déplacement sont menés à charge constante  $\sigma = 100$  Mpa. Les résultats sont représentés en terme de :

$$G_r = \frac{G E}{(\pi \sigma^2 R)} \quad (4-4-2-1)$$

La figure (4-4-2-2) montre  $G_r$  en fonction de  $l / R$ .  $G_r$  est un paramètre sans dimension, rapporté à la dimension de l'inclusion, au matériau et au chargement.

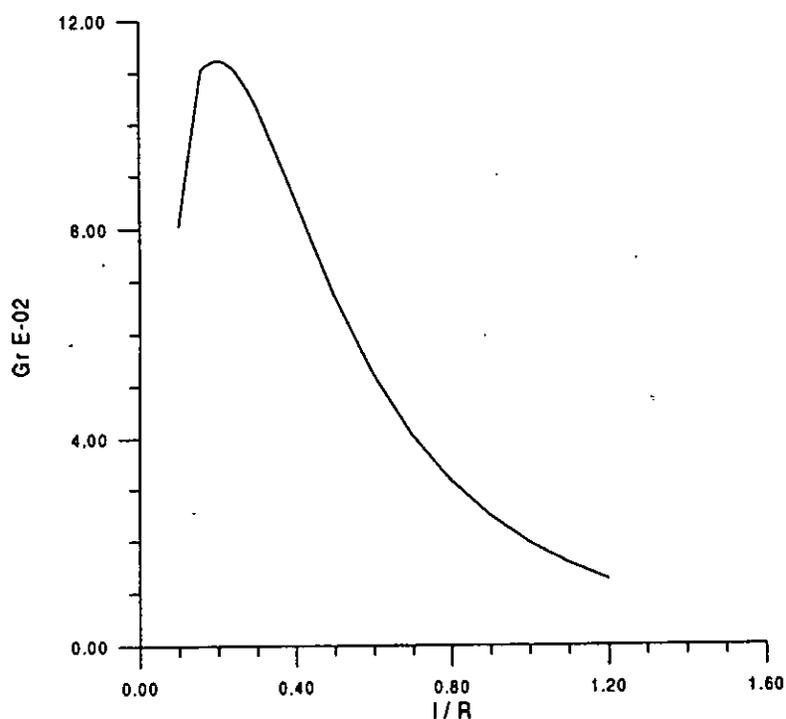


Fig 4-4-2-2 : Variation de  $G_r$  en fonction de la longueur de la fissure

Après une légère phase d'instabilité, on note une très nette stabilité de la propagation, sous chargement imposé, à partir d'une longueur de la fissure de l'ordre de 20 % du rayon  $R$ , l'énergie s'annulant rapidement. La conséquence immédiate de cette constatation est qu'il faudra considérablement augmenter le chargement pour propager la fissure de traction sur de grandes distances. Supposons par exemple  $\sigma_0$  la contrainte nécessaire pour propager la fissure ( $G = G_c$ ) lorsque celle-ci a une longueur  $l = 0.2 R$ . En prenant  $G_c$  constante, il faudra par exemple pour atteindre une longueur égale à  $R$ , une contrainte  $\sigma^2 = 6 \sigma_0^2$ .

#### 4-4-3 Plaque finie sollicitée en compression et contenant une inclusion :

Dans cet exemple une plaque rectangulaire de largeur  $2W$  et de hauteur  $2H$ , et la cavité a un rayon  $R = H / 10$  est considérée (figure 4-4-3-1). Comme l'exemple précédent la plaque est sollicitée en compression avec un chargement constant ( $\sigma = 100 \text{ Mpa}$ ), en gardant les mêmes caractéristiques mécaniques que précédemment

La longueur des fissures est propagée jusqu'à  $l = 1.2 R$ .

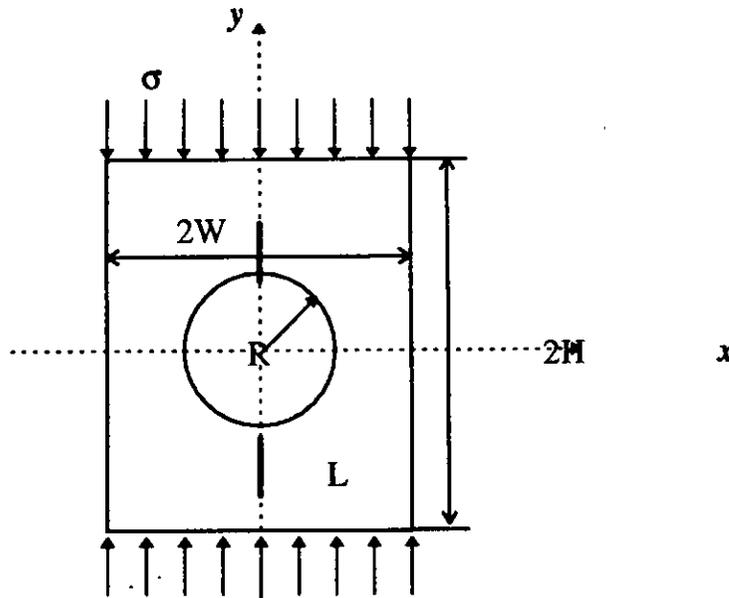


Fig4-4-3-1 : Plaque finie contenant une inclusion sollicitée en compression

Les résultats de cet exemple sont reportés sur la figure (4-4-3-2).

On constate globalement une similitude entre l'allure de ces résultats et ceux de la plaque infinie, sauf que dans ce cas la stabilité se fait à une longueur de la fissure de 30% du rayon, et les valeurs de  $G_r$  sont un peu plus importantes.

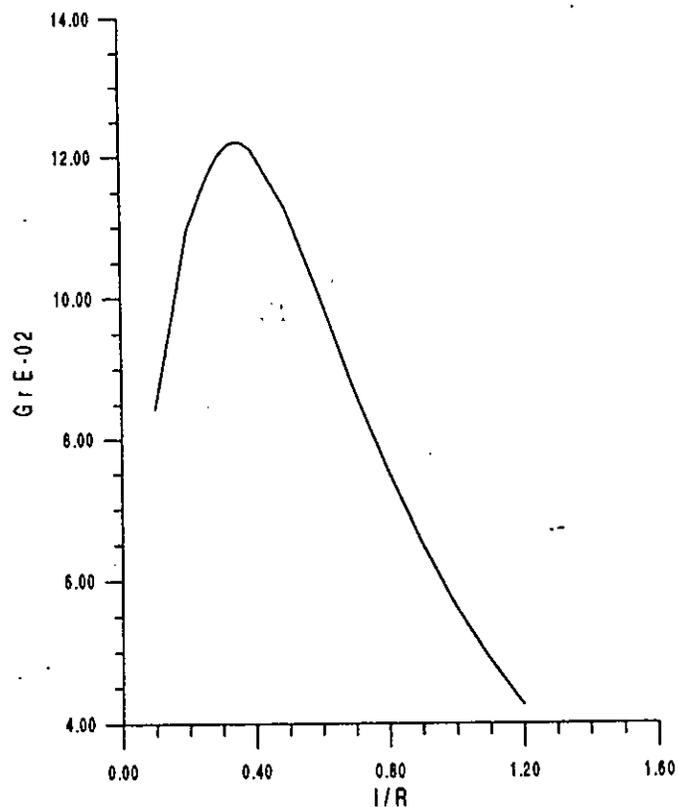


Fig 4-4-3-2 : Plaque finie variation de  $G_r$  en fonction de  $l/R$

Cela nous conduit à envisager des possibilités supplémentaires : le cas où l'inclusion est matériau différent de celui de la plaque.

#### 4-4-4 Plaque finie contenant une inclusion pleine :

On prend les mêmes dimensions de la plaque précédente, mais cette fois l'inclusion a des caractéristiques différents de celles de la plaque.

Les caractéristiques mécaniques de la plaques sont :

$$E = 5 \cdot 10^4 \text{ Mpa}$$

$$\nu = 0.20$$

Et pour l'inclusion on a :

$$E = 10^5 \text{ Mpa}$$

$$\nu = 0.25$$

Pour résoudre ce problème on a considère une simple symétrie par rapport à l'axe  $oy$ .

La discrétisation des divers contours, y compris les fissures joué un rôle important dans la précision des calculs. Les zones de jonction entre le contour circulaire et les éléments de fissures, ainsi que les éléments de l'interface sont fortement discrétisés. Les résultats sont reportés sur la figure (4-4-4-2).

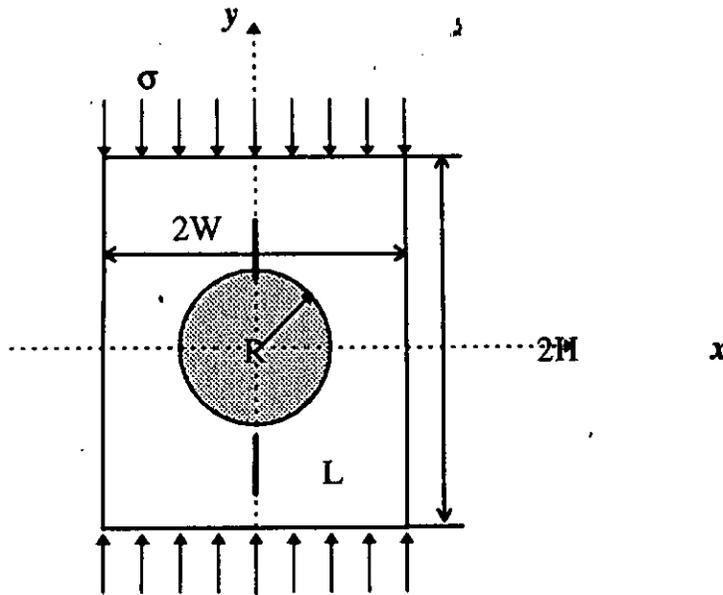
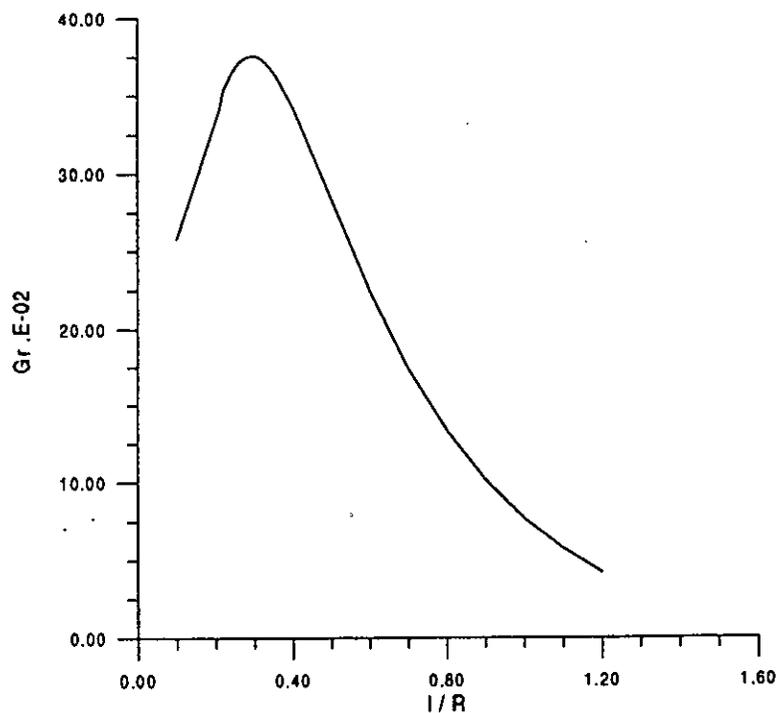


Fig4-4-4-1 : Plaque finie contenant une inclusion sollicitée en compression

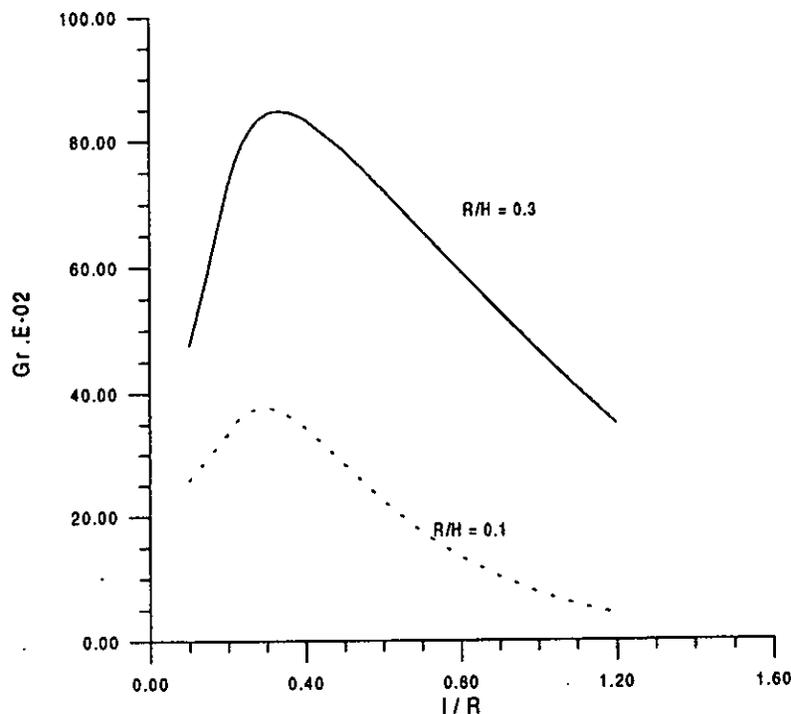


**Fig 4-4-4-2 : Plaque finie avec inclusion variation de  $G_r$  en fonction de  $l/R$**

On observe que l'allure de la courbe reste pratiquement la même que pour la plaque percée. Bien que la présence d'un deuxième matériau dans l'inclusion n'influe pas de manière significative sur le caractère stable de cette propagation, mais elle influe sur la valeur de l'énergie. On constate que la valeur de  $G_r$  maximale est trois fois plus grande que celle de la plaque percée. donc, cela veut dire que propager la fissure pour une longueur donnée la contrainte nécessaire est plus faible que pour le cas de la plaque percée. Cela est du à l'effet du matériau qui constitue l'inclusion.

Maintenant on va varier le rayon de l'inclusion , et garder les autres dimensions et caractéristiques mécaniques.

On a obtenu les résultats suivants :



**Fig 4-4-4-3 : Variation de  $G_r$  en fonction du rayon de l'inclusion**

On constate que la dimension de l'inclusion influe sur le taux de restitution d'énergie. Bien qu'il n'influe pas sur la stabilité de la propagation car la stabilité se produit pour les deux cas à une longueur de 30% du rayon. Donc plus l'inclusion est grande, plus la fissure se propage sur des distances plus grandes avec des chargements moins importants.

# CONCLUSION

## **CONCLUSION :**

Cette étude nous a permis d'apprendre des notions utiles pour l'ingénieur pour la résolution de certains problèmes pratiques parmi elles :

- La première est la méthode des discontinuités de déplacement qui est une méthode souple à utiliser.
- La deuxième discipline porte sur la connaissance des relations à utiliser pour les interfaces entre couches et les conditions de non décollement.
- La troisième est la connaissance des relations fondamentales de la mécanique de la rupture, et leurs applications dans la simulation numérique des problèmes de fissuration à partir d'inclusion.

Nous avons pu grâce à ces acquis, construire un code de calcul pour la résolution des problèmes des milieux isotropes, homogènes et multicouches par l'utilisation de la méthode de discontinuité de déplacement pour les problèmes plans et de présenter une méthode efficace et économique pour la caractérisation en deux dimensions des matériaux non homogène.

En ce qui concerne l'analyse de la rupture autour d'inclusions, on constate que la méthode de discontinuité de déplacement est une méthode adapté à ce type de problème et qu'elle fournit des résultats exploitables.

On note deux phases de propagation instable des fissures initialisées à partir de trou ou d'inclusion circulaires. Les effets des rigidités de cette inclusion sont bien montés sur la stabilité.

# BIBLIOGRAPHIE

## **BIBLIOGRAPHIE :**

**Y.BAMBERGER** : “ La mécanique de la rupture, pour quoi faire ? ”

Rencontre sur la mécanique de la rupture Savigny-sur-Clairis (1982)

**G.CAIGNARET -G.P.HENRY** : “ Exercices d'élasticité ”

DUNOD UNIVERSITY 1978

**S.L.CROUCH-A.M.STARFIELD** : “ Boudary element method in solid mechanics ”

ALLEN et UNWIN (1983)

**H.L.EWALDS-R.J.H WANHILL** : “ Fracture mechanics ”

EDWARD ARNOLD (1989)

**D.GAY** : “ Matériaux composites ”

HERMES (1991)

**M.GHOUALI** : “ Modélisation par la discontinuité des déplacements des milieux multicouches élastiques et viscoélastiques ”

P.F.E promotion 1992

**B.K.HACHI-M.MEDJRAB** : “ Application de la methode des contraintes fictives aux milieux élastiques anisotropes, homogènes et multicouches ”

P.F.E promotion 1996

**D.KONDO** : “ Modélisation du comportement des roches par la mécanique lineaire de la rupture : application à l'étude de la stabilité des ouvrages souterrains ”

Thèse de Doctorat présentée à l'université de LILLE (1989)

**LAHEY COMPUTER SYSTEM** : “ Lahey Tools and Libraries Reference Maual ”

juin 1990

**L.SOLOMON : " Elasticité lineaire "**

Masson et Cie 1968

**TIMOSHENKO : " Théorie de l 'élasticité "**

Librairie POLYTECHNIQUE CH.BERANGER