

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

الدراسة الوطنية المتعددة التخصصات
الميكانيكية - الميكانيكا
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *Genie Mécanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Calcul d'Un Ecoulement
Dans une Roue de Turbomachine
Par La Methode S1 - S2*

Proposé par : M. BOUDJEMAA

Etudié par : N. GHEDIRI

Dirigé par M. BOUDJEMAA

F. GUETTAB

PROMOTION

91-92

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

Genie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Calcul d'Un Ecoulement
Dans une Roue de Turbomachine
Par La Methode S1-S2*

Proposé par : M. BOUDJEMAA

Etudié par : N. GHEDIRI

Dirigé par M. BOUDJEMAA

F. GUETTAB

PROMOTION

91-92

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قال الله تعالى :
« قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ
يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ . »

وقال رسول الله صلى الله عليه وسلم :
« وَمَنْ سَلَكَ طَرِيقًا يَلْتَمِسُ فِيهِ عِلْمًا
سَهَّلَ اللَّهُ لَهُ طَرِيقًا إِلَى الْجَنَّةِ . »
(رواه مسلم .)

- سيجانك لا علم لنا إلا ما
علمتنا . إنك أنت العليم الحكيم -

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

MINISTÈRE DÉLÉGUÉ AUX UNIVERSITÉS

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT : GENIE MÉCANIQUE

RESUME

Dans ce présent projet on analyse un écoulement quasi-tridimensionnel d'un fluide compréssible traversant la roue d'une turbomachine . La méthode adoptée pour cette analyse est celle de WU, qui se base sur un découpage fictif de l'écoulement réel sur deux familles de surfaces orthogonales .

ABSTRACT

In this work we'll analyse a quasi-treedimensional flow of a copressible fluid through a turbomachine . The method used in this analysis is WU's method, witch is based on a fictif subdivision of the real flow to two flows on two orthogonal families of surfaces .

ملخص

في هذه الدراسة نقتوح تحليل انسياب شبه ثلاثي البعد لسائل قابل للضغط عبر مضخة الطريقة المستخدمة في هذا التحليل هي طريقة WU .

DEDICACES

A ma mère et à mon père qui m'ont tout donné, et se sont sacrifiés durant toute leurs vie afin de me permettre d'atteindre d'atteindre ce niveau.

A ma très chère grand mère, et à mes deux frères Rabah et Khaled qui m'ont encouragé et soutenu moralement durant toute la préparation de ce mémoire.

A la mémoire de mes grands parents.

A mon professeur de mathématique M^{me} CHERBI et à son mari dada Omar.

A tous mes amis(es).

farid

Je dedie ce modeste travail à mes très chers parents

A mon frere Omar en particulier

A mes soeurs et freres

A mes nieces et neveux

Et a tous mes amis(es).

Nooredine

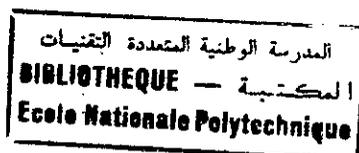
REMERCIEMENTS

On tient à remercier notre promoteur monsieur M. BOUDJEMAA pour son aide précieuse et son soutien constant.

On remercie en particulier M^r OUADJAOUT chargé de cours à l'E.N.P, M^r R. GUETTAB ingénieur à la S.N.V.I, et M^r B. AIT-HADDAD docteur à l'ENSAM de paris, pour l'aide qu'ils nous ont apporté durant les moments les plus difficiles.

Nos remerciements vont aussi à tous les professeurs qui ont contribué de près ou de loin à notre formation.

SOMMAIRE



<u>Titre</u>	<u>page</u>
Introduction.....	1
1. Rappels d'analyse mathématique d'un écoulement dans..... une roue de turbomachine.....	
1.1 Equations de base.....	3
1.1.1 formulation dans un repère absolu.....	3
1.1.2 formulation dans un repère relatif.....	10
1.2 développement des équations principales.....	16
1.3 Modélisation de WU.....	19
1.3.1 Définition des surfaces S1 et S2.....	19
1.3.2 Hypothèses simplificatrices.....	19
1.3.3 Assomption de l'axisymétrie des surfaces de courant... ..	21
2. Analyse de l'écoulement méridien -surface S2-.....	26
2.1 Formulation du problème.....	27
2.2 Equation principale de WU.....	34
2.3 Introduction des hypothèses simplificatrices.....	41
2.4 Conditions aux limites.....	42
3. Analyse de l'écoulement aube à aube -surface S1-.....	43
3.1 Formulation utilisant la fonction de courant.....	44
3.1.1 Equation fondamentale.....	44
3.1.2 Conditions aux limites.....	47
3.1.3 Condition de KUTTA-JOUKOWSKI.....	48
4. Résolution numérique.....	51
4.1 Rappels numériques.....	52
4.1.1 Méthode de Gauss-seidel.....	52
4.1.2 Facteur de relaxation.....	54
4.1.3 Fonctions splines cubiques.....	56
4.2 Methodes de résolution des équations elliptiques.....	59
4.2.1 Méthode de KATZANIS.....	60
4.2.1.1 Calcul de l'écoulement méridional.....	60
4.2.1.1.11 Choix du maillage.....	60
4.2.1.1.12 Discrétisation de l'équation fondamentale.....	61
4.2.1.1.14 Discrétisation du second membre.....	65
4.2.1.2 Calcul de l'écoulement aube à aube.....	69
4.2.1.2.1 Discrétisation de l'équation fondamentale.....	69
4.2.1.2.2 Discrétisation des conditions aux limites.....	71
4.2.1.2.3 Prise en compte explicite de la condition de..... KUTTA-JOUKOWSKI.....	73
4.2.2 Calcul de la densité.....	78
5. Résultats et commentaires.....	79
5.1 Expérimentation numérique et résultats.....	80
Conclusion.....	102

Annexe : 1

Annexe : 2

Annexe : 3

Bibliographie

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION :

La nature tridimensionnelle de l'écoulement d'un fluide dans une turbomachine présente un degré de complexité tel qu'il est nécessaire de recourir à des approximations conçues de façon suffisamment simples, mais conservant cependant un caractère physique acceptable .

Le but de notre projet est l'analyse d'un écoulement quasi-tridimensionnel du fluide à la traversée d'une turbomachine fonctionnant en fluide compressible .

L'étude proposée étant suffisamment générale pour que le type de la turbomachine soit précisé .

Parmi les méthodes élaborées pour le calcul tridimensionnel de l'écoulement d'un fluide citons :

J.P.GUIRAUD et Rt.Kh.ZEYTOUNIAN, F.E.MARBLE, W.R.HAWTHORNE et R.A.NOVAK, C.H.WU, H.MARSH, R.SOVRAND et Y.RIBAUD etc...

Tous ces auteurs ont proposé des schématisations qui ont ouvert la voie des tentatives numérique dont les résultats servent de base dans l'établissement de projets .

La méthode retenue dans ce présent projet est celle de WU qui repose sur un découpage quelque peu fictif de l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels sur deux familles de surfaces orthogonales .

L'analyse de l'écoulement quasi-tridimensionnel est à même de fournir des informations sur l'états de l'écoulement en

n'importe quel point, d'où l'utilité pour la connaissance des zones à risque telle que zone de turbulence et de décrochage de couche limite .

Trois hypothèses simplificatrices ont été adoptées et qui se résument par :

- un fluide parfait .
- un écoulement stationnaire,adiabatique et isentropique .
- axisymétrie des surfaces de courant.

Chapitre 1 : ANALYSE MATHÉMATIQUE DE L'ÉCOULEMENT DANS UNE
ROUE DE TURBOMACHINE

1.1 ÉQUATIONS DE BASE

1.1.1 FORMULATION DANS UN REPERE ABSOLU

1.1.1.1 VARIATION DU CHAMPS DE VITESSES

Considerons le mouvement d'une particule fluide par rapport à un point P tel qu'à l'instant t cette particule se trouve en un point Q et à t+dt, en un autre point Q'. (voir fig 1.1)

$$\vec{V}_{P,t+dt} = \vec{V}_{P,t} + \frac{\delta \vec{V}_{P,t}}{\delta t} dt$$

A l'instant t, la vitesse en un point quelconque Q, diffère de celle qu'a une particule en P et cette différence est due à l'existence d'un gradient de vitesse qui se traduit par :

$$\vec{V}_{Q,t} = \vec{V}_{P,t} + d\vec{V} = \vec{V}_{P,t} + d\vec{r} \cdot \nabla \vec{V}$$

Après un instant dt, la particule qui était en Q aura une vitesse $\vec{V}_{Q,t+dt}$ telle que :

$$\vec{V}_{Q,t+dt} = \vec{V}_{Q,t} + \frac{\delta \vec{V}_{Q,t}}{\delta t} dt$$

d'où

$$\vec{V}_{Q,t+dt} - \vec{V}_{P,t} = \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} dt + d\vec{r} \cdot \nabla \vec{V}$$

<=>

$$D\vec{V} = \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} dt + d\vec{r} \cdot \nabla \vec{V}$$

Cette dernière écriture représente la variation totale de la vitesse qui est une somme de variation dans le temps pour une position fixe et de sa variation due au gradient de vitesse.

$$D\vec{V} = \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} dt + d\vec{r} \cdot \nabla \vec{V} = \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} dt + \vec{V} \cdot dt \cdot \nabla \vec{V}$$

=>

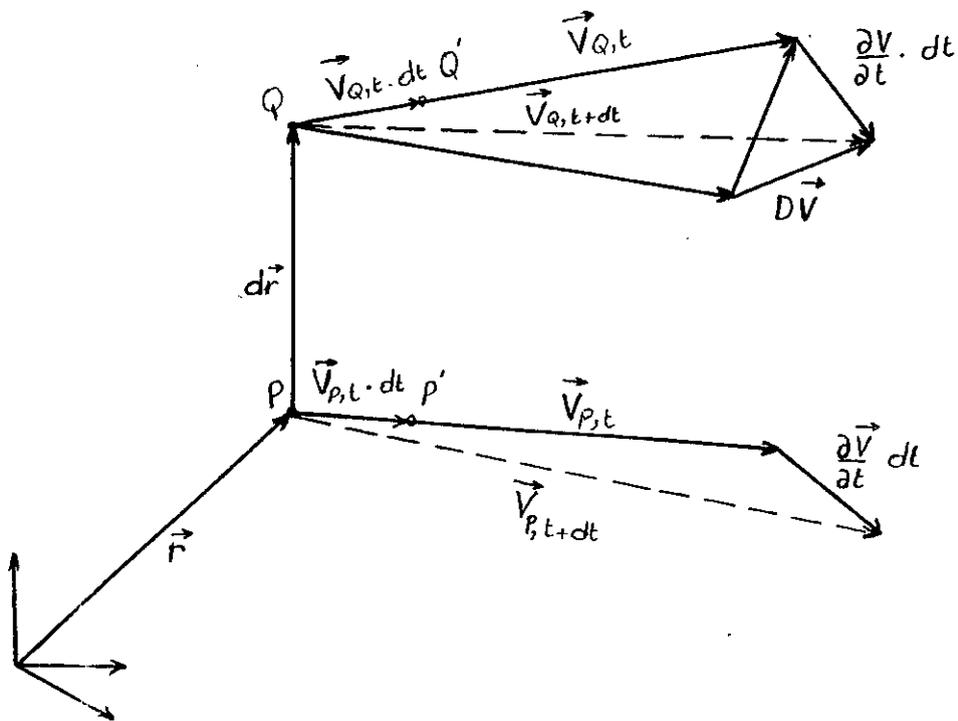
$$\frac{D\vec{V}}{dt} = \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

$$\frac{D\vec{V}}{dt} = \frac{\delta}{\delta t} (V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}) + (V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}) \cdot \left(\frac{\delta \vec{V}}{\delta x} \vec{i} + \frac{\delta \vec{V}}{\delta y} \vec{j} + \frac{\delta \vec{V}}{\delta z} \vec{k} \right)$$

ou (V_x, V_y, V_z) sont les composantes du vecteur \vec{V} dans le repère cartésien.

avec :

$$\frac{D\vec{V}}{dt} = \frac{DV_x}{dt} \vec{i} + \frac{DV_y}{dt} \vec{j} + \frac{DV_z}{dt} \vec{k}$$



— Vitesse à l'instant t
 - - - Vitesse à l'instant $t + dt$

Fig (1.1)

ce qui permet d'écrire que :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{DV_x}{\delta t} = \frac{\delta V_x}{\delta t} + V_x \cdot \frac{\delta V_x}{\delta x} + V_y \cdot \frac{\delta V_x}{\delta y} + V_z \cdot \frac{\delta V_x}{\delta z} \\ \frac{DV_y}{\delta t} = \frac{\delta V_y}{\delta t} + V_x \cdot \frac{\delta V_y}{\delta x} + V_y \cdot \frac{\delta V_y}{\delta y} + V_z \cdot \frac{\delta V_y}{\delta z} \\ \frac{DV_z}{\delta t} = \frac{\delta V_z}{\delta t} + V_x \cdot \frac{\delta V_z}{\delta x} + V_y \cdot \frac{\delta V_z}{\delta y} + V_z \cdot \frac{\delta V_z}{\delta z} \end{array} \right.$$

1.1.1.2 ÉQUATION DE CONTINUITÉ

La variation par rapport au temps de la densité ρ de la particule le long de sa trajectoire est donnée par :

$$\frac{D\rho}{dt} = \frac{\delta\rho}{\delta t} + \vec{V} \cdot \nabla\rho \quad (a)$$

Soit $dm = \rho \cdot dv$ la masse de la particule qui reste constante le long de sa trajectoire et dont la condition se résume par :

$$\frac{D(dm)}{dt} = 0$$

c'est à dire :

$$\frac{D(\rho \, dv)}{dt} = \rho \cdot \frac{D(dv)}{dt} + \frac{D\rho}{dt} \cdot dv = 0 \quad (b)$$

La quantité $\frac{D(dv)}{\delta t}$ est le taux de variation du volume dv de la particule fluide le long de sa trajectoire ; D' une autre façon cette quantité représente le taux de dilatation du volume dv de la particule , qui peut être exprimé par :

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{D(dv)}{dt} \cdot \frac{1}{dv} = \nabla \cdot \vec{V} \quad (c)$$

par substitution de (c) dans (b) et après réarrangement on obtient :

$$\rho \cdot \nabla \cdot \vec{V} + \frac{D\rho}{dt} = 0 \quad (d)$$

tenant compte de la définition (a) , (d) devient :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \vec{V} = 0$$

Relation qui peut s'exprimer par :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

1.1.1.3 ÉQUATION DE MOUVEMENT

Cette équation est basée sur la seconde loi de NEWTON . Pour une particule fluide infinitesimale cette loi s'écrit :

$$\vec{a} \cdot dm = d \vec{F} \quad (1)$$

ou dm est la masse fractionnelle de la particule fluide , et \vec{a} le vecteur accélération donné par la formule .

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{dt} = \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

$d \vec{F}$ représente le vecteur somme de la force surfacique $d \vec{F}_s$ agissant sur la particule et la force de gravite $d \vec{F}_g$ telle que :

$$d \vec{F}_g = \vec{g} \cdot dm = dm \cdot g(-\vec{k}) = dm \cdot \nabla(-gz) = -dm \cdot \nabla(gz) \quad (2)$$

avec :

$$dm = \rho \cdot dv$$

(2) et (1) =>

$$\rho \cdot dv \cdot \vec{a} = d \vec{F}_s + dm \cdot \vec{g} = d \vec{F}_s - \rho \cdot dv \cdot \nabla(gz) \quad (3)$$

La force surfacique $d \vec{F}_s$, elle aussi, est une force somme de deux forces dues respectivement à la contrainte normale et à la contrainte de cisaillement agissant sur un élément fluide .

donc :

$$d \vec{F}_s = \sigma \cdot dv + \tau \cdot dv$$

où $\sigma = -p$ et $\tau = \frac{dF_s}{dv}$

avec $d\vec{F}_f$: appelée force frictionnelle
 et par suite :

$$\frac{dF_s}{dv} = \frac{dF_f}{dv} - \nabla \cdot P \quad (4)$$

notons que :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{F}_s}{dv} \cdot \frac{1}{\rho} - \nabla(gz) \quad (5)$$

En injectant (4) dans (5) on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{F}}{dv} \cdot \frac{1}{\rho} - \frac{\nabla P}{\rho} - \nabla(gz) \quad (6)$$

Remarque :

La quantité $\vec{f} = \frac{d\vec{F}_f}{dV} \cdot \frac{1}{\rho}$ représente la force frictionnelle par
 unite de mesure.

avec $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \text{cte}$

on a : $\vec{f} = \nu \cdot (\nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \cdot \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{V}))$

et pour un fluide incompressible : $\vec{f} = \nu \cdot \nabla^2 \cdot \vec{V}$

En remplaçant \vec{a} par sa valeur dans l'équation (6) celle-ci
 devient :

$$\frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = - \frac{\nabla P}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz) \quad (7)$$

(7) peut être exprimer par :

$$\frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) = \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) - \frac{\nabla P}{\rho} + \vec{f} \quad (1.2)$$

Remarque :

pour $\vec{f} = 0$, l'équation (1.2) est appelée équation d'EULER .

1.1.1.4 RELATIONS THERMODYNAMIQUES

Soient deux particules fluides, se trouvant respectivement en un point P et Q à un même instant t .

D'après le 1er principe de la thermodynamique :

$$T ds = du + P dv$$

où :

s : entropie u : énergie interne
v : volume massique ou spécifique

d'autre part on définit l'enthalpie h par :

$$h = u + p \cdot v$$

Ce qui permet d'écrire que :

$$T ds = dh - v dp$$

avec :

$$v = 1/\rho \quad \text{d'où} \quad T ds = dh - dp/\rho \quad (a)$$

Afin de remplacer les variations ds , dh et dp par d'autres expressions , on se propose de considérer une fonction scalaire ϕ , quelconque définie dans un repère (x,y,z) orthonormé de vecteur unitaire (i,j,k) .

La variation $d\phi$, est définie par :

$$d\phi = \frac{\delta\phi}{\delta x} dx + \frac{\delta\phi}{\delta y} dy + \frac{\delta\phi}{\delta z} dz$$

$$d\phi = \left(\frac{\delta}{\delta x} dx + \frac{\delta}{\delta y} dy + \frac{\delta}{\delta z} dz \right) \cdot \phi$$

=>

$$d\phi = (\vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz) \cdot \left(\vec{i} \frac{\delta}{\delta x} + \vec{j} \frac{\delta}{\delta y} + \vec{k} \frac{\delta}{\delta z} \right) \cdot \phi$$

En introduisant l'opérateur ∇ tel que :

$$\nabla = \vec{i} \frac{\delta}{\delta x} + \vec{j} \frac{\delta}{\delta y} + \vec{k} \frac{\delta}{\delta z}$$

La variation $d\phi$, devient :

$$d\phi = (d\vec{r} \cdot \nabla) \cdot \phi = d\vec{r} \cdot (\nabla \cdot \phi)$$

En notant que :

$$d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$$

et par suite les variations ds , dh et dp entre le point P et le point Q peuvent être exprimées par les fonctions scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} ds &= d\vec{r} \cdot \nabla s \\ dh &= d\vec{r} \cdot \nabla h \\ dp &= d\vec{r} \cdot \nabla p \end{aligned}$$

d'où l'équation (a) devient

$$d\vec{r} \cdot (T \cdot \nabla s - \nabla h + \frac{\nabla P}{\rho}) = 0 \quad (b)$$

T et ρ sont des variables scalaires et les vecteurs ∇s , ∇h et ∇P représentent les vecteurs du champ scalaire S, h et P au point p à l'instant t. Ces gradients ont des valeurs définies et ne dépendent pas de la direction du vecteur $d\vec{r}$ ce qui rend la relation (b) ci-dessous indépendante de $d\vec{r}$.

$$\Rightarrow T \cdot \nabla s - \nabla h + \nabla P/\rho = 0$$

$$\Rightarrow \nabla P/\rho = \nabla h - T \cdot \nabla s \quad (c)$$

En injectant (c) dans l'équation de mouvement (7) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} - \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} &= -\nabla h + T \cdot \nabla s - \nabla (gz) \\ \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} - \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} &= -\nabla (h + gz) + T \cdot \nabla s + \vec{f} \\ \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \nabla (h + \frac{V^2}{2} + gz) &= \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) + T \cdot \nabla s + \vec{f} \quad (1.3) \end{aligned}$$

On notera que pour un vecteur quelconque \vec{A} on a :

$$\vec{A} \cdot \nabla \vec{A} = \nabla A^2 - \vec{A} \times (\nabla \times \vec{A})$$

* Le terme $H = h + \frac{V^2}{2} + gz$ est appelé Enthalpie Totale. H représente l'énergie totale de la particule se trouvant en un point P à l'instant t.

En substituant cette variable H dans (1.3) on obtient :

$$\frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \nabla H = \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) + T \cdot \nabla s + \vec{f} \quad (1.4)$$

Cas particulier :

pour un écoulement incompressible $\rho = \text{cte}$ donc $\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right)$
 d'où l'équation (8) devient

$$\frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right) + \vec{f}$$

c'est à dire :

$$\frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) = \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) + \vec{f} \quad (1.5)$$

A ce stade et afin de simplifier l'écriture de l'équation de mouvement (1.5) on se propose de définir un nouveau concepte appelé : Pression Totale ou Pression de Stagnation définie par :

$$P_s = P + \frac{V^2}{2} + \rho \cdot gz$$

d'où l'équation (1.5) devient :

$$\frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \nabla \left(\frac{P_s}{\rho} \right) = \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) + \vec{f} \quad (1.6)$$

1.1.2 FORMULATION DANS UN REPERE RELATIF

1.1.2.1 VITESSE RELATIVE

Fréquemment il est avantageux de traiter l'étude d'un écoulement dans un système de coordonnées relatives qu'on appelle aussi référentiel mobile.

La figure (1.2) illustre un système relatif qui tourne autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire ω .

Sans rien perdre de ces spécificités, on choisira les origines O_R et O respectivement du système relatif et du système absolu sur un même axe.

\vec{r}_R : désignera le rayon position dans le repère relatif.

\vec{r} : désignera le rayon position dans le repère absolu.

\vec{a} : vecteur position de O_R par rapport à O . (voir fig 1.2)

On a :

$$d\vec{r} = d\vec{r}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R \cdot dt$$

Et la vitesse relative \vec{W} d'une particule se trouvant sur le système relatif sera :

$$\vec{W} = \frac{d\vec{r}_R}{dt}$$

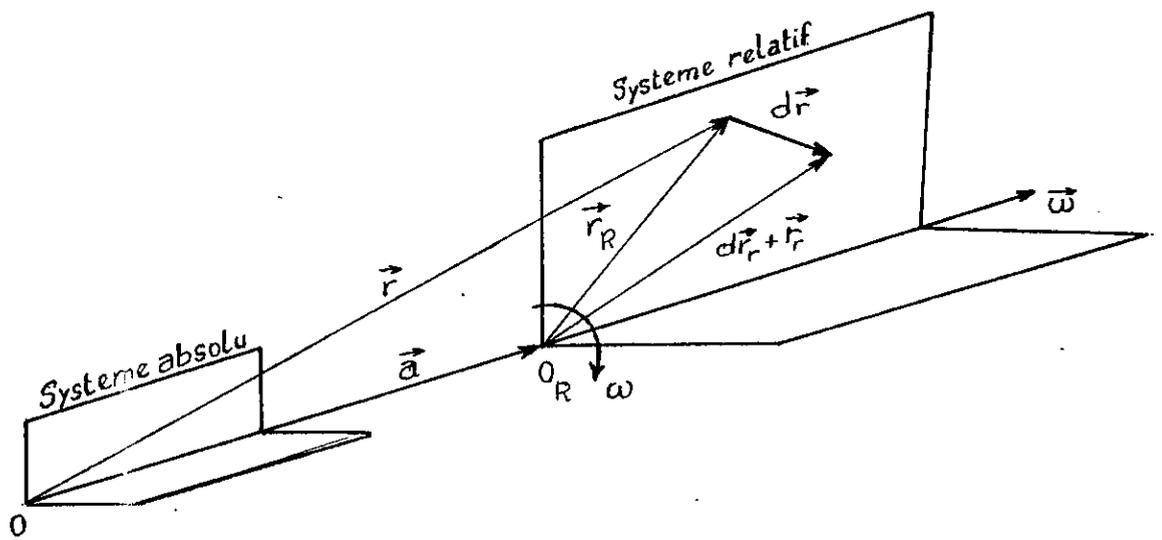


Fig (1.2)

La vitesse absolue de cette particule V (par rapport au repère absolu) sera :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_r = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}_r$$

or : $\vec{r}_r = \vec{r} - \vec{a}$

d'où : $\vec{\omega} \times \vec{r}_r = \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

car les vecteurs \vec{a} et $\vec{\omega}$ sont toujours parallèles .

Et par suite:
$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1.7)$$

1.1.2.2 ACCELERATION RELATIVE

La relation ci-dessus reste valable même quand la vitesse angulaire est variable par rapport au temps .Mais dans tout ce qui suivra , on travaillera avec une vitesse angulaire ω (du rotor) constante .

La variation de la vitesse relative , dans le repère relatif sera donnée par :

$$\frac{D\vec{W}}{D_r t} = \frac{\delta\vec{W}}{\delta t} + d\vec{r}_r \cdot \nabla_r \vec{W}$$

Les symboles $D_r()$ et $\delta_r()$ indiquent que les variations des termes entre parenthèses sont observées par un observateur qui tourne avec le système relatif .

L'accélération relative d'une particule sera donc :

$$\vec{a}_r = \frac{D\vec{W}}{D_r t} = \frac{\delta\vec{W}}{\delta t} + \vec{W} \cdot \nabla_r \vec{W}$$

Et la vitesse absolue $\vec{V} + D\vec{V}$ sera :

$$\vec{V} + D\vec{V} = [\vec{W} + D_r \vec{W}]^* + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_r + \vec{W} dt)]^*$$

ou l'indice " * " indique que l'observateur est sur le repère absolu . (voir fig 1.3)

Vu qu'il y a rotation du système relatif d'un angle $\theta = \omega \cdot dt$

$$[\vec{W} + D_r \vec{W}]^* = [\vec{W} + D_r \vec{W}] + \vec{\omega} \times [\vec{W} + D_r \vec{W}] dt$$

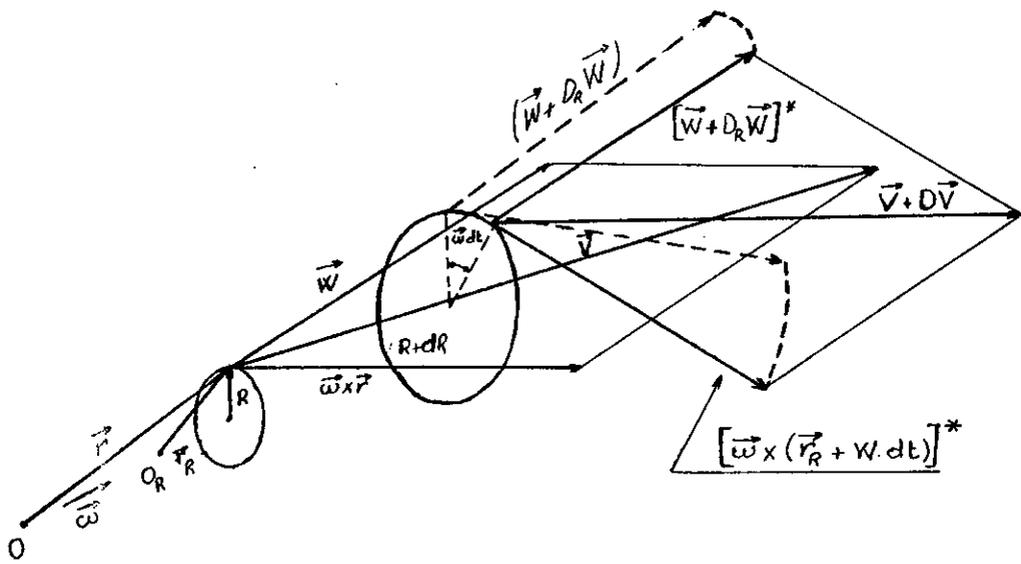


fig (1.3)

et

$$[\vec{\omega} \times (\vec{r}_r + \vec{W} dt)]^\circ = [\vec{\omega} \times (\vec{r}_r + \vec{W} dt)] + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_r + \vec{W} dt)]$$

d'où

$$\vec{V} + D\vec{V} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r} + D_r \vec{W} + 2 \vec{\omega} \times \vec{W} dt + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt + \vec{\omega} \times D\vec{W} dt + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{W} dt) dt$$

Les deux derniers termes peuvent être négliger vu qu'il sont des différentielles du second ordre .

De plus
$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Donc:

$$\frac{D\vec{V}}{dt} = \frac{D\vec{W}}{dt} + 2 \vec{\omega} \times \vec{W} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

or:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

d'où :

$$\frac{D\vec{V}}{dt} = \frac{\delta \vec{W}}{\delta t} + \vec{W} \cdot \nabla \vec{W} + 2 \vec{\omega} \times \vec{W} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

** $2 \vec{\omega} \times \vec{W}$ représente l'accélération de CORIOLIS et $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ représente le vecteur accélération centripète . (voir fig 1.3)

1.1.2.3. EQUATION DE CONTINUITE

Dans le repère absolu l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

or :

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

d'où :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + (\vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \cdot (\vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = 0$$

=>

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \vec{W} \cdot \nabla \rho + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{W} + \rho \cdot \nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0$$

avec

$$\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot \nabla \times \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \times \vec{r}$$

sachant que le rotationnel du vecteur \vec{r} est nul et que le vecteur $\vec{\omega}$ reste constant donc $\vec{V} \times \vec{\omega}$ est lui aussi nul .

et par suite : $\nabla (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0$

d'où :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \vec{W} \cdot \nabla \rho + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{W} = 0 \quad (A)$$

La quantité $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla \rho$ représente la variation de la densité dans la direction périphérique par rapport au repère absolu et est notée :

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla \rho = \frac{d\rho}{dt}$$

et

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = \frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{d\rho}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \rho}{\delta t} = \frac{\delta \rho}{\delta t} - \frac{d\rho}{dt}$$

par substitution de la dernière équation dans l'équation (A) on obtient :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \vec{W} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{W} = 0$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho \vec{W}) = 0 \quad (1.8)$$

1.1.2.4 EQUATION DE MOUVEMENT

L'équation de mouvement dans le repère relatif peut être obtenue en remplaçant le vecteur accélération $\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{dt}$ par sa valeur ,

dans le repère relatif , dans la formule de l'équation de mouvement dans le repère absolu . Ce ci nous donne .

$$\frac{\delta \vec{W}}{\delta t} + \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} \times \vec{r} + \vec{W} \cdot \nabla \vec{V} = - 2 \vec{\omega} \times \vec{W} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \nabla \frac{P}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

or d'après le 1^{er} principe de la thermodynamique:

$$\nabla h - \frac{\nabla P}{\rho} = T \cdot \nabla s$$

ou s représente l'entropie du système étudié .

d'où

$$\frac{\delta \vec{W}}{\delta t} + \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} \times \vec{r} + \vec{W} \cdot \nabla \vec{W} = - 2 \vec{\omega} \times \vec{W} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \nabla(h + gz) + T \cdot \nabla s + \vec{f}$$

=>

$$\frac{\delta \vec{W}}{\delta t} + \vec{W} \cdot \nabla \vec{W} + \nabla \left(h - \frac{\omega^2 R^2}{2} + gz \right) = - 2 \vec{\omega} \times \vec{W} + T \cdot \nabla s + \vec{f} \quad (B)$$

avec :

$$\frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} = 0 \quad \text{car vitesse angulaire constante}$$

Après réarrangement de l'équation (B) on obtient :

$$\frac{\delta \vec{W}}{\delta t} + 2 \vec{\omega} \times \vec{W} - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W}) = - \nabla \left(h + \frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} + gz \right) + T \cdot \nabla s + \vec{f}$$

car :

$$\vec{W} \cdot \nabla \vec{W} = \nabla \left(\frac{W^2}{2} \right) - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W})$$

et afin de simplifier ce dernier resultat on pose :

$$I = h + \frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} + gz$$

qui est appelée : Enthalpie Totale ou Rothalpie

d'où :

$$\frac{\delta_r \vec{W}}{\delta t} + 2 \vec{\omega} \times \vec{W} - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W}) = - \nabla I + T \cdot \nabla s + \vec{f}$$

1.2 DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS PRINCIPALES

Tout écoulement stationnaire non visqueux est régi par l'équation de mouvement :

$$2 \vec{\omega} \times \vec{W} - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W}) = - \nabla I + T \cdot \nabla s \quad (1)$$

où

W . est la vitesse relative

I . rothalpie

s . entropie

$$I = H - \omega r V_u$$

Dans le systeme de coordonnées r, z, θ les équations de continuité , de mouvement , d'énergie et d'état s'écrivent :

1.2.1 EQUATION DE CONTINUITE

$$\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \theta} (\rho \cdot W_\theta) + \frac{\delta}{\delta z} (\rho \cdot W_z) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = 0 \quad \text{car écoulement stationnaire}$$

1.2.2 EQUATION DE MOUVEMENT

Sachant que : $\frac{\delta \vec{W}}{\delta t} = 0$, car écoulement stationnaire de plus $\vec{f} = 0$ car fluide non visqueux.

ou \vec{f} est l'effort dû aux frottements.

d'où la projection de l'équation vectorielle sur les axes r, θ et z donne :

$$-\frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r V_u) - \frac{\delta W_r}{\delta \theta} + 2 \omega \cdot r \right] + W_\theta \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_\theta}{\delta r} \right] = -\frac{\delta I}{\delta r} + T \cdot \frac{\delta s}{\delta r} \quad (3')$$

$$-\frac{W_r}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r W_u) - \frac{\delta W_r}{\delta \theta} + 2 \omega \cdot r \right] - W_\theta \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta W_\theta}{\delta \theta} - \frac{\delta W_u}{\delta z} \right] = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} + \frac{T \cdot \delta s}{r \delta r} \quad (4')$$

$$-W_r \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_\theta}{\delta z} \right] + W_u \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta W_\theta}{\delta \theta} - \frac{\delta W_u}{\delta z} \right] = -\frac{\delta I}{\delta z} + T \cdot \frac{\delta s}{\delta z} \quad (5')$$

or $W_u = V_u - \omega \cdot r$ d'où (3') et (4') deviennent .

$$-\frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r V_u) - \frac{\delta W_r}{\delta \theta} \right] + W_\theta \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_\theta}{\delta r} \right] = -\frac{\delta I}{\delta r} + T \cdot \frac{\delta s}{\delta r} \quad (3)$$

$$-\frac{W_r}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r V_u) - \frac{\delta W_r}{\delta \theta} \right] - W_\theta \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta W_\theta}{\delta \theta} - \frac{\delta W_u}{\delta z} \right] = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} + \frac{T \cdot \delta s}{r \delta \theta} \quad (4)$$

$$-W_r \left[\frac{\delta}{\delta z} (W_r) - \frac{\delta W_\theta}{\delta r} \right] + W_u \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta W_\theta}{\delta \theta} - \frac{\delta W_u}{\delta z} \right] = -\frac{\delta I}{\delta z} + T \cdot \frac{\delta s}{\delta z} \quad (5)$$

1.2.3 EQUATION D'ENERGIE

Elle est donnée par : $\vec{W} \cdot \nabla I = q_0$

où : q_0 est la chaleur que reçoit le fluide par unite de mesure d'une source extérieure .

Cette équation a été obtenue en multipliant scalairement par \vec{W} , l'équation de mouvement d'un fluide .

donc :

$$W_r \cdot \frac{\delta I}{\delta r} + \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} + W_\theta \cdot \frac{\delta I}{\delta z} = q \quad (1.9)$$

1.2.4 EQUATION D'ETAT

Dans tous ce qui va suivre on assimilera notre fluide à un gaz parfait .

D'après le premier principe de thermodynamique :

$$dh - \frac{dP}{\rho} = T.ds \quad \text{avec} \quad dh = C_p dT$$

Assumant l'hypothèse d'un écoulement adiabatique d'un gaz parfait , on aura alors :

$$P = \rho R T \quad \text{et} \quad \rho^{(\gamma-1)} \cdot T = Cte$$

d'où :

$$dh - \frac{\rho}{\rho} R dT - R T \frac{d\rho}{\rho} = T.ds$$

Après division par T on obtient :

$$(C_p - R) \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = ds$$

or :

$$(C_p - C_v) = R \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{R}{C_p}$$

d'où

$$\frac{C_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

et par suite :

$$\frac{R}{(\gamma-1)} \cdot \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = ds$$

Après une 1 ère intégration de cette équation on obtient :

$$\frac{R}{(\gamma-1)} \ln T - R \ln \rho = s + Cte$$

Ln est le logarithme népérien .

d'où :

$$\frac{\frac{R}{(\gamma-1)}}{\frac{T}{\rho^\gamma}} = \alpha \cdot s \quad \text{avec} \quad \alpha = Cte$$

=>

$$\beta \cdot T^{\frac{1}{(\gamma-1)}} \cdot e^{-\frac{s}{R}} = \rho$$

$$\text{or} \quad dh = C_p dt \quad \Rightarrow \quad h = C_p T + Cte$$

et par suite :

$$f = A \cdot h \cdot \frac{1}{(\delta - 1)} \cdot e^{-\frac{s}{R}} \quad (1.10)$$

1.3 MODELISATION DE WU

La résolution numérique du système d'équations gérant l'écoulement étudié, est un problème très complexe, même dans l'hypothèse d'un fluide non visqueux à cause du caractère tridimensionnel de l'écoulement.

Au moyen d'hypothèses simplificatrices, la modélisation proposée par WU consiste à calculer successivement l'écoulement sur deux surfaces, désignées respectivement par S1 et S2.

1.3.3 DEFINITION DES SURFACES S1 et S2

Considerons, pour simplifier la représentation de l'écoulement dans une machine axiale. (voir fig 1.4)

une surface de type S1 est définie comme la surface de courant décrite dans la roue par l'ensemble des particules fluides se trouvant initialement sur un cercle concentrique à l'axe de la machine.

Une surface de type S2 est par contre définie par la surface de courant décrite par l'ensemble des particules fluides se trouvant à l'entrée de la machine sur un rayon de conduite d'aspiration.

En général les surfaces S1 ne sont pas axisymétriques et les surfaces S2 ne se déduisent pas simplement par une rotation des surfaces d'aubages. Dans ces conditions, un calcul affiné nécessite la prise en compte d'un certain nombre de surfaces différentes des deux types.

1.3.2 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Nous admettons en premier lieu que les conditions d'entrée du mouvement absolu ~~soient~~ axisymétriques et stationnaire afin que l'écoulement dans le repère relatif puisse être considéré comme étant stationnaire.

Nous admettons ensuite que l'écoulement est isentropique c'est à dire adiabatique, sans frottement et continu.

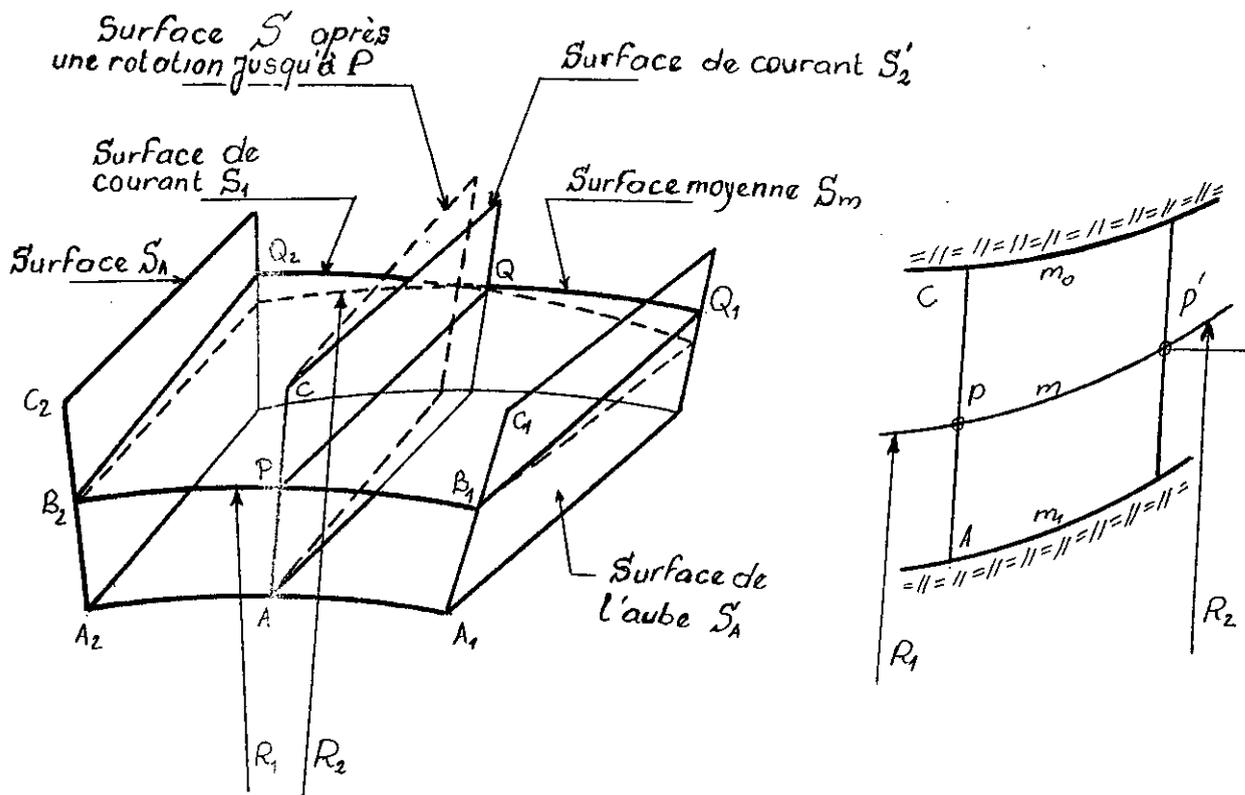


fig (1.4)

Cette dernière condition est automatiquement remplie si le fluide est incompressible ou si l'écoulement est subsonique .

On formule enfin l'hypothèse que les surfaces S1 et S2 sont axisymétriques , ce qui revient à supposer que la roue possède un nombre infiniment grand d'aubes infiniment minces .

Dans ces cas un calcul complet comprend donc les étapes suivantes :

- Calcul de " l'écoulement méridien " sur une surface S2 entre ceinture et couvercle (moyeu et carter) .
- Calcul de " l'écoulement aube à aube " sur la surface S1 .

1.3.3 ASSOMPTION DE L'AXISYMETRIE DES SURFACES DE COURANT :

L'hypothèse d'axisymétrie des surfaces de courant est assujétée au respect de certaines conditions qui sont démontrées dans ce qui suit :

D'après l'équation de mouvement on a :

$$\frac{\delta \vec{W}}{\delta t} + \vec{\nabla} I = \vec{W} \times [\vec{\nabla} \times \vec{W} + 2 \cdot \vec{\omega}] + T \cdot \vec{\nabla} s + \vec{f}$$

or :

$$d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} (\quad) = \vec{W} dt (\quad) = d(\quad) \quad (\S 1.1.1.4)$$

Ce qui permet d'avoir après une multiplication scalaire de $d\vec{r}$ par l'équation de mouvement ce qui suit :

$$dt \cdot \vec{W} \cdot \frac{\delta \vec{W}}{\delta t} + dI = \vec{W} \cdot (\vec{W} \times [\vec{\nabla} \times \vec{W} + 2 \cdot \vec{\omega}]) dt + T \cdot ds + dt \cdot \vec{W} \cdot \vec{f} \quad (a)$$

ou $T \cdot ds = dq$

avec dq : Chaleur Totale que reçoit la particule fluide .

Cette chaleur peut provenir de deux sources différentes .

- Une part dq_0 chaleur transmise par convection dans le fluide et qui provient d'un milieu extérieur .
- L'autre part dq_f est due à l'effet des forces frictionnelles qui agissent sur les particules fluides .

La chaleur frictionnelle dq_f transmise par la particule est égale au travail des forces frictionnelles, ce qui peut être exprimé par la relation :

$$dq_f = - d\vec{r} \cdot \vec{f} = - dt \cdot \vec{W} \cdot \vec{f}$$

d'où :

$$dq = dq_0 - dt \cdot \vec{W} \cdot \vec{f}$$

$$\Rightarrow T.ds = dq_0 - dt \cdot \vec{W} \cdot \vec{f}$$

de plus :

$$\vec{W} \cdot \frac{\delta \vec{W}}{\delta t} . dt = \frac{\delta (W^2)}{\delta t} . dt \quad (2)$$

et

$$\vec{W} \cdot (\vec{W} \times [\nabla \times \vec{W} + 2 \cdot \vec{\omega}]) = 0$$

donc l'équation (2) devient :

$$dI = dq_0 - \frac{\delta (W^2)}{\delta t} dt \quad (b)$$

L'équation (b) étant l'équation d'énergie d'une particule fluide, rend à l'évidence qu'il y a conservation de la rothalpie pour un écoulement fluide stationnaire et adiabatique .

Dans ce cas : $dI = 0$

et par suite l'équation de mouvement se réduit à :

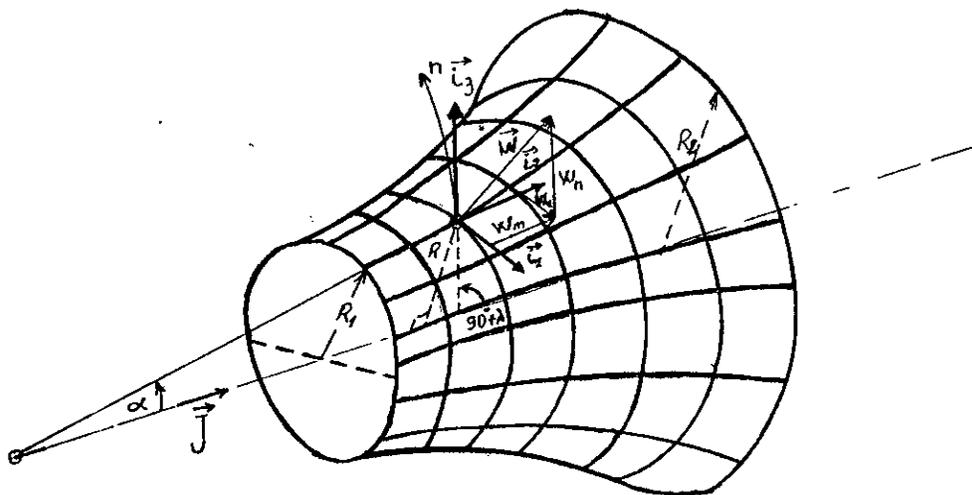
$$\vec{W} \times [\nabla \times \vec{W} + 2 \cdot \vec{\omega}] = 0$$

Le vecteur vitesse \vec{W} d'une particule peut être exprimé par les composantes W_u , W_m et W_n dans les directions des vecteurs unitaires \vec{i}_1 , \vec{i}_2 et \vec{i}_3 . Cependant la ^{condition} ~~variation~~ d'axissymétrie impose à la particule de se mouvoir sur une surface de révolution S_m de telle sorte que sa vitesse \vec{W} n'ait pas de composante \vec{W}_n suivant la normale à la surface S_m . (voir fig 1.5)

Cette condition implique que le vecteur \vec{W} soit tangent à la surface S_m c'est à dire :

$$\vec{W} = \vec{i}_1 W_u + \vec{i}_2 W_m$$

De plus dans le cas d'une surface axisymétrique le rotationnel de \vec{W} s'écrit :



surface axisymétrique

fig (1.5)

$$\nabla \times \vec{W} = \vec{i}_1 \left[\frac{\delta W_n}{\delta m} + W_n K_n - \frac{\delta W_m}{\delta n} - W_m K_m \right] + \frac{\vec{i}_2}{r} \left[\frac{\delta(r \cdot W_u)}{\delta n} \right] + \frac{\vec{i}_3}{r} \left[\frac{\delta W_m}{\delta \theta} - \frac{\delta(r \cdot W_u)}{\delta m} \right]$$

où K_n et K_m représentent les rayons de courbure de la surface S_m , respectivement sur n et m .

Tenant compte des composantes de \vec{W} :

$$\nabla \times \vec{W} = \vec{i} \left[- \frac{\delta W_m}{\delta n} - W_m K_m \right] + \frac{\vec{i}}{r} \left[\frac{\delta(r \cdot W_u)}{\delta n} \right] + \frac{\vec{i}}{r} \left[\frac{\delta W_m}{\delta \theta} - \frac{\delta(r \cdot W_u)}{\delta m} \right]$$

$$\vec{J} = \vec{i}_2 \cos \alpha - \vec{i}_3 \sin \alpha$$

puisque : $\sin \alpha = \frac{\delta R}{\delta n}$ et $\cos \alpha = \frac{\delta R}{\delta m}$

d'où :

$$\nabla \times \vec{W} + 2 \cdot \vec{\omega} = \vec{i}_1 \left[- \frac{\delta W_m}{\delta n} - W_m K_m \right] + \frac{\vec{i}_2}{r} \left[\frac{\delta(r \cdot W_u + \omega r^2)}{\delta n} \right] + \frac{\vec{i}_3}{r} \left[\frac{\delta W_m}{\delta \theta} - \frac{\delta(r \cdot W_u + \omega r^2)}{\delta m} \right]$$

d'où :

$$K_m = \frac{1}{W_m} \cdot \frac{\delta W_m}{\delta m}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \vec{W} \times [\nabla \times \vec{W} + 2 \cdot \vec{\omega}] &= \vec{i}_1 \frac{W_m}{r} \left[\frac{\delta W}{\delta \theta} - \frac{\delta(r \cdot W_u + \omega r^2)}{\delta m} \right] + \\ &\vec{i}_2 \frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta(r \cdot W_u + \omega r^2)}{\delta n} - \frac{\delta W_m}{\delta \theta} \right] + \\ &\vec{i}_3 \left[\frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta(r \cdot W_u + \omega r^2)}{\delta n} \right] + W_m \cdot \frac{\delta W_m}{\delta n} + W_m^2 \cdot K_m \right] = 0 \end{aligned}$$

D'après cette dernière écriture , on conclut que le seul écoulement relatif qui peut avoir des surfaces axissymétriques est celui pour lequel :

$$\nabla \times \vec{W} + 2.\vec{\omega} = 0$$

Pour ce fait il suffit que :

$$\frac{\delta(r.W_u + \omega.r^2)}{\delta n} = 0$$

Cette condition est réalisée (satisfaite) dans le cas où la hauteur de l'aube b est petite devant le rayon r où bien si la turbomachine possède un grand nombre d'aubes .

CHAPITRE 2 : ANALYSE DE L'ECOULEMENT MERIDIEN " SURFACE S2 "

2.1 FORMULATION DU PROBLEME

En general les équations écrites précédemment n'ont pas de solutions simples et pour l'analyse de l'écoulement moyen, elles sont résolues seulement sur la surface moyenne de courant.

Si cette surface est définie par :

$$S(r, z, \theta) = 0 \quad (2.1)$$

et \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface S alors :

$$\vec{n} \times \nabla S = 0$$

d'où :

$$\frac{n_r}{\frac{\delta S}{\delta r}} = \frac{n_\theta}{\frac{1}{r} \frac{\delta S}{\delta \theta}} = \frac{n_z}{\frac{\delta S}{\delta z}} \quad (2.2)$$

Afin de simplifier, on assume que la surface a une seule valeur pour θ donné, d'où :

$$\theta = \theta(r, z) \quad (2.3)$$

donc les deux coordonnées r et z sont suffisantes pour définir n'importe quel point de la surface S et la coordonnée θ est obtenue à partir de l'équation (3).

Si $\frac{\delta q}{\delta r}$ et $\frac{\delta q}{\delta z}$ sont des dérivées partielles prises le long de la surface de courant alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta q}{\delta r} &= \frac{\delta q}{\delta r} - \frac{n_r}{r \cdot n_\theta} \cdot \frac{\delta q}{\delta \theta} \\ \frac{\delta q}{\delta z} &= \frac{\delta q}{\delta z} - \frac{n_z}{r \cdot n_\theta} \cdot \frac{\delta q}{\delta \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

La dérivée spéciale $\frac{\delta q}{\delta r}$ est la variation de q suivant r sur la surface de courant ; sachant la valeur de z.

Alors que $\frac{\delta q}{\delta r}$ est la variation de q suivant r sachant les valeurs de z et θ .

Remarque : Dans le cas de la symétrie axiale, les dérivées spéciales deviennent des dérivées partielles simples.

En introduisant les dérivées spéciales dans les équations gouvernant l'écoulement sur la surface de courant on obtient : (voir annexe 1)

a - Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (\rho r W_r) + \frac{\delta}{\delta z} (\rho W_z) = - \frac{\rho}{r \cdot n_u} \left[n_r \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} + n_u \cdot \frac{\delta W_u}{\delta \theta} + n_z \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{\delta}{\delta z} (\rho \cdot W_z) = - \rho \cdot C(r, z) \quad (2.5)$$

b - Equation de mouvement

$$- \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) + W_z \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_z}{\delta r} \right] = - \frac{\delta I}{\delta r} + T \cdot \frac{\delta s}{\delta r} + F_r \quad (2.6)$$

$$- \frac{W_r}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) + \frac{W_z}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (r \cdot V_u) = F_u \quad (2.7)$$

$$- W_r \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_z}{\delta r} \right] - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (r \cdot V_u) = - \frac{\delta I}{\delta z} + T \cdot \frac{\delta s}{\delta z} + F_z \quad (2.8)$$

où :

$$\vec{F} = - \frac{1}{r \cdot \rho \cdot n_u} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta} \cdot \vec{n}$$

c - Equation d'énergie

Pour un processus adiabatique l'équation (6) du chapitre 1 devient :

$$W_r \cdot \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \cdot \frac{\delta I}{\delta z} = 0 \quad (2.9)$$

De plus une autre forme d'équation pour la variation d'entropie sur une surface de courant peut être obtenue à partir des équations (1) et (5) du chapitre 1 .

En multipliant l'équation (1) par \vec{W} on obtient :

$$\vec{W} \cdot (2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{W}) - \vec{W} \cdot (\vec{W} \times (\nabla \times \vec{W})) = - \vec{W} \cdot \nabla I + T \cdot \vec{W} \cdot \nabla S$$

où

$$\vec{W} \cdot (2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{W}) = 0$$

et

$$\vec{W} \cdot (\vec{W} \times (\nabla \times \vec{W})) = 0$$

d'où :

$$- \vec{W} \cdot \nabla I + T \cdot \vec{W} \cdot \nabla S = 0$$

=>

$$T \cdot \vec{W} \cdot \nabla S = \vec{W} \cdot \nabla I$$

avec

$$\vec{W} \cdot \nabla I = Q$$

or pour un processus adiabatique $Q = 0$

d'où :

$$T \cdot \vec{W} \cdot \nabla S = 0$$

=>

$$T \left[W_r \cdot \frac{\delta S}{\delta r} + \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta S}{\delta \theta} + W_z \cdot \frac{\delta S}{\delta z} \right] = 0 \quad (2.10)$$

Après introduction des dérivées spéciales on obtient :

$$T \left[W_r \cdot \frac{\delta S}{\delta r} + W_z \cdot \frac{\delta S}{\delta z} \right] = 0 \quad (2.11)$$

Pour un fluide non visqueux, le vecteur force \vec{F} est normal à la surface moyenne de courant S , et donc il est normal à la vitesse relative \vec{W} .

d'où :

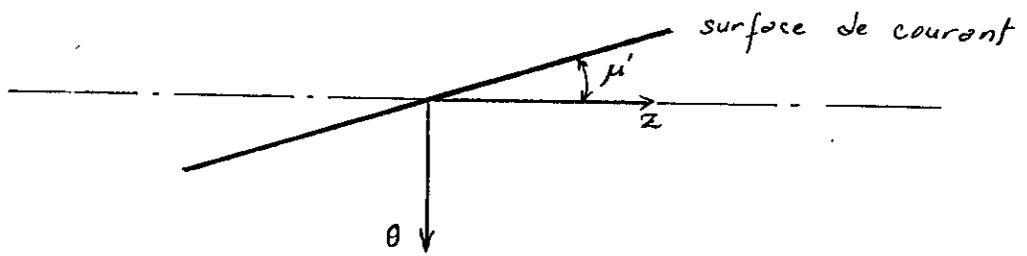
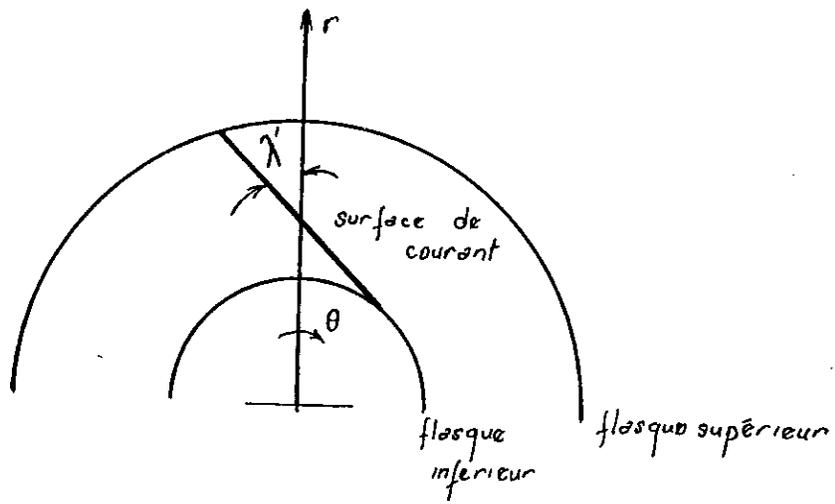
$$\vec{W} \cdot \vec{F} = 0$$

$$W_r \cdot F_r + W_u \cdot F_u + W_z \cdot F_z = 0 \quad (2.12)$$

A partir de ce-ci il convient de définir deux angles λ' et μ' qui définissent la forme locale de la surface de courant par :

$$\left. \begin{aligned} \text{et} \quad \text{tg } \lambda' &= \frac{n_r}{n_u} = \frac{F_r}{F_u} \\ \text{tg } \mu' &= \frac{n_z}{n_u} = \frac{F_z}{F_u} \end{aligned} \right] \quad (2.13)$$

(voir fig 2.1)



Fig(2.1)

Les trois composantes de la vitesse relative seront donc reliées par l'équation qui va suivre :

\vec{W} étant perpendiculaire à \vec{n} donc : $\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$

d'où

$$W_r \cdot n_r + W_u \cdot n_u + W_z \cdot n_z = 0$$

$$\Rightarrow W_u = -W_r \cdot \frac{n_r}{n_u} - W_z \cdot \frac{n_z}{n_u}$$

et par suite :

$$W_u = -W_r \cdot \operatorname{tg} \alpha' - W_z \cdot \operatorname{tg} \mu' \quad (2.14)$$

Cette équation (2.14) représente la condition géométrique, qui assure que le fluide reste sur la surface moyenne de courant .

Afin d'obtenir une équation pour la fonction de courant et d'après WU [1], on introduit un facteur d'intégration B de telle sorte que l'équation de continuité devienne :

$$\frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r \cdot f \cdot B \cdot W_r) + \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (r \cdot f \cdot B \cdot W_z) = 0 \quad (2.15)$$

Le facteur B sera lié à C(r,z) par une relation qu'on déterminera à partir des équations (2.5) et (2.15) .

D'après l'équation (2.15) .

$$\frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r \cdot B \cdot f \cdot W_r) + \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (r \cdot B \cdot f \cdot W_z) = 0$$

=>

$$\left(\frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r \cdot f \cdot W_r) \right) \cdot B + \frac{\delta \overline{B}}{\delta r} (r \cdot f \cdot W_r) + \frac{\delta \overline{B}}{\delta z} (r \cdot f \cdot W_z) + \left(\frac{\overline{\delta}}{\delta z} (r \cdot f \cdot W_z) \right) \cdot B = 0$$

=>

$$\left(\frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r \cdot f \cdot W_r) \right) \cdot B + \frac{\delta \overline{B}}{\delta r} (r \cdot f \cdot W_r) + \frac{\delta \overline{B}}{\delta z} (r \cdot f \cdot W_z) +$$

$$B \cdot \frac{\delta r}{\delta z} \cdot f \cdot W_z + B \cdot r \cdot \frac{\delta}{\delta z} (f \cdot W_z) = 0$$

Après division de cette équation par B on obtient :

$$\frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r \cdot f \cdot W_r) + \frac{r \cdot f \cdot W_r}{B} \cdot \frac{\delta \overline{B}}{\delta r} + \frac{r \cdot f \cdot W_z}{B} \cdot \frac{\delta \overline{B}}{\delta z} + r \cdot \frac{\delta}{\delta z} (f \cdot W_z) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r \cdot \int \cdot W_r}{B} \cdot \frac{\overline{\delta B}}{\delta r} + \frac{r \cdot \int \cdot W_z}{B} \cdot \frac{\overline{\delta B}}{\delta z} = - \left(\frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r \cdot \int \cdot W_r) + r \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (\int \cdot W_z) \right)$$

Opérant encore une seconde division par r d'où on obtient :

$$\frac{\int \cdot W_r}{B} \cdot \frac{\overline{\delta B}}{\delta r} + \frac{\int \cdot W_z}{B} \cdot \frac{\overline{\delta B}}{\delta z} = \left(\frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r \cdot \int \cdot W_r) + r \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (\int \cdot W_z) \right)$$

or d'après l'équation (2.5)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r \cdot \int \cdot W_r) + \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (\int \cdot W_z) = \int \cdot C(r, z)$$

=>

$$\frac{W_r}{B} \cdot \frac{\overline{\delta B}}{\delta r} + \frac{W_z}{B} \cdot \frac{\overline{\delta B}}{\delta z} = - C(r, z) \quad (2.16)$$

Le facteur B est proportionnel à l'épaisseur angulaire locale de la surface de courant et dans l'analyse de l'écoulement moyen on assume que l'épaisseur de la surface de courant moyenne soit proportionnelle à la largeur du canal entre aubes .
Enfin le facteur B sera défini par :

$$B = \frac{\text{Largeur circonfrérentielle du canal entre aubes}}{\text{Pas d'aube (blade pitch)}}$$

On introduit une équation de courant telle que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta r} &= r \cdot \int \cdot B \cdot W_z \\ \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta z} &= - r \cdot \int \cdot B \cdot W_r \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Afin d'obtenir une formulation des équations de mouvements axiaux et radiaux avec fonction de courant on se propose de calculer $\frac{\overline{\delta W_r}}{\delta r}$ et $\frac{\overline{\delta W_z}}{\delta z}$ à partir de l'équation (2.17) .

En reprenant l'équation (2.17) et en différenciant respectivement par rapport à r et z on obtient :

$$\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta r^2} = \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r \cdot \int \cdot B \cdot W_z) \quad (a)$$

et

$$\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta z^2} = -\frac{\overline{\delta}}{\delta z} (r. f. B. W_r) \quad (b)$$

$$(a) \Rightarrow \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta r^2} = W_z \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r. f. B) + (r. f. B) \cdot \frac{\overline{\delta W_z}}{\delta r}$$

$$\frac{\overline{\delta W_z}}{\delta r} = \frac{1}{r. B. f} \cdot \left[\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta r^2} - W_z \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r. f. B) \right]$$

$$\frac{\overline{\delta W_z}}{\delta r} = \frac{1}{r. B. f} \cdot \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta r^2} - W_z \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (\text{Ln}(r. f. B)) \quad (a')$$

$$(b) \Rightarrow -\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta z^2} = W_r \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (r. f. B) + (r. f. B) \cdot \frac{\overline{\delta W_r}}{\delta z}$$

$$\frac{\overline{\delta W_r}}{\delta z} = \frac{-1}{r. B. f} \cdot \left[\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta z^2} + W_r \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (r. f. B) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{\delta W_r}}{\delta z} = \frac{-1}{r. B. f} \cdot \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta z^2} - W_r \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (\text{Ln}(r. f. B)) \quad (b')$$

La substitution de (a') et (b') dans l'équation (6) donne :

$$\frac{-1}{r. B. f} \cdot \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta z^2} - W_r \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (\text{Ln}(r. f. B)) - \frac{1}{r. B. f} \cdot \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta r^2} - W_z \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (\text{Ln}(r. f. B))$$

$$= \frac{1}{W_z} \cdot \left(-\frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta r} + \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r. V_u) + F_r \right)$$

=>

$$-\frac{1}{r. B. f} \left[\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta z^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta r^2} \right] = \frac{1}{W_z} \cdot \left(-\frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta r} + \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r. V_u) + F_r \right) +$$

$$W_r \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (\text{Ln}(r. f. B)) - W_z \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (\text{Ln}(r. f. B))$$

or :

$$W_z = \frac{1}{r. B. f} \cdot \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta r}$$

et

$$W_r = -\frac{1}{r. B. f} \cdot \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta z}$$

d'où :

$$-\frac{1}{r.B.f} \left[\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta z^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta r^2} \right] = \frac{1}{W_z} \cdot \left(-\frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + T \frac{\overline{\delta S}}{\delta r} + \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r.V_u) + F_r \right) -$$

$$\frac{1}{r.B.f} \cdot \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta z} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (\text{Ln}(r.f.B)) - \frac{1}{r.B.f} \cdot \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (\text{Ln}(r.f.B))$$

$$\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta z^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta r^2} = \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (\text{Ln}(r.f.B)) + \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta z} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (\text{Ln}(r.f.B)) +$$

$$\frac{r.f.B}{W_z} \cdot \left(\frac{\overline{\delta I}}{\delta r} - T \frac{\overline{\delta S}}{\delta r} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (r.V_u) - F_r \right)$$

(2.18)

Une équation similaire est obtenue , après substitution de l'équation (2.17) dans l'équation de mouvement axial (8) , elle est donnée par :

$$\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta z^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta r^2} = \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} (\text{Ln}(r.f.B)) + \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta z} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (\text{Ln}(r.f.B)) -$$

$$\frac{r.f.B}{W_r} \cdot \left(\frac{\overline{\delta I}}{\delta z} - T \frac{\overline{\delta S}}{\delta z} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta z} (r.V_u) - F_z \right)$$

(2.19)

Les composantes F_r et F_z des forces agissantes sur les aubes sont nulles dans le cas d'un écoulement axisymétrique mais en général et pour une grille d'aubes elles sont données par les formules suivantes :

et

$$F_r = F_u \cdot \text{tg } d'$$

$$F_z = F_u \cdot \text{tg } \mu'$$

où F_u est donnée par l'équation (7)

2.2 EQUATION PRINCIPALE DE WU

Dans ce paragraphe , on se propose de déterminer les deux formes de l'équation de WU , dont les solutions satisfont l'équation de continuité , deux des trois équations de mouvement et l'équation d'énergie . si de plus la variation d'entropie est donnée par l'équation (11) , alors la solution va vérifier les trois équations de mouvement .

Il sera donc possible d'utiliser une des deux formes de l'équation de WU afin d'obtenir une solution de la fonction de courant qui satisfait toutes les équations gouvernant l'écoulement réversible sur la surface de courant moyenne .
 l'analyse de l'écoulement est souvent réalisée dans un système de coordonnées radiales et axiales ; cependant pour un certains nombres de problèmes il convient d'opérer une rotation de notre système d'axes d'un angle θ (voir fig 2.2)

on a :

$$\begin{aligned} r &= x \sin \theta + y \cos \theta & x &= r \sin \theta + z \cos \theta \\ \text{et} & & & \\ z &= x \cos \theta - y \sin \theta & y &= r \cos \theta - z \sin \theta \end{aligned} \Rightarrow$$

d'où pour une fonction quelconque f :

$$\frac{\overline{\delta f}}{\delta r} = \frac{\overline{\delta f}}{\delta x} \cdot \frac{\overline{\delta x}}{\delta r} + \frac{\overline{\delta f}}{\delta y} \cdot \frac{\overline{\delta y}}{\delta r}$$

avec :

$$\frac{\overline{\delta x}}{\delta r} = \sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\delta y}}{\delta r} = \cos \theta$$

=>

$$\frac{\overline{\delta f}}{\delta r} = \frac{\overline{\delta f}}{\delta x} \cdot \sin \theta + \frac{\overline{\delta f}}{\delta y} \cdot \cos \theta$$

d'où :

$$\frac{\overline{\delta^2 f}}{\delta r^2} = \frac{\overline{\delta^2 f}}{\delta x^2} \cdot \frac{\overline{\delta x^2}}{\delta r^2} + \frac{\overline{\delta^2 f}}{\delta y^2} \cdot \frac{\overline{\delta y^2}}{\delta r^2}$$

=>

$$\frac{\overline{\delta^2 f}}{\delta r^2} = \frac{\overline{\delta^2 f}}{\delta x^2} \cdot \sin^2 \theta + \frac{\overline{\delta^2 f}}{\delta y^2} \cdot \cos^2 \theta$$

de même :

$$\frac{\overline{\delta f}}{\delta z} = \frac{\overline{\delta f}}{\delta x} \cdot \cos \theta - \frac{\overline{\delta f}}{\delta y} \cdot \sin \theta$$

et

$$\frac{\overline{\delta^2 f}}{\delta z^2} = \frac{\overline{\delta^2 f}}{\delta x^2} \cdot \cos^2 \theta - \frac{\overline{\delta^2 f}}{\delta y^2} \cdot \sin^2 \theta$$

avec

$$\frac{\overline{\delta y}}{\delta z} = -\sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\delta x}}{\delta z} = \cos \theta$$

Dans le nouveau système d'axes , l'équation (2.18) s'écrit :

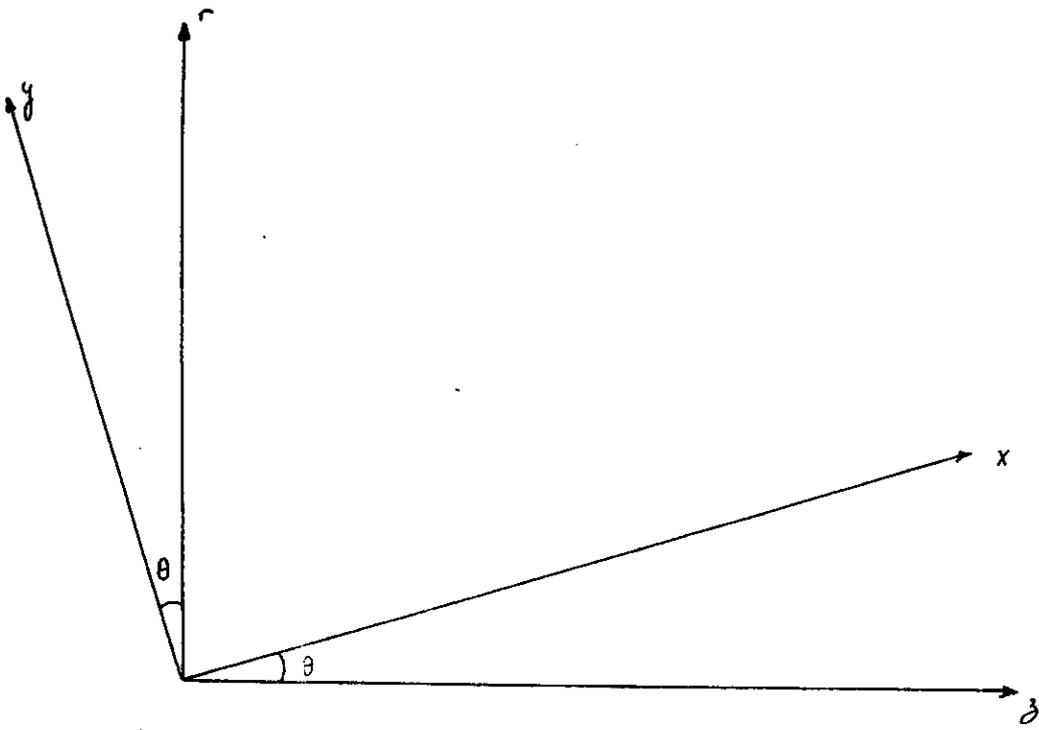


Fig (2.2)

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta x^2} \cdot \sin^2 \theta + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta y^2} \cdot \cos^2 \theta \right] + \left[\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta x^2} \cdot \cos^2 \theta + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta y^2} \cdot \sin^2 \theta \right] = \\
& \left[\frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta x} \cdot \sin \theta + \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta y} \cdot \cos \theta \right] \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} \left[\text{Ln}(r \cdot f \cdot B) \right] + \\
& \left[\frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta x} \cdot \cos \theta - \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta y} \cdot \sin \theta \right] \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta r} \left[\text{Ln}(r \cdot f \cdot B) \right] + \\
& \frac{r \cdot f \cdot B}{W_x \cos \theta - W_y \sin \theta} \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta x} \cos \theta - \frac{\overline{\delta I}}{\delta y} \sin \theta - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta x} \sin \theta - \right. \\
& \left. T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} \cos \theta - \frac{W_u}{r} \left[\sin \theta \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (r \cdot V_u) + \cos \theta \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) \right] - F_r \right]
\end{aligned}$$

=>

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta x^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta y^2} \right] = \left[\frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta x} \cdot \sin \theta + \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta y} \cdot \cos \theta \right] \cdot \\
& \left[\frac{\overline{\delta}}{\delta x} (\text{Ln}(r \cdot f \cdot B)) \cdot \sin \theta + \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (\text{Ln}(r \cdot f \cdot B)) \cdot \cos \theta \right] - \\
& \left[\frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta x} \cdot \cos \theta - \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta y} \cdot \sin \theta \right] \cdot \\
& \left[\frac{\overline{\delta}}{\delta x} (\text{Ln}(r \cdot f \cdot B)) \cdot \cos \theta - \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (\text{Ln}(r \cdot f \cdot B)) \cdot \sin \theta \right] + \\
& \frac{r \cdot f \cdot B}{W_x \cos \theta - W_y \sin \theta} \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta x} \sin \theta + \frac{\overline{\delta I}}{\delta y} \cos \theta - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta x} \sin \theta - \right. \\
& \left. T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} \cos \theta - F_r - \frac{W_u}{r} \left[\sin \theta \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (r \cdot V_u) + \cos \theta \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) \right] \right]
\end{aligned}$$

=>

$$\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta x^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta y^2} = \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta x} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (\ln(r \cdot f \cdot B)) + \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta y} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (\ln(r \cdot f \cdot B)) + \frac{r \cdot f \cdot B}{W_x \cos \theta - W_y \sin \theta} \cdot A \quad (I)$$

avec :

$$A = \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta x} \sin \theta + \frac{\overline{\delta I}}{\delta y} \cos \theta - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta x} \sin \theta - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} \cos \theta - F_r - \frac{W_u}{r} \left[\sin \theta \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (r \cdot V_u) + \cos \theta \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) \right] \right]$$

Afin de simplifier l'expression du terme A, on se propose d'utiliser l'équation de variation d'entropie le long d'une surface de courant (2.11), l'équation d'énergie (2.9), l'équation de mouvement circonférentiel (2.7) et l'équation (2.12) qui lie les composantes de la force \vec{F} à celles de la vitesse relative \vec{W} .

En introduisant le changement de variable dans l'équation (2.9) on obtient :

$$(W_x \cdot \sin \theta + W_y \cdot \cos \theta) \cdot \left(\frac{\overline{\delta I}}{\delta x} \sin \theta + \frac{\overline{\delta I}}{\delta y} \cos \theta \right) + (W_x \cdot \cos \theta - W_y \cdot \sin \theta) \cdot \left(\frac{\overline{\delta I}}{\delta x} \cos \theta - \frac{\overline{\delta I}}{\delta y} \sin \theta \right) = 0$$

=>

$$W_x \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta x} + W_y \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta y} = 0 \quad (a)$$

En procédant de la même sorte et après changement de système d'axes les équations (2.11), (2.7) et (2.12) deviennent respectivement :

$$W_x \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta x} + W_y \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} = 0 \quad (b)$$

$$W_x \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (r \cdot V_u) + W_y \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) = r \cdot F_u \quad (c)$$

$$W_x \cdot F_x + W_u \cdot F_u + W_y \cdot F_y = 0 \quad (d)$$

$$(a) \Rightarrow \frac{\overline{\delta I}}{\delta x} = -\frac{W_y}{W_x} \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta y} \quad (a')$$

$$(b) \Rightarrow \frac{\overline{\delta S}}{\delta x} = -\frac{W_y}{W_x} \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} \quad (b')$$

$$(c) \Rightarrow \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (r \cdot V_u) = \frac{r \cdot F_u}{W_x} - \frac{W_y}{W_x} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) \quad (c')$$

$$(d) \Rightarrow F_x = -\frac{W_u \cdot F_u}{W_x} - \frac{W_y \cdot F_y}{W_x} \quad (d')$$

De plus la force F_r peut s'écrire sous la forme :

$$F_r = F_x \cdot \sin \theta + F_y \cdot \cos \theta \quad (e')$$

En injectant (a'), (b'), (c'), (d') et (e') dans le terme (A) on obtient :

$$A = \left(\frac{\overline{\delta I}}{\delta y} - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) - F_y \right) \cdot \left(\cos \theta - \frac{W_y}{W_x} \cdot \sin \theta \right)$$

d'où l'équation (I) devient :

$$\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta x^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta y^2} = \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta x} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (\ln(r \cdot f \cdot B)) + \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta y} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (\ln(r \cdot f \cdot B)) +$$

$$\frac{r \cdot f \cdot B}{W_x (\cos \theta - \frac{W_y}{W_x} \sin \theta)} \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta y} - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) - F_y \right] \cdot$$

$$r (\cos \theta - \frac{W_y}{W_x} \sin \theta)$$

d'où

$$\boxed{\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta x^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta y^2} = \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta x} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (\ln(r \cdot f \cdot B)) + \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta y} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (\ln(r \cdot f \cdot B)) + \frac{r \cdot f \cdot B}{W_x} \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta y} - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) - F_y \right]} \quad (2.20)$$

Cette équation est appelée... Première forme de l'équation principale de WU.

En opérant de la même manière pour pour l'équation (2.19) on obtient la seconde forme de l'équation principale de WU et qui est donnée par :

$$\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta x^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta y^2} = \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta x} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (\text{Ln}(r \cdot f \cdot B)) + \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta y} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (\text{Ln}(r \cdot f \cdot B)) - \frac{r \cdot f \cdot B}{W_y} \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta x} - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta x} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (r \cdot V_u) - F_x \right] \quad (2.21)$$

Remarque :

On notera que

$$\frac{r \cdot f \cdot B}{W_x} \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta y} - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) - F_y \right] = - \frac{r \cdot f \cdot B}{W_y} \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta x} - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta x} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} (r \cdot V_u) - F_x \right]$$

Ce qui justifie le fait de suffisance de résolution d'une seule équation des formes de WU pour pouvoir calculer les valeurs de la fonction de courant dans le domaine d'étude choisi .

D'une façon plus générale l'équation principale de WU peut être exprimée par :

$$\frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta x^2} + \frac{\overline{\delta^2 \Psi}}{\delta y^2} = q(x, y)$$

avec :

$$q(x, y) = \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta x} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta x} \left[\text{Ln}(r \cdot f \cdot B) \right] + \frac{\overline{\delta \Psi}}{\delta y} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} \left[\text{Ln}(r \cdot f \cdot B) \right] +$$

$$\frac{r \cdot f \cdot B}{W_x} \left[\frac{\overline{\delta \alpha}}{\delta y} - T \cdot \frac{\overline{\delta S}}{\delta y} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\overline{\delta}}{\delta y} (r \cdot V_u) - \delta \right]$$

où α , β et δ sont donnés suivant les deux cas qui se présentent dans notre étude .

et en aval
 a - En amont de la roue

$$\begin{aligned}\alpha &= H \\ \beta &= 1 \\ \delta &= 0\end{aligned}$$

b - Dans la roue

$$\begin{aligned}\alpha &= I = H - w.r.V_u \\ \beta &= B \\ \delta &= F_y = F_u \cdot \operatorname{tg} d\end{aligned}$$

2.3 INTRODUCTION DES HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

l'écoulement étant supposé stationnaire, donc les lignes de courant des particules coïncideront avec leur trajectoires respectives. De plus on a supposé notre fluide parfait, non visqueux ce qui supprime la prise en compte de la couche limite au niveau des surfaces des aubes, de celles du carter et du moyeu de la turbomachine.

La troisième hypothèse étant l'évolution isentropique du fluide étudié, ce qui supprime toute variation d'entropie dans le domaine d'écoulement.

La quatrième hypothèse est l'axissymétrie des surfaces de courant ce qui revient à annuler les variations des fonctions vectorielles par rapport à la direction circonferentielle et par la même, les dérivées spéciales utilisées dans le développement ci dessous deviennent des dérivées partielles ordinaires.

La prise en compte de ces quatre hypothèses permet d'écrire l'équation de WU de la façon suivante :

$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Psi}{\delta y^2} = q(x,y)$$

avec :

$$q(x,y) = \frac{\delta \Psi}{\delta x} \cdot \frac{\delta}{\delta x} \left[\operatorname{Ln}(r \cdot f \cdot \beta) \right] + \frac{\delta \Psi}{\delta y} \cdot \frac{\delta}{\delta y} \left[\operatorname{Ln}(r \cdot f \cdot \beta) \right] +$$

$$\frac{r \cdot f \cdot B}{W_x} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial y} - T \cdot \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{W}{r} \cdot \frac{\delta (r \cdot V_u)}{\delta y} - \delta \right] \quad (2.22)$$

ou α , β et δ sont donnés au paragraphe 2.2 suivant les deux cas qui se présentent et qui sont : cas en amont et aval de la roue et cas de de la roue.

2.4 CONDITIONS AUX LIMITES

La fonction de courant , solution de l'équation différentielle (2.22) doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

Soient Ψ_I et Ψ_{II} les valeurs de la fonction de courant respectivement sur le flasque avant (carter) et le flasque arrière (moyeu) on doit avoir :

$$\Psi_{II} - \Psi_I = q$$

où q est le débit massique .

De plus on assumera l'hypothèse d'un écoulement uniforme loin à l'aval de la roue et à l'infini amont de celle-ci .

Chapitre 3 : ANALYSE DE L ECOULEMENT AUBE A AUBE "SURFACE S1"

3.1 FORMULATION UTILISANT LA FONCTION DE COURANT

La position d'un point sur la surface S1 est decrite par ses coordonnees m et θ (voir fig 3.1) .

On a les relations suivantes :

$$\frac{\delta}{\delta m} = \cos \alpha \cdot \frac{\delta}{\delta z} + \sin \alpha \cdot \frac{\delta}{\delta r}$$

$$\vec{W} = \vec{i}_1 \cdot W_u + \vec{i}_2 \cdot W_m$$

$$\frac{W_m}{W_u} = \text{tg } \beta = r \frac{d\theta}{dm}$$

$$W_m^2 = W_\beta^2 + W_r^2$$

Tenant compte des hypotheses simplificatrices du chapitre 1 , l'equation de continuite s'ecrit :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta(f \cdot W_u)}{\delta \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta(f \cdot r \cdot W_m)}{\delta m} + f \cdot W_m \cdot k_n = 0 \quad (3.1)$$

Avec k_n : courbure de la ligne meridienne PP' , qui se met sous la forme : $k_n = \frac{1}{b} \cdot \frac{\delta b}{\delta m}$ or , on sait que la hauteur des aubages b qui ne depend que de m , est petite devant le rayon r .

L'equation (3.1) devient :

$$\frac{\delta (b \cdot f \cdot W_u)}{\delta \theta} + \frac{\delta (b \cdot f \cdot r \cdot W_m)}{\delta m} = 0 \quad (3.2)$$

Il est maintenant possible d'etablir une fonction de courant qui satisfait l'equation (3.2) telle que :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\delta \psi}{\delta m} = b \cdot f \cdot W_u \\ \frac{\delta \psi}{\delta \theta} = - b \cdot f \cdot r \cdot W_m \end{array} \right. \quad (3.3)$$

3.1.1 EQUATION FONDAMENTALE

La vitesse \vec{W} doit verifier l'equation de mouvement simplifiee , en coordonnees (m, θ , n) , avec n normale en P a la surface S1 , celle - ci s'ecrit de maniere generale :

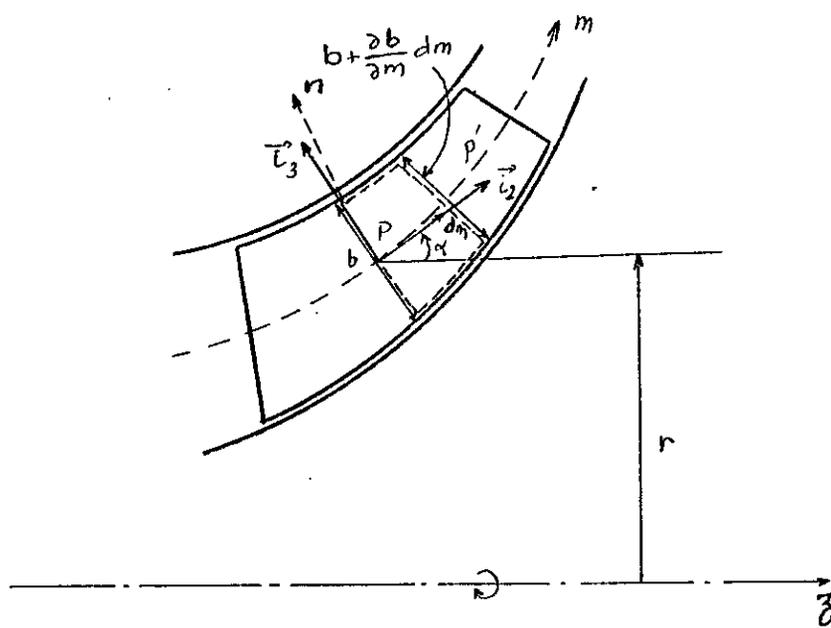
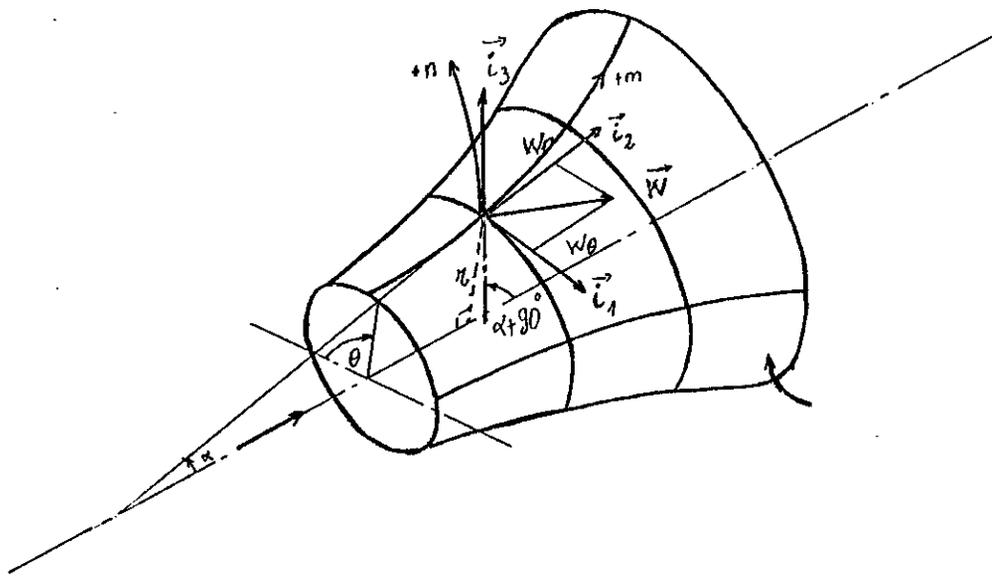


Fig (3.1)

$$\nabla \times \vec{W} + 2\vec{\omega} = \vec{i}_1 \left[\frac{\delta W_m}{\delta n} + W_m \cdot k_m \right] + \vec{i}_2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\delta(r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\delta n} \right] + \vec{i}_3 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\delta W_m}{\delta \theta} - \frac{\delta(r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\delta m} \right] = 0 \quad (3.4)$$

avec $k_m = -\frac{1}{W_m} \cdot \frac{\delta W_m}{\delta n}$ courbure de la surface S1 au point P (fig)

La condition imposée sur i_1 est automatiquement vérifiée .

Dans le cas d'un nombre d'aubes infiniment grand (donc des aubes infiniment minces) , la quantité $(r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)$ reste constante le long de toute normal \vec{n} , entre deux aubes .

Enfin , la projection sur \vec{i}_3 de la relation (3.4) s'écrit :

$$\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\delta W_m}{\delta \theta} - \frac{\delta(r \cdot W_u)}{\delta m} \right) = 2 \omega \cdot \frac{\delta r}{\delta m} \quad (3.5)$$

En portant dans (3.5) les expressions (3.3) et comme b et r ne changent pas dans la direction tangentielle θ , on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{b \cdot r} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} \left[\frac{1}{f} \cdot \frac{\delta \psi}{\delta \theta} \right] + r \cdot \frac{\delta}{\delta m} \left[\frac{1}{f \cdot b} \cdot \frac{\delta \psi}{\delta m} \right] + \frac{\delta r}{\delta m} \cdot \frac{1}{b \cdot f} \cdot \frac{\delta \psi}{\delta m} = - 2 \cdot \omega \cdot r \cdot \frac{\delta r}{\delta m} \quad (3.6)$$

Dans toute la suite de l'étude (chapitre 3), on utilisera la fonction de courant adimensionnelle y définie par :

$$y = -\frac{\psi}{q}$$

où q : désigne le débit massique traversant la roue entre deux aubes adjacentes et deux surfaces S1 distantes de $\Delta n = 1$.

Après substitution de la nouvelle fonction de courant adimensionnelle dans l'équation (3.3) on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\delta y}{\delta m} = - \frac{b \cdot f}{q} \cdot W_u \\ \frac{\delta y}{\delta \theta} = \frac{b \cdot f \cdot r}{q} \cdot W_m \end{cases} \quad (3.7)$$

En portant (3.7) dans l'équation (3.6) avec $\frac{\delta r}{\delta m} = \sin \alpha$ (voir fig 3.4) .

On obtient :

$$\frac{1}{b \cdot r} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} \left[- \frac{q}{f} \cdot \frac{\delta y}{\delta \theta} \right] + r \cdot \frac{\delta}{\delta m} \left[- \frac{q}{f \cdot b} \cdot \frac{\delta y}{\delta m} \right] - \frac{q}{b \cdot r} \cdot \frac{\delta y}{\delta m} \cdot \sin \alpha = - 2 \cdot \omega \cdot r \cdot \sin \alpha$$

En dérivant les termes entre parenthèses on aura :

$$\frac{q}{b \cdot r} \cdot r \cdot \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta \theta^2} + \frac{\delta}{\delta \theta} \left[\frac{1}{\rho} \right] \right] + r \cdot q \left[\frac{\delta^2 y}{\delta m^2} \cdot \frac{\delta}{\delta m} \left[\frac{1}{f \cdot b} \right] \right] + \frac{q}{b \cdot r} \cdot \frac{\delta y}{\delta m} \cdot \sin \alpha = + 2 \cdot \omega \cdot r \cdot \sin \alpha$$

Après multiplication par la quantité $\frac{f \cdot b}{r}$ et réarrangement on obtient :

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta \theta^2} + \frac{\delta^2 y}{\delta m^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\delta f}{\delta \theta} \cdot \frac{\delta y}{\delta \theta} + \left[\frac{\sin \alpha}{r} - \frac{1}{b \cdot f} \cdot \frac{\delta(b \cdot f)}{\delta m} \right] \cdot \frac{\delta y}{\delta m} = \frac{2 \cdot b \cdot f \cdot \omega}{q} \cdot \sin \alpha \quad (3.8)$$

3.1.2 CONDITIONS AUX LIMITES

La fonction de courant adimensionnelle y , solution de l'équation différentielle (3.8), doit vérifier les conditions aux limites du domaine d'étude. Soit une surface de courant S_1 définie par la rotation autour de l'axe de la machine d'une ligne de courant méridienne : celle-ci se trouve découpée périodiquement par les aubes dans la direction périphérique en domaines élémentaires tels que le montre la figure (3.2). Compte tenu de la définition de y et si y_x et y_z sont les valeurs de y correspondant respectivement aux limites FG et BC du domaine élémentaire, on doit avoir :

$$y_F - y_I = \frac{\text{debit masse passant entre BC et FG}}{q} = 1$$

(voir fig 3.2)

s est appelé "pitch" ou largeur angulaire entre deux aubes

$$s = \frac{2 \pi}{N}$$

N : nombre d'aubes dans la roue .

- On posera $y_I = 0$ sur BC et $y_F = 1$ sur FG . Ces conditions sont évidemment complètement équivalentes aux conditions de tangence des vecteurs vitesses à la surface des aubes .

- Loin à l'amont AH et loin à l'aval DE , l'écoulement est supposé uniforme . La connaissance de \vec{W} nous permet d'avoir les valeurs de la fonction de courant sur ces frontières .

- Entre AB et HG ; entre CD et FE , la condition de périodicité se traduit par :

$$\begin{aligned} \text{et} \quad -y_{HG} &= y_{AB} + 1 \\ y_{FE} &= y_{CD} + 1 \end{aligned}$$

3.1.3 CONDITION DE KUTTA - JOUKOWSKI

Dans le but de l'application de la condition de Kutta - Joukowski dans une analyse théorique on a besoin d'être plus précis en ce qui concerne la nature de l'écoulement au bord de fuite .

Le bord de fuite peut avoir différentes formes , il peut être à angle fini , il peut être sous forme de biseau ou arrondi .

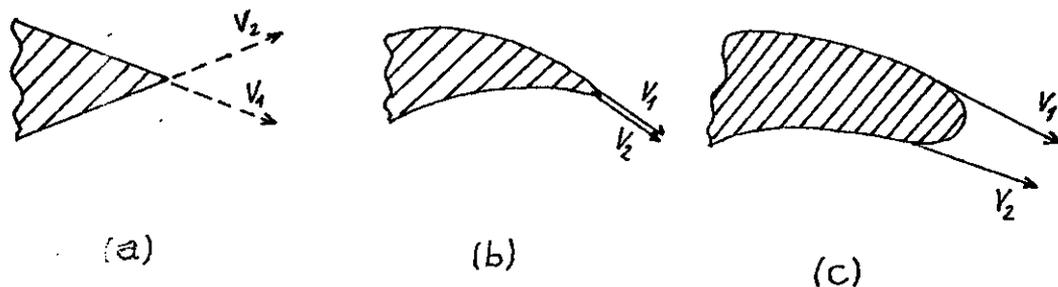


fig (3.3) : différentes formes possibles du bord de fuite .

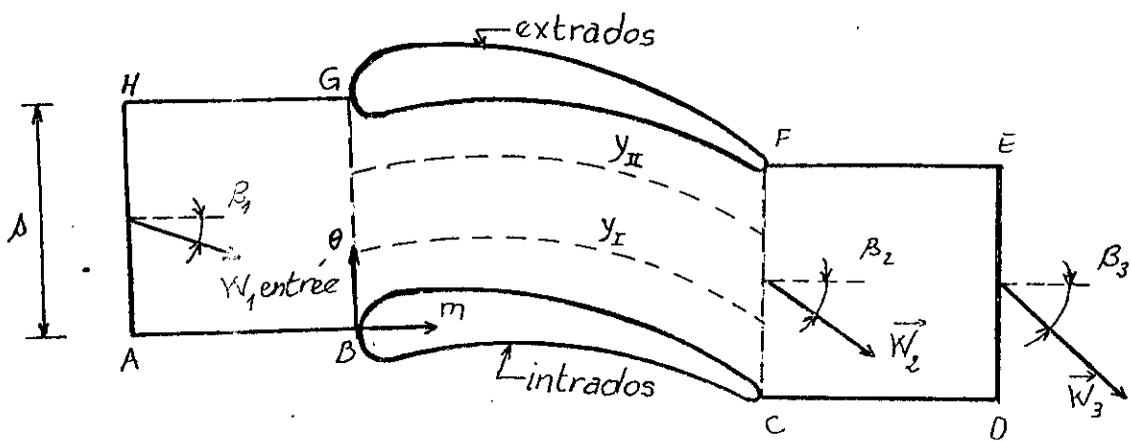


fig (3.2)

En plus des conditions aux limites et des conditions de periodicite de l'ecoulement , la condition de Kutta - Joukowski doit etre satisfaite .

Cette dernière peut s'exprimer de la façon suivante :

Pour un écoulement de fluide parfait autour d'un profil dont l'intrados et l'extrados se terminent suivant une tangente commune la ligne de courant issue du bord de fuite doit quitter ce dernier suivant cette tangente .

Verifier la condition de Kutta - Joukowski sous cette forme pose un probleme dans le cas de profils à bord arrondi ou en forme de diédre . La position du point d'arrêt n'étant pas connue , une petite erreur comise sur sa determination peut en effet engendrer une grande aleration des resultats des calculs . Il est alors preferable de remplacer cette condition par une symetrie de la repartition des pressions ou des vitesses relatives sur l'intrados et l'extrados du profil , le plus près possible du bord de fuite , comme nous le verrons plus en detail au chapitre 4 .

En resumé donc de la condition de Kutta - Joukowski :

Pour un profil donné à un angle d'attaque donné , le fluide quitte le bord de fuite sans perturbations .

- si le bord de fuite est à angle fini , donc c'est un point d'arrêt pour $V_1 = V_2 = 0$
- si le bord de fuite a la forme de biseau , les vitesses quittant l'intrados et l'extrados sans perturbation , sont égales en module et tangentes à la ligne mediane .

Chapitre 4 : RÉSOLUTION NUMERIQUE

4.1 RAPPELS NUMERIQUES

Au cours de notre programme pour le calcul de l'écoulement quasi-tridimensionnel dans une turbomachine, nous avons utilisé la méthode de relaxation lors de la résolution des systèmes d'équations linéaires et les fonctions splines cubiques pour effectuer toutes les interpolations nécessaires en particulier dans l'extension du nombre de données relatives à la géométrie de l'aubage.

La méthode de relaxation est basée sur la méthode de Gauss-Seidel, ou l'on introduit un facteur de relaxation qui accélère la convergence du processus itératif. Notre choix s'est porté pour cette méthode pour trois raisons essentielles, simplicité, rapidité de convergence et occupation d'un espace mémoire très restreint comparé aux autres méthodes telles que celle de Jacobi.

Les fonctions splines permettent une très bonne approximation de la fonction à interpoler et évitent au maximum dans leur représentations graphiques les oscillations parasites comme celles pouvant être introduites par le polynôme de Lagrange; on dit encore que la courbe est lissée au maximum. C'est pourquoi les fonctions splines cubiques constituent un outil idéal pour calculer les dérivées premières en différents points de l'intervalle considéré ou bien l'intégrale le long de cet intervalle.

Méthode de Gauss - Seidel :

Considérons l'exemple d'un ensemble de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = Y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = Y_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = Y_3 \end{cases} \quad (1)$$

On résout la première équation par rapport à x_1 , la seconde par rapport à x_2 etc....., ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1 = (Y_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3) / a_{11} \\ x_2 = (Y_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3) / a_{22} \\ x_3 = (Y_3 - a_{31} \cdot x_1 - a_{32} \cdot x_2) / a_{33} \end{cases} \quad (2)$$

On choisit un ensemble de valeurs $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$.
 $x_2^{(0)}$ et $x_3^{(0)}$ portées dans la première équation (2) donnent :

$$x_1^1 = (Y_1 - a_{12} x_2^0 - a_{13} x_3^0) / a_{11}$$

C'est cette nouvelle valeur de x_1 , et non x_1^0 , qui est portée dans la deuxième equation de (2) donnant :

$$x_2^1 = (y_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0) / a_{22}$$

De même dans la troisième equation de (2), on porte x_1^1 et x_2^1 au lieu de x_1^0 et x_2^0 :

$$x_3^1 = (y_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1) / a_{33}$$

Lorsqu'une inconnue est utilisée, c'est automatiquement la plus recente valeur calculée. ceci assure une convergence bien plus rapide que les autres methodes telle que la methode de Jacobi.

On arrete le calcul lorsque deux valeurs successives de x_j sont "suffisamment" voisines. on peut utiliser deux criteres.

- convergence absolue :

$$\left| X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)} \right| < \varepsilon$$

- convergence relative :

$$\left| \frac{X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}}{X_j^{(k+1)}} \right| < \varepsilon$$

Pour les ensembles de grande taille, il n'est pas commode de faire le test sur chaque inconnue x_j . ou bien on le fait seulement sur certaines d'entre elles, ou bien on teste des quantites de type :

$$\sum_{j=1}^n \left| X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)} \right|$$

où :

$$\left[\sum_{j=1}^n \left[X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)} \right] \right]^{1/2}$$

où :

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}}{X_j^{(k+1)}} \right|$$

ou :

$$\left[\sum_{j=1}^n \left[\frac{X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}}{X_j^{(k+1)}} \right] \right]^{1/2}$$

La convergence du procédé ne dépend pas du choix des valeurs initiales x_j^0 , mais seulement des valeurs des coefficients a_{ij} .

La convergence est assurée si on a pour chaque valeur de i c'est à dire pour chaque ligne) ;

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

En d'autres termes, il y a convergence si chaque element diagonal est supérieur ou égal en module à la somme des modules des autres elements de sa ligne. En pratique, on peut aussi observer une convergence dans des conditions moins restrictives.

Facteur de relaxation :

Si le choix initial x_j^0 n'influe pas sur la convergence ou la divergence de la méthode, il influe par contre considerablement sur la rapidité de la convergence, si convergence il y a. Plus les valeurs initiales sont proches des valeurs reelles, et plus la convergence est rapide.

La fig 1 montre l'évolution possible de l'une des quantites X_j .

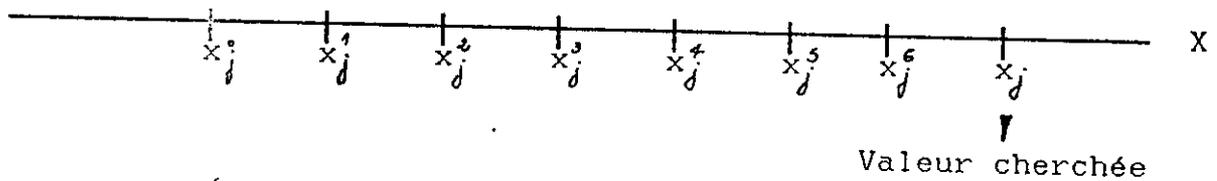


fig 1 : Evolution possible de $X_j^{(k)}$.

Partant de x_j^0 , on obtient x_j^1 , au lieu de reutiliser x_j^0 , pour l'iteration suivante, on voit que la convergence serait plus rapide si, au lieu d'insérer x_j^0 , on inserait :

$$x_j^{x1} = x_j^0 + d \cdot (x_j^1 - x_j^0) \quad \text{avec } d > 1$$

Une autre evolution possible des X_j est montrée (fig 2)

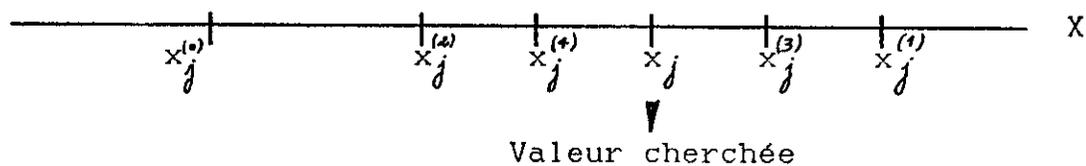


fig 2 : Evolution possible de $X_j^{(k)}$.

Dans ce cas, on voit qu'à partir de $x_j^{(1)}$ et $x_j^{(2)}$, la convergence serait plus rapide si au lieu de partir de $x_j^{(1)}$, on partait de :

$$x_j^{*(1)} = x_j + \lambda \cdot (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \quad \text{avec } \lambda < 1$$

Ainsi, partir de $x_j^{(1)}$ on obtient $x_j^{(k+1)}$. A l'iteration suivante, au lieu de partir de $x_j^{(k+1)}$ on part de :

$$x_j^{*(k+1)} = x_j + \lambda \cdot (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)})$$

λ est le facteur de relaxation. En pratique, λ est defini de façon arbitraire, tel que :

$$0 < \lambda < 2$$

Si $\lambda > 2$, le processus diverge souvent.

En général, $1 < \lambda < 2$ est utilisé pour accélérer la convergence d'un processus iteratif déjà convergent, et $0 < \lambda < 1$ permet de faire converger un processus divergent.

On peut soit utiliser la même valeur λ pour tout l'ensemble, soit des λ différents pour différents blocs. En pratique n'est pas connu à l'avance, il faut faire des essais.

On peut suivre l'evolution de $x_j^{(k)}$ puis injecter une valeur de λ et voir comment evoluent les $x_j^{(k)}$ suivants.

La methode iterative est la plus utilisée pour la resolution :

- de systemes de grande taille .
- de systemes non lineaires .

INTERPOLATION CUBIQUE :

L'interpolation de Lagrange conduit parfois à un polynome ayant une variation beaucoup moins "douce" que $f(x)$. Une fonction d'interpolation plus douce peut être obtenue en faisant passer une règle flexible par les différents points. On l'obtient mathématiquement en faisant passer une cubique par chaque couple de points x_j, x_{j+1} .

Soient x_0, x_1, \dots, x_n les $n+1$ points donnés régulièrement ou irrégulièrement espacés. On remplace $f(x)$ par $g(x)$ telle que entre x_j et x_{j+1} , $g(x)$ soit assimilable à :

$$g(x) = a_0^j + a_1^j \cdot x + a_2^j \cdot x^2 + a_3^j \cdot x^3$$

Pour déterminer les quatre paramètres a_0^j, a_1^j, a_2^j et a_3^j , on imposera évidemment que $g(x_j) = f(x_j)$ et $g(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$.

Les deux autres paramètres sont déterminés en écrivant que dg/dx et d^2g/dx^2 sont continues en x_j . c'est à dire que les cubiques entre les différents points se raccordent sans point anguleux. Or d^2g/dx^2 est linéaire et vaut $2a_2^j + 6a_3^j x$. Par suite les conditions imposées sont représentées par la fig (voir fin de ce paragraphe). On a donc de façon plus précise :

$$x_j < x < x_{j+1} \Rightarrow$$
$$\frac{g''(x) - g''(x_j)}{x - x_j} = \frac{g''(x_{j+1}) - g''(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

soit :

$$g''(x) = g''(x_j) + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \cdot (g''(x_{j+1}) - g''(x_j)) \quad (1)$$

Cette solution assure la continuité de la dérivée seconde $g''(x)$ aux points x_j .

Pour obtenir $g(x)$, on intègre deux fois l'équation (1). Si A et B sont les constantes d'intégration, on obtient successivement en posant comme d'habitude :

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j \quad \text{et} \quad g''(x_j) = g_j''$$

Dans l'intervalle $x_{j-1} < x < x_j$, $g'(x)$ est obtenu en changeant j en $j-1$ dans (4), soit :

$$g'(x) = \frac{g''_{j-1}}{6} \left[-\frac{3(x_j - x)^2 + \Delta x_{j-1}}{\Delta x_{j-1}} \right] + \frac{g''}{6} \left[\frac{3(x - x_{j-1})^2 - \Delta x_{j-1}}{\Delta x_{j-1}} \right] + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x_{j-1}} \quad (5)$$

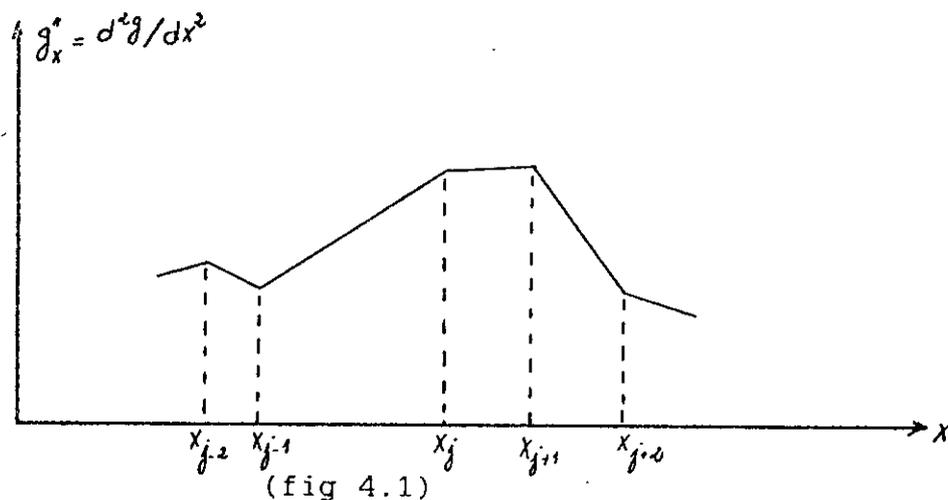
La continuité de $g'(x)$ est assurée en écrivant que pour $1 < j < n-1$, les $g'(x)$ donnés par (4) et (5) sont égaux, ce qui donne après avoir regroupé les termes en g''_{j-1} , g''_j et g''_{j+1} .

$$\frac{\Delta x_{j-1}}{\Delta x_j} \cdot g''_{j-1} + \frac{2(x_{j+1} - x_{j-1})}{\Delta x_j} \cdot g''_j + g''_{j+1} = 6 \left[\frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x_j^2} - \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x_j \Delta x_{j-1}} \right] \quad (6)$$

Cette relation doit être écrite pour $j = 1, 2, \dots, n-1$. On obtient donc $(n-1)$ équations linéaires entre les $n+1$ inconnues $g''_0, g''_1, \dots, g''_n$. Il s'en suit que deux dérivées secondes sont arbitraires. On pose généralement :

$$\begin{cases} g''_0 = 0 \\ g''_n = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Les équations (6) et (7) permettent de déterminer g''_j pour $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Ces valeurs reportées dans (3) permettent d'obtenir la fonction $g(x)$ en tout point, comme solution d'un système linéaire à matrice tridiagonale, obtenue en faisant $j = 1$ à $j = n-1$ dans (6).



4.2 METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS ELLIPTIQUES

Les équations telles que les relations (2.22) et (3.8) , régissant l'écoulement permanent d'un fluide non visqueux sont de type elliptique . Il existe de nombreuses méthodes pour les résoudre . Les méthodes reposent généralement sur une discrétisation des équations dans l'espace physique et une solution par itérations successives . Parmi les principales , nous citerons :

- Les méthodes de singularités qui consistent à introduire sur des lignes ou surfaces du champs d'écoulement des distributions de singularités (tourbillon , puits , sources ou doublets) permettant de traduire les conditions de glissement du fluide sur les parois fixes ou mobiles . Ces méthodes sont généralement très précises mais relativement délicates à manipuler et sensibles à la qualité de leur programmation (problème des lissages) .

- Les méthodes basées sur la transformation conforme qui permettent de réaliser une résolution assez simple des équations dans un espace fictif transformé de l'espace physique . Peu employée dans l'analyse courante vu qu'elle a l'inconvénient de rendre complexe la transformée des équations de base , ce qui risque de compliquer la recherche des solutions du problème donné .

- Les méthodes de discrétisation par éléments finis dont le principal avantage est de permettre une bonne représentation des géométries complexes des canaux d'écoulement mais qui sont relativement assez lourdes en volume et en temps de calcul .

- Les méthodes basées sur la discrétisation des équations selon la technique des différences finies sont en nombre important .

Signalons entre autre ,

- La méthode de courbure des lignes de courant qui consiste à ~~la~~ discrétiser les équations selon un maillage constitué par les lignes de courant et des lignes quasi-orthogonales et à calculer la vitesse méridienne en chaque point à partir de la courbure des lignes de courant . Délicate à utiliser (problème de stabilité numérique) , cette méthode est limitée aux seuls écoulement subsoniques dans des géométries relativement simples.

- Les méthodes de "time marching" consistent à introduire des termes pseudo - instationnaires dans les équations de façon à donner un caractère hyperbolique aux équations et ainsi bénéficier des facilités de calcul correspondantes . Assez lourdes en temps de calcul , elles représentent le très grand avantage de permettre le traitement des écoulements en régime quelconque .

- Les méthodes classiques de discrétisation le long de lignes de maillage de direction arbitraire sont actuellement d'application industrielle courante. Parmi celle-ci, on note en premier lieu les méthodes matricielles, qui permettent le calcul avec le même algorithme de la solution des écoulements bidimensionnels "aube à aube" et "méridien". Elles se prêtent bien à la programmation structurée, ce qui rend le temps d'exécution machine plus performant et présentent une bonne stabilité numérique et une convergence rapide alliées à une bonne précision.

Parmi ces dernières, la technique de calcul proposée par KATSANIS qui consiste à discrétiser l'équation elliptique selon un maillage de forme rectangulaire puis, à partir d'une distribution arbitraire de la fonction de courant à recalculer celle-ci à partir des valeurs prises aux points voisins.

A chaque itération on a ainsi à résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues. Le processus est répété jusqu'à convergence de la solution.

4.2.1 METHODE DE KATSANIS

Avant d'entamer le calcul numérique, on tient à préciser qu'on utilisera que les différences finies centrées lors des discrétisations de nos équations dans tout le domaine d'écoulement, sauf aux frontières avec l'aubage où on utilisera tantôt des différences finies décalées à droite et tantôt décalées à gauche suivant la position géométrique du point du maillage (voir annexe 3 - différences finies).

4.2.1.1 CALCUL DE L'ECOULEMENT MERIDIONAL

4.2.1.1.1 CHOIX DU MAILLAGE

Le type de maillage pour lequel on a opté est un maillage rectangulaire sur tout le domaine d'écoulement. Cependant, étant donné que la géométrie des flasques avant et arrière de la turbomachine peuvent avoir de grande courbure, on précédera l'opération de maillage par une transformation du domaine d'écoulement sur la surface méridionale de telle sorte à ramener celui-ci à un domaine rectangulaire. Cette transformation facilite l'application de la méthode de KATSANIS et le programme élaboré ainsi devient adopté à toute sorte de turbomachines quelque soit la complexité de la géométrie des flasques avant et arrière.

Remarque : Dans le cas des turbomachines axiales, il n'est pas nécessaire d'opérer une telle transformation.

4.2.1.1.2 TRANSFORMATION DU DOMAINE D'ECOULEMENT

Le passage du maillage curviligne qui permet d'avoir le maximum de noeuds dans une grille, au maillage rectangulaire se fait par le biais des transformations suivantes : (voir fig 4.2)

Le domaine rectangulaire (fig 4.2) (b) est un domaine fictif ou les coordonnées des noeuds sont données d'une façon arbitraire par l'utilisateur du programme .

soit une fonction quelconque : $F = F(x,y)$

avec : $x = x(\xi, \eta)$ et $y = y(\xi, \eta)$

alors

$$\begin{cases} \frac{\delta F}{\delta \xi} = \frac{\delta F}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta \xi} + \frac{\delta F}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\delta F}{\delta \eta} = \frac{\delta F}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta \eta} + \frac{\delta F}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta \eta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta F}{\delta x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\delta y}{\delta \eta} \cdot \frac{\delta F}{\delta \xi} - \frac{\delta y}{\delta \xi} \cdot \frac{\delta F}{\delta \eta} \right) \\ \frac{\delta F}{\delta y} = -\frac{1}{J} \left(\frac{\delta x}{\delta \eta} \cdot \frac{\delta F}{\delta \xi} - \frac{\delta x}{\delta \xi} \cdot \frac{\delta F}{\delta \eta} \right) \end{cases} \quad (4.1)$$

ou $J = \frac{\delta x}{\delta \xi} \cdot \frac{\delta y}{\delta \eta} - \frac{\delta x}{\delta \eta} \cdot \frac{\delta y}{\delta \xi}$ Jacobien de la transformation

Les dérivées secondes de F sont obtenues en posant $F = \frac{\delta F}{\delta x}$ ou $\frac{\delta F}{\delta y}$ dans l'équation (4.1)

4.2.1.1.3 DISCRETISATION DE L'EQUATION FONDAMENTALE

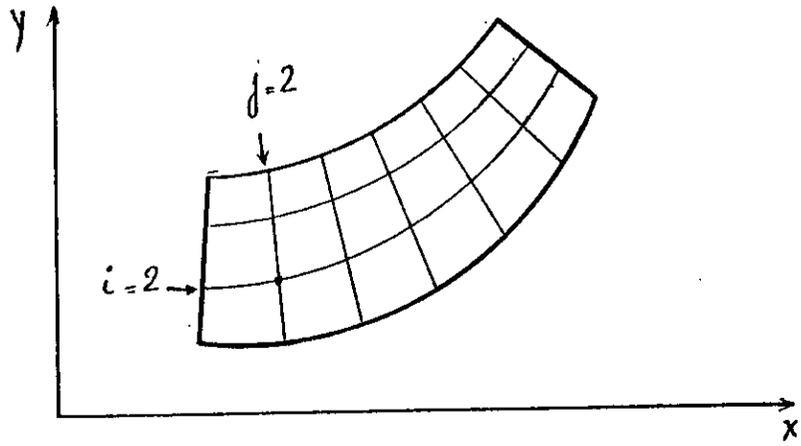
Soit un point arbitraire O d'indice (i, j) et 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 les point voisins de O dans la grille de maillage (voir fig 4.3).

On notera par h_i les distances qui separent le point o 1, 2, 3, 4 soit :

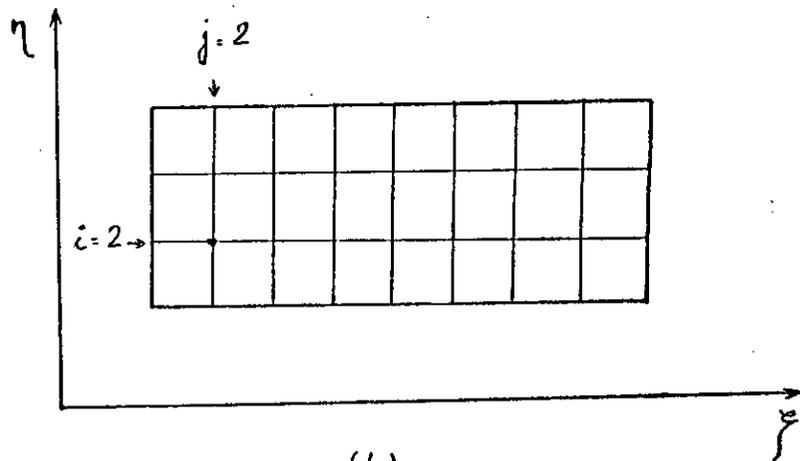
$$h_1 = \eta_0 - \eta_1 \quad h_2 = \eta_2 - \eta_0 \quad h_3 = \xi_0 - \xi^3 \quad h_4 = \xi^4 - \xi^0$$

étant donné qu'on n'opère pas de rotation des axes r et z donc l'équation fondamentale où de WU s'écrit :

$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta r^2} + \frac{\delta^2 \Psi}{\delta z^2} = q(r, z) \quad (4.2)$$

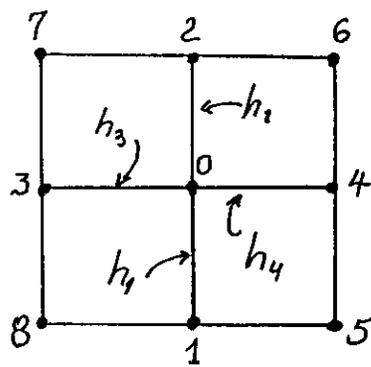
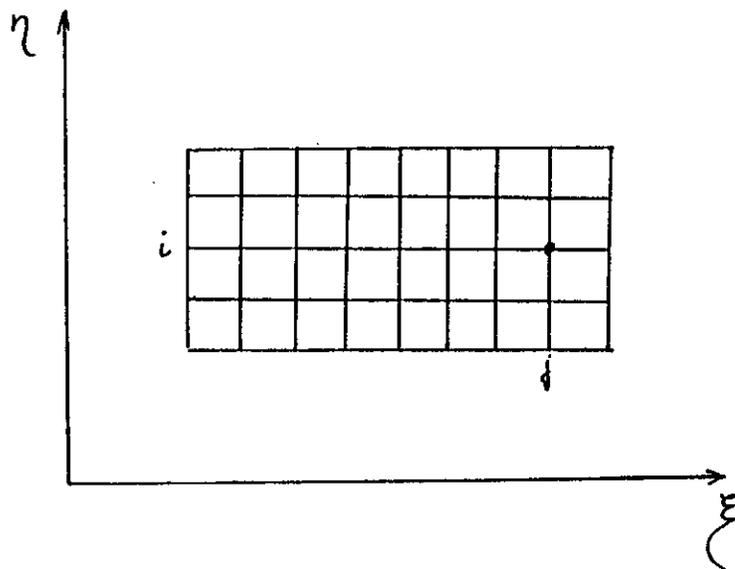


(a)



(b)

fig (4.2)



fig(4.3)

avec :

$$q(r, z) = \frac{r \cdot \rho \cdot B}{W} \left[\frac{\delta I}{\delta r} - \frac{\delta W_u}{r} ; \frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) - F_r \right]$$

La discrétisation de l'équation (4.2) revient à discrétiser en un premier temps l'équation de LAPLACE ; ensuite à discrétiser le second membre $q(r, z)$.

Afin d'alléger l'encombrement des formules après discrétisation, on gardera dans ce chapitre les notations suivantes :

$$\frac{\delta z}{\delta f} = zk, \quad \frac{\delta z}{\delta \eta} = ze, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta f^2} = zkk, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta \eta^2} = zee, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta f \delta \eta} = zke, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta \eta \delta f} = zek$$

$$\frac{\delta r}{\delta f} = rk, \quad \frac{\delta r}{\delta \eta} = re, \quad \frac{\delta^2 r}{\delta f^2} = rkk, \quad \frac{\delta^2 r}{\delta \eta^2} = ree, \quad \frac{\delta^2 r}{\delta f \delta \eta} = rke, \quad \frac{\delta^2 r}{\delta \eta \delta f} = rek$$

$$\frac{\delta J}{\delta f} = Jk$$

$$\frac{\delta J}{\delta \eta} = Je$$

On transposera tout d'abord les dérivées secondes $\frac{\delta^2 \Psi}{\delta r^2}$ et $\frac{\delta^2 \Psi}{\delta z^2}$ dans le domaine rectangulaire par le biais de la transformation (4.1) ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta r^2} = & \frac{1}{J} \left[zk \cdot ze \cdot \frac{J_e}{J^2} - z^2 e \cdot \frac{J_k}{J^2} + \frac{1}{J} (zek \cdot ze - zk \cdot zee) \right] \cdot \frac{\delta \Psi}{\delta f} \\ & + \left[ze \cdot zk \cdot \frac{J_k}{J^2} - z^2 k \cdot \frac{J_e}{J^2} + \frac{1}{J} (zke \cdot zk - ze \cdot zkk) \right] \cdot \frac{\delta \Psi}{\delta \eta} \\ & + \left[\frac{1}{J} \cdot z^2 e \right] \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta f^2} + \left[\frac{1}{J} \cdot z^2 k \right] \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta \eta^2} - \left[\frac{2}{J} \cdot zk \cdot ze \right] \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta f \delta \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta z^2} = & \frac{1}{J} \left[rk \cdot re \cdot \frac{J_e}{J^2} - r^2 e \cdot \frac{J_k}{J^2} + \frac{1}{J} (rek \cdot re - rk \cdot ree) \right] \cdot \frac{\delta \Psi}{\delta f} \\ & + \left[re \cdot rk \cdot \frac{J_k}{J^2} - r^2 k \cdot \frac{J_e}{J^2} + \frac{1}{J} (rke \cdot rk - re \cdot rkk) \right] \cdot \frac{\delta \Psi}{\delta \eta} \\ & + \left[\frac{1}{J} \cdot r^2 e \right] \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta f^2} + \left[\frac{1}{J} \cdot r^2 k \right] \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta \eta^2} - \left[\frac{2}{J} \cdot rk \cdot re \right] \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta f \delta \eta} \end{aligned}$$

La substitution des dérivées partielles de Ψ par rapport à f et par des différences finies centrées autour de 0 permet d'avoir une équation linéaire en Ψ qui représente l'équation (4.2) au second ordre près. Elle est donnée par :

$$- a_0 \cdot \Psi_0 + a_1 \cdot \Psi_1 + a_2 \cdot \Psi_2 + a_3 \cdot \Psi_3 + a_4 \cdot \Psi_4 + a (\Psi_6 - \Psi_5 - \Psi_7 + \Psi_8) = q_0 \quad (4.3)$$

où

$$a_0 = \frac{2}{J^2} \left[\frac{z^2 e + r^2 e}{h_4 \cdot h_3} + \frac{z^2 k + r^2 k}{h_1 \cdot h_2} \right]$$

$$a_1 = \frac{2}{J^2} \cdot \frac{(z^2 k + r^2 k)}{h_1 \cdot (h_1 \cdot h_2)} - \frac{1}{J} \left[(ze \cdot zk + re \cdot rk) \cdot Jk - (z^2 k + r^2 k) \cdot Je + J(zke \cdot zk - zkk \cdot ze + rke \cdot rk - rkk \cdot re) \right] / (h_1 + h_2)$$

$$a_2 = \frac{4}{J^2} \cdot \frac{1}{(h_1 + h_2)} \cdot \left[\frac{(z^2 k + r^2 k)}{h_1} \right] - a$$

$$a_3 = \frac{2}{J^2} \cdot \frac{(z^2 e + r^2 e)}{h_1 \cdot (h_1 \cdot h_2)} - \frac{1}{J} \left[(zk \cdot ze + rk \cdot re) \cdot Je - (z^2 e + r^2 e) \cdot Jk + J(zek \cdot ze - zk \cdot zee + rek \cdot re - rk \cdot ree) \right]$$

$$a_4 = \frac{4}{J^2} \cdot \frac{(z^2 e + r^2 e)}{h_3 \cdot (h_3 + h_4)} - a$$

$$a = - \frac{2}{J^2} \cdot \frac{(zk \cdot ze + rk \cdot re)}{(h_3 + h_4) \cdot (h_1 + h_2)}$$

4.2.1.1.4 DISCRETISATION DU SECOND MEMBRE

Le second membre est donné par l'équation (4.2) soit:

$$q(x, y) = \frac{r \cdot \rho \cdot B}{W_y} \left[\frac{\delta I}{\delta r} - \frac{\delta W_u}{r} \cdot \frac{\delta (r \cdot V_u)}{\delta r} - F_r \right]$$

où

$$I = h + \frac{V^2}{2} - \omega \cdot r \cdot V_u \quad \text{avec} \quad V_u = W_u + \omega \cdot r$$

donc

$$\frac{\delta I}{\delta r} = \frac{\delta h}{\delta r} + \frac{\delta}{\delta r} \left[\frac{V^2}{2} \right] - \omega \frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u)$$

et par suite :

$$\frac{\delta I}{\delta r} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) = \delta h + \vec{V} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (\vec{V}) - \frac{(\omega + W_u)}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u)$$

D'après l'équation (4.10) et tenant compte de l'hypothèse d'un écoulement isentropique :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{h}{h_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4.4)$$

L'indice 0 indique la caractéristique du fluide à l'entrée de la turbomachine (en amont de la roue).

De plus :

$$h = C_p \cdot T \quad \text{avec} \quad C_p = \frac{\gamma \cdot R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad T = \frac{a^2}{\gamma \cdot R}$$

$$\Rightarrow h = \frac{a^2}{\gamma - 1}$$

d'où la formule (4.4) devient :

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma - 1} \quad (4.5)$$

=>

$$\frac{\delta h}{\delta r} = \frac{a^2}{(\gamma - 1)} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma - 1)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta \rho}{\delta r} \quad (4.6)$$

La force F_u est donnée par la formule (4.4) où F_u est formulée dans l'équation () par :

$$F_u = \frac{W_r}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) + \frac{W_z}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (r \cdot V_u) \quad (4.7)$$

Après transposition des équations (4.4), (4.6) et (4.7) dans le repère (r, z) et différentiation des termes des constituants on obtient :

$$q_0 = S(1) + S(2) + S(3) + \frac{r_0 \cdot f^0 \cdot B_0}{W_0} \cdot (S(4) - F_r)$$

où :

$$S(1) = \left[\frac{(B4 - B3)}{B0} + \frac{(\rho4 - \rho3)}{0} \right] \cdot \left[\frac{(\psi4 - \psi3)}{(h4 + h3)} \cdot (r^2 e + z^2 e) - \frac{(\psi2 - \psi1)}{(h1 + h2)} \cdot (rk.re + zk.ze) \right] \cdot \frac{1}{(h3 + h4) \cdot J^2}$$

$$S(2) = \left[\frac{(B2 - B1)}{B0} + \frac{(\rho2 - \rho1)}{0} \right] \cdot \left[\frac{(\psi2 - \psi1)}{(h4 + h3)} \cdot (r^2 k + z^2 k) - \frac{(\psi4 - \psi3)}{(h3 + h4)} \cdot (rk.re + zk.ze) \right] \cdot \frac{1}{(h1 + h2) \cdot J^2}$$

$$S(3) = \left[zk \cdot \frac{(\psi2 - \psi1)}{(h1 + h2)} - ze \cdot \frac{(\psi4 - \psi3)}{(h3 + h4)} \right] \cdot \frac{1}{r0 \cdot J}$$

$$S(4) = -\frac{1}{J} \left[a^2 \cdot \left(\frac{\rho0}{\rho0} \right)^{(s-1)} \cdot \frac{1}{\rho0} \left[ze \cdot \frac{(\rho4 - \rho3)}{(h3 + h4)} - zk \cdot \frac{(\rho2 - \rho1)}{(h1 + h2)} \right] + W_r 0 \cdot \left[ze \cdot \frac{(W_r 4 - W_r 3)}{(h3 + h4)} - zk \cdot \frac{(W_r 2 - W_r 1)}{(h1 + h2)} \right] + W_z 0 \cdot \left[ze \cdot \frac{(W_z 4 - W_z 3)}{(h3 + h4)} - zk \cdot \frac{(W_z 2 - W_z 1)}{(h1 + h2)} \right] \right] + A$$

avec :

$$A = -\omega \cdot (\omega \cdot r0 + 2 \cdot W_u 0) + \frac{(W_u^2 0)}{r0}$$

$$F_u = W_r 0 \cdot \frac{(W_u 0 + 2 \cdot \omega)}{r 0} + \left[\frac{(W_u 4 - W_u 3) \cdot (W_z 0 \cdot r e - W_r 0 \cdot z e)}{(h_4 + h_3)} \right. \\ \left. + \frac{W_u 2 - W_u 1}{(h_1 + h_2)} \cdot (W_r 0 \cdot z k - W_z 0 \cdot r k) \right]$$

Remarque : On notera qu'en amont et en aval de la roue de la turbomachine la quantité $(r \cdot V_u)$ reste constante, vu que l'écoulement dans ces deux régions peut être assimilé à un écoulement dans une conduite. Par conséquent, dans ces deux zones le terme F_u devient nul.

4.2.1.2 CALCUL DE L'ÉCOULEMENT AUBE A AUBE

4.2.1.2.1 DISCRETISATION DE L'ÉQUATION FONDAMENTALE

Nous avons opté pour un maillage rectangulaire dans tout le domaine d'écoulement sur la surface S_1 qui est une surface de type axissymétrique rapportée aux axes m et θ (voir fig (4.4))

soient un point arbitraire 0 et 1,2,3,4, les points voisins de 0 dans le maillage, de pas arbitraire, parallèle aux axes m et θ .

Nous désignons par h les distances de 0 aux points 1,2,3,4 soit:

$$h_1 = r(\theta_0 - \theta_1), \quad h_2 = r(\theta_2 - \theta_0), \quad h_3 = m_0 - m_3, \quad h_4 = m_4 - m_0$$

où r représente la distance du point 0 à l'axe de rotation de la machine. De même, nous notons y_i les valeurs prises par la fonction y aux points i .

Soit n le nombre total des points de notre maillage.

(voir fig 4.4)

On discrétisé l'équation (3.8), en développant classiquement les fonctions y , ρ et b en séries de TAYLOR, tronquées au second ordre autour du point de 0, et en les reportant dans la même équation.

Ce qui revient à substituer les variations du premier au second ordre des fonctions scalaires y , ρ et b le long des axes m et θ par des différences finies centrées autour du point 0.

Ceci permet d'obtenir une équation linéaire en y qui représente l'équation (3.8) au second ordre près.

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2y_1}{h_1(h_1+h_2)} + \frac{2y_2}{h_2(h_1+h_2)} - \frac{2y_0}{h_1 \cdot h_2} \right] - \left[\frac{2y_3}{h_3(h_3+h_4)} - \frac{2y_4}{h_4(h_3+h_4)} - \frac{2y_0}{h_3 \cdot h_4} \right] \\
& - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\rho_2 - \rho_1}{h_2 + h_1} \right] \cdot \left[\frac{y_2 - y_1}{h_2 + h_1} \right] + \left[\frac{\sin \alpha_0}{r_0} - \frac{b_4 \cdot \rho_4 - b_3 \cdot \rho_3}{b_0 \cdot \rho_0 \cdot (h_4 + h_3)} \right] \cdot \left[\frac{y_4 - y_3}{h_4 + h_3} \right] \\
& = \frac{2 \cdot \omega \cdot b \cdot \rho_0 \cdot \sin \alpha_0}{q}
\end{aligned}$$

Après réarrangement de l'équation ci-dessus on obtient :

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{2}{h_1 \cdot h_2} + \frac{2}{h_3 \cdot h_4} \right] \cdot y_0 + \left[\frac{2}{h_1(h_2+h_1)} + \frac{1}{(h_2+h_1)} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0(h_2+h_1)} \right] \cdot y_1 \\
& + \left[\frac{2}{h_2(h_1+h_2)} + \frac{1}{(h_2+h_1)} \cdot \frac{\rho_4 - \rho_3}{\rho_0(h_2+h_1)} \right] \cdot y_2 + \left[\frac{2}{h_3(h_3+h_4)} \left[\frac{b_4 \cdot \rho_4 - b_3 \cdot \rho_3}{b_0 \cdot \rho_0 (h_3+h_4)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sin \alpha_0}{r_0} \right] \cdot \frac{1}{(h_3+h_4)} \right] \cdot y_3 + \left[\frac{2}{h_4(h_3+h_4)} + \left[\frac{\sin \alpha_0}{r_0} - \frac{b_4 \cdot \rho_4 - b_3 \cdot \rho_3}{b_0 \cdot \rho_0 (h_3+h_4)} \right] \right. \\
& \left. \cdot \frac{1}{(h_4+h_3)} \right] \cdot y_4 = \frac{2 \cdot \omega \cdot b_0 \cdot \rho_0 \cdot \sin \alpha_0}{q} \quad (4.1)
\end{aligned}$$

L'équation différentielle (3.8) devient ainsi ponctuelle , par conséquent il faudrait résoudre autant d'équations linéaire qu'il en existe de points dans la grille de maillage . De la sorte , on obtient le système linéaire écrit sous forme matricielle (4.9) :

$$A \cdot \vec{Y} = \vec{B} \quad (4.9)$$

où :

$$\vec{B} = \{ B \} \quad i = 1, \dots, n$$

$$B = - \frac{2 \cdot \omega \cdot b \cdot \rho_0 \cdot \sin \alpha_i}{q \cdot a_0}$$

$$\vec{Y} = \{ y \} \quad i = 1, \dots, n$$

$A = a_{ij} \quad ij = 1, \dots, n$
 et $a_{ij} = 0, 1, a_1, a_2, a_3$ où a_4

avec :

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{a_0 \cdot (h_1 + h_2)} \cdot \left[\frac{2}{h_1} + b_{12} \right] \\ a_2 = \frac{a_{12} - a_1}{a_0} \\ a_3 = \frac{1}{a_0 \cdot (h_3 + h_4)} \cdot \left[\frac{2}{h_3} + B_{34} \right] \\ a_4 = \frac{a_{34} - a_3}{a_0} \end{array} \right.$$

où : $a_{12} = \frac{2}{h_1 h_2} \quad a_{34} = \frac{2}{h_3 h_4} \quad a_0 = a_{12} + a_{34}$

$$b = \frac{p_2 - p_1}{\rho_0 (h_2 + h_1)} \quad b = \frac{b_4 \cdot p_4 - b_3 \cdot p_3}{b_0 \cdot \rho_0 (h_3 + h_4)} - \frac{\sin \alpha_0}{r_0}$$

4.2.1.22 DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

L'écoulement étant supposé uniforme à l'infini amont et à l'infini aval de la roue, donc le gradient de la fonction adimensionnelle y , reste constant dans ces régions de la turbomachine. Ce qui permet de faire les approximation suivantes :

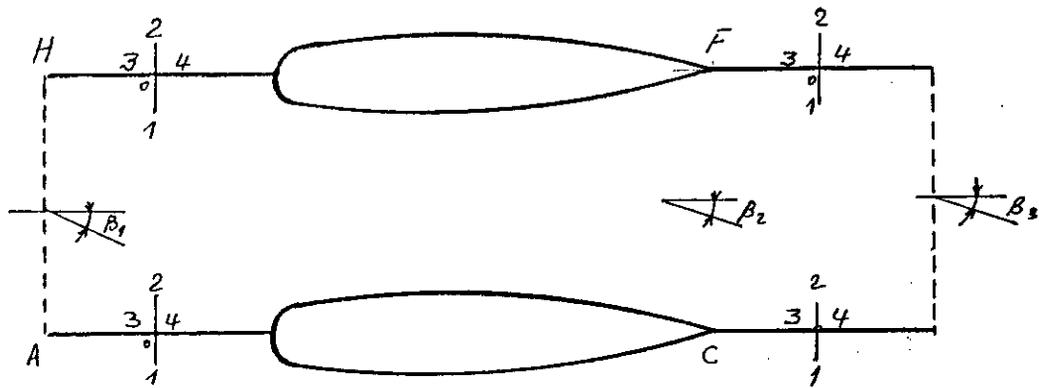
a - A l'entrée : limite AH

$$\frac{\delta y}{\delta \theta} = \frac{y - y_0}{\theta - \theta_0} = \frac{\rho \cdot b \cdot r}{q} \cdot W_m \quad (1)$$

$$\frac{\delta y}{\delta m} = \frac{y - y_0}{m - m_0} = - \frac{l \cdot b}{q} \cdot W_u \quad (2)$$

Au noeud (4) l'équation (2) s'écrit :

$$y_4 - y_0 = - (m_4 - m_0) \cdot \frac{\rho \cdot b \cdot W_u}{q}$$



fig(4.5)

$$y_0 = y_4 + \frac{f.b.}{q} W_u.h \quad (3)$$

de même l'équation (1) s'écrit au noeud (4) :

$$y_0 = y_4 + (\theta_0 - \theta_4) \cdot \frac{f.b.r.}{q} W_m$$

entre les deux aubes :

$$W_m = \frac{y - y_0}{\theta - \theta_0} - \frac{q}{f.b.r} \quad \text{avec} \quad y - y_0 = 1 \quad \text{et} \quad \theta - \theta_0 = s$$

donc : $q = f.b.r.s.W_m$

Ce qui permet d'écrire l'équation (3) par :

$$y_0 = y_4 + h_4 \cdot \frac{\text{tg } \beta_1}{s.r_1}$$

Remarque : On notera que l'indice 1 est relatif à la ligne AH où le rayon reste constant, tenant compte de l'hypothèse d'axisymétrie des surfaces de courant.

De la même façon on trouve la fonction g à la sortie : Limite CF

$$y_0 = y_3 - h_3 \cdot \frac{\text{tg } \beta_3}{s.r_3}$$

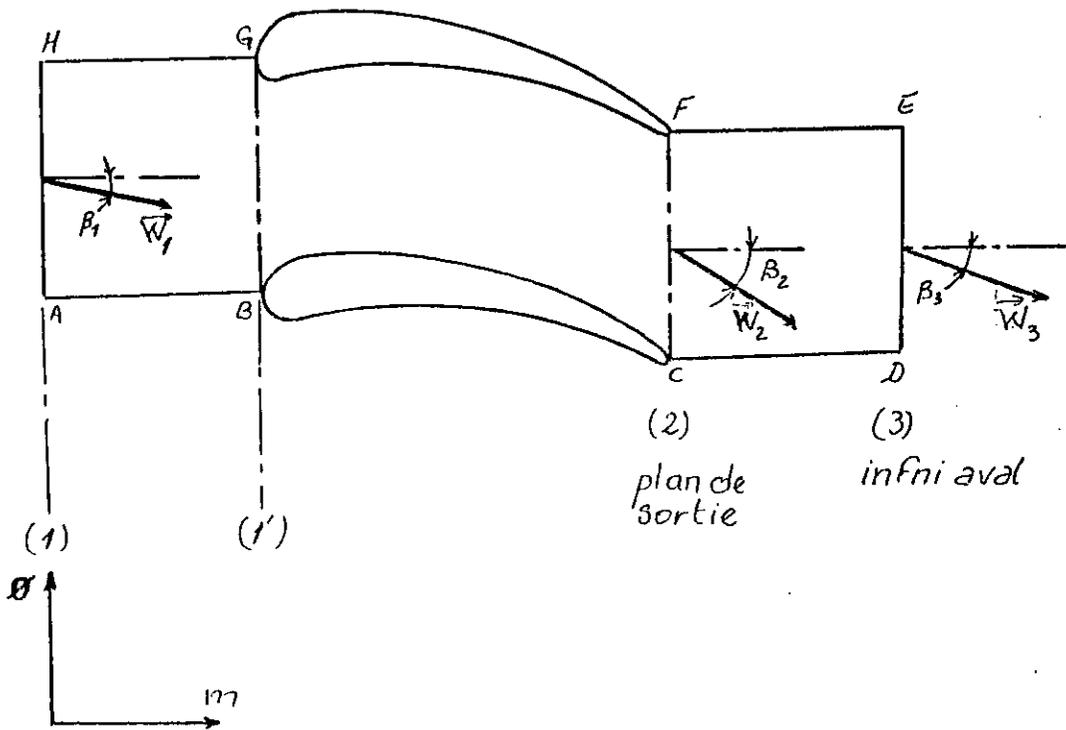
4.2.1.2.3 PRISE EN COMPTE EXPLICITE DE LA CONDITION DE KUTTA - JOUKOWSKI

La méthode de Katsanis pour le calcul de l'écoulement suppose la déviation du fluide en sortie de roue connue. On impose en effet une valeur arbitraire β à l'angle de sortie relatif, loin en aval. (voir fig 4.6)

La déviation β au bord de fuite s'en déduit par application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement entre la section CF et la section DE de l'infini aval

Par suite de la conservation de la rothalpie et de l'enthalpie totale en aval de la roue on aura :

$$r_2 \cdot V_{u2} = r_3 \cdot V_{u3} \Rightarrow r_2 (W_{u2} + \omega.r_2) = r_3 (W_{u3} + \omega.r_3) \quad (4.10)$$



Fig(4.6)

l'écoulement étant uniforme en aval de la roue donc :

$$\frac{\delta y}{\delta \theta} = \frac{1}{s} = f \cdot b \cdot r \cdot W_m \quad (4.11)$$

de plus
$$W_u = W_m \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (4.12)$$

En injectant les équations (4.11) et (4.12) dans (4.10) on obtient :

$$\operatorname{tg} \beta_u = \left[\frac{\operatorname{tg} \beta_3 \cdot \frac{f_2}{f_3} + \omega \cdot (r_3^2 - r_2^2) \cdot f_u \cdot s}{b_3} \right] \cdot b_u \quad (4.13)$$

La prédiction de l'angle de sortie est d'un intérêt primordial pour la définition des performances de la turbomachine telle que la hauteur et la pression et autres . De nombreux auteurs se sont attachés à établir des corrélations théoriques où expérimentales permettant de le définir . On peut entre autre citer les formules de Stodola , Pfleiderer , Busemann - Wiesner, Carter ou les corrélations de Howell et Mellor .

Cependant , avec l'évolution rapide des méthodes de calcul numérique , certains auteurs se sont intéressés à calculer la déviation β par des raisonnements théoriques . L'idée de base étant de ramener β par un processus itératif à la valeur pour laquelle la condition de Kutta - Joukowski est vérifiée . La plus part des auteurs conviennent d'égaliser soit le coefficient de pression soit la vitesse relative calculée de part et d'autre du profil , le plus près possible du bord de fuite .

A - Méthodes de prédiction de la déviation

L'ajustement à la condition de Kutta - Joukowski peut être recherché à l'aide de deux procédures différentes mais équivalentes :

- Egalisation des vitesses relatives au bord de fuite .
- Egalisation des coefficients de pression .

Remarque : Dans cette présente étude on utilisera le premier cas c'est à dire l'égalisation des vitesses à l'intrados et l'extrados au voisinage du bord de fuite .

A.1 Egalisation des vitesses relatives à l'intrados et à l'extrados au voisinage du bord de fuite .

Afin d'illustrer les différentes étapes suivies dans notre programme de prédiction de la déviation β , considérons

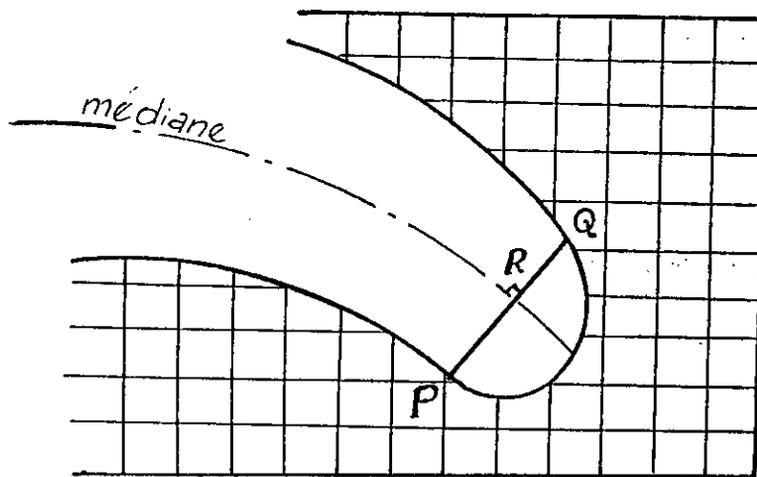


fig (4.7)

le schéma (voir fig 4.7) représentant le profil au voisinage du bord de fuite .

La procédure de calcul est la suivante :

- choisir un point P , intersection du profil avec la verticale la plus proche du bord de fuite .
- trouver son symétrique Q par rapport à la médiane à partir de la tangente à cette médiane en R (centre de l'arc de cercle définissant le bord de fuite) .
- β étant supposé , on calcule β à partir de la relation (4.3) On calcule l'écoulement d'après la méthode décrite ci-dessus ensuite on déduit la vitesse relative au point P et par interpolation , celle au point Q . les deux vitesses étant connues on cherche W telle que :

$$\Delta W = W_P - W_Q$$

- Si $|\Delta W| < \varepsilon_t$ alors β_j choisi est l'angle cherché avec ε_t : erreur tolérée pour la vitesse par exemple :

$$\varepsilon_t = 10 \cdot \omega \cdot r$$

- Si $|\Delta W| > \varepsilon_t$ alors on recalcule une nouvelle valeur de β en posant :

$$\beta_j^{i+1} = \beta_j^i + \varepsilon$$

et on refait le calcul jusqu'à ce qu'on aboutisse à la condition $|\Delta W| < \varepsilon_t$.

On prendra :

$$\varepsilon = 1,5 \text{ déduite des expérimentations numériques}$$

A.2 Egalisation des coefficients de pression au bord de fuite .

L'évolution de la pression au sein du canal interaubes peut être déduite des vitesses calculées au moyen du théorème de Bernoulli en mouvement relatif :

$$\frac{W^2 - \omega^2 \cdot r^2}{2} - \frac{P}{\rho} = \text{Cte}$$

On notera que l'effet de la pesanteur est négligé .

Le coefficient de pression en un point M quelconque est défini par :

$$C_{p_M} = \frac{P_0 - P_M}{1/2 \cdot \rho \cdot W_0^2} \quad (4.14)$$

où :

ρ et W sont respectivement la masse volumique et la vitesse relative à l'infini aval .

P_0 est la pression génératrice et P la pression statique au point M .

On procède de la même manière que celle décrite en (A.1) , en remplaçant les vitesses aux points P et Q par les Cp aux même points .

CALCUL DE LA DENSITE

Le calcul de la densité du fluide, se déduit à partir de la relation de conservation de la rothalpie I le long d'une ligne de courant . Ce qui se traduit par :

$$I = I_0 \quad (4.15)$$

L'indice 0 se rapporte à l'infinie amont
Or :

$$I = h + \frac{V^2}{2} + \omega \cdot r \cdot V \quad (4.16)$$

Ou :

$$h = C_p \cdot T$$

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (4.17)$$

Avec : C_p . chaleur spécifique à pression constante
T . température du fluide au point considéré
a . vitesse du son dans le milieu considéré
 γ . rapport des chaleurs spécifiques

De plus, d'après l'équation d'état (1.10) :

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{f}{f_0} \right)^{(\gamma-1)} \quad (4.18)$$

En introduisant (4.16), (4.17) et (4.18) dans l'équation (4.15) on obtient après réarrangement :

$$\left(\frac{f}{f_0} \right)^{(\gamma-1)} = 1 + \frac{\gamma-1}{2 \cdot a_0^2} \left[V_0^2 - V_1^2 + 2 \cdot \omega \cdot (r_0 \cdot V_{u0} - r \cdot V_u) \right] \quad (4.19)$$

Sachant que la vitesse \vec{V} a pour composantes $(\vec{W}_r, \vec{V}_u, \vec{W}_z)$ et que $V = M \cdot a$ ou M est le nombre de mach local . L'équation (4.19) s'écrira :

$$\left(\frac{f}{f_0} \right)^{(\gamma-1)} = 1 + \frac{\gamma-1}{2 \cdot a_0^2} \cdot M_0^2 \left[1 - \frac{W_r^2 + V_u^2 + W_z^2 + 2 \cdot \omega \cdot (r_0 \cdot V_{u0} - r \cdot V_u)}{V_0^2} \right] \quad (4.20)$$

Remarque : La rothalpie se conserve sur toute la surface de courant aube à aube , contrairement à la surface de courant méridionale ou , la rothalpie garde une valeur constante sur chaque ligne de courant . Donc pour le calcul de la densité en un point donné sur la surface méridionale on devra utiliser les caractéristiques du point le précédent , mais qui appartiendrait à la même ligne de courant .

Chapitre 5 : RESULTATS ET COMMENTAIRES

EXPERIMENTATION NUMERIQUE ET RESULTATS

Dans notre projet , on a élaboré deux programmes . L'un pour le calcul de l'écoulement dans le plan méridional , le second pour le calcul dans le plan aube à aube .

On a considéré lors des essais de ces deux programmes , avec la même géométrie d'aubes deux cas de figures .

1 - Essai en eau .

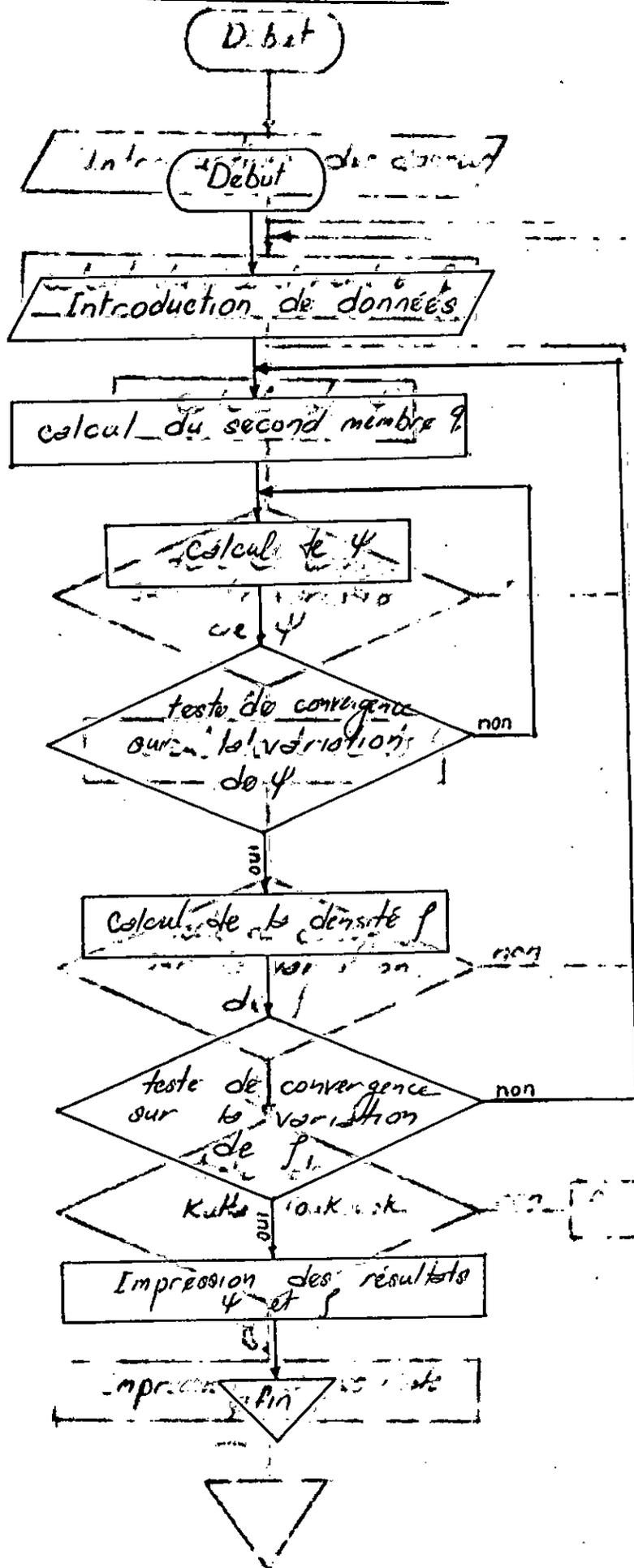
2 - Essai en air .

Les résultats de calcul sont consignés dans les tableaux et les graphes ci-dessous .

On notera que nous n'avons pas pu vérifier la condition de Kutta - Joukowski qui nécessite un temps assez important lors de l'exécution du programme .

En ce qui concerne le rapport de compression et le nombre de Mach , on constate que pour le premier , il atteint une valeur maximale de 1,04 , ce qui est totalement compatible avec le type de turbomachine choisi (Pompe Centrifuge) , pour le second il reste compris entre 0 et 1 dans tout le domaine d'étude .

Organigramme 10: Calcul méridien



Geometrie de la coupe meridienne
(compresseur kracadr)

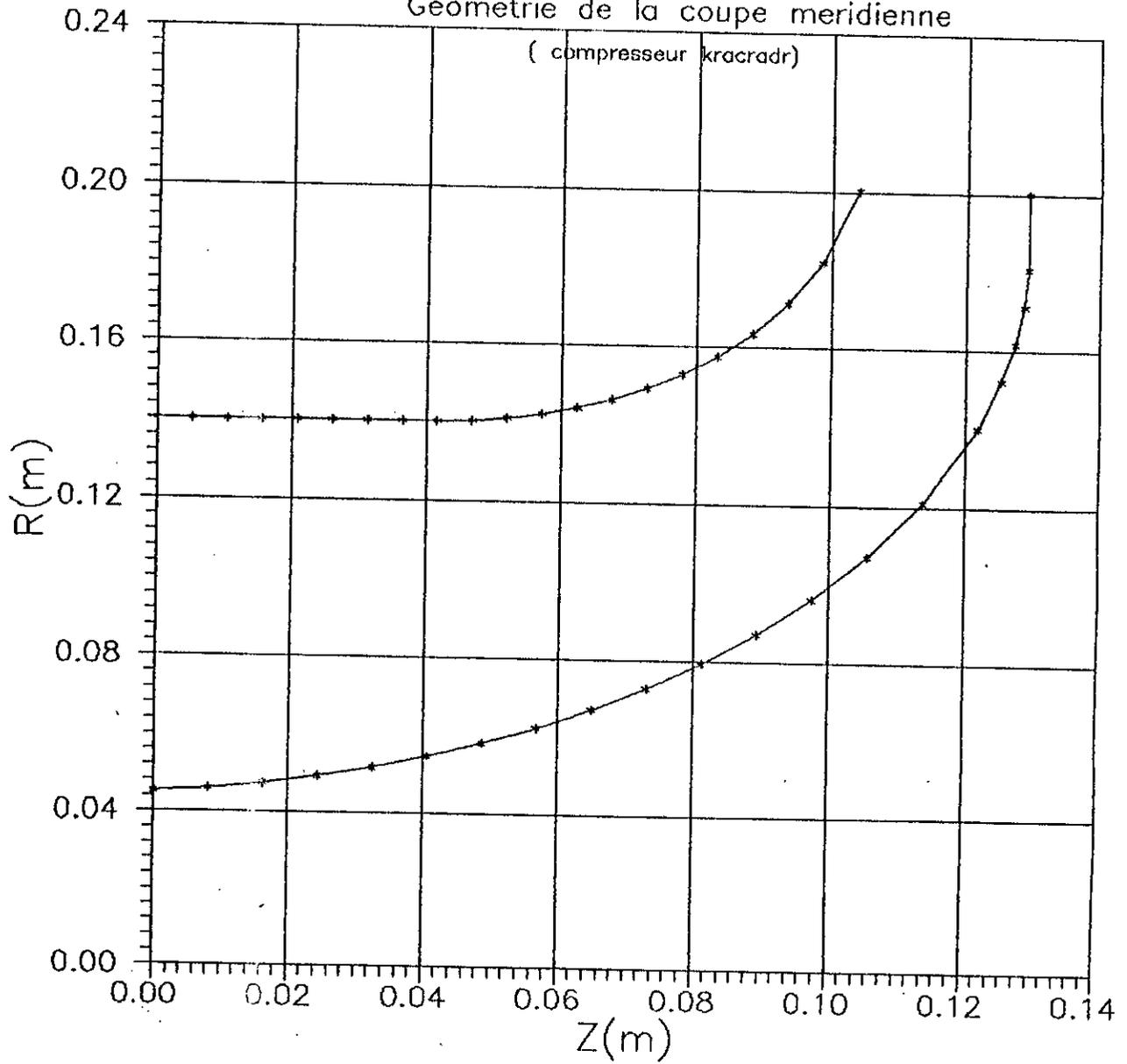
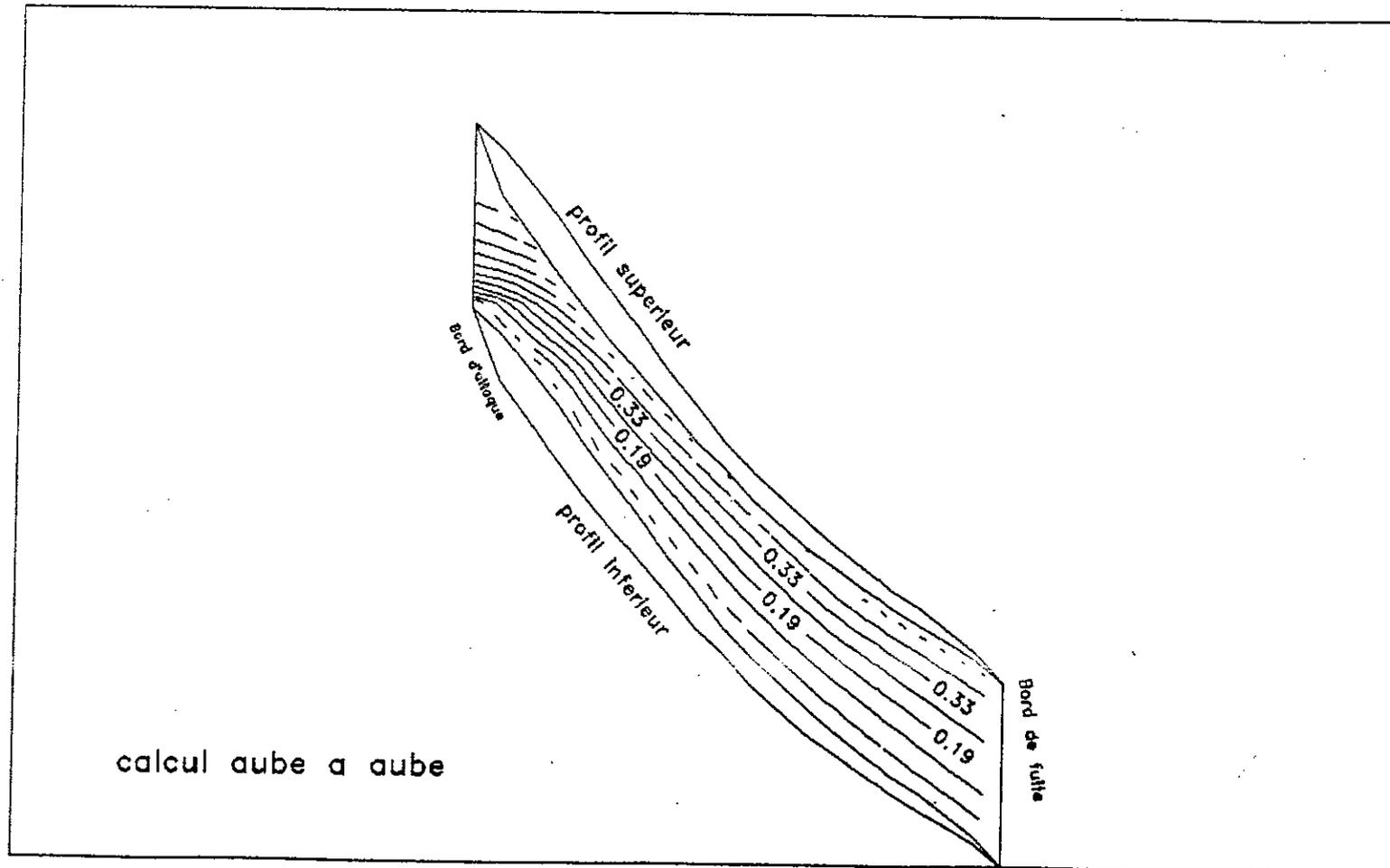


Fig.

Repartition des lignes de courant
dans le plan aube a aube
d'une pompe centrifuge



j	i	psi(i,j)
1	1	.00000
1	2	.16667
1	3	.33333
1	4	.50000
1	5	.66667
1	6	.83333
1	7	1.00000
2	1	.00000
2	2	.15991
2	3	.32909
2	4	.49698
2	5	.66421
2	6	.83129
2	7	1.00000
3	1	.00000
3	2	.16017
3	3	.32925
3	4	.49708
3	5	.66427
3	6	.83133
3	7	1.00000
4	1	.00000
4	2	.16041
4	3	.32941
4	4	.49718
4	5	.66433
4	6	.83150
4	7	1.00000
5	1	.00000
5	2	.16065
5	3	.32959
5	4	.49754
5	5	.66610
5	6	.82770
5	7	1.00000
6	1	.00000
6	2	.16080
6	3	.32967
6	4	.49757
6	5	.66612
6	6	.82783
6	7	1.00000
7	1	.00000
7	2	.16097
7	3	.32979
7	4	.49765
7	5	.66617
7	6	.82787
7	7	1.00000
8	1	.00000
8	2	.16112
8	3	.32990
8	4	.49779
8	5	.66548
8	6	.82766

8	7	1.00000
9	1	.00000
9	2	.16122
9	3	.32883
9	4	.49016
9	5	.69755
9	6	.78927
9	7	1.00000
10	1	.00000
10	2	.16135
10	3	.32891
10	4	.49014
10	5	.69685
10	6	.78929
10	7	1.00000
11	1	.00000
11	2	.15991
11	3	.32909
11	4	.49698
11	5	.66421
11	6	.83129
11	7	1.00000

j	i	wf(i,j)	wz(i,j)	wu(i,j)
1	1	10.29000	10.29000	.00000
1	2	10.29000	10.29000	.00000
1	3	10.29000	10.29000	.00000
1	4	10.29000	10.29000	.00000
1	5	10.29000	10.29000	.00000
1	6	10.29000	10.29000	.00000
1	7	10.29000	10.29000	.00000
2	1	4.59505	91.90109	.00000
2	2	3.36377	60.68339	.00000
2	3	2.25859	42.11330	.00000
2	4	1.74708	33.20668	.00000
2	5	1.43129	27.44696	.00000
2	6	1.21879	23.53463	.00000
2	7	1.03151	20.63014	.00000
3	1	4.24846	84.96924	.00000
3	2	2.84308	57.34122	.00000
3	3	2.00521	40.33943	.00000
3	4	1.59882	32.09006	.00000
3	5	1.33100	26.68034	.00000
3	6	1.14412	22.96980	.00000
3	7	1.00974	20.19478	.00000
4	1	3.95095	79.01898	.00000
4	2	2.69537	54.34967	.00000
4	3	1.92390	38.70943	.00000
4	4	1.53947	31.04566	.00000
4	5	1.25567	25.96451	.00000
4	6	.63361	22.43157	.00000
4	7	.98816	19.76312	.00000
5	1	3.69321	73.86411	.32287
5	2	2.56629	51.65967	.22435
5	3	1.85332	37.23347	.16202
5	4	1.50036	30.21831	.13116
5	5	1.32127	27.23625	.11551

5	6	.63138	22.31356	.05520
5	7	.84877	16.97530	.07420
6	1	3.46543	69.30857	.51454
6	2	2.44773	49.21112	.36343
6	3	1.78584	35.84256	.26516
6	4	1.46210	29.29776	.21709
6	5	1.32583	26.54602	.19685
6	6	1.08699	21.80507	.16139
6	7	.83149	16.62981	.12346
7	1	3.26505	65.30101	.87417
7	2	2.33677	46.99139	.62564
7	3	1.72056	34.55282	.46065
7	4	1.41585	28.42977	.37907
7	5	1.30787	25.87911	.35016
7	6	1.06924	21.31759	.28627
7	7	.81533	16.30665	.21829
8	1	3.08664	61.73273	1.12251
8	2	2.23864	44.96326	.81413
8	3	1.69635	33.36034	.61691
8	4	1.56195	27.55169	.56803
8	5	5.64524	25.22069	2.05300
8	6	1.76811	20.89736	.64301
8	7	.80093	16.01856	.29127
9	1	2.92597	58.51941	1.36358
9	2	2.13954	42.95096	.99708
9	3	1.60371	31.50798	.74737
9	4	1.06633	17.65903	.49693
9	5	4.14729	18.75300	1.93274
9	6	3.47742	55.47449	1.62057
9	7	.96116	19.22326	.44793
10	1	2.78181	55.63628	1.60497
10	2	2.10741	41.24266	1.21588
10	3	1.51683	30.47756	.87514
10	4	.69841	17.14539	.40295
10	5	1.48304	18.38794	.85564
10	6	1.96772	54.44498	1.13528
10	7	.94362	18.87231	.54442
11	1	2.62575	52.51491	1.83714
11	2	7.33352	39.67760	5.13100
11	3	10.37417	30.26893	7.25843
11	4	11.87952	15.20516	8.31167
11	5	12.56023	20.15336	8.78793
11	6	16.84002	59.07673	11.78234
11	7	16.13614	14.84107	11.28987

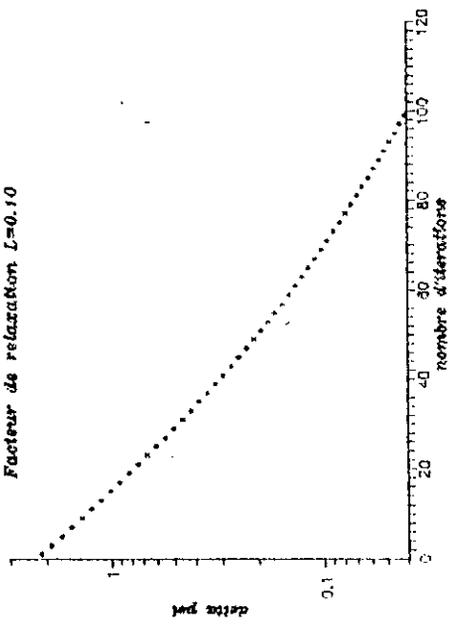
j	i	psi(i,j)	ro(i,j)
1	1	.00000	1000.000000
1	2	.16667	1000.000000
1	3	.33333	1000.000000
1	4	.50000	1000.000000
1	5	.66667	1000.000000
1	6	.83333	1000.000000
1	7	1.00000	1000.000000
2	1	.00000	1000.000000
2	2	.15991	1000.000000
2	3	.32909	1000.000000
2	4	.49698	1000.000000
2	5	.66421	1000.000000
2	6	.83129	1000.000000
2	7	1.00000	1000.000000
3	1	.00000	1000.000000
3	2	.16017	1000.000000
3	3	.32925	1000.000000
3	4	.49708	1000.000000
3	5	.66427	1000.000000
3	6	.83133	1000.000000
3	7	1.00000	1000.000000
4	1	.00000	1000.000000
4	2	.16039	1000.000000
4	3	.32936	1000.000000
4	4	.49710	1000.000000
4	5	.66424	1000.000000
4	6	.83135	1000.000000
4	7	1.00000	1000.000000
5	1	.00000	1000.000000
5	2	.14583	1000.000000
5	3	.29758	1000.000000
5	4	.44950	1000.000000
5	5	.61137	1000.000000
5	6	.74805	1000.000000
5	7	1.00000	1000.000000
6	1	.00000	1000.000000
6	2	.14438	1000.000000
6	3	.29499	1000.000000
6	4	.44631	1000.000000
6	5	.60829	1000.000000
6	6	.74454	1000.000000
6	7	1.00000	1000.000000
7	1	.00000	1000.000000
7	2	.14289	1000.000000
7	3	.29240	1000.000000
7	4	.44316	1000.000000
7	5	.60523	1000.000000
7	6	.74087	1000.000000
7	7	1.00000	1000.000000
8	1	.00000	1000.000000
8	2	.14131	1000.000000
8	3	.28972	1000.000000
8	4	.43982	1000.000000
8	5	.60416	1000.000000
8	6	.73702	1000.000000
8	7	1.00000	1000.000000

9	1	.00000	1000.000000
9	2	.13889	1000.000000
9	3	.27068	1000.000000
9	4	.26071	1000.000000
9	5	.62841	1000.000000
9	6	.77845	1000.000000
9	7	1.00000	1000.000000
10	1	.00000	1000.000000
10	2	.13705	1000.000000
10	3	.26543	1000.000000
10	4	.24718	1000.000000
10	5	.62185	1000.000000
10	6	.77775	1000.000000
10	7	1.00000	1000.000000
11	1	.00000	1000.000000
11	2	.15991	1000.000000
11	3	.32909	1000.000000
11	4	.49698	1000.000000
11	5	.66421	1000.000000
11	6	.83129	1000.000000
11	7	1.00000	1000.000000

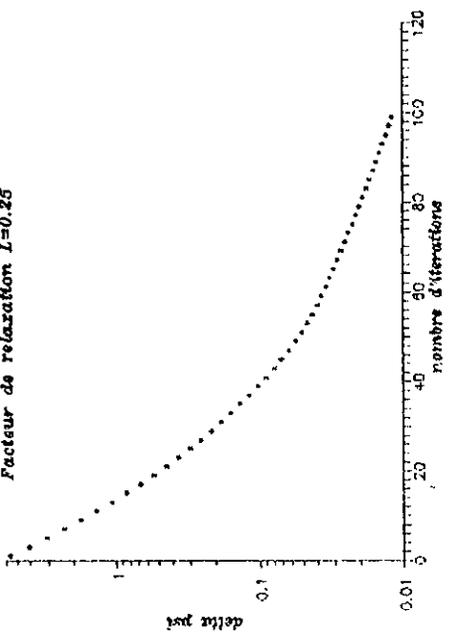
j	i	wr(i,j)	wz(i,j)	wu(i,j)
1	1	10.29000	10.29000	.00000
1	2	10.29000	10.29000	.00000
1	3	10.29000	10.29000	.00000
1	4	10.29000	10.29000	.00000
1	5	10.29000	10.29000	.00000
1	6	10.29000	10.29000	.00000
1	7	10.29000	10.29000	.00000
2	1	.13326	2.66513	.00000
2	2	.09755	1.75982	.00000
2	3	.06550	1.22129	.00000
2	4	.05067	.96299	.00000
2	5	.04151	.79596	.00000
2	6	.03534	.68250	.00000
2	7	.02991	.59827	.00000
3	1	.12321	2.46411	.00000
3	2	.08247	1.66290	.00000
3	3	.05820	1.16984	.00000
3	4	.04643	.93061	.00000
3	5	.03866	.77373	.00000
3	6	.03327	.66612	.00000
3	7	.02928	.58565	.00000
4	1	.11457	2.29130	.00000
4	2	.09766	1.57590	.00000
4	3	.08779	1.12236	.00000
4	4	.08338	.90021	.00000
4	5	.07339	.75281	.00000
4	6	.06469	.65070	.00000
4	7	.02868	.57365	.00000
5	1	.09722	1.94437	.00850
5	2	.08765	1.35264	.00766
5	3	.08171	.97332	.00714
5	4	.08053	.81715	.00704

5	5	.07252	.71423	.00634
5	6	.06930	.75317	.00606
5	7	.03599	.71985	.00315
6	1	.09024	1.80471	.01340
6	2	.06734	1.27702	.01000
6	3	.05139	.93190	.00763
6	4	.04437	.79116	.00659
6	5	.03869	.69516	.00574
6	6	.04117	.74187	.00611
6	7	.03578	.71558	.00531
7	1	.08406	1.68111	.02250
7	2	.06389	1.20827	.01711
7	3	.04939	.89364	.01322
7	4	.04311	.76674	.01154
7	5	.03642	.67663	.00975
7	6	.04073	.73106	.01090
7	7	.03559	.71188	.00953
8	1	.07851	1.57015	.02855
8	2	.06161	1.14515	.02240
8	3	.06161	.85776	.02241
8	4	.16775	.74865	.06101
8	5	.15061	.65900	.05477
8	6	.01543	.71711	.00561
8	7	.03544	.70883	.01289
9	1	.07310	1.46202	.03407
9	2	.05571	1.02531	.02596
9	3	.03716	.33837	.01732
9	4	.15862	.49684	.07392
9	5	.22649	.94135	.10555
9	6	.07716	1.97654	.03596
9	7	.02931	.58612	.01366
10	1	.06852	1.37048	.03954
10	2	.02725	.96521	.01572
10	3	-.03230	.29605	-.01863
10	4	-.13556	.48165	-.07821
10	5	.02974	.94577	.01716
10	6	.07096	1.96952	.04094
10	7	.02886	.57726	.01665
11	1	.07615	1.52293	.05328
11	2	.18931	1.15065	.13245
11	3	.25126	.87780	.17580
11	4	.18466	.44095	.12920
11	5	.32819	.58445	.22962
11	6	.48247	1.71323	.33757
11	7	.46795	.43039	.32741

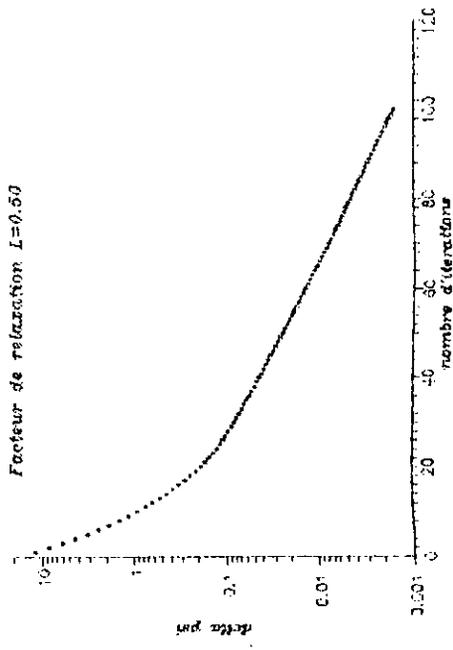
Facteur de relaxation $L=0.10$



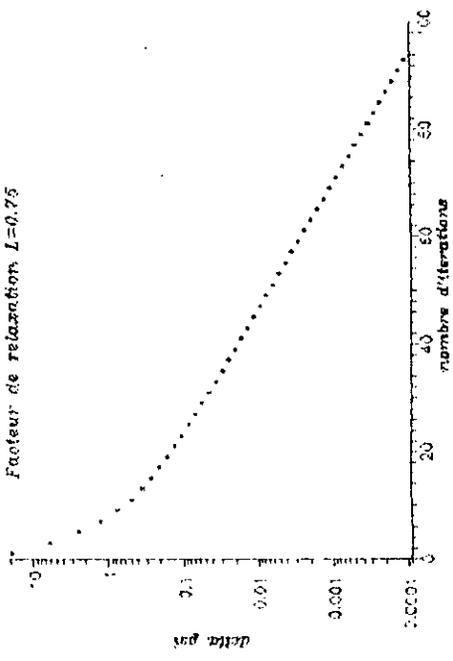
Facteur de relaxation $L=0.25$

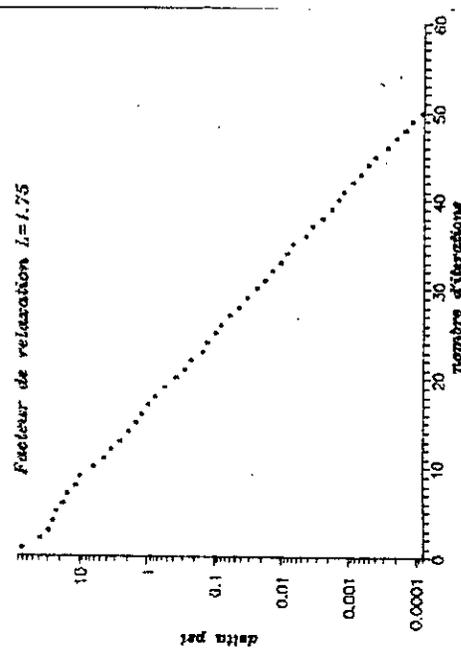
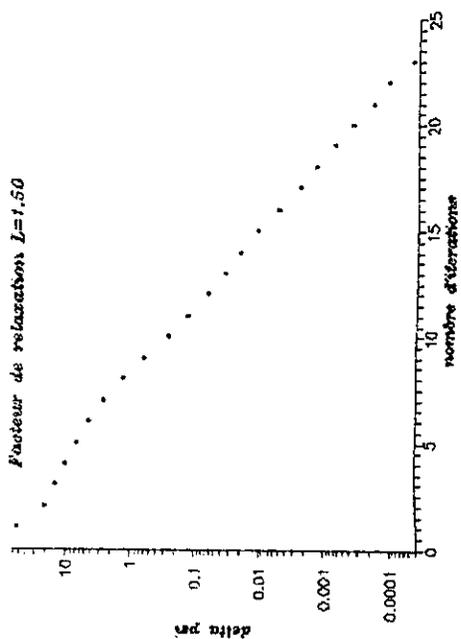
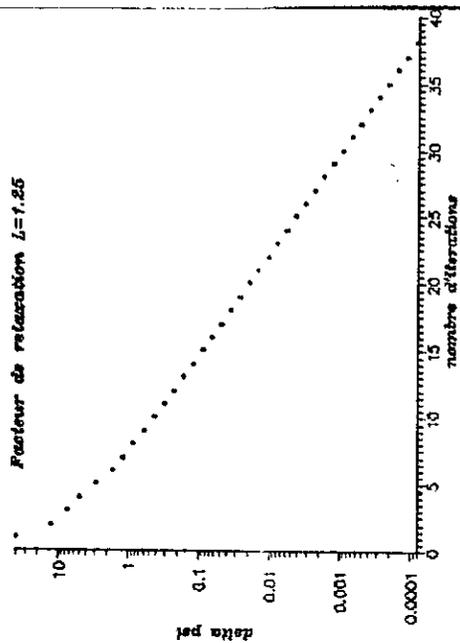
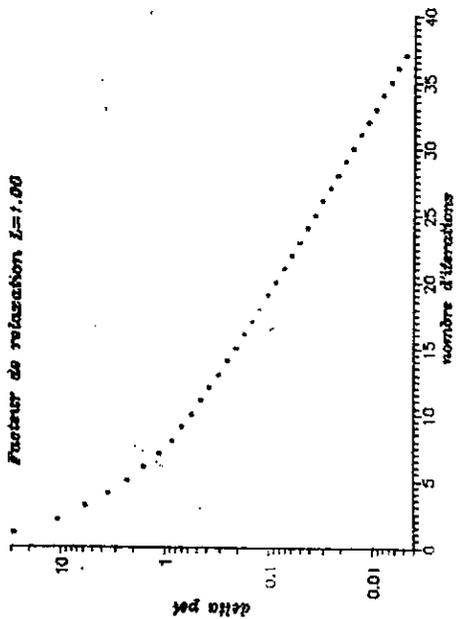


Facteur de relaxation $L=0.50$



Facteur de relaxation $L=0.75$





Distribution des vitesses relatives
autour d'un profil d'aube
(calcul aube a aube)

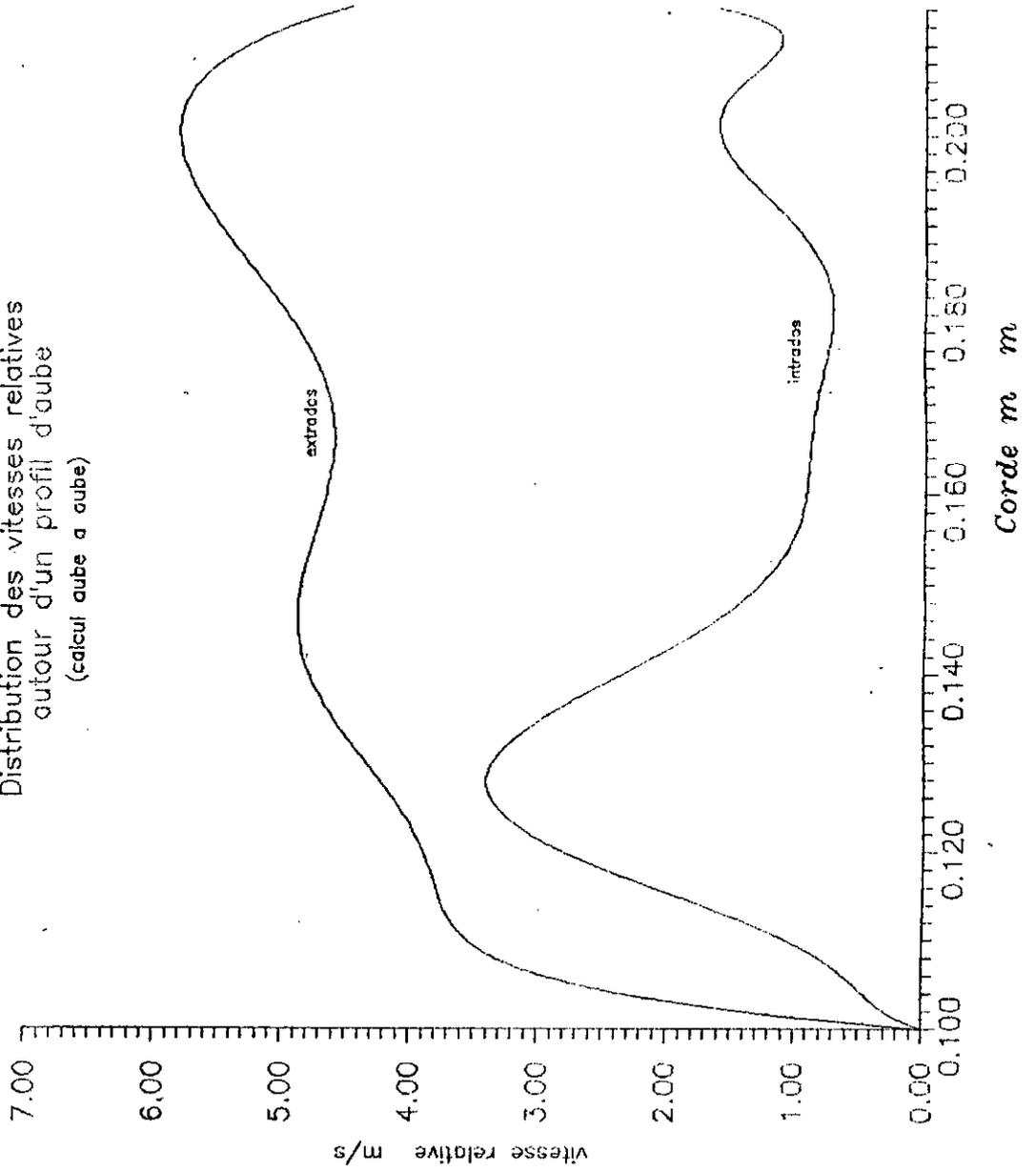


Fig. Evolution du nombre de mach relatif

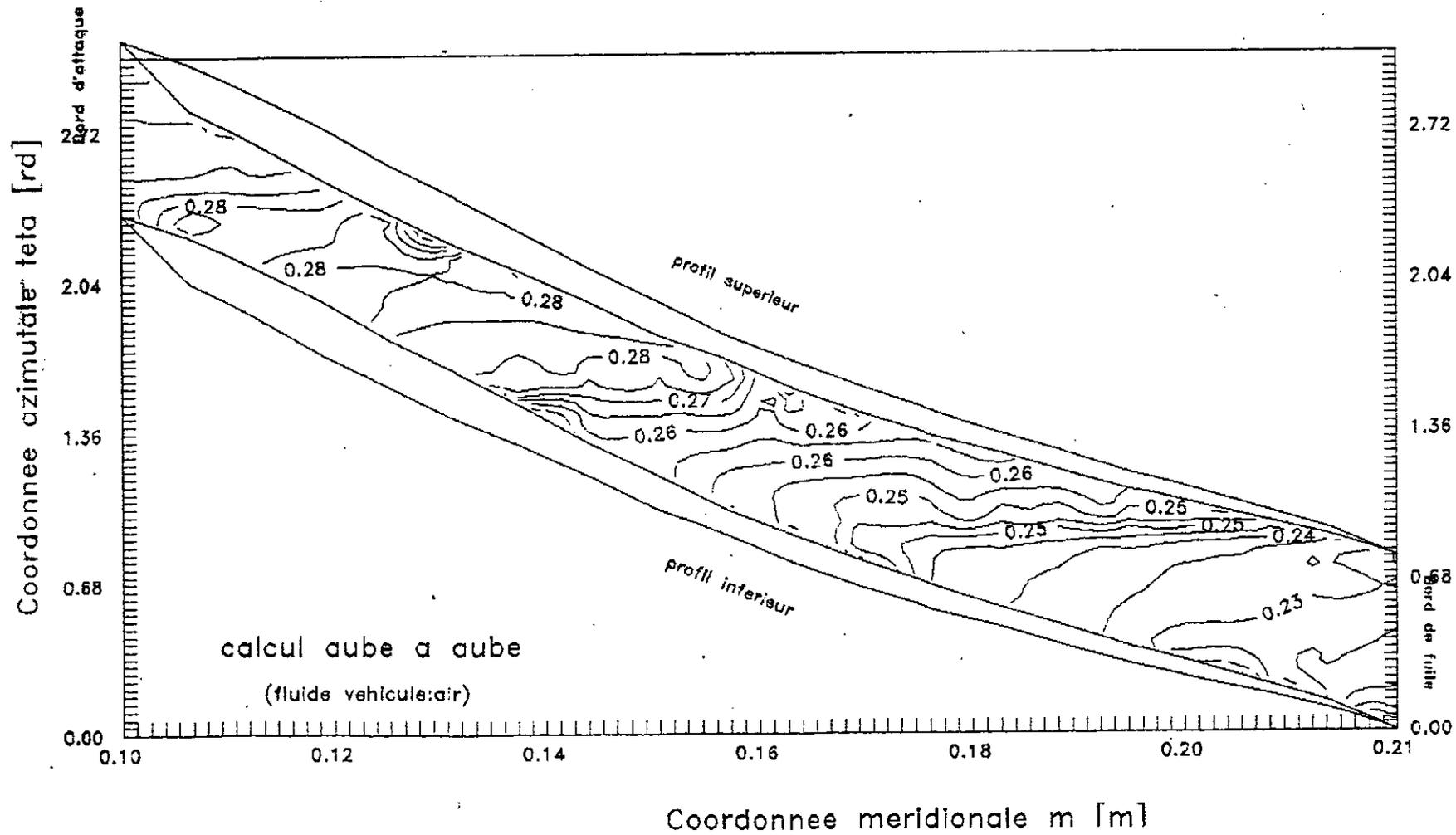


Fig. Rapport de compression de l'eau dans le plan aube a aube d'une pompe centrifuge

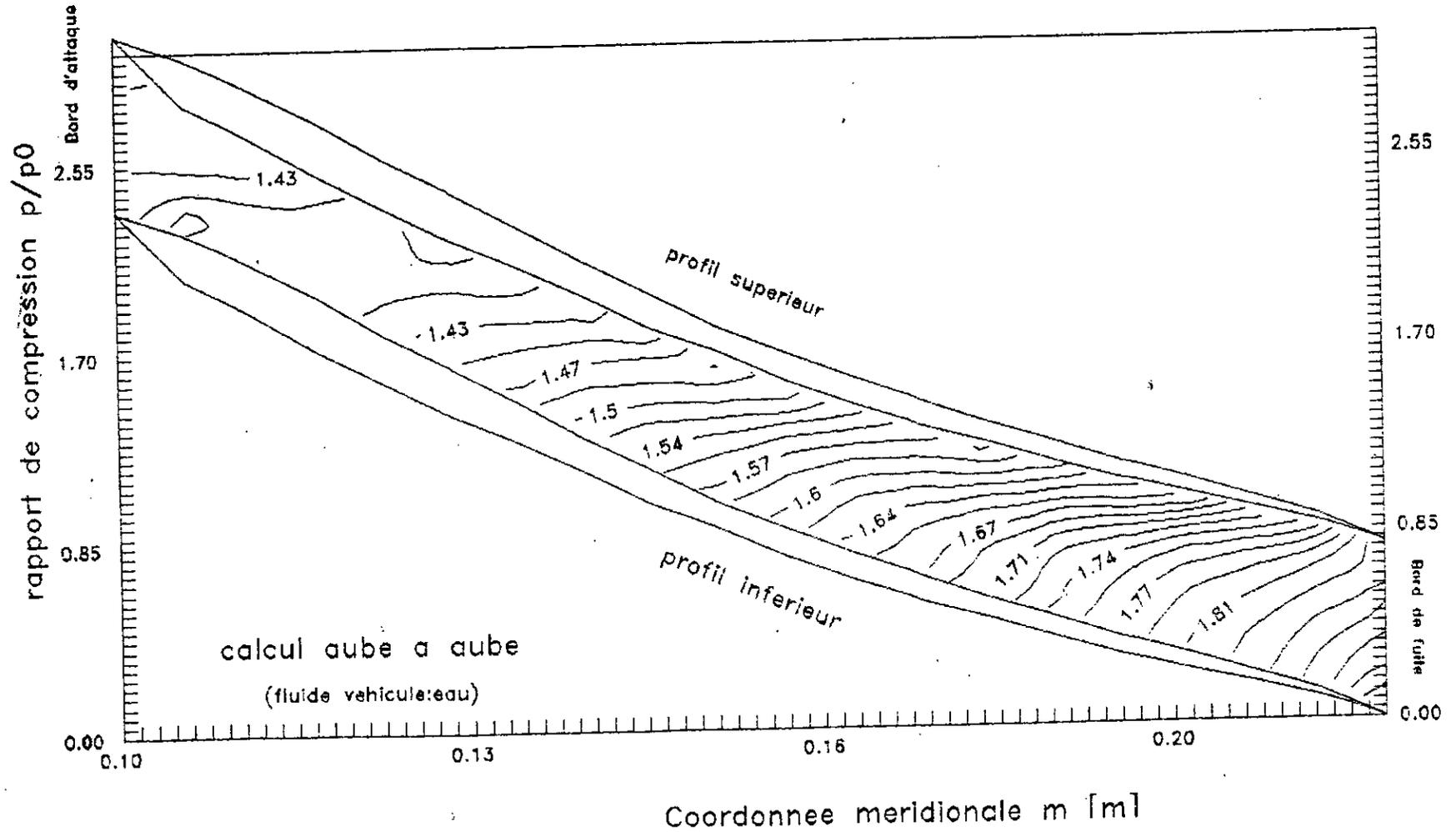


Fig.

Distribution des lignes de courant sur la surface aube a aube

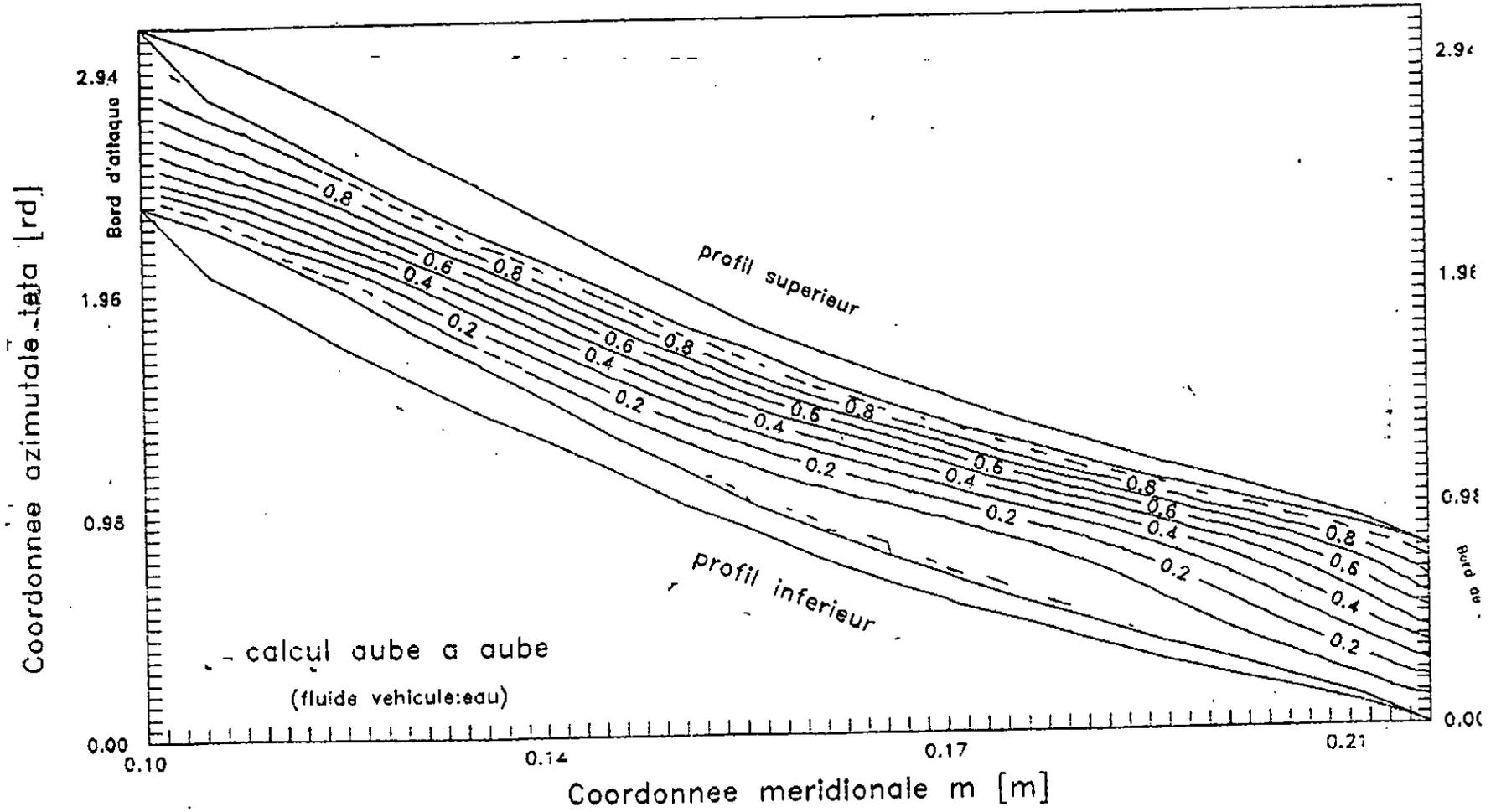


Fig. Evolution du nombre de mach relatif sur la surface aube a aube

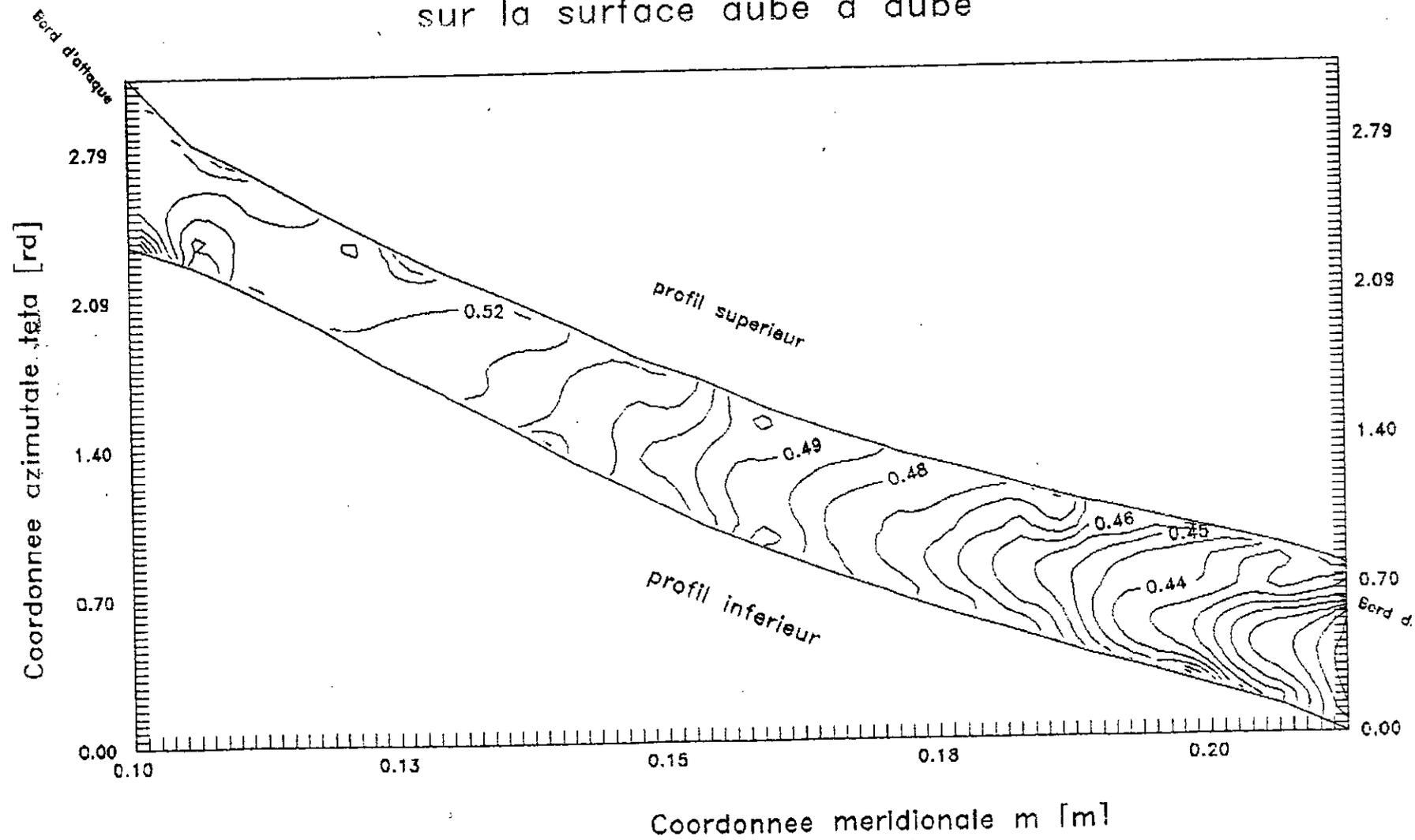


Fig.

Rapport de compression dans le plan aube a aube d'une pompe centrifuge

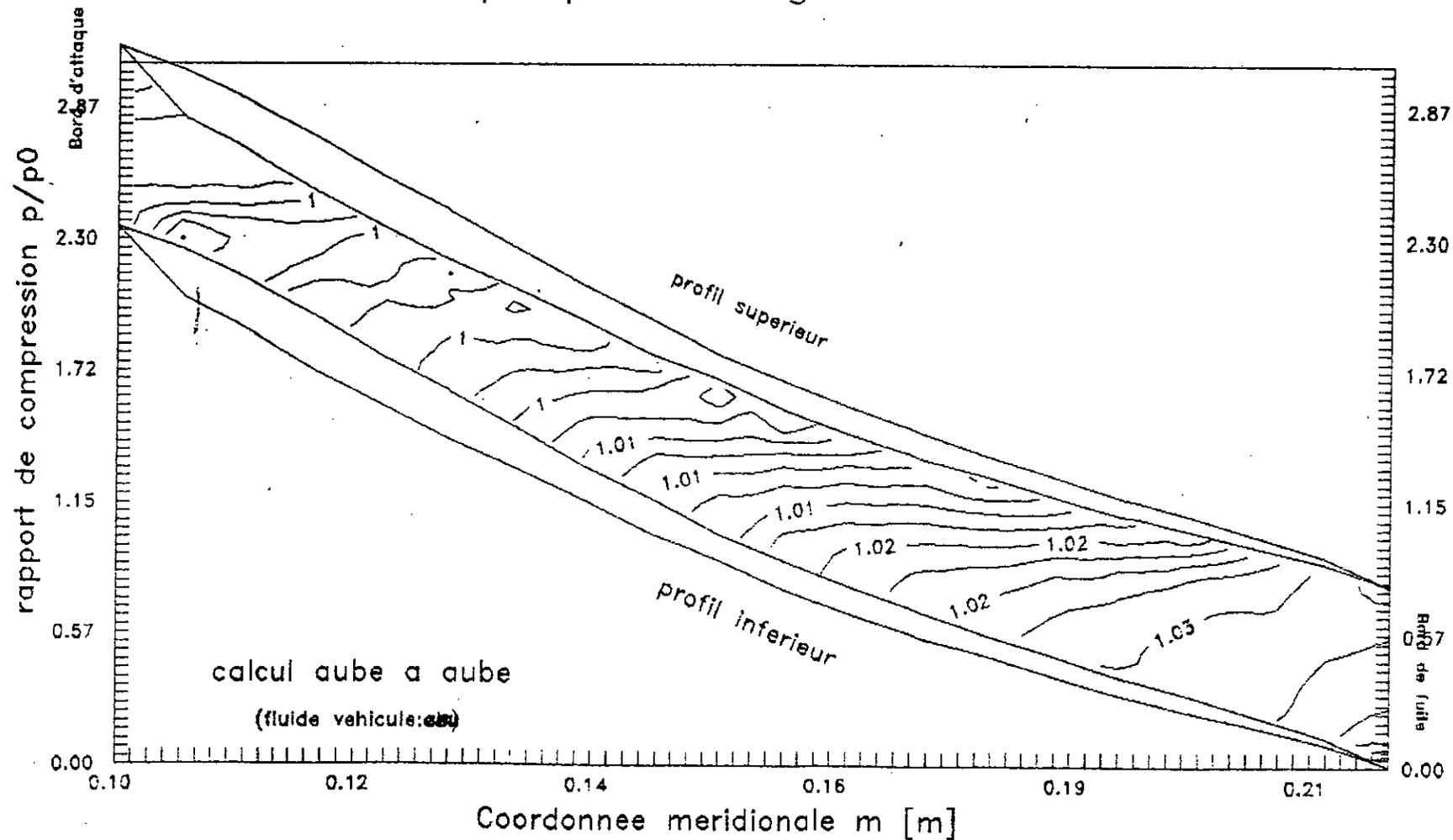


Fig.

Repartition du rapport de compression

calcul aube a aube

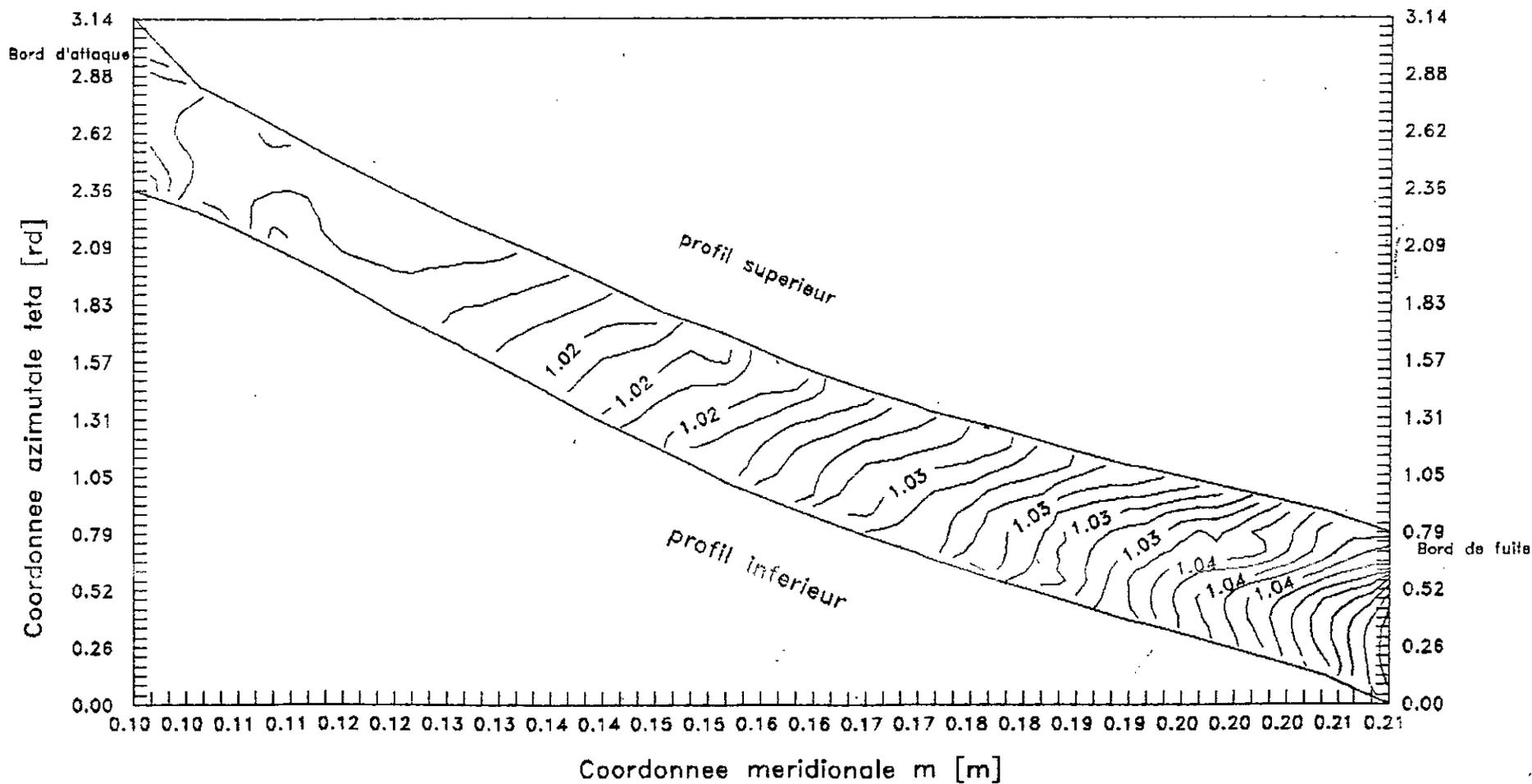
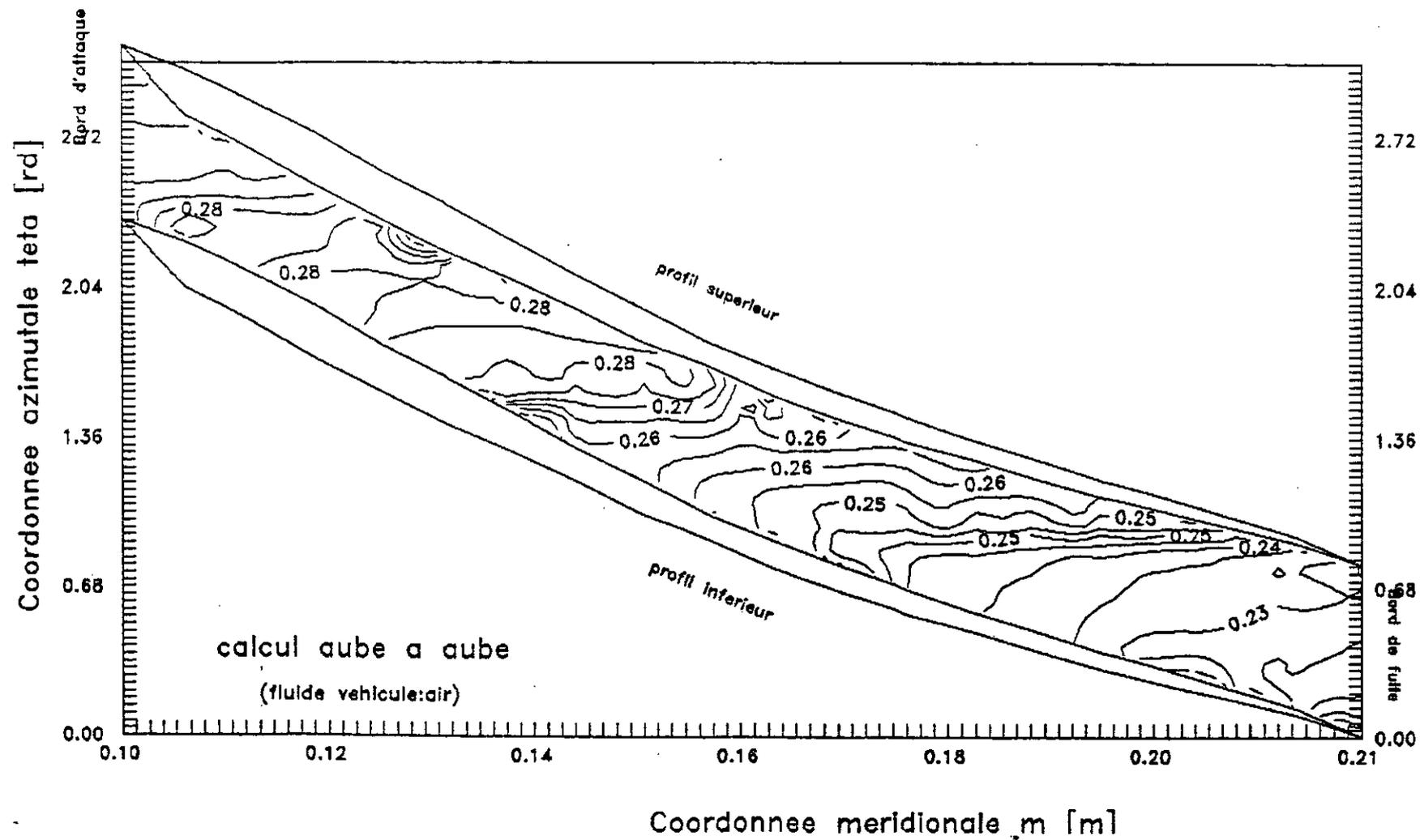
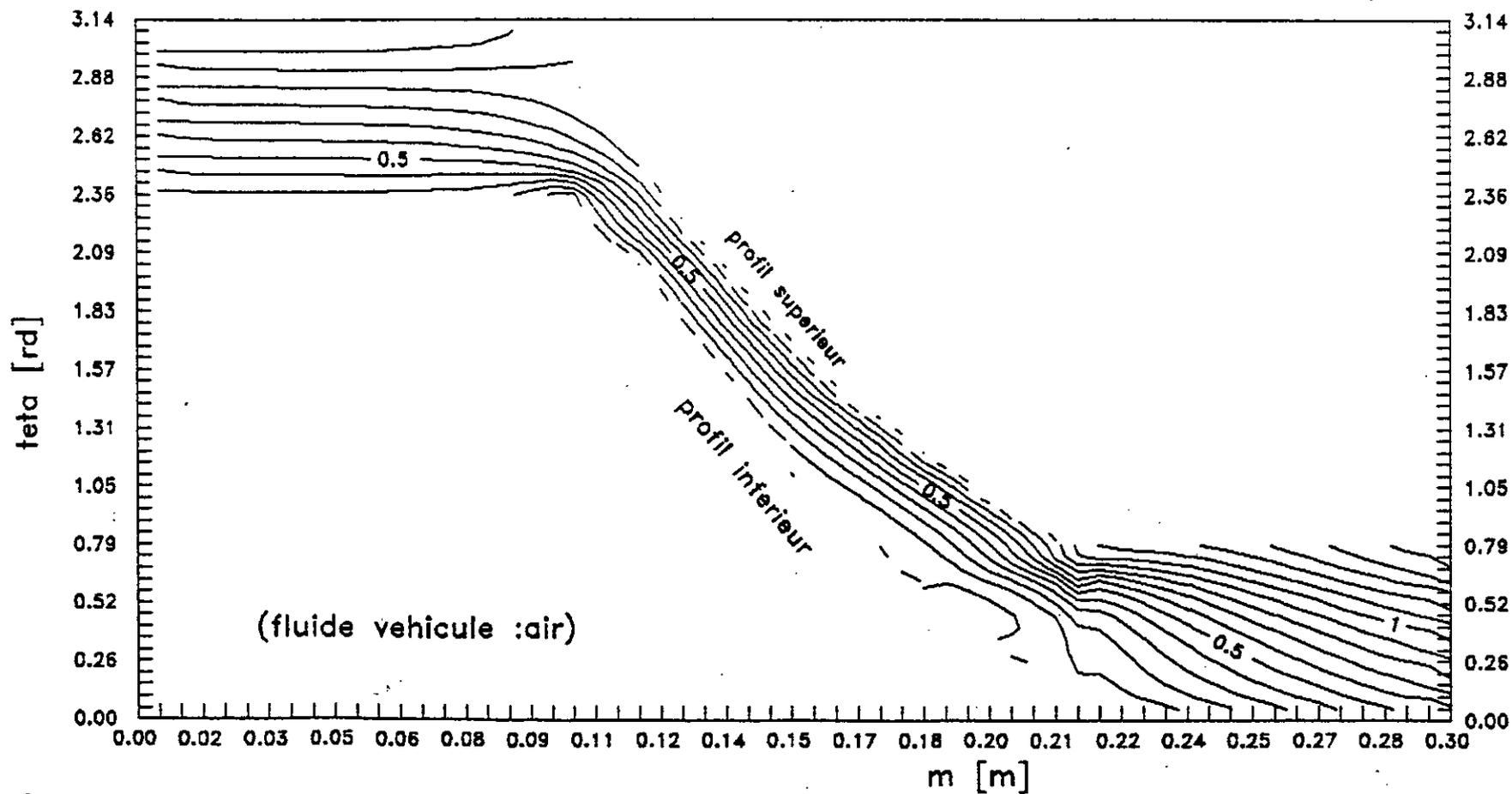


Fig. Evolution du nombre de mach relatif



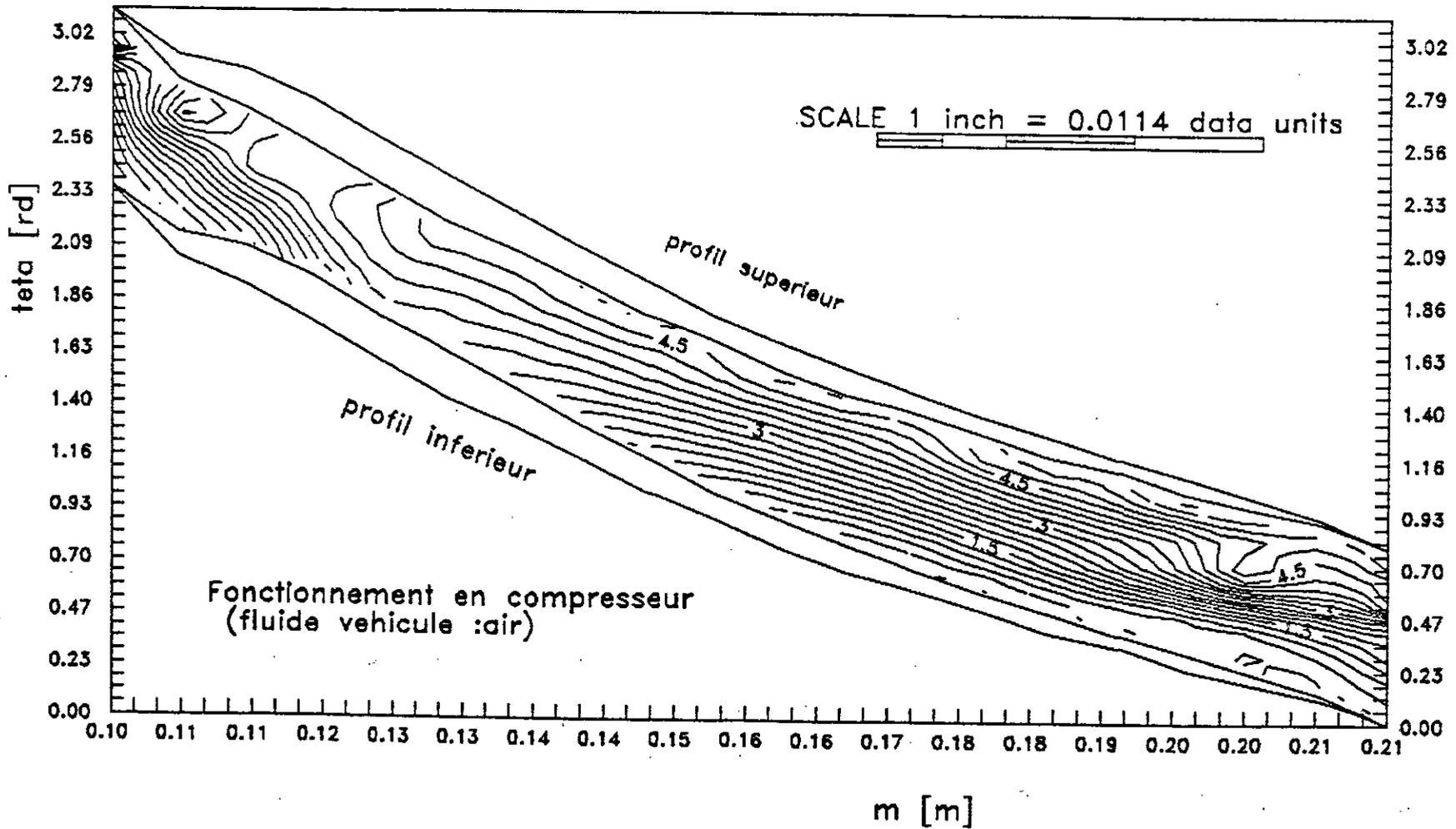
Fig

Distribution des lignes de courant sur la surface aube a aube



Fig

Repartition des vitesses relatives sur la surface aube a aube



101

CONCLUSION

CONCLUSION

Au terme de ce travail, nous pouvons émettre certaines conclusions comme, la simplicité et l'efficacité de la méthode de WU pour l'analyse de l'écoulement quasi-tridimensionnel dans une roue d'une turbomachine. Mais pour une approche plus concrète de l'étude, il est nécessaire d'avoir une grande maîtrise de l'outil mathématique, informatique et des connaissances prépondérantes dans le domaine de la turbomachinerie.

Pour l'élève ingénieur, cette étude ne reflète pas la réalité de l'écoulement, elle lui permet, néanmoins, d'avoir une idée sur les différents paramètres régissant l'écoulement ainsi que l'utilisation de la méthode de WU.

Dans ce sens, il serait souhaitable de poursuivre cette étude en incluant des paramètres nouveaux tels que la viscosité - les problèmes de la couche limite - et la variation d'entropie, cela en vue de se rapprocher plus des conditions réelles et d'affiner le modèle mathématique d'écoulement déjà établi.

— 00 —

Annexe: 1

Annexe 1

Introduction des dérivées spéciales dans l'équation de continuité .

D'après l'équation (1) du chapitre 1 on a :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (f.r.W_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (f.W_u) + \frac{\delta}{\delta z} (f.W_z) = 0 \quad (1)$$

Or la définition des dérivées spéciales permet d'écrire que :

$$\frac{\delta}{\delta r} (f.r.W_r) = \frac{\delta}{\delta r} (f.r.W_r) + \frac{n_r}{r.n_u} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (f.r.W_r) \quad (2)$$

et

$$\frac{\delta}{\delta z} (f.W_z) = \frac{\delta}{\delta z} (f.W_z) + \frac{n_z}{r.n_u} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (f.W_z) \quad (2)$$

En substituant (2) et (3) dans l'équation (1) on obtient :

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (f.r.W_r) + \frac{n_r}{r.n_u} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (f.r.W_r) \right] + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (f.W_u) + \left[\frac{\delta}{\delta z} (f.W_z) + \frac{n_z}{r.n_u} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (f.W_z) \right] = 0$$

=>

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (f.r.W_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (f.W_z) = - \frac{n_r}{r^2 \cdot n_u} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (f.r.W_r) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (f.W_u) - \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (f.W_z)$$

or

$$\frac{\delta}{\delta \theta} (f.r.W_r) = r \cdot f \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta}$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (f.r.W_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (f.W_z) = - \frac{f \cdot n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} - \frac{f \cdot n_u}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta W_u}{\delta \theta} - \frac{f \cdot n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta}$$

d'où

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (f.r.W_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (f.W_z) = - \frac{f}{r \cdot n_u} \left[n_r \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} - n_u \cdot \frac{\delta W_u}{\delta \theta} - n_z \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta} \right]$$

=>

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (f \cdot r \cdot W_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (f \cdot W_z) = f \cdot C(r, z)$$

Introduction des dérivées spéciales dans l'équation de mouvement .

a - l'équation de mouvement radial s'écrit :

$$- \frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) - \frac{\delta W_r}{\delta \theta} \right] + W_z \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_z}{\delta r} \right] = - \frac{\delta I}{\delta r} + T \cdot \frac{\delta S}{\delta r} \quad (1)$$

or d'après la définition des dérivées spéciales , Pour toute fonction q ,

$$\frac{\delta q}{\delta r} = \frac{\delta q}{\delta r} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta q}{\delta \theta}$$

et

$$\frac{\delta q}{\delta z} = \frac{\delta q}{\delta z} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta q}{\delta \theta}$$

Ce qui permet de réécrire l'équation (1) de la manière suivante:

$$- \frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (r \cdot V_u) - \frac{\delta W_r}{\delta \theta} \right] + W_z \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} - \frac{\delta W_z}{\delta r} - \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta} \right] = \left[- \frac{\delta I}{\delta r} - \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} \right] + T \cdot \left[\frac{\delta S}{\delta r} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta S}{\delta \theta} \right]$$

=>

$$- \frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) \right] + W_z \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_z}{\delta r} \right] = - \frac{\delta I}{\delta r} + T \cdot \frac{\delta S}{\delta r} - \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot W_z \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta}$$

$$- \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \left[\frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (r \cdot V_u) + W_z \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta} - \frac{\delta I}{\delta \theta} + T \cdot \frac{\delta S}{\delta \theta} \right] \quad (2)$$

or d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$T \cdot dS = du + Pdv$$

avec

$$h = u + Pv \Rightarrow dh = du + Pdv + v dP$$

donc

$$du = dh - pdv - v dP$$

d'où

$$TdS = dh - Pdv - v dP + Pdv$$

$$TdS = dh - v dP$$

=>

$$T \frac{\delta S}{\delta \theta} = \frac{\delta h}{\delta \theta} - v \frac{\delta P}{\delta \theta}$$

avec

$$v = \frac{1}{f} \quad \text{ce qui permet d'écrire que :}$$

$$T \frac{\delta S}{\delta \theta} = \frac{\delta h}{\delta \theta} - \frac{1}{f} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta} \quad (3)$$

Maintenant on se propose de calculer $\frac{\delta I}{\delta \theta}$

La rothalpie I est définie par : $I = H - \omega \cdot r \cdot V_u$

où

H . est la l'enthalpie totale .

ω . est la vitesse de rotation de la roue .

V_u . est la vitesse circonférentielle .

avec

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

où

h . est l'enthalpie statique .

V . est la vitesse absolue de la particule .

donc

$$I = h + \frac{V^2}{2} - \omega \cdot r \cdot V_u \quad (4)$$

or

$$V = \begin{bmatrix} W_r \\ W_u + \omega \cdot r \\ W_z \end{bmatrix}$$

car

$$V_r = W_r ; \quad V_u = W_u + \omega \cdot r \quad \text{et} \quad V_z = W_z$$

$$V^2 = W_r^2 + (W_u + \omega \cdot r)^2 + W_z^2 = W_r^2 + W_u^2 + \omega^2 \cdot r^2 + 2 \cdot W_u \cdot \omega \cdot r + W_z^2$$

$$V^2 = W_r^2 + W_u^2 + W_z^2 + \omega^2 \cdot r^2 + 2 \cdot W_u \cdot \omega \cdot r$$

$$V^2 = W^2 + \omega^2 \cdot r^2 + 2 \cdot W_u \cdot \omega \cdot r \quad (5)$$

Après substitution de (5) dans (4) on obtient :

$$I = h + \frac{W^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} + W_u \cdot \omega \cdot r - \omega \cdot r \cdot V_u$$

$$I = h + \frac{W^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} + W_u \cdot \omega \cdot r - \omega \cdot r \cdot (W_u + \omega \cdot r)$$

$$I = h + \frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2}$$

d'où :

$$\frac{\delta I}{\delta \theta} = \frac{\delta h}{\delta \theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta W^2}{\delta \theta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta (\omega^2 \cdot r^2)}{\delta \theta}$$

avec :

$$\frac{\delta (\omega^2 \cdot r^2)}{\delta \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta W^2}{\delta \theta} = 2 \cdot W \cdot \frac{\delta W}{\delta \theta} = 2 \cdot \left[W_r \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} + W_u \cdot \frac{\delta W_u}{\delta \theta} + W_z \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta} \right]$$

et par suite :

$$\frac{\delta I}{\delta \theta} = \frac{\delta h}{\delta \theta} + W_r \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} + W_u \cdot \frac{\delta W_u}{\delta \theta} + W_z \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta} \quad (6)$$

La substitution de (3) et (6) dans (2) donne :

$$-\frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) \right] + W \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_z}{\delta r} \right] = -\frac{\delta I}{\delta r} + T \cdot \frac{\delta S}{\delta r} - \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot W_z \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta}$$

$$-\frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \left[\frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} (r \cdot V_u) + W_z \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta} - \frac{\delta h}{\delta \theta} - W_r \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} - W_u \cdot \frac{\delta W_u}{\delta \theta} \right]$$

$$- W_z \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta} + \frac{\delta h}{\delta \theta} - \frac{1}{f} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta} \quad (7)$$

=>

$$-\frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) \right] + W_z \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_z}{\delta r} \right] = -\frac{\delta I}{\delta r} + T \cdot \frac{\delta S}{\delta r} - \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta}$$

$$-\frac{1}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} (n_r \cdot W_r + n_u \cdot W_u + n_z \cdot W_z)$$

or $n_r \cdot W_r + n_u \cdot W_u + n_z \cdot W_z = 0$ vu que \vec{n} et \vec{W} sont perpendiculaires

d'où :

$$-\frac{W_u}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r \cdot V_u) \right] + W_z \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_z}{\delta r} \right] = -\frac{\delta I}{\delta r} + T \cdot \frac{\delta S}{\delta r} - \frac{n_r}{r \cdot f \cdot n_u} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta} \quad (8)$$

- b - Equation de mouvement circonférentiel .

on a :

$$\frac{W_r}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r.V_u) \right] + W_z \left[\frac{\delta W_z}{\delta z} - \frac{\delta W_u}{\delta r} \right] = - \frac{1}{r} \frac{\delta I}{\delta \theta} + \frac{T}{r} \frac{\delta S}{\delta \theta} \quad (1)$$

En procédant de la même manière qu'en - a - c'est à dire , utilisant la définition des dérivées spéciales ; l'équation (1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{W}{r} \left[\frac{\delta}{\delta r} (r.V_u) + \frac{n_r}{r.n_u} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (r.V_u) - \frac{\delta W_r}{\delta \theta} \right] - W_z \left[\frac{1}{r} \frac{\delta W_z}{\delta \theta} - \frac{\delta W_u}{\delta z} - \frac{n_z}{r.n_u} \cdot \frac{\delta W_u}{\delta z} \right] \\ = - \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} + \frac{T}{r} \cdot \frac{\delta S}{\delta \theta} \end{aligned}$$

Après réarrangement de cette dernière équation on obtient :

$$\begin{aligned} - \frac{W_r}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (r.V_u) + \frac{W_z}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (r.V_u) = - \frac{1}{r.n} \cdot \frac{\delta W_u}{\delta \theta} (n_r \cdot W_r + n_u \cdot W_u + n_z \cdot W_z) \\ - \frac{1}{r.f} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta} \end{aligned}$$

Sachant que : $\vec{n} \cdot \vec{W} = 0$ c'est à dire $n_r \cdot W_r + n_u \cdot W_u + n_z \cdot W_z = 0$
L'équation ci-dessus devient :

$$- \frac{W_r}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (r.V_u) + \frac{W_z}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (r.V_u) = - \frac{1}{r.f} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta} \quad (2)$$

- c - Equation de mouvement axial .

$$- W_r \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_z}{\delta r} \right] + W_u \left[\frac{1}{r} \frac{\delta W_z}{\delta \theta} - \frac{\delta W_u}{\delta z} \right] = - \frac{\delta I}{\delta z} + T \frac{\delta S}{\delta z} \quad (1)$$

Moyennant la définition des dérivées spéciales et après substitution des dérivées partielles par rapport à r et z on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} - W_r \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} + \frac{n_z}{r.n_u} \cdot \frac{\delta W_r}{\delta \theta} - \frac{\delta W_z}{\delta r} - \frac{n_r}{r.n_u} \cdot \frac{\delta W_z}{\delta \theta} \right] + W_u \left[\frac{1}{r} \frac{\delta W_z}{\delta \theta} - \frac{\delta W_u}{\delta z} - \frac{n_z}{r.n_u} \cdot \frac{\delta W_u}{\delta \theta} \right] \\ = \left[\frac{\delta I}{\delta z} + \frac{n_z}{r.n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} \right] + T \cdot \left[\frac{\delta S}{\delta z} + \frac{n_z}{r.n_u} \cdot T \cdot \frac{\delta S}{\delta \theta} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

Après réarrangement et substitution des équations (3) et (6) de - a - dans l'équation (2) on obtient :

$$- W_r \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_\theta}{\delta r} \right] - W_u \cdot \frac{\delta W_u}{\delta z} = - \frac{\delta I}{\delta z} + T \cdot \frac{\delta S}{\delta z} - \frac{n_z}{r \cdot f \cdot n_u} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta}$$

or :

$$\frac{\delta W_u}{\delta z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (r \cdot V_u)$$

d'où :

$$- W_r \left[\frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{\delta W_\theta}{\delta r} \right] - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta z} (r \cdot V_u) = - \frac{\delta I}{\delta z} + T \cdot \frac{\delta S}{\delta z} - \frac{n_z}{r \cdot f \cdot n_u} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta} \quad (8)$$

Remarque 1 : On notera que dans tout notre travail , on manipule les dérivées spéciales comme si elles étaient des dérivées partielles ordinaires .

Remarque 2 : On remarquera que dans chacune des équations de mouvement , le groupement $-\frac{1}{r \cdot f \cdot n} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta} \cdot n_i$ où : $n_i = n_r, n_u, n_\theta$.
chacun de ces termes représente une composante de la force \vec{F} qui agit sur l'aube .

Cette force peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = - \frac{1}{r \cdot f \cdot n} \cdot \frac{\delta P}{\delta \theta} \cdot \vec{n}$$

Introduction des dérivées spéciales dans l'équation d'énergie .

L'équation d'énergie s'écrit :

$$W_r \cdot \frac{\delta I}{\delta r} + W_u \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} + W_\theta \cdot \frac{\delta I}{\delta z} = Q \quad (1)$$

$Q = 0$ pour un écoulement adiabatique .

Sachant que :

$$\frac{\delta I}{\delta r} = \overline{\frac{\delta I}{\delta r}} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta}$$

et

$$\frac{\delta I}{\delta z} = \overline{\frac{\delta I}{\delta z}} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta}$$

En tenant compte de la condition d'un écoulement adiabatique ,
l'équation (1) devient :

$$W_r \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta r} \right] + W_u \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} + W_z \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta r} \right] = 0$$

=>

$$W_r \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + W_z \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta z} = -W_r \cdot \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} - W_z \cdot \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta}$$

$$W_r \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + W_z \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta z} = -\frac{1}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} \cdot (W_r \cdot n_r + W_u \cdot n_u + W_z \cdot n_z)$$

Le vecteur vitesse relatif \vec{W} étant perpendiculaire au vecteur unitaire \vec{n} donc :

$$\vec{n} \cdot \vec{W} = 0$$

d'où :

$$W_r \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + W_z \cdot \frac{\overline{\delta I}}{\delta z} = 0$$

ANNEXE : 2

ETUDE DU COUPLAGE ENTRE LE CALCUL DU DEVELOPPEMENT DE LA COUCHE LIMITE SUR LES AUBES ET LE CALCUL AUBE A AUBE

Dans l'analyse du problème de l'introduction de la couche limite, il ne sera pris en compte que le calcul aube à aube; et le modèle que nous retiendrons sera particulièrement simplifié et ne prendra en compte que l'épaisseur de déplacement sous la forme d'une modification de la géométrie du profil.

1. PRINCIPE D'UNE METHODE NUMERIQUE DE CALCUL DE L'ECOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX AUTOUR D'UN PROFIL.

En 1980, J. CORNIGLION présente une étude bibliographique sur les diverses méthodes de calcul des écoulements dans les turbomachines, on constate jusqu'à ce jour qu'il n'existe pas une méthode numérique fiable de résolution directe des équations de NAVIER-STOKES. En particulier, la modélisation de WU demeure nécessaire pour traiter le caractère tridimensionnel de l'écoulement.

De plus l'abondante littérature dans ce domaine, traite des problèmes d'écoulements compressibles; ce qui facilite une formulation mathématique avec un schéma de pertes empirique (phénomène irréversible dû à une non adaptation à l'entrée et aux frottements moyennés par un schéma de gradient d'entropie). Dans ce cadre, une méthode "type" de calcul numérique des écoulements dans les compresseurs centrifuges a été développé en 1975 par S. SOVRANO et COL, en vue d'une préparation à l'introduction des corrections dues à la couche limite.

Parmi les méthodes de couplage classiques, comprenant un seul calcul d'écoulement de fluide parfait et une prédiction de l'influence de la couche limite sur ce dernier, on peut noter les travaux de CEBECI et SMITH fondés sur un schéma empirique reliant l'épaisseur de déplacement à l'épaisseur de quantité de mouvement et appliqués à un profil isolé.

Dans le cas des turbomachines, on peut citer les travaux de GOULAS qui a comparé des calculs à des mesures effectués par anémométrie laser sur des compresseurs centrifuges: ses calculs utilisent des procédures de couplage entre écoulement "méridien" et écoulement "aube à aube" avec prise en compte des effets visqueux et turbulents.

On trouve également des méthodes fondées sur des singularités, telle la méthode dite de "couplage-fort" développée à l'O.N.E.R.A pour des profils isolés d'ailes d'avions ou aussi les méthodes fondées sur des corrections alternées pour la résolution de l'équation de transport du tourbillon.

Dans l'attente de la généralisation des algorithmes permettant la résolution des équations complètes de NAVIER-STOKES dans l'espace interaubes, nous allons présenter une méthode approchée qui se décompose de la façon suivante :

- Calcul de l'écoulement de fluide parfait autour des profils initiaux .
- Calcul de la couche limite et détermination de son épaisseur de déplacement.
- Calcul de l'écoulement de fluide parfait autour des profils engraisés.

2. MODELE DE DEVELOPPEMENT DE LA COUCHE LIMITE .

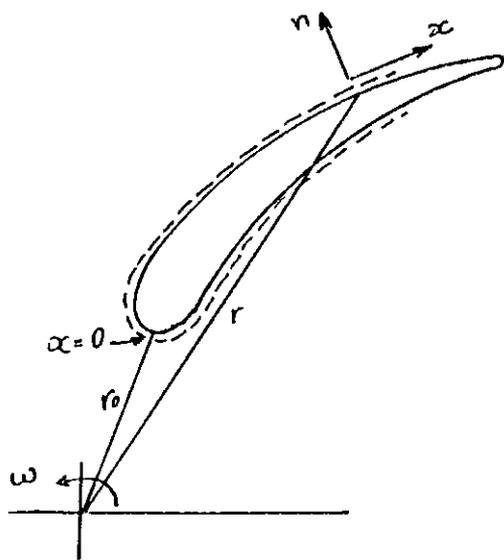
Nous allons supposer (à titre d'exemple) que la couche limite est entièrement turbulente sur toute la surface de l'aube et qu'elle ne présente pas de décollement.

Nous admettons que son épaisseur est négligeable vis à vis du rayon de courbure du profil et que ce dernier est assez grand pour qu'on puisse assimiler localement la surface du profil à une surface plane.

En effet, il a été démontré qu'on peut négliger l'influence de la courbure du profil et de la rotation de la roue (considérée constante) , sur la couche limite lorsqu'on a :

$$\left[\begin{array}{l} \omega \delta^* \ll W_x \\ \text{et} \\ K \delta^* \ll 1 \end{array} \right.$$

Où δ^* représente l'épaisseur de déplacement; W_x la vitesse locale le long de la surface de l'aube et K la courbure du profil en x (voir fig 1).



Dans ces conditions on peut retenir à titre de test, le modèle de BLASIUS de croissance de la couche limite sur une plaque plane :

$$\delta(x) = 0,04625 \cdot x \cdot Re_x^{-1/5} \quad (1)$$

Où x désigne la distance au bord d'attaque et $Re = U \cdot x$ est le nombre de REYNOLDS calculé à l'aide de la vitesse U du fluide supposé uniforme loin à l'amont et la viscosité cinématique.

Si le nombre de REYNOLDS $Re = \frac{U \cdot l}{\nu}$ calculé avec la longueur l de la plaque est inférieur à 10^5 , le modèle de couche limite laminaire est retenu et l'on prend :

$$\delta(x) = 1,7208 \cdot x \cdot Re_x^{-1/2} \quad (2)$$

L'utilisation de ces modèles simples s'effectue dans notre cas de la façon suivantes : (voir fig 2).

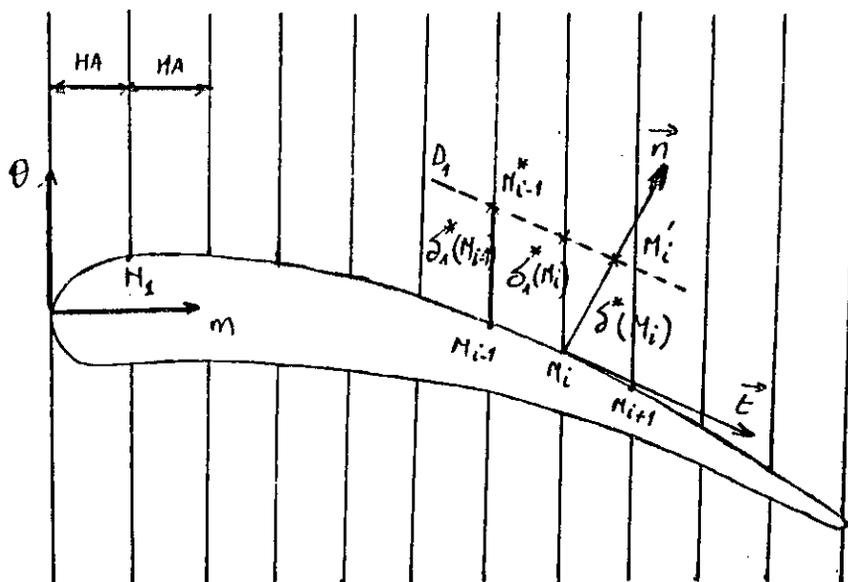
- Chaque élément d'une face du profil $\overline{M_{i-1} M_i}$ est assimilé à une plaque plane.
- L'épaisseur de déplacement au point M_i ; $\delta^*(M_i)$ est calculée à l'aide de l'expression (1) où de l'expression (2) en posant :

$$\left[\begin{array}{l} U_\infty = W_{M_{i-1}} \\ \text{et} \\ x_{M_i} = \text{Longueur de l'arc } \overline{M_{i-1} M_i} \end{array} \right.$$

- Le point M_i' du profil " en graissé " est défini en portant $\delta^*(M_i)$ sur la normale n_i en M_i au profil; on obtient ensuite le point M_i^* à l'intersection de la verticale passant par M_i et du segment $\overline{M_{i-1}^* M_i}$. (voir fig 2)

3. FERMETURE DU PROFIL ENGRAISSE .

Le développement de couches limites se traduit par la présence d'un sillage sur une distance plus ou moins à l'aval du profil qui doit être représenté notamment par une épaisseur de déplacement de part et d'autre du bord de fuite.



Or, la méthode de calcul de KATSANIS de l'écoulement de fluide parfait suppose un écoulement uniforme à l'infini aval, il est donc nécessaire de refermer le profil engraisé en définissant un bord de fuite fictif.

Le programme de couplage peut être conçu de façon à pouvoir éventuellement modifier la position de la fermeture du bord de fuite fictif. La figure (3) illustre la méthode dans le cas d'une fermeture à deux "mailles" (comptées à partir du bord de fuite fictif réel dans la direction horizontale) :

On prolonge les deux faces du profil fictif des points C' et F' jusqu'aux points C'' et F'' en utilisant les fonctions de lissage (splines cubiques). Le bord de fuite est ensuite affiné en définissant l'arc de cercle centré sur la ligne moyenne du profil fictif et de rayon RO défini par :

$$RO = \frac{f_1 \cdot \cos B_{2j}}{2} \quad (3)$$

Où B_{2j} est l'angle de sortie géométrique défini par tangente à la ligne moyenne en O.

f_1 est l'épaisseur du profil fictif calculé le long de la verticale précédant celle qui passe par O.

La condition de Kutta - JOUKOWSKI pour l'écoulement fluide parfait autour du profil "engraisé" est définie en écrivant l'égalité des modules des vitesses relatives aux points C'' et F'' situés dans le plan de sortie de la grille d'aube initiale (voir fig 3), ce qui revient implicitement comme nous l'avons vu à admettre une même pression en ces deux points.

4. PRINCIPE DE CALCUL .

La conduite du calcul est donc la suivante :

- Première itération : calcul de l'écoulement du fluide parfait autour des profils de base, ce qui donne la solution satisfaisant à la condition de Kutta - JOUKOWSKI telle qu'elle est définie au chapitre 3.
- Deuxième itération et suivantes :
- . Calcul des épaisseurs de déplacement qui vont engraisser le profil de base à partir des distributions de vitesses sur l'intrados et l'extrados obtenues à l'étape précédente.

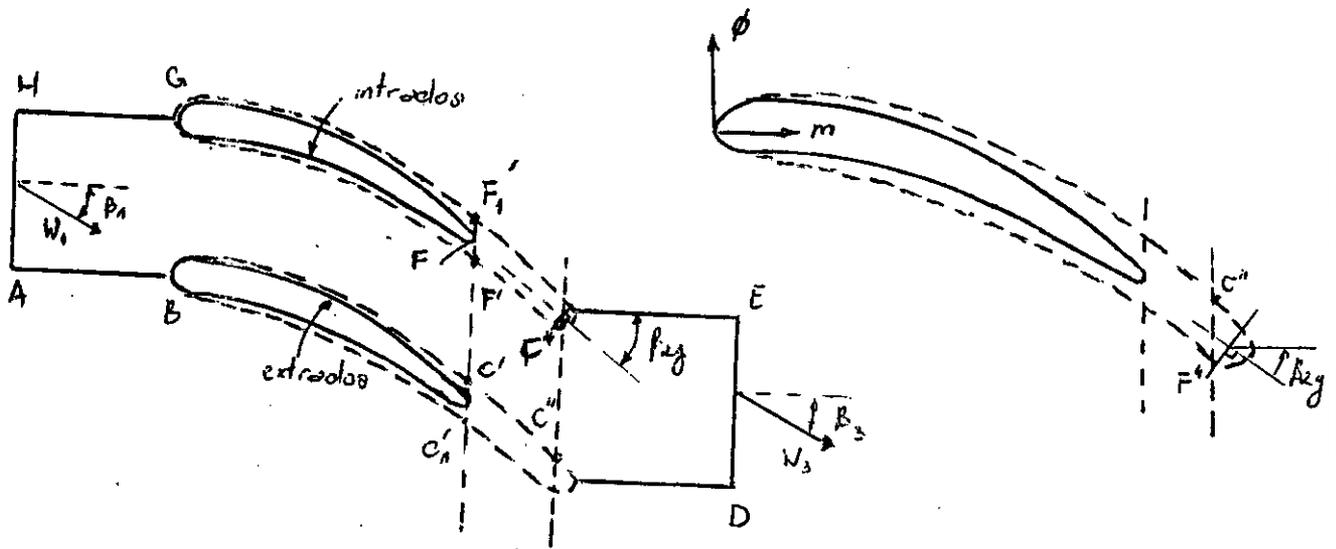


Fig:3

. Nouveau calcul d'écoulement de fluide parfait autour des profils "engraissés", en vérifiant la condition de Kutta JOUKOWSKI comme indiqué en 3.

. Ces itérations sont poursuivies jusqu'à la solution finale qui correspond à la grille d'aubes de profils "engraissés" dont la géométrie égale à celle trouvée à l'itération précédente à une erreur relative près de ϵ .

ANNEXE : 3

$$\begin{cases} \psi_1 - \psi_0 = h_1 \left[\frac{\delta \psi}{\delta x} \right] + \frac{h_1^2}{2} \left[\frac{\delta^2 \psi}{\delta x^2} \right] \\ \psi_2 - \psi_0 = - h_2 \left[\frac{\delta \psi}{\delta x} \right] + \frac{h_2^2}{2} \left[\frac{\delta^2 \psi}{\delta x^2} \right] \\ \psi_3 - \psi_0 = h_3 \left[\frac{\delta \psi}{\delta y} \right] + \frac{h_3^2}{2} \left[\frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} \right] \\ \psi_4 - \psi_0 = - h_4 \left[\frac{\delta \psi}{\delta y} \right] + \frac{h_4^2}{2} \left[\frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} \right] \end{cases}$$

Le système formé ci-dessus permet de calculer les dérivées partielles premières et secondes de ψ respectivement par rapport à x et y et qui sont :

$$\left[\frac{\delta \psi}{\delta x} \right]_0 = \frac{h_2 \cdot \psi_1 - h_1 \cdot \psi_2 + (h_1^2 - h_2^2) \psi_0}{h_1 \cdot h_2 (h_1 + h_2)}$$

$$\left[\frac{\delta \psi}{\delta y} \right]_0 = \frac{h_3 \cdot \psi_3 - h_4 \cdot \psi_4 + (h_3^2 - h_4^2) \psi_0}{h_3 \cdot h_4 (h_3 + h_4)}$$

$$\left[\frac{\delta^2 \psi}{\delta x^2} \right]_0 = \frac{h_2 \cdot \psi_1 + h_1 \cdot \psi_2 - (h_1 + h_2) \psi_0}{\frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot h_2 (h_1 + h_2)}$$

$$\left[\frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} \right]_0 = \frac{h_3 \cdot \psi_3 + h_4 \cdot \psi_4 - (h_3 + h_4) \psi_0}{\frac{1}{2} \cdot h_3 \cdot h_4 (h_3 + h_4)}$$

Remarque : On peut approximer de trois manières différentes les termes premiers de la fonction ψ , suivants les trois cas cités ci-dessus :

a - cas où le noeud k se trouve à l'intérieur de la grille de maillage .

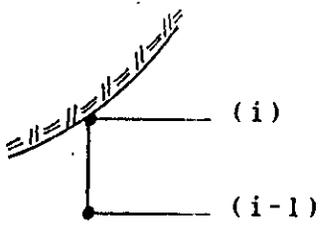
$$\frac{\delta \psi}{\delta y} = \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2 \cdot \Delta y} + 0 (\Delta y^2) \quad \text{différence finie centrée}$$

b - cas où le noeud i est situé sur la frontière inférieure de la machine .

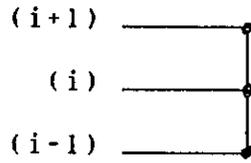
$$\frac{\delta \psi}{\delta y} = \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i+2}}{\Delta y} + 0 (\Delta y^2) \quad \text{différence finie décentrée à gauche}$$

c - cas où le noeud i est situé sur la frontière supérieure de la machine .

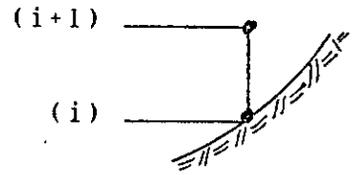
$$\frac{\delta \psi}{\delta y} = \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta y} + 0 (\Delta y^2) \quad \text{différence finie décentrée à droite}$$



decentrée à droite



centrée



decentrée à gauche

BIBLIOGRAPHIE

1. D.BUISINE et P.MICHEAU./ Ecoulement tridimensionnel dans une roue .Calcul effectivement tridimensionnel des écoulements dans les turbomachines par la méthode S1-S2 ./Journal de mécanique théorique et appliquée, vol 6, N 4 ,1987.
2. S.ABDALLAH, C.F.SMITH,M.W.Mc BRIDE ./Unified equation of motion (UEM) Approach as applied to S1 turbomachinery problemes./ Journal of fluid engineering ./Septembre 1988.
3. C.BOSMAN, H.MARSH ./An improved method for calculating the flow in turbo-machines, including a consistent loss model ./Journal mechanical engineering science.1974
4. J.P.VEUILLOT ./méthode de calcul de l'écoulement tridimensionnel dans une roue de turbomachine./Revue française de mécanique N 55-56-1975.
5. J.P.VEUILLOT ./Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale ./ONERA 1973.
- 6.D.BUISINE./Modelisation et calcul d'un écoulement tridimensionnel de fluide incompressible dans une turbomachine axiale ./Journal de mécanique appliquée vol 5 N 4,1981.
- 7.L.H.SMITH Jr ./The radial equilibrium equation of turbomachinery./Journal of engineering for power. January 1966.
- 8.c.bosman,K.C.CHAN,A.P.HATTON ./A calculation method for incompressible viscous,blade-to-blade flow through radial turbomachines with log-spiral blade surfaces./Journal of engineering for power ./july 1979, vol 101.
- 9.R.A.NOVAK./Streamline curvature computing procedures for fluid-flow problemes ./Journal of engineering for power ./October 1967.
- 10.I.WATANABE, I.ARIGA,T.MASHIMO ./Effect of dimensional parameters of impellers on performance characteristics of a radial-inflow turbine ./Journal of engineering for power ./January 1971.
- 11.J.P.VEUILLOT ./Calcul numérique de l'écoulement transonique d'un fluide parfait dans une grille d'aubes ./Recherche

aérospaciale- N 6, novembre 1975.

12.J.MARTINON ./Calcul de l'écoulement supersonique tridimensionnel dans un compresseur axial par une méthode de caractéristiques ./Recherche aérospacial,1978 N 4 , juillet-
aout.

13.G.MEAUZ, R.SOVRANO, Y.RIBAUD./Synthèse de méthodes numériques développées à l'ONERA, applicables aux calculs des écoulements dans les turbomachines.

14.Ch.HIRSCH./Développements récents des méthodes de calculs dans les turbomachines./Revue française de mécanique N 4, 1988.

15.J.P.VEUILLOT./Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale./Recherche aérospaciale N 6 , 1971.

16.M.H.VAVRA ./Aérodynamics and flow in turbomachines./John Willy & sons, inc 1960.

17.B.CARNAHAN, H.A.LUTHER, J.O.WIKES./Applied numerical méthodes./Willy, new york, 1969.

18.Consistency, stability and convergence of the finite-difference équation for flow about a rotating sphere in an axial stream./International journal for numerical méthodes in fluids vol 7 N 8.

19.R.ZGOULI./Contribution à l'étude de couplage écoulement sain-couche limite dans un calcul de grille d'aubes./Thèse de doctorat 1984.

20.R.SCHILLING, I.HABIL, J.M.VOITI./Numérical calculation of the quasi-three-dimensional incompressible inviscid flow in turbomachines.

21.G.MORETTI./A technique for integrating two dimensional euler equation./Computers and fluids vol 15, N 1, 1987.

22.D.EUVRARD./Résolution numérique des E.D.P de la physique et des sciences de l'ingénieur . Differences finies, éléments bfinis, méthode des singularités.

23.J.P.NOUGER./Méthodes de calcul numérique .

24.L.LEON./Traitement d'algorithmes sur ordinateur .