

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *Genie Mecanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

BANCS D'ESSAIS EN ELASTICITE

Flexion-torsion-Plaque

CONCEPTION ET REALISATION

17 PLANCHES

Proposé par :

M. B. GUERGUEB
M. Y. BELKACEMI

Etudié par :

M. K. SAIDI
M. D. MECHERI

Dirigé par :

M. B. GUERGUEB
M. Y. BELKACEMI

PROMOTION

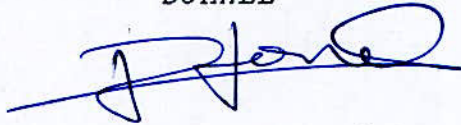
Juillet 92

D E D I C A T I O N

Je dédie ce travail à:

- ma mère...
- mon père...
- mes frères, Azzedine et Omar...
- mes soeurs, Nora, Saléha, Djouher, Soraya et Nacera...
- mon neveu " Kiki"...
- ma grand-mère...
- ma tante fatima...
- à tous les autres membres de ma famille...
- et à tous mes collègues de la promo 92.

DJAMEL



D E D I C A T I O N

Je dédie ce travail à:

- ma mère...*
- mon père...*
- mes frères et soeurs...*
- à tous les autres membres de ma famille...*
- et à tous mes collègues de la promo 92.*

KARIM

A handwritten signature in blue ink, consisting of several overlapping loops and a long horizontal stroke extending to the right.

RESUME

Le travail, réalisé dans ce projet, a pour but la mise en place de bancs d'essais de l'élasticité linéaire incluant l'utilisation des jauges d'extensométrie pour la mesure des déformations. Ces bancs pouvant être exploités dans des TP complétant le cours de mécanique des milieux continus.

ABSTRACT

The aim of this work is to set experimental equipments for linear elasticity including strain-gages to measure strains. These equipments can be used in continuous mediums mechanics.

ملخص

العمل المنجز ضمن هذه الأطروحة هدفه هو تحضير أجهزة تجارب في مجال المرونة الخطية، تستعمل ضمنها طريقة "jauges d'extensométrie" لقياس الإجمادات. هذه الأجهزة يمكن استعمالها في أعمال تطبيقية تكمل درس "ميكانيكا الأوساط المستمرة"

REMERCIEMENT

Nous remercions tout ceux qui ont, de près ou de loin, participé à l'élaboration de notre projet de fin d'études, en particulier, nos promoteurs Y.BELKACEMI et B.GUERGUEB pour leurs soutient morale et matériel.

Nous tenons à remercier aussi Messieurs I.BELHADEF et M.BENBRAIKA pour leurs précieux consiels pendant la réalisation.

SOMMAIRE

INTRODUCTION



CHAPITRE I

RAPPELS THEORIQUES DE L'ELASTICITE LINEAIRE

I-1/ HYPOTHESES DE BASE

I-2/ CONDITIONS D'EXISTENCE D'UN ETAT DE CONTRAINTES

I-3/ METHODES DE RESOLUTION DE PROBLEMES EN ELASTICITE LINEAIRE

I-3-a/ Méthode des déplacements

I-3-b/ Méthode des contraintes

I-4/ RESOLUTIONS DE QUELQUES PROBLEMES CLASSIQUES

I-4-a/ Flexion d'une lame d'acier

I-4-b/ Flexion d'une plaque circulaire encastree sous
chargement réparti

I-4-c/ Torsion d'une barre à section circulaire

I-4-d/ torsion d'une barre à section rectangulaire

I-4-e/ Torsion d'un tube mince

CHAPITRE II

ANALYSE DE CONTRAINTES

II-1/ METHODES D'ANALYSE DE CONTRAINTES

II-1-a/ Méthodes analogiques

II-1-b/ Méthodes extensométriques

II-2/ METHODE UTILISEE <<JAUGES EXTENSOMETRIQUES>>

II-2-a/ Raisons du choix.

II-2-b/ Application de la méthode



C H A P I T R E 000

CONCEPTION ET REALISATION

III-1/ BANC DE FLEXION DE POUTRE

III-1-a/ Description du banc

III-1-b/ Dimensionnement et réalisation de l'éprouvette

III-1-c/ Choix des matériaux et dimensionnement du banc

III-2/ BANC DE PLAQUE

III-2-a/ Description du banc

III-2-b/ Dimensionnement et réalisation de l'éprouvette

III-2-c/ Dimensionnement des vis de la bride

III-2-d/ Calcul du verin

III-3/ BANC DE TORSION

III-3-a/ Description du banc

III-3-b/ Préparation des éprouvettes

C H A P I T R E 00V

ESSAIS

IV-1/ ESSAI DE FLEXION

IV-1-a/ Détermination du module de Young à partir de la flèche

IV-1-b/ Détermination du module de Young à partir de la déformation

VI-2/ ESSAI DE FLEXION DE PLAQUE

VI-3/ ESSAI DE TORSION

IV-3-a/ Eprouvette cylindrique

IV-3-b/ Eprouvette carrée



C O N C L U S I O N

A N N E X E

EQUATIONS D'EQUILIBRE ET DE COMPATIBILITÉ EN COORDONNÉES
POLAIRES POUR LES CONTRAINTES

Par le travail que nous présentons ici, nous voulions confronter certaines connaissances théoriques, concernant des problèmes de l'élasticité linéaire, avec l'expérimentation et cela en réalisant des bancs d'essai.

Dans le premier chapitre, nous donnons des rappels de l'élasticité linéaire. On citera les hypothèses de base, les différentes méthodes classiques de résolution de problèmes de comportement de pièces mécaniques subissant différentes sollicitations. nous donnons aussi les solutions de quelques problèmes de l'élasticité linéaire: la flexion de poutre, la flexion de plaque et la torsion de barres de différentes sections.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons les différentes méthodes d'analyse des contraintes et nous y détaillons une méthode très intéressante "la méthode des jauges extensométriques", c'est d'ailleurs la méthode que nous avons choisie pour mesurer les contraintes dans les cas de flexion de plaque et flexion de poutre.

Dans le troisième chapitre, nous abordons la conception et la réalisation des deux bancs de flexion et la préparation des éprouvettes. Nous y justifions le dimensionnement de quelques pièces importantes.

Le quatrième chapitre, est consacré aux résultats des essais que nous avons effectués sur les différents bancs.

Quant à l'annexe, nous y explicitons les équations d'équilibre et les équations de compatibilité pour les contraintes en coordonnées cylindriques.

CHAPITRE 0

RAPPELS SUR LA THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE

I-1/ HYPOTHESES DE BASES

Tout milieu continu obéit à des lois de comportement déterminées dites "*lois rhéologiques*", pour arriver à ces lois il est nécessaire de poser quelques hypothèses (ou axiomes) concernant le milieu à étudier; ce qui permettra de décrire le comportement du milieu de la manière la plus proche possible de la réalité.

Ces hypothèses, en élasticité linéaire, sont :

- homogénéité: on considère, d'un point de vue macroscopique, que le milieu est homogène et qu'il y présente les mêmes propriétés en n'importe quel point.
- isotropie: toujours du point de vue macroscopique, on considère que le milieu a les mêmes caractéristiques dans toutes les directions et qu'il n'a pas de directions privilégiées concernant ces caractéristiques.
- linéarité: comme c'est le cas, en général, pour les matériaux utilisés en construction mécanique; on suppose que les contraintes varient linéairement en fonction des déformations infinitésimales dans le milieu considéré (on explicitera cela ci-dessous par la loi de Hooke).

En plus de ces hypothèses de base, nous supposons que les effets de la température sont négligeables.

Pour décrire le comportement d'un milieu donné on a recours à deux grandeurs: la déformation et la contrainte; une déformation est la variation relative de longueur d'un élément du milieu; quand à la contrainte elle est analogue à une pression que subit l'élément du milieu.

On regroupe les contraintes et les déformations dans deux matrices carrées :

-la première, appelé " tenseur déformation ", est noté :

$$\bar{\epsilon} = [\epsilon_{ij}] \quad (\text{avec } i, j = 1, 2, 3)$$

- la deuxième, appelé " tenseur contrainte ", est noté :

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] \quad (\text{avec } i, j = 1, 2, 3)$$

Il faut faire ici une remarque très importante : les deux tenseurs sont des tenseurs symétriques, i.e, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ et $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

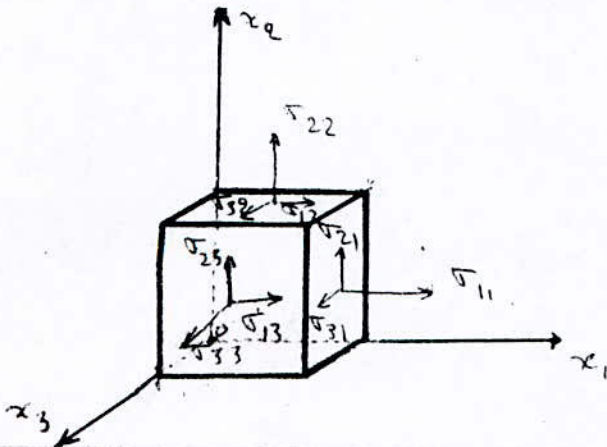


fig. 1 représentation des contraintes.

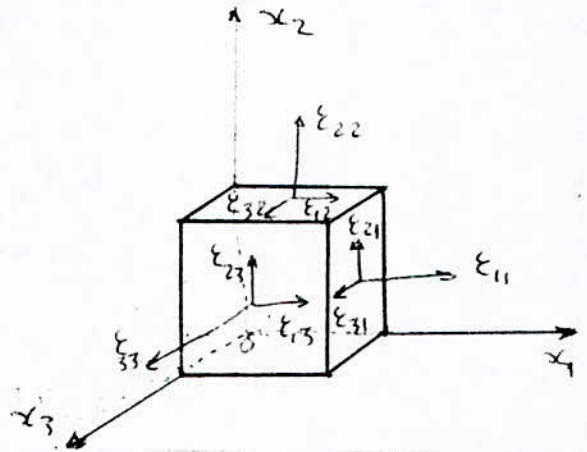


fig. 2 représentation des déformations.

I-2/ CONDITION D'EXISTENCE D'UN ETAT DE CONTRAINTE

Pour qu'un état de contrainte soit réel, il doit vérifier certaines relations (ou équations); sinon le comportement du milieu ne sera pas décrit avec exactitude. Ces équations sont : les équations d'équilibre et les équations de compatibilité; nous expliciterons ces équations, ci-dessous, en coordonnées cartésiennes :

I-2-a/ Equations d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \end{array} \right.$$

I-2-b/ Equations de compatibilité :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) s = 0 \\
 \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) s = 0 \\
 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) s = 0 \\
 \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\
 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \sigma_{21}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\
 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \sigma_{32}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x_3 \partial x_1} = 0
 \end{array} \right.$$

avec; $s = \text{trace}(\bar{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, ν : coefficient de Poisson
(Remarque: Les équations d'équilibre et les équations de compatibilité, en coordonnées polaires, seront données en annexe)

On peut, aussi, vérifier les équations d'équilibre et les équations de compatibilité par les déformations; en effet, la loi de Hooke s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \lambda e \bar{I} + 2 \mu \bar{\epsilon}$$

Où ; λ, μ sont les coefficients de Lamé

$$e = \text{trace}(\bar{\epsilon}) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

\bar{I} est le tenseur identité

on peut aussi exprimer le tenseur de déformation en fonction du tenseur de contrainte par la relation :

$$\bar{\epsilon} = - \frac{\nu}{E} s \bar{I} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}$$

où ; E est le module de Young

on a les relations suivantes entre les coefficients de Lamé et les module de Young et coefficient de Poisson;

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

I-3/ METHODES CLASSIQUES DE RESOLUTION DE PROBLEMES EN ELASTICITE LINEAIRE

A travers la résolution de plusieurs problèmes en mécanique des milieux continus, deux méthodes ont été, principalement, utilisées: la méthode des déplacements et la méthode des contraintes;

I-3-a/ La méthode des déplacements (*méthode de LAME-CLAPEYRON*)

1°/ On suppose un champs de déplacements $\bar{U} = u_i \bar{e}_i$, qui satisfait aux conditions sur certaines frontières et qui exploite, s'il y a lieu, les symétries existantes dans le problème posé;

2°/ On déduit, de ce champs de déplacements, un champs de déformations avec les relations suivantes:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad ;$$

3°/ On vérifie, ensuite, que le champs de déplacements est réel. avec les équations d'équilibre et les équations de compatibilité;

4°/ Si les conditions sur d'autres frontières sont vérifiées; on peut dire que: le champs de déplacements supposé est la solution du problème. Sinon on devra modifier le champs de déplacement et refaire les étapes ci-dessus.

I-3-b/ La méthode des contraintes (*méthode de Beltrami*):

1°/ Ici on suppose un champs de contraintes $\bar{\sigma}$ qui vérifie certaines conditions aux frontières et tient compte des symétrie existantes dans le problème étudié;

2°/ Le champs de contraintes supposé doit vérifier les équations d'équilibre et les équations de compatibilité;
 3°/ On vérifie, enfin, que les conditions sur d'autres frontières sont réalisées. Si c'est le cas, la solution supposée est la solution du problème; sinon il faut modifier le champs de contraintes et refaire les étapes vues ci-dessus.

Il existe d'autres méthodes de résolution, comme les méthode d'analogie, mais ce sont surtout des méthodes expérimentales que nous détaillerons dans le chapitre concernant l'analyse des contraintes.

I-4/ RÉSOLUTION DE PROBLEMES CLASSIQUES DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

I-4-a/ Flexion d'une poutre prismatique:

Ici on utilisera, pour ce cas, la méthode des contraintes.

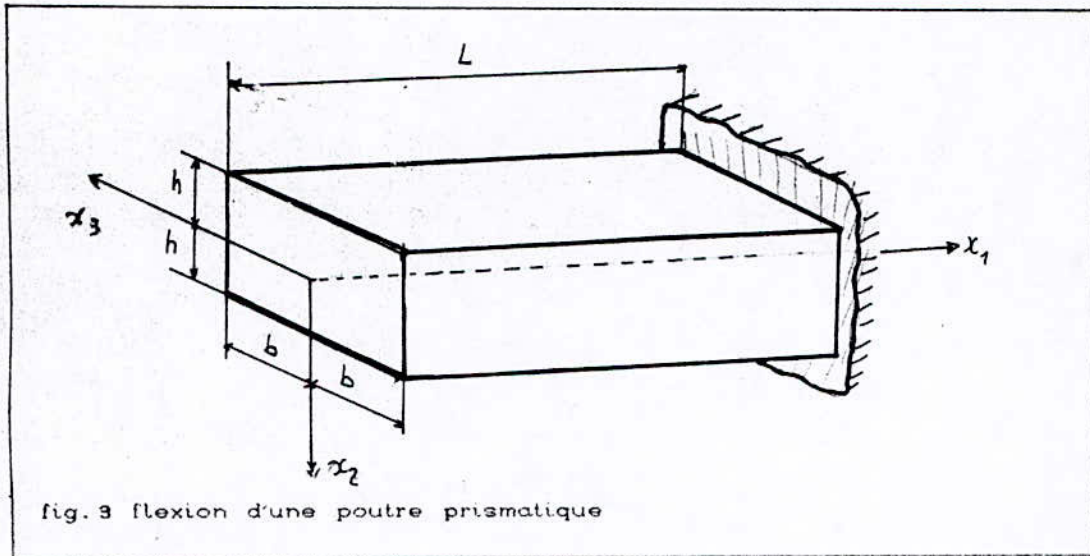


fig. 3 flexion d'une poutre prismatique

On suppose le champs de contraintes suivant:

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$$

et on suppose que l'état de contrainte ne dépend pas de x_3 (étant

donné l'arbitralité de la position de l'origine sur l'axe ox_3); c'est à dire:

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial x_3} = 0$$

avec ces hypothèses les équations d'équilibre se réduisent à;

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \rho g = 0 \end{cases}$$

les équations de compatibilité à;

$$\begin{cases} (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \sigma_{11} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} = 0 \\ (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \sigma_{12} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{cases}$$

on a les conditions aux limites suivantes:

-pour $x_1 = 0$ on a $\sigma_{11} = 0$

-pour $x_1 \in [0, l]$ et $x_2 = \pm h$ on a $\sigma_{12} = 0$

$$- \int_{-b}^b \int_{-h}^h \sigma_{12} \Big|_{x_1=0} dx_2 dx_3 = -P$$

Après intégration des équations différentielles et détermination des constantes par les conditions aux limites on trouve le champ de contraintes suivant:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = - \frac{P x_1 x_2}{I} \\ \sigma_{12} = - \frac{P}{2I} (h^2 - x_2^2) - \rho g x_1 \end{cases}$$

et en utilisant la loi de Hooke on déduit le champ de déformations correspondant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = - \frac{P x_1 x_2}{E I} \\ \varepsilon_{22} = -\nu \frac{P x_1 x_2}{E I} \\ \varepsilon_{33} = \nu \frac{P x_1 x_2}{E I} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{G} \left(- \frac{P}{2 I} (h^2 - x_2^2) - \rho g x_1 \right) \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{array} \right.$$

en intégrant ce champ de déformations, on obtient le champ de déplacements:

on a

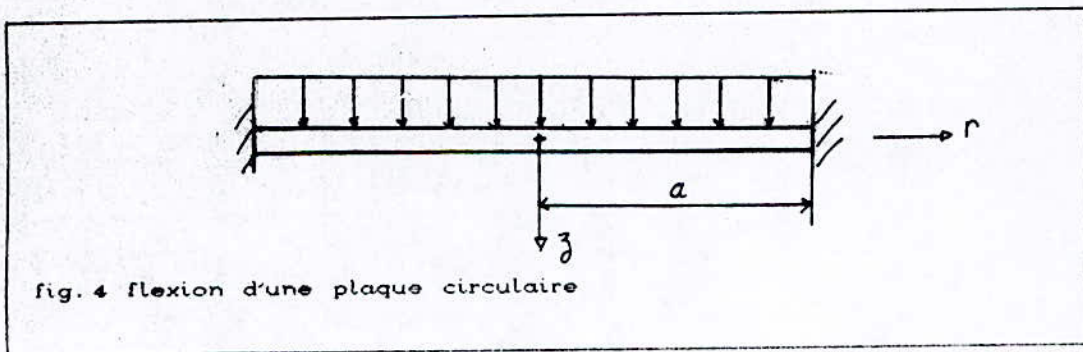
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right.$$

d'où le champ de déplacements:

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_1 &= - \frac{P}{2 E I} x_1^2 x_2 + \frac{P}{6 G I} x_2^3 - \nu \frac{P}{6 E I} x_2^3 + \frac{P}{2 E} l x_2 \\
 u_2 &= \nu \frac{P}{2 E I} x_1 x_2^2 + \frac{P}{6 E I} x_1^3 - \frac{\rho g}{2 G} x_1^2 - \left(\frac{P h^2}{2 I G} + \frac{P l^2}{2 G I} \right) x_1 \\
 &\quad + \frac{P l^3}{3 E I} + \frac{P l h^2}{2 I G} + \frac{\rho g l^2}{2 G}
 \end{aligned} \right.$$

I-4-b/ Flexion d'une plaque circulaire encastrée sous chargement réparti:

On néglige la masse de l'éprouvette.



la symétrie par rapport à (oz) $\Rightarrow \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$

l'arbitralité de l'axe (or) $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

les équations d'équilibre se réduisent à:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{cases}$$

et les équation de compatibilité en contrainte :

En posant $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \theta^2}{\partial r^2} = 0 \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r} = 0 \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \\ \nabla^2 \sigma_{rz} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial z} = 0 \end{cases}$$

avec

$$\theta = \text{trace } \bar{\sigma} = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$$

On introduit la fonction de contrainte " ϕ " permettant d'écrire la contrainte et vérifiant à la fois les équations d'équilibre et de compatibilité ; on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \right) \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left((2-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left((1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \end{array} \right.$$

Pour satisfaire les deux systèmes d'équations il faut que :

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$$

résolvons d'abord $\nabla^2 \phi = 0$

La méthode de résolution de cette équation est classique elle est exposée en détail dans " théorie de l'élasticité " de Timoshenko (p 336-339), la solution est de la forme $\phi_n = R^n \psi_n$ $n = 0, 1, \dots$ (R, ψ , coordonnées sphériques).

On a donc :

$$\phi_0 = A_0$$

$$\phi_1 = A_1 z$$

$$\phi_2 = A_2 \left[z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right]$$

$$\phi_3 = A_3 \left[z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2) \right]$$

⋮

En écrivant le ∇^2 en coordonnées sphériques on remarque que,

$R^{n+2} \psi_n$ est solution de l'équation $\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$

(voir ibid p 339 eq 9),

les nouvelles solutions s'écrivent :

$$\phi_2 = B_2 (r^2 + z^2)$$

$$\phi_3 = B_3 z (r^2 + z^2)$$

$$\phi_4 = B_4 (2z^2 - r^2) (r^2 + z^2)$$

⋮

La solution de notre problème est la combinaison des deux types de solutions, c'est une solution essayi qui doit vérifier les

conditions aux limites, et d'après le principe de l'unicité, on démontre que notre solution est la solution exacte du problème.

Choix de la fonction de contrainte " ϕ " :

En notant $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix}$

on écrira la solution sous la forme de la combinaison suivante :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_\sigma\} + \{\sigma_{a_4}\} + \{\sigma_{b_4}\} + \{\sigma_b\}$$

avec

σ_σ : le vecteur contrainte correspondant aux fonctions ϕ_σ des deux types de solutions

σ_{a_4} : le vecteur contrainte correspondant aux fonctions ϕ_{a_4} des deux types de solutions

σ_{b_4} : le vecteur contrainte correspondant aux fonctions ϕ_{b_4} des deux types de solutions, en y posant $96a_4 - 2b_4(16-14\nu) = 0$

σ_b : le vecteur contrainte correspondant aux fonctions ϕ_b des deux types de solutions de tel sorte que : $\sigma_z = b$ et $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_{rz} = 0$

On a donc cinq constantes à déterminer ($a_\sigma, b_\sigma, a_4, b_4, b$)

Conditions aux limites :

$$z=c \quad \sigma_z = 0 ; \sigma_{rz} = 0 \quad \forall r \in [0, a]$$

$$z=-c \quad \sigma_z = -q ; \sigma_{rz} = 0 \quad \forall r \in [0, a]$$

$$z=0 ; r=a \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (\text{la plaque subie un gauchissement à } r=a)$$

D'après les quatre premières conditions on aura (après calculs)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = q \left[\frac{(2+\nu)}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{r^2 z}{c} - \frac{3z}{8c} \right] + kqz \quad ; \text{ avec } k=28(1+\nu)b_1 \\ \sigma_z = q \left[-\frac{1}{4} \frac{z^3}{c^3} + \frac{3}{4} \frac{z}{c} - \frac{1}{2} \right] \\ \sigma_{rz} = \frac{3}{8c^3} qr(z^2 - c^2) \\ \sigma_\theta = q \left[\frac{(2+\nu)}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(1+\nu)}{32} \frac{r^2 z}{c} - \frac{3z}{8c} \right] + kqz \end{array} \right.$$

Pour déterminer k calculons les déformations et déplacements .

$$\epsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} \quad ; \quad \epsilon_\theta = \frac{U_r}{r} \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad ; \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)$$

Dans ce qui suit on fera l'hypothèse que pour $a \gg c$ on ne considèrera que les termes comportant les facteurs en "r"

La loi de hooke donne :

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]$$

En remplaçant les contraintes par leurs expressions et en reliant les déformations aux déplacements on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_r = \frac{qrz}{32Ec^3} [3(\nu^2 - 1)r^2 + 32c^3 k(1 - \nu)] \\ U_z = \frac{\nu qz^2}{32Ec^3} [6(\nu + 1)r^2 - 32c^3 k] + f(r) \end{array} \right.$$

De la condition limite $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ ($z=0$; $r=a$) on détermine k

$$k = \frac{3(1+\nu)a^2}{32c^3}$$

Déterminons f(r)

$$\epsilon_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{2G} \Rightarrow \epsilon_{rz} = \frac{3}{16Gc^3} qr(z^2 - c^2) \quad \text{et comme } \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)$$

alors,

$$f(r) = \frac{3q}{Ec^3} \frac{(1-\nu^2)}{64} \left[\frac{r^4}{2} - r^2 a^2 \right] - \frac{3}{16Gc^3} qr^2 + \alpha$$

condition d'encastrement

$$Uz=0 \text{ pour } z=0; r=a \Rightarrow \alpha = \frac{3(1-\nu^2)}{128Ec^3} q [a^4 + \frac{16a^2c^2}{(1-\nu)}]$$

Notre problème est totalement résolu mais il faut noter qu'on a négligé les termes ne contenant pas, r sinon on aurait trainé des termes dont l'influence est négligeable, donc pour des calculs beaucoup plus précis ou pour de faibles r il suffit de les introduire en suivant les mêmes étapes de calcul on obtient finalement : on obtient

le champ de contraintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{3qz}{32c^3} [-(3+\nu)r^2 + (1+\nu)a^2] \\ \sigma_\theta = \frac{3qz}{32c^3} [-(1+3\nu)r^2 + (1+\nu)a^2] \\ \sigma_z = q \left[\frac{-z^3}{4c^3} + \frac{3z}{4c} - \frac{1}{2} \right] \\ \sigma_{rz} = \frac{3}{8c^3} qr (z^2 - c^2) \end{array} \right.$$

le champ de déformations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_r = \frac{qz}{16D} [a^2 - 3r^2] \\ \epsilon_\theta = \frac{qz}{16D} [a^2 - r^2] \\ \epsilon_z = \frac{\nu qz}{32D(1-\nu)} [2r^2 - a^2] \end{array} \right.$$

avec $D = \frac{2Ec^3}{3(1-\nu^2)}$

le champ de déplacements:

$$\begin{cases} U_r = \frac{qrz}{16D} [a^2 - r^2] \\ U_z = \frac{q}{64D} [(r^2 - a^2)^2 + \frac{16c^2}{(1-\nu)} (a^2 - r^2)] + \frac{q\nu z^2}{64D(1-\nu)} [2r^2 - a^2] \end{cases}$$

on a la flèche maximale pour $r = 0$

$$(U_z)_{\max} \cong \frac{q}{64D} a^4$$

I-4-c/ Torsion d'une barre à section circulaire:

On utilisera, ici, la méthode des déplacements

On négligera la masse de la barre.

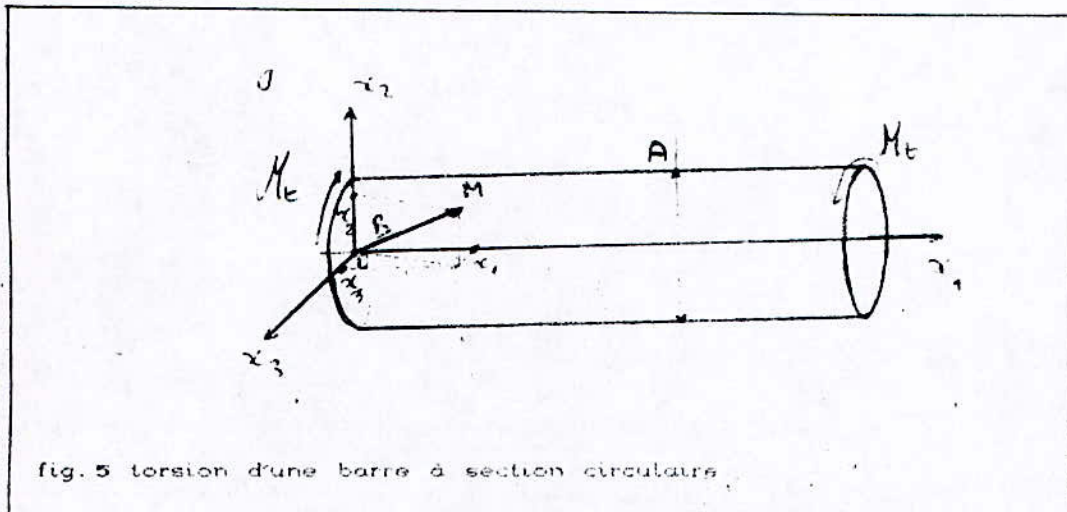


fig. 5 torsion d'une barre à section circulaire

De plus, on suppose qu'il n'y a pas de déplacement suivant l'axe ox_1 (donc pas de gauchissement de la section droite de la poutre) de cette manière on aura comme déplacement principal la rotation autour de l'axe ox_1 : $\varphi \bar{e}_1$; vue la symétrie de révolution autour de l'axe ox_1 , on supposera $\varphi = \varphi(x_1)$.

Pour un point M repéré par le vecteur $\bar{R} = x_1 \bar{e}_1$, on a le champs

de déplacement :

$$\bar{U} = \bar{\varphi} e_1 \times R \quad ;$$

d'où les composantes du déplacement :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -x_3 \varphi(x_1) \\ u_3 = x_2 \varphi(x_1) \end{cases}$$

on a alors le champs de déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = 0 \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} x_2 \frac{d\varphi}{dx_1} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = -\frac{1}{2} x_3 \frac{d\varphi}{dx_1} \end{cases}$$

Le champs de déformations, ainsi obtenu, vérifie les équations de compatibilité. On calcule maintenant le champs de contraintes; on a:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= 2 \mu \bar{\varepsilon} + \lambda e \bar{I} \\ &= 2 \mu \bar{\varepsilon} \quad ; \text{en effet } e = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu x_2 \frac{d\varphi}{dx_1} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\mu x_3 \frac{d\varphi}{dx_1} \end{cases}$$

les équations d'équilibre se réduisent à:

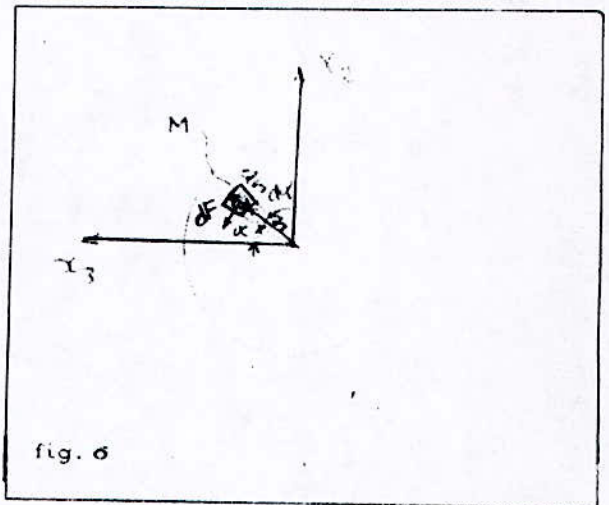
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\mu x_3 \frac{d^2 \varphi}{dx_1^2} = 0 \\ \mu x_2 \frac{d^2 \varphi}{dx_1^2} = 0 \end{cases}$$

nécessairement on a : $\frac{d^2 \bar{r}}{dx_1^2} = 0$ et $\frac{d\theta}{dx_1} = \text{constante}$

on note : $\frac{d\theta}{dx_1} = \theta$

soit un point M repéré par \bar{r} dans la section droite de la barre, on a $\bar{r} = x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3$ et la contrainte de cisaillement résultante est :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma_{12} \bar{e}_2 + \sigma_{13} \bar{e}_3 \\ &= -\mu x_3 \theta \bar{e}_2 + \mu x_2 \theta \bar{e}_3 \end{aligned}$$



On vérifie aisément que : $\bar{\sigma} \cdot \bar{r} = 0$, donc $\bar{\sigma} \perp \bar{r}$; et le module

de la contrainte résultante est : $\sigma = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}$

d'où $\sigma = \mu \theta r$

En pratique $\theta = \frac{\Delta \varphi}{L} = \frac{\text{rotation d'une extrémité de la barre}}{\text{longueur de la barre}}$

On peut calculer, maintenant le moment de torsion

$$M_t = \int dM_t$$

Où
$$\begin{aligned} dM_t &= r dF \\ &= r \sigma r d\alpha dr \\ &= \mu \theta r^3 dr d\alpha \end{aligned}$$

Alors :
$$M_t = \mu \theta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{D/2} r^3 dr$$

D'où
$$M_t = \mu \theta \frac{\pi D^4}{32}$$

I-4-d/ Torsion d'une barre à section rectangulaire :

On négligera la masse de la barre.

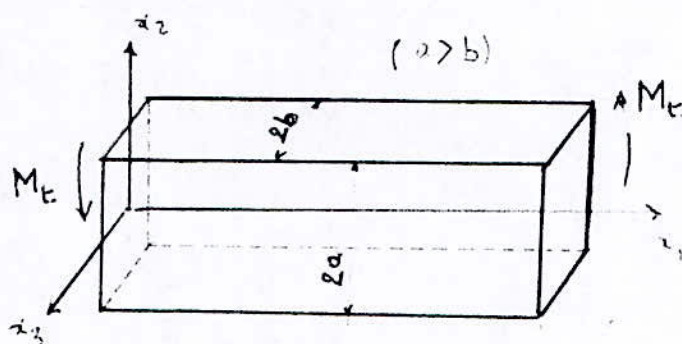


fig. 7 torsion d'une barre à section
rectangulaire

Pour la résolution de ce problème on utilisera la fonction de Prandtl " F " qui est, d'usage, plus facile que la fonction de Timoshenko φ [voir Solomon: Elasticité linéaire p.202]

On pose; $F = \mu \theta f(x_2, x_3)$

telle que :

$$\begin{cases} \Delta f = -2 \\ f|_l = 0 \end{cases}$$

l étant le contour de la section

On a d'autre part les relation entre f et φ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_3 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = -\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \end{cases}$$

La solution adoptée ici est un cas particulier de la méthode des déplacements, en effet on pose :

$$\begin{cases} u_1 = \theta \varphi(x_2, x_3) \\ u_2 = -\theta x_3 x_1 \\ u_3 = \theta x_2 x_1 \end{cases}$$

(Remarque: dans ce cas on a supposé l'existence du gauchissement de la section de la poutre.)

La solution de l'équation aux dérivées partielles; $\Delta f = -2$, sera déterminée par séparation de variables et développement en série:

$$f(x_2, x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x_2) Y_n(x_3)$$

Le fait que la section est symétrique par rapport aux axes principaux, nous permet de dire que $f(x_2, x_3)$ est paire selon chaque variable i.e : $X_n(x_2)$ et $Y_n(x_3)$ sont des fonctions paires.

Considérons maintenant que le second membre de l'équation différentielle est une fonction paire de période $2l = 4b$:

soit $h(x_3)$ telle que :

$$h(x_3) = \begin{cases} -2 & \text{si } -b \leq x_3 \leq b \\ 2 & \text{si } -2b \leq x_3 \leq -b \text{ et } b \leq x_3 \leq 2b \end{cases}$$

On développe $h(x_3)$ en série de Fourier;
on calcule les coefficients de Fourier; ils sont donnés par:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x_3) dx_3 \\ a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x_3) \cos\left(\frac{\pi}{l} x_3\right) \\ b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x_3) \sin\left(\frac{\pi}{l} x_3\right) \end{cases}$$

on trouve : $a_0 = b_k = 0$ (puisque $h(x_3)$ paire)

$$a_k = \frac{4}{k\pi} (-2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right))$$

pour $k = 2n$: $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$

pour $k = 2n + 1$: $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = (-1)^n$

d'où $a_{2n+1} = -\frac{8}{(2n+1)\pi} (-1)^n$

et
$$h(x_3) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos(\lambda_n x_3)$$

on pose ;
$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2b}$$

$$\lambda_n = (2n+1) \lambda_0$$

En choisissant $Y_n(x_3) = \cos(\lambda_n x_3)$, l'équation différentielle devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n''(x_2) \cos(\lambda_n x_3) + \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x_2) (-\lambda_n^2 \cos(\lambda_n x_3)) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos(\lambda_n x_3)$$

par identification terme à terme on trouve pour $\dots n$:

$$X_n''(x_2) - \lambda_n^2 X_n(x_2) = -\frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)}$$

$$X_n''(x_2) - \lambda_n^2 \left(X_n(x_2) - \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)} \right) = 0$$

on pose
$$\chi_n(x_2) = X_n(x_2) - \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)}$$

d'où l'équation différentielle $\chi_n''(x_2) - \lambda_n^2 \chi_n(x_2) = 0$

de solution
$$\chi_n(x_2) = A_n \operatorname{ch}(\lambda_n x_2) + B_n \operatorname{sh}(\lambda_n x_2)$$

$$X_n(x_2) = A_n \operatorname{ch}(\lambda_n x_2) + B_n \operatorname{sh}(\lambda_n x_2) + \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)}$$

la condition $f|_1 = 0$ exprimée par :

$$\begin{cases} f(x_2, \pm b) = 0 \\ f(\pm a, x_3) = 0 \end{cases}$$

la première condition est vérifiée; en effet:

$$Y_n(\pm b) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = 0$$

la deuxième condition donne:

$$A_n \operatorname{ch}(\lambda_n a) \pm B_n \operatorname{sh}(\lambda_n a) + \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)} = 0$$

ce qui implique: $B_n = 0$ et $A_n = -\frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)\operatorname{ch}(\lambda_n a)}$

$$\text{d'où } X_n(x_2) = \frac{32 b^2 (-1)^n}{\pi^3 (2n+1)^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n x_2)}{\operatorname{ch}(\lambda_n a)} \right)$$

la fonction de Prandtl s'écrit: alors:

$$f(x_2, x_3) = \frac{32 b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n x_2)}{\operatorname{ch}(\lambda_n a)} \right) \cos(\lambda_n x_3)$$

on calcule, maintenant, la fonction de Saint-Venant;

$$\begin{aligned} \text{on a: } \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= -\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \\ &= -\frac{16 b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left(\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n x_2)}{\operatorname{ch}(\lambda_n a)} \right) \cos(\lambda_n x_3) - x_2 \end{aligned}$$

d'où:

$$\varphi(x_2, x_3) = -x_2 x_3 - \frac{32 b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left(\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n x_2)}{\operatorname{ch}(\lambda_n a)} \right) \cos(\lambda_n x_3)$$

le champs de déplacements:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \theta \left[-x_2 x_3 - \frac{32 b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left(\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n x_2)}{\operatorname{ch}(\lambda_n a)} \right) \cos(\lambda_n x_3) \right] \\ u = -\theta x_1 x_3 \\ u = \theta x_1 x_2 \end{array} \right.$$

le champs de contraintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{12} = -\mu \theta \frac{16 b^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left(1 - \frac{\text{ch}(\lambda_n x_2)}{\text{ch}(\lambda_n a)} \right) \sin(\lambda_n x_3) \\ \sigma_{13} = \mu \theta \frac{16 b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n x_2)}{\text{ch}(\lambda_n a)} \right) \cos(\lambda_n x_3) \end{array} \right.$$

et le champs de déformations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{12} = -\mu \theta \frac{16 b^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left(\frac{\text{ch}(\lambda_n x_2)}{\text{ch}(\lambda_n a)} \right) \sin(\lambda_n x_3) - \theta x_3 \\ \varepsilon_{13} = \mu \theta \frac{16 b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n x_2)}{\text{ch}(\lambda_n a)} \right) \cos(\lambda_n x_3) \end{array} \right.$$

remarquons que:

$$-\theta x_3 = \frac{\theta}{2} \int_0^{x_3} h(x) dx = \theta \frac{8 b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(\lambda_n x_3)$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{12} = -\mu \theta \frac{16 b^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left(1 - \frac{\text{ch}(\lambda_n x_2)}{\text{ch}(\lambda_n a)} \right) \sin(\lambda_n x_3) \\ \varepsilon_{13} = \mu \theta \frac{16 b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n x_2)}{\text{ch}(\lambda_n a)} \right) \cos(\lambda_n x_3) \end{array} \right.$$

On calcule finalement le couple de torsion;

on a:

$$M_t = \int_{-a}^a \int_{-b}^b x_2 \sigma_{13} dx_2 dx_3 + \int_{-a}^a \int_{-b}^b x_3 \sigma_{12} dx_2 dx_3$$

$$M_t = \frac{16}{3} \mu \theta a b^3 \left[1 - \frac{192 b}{\pi^5 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \text{th}(\lambda_n a) \right]$$

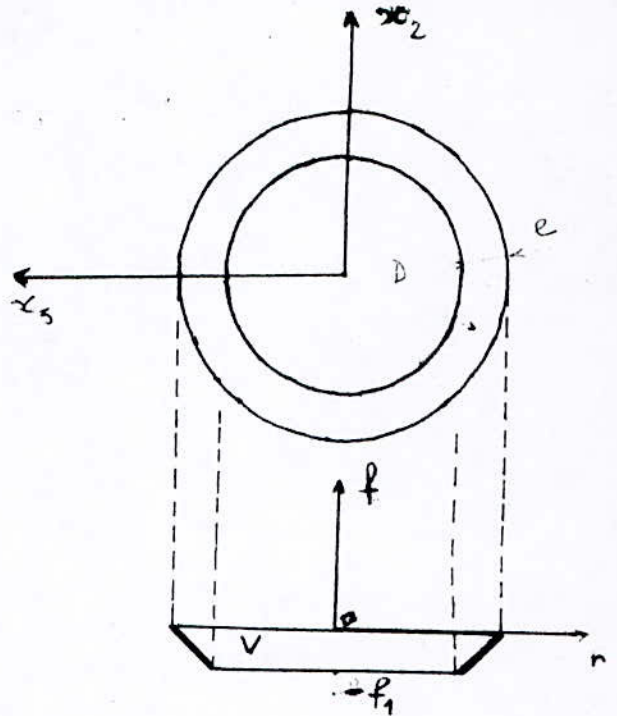
I-4-d/ Torsion d'un tube mince:
 Pour ce cas particulier nous
 utiliserons l'analogie de la
 membrane élastique;

soit σ la contrainte résultante,

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\mu \theta \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\mu \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}$$

$$= \mu \theta \frac{df}{dr}$$



($f_1 > 0$)

fig. 8 torsion d'un tube mince

puisque on est en présence d'un tube mince on peut considérer que
 f est linéaire lelong du rayon sur l'épaisseur du tube, d'où:

$$\frac{df}{dr} = \text{constante}$$

on a: $\frac{df}{dr} = \frac{f_1}{e}$

alors $\sigma = \mu \theta \frac{f_1}{e}$ et $f_1 = \frac{\sigma e}{\mu \theta}$

L'analogie utilisée ici nous permet d'écrire le moment de
 torsion comme suit :

$$M_t = \mu \theta (2 V)$$

(V étant le volume délimité par la
 membrane, le plan $f=0$ et le plan $f=-f_1$)

on a : $V = \frac{\pi D^2}{4} f_1$

(D diamètre moyen)

alors;

$$M_t = \mu \theta \left(2 \frac{\pi D^4}{4} f_1 \right)$$
$$= \frac{\mu \theta \pi D^2}{2} \frac{\sigma e}{\mu \theta}$$

d'où

$$M_t = \frac{\pi D^2 e}{2} \sigma$$

et

$$\sigma = \frac{2 M_t}{\pi D^2 e}$$

ANALYSE DE CONTRAINTES

II-1/ DIFFERENTES METHODES D'ANALYSE DES CONTRAINTES

Comme la mesure directe des contraintes est impossible alors, on a recours à différentes méthodes expérimentales:

-Soit en réalisant un modèle; sur lequel, on mesure phénomène physique telle que la distribution géométrique de ce phénomène soit analogue à la distribution des contraintes .

-soit: en mesurant directement les déformations sur une structure ou un modèle identique à la structure. Ensuite, on en déduit les contraintes par des relations liant les contraintes aux déformations. D'où, les différentes méthodes utilisées;

II-1-a/ Les méthodes analogiques:

Il a été démontré que différents états bidimensionnels peuvent être décrits par des relations mathématiques similaires: par exemple un champ électrique, un champ de contraintes ou un champ de déplacements d'une membrane élastique. D'où, on a les deux analogies suivantes:

-analogie électrique: une feuille de matériau résistant est découpée à la forme de la structure à étudier; ensuite on applique, sur les bords de la feuille, des tensions proportionnelles aux conditions aux limites. Enfin, on mesure la tension en chacun des points intérieurs du modèle et en déduit les intensités de courants qui sont similaires aux contraintes.

-analogie de la membrane élastique (ou de Prandtl):

[cette analogie est valable pour la torsion de poutre]

une membrane élastique (feuille de caoutchouc ou film de savon) est tendue sur un tube ayant la même forme que la section d'une poutre en torsion, ensuite elle est soumise à une légère pression. Enfin on mesure la déformée point par point et en déduit les pentes qui sont analogues aux contraintes.

II-1-b/ Les méthodes extensométriques:

Pour mesurer une déformation, on peut repérer deux points d'une structure distants d'une certaine valeur et mesurer, ensuite la variation de la distance entre les deux points: soit directement par extensométrie mécanique, où l'appareil utilisé est lié à la structure par deux pointes et où la variation de la longueur à mesurer est amplifiée par une série de leviers ou par un dispositif optique (voir fig.1, 2, 3 et 4),

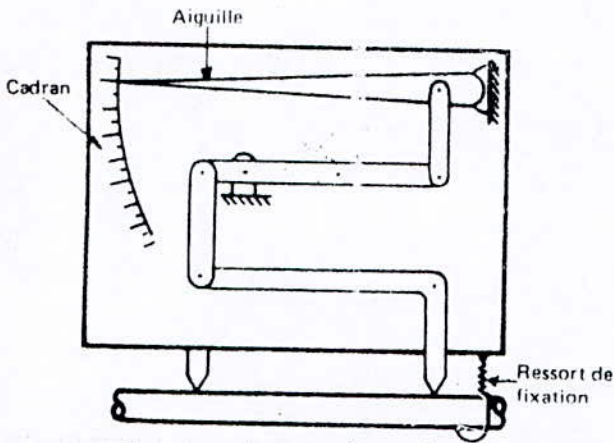


fig. 1 extensomètre à leviers

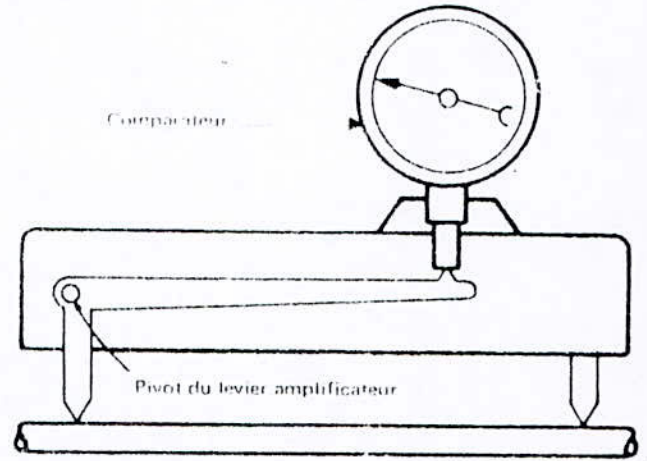


fig. 2 extensomètre à cadran

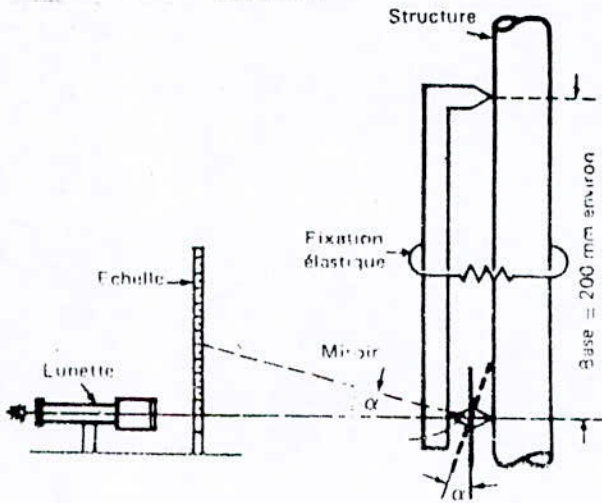


fig. 3 extensomètre optique Marten

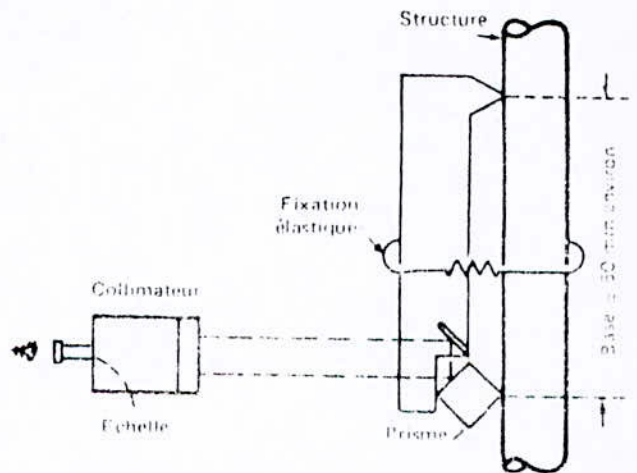


fig. 4 extensomètre optique Tuckerman

ou aussi par variation de phénomènes électriques (provoqués par déplacement du noyau d'un transformateur ou d'une plaque d'un condensateur); soit indirectement, en liant, à la structure, un dispositif qui subit les déformations de la structures en

influant sur un phénomène physique mesurable.

Parmi ces méthodes indirectes on cite :

-les vernis craquelants (ou la rupture de revêtements fragiles pour un seuil déterminé de déformation) : une structure est enduite d'une couche de vernis, ensuite elle est progressivement chargée et quand apparaissent des craquelures on peut conclure que les contraintes locales correspondent à certaines valeurs . Cette méthode n'est pas précise, néanmoins elle permet de localiser les régions les plus sollicitées par les contraintes et les directions principales de ces dernières (voir fig.5; 6).

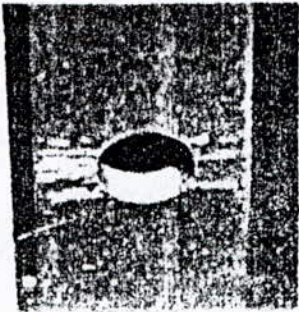


fig. 5 apparition des
craquelures

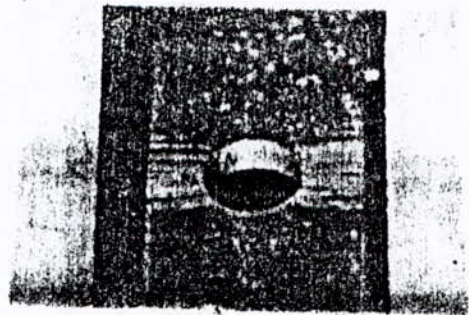


fig. 6 concentration des
craquelure

-la photoélasticité (ou l'effet de biréfringence accidentelle sur les matériaux transparents) : on réalise une reproduction plane de la structure à étudier, découpée dans un matériau photoélastique , ensuite on observe ce modèle par transparence, après l'avoir placé entre deux filtres polarisants , en le chargeant .On peut , aussi , recouvrir la structure réelle avec une mince couche de produit photoélastique (après l'avoir peint avec une peinture chargée de poudre métallique pour rendre la surface de la structure réfléchissante). On utilise deux filtres polarisants, l'un pour la lumière incidente sur la structure, l'autre pour la lumière réfléchie vers l'observateur (voir fig.7 et 8).

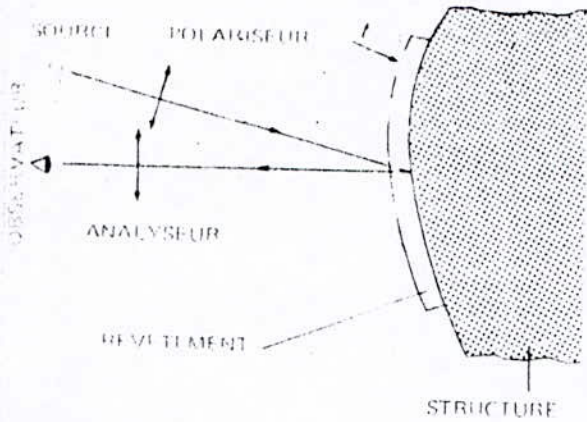


fig. 7 photoélasticimétrie
par réflexion

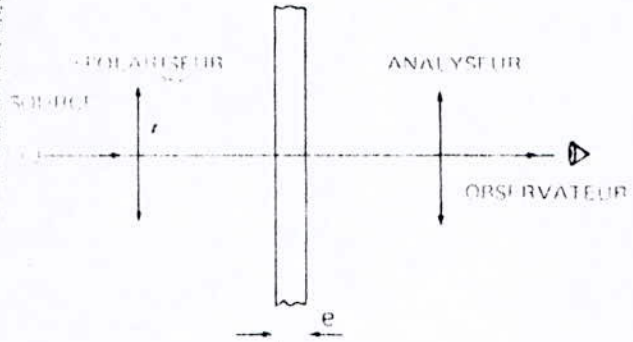


fig. 8 photoélasticimétrie
par transmission

-la méthode du Moiré: c'est une méthode de caractère purement géométrique et qui est semblable au principe du vernier. Cette méthode sert à déterminer expérimentalement le champ de déplacements ou le champ de déformations en utilisant deux trames, l'une de référence et l'autre fixé à la structure à étudier et après chargement, on superpose les deux trames et on pourra observer des franges correspondant aux déplacements ou déformations (voir fig. 9).

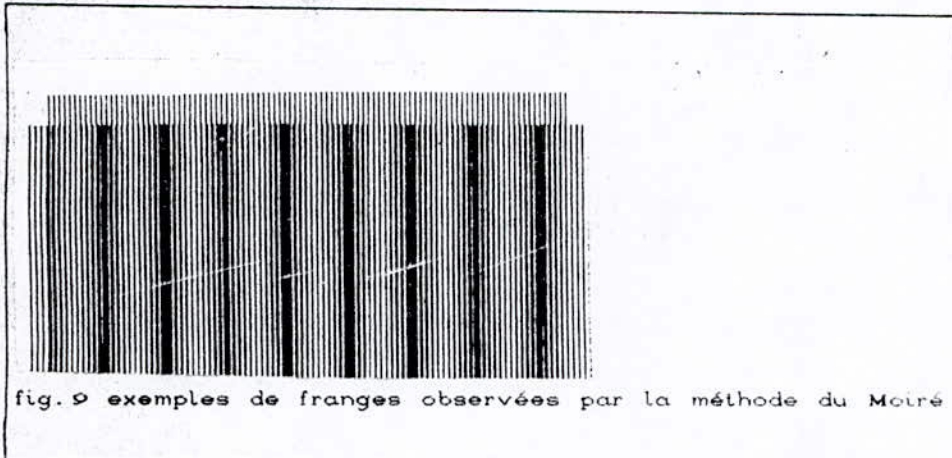


fig. 9 exemples de franges observées par la méthode du Moiré

-la méthode des jauges électrique d'extensométrie: cette méthode est basée sur la variation de la résistance d'un fil conducteur subissant les mêmes déformations que la structure à laquelle il est lié. Une jauge d'extensométrie est constitué, généralement d'un fil conducteur résistant fin positionné en grille sur une feuille isolante ,la jauge a deux pattes de sortie destinées à être soudées aux fils reliant la jauge aux instruments de mesure

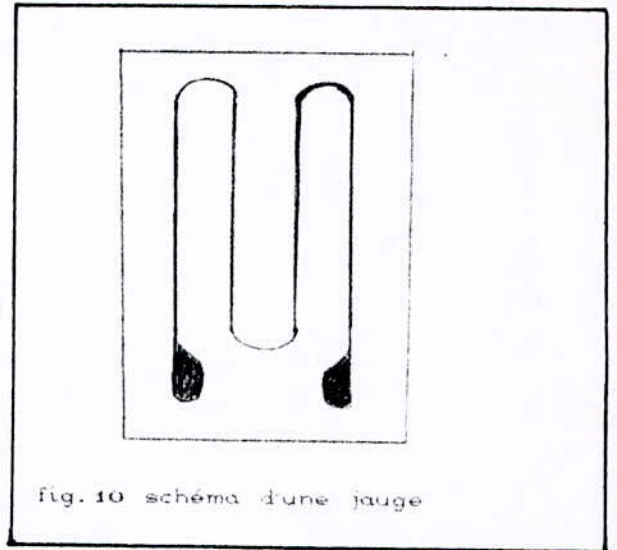
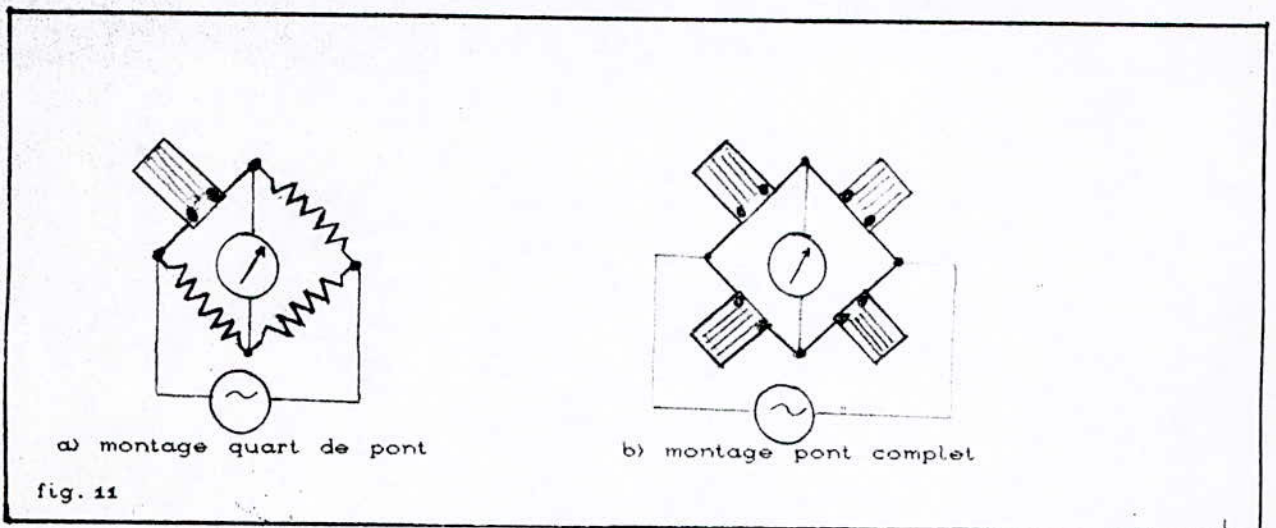


fig.10 schéma d'une jauge

(voir fig.10). La liaison des jauges aux instruments de mesure se fait de manière à avoir un pont de Weatstone qui est un dispositif très précis pour mesurer la variation d'intensité de courant (voir fig.11). Trois configuration de montage sont possibles pour les jauges: le montage en "pont complet " (avec 4 jauges),le montage en "demi-pont " (avec 2 jauges complétées par 2 résistances) et le montage en "quart-de-pont " (avec une seule jauge complétée par 3 résistances).



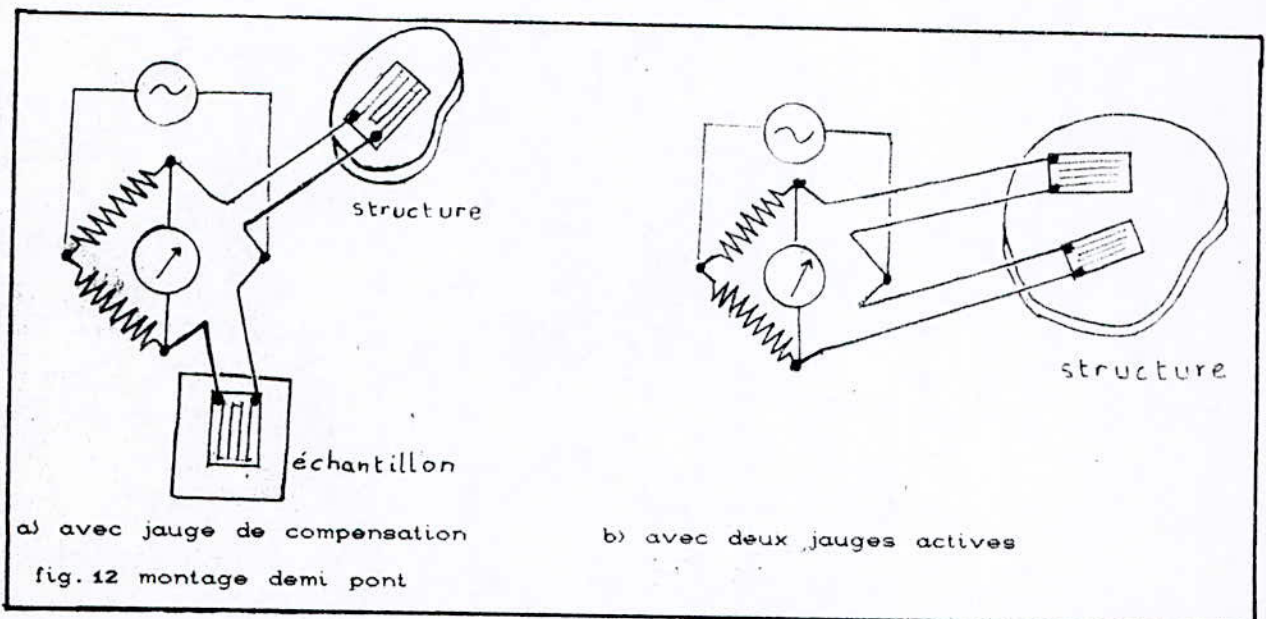
a) montage quart de pont

b) montage pont complet

fig. 11

Dans la configuration du demi-pont deux cas peuvent se présenter selon la disposition des jauges. Dans un cas on a une jauge active et une jauge de compensation: la jauge active

est collée à la structure et la jauge de compensation est collée sur un échantillon, de la même nature que la structure, ne subissant pas de chargement. De cette manière on peut mesurer une déformation dans une direction donnée tout en évitant les effets thermiques. Dans l'autre cas les deux jauges sont actives, i.e elles sont collées, à la structure, toutes les deux et elles subissent les déformations de la structure, mais il faut diviser la valeur mesurée par un facteur dit "de pont", ce facteur dépend de la manière avec laquelle sont orientées les jauges sur la structure. Il faut remarquer ici que la compensation est assurée par les deux jauges (voir fig.12)



II-2/ METHODE CHOISIE POUR LE PROJET

Pour la mesure des déformations, on a opté pour la méthode des jauges extensométriques. On a choisi des jauges ayant une résistance de " $120 \Omega \pm 0.35\%$ " et un facteur k dit "facteur de jauge" de " $1.98 \pm 1\%$ " [de marque HBM, type 3/120 LY 11].

Les jauges sont montées en demi pont avec la possibilité d'avoir les deux cas de cette configuration.

II-2-a/ Justification du choix:

Les jauges choisies, vûes leurs dimensions réduites, permettent

des mesures fines sur les éprouvettes subissant les essais, de plus leure étendue de mesure atteint 50000 μ déformations. Quand au type de montage choisi, il nous évite d'utiliser un grand nombre de jauges, tout en ayant la possibilité de faire de bonnes mesures; il nous permet, d'autrepart, de mesurer les déformations dans les directions principales, une à une. Par exemple on peut déterminer le coefficient de Poisson, en mesurant la déformation longitudinale et la déformation transversale de l'éprouvette subissant l'essai de flexion de poutre et en calculant, ensuite, le rapport de la déformation transversale à la déformation logitudinale.

II-2-b/ Mise en place d'une jauge:

- Après avoir repéré, sur une éprouvette, les points où devront être collé les jauges; on effétue les opérations suivantes:
- 1°/ on polie la surface de l'éprouvette, au début, avec du papier verre à gros grain.
 - 2°/ on polie ensuite, cette surface, avec du papier verre fin au carbure de silicium dans une direction perpendiculaire à la trace du polissage précédant.
 - 3°/ on essuie la zone polie avec des compresses imbibées de chlorothène N.U, jusqu'à ce que la dernière compresse réste propre
 - 4°/ on prend une jauge et un cosse-relais qu'on nettoie avec du freon TF, on positionne la jauge et le cosse-relais sur une surface propre, faces à coller en dessous.
 - 5°/ on prend de 10 à 12 cm de ruban adhésif transparent qu'on applique sur la jauge et le cosse-relais; ensuite on relève le ruban sous un faible angle pour éviter de détèriorer la jauge.
 - 6°/ on positionne la jauge à l'aide du ruban adhésif, sur l'éprouvette, selon des repères qu'on aura tracé avec un stylo à pointe sèche.
 - 7°/ on soulève un côté du ruban jusqu'à ce que la jauge et le cosse-relais soient libérés de l'éprouvette
 - 8°/ on dépose un goutté de colle (Z 70) à la limite du contact entre le ruban adhésif et l'éprouvette; on étale la colle avec un batônnet en téflon; on met le ruban adhésif à un angle faible par rapport à l'éprouvette; à l'aide d'une compresse, on étale le

ruban adhésif en une seule passe; on met, dessus, une feuille de téflon et on presse la jauge avec le pousse pendant deux minutes environ.

[Remarque: cette opération doit être effectuée le plus vite possible à cause de la rapidité de polymérisation de la colle]
9°/ après quelques minutes, on retire le ruban adhésif à un angle vif (180°).

10°/ on soude les fils de la jauge au cosse-relais avec un fil à souder étain-plomb à âme décapante, ensuite on y soude les fils électriques qui seront reliés à l'appareil de mesure.

11°/ finalement on applique un produit de protection sur la jauge.

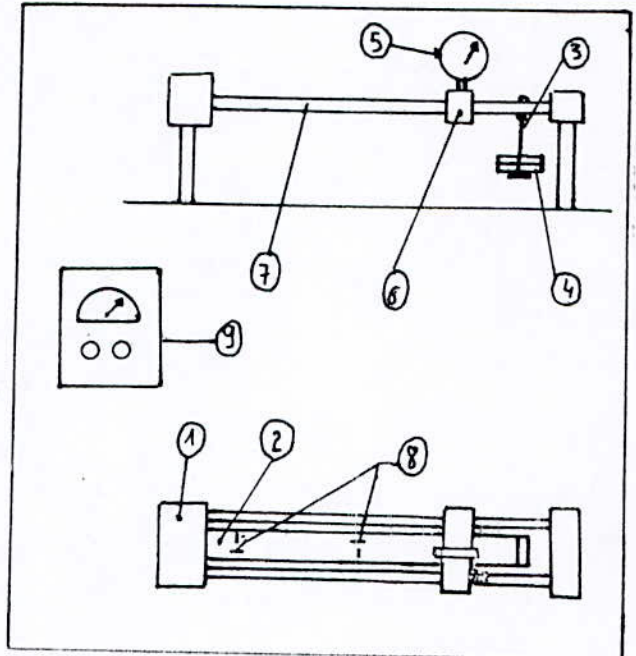
CONCEPTION ET REALISATION

III-1/ BANC DE FLEXION DE POUTRE

III-1-a/ Description du banc:

Le banc est destiné à faire des essais de flexion sur une éprouvette (poutre) de section rectangulaire.

l'éprouvette-2-, encastrée en-1-, est fléchiée par des masses -3-, accrochées en -4-; un comparateur-5-, supporté par -6-, libre de se déplacer sur les tiges -7-, mesure la flèche en chaque point de l'éprouvette; des jauges d'extensométrie -8- collées près de l'encastrement , et au milieu l'éprouvette , et reliées à l'appareil de mesure -9-, mesurent les déformations longitudinales et transversales de l'éprouvette déformée.

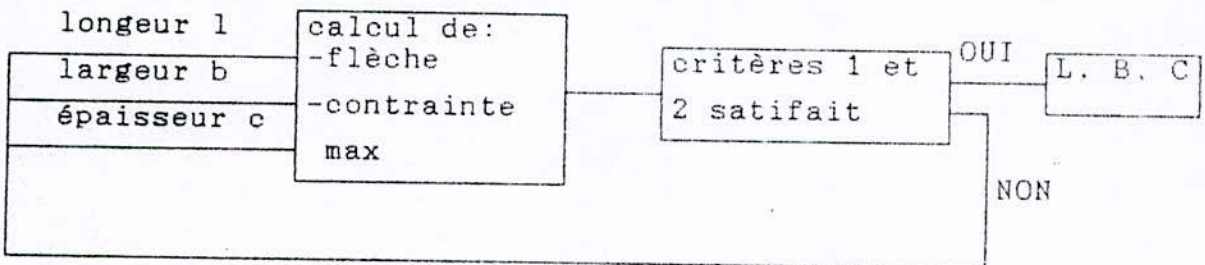


III-1-b/ Dimensionnement et réalisation de l'éprouvette:

Les dimensions de l'éprouvette sont choisit de tel sorte que :

- 1-la flèche max soit mesurable par le comparateur (0.01 à 10.00mm).
- 2-la contrainte maximale dans l'éprouvette soit inférieure à la moitié (1/2) de la containte de la limite élastique du materiau de l'éprouvette.

on a procédé donc suivant le diagramme ci-dessus:



L'éprouvette sera en fer plat de dimensions L=350 ;B=30 ;C=4 .
la charge adoptée est au maximum de 2kg, on fera les mesures
pour une charge maximum de 0.6kg .

- * réalisation:les étapes de réalisation de l'éprouvette sont :
- 1°/- découpage du fer plat de dimensions 50x5, aux dimensions
35x5x420.
 - 2°/-usinage sur la fraiseuse de l'éprouvette aux dimensions
30x4,2x403.
 - 3°/-récitification de l'éprouvette aux dimensions :
30x4.00x403.

III-1-c/ Choix des matériaux du banc:

a/ Support comparateur:(voir planche FLX 01 00)

Il est en fonte grise, car celle ci presente un bon coefficient
de frottement avec l'acier (0,12), et a une bonne usinabilité

b /Accroche masse :(voir même planche).

Il est en aluminium, pour son faible poid, et pour sa facilité
d'usinage .

C /Tiges de guidage:(voir même planche)

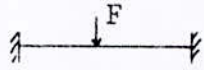
Pris d'un barreau en stubs calibré (tolérance:0,-0.01) car
il possède une grande rigidité, et ne nécessite pas beaucoup d'usinage

Il faut noter que le choix du matériau a été conditionné par
sa disponibilité dans l'atelier.

III-1-d/ Dimensionnement:

Sachant que la déformation des tiges influe directement sur
valeur de la flèche mesurée on ne dimensionnera que les tiges de
guidage les autres éléments sont surdimensionnés

-tiges de guidage:

En considérant que les tiges sont en encastées 
on trouve que la flèche maximale aux centre pour un poid de 1kg
pour chaque tige:

$$f = \frac{Fl^3}{192EI} :$$

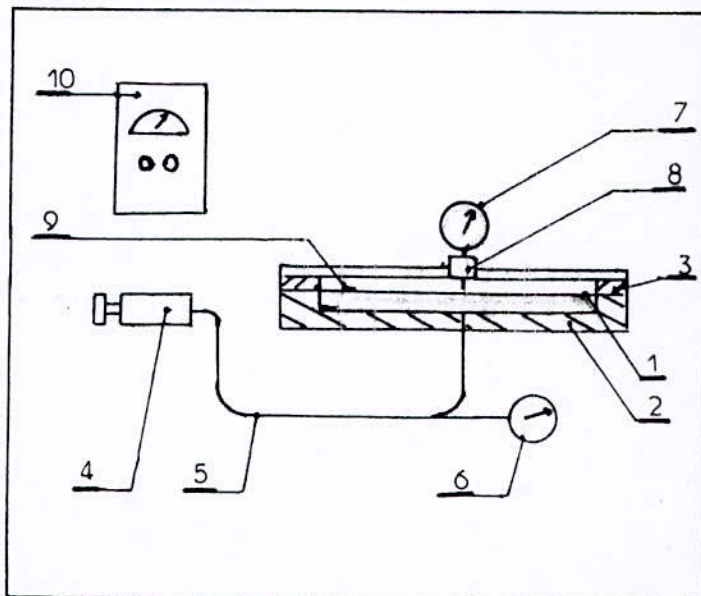
$f = 1 \text{ daN}$; $l=350$; $E=21000 \text{ daN}$; $i=\pi d^4/64$; $d=14$
 On trouve:
 $f=0.5 \cdot 10^{-2}$; valeur acceptable car elle est inférieure à 0.01
 (precision du comparateur).

III-2/ BANC DE PLAQUE

III-2-a/ Description du banc:

Le banc est destiné à faire des essais sur une plaque mince, circulaire, encastrée, soumise à une pression constante, et uniforme.

L'éprouvette-1-, est serré sur le bati-2-, par la bride -3-; le verin -4-, relié à l'évidement creusé dans le bati, par la canalisation -5-, génère une pression constante, mesurée par le manomètre -6-, dans l'évidement rempli d'huile. Sous cette pression l'éprouvette se déforme et un comparateur -7- , porté par le support -8-, mesure la flèche en chaque point du rayon de



l'éprouvette. Des jauges d'extensométrie -9- , collées sur l'éprouvette et reliées à l'appareil de mesure -10-, mesurent les déformations axiales et radiales de l'éprouvette déformée.

-caractéristiques du banc:

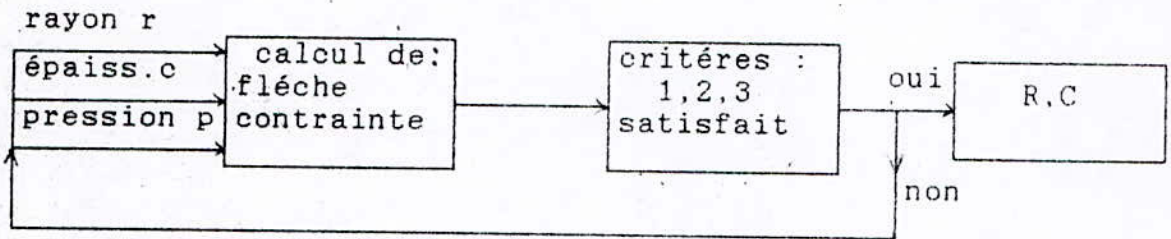
- * éprouvette: - diamètre 200 mm
- épaisseur maximale 12 mm
- * pression maximale: 1.5 bar

III-2-b/ Dimensionnement et réalisation de l'éprouvette:

les dimensions de l'éprouvette ont été déterminées en tenant compte des conditions suivantes:

- 1-flèche maximale comprise entre (0.01 et 10.00 mm)
- 2-pression maximale comprise entre (0.1 et 1.5 bar)

3-la contrainte maximale dans l'éprouvette soit inférieure à la moitié(1/2) de la contrainte de la limite élastique du matériau. on aura donc le schéma ci dessous.



l'éprouvette sera en inox de dimensions:

rayon R=100 mm
 épaisseur e = 1.5 mm
 pression max q = 0.6 bar

* réalisation: en tenant compte de l'encastrement R' = 135 mm, les étapes de fabrication de l'éprouvette sont:

1°/ découpage d'un carré de 280x280 à partir d'une tôle en inox de 1.5 mm d'épaisseur.

2°/ découpage d'un profil circulaire de diamètre 270 mm.

3°/ perçage des trous ϕ 8.5 en utilisant la bride comme guide de perçage: pointage avec un forêt de ϕ 8.2, perçage avec un forêt à centrer, perçage avec un forêt ϕ 6, perçage finition avec un forêt ϕ 8.5.

4°/ ébavurage avec une meule et une lime.

III-2-c/ Dimensionnement des vis de la bride:

La force totale provoquée par une pression maximale de P bars est donnée par:

$$F_t = P \pi a^2$$

pour a = 100 mm et P = 2 bars ; on trouve :

$$F_t = 628.32 \text{ daN}$$

on a choisi de fixer la bride par 6 vis, donc on a sur chaque vis

un force de traction exprimée par:

$$F = \frac{F_t}{6}$$

$$F = 104.72 \text{ daN}$$

la contrainte due à cette force de traction est donnée par

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi d_2^2}{2} \quad \text{, section du noyau de la vis}$$

cette contrainte doit vérifier:

$$\sigma < \frac{R_e}{\alpha}$$

avec R_e limite élastique et α coefficient de sécurité
les vis sont en XC 38 tel que: $R_e = 33 \text{ daN}$
et on a choisi $\alpha = 6$

on trouve $d_2 = 5 \text{ mm}$ d'où un diamètre de la vis $d = 6.466$, on prend
la valeur normalisée $d = 8 \text{ mm}$ (voir Chevalier: guide du
dessinateur), alors on a choisi des vis CHC M8.

III-2-d/ Calcul du verin: on calcule le volume d'huile
correspondant à la déformée de l'éprouvette d'où on déterminera la
course du piston, on donnera, à titre indicatif, l'effort auquel
est soumis le piston.

-calcul du volume déplacé: on a

$$V = \int_0^a U_z 2 \pi r dr$$
$$V = \frac{\pi q}{64 D} \left(\frac{1}{3} a^6 + \frac{8 c^2 a^4}{1-\nu} \right)$$

avec

$$d = \frac{2 E C^3}{3 (1-\nu^2)}$$

pour

$E = 21000 \text{ daN}$; $\nu = 0.3$; $c = 1.5/2 \text{ mm}$; $q = 0.6 \text{ bar}$; $a = 100 \text{ mm}$

$$V = 15155 \text{ mm}^3 = 15.2 \text{ cm}^3$$

-calcul de la course du piston et l'effort qu'il subit :

On a
 $V = \pi R^2 x \Rightarrow x = \frac{V}{\pi R^2}$

on aura $x = 21.44 \text{ mm}$

-L'effort subit par le piston est :

$$F = q \pi R^2$$

on aura $F = 4.24 \text{ daN}$

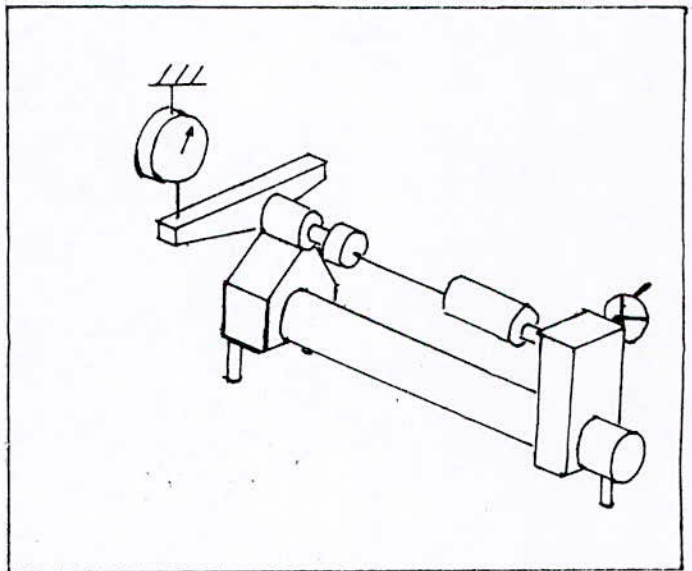
Remarque: même pour une pression de 2 bar l'effort subit par le piston reste faible (14 daN) par rapport au diamètre du piston et de sa tige (30 mm ; 14 resp.).

III-3/ BANC DE TORSION

Ce banc a nécessité juste une réparation à savoir l'usinage d'une clavette de guidage.

III-3-a/ Description du banc:

Ce banc est composé d'un arbre muni d'une longue clavette de guidage. Cet arbre est monté d'un côté dans un bati où est aussi monté un mandrin. Un levier, muni d'un niveau à bulle, est solidaire d'un mandrin et à ce levier est relié un dynamomètre pour mesurer les couples de torsion.



D'autre part, on a un coulisseau sur lequel est monté un autre mandrin dont le mouvement est contrôlé par une manivelle et repéré

par deux disques gradués: l'un en dixième de degré l'autre en degré.

III-3-b/ Préparation des éprouvettes: on a découpé deux éprouvettes l'une cylindrique de diamètre ϕ 8 mm l'autre carrée de côté 6 mm, toutes les deux ont une longueur de 480 mm.

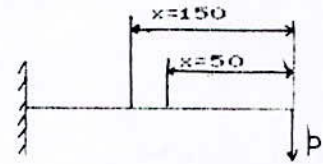
C H A P I T R E I V

E S S A I S

I V - 1 / E S S A I D E F L E X I O N

IV-1-a/ Calcul du module d'Young à partir de la flèche

On prendra des mesures de flèches en deux endroits de la (50-150), et on fera varier le poids (de 0-100...150 grs), on tracera ensuite la courbe $f = Y(P)$ (avec f mesurée pour x constant).



On déterminera après le module d'Young " E " en appliquant l' équation de la déformée de la poutre encastrée en flexion, soumise à une charge ponctuelle à son extrémité libre. On aura les resultats suivants.

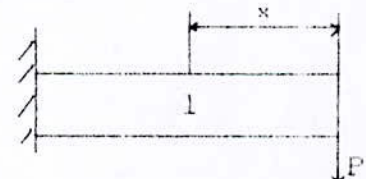
$x = 50$	Poids(gr)	f (mm)
	0	0
	100	0.70
	200	1.14
	300	1.60
	400	2.02
	500	2.52

$x = 150$	Poids(gr)	f (mm)
	0	0
	100	0.23
	200	0.48
	300	0.72
	400	0.96
	500	1.21

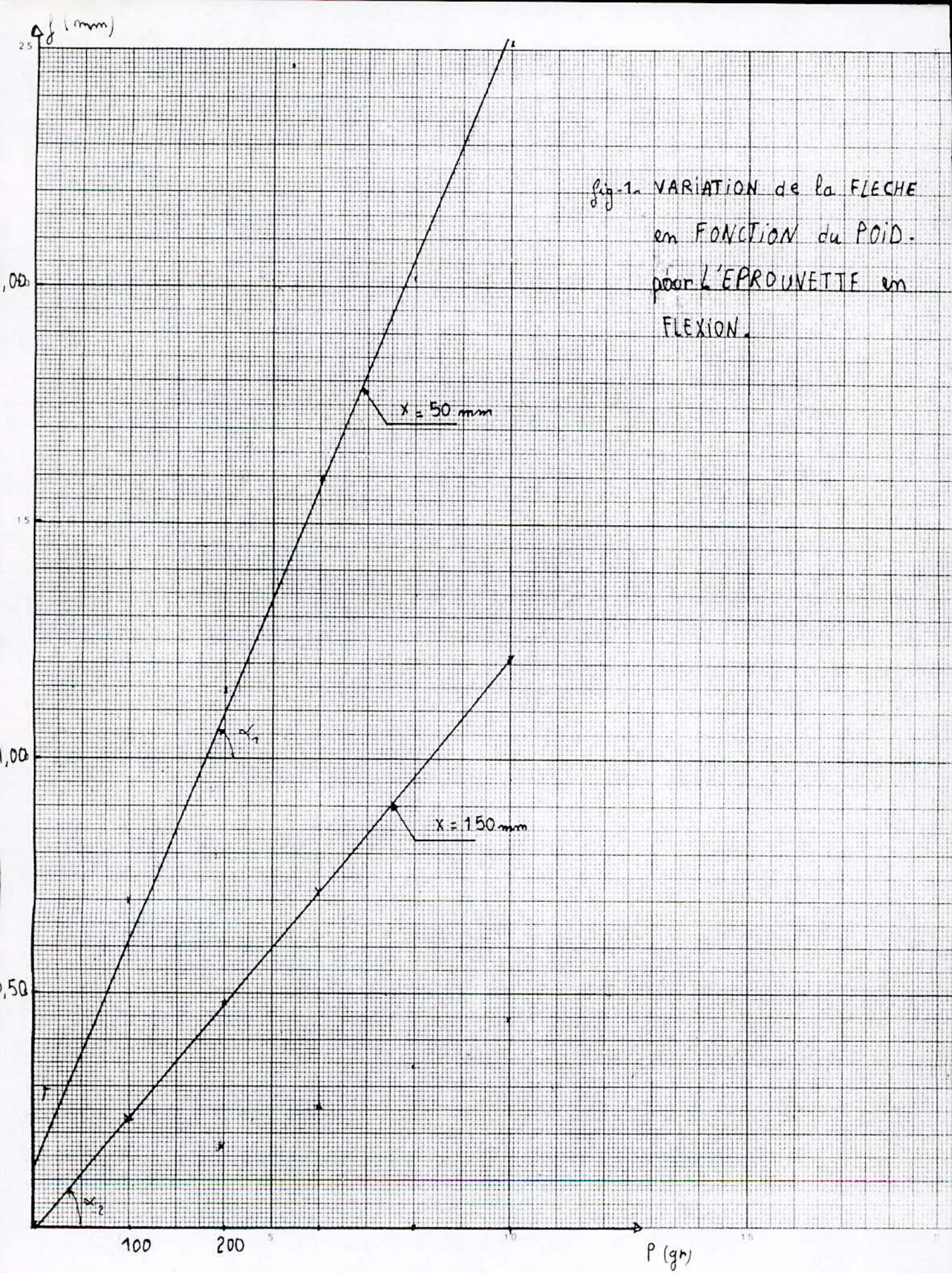
-l'expression de la flèche f en négligeant l'effet du poids est :

$$f = \frac{P}{6EI} (x^3 - 3l^2x + 2l^3)$$

$$\rightarrow f = A.P \text{ avec } A = \frac{1}{6EI} (x^3 - 3l^2x + 2l^3)$$



le tracé des deux graphes est d'allure linéaire, ce qui prouve



qu'on se trouve dans le domaine élastique, on en déduit alors le module d'Young.

$$\text{On a } \operatorname{tg} \alpha = A = \frac{1}{6EI} (x^3 - 3l^2x + 2l^3) \Rightarrow E = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \cdot 6EI} (x^3 - 3l^2x + 2l^3)$$

graphe 1 :

$$x_1 = 50 \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = 4.49 \text{ mm/kg} \quad E_1 = 15000 \text{ daN/mm}^2$$

graphe 2 :

$$x_2 = 150 \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = 2.42 \text{ mm/kg} \quad E_2 = 14684 \text{ daN/mm}^2$$

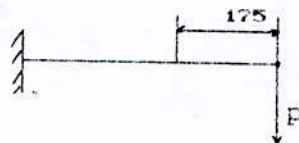
d'où

$$E_{\text{moy}} = (E_1 + E_2) / 2 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{moy}} = 15233 \text{ daN/mm}^2$$

IV-1-b/ Calcul du module d'Young à partir de la déformation
On procédera par la détermination du coefficient de poisson, puis, on déterminera le module d'Young.

On fera donc des mesures de déformation sur la poutre.

On enlèvera avant le comparateur pour éliminer toute perturbation.



calcul du coefficient de Poisson ν :

On fait un montage demi-pont avec jauge de compensation pour chaque jauge active, ensuite on mesure les déformations des deux jauges actives, on calcule après le coefficient de Poisson en faisant le rapport de la déformation radiale (ϵ_{33}) sur la déformation axiale (ϵ_{11}), les résultats obtenus sont :

$$\epsilon_{11} = 70 \text{ } \mu\text{m/m} \quad \epsilon_{33} = 20 \text{ } \mu\text{m/m}$$

$$\nu = \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \quad \nu = 0.285$$

calcul du module d'Young E ;

on mesurera les déformations de la poutre avec un montage demi-pont les déformations lues sur l'appareil (ϵ') seront divisés par le coefficient de pont (1- ν) pour obtenir la déformation

axiale ($\epsilon = \epsilon_{11}$).

On a obtenu les resultats suivant :

p(gr)	ϵ'_{11} ($\mu\text{m}/\text{m}$)	ϵ_{33} ($\mu\text{m}/\text{m}$)	ϵ_{33}	ν	E
50	5	5.49			
100	10		2,5	0,25	21875
200	19,5		5	0,286	25000
300	29,5		7,5	0,273	23864
400	35		10	0,278	24305
500	45		12,5	0,278	24305
600	55		15	0,273	23864

on trouve $\bar{\nu} = 0,273$; $\bar{E} = 23868 \text{ daN}/\text{mm}^2$.

allure de la courbe est linéaire (zone élastique) passant par l'origine, on en déduit donc le module d'Young " E "

Conclusion:

on préfère la deuxième méthode (extensometrie) qui est a priori la plus précise car d'une part les moyens utilisés sont plus précis, d'autre part la mesure de la flèche dans la première methode est perturbée par le comparateur qui agit sur l'éprouvette avec une force variable (en moyenne 1N).

IV-2/ ESSAI DE PLAQUE

L'essai consiste à charger la plaque avec une pression uniforme, en agissant sur la manivelle du verin .



On mesure la flèche en chaque point du diamètre de la plaque en agissant sur la tige filetée qui pour une rotation fait déplacer le support comparateur de 1.25 (pas du filetage). On notera la pression indiquée sur le manomètre .

Les résultats obtenues correspondent à la course totale du verin.

Le tracé ci-dessous correspond aux déformées théoriques et expérimentales pour une course totale de 25 mm .

La pression théorique correspondant à cette course est de 0.7 bar alors que la pression mesurée est de 0.6 bar, cette différence est due à la difficulté d'avoir un encastrement parfaitement rigide.

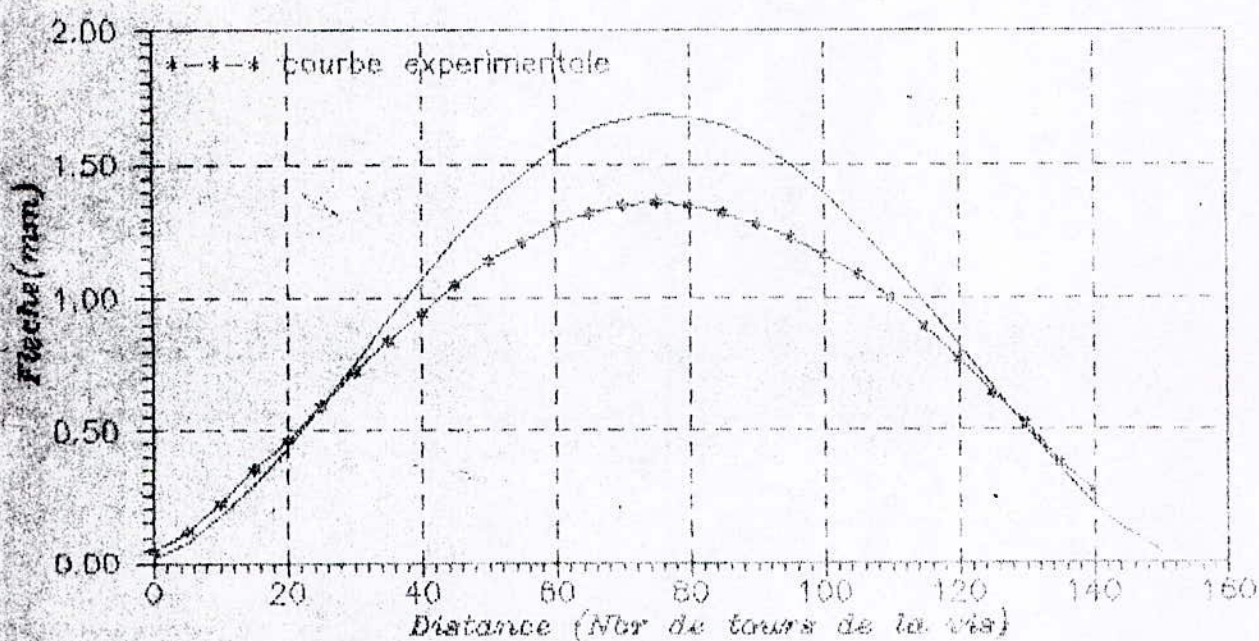


Fig. DEFORMEES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES DE LA PLAQUE CIRCULAIRE ENCASTREE SOUMISE A UNE PRESSION UNIFORME

VI-3/ ESSAIS DE TORSION:

Nous avons fait deux essais: l'un avec l'éprouvette cylindrique, (ϕ 8mm), l'autre avec l'éprouvette carrée (6mm x 6mm), toutes les deux sont en acier étiré de module de Young $E = 21000 \text{ daN/mm}^2$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

VI-3-a/ Eprouvette cylindrique: la longueur utile de l'éprouvette était de 400 mm.

Nous avons appliqué, au mandrin monté sur le coulisseau, une rotation $\Delta\theta$ de 0.4° à 2.8° avec un pas de 0.4° . A l'aide du dynamomètre nous ramenions le levier solidaire du deuxième mandrin au niveau horizontal et nous mesurons les moments de torsion. Nous reproduisons dans le tableau ci-dessous les valeurs théoriques et les valeurs mesurées des moments de torsion.

$\Delta\theta$ [$^\circ$]	M_t [mm daN] (théo.)	M_t [mm daN] (mesur.)
0.4	57	60
0.8	113	110
1.2	170	160
1.6	227	200
2.0	283	260
2.4	340	310
2.8	397	380

Nous remarquons que les valeurs mesurées sont proches des valeurs théoriques, ce qui nous permet de dire que le modèle théorique décrit assez bien le comportement de l'éprouvette. Les différences entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques sont dues à des erreurs de lecture sur le dynamomètre (qui est gradué de 20 en 20 mm daN) et le niveau à bulle.

VI-3-b/ Eprouvette carrée: la longueur utile est de 400 mm. nous avons appliqué une rotation $\Delta\theta$ de 0.8° à 5.6° avec un pas de 0.8° . Nous reproduisons, de même, un tableau des valeurs théoriques et des valeurs mesurées des moments de torsion.

$\Delta\theta$ [°]	M_t [mm daN] (théo.)	M_t [mm daN] (mesur.)
0.8	51	30
1.6	102	80
2.4	153	130
3.2	204	180
4.0	255	230
4.8	306	280
5.6	357	320

Dans ce cas aussi on peut dire que le modèle théorique décrit assez bien le comportement de l'éprouvette. Les différences entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques sont dues aussi à des erreurs de lecture, en plus de la difficulté de réaliser un bon encastrement de l'éprouvette dans les mandrins.

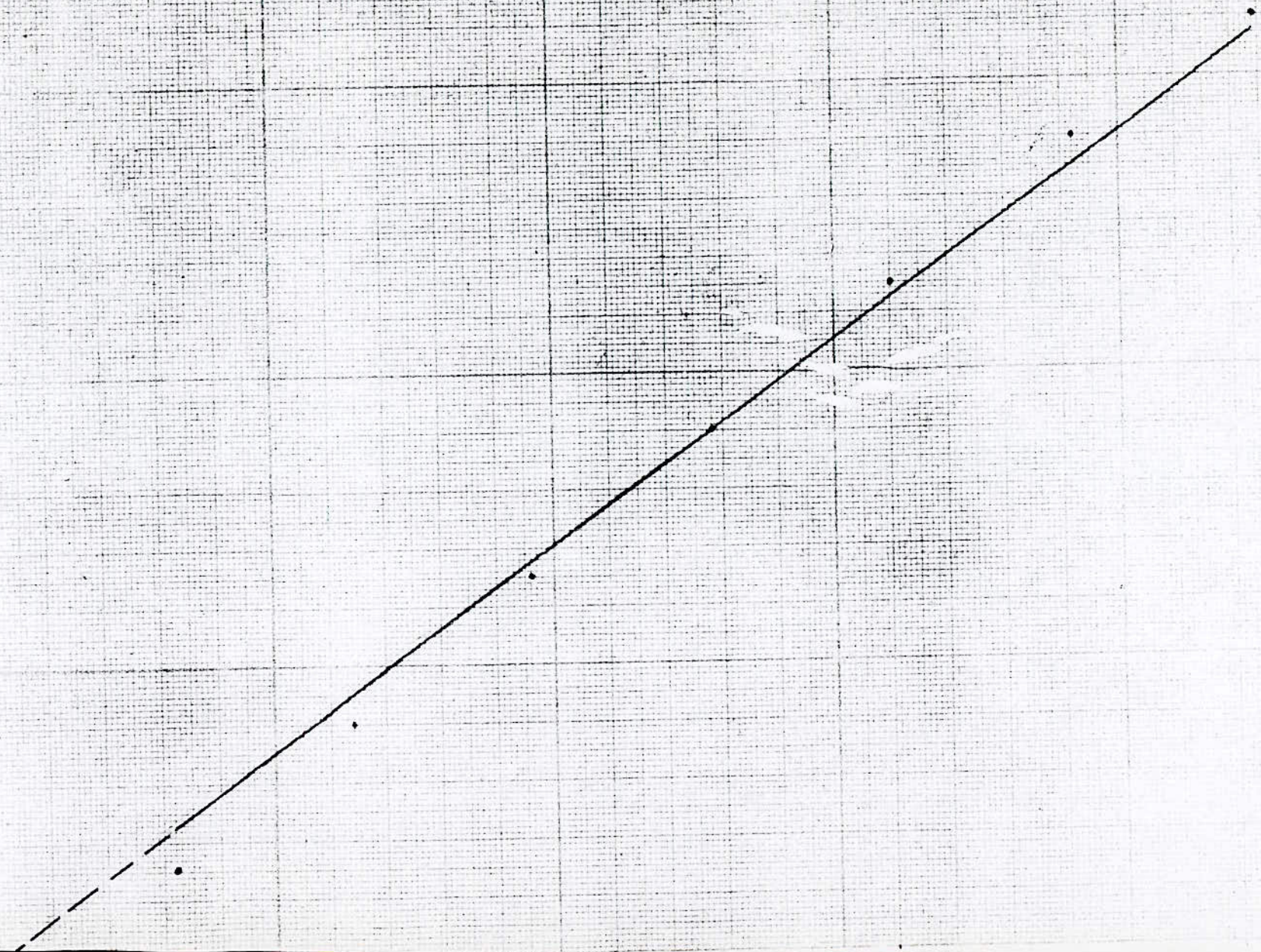
VARIATION DU MOMENT DE TORSION EN FONCTION
DE LA ROTATION D'UNE EXTREMITÉ DE
L'ÉPROUETTE CARREE: 6x6

M_t [mm.dal]

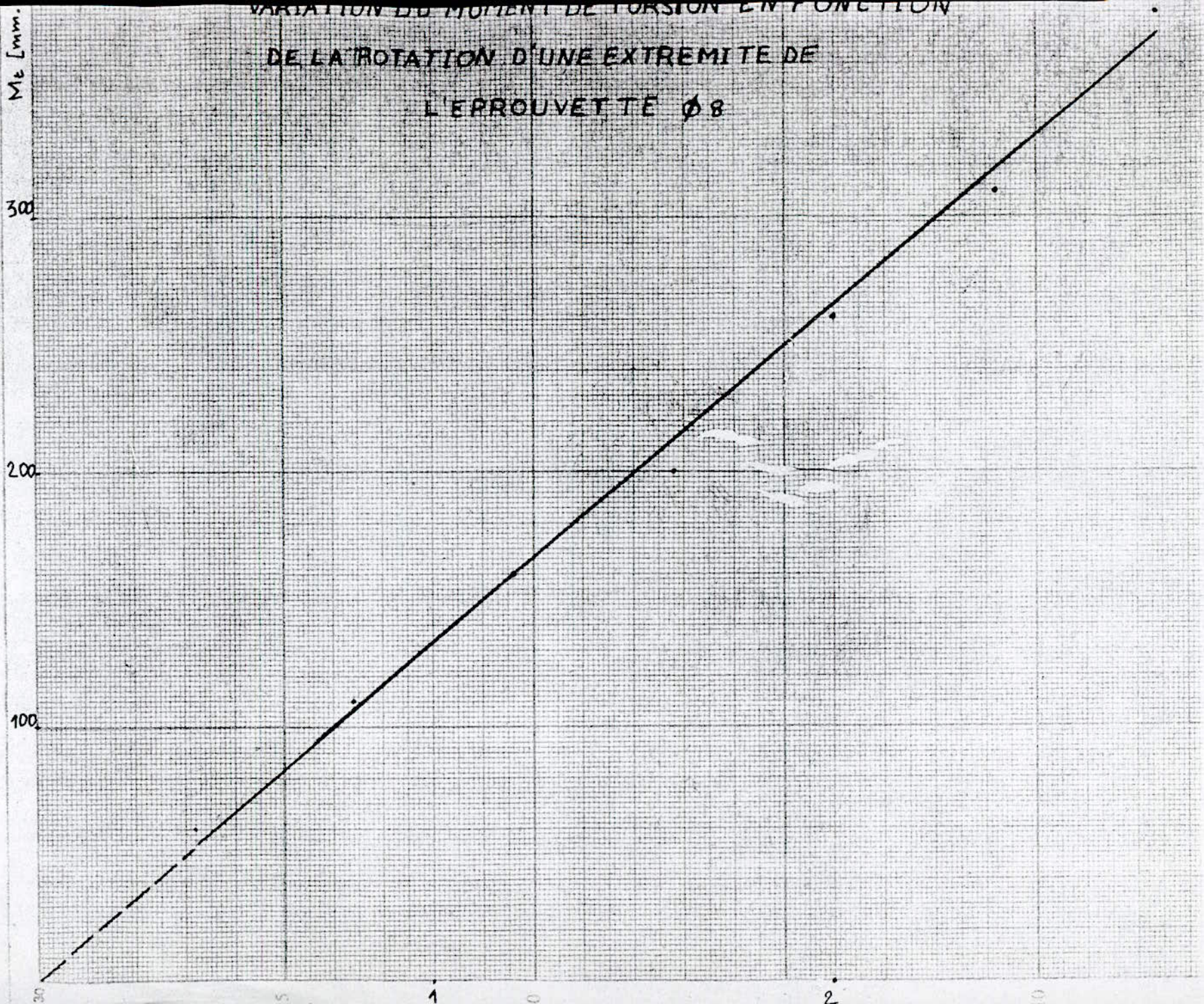
300.

200.

100.



VARIATION DU MOMENT DE TORSION EN FONCTION
DE LA ROTATION D'UNE EXTREMITÉ DE
L'EPROUVETTE Ø 8



C O N C L U S I O N

Nous nous sommes fixé, au début du projet, comme objectif: la réalisation de bancs utilisables pour des essais ou des TP de mécanique des milieux continus, avec introduction de la méthode de mesure de déformations par des jauges extensométriques.

Les résultats des essais que nous avons effectué sur les bancs sont proches des modèles théoriques des différentes éprouvettes sollicitées; d'autrepart ces essais nous permettent de caractériser les matériaux des éprouvettes

Nous souhaitons que ce travail ait une suite à travers une amélioration ou l'introduction d'une nouvelle méthode d'analyse des contraintes pour confronter les résultats que nous avons obtenus.

A N N E X E

Pour un problème à symétrie axiale, les équations de l'élasticité linéaire sont exprimées comme suit:

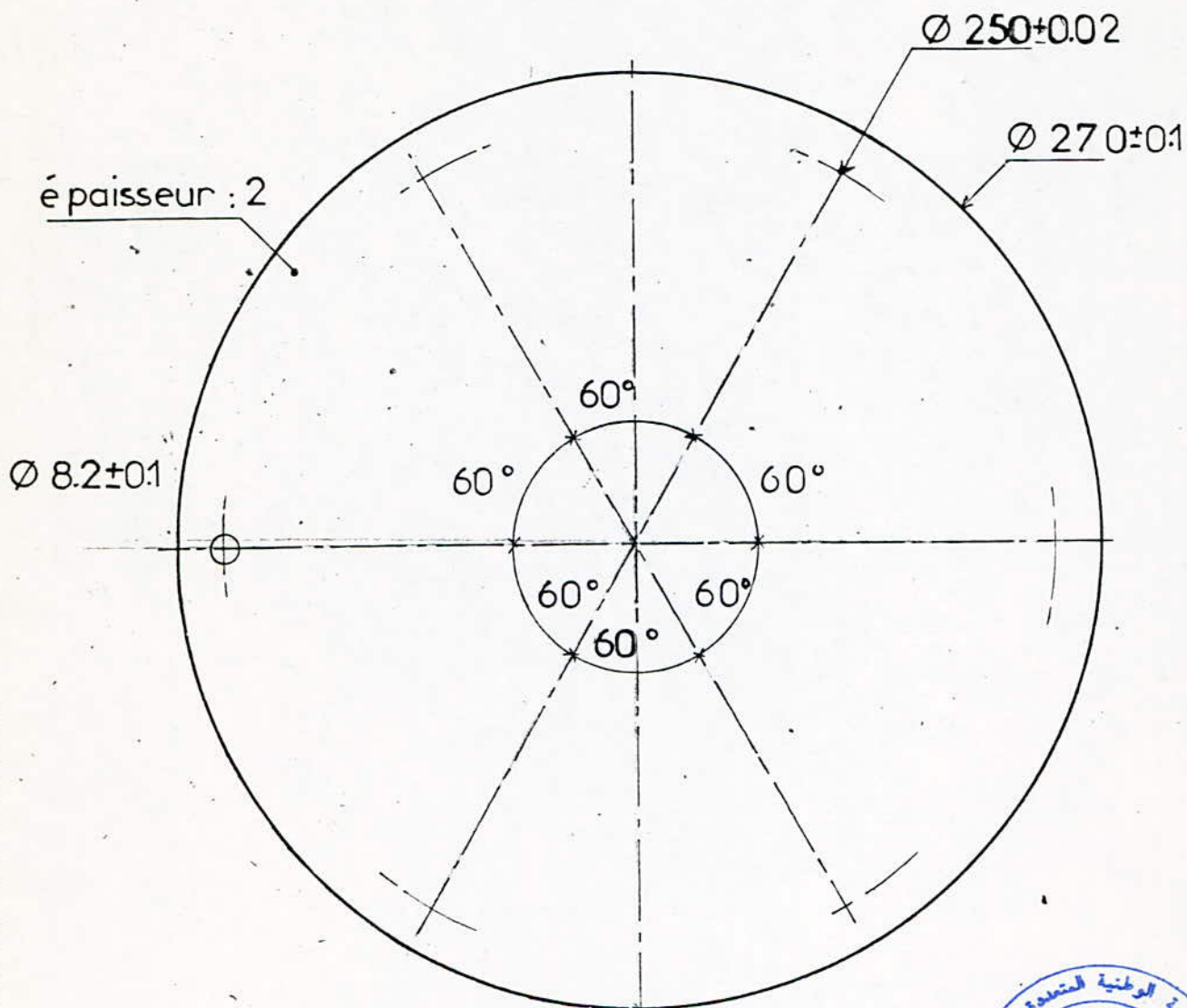
-équations d'équilibre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{array} \right.$$

-équations de compatibilité:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = 0 \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \\ \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$\theta = \text{trace}(\bar{\epsilon})$



Tolérance sur angles ± 0.1

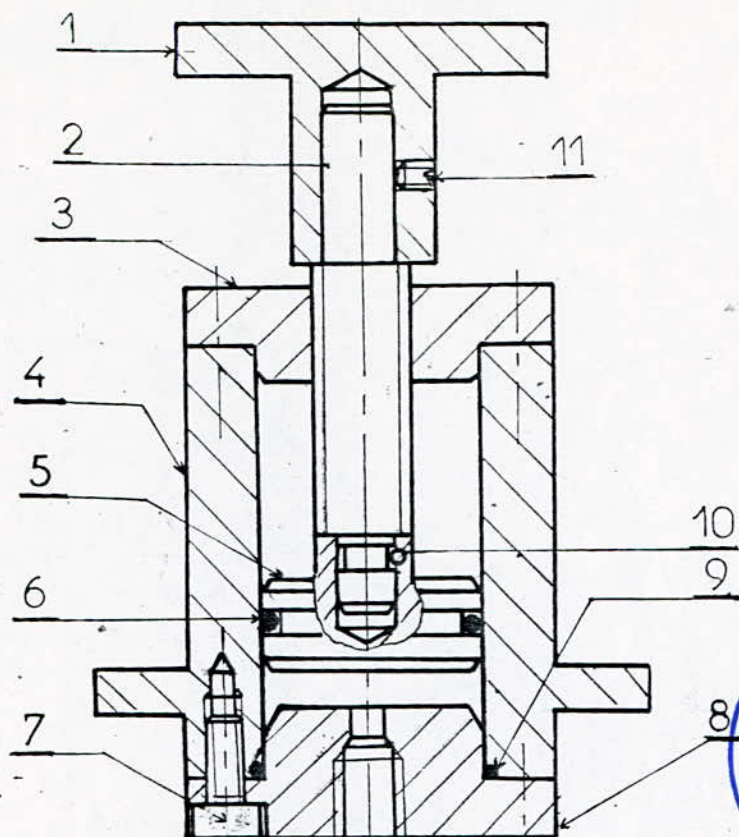
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Echelle	Masse	
1:2		
Etudiants	Saïdi	
	Mecheri	
Promoteurs	Bel kacemr	
	Guengueb	
Prés. jury		

EPROUVETTE

ENP
Dep. Mécanique

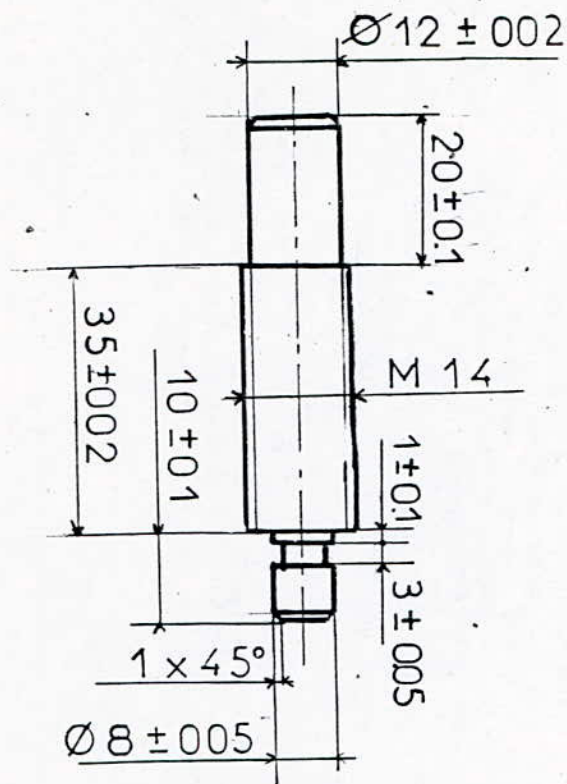
PLA. 02.03



11		Vis sans tête fendue M4	1			
10		Goupille 2x11	1			
9		Joint torique 30x2.7				
8	PLA020406	Chapeau	1			
7		Vis CHc M5 10	8			
6		joint torique 26x2.7	1			
5	PLA020405	Piston				
4	PLA020404	Cylindre	1			
3	PLA020403	Couvercle	1			
2	PLA020402	Axe fileté	1			
1	PLA020401	Poigné	1			
Rp	N°dessin	Designation	Nb	unit	total	Mat. Observ.
				Masse		

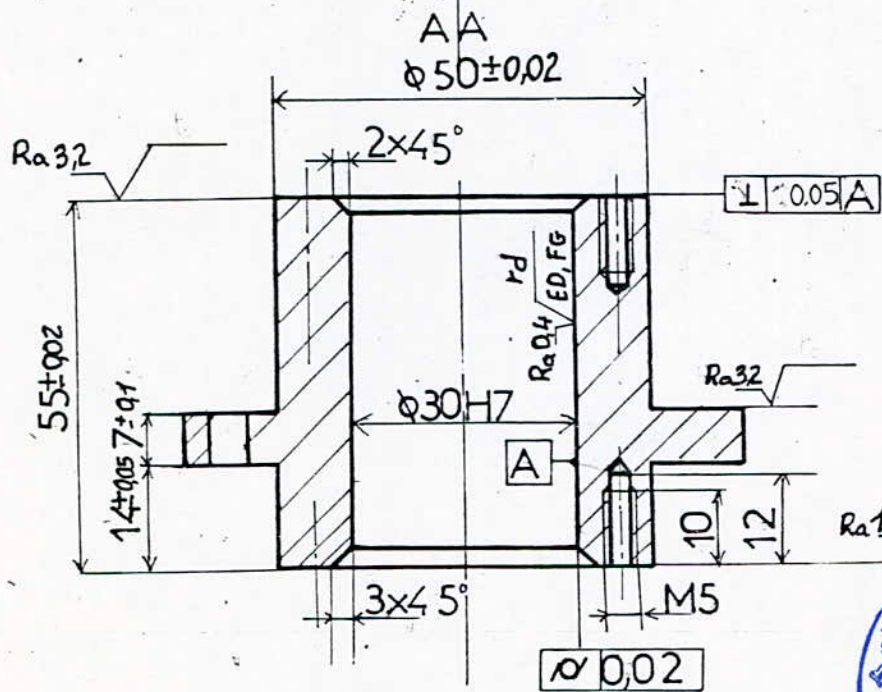
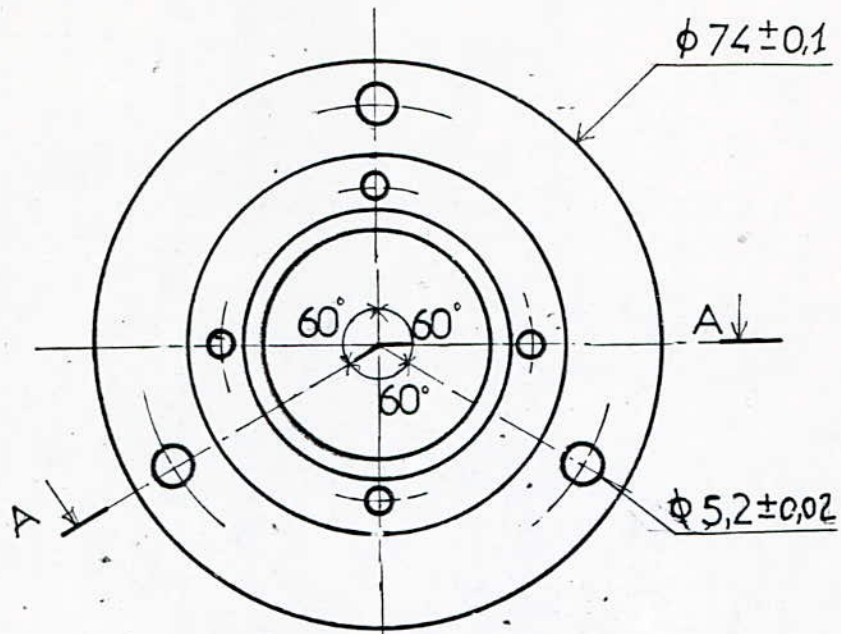
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Echelle	Masse		<h2>VERIN</h2>	<h2>ENP</h2>
1:1				
Etudiants	Saïdi			Dep. Mécanique PLA.02.04.00
	Mecheri			
Promoteurs	belkacemi			
	Guergueb			
Pres. jury				



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Echelle	Masse		AXE FILETE	ENP Dep Mecanique
1:1				
Etudiants	Saidi		XC 38	FLA.02.04.02
	Mecheri			
Promoteurs	bel kacemi Guergueb			
Pres jury				



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Echelle	Masse	
Etudiants	Mecheri	
	Saïdi	
Promoteurs	belkacem	
	Guengueb	
Pres jury		

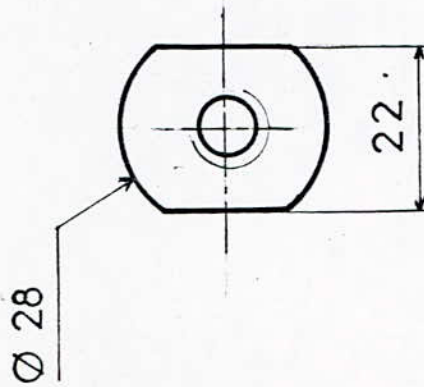
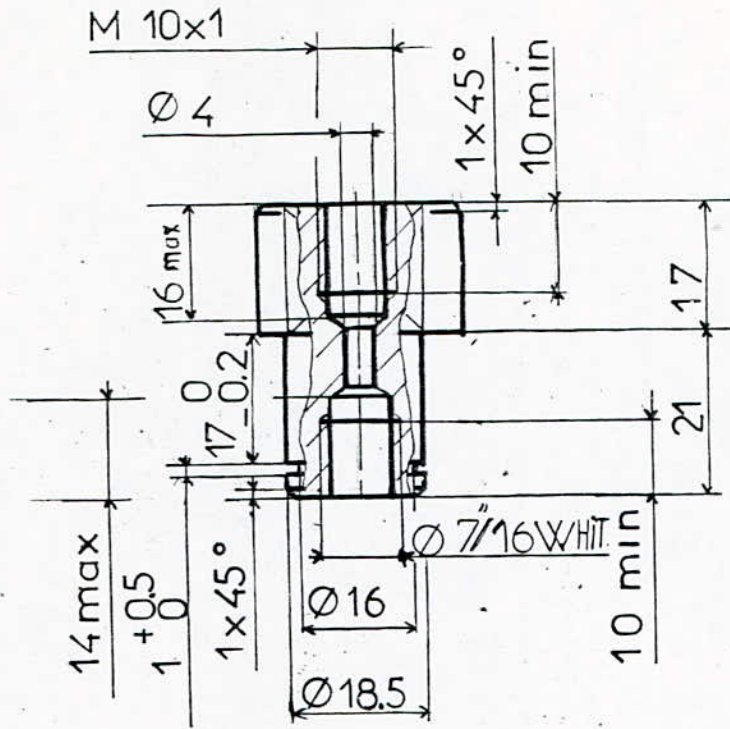
CYLINDRE

XC 38

ENP

Dep Mecanique

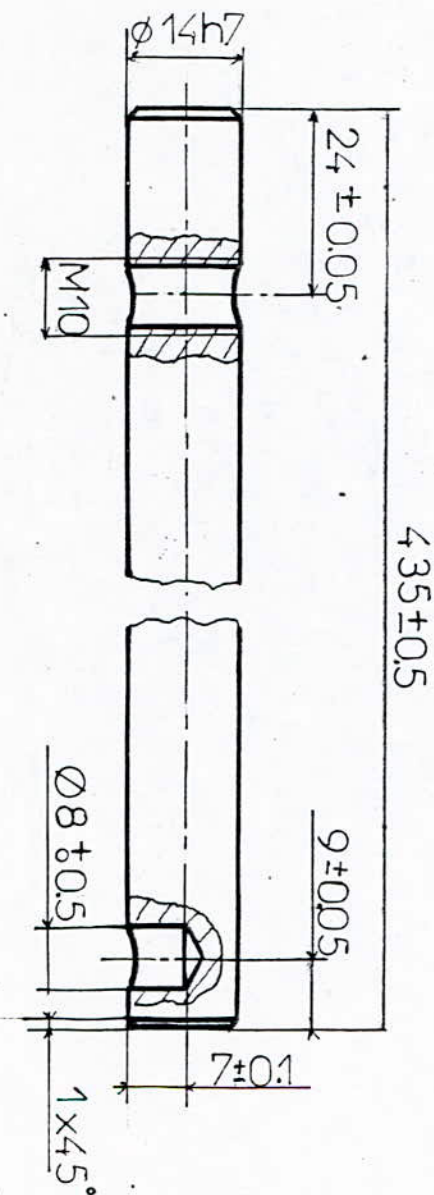
PLA.02.04.04



Tolérance générale : ± 0.1

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

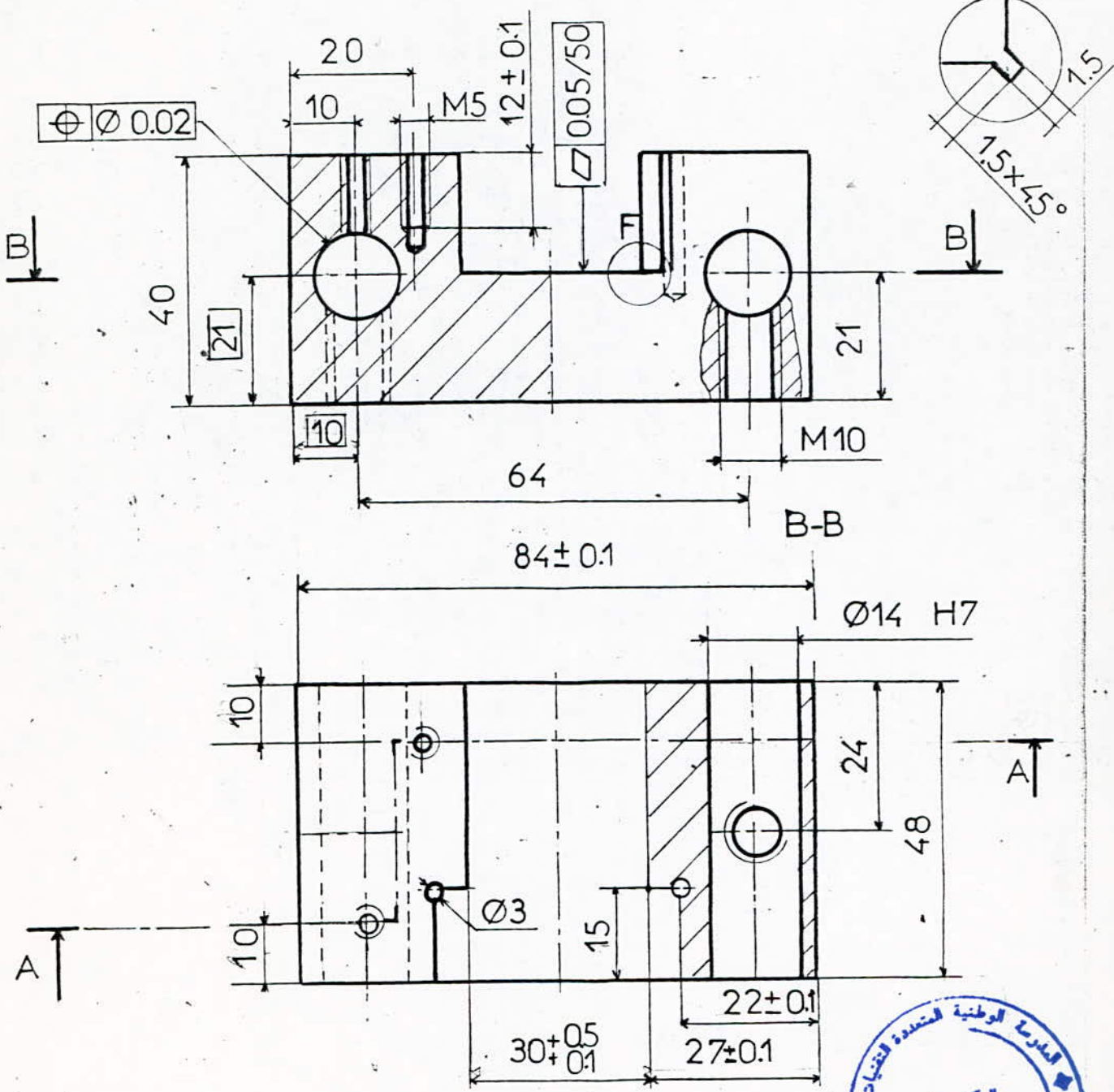
Echelle	Masse		PORTE MANOMETRE	ENP Dep. Mécanique
1:1				
Etudiants	Saidi Mecheri		XC 10	PLA.02.05
Promoteurs	bel kacemi Guergueb			
Pres jury				



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE				
Echelle	Masse		TIGE de GUIDAGE	ENP Dép. Mécanique
1:1				
Etudiants	Saidi			
	Mecheri			
Promoteurs	Belkacemi			
	Guengueb			
Pres jury			STUBS	FLX.01.01

A-A

F échelle 2:1

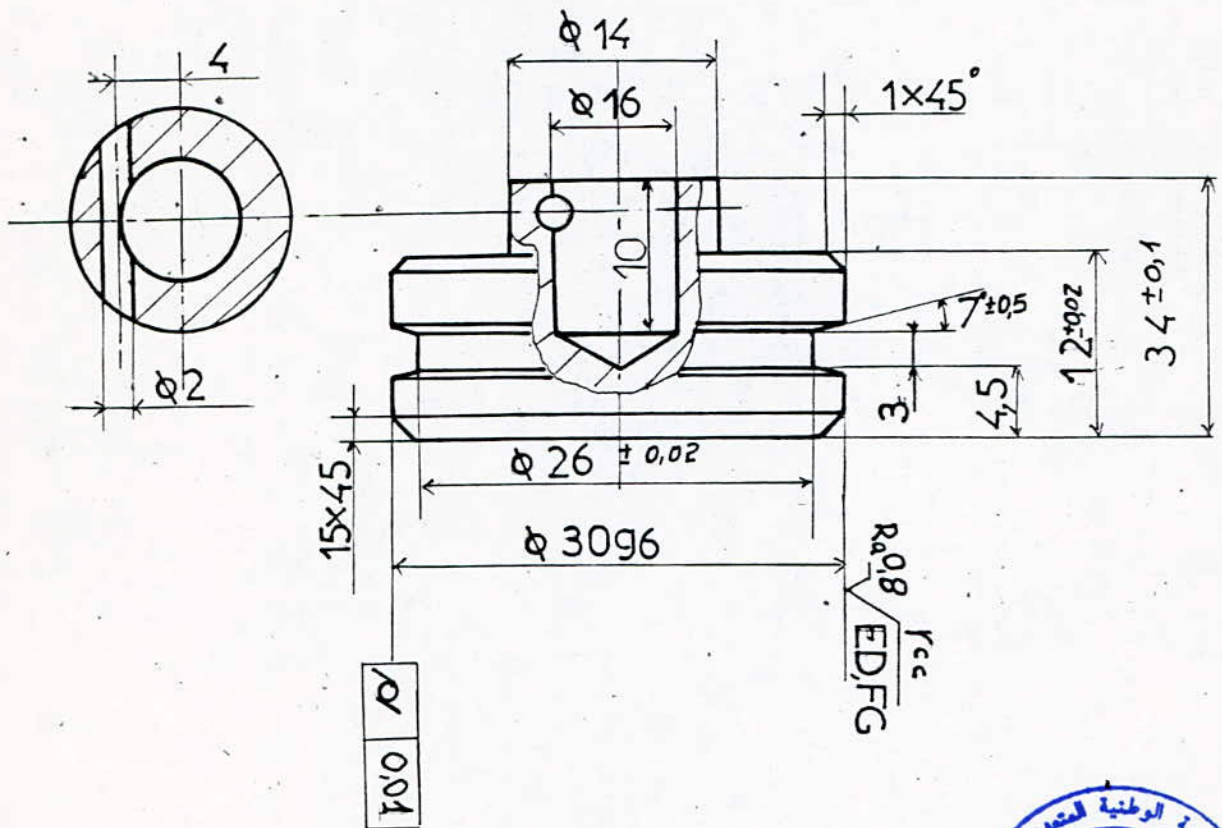


Tolérance générale ± 0.02
 etat de surface générale $16\sqrt{fr}$



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

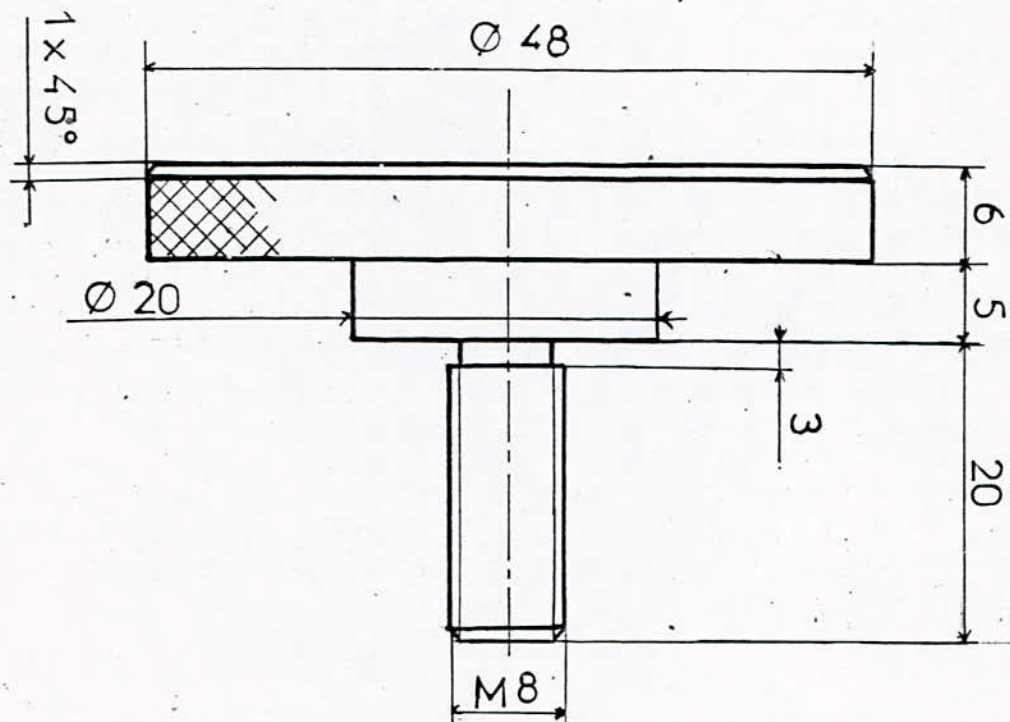
Echelle	Masse		ENCASTRMENT	ENP
1:1				
Etudiants	Mecheri		XC 38	Dep.Mecanique
	Saidi			
Promoteurs	belkacemi			
	Guergueb		FLX.01.02	
Pres. jury				



Tolérance générale: ± 0.1
 Etat de surface générale: $3.2 \sqrt{10}$

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Echelle	Masse		PISTON	ENP Dep. Mécanique
2:1				
Etudiants	Saïdi		XC 38	PLA.02.04.05
	Mecheri			
Promoteurs	belkacemi			
	Guergueb			

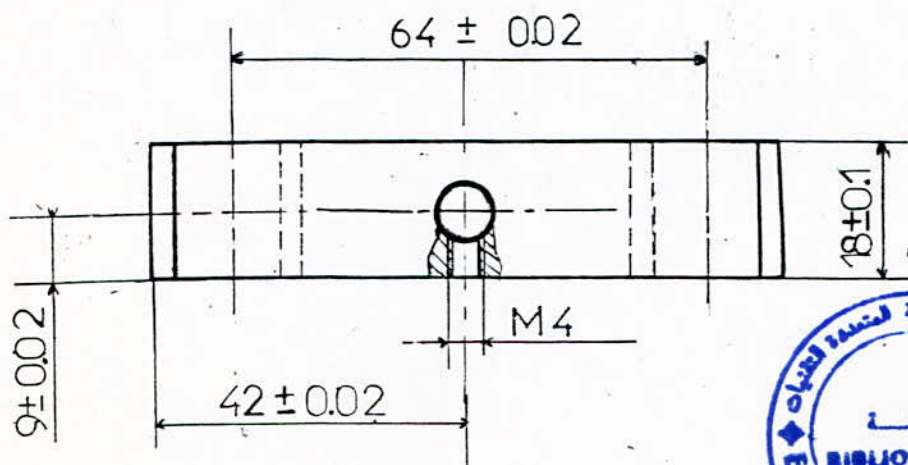
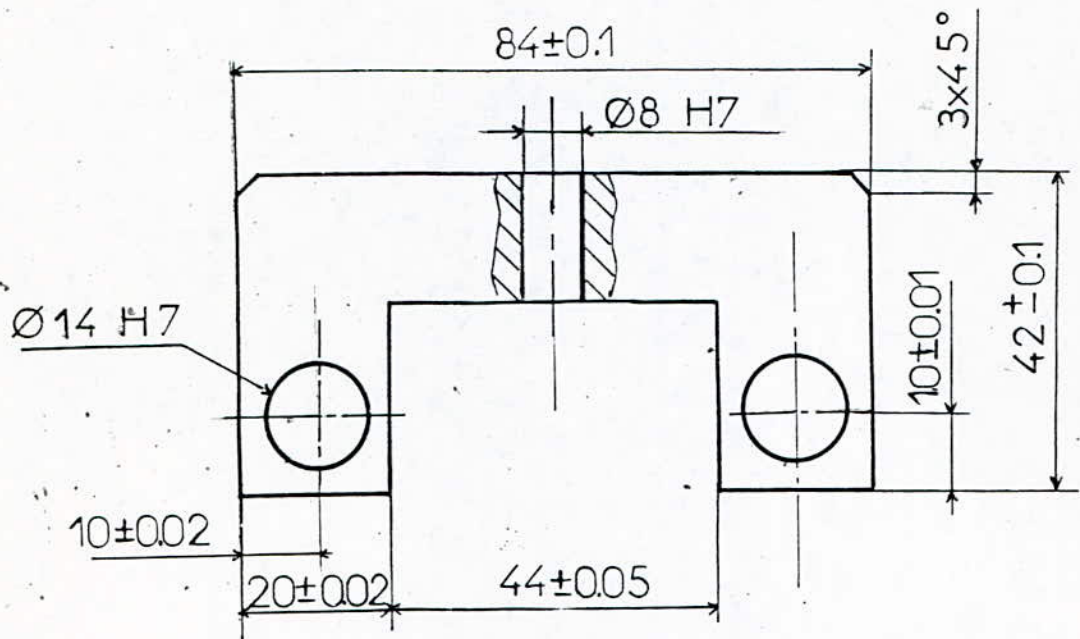


Tolérance générale: ± 0.05



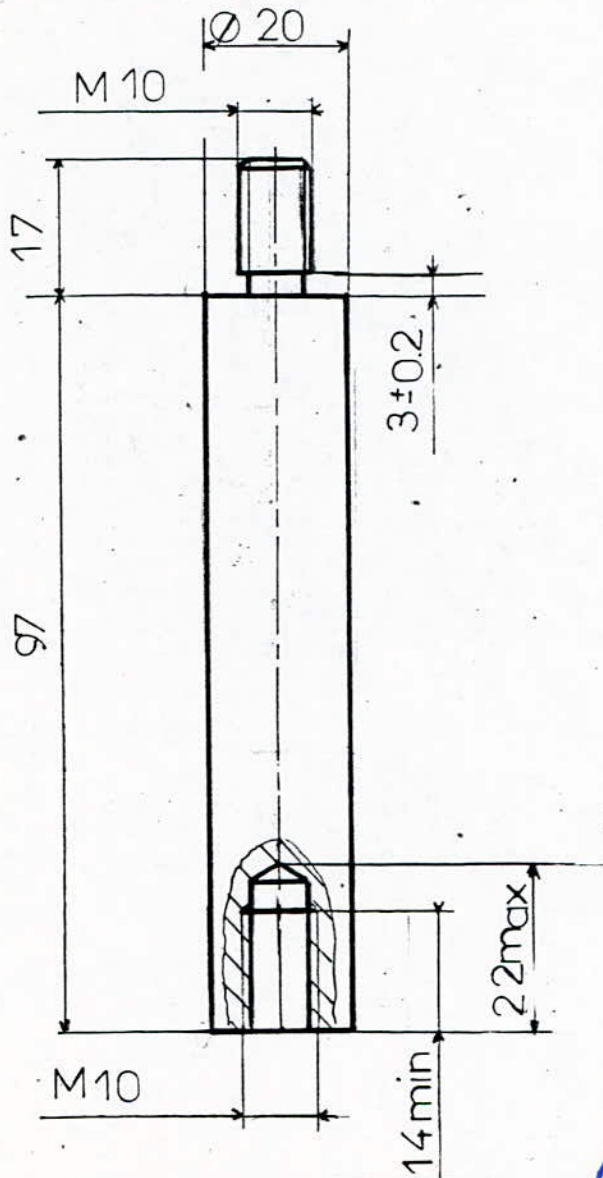
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Echelle	Masse		<p>VIS de PRESSION</p>	<p>ENP Dep. Mécanique</p>
2:1				
Etudiants	Saïdi		<p>XC_38</p>	<p>FLX.01.05</p>
	Mecheri			
Promoteurs	belkacemi			
	Guergueb			
Pres. jury				



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

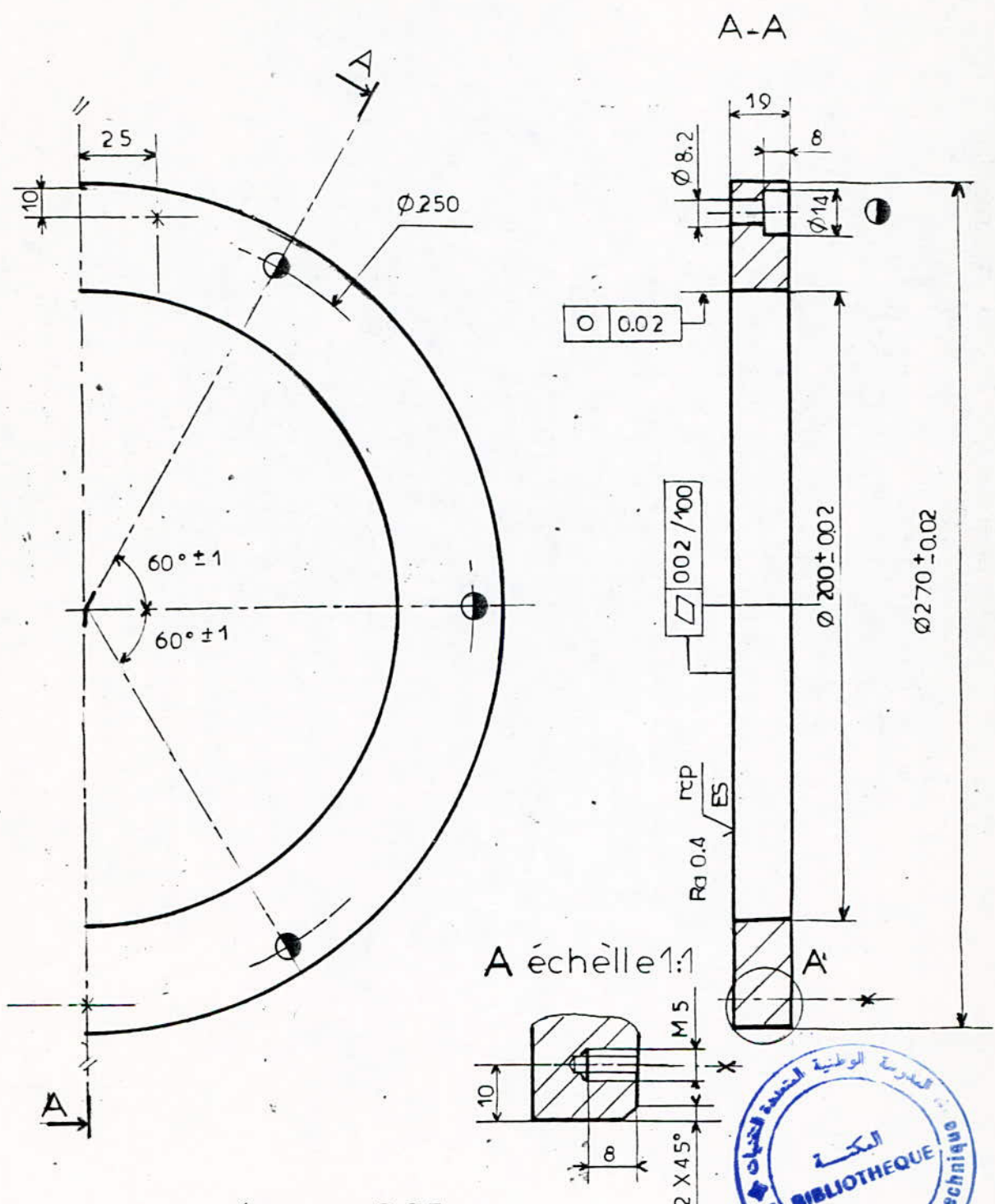
Echelle	Masse		PORTE COMPARATEUR	ENP Dép. Mécanique
1:1				
Etudiants	Saidi		F10	FLX.01.08
	Mécheri			
Promoteurs	Belkacem			
	Guergueb			
Pres Jury				



Tolerance générale ± 0.02

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

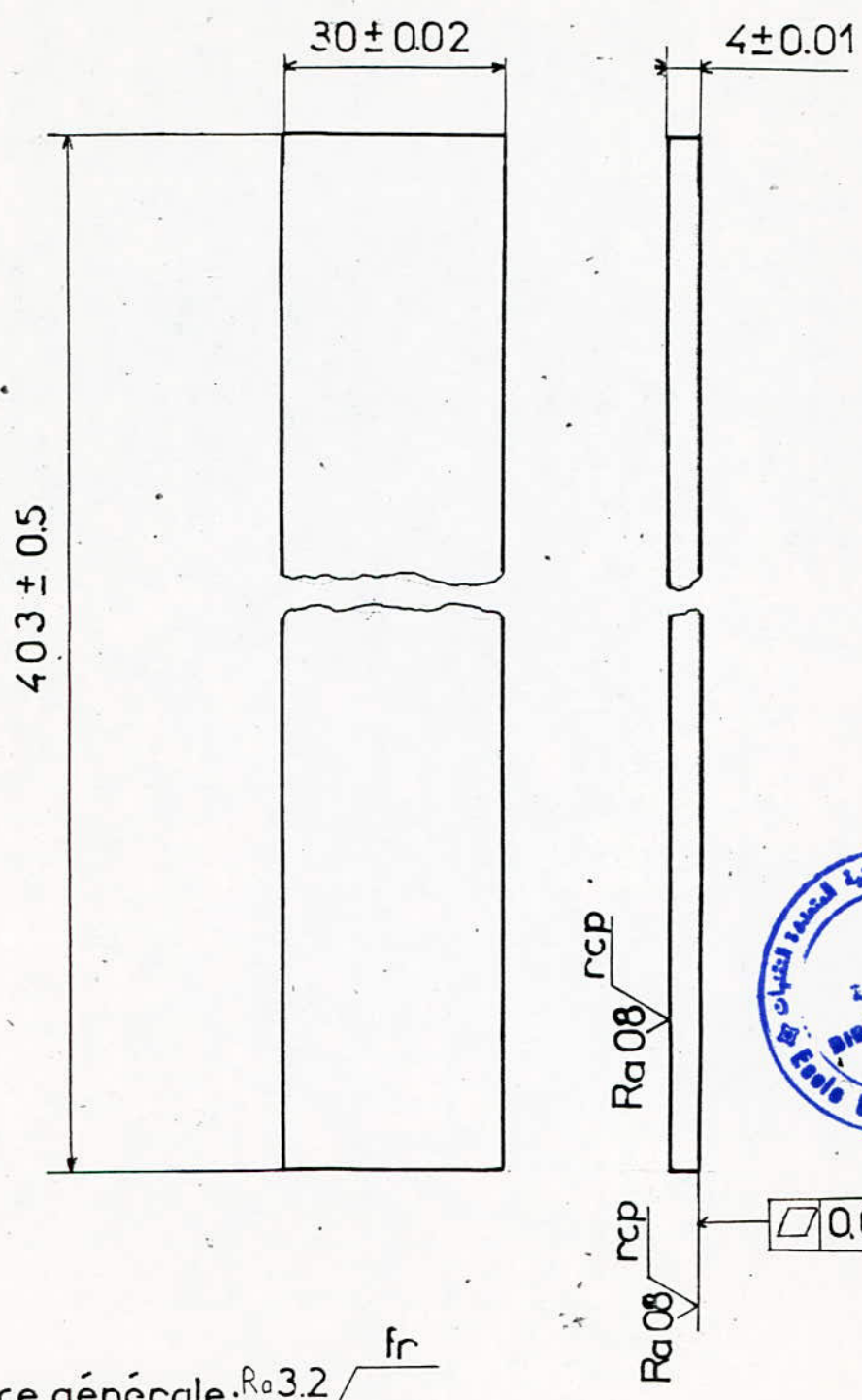
Echelle	Masse		PIED D'encastrement	ENP Dep. Mecanique
1:1				
Etudiants	Mecheri		XC 10	FLX.01.07
	Saïdi			
Promoteurs	belkacemi			
	Guergueb			
Pres jury				



Tolérance: générale ± 0.05

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Echelle	Masse		BRIDE	ENP Dép. MECANIQUE
1:2				
Etudiants	Saidi		Ft 25	PLA.02.02
	Mecheri			
Promoteurs	BELKACEMI			
	Guergueb			
Pres jury				



Etat de surface générale: $Ra3.2 \sqrt{fr}$

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

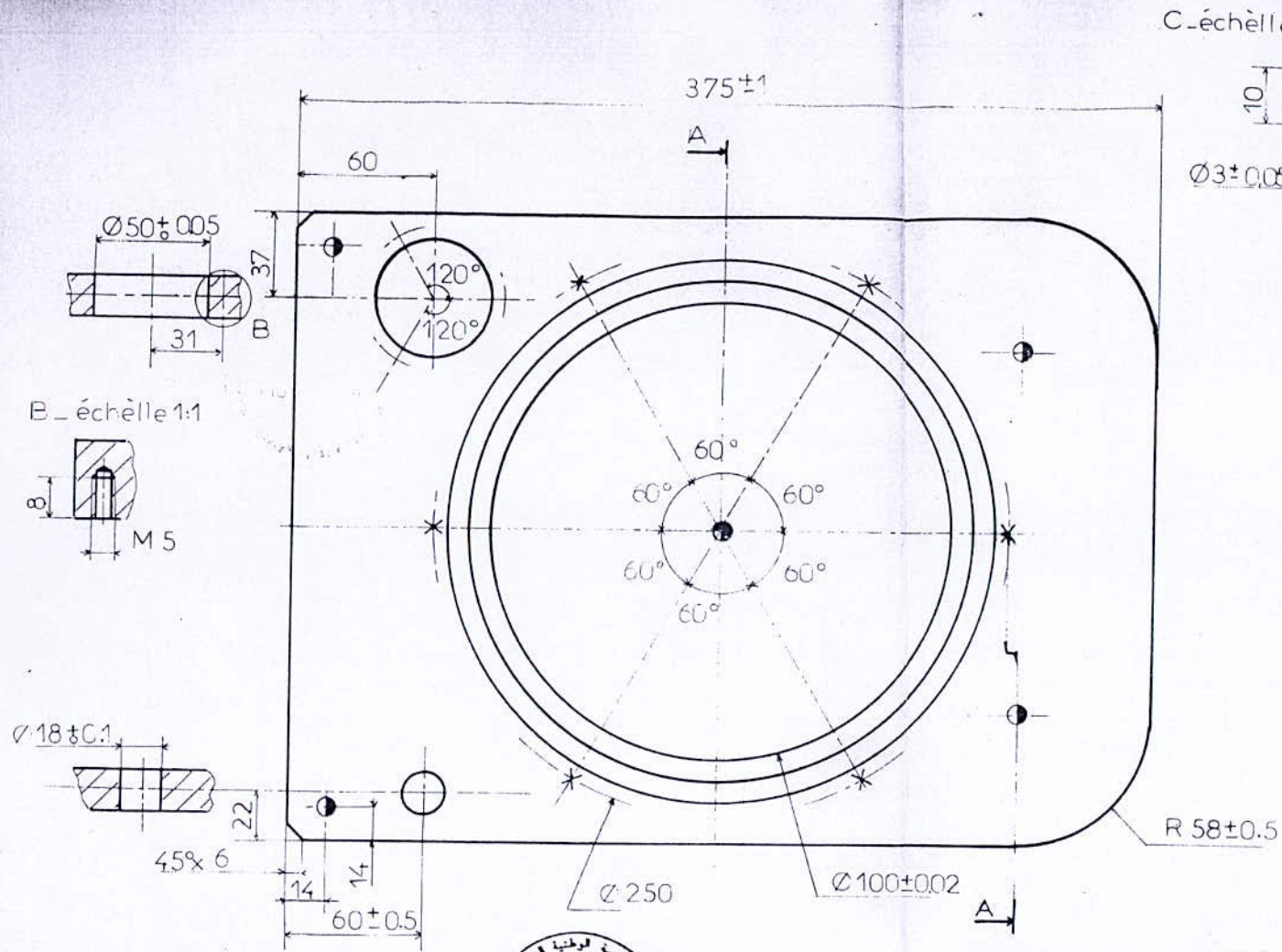
Echelle	Masse	
Etudiants	Mecheri	
Promoteurs	Saïdi	
	belkacemi	
	Guerqueb	
Pres. jury		

EPROUVETTE

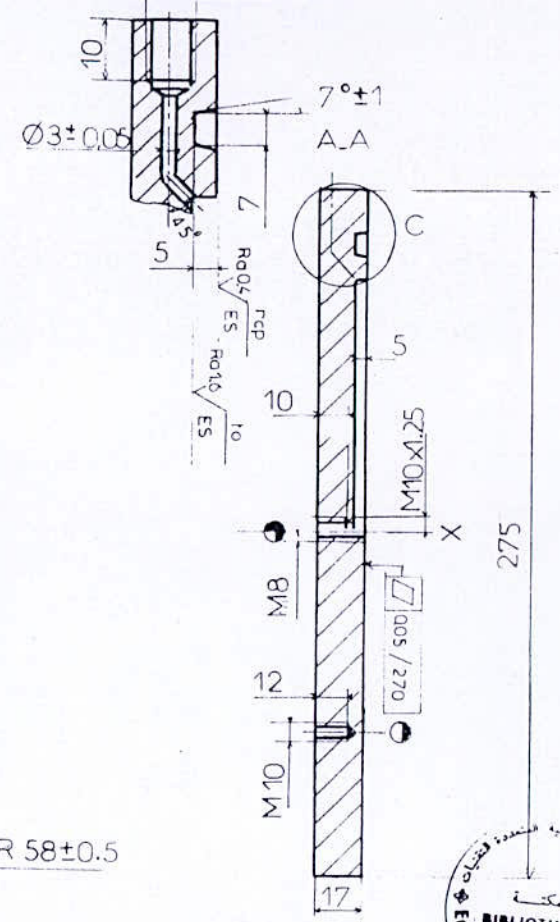
ENP

Dep. Mécanique

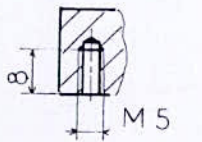
FLX-01-06



C_échelle 1:1 M10x1.25



B_échelle 1:1



Tolérance générale: ± 0.1
 Tolérance générale pour les angles: $\pm 1^\circ$
 Etat de surface générale: $\sqrt{3.2}$

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Echelle	Masse			BATI	ENP
1:2					
Etudiants	Saidi				
Professeurs	Mecheri				
	Belkacemi				
	Guengueb				
Pres jury					

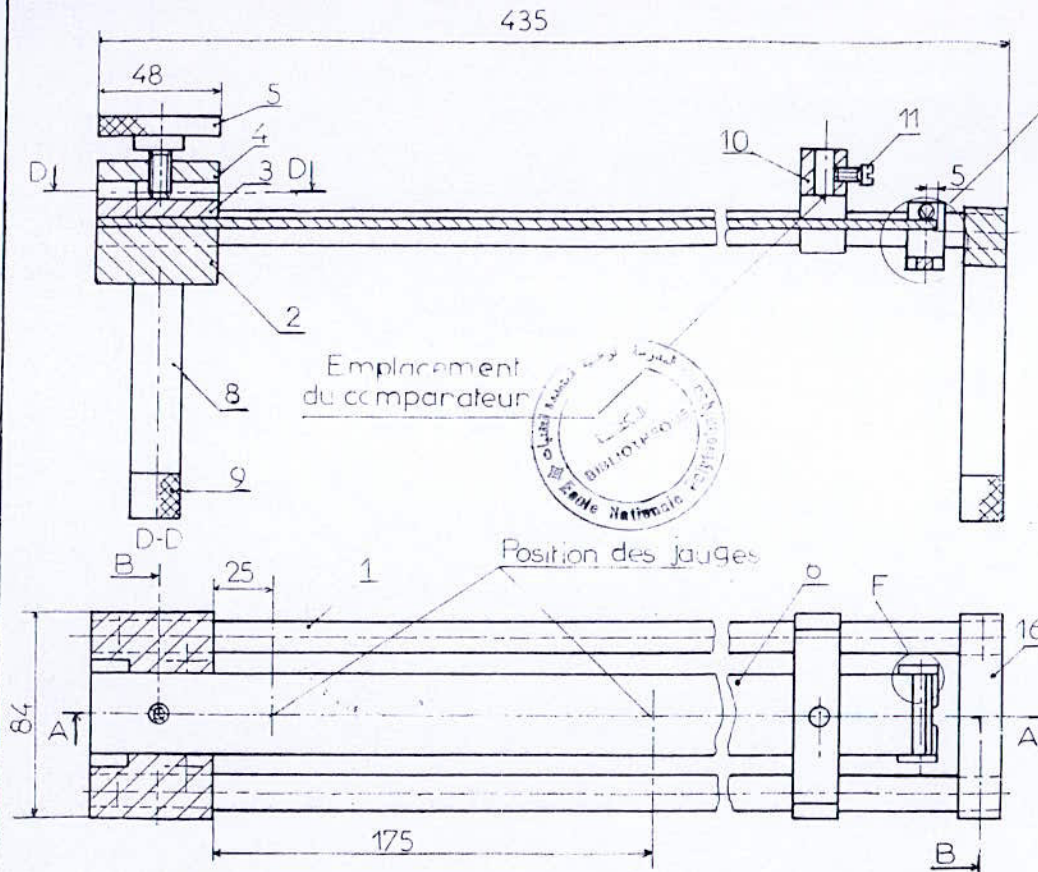
Dep Mecanique
 PLA.02.01

A-A

échelle 1:1

E-échelle 1:1

F-échelle 2:1

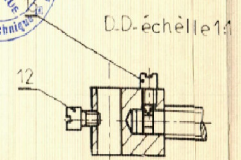
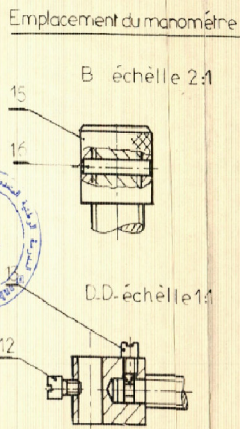
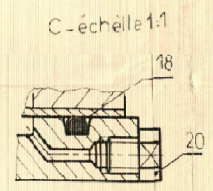
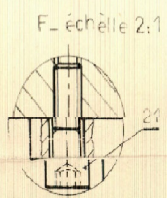
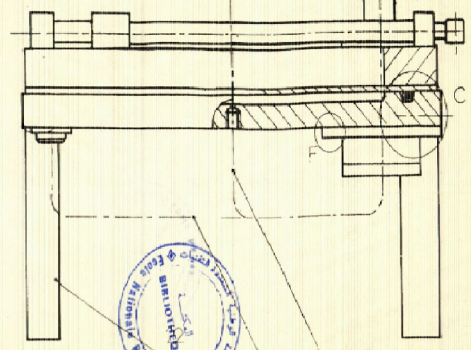
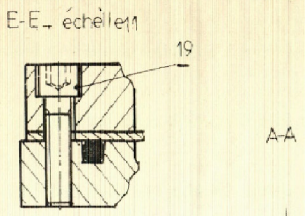
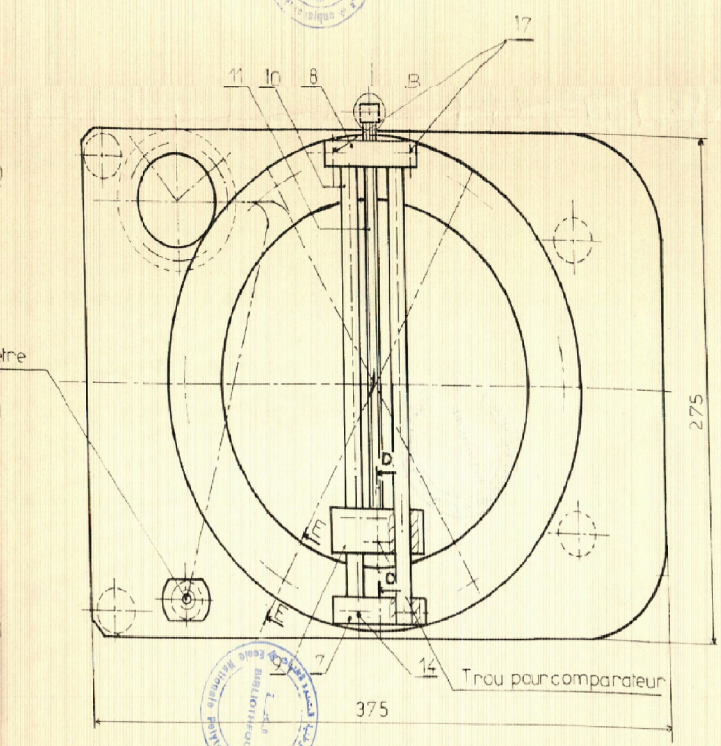
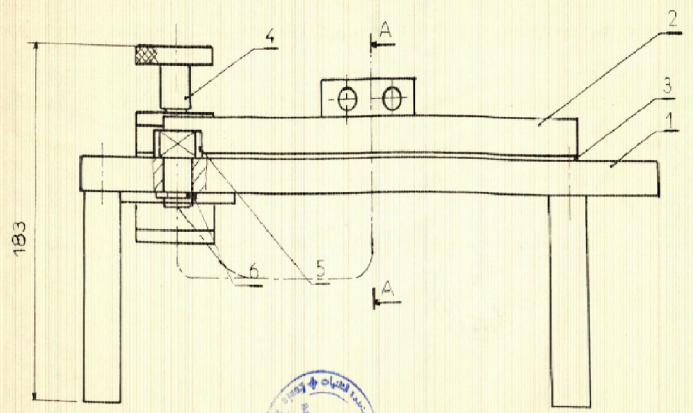


9	FLX.01.08	Pied de réglage	2		XC 10
8	FLX.01.07	pied d'encastrement	2		XC 10
7		Vis F/90 M5 .15	4		CuZn15
6	FLX.01.06	Eprouvette	1		
5	FLX.01.05	Vis de pression	1		XC 38
4	FLX.01.04	Couvercle	1		XC 38
3	FLX.01.03	Mors mobile	1		XC 38
2	FLX.01.02	Encastrement	1		XC 38
1	FLX.01.01	Tige de guidage	2		Stubs

18	FLX.01.14	Pied de réglage	2		XC18
17	FLX.01.13	Pied du support	2		XC18
16	FLX.01.12	Support	1		Ft 10
15		Goupille 2x14	1		
14	FLX.01.11	Lame	1		XC38
13		Vis C M4	2		CuZn15
12	FLX.01.10	Accroche poids	1		Al
11		Vis C M4	1		
10	FLX.01.09	Support comparateur	1		Ft 10

Rp. N°dessin	Designation	N°	Unité	Masse	Mat.	Observ.
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE						
Echelle	Masse			BANC de FLEXION		ENP
1/2						
Etudiants	Meheri Saidi					Dep. Mécanique
Promoteurs	belkacemi Guergueb					
Pres. jury						FLX.01.00

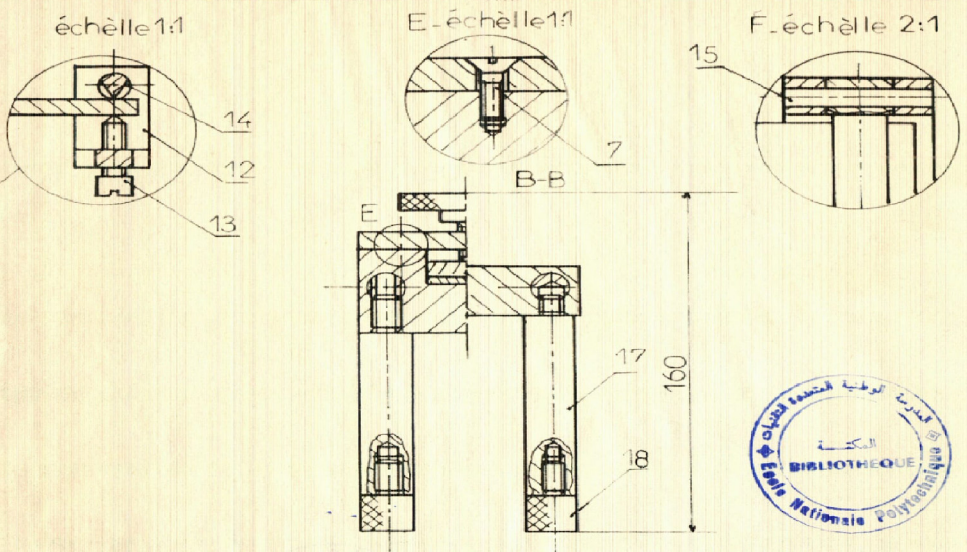
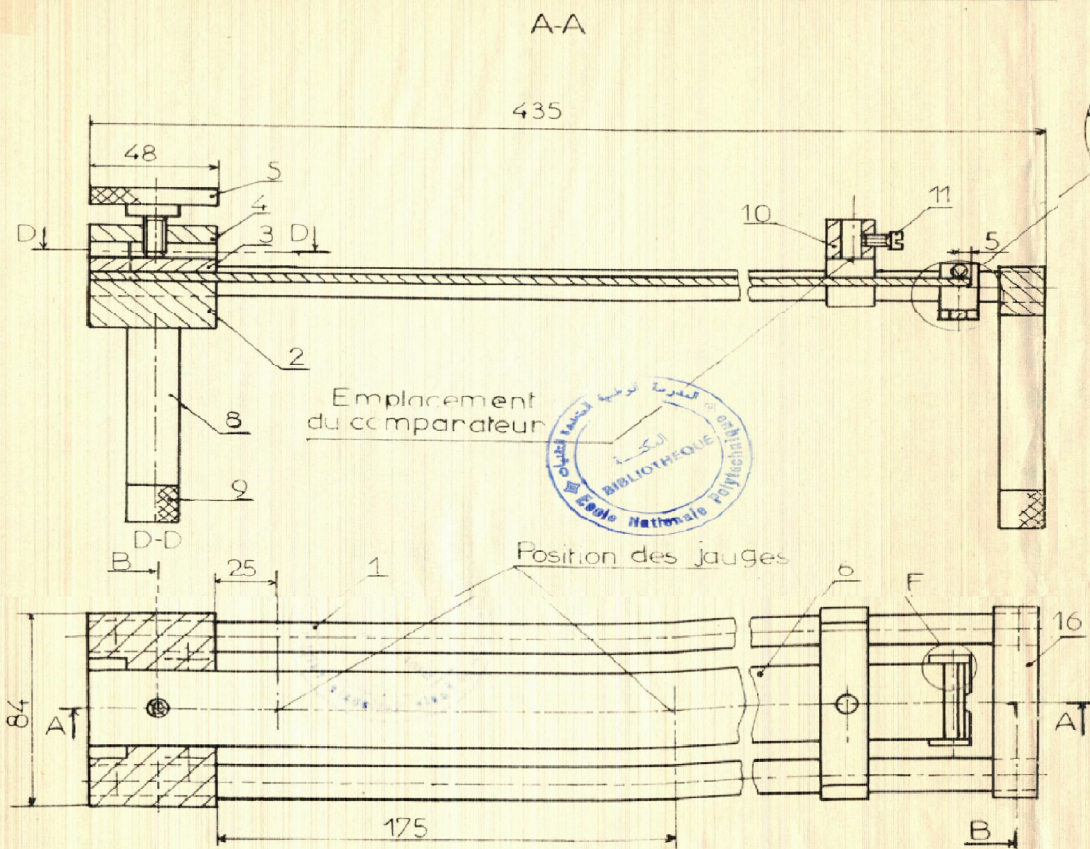




22	PLA0213	Pied	4
21		Vis CHC M4_16	3
20	PLA0212	Purge d'air	1
19		Vis CHC M8_30	6
18		Joint torique 6 x210	1
17		Vis F90M4_24	3

Echelle		Moise		BANC	
12				de	
Etudiants		Sadi		PLAQUE	
Promoteurs		Mechari		ENP	
Prés		Ouergueb		Dép Mécanique	
Jury				PLA02.00	

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE			
Rp N dessin			
Designation			
1	PLA0201	Bati	Nb unit total
2	PLA0202	Epruve tte	1
3	PLA0203	Epruve tte	1
4	PLA0204	Verin	1
5	PLA0205	Porte manomètre	1
6	PLA0206	Circlips pour arbre	1
7	PLA0207	Support tiges	1
8	PLA0208	Mors fix	1
9	PLA0209	Porte comparateur	1
10	PLA0210	Tige fileté M8	2
11	PLA0211	Vis C M4_6	1
12		Vis à bouchon M4_6	1
13		Poignee	1
14		Goupille 2 x 6	1
15		Vis F90M4_6	2
16		Vis à bouchon M4_6	1
17		Vis C M4_6	1
18		Tige fileté M8	2
19		Porte comparateur	1
20		Mors fix	1
21		Support tiges	1
22		Circlips pour arbre	1
23		Porte manomètre	1
24		Verin	1
25		Epruve tte	1
26		Epruve tte	1
27		Bati	1
28		Nb unit total	
29		Nb Masse	
30		Mt.	
31		Observ	

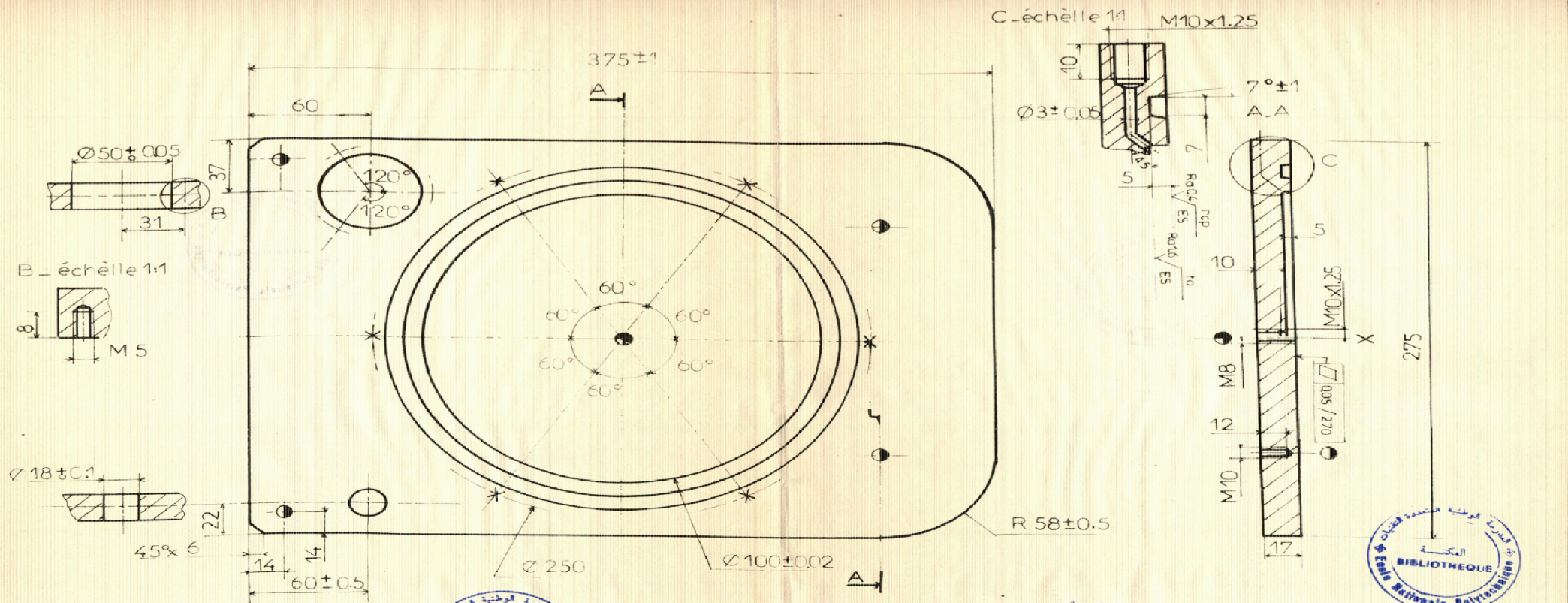


18	FLX.01.14	Pied de réglage	2		XC18
17	FLX.01.13	Pied du support	2		XC18
16	FLX.01.12	Support	1		Fr 10
15		Goupille 2x14	1		
14	FLX.01.11	Lame	1		XC38
13		Vis C M4	2		CuZn15
12	FLX01.10	Accroche poids	1		Al
11		Vis C M4	1		
10	FLX.01.09	Support comparateur	1		Fr 10

9	FLX.01.08	Pied de réglage	2		XC 10		
8	FLX01.07	pied d'encastrement	2		XC 10		
7		Vis F/90 M5 .15	4		CuZn15		
6	FLX.01.06	Eprouvette	1				
5	FLX.01.05	Vis de pression	1		XC 38		
4	FLX.01.04	Couvercle	1		XC 38		
3	FLX.01.03	Mors mobile	1		XC 38		
2	FLX01.02	Encastrement	1		XC 38		
1	FLX.01.01	Tige de guidage	2		Stubs		
Rp	N°dessin	Designation	N°	Unité	Masse	Mat.	Observ.

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Echelle	Masse		BANC de FLEXION	ENP Dep. Mécanique
1/2				
Etudiants	Meheri Saidi			
Promoteurs	bejkacemi Guergueb			
Pres. jury				FLX.01.00



Tolérance générale: ±0.1
 Tolérance générale pour les angles: ±1°
 Etat de surface générale: 3.2

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE			
Echelle	Masse		BATI
1:2			
Etudiants	Saidi		ENP Dep Mécanique
Préparateurs	Mecheri		
	Belkacem		
	Guengueb		PLA.02.01
Pres jury			