

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

17/95

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *Genie Mécanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Calcul d'un écoulement par
la méthode S_1 / S_2
finalisation du logiciel.*

Proposé par :
M. BOUJEMAA

Etudié par :
A. SEKSAF

Dirigé par :
M. BOUJEMAA

PROMOTION
juin 1995

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

Genie Mecanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Calcul d'un écoulement par
la méthode S_1 / S_2
finalisation du logiciel.*

Proposé par :
M. BOUJEMAA

Etudié par :
A. SEKSAF

Dirigé par :
M. BOUJEMAA

PROMOTION
Juin 1995

Dédicace

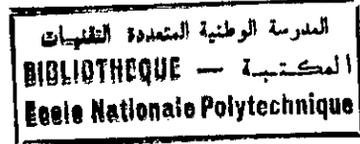
Je dédie ce modeste travail à
mes très chères parents qui
m'ont tout sacrifié afin de me
voir atteindre ce niveau.

A mes très chères sœurs: de Noujoula à Hanane

A mes très chères frères: Mouhamad Amine et
Abdel Salem.

Et à tous mes amis ...

Abdel Basset



Remerciement

Je tiens principalement a remercier mon promoteur Monsieur M.BOUDJEMAA pour son aide toujours efficace et son soutien constant .

Je remercie en particulier M^r N.CHIKHI et M^r O. SALAH OULHADJ ingénieurs polytechniciens, pour l'aide qu'il m'ont apporté durant les moments les plus difficiles.

Que tous les enseignants qui ont contribuer à ma formation trouvent ici mes sincères remerciements .

RESUME

Dans cette étude on a établi tout les éléments d'un code permettant d'approcher un écoulement quasi-tridimensionnel d'un fluide compressible traversant la roue d'une turbomachine . la méthode adoptée pour cette analyse est celle de CH. WU, qui se base sur un découpage fictif de l'écoulement réel sur deux familles de surfaces orthogonales.

ABSTRACT

In this work we'll analyse all elements of code which permit the studie of a quasi-treedimensionnal flow of a compressible fluid through a turbomachine .The method used in this analysis is CH. WU's method, wich is based on a fictif subdivision of the real flow to two flow orthogonal families of surfaces .

Chapitre 0

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Partie 1: Partie théorique

Chapitre I Etude de l'écoulement tridimensionnel par la modélisation de WU

1.Introduction.....	3
2.Etude de l'écoulement méridional	
2.1.Hypothèses.....	5
2.2. Equations de continuité.....	5
2.3. Equation du mouvement.....	6
2.4. Equation d'énergie.....	7
2.5. Equation principale de l'écoulement méridional.....	7
2.6. Introduction de la fonction de courant	9
2.7. Condition aux limites	10
2.8. Récapitulation	11
3. Etude de l'écoulement méridional	
3.1. Equations de continuité.....	12
3.2. Equation du mouvement.....	14
3.3. Equation principale de l'écoulement méridional.....	14
2.4. Conditions aux limites	15
2.5. Condition de KUTTA-JOUKAOWSKY.....	16
2.6. Récapitulation	17

Chapitre II Calcul Quasitridimensionnel

1. Introduction	19
2. Calcul des caractéristiques de l'écoulement	19
a. la vitesse.....	19
b. La densité.....	21
c. Le rapport de pression.....	23
d. La vitesse du son.....	24
e. Le nombre de Mach.	

Chapitre III Etude de la couche limite autour de l'aube

1. Notion de couche limite	26
2. Hypothèses de la couche limite.....	27
3. Simplification des équations de NAVIER-STOCKES.....	27
4. Epaisseur de la couche limite.....	28
5. Calcul de la couche limite	
5.1. Définition de l'équation.....	30
5.2. Méthode approximative de A.T. VON KARMAN et P.HAUSSEN pour les écoulements bidimensionnels.....	32
6. Solution de l'équation III.17.....	27
7. Couplage calcul d'écoulement avec couche limite.....	34

Chapitre IV Etude des pertes

1. Introduction	36
2. Etude des différents modèles.....	36
3. Description du modèle de SODERBERG.....	37
4. Application du modèle de SODERBERG.....	39
5. Calcul de l'enthalpie à l'entrée de la roue.....	39
6. Calcul de l'enthalpie à l'entrée de la roue.....	40
5. Recapitulation.....	41

PARTIE 2: Partie numérique

Chapitre V

Introduction.....	42
1. Description des maillages utilisées.....	42
1.1 description maillage rectangulaire droit.....	42
1.2 description du modèle de MARSH.....	43
a. Maillage curviligne.....	43
b. Maillage réctangulaire incliné.....	45
2. Discretisation des deux écoulements.....	47
2.1 Discretisation de l'écoulement méridional.....	47
2.2. Dicritisation de l'écoulement aube à aube	48
3. Calcul de la densité	49

4. Calcul quasitridimensionnel.....	49
5. Calcul des canaux dans les deux plans.....	50
6. calcul de l'épaisseur de la couche limite.....	50
7. Méthode de résolution.....	51
8. Convergence de calcul.....	51

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Chapitre VI

Présentation Des résultats

Analyse des résultats.....	52
Conclusion générale.....	54

ANNEXES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE 0

INTRODUCTION GENERALE

La nature tridimensionnelle de l'écoulement d'un fluide dans une turbomachine présente un degré de complexité tel qu'il est nécessaire de recourir à des approximations conçues de façon suffisamment simples, mais conservant cependant un caractère physique acceptable .

le but de notre projet est l'analyse d'un écoulement quasi-tridimensionnel d'un fluide traversant une roue d'une turbomachine fonctionnant en fluide compressible, parfait et réel .

L'étude proposée étant suffisamment générale pour que la géométrie de la turbomachine soit précisée .

Le modèle retenu dans ce présent projet est celle de *CH.WU* , qui se base sur la décomposition fictive de l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels sur deux familles de surfaces orthogonales.

L'analyse de l'écoulement quasi-tridimensionnel permet de fournir des informations aéro et thermodynamiques du fluide en chaque point de la roue de la turbomachine, pour cela on a réparti notre travail selon trois grandes parties présentées comme suite:

Première partie :

A son tour elle est divisée en quatre chapitres qui sont donnés par :

- Chapitre I : Consacré a définir le modèle mathématique qui régit l'écoulement dans une roue de turbomachine et cela en se basant sur la méthode S1 et S2 proposée par CH .WU .
- Chapitre II : Dans ce chapitre on procède à un couplage des résultats obtenues dans chaque plan (S1 et S2) , pour déterminer les différents caractéristiques du fluide le long de la ligne moyenne .

Introduction générale

- Chapitre III : Traite l'étude des différents facteurs définissant la couche limite.
- Chapitre IV : Englobe l'étude et la description des différentes pertes induites par un écoulement dans une turbomachine, le Modèle développé est le modèle de SODERBERG .

Deuxième Partie :

Notre objectif dans cette partie est d'explicitier les méthodes numériques utilisées lors de l'élaboration du programme de calcul pour l'écoulement .

Troisième partie :

Cette partie est formée de trois axes qui sont :

- Le premier axe englobe les applications numériques du programme.
- Le deuxième axe donne les analyses et les interprétations des résultats obtenus .
- Le troisième axe : Récapitule toute l'étude sous forme d'une conclusion générale .

A la fin de cette thèse le lecteur trouvera les Annexes des chapitres : I, III et IV .

CHAPITRE I

ETUDE DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL PAR LA MODÉLISATION DE WU :

I.1 INTRODUCTION :

Le traitement numérique des écoulements dans les turbomachines par le caractère tridimensionnel du problème, est très complexe .

La modélisation adoptée dans notre travail est celle de *C.H. WU*, qui consiste en la décomposition de l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels :

- Un écoulement qualifié de " *moyen* " (*through flow*), dont la principale caractéristique est d'être à symétrie axiale, c'est-à-dire qu'il admet une famille de surfaces de courant de révolution (S2) (cf. fig. 1.a)
- Un écoulement de " *grille* " (*blade to blade flow*), dont la surface de courant (S1) est décrite dans la roue par l'ensemble des particules fluides se trouvant sur un cercle concentrique à l'axe de la machine (cf. fig. 1.b)

*Etude de l'écoulement tridimensionnel
par la modélisation de WU*

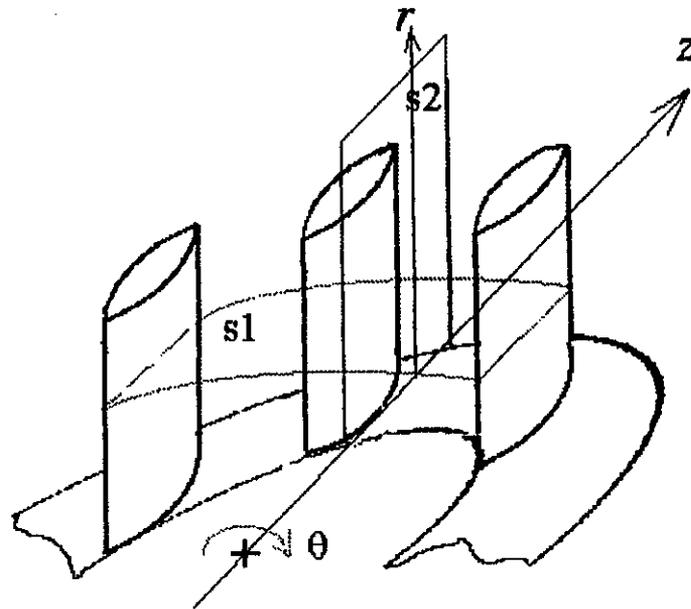


fig 1.1

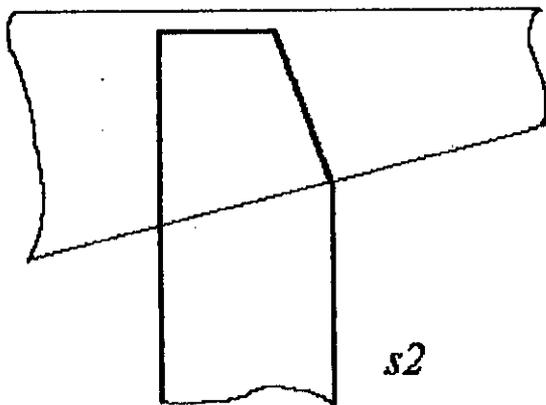


fig 1.1.a

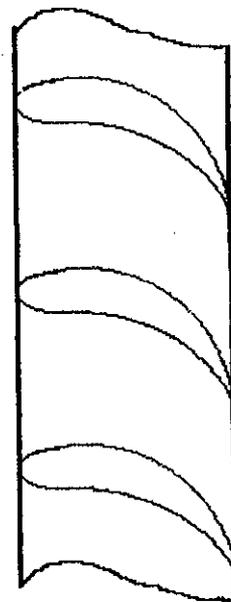


fig 1.1.b

I.2 ETUDE DE L'ÉCOULEMENT MERIDIONAL

I.2.1 HYPOTHESES

- Fluide parfait : Les forces de viscosité sont considérées nulles ($\mu = 0$)
- Écoulement stationnaire : La variation de toute grandeur dans le temps est nulle ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)

I.2.2 EQUATION DE CONTINUITÉ

L'équation de continuité en coordonnées cylindriques dans un repère relatif est donnée par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r W_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho W_u] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho W_z] = 0 \quad \dots(I.1)$$

avec

$$\bar{W} \begin{bmatrix} W_r \\ W_u \\ W_z \end{bmatrix}$$

en introduisant les dérivées spéciales dans (I.1) (voir annexe 2) on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} [\rho r W_r] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho W_z] = C(r, z) \quad \dots(I.2)$$

I.1.2.3 EQUATION DU MOUVEMENT :

L'équation du mouvement est donnée par (voir annexe 1) :

$$2\bar{\omega} \wedge \bar{W} - \bar{W} \wedge (\nabla \wedge \bar{W}) = \nabla I + T \nabla S \quad \dots (I.3)$$

avec

- \bar{W} : La vitesse de l'écoulement dans le repère relatif .
- ω : La vitesse angulaire de la roue .
- T : La température moyenne.
- S : L'entropie .
- I : La rothalpie

tel que :

$$I = H + \omega r V_u$$

et

$$H = h + \frac{V^2}{2} + g z$$

avec

- H : L'enthalpie totale .
- Vu : Composante selon \bar{U} de la vitesse dans le repère absolu .
- h : Enthalpie statique

Projetons l'équation vectorielle (I.3) suivant les trois axes et introduisons les dérivées spéciales, on obtient alors :

$$\left[-\frac{W_u}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_u) \right] + W_z \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} + F_r \right] \quad \dots (I.6)$$

$$\left[-\frac{W_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_u) + \frac{W_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_u) = F_u \right] \quad \dots (I.7)$$

$$\left[-W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] - \frac{W_u}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_u) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} + F_z \right] \quad \dots (I.8)$$

avec

$$\bar{F} = -\frac{1}{r \rho n_u} \frac{\partial p}{\partial \theta} \bar{n}$$

1.2.4 EQUATION D'ENERGIE

L'équation d'énergie est donnée par (voir Annexe 1) :

$$W_r \frac{\partial I}{\partial r} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} = Q$$

introduisons les dérivées spéciales, en supposant que l'écoulement est isentropique on obtient alors :

$$W_r \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} + W_z \frac{\bar{\partial} I}{\partial z} = 0 \quad \dots(I.9)$$

ou bien :

$$T \left[W_r \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + W_z \frac{\bar{\partial} S}{\partial z} \right] = 0 \quad \dots(I.10)$$

tel que le terme S représente la surface de courant .

1.2.5 EQUATION PRINCIPALE DE L'ECOULEMENT MERIDIONAL :

Pour un fluide non visqueux le vecteur force est normal à la surface moyenne de courant S , donc il est normal à la vitesse relative W :

tel que

$$\vec{W} \cdot \vec{F} = 0$$

ce qui nous permet d'avoir :

$$W_r F_r + W_u F_u + W_z F_z = 0 \quad \dots(I.11)$$

et

$$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$$

ce qui nous permet d'avoir :

$$W_r n_r + W_u n_u + W_z n_z = 0$$

*Etude de l'écoulement tridimensionnel
par la modélisation de WU*

A partir de cette équation on définit deux angles μ' et λ' , qui définissent la forme locale de la surface du courant.

$$\operatorname{tg} \lambda' = \frac{n_r}{n_u} = \frac{F_r}{F_u}$$

et

$$\operatorname{tg} \mu' = \frac{n_z}{n_u} = \frac{F_z}{F_u}$$

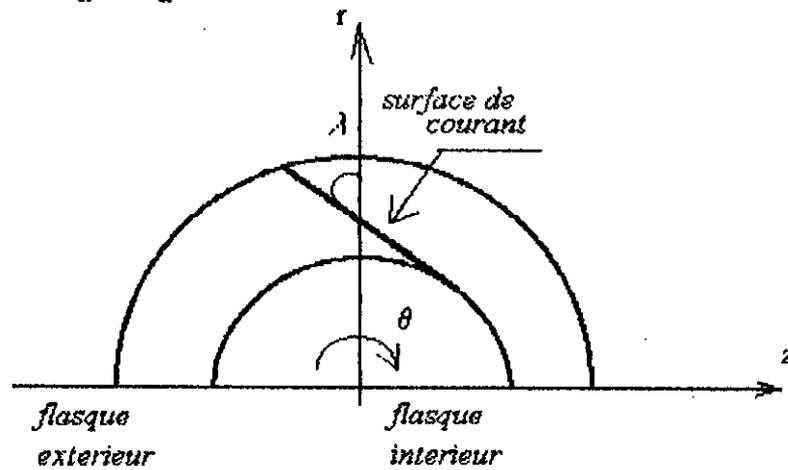


Fig 1.2.a

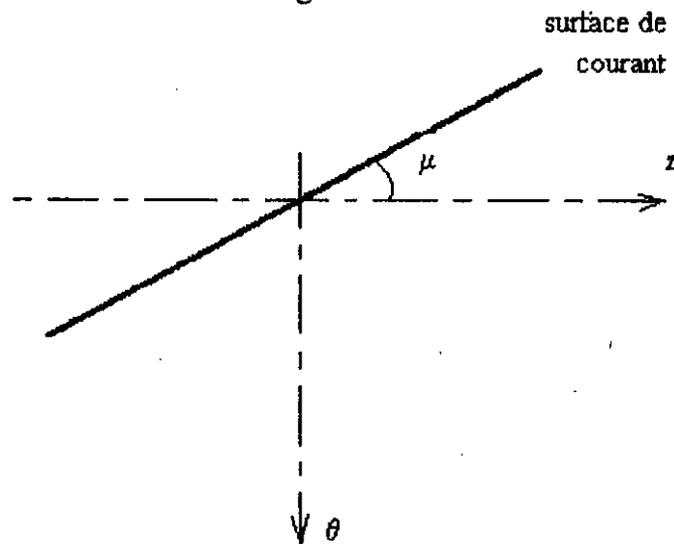


Fig 1.2.b

La relation (I.11) s'écrit alors :

$$W_u = -W_r \operatorname{tg} \lambda' - W_z \operatorname{tg} \mu' \quad \dots(I.12)$$

qui représente la condition géométrique qui assure que le fluide reste sur la surface moyenne de courant .

Afin d'obtenir l'équation de la fonction de courant (d'après [1]), on introduit un facteur d'intégration B de telle sorte que l'équation de continuité se met sous la forme :

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\rho r B W_r] + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\rho r B W_z] = 0 \quad \dots(I.13)$$

après simplification on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\rho r W_r] + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\rho W_z] = - \left[\frac{\rho W_r}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial r} + \frac{\rho W_z}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial z} \right] \quad \dots(I.14)$$

et finalement on aura :

$$C(r, z) = - \left[\frac{\rho W_r}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial r} + \frac{\rho W_z}{B} \frac{\bar{\partial} B}{\partial z} \right]$$

avec

$$B = \frac{\text{Largeur circonférentielle du canal entre aube}}{\text{Pas d'aube}}$$

1.2.6 INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT :

l'équation de C.H.WU [1], donnant la fonction de courant est la suivante (voir Annexe 1) :

$$\frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} = q(r, z)$$

avec

$$q(r,z) = \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(\rho r B)] + \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(\rho r B)] - \frac{\rho r B}{W_z} \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial} (r V_u)}{\partial r} - F_r \right] \quad \dots(1.15)$$

1.2.7 CONDITIONS AUX LIMITES

La fonction de courant, doit vérifiée les conditions aux limites suivantes :

$$\psi_2 - \psi_1 = q$$

avec

ψ_1 : La valeur de la fonction de courant sur le flasque avant (carter)

ψ_2 : La valeur de la fonction de courant sur le flasque arrière (moyeu)

q : Le débit massique .

I.2.8 RECAPITULATION

Pour un écoulement stationnaire, parfait, axisymétrique et isentropique l'équation de C.H.WU dans le plan méridional est :

$$\frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} = q(r, z)$$

$$q(r, z) = \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(\rho r B)] + \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(\rho r B)] - \frac{\rho r B}{W_z} \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}(r V_u)}{\partial r} - F_r \right] \quad \dots(I.15)$$

α , β et γ sont données suivant le domaine d'étude :

- a • En amont ou en aval de la roue

$$\alpha = H \quad (\text{l'enthalpie standard})$$

$$\beta = 1$$

$$\gamma = 0$$

- b • dans la roue :

$$\alpha = I = H - \omega \Gamma \quad (\text{la rothalpie})$$

$$\text{avec } \Gamma = r V_\theta \quad (\Gamma: \text{moment cinétique})$$

$$\beta = B \quad (\text{hauteur d'aube})$$

$$\gamma = F_r = F_u \operatorname{tg} \lambda'$$

I.3 ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AUBE A AUBE

On adopte les mêmes hypothèses que pour l'écoulement méridional .

I.3.1 EQUATION DE CONTINUITÉ :

La position d'un point sur la surface est d'écrite par ses coordonnées m et r (voir fig. I.3.a et fig I.3.b)

on a

$$(I.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial m} = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial r} \\ \vec{W} = w_{\theta} \vec{i}_1 + w_m \vec{i}_2 \\ \frac{w_m}{w_{\theta}} = \operatorname{tg} \beta = r \frac{d\theta}{dm} \\ w_m^2 = w_z^2 + w_r^2 \end{array} \right.$$

l'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho W_{\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial m} (\rho r W_m) + \rho W_m k_n = 0 \quad \dots(I.21)$$

avec k_n : courbure de la ligne méridienne pp'
tel que :

$$k_n = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial m}$$

où b : hauteur d'aubages

or $b = f(m)$ d'où l'équation (I.21) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (b \rho W_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial m} (b \rho r W_m) = 0 \quad \dots(I.22)$$

Etude de l'écoulement tridimensionnel
par la modélisation de WU

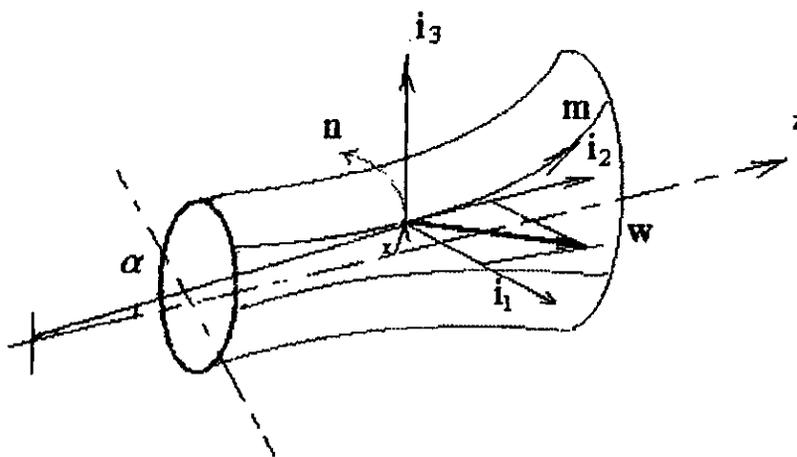


Fig I.3.a

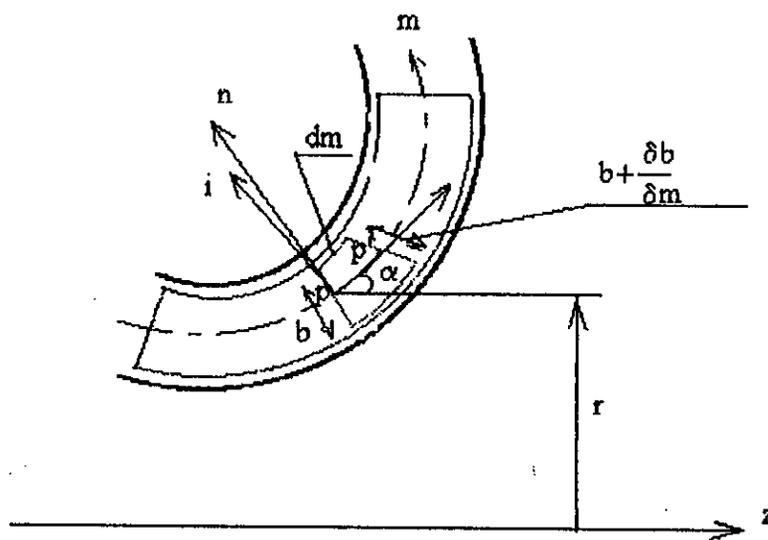


Fig I.3.b

I.3.2 EQUATION DU MOUVEMENT :

La vitesse \vec{W} doit vérifier l'équation de mouvement simplifiée, de la forme :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{W} = & \left[-\frac{\partial w_m}{\partial n} - w_m K_m \right] \vec{i}_1 + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial n} (r w_u + \omega r^2) \right] \vec{i}_2 \\ & + \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial m} (r w_u + \omega r^2) \right] \vec{i}_3 = \vec{0} \quad \dots(1.23) \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'avoir (voir Annexe 1)

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (r w_u)}{\partial m} \right] = 2 \omega \frac{\partial r}{\partial m} \quad \dots(1.24)$$

I.3.3 EQUATION PRINCIPALE DE L'ECOULEMENT AUBE A AUBE

En introduisant la fonction de courant dimensionnelle, on obtient :

$$\frac{1}{r b} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + r \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right] + \frac{\partial r}{\partial m} \frac{1}{\rho b} \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2 \omega r \frac{\partial r}{\partial m}$$

avec

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \sin \alpha$$

L'équation de WU [1] s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - 2 \rho b \omega \sin \alpha \\ & - \frac{\partial \psi}{\partial m} \left[\frac{\partial (\ln r)}{\partial m} - \frac{\partial [\ln(\rho b)]}{\partial m} \right] \quad \dots(1.25) \end{aligned}$$

I.3.4 CONDITIONS AUX LIMITES

La fonction de courant dimensionnelle ψ , solution de l'équation différentielle précédente, doit vérifier les conditions aux limites du domaine d'étude.

Soit une surface S_1 définie par la rotation autour de l'axe de la machine d'une ligne de courant méridienne, celle-ci se trouve découpée périodiquement par les aubages dans la direction périphérique en domaine élémentaire (voir fig. 4).

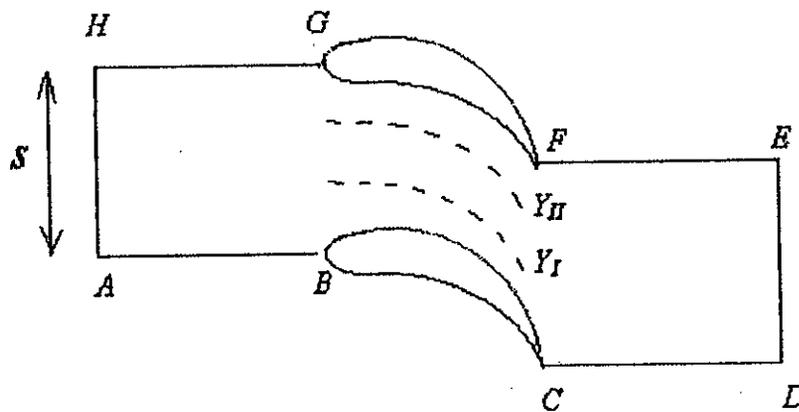


Fig. 4

Compte tenu de la définition de ψ et si ψ_1 et ψ_2 sont les valeurs de ψ correspondantes respectivement aux limites FG et BC du domaine élémentaire, on doit avoir :

$$\psi_2 - \psi_1 = \frac{\text{debit massique passant entre BC et FG}}{q}$$

ainsi pour

$$\psi_1 = 0 \quad \text{sur BC} \quad (a)$$

$$\psi_2 = 1 \quad \text{sur FG} \quad (b)$$

alors :

$$\psi_2 - \psi_1 = 1 \quad \dots(I.26)$$

Les conditions (a) et (b) sont complètement équivalentes aux condition de tangence des vecteurs vitesses à la surface des aubes :

- L'écoulement est supposé uniforme loin à l'amont AH et à l'aval DE , et la connaissance de \vec{W} nous permet de connaître les valeurs de la fonction de courant sur ses frontières.
- On a de plus la condition de périodicité pour les deux domaines comprises entre AB, HG et CD, FE qui se traduit par :

$$(I.27) \quad \dots \begin{cases} \psi_{HG} = \psi_{AB} + 1 \\ \psi_{FE} = \psi_{CD} + 1 \end{cases}$$

I.3.5 CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKY :

En plus des conditions aux limites et les conditions de périodicité de l'écoulement, la condition de Kutta-Jukowsky doit être satisfaite, dont l'énoncé est :

Pour un écoulement de fluide parfait autour d'un profil dont l'intrados et l'extrados se termine suivant une tangente commune, et la ligne du courant issue au bord de fuite doit quitter ce dernier suivant cette tangente.

Vérifier la condition de Kutta-Jukowsky sous cette forme pose un problème dans le cas de profils a bord arrondi, ou en forme de dièdre, et la position du point d'arrêt n'étant pas connue, une petite erreur commise sur sa détermination peut en effet engendrer une grande erreur dans les résultats. Il est alors préférable de remplacer cette condition par une symétrie de la répartition des pressions ou des vitesses relative sur l'intrados et l'extrados du profil, le plus près possible du bord de fuite.

*Etude de l'écoulement tridimensionnel
par la modélisation de WU*

En résumé pour un profil donné ,à un angle d'attaque donné, le fluide quitte le bord de fuite sans perturbation si :

- Le bord de fuite est un angle fini, donc c'est un point d'arrêt pour $V_1 = V_2 = 0$
- Le bord de fuite a la forme de biseau, les vitesses quittants l'intrados et l'extrados, sont égales en module, et y sont tangentes à la ligne médiane.

I.3.6 RECAPITULATION

L'équation donnant la fonction de courant dimensionnelle de l'écoulement dans une turbomachine centrifuge dans le plan aube à aube est donnée par :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\ln \rho)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - 2 \rho b \omega \sin \alpha - \frac{\partial \psi}{\partial m} \left[\frac{\partial(\ln r)}{\partial m} - \frac{\partial[\ln(\rho b)]}{\partial m} \right] \quad \dots(1.25)$$

en tenant compte des hypothèses suivantes :

- Fluide stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$
- Fluide non visqueux $\mu \equiv 0$
- Ecoulement adiabatique $Q \equiv 0$
- Conservation de la rothalpie $\partial I \equiv 0$

CHAPITRE II

CALCUL QUASI TRIDIMENSIONNEL

II.1 INTRODUCTION :

Après avoir déterminé les caractéristiques physiques et thermodynamiques de l'écoulement dans chaque plan (S1 et S2) on procède à un couplage des résultats, cela est possible en imposant deux hypothèses :

- L'axisymétrie de l'une des deux surfaces .
- La rugosité et l'uniformité du champ de vitesse .

II.2 CALCUL DES CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT :

L'écoulement dans une roue d'une turbomachine peut être défini par les grandeurs suivantes :

- La vitesse relative .
- La densité du fluide .
- Le rapport de pression .
- Le nombre de Mach .

A°/ LA VITESSE RELATIVE :

La vitesse relative suivant la ligne d'intersection des deux plans, aube à aube et méridien, s'exprime par :

$$\vec{W} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \psi_1 \wedge \vec{\nabla} \psi_2 \quad \dots(\text{II.1})$$

avec :

ρ : est la densité suivant la ligne moyenne .

ψ_1, ψ_2 : sont respectivement les fonctions de courant sur les deux plans aube à aube et méridien .

l'écriture vectorielle de l'équation II.1 est donnée par :

$$\vec{W} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{r \partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{r \partial \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_1}{r \partial \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_2}{r \partial \theta} \end{bmatrix} \quad \dots(\text{II.2})$$

pour simplifier cette expression on adopte un certains nombres d'étapes :

- l'écoulement dans le plan méridien (plan axial) se caractérise par :

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = 0$$

- utilisons la transformation $h = r \theta$

qui conduit à la forme :

$$\frac{\partial \psi_1}{r \partial \theta} = \frac{\partial \psi_1}{\partial h} \quad \dots(\text{a})$$

et en prenant $h = h(x,y)$, $r = r(x,y)$, $z = z(x,y)$

on aura :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial h} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} \quad \dots(\text{b})$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \dots(\text{c})$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \quad \dots(\text{d})$$

Idem pour la fonction de courant ψ_2

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \quad \dots(e)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \dots(f)$$

En substituant les équations b,c,d,e et f dans l'équation (II.2) on obtient :

$$(III.3) \dots \begin{bmatrix} W_u \\ W_z \\ W_r \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right) \\ - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right) \end{bmatrix}$$

C'est l'expression de la vitesse relative suivant la ligne moyenne, qui a comme module :

$$W = \sqrt{W_u^2 + W_z^2 + W_r^2}$$

B°/ CALCUL DE LA DENSITE

La masse volumique se déduit à partir du fait que la rothalpie se conserve suivant tout le plans aube à aube, ce qui donne la conservation le long de la ligne moyenne, entre un point "O" qui caractérise l'état de fluide amont (I_0) et un point où on veut avoir la masse volumique ρ .

Calcul quasitridimensionnel

ainsi :

$$I = I_0 \quad \dots(1)$$

$$\text{avec :} \quad I = h + \frac{V^2}{2} + \omega r V_\theta \quad \dots(2)$$

$$\text{et} \quad h = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad h_0 = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}$$

apres substitution de (2) dans (1) on aura :

$$h + \frac{V^2}{2} + \omega r V_\theta = h_0 + \frac{V_0^2}{2} + \omega r_0 V_\theta^0 \quad \dots(3)$$

$$\text{ce qui donne} \quad h = h_0 + \omega \left(r_0 V_\theta^0 - r V_\theta \right) + \left(\frac{V_0^2}{2} - \frac{V^2}{2} \right) \quad \dots(4)$$

en sachant que l'équation d'état est donnée par :

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \quad \text{d'où} \quad h = h_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \quad \dots(5)$$

En remplaçant chaque terme, dans l'équation (4), on obtient :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left[1 - \frac{W_r^2 + V_\theta^2 + W_z^2 + 2\omega (r_0 V_\theta^0 - \omega r V_\theta)}{V_0^2} \right]$$

$$\text{avec} \quad M_0 = \frac{V_0}{a_0}$$

Calcul quasitridimensionnel

Les conditions en amont font que $V_0^0 = 0$, ainsi on aura la forme donnant la masse volumique

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left[1 + \frac{-W^2 + (\omega r)^2}{V_0^2} \right] \quad \dots(6)$$

C°/ LE RAPPORT DE PRESSION

L'écoulement est supposé adiabatique :

$$p V^\gamma = \text{cte} \quad \dots(1)$$

le rapport de pression τ est défini par :

$$\tau = \frac{p}{p_0} \quad \dots(2)$$

avec

p_0 : est la pression à l'amont (entrée)

donc τ est donné par :

$$\tau = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\delta \quad \dots(\text{II.5})$$

Le calcul de la pression à l'entrée est permis en appliquant l'équation de Bernoulli entre l'entrée et l'infini (fluide libre), ce qui donne :

$$P_0 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho \left(W_r^2 \right) = P_\infty + \frac{1}{2} \rho \left(V_\infty^2 - \omega r^2 \right)$$

avec

P_∞, V_∞ : représentent respectivement la pression et la vitesse du fluide à l'infini

D°/ LA VITESSE DU SON :

La vitesse du son est exprimée en chaque point par :

$$a = \sqrt{\gamma r T} \quad \dots(1.a)$$

$$a = \sqrt{P_0 \gamma \frac{\tau}{\rho}} \quad \dots(1.b)$$

$$\text{et } a_0 = \frac{W_0}{M_0} \quad \dots(2)$$

et d'autre part :

$$a_0 = \sqrt{P_0 \gamma \frac{\tau_0}{\rho_0}} \quad \dots(3.a)$$

puisque $\tau_0 = 1$ on aura

$$a_0 = \sqrt{P_0 \frac{\gamma}{\rho_0}} \quad \dots(3.b)$$

ce qui nous permet de calculer la pression à l'entrée P_0 :

$$P_0 = \left(\frac{w_0}{M_0} \right)^2 \frac{\rho_0}{\gamma} \quad \dots(4)$$

substituons l'équation (4) dans (1.b)

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{w_0}{M_0} \tau^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \end{array} \right. \quad \dots(II.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{w_0}{M_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \end{array} \right. \quad \dots(II.7)$$

E°/ CALCUL DU NOMBRE DE MACH :

Le nombre de Mach est donné par :

$$M = \frac{W}{a} \quad \dots(\text{II.8})$$

avec **W**: est la vitesse relative .

CHAPITRE III

ETUDE DE LA COUCHE LIMITE AUTOUR DE L'AUBE

III.1 NOTION DE COUCHE LIMITE

Dans la théorie des fluides parfait incompressibles, on avait trouvé que la répartition des vitesses ou des pressions, la forme des lignes de courants était déterminée par la géométrie des parois limitants l'écoulement et ne dépendait pas de la nature du fluide étudié.

Si on étudie maintenant les fluides réels, donc visqueux, on constate que les solutions proposées par la théorie précédente sont conformes aux données expérimentales quand on considère des zones éloignées des parois, mais dans le voisinage immédiat de celles-ci, elles ne conviennent plus du tout.

La notion de couche limite est très importante (elle a été introduite pour la première fois par PRANDTL en 1904) car elle permet de donner une explication à de nombreux phénomènes de mécanique observés avec les fluides visqueux : résistance aérodynamique, formation de sillage etc. ..., que la théorie des fluides parfaits ne peut justifier.

PRANDTL a montré que l'écoulement autour d'un solide pourrait être divisé en deux régions :

- Une très fine couche au voisinage du solide (*Couche Limite*) où le frottement joue un rôle très important .
- Une région extérieure à cette couche où, le frottement est négligé : C'est la zone du fluide libre .

Ainsi PRANDTL a détaillé l'influence de la viscosité dans les écoulements à grands nombres de Reynolds et a montré que les équations de Navier-Stokes pouvaient être simplifiées et conduisent à des solutions approchées .

Contrairement à l'écoulement potentiel, le fluide ne glisse pas sur la paroi, mais adhère à celle-ci .

*Etude de la couche limite
autour de l'aube*

III.2 HYPOTHESES DE LA COUCHE LIMITE :

Les équations de la couche limite ne sont autre que les équations de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire, en tenant compte des hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de la couche limite étant très faible devant les dimensions de l'obstacle, c'est à dire que l'on néglige l'épaisseur de la couche limite devant le rayon de la courbure de la surface de l'obstacle .
- On admet que la composante V de la vitesse, suivant la normale est plus petite devant U.
- Les dérivées par rapport à x sont petites devant les dérivées par rapport à y.

III.3 SIMPLIFICATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOCKES

Supposant que la paroi ayant une forme plate qui coïncide avec la direction ox, la direction oy sera perpendiculaire à celle-ci

Les équations de mouvement pour un écoulement plan s'écrivent :

- suivant l'axe des X :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots(\text{III.1})$$

- suivant l'axe des Y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \dots(\text{III.2})$$

- l'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots(\text{III.3})$$

*Etude de la couche limite
autour de l'aube*

Les équations de Navier - Stoks dimensionnelles pour la couche limite laminaire, et un écoulement stationnaire sont (voir Annexe 2):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots(\text{III.4})$$

tel que :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \dots(\text{III.5})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots(\text{III.3})$$

avec

$$y = 0 ; u = v = 0 \quad (\text{absence de glissement entre le fluide et la paroi})$$

et

$$u = v_{\theta}(x, t) \quad (\text{lorsque } y \text{ tend vers l'infini})$$

III.4 EPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE :

Quand on se déplace sur une perpendiculaire oy à la paroi, la vitesse U se rapproche assez rapidement d'une manière asymptotique de celle qui règne dans le fluide libre. On peut alors considérer l'épaisseur de la couche limite comme étant la distance :

$$\delta \text{ au delà de laquelle } \frac{u}{U} \gg 0.99 .$$

Mais cette frontière est difficile à déterminer expérimentalement car le gradient $\frac{\partial u}{\partial y} \cdot y$ est faible, aussi préfère-t-on retenir, pour caractériser l'épaisseur de la couche limite, des échelles susceptibles d'être définies avec davantage de précision. ce sont les suivants :

*Etude de la couche limite
autour de l'aube*

- Epaisseur de déplacement :

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_{\theta}}\right) dy \quad \dots(\text{III.6})$$

- Epaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\theta}} \left(1 - \frac{u}{U_{\theta}}\right) dy \quad \dots(\text{III.7})$$

- Epaisseur d'énergie cinétique :

$$\delta_{\theta} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\theta}} \left[1 - \left(\frac{u}{U_{\theta}}\right)^2\right] dy \quad \dots(\text{III.8})$$

REMARQUE

A la limite extérieure de la couche limite la composante U devient égale à $U(x,t)$, où le gradient de vitesse tend vers zéro .

$$\frac{\partial U}{\partial y} \rightarrow 0$$

L'équation de Navier - Stokes se simplifie à :

$$U_{\theta} \frac{dU_{\theta}}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad (\text{III.9})$$

l'intégrale de cette équation est :

$$P + \frac{1}{2} \rho U^2 = ct^e \quad (\text{III.10})$$

*Etude de la couche limite
autour de l'aube*

C'est l'équation de Bernoulli le long de la frontière de la couche limite .

En injectant l'équation (III.10) dans l'équation (III.4) on aura :

$$\rho \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \rho U \theta \frac{\partial U \theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.12})$$

III.5 CALCUL DE LA COUCHE LIMITE

III.5.1 DEFINITION DE L'EQUATION

Le système d'équations III.11 et III.12 peut être résolu par des méthodes approchées utilisant l'équation de VAN-KARMAN qui est obtenue en intégrant les deux membres de l'équation II.11 entre la paroi ($h=0$) et une hauteur $h=H$ supérieur à l'épaisseur de la couche limite :

$$\int_{y=0}^H \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \theta \frac{\partial U \theta}{\partial x} \right) dy = \frac{\mu}{\rho} \int_{y=0}^H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \quad \dots(\text{III.13})$$

$$\frac{\mu}{\rho} \int_{y=0}^H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{1}{\rho} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} - \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right]$$

avec

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} , \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Sont les forces de frottement par unité de surface l'une au point $y = H$ du fluide, qui est nulle, et l'autre sur la paroi .

*Etude de la couche limite
autour de l'aube*

En injectant ce terme dans le second membre de l'équation (III.13), on obtient :

$$\int_{y=0}^H \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_{\theta} \frac{\partial U_{\theta}}{\partial x} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad \dots(\text{III.14})$$

Cette équation peut être valide aussi bien pour un écoulement laminaire que pour un écoulement turbulent à condition que U et Y désignent les moyennes des composantes de la vitesse .

d'après l'équation (III.12) on a:

$$V = - \int_{y=0}^y \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Remplaçant cette l'équation dans (III.12), on aura

$$\int_{y=0}^H \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_{y=0}^y \frac{\partial u}{\partial x} - U_{\theta} \frac{\partial U_{\theta}}{\partial x} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$y=0 ; u=0 , v=0$$

$$y=H ; U=U_{\theta}$$

En intégrant le terme par partie on obtient :

$$\int_{y=0}^H \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_{y=0}^y \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = -U_{\theta} \int_{y=0}^H \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy - \int_{y=0}^H \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy$$

*Etude de la couche limite
autour de l'aube*

d'ou

$$\int_{y=0}^H \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - U_{\theta} \frac{\partial u}{\partial x} - U_{\theta} \frac{\partial U_{\theta}}{\partial x} \right) dy = \frac{\tau_0}{\rho}$$

et finalement on obtient :

$$\int_{y=0}^H \frac{\partial}{\partial x} [u(U_{\theta} - u)] dy + \frac{d}{dx} \int_{y=0}^H [u(U_{\theta} - u)] dy = \frac{\tau_0}{\rho} \quad \dots(\text{III.15})$$

En faisant tendre H vers l'infini, on peut déterminer les épaisseurs qui sont exprimées dans (III.6) et (III.7), et par substitution dans l'équation III.15 on obtient :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = U_{\theta} \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta_1) U_{\theta} \frac{dU_{\theta}}{dx} \quad \dots(\text{III.16})$$

cette équation différentielle du premier ordre, est appelée " Equation intégrale de Kármán ".

III.5.2 METHODE APPROXIMATIVE DE A.TH.VON KARMAN ET K.POHL HAUSSEN POUR LES ECOULEMENT BIDIRECTIONNELS

Pour intégrer l'équation (III 16), Paul Haussen a proposé la fonction de vitesse u sous la forme suivante

$$\frac{U}{U_{\theta}} = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4$$

avec

$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$: La distance adimensionnelle à partir de la paroi .

$\delta(x)$: L'épaisseur de la couche limite au point considéré .

*Etude de la couche limite
autour de l'aube*

Les conditions aux limites sont :

• $Y=0 ; u=0$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -U\theta \frac{dU\theta}{dx}$$

• $y=0 ; u=U\theta$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

Les constantes a,b,c et d sont données par

$$a = 2 + \frac{A}{6}$$

$$b = -\frac{A}{2}$$

$$c = -2 + \frac{A}{2}$$

$$d = 1 - \frac{A}{6}$$

l'équation du moment (III.16) peut être réécrite sous la forme condensée suivante [13]

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(k)}{U\theta} \quad \dots(\text{III.17})$$

avec

$$k = \frac{\theta^2}{v} \frac{dU\theta}{dx} \quad \dots(\text{III.17.a})$$

$$z = \frac{\theta^2}{v} \quad \dots(\text{III.17.b})$$

$$F(k) = 2 \left(\frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{a^2}{9072} \right) \left[2 - \frac{116A}{315} + \left(\frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) A^2 + \frac{a^3}{4536} \right] \quad \dots(\text{III.17.c})$$

*Etude de la couche limite
autour de l'aube*

en combinant les équations (III.7) et (III.8) avec le l'équation (III.a) on obtient :

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{A^2}{9072} \quad \dots(\text{III.17.d})$$

C'est une équation différentielle non linéaire, du premier ordre d'inconnue $z = \frac{\theta^2}{\nu}$,
en fonction de l'abscisse curviligne X

III.6 SOLUTION DE L'EQUATION (III.17)

Avec les valeurs initiales [13]

$$z_0 = \frac{k_0}{U_{\theta 0}} = \frac{0.0770}{U_{\theta 0}}$$

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_0 = -0.0652 \frac{U_{\theta 0}}{U_{\theta 0}^2}$$

l'équation (III.17) peut être intégrée, à partir du point d'arrêt pour lequel, $A=7.052$
et $k_0 = 0.0770$, jusqu'au point de décollement à $\tau = 0$ ($A = -12$, $k = -0.1567$)

III.7 COUPLAGE CALCUL D'ECOULEMENT AVEC COUCHE LIMITE :

Connaissant les coordonnées des canaux pour un écoulement parfait dans les deux plans, on supposera que les épaisseurs du déplacement sont nuls .

Les vitesses sont en premier lieu déterminées dans les deux plans ,où les lignes de courants constituent les contours des canaux parfaits.

Notre but est de déterminer le canal réel, en négligeant le décollement de la couche limite, qui apparaît sur l'extrados de l'aube.

L'épaisseur de couche limite en aval du point de décollement, est obtenu par extrapolation linéaire .

Après avoir calculer l'épaisseur de la couche limite sur les parois, on le retranchera du canal parfait pour chaque plan .

III. 8 RECAPITULATION

Pour le calcul de la couche limite on considère :

- La répartition de la vitesse $U_\theta(x)$ et ses dérivées qui sont données en fonction de l'abscisse curviligne, elles sont calculées dans les deux plans .
- L'intégration de l'équation (III.17) nous permet de déterminer $Z(x)$, et le second facteur $K(x)$, ce qui conduit au calcul de $\theta(x)$ d'après l'équation du premier facteur de forme $A(x)$.
- L'épaisseur de la couche limite $\delta(x)$ est déterminé à partir de l'équation (III.17.d)

CHAPITRE IV

ETUDE DES PERTES

IV .1 INTRODUCTION

Naturellement, si on veut considérer le fonctionnement d'une turbomachine, il faudra faire l'analyse des différentes pertes.

On peut regrouper les pertes occasionnées dans une turbomachine en sept principales pertes : (voir Annexe 3)

- pertes par profile
- pertes par écoulements secondaires.
- pertes par fuites .
- pertes par ondes de chocs.
- pertes par incidence .
- pertes par blocage .

IV 2 ETUDE DES DIFFERENTS MODELES :

Pour arriver à une bonne approximation des pertes occasionnées dans une turbomachine, plusieurs modèles ont été proposés, dont on cite :

- Le modèle de Soderberg .
- Le modèle de W.R. Howthorne .
- Le modèle d'Ainley

Le modèle utilisé dans notre étude est le modèle de Soderberg, qui regroupe l'étude de toutes les pertes.

IV.3 DESCRIPTION DU MODELES DE SODERBERG :

L'idée est de regrouper toutes les pertes induites dans une machine dans un seul coefficient qui est fonction des variables :

$$\xi = f\left(\frac{s}{l}, R_e, \frac{H}{L}, \frac{t}{l}, \epsilon\right) \quad \dots(\text{IV.3.a})$$

tel que :

$$s = \frac{t}{l}$$

avec

- t : épaisseur de l'aube
- l : la corde
- R_e : nombre de Reynolds
- H : hauteur d'aube
- b : pas d'aube

Plusieurs tests ont été effectués pour aboutir à une expression analytique, qui donne un coefficient :

$$C_y = 2 \left(\frac{s}{b}\right) (\text{tg } \alpha_2 + \text{tg } \alpha_1) \cos^2 \alpha_2 \quad \dots(\text{IV.3.b})$$

- $R_e \leq 10^5$ et $\frac{H}{b} \in [3, 1]$:

avec l'hypothèse d'un angle d'incidence nul le coefficient de perte nominale ξ , est exprimé en fonction de la déflexion et le rapport $\frac{t}{l}$ sous la forme :

$$\xi = \sum_{i=0}^4 a_i \epsilon^i \quad \dots(\text{IV.3.c})$$

Etude des pertes

tel que :

$$s \in [0.1, 0.9]$$

et

$$a_0 = 0.868982 - 8.03124 \cdot s + 19.586 \cdot s^2$$

$$a_1 = -0.05639 + 0.0522925 \cdot s - 1.2043 \cdot s^2$$

$$a_2 = 0.0015 - 0.0132514 \cdot s + 0.028956 \cdot s^2$$

$$a_3 = -1.71902 \cdot 10^{-5} + 1.47994 \cdot 10^{-4} \cdot s - 3.1 \cdot 10^{-4} \cdot s^2$$

$$a_4 = 7.3715 \cdot 10^{-8} - 6.23 \cdot 10^{-7} \cdot s + 1.2849 \cdot 10^{-6} \cdot s^2$$

- Pour $Re \leq 10^5$ et $\frac{H}{b} > \frac{1}{3}$

Le coefficient de perte est donné par :

$$\xi'' = (1 + \xi) \left(0.975 + 0.075 \cdot \frac{b}{H} \right) - 1 \quad \dots(\text{IV.3.d})$$

- Pour $Re > 10^5$

le coefficient de perte est donné par :

$$\xi''' = \frac{10^5}{Re_c} \xi'' \quad \dots(\text{IV.3.e})$$

avec Re_c : Le nombre de Reynolds au col .

IV 4. APPLICATION DU MODELE DE SODERBERG

Vue la simplicité de la mise en oeuvre numérique du modèle de Soderberg qui présente les deux principaux avantages :

- toutes les pertes sont assemblées dans un seul coefficient .
- L'existence des formules empiriques des coefficients de perte .

On a choisi ce modèle en suivant les étapes suivantes :

- a- calcul de l'enthalpie à l'entrée de la roue
- b- calcul de l'enthalpie à la sortie de la roue .
- c- calcul de la vitesse en chaque noeud

IV.4.1 CALCUL DE L'ENTHALPIE A L'ENTREE DE LA ROUE :

L'enthalpie est donnée par la formule :

$$h = c_p T \quad \dots(\text{IV4.a})$$

c_p : est la chaleur spécifique (supposée constante)

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \quad \dots(1)$$

et

$$P V = m R T \quad \dots(2)$$

En introduisant (1) et (2) dans (IV4.a) on obtient :

$$h_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad \dots(\text{IV4.b})$$

IV.4.2 CALCUL DE L'ENTHALPIE A LA SORTIE .

L'enthalpie à la sortie est donnée par :

$$h_2 = h_1 - \Delta h \quad (\text{IV.4.c})$$

avec : Δh : Chute d'enthalpie

Le coefficient de perte pour un rotor est donné par :

$$\xi = \frac{W_2^2}{2 (h_1 - h_2 s)} \quad (\text{IV.4.d})$$

avec :

ξ : est la fonction de $\frac{t}{l}$ et ε

ε : est la déflection

$$\varepsilon = \alpha_1 + \alpha_2$$

ainsi on aura :

$$W_2 = \sqrt{2 \xi \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right)} \quad (\text{IV.4.e})$$

cette formule nous permet de calculer la vitesse relative à la sortie de la roue .

On suppose que la chute d'enthalpie est linéairement distribuée suivant la ligne moyenne, cette supposition est justifiée par le fait que le coefficient de frottement est supposé constant .

La distribution des vitesses suivant la ligne moyenne est possible en faisant une interpolation linéaire suivant la longueur de la ligne moyenne .

La formule d'interpolation est donnée par :

$$W = W_1 + \frac{\Delta L}{L} (W_2 - W_1) \quad (\text{IV.4.f})$$

avec :

ΔL : la longueur curviligne entre l'entrée et le noued, là on calcul la vitesse .

L : la longueur de la ligne moyenne .

V. 5 RECAPITULATION

Une description exacte d'un écoulement dans une turbomachine ne peut être possible sans l'introduction des pertes .

Le modèle appliqué est "modèle de Soderberg ", qui nous permet de calculer la vitesse relative dans chaque noeud de la ligne moyenne (en utilisant l'équation VI.4.f) et ceci après la détermination de la vitesse d'entrée (en utilisant l'équation VI.4 e).

CHAPITRE V

PARTIE NUMERIQUE

INTRODUCTION

Pour la résolution des équations aux dérivées partielles du second ordre et elliptiques, on peut approcher les solutions selon trois méthodes : la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies et la méthode intégrale . Dans notre approche, on a adopté la solution en discrétisant nos équations en différences finies .

V.1 DESCRIPTION DES MAILLAGES UTILISES :

Le choix du maillage est fait suivant la précision voulue du calcul dans un domaine bien précis .Les types de maillages utilisés sont :

- Maillage rectangulaire droit .
- Maillage rectangulaire incliné .
- Maillage curviligne .

V.1.1 DESCRIPTION DU MAILLAGE RECTANGULAIRE DROIT :

Vue l'uniformité de la distribution des noeuds dans les deux domaines : entrée et sortie, le maillage rectangulaire droit donne une précision acceptable du calcul d'écoulement .

La détermination des différentes dérivées partielles en chaque noeud consiste à faire un développement de Taylor d'ordre deux (pour la fonction de courant) .

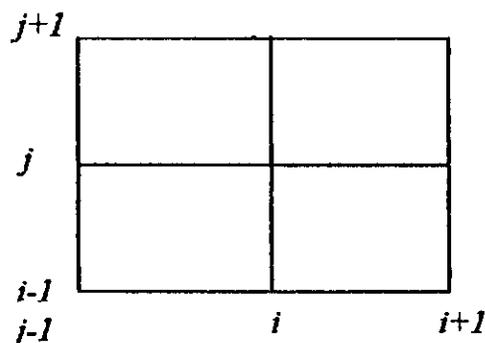


fig V.1 schéma du maillage rectangulaire droit

Les dérivées utilisées sont discrétisées sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\psi|_{i+1,j} - \psi|_{i-1,j}}{2 \Delta x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\psi|_{i,j+1} - \psi|_{i,j-1}}{2 \Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{\psi|_{i+1,j} + \psi|_{i-1,j} - 2\psi|_{i,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\psi|_{i,j+1} + \psi|_{i,j-1} - 2\psi|_{i,j}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\psi|_{i+1,j+1} - \psi|_{i+1,j-1} + \psi|_{i-1,j-1} - \psi|_{i-1,j+1}}{4 \Delta x \Delta y}$$

V.1.2 DISCRETISATION DU MODELE DE MARSH :

Deux types de maillages sont utilisés pour l'étude des écoulements dans un domaine fictif, après une transformation conforme du domaine réel .

a°/ Maillage curviligne :

le domaine fictif de calcul, est un domaine curviligne régulier, le calcul des dérivées se fait en faisant un développement de Taylor d'ordre quatre et on obtient un système de dimension 9X9 .

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{1}{k^2} [-2\psi|_{i,j} + \psi|_{i,j+1} + \psi|_{i,j-1}]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} &= \text{xypsi1} \psi|_{i,j} + \text{xypsi2} \psi|_{i,j+1} + \text{xypsi3} \psi|_{i+1,j-1} + \text{xypsi4} \psi|_{i-2,j} \\ &+ \text{xypsi5} \psi|_{i,j-1} + \text{xypsi6} \psi|_{i,j+2} + \text{xypsi7} \psi|_{i+1,j+1} + \text{xypsi8} \psi|_{i+1,j} \\ &+ \text{xypsi9} \psi|_{i-1,j} + \text{xypsi10} \psi|_{i-1,j-1} \end{aligned}$$

B°/ MAILLAGE RECTANGULAIRE INCLINE :

C'est un cas particulier du modèle de Marsh qui consiste à transformer le domaine réel en un domaine rectangulaire incliné, l'inclinaison des droites parallèles doit être choisie suivant le type de la machine (type d'écoulement) . Les hypothèses de travail sont :

- Le pas suivant X est le même noté (l)
- Le pas suivant Y est le même noté (k)
- Les lignes sont parallèles et de même pente .

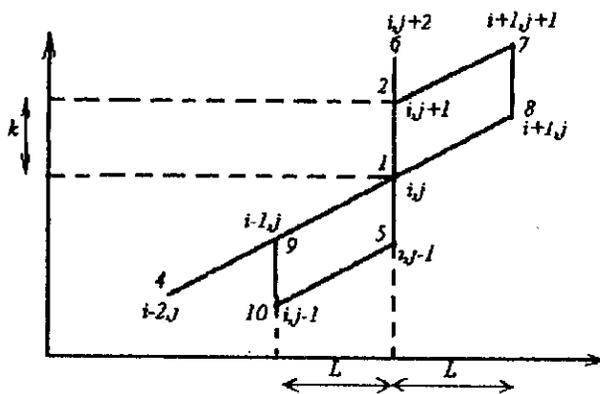


fig V.3 schéma du maillage rectangulaire incliné

On aboutit par suite à un système de variables différentielles donné par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{1}{6l} \left[3(1+\varepsilon)\psi|_{i,j} + 2\psi|_{i+1,j} + \psi|_{i-2,j} - 6\psi|_{i-1,j} \right. \\ \left. - \varepsilon \left(6\psi|_{i,j+1} - 2\psi|_{i,j-1} - \psi|_{i,j+2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{1}{6k} \left[-3\psi|_{i,j} + 6\psi|_{i,j+1} - 2\psi|_{i,j-1} - \psi|_{i,j+2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{1}{l^2} \left[-2(1+\varepsilon+\varepsilon^2)\psi|_{i,j} + (\varepsilon+\varepsilon^2)(\psi|_{i,j+1} + \psi|_{i,j-1}) \right. \\ \left. - \varepsilon(\psi|_{i-1,j-1} + \psi|_{i+1,j+1}) + (1+\varepsilon)(\psi|_{i+1,j} + \psi|_{i,j-1}) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{1}{k^2} \left[2\psi|_{i,j} + \psi|_{i,j+1} + \psi|_{i,j-1} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} = \frac{1}{2lk} \left[(\psi|_{i+1,j+1} + \psi|_{i-1,j-1}) - (\psi|_{i+1,j} + \psi|_{i-1,j}) \right. \\ \left. (1+2\varepsilon)(\psi|_{i,j+1} + \psi|_{i,j-1} - 2\psi|_{i,j}) \right]$$

avec

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y|_{i+1,j} - y|_{i,j}}{l}$$

V.2 DISCRETISATION DES DEUX ECOULEMENTS :

V.2.1 DISCRETISATION DE L'ECOULEMENT MERIDIONAL :

Le maillage utilisé est curviligne puisqu'il s'adapte à la géométrie du canal. On fait une transformation du domaine réel au domaine fictif, où les coordonnées des noeuds sont choisies arbitrairement par un Jacobien.

soit la fonction $f = f(z, r)$ avec $z = z(x, y)$ et $r = r(x, y)$

alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{1}{J} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right] \end{cases}$$

avec

$$J = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}$$

après substitution de chaque terme des dérivées discrétisées du domaine curviligne, dans l'équation de WU (dans le domaine méridional), on aboutit à la forme suivante :

$$\begin{aligned} c1\psi|_{i,j} + c2\psi|_{i+1,j} + c3\psi|_{i-1,j} + c4\psi|_{i-2,j} + c5\psi|_{i,j-1} + c6\psi|_{i,j+1} + c7\psi|_{i,j+2} \\ c8\psi|_{i+1,j+1} + c9\psi|_{i+1,j-1} + c10\psi|_{i-1,j-1} = q0 \end{aligned}$$

V.2.2 DISCRETISATION DE L'ÉCOULEMENT AUBE A AUBE :

Le maillage utilisé est un maillage rectangulaire incliné, car il s'adapte à la forme du canal .

on fait le changement de variables suivant :

$$h = r \theta$$

$$\sin \alpha = \frac{\Delta r}{\Delta m}$$

$$\cos \alpha = \frac{\Delta z}{\Delta m}$$

et en négligeant la courbure du plan devant la longueur du canal

$$x = h$$

$$y = y \cos \alpha$$

donc, on aboutit à une transformée de l'équation de WU, qui est sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2 b \rho \omega \sin \alpha = A \frac{\partial \psi}{\partial y} + B \frac{\partial \psi}{\partial x} + C$$

avec

$$A = \frac{\partial}{\partial y} (\ln(\rho))$$

$$B = \cos^2 \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \left(\frac{\rho b}{r} \right) \right)$$

$$C = -2 \rho b \omega \sin \alpha$$

l'équation discrétisée est :

$$\psi|_{i,j} = \frac{1}{(c_1 + a_1)} \left[(a_2 - c_2) \psi|_{i,j+1} + (a_3 - c_2 - c_4) \psi|_{i,j-1} - c_3 \psi|_{i-1,j-1} \right. \\ \left. - c_3 \psi|_{i+1,j+1} + (a_5 - c_4) \psi|_{i+1,j} + a_4 \psi|_{i,j+2} + a_6 \psi|_{i-2,j} + a_7 \psi|_{i-1,j} + c \right]$$

V.3 CALCUL DE LA DENSITE

De la conservation de la rothalpie, suivant une ligne de courant dans le plan méridional, et suivant toute la surface aube à aube

On obtient la formule donnant la densité :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left[1 - \frac{W_r^2 + V_\theta^2 + W_z^2 + 2 \omega (r_0 V_\theta^0 - \omega r V_\theta)}{V_0^2} \right]$$

V.4 CALCUL QUASI TRIDIMENSIONNEL :

- La vitesse suivant la ligne moyenne est donnée par :

$$\vec{W} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \psi_1 \wedge \vec{\nabla} \psi_2 \quad \dots (II.1)$$

- suivant la ligne moyenne, la densité est :

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} W^2 \frac{\rho_0}{p_0} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

- après l'initialisation de la vitesse et la densité, la convergence est vérifiée simultanément sur les deux grandeurs, une fois la convergence obtenue, on calcul les autres paramètres de l'écoulement.

V.5 CALCUL DES CANAUX REELS DANS LES DEUX PLANS :

- plan méridional :

Le canal méridional réel est obtenu en retranchant la surépaisseur de la couche limite sur le moyeu (en négligeant l'engrèvement sur le flasque devant les pertes par fuite), du canal parfait.

- plan aube à aube :

Le plan réel aube à aube est obtenu en retranchant la surépaisseur de la couche limite sur l'extrados et l'intrados, du canal parfait.

V.6 CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE :

L'épaisseur de la couche limite est obtenue par la résolution de l'équation :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F(k)}{U_{\infty}}$$

qui permet de donner la forme de l'épaisseur de la couche limite sous la forme :

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{a^2}{9072}$$

V.7 METHODE DE RESOLUTION

Les fonctions de courant exprimées en chaque point du maillage, forme le système d'équations suivant :

$$[A]\{\psi\} = [B]$$

dont la dimension est égale au nombre de points du maillage contenu dans le domaine .

la résolution de ce système utilise la méthode itérative de relaxation, en appliquant la formule :

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^n + \Omega D^n \psi$$

$$\psi_{i,j}^{n+1} = a_{i+1,j}^n \psi_{i+1,j}^n + a_{i-1,j}^n \psi_{i-1,j}^n + a_{i,j+1}^n \psi_{i,j+1}^n + a_{i,j-1}^n \psi_{i,j-1}^n - b_{i,j}^n$$

$$D^n \psi = -\psi^{n+1} - \psi^n$$

Ω étant un coefficient de relaxation

- Choix du facteur de relaxation :

Le facteur de relaxation joue un rôle prépondérant dans la convergence de la méthode de relaxation, pour le calcul des fonctions de courant on choisit un coefficient compris entre 0.01 et 0.1 tandis que pour le calcul des densité on a introduit un coefficient de relaxation variable .

V.8 CONVERGENCE DU CALCUL :

Pour la convergence on a utilisé la notion des erreurs relatives, donc la solution est considérée stable si la somme des écarts entre les potentiels correspondants à deux itérations consécutives, est inférieure à une valeur prés définie ϵ

$$\sum_{i,j} \left(\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n \right) \leq \epsilon$$

FIG A Organigramme du code de calcul d'un écoulement parfait

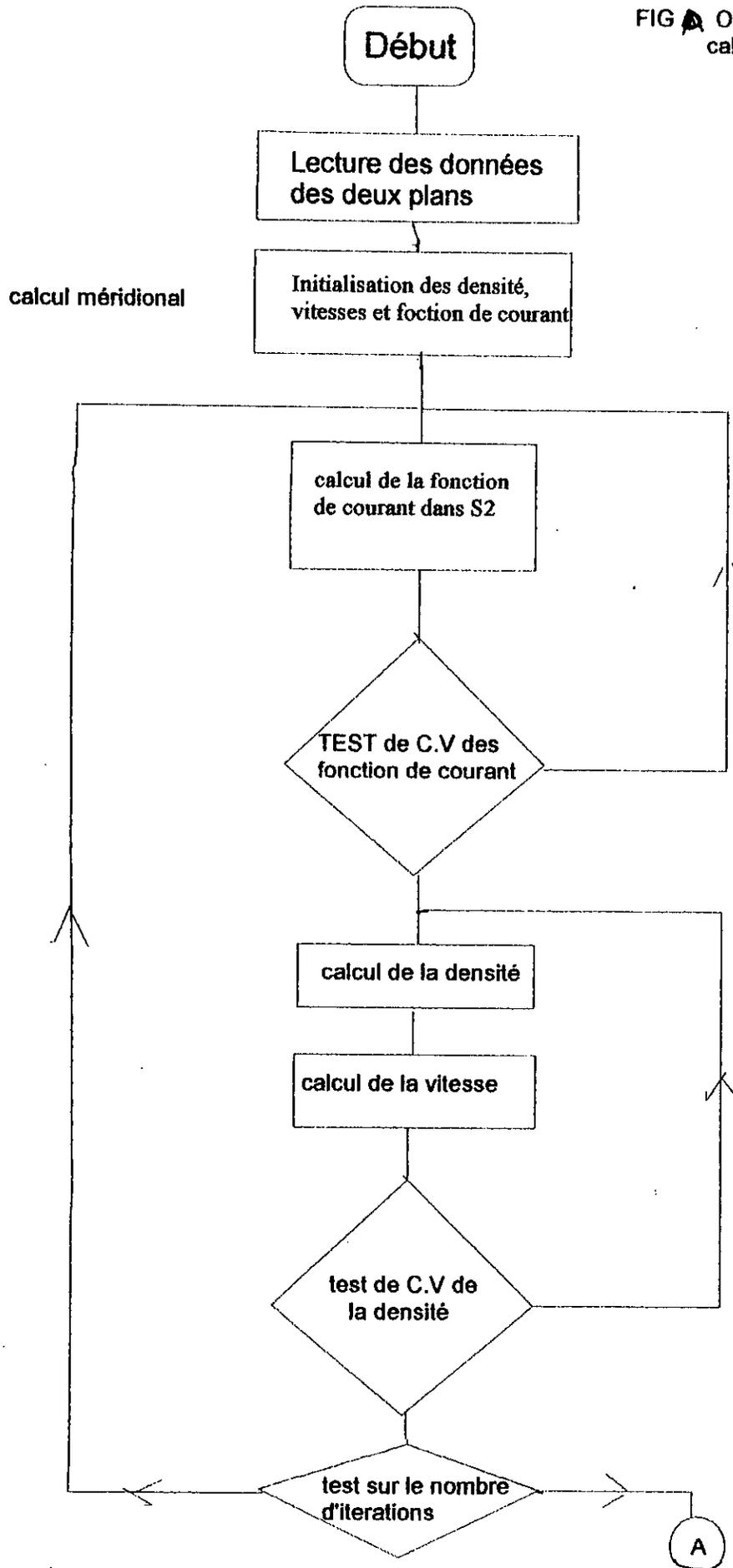


FIG B. Suite organigramme du code de calcul d'un écoulement parfait

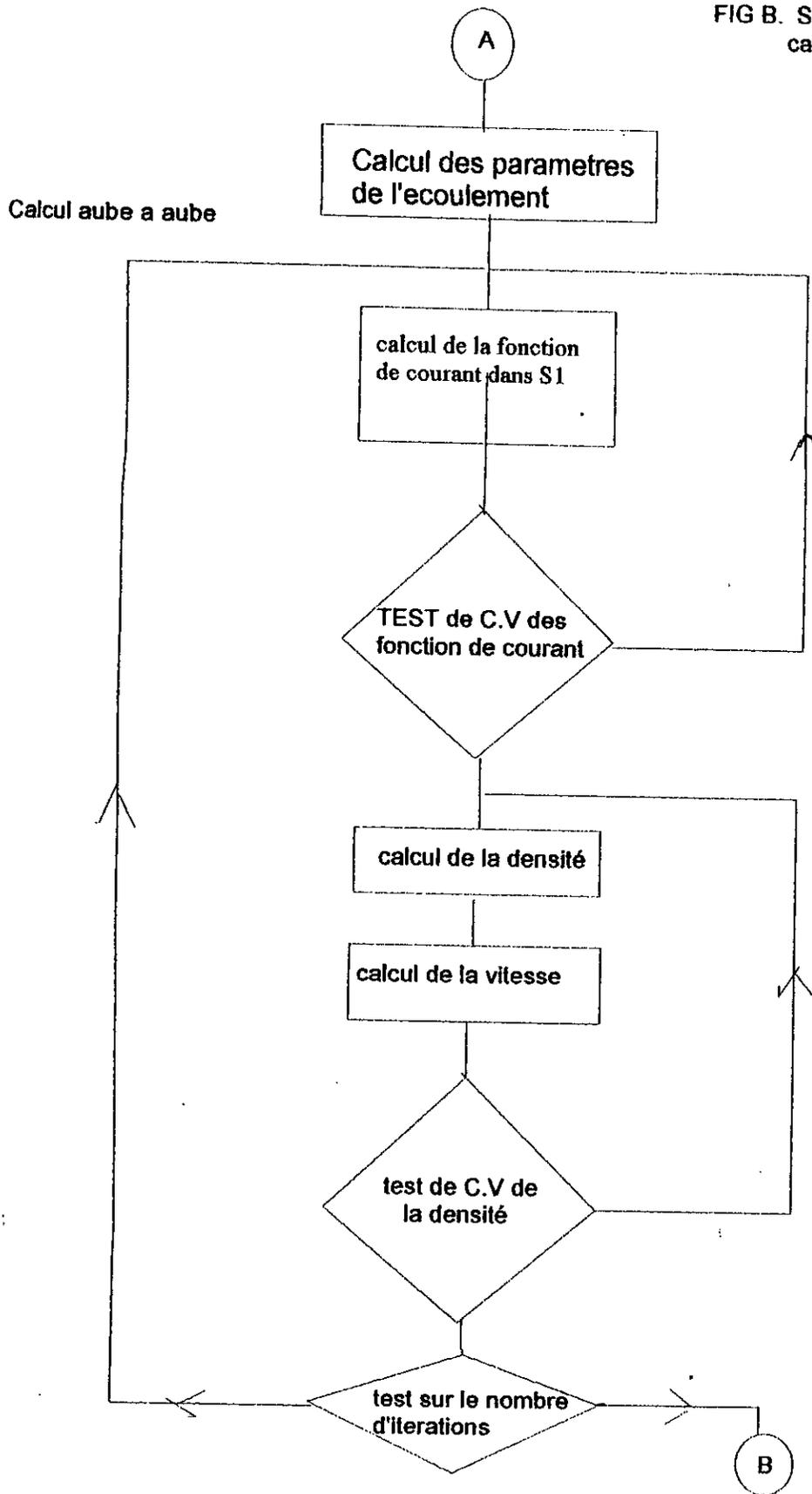


FIG C . Suite organigramme du code de calcul d'un écoulement parfait

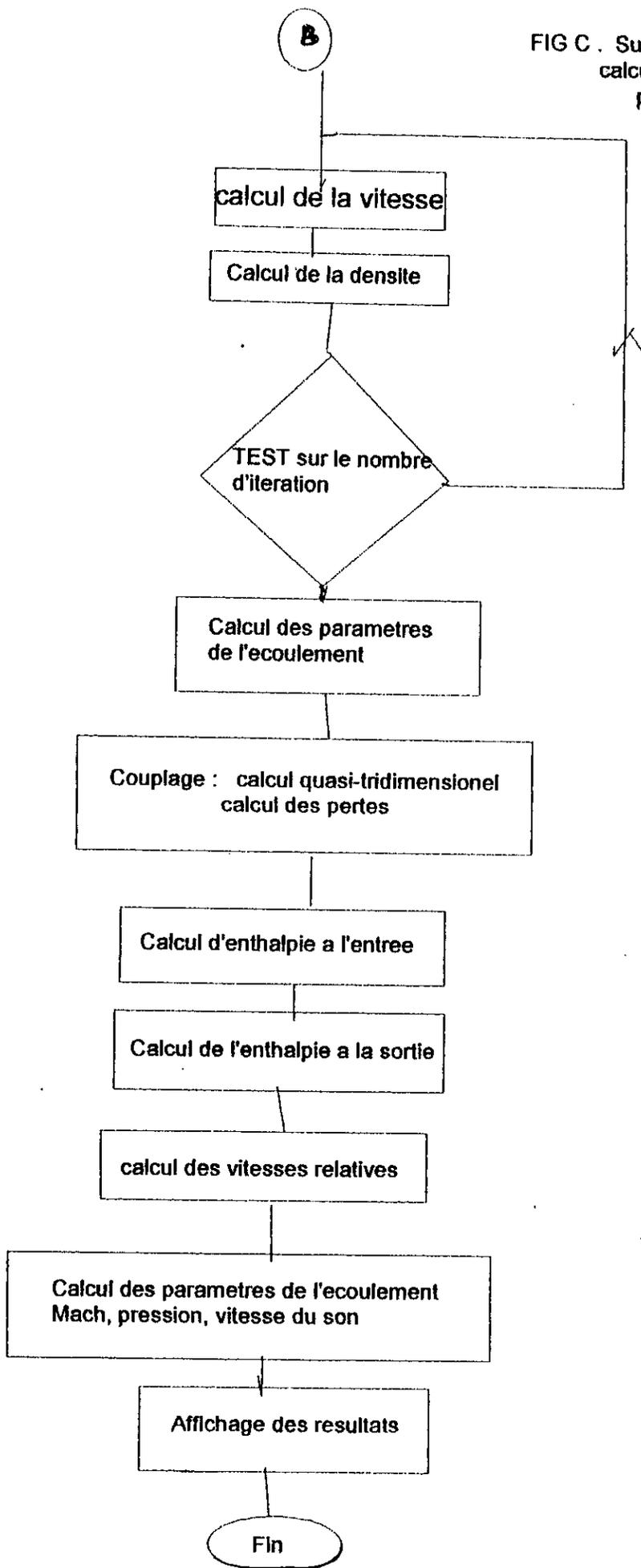


FIG 1 Organigramme du code de calcul d'un écoulement

réel

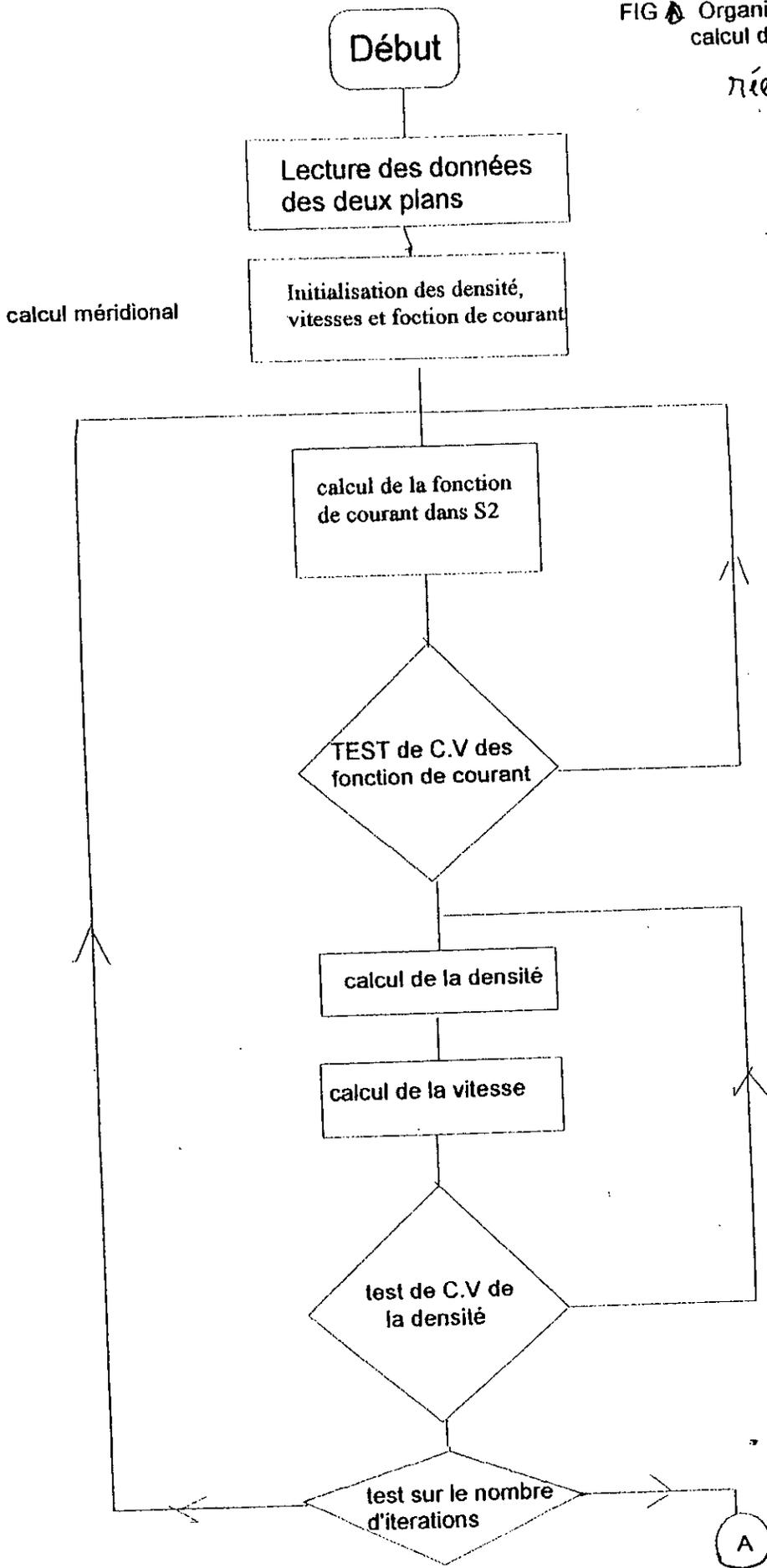
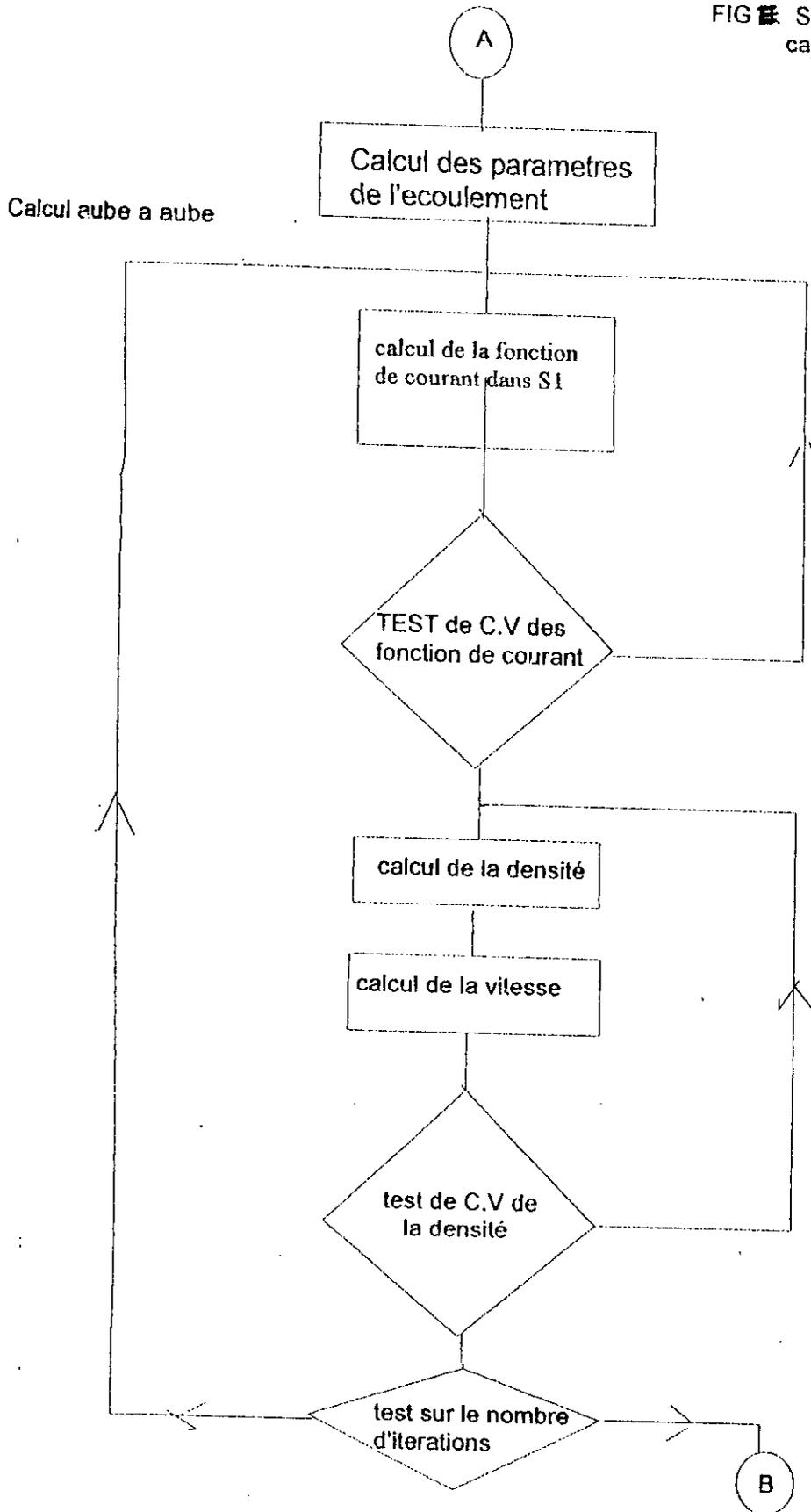
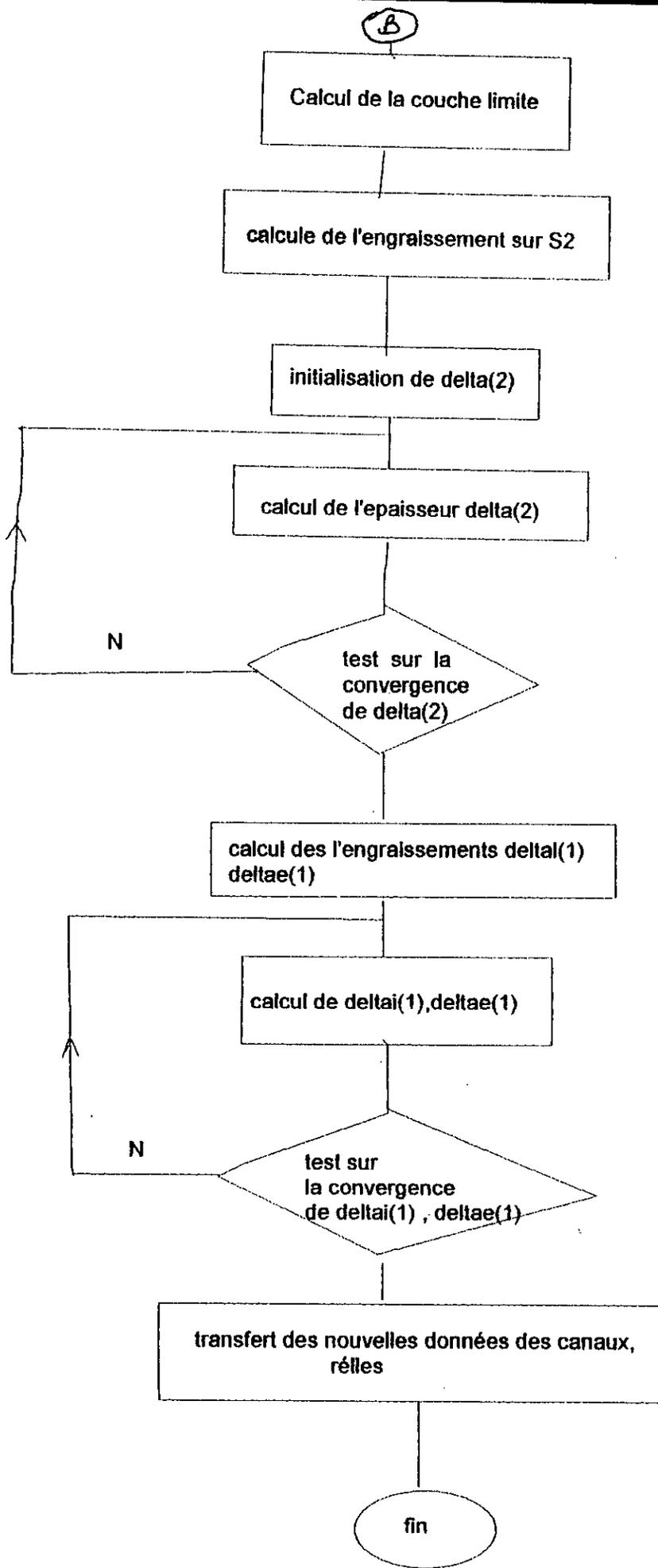


FIG 2 Suite organigramme du code de calcul d'un écoulement

réel





CHAPITRE VI

ANALYSE DES RESULTATS

Les résultats obtenus dans le plan aube à aube sont conforme à la réalité, ceci est justifié par le fait que : le plan aube à aube présente une géométrie simple (une canalisation de déviation), donc le taux de compression doit subir une très légère augmentation (de 0.98 à 1.03), de même pour la densité, alors que le nombre de Mach, est très stable (on a des variations de l'ordre de 0.01 entre les ligne iso-Mach).

Pour le domaine méridional le nombre de Mach est décroissant suivant la corde jusqu'à la sortie, contrairement à la variation de la densité et le taux de compression .

D'après les résultats obtenues, on peut affirmer que les meilleures conditions de travail sont au voisinage du nombre de Mach d'entrée $M = 0.6$, car celui ci donne un meilleurs taux de compression et vient juste avant l'apparition de la saturation de l'écoulement , qui apparait de façon clair partir d'un Mach d'entrée $M = 0.8$, cette remarque permet de classer les résultats suivant deux catégories : avant saturation et après saturation .

La première catégorie : avant saturation pour des nombres de Mach variants entre $M = 0.1$ à $M = 0.6$, on remarque une augmentation du taux de compression et de la densité, alors que le nombre de Mach pour $M = 0.2$ et $M = 0.4$ montre une survitesse à l'entrée dû à un transfert énergétique, tandis que pour $M = 0.6$ la répartition du nombre de Mach, donne une distribution régulière et continuellement décroissante .

La deuxième catégorie : après saturation, elle présente une forte saturation de l'écoulement, après une légère augmentation du taux de compression.

la saturation est donnée comme suite :

- pour $M = 0.8$: Elle apparait à 40 % de l'entrée .
- pour $M = 1.0$: Elle apparait à 25 % de l'entrée .
- pour $M = 1.2$: Elle apparait à 23 % de l'entrée .

Et on remarque également un mauvais transfert énergétique à l'entrée et une distribution quasi-constante du nombre de Mach (autour de 0.4); il en est de même pour le taux de compression qui reste proche de l'unité.

Analyse des résultats

Concernent le calcul de la couche limite les surépaisseurs dûes à la couche limite sont presque invariantes, pour le plan aube à aube ceci est dûe à la variation limitée des vitesses (du nombre de Mach) à l'intérieur du canal, pour ce plan la couche limite est très fine sur l'extrados, mais on peut remarquer des variations de cette surépaisseur d'une application à l'autre .

l'épaisseur de la couche limite la plus importante avant saturation est celle correspondant à l'application où $M = 0.6$.

L'analyse des caractéristiques de l'écoulement dans le domaine réel se fait à travers deux zones du domaine :

De l'entrée au col (contraction maximales de la veine fluide), le taux de compression varie lentement en premier temps et de façon accélérée à l'approche du col, puis décroît jusqu'à la sortie par contre, le nombre de Mach décroît lentement avant le col et varie d'une manière accélérée après le col.

APPLICATIONS

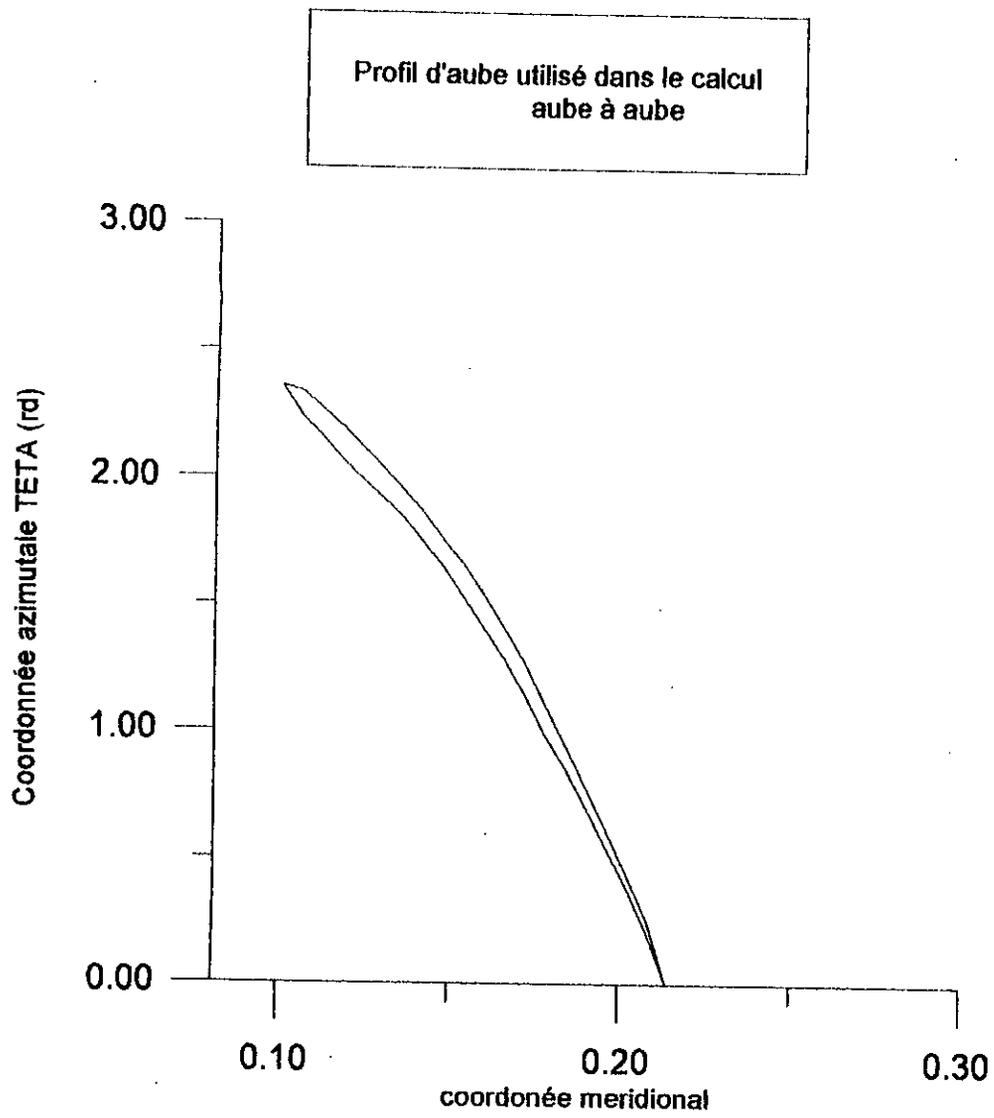


FIG. I

Application N° 1

Avec les conditions d'entrée :

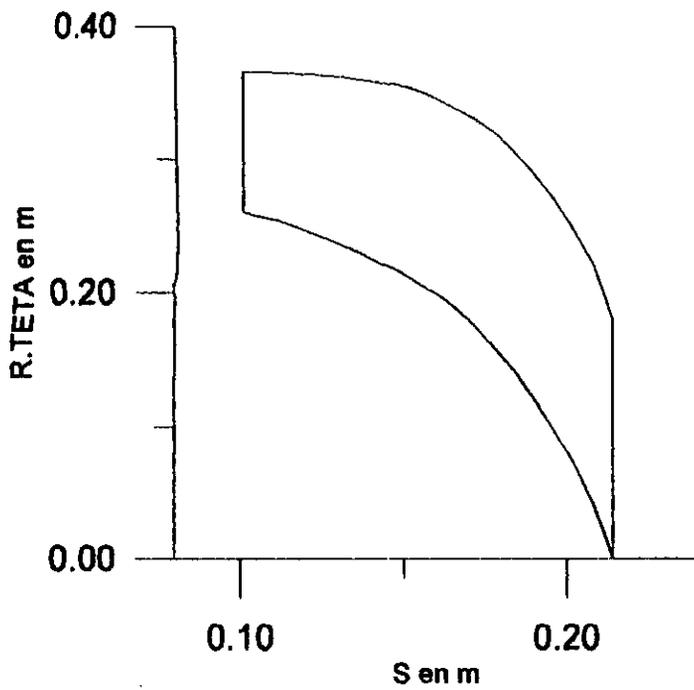
Le nombre de Mach : 0.2

Le débit : 6.2592 m³ / s

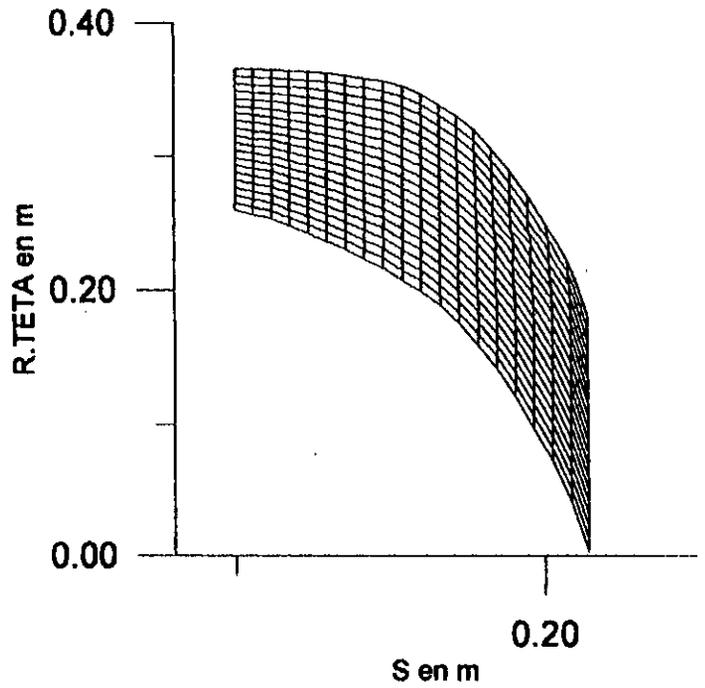
La vitesse de rotation : 1000 tr / mn

FIG 1.1 Description des domaines de calcul

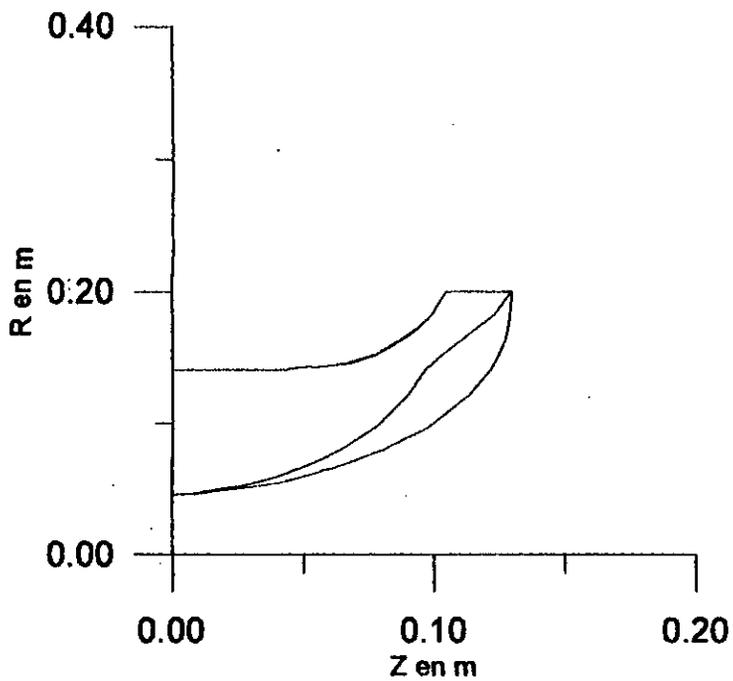
Epaisseur de la couche limite dans le plan aube à aube



Maillage rectangulaire incliné appliqué dans le plan aube à aube domaine réel



Epaisseur de la couche limite dans le plan meridional



Maillage curviligne appliqué dans le plan meridional réel

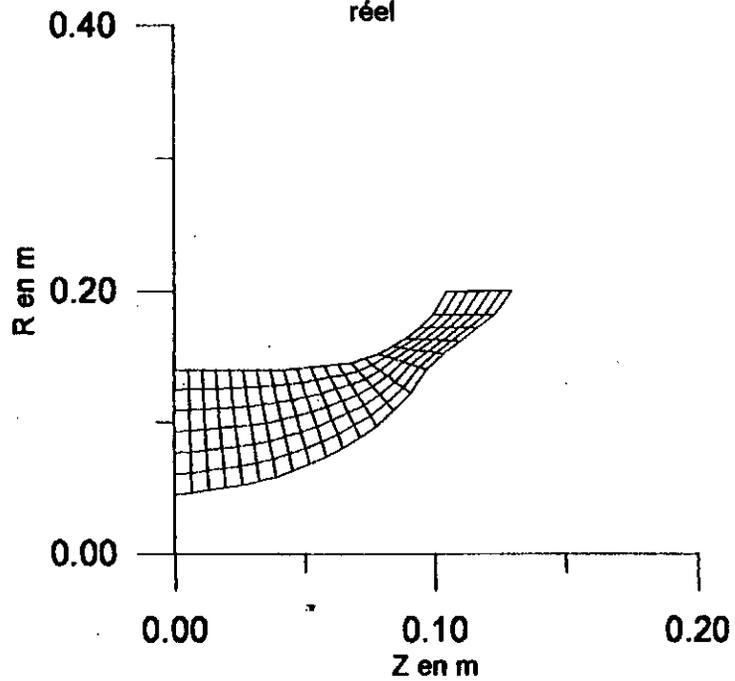
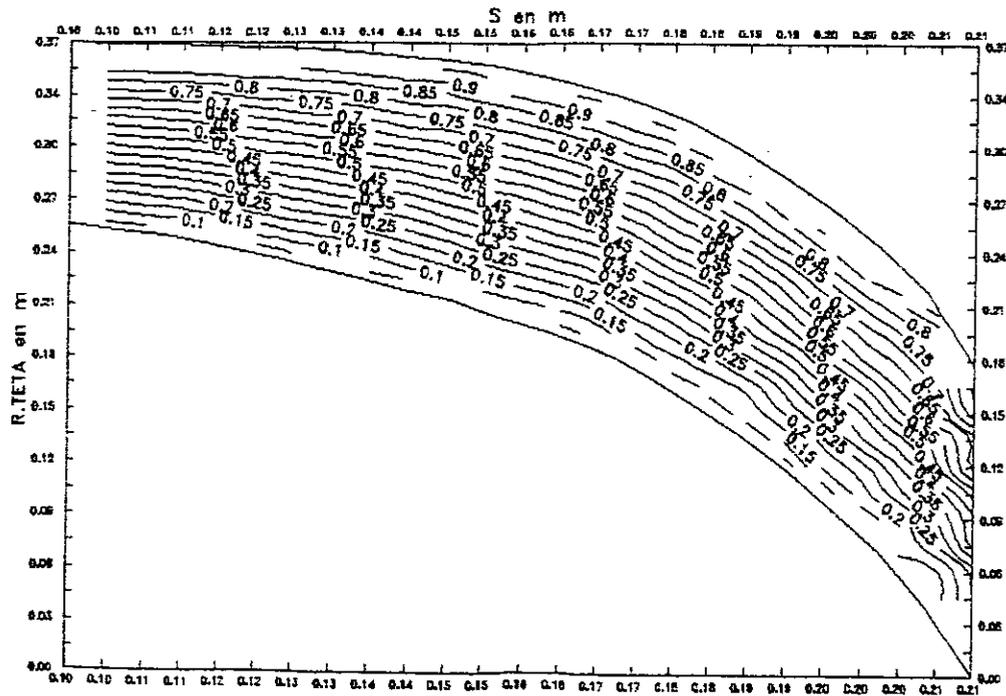
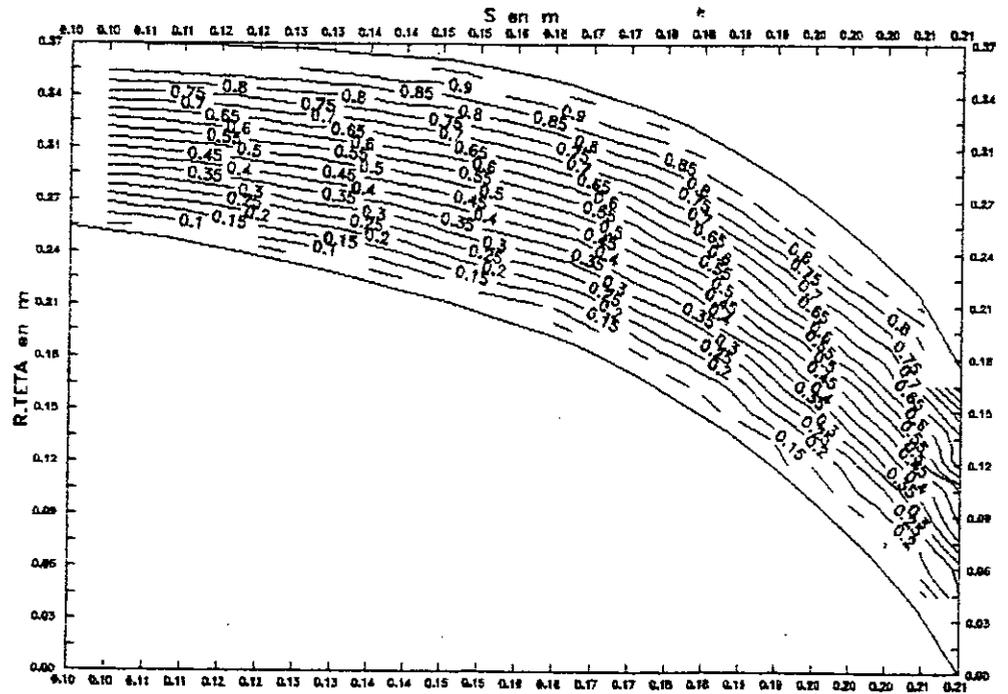


FIG 1.2

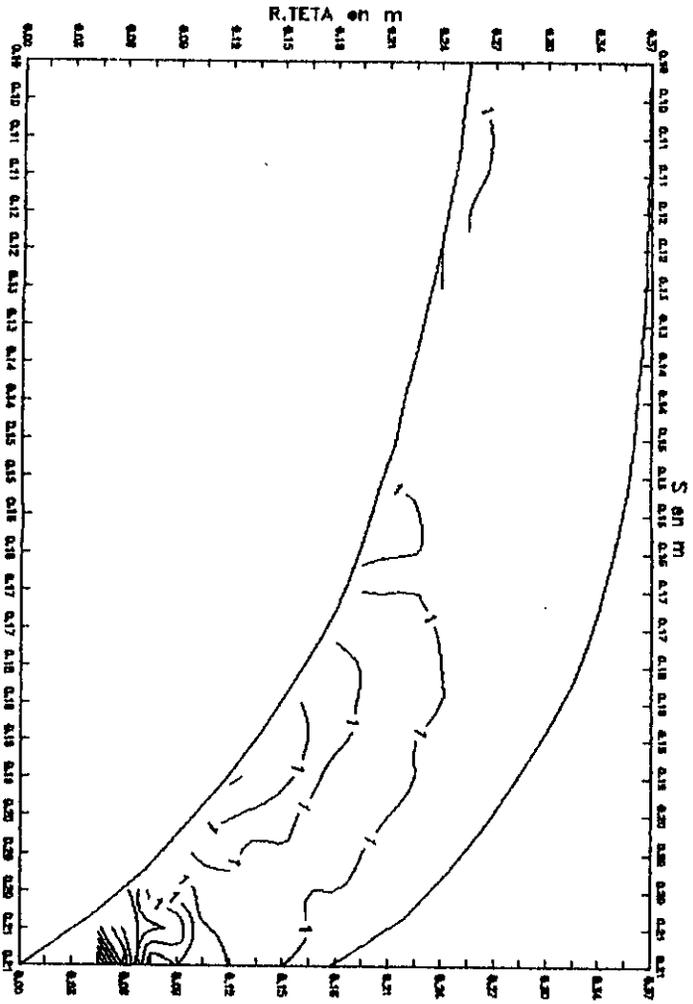
Repartition des lignes de courant
dans le canal aube a cube parfait



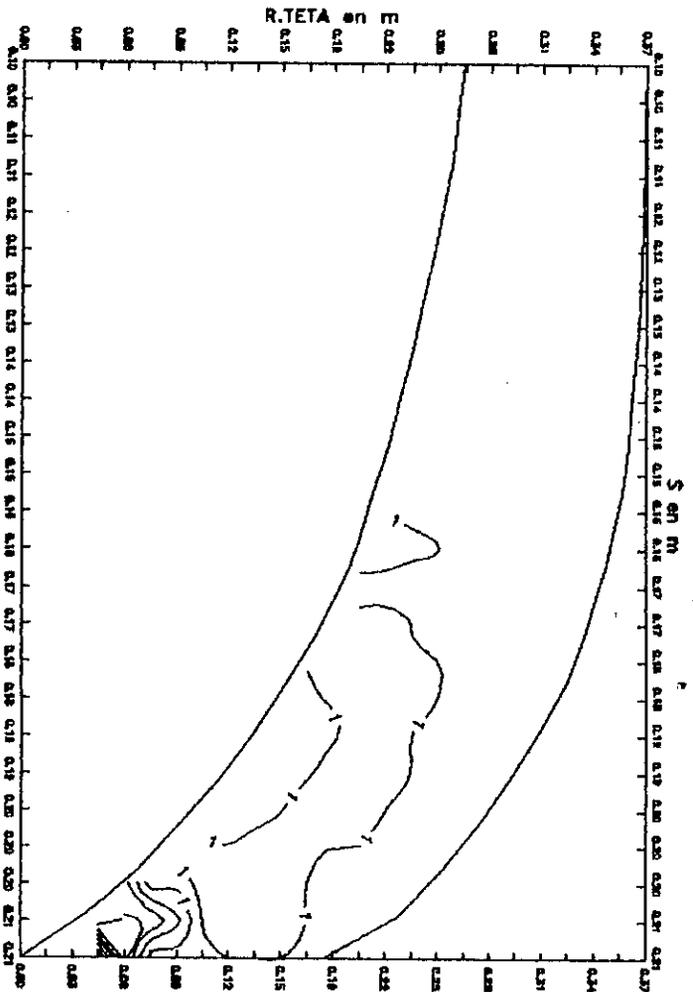
Repartition des lignes de courant
Dans le canal aube a aube reel



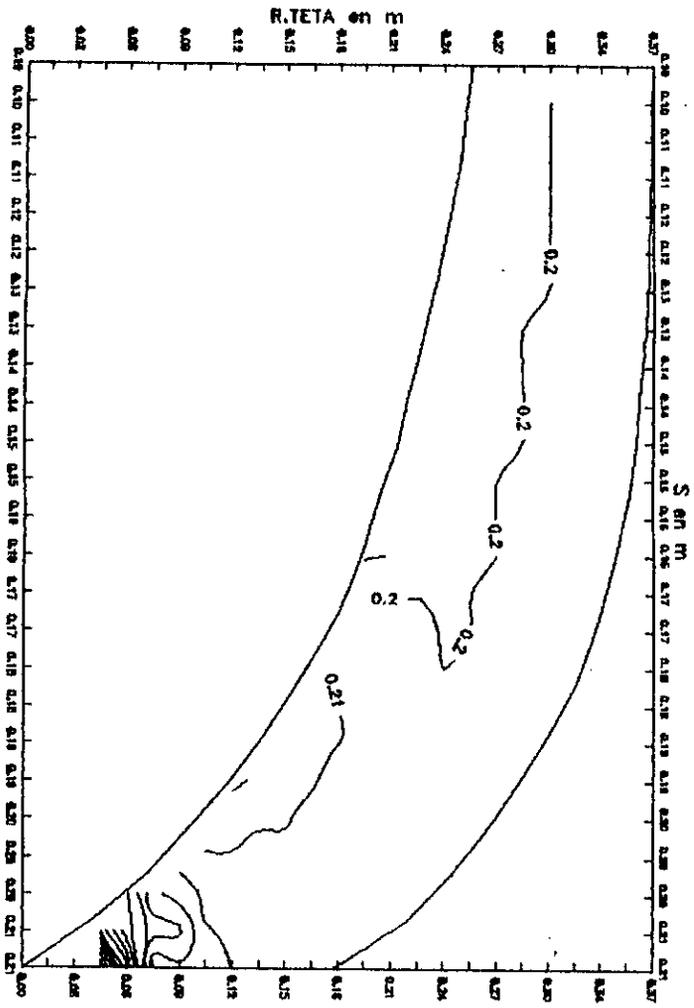
Repartition du taux de compression dans le canal aube a aube parfait



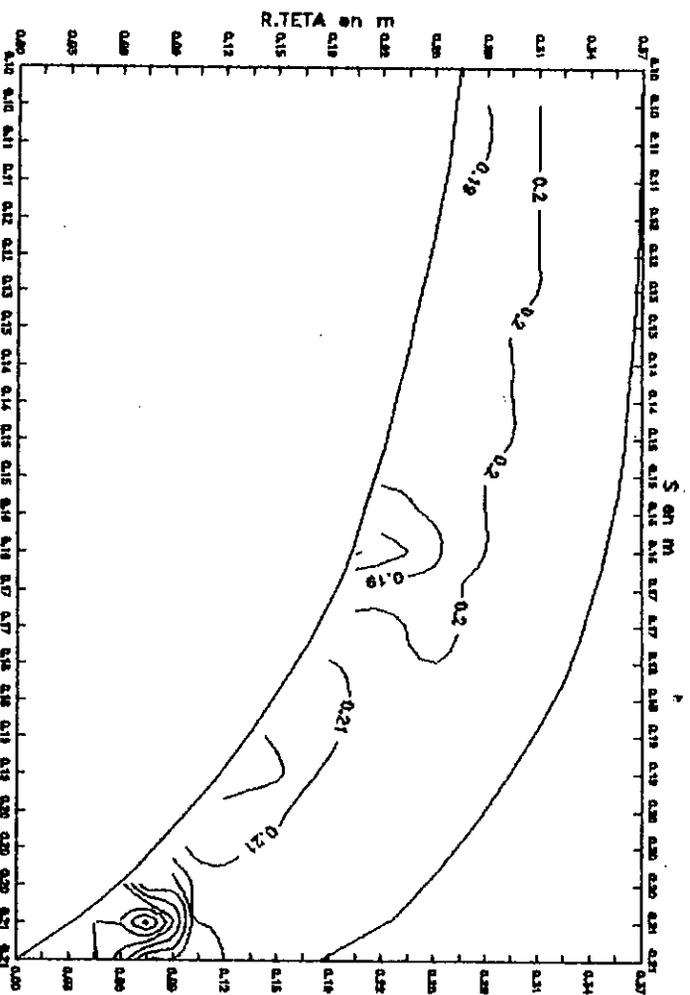
Repartition du taux de compression dans le canal aube a aube reel



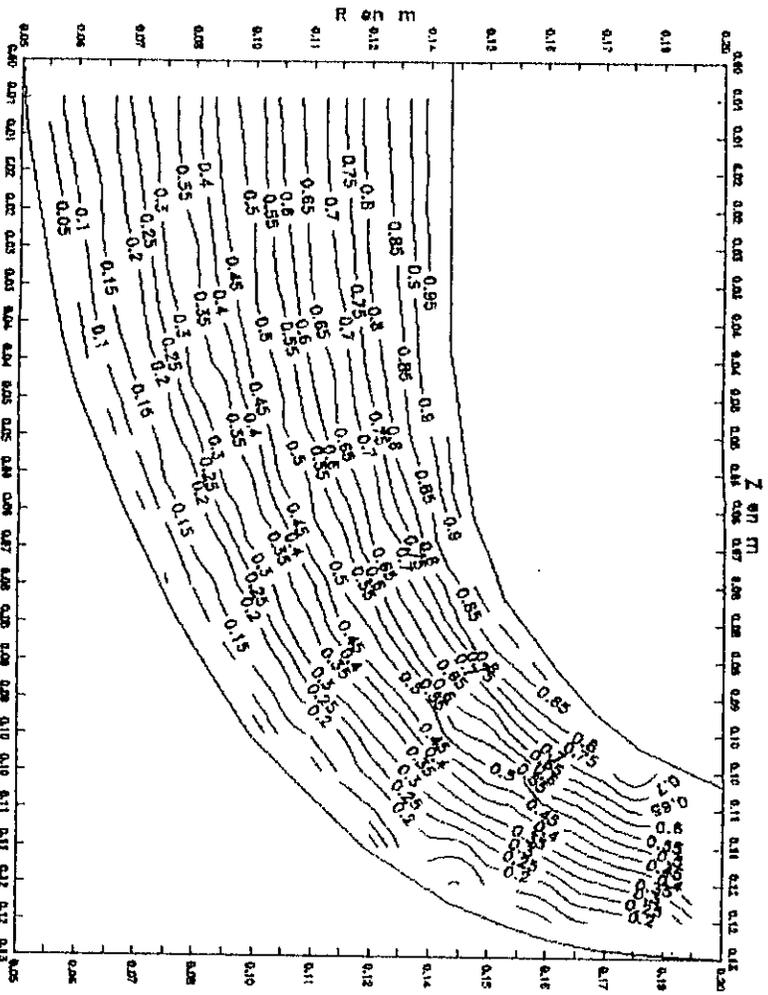
Repartition du Moch dans le canal cube a aube profond



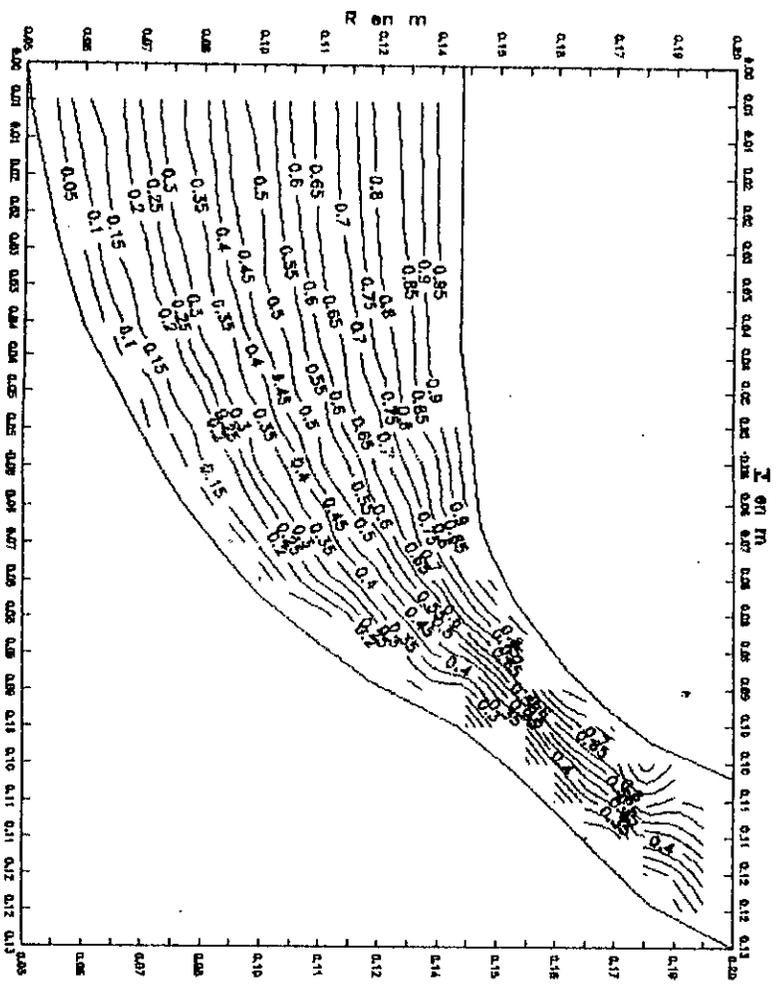
Repartition du Moch dans le canal cube a aube reel



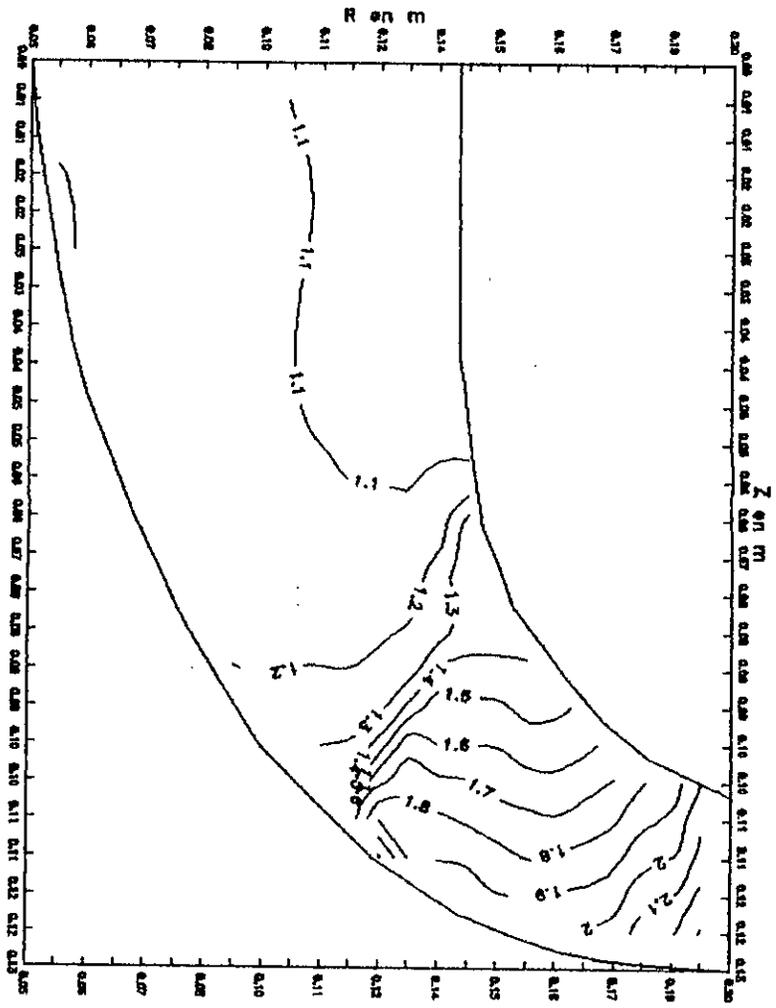
Repartition des lignes de courant dans le canal meridional partiel



Repartition des lignes de courant dans le canal meridional real



Repartition du taux de compression dans le canal meridional partiel



Repartition du taux de compression dans le canal meridional reel

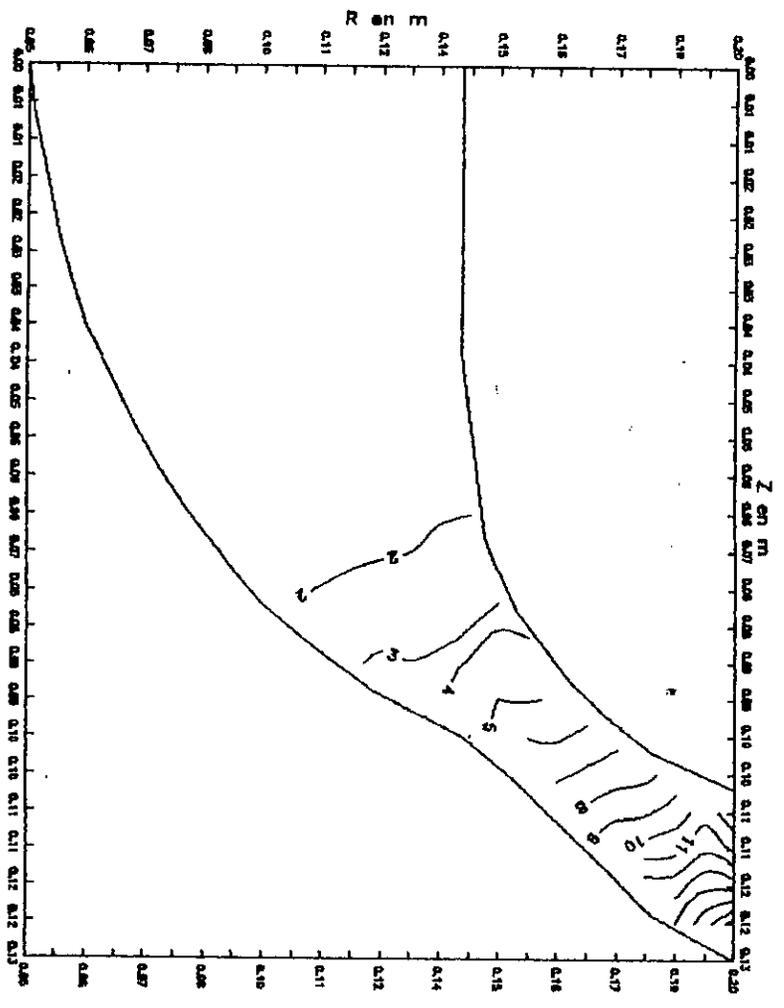
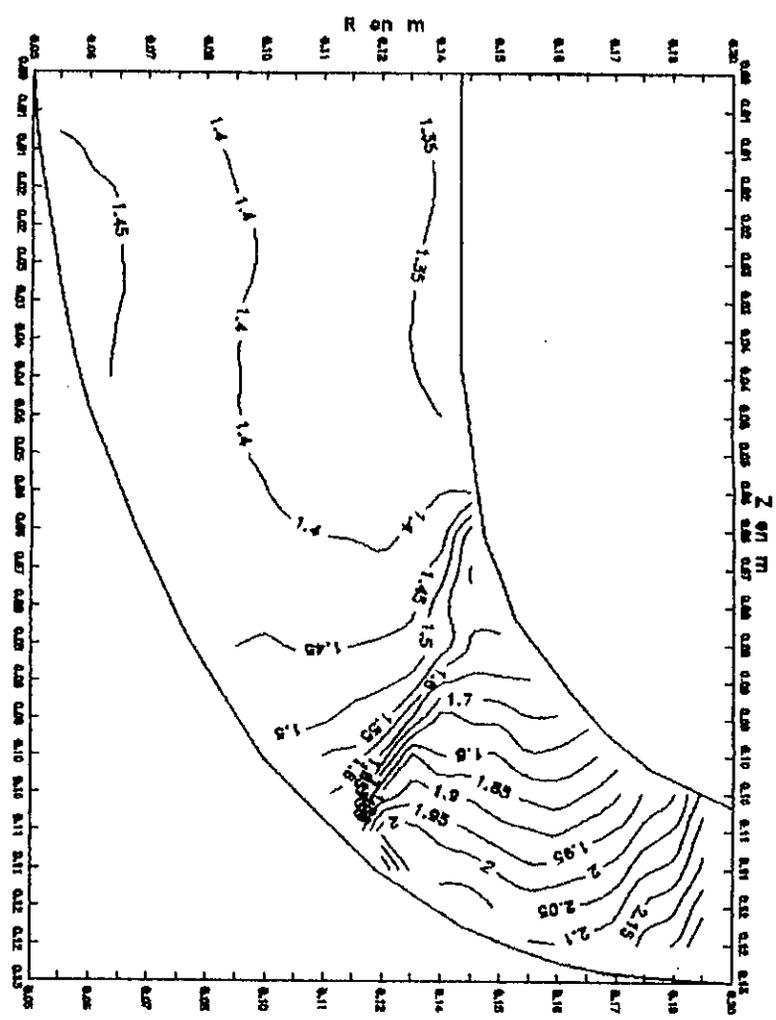
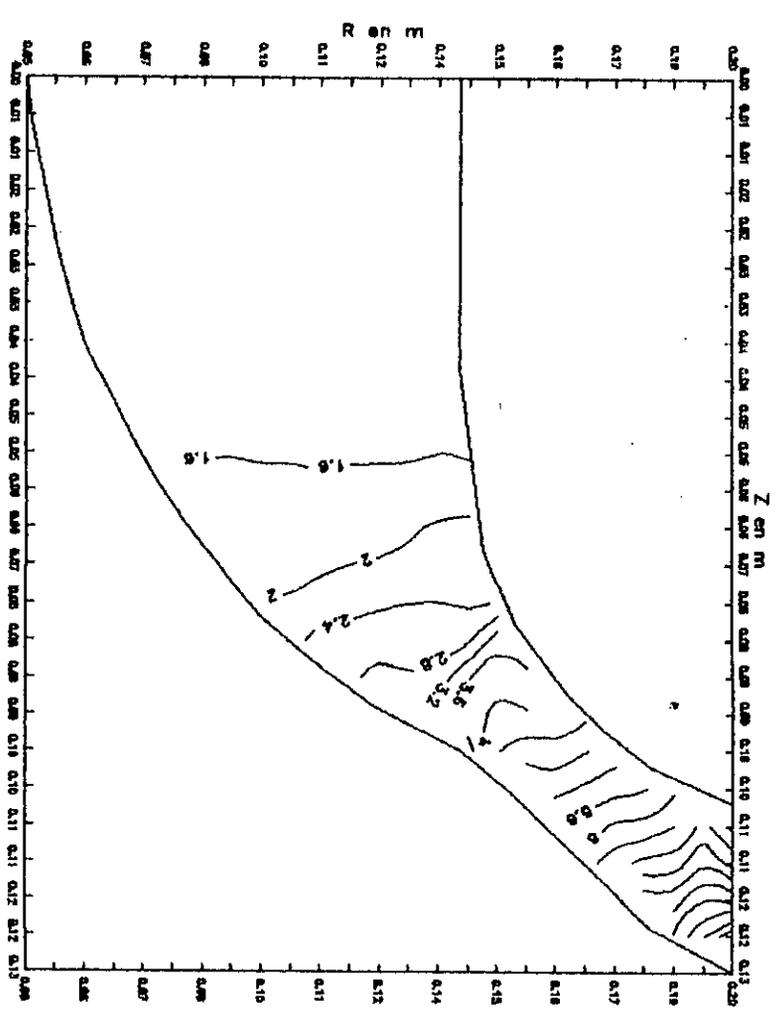


FIG 1.8

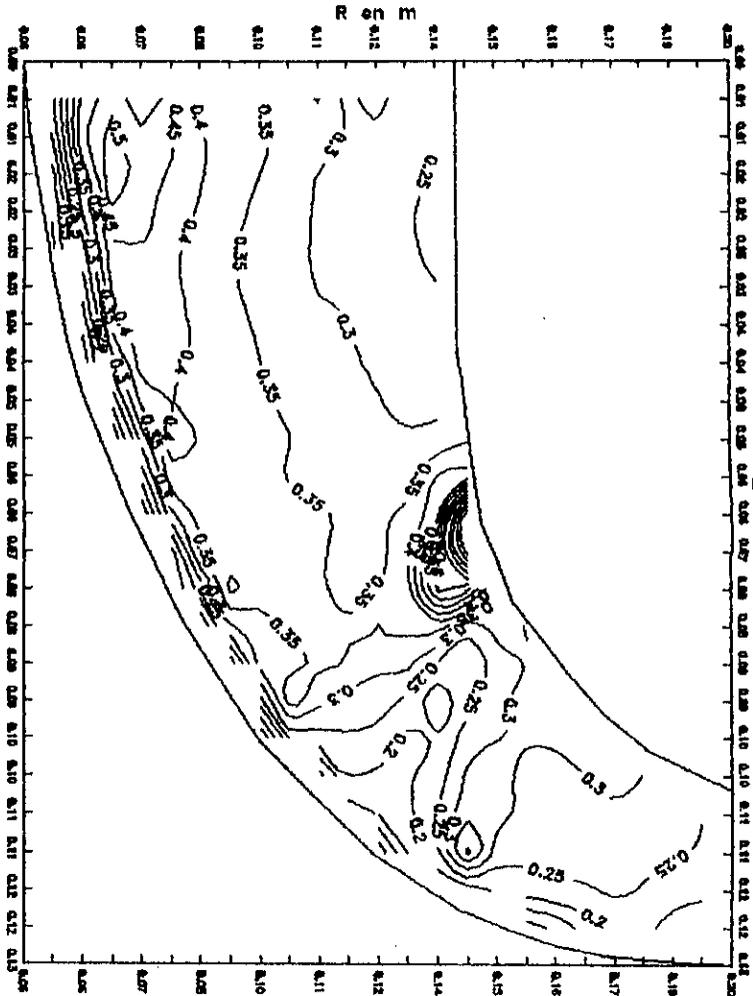
Repartition de la densite dans le canal meridional portatif



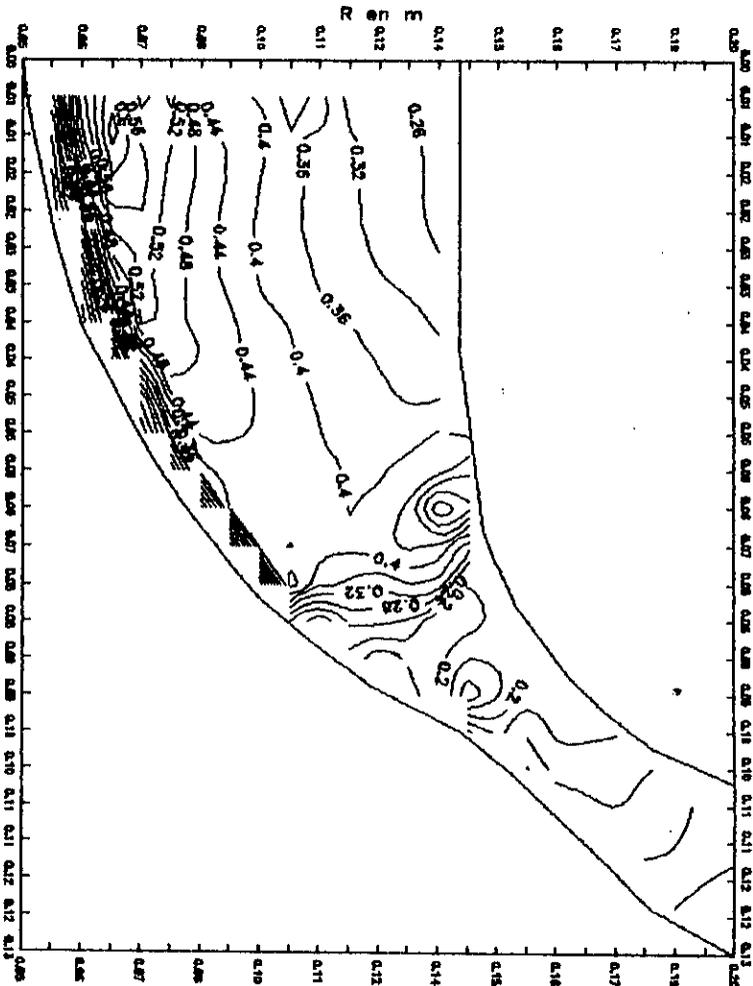
Repartition de la densite dans le canal meridional reel



Repartition du Moch dans
le canal meridional parfait



Repartition du Moch dans
le canal meridional reel



Application N° 2

Avec les conditions d'entrée :

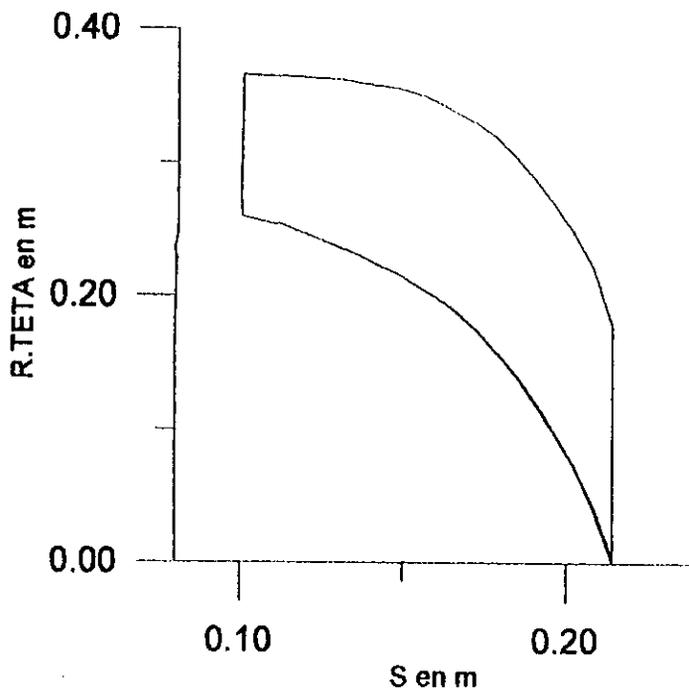
Le nombre de Mach : 0.4

Le débit : 12.5185 m³ / s

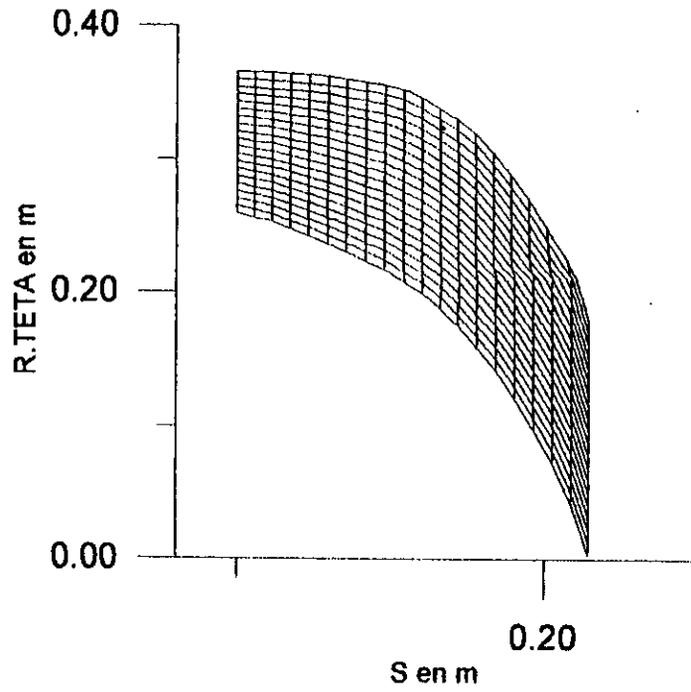
La vitesse de rotation : 1000 tr / mn

FIG II.1 Description des domaines de calcul

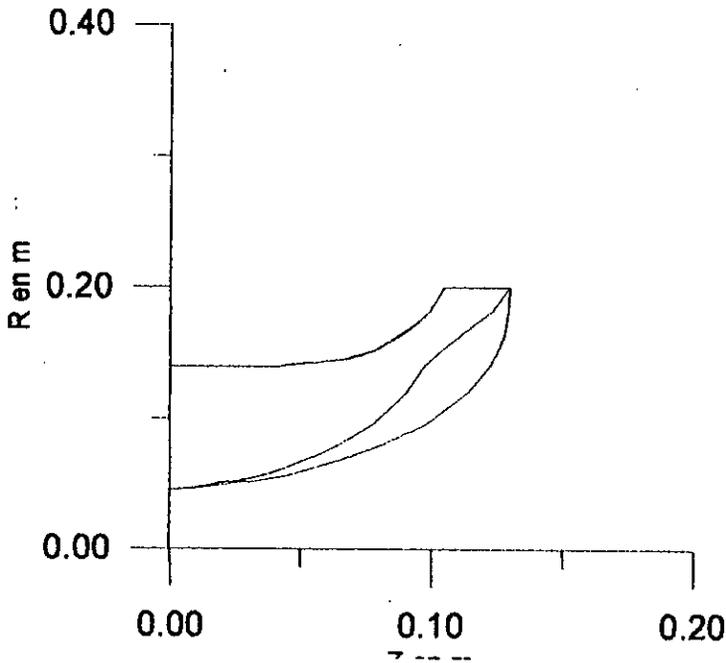
Epaisseur de la couche limite dans le plan aube à aube



Maillage rectangulaire incliné appliqué dans le plan aube à aube domaine réel



Epaisseur de la couche limite dans le plan meridional



Maillage curviligne appliqué dans le plan meridional réel

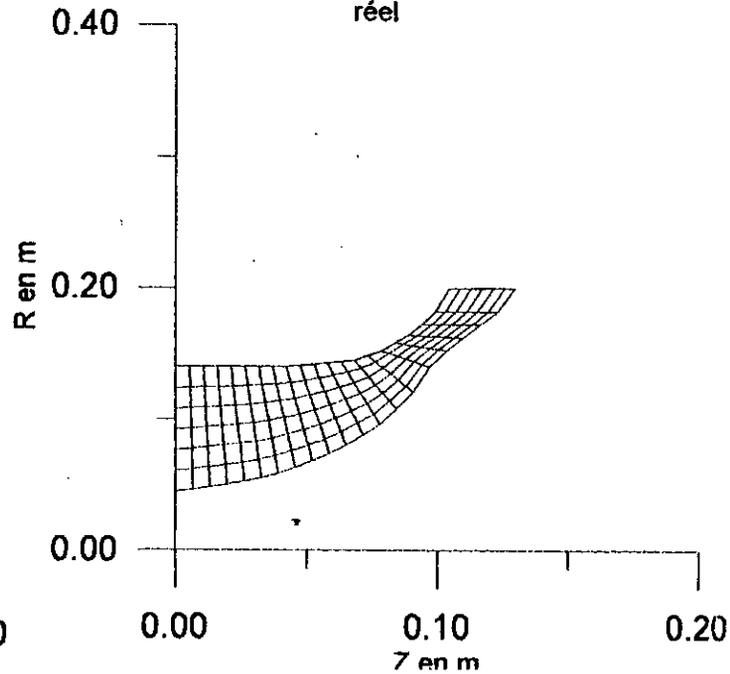
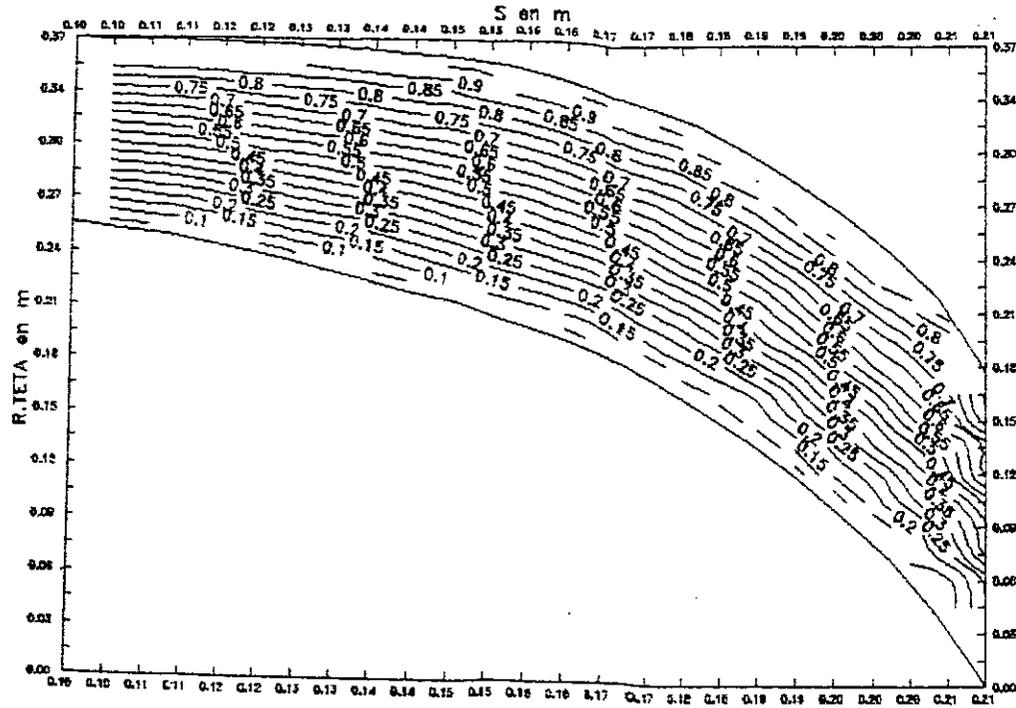
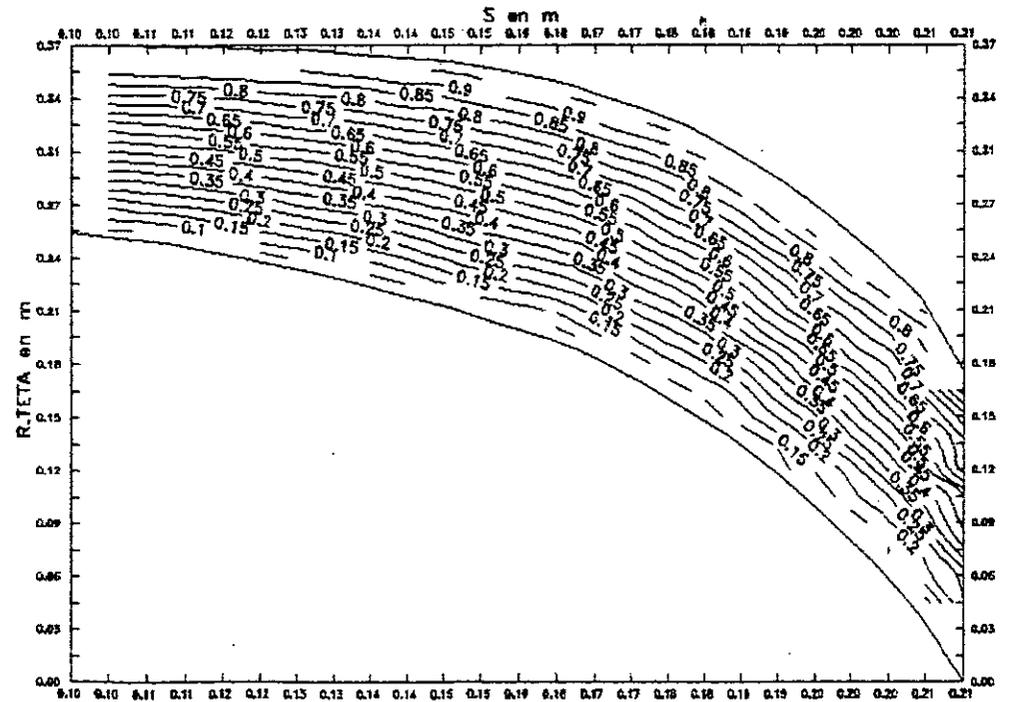


FIG 11.2

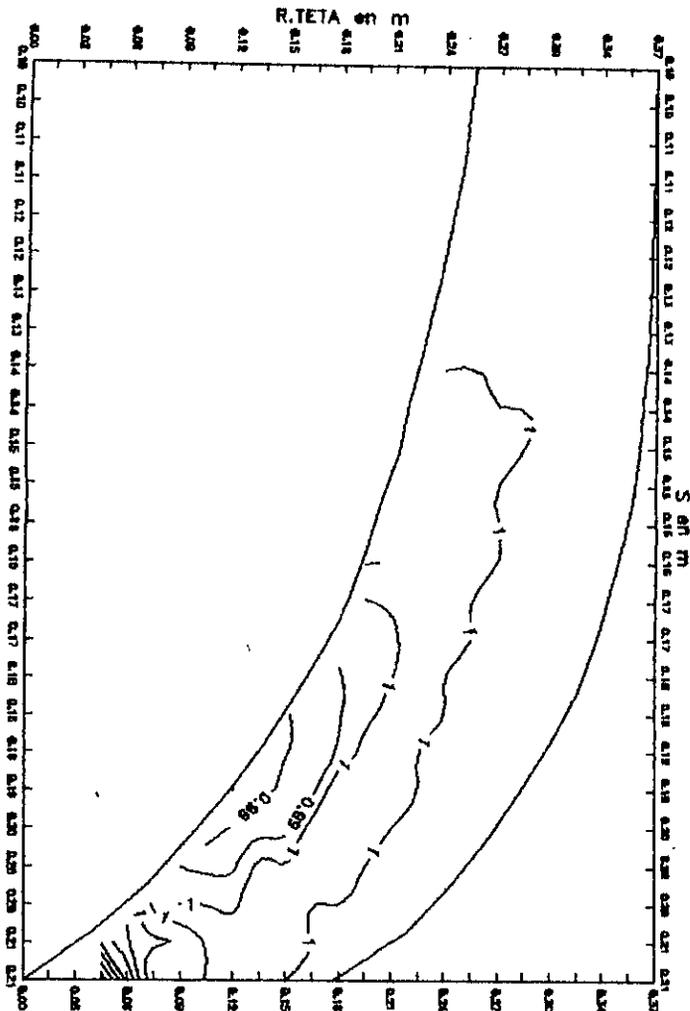
Repartition des lignes de courant
dans le canal aube a aube parfait



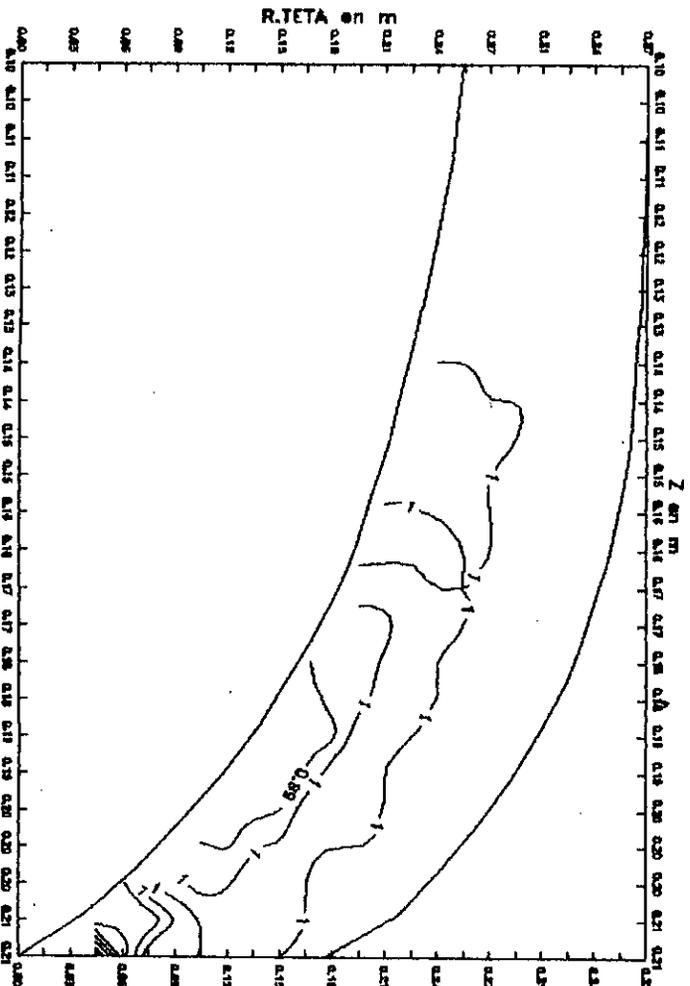
Repartition des lignes de courant
Dans le canal aube a aube reel



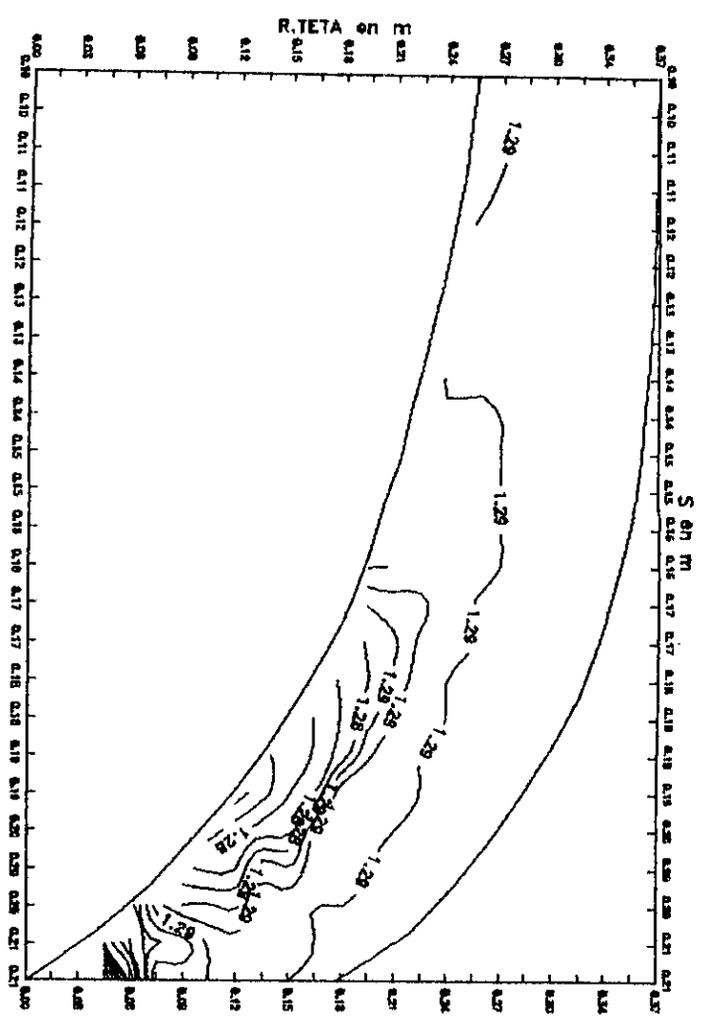
Repartition de la densité dans
cannel cube a cadre porteur



Repartition du taux de compression
dans le cannel cube a cadre porteur



Repartition du taux de compression dans le cornet entre 2 oules portait



Repartition de la densite dans le cornet entre 2 oules rail

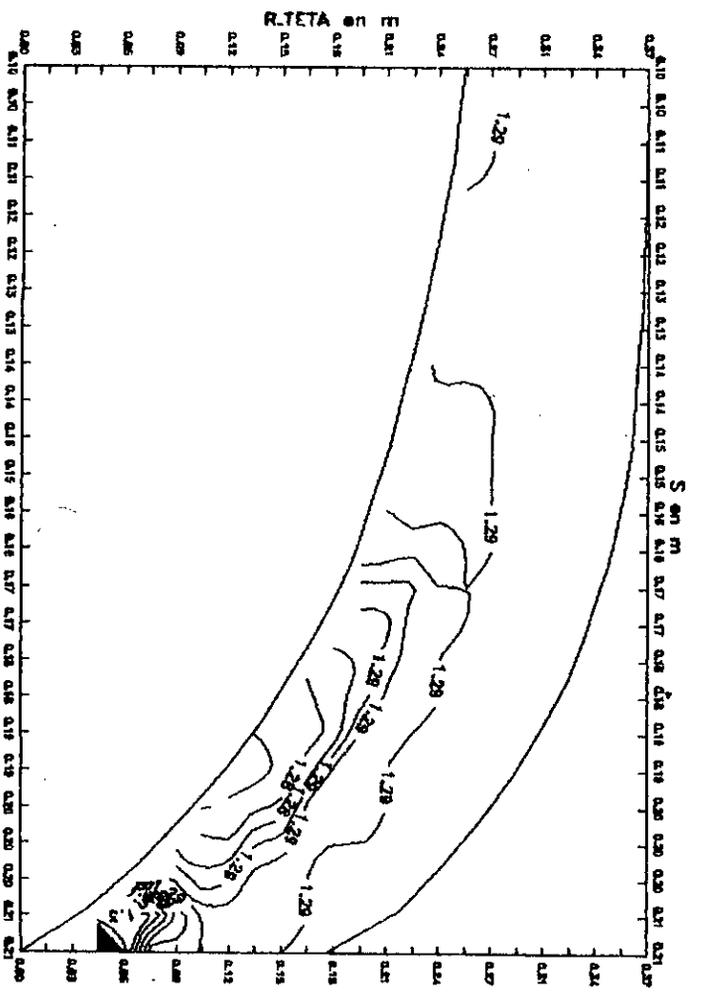
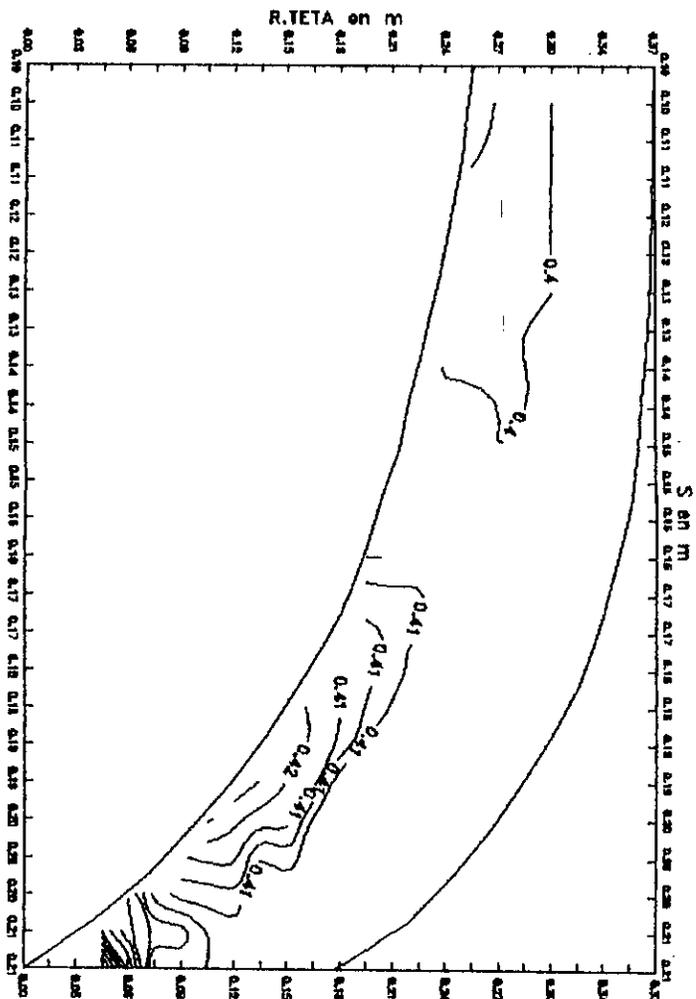


FIG 11.4

FIG 11.5

Repartition du Meck dans
le canal ouise a cube positif



Repartition du Meck dans
le canal ouise a cube neg

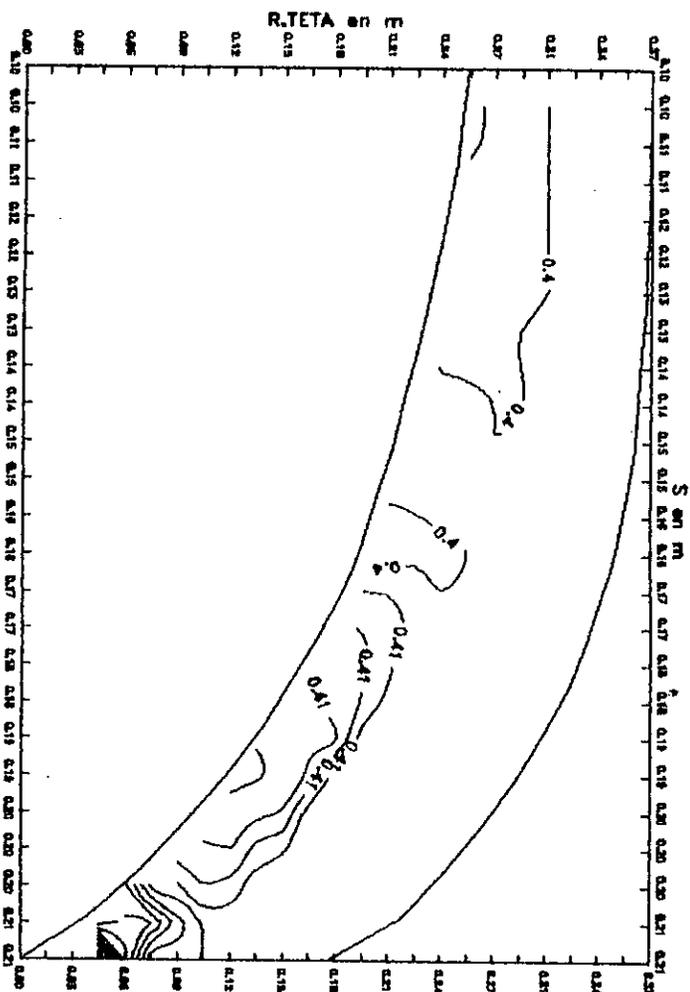
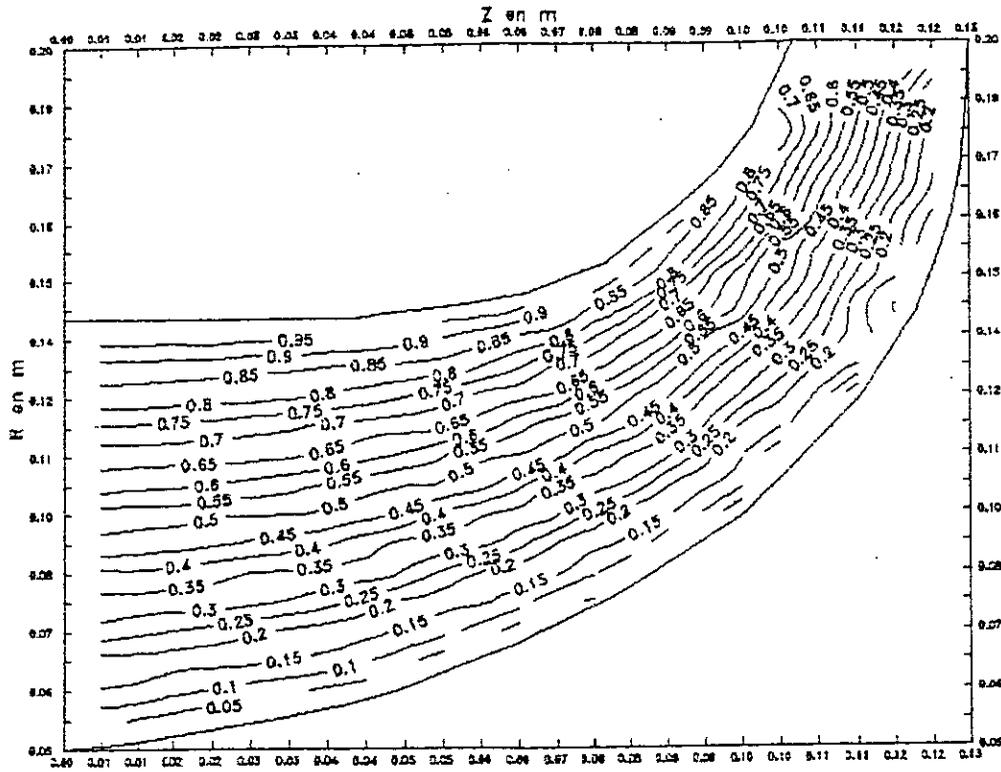
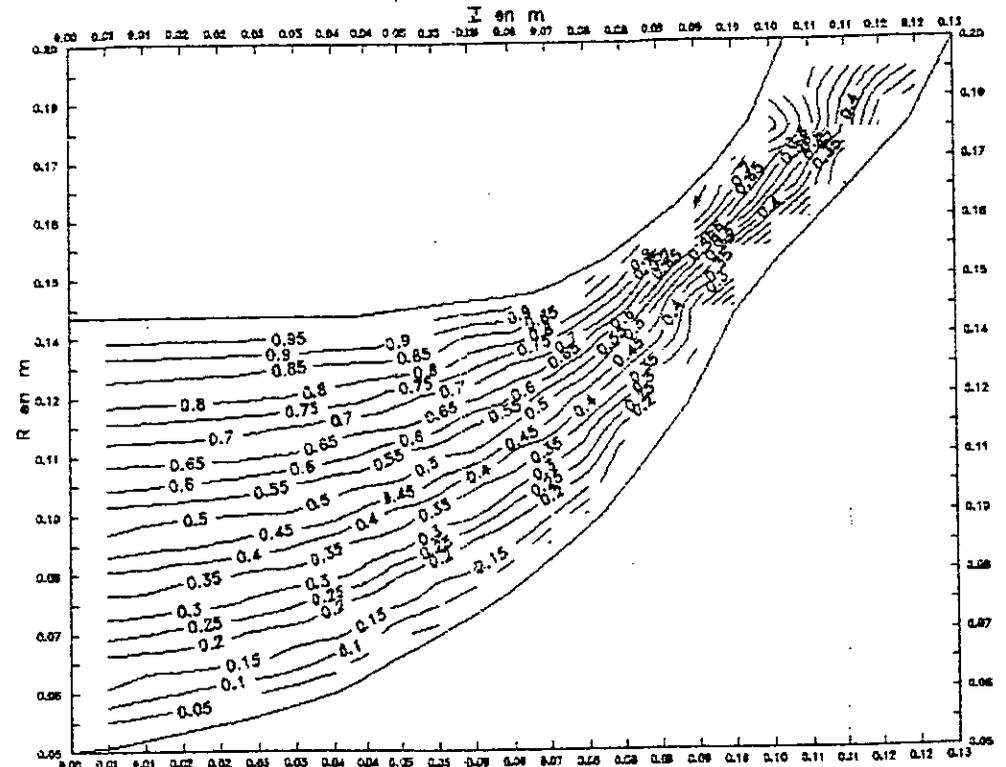


FIG. 11.6

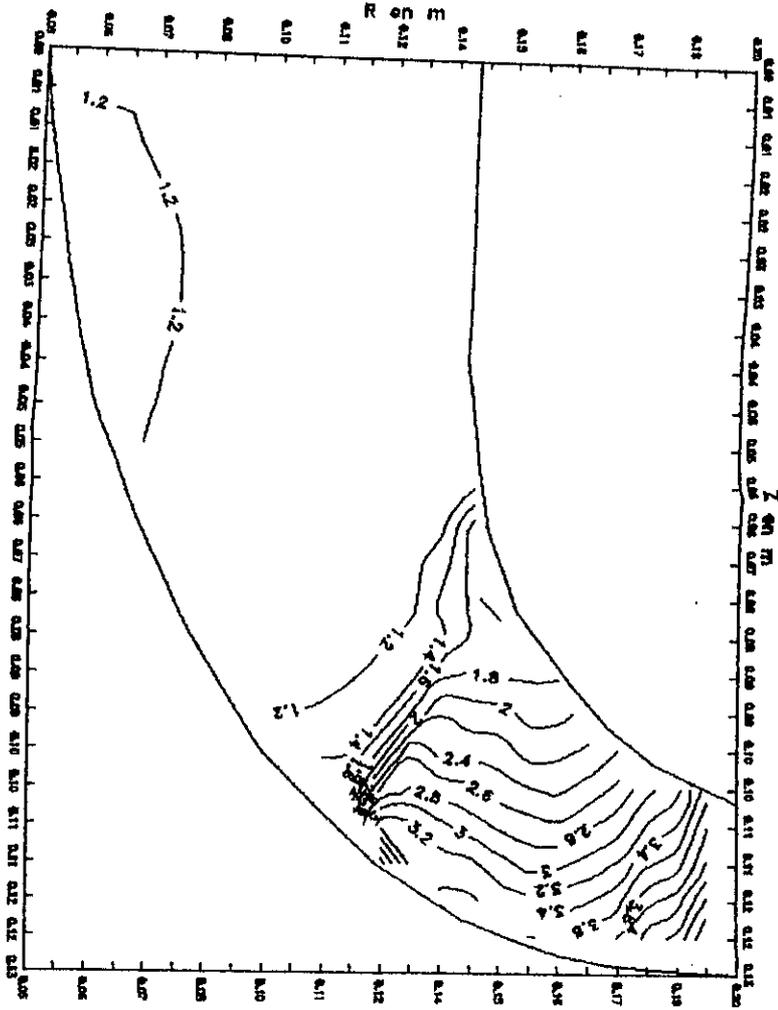
Repartition des lignes de courant
dans le canal meridional parfait



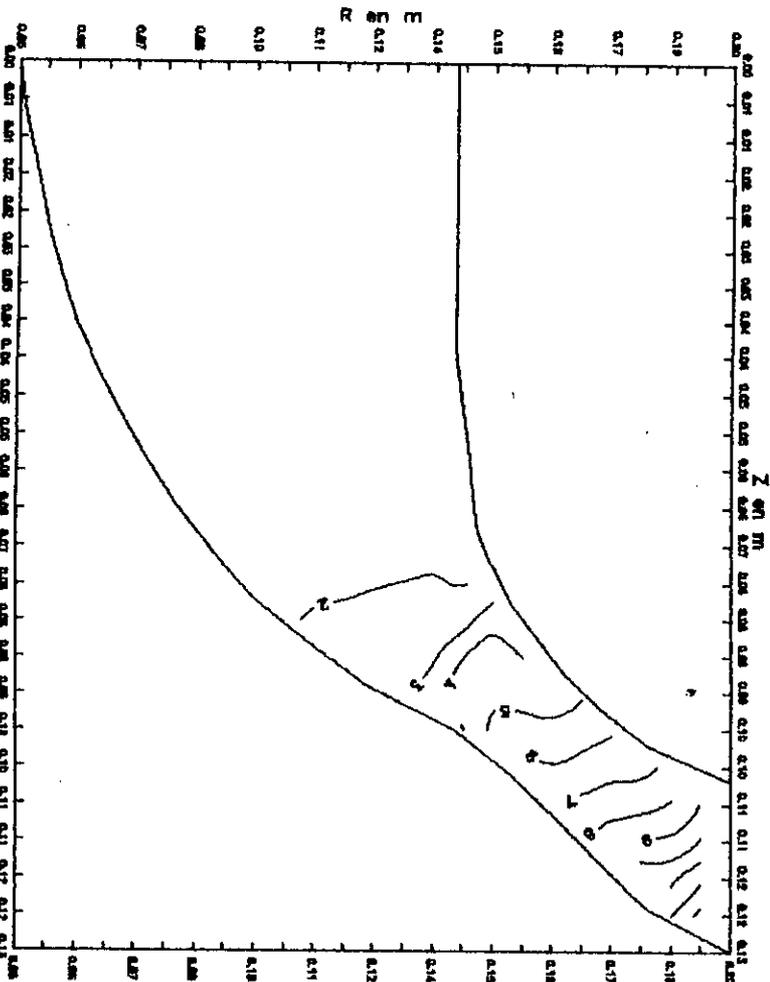
Repartition des lignes de courant
dans le canal meridional reel



Repartition du taux de compression
dans le canal meridional parfait



Repartition du taux de compression
dans le canal meridional réel



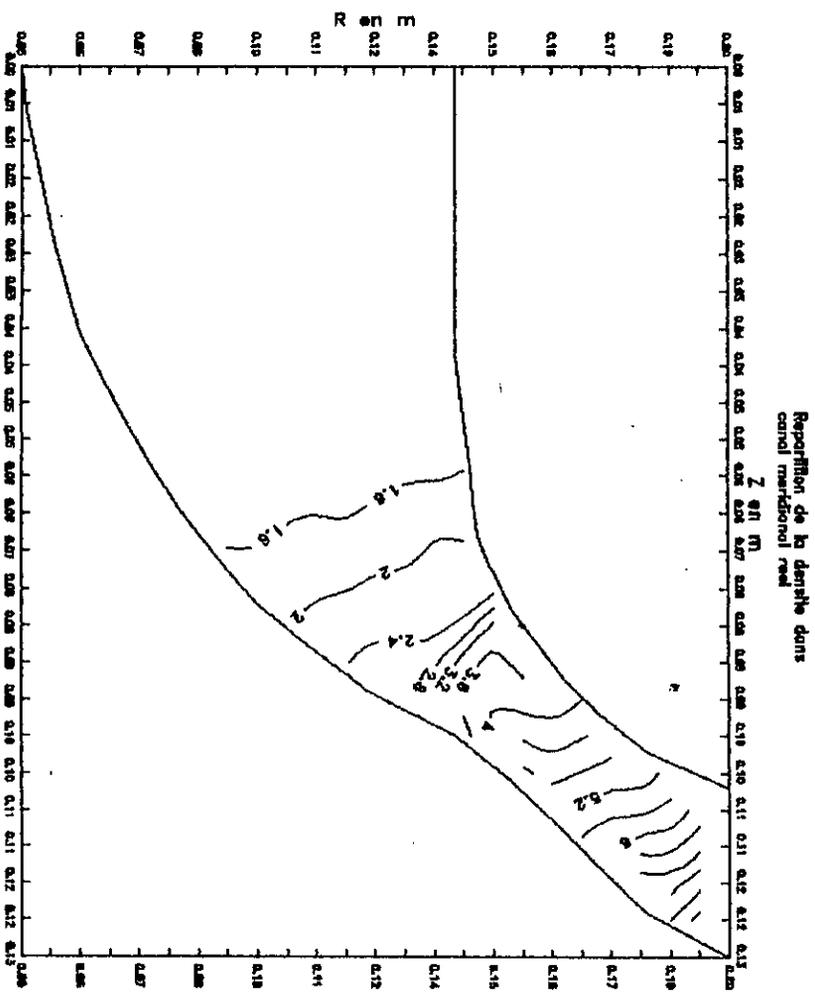
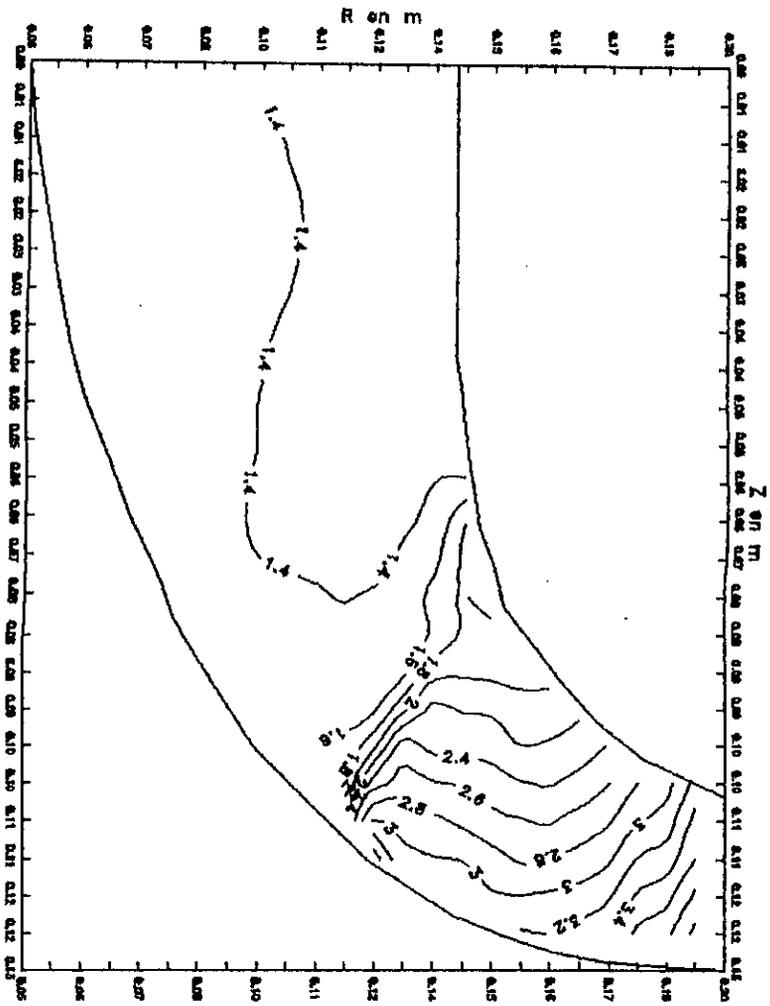
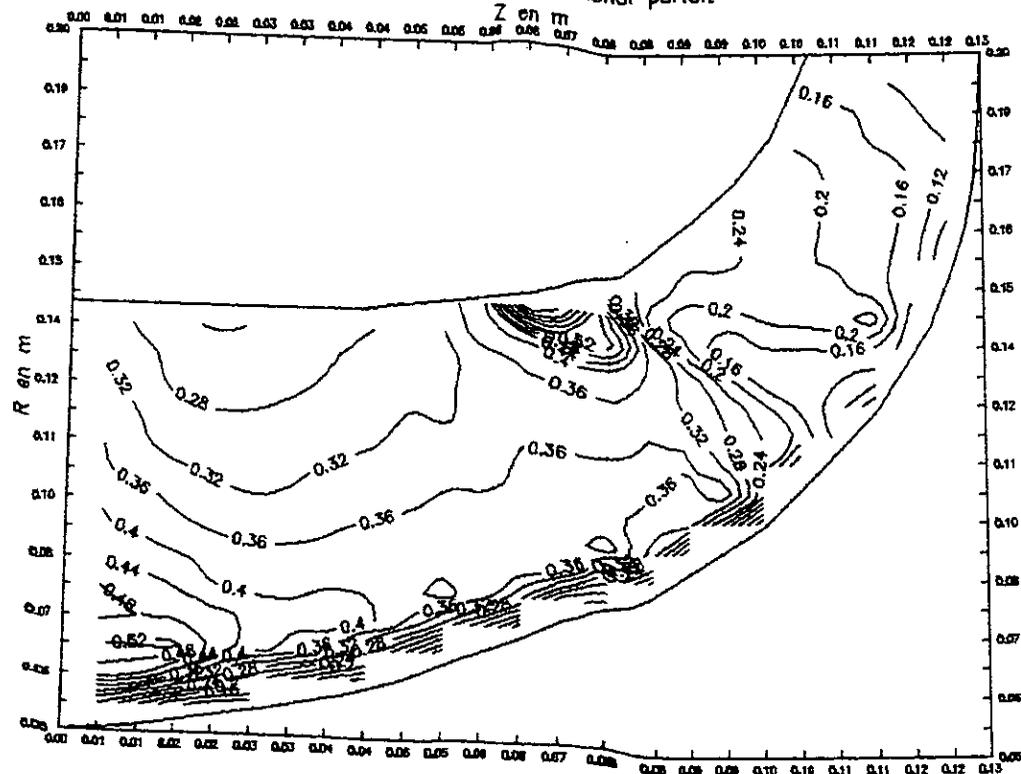


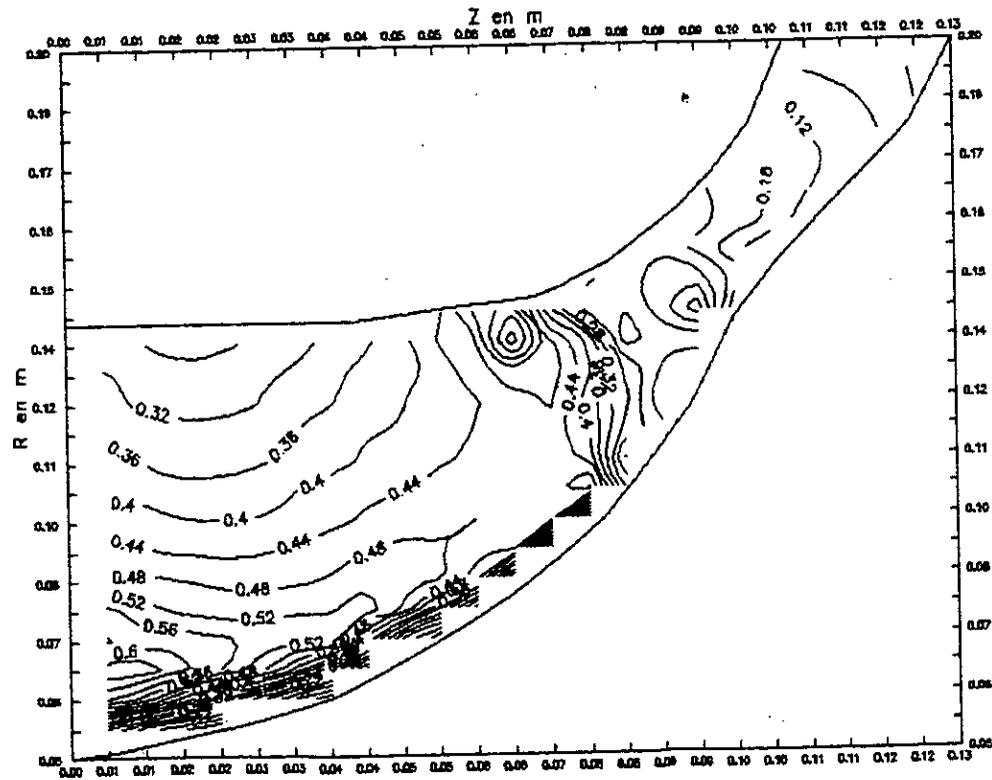
FIG 11.8

FIG 11.9

Repartition du Mach dans le canal meridional parfait



Repartition du Mach dans le canal meridional reel



Application N° 3

Avec les conditions d'entrée :

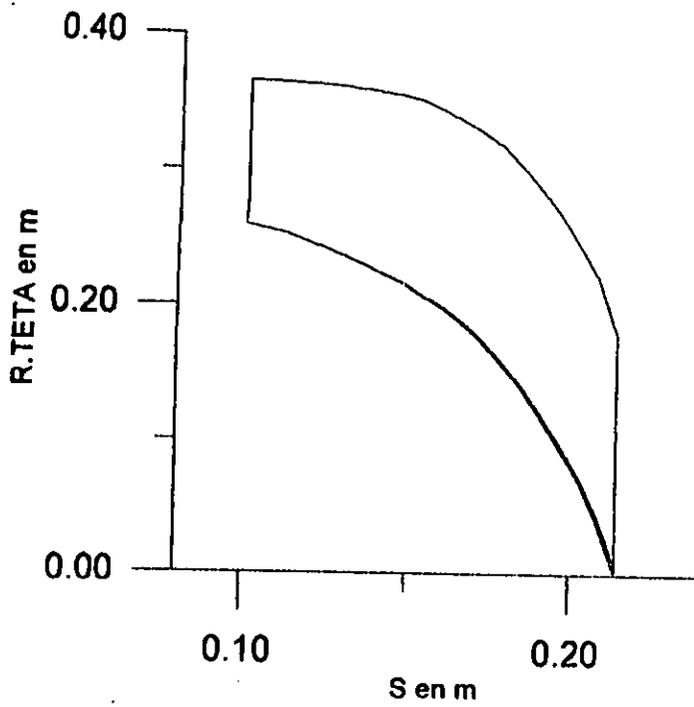
Le nombre de Mach : 0.6

Le débit : $18.7778 \text{ m}^3 / \text{s}$

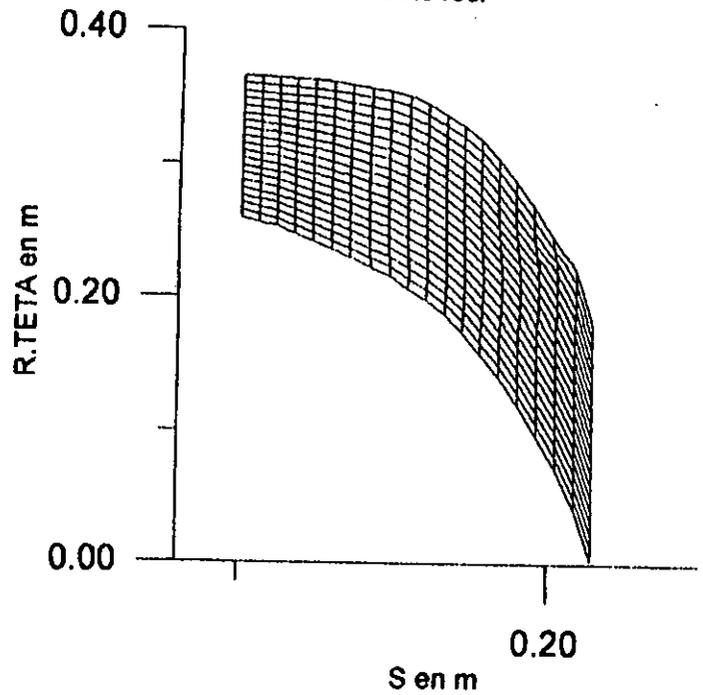
La vitesse de rotation : 1000 tr / mn

FIG III.1 Description des domaines de calcul

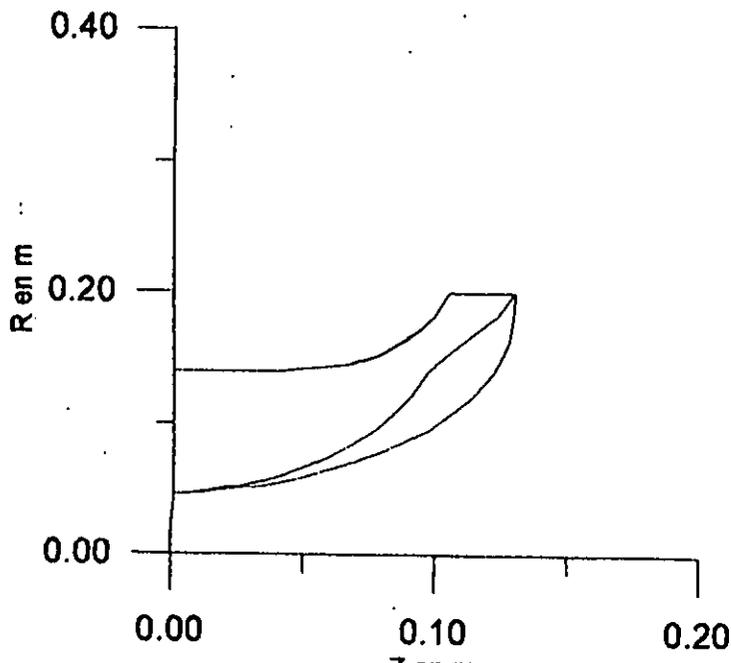
Epaisseur de la couche limite dans le plan aube à aube



Maillage rectangulaire incliné appliqué dans le plan aube à aube domaine réel



Epaisseur de la couche limite dans le plan meridional



Maillage curviligne appliqué dans le plan meridional réel

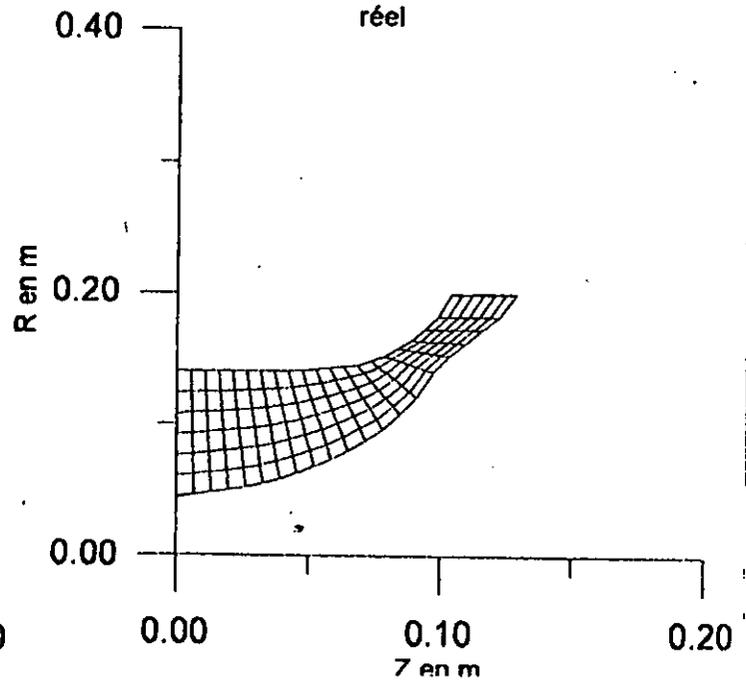
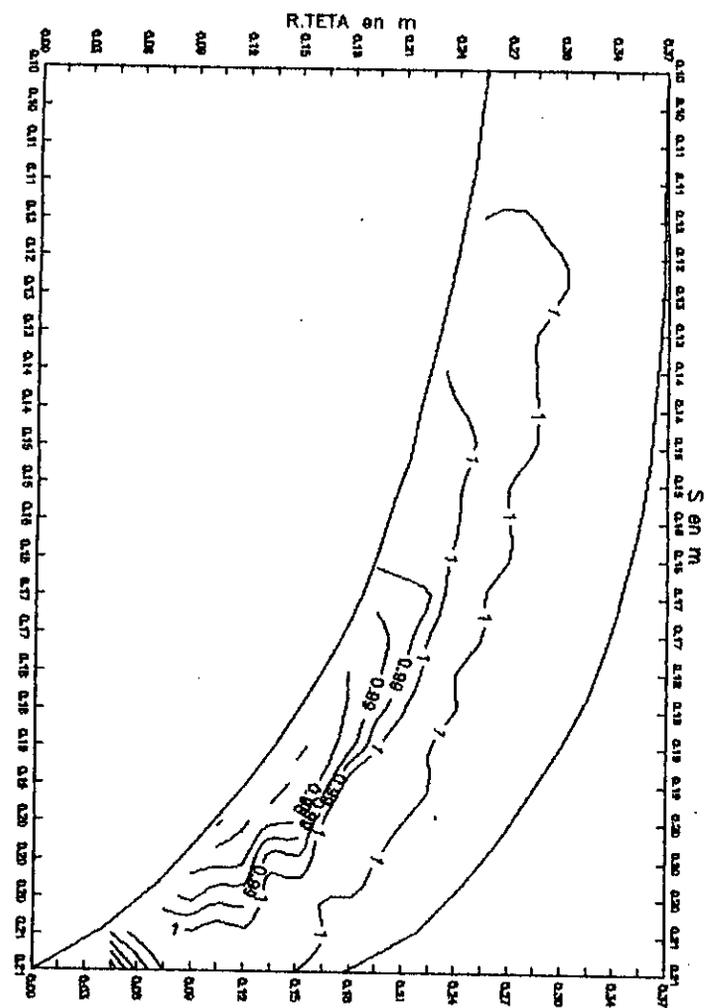
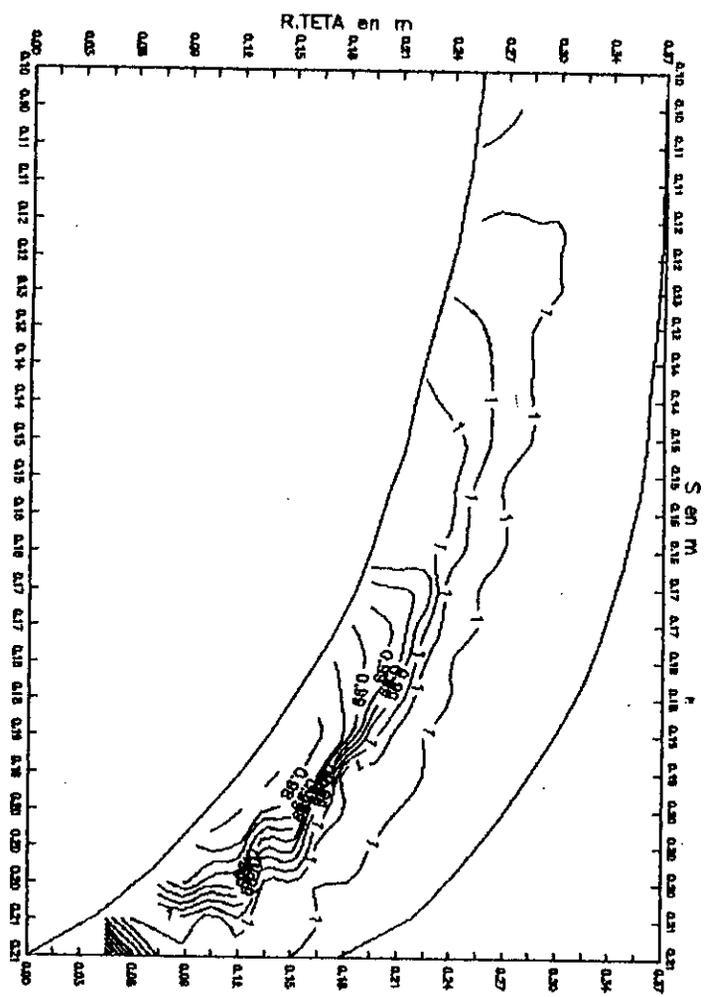


FIG. III.3

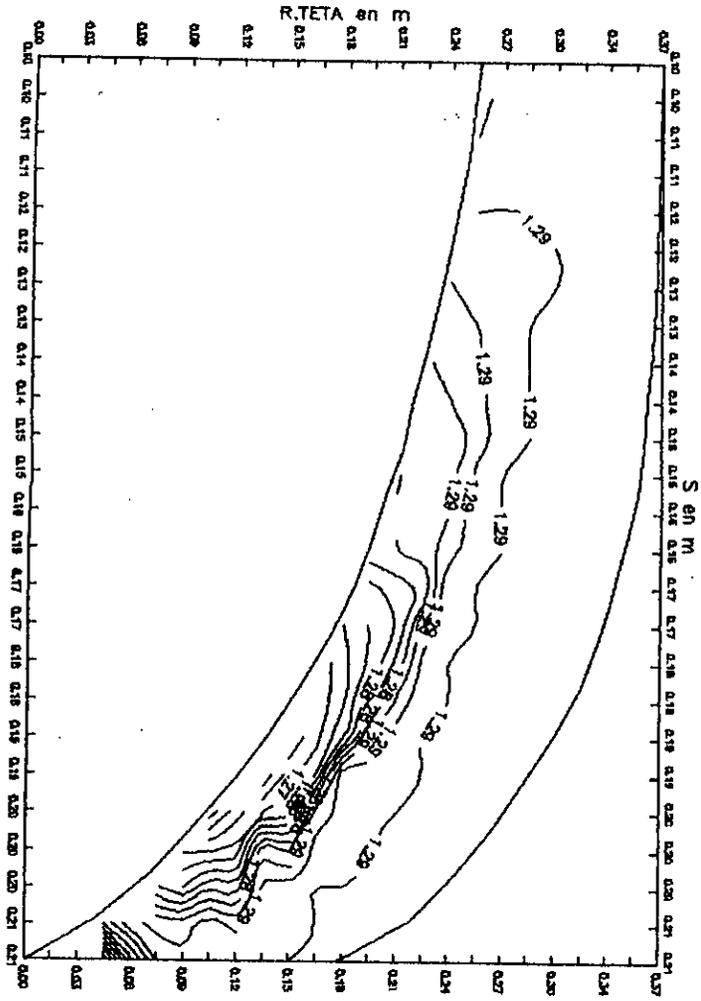
Repartition du taux de compression dans le canal aube a aube portait



Repartition du taux de compression dans le canal aube o aube final



Repartition de la densite
dans le canal oube a aube
perforé



Repartition de la densite dans
le canal oube a orifice réel

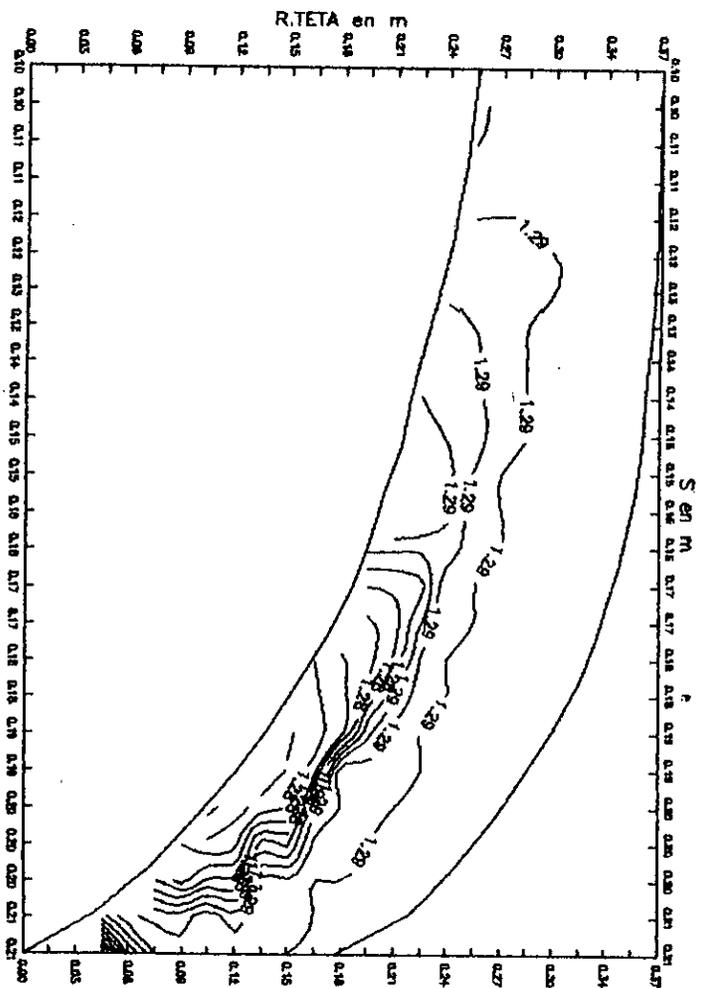
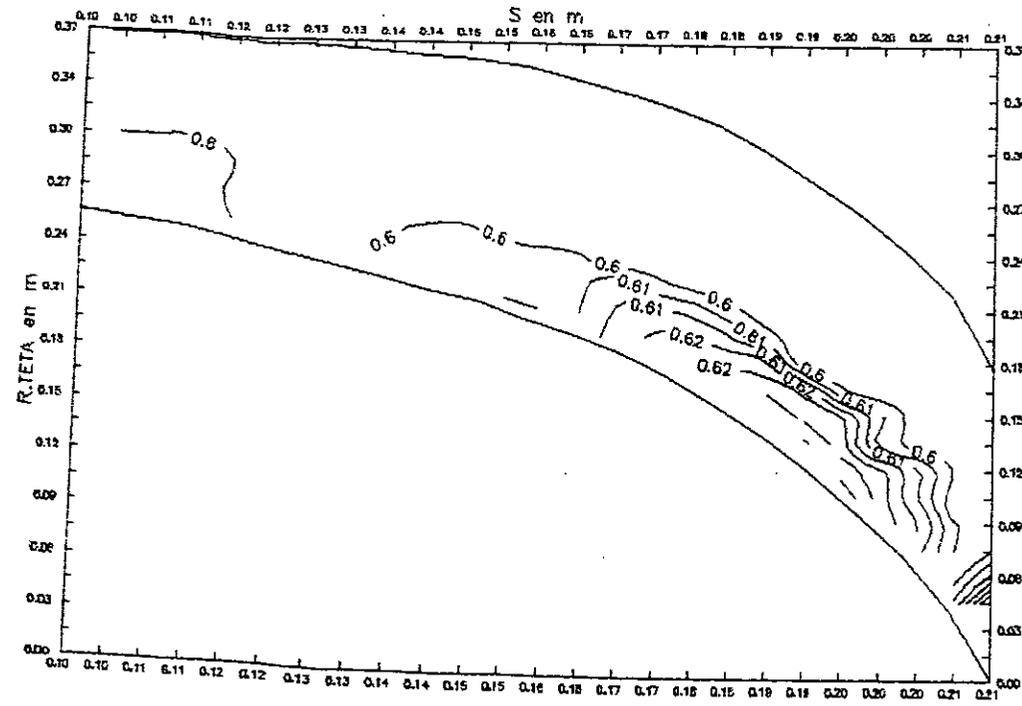


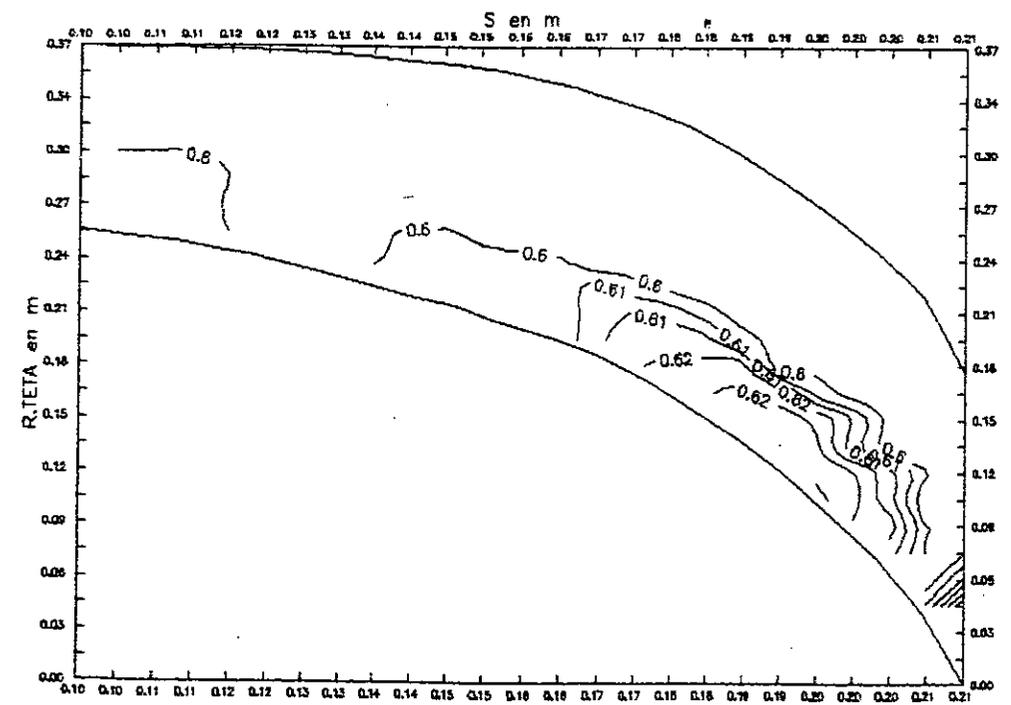
FIG 111.4

FIG III.5

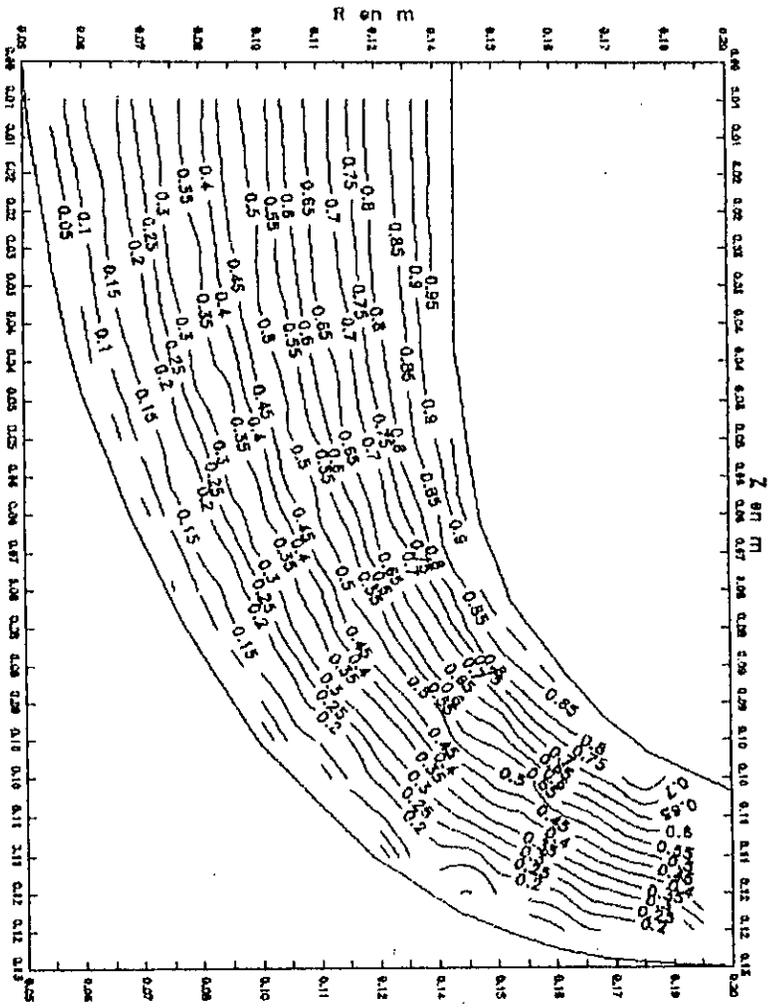
Repartition du Mach dans le canal aube a aube parfait



Repartition du Mach dans le canal aube a aube reel



Repartition des lignes de courant
dans le canal meridional parfait



Repartition des lignes de courant
dans le canal meridional real

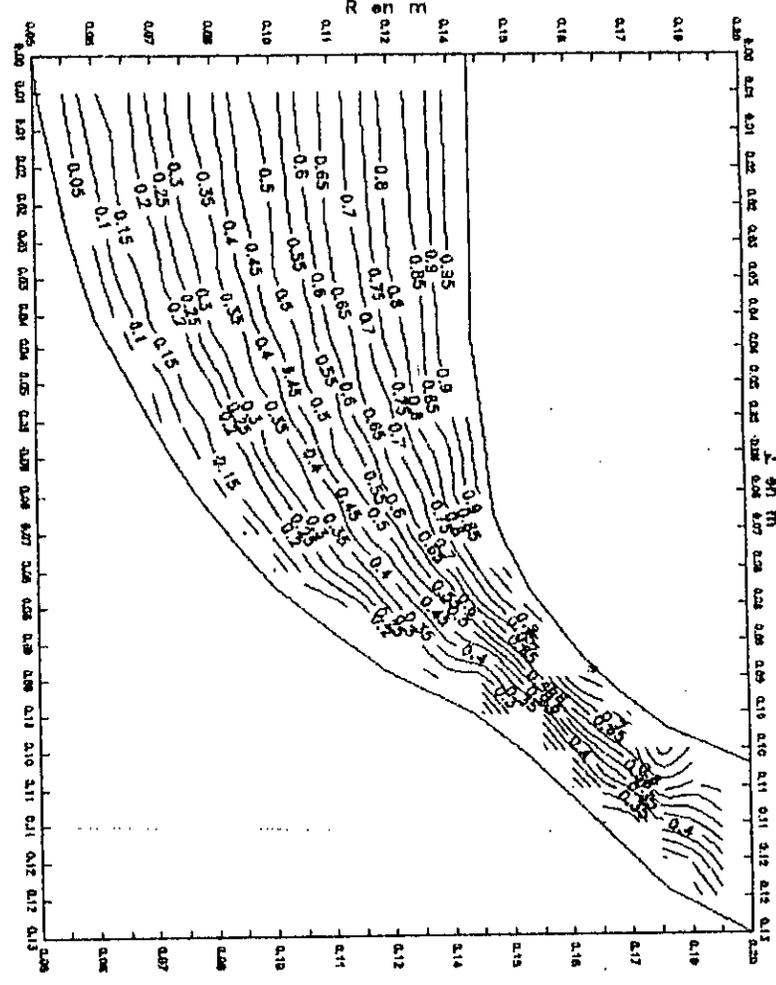
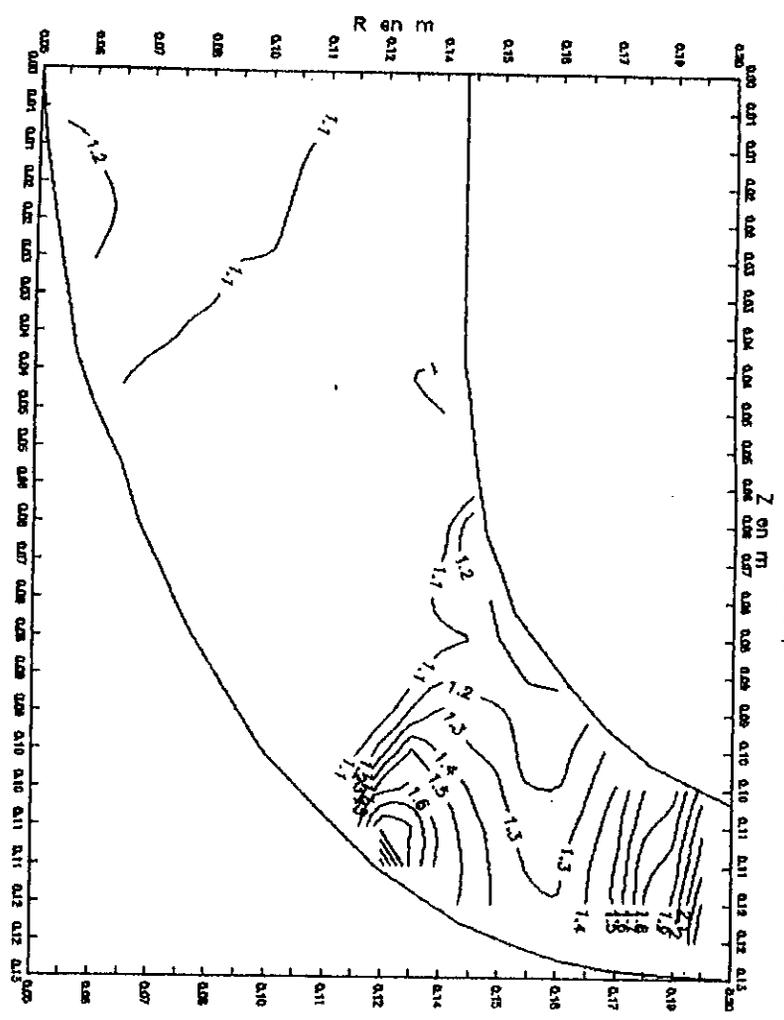


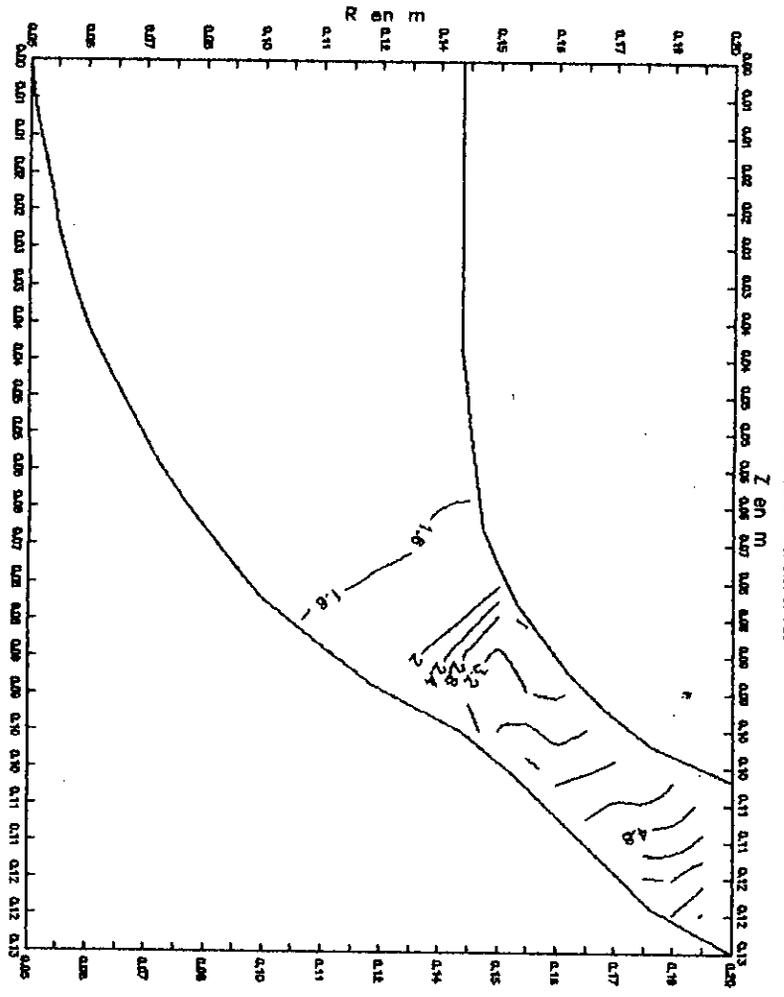
FIG 11.6

FIG 11.7

Repartition du taux de compression dans le canal meridional portif

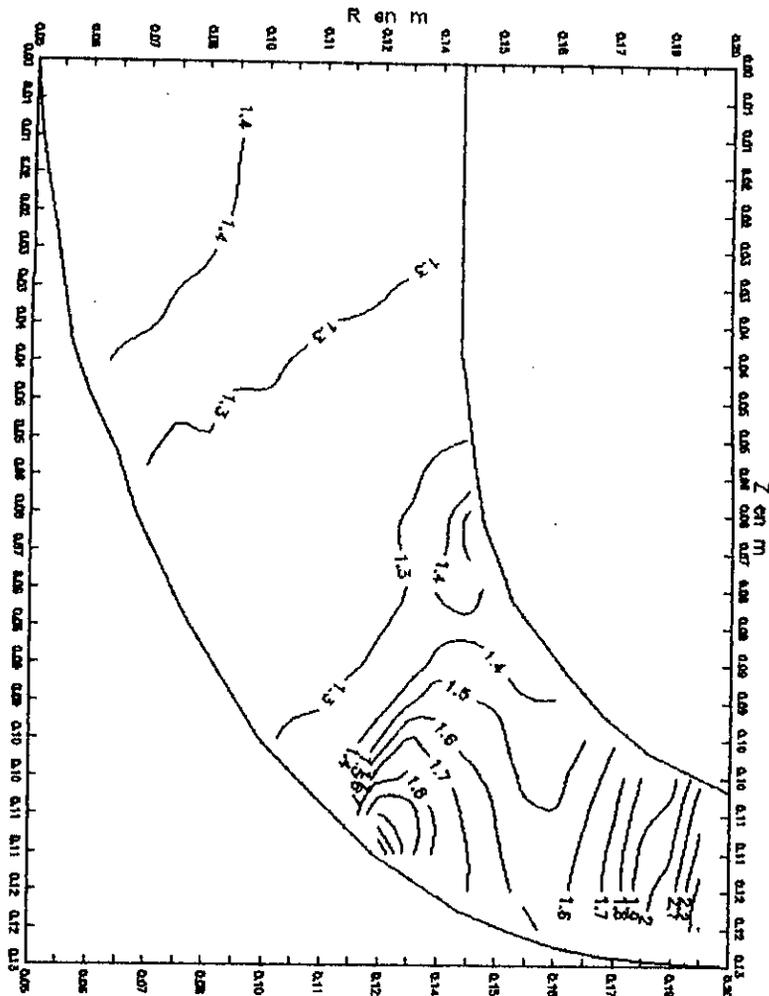


Repartition du taux de compression dans le canal meridional real



F14118

Repartition de la densite
dans le canal meridional parfait



Repartition de la densite
dans le canal meridional reel

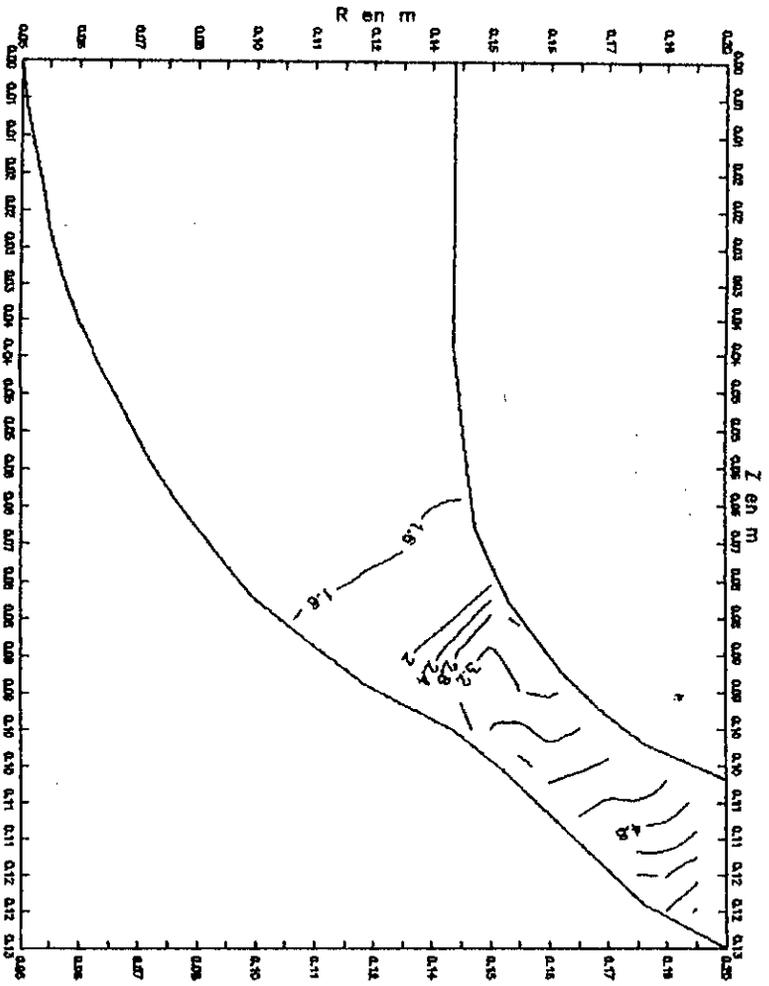
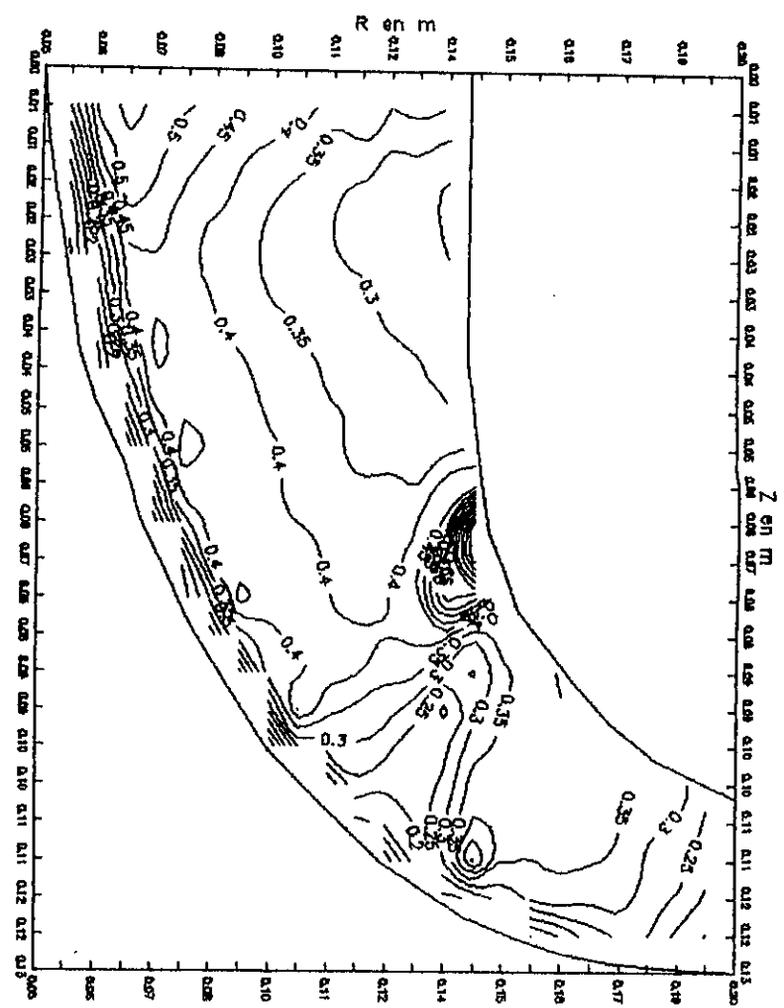
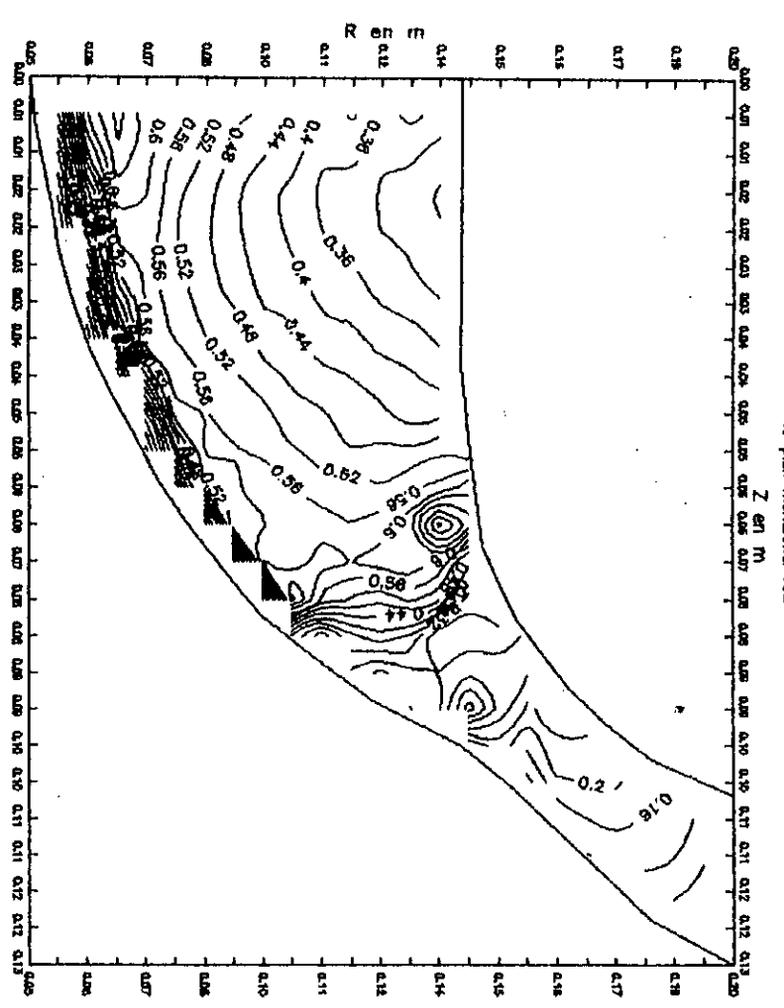


Fig 111.9

Repartition du Mach dans le canal meridional porteur



Repartition du Mach dans le plan meridional réel



Application N° 4

Avec les conditions d'entrée :

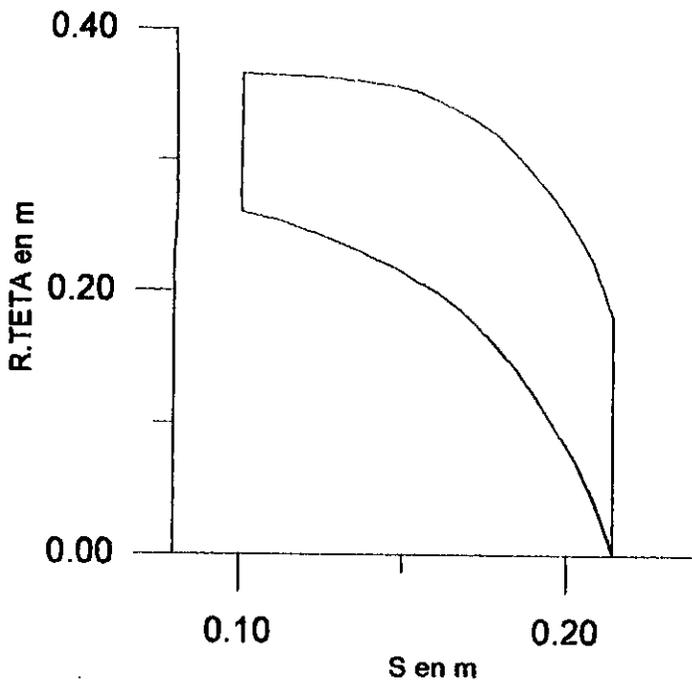
Le nombre de Mach : 0.8

Le débit : $25.0370 \text{ m}^3 / \text{s}$

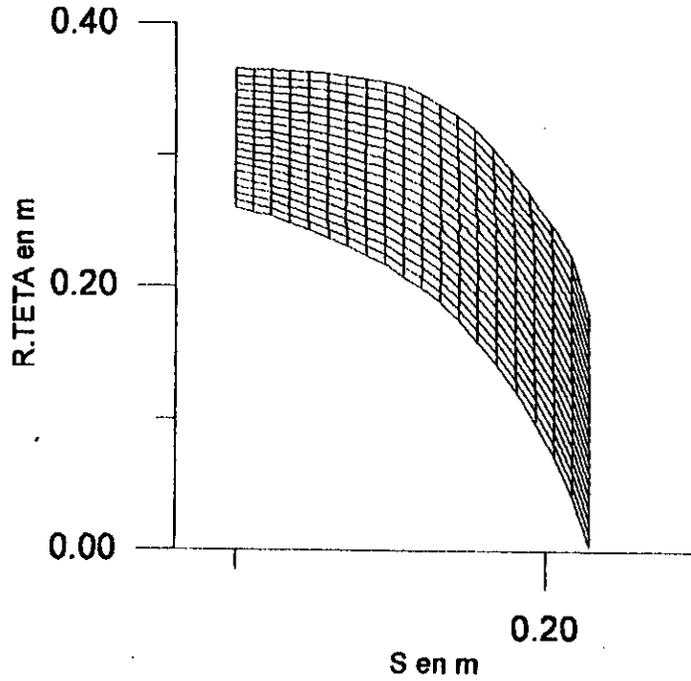
La vitesse de rotation : 1000 tr / mn

FIG IV.1 Description des domaines de calcul

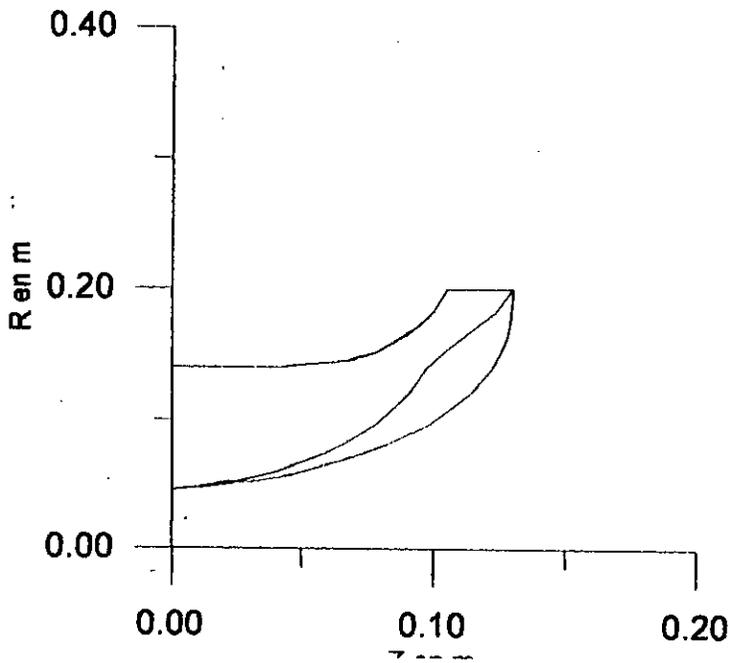
Epaisseur de la couche limite dans le plan aube à aube



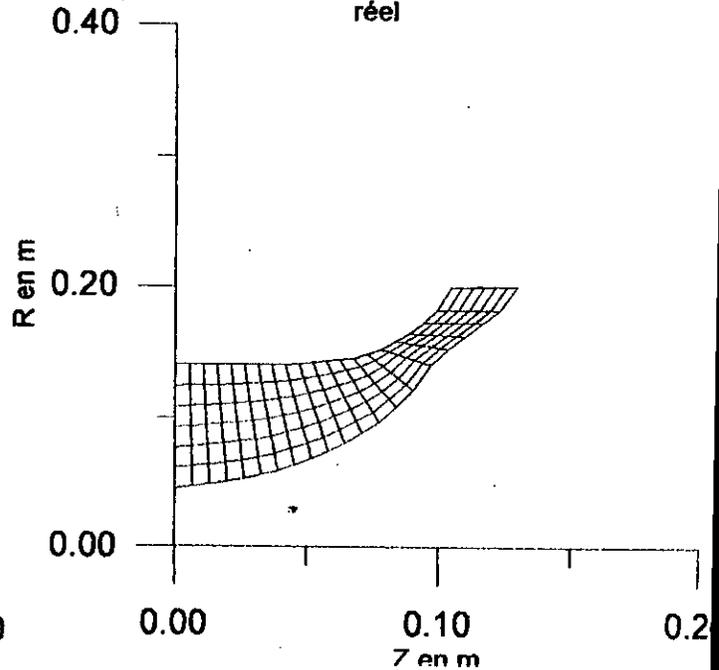
Maillage rectangulaire incliné appliqué dans le plan aube à aube domaine réel



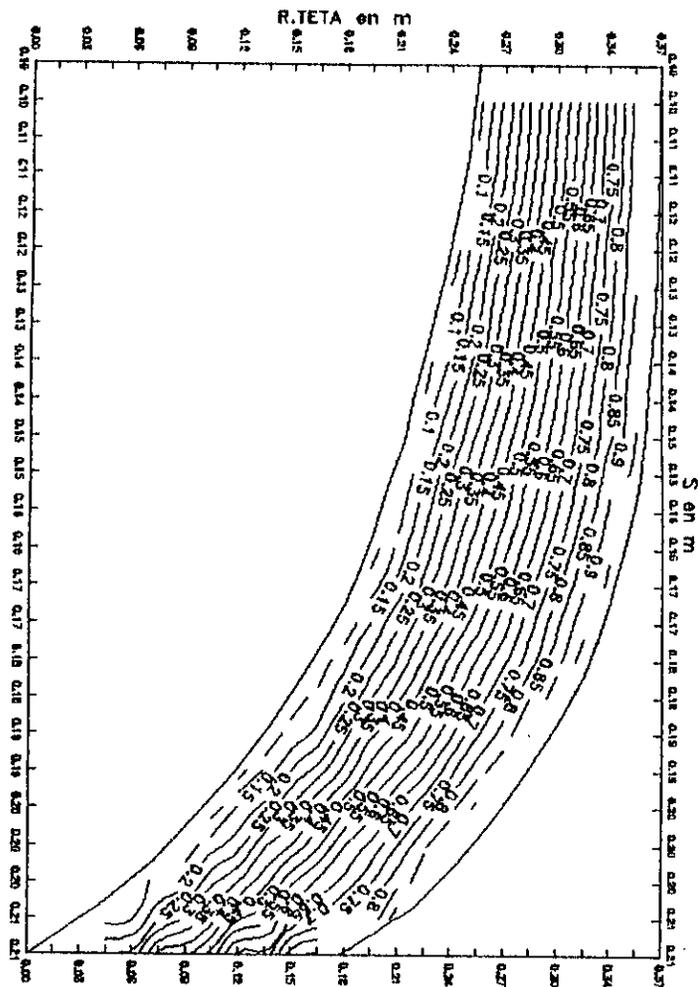
Epaisseur de la couche limite dans le plan meridional



Maillage curviligne appliqué dans le plan meridional réel



Repartition des lignes de courant
dans le canal mable o cube portatif



Repartition des lignes de courant
Dans le canal mable o cube real

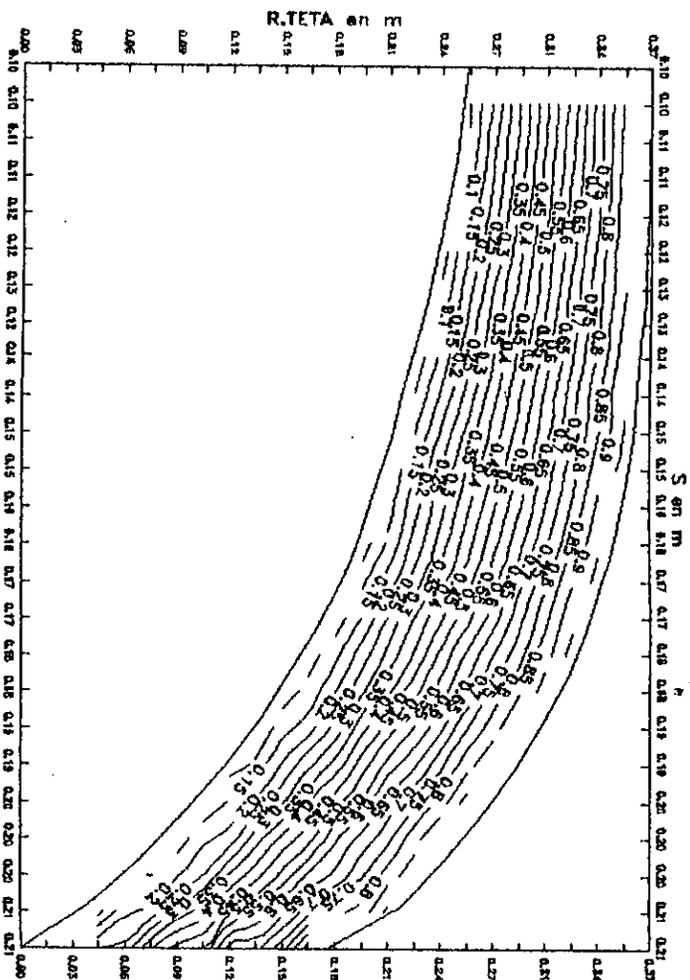
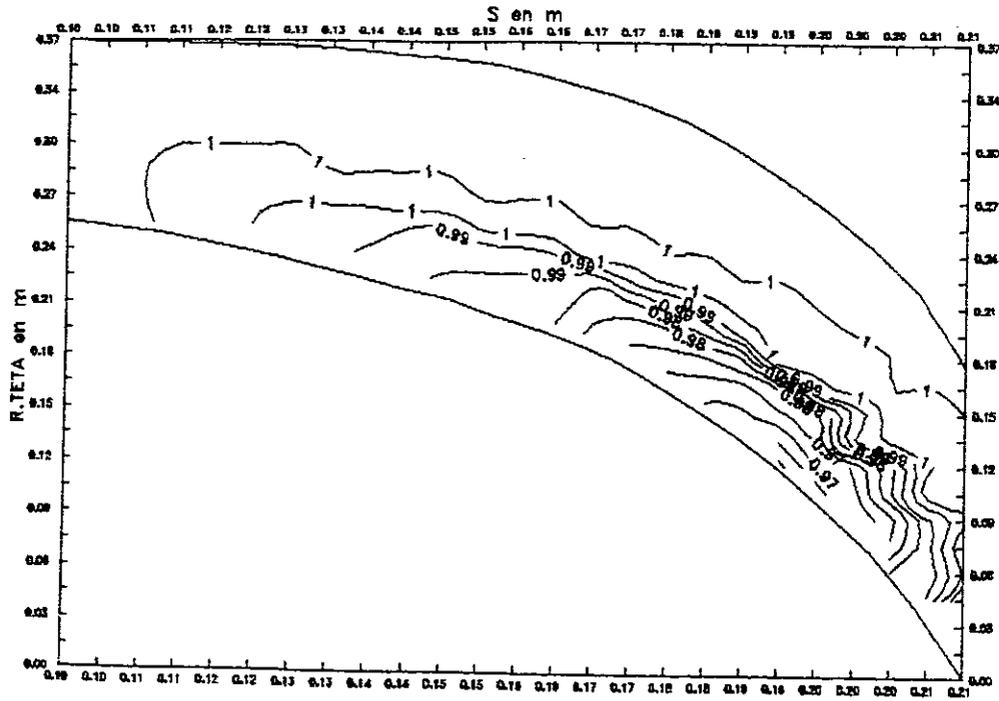
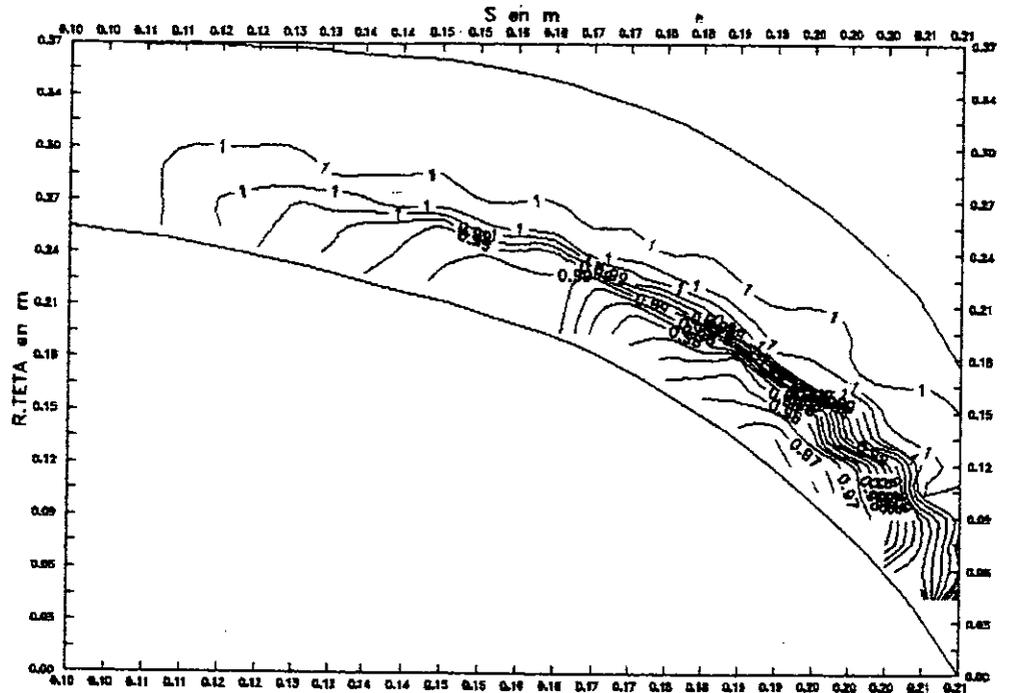


FIG N 2

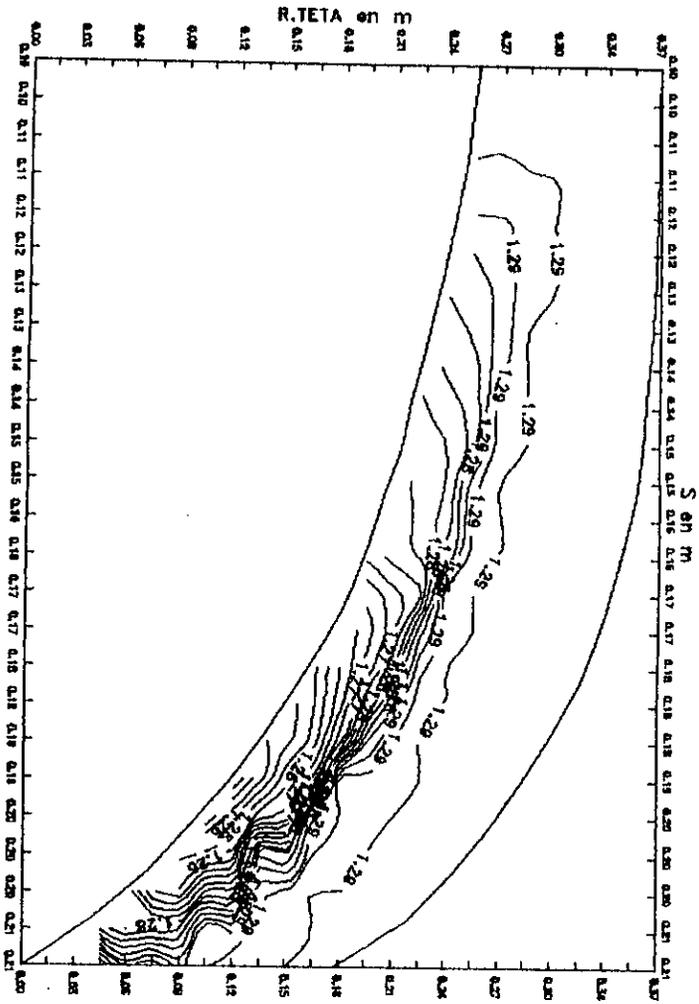
Repartition du taux de compression dans le canal aube a aube parfait



Repartition du taux de compression dans le canal aube a aube reel



Repartition de la densite dans
le canal cube a cube partiel



Repartition de la densite
dans le canal cube a cube reel

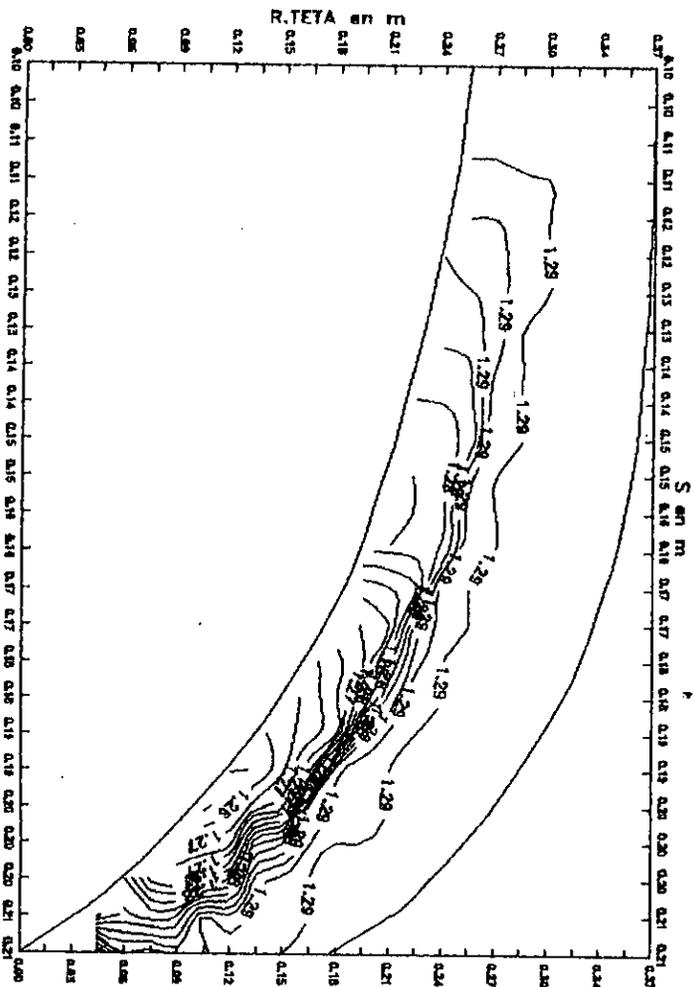
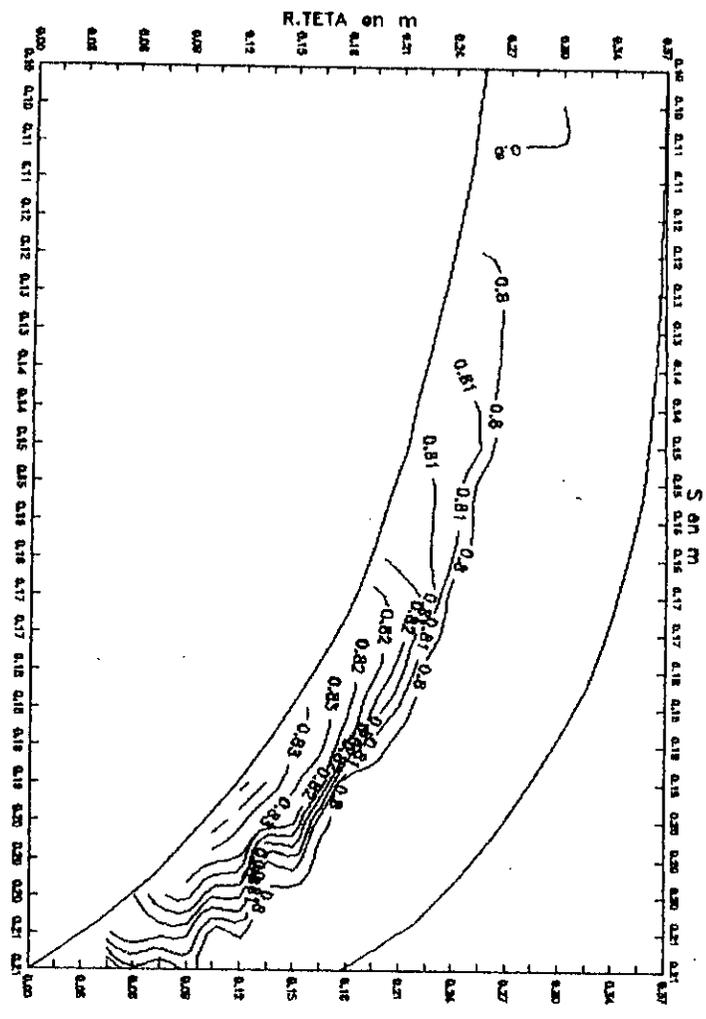


FIG 14

Repartition du Mach dans le canal cube a cube parfait



Repartition du Mach dans le canal cube a cube reel

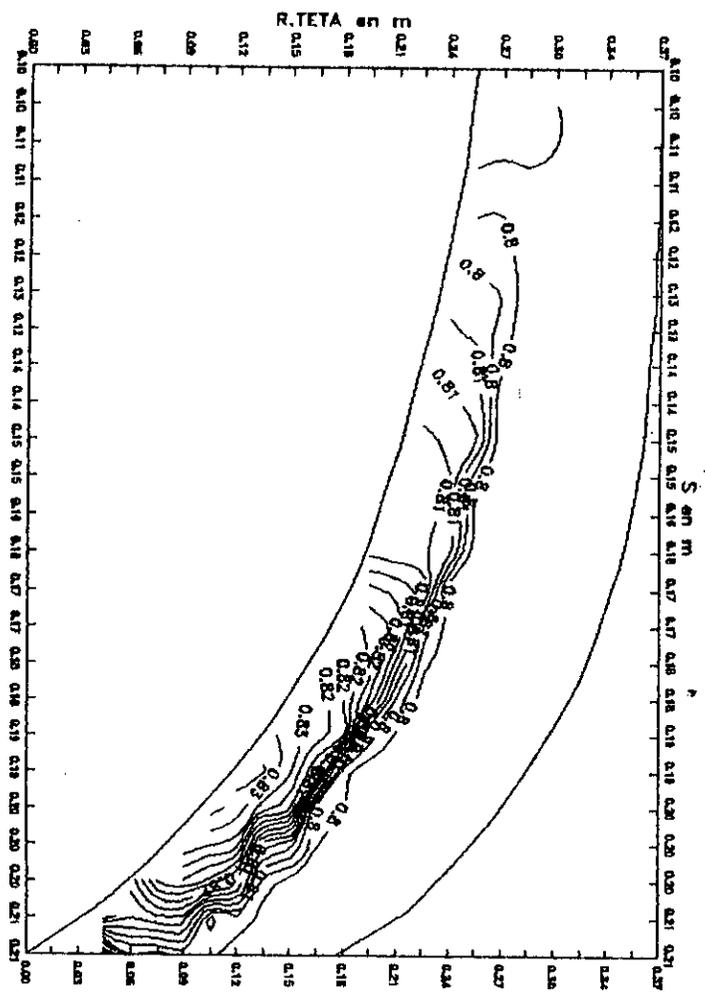
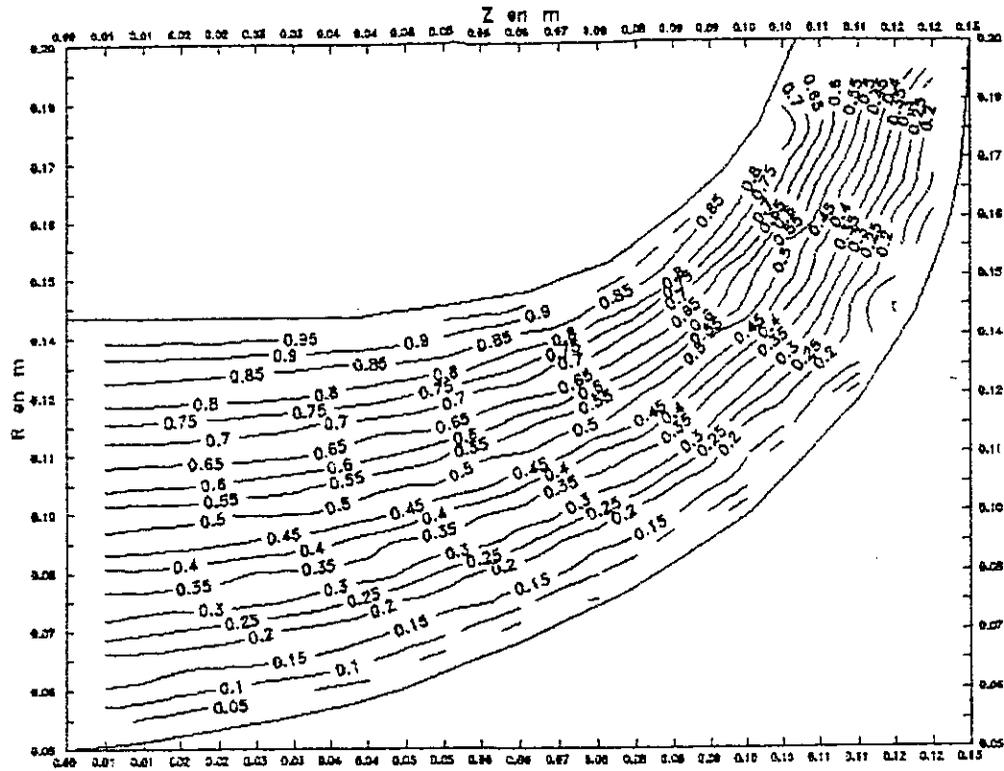


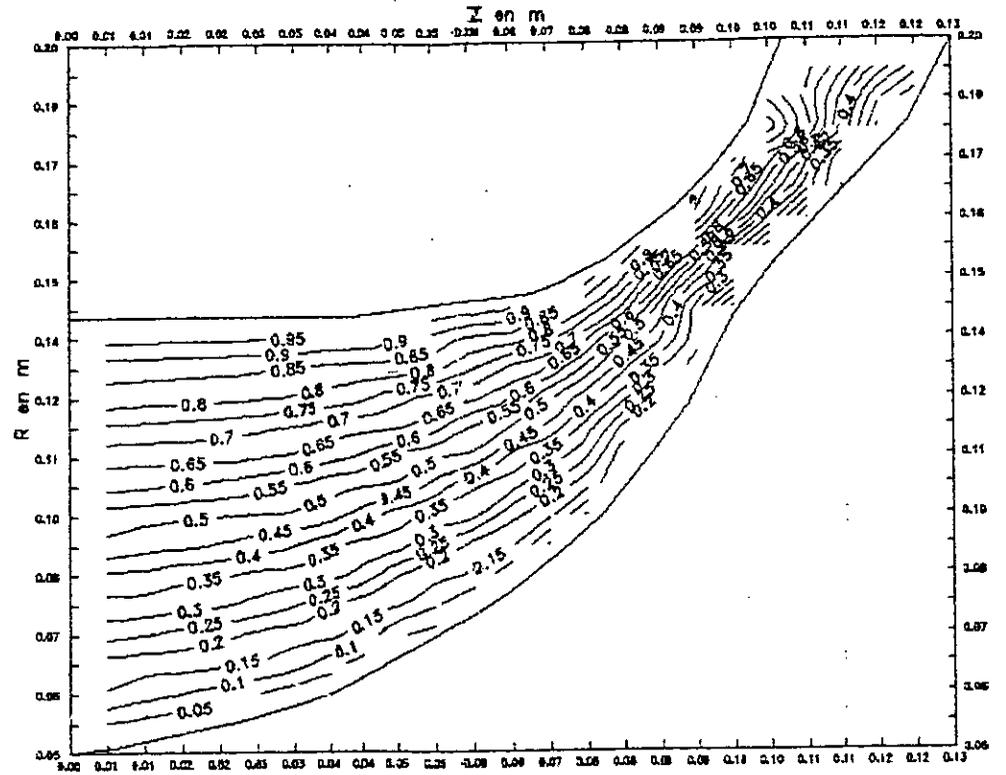
FIG 14.5

FIG IV.6

Repartition des lignes de courant dans le canal meridional parfait

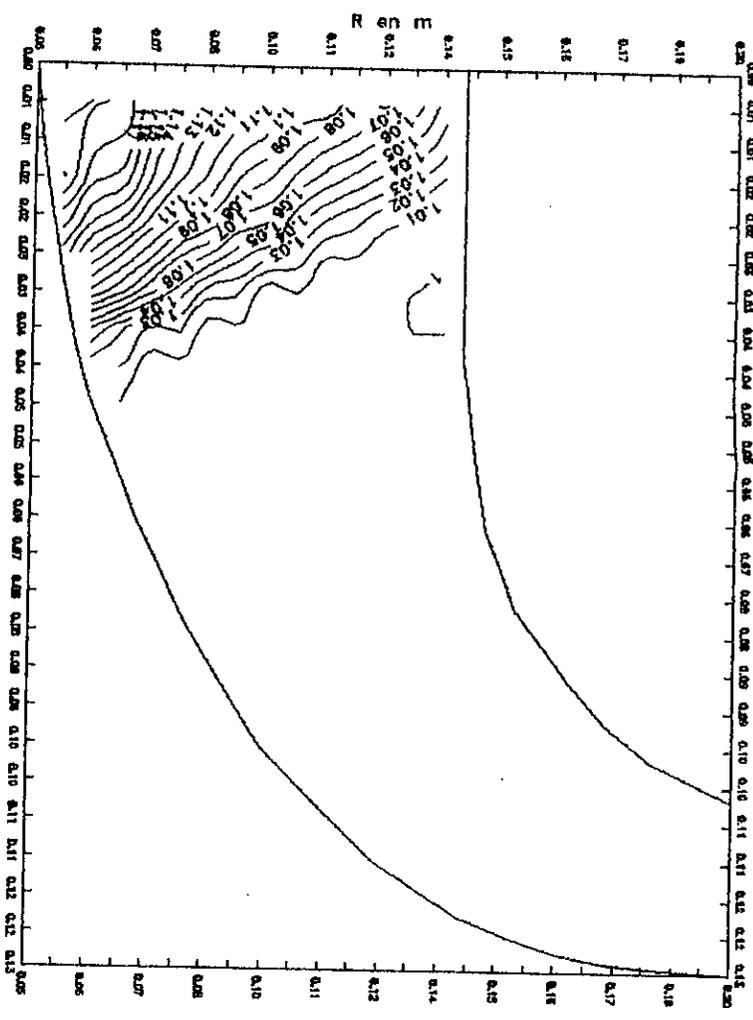


Repartition des lignes de courant dans le canal meridional reel

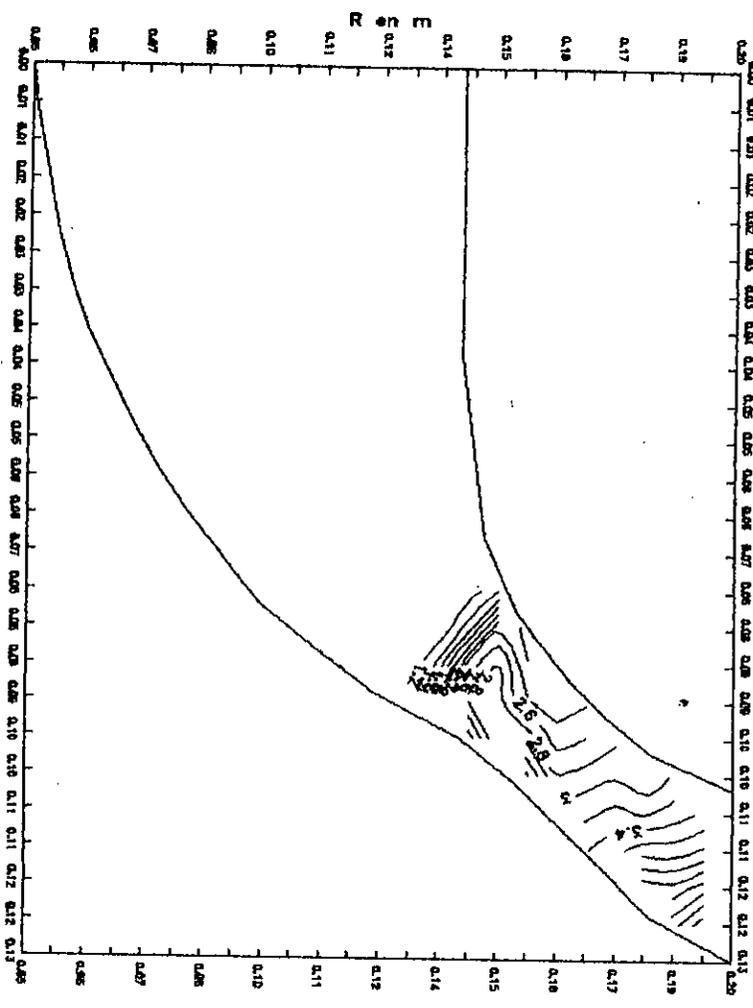


R16 1V7

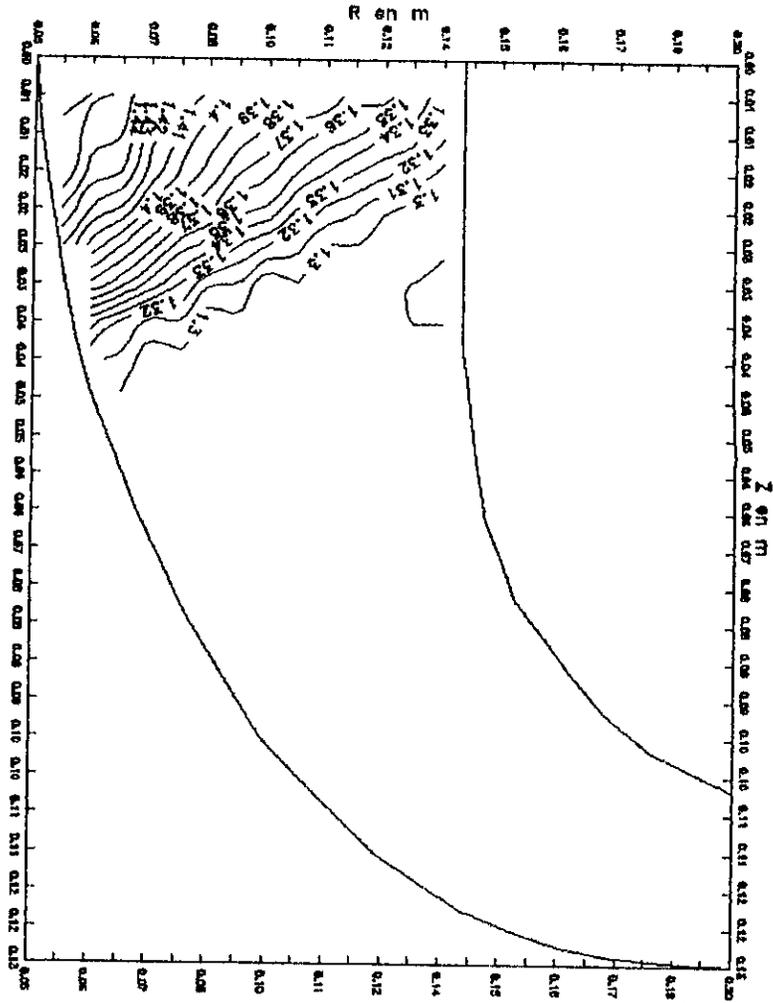
Repartition du taux de compression dans le canal meridional parfait



Repartition du taux de compression dans le canal meridional reel



Repartition de la densite dans
le canal meridional parfait



Repartition de la densite dans
le canal meridional reel

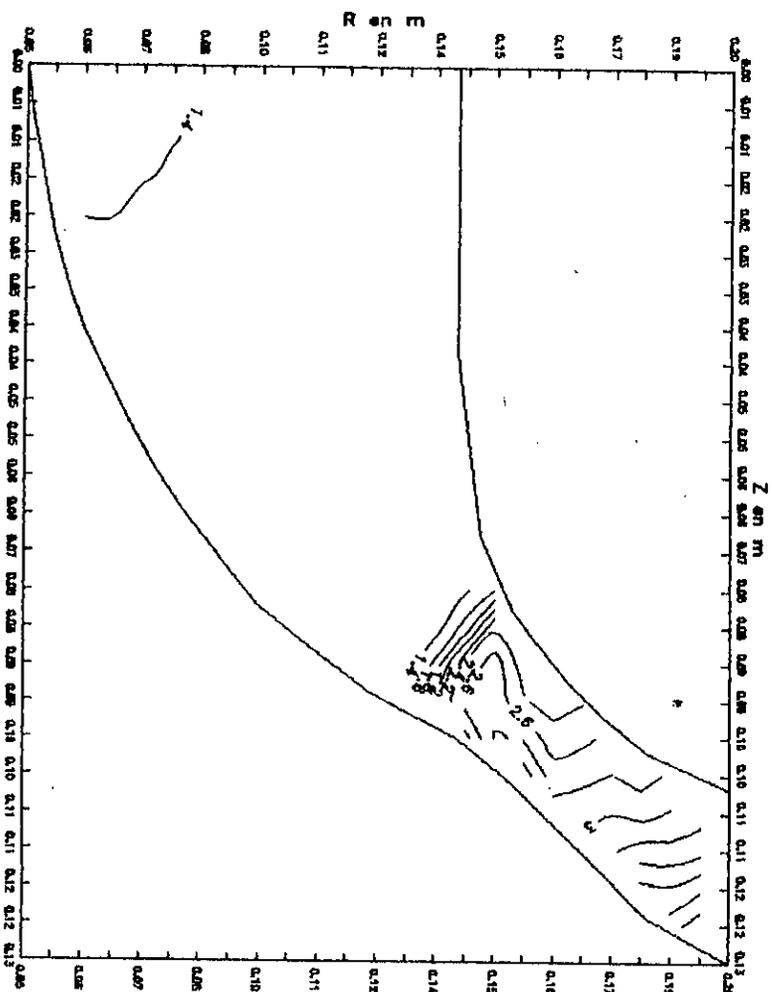
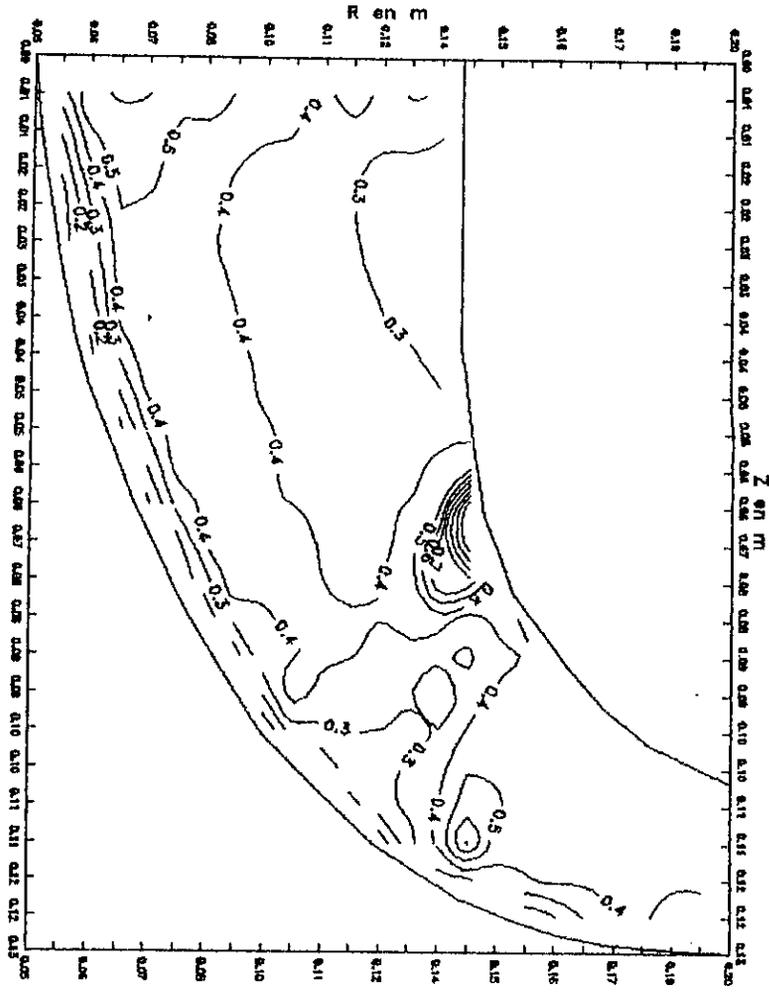


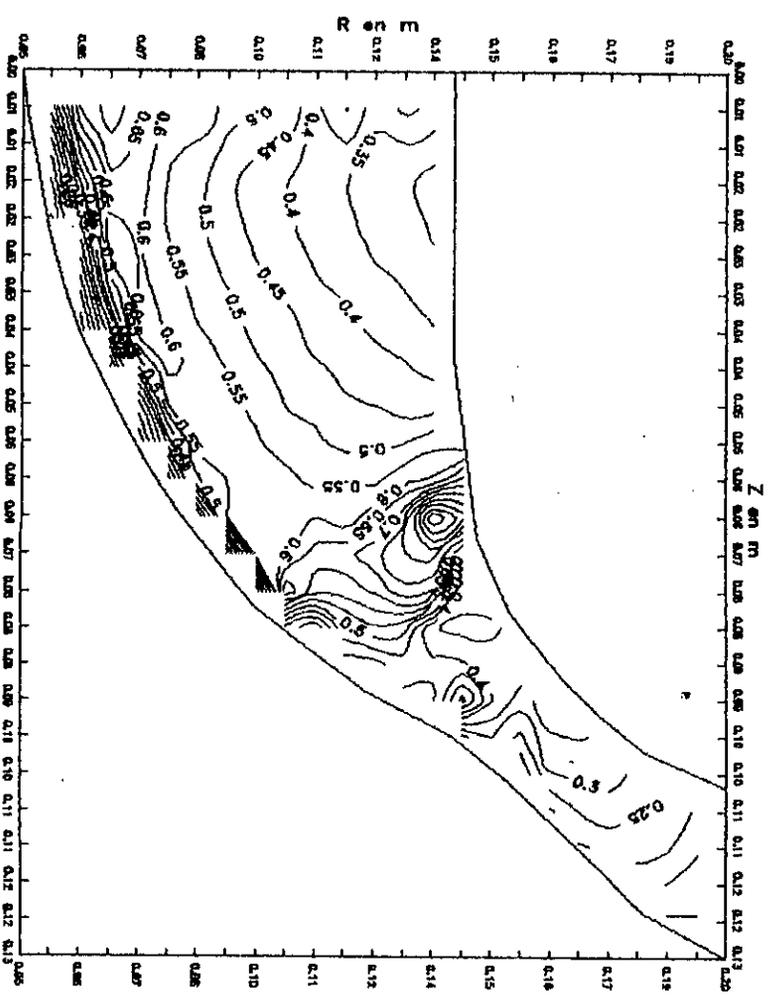
FIG 14.8

F16 IV.9

Repartition du Mach dans le canal meridional parfait



Repartition du Mach dans le canal meridional reel



Application N° 5

Avec les conditions d'entrée :

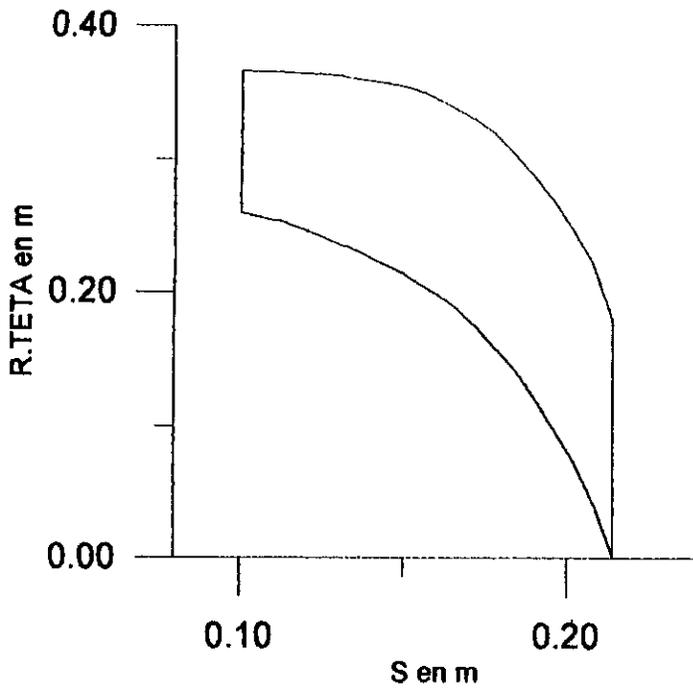
Le nombre de Mach : 1.

Le débit : $31.2963 \text{ m}^3 / \text{s}$

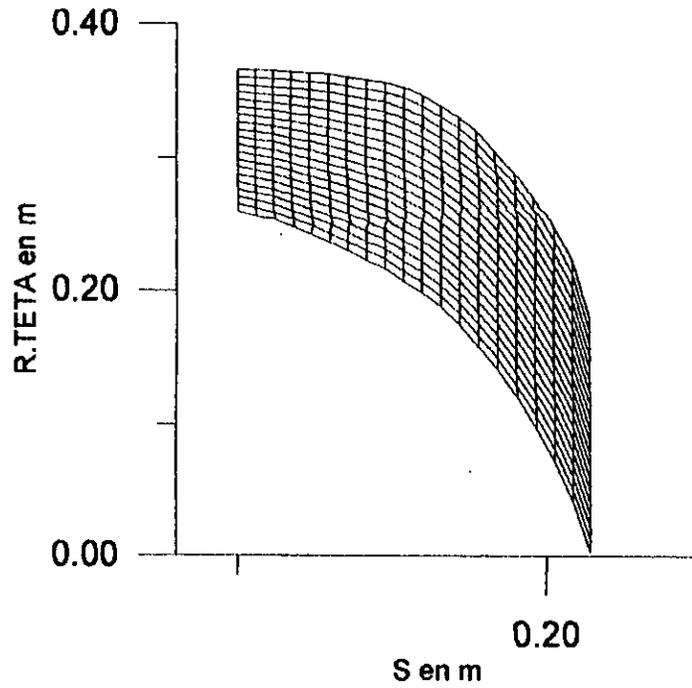
La vitesse de rotation : $1000 \text{ tr} / \text{mn}$

FIG V.1 Description des domaines de calcul

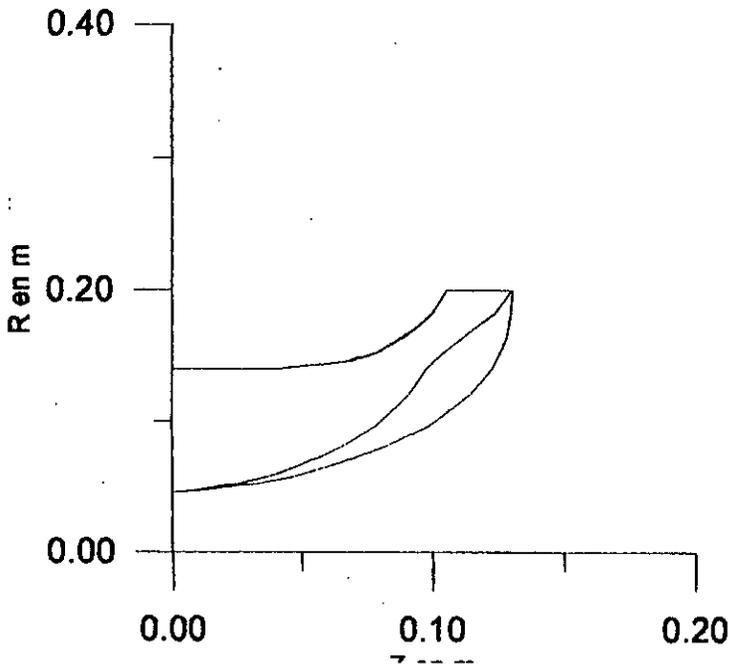
Epaisseur de la couche limite dans le plan aube à aube



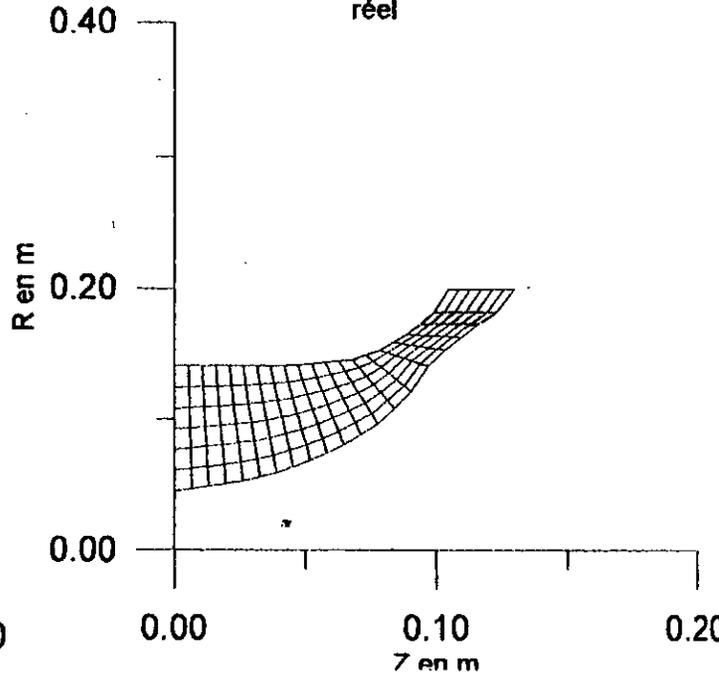
Maillage rectangulaire incliné appliqué dans le plan aube à aube domaine réel



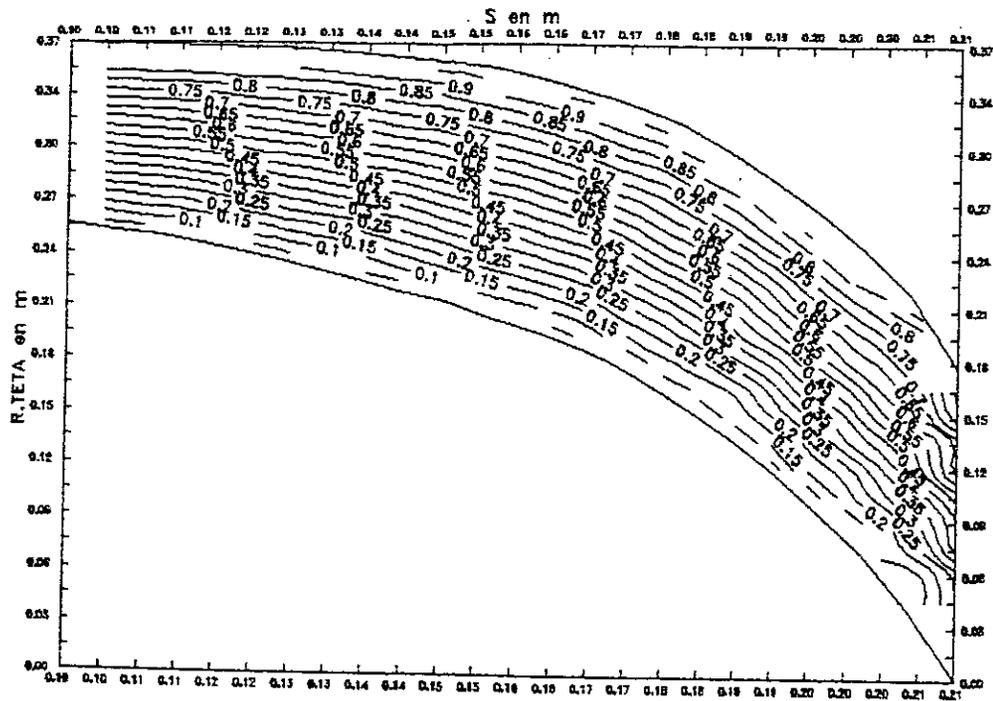
Epaisseur de la couche limite dans le plan meridional



Maillage curviligne appliqué dans le plan meridional réel



Repartition des lignes de courant
dans le canal cube a aube parfait



Repartition des lignes de courant
dans le canal cube a aube real

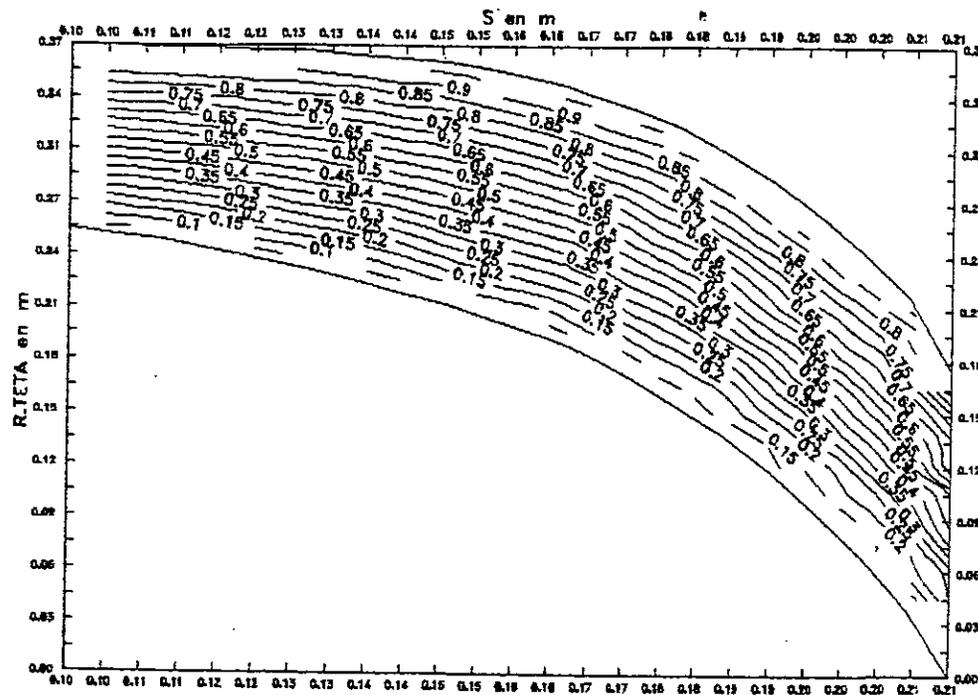
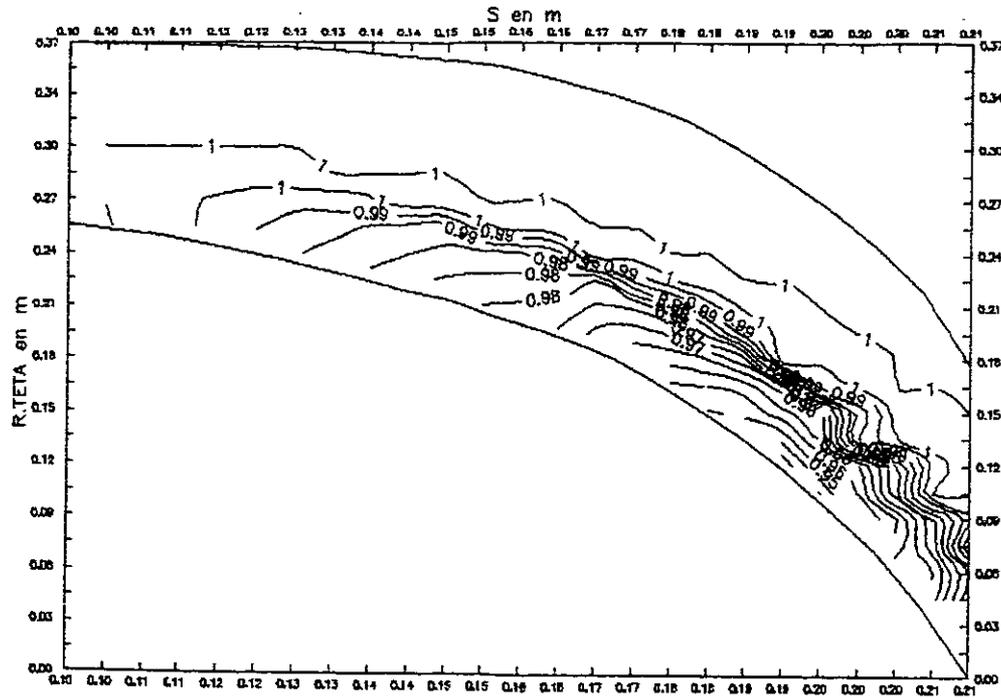
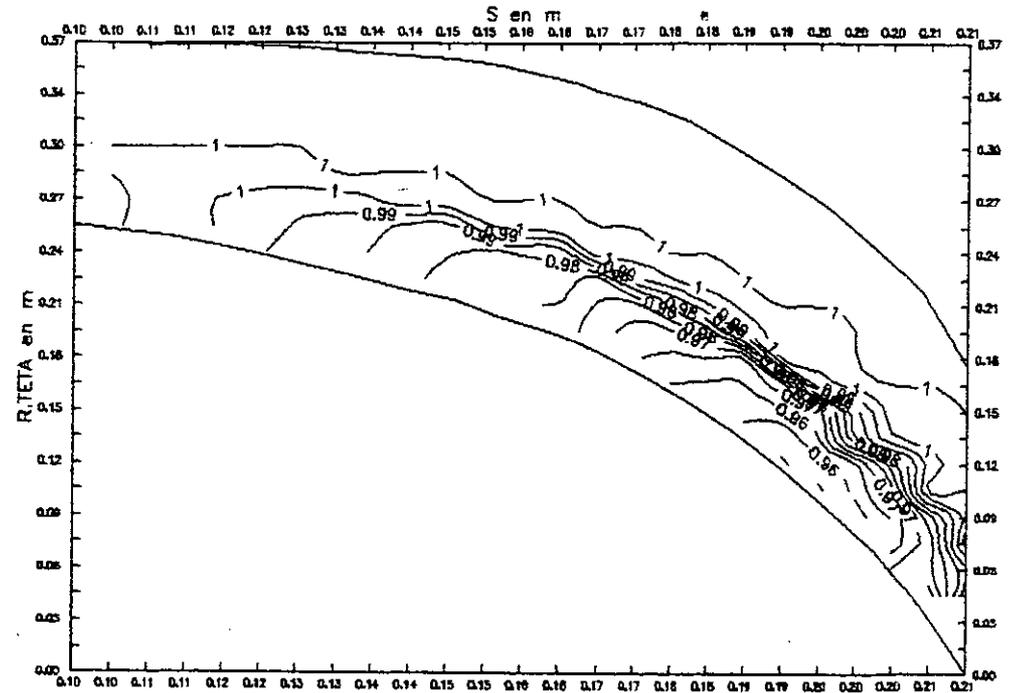


FIG N.3

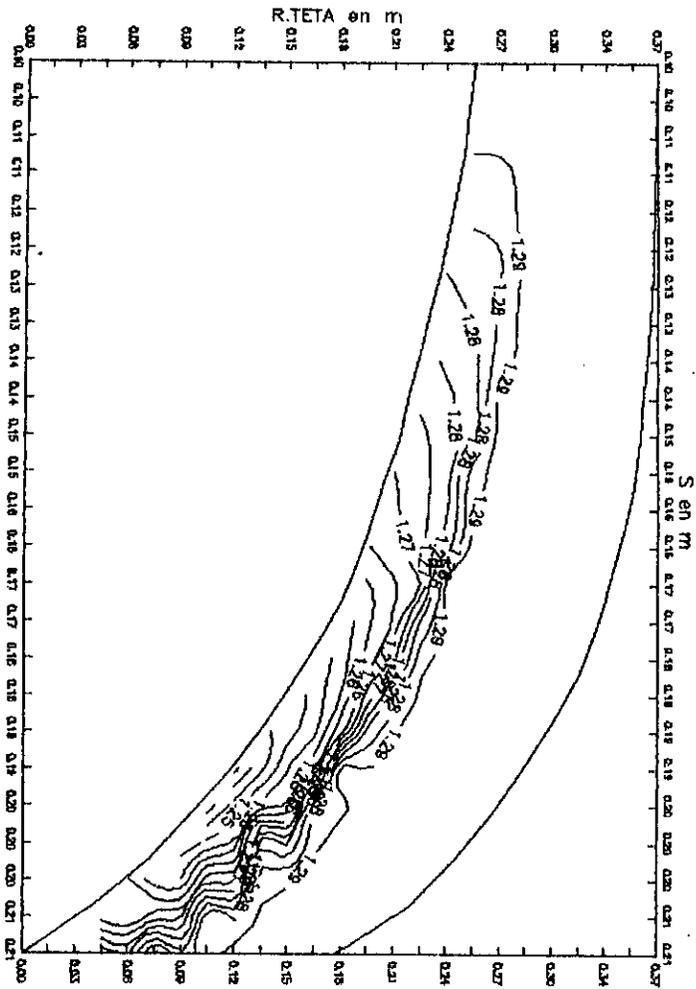
Repartition du taux de compression dans le canal aube a aube parfait



Repartition du taux de compression dans le canal aube a aube reel



Repartition de la densite dans
le canal aube a aube parfait



Repartition de la densite dans
le canal aube a aube reel

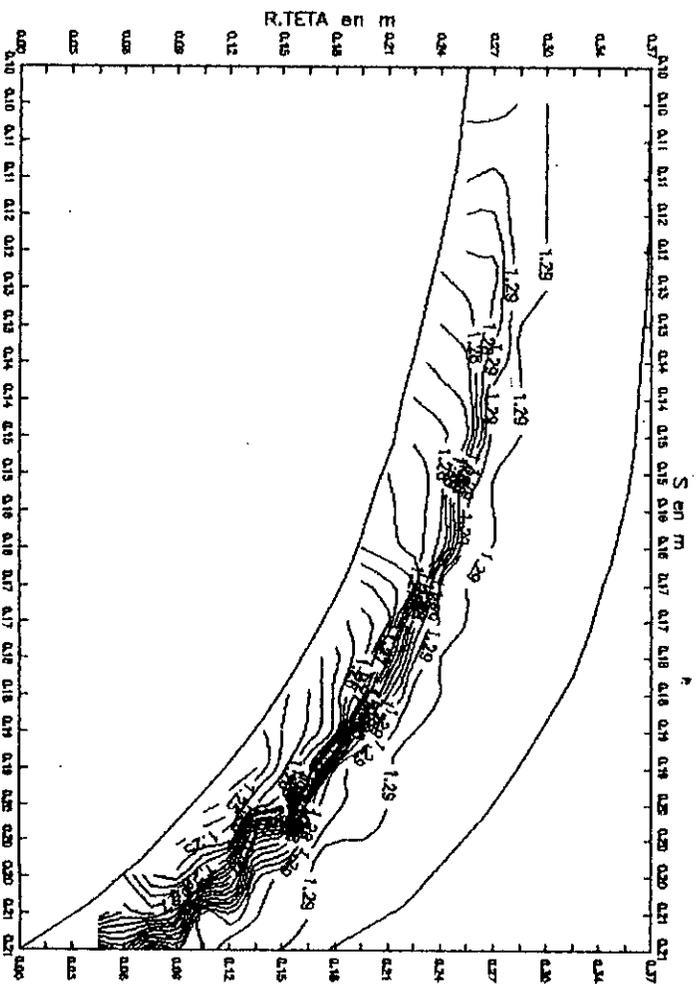
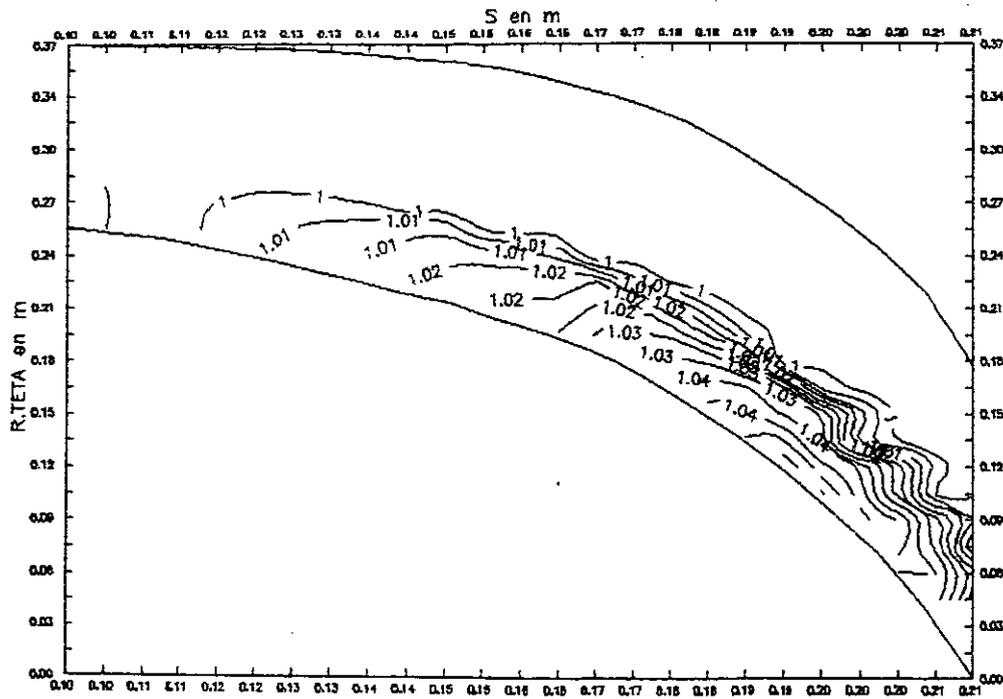


Fig 1.4

FIG 1.5

Repartition du Mach dans le canal aube a aube parfait



Repartition du Mach dans le canal aube a aube reel

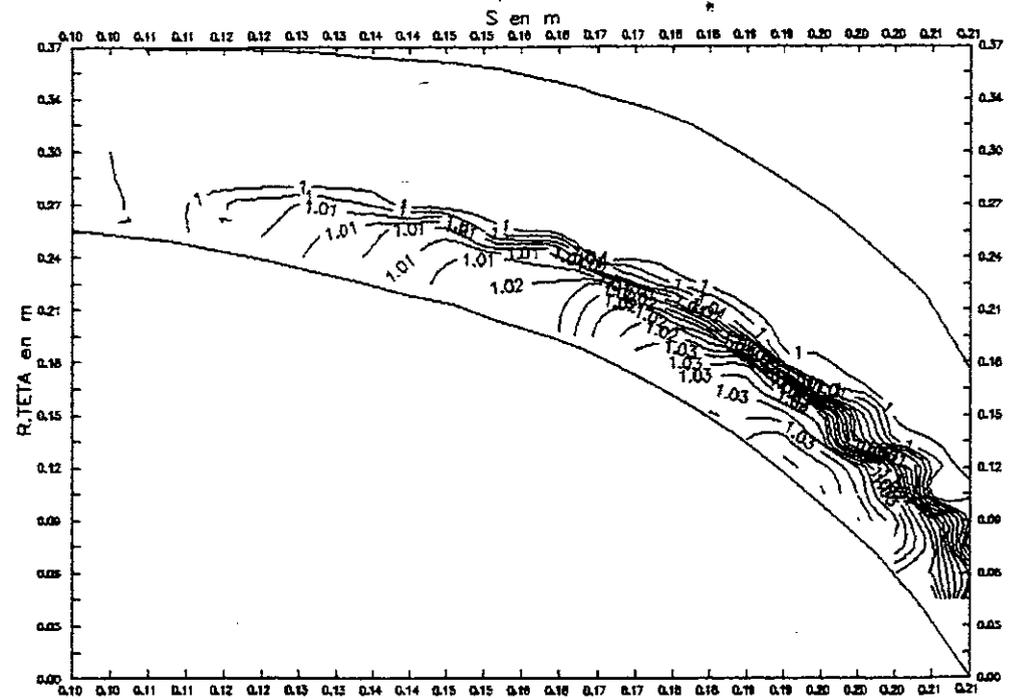
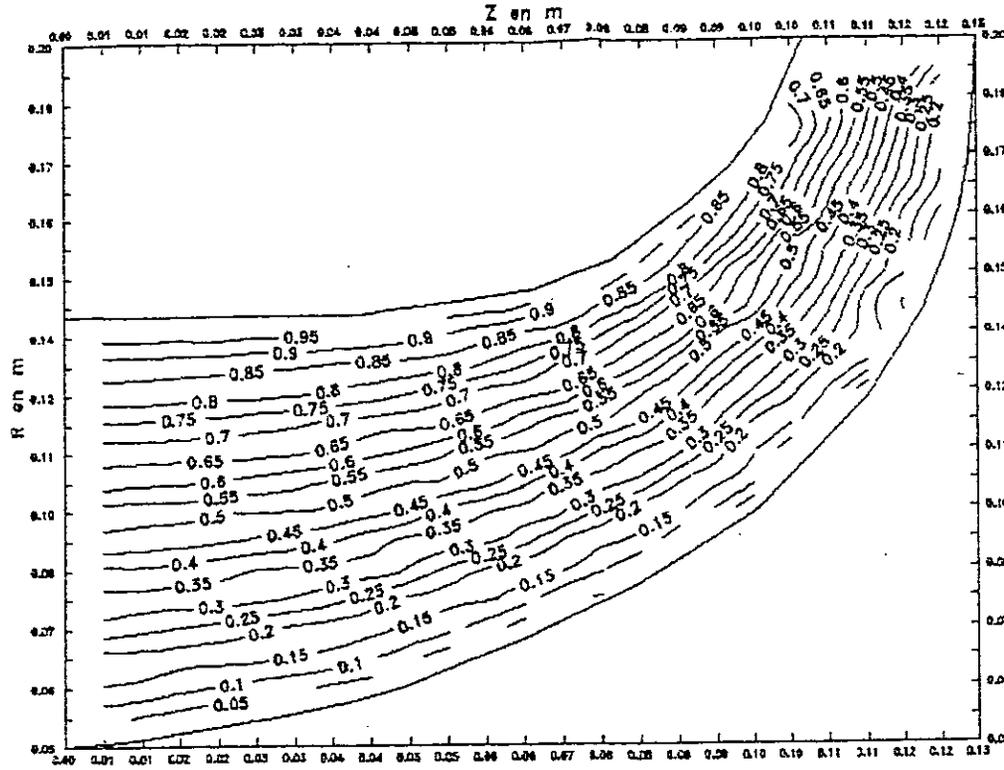


FIG V.6

Repartition des lignes de courant dans le canal meridional parfait



Repartition des lignes de courant dans le canal meridional reel

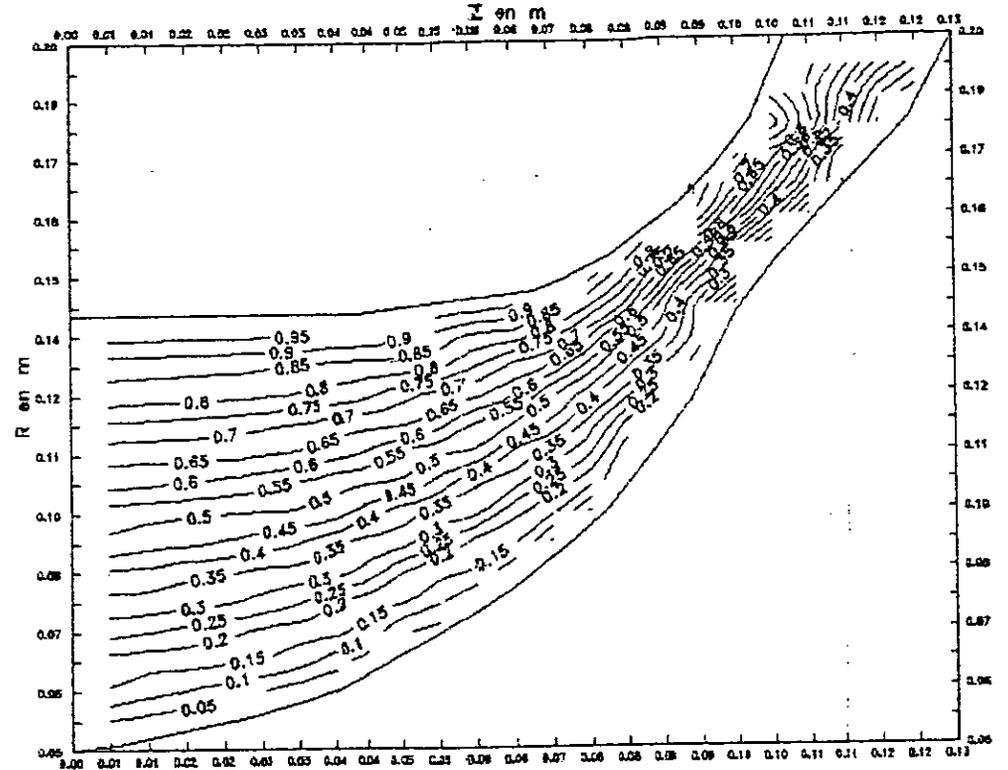
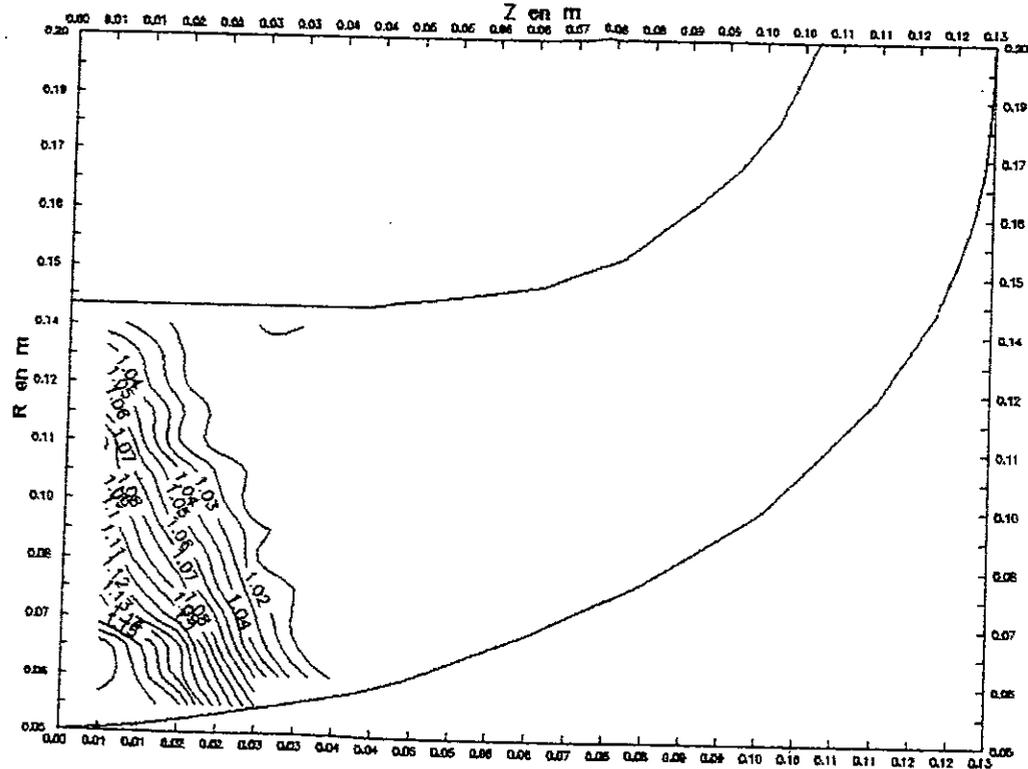


FIG V.7

Repartition du taux de compression
dans le canal meridional parfait



Repartition du taux de compression
dans le canal meridional reel

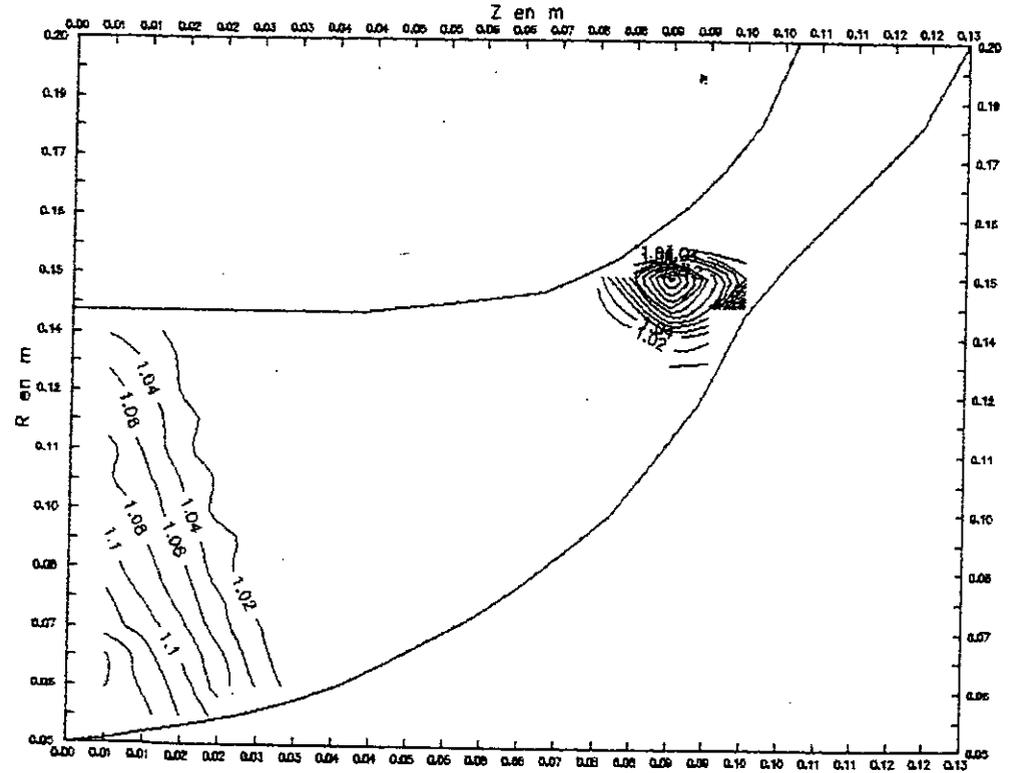
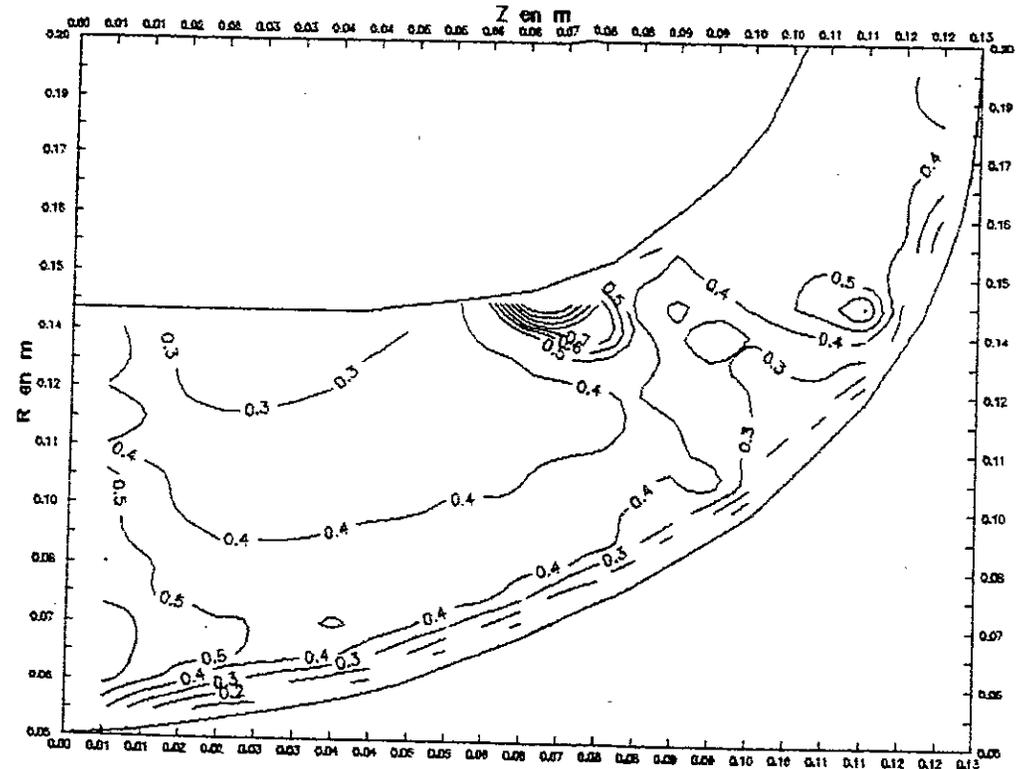
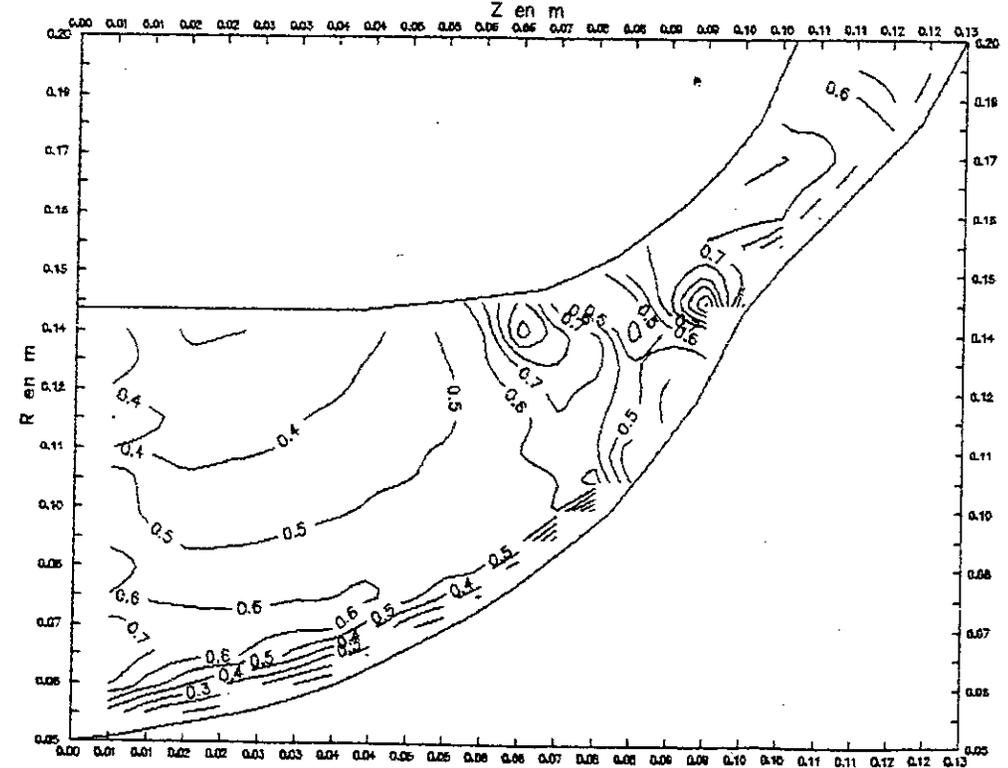


FIG V. 9

Repartition du Mach dans le canal meridional parfait



Repartition du Mach dans le canal meridional reel



Application N° 6

Avec les conditions d'entrée :

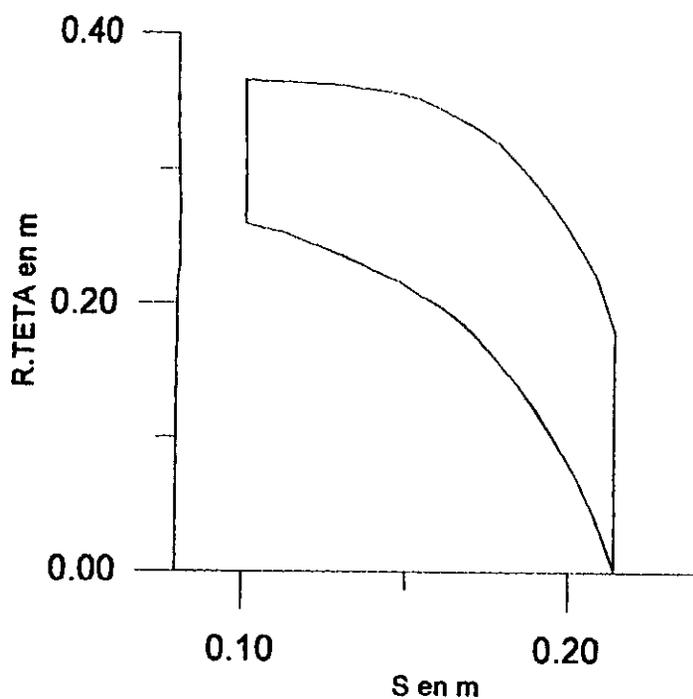
Le nombre de Mach : 1.2

Le débit : $37.555 \text{ m}^3 / \text{s}$

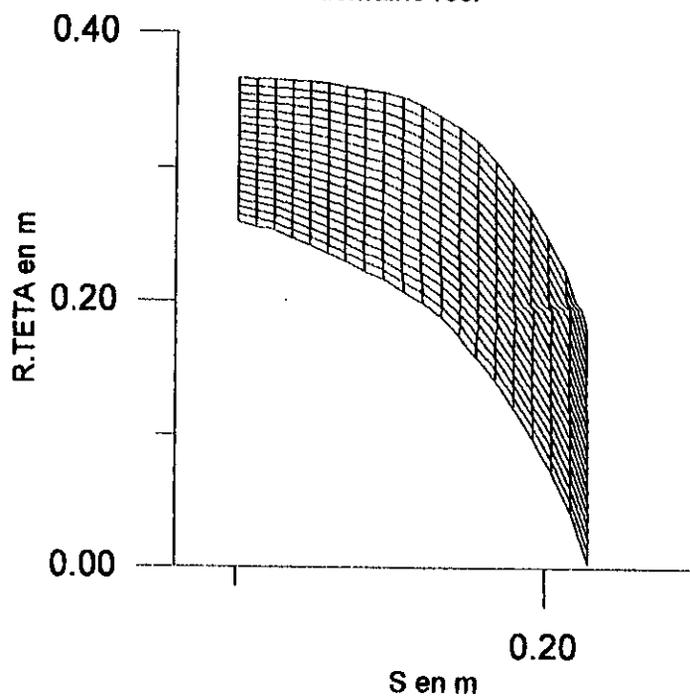
La vitesse de rotation : 1000 tr / mn

FIG VI.1 Description des domaines de calcul

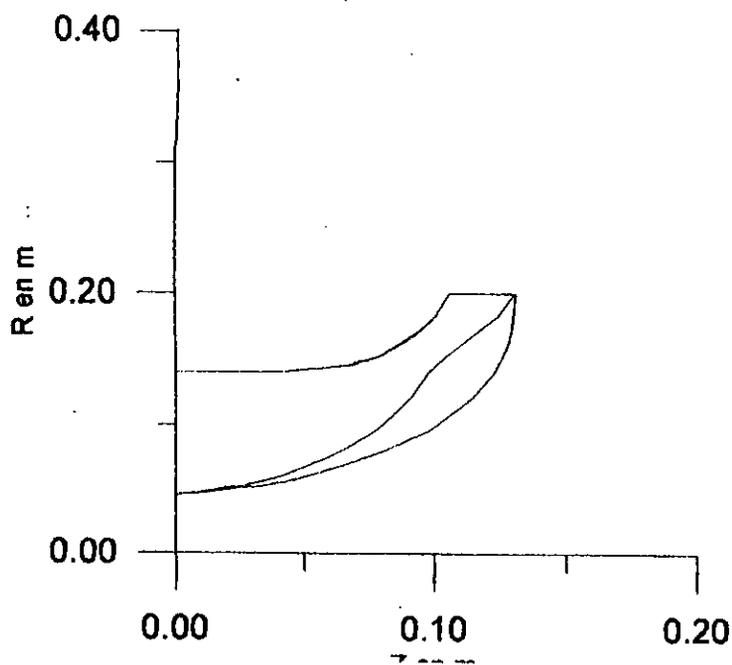
Epaisseur de la couche limite dans le plan aube à aube



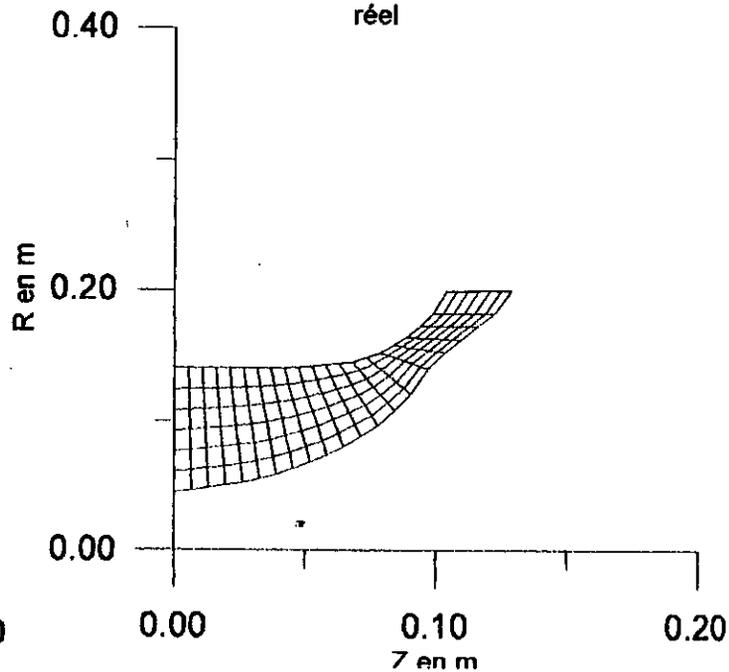
Maillage rectangulaire incliné appliqué dans le plan aube à aube domaine réel



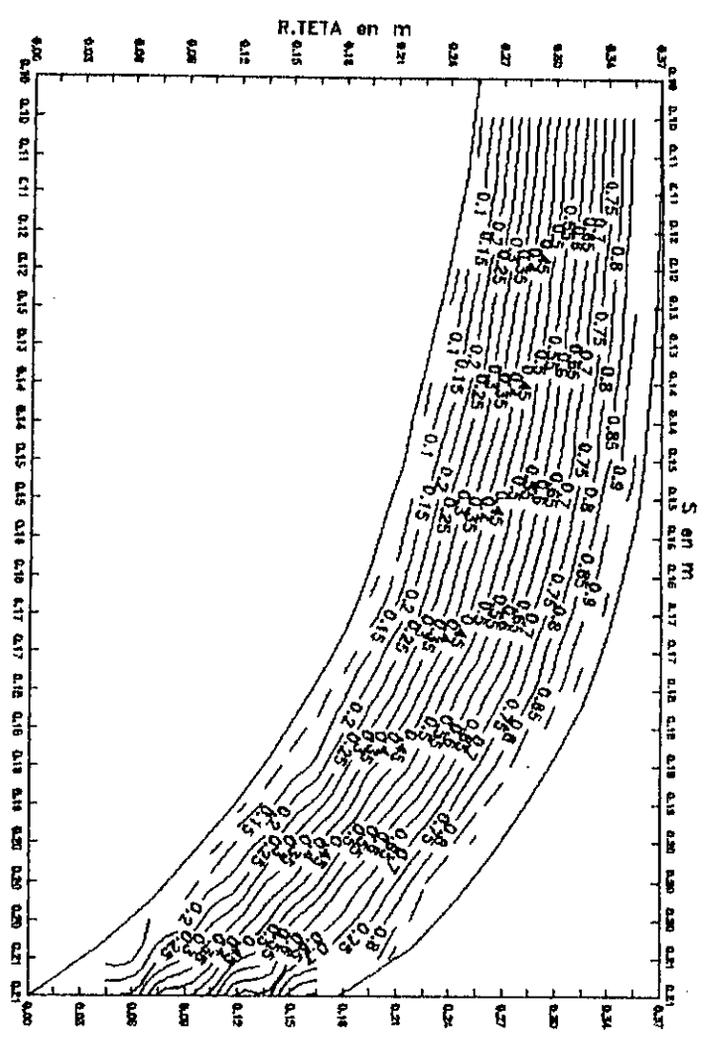
Epaisseur de la couche limite dans le plan meridional



Maillage curviligne appliqué dans le plan meridional réel



Repartition des lignes de courant dans le canal avec α cube parfait



Repartition des lignes de courant dans le canal avec α cube réel

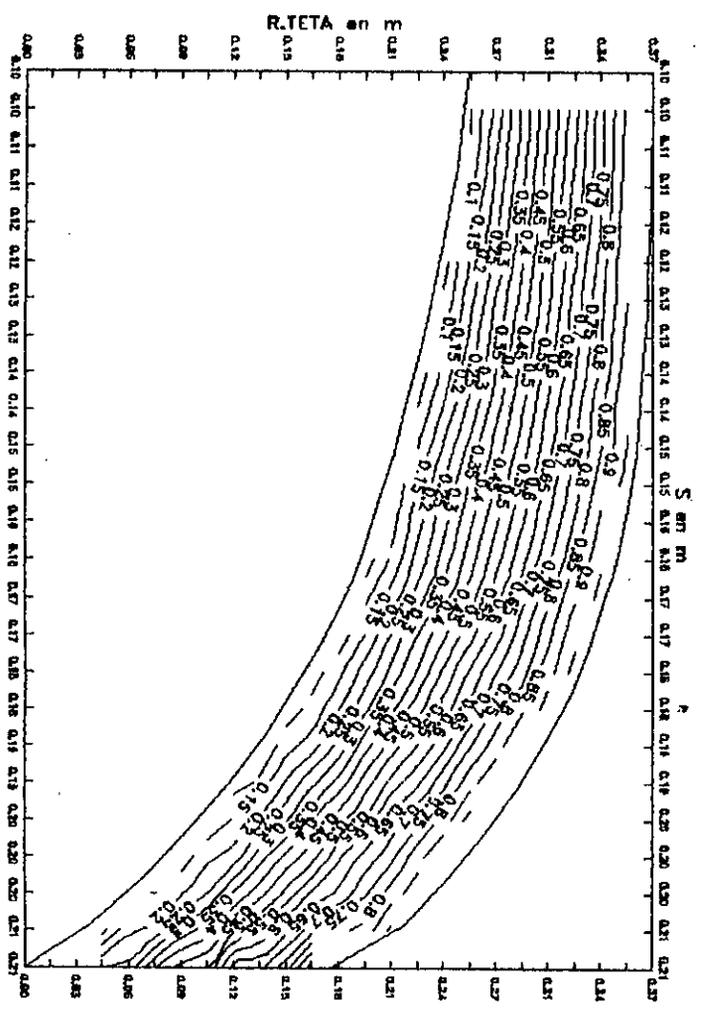
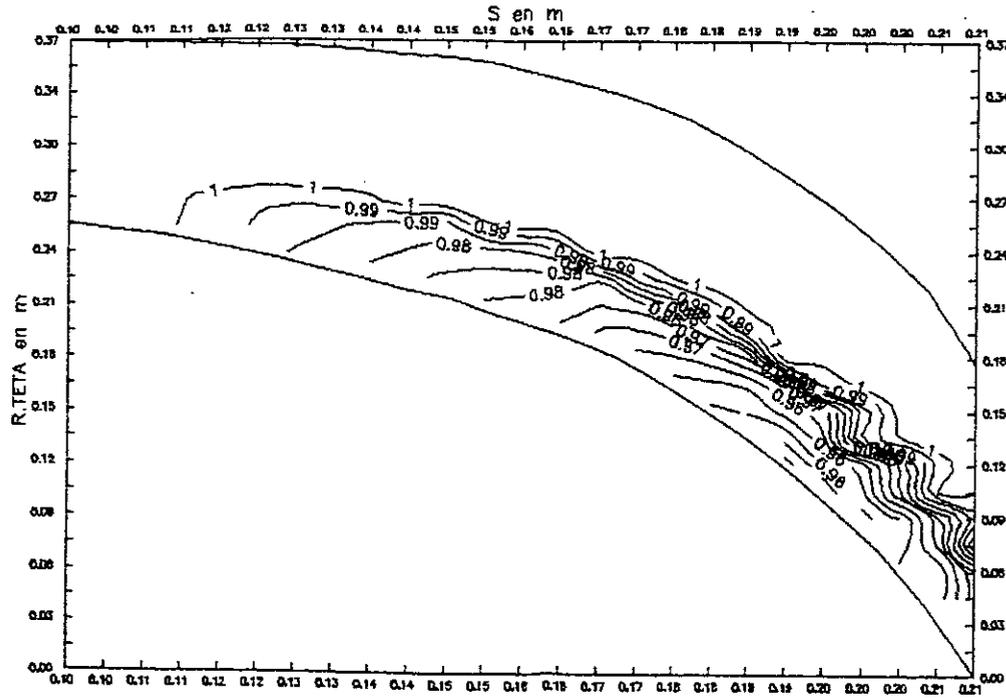


FIG V.2

F16 V13

Repartition du taux de compression dans le canal aube a aube parfait



Repartition du taux de compression dans le canal aube a aube reel

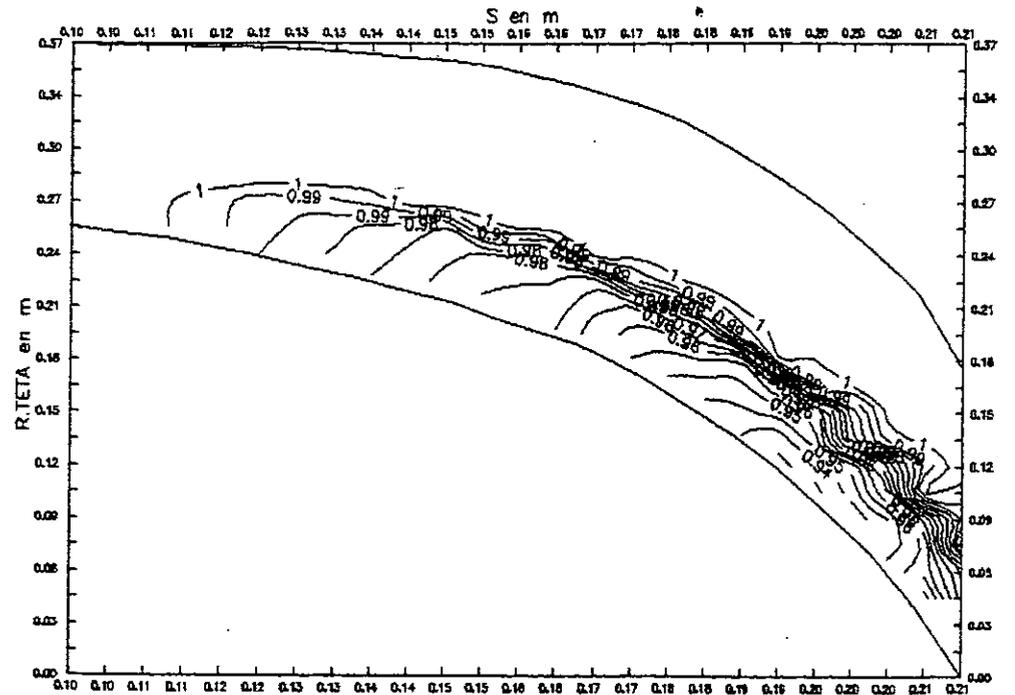
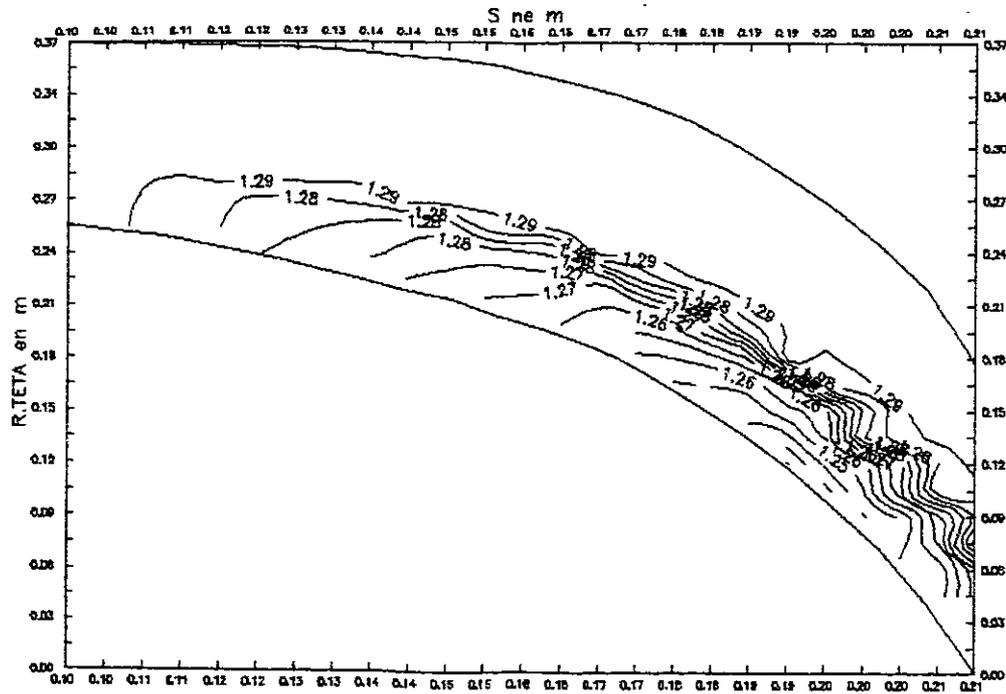


FIG V14

Repartition de la densite dans le canal aube a aube parfait



Repartition de la densite dans le canal aube a aube reel

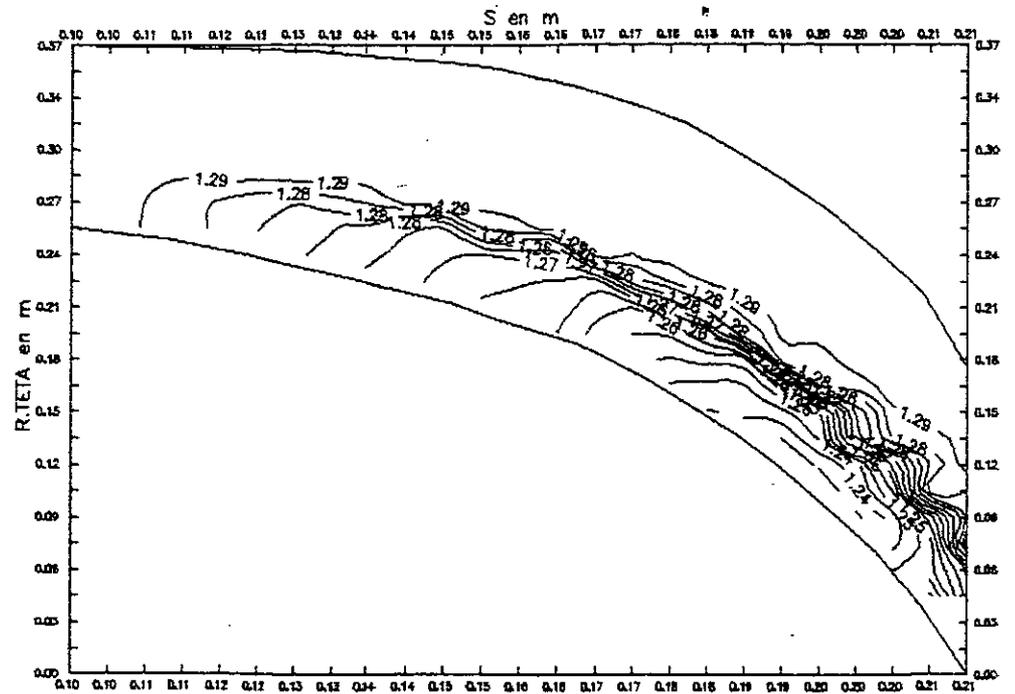
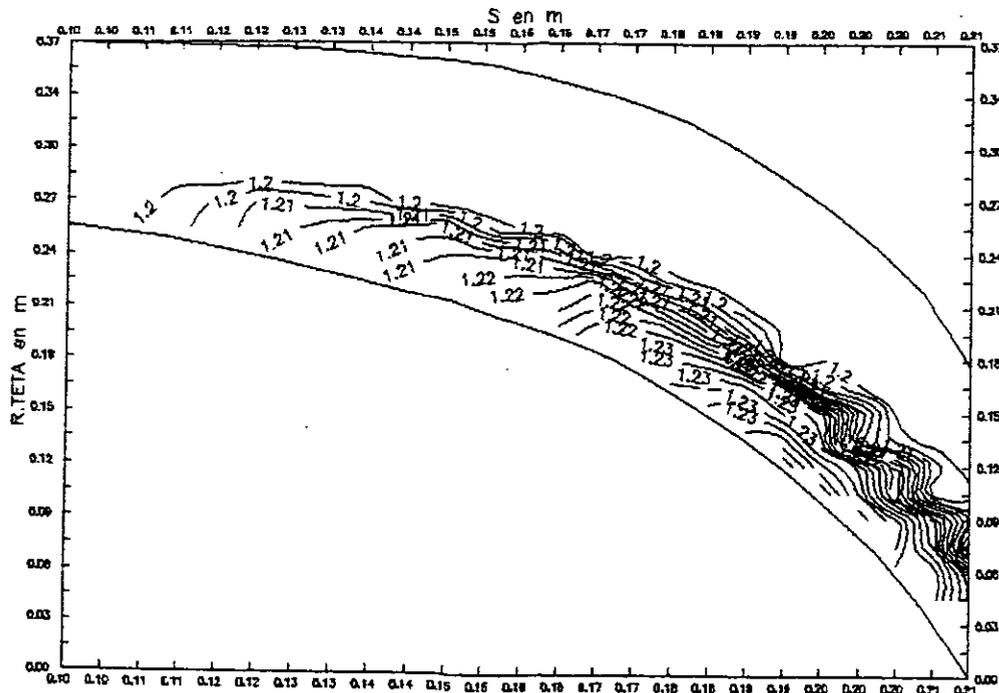
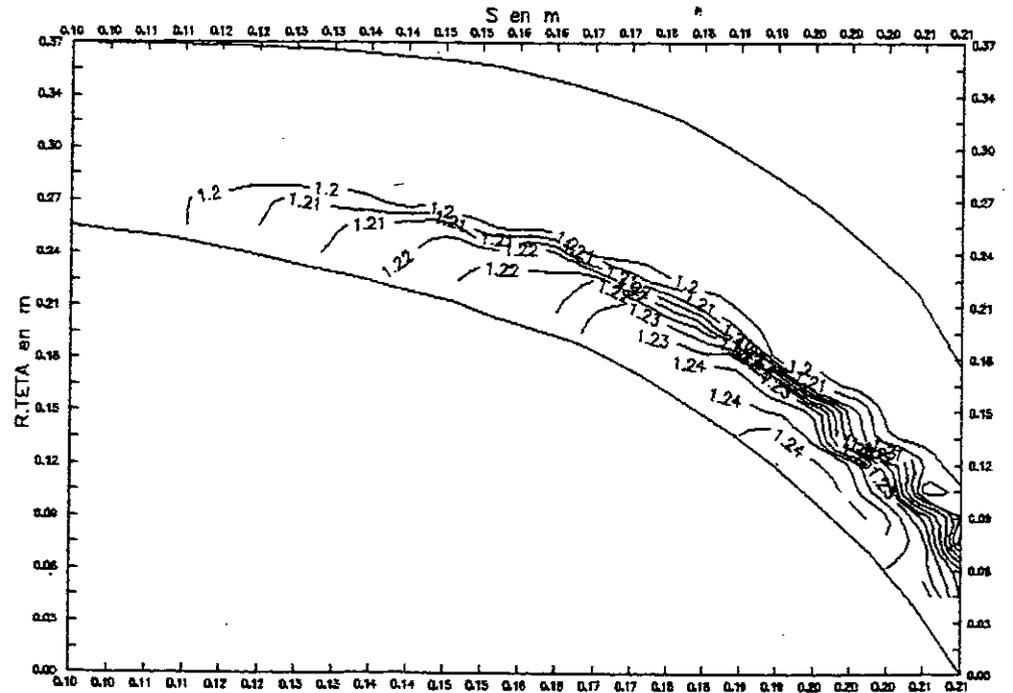


FIG V1.5

Repartition du Mach dans
le canal aube a aube parfait



Repartition du Mach dans
le canal aube a aube reel



Repartition des lignes de courant
dans le canal méridional partiel

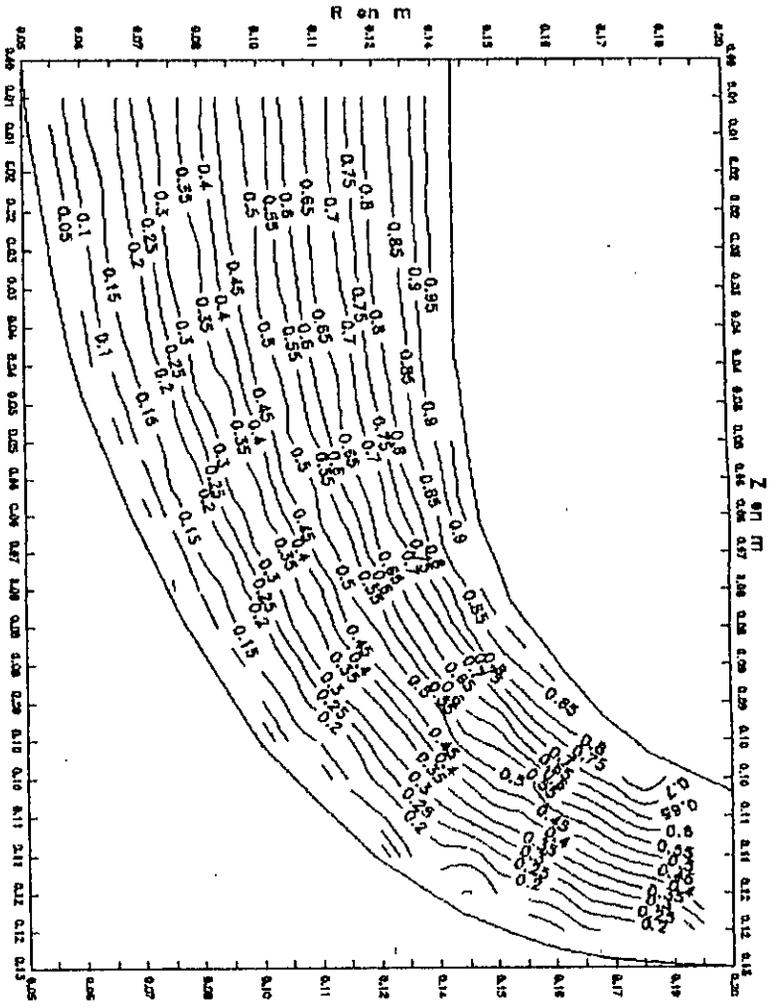


FIG 116

Repartition des lignes de courant
dans le canal méridional réel

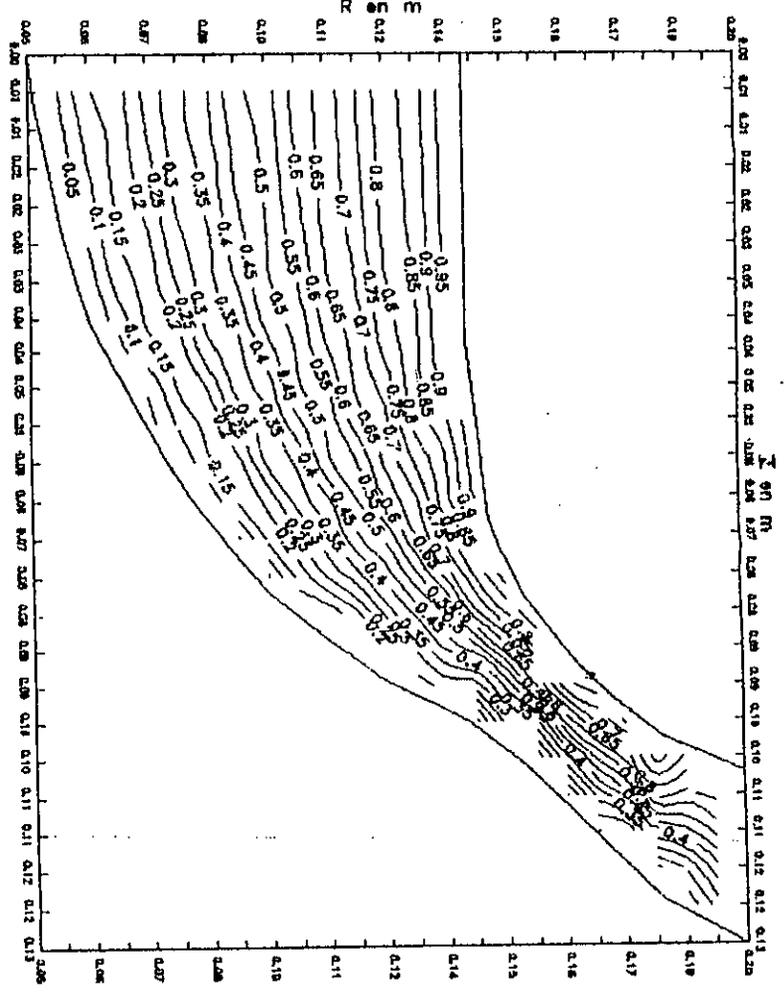
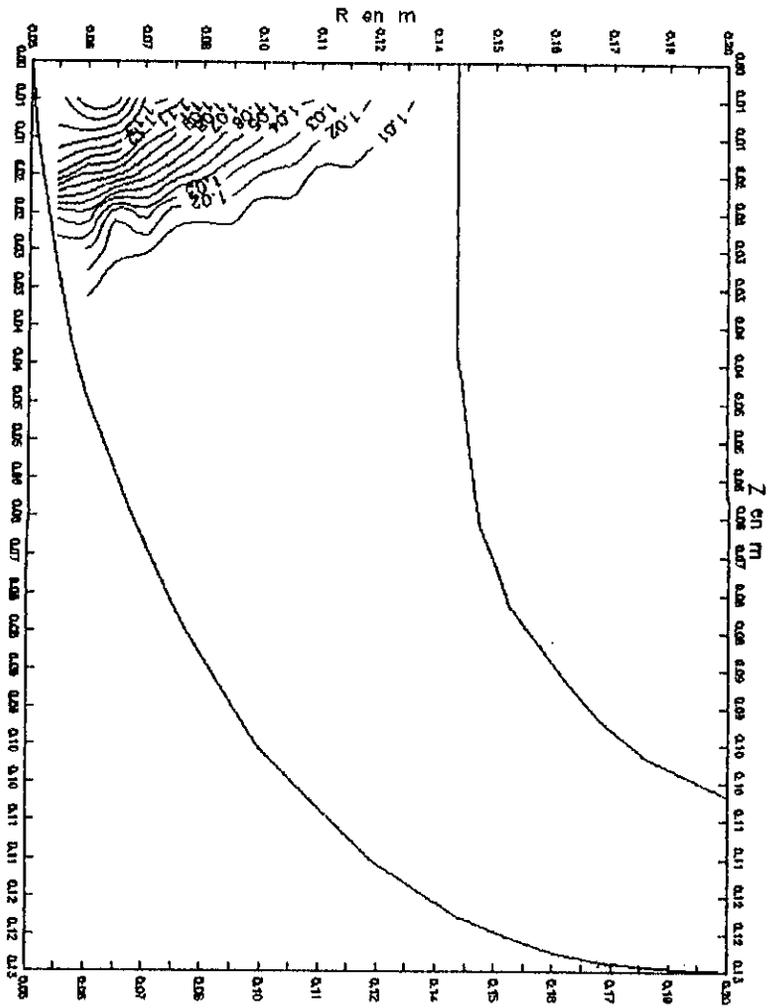
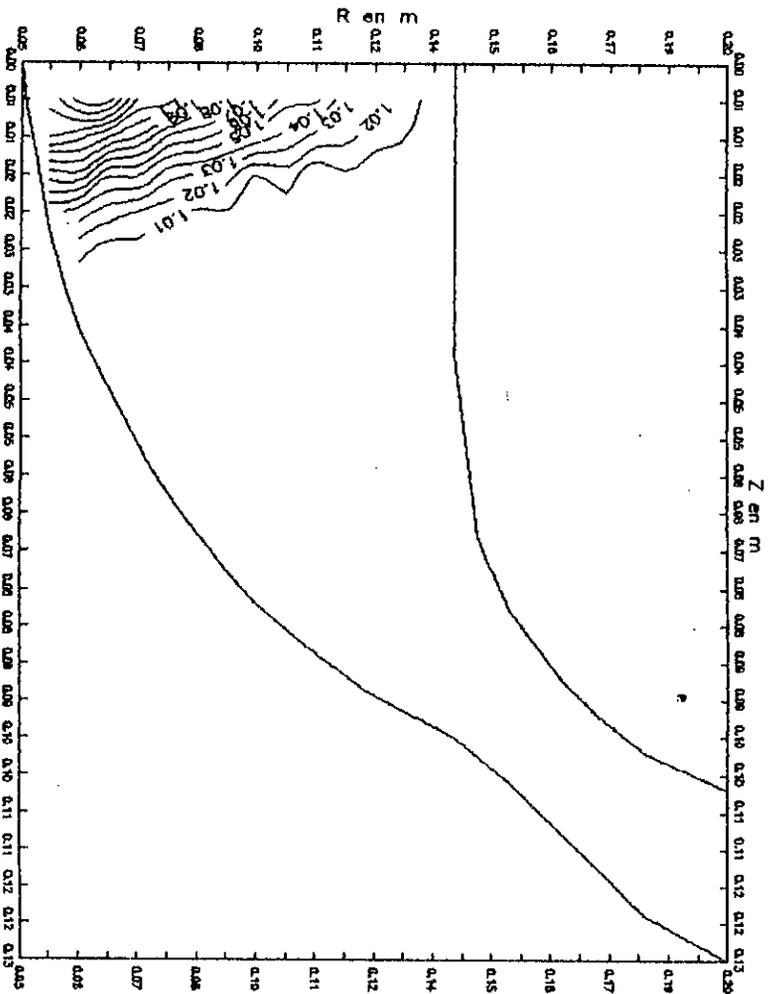


FIG 113

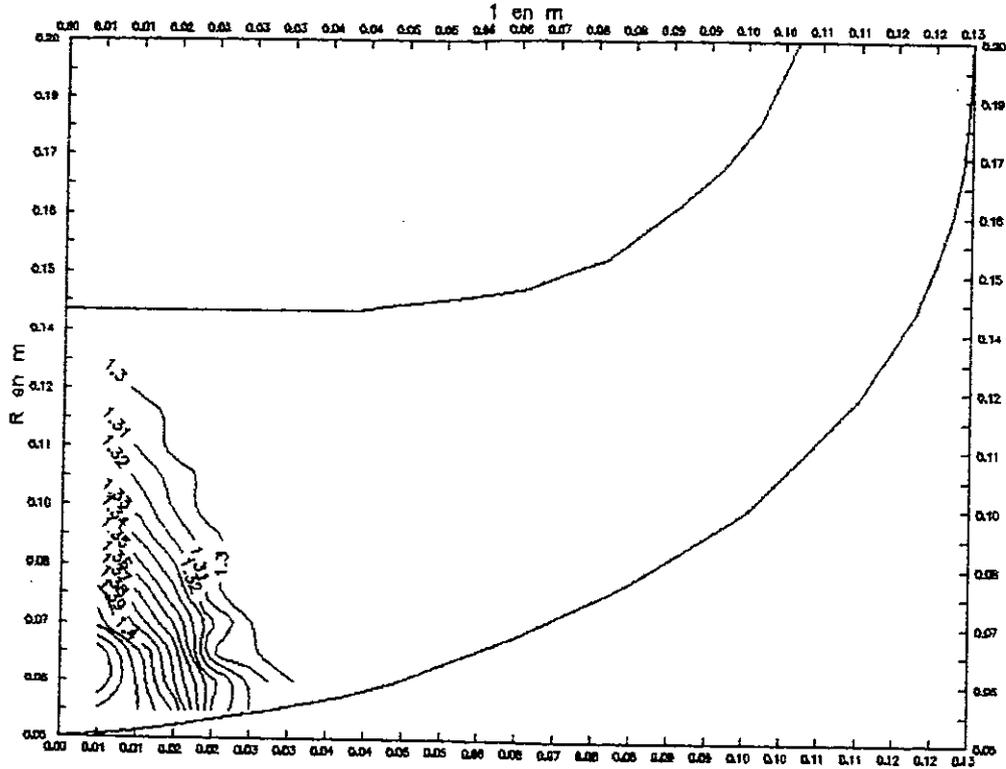
Repartition du taux de compression dans le canal meridional portait



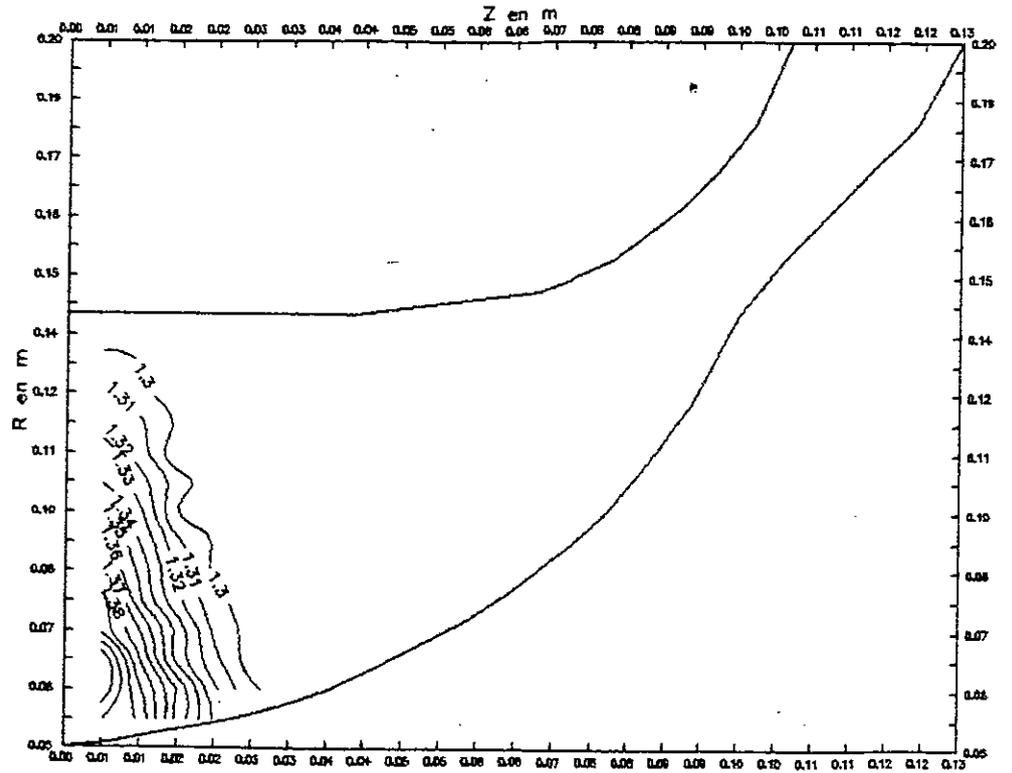
Repartition du taux de compression dans le canal meridional reel



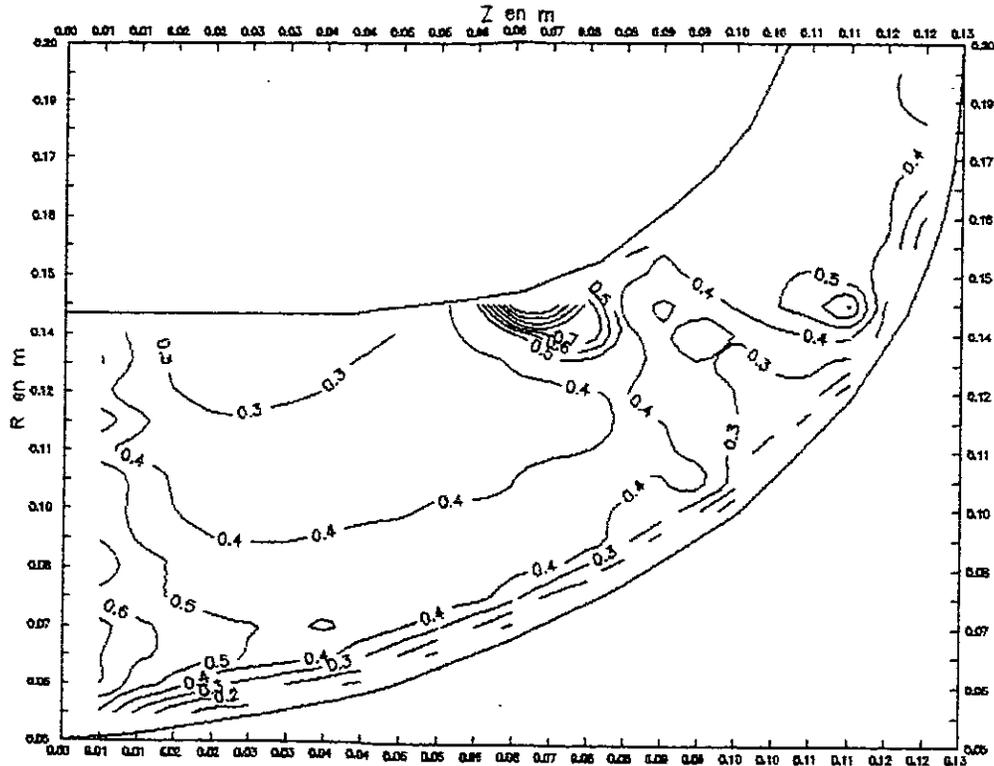
Repartition de la densite dans le canal meridional parfait



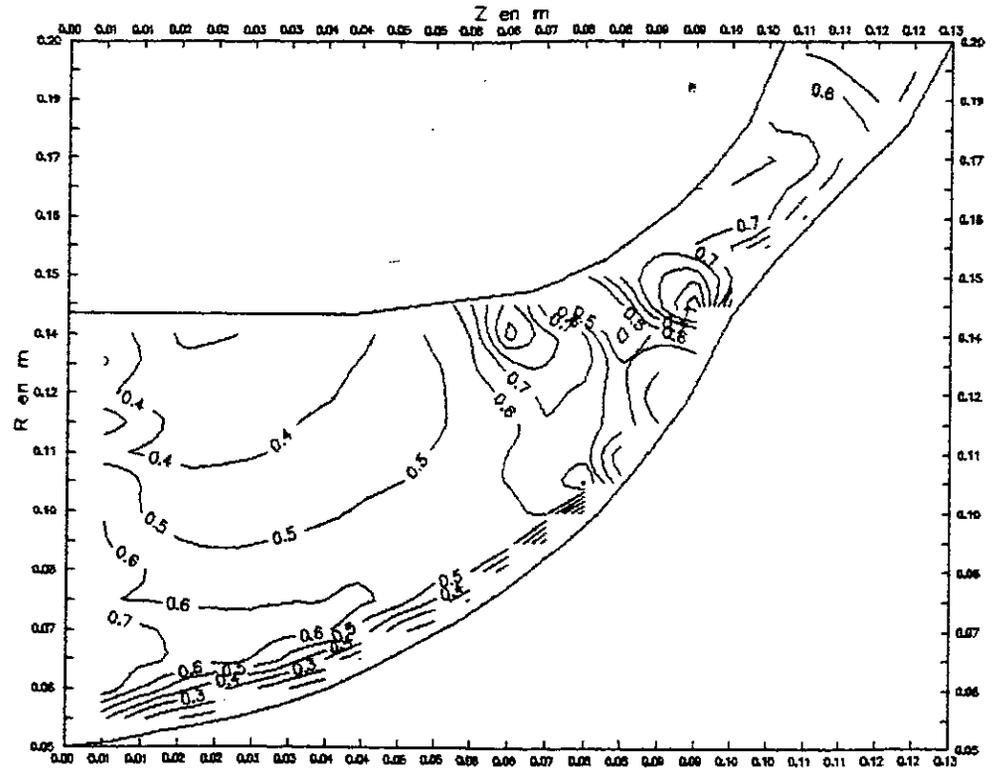
Repartition de la densite dans le canal meridional reel



Repartition du Mach dans le canal meridional parfait



Repartition du Mach dans le canal meridional reel



**CONCLUSION
GENERALE**

CONCLUSION GENERALE

Le présent travail nous a permis de donner une analyse et une exploitation rationnelle du modèle de C.H.WU, des écoulement dans un compresseur d'aviation, de type centrifuge, les résultats obtenus permettent d'avoir une distribution logique des caractéristiques aéro et thermodynamiques du fluide.

En conjuguant ces résultats à une étude des pertes, et à un calcul quasi tridimensionnel, on peut donner la distribution réelle en chaque nœud de l'espace du canal de compresseur .

INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS LES EQUATIONS PRINCIPALES

la résolution des équation de continuité, mouvement et énergie en bidimensionnel, nécessite l'introduction des dérivées spéciales afin de prendre en considération l'effet géométrique tridimensionnel.

Pour une grandeur quelconque , les dérivées spéciales sont définies par :

$$\begin{cases} \frac{\bar{\partial} q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{m_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} \\ \frac{\bar{\partial} q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{m_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} \end{cases}$$

I.1 INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT :

Dans l'écoulement méridional, les coordonnées r et z sont suffisantes pour définir n'importe quel point du plan (S2).

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial r}(r \rho B W_r) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z}(r \rho B W_z) = 0$$

on a par contre :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} &= r \rho B W_z \\ \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} &= -r \rho B W_r \end{aligned}$$

des équation (I.17) et (I.18) on obtient :

$$\frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} (r \rho B W_z) \quad \dots(a.1)$$

$$\frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} (r \rho B W_r) \quad \dots(a.2)$$

l'équation (a.1) donne :

$$\frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} = W_z \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} (r \rho B) + (r \rho B) \frac{\bar{\partial} W_z}{\partial r} \quad \dots(a.3)$$

d'où on obtient :

$$\frac{\bar{\partial}^2 W_z}{\partial r^2} = \frac{1}{r \rho B} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} - W_z \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(r \rho B)] \quad \dots(a.4)$$

de même l'équation (a.2) donne :

$$-\frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} = W_r \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (r \rho B) + (r \rho B) \frac{\bar{\partial} W_r}{\partial z} \quad \dots(a.5)$$

$$\frac{\bar{\partial} W_r}{\partial z} = -\frac{1}{r \rho B} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} - W_r \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(r \rho B)] \quad \dots(a.6)$$

Afin d'obtenir une formulation de l'équation de mouvement radial en fonction du courant, on substitut les équations (a.4) et (a.6) dans l'équation (1.6) ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r \rho B} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} - W_r \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(r \rho B)] - \frac{1}{r \rho B} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} - W_r \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(r \rho B)] \\ & = \frac{1}{W_z} \left[-\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial} (r V_u)}{\partial r} + F_r \right] \end{aligned}$$

on aura après calcul, le Laplacien de ψ sous la forme :

$$\frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(\rho r B)] + \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(\rho r B)] - \frac{\rho r B}{W_r} \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}(r V_u)}{\partial r} - F_r \right] \quad \dots(a.7)$$

$$\frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(\rho r B)] + \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(\rho r B)] - \frac{\rho r B}{W_r} \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial z} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial z} - \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}(r V_u)}{\partial r} - F_z \right] \quad \dots(a.8)$$

Les équations (a.7) et (a.8) sont deux formes de l'équation de WU, cela nous permet d'utiliser l'une des deux formes, pour obtenir une solution de la fonction de courant, qui satisfait toutes les équation gouvernant l'écoulement réversible sur la surface de courant moyenne, les dernières formes de l'équation principale de WU sont identiques par suite on a :

$$-\frac{\rho r B}{W_z} \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} - \frac{W_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}(r V_u)}{\partial r} - F_r \right] = -\frac{\rho r B}{W_r} \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial z} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial z} - \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}(r V_u)}{\partial r} - F_z \right]$$

En plus des hypothèses prises précédemment, on considère l'axisymétrie des surfaces de courant, ainsi les dérivées spéciales coïncident avec les dérivées partielles, et que l'évolution soit isentropique.

Compte tenu de toutes ces hypothèses l'équation de *C.H.WU* [1], donnant la fonction de courant est la suivante :

$$\frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial z^2} = q(r, z)$$

avec

$$q(r, z) = \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\ln(\rho r B)] + \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\ln(\rho r B)] - \frac{\rho r B}{W_z} \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}(r V_u)}{\partial r} - F_r \right] \quad \dots(1.19)$$

1- INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION DE CONTINUITE:

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r W_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho W_\theta] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho W_z] = 0 \quad \dots(1)$$

En Introduisant les dérivées spéciales :

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} [\rho r W_r] + \frac{n_r}{r^2 n_\theta} \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} [\rho r W_r] + \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} [\rho W_\theta] + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} [\rho W_z] + \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} [\rho W_z] = 0 \quad \dots(3)$$

on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r W_r] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho W_z] &= -\frac{n_r}{r^2 n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho r W_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho W_\theta] \\ + \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho W_z] &= 0 \end{aligned} \quad \dots(3)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r W_r] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho W_z] &= -\frac{1}{r n_\theta} \left[n_r \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r W_r) \right. \\ &\quad \left. - n_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho W_\theta] - n_z \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho W_z) \right] \end{aligned} \quad \dots(4)$$

on pose :

$$c(r, z) = -\frac{1}{r n_\theta} \left[n_r \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r W_r) - n_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho W_\theta] - n_z \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho W_z) \right] \quad \dots(5)$$

l'équation (4) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r W_r] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho W_z] = c(r, z) \quad \dots(6)$$

II. INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION DU MOUVEMENT :

A° / EQUATION DU MOUVEMENT RADIAL :

l'équation du mouvement radial est donnée par :

$$-\frac{W_\theta}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right] + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} \quad \dots(7)$$

La dérivée spéciale pour toute quantité Q est donnée par

$$\frac{\bar{\partial}(Q)}{\partial r, z} = \frac{\partial(Q)}{\partial r, z} + \frac{n_{r,z}}{r n_{\theta}} \frac{\partial(Q)}{\partial \theta}$$

ainsi l'équation du mouvement radial devient après introduction des dérivées spéciales :

$$\begin{aligned} -\frac{W_{\theta}}{r} \left[\frac{\bar{\partial}}{\partial r} (r V_{\theta}) + \frac{n_r}{r n_{\theta}} \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} (r V_{\theta}) - \frac{\bar{\partial} W_r}{\partial \theta} \right] + W_z \left[\frac{\bar{\partial} W_r}{\partial z} + \frac{n_z}{r n_{\theta}} \frac{\bar{\partial} W_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} W_z}{\partial r} \right. \\ \left. - \frac{n_z}{r n_{\theta}} \frac{\bar{\partial} W_z}{\partial \theta} \right] = -\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_{\theta}} \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + T \frac{n_r}{r n_{\theta}} \frac{\bar{\partial} S}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \dots(8)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} -\frac{W_{\theta}}{r} \left[\frac{\bar{\partial}}{\partial r} (r V_{\theta}) \right] + W_z \left[\frac{\bar{\partial} W_r}{\partial z} - \frac{\bar{\partial} W_z}{\partial r} \right] = \frac{n_r W_{\theta}}{r^2 n_{\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} (r V_{\theta}) - \frac{W_{\theta}}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \\ - \frac{n_z W_z}{r n_{\theta}} \frac{\bar{\partial} W_r}{\partial \theta} + \frac{n_z W_z}{r n_{\theta}} \frac{\bar{\partial} W_z}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_{\theta}} \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta} + T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + T \frac{n_r}{r n_{\theta}} \frac{\bar{\partial} S}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \dots(9)$$

CALCUL DES EXPRESSIONS $\frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta}$ et $\frac{\bar{\partial} S}{\partial \theta}$

• Calcul de $\frac{\bar{\partial} S}{\partial \theta}$

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$T dS = dU + p dv \quad (10)$$

avec :

$$h = U + p v \quad \Rightarrow \quad dh = dU + p dv + v dp$$

d'où :

$$dU = dh - v dp - v dp$$

ainsi :

$$T ds = dh - v dp$$

$$\Rightarrow T \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} - v \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \dots(11)$$

avec

$$v = \frac{1}{\rho}$$

l'équation (11) devient :

$$T \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \dots(12)$$

• Calcul de $\frac{\partial I}{\partial \theta}$

La rothalpie I est donnée par :

$$I = H - \omega r V_{\theta}$$

avec : H : enthalpie totale

ω : vitesse angulaire

V_{θ} : vitesse circonférentielle

où

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

avec : h : enthalpie statique

V_{θ} : vitesse absolue de la
particule

d'où :

$$I = h + \frac{V^2}{2} - \omega r V_\theta$$

or :

$$V \begin{cases} W_r \\ W_\theta + \omega r \\ W_z \end{cases} \quad \text{d'où} \quad V^2 = W^2 + (\omega r)^2 + 2 W_\theta \omega r$$

on aura alors :

$$I = h + \frac{W^2}{2} - \omega^2 \frac{r^2}{2}$$

en dérivant par rapport à θ :

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial W^2}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega^2 r^2)$$

après développement on obtient :

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + W_\theta \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial \theta} \quad \dots(14)$$

Substituant les équations (12) et (14) dans (9) on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{W_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_\theta \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r n_\theta} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} [W_r n_r + W_\theta n_\theta + W_z n_z] & \quad \dots(15) \end{aligned}$$

Etant donné que \bar{n} et \bar{W} sont orthogonales alors :

$$W_r n_r + W_\theta n_\theta + W_z n_z = 0$$

Enfin on aura l'équation du mouvement radial :

$$-\frac{W_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_\theta \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \dots(16)$$

ou encore :

$$-\frac{W_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} + F_r \quad \dots(17)$$

avec :

$$F_r = -\frac{n_r}{r n_\theta \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

B°/ EQUATION DU MOUVEMENT CIRCONFÉRENCIEL :

L'équation du mouvement circonférenciel est donnée par :

$$\frac{W_r}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right] - W_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial z} - \frac{\partial W_\theta}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{T}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad \dots(18)$$

La dérivée spéciale pour toute quantité Q est donnée par :

$$\frac{\bar{\partial}(Q)}{\partial r, z} = \frac{\partial(Q)}{\partial r, z} + \frac{n_{r,z}}{r n_\theta} \frac{\partial(Q)}{\partial \theta}$$

ainsi l'équation du mouvement circonférenciel devient après introduction des dérivées spéciales :

$$\begin{aligned} & \frac{W_r}{r} \left[\frac{\bar{\partial}}{\partial r} (r V_\theta) + \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} (r V_\theta) - \frac{\bar{\partial} W_r}{\partial \theta} \right] - W_z \left[\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} W_z}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} W_\theta}{\partial z} - \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\bar{\partial} W_\theta}{\partial \theta} - \frac{\bar{\partial} W_z}{\partial r} \right] \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta} + \frac{T}{r} \frac{\bar{\partial} S}{\partial \theta} \quad \dots(19) \end{aligned}$$

En substituant les équation (12) et (14) dans l'équation (19) on obtient :

$$\frac{W_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) + \frac{W_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) = -W_r \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} - W_z \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{r} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \dots(20)$$

ou encore :

$$\frac{W_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) + \frac{W_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) = -\frac{1}{r n_\theta} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} (W_r n_r + W_\theta n_\theta + W_z n_z) - \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \dots(21)$$

avec

$$W_r n_r + W_\theta n_\theta + W_z n_z = 0 \quad \text{car } \vec{W} \cdot \vec{n} = 0$$

finalement, l'équation du mouvement circonferenciel s'écrit :

$$-\frac{W_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) + \frac{W_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) = F_\theta \quad \dots(22)$$

avec :

$$F_\theta = -\frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

C°/EQUATION DU MOUVEMENT AXIAL :

L'équation du mouvement axial est donnée par :

$$-W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] + W_\theta \left(\frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) \quad \dots(23)$$

de même on introduit les dérivées spéciales :

$$-W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] + W_\theta \left[\frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial z} \right] + W_\theta \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) \quad \dots(24)$$

ou encore :

$$-W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] + W_\theta \left(\frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) \quad \dots(25)$$

puisque :

$$W_\theta n_\theta + W_z n_z + W_r n_r = 0$$

l'équation du mouvement axial deviendra :

$$-W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] + W_\theta \left(\frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + F_z \quad \dots(26)$$

avec : $F_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r} \right)$

III. INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION D'ENERGIE :

l'équation d'énergie est donnée par :

$$W_r \frac{\partial I}{\partial r} + W_\theta \frac{\partial I}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} = Q \quad \dots(27)$$

$Q = 0$ pour un processus adiabatique, ce qui permet d'écrire :

$$W_r \frac{\partial I}{\partial r} + W_\theta \frac{\partial I}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} = 0$$

Introduisant les dérivées spéciales dans l'équation (28) :

$$W_r \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} + \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta} \right] + \frac{W_\theta}{r} \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta} + W_z \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial z} + \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta} \right] = 0 \quad \dots(29)$$

ou bien

$$W_r \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} + W_z \frac{\bar{\partial} I}{\partial z} = - \frac{W_\theta}{r} \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta} - \frac{n_r}{r n_\theta} W_r \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta} - \frac{n_z}{r n_\theta} W_z \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta}$$

$$W_r \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} + W_z \frac{\bar{\partial} I}{\partial z} = - \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\bar{\partial} I}{\partial \theta} [n_r W_r + n_\theta W_\theta + n_z W_z]$$

puisque : $\vec{n} \cdot \vec{W} = 0$

alors on aura :

$$W_r \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} + W_z \frac{\bar{\partial} I}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

SIMPLIFICATION DES EQUATIONS DE NAVIER STOCKES POUR
L'ETUDE DE LA COUCHE LIMITE

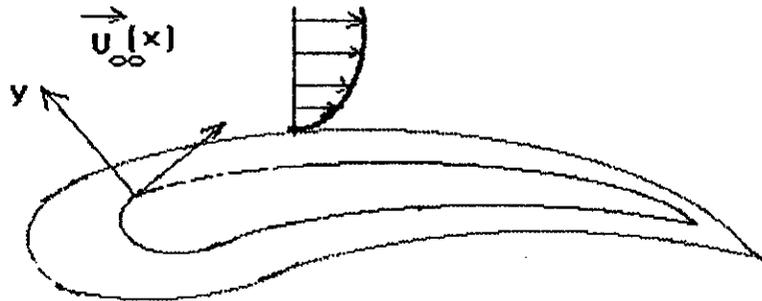


fig III.1 profil des vitesses dans la couche limite
pour un obstacle

Réécrivant les équations de NAVIER STOCKES sous la forme adimensionnelle.

soit :

V_θ : est la vitesse d'écoulement, dont on réfère toutes les vitesses .

L : La longueur du corps .

L'expression est rendue dimensionnelle avec $\rho \cdot V^2$.

Le temps est référé à L / V_θ .

Le nombre de REYNOLDS est $R = V_\theta L \rho / \mu = V_\theta L / \nu$ (III.a)

qui est considéré très grand .

Avec ces formules on peut écrire :

$$X^* = \frac{X}{L}$$

$$Y^* = \frac{Y}{L}$$
$$u^* = \frac{u}{V_\theta}$$
$$v^* = \frac{v}{V_\theta}$$
$$p^* = \frac{p}{\rho V_\theta^2}$$

Donc les équations de NAVIRE STOKES deviennent après substitution dans des formules ci-dessous .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (u^* V_\theta)}{\partial (x^* L)} = \frac{V_\theta}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (u^* V_\theta)}{\partial (y^* L)} = \frac{V_\theta}{L} \frac{\partial u^*}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial (p^* \rho V_\theta^2)}{\partial (x^* L)} = \frac{\rho V_\theta^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (u^* V_\theta)}{\partial (x^* L)^2} = \frac{V_\theta}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (u^* V_\theta)}{\partial (y^* L)^2} = \frac{V_\theta}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\rho V_\theta^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{V_\theta}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{V_\theta}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{V_\theta}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}$$

et finalement on a :

$$\frac{1}{V_\theta^2} \frac{\partial u}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{(V_\theta L/v)} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\frac{1}{V_\theta^2} \frac{\partial v}{\partial t} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{(V_\theta L/v)} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

l'estimation de l'ordre de grandeur permet de négliger certains termes .

soit δ l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta \ll L$$

$$O(u^*) \rightarrow 1$$

$$O(x^*) \rightarrow 1$$

donc : $O\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right) \rightarrow 1$

et puisque $\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$

donc $O\left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right) \rightarrow 1$

et de même :

$$v^* = \int_0^y \frac{\partial u^*}{\partial x^*} dy^*$$

donc $O(v^*) = O(y^*)$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

donc $O(y^*) = O(\delta)$

$$O\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) \rightarrow O\left(\frac{1}{\delta^*}\right)$$

$$O\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}\right) \ll O\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \longrightarrow O\left(\frac{1}{\delta^{*2}}\right)^2$$

$$O\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}\right) \ll O\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \longrightarrow O\left(\frac{1}{\delta^{*2}}\right)^2$$

Négligeant les termes :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \quad \text{devant} \quad \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

donc les équations de NAVIER STOKES simplifiées adimensionnelles pour un écoulement stationnaire sont :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \right)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Différentes pertes dans une turbomachine

- pertes par profile : Elles sont causées par la forme géométrique de la roue
- pertes par écoulement secondaires : Ce sont des écoulement en dehors de l'écoulement principale (vortex, tourbillon et sillage)
- pertes par fuites : l'échappement de la quantité de l'écoulement dans la machine due aux défauts de fabrication et la mauvaise étanchéité .
- pertes par ondes de chocs : Elles ne sont occasionnées que dans le cas des écoulements supersoniques et transsoniques .
- pertes par incidence : L'angle d'incidence nominal ou optimum I_{opt} est défini comme étant celui qui donne le minimum de pertes est exprimé [18] par :

$$I_{opt} = 2 \left[27.5 - 0.4 \beta_1 - (22.5 - 3 \beta_1) \frac{(M_{w1} - 1)^2}{0.36} \right]$$

avec

β_1 : est l'angle formé par la ligne moyenne de la pale avec le plan méridien à l'entrée

M_{w1} : nombre de Mach relatif en amont de la roue .

- la plage d'incidence pour laquelle les pertes sont doublées et calculées par :

$$\Delta I = 5 + (12.5 - 0.1 \beta_1) \frac{(M_{w1} - 1)^2}{0.32}$$

- le travail équivalent à la perte de pression est [18] :

$$\Delta H_{inc} = 0.05(\text{coef} - 1) W_1^2$$

avec :

W_1 : le travail à l'entrée

et

$$\text{coef} = 1 + 0.1667 \left| \frac{I-1}{\Delta I} \right| + 0.8333 \left| \frac{I-1}{\Delta I} \right|^2$$

une correction supplémentaire pour un écoulement supersonique est introduite de la manière suivante :

$$\Delta H_{inc} = 0.1 \left(M_{W_1}^2 - 1 \right) W_1^2$$

- pertes par blocage : Elles sont causées par les pales et l'épaisseur de la couche limite entre le bord d'attaque et le col, la section de passage diminue et entraîne aussi un blocage, qui est exprimé par un coefficient de blocage qui est :

$$C_{blc} = C_{blc}(i) \cdot C_{blc} \left(M_{W_1} \right)$$

$$C_{blc} = C_{blc}(i) \cdot C_{blc} \left(M_{W_1} \right)$$

Etude des pertes

avec $C_{blc} = C_{blc}(i) \cdot C_{blc}(M_{W_1})$

sont les effets d'incidence .

et

$$C_{blc}(i) = 1 - 0.007 I - 0.006 I^2$$

$$C_{blc}(M_{W_1}) = 1.1 - 0.125 M_{W_1} \quad \text{si} \quad 0.8 < M_{W_1} < 1$$

$$C_{blc}(M_{W_1}) = 0.975 \quad \text{si} \quad M_{W_1} > 1$$

sont les effet du Mach .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE :

- [1] - S. BOUBENDIR et N. CHIKHI
Elément d'un code pour le calcul d'un écoulement dans une roue de turbomachine
Projet fin d'étude E.N.P 1993
- [2] - BUISINE et MICHEAU .
Ecoulement tridimensionnel dans une roue de turbomachine par la méthode S1-S2
Journal de mécanique théorique et appliquée vol. 6,n° 4, 1987
- [3] - A. HALIM et O.SALAH OUELHADJ .
Modélisation de l'écoulement d'un fluide dans une turbomachine par la méthode
d'éléments finis
Projet fin d'étude E.N.P 1994
- [4] - J.P. VEUILLOT .
Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale.
Office national d'études et de recherches aérospatiales 1973
- [5] - H. MARSH .
A digital computer program for through-flow fluid mechanics in an arbitrary
turbomachine using a matrix method .
Repport n° R.282 1966
- [6] - B. AIT - HADAD
Détermination théorique et numérique des performances et limites de
fonctionnement des compresseur centrifuges .
Thèse de Doctorat 1991
- [7] - R.COMOLET .
Mécanique expérimental des fluides .
tome II , 3^e édition , MASSON 1982
- [9] - Y. BIRAUD ,G. MEAUZE et R. SOVRANO .
Synthèse des méthodes numériques développées à l'ONERA, en
turbomachinerie.
L'Aéronotique et l'Astronotique n°99 1983
- [10] - D. BUISINE .
Modélisation et calcul d'un écoulement tridimensionnel de fluide incompressible
dans une turbomachine axiale.
Journal de mécanique théorique et appliquée vol. 5,n° 4, 1981

[11] - G. MORETTI .

A technique for integrating tow-dimensional EULER equations .

Computers & fluids vol . 15 , n° 1

1987

[12] - A.BOUAM . A . ZERROUG .

Elaboration d'un code de calcule d'un écoulement reel quasitridimensionnel.

Projet fin d'étude E.N.P

1994

[13] - R.A. NOVAK .

Streamline curvature computing procedures for fluid-flow problems

Journal de mécanique théorique et appliquée vol. 5,n° 44, 1981