

M0040/95E  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة —  
BIBLIOTHEQUE —  
Ecole Nationale Polytechnique

## Thèse de Magister

Présentée par

**CHERFA Cherifa**

Ingénieur d'état en Génie Civil

Juin 1991

Pour obtenir le titre de

### **MAGISTER**

en GENIE CIVIL

Thème

**INTER-CORRELATION MODALE DANS LE CAS D'EXCITATIONS  
SISMIQUES NON UNIFORMES.**

*Soutenue publiquement en Octobre 1995 devant le Jury composé de:*

Président	: Mr B. TILIOUINE	Professeur	E.N.P
Rapporteur	: Mr M.K BERRAH	Maître de Conférences	E.N.P
Examineurs:	Mr M. BOUGHOUFALAH	Chargé de Cours	E.N.P
	Mr M. DEMIDEM	Chargé de Cours	E.N.P
	Mr M. HAMMOUTENE	Chargé de Cours	E.N.P

*Ecole Nationale Polytechnique*

*10, Avenue Hassen Badi, El Harrach-Alger*

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

*Thèse de Magister*

Présentée par

**CHERFA Cherifa**

*Ingénieur d'état en Génie Civil*

*Juin 1991*

*Pour obtenir le titre de*

**MAGISTER**

*en GENIE CIVIL*

Thème

**INTER-CORRELATION MODALE DANS LE CAS D'EXCITATIONS  
SISMIQUES NON UNIFORMES.**

*Soutenue publiquement en Octobre 1995 devant le Jury composé de:*

Président	: Mr B. TILIOUINE	Professeur	E.N.P
Rapporteur	: Mr M.K BERRAH	Maître de Conférences	E.N.P
Examineurs:	Mr M. BOUGHOUFALAH	Chargé de Cours	E.N.P
	Mr M. DEMIDEM	Chargé de Cours	E.N.P
	Mr M. HAMMOUTENE	Chargé de Cours	E.N.P

*Ecole Nationale Polytechnique*

*10, Avenue Hassen Badi, El Harrach-Alger*

## Remerciements



*En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse Monsieur le Maître de Conférences M.K. Berrah. En effet, si en définitive ce travail est au point, c'est grâce à l'aide permanente qu'il m'a prodiguée. Ces conseils précieux ainsi que la documentation qu'il m'a fournie m'ont guidé de façon irremplaçable. Je m'incline respectueusement devant sa modestie et son esprit scientifique.*

*Un hommage tout particulier à l'équipe du centre de calcul, qui malgré tout créait une ambiance de travail agréable. Je n'ose cependant passé sans faire le témoignage de ma reconnaissance à Karima et Leila pour, entre autres, leurs innombrables secours informatiques.*

*Je ne saurais oublier en fin, de remercier les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de présider ou d'examiner ce modeste travail.*

# Sommaire

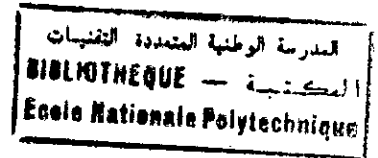


Page de Garde.....	1
Remerciements.....	2
Sommaire.....	3
1. Introduction.....	6
1.1 Principaux Objectifs.....	6
1.2 Organisation.....	7
2. Problématique et Travaux Antérieurs.....	8
2.1 Problématique.....	8
2.2 Travaux Antérieurs.....	9
3. L'Action Sismique et Eléments de Calcul Dynamique des Structures Soumises aux Séismes.....	15
3.1 Caractères Spécifiques de l'Action Sismique.....	16
3.1.1 Nature de l'Action Sismique.....	16
3.1.2 Mouvement Fort.....	18
3.1.3 Propagation des Ondes Sismiques.....	19
3.1.4 Variation Spatiale de l'Action Sismique.....	22

3.1.5	Représentation Analytique de L'Action Sismique.....	25
3.2	Eléments de Calcul Dynamique des Structures Soumises aux Seimes.....	28
3.2.1	Introduction.....	28
3.2.2	Approche Déterministe.....	30
3.2.3	Approche Probabiliste.....	35
4.	Combinaison Modale dans le Cas d'Excitations Sismiques Uniformes.....	37
4.1	Introduction.....	37
4.2	Eléments de Vibrations Aléatoires.....	38
4.2.1	Processus et Champs Aléatoires.....	39
4.2.2	Homogénéité (ou Stationnarité), Isotropie et Ergodicité.....	41
4.2.3	Représentation dans le Domaine Fréquentiel.....	43
4.2.4	Champ Aléatoire Spatio-Temporel.....	45
4.2.5	Relations Entrées-Sorties ( <i>Input-Output Relationships</i> ).....	46
4.3	Décomposition Modale des Equations de Mouvement.....	51
4.4	Réponse d'un Système à Plusieurs Degrés de Liberté à une Excitation Stationnaire.....	55
4.5	Statistiques du Pic de la Réponse dans le Cas d'une Excitation Gaussienne.....	59
4.6	Développement de la Règle de Combinaison Modale.....	61
5.	Effet de la Variation Spatiale des Mouvements Sismiques sur l'Inter-Corrélation Modale.....	66
5.1	Introduction.....	66

5.2	Dérivation de la règle de Combinaison Modale.....	68
5.3	Développement des Coefficients de Corrélacion Modale.....	76
6.	Etude Numérique.....	81
6.1	Introduction.....	81
6.2	Paramètres Considérés et Hypothèses Simplificatrices.....	82
6.3	Application Numérique.....	87
6.3.1	Cas d'un Bruit Blanc.....	87
6.3.1.1	Effets Couplés de l'Incohérence et du Passage d'Onde.....	87
6.3.1.2	Effets Séparés de l'Incohérence et du Passage d'Onde.....	90
6.3.2	Cas d'un Bruit Blanc Filtré.....	91
7.	Conclusions et Suggestions.....	108
7.1	Conclusions.....	108
7.2	Suggestions.....	110
	Références.....	111

# Chapitre 1



## Introduction

### 1.1 PRINCIPAUX OBJECTIFS.

La variation spatiale des mouvements du sol en champ libre, peut avoir des répercussions non négligeables sur la réponse des structures étendues ou reposant sur des supports multiples. La quantification et la prise en compte du phénomène de variabilité spatiale des mouvements forts s'avèrent désormais des opérations indispensables particulièrement lors de la conception et du calcul parasismiques des structures.

Parmi les moyens proéminents existants en littérature, à la portée de l'ingénieur et à même de prendre en charge l'incohérence des ondes sismiques, la règle de combinaison modale quadratique modifiée (qui résulte du couplage du spectre de réponse modifié et des coefficients d'inter-corrélation modale modifiés) est indubitablement l'un des moyens les plus efficaces. Ce dernier tient compte explicitement de l'inter-corrélation modale laquelle, dans le cas d'ondes sismiques cohérentes, a notablement été étudiée à travers une panoplie de travaux antérieurs.

Il n'en demeure pas moins que, présentement l'inter-corrélation modale constitue dans le cas d'un input sismique non uniforme un champ d'applications peu étudié pour lequel une investigation numérique semble, sans nul doute, indispensable. C'est d'ailleurs l'une des visées principales de la présente thèse qui se propose, entre autres, à travers une expérimentation numérique, de mettre en évidence l'importance des effets induits par différents paramètres potentiels sur l'inter-corrélation modale.

## 1.2 ORGANISATION.

Dans le chapitre 2, les travaux antérieurs relatifs à la variabilité spatiale des mouvements forts, sous différents aspects et notamment dans le cadre d'approche non déterministe sont succinctement passés en revue.

Les caractéristiques spécifiques à l'action sismique, à savoir, sa nature, le mouvement fort qu'elle engendre, sa variabilité spatiale, ainsi que sa représentation analytique sont les principaux points constitutifs du premier volet du chapitre 3. En revanche, le second volet se penche sur les éléments de calcul dynamique des structures soumises aux séismes dans le domaine déterministe et probabiliste.

Dans le chapitre 4, la règle de combinaison modale quadratique complète dans le cas d'excitations sismiques uniformes est présentée. Au préalable, quelques éléments fondamentaux de vibrations aléatoires requis par le développement précédent (et par le chapitre subséquent) sont résumés.

Le chapitre 5, traite de l'inter-corrélation modale dans le cas d'excitations non uniformes. Il expose le développement qui a conduit à l'élaboration des coefficients de corrélation inter-modaux.

Le chapitre 6, est consacré à l'investigation numérique paramétrique des coefficients d'inter-corrélation modale développés en chapitre 5.

Enfin le chapitre 7 fournit des conclusions et suggestions pour des travaux futures.



## *Chapitre 2*

### *Problématique et Travaux Antérieurs*

#### 2.1 PROBLEMATIQUE.

Les observations relatives aux récents tremblements de terre ont clairement démontré que le mouvement sismique pouvait varier de manière significative sur des distances ayant le même ordre de grandeur que les dimensions de la base de certaines structures étendues.

Par conséquent, pour des structures relativement étendues telles que les conduites, ponts, tunnels etc..., ou des structures à supports multiples, le mouvement du sol auquel ces dernières sont soumises ne peut être considéré comme étant uniforme mais plutôt variable le long de leurs bases.

En effet, durant un tremblement de terre, une structure étendue ou à supports multiples est soumise non seulement aux forces d'inertie (dues au chargement dynamique supposé uniforme) mais aussi à des forces additionnelles (engendrées par le mouvement différentiel des appuis) résultant de la variation spatiale du déplacement du sol. Cette caractéristique des mouvements forts est la source principale des forces sismiques, agissant sur les structures souterraines (tels que les conduites et réservoirs enterrés ainsi que les souterrains). Elle peut être aussi à l'origine des effets de torsion qui naissent dans les installations importantes caractérisées par de larges fondations.

Il est donc incontestable que les mouvements sismiques forts exhibent, en plus d'une variabilité temporelle, une variabilité spatiale. La première a

fait l'objet de travaux de recherche assez élaborés et sa prise en compte lors de l'analyse et de la conception parasismique des structures, que ce soit dans le cadre d'une approche classique ou stochastique, est une tâche relativement simplifiée désormais. En revanche, la variation spatiale demeure un domaine peu développé vu que son investigation a nécessité le déploiement de denses réseaux de systèmes de mesures destinés à enregistrer les mouvements forts, utilisant un appareillage spécialisé. En effet, l'apport expérimental fourni par ces systèmes de mesure a conduit à la relance de la recherche dans le domaine de la caractérisation de l'input sismique, notamment dans sa dimension spatiale.

## 2.2 TRAVAUX ANTERIEURS.

Depuis plus d'une décennie, plusieurs chercheurs essayent de puiser dans les données expérimentales procurées par les systèmes de mesures des mouvements forts, et cela pour une meilleure caractérisation analytique de la variation spatiale du mouvement du sol en champ libre (*free field*). Par ailleurs, l'implantation de certaines installations stratégiques particulièrement sensibles à l'effet de la variation spatiale des mouvements forts, notamment les ponts, les conduites, les centrales nucléaires, a rendu nécessaire le développement de méthodes d'analyse (ou de conception) à même de prendre en charge l'effet d'un input sismique de nature non uniforme sur des structures étendues ou à supports multiples.

De nombreux travaux de recherches ciblant les deux aspects précédents ont été développés. Nous essayerons de résumer leurs principaux objectifs dans les paragraphes suivants.

- Afin de caractériser la variabilité spatiale du mouvement du sol à travers

les enregistrements correspondant à des événements sismiques réels, un intérêt particulier a été porté à la sélection des sites d'implantation [9], et à l'installation optimale des systèmes de mesures déployés sur différents sites d'étude, ce qui a permis la collecte d'un maximum d'informations utiles. Ces opérations ont favorisé l'étude du mécanisme de la source (en champs proches ou lointains, de la propagation des ondes, et des effets locaux.

- Le deuxième domaine de recherche se rapporte à l'interprétation des enregistrements correspondant à des événements sismiques réels, spécifiques à quelques sites particuliers [20], [25], [26] et [27]. En effet, l'installation du SMART-1 (*strong motion array recorded near Taiwan*), opérationnel depuis 1980, a donné un essor considérable à l'étude de la variation spatiale des ondes sismiques. L'interprétation préliminaire de quelques événements sismiques enregistrés par le SMART-1 a favorisé, entre autres:

- . La génération des spectres de Fourier, correspondant à différentes paires de stations.

- . L'identification des types d'ondes et de leur principale direction de propagation.

- . La description de la cohérence des ondes sismiques.

- Suite aux travaux de recherche précédents, la formulation d'outils analytiques destinés à traiter et à interpréter les enregistrements récupérés à partir des systèmes de mesure des mouvements sismiques, [21],[26],[32] s'est imposée. On distingue:

1. Le développement de procédés de traitement des données des systèmes de mesures. Il s'agit du traitement statistique des données expérimentales correspondant à plusieurs événements sismiques ( et à différents sites) ce qui

a permis de démontrer que l'incohérence des ondes sismiques dépendait d'un certain nombre de paramètres. Entre autres, l'incohérence entre deux points (stations) augmente avec la distance qui les sépare, et avec la fréquence. Il est à noter que les conditions de site peuvent avoir une influence considérable sur l'incohérence dans un site donné [31].

2. Le développement de modèles analytiques décrivant la variation spatio-temporelle du mouvement du sol. La formulation analytique des caractéristiques statistiques de second ordre du mouvement sismique par l'établissement de modèles mathématiques s'est imposée. De manière générale, le mouvement fort du sol est modélisé par un Champ Aléatoire Homogène Spatio-Temporel. Plusieurs modèles de fonctions de cohérence ont été proposés selon l'événement sismique étudié.

Globalement, cette première partie (développement précédent) a porté sur l'analyse et la caractérisation des mouvements sismiques en champ libre (*free field*). Il est évident qu'une suite logique au champ de recherche précédent viserait, sans aucun doute, l'analyse de la réponse de systèmes structuraux sujets à l'effet de la variation spatiale des mouvements forts.

- En effet, l'exploitation statistique des résultats d'observations liés aux endommagements ayant affecté les conduites enterrées, a fortement contribué à l'élaboration d'outils analytiques destinés à l'analyse et à la conception de certaines structures souterraines [17],[19].

L'intérêt porté à l'analyse de structures étendues, implantées sur le sol, a aussi connu un développement particulier. Dans ce sens, des méthodes d'analyse stochastique de la réponse de certains types de structures, notamment les centrales nucléaires et les ponts ont été proposés [22],[24],[38],[39]. De manière générale, elles incluent différents cas de corrélation spatiale

relatifs aux excitations d'appuis, particulièrement les cas de corrélation parfaite et partielle et ceci en se basant sur des modèles stochastiques décrivant la variabilité de l'input sismique. De même, l'inter-corrélation modale et l'inter-corrélation entre différentes composantes de l'excitation ont été prises en compte dans certaines méthodes d'analyse présentées.

La majorité des outils développés dans les travaux précédents, destinés à l'analyse ou à la conception de certaines structures qui subissent la variation spatiale du mouvement fort de manière significative, sont de nature stochastique. Ils se basent sur la théorie des vibrations aléatoires et définissent le mouvement du sol par le biais de sa répartition énergétique spectrale.

Il est indéniable qu'une approche basée sur les vibrations aléatoires pour analyser ou dimensionner des structures aux séismes, constitue un moyen performant.

Cependant ces méthodes sont relativement fastidieuses, de plus leur mise en oeuvre requiert un certain niveau d'expertise et ne sont, en conséquent, pas à la portée de l'ingénieur. De surcroît, la plupart des codes de dimensionnement parasismique définissent le mouvement du sol à travers son spectre de réponse et non en termes de sa densité spectrale de puissance. Notons que le spectre de réponse constitue une caractérisation statistique du mouvement du sol et son utilisation est très pratique et peut conduire à des résultats comparables à ceux fournis par les méthodes temporelles ou purement probabilistes. C'est pourquoi, de manière analogue au cas de mouvement sismique uniforme, des méthodes utilisant la notion de spectre de réponse, comme spécification de l'input sismique dans le cas où celui-ci est considéré non uniforme ont été proposées. Une fois développées, ces dernières peuvent s'associer à la méthode de superposition modale et constituer, sans doute, un

outil attrayant à la portée de l'ingénieur. Ainsi, dans ce sens et particulièrement dans le cadre d'une analyse modale des structures étendues ou des structures à supports multiples, quelques travaux de recherche existent, on peut citer pour commencer, ceux développés en référence [37]. Dans cette dernière la méthode du spectre de réponse classique décrite en référence [13] a été étendue, au cas de mouvement sismique non uniforme. D'autres développements existent en littérature dont les plus raffinés sont cités dans les paragraphes suivants.

- Travaux de Berrah et Kausel: [4],[5]

Il s'agit du développement d'un *Modèle de Spectre de Réponse Modifié* (par opposition au spectre de réponse classique), caractérisant un chargement sismique non uniforme, valable pour des structures étendues ou à supports multiples. La dérivation du spectre se base essentiellement sur la théorie des vibrations aléatoires. L'utilisation d'un modèle de fonction de cohérence a permis de prendre en compte, les caractéristiques de la variation spatiale du mouvement du sol. Le modèle de spectre de réponse modifié s'exprime en fonction du spectre de réponse classique par le biais d'une relation qui fait intervenir un facteur de correction qui dépend des propriétés structurales et des caractéristiques du phénomène de propagation des ondes sismiques. Globalement, l'ajustement adéquat des ordonnées spectrales d'un spectre de dimensionnement (ou de réponse) classique spécifié pour un site donné, conduit à un spectre de réponse modifié, valable pour des structures étendues implantées sur le même site soumises à un mouvement sismique variant spatialement.

La suite immédiate au modèle développé précédemment a ciblé l'effet d'excitations sismiques non uniformes sur l'inter-corrélation modale et ceci pour un éventuel couplage du modèle de spectre de réponse modifié et de la

méthode de superposition modale pour déterminer des réponses physiques (par opposition aux réponses modales). Les mêmes auteurs [4],[6],[7],[8] ont examiné l'effet précédent et une analyse spectrale basée sur la théorie des vibrations aléatoires a été effectuée. Cette dernière est l'objet principal du chapitre cinq de la présente thèse.

- **Travaux de Der Kiureghian et Neuenhofer: [15]**

Ces derniers, se résument dans le développement d'une nouvelle méthode de spectre de réponse destinée à l'analyse des structures linéaires, soumises à des mouvements sismiques incohérents. La méthode tient compte des effets d'inter-corrélation relatifs aux mouvements des différents supports et à ceux des réponses modales de la structure.

## *Chapitre 3*

### *L'Action Sismique et Eléments de Calcul Dynamique des Structures Soumises aux Séismes*

En pratique, toute structure est susceptible de subir pendant sa durée de vie un chargement dynamique sous une forme ou une autre. D'un point de vue analytique, on peut subdiviser ces chargements en deux grandes catégories: périodique et non périodique.

Les chargements périodiques sont constitués de charges répétitives qui conservent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles. Ils peuvent provenir, par exemple, des pressions hydrodynamiques engendrées par l'hélice à l'arrière d'un navire, des effets d'inertie des machines alternatives,...

Les chargements non périodiques sont soit des impulsions de courte durée, soit des chargements de longue durée et de forme quelconque. Les chocs, les explosions sont des sources courantes de chargements impulsifs. En revanche, un chargement quelconque de longue durée, peut être provoqué par une secousse sismique. Cette dernière reste l'une des plus importantes et dangereuses actions à considérer dans le cadre de la conception et du calcul modernes des structures.



### 3.1 CARACTERES SPECIFIQUES DE L'ACTION SISMIQUE.

#### 3.1.1 NATURE DE L'ACTION SISMIQUE.

L'action sismique consiste en un mouvement vibratoire du sol de forte amplitude et de caractère aléatoire. Elle correspond à la propagation d'une perturbation ayant pris naissance à l'intérieur de l'écorce terrestre de durée variable mais toujours brève.

A l'origine de tels phénomènes se trouvent les déformations lentes de la croûte terrestre ou du milieu sous-jacent, qui entraînent l'accumulation de tensions internes. Ces dernières finissent par dépasser, en un point donné, la résistance des roches au cisaillement, produisant à l'endroit en question une rupture qui se propage ensuite comme la fêlure d'une vitre. La faille résultante constitue désormais une zone de faiblesse dans la croûte.

Les propriétés d'un séisme dépendent de nombreux facteurs, dont notamment : la magnitude, le mécanisme au foyer et la profondeur du foyer, la distance du site à la source, la direction de propagation, les propriétés mécaniques et la configuration des milieux traversés, ainsi que les caractéristiques géologiques, géotechniques et topographiques du site.

Parfois, la source du tremblement de terre est représentée par un point (source ponctuelle) dont la position correspond à celle de l'hypocentre (fig.3.1). Ce modèle élémentaire de la source sismique est adéquat dans plusieurs problèmes de séismologie. Cependant, l'étude détaillée du mécanisme de la source nécessite une représentation plus réaliste. Cette dernière s'appuie sur le modèle de propagation de la rupture (*propagating rupture*) le long de la ligne de faille.

Dans le mouvement, chacun des points du sol est animé de déplacement de translation dans les trois directions de l'espace. Deux points extrêmement

voisins sont, par raison de continuité, animés de mouvements pratiquement identiques et synchrones; par contre, les mouvements de deux points distants d'une longueur finie sont décalés dans le temps d'une durée égale au temps de propagation du front d'onde entre les points considérés. En outre, ils ne sont pas rigoureusement identiques en raison des altérations subies par le signal au long de sa propagation. Il en résulte que les deux points considérés sont animés l'un par rapport à l'autre de déplacements différentiels. Ainsi, le mouvement sismique peut présenter deux types de variation: une variation temporelle, et une variation spatiale.

Il est bien entendu qu'à partir de certaines distances de la source allant de quelques dizaines de kilomètres pour les séismes modérés à quelques centaines de kilomètres pour les grands séismes, les mouvements sismiques n'affectent plus les constructions. Cependant, dans toute la zone macrosismique ces mouvements sont encore observés directement par l'homme, en même temps qu'ils peuvent être enregistrés par les séismographes. Ces enregistrements et ceux de séismographes sensibles des observatoires sismologiques sont utilisés en Sismologie Fondamentale, notamment pour étudier la constitution physique de la terre.

En génie-sismique, l'ingénieur a une visée différente de celle des séismologues. Ces derniers axent leurs études sur les effets étendus (*long-range*) des tremblements de terre. Ils s'intéressent donc aux séismes modérés de faibles amplitudes dont l'effet est non significatif sur la réponse des structures. Par contre, le génie-sismique alloue un intérêt particulier aux effets locaux des mouvements sismiques importants (de fortes intensités) pour lesquels le mouvement est suffisamment intense pour engendrer des endommagements structuraux. Ces mouvements sismiques sont dits 'Mouvements Forts' (*strong-motion earthquakes*). Ainsi, on peut distinguer deux catégories

d'études sismiques:

. Etude des **Mouvements Forts** à proximité de l'épicentre et son application, entre autres, au Génie Parasismique.

. Etude des **Mouvements Faibles** à toutes les distances de l'épicentre.

Il est évident que ces deux domaines se complètent dans la mesure où la détermination des paramètres de la source fait appel aux enregistrements proches et lointains.

### 3.1.2 MOUVEMENT FORT.

L'étude expérimentale et analytique du mouvement fort a pu se développer ces dernières années grâce aux réseaux de sismographes et d'accélérographes installés dans certaines régions sismiques du monde. L'intérêt pour une telle étude s'est accentué en raison des problèmes de sécurité se posant avec une acuité de plus en plus grande en ce qui concerne certaines installations stratégiques particulièrement sensibles aux séismes telles que les barrages, les ponts, les centrales nucléaires,...

L'étude du mouvement fort en zone proche se définit comme étant la mesure et l'interprétation physique des mouvements du sol au voisinage d'une faille, dans une zone où ces mouvements mettent en danger la vie humaine et les constructions. Ainsi, les systèmes de mesure des mouvements forts installés sur des sites à haut risque sismique à proximité des sources éventuelles de tremblement de terre, bénéficient d'une conception assez particulière. Les enregistrements qu'ils procurent sont requis par l'ingénieur aussi bien pour les études des propriétés des mouvements sismiques proches de la source que pour l'étude de la variation spatiale des ondes sismiques.

La modélisation stochastique des mouvements forts est une opération justifiée dans la mesure où les ondes sismiques sont le résultat d'un glissement (*slippage*) irrégulier le long de la ligne de faille (source) suivi de nombreuses réflexions et réfractions aléatoires et d'atténuations à travers un milieu (sol) complexe.

L'établissement direct de modèles stochastiques représentatifs de mouvements forts à partir de l'analyse statistique des enregistrements réels est possible, si toutefois les enregistrements étudiés sont en nombre illimités. Cependant, en réalité les banques de données disponibles pour des mouvements forts sous forme d'accélérogrammes sont limitées, néanmoins ces derniers sont requis notamment pour contrôler (valider ou rejeter) la forme de certains modèles (représentant le mouvement fort) à priori supposés.

La simulation (digitale) d'accélérogrammes artificiels de mouvements forts est souvent nécessaire. L'une des hypothèses de base communément adoptée (lors de la simulation) consiste à supposer que le mouvement sismique résulte de la superposition d'une séquence d'impulsions aléatoires provenant d'un point (source) situé à une certaine distance du lieu d'observation (enregistrement) et se propageant jusqu'à ce dernier à travers un milieu hétérogène qui constitue le sol de fondation.

### 3.1.3 PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES.

A partir du foyer, la secousse sismique se propage sous forme d'ondes de divers types qui, compte tenu de l'hétérogénéité du sol et des conditions géologiques et stratigraphiques du site engendrent en surface un mouvement complexe difficilement prédictible. On peut distinguer les types d'ondes suivants:

### A. Les Ondes de Volume.

Elles prennent naissance dans le foyer et se propagent à l'intérieur de la terre sous deux formes:

. Ondes P (ondes primaires) ou ondes longitudinales. Ces ondes se propagent avec une vitesse de 7 à 8 km/s [10] et s'accompagnent d'un changement de volume (compression et dilatation alternées).

. Ondes S (ondes secondaires SV et SH) ou ondes transversales. Ces ondes se déplacent avec une vitesse de 4 à 5 km/s et s'accompagnent d'une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, provoquant un cisaillement sans changement de volume. A la différence des ondes longitudinales, les ondes transversales ne peuvent se propager dans les milieux liquides ou gazeux, en raison de l'inaptitude de ces milieux à transmettre les efforts de cisaillement.

### B. Les Ondes de Surface.

Les ondes de volume qui arrivent à la surface de la terre produisent des ondes de surface n'intéressant le sol que sur une profondeur extrêmement faible. On distingue:

. Les ondes R ou ondes de *Rayleigh*: ce sont des ondes pour lesquelles, les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation. Ce mouvement, est semblable au mouvement de la houle et entraîne des compressions (ou des tractions) ainsi que des cisaillements dans le sol.

. Les ondes Q ou ondes *Love*: ce sont des ondes pour lesquelles, les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface, perpendiculairement à la direction de propagation; Elles n'engendrent que des contraintes de cisaillement.

Les ondes de surface ont une vitesse de propagation [10] de 1,5 à 5 km/s dans les terrains compacts ou rocheux et de 0,5 à 1,5 km/s dans les terrains meubles.

Lorsqu'un front d'onde de volume rencontre la surface de séparation de deux couches de terrain, ayant des propriétés physiques différentes, une onde est réfléchiée et revient en arrière dans le premier milieu, une autre est transmise par réfraction dans le second milieu (dispersion des ondes). Toutefois, si le milieu en question n'absorbe pas l'énergie, ces ondes s'amortissent par dispersion mais leur forme restera identique à elle même. Par ailleurs, après réfraction ou réflexion, la nature des ondes (P ou S) peut changer. Par exemple, une onde P donne naissance à deux ondes réfléchies (P ou S) et à deux ondes réfractées (P ou S). Donc, pendant la propagation d'une onde sismique, il y a passage d'un type d'onde à un autre, si bien qu'au niveau du sol, le signal a un aspect tout à fait aléatoire. Lorsque les ondes et l'énergie qu'elles transportent atteignent un site à la surface de la terre, elles engendrent des vibrations dans trois directions (deux horizontales et une verticale). Les enregistrements des accélérations de ces mouvements en fonction du temps s'effectuent à l'aide d'Accélérographes; Ils constituent des Accélérogrammes.

La plupart des enregistrements correspondant aux mouvements forts contiennent aussi bien des ondes de volume que des ondes de surface. Il est difficile de séparer complètement ces deux types d'ondes (contenus dans un même enregistrement). Cependant, rappelons que les ondes de volume se déplacent (propagation) plus rapidement que les ondes de surface. Ces dernières arrivent plus tard que les ondes de volume aux stations d'observations. En outre elles sont généralement dominantes dans la marge des

fréquences. C'est d'ailleurs ces caractéristiques qui contribuent à leur identification lors de l'analyse des accélérogrammes.

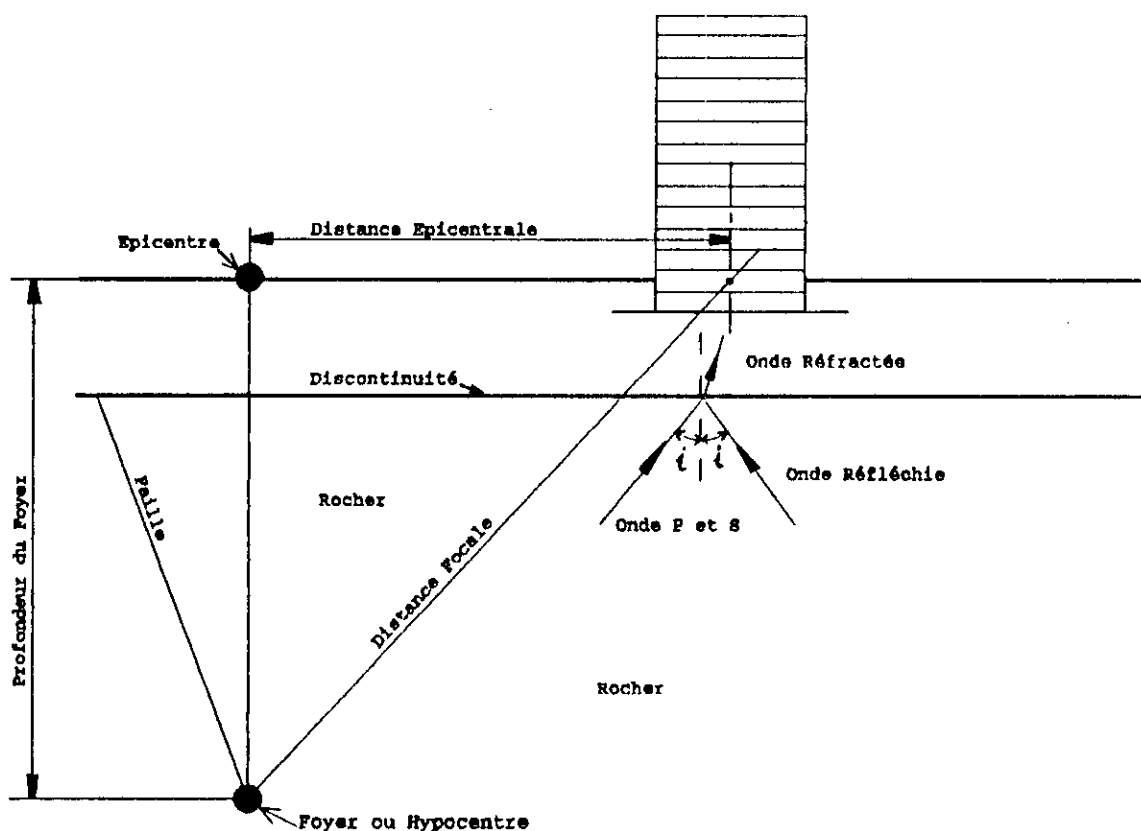


Figure 3.1

#### 3.1.4 VARIATION SPATIALE DE L'ACTION SISMIQUE.

En plus de la variation temporelle du signal sismique, les ondes sismiques exhibent une variation spatiale. En effet, la complexité caractérisant la structure souterraine des sols (non homogénéité, anisotropie, présence

d'aspérités, etc...) est à l'origine des diverses altérations que peuvent subir les ondes sismiques durant leur propagation de la source du séisme à la surface du sol. Ainsi, plusieurs phénomènes contribuant à la variation spatiale des mouvements du sol ont été identifiés jusque là. Ils est possible de les regrouper dans les trois points suivants:

**'Passage d'onde' (Wave Passage):** Ce phénomène s'identifie grâce aux différences enregistrées entre les temps d'arrivées des ondes sismiques au niveau des différentes stations. Il est évident que pour le cas idéal d'une propagation verticale des ondes sismiques (incidence verticale), qui correspondent à une vitesse de propagation apparente infinie, l'arrivée des ondes est synchrone, et donc l'effet précédent disparaît.

**'Effet d'Incohérence':** Il s'agit de la perte de cohérence que subissent les ondes sismiques au cours de leur trajet du foyer au site considéré. Cet effet peut être attribué (fig.3.2):

- Aux réflexions et réfractions (dispersions), qui affectent les ondes sismiques dans un milieu hétérogène (à chaque interface) qui est le sol.

- A la géométrie de la source, principalement lorsque les ondes sont issues d'une source (faille) étendue. Ceci a pour effet d'induire une interférence entre les arrivées simultanées des ondes provenant des divers points de la faille, résultant en une différence dans la procédure de superposition des ondes au niveau des différentes stations d'enregistrements. Ce phénomène est d'autant plus accentué que le site considéré est proche de la source.

**'Effets Locaux':** En effet en un même site, les conditions locales du sol peuvent varier d'une station à une autre. Ce qui se répercute sur les enregistrements correspondants, qui exhibent alors des amplitudes spectrales



et des contenus fréquentiels différents (sur un même site).

La description mathématique de la variation spatiale des ondes sismiques peut se faire par le biais de nombreux paramètres notamment la corrélation et la cohérence. La corrélation est une mesure dans le domaine temporel alors que la cohérence est une mesure dans le domaine fréquentiel [2]. Des études antérieures ont montré que la variation spatiale dépend fortement du paramètre fréquentiel. C'est pourquoi souvent la cohérence est utilisée pour décrire la variation spatiale. La mesure de la cohérence spatiale requiert des enregistrements provenant de systèmes de mesures disposés en denses réseaux.

Il convient de noter que les conditions de site ont une influence considérable sur la cohérence des ondes sismiques. En effet, ceci est dû au fait que les couches de terrain superficielles situées autour d'un site sont souvent la portion de terrain la plus hétérogène que parcourt les ondes sismiques de la source jusqu'au site en question. Par conséquent, différentes conditions de site induisent nécessairement des incohérences spatiales variables.

Par ailleurs des études antérieures ont montré que la cohérence selon la direction épacentrale est particulièrement plus grande que celle observée dans la direction transversale [1]. Une explication plausible au phénomène précédent est que la dispersion des ondes sismiques, dans la direction épacentrale, engendre des ondes incidentes plus ou moins en phase, alors que le contraire est très souvent observé pour une dispersion transversale des ondes sismiques.

### 3.1.5 REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DE L'ACTION SISMIQUE.

Il est bien entendu que l'une des visées du génie-sismique est de quantifier au mieux la réponse sismique des structures. Dans ce sens plusieurs descriptions mathématiques de l'action sismique existent. Parmi elles, celle qui utilise l'histoire temporelle de l'input sismique semble être la plus directe. En effet, l'analyse temporelle de différents accélérogrammes peut procurer des informations utiles relatives à la variabilité de la réponse sismique. Cependant, le volume de calculs requis par l'analyse précédente compromet son utilisation dans le domaine pratique. D'un autre côté la fonction de densité spectrale (qui est une répartition énergétique du signal sismique) constitue une seconde description du chargement sismique. Toutefois ce mode de représentation n'est pas fréquemment adopté en pratique car son utilisation nécessite une analyse de nature stochastique (probabiliste). En revanche, le spectre de réponse est le moyen le plus proéminent pour la représentation de l'input sismique.

De manière générale, le spectre de réponse ou de calcul est une forme de fonction de transfert, qui relie l'excitation sismique (chargement) et la réponse (résistance) d'une structure. On distingue:

#### A. Le Spectre de Réponse.

Le spectre de réponse [16],[23], en accélération, vitesse ou déplacement, permet de faire intervenir la notion de contenu en fréquence du signal sismique. Son but est de caractériser un séisme d'après la réponse d'une structure (*SDOF* éventuellement).

Par définition, un spectre de réponse en accélération est la courbe donnant l'accélération maximale d'oscillateurs simples à un degré de liberté de

fréquence propre et de pourcentage d'amortissement critique variables.

Par ailleurs pour une même secousse sismique les spectres de réponse établis en surface sont différents selon qu'ils correspondent à un affleurement rocheux ou à un dépôt sédimentaire. En effet, les ondes sismiques se propagent dans le rocher, puis en certains endroits à travers des sédiments dont les caractéristiques vont influencer sur le mouvement du sol enregistré en surface. Par conséquent la forme du spectre de réponse établie en surface est très sensible à la nature du sol de fondation.

### B. Le Spectre de Calcul.

Lorsqu'il s'agit de déterminer le spectre de réponse à prendre en compte pour le calcul des constructions en un site donné, il est bien entendu exclu d'utiliser un seul accélérogramme, même si par chance il a été enregistré au voisinage du site. Ainsi, en se basant sur l'étude des spectres de réponse associés à plusieurs tremblements de terre et sur le calcul des réponses correspondant à différents enregistrements de mouvements forts (histoires temporelles en accélération), il est possible d'estimer la forme générale de spectres typiques, ou de déduire des règles qui permettent de construire (approximativement) des spectres de calcul utilisables pour la conception des structures.

Il existe donc une différence fondamentale entre un spectre de réponse et un spectre de calcul (*Design Spectrum*). Le premier caractérise la réponse (calculée) associée à un mouvement sismique particulier (unique), alors que le second caractérise une classe de mouvements sismiques pouvant exciter un site bien défini [16], et s'inscrit convenablement dans le cadre d'une approche non déterministe.

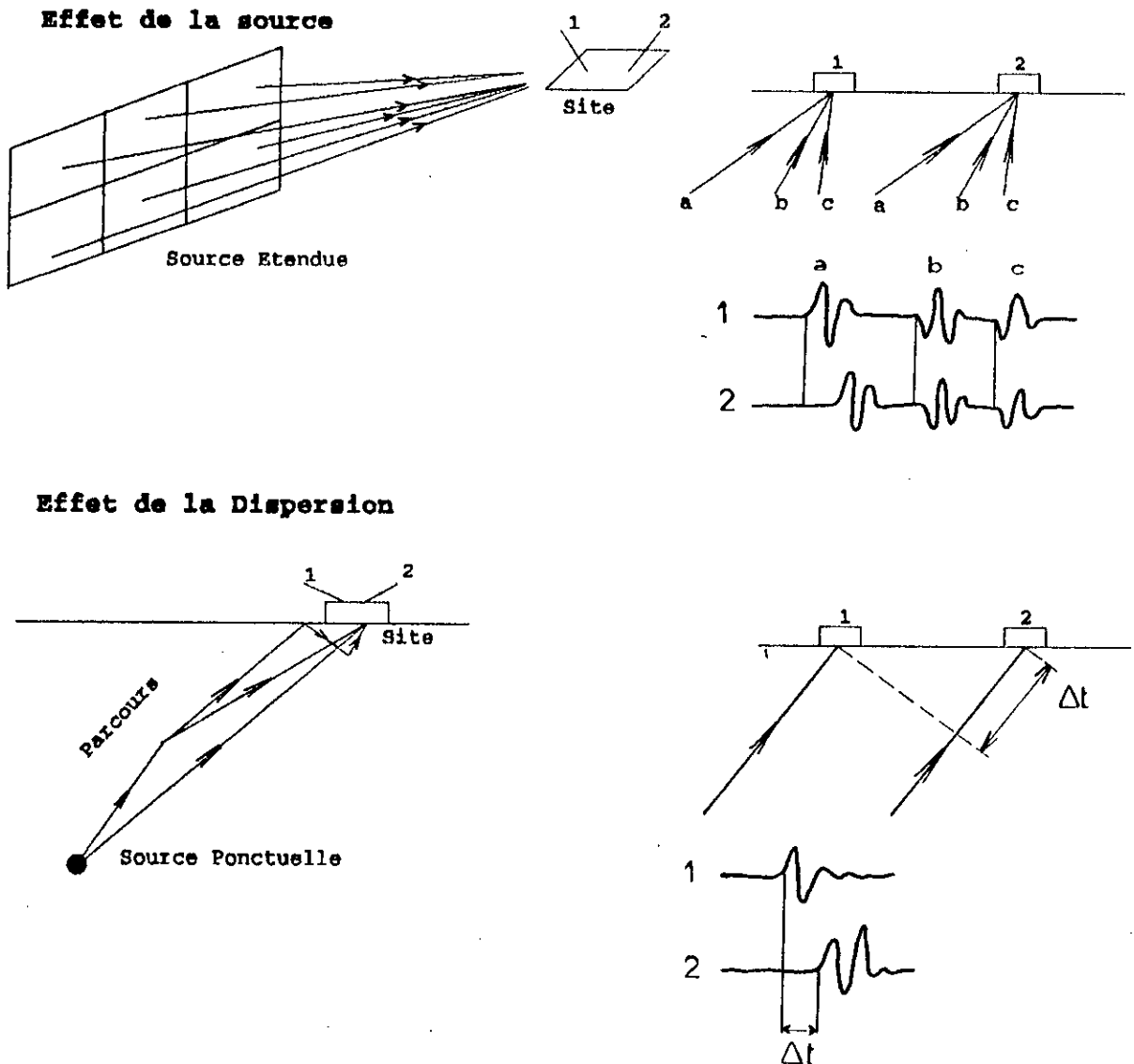


Figure 3.2 Diagramme schématisant la contribution de deux facteurs dans le phénomène d'incohérence des ondes sismiques.

Le rayonnement d'onde arrivant de plusieurs points localisés sur une source étendue, à travers un milieu homogène jusqu'à deux stations adjacentes d'un même site est représenté en haut de la page à gauche. A droite, les trois paires d'ondes incidentes sont similaires en forme et en amplitude au niveau des deux stations. Néanmoins, leurs arrivées ne sont pas synchrones au niveau des deux points d'observation ce qui est dû à l'effet de passage d'onde qui dépend notamment de l'angle d'incidence.

Le rayonnement d'onde provenant d'une source ponctuelle à travers un milieu dispersif jusqu'à un site donné est représenté en bas de la page à gauche. L'effet de dispersion qui en résulte se traduit par une différence entre la forme des ondes interceptées au niveau des stations 1 et 2, alors que l'effet de passage d'onde induit un déphasage entre les deux signaux.

## 3.2. ELEMENTS DE CALCUL DYNAMIQUE DES STRUCTURES SOUMISES AUX SEISMES.

### 3.2.1 INTRODUCTION.

L'utilisation de la dynamique dans le domaine du calcul et de la conception parasismiques, a pendant longtemps été freinée pour plusieurs raisons dont nous citons:

. L'insuffisance des données d'enregistrements disponibles pour les mouvements forts, correspondant à des intensités notables, et le doute concernant la représentativité de ces enregistrements pour des sites présentant des conditions géologiques et sismiques différentes de celles relatives aux lieux d'enregistrement.

. L'allure extrêmement irrégulière des mouvements sismiques évoquant parfois celle de signaux aléatoires et qui confère une allure également quasi-aléatoire à la réponse des structures.

. Les difficultés des études expérimentales de validation des modèles sur tables vibrantes, notamment en ce qui concerne le respect des conditions de similitude et du caractère multidimensionnel de l'excitation.

Depuis deux décennies, le développement des études liées aux ouvrages dont les impératifs de sécurité sont particulièrement stricts (centrales nucléaires, plates formes off-shore,...) et l'apparition d'ordinateurs de plus en plus puissants ont donné une impulsion remarquable aux applications sismiques du calcul dynamique.

Toutefois, vu que l'incertitude demeure un aspect inhérent à tout phénomène naturel ou artificiel, deux approches fondamentalement différentes destinées au traitement des problèmes dynamiques, notamment sous chargements sismiques, s'offrent à nous. On distingue: l'approche déterministe et l'approche

probabiliste (non déterministe).

En effet, il existe certaines classes de problèmes pour lesquels le problème de dynamique ne peut pas être formulé sous sa forme déterministe traditionnelle, par suite d'une connaissance imparfaite du système ou des forces qui lui sont appliquées; l'un de ces éléments, ou les deux ne sont connus qu'imparfaitement au travers de certaines propriétés statistiques. L'incertitude se répercute évidemment sur la réponse de la structure qui n'est plus connue qu'au travers de ses propriétés statistiques. Par conséquent, une analyse dynamique déterministe suppose une connaissance complète des propriétés dynamiques et de l'état initial du système, de même que l'exacte évolution temporelle de l'excitation, alors qu'une analyse probabiliste admet une incertitude dans la connaissance de un ou de plusieurs éléments, soit propres au système ou alors à l'excitation dynamique.

Dans un grand nombre de cas l'incertitude sur le système peut être rendue faible par rapport à celle sur l'excitation, et le système est alors considéré comme étant déterministe. Le traitement de cette catégorie de problèmes vise exclusivement la prédiction des caractéristique statistiques de la réponse dynamique d'un système déterministe connu, à une excitation aléatoire dont les caractéristiques statistiques sont considérées comme connues. Cette classe de problèmes concerne notamment la réponse des bâtiments à l'excitation résultant de l'action du vent, la réponse des bateaux et des plate-formes de forage à l'action de la houle, la réponse des constructions à l'accélération du sol lors de tremblements de terre.

Les mouvements sismiques induisent dans les structures des actions dynamiques, dues essentiellement aux forces d'inertie qui apparaissent dans les masses lorsqu'on impose le mouvement au niveau des supports. Ces forces

d'inertie dépendent de la réponse dynamique et ne sont donc pas connues à priori. La formulation générale donnant les équations d'équilibre dynamique d'un système structural soumis à une action sismique s'écrivent sous la forme suivante:

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = R(t) \quad (3.1)$$

où:

$M, C$  et  $K$  sont respectivement les matrices masse, amortissement et rigidité de la structure.

$U$  est le vecteur des déplacements relatifs des points nodaux de la structure par rapport à un repère mobile lié au support où est imposé le mouvement sismique.

$\dot{U}$  et  $\ddot{U}$  sont respectivement les vecteurs des vitesses et accélérations relatives.

$R(t)$  décrit l'histoire temporelle du chargement sismique.

L'équation (3.1) représente un système d'équations différentielles. Sa résolution à partir des conditions initiales (en général  $U = 0, \dot{U} = 0$ ), permet de déterminer à chaque instant le vecteur  $U$  des déplacements relatifs, dont on peut déduire les accélérations et les efforts internes.

### 3.2.2 APPROCHE DETERMINISTE.

Dans le cadre d'une analyse déterministe des problèmes dynamiques, plusieurs procédures de résolution conduisant à la détermination (ou à l'approche) de la solution de l'équation (3.1) existent. Globalement, ces méthodes peuvent être regroupées selon deux techniques principales [3]. On distingue: L'intégration directe et la superposition modale.

L'intégration directe se base sur l'intégration numérique directe des équations d'équilibre dynamique. Antérieurement à cette opération (l'intégration) aucune transformation n'est opérée sur les équations (3.1). Les différentes méthodes d'intégration directe utilisent des schémas en Différences Finies. Le processus d'intégration peut se faire soit selon des schémas explicites ou implicites. Le premier schéma permet de calculer la solution au temps  $t+\Delta t$  ( $\Delta t$  étant le pas de temps), à partir de l'état connu au temps  $t$ . En revanche, les schémas implicites utilisent l'équation d'équilibre dynamique (3.1) à l'instant  $t+\Delta t$ , pour en déduire la solution au même instant ce qui suppose la connaissance de  $U(t-\Delta t)$  et de  $U(t)$ . De manière générale l'intégration directe est d'autant plus efficace que le nombre d'incrémentés utilisés dans l'analyse est petit (ce qui revient à rechercher la solution sur un petit intervalle de temps) ce qui est d'ailleurs bien approprié pour les chargements de courte durée.

La superposition modale en revanche, transforme les équations d'équilibre originelles du système (passage des coordonnées nodales aux coordonnées généralisées) avant leur intégration numérique éventuelle, ce qui s'écrit :

$$U(t) = P X(t) \quad (3.2)$$

où  $P$  est une matrice carrée à déterminer.  $X(t)$  est un vecteur d'ordre  $n$  qui fait référence aux coordonnées de déplacements généralisées.

Rappelons que l'un des objectifs de la transformation est de réduire la taille du problème numérique et surtout d'obtenir un système d'équations découplées. Le cas échéant, l'une des matrices de transformation adéquate est celle des modes propres ( $P = \Phi$ ). L'équation d'équilibre dynamique modale s'écrit



alors:

$$\ddot{x}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{x}_i(t) + \omega_i^2x_i(t) = r_i(t) \quad (3.3)$$

où  $r_i(t)$  est analogue à un chargement modal.  $\omega_i$  et  $\xi_i$  sont les caractéristiques modales propres de la structure.

Finalement, la réponse dynamique  $U(t)$  peut être obtenue en calculant les réponses de chaque mode puis en les superposant pour obtenir la réponse dans les coordonnées initiales. On remarque que dans la plupart des cas, les contributions des différents modes sont plus importantes pour les fréquences basses et tendent à décroître pour les fréquences plus hautes. Il en résulte qu'il n'est généralement pas nécessaire d'inclure tous les modes de vibration à fréquence élevée dans la superposition. La série peut être tronquée lorsque la réponse a été obtenue avec un degré de précision suffisant, ce qui s'écrit:

$$U(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i(t) \quad (3.4)$$

où  $n$  est le nombre de mode considérés dans l'analyse.

La bonne utilisation des méthodes temporelles suppose un bon choix d'un ou de plusieurs accélérogrammes qui représentent convenablement le mouvement sismique imposé, compte tenu des caractéristiques (magnitude, distance focale) du séisme et qui conduisent à des résultats suffisamment fiables pour pouvoir être utilisés pour la vérification du dimensionnement.

Le choix des accélérogrammes est sans doute, le plus délicat de ceux que l'on doit faire lors d'une étude temporelle. Le choix idéal serait de prendre un

ensemble d'enregistrements réels correspondant à des types de séismes et de conditions de site représentatifs du cas étudié, et suffisamment nombreux pour permettre une analyse statistique (moyenne, écart type) des résultats obtenus.

Cependant, le chargement sismique de la structure est parfois défini en termes de son spectre de réponse (ou de calcul), dans ce cas les techniques de résolution temporelles ne peuvent pas aboutir. Toutefois si l'on suppose que la structure analysée a un comportement globalement linéaire (permettant l'utilisation des modes propres) et est caractérisée par un amortissement proportionnel, alors une analyse basée sur le couplage de la superposition modale et de la méthode du spectre de réponse peut constituer l'outil adéquat qui permet, dans le cadre d'une analyse modale, de traiter ce type de problèmes. En effet, la méthode modalo-spectrale (qui résulte du couplage précédent) est, sans doute, la méthode la plus fréquemment utilisée pour l'analyse sismique des structures (vu qu'elle est à la portée de l'ingénieur). Rappelons que l'utilisation du spectre de réponse permet uniquement de calculer les réponses modales maximales, la combinaison de ces dernières conduit au calcul des réponses physiques de la structure, ainsi différentes règles peuvent être adoptées pour effectuer cette combinaison notamment:

**La Règle de Combinaison Arithmétique (*Sum of Absolute Values: SAV*).** Cette règle suppose que toutes les réponses modales atteignent leur maximum en même temps et avec le même signe. Elle est exagérément pénalisante dans la grande majorité des cas et n'est pratiquement jamais utilisée.

La Règle de Combinaison dite Quadratique (*Square Root of Sum of Squares: SRSS*). C'est une règle qui a été longtemps adoptée. Elle suppose que le maximum probable  $Z$  d'une réponse de la structure (composante de déplacement, de contrainte, ou d'effort en un point) est la racine carrée de la somme des carrés des réponses  $Z_i$  correspondant aux différents modes c'est à dire:

$$Z = \left( \sum_{i=1}^n Z_i^2 \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

où  $n$  est le nombre de mode à considérer.

Cette règle correspond à une hypothèse d'indépendance (au sens statistique) des réponses modales. Elle constitue une bonne approximation de la réalité dans le cas où le spectre définissant le mouvement sismique possède une large bande de fréquences et/ou les modes propres de la structure sont séparés les uns des autres et se situent à l'intérieur ou au voisinage de cette bande. Dans le cas contraire, sa validité (*SRSS*) n'est pas établie et diverses propositions ont été présentées pour obtenir une meilleure approximation.

La Règle de Combinaison Quadratique Complète (*CQC*). Dans ce cas la réponse s'écrit sous la forme:

$$Z = \left( \sum_{ij} \alpha_{ij} Z_i Z_j \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

Les coefficients  $\alpha_{ij}$  dépendent de la durée et du contenu en fréquence du signal d'entrée [12],[13] et éventuellement des fréquences et coefficients d'amortissement des modes  $i$  et  $j$ . Si la durée du mouvement sismique imposé est longue par rapport aux périodes de vibration de la structure et si de plus le spectre définissant le mouvement recouvre une large bande de fréquences, alors ces coefficients s'expriment uniquement en fonction des fréquences et des

coefficients d'amortissement correspondant aux modes  $i$  et  $j$  [12] [13].

### 3.2.3 APPROCHE PROBABILISTE.

Les méthodes présentées dans les paragraphes précédents, bien que déterministes dans leurs principes, comportent des éléments de nature probabiliste (combinaison des modes dans la méthode modalo-spectrale, prise en compte de plusieurs accélérogrammes dans les méthodes d'intégration). Il est donc naturel que des méthodes purement probabilistes aient été proposées. Pour des modèles linéaires, la théorie de ces méthodes est bien établie. Elle se fonde sur la représentation du mouvement sismique sous forme d'un bruit blanc stationnaire, pur ou filtré, caractérisé par sa densité spectrale de puissance, ce qui constitue une représentation convenable d'un ensemble d'accélérogrammes. La connaissance de cette densité spectrale de puissance permet de déterminer la réponse de la structure en termes probabilistes, c'est à dire faisant appel aux notions de moyenne et d'écart type, ce qui fournit des éléments suffisants pour apprécier le degré de sécurité procuré par le dimensionnement de la structure. Ces méthodes sont séduisantes dans leur principe, le caractère aléatoire des signaux sismiques et de leurs effets sur les structures étant peu discutable, comme en témoignent l'observation des dégâts causés par les séismes et les résultats des analyses temporelles de structures complexes. Il semble cependant qu'à l'heure actuelle, ces méthodes aient du mal à pénétrer dans la pratique. Cela est vraisemblablement dû par exemple; au caractère réglementaire conféré dans certains domaines d'application (centrales nucléaires notamment), à la définition du mouvement en termes de spectre de réponse et aux critères d'utilisation des méthodes spectrales et temporelles.

Rappelons que le développement d'une approche probabiliste se fonde

## *Chapitre 4*

### *Combinaison Modale dans le Cas d'Excitations Sismiques Uniformes*

#### 4.1 INTRODUCTION.

Lors de la conception et de l'analyse parasismique des structures linéaires, une hypothèse fondamentale est fréquemment adoptée. Elle stipule que la structure étudiée subit un mouvement du sol de nature uniforme. En d'autres termes, la même excitation sismique est supposé agir simultanément au niveau de tous les points d'appuis de la structure au sol.

Cependant, cette hypothèse implique que les vibrations du sol résultent d'une propagation d'ondes sismiques verticales spatialement uniformes, ou alors que les dimensions de la base de la structure considérée sont petites relativement aux longueurs d'ondes sismiques (ce qui est vrai pour des structures peu étendues).

D'un point de vue pratique, l'introduction d'une telle hypothèse dans le traitement des excitations sismiques présente des avantages considérables. D'une part, l'analyse dynamique s'en trouve amplement simplifiée puisque seule la variation temporelle du signal sismique est à considérer. D'autre part, la majorité des méthodes d'analyse existantes (déterministes ou non déterministes), se basent principalement sur cette hypothèse.

Dans le cadre d'un calcul des réponses physiques, l'un des moyens les plus efficaces est, sans doute, celui qui se base sur le principe de superposition modale. En effet, il est plus simple de quantifier les réponses modales

(histoires temporelles ou quantités maximales) d'un système structural à  $n$  degrés de liberté, puis de combiner ces réponses selon un procédé adéquat qui permette d'approcher au mieux la réponse exacte.

Rappelons que dans le cas d'excitations sismiques uniformes, plusieurs règles de combinaison des réponses modales existent. La plus simple étant la SAV. Celle-ci conduit à une surestimation des résultats, alors que la SRSS (qui est largement utilisée en pratique) bien que plus raffinée que la SAV peut mener à une sous-estimation de la réponse, particulièrement dans le cas de structures ayant des modes de vibration rapprochés. Pour palier ces aspects négatifs, d'autres règles de combinaison plus élaborées ont été développées. Elles se basent sur la théorie des vibrations aléatoires et tiennent compte de l'inter-corrélation modale par l'introduction dans la combinaison de coefficients de corrélation inter-modaux.

Notons que dans le cadre d'une approche probabiliste modale, le développement analytique qui conduit à la formulation d'une règle de combinaison des réponses modales maximales d'un système structural se base sur la théorie des vibrations aléatoires. Quelques notions fondamentales de cette théorie sont résumées dans la section suivante, ce qui constituera l'étayage théorique nécessaire pour les parties subséquentes.

#### 4.2 ELEMENTS DE VIBRATIONS ALEATOIRES.

L'Etude des propriétés statistiques nécessaires à la caractérisation d'un phénomène aléatoire relève de la théorie des processus aléatoires. Les vibrations aléatoires constituent quant à elles, une discipline qui combine la théorie des processus aléatoires à la dynamique des structures. Le principal objectif est de caractériser la sortie (*output*) d'un système en fonction de la nature de l'entrée (*input*) et du système.

Rappelons que la modélisation probabiliste des mouvements sismiques dans le temps et dans l'espace se base sur la théorie des champs aléatoires, dont l'essentiel est présenté dans les paragraphes ci dessous.

#### 4.2.1 PROCESSUS ET CHAMPS ALEATOIRES.

##### A. Définition.

Si un phénomène physique est aléatoire, alors chaque échantillon  $X(t)$  de ce phénomène (mesure ou enregistrement temporel) est le résultat de circonstances uniques qui ne se répéteront pas à l'occasion d'autres mesures indépendantes de ce même phénomène. Un ensemble complet d'échantillons  $X(t)$  (fonction aléatoire) constitue un processus aléatoire.

Les champs aléatoires sont essentiellement des fonctions aléatoires multidimensionnelles, c'est à dire dépendant de plus d'un paramètre.  $X(\underline{t})$  représente un champ aléatoire dans lequel  $\underline{t}$  correspond à un vecteur qui peut dépendre de plusieurs paramètres (le temps, la position dans l'espace, ...). Les propriétés des champs aléatoires sont donnés dans ce qui suit. Rappelons qu'elles s'appliquent aussi bien aux processus aléatoires dans la mesure où le paramètre est un scalaire au lieu d'un vecteur.

##### B. Caractérisation.

De manière générale, pour caractériser les champs et processus aléatoires de façon complète dans le sens probabiliste, il est nécessaire d'établir la fonction de densité de probabilité conjointe (d'ordre  $n$ ). Cependant, dans le cas particulier de champs aléatoires Gaussien une caractérisation basée

uniquement sur les statistiques du premier et du second ordre, contient toutes les informations nécessaires pour une description complète du champ.

Soient  $F(x, t)$  la fonction de distribution cumulative marginale du champ aléatoire  $X(t)$ , et  $F(x_1, t_1, x_2, t_2)$  la fonction de distribution cumulative conjointe à  $X(t_1)$  et  $X(t_2)$ . Notons par  $E$  l'opérateur de l'espérance mathématique.

Le moment initial ou la valeur moyenne est défini par:

$$m_x(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, t)$$

Le moment de second ordre ou la fonction d'auto-covariance est défini par:

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(t_1, t_2) &= E[ (X(t_1) - m_x(t_1)) (X(t_2) - m_x(t_2)) ] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)] [x_2 - m_x(t_2)] dF(x_1, t_1, x_2, t_2) \end{aligned}$$

Une caractérisation basée sur les deux premiers moments, consiste à spécifier la moyenne et la fonction d'auto-covariance relatives au champ aléatoire. D'autres fonctions utiles et qui sont d'ailleurs reliées aux deux précédentes sont respectivement:

la variance  $\sigma_x^2(t) = \Gamma_{xx}(t, t)$

et l'auto-covariance normalisée  $\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{xx}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2)}$



Par ailleurs lorsqu'il s'agit de deux champs aléatoires  $X_1(\underline{t})$  et  $X_2(\underline{t})$ , la dépendance statistique qui les relie peut s'exprimer à travers la fonction d'inter-covariance définie par:

$$\Gamma_{X_1 X_2}(\underline{t}_1, \underline{t}_2) = E[ (X_1(\underline{t}_1) - m_{X_1}(\underline{t}_1)) (X_2(\underline{t}_2) - m_{X_2}(\underline{t}_2)) ]$$

#### 4.2.2 HOMOGENEITE (OU STATIONNARITE), ISOTROPIE ET ERGODICITE.

L'homogénéité (ou stationnarité), l'isotropie et l'ergodicité sont des propriétés qui s'appliquent, entre autres, aux deux premiers moments caractérisant le champ (ou processus) aléatoire.

L'homogénéité d'un champ aléatoire  $X(\underline{t})$  implique que [35]:

$$m_X(\underline{t}) = m_X$$

et

$$\Gamma_{XX}(\underline{t}_1, \underline{t}_2) = \Gamma_{XX}(\underline{t}_2 - \underline{t}_1) = \Gamma_{XX}(\underline{\tau})$$

De plus, puisque la fonction d'auto-covariance dépend uniquement de la différence  $\underline{\tau}$ , alors:

$$\begin{aligned} \Gamma_{XX}(\underline{\tau}) &= E[ (X(\underline{t}) - m_X) (X(\underline{t} + \underline{\tau}) - m_X) ] \\ &= E[ (X(\underline{t}) - m_X) (X(\underline{t} - \underline{\tau}) - m_X) ] = \Gamma_{XX}(-\underline{\tau}) \end{aligned}$$

La fonction d'auto-covariance est donc paire par rapport à  $\underline{\tau}$ . Elle atteint son maximum en  $\underline{\tau} = \underline{0}$ .

Si le vecteur  $\underline{t}$  dépend du temps  $t$  et de l'espace  $\underline{y}$ , c'est à dire  $\underline{t} = (t, \underline{y})$ , alors le terme stationnarité est communément utilisé pour caractériser le comportement temporel de  $X(t, \underline{y})$ , alors que le terme homogénéité est utilisé lorsqu'on se réfère au comportement spatial de  $X(t, \underline{y})$ .

Deux champs aléatoires  $X_1(\underline{t})$  et  $X_2(\underline{t})$  sont conjointement homogène, si chacun d'eux est homogène et si leur fonction d'inter-covariance peut s'écrire:

$$\Gamma_{X_1 X_2}(\underline{t}_1, \underline{t}_2) = \Gamma_{X_1 X_2}(\underline{t}_2 - \underline{t}_1) = \Gamma_{X_1 X_2}(\underline{\tau})$$

L'homogénéité conjointe implique aussi que:

$$\Gamma_{X_1 X_2}(\underline{\tau}) = \Gamma_{X_2 X_1}(-\underline{\tau})$$

Cependant, la fonction d'inter-covariance n'est pas symétrique par rapport à l'origine  $\underline{\tau} = \underline{0}$  [28].

L'isotropie d'un champ aléatoire  $X(\underline{t})$  implique que la fonction d'auto-covariance dépend uniquement de la "distance".

$$\Gamma_{XX}(\underline{t}_1, \underline{t}_2) = \Gamma_{XX}(r), \quad r = |\underline{t}_2 - \underline{t}_1|$$

Donc, les deux premiers moments sont invariants par rapport à une translation, rotation et réflexion (par rapport à un miroir) dans l'espace  $-\underline{t}$ . Il est clair que l'isotropie implique l'homogénéité.

Parfois, il est possible de déduire les caractéristiques d'un champ aléatoire homogène à partir d'une réalisation unique (un seul échantillon du champ); l'ergodicité est la propriété qui permet une telle déduction.

La moyenne  $m_T$  calculée pour une seule réalisation d'un champ aléatoire homogène  $X(\underline{t})$ , sur un domaine:  $D_T = \{ t: 0 < t_i < T, i = 1, 2, \dots, n \}$  est donnée par:

$$m_T = \frac{1}{T^n} \int_{D_T} x(\underline{t}) dt$$

L'ergodicité dans la moyenne implique que:

$$m_X = E[X(\underline{t})] = \lim_{T \rightarrow \infty} m_T$$

En pratique, l'ergodicité (dans la moyenne) permet de remplacer les moyennes d'ensemble par des moyennes calculées sur un échantillon du champ aléatoire  $X(\underline{t})$ .

#### 4.2.3 REPRESENTATION DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL.

La caractérisation d'un champ aléatoire homogène  $X(\underline{t})$  dans le domaine fréquentiel peut se faire par le biais de la fonction d'auto-densité spectrale de puissance  $S_{XX}(\omega)$ . En particulier, lorsqu'il s'agit d'un processus aléatoire stationnaire celle-ci peut être définie par le biais des relations de *Wiener-Khinchine* suivantes [28]:

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

où  $R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$  définit la fonction d'auto-corrélation.

$R_{XX}(\tau)$  et  $S_{XX}(\omega)$  constituent donc *une paire de transformés de Fourier*.

La fonction  $S_{XX}(\omega)$  donne une indication de la décomposition spectrale du signal. Elle décrit la répartition fréquentielle de l'énergie moyenne du processus.

Notons que,  $S_{XX}(\omega)$  est une fonction réelle (positive) et est paire par rapport à  $\omega$  ( $S_{XX}(\omega) = S_{XX}(-\omega)$ ). Le fait que  $S_{XX}(\omega)$  soit symétrique par rapport à  $\omega = 0$  a motivé l'introduction de la densité spectrale unilatérale  $G_{XX}(\omega)$  définie uniquement pour les valeurs de  $\omega \geq 0$ :

$$G_{XX}(\omega) = 2 S_{XX}(\omega) , \quad \omega \geq 0$$

En terme de  $G_{XX}(\omega)$ , les relations de *Wiener-Khinchine* précédentes deviennent:

$$G_{XX}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos\omega\tau d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) \cos\omega\tau d\omega$$

Posons  $\tau = 0$  dans l'équation précédente. Il vient alors:

$$E(X^2) = R_{XX}(0) = \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) d\omega$$

#### 4.2.4 CHAMP ALEATOIRE SPATIO-TEMPOREL.

Il convient souvent de caractériser un champ aléatoire homogène spatio-temporel (c'est à dire, un champ aléatoire dont les variables temps et espace constituent les paramètres)  $X(\underline{t})$ , en termes de la fonction d'inter-densité spectrale spatiale (*The spatial cross spectral density function or cross spectrum*) donnée par:

$$C(\underline{y}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{XX}(\underline{y}, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Cette dernière est généralement complexe. Néanmoins, si  $X(\underline{t})$  présente une isotropie spatiale alors  $C(\underline{y}, \omega)$  est réelle en vertu de la symétrie de la fonction d'auto-covariance.

Considérons alors deux processus aléatoires  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$  décrivant la variation temporelle en deux points séparés par la distance  $\underline{y}$  dans un champ aléatoire spatio-temporel homogène. La fonction de densité spectrale en un point [28] peut s'écrire:

$$S(\omega) = S_{X_1 X_1}(\omega) = S_{X_2 X_2}(\omega) = C(\underline{0}, \omega)$$

Il convient aussi d'écrire:

$$C(\underline{y}, \omega) = \gamma(\underline{y}, \omega) S(\omega)$$

où

$$\gamma(\underline{y}, \omega) = \frac{C(\underline{y}, \omega)}{S(\omega)}$$

$\gamma(\underline{y}, \omega)$  est la fonction de corrélation spatiale à dépendance fréquentielle, elle peut être complexe. Autrement dit, cette fonction, également appelée fonction de cohérence, quantifie le degré de corrélation spatiale associé à chacune des composantes sinusoïdales du champ  $X(\underline{t})$ . De surcroît, pour toutes valeurs de  $\omega$ ,  $\gamma(\underline{0}, \omega) = 1$ . La partie réelle de  $\gamma(\underline{y}, \omega)$  représente le coefficient de corrélation spatiale à dépendance fréquentielle.

Physiquement la cohérence représente la mesure de la corrélation dans le domaine fréquentiel. Notons que dans le cas d'un champ aléatoire spatialement isotrope, la fonction  $\gamma(\underline{y}, \omega)$  est réelle.

#### 4.2.5 RELATIONS ENTREES-SORTIES (*Input-Output Relationships*).

Il convient à la suite de ce qui précède de se pencher sur les relations mathématiques permettant de relier l'input ( $I$ ) à l'output ( $O$ ) de systèmes vibratoires linéaires. En somme, un problème d'entrée-sortie (*Input-Output*) revient à rechercher le ou les sorties (*single or multiple output, SO or MO*) d'un système en fonction de ou des entrées (*single or multiple input, SI or MI*) considérées. Par conséquent, différentes situations peuvent être envisagées et ceci selon le nombre d'output recherchés et d'input considérés (*SISO, MIMO, ...*). Notons que dans ce qui suit, il est question de systèmes linéaires. Ce sont des systèmes pour lesquels le principe de superposition est applicable aussi bien dans le domaine fréquentiel que temporel.

## A. Problème Unitaire

En effet, l'analyse dans le domaine fréquentiel d'un système linéaire, permet de définir la fonction de transfert  $H(\omega)$  (*Complex Frequency Response Function*). Cette dernière constitue la réponse de systèmes susmentionnés à une fonction excitatrice complexe unité:  $\exp(i\omega t)$ .  $H(\omega)$  est une caractéristique du système. Elle dépend de ces caractéristiques mécaniques et éventuellement de la nature de l'input et de l'output.

Par ailleurs, la réponse dans le domaine temporel à une impulsion de valeur unité (excitation de type *Dirac*)  $\delta(t)$  appliquée à l'instant  $\tau$  est donnée par la fonction  $h(t-\tau)$ .

On démontre aisément pour un système donné que les fonctions  $h(t)$  et  $H(\omega)$  constituent une paire de transformées de Fourier; c'est à dire:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta$$
$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

et donc 
$$H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) d\theta$$

## B. Situations SISO

Soit  $X(t)$  et  $Y(t)$  deux processus aléatoires où le premier définit l'input stationnaire d'un système linéaire alors que le second représente l'output correspondant.

De manière générale le principe de superposition permet de relier  $X(t)$  et  $Y(t)$  par le biais de l'intégrale de convolution suivante (Intégrale de Duhamel):

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) X(t-\theta) d\theta$$

Par ailleurs, les espérances mathématiques des deux processus sont reliées comme suit:

$$m_Y = E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[h(\theta) X(t-\theta)] d\theta$$

or  $h(\theta)$  est une caractéristique du système. Il vient alors

$$m_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) E[X(t-\theta)] d\theta = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) d\theta$$

En vertu de ce qui précède on peut écrire:

$$m_Y = H(0) m_X$$

De manière similaire les fonctions d'auto-corrélation respectives peuvent être reliées par le double produit de convolution suivante:



$$E[Y(0)Y(\tau)] = R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) R_{XX}(\tau + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

La fonction d'auto-corrélation  $R_{YY}(\tau)$  est indépendante du temps. Par conséquent, l'input stationnaire  $X(t)$  d'un système linéaire induit un output  $Y(t)$  également stationnaire.

Les relations précédentes s'écrivent dans le domaine fréquentiel [28]:

$$S_{YY}(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) S_{XX}(\omega)$$

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega)$$

L'équation précédente contient uniquement une relation d'amplitude; elle établit la relation entre les valeurs de  $S_{XX}(\omega)$  et  $S_{YY}(\omega)$  pour chaque valeur de la fréquence ( $S_{XX}(\omega)$  et  $S_{YY}(\omega)$  sont des fonctions réelles).

La notion de densité spectrale de puissance est extrêmement importante pour les systèmes linéaires en raison de la simplicité avec laquelle elle permet d'écrire les relations Entrée-Sortie.

### C. Situations SIMO

Considérons à présent deux processus aléatoires de sorties  $Y_1(t)$  et  $Y_2(t)$  engendrés par la même excitation  $X(t)$  (SIDO). La fonction d'inter-densité spectrale s'écrit [35]:

$$S_{Y_1 Y_2}(\omega) = H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{XX}(\omega)$$

où  $H_1(\omega)$  et  $H_2(\omega)$  sont les fonctions de transfert relatives respectivement aux entrées-sorties  $(X(t), Y_1(t))$  et  $(X(t), Y_2(t))$ .

La fonction d'inter-densité spectrale relative aux processus d'excitation et de réponse  $X(t)$  et  $Y(t)$  respectivement est donnée par [35]:

$$S_{XY}(\omega) = H(\omega) S_{XX}(\omega)$$

De manière générale si  $Y_1(t)$  et  $Y_2(t)$  désignent les processus de réponse aux excitations  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  respectivement, alors les fonctions d'inter-densité spectrales sont reliées comme suit:

$$S_{Y_1 Y_2}(\omega) = H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{X_1 X_2}(\omega)$$

De surcroît puisque  $S_{YX}(\omega) = S_{XY}^*(\omega)$  et vice-versa (propriétés des matrices Hermitiennes), il vient alors:

$$S_{XY}^*(\omega) = S_{YX}(\omega) = H^*(\omega) S_{XX}(\omega)$$

on peut aussi écrire [28]:

$$S_{YY}(\omega) = H(\omega) S_{YX}(\omega)$$

L'équation précédente et celle donnant  $S_{YX}(\omega)$  contiennent une information d'amplitude et une information de phase.

Les relations précédentes sont beaucoup plus simples à manipuler que les

convolutions qui leur correspondent dans le domaine temporel.

#### D. Généralisation aux Situations MIMO

Considérons  $X_i (i=\overline{1, n})$ ,  $Y_j (j=\overline{1, m})$ ,  $n+m$  processus aléatoires, où les  $n$  premiers désignent les input stationnaires d'un système linéaire alors que les  $m$  derniers représentent les output correspondants. On définit alors la matrice des fonctions de transfert  $[H_{ij}(\omega)]$ .

La généralisation des équations écrites pour les situations *SIMO* aux situations *MIMO* induisent les relations matricielles suivantes:

$$\begin{aligned} [S_{X_i Y_j}(\omega)] &= [S_{X_i X_i}(\omega)] [H_{ij}(\omega)] \\ [S_{Y_j Y_j}(\omega)] &= [S_{Y_j X_i}(\omega)] [H_{ij}(\omega)] \\ [S_{Y_j X_i}(\omega)] &= [H_{ji}^*(\omega)] [S_{X_i X_i}(\omega)] [H_{ij}(\omega)] \end{aligned}$$

#### 4.3 DECOMPOSITION MODALE DES EQUATIONS DE MOUVEMENTS

Soit un système structural linéaire, à masses concentrées ayant plusieurs degrés de libertés et dont la base repose sur plusieurs supports. Ce système est soumis à une excitation sismique de translation (dans une seule direction) de nature uniforme. Les équations couplées du mouvement peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_s \\ \ddot{U}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & C_{sb} \\ C_{bs} & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_s \\ \dot{U}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & K_{sb} \\ K_{bs} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_b \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

où:

s et b sont des indices correspondant respectivement à la structure et à la base (fondation).

sb et bs sont des paires d'indice correspondant au couplage base-structure.

M est la matrice masse.

C est la matrice d'amortissement.

K est la matrice de rigidité.

U,  $\dot{U}$  et  $\ddot{U}$  correspondent respectivement aux vecteurs, déplacement, vitesse et accélération absolus.

$P_b$  est le vecteur des forces de réactions agissant au niveau de la base (les supports).

Réécrivons le vecteur des déplacements sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} U_s \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s U_0 \\ T_b U_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_s \\ V_b \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où:

$T_s U_0$  représente la composante de déplacement de corps rigide de la structure.

$V_s$  représente la composante de déplacement non rigide de la structure (déplacement relatif).

$T_b U_0$  est la composante de déplacement de corps rigide de la base.

$V_b$  est la composante de déplacement non rigide de la base.

$U_0$  est dans ce cas un scalaire puisque seule une composante de mouvement du sol est considérée, donc  $U_0 = u_0$ .

$T_s$  et  $T_b$  sont des matrices de transformation (vecteurs d'influence dans ce cas) correspondant à la structure et à la base respectivement et qui satisfont aux conditions de corps rigide suivantes.

$$\begin{bmatrix} K_s & K_{sb} \\ K_{bs} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$K_s T_s + K_{sb} T_b = 0 \quad (4.4)$$

Rappelons qu'il n'y a pas de forces d'amortissement induites par les vitesses de corps rigide.

Or  $V_b=0$  puisque le mouvement du sol est supposé être uniforme.

La combinaison des équations (4.2) et (4.1) et l'utilisation des conditions (4.3) permet d'écrire l'équation de mouvement de la structure, c'est à dire.

$$M_s \ddot{V}_s + C_s \dot{V}_s + K_s V_s = - M_s T_s \ddot{U}_0 \quad (4.5)$$

La technique de superposition modale est l'un des moyens les plus efficaces permettant d'approcher les solutions du système d'équations différentielles données par l'équation précédente. Elle nécessite l'introduction de la transformation suivante:

$$V = \Phi Y \quad (4.6)$$

où  $\Phi$  est la matrice de transformation et  $Y$  le vecteur des coordonnées généralisées.

Si la matrice de transformation utilisée est celle des modes propres, alors

$Y$  est identique au vecteur des coordonnées normales. Dans ce cas la substitution de l'équation (4.6) dans l'équation (4.5) et la prémultiplication par  $\Phi^T$  permet d'écrire:

$$(\Phi^T M_s \Phi) \ddot{Y} + (\Phi^T C_s \Phi) \dot{Y} + (\Phi^T K_s \Phi) Y = - \Phi^T M_s T_s \ddot{U}_0 \quad (4.7)$$

Supposons à présent que la structure est amortie de manière classique. Cette hypothèse permet de découpler les équations de mouvement en une série d'équations modales indépendantes et cela en utilisant les vecteurs et valeurs propres réels correspondant au système non amorti. L'application des propriétés d'orthogonalité permet alors d'écrire.

$$\ddot{y}_k + 2 \beta_k \omega_k \dot{y}_k + \omega_k^2 y_k = - \gamma_k \ddot{U}_0 \quad (4.8)$$

où:

$y_k$  est la  $k^{ème}$  coordonnée modale.

$\beta_k$  est le facteur d'amortissement modale donné par:

$$2 \beta_k \omega_k = \frac{\Phi_k^T C_s \Phi_k}{\Phi_k^T M_s \Phi_k}$$

$\omega_k$  est la fréquence angulaire propre (modale) donnée par:

$$\omega_k^2 = \frac{\Phi_k^T K_s \Phi_k}{\Phi_k^T M_s \Phi_k}$$

$\gamma_k$  est le facteur de participation du mode  $k$  et est donné par:

$$\gamma_k = \frac{\Phi_k^T M_s T_s}{\Phi_k^T M_s \Phi_k}$$

L'équation (4.8) est analogue à l'équation d'équilibre gouvernante d'un oscillateur à un degré de liberté. Sa résolution peut se faire soit par intégration numérique (intégrale de Duhamel), ce qui nécessite la connaissance de l'exacte évolution temporelle du chargement  $\ddot{u}_0(t)$  soit par la méthode du spectre de réponse, ce qui implique la connaissance du spectre de réponse de l'excitation  $\ddot{u}_0(t)$ , mais qui fournit uniquement la réponse modale maximale, c'est à dire,  $\max(y_k)$ .

#### 4.4 REPOSE D'UN SYSTEME A PLUSIEURS DEGRE DE LIBERTE A UNE EXCITATION STATIONNAIRE.

En utilisant la méthode de superposition modale [11], toutes quantités de réponse  $R(t)$  d'un système linéaire peut s'exprimer en termes de ses réponses modales sous la forme suivante:

$$R(t) = \sum_k L_k y_k(t) \quad (4.9)$$

où:

$L_k$  sont des constantes qui dépendent du type de réponse considérée.

Supposons à présent que l'excitation sismique  $\ddot{u}_0(t)$  à la base de la structure soit un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle, alors le processus de sortie (réponse) est aussi de moyenne nulle [11].

Supposons de plus que le processus de sortie  $R(t)$  soit stationnaire. A partir de la référence [11], sa densité spectrale de puissance unilatérale est définie par:

$$G_R(\omega) = \sum_k \sum_l L_k L_l H_k^*(\omega) H_l(\omega) \gamma_k \gamma_l G_{0_0}(\omega) \quad (4.10)$$

où:

$k$  et  $l$  indiquent les modes considérés.

\* indique le conjugué complexe.

$H_k(\omega)$  est la fonction de transfert du mode  $k$ , elle est donnée (lorsque la réponse considérée est le déplacement) par:

$$H_k(\omega) = \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i \beta_k \omega_k \omega}$$

$G_{0_0}(\omega)$  est la densité spectrale de puissance unilatérale [28] de l'excitation d'entrée. Elle est reliée à la densité spectrale de puissance par la relation suivante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{0_0}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} G_{0_0}(\omega) d\omega$$

Posons:

$$E_k = L_k \gamma_k \quad (4.11)$$

$$E_l = L_l \gamma_l$$

$E_k$  et  $E_l$  ainsi définis peuvent être considérés comme des facteurs de participation effectifs des modes  $k$  et  $l$  respectivement.

L'équation (4.10) peut alors s'écrire:

$$G_R(\omega) = \sum_k \sum_l E_k E_l H_k^*(\omega) H_l(\omega) G_{0_0}(\omega) \quad (4.12)$$

Dans la double sommation précédente, les termes correspondant aux indices  $k, l$



De manière générale, les coefficients d'inter-corrélation  $e_{m,kl}$  dépendent de la durée et du contenu fréquentiel de l'excitation d'entrée (donc de la forme de  $G_{\Delta_0}(\omega)$ ), de la fréquence et du facteur d'amortissement modaux.

On démontre en références [12] et [13], que dans le cas particulier où le processus d'entrée est décrit par un bruit blanc ou large bande, les résultats suivants:

$$\begin{array}{llllll} \text{si} & \frac{\omega_k}{\omega_1} \rightarrow 1 & \text{alors} & e_{m,kl} \rightarrow 1 & m = 0, 1, 2 \\ \text{si} & \frac{\omega_k}{\omega_1} \rightarrow 0 & \text{alors} & e_{m,kl} \rightarrow 0 & m = 0, 1, 2 \end{array}$$

Différentes expressions de ces coefficients ont été formulées, parmi elles celle proposée en référence [12] (basée sur une analyse de vibration aléatoire) semble être la plus rigoureuse.

Dans le but d'explicitier les expressions des moments spectraux  $\lambda_{m,kk}$  il est nécessaire d'introduire quelques notions concernant les statistiques du pic de la réponse.

#### 4.5 STATISTIQUES DU PIC DE LA REPONSE DANS LE CAS D'UNE EXCITATION GAUSSIENNE.

L'intérêt porté aux caractéristiques de réponses des systèmes structuraux soumis à des excitations sismiques stationnaires est très grand. Parmi ces caractéristiques quelques unes, telles que la fonction de distribution cumulative, la moyenne et la variance de la réponse maximale sur un intervalle de temps spécifié, sont fondamentales pour la détermination de la fiabilité des structures existantes ou pour la conception d'autres.

Soit

$$R_\tau = \max_{\tau} |R(t)|$$

$R_\tau$  représente le maximum de la valeur absolue de la réponse  $R(t)$  considérée sur un laps de temps  $\tau$ .

Supposons que le processus d'entrée soit Gaussien et de moyenne nulle. Dans ce cas le processus de sortie est aussi Gaussien et de moyenne nulle [34]. A partir de ces conditions, il est possible d'exprimer la distribution cumulative de la variable  $R_\tau$  en fonction des premiers moments spectraux  $\lambda_0, \lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

A partir de la référence [34] on a:

$$F_{R_\tau}(r) = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \right] \exp\left[ -v\tau \frac{1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta_0 s\right)}{\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) - 1} \right] \quad r > 0$$

$s$  représente une amplitude normalisée donnée par:

$$s = \frac{r}{\sigma_R} = \frac{r}{\sqrt{\lambda_0}}$$

alors que:

$$v = \frac{\sigma_R}{\pi \sigma_R} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}$$

est le taux moyen de passage du processus de réponse par la valeur zéro.

$$\delta_e = \delta^{1.2}$$

avec

$$\delta = \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}\right)}$$

qui est un paramètre de dispersion spectrale (compris entre 0 et 1).

De manière générale, la moyenne et l'écart type de la variable  $R_\tau$  sont reliés au moment spectral d'ordre zéro par les relations suivantes [12]:

$$\begin{aligned} \overline{R_\tau} &= p \sigma_R \\ \sigma_{R_\tau} &= q \sigma_R \end{aligned} \tag{4.21}$$

$p$  et  $q$  sont appelés facteurs de pic et sont donnés en fonction des trois premiers moments spectraux [12] et de la durée  $\tau$  (généralement prise égale à la durée de la phase forte de l'excitation).

#### 4.6 DEVELOPPEMENT DE LA REGLE DE COMBINAISON MODALE.

Soit  $S_r(\omega, \beta)$  la moyenne de la valeur absolue du maximum de la réponse durant un temps  $\tau$ , d'un oscillateur de fréquence  $\omega$  et de coefficient d'amortissement  $\beta$ , soumis à une excitation stationnaire (la réponse est supposée stationnaire).

A partir des équations (4.14) et (4.21) on peut écrire:

$$\lambda_0 = \left[ \frac{\text{Moy}(\max(R))}{P} \right]^2 = \left[ \frac{\overline{R_r}}{P} \right]^2 \quad (4.22)$$

De manière analogue, si on s'intéresse au processus de la réponse modale et en vertu de (4.20) on peut écrire:

$$\lambda_{0,kk} = \left[ \frac{1}{P_k} \frac{\text{Moy}(\max(y_k))}{\gamma_k} \right]^2 = \left[ \frac{S_r(\omega_k, \beta_k)}{P_k} \right]^2 \quad (4.23)$$

$\text{Moy}(\max(y_k))$  est analogue à la valeur moyenne du maximum de la réponse de l'équation (4.8).

$P_k$  est le facteur de pic relatif au mode  $k$ .

Par ailleurs, l'équation (4.19) s'écrit dans le cas où  $m=0$  sous la forme suivante:

$$\lambda_0 = \sum_k \sum_I E_k E_I e_{0,kl} \sqrt{\lambda_{0,kk} \lambda_{0,II}} \quad (4.24)$$

D'où en substituant (4.22) et (4.23) dans (4.24) on obtient:

$$\text{Moy}(\max(R)) = \left[ \sum_k \sum_I e_{0,kl} \frac{P^2}{P_k P_I} E_k S_r(\omega_k, \beta_k) E_I S_r(\omega_I, \beta_I) \right]^{1/2} \quad (4.25)$$

qui est analogue à:

$$\text{Moy}(\max(R)) = \left[ \sum_k \sum_I e_{0,kl} \frac{P^2}{P_k P_I} \text{Moy}(\max(R_k)) \text{Moy}(\max(R_I)) \right]^{1/2}$$

avec:

$$\begin{aligned} \text{Moy}(\max(R_k)) &= E_k S_r(\omega_k, \beta_k) \\ \text{Moy}(\max(R_1)) &= E_1 S_r(\omega_1, \beta_1) \end{aligned}$$

qui représente les valeurs moyennes des maximums des  $k^{\text{ème}}$  et  $1^{\text{ème}}$  quantités de réponses modales respectivement (ces valeurs peuvent être négatives).

On démontre en référence [13] que pour des cas pratiques les rapports  $D/D_1$  sont proches de l'unité. Ainsi leur simplification de l'équation (4.25) conduit à la formule suivante:

$$\text{Moy}(\max(R)) = \left[ \sum_k \sum_l e_{0,kl} \text{Moy}(\max(R_k)) \text{Moy}(\max(R_l)) \right]^{1/2} \quad (4.26)$$

L'équation (4.26) représente la valeur moyenne du maximum (en valeur absolue) de la quantité de réponse  $R(t)$ ; elle est donnée ici sous forme d'une somme quadratique complète (CQC), incluant ainsi l'inter-corrélation entre tous les modes de vibration significatifs,

Plusieurs autres quantités statistiques de la réponse peuvent être calculées à partir du développement précédent. On peut citer: La moyenne de la valeur carrée de la réponse  $R(t)$  ( $\sigma_R = \sqrt{\lambda_0}$ ) et de son processus dérivée ( $\sigma_{\dot{R}} = \sqrt{\lambda_2}$ ), la fréquence centrale ( $\omega = \sqrt{\lambda_2/\lambda_0}$ ) etc...

Rappelons que dans le cas particulier de structures ayant des modes de vibration bien séparés, les réponses modales peuvent être considérées statistiquement indépendantes et donc ( $e_{0,kl} \rightarrow 0$  lorsque  $\omega_k/\omega_l \rightarrow 0$ ) les coefficients  $e_{0,kl}$  s'annulent pour  $k \neq l$  et l'équation (4.26) devient:

$$\text{Moy}(\max(R)) = [ \sum_k (\text{Moy}(\max R_k))^2 ]^{1/2}$$

qui est la règle de combinaison dite quadratique (SRSS) qui ne considère pas l'inter-corrélation modale [36].

La quantification de l'équation (4.26) nécessite entre autres, la connaissance des quantités  $S_r(\omega_k, \beta_k)$  et  $S_r(\omega_l, \beta_l)$ . Toutefois, pour atteindre un tel objectif, l'idéal serait de disposer d'un moyen non seulement direct mais aussi à la portée de l'ingénieur.

En réalité la méthode utilisée pour calculer les quantités modales maximales, dépend principalement du mode de description utilisé pour définir le chargement sismique imposé.

Il est vrai que lors de l'analyse des vibrations aléatoires des structures linéaires soumises à des excitations stationnaires de nature uniformes, la description de l'entrée peut se faire en termes de la densité spectrale de puissance. Néanmoins cette première description n'est pas toujours la plus convenable; une spécification en termes du spectre de réponse (ou de calcul) moyen [16],[23] semble souvent être plus efficace et cela pour plusieurs raisons. En effet, une description de l'input sismique basée sur la densité spectrale requiert une analyse à fondement stochastique, par conséquent l'établissement de spectres de réponse est plus simple que celui de densité spectrale de puissance à partir de banques de données existantes. Ainsi, le spectre de réponse semble constituer l'outil approprié pour calculer les réponses modales maximales (ces mêmes quantités peuvent être déduites suite à l'intégration numérique des équations d'équilibre modales si toutefois l'histoire temporelle de l'excitation est connue).

En effet la fonction  $S_r(\omega, \beta)$  (telle qu'elle a été définie antérieurement) n'est autre que le spectre de réponse associé à l'excitation d'entrée  $\ddot{u}_0(t)$ . Dans ce cas  $S_r(\omega_k, \beta_k)$  et  $S_r(\omega_1, \beta_1)$  représentent les ordonnées spectrales correspondant aux abscisses  $\omega_k$  et  $\omega_1$  respectivement. Le couplage de la règle de combinaison modale et de la méthode du spectre de réponse constitue un moyen puissant qui permet, dans le cadre d'une analyse probabiliste, de calculer puis de combiner les réponses modales maximales.

## *Chapitre 5*

### *Effet de la Variation Spatiale des Mouvements Sismiques sur L'Inter-Corrélation Modale*

#### 5.1 INTRODUCTION.

Le modèle du spectre de réponse modifié, développé en référence [4] et [5], est sans doute un moyen prééminent qui permet de calculer les réponses modales maximales de structures soumises à des excitations sismiques partiellement corrélées. Par ailleurs, le calcul d'une réponse physique par opposition à une réponse modale donnée, aussi bien dans le cas d'excitations sismiques uniformes ou non uniformes, requiert généralement la combinaison du spectre de réponse modifié (ou classique) et la méthode de superposition modale. Ainsi, la combinaison appropriée des réponses modales maximales conduit à une estimation de la réponse considérée. Par conséquent, la méthode modalo-spectrale (résultant du couplage précédent) peut constituer l'alternative adéquate à l'approche purement probabiliste particulièrement dans le cas d'un input sismique non uniforme.

Le présent chapitre se propose d'exposer le développement qui a conduit à la formulation des coefficients de corrélation inter-modaux dans le cas d'excitations multiples, en vue de mettre en évidence la règle de combinaison des réponses modales maximales [6],[8], qui utilise le spectre de réponse modifié et les coefficients susmentionnés



En effet, à l'instar du modèle du spectre de réponse modifié les coefficients de corrélation développés (cas de chargement non uniforme), sont un ajustement ou extension de leurs homologues [12],[13], valables pour des excitations identiques des supports.

L'une des équations principales, auxquelles a abouti la méthode du spectre de réponse exposée en chapitre 4 dans le cas d'un chargement sismique uniforme est:

$$Moy(\max(R)) = \left[ \sum_k \sum_I e_{0,kI} Moy(\max(R_k)) Moy(\max(R_I)) \right]^{1/2}$$

avec

$$Moy(\max(R_k)) = E_k S(\omega_k, \beta_k)$$

$$Moy(\max(R_I)) = E_I S(\omega_I, \beta_I)$$

L'équation précédente, exprime une règle de combinaison modale qui superpose (combine) les réponses modales maximales (déduites du spectre de réponse classique) pondérées par des coefficients d'inter-corrélation modale. Rappelons, que dans le cas précédent  $S(\omega_k, \beta_k)$  décrit le spectre de réponse classique.

De manière similaire, l'idéal serait sans doute, d'écrire une équation analogue à la précédente à même de résoudre le cas de chargement sismique non uniforme, c'est à dire:

$$Moy^P(\max(R)) = \left[ \sum_k \sum_I e_{0,kI}^P Moy^P(\max(R_k)) Moy^P(\max(R_I)) \right]^{1/2} \quad (5.1)$$

avec

$$\begin{aligned} \text{Moy}^P(\max(R_k)) &= E_k^P S^P(\omega_k, \beta_k) \\ \text{Moy}^P(\max(R_l)) &= E_l^P S^P(\omega_l, \beta_l) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dans l'équation (5.1),  $e_{0,kl}^P$  représente le coefficient d'inter-corrélation modifié des modes  $k$  et  $l$  dans le cas où le mouvement sismique appliqué aux supports de la structure est non uniforme.

Par ailleurs, dans les équations (5.2),  $S^P(\omega_k, \beta_k)$  représente le spectre de réponse modifié développé en références [4] et [5] dans le cas d'excitations sismiques variant dans l'espace. Rappelons, que ce dernier est relié au spectre de réponse classique par le biais de la relation suivante:

$$S^P(\omega_k, \beta_k) = [A_k Q_k A_k^T]^{1/2} S(\omega_k, \beta_k)$$

où le terme entre crochets est un coefficient de correction qui dépend des propriétés de la structure et des caractéristiques du phénomène de propagation des ondes sismiques ( $A_k$  et  $Q_k$  seront définis subséquentment).

## 5.2 DERIVATION DE LA REGLE DE COMBINAISON MODALE.

Commençons par écrire les équations de mouvement couplées d'un système linéaire, à masses concentrées, à plusieurs degrés de liberté, ayant plusieurs supports et soumis à une seule composante de translation non uniforme du mouvement du sol, c'est à dire:

$$\begin{bmatrix} M_a & 0 \\ 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_a \\ \ddot{U}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_a & C_{ab} \\ C_{ba} & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_a & K_{ab} \\ K_{ba} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_b \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Dans ce qui précède, les indices s et b font référence à la structure et à la base respectivement.

Par ailleurs, étant donné que le mouvement sismique agissant à la base de la structure diffère d'un support à un autre, il convient alors dans ce cas, de séparer les déplacements de la structure en deux parties, c'est à dire: Une composante quasi-statique  $U_s^s$  et une autre dynamique  $V_s$  [11] d'où:

$$\begin{bmatrix} U_s \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_s^s \\ U_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

où la composante quasi-statique satisfait l'équation suivante:

$$\begin{bmatrix} K_s & K_{sb} \\ K_{bs} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s^s \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{bs} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

à partir de laquelle on peut déduire que:

$$U_s^s = -K_s^{-1} K_{sb} U_b \quad (5.6)$$

La substitution des équations (5.6) et (5.4) dans (5.3) permet d'écrire l'équation de mouvement suivante:

$$M_s \ddot{V}_s + C_s \dot{V}_s + K_s V_s = M_s K_s^{-1} K_{sb} \ddot{U}_b + (C_s K_s^{-1} K_{sb} - C_{sb}) \dot{U}_b \quad (5.7)$$

En vertu des conditions de corps rigide vérifiées par les matrices de rigidités et d'amortissements [5] et après quelques transformations, il vient:

$$M_s \ddot{V}_s + C_s \dot{V}_s + K_s V_s = M_s K_s^{-1} K_{sb} \ddot{U}_b \quad (5.8)$$

La technique de superposition modale permet de résoudre l'équation précédente. En effet, en posant  $V_s = \Phi Y$ , la prémultiplication par  $\Phi^T$  sous l'hypothèse d'un amortissement proportionnel et la prise en compte des conditions d'orthogonalité mène à:

$$(\Phi^T M_s \Phi) \ddot{Y} + (\Phi^T C_s \Phi) \dot{Y} + (\Phi^T K_s \Phi) Y = \Phi^T M_s K_s^{-1} K_{sb} \ddot{U}_b \quad (5.9)$$

qui peut éventuellement s'écrire en termes des  $k^{ème}$  composantes modales:

$$\ddot{y}_k + 2\beta_k \omega_k \dot{y}_k + \omega_k^2 y_k = -\gamma_k \ddot{u}_k \quad (5.10)$$

où  $y_k$  est le déplacement modal et

$$\ddot{u}_k = A_k \ddot{U}_b = \sum_{l=1}^n A_{kl} \ddot{u}_{bl} \quad (5.11)$$

Ce dernier est équivalent à une accélération modale des supports, alors que

$$A_k = \frac{\Phi_k^T M_s K_s^{-1} K_{sb}}{\Phi_k^T M_s E_s} = [A_{kl}] \quad (5.12)$$

est un vecteur ligne ayant n composantes dans lequel  $E_s$  est le vecteur de déplacement de corps rigide associé à la direction excitée au niveau du support.

Par ailleurs, le  $k^{\text{ème}}$  facteur de participation modale est donné par:

$$\gamma_k = \frac{\Phi_k^T M_s E_s}{\Phi_k^T M_s \Phi_k} \quad (5.13)$$

Dans ce qui précède les indices  $i$  et  $n$  correspondent respectivement au numéro et au nombre total de degré de liberté associés aux supports.

Toutefois, vu la nature du chargement considéré, l'équation (5.10) ne peut pas être résolue par le biais du spectre de réponse classique. En revanche, elle peut l'être par le biais du modèle du spectre de réponse modifié  $S^P(\omega, \beta)$ .

Rappelons, pour mémoire que le développement subséquent s'appuie principalement sur la théorie des vibrations aléatoires.

En effet, nous savons déjà que toute quantité de réponse  $R(t)$ , linéairement reliée aux coordonnées modales peut s'écrire sous la forme:

$$R(t) = \sum_k L_k y_k(t)$$

où:

les  $L_k$  sont des constantes qui dépendent du type de réponse considérée.

Posons:

$$\ddot{s}_k(t) = -\gamma_k \ddot{u}_k(t) \quad (5.14)$$

L'expression précédente représente le second membre de l'équation (5.10), (équivalent à un chargement modale).

Ainsi, la densité spectrale de puissance de la réponse  $R(t)$ , à savoir  $S_R^P(\omega)$  peut s'écrire [11]:

$$S_R^P(\omega) = \sum_k \sum_I L_k L_I H_k^*(\omega) H_I(\omega) S_{\beta_k \beta_I}(\omega) \quad (5.15)$$

où:

$p$  fait référence au cas d'excitations sismiques partiellement corrélées.

Dans la double sommation précédente seule les parties réelles des produits sont non nulles, alors que les parties imaginaires s'annulent.

L'évaluation des moments spectraux relatifs à la réponse  $R(t)$  requiert, entre autres, l'expression de la densité unilatérale de puissance spectrale  $G_R^P(\omega)$  correspondante définie par:

$$\int_0^{\infty} G_R^P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_R^P(\omega) d\omega \quad (5.16)$$

En vertu des trois équations précédentes on peut écrire:

$$G_R^P(\omega) = 2 \sum_k \sum_I L_k L_I \text{Re}[H_k^*(\omega) H_I(\omega) S_{\beta_k \beta_I}(\omega)] \quad (5.17)$$

Or les moments spectraux de la réponse s'écrivent:

$$\lambda_m^P = \int_0^{\infty} \omega^m G_R^P(\omega) d\omega \quad (5.18)$$

Ainsi, la substitution de (5.17) dans (5.18) donne:

$$\lambda_m^P = \sum_k \sum_l L_k L_l 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \omega^m H_k^*(\omega) H_l(\omega) S_{s_k s_l}(\omega) d\omega \quad (5.19)$$

De manière analogue au cas d'excitation uniforme, soit:

$$\lambda_{m,kl}^P = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \omega^m H_k^*(\omega) H_l(\omega) S_{s_k s_l}(\omega) d\omega \quad (5.20)$$

et donc

$$\lambda_m^P = \sum_k \sum_l L_k L_l \lambda_{m,kl}^P \quad (5.21)$$

où:

$\lambda_{m,kl}^P$  est le  $m^{\text{ème}}$  moment spectral inter-modal associé aux modes  $k$  et  $l$  dans le cas de mouvement sismique non uniforme.

De surcroît le  $m^{\text{ème}}$  coefficient de corrélation alliant les modes  $k$  et  $l$  pour le cas de chargement sismique non uniforme est défini par:

$$e_{m,kl}^P = \frac{\lambda_{m,kl}^P}{\sqrt{\lambda_{m,kk}^P \lambda_{m,ll}^P}} \quad (5.22)$$

L'équation (5.21) s'écrit donc:

$$\lambda_m^P = \sum_k \sum_l L_k L_l e_{m,kl}^P \sqrt{\lambda_{m,kk}^P \lambda_{m,ll}^P} \quad (5.23)$$

De même le moment spectral d'ordre zéro ( $m=0$ ) s'écrit:

$$\lambda_0^P = \sum_k \sum_I L_k L_I e_{0,kl}^P \sqrt{\lambda_{0,kk}^P \lambda_{0,II}^P} \quad (5.24)$$

avec

$$\lambda_{0,kk}^P = \int_0^\infty |H_k(\omega)|^2 G_{g_k}(\omega) d\omega \quad (5.25)$$

Les définitions de  $\lambda_{0,kk}^P$  et  $\lambda_0^P$  sont identiques à celles de  $\lambda_{0,kk}$  et  $\lambda_0$  (données en chapitre 4).

Des formules analogues à (4.22) et à (4.23), peuvent s'écrire pour le cas de mouvements sismiques non uniformes sous la forme suivante:

$$\lambda_0^P = \left[ \frac{\text{Moy}^P(\max(R))}{P^P} \right]^2 \quad (5.26)$$

$$\lambda_{0,kk}^P = \left[ \frac{\text{Moy}^P(\max(y_k))}{P_k^P} \right]^2 \quad (5.27)$$

$P^P$  et  $P_k^P$  sont les facteurs de pic pour le cas de chargement considéré.

Néanmoins, il est démontré en référence [4] sous certaines conditions, que ces derniers peuvent être remplacés par ceux définis dans le cas d'un chargement uniforme.

Ainsi, la substitution de (5.26) et (5.27) dans (5.24) donne.

$$\text{Moy}^P(\max(R)) = \left[ \sum_k \sum_I L_k L_I e_{0,kl}^P \text{Moy}^P(\max(y_k)) \text{Moy}^P(\max(y_I)) \right]^{1/4} \quad (5.28)$$



avec

$$\begin{aligned} \text{Moy}^P(\max(y_k)) &= |\gamma_k| S^P(\omega_k, \beta_k) \\ \text{Moy}^P(\max(y_l)) &= |\gamma_l| S^P(\omega_l, \beta_l) \end{aligned} \quad (5.29)$$

où:

$S^P(\omega, \beta)$  est le modèle du spectre de réponse modifié. Définissons les termes suivants:

$$\begin{aligned} E_k^P &= |\gamma_k| L_k \\ E_l^P &= |\gamma_l| L_l \end{aligned} \quad (5.30)$$

La substitution de (5.30) et de (5.29) dans (5.28) donne:

$$\text{Moy}^P(\max(R)) = \left[ \sum_k \sum_l e_{0,kl}^P E_k^P E_l^P S^P(\omega_k, \beta_k) S^P(\omega_l, \beta_l) \right]^{1/4} \quad (5.31)$$

qui peut éventuellement s'écrire sous la forme:

$$\text{Moy}^P(\max(R)) = \left[ \sum_k \sum_l e_{0,kl}^P \text{Moy}^P(\max(R_k)) \text{Moy}^P(\max(R_l)) \right]^{1/4}$$

où:

$$\begin{aligned} \text{Moy}^P(\max(R_k)) &= E_k^P S^P(\omega_k, \beta_k) \\ \text{Moy}^P(\max(R_l)) &= E_l^P S^P(\omega_l, \beta_l) \end{aligned}$$

Les trois équations précédentes définissent une règle de combinaison modale qui donne la réponse maximale moyenne de structures soumises à des excitations sismiques non uniformes.

### 5.3 DEVELOPPEMENT DES COEFFICIENTS DE CORRELATION MODALE.

En vu de relier les coefficients  $e_{0,kl}^F$  et  $e_{0,kl}$  il est à priori nécessaire d'exprimer  $\lambda_{0,kl}^P$  en fonction de  $\lambda_{0,kl}$ . En effet, à partir de (5.20) nous avons pour  $m=0$ :

$$\lambda_{0,kl}^P = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} H_k^*(\omega) H_l(\omega) S_{\theta_k \theta_l}(\omega) d\omega \quad (5.32)$$

De surcroît, la fonction d'inter-densité de puissance spectrale s'écrit [4]:

$$S_{\theta_k \theta_l}(\omega) = \gamma_k \gamma_l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ki} A_{lj} S_{\theta_i \theta_j}(\omega) \quad (5.33)$$

En vertu de ce qui précède et après quelques transformations,  $\lambda_{0,kl}^P$  devient:

$$\lambda_{0,kl}^P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ki} A_{lj} 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} H_k^*(\omega) H_l(\omega) S_{\theta_i \theta_j}(\omega) d\omega \quad (5.34)$$

Par ailleurs, sur la base des hypothèses adoptées en référence [4], la fonction d'inter-densité de puissance spectrale  $S_{\theta_i \theta_j}(\omega)$  (relative à l'accélération du sol entre les supports  $i$  et  $j$ ) et la fonction d'auto-densité spectrale  $S_{\theta_0}(\omega)$  peuvent être reliées de la manière suivante:

$$S_{\theta_i \theta_j}(\omega) = I_{ij}(\omega, d_{ij}) S_{\theta_0}(\omega) \quad (5.35)$$

où  $r_{ij}$  est la fonction de cohérence entre les stations  $i$  et  $j$ .

Soit alors:

$$r_{ijkl} = \frac{2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} H_k^*(\omega) H_l(\omega) S_{a_i a_j}(\omega) d\omega}{\lambda_{0,kl}} \quad (5.36)$$

Ainsi, en remplaçant (5.36) dans (5.34) on aboutit à:

$$\lambda_{0,kl}^p = \gamma_k \gamma_l \lambda_{0,kl} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ki} A_{lj} r_{ijkl} \quad (5.37)$$

Finalement la substitution de (5.37) dans (5.22) pour  $m=0$  conduit à:

$$e_{0,kl}^p = \frac{\lambda_{0,kl}}{\sqrt{\lambda_{0,kk} \lambda_{0,ll}}} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ki} A_{lj} r_{ijkl}}{\left\{ \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ki} A_{kj} r_{ijkk} \right) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{li} A_{lj} r_{ijll} \right) \right\}^{1/2}} \quad (5.38)$$

où:

$$e_{0,kl} = \frac{\lambda_{0,kl}}{\sqrt{\lambda_{0,kk} \lambda_{0,ll}}}$$

Notons que  $r_{ijkk}$  peut éventuellement s'écrire sous la forme suivante (en utilisant (5.36)):

$$\begin{aligned}
I_{ijkk} &= \frac{2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} |H_k(\omega)|^2 S_{\theta_i \theta_j}(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} |H_k(\omega)|^2 S_{\theta_0}(\omega) d\omega} \\
\rightarrow I_{ijkk} &= \frac{\int_0^{\infty} \rho_{ij} |H_k(\omega)|^2 G_{\theta_0}(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} |H_k(\omega)|^2 G_{\theta_0}(\omega) d\omega} \quad (5.39)
\end{aligned}$$

où:

$\rho_{ij}$  est le coefficient de corrélation spatiale (du mouvement sismique considéré) à dépendance fréquentielle, entre les stations  $i$  et  $j$ . Il représente la partie réelle de la fonction de cohérence  $r_{ij}$ .

En vertu de [4] et [5] on peut écrire:

$$\begin{aligned}
I_{ijkk} &= \rho_{ijk} \\
I_{ijll} &= \rho_{ijl} \quad (5.40)
\end{aligned}$$

$\rho_{ijk}$  ( $\rho_{ijl}$ ) est le coefficient de corrélation spatiale entre les réponses relatives de deux oscillateurs identiques  $(\omega_k, \beta_k)$  ( $(\omega_l, \beta_l)$ ) soumis à  $\ddot{u}_i(t)$  et  $\ddot{u}_j(t)$  respectivement. On obtient finalement:

$$e_{0,kl}^p = e_{0,kl} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ki} A_{lj} I_{ijkl}}{\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ki} A_{kj} \rho_{ijk} \right) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{li} A_{lj} \rho_{ijl} \right)} \quad (5.41)$$

L'expression précédente exprime les coefficients de corrélation inter-modaux correspondant aux cas d'excitations sismiques non uniformes, en fonction de leurs homologues correspondant au cas uniforme.

#### CAS EXTREMES

Il serait sans doute intéressant d'examiner les cas extrêmes de l'équation (5.41). En effet deux situations particulières peuvent être envisagées.

1. Cas où les mouvements des supports sont entièrement corrélés. C'est à dire tous les  $r_{ij,kl} = 1$ . Par conséquent (5.43) s'écrit:

$$e_{0,kl}^p = e_{0,kl} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ki} A_{lj}}{\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ki} A_{kj} \right) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{li} A_{lj} \right)^{1/2}}$$

et donc

$$e_{0,kl}^p = e_{0,kl}$$

2. Cas où les mouvements des supports sont mutuellement non corrélés. C'est à dire  $r_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ).

A partir de (5.41) nous avons:

$$\lambda_{0,kl}^P = \sum_{I=1}^n A_{kl} A_{II} \lambda_{0,kl}$$

On démontre en référence [4] que dans ce cas:

$$e_{0,kl}^P \leq e_{0,kl}$$

# Chapitre 6

## Etude Numérique

### 6.1 INTRODUCTION.

La règle de combinaison modale présentée en chapitre 5 est un moyen direct destiné au calcul de réponses de systèmes structuraux dans le cas d'excitations sismiques variant spatialement. Son expression mathématique est donnée par l'équation suivante:

$$\text{Moy}^P(\max(R)) = \left[ \sum_K \sum_I \epsilon_{0,kl}^P \text{Moy}^P(\max(R_k)) \text{Moy}^P(\max(R_l)) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Cette dernière dépend étroitement des coefficients de corrélation inter-modaux  $\epsilon_{0,kl}^P$  qui permettent de mesurer la dépendance statistique alliant les réponses modales; ils s'écrivent:

$$\epsilon_{0,kl}^P = \epsilon_{0,kl} \frac{\sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n A_{kI} A_{lJ} r_{IJKl}}{\left( \left( \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n A_{kI} A_{kJ} \rho_{IJK} \right) \left( \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n A_{lI} A_{lJ} \rho_{IJl} \right) \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Il est bien entendu que toute variation des coefficients  $\epsilon_{0,kl}^P$  se répercutera évidemment sur la règle de combinaison (donnée ci dessus). Subséquemment, l'étude de la combinaison modale revient, en partie, à l'étude des

coefficients  $e_{0,kl}^p$  et de leur variation éventuelle.

En effet, l'équation précédente montre que les coefficients  $e_{0,kl}^p$  dépendent non seulement des caractéristiques modales propres  $(\omega_k, \beta_k)$ , mais aussi d'autres paramètres potentiels tels que les coefficients  $A_{kl}, A_{lj}$  qui caractérisent les propriétés structurales et la fonction de cohérence qui mesure, entre autres, les caractéristiques spatiales du phénomène de propagation des ondes sismiques.

Ainsi, le présent chapitre se penchera sur l'étude numérique paramétrique des coefficients  $e_{0,kl}^p$ . Pour ce faire, les paramètres considérés dans l'étude numérique sont passés en revue succinctement dans les paragraphes subséquents.

## 6.2 PARAMETRES CONSIDERES ET HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES.

- En effet, les coefficients  $e_{0,kl}^p$  se démarquent des coefficients  $e_{0,kl}$  développés dans le cas uniforme (chapitre 4), par le fait qu'ils tiennent compte explicitement de l'incohérence que peuvent subir les ondes sismiques sous certaines conditions.

La perte de cohérence peut être quantifiée mathématiquement par le biais de la fonction de cohérence. Différents modèles analytiques de cette fonction ont été développés lors de travaux antérieurs. Leur élaboration est le résultat du traitement statistique d'enregistrements d'événements sismiques correspondant principalement à des mouvements forts ayant eu lieu sur des sites particuliers, aménagés par des réseaux denses de mesure.



Le site de *Lotung* (à *Taiwan*) est l'un des sites les plus étudiés dans le monde. Plusieurs événements sismiques ayant engendré des mouvements forts ont traversé ce site. Quelques uns de ces événements ont fait l'objet d'études détaillées visant notamment leur caractérisation spatio-temporelle. Par ailleurs, ceci a conduit à l'établissement de différents modèles de fonctions de cohérences correspondant à différents événements sismiques et caractérisant particulièrement des champs aléatoires spatio-temporel homogènes. Parmi ces modèles, ceux établis respectivement par Loh et Yeh [26], Luco et Wong [15], Harichandran et Vanmarcke [20] , sont donnés par les expressions ci dessous:

$$r(\omega, d_{ij}) = \exp \left[ -\alpha \frac{\omega |d_{ij}|}{2\pi V_s} \right] \exp \left[ i \frac{\omega d_{ij}}{V_s} \right]$$

$$r(\omega, d_{ij}^1) = \exp \left[ -\left( \frac{\alpha \omega d_{ij}^1}{V_s} \right)^2 \right] \exp \left[ i \frac{\omega d_{ij}^1}{V_{app}} \right]$$

$$r(\omega, d_{ij}) = \left( A \exp \left[ -\frac{2d_{ij}}{\alpha \theta(\omega)} (1-A+\alpha A) \right] + (1-A) \exp \left[ -\frac{2d_{ij}}{\theta(\omega)} (1-A+\alpha A) \right] \right) \exp \left[ i \frac{\omega d_{ij}}{V_s} \right]$$

$$\text{avec} \quad \theta(\omega) = k \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^b \right]^{-1/k}$$

où

$d_{ij}$  représente la distance horizontale entre les stations  $i$  et  $j$ .

$d_{ij}^1$  représente la projection de  $d_{ij}$  selon la direction longitudinale de propagation des ondes sismiques.

$V_s$  représente la vitesse de cisaillement du milieu de propagation.

$V_{app}$  représente la vitesse apparente des ondes sismiques à la surface du sol.  $\alpha, A, k, b$  et  $\omega_0$  sont des facteurs d'incohérence qui dépendent de l'événement étudié.

Dans les expressions précédentes, le terme  $\exp(i\omega d/V)$  tient compte de l'effet de passage d'onde (*Wave Travelling Effect: WTE*), alors que l'effet d'incohérence (*INC*) est pris en compte à travers le terme faisant intervenir la fonction exponentielle décroissante.

Les modèles de cohérence susmentionnés dépendent, entre autres, de la fréquence et de la distance (fig. 6.1, fig. 6.2, fig. 6.3, fig. 6.4). Le site de *Lotung* pour lequel ces modèles ont été établis, compte tenu de sa structure topographique latérale stratifiée [9], exhibe une distribution homogène de la vitesse de propagation latérale, ce qui d'ailleurs peut justifier le comportement des courbes précédentes.

Les expressions font également intervenir la vitesse de cisaillement du sol, qui caractérise le type de sol traversé par les ondes sismiques.

- Par ailleurs, l'énergie que transportent les ondes sismiques lors de leur propagation dans un site donné, peut être représentée analytiquement par la densité spectrale de puissance unilatérale  $G_{v_0}(\omega)$ . Cette dernière décrit l'input sismique dans le domaine fréquentiel. Elle intervient, au même titre que  $r_{I,J}(\omega, d_{IJ})$  dans l'expression de  $e_{0,kI}^p$ . Il est donc certain que l'inter-corrélation modale sera influencée par la forme de  $G_{v_0}(\omega)$ . En effet, l'input

sismique peut être représenté par le biais d'un bruit blanc (WN), ce qui mathématiquement s'écrit  $G_{a_0}(\omega) = cst$ . Cette représentation est la plus directe, vu qu'au niveau de la source du séisme toutes les fréquences sont supposées être présentes et participer avec la même amplitude spectrale. Néanmoins, les enregistrements effectués en surface ne s'accordent pas avec l'hypothèse précédente. Physiquement, ceci peut s'expliquer par le fait que le parcours effectué par les ondes sismiques de la source à la surface du sol joue le rôle de filtre, qui compte tenu de ses caractéristiques physiques intrinsèques peut, soit amplifier soit amortir les fréquences qui le traversent. Par conséquent, une densité spectrale de type *Kanai-Tajimi* (filtre simple) dont l'expression est donnée par l'équation (6.1), constitue une représentation plus réaliste du signal sismique à la surface du sol.

$$G_{a_0}(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} G_0 \quad (6.1)$$

où  $G_0$  est une constante.

$\omega_g$  et  $\xi_g$  sont respectivement la fréquence angulaire et le facteur d'amortissement du filtre.

Les différentes valeurs que peuvent prendre les paramètres précédents, permettent de balayer différents types de sol (différents filtres), (fig. 6.5, fig. 6.6). A titre d'exemple,  $\omega_g = 15 \text{ rd/s}$  et  $\xi_g = 0.6$  caractérisent un sol ferme, alors que  $\omega_g = 5 \text{ rd/s}$  et  $\xi_g = 0.2$  caractérisent un sol mou.

Il est à noter qu'en Génie-Parasismique  $\omega_g = 5\pi$  et  $\xi_g = 0.6$  sont des valeurs communément adoptées pour modéliser le processus d'accélération du sol, ce qui correspond à un bruit blanc filtré (*Filtred White Noise, or FWN*).

• Le troisième facteur intervenant dans l'expression de  $e_{0,kl}^p$  est le coefficient  $e_{0,kl}$  établi pour le cas uniforme. Rappelons que  $e_{0,kl}^p$  est une correction de  $e_{0,kl}$ .

Avant d'entamer l'étude paramétrique proprement dite, il est utile de rappeler les cas pratiques pour lesquels les applications ont été effectuées.

Les applications seront consacrées au cas d'une seule composante horizontale du mouvement du sol. En particulier, le cas d'une structure en portique à une seule travée et à  $n$  niveaux sera considéré (fig. 6.7). Pour des raisons pratiques nous pouvons supposer que le portique a un comportement analogue à celui d'une poutre en cisaillement, ce qui revient à négliger les déformations axiales dans les colonnes (poteaux) et à supposer que les planchers sont infiniment rigides. Par ailleurs, pour des raisons de simplicité les rigidités des poteaux seront supposées égales. Par conséquent, l'évaluation des coefficients  $A_{kl}, A_{lj}$  s'avère non nécessaire dans le cadre de notre application (modèle de structure précédent) et ceci pour des raisons liées aux hypothèses précédentes. En effet, leur simplification ( $A_{kl}, A_{lj}$ ) de l'équation donnant  $e_{0,kl}^p$  est bien justifiée [6], en vertu de quoi:

$$e_{0,kl}^p = e_{0,kl} \frac{\sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \gamma_{Ijkl}}{\left( \left( \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \rho_{Ijk} \right) \left( \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \rho_{Ijl} \right) \right)^{1/2}} \quad (6.2)$$

### 6.3 APPLICATION NUMERIQUE.

L'étude paramétrique portera sur les coefficients  $e_{0,kl}^p$  tels qu'ils sont donnés par l'équation précédente.

Il convient de rappeler que l'intégration numérique des intégrales intervenant dans les coefficients  $r_{ijkl}$ ,  $\rho_{ijk}$ ,  $\rho_{ijl}$  est faite selon la méthode des Trapèzes Améliorée [29].

#### 6.3.1 CAS D'UN BRUIT BLANC.

Le premier volet de l'étude numérique se penchera sur le cas d'un input sismique décrit par une densité spectrale de puissance  $G_{\alpha_0}(\omega) = cst$ , c'est à dire un bruit blanc (WW). Des valeurs du pourcentage d'amortissement critique modal relativement faibles allant de 1% à 5% seront adoptées dans ce qui suit, ce qui d'ailleurs reflète les cas très souvent rencontrés en pratique.

##### 6.3.1.1 EFFETS COUPLES DE L'INCOHERENCE ET DU PASSAGE D'ONDE.

Les figures 6.8, 6.9, 6.10 et 6.11 visent à illustrer l'effet d'un input sismique non uniforme sur l'inter-corrélation modale. La fonction de cohérence adoptée (WTE et INC) est celle correspondant au modèle de Luco et Wong ( $\alpha = 0.1$ ). En effet, ces figures représentent les variations de  $e_{0,kl}^p$ , de  $e_{0,kl}$  et du rapport  $e_{0,kl}^p/e_{0,kl}$  en fonction de la fréquence modale  $f_k$  ( $f_k = \omega_k/2\pi$ ) qui varie de 0.5 hz à 20hz ( $\pi \leq \omega_k \leq 40\pi$ ) et pour des

rapports de pulsations modales fixes  $\omega_k/\omega_1 = 2$  et  $\omega_k/\omega_1 = 4$ . Comme on peut le constater les deux coefficients présentent des allures différentes. En d'autres termes, alors que le coefficient  $e_{0,kl}$  établi pour le cas uniforme prend une valeur constante presque nulle son homologue  $e_{0,kl}^p$  a un comportement différent.

Les valeurs (faibles) de l'amortissement modal adoptées, peuvent justifier les valeurs relativement faibles obtenues pour  $e_{0,kl}^p$ . Il convient de rappeler que des résultats analogues (fig.6.8 et fig.6.9) aux précédents ont été établis en référence [6] pour le modèle de Loh et Yeh.

Par ailleurs, dans les figures 6.12 et 6.13 les coefficients d'inter-corrélation  $e_{0,kl}^p$  sont représentés pour différentes valeurs de la distances  $d_{ij}$  ( $D$  entre appuis) et de la vitesse  $V_s$  ( $V$ ), pour le même modèle de la fonction de cohérence (Loh et Yeh avec  $\alpha=0.125$  et  $\omega_k/\omega_1 = 2$ , *INC et WTE*). Néanmoins bien que l'ordre de grandeur atteint par  $e_{0,kl}^p$  soit le même pour les différentes valeurs de la distance (éventuellement de la vitesse) considérées, il n'en demeure pas moins que sa variation est plus rapide pour les grandes distances que pour les faibles (fig. 6.12). Toutefois, ce résultat est inversé lorsqu'il s'agit de la vitesse (fig. 6.13). Ces résultats sont une conséquence de la présence du terme  $\cos \omega d/V$ . Les même constatations peuvent être déduites des figures 6.14 et 6.15 qui sont analogues à 6.12 et à 6.13 respectivement dans la mesure où seul le rapport  $\omega_k/\omega_1$  diffère ( $\omega_k/\omega_1 = 4$  au lieu de 2).

De même les figures 6.16 et 6.17 sont données pour une fréquence  $f_1$  de valeur fixe ( $f_1=4\text{hz}$ ). Il est vrai que le pic de corrélation (c'est à dire 1) est atteint (lorsque  $f_1=f_k=4\text{hz}$ ) quels que soient  $D$  ou  $V$  et que les valeurs de  $e_{0,k1}^p$  s'atténuent au delà de ce pic, cependant la variation de  $e_{0,k1}^p$  de part et d'autre de la fréquence  $f_1$  (fixe) relativement aux valeurs de  $V$  et de  $D$  est plus ou moins aléatoire. Ceci peut bien être attribué à la forme de la fonction de cohérence (qui est le produit d'une fonction exponentielle décroissante et d'une fonction cosinus périodique, toutes les deux faisant intervenir le rapport  $D/V$ ).

La figure 6.18 représente la variation des coefficients  $e_{0,k1}^p$  en fonction du rapport  $\omega_k/\omega_1$ , dans le cas d'un bruit blanc ( $WN$ ), pour différentes valeurs de l'amortissement modal. On observe que le coefficient d'inter-corrélation modale diminue rapidement lorsque les deux fréquences s'éloignent l'une de l'autre, particulièrement pour de faibles valeurs de l'amortissement.

Les figures 6.19, 6.20 et 6.21 ont pour but principal la comparaison entre les effets induits par les trois modèles de fonction de cohérence adoptés dans l'étude. Globalement, les coefficients  $e_{0,k1}^p$  obtenus en considérant le modèle de Loh et Yeh ( $\alpha = 0.125$ ) sont plus grands que ceux obtenus sous l'effet des modèles de Luco et Wong ( $\alpha = 0.1$ ) et de Harichandran et Vanmarcke ( $A = 0.736$ ,  $\alpha = 0.147$ ,  $b = 2.78$ ,  $k = 5210$ ,  $f_0 = 1.09 = \omega_0/2\pi$ ). Ceci peut bien être attribué au fait qu'il y a une perte de cohérence beaucoup plus rapide dans ces deux derniers que dans le premier (voir figure 6.4).

### 6.3.1.2 EFFETS SEPARES DE L'INCOHERENCE ET DU PASSAGE D'ONDE.

IL convient à la suite de ce qui précède de s'intéresser aux effets séparés de l'incohérence (*INC*) et du passage d'onde (*WTE*) sur l'inter-corrélation modale. Ainsi, les figures 6.22, 6.23, 6.24 et 6.25, montrent que pour des rapports  $\omega_k/\omega_l$  fixes, pour les trois modèles de fonction de cohérence adoptées, que les coefficients  $e_{0,kl}^p$  sont relativement amplifiés (particulièrement lorsque  $\omega d/V$  est un multiple impair de  $\pi$ ) lorsque seul le *WTE* est considéré (résultat prévisible dans la mesure où le mouvement est supposé parfaitement cohérent; l'*INC* est négligée). A contrario ces mêmes coefficients diminuent considérablement lorsque la vitesse de propagation des ondes sismiques est supposée infinie (*WTE* est négligé) et que uniquement l'effet d'incohérence est pris en compte.

Les figures 6.26 et 6.27 illustrent la variation de l'inter-corrélation modale en fonction du degré de corrélation spatiale ( $\alpha$ ). Le modèle de fonction de cohérence adopté est celui de Luco et Wong ( $\beta_k = \beta_l = 5\%$ ), ce qui permet de faire varier le degré de corrélation spatiale. Ainsi, on peut globalement constater que l'incohérence réduit uniformément les valeurs du coefficient d'inter-corrélation modale. Il convient de noter (à partir des figures 6.26 et 6.27) que les valeurs de  $e_{0,kl}^p$  sont toujours positives en absence du passage d'onde (*WTE*).



### 6.3.2 CAS D'UN BRUIT BLANC FILTRÉ.

La deuxième partie de cette étude numérique traitera le cas où l'accélération du sol est caractérisée par une densité spectrale de type *Kanai-Tajimi* c'est à dire un bruit blanc filtré (*FWN*). Les paramètres du filtre sont fixés à  $\xi_g = 0.6$  et à  $\omega_g = 5\pi$ .

A partir des figures 6.28, 6.29, 6.30 et 6.31 on peut globalement constater qu'un input sismique de type *FWN* diminue les coefficients  $e_{0,kl}^p$  (relativement à ceux obtenus pour un input de type *WN*). Néanmoins, les coefficients restent supérieurs à ceux obtenus dans le cas uniforme. Similairement au cas du *WN*, le modèle de Loh et Yeh engendre des coefficients supérieurs à ceux engendrés par les deux autres modèles de fonction de cohérence considérées.

Par ailleurs, la comparaison des coefficients de corrélation  $e_{0,kl}^p$  pour différentes valeurs de l'amortissement modal et pour différents types d'input (*WN* et *FWN*) est donnée en figures 6.32, 6.33 et 6.34. Remarquons que les valeurs de  $e_{0,kl}^p$  diminuent rapidement lorsque les valeurs des fréquences angulaires modales  $\omega_k$ ,  $\omega_l$  s'écartent l'une de l'autre, notamment dans le cas d'amortissements modaux faibles. En outre, on peut constater que les coefficients  $e_{0,kl}^p$  obtenus pour les deux types d'input gardent des valeurs presque égales si toutefois les fréquences angulaires  $\omega_k$  et  $\omega_l$  ne sont pas à l'extérieur (éloignés) de la bande fréquentielle qui domine le spectre de l'input sismique comme c'est d'ailleurs le cas dans la figure 6.34 où  $\omega_k$  et  $\omega_l$  ont des valeurs supérieures à celle de  $\omega_g$ .

Les figures 6.35 et 6.36 représentent la variation de  $e_{0,k1}^p$  en fonction de  $\omega_k/\omega_g$  pour différentes valeurs du rapport  $\omega_1/\omega_g$  et du paramètre  $\xi_g$  qui caractérise la largeur de bande du spectre de l'input. Notons que l'amortissement critique est fixé dans ce cas à  $\beta_k = \beta_1 = 0.05$ . De surcroît,  $\xi_g = 0.6$  indique un input de type large bande (*Wide Band or WB*) alors que  $\xi_g = 0.2$  indique un input de type bande étroite (*Narrow Band or NB*). Il est clair qu'un input *NB* a une profonde influence sur l'inter-corrélation modale particulièrement sur les modes ayant des fréquences supérieures à celles qui dominent le spectre de l'input. On constate que ces modes sont fortement corrélés. En effet, les modes élevés répondent essentiellement de manière statique à un input à bande étroite (*NB*) ce qui induit des composantes de réponse  $y_k(t)$  en phase.

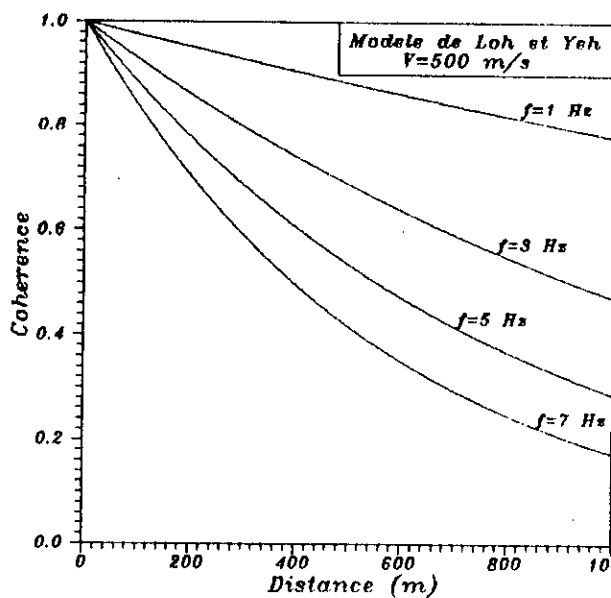
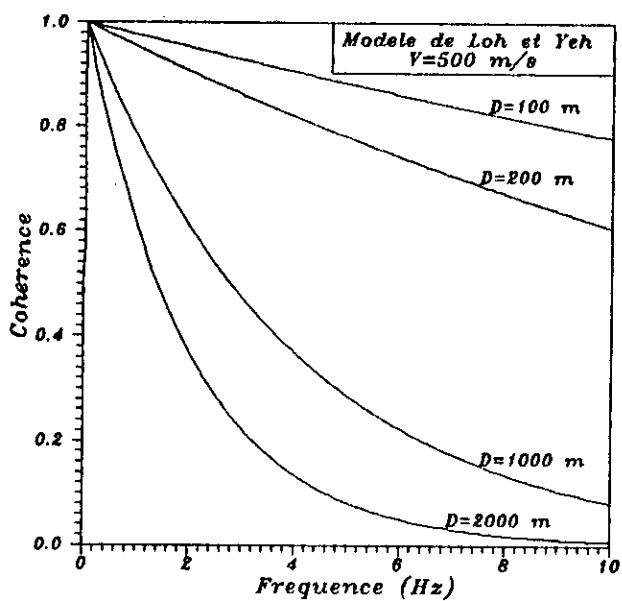


Figure 6.1. Variation de la Coherence en fonction de la Distance et de la Frequence.

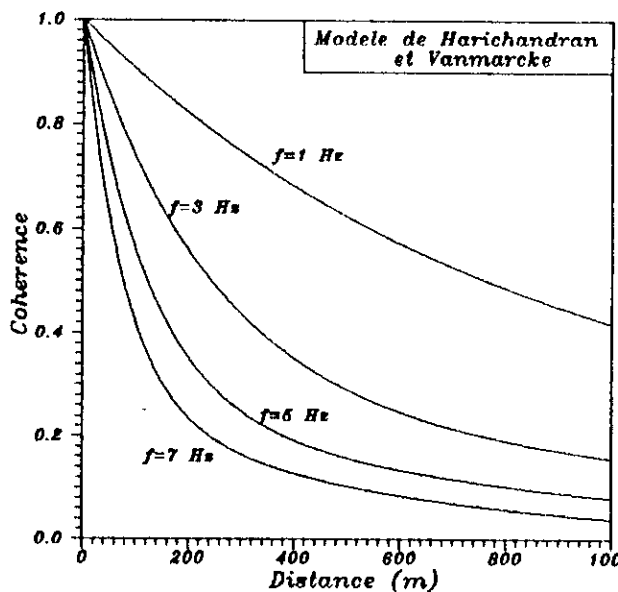
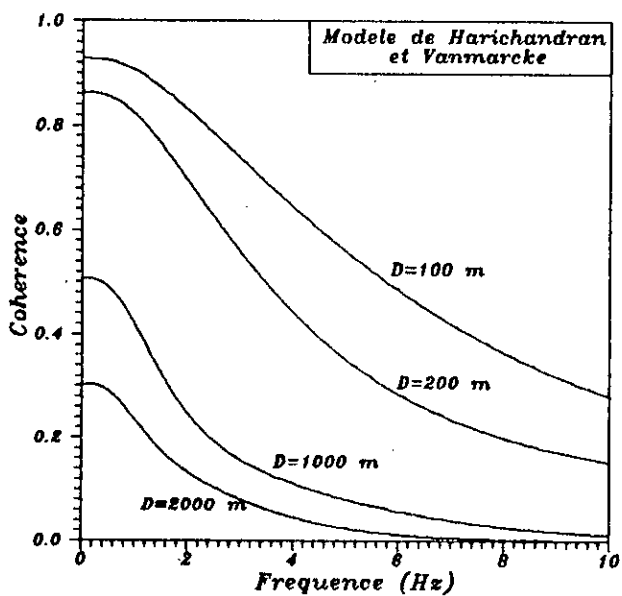


Figure 6.2. Variation de la Coherence en fonction de la Distance et de la Frequence.

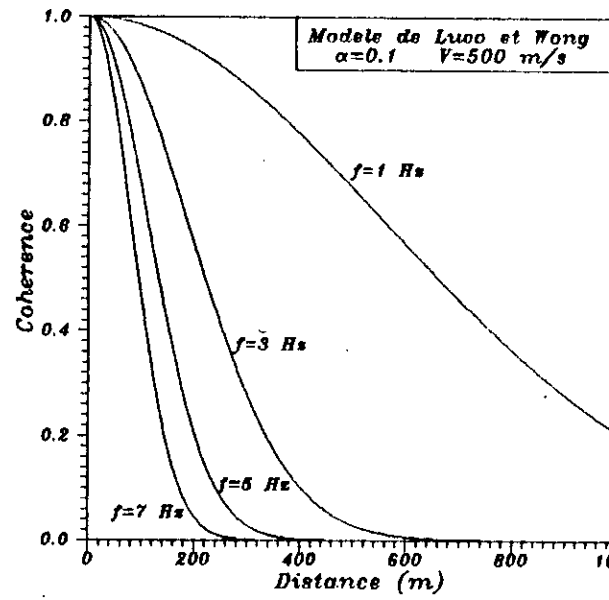
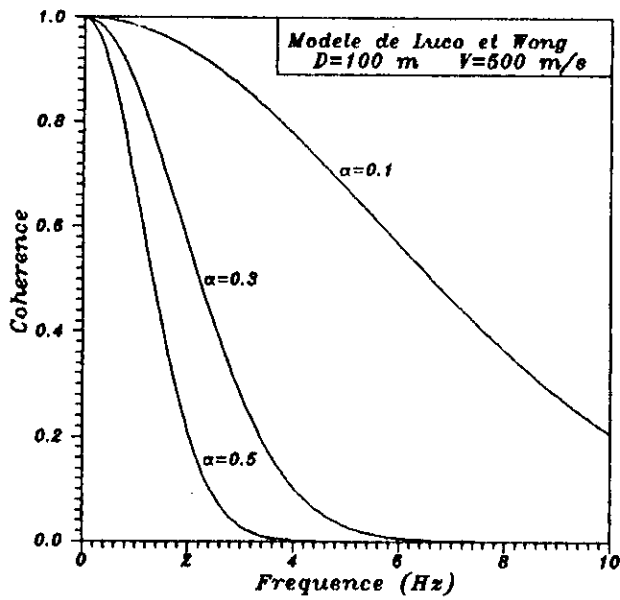


Figure 6.3. Variation de la Coherence en fonction de la Distance et de la Frequence.

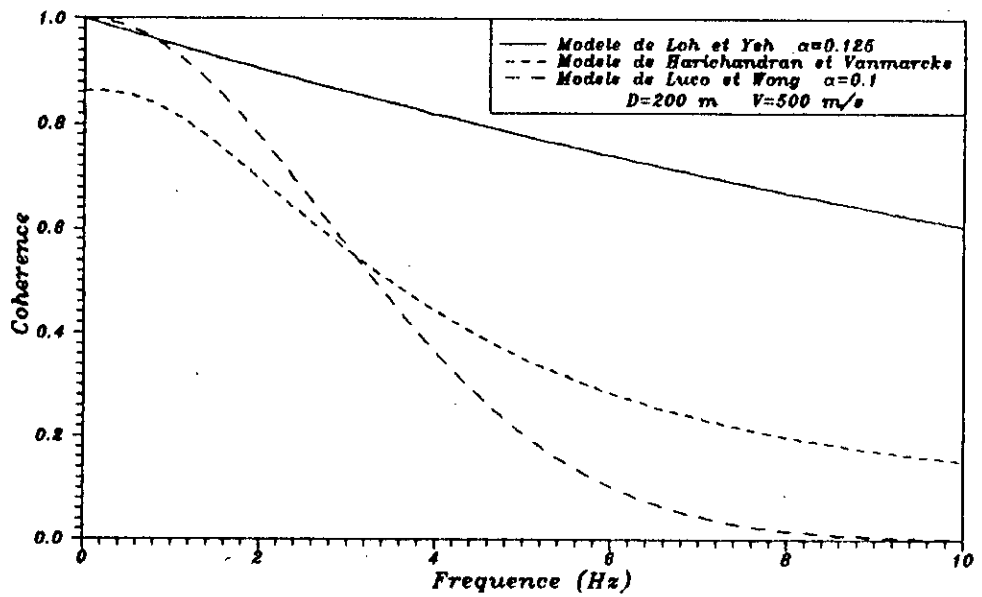


Figure 6.4. Variation de la Coherence en fonction de la Frequence.

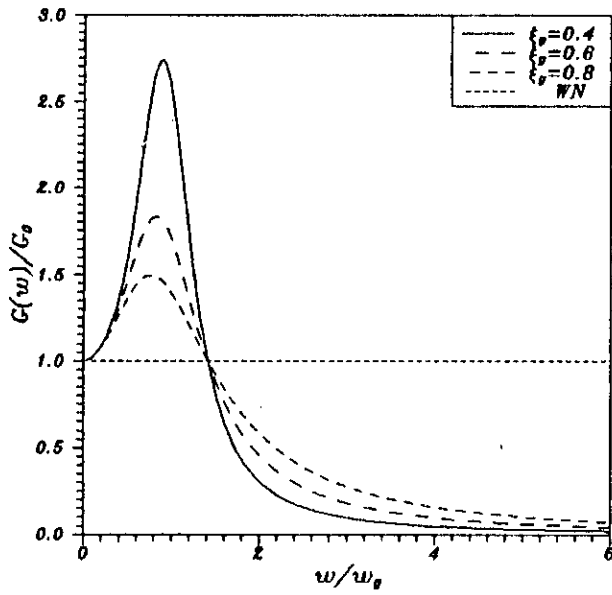


Figure 6.5. Formes de la Densité Spectrale pour un Bruit Blanc et un Bruit Blanc Filtré.

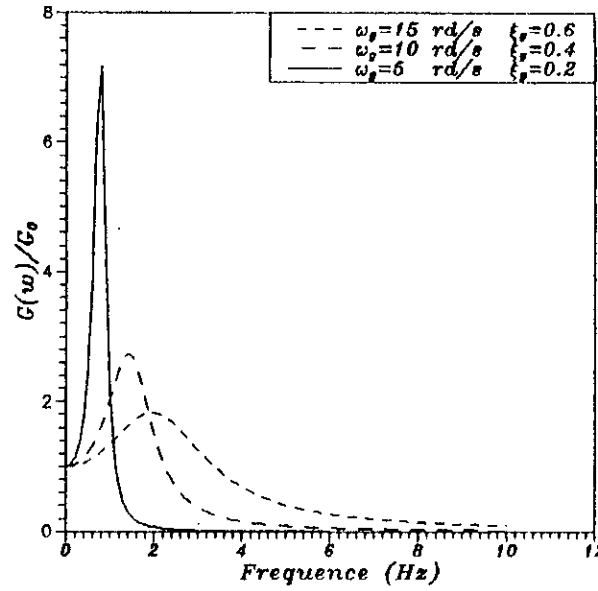


Figure 6.6. Densités Spectrales de l'Accélération du Sol pour Trois Conditions Différentes.

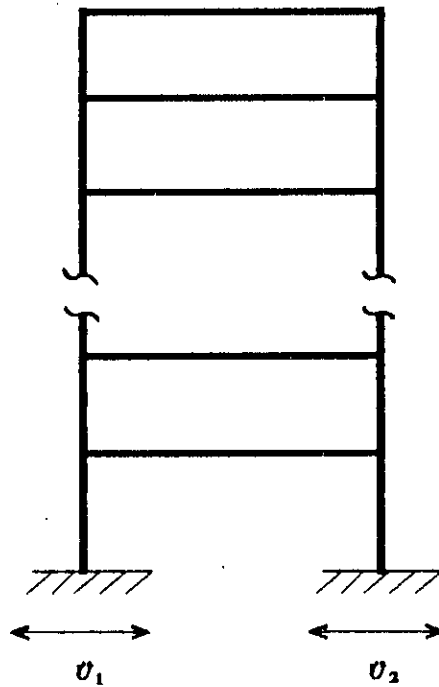


Figure 6.7

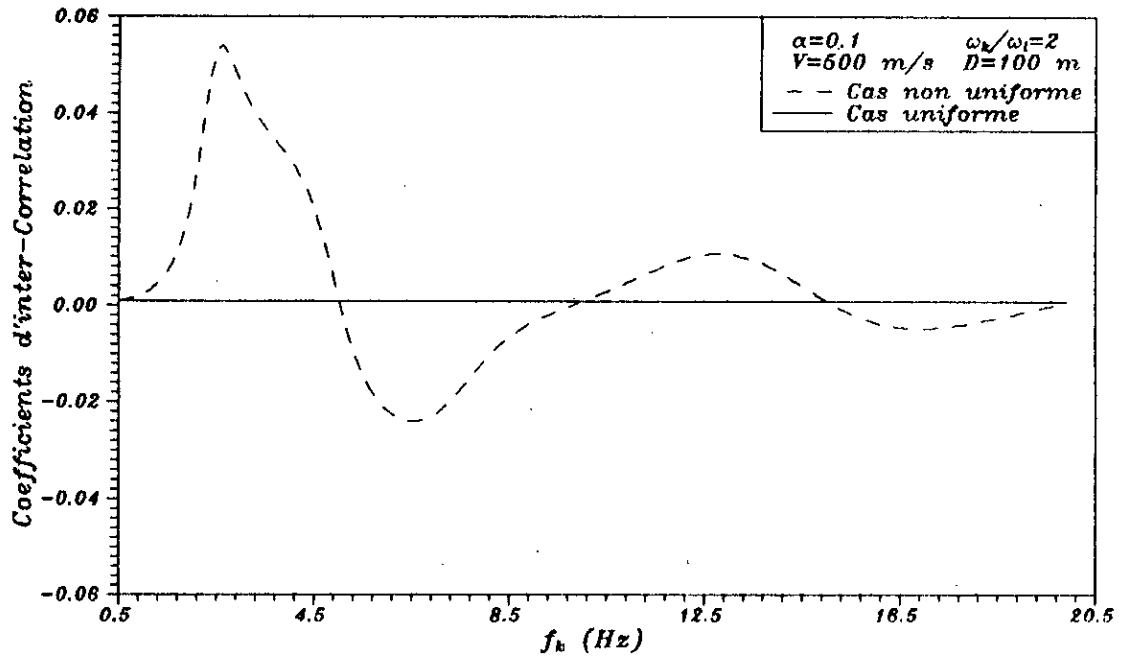


Figure 6.8. Coefficients d'Inter-Correlation Modale.

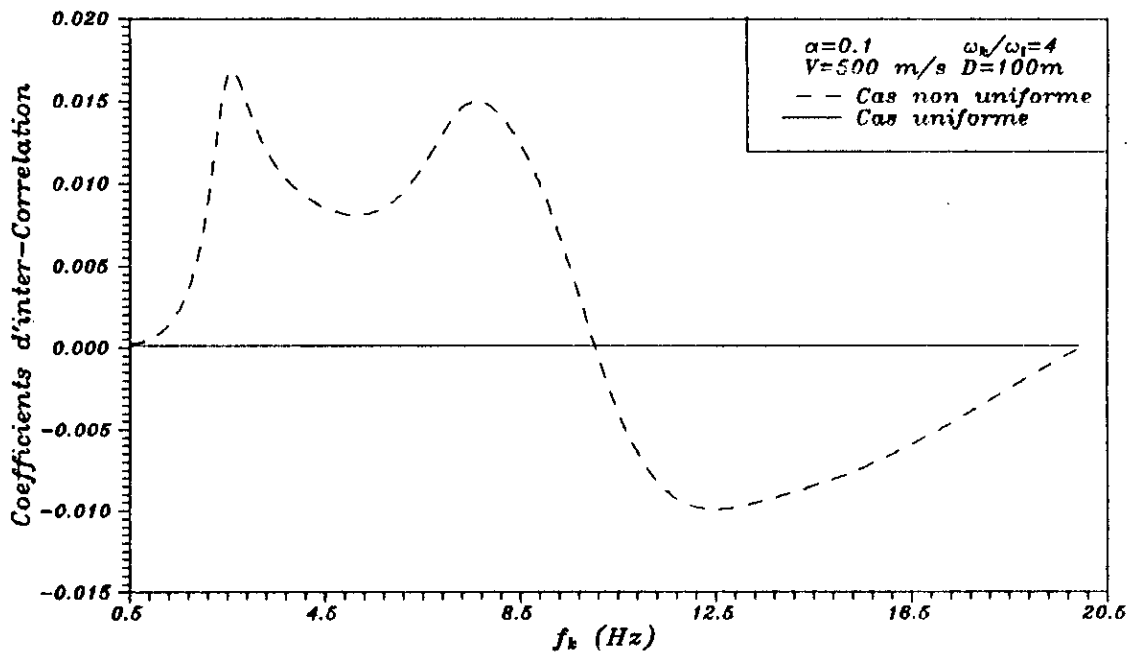


Figure 6.9. Coefficients d'Inter-Correlation Modale.

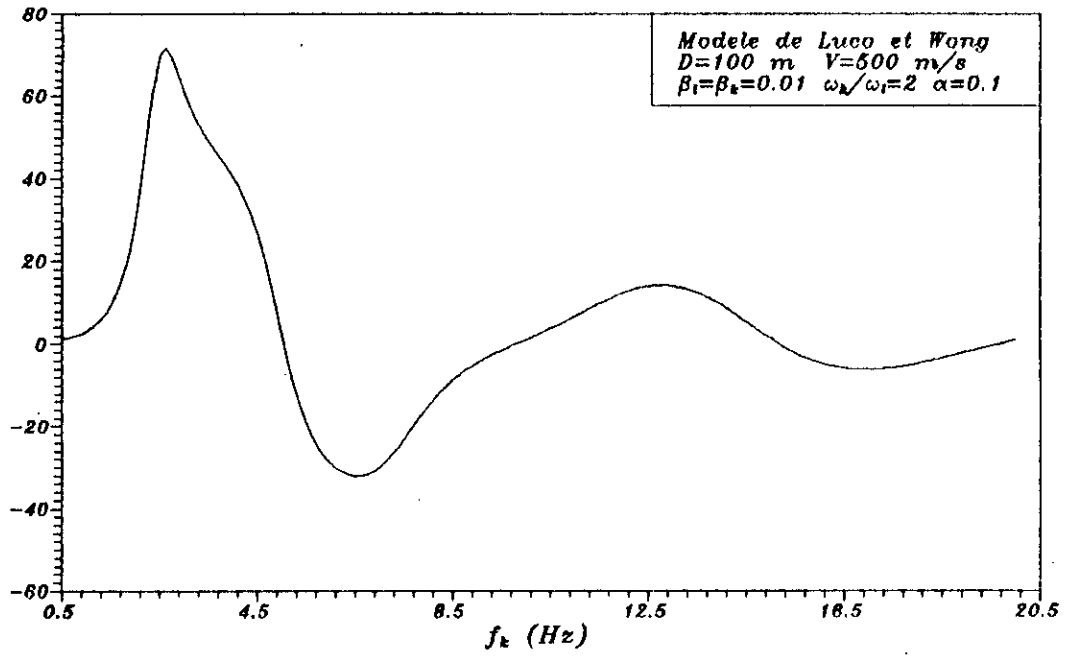


Figure 6.10. Rapport des Coefficients d'Inter-Correlation Modale.

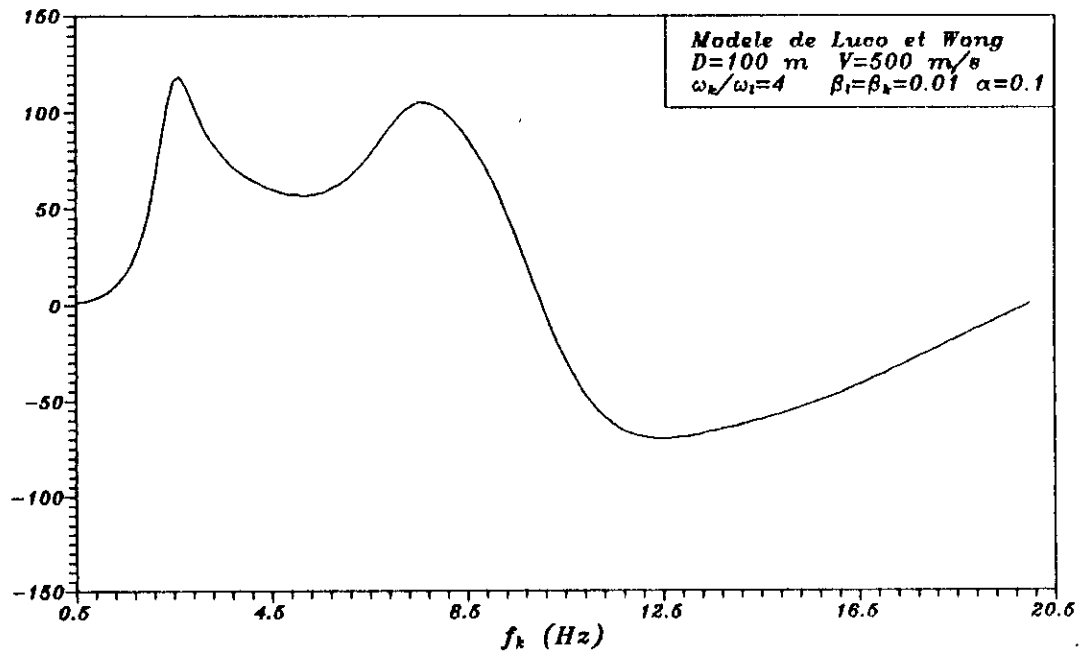


Figure 6. 11. Rapport des Coefficients d'Inter-Correlation Modale.

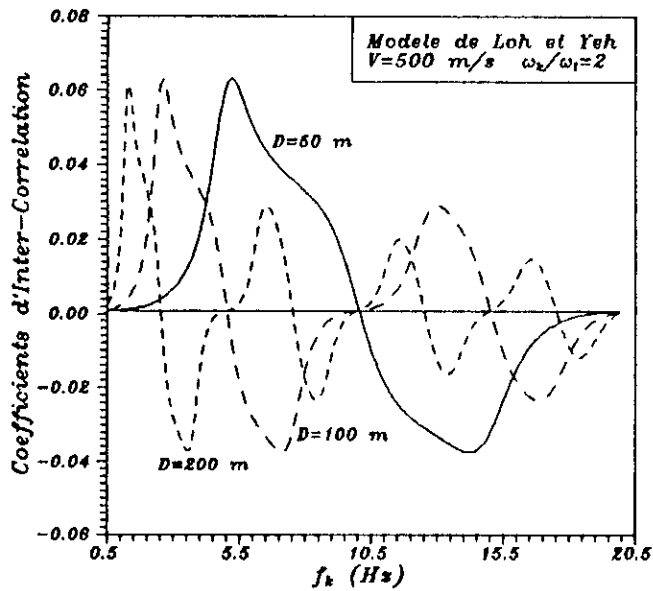


Figure 6.12. Coefficients d'Inter-Correlation pour des Distances Variables.

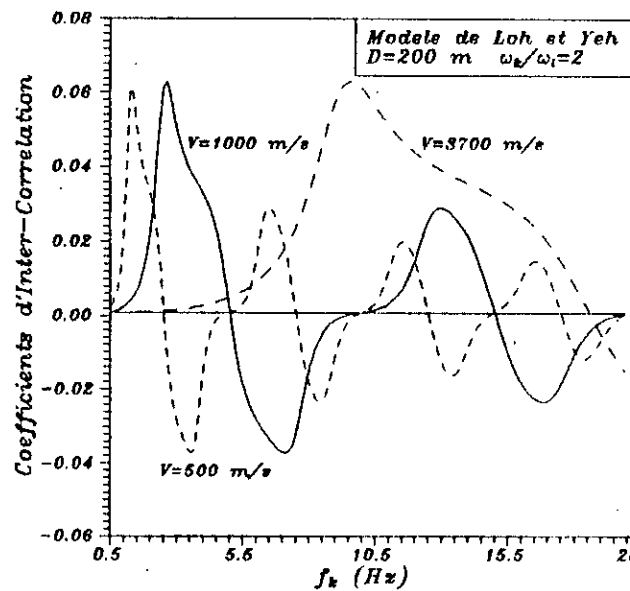


Figure 6.13. Coefficients d'Inter-Correlation pour des Vitesses Variables.

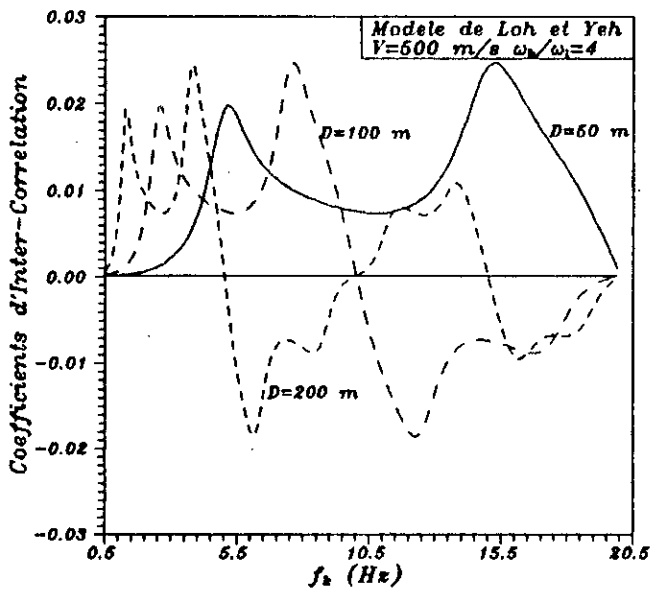


Figure 6.14. Coefficients d'inter-Correlation pour des Distances Variables.

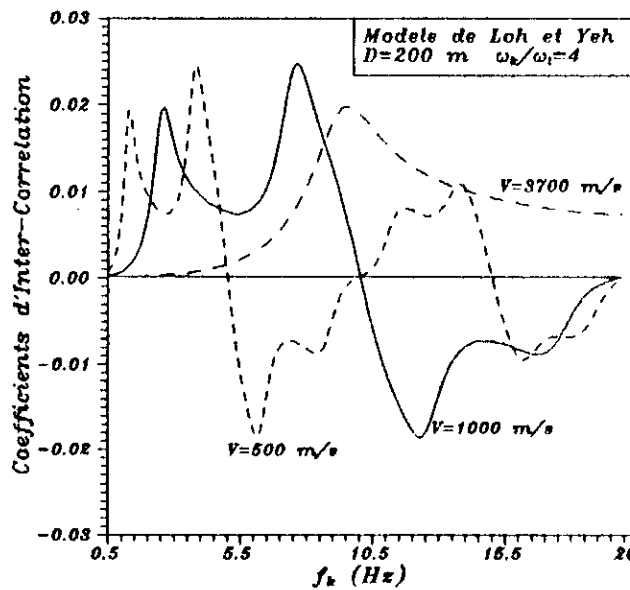


Figure 6.15. Coefficients d'Inter-Correlation pour des Vitesses Variables.



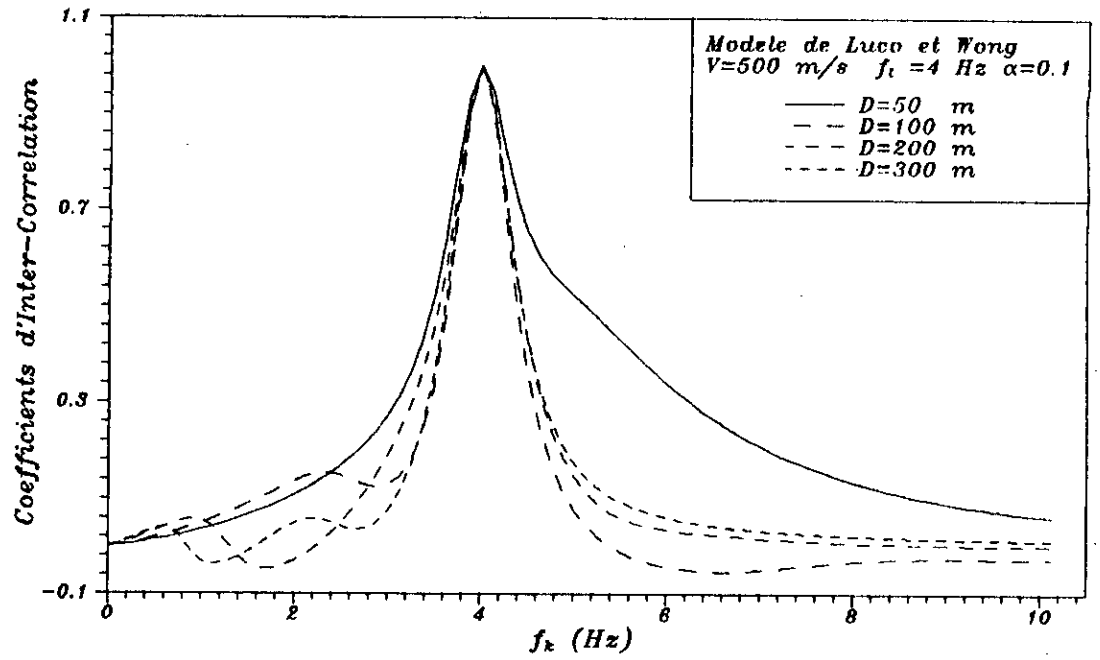


Figure 6.16. Inter-Correlation Modale pour Differentes Valeurs de la Distance.

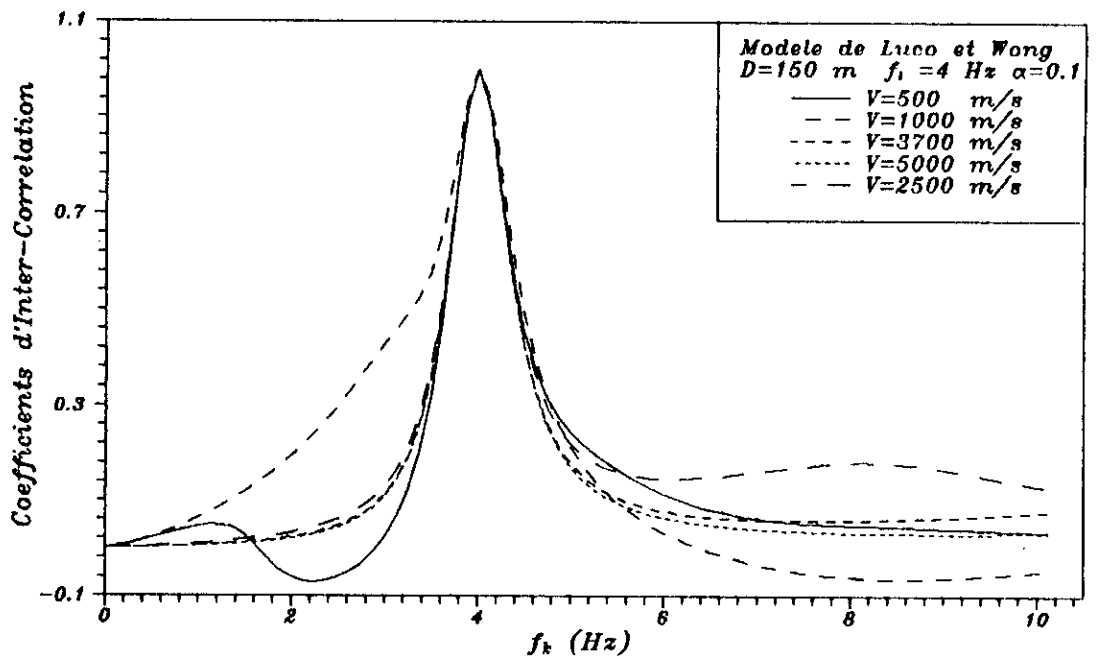


Figure 6.17. Inter-Correlation Modale pour Differentes Valeurs de la Vitesse.

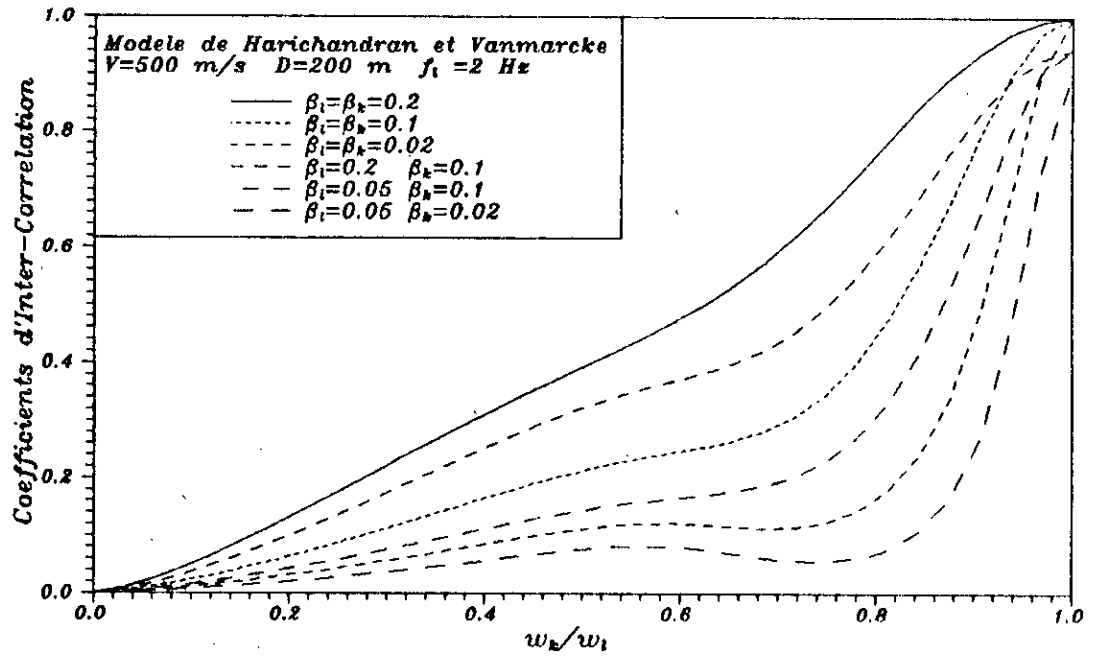


Figure 6.18. Inter-Correlation Modale pour Differentes Valeurs de l'Amortissement.

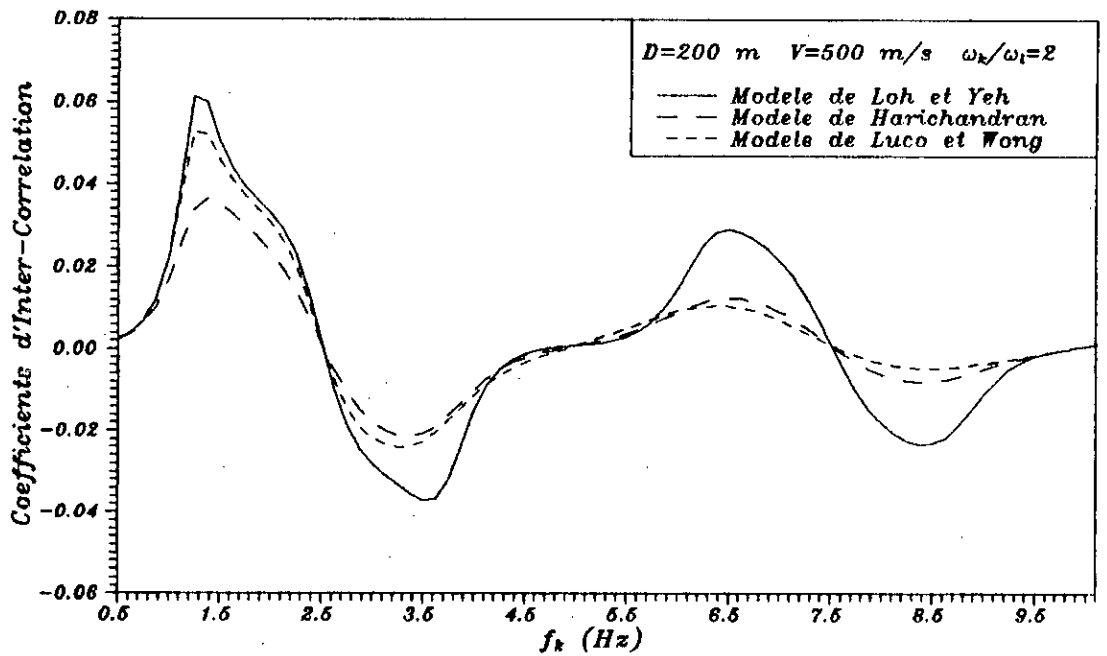


Figure 6.19. Coefficients d'Inter-Correlation Obtenus pour Differentes Fonctions de Coherence.

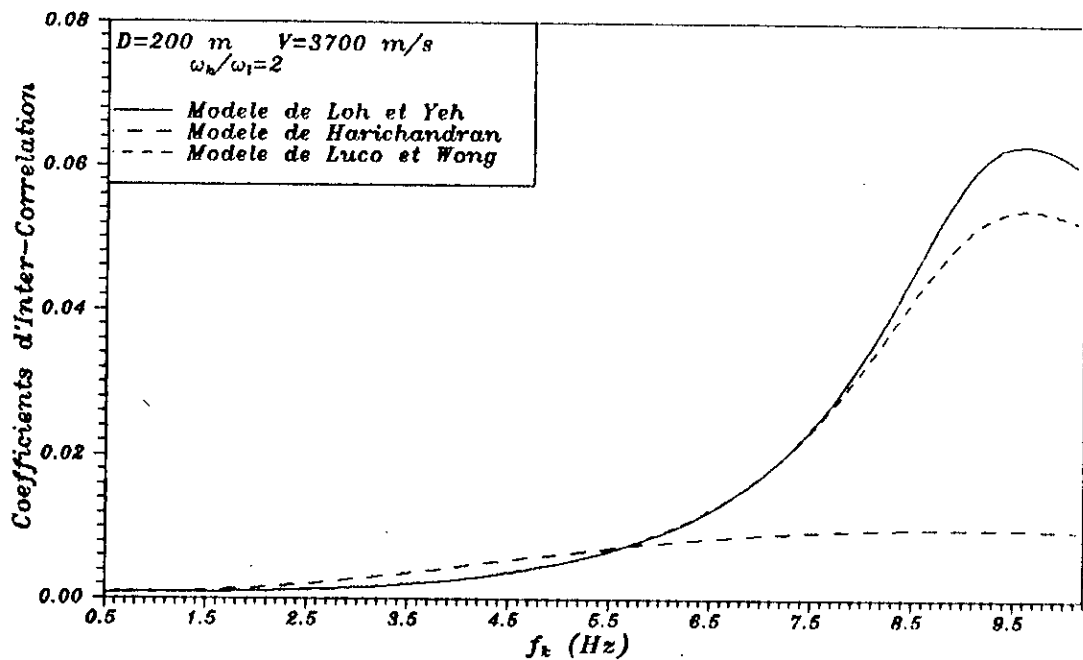


Figure 6.20. Coefficients d'Inter-Correlation Obtenus pour Differentes Fonctions de Coherence.

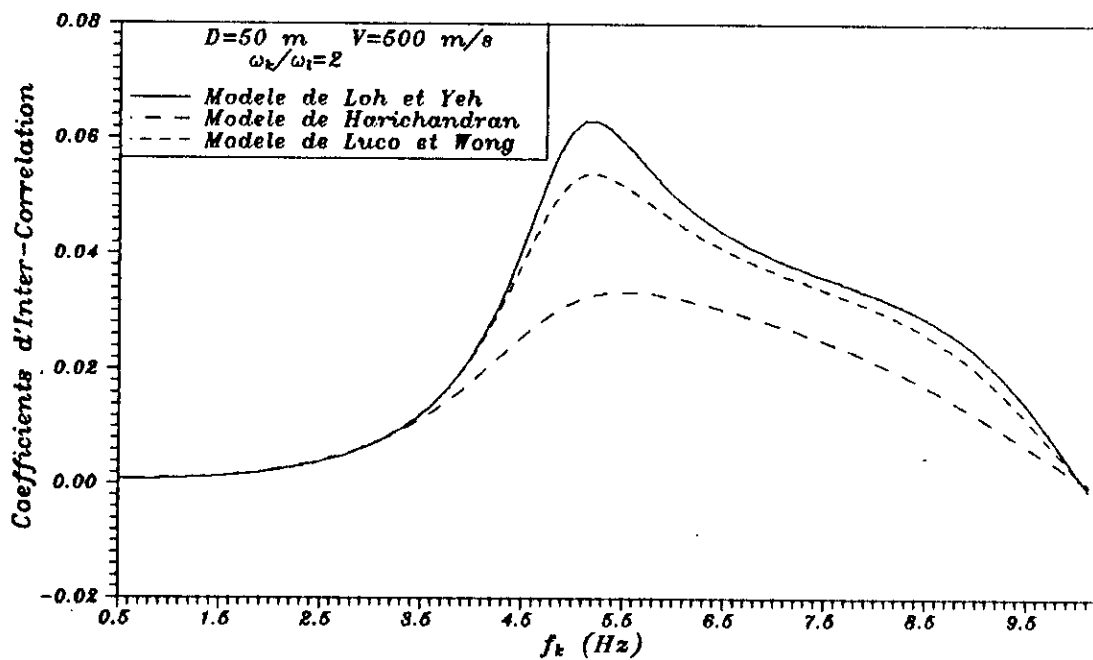


Figure 6.21. Coefficients d'Inter-Correlation Obtenus pour Differentes Fonctions de Coherence.

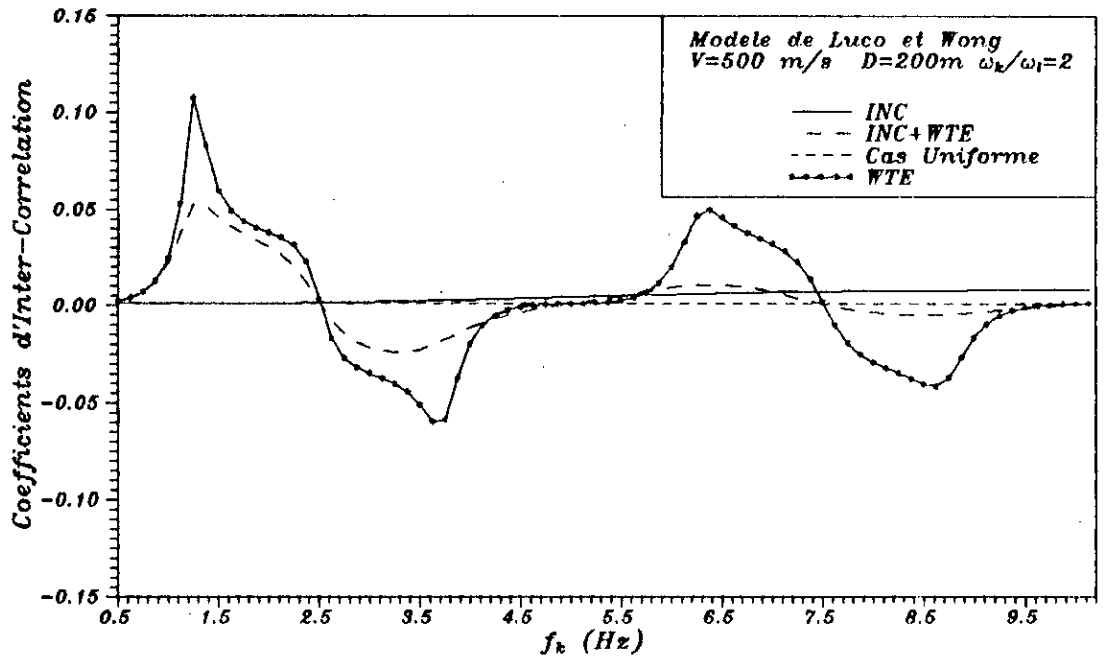


Figure 6.22. Effets Separes de l'Incoherence et du Passage d'Onde sur l'Inter-Correlation Modale.

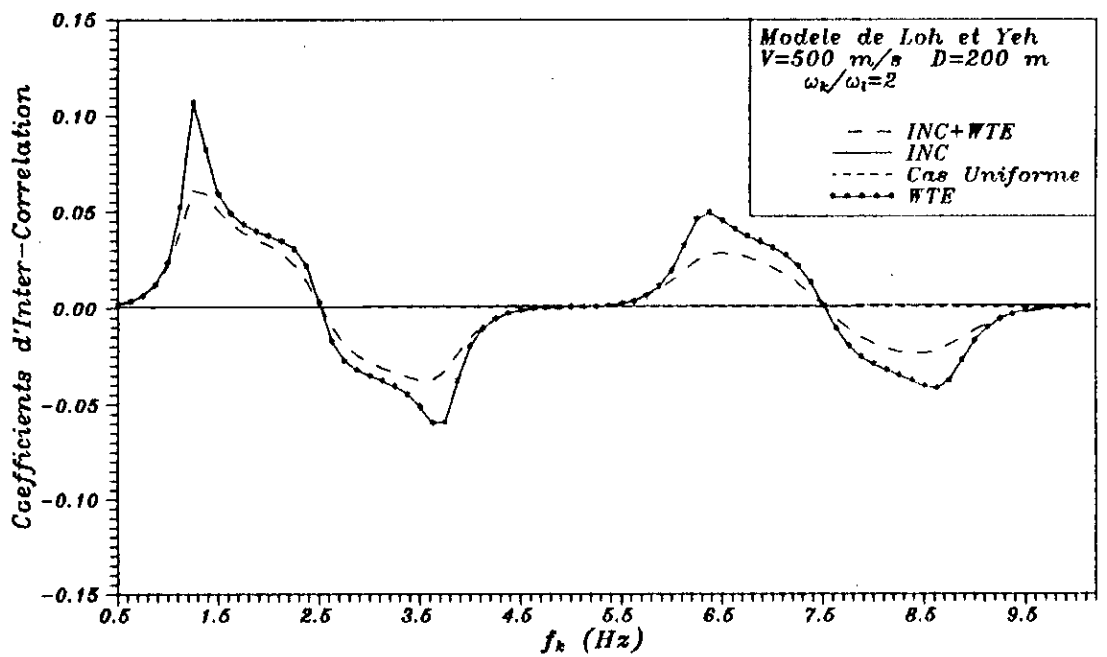


Figure 6.23. Effets Separes de l'Incoherence et du Passage d'Onde sur l'Inter-Correlation Modale.

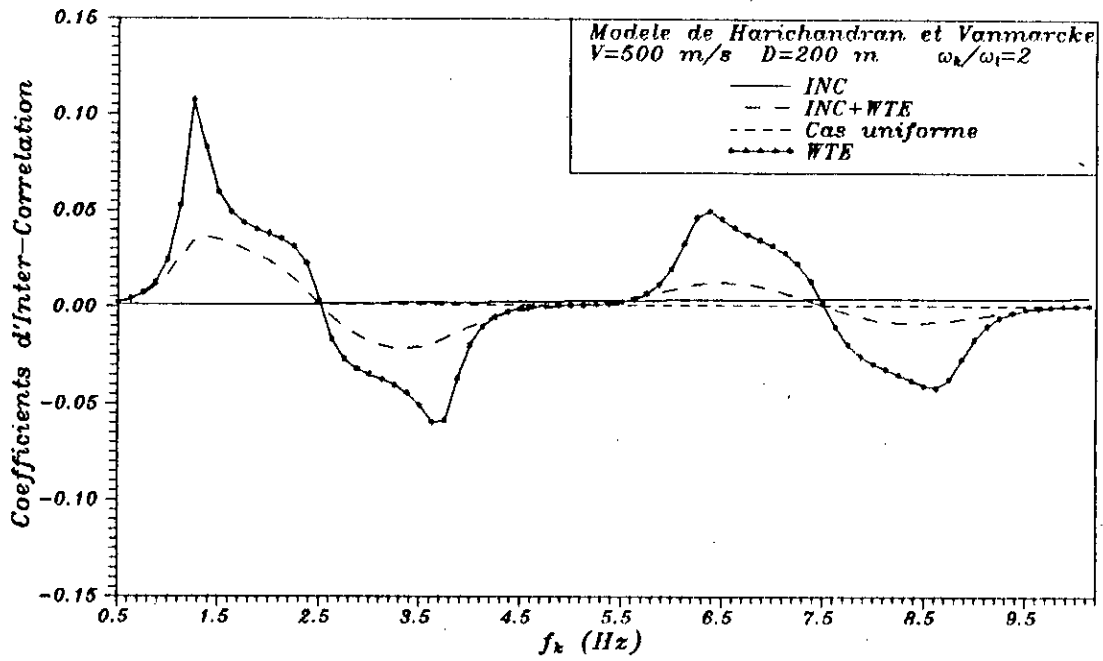


Figure 6.24. Effets Separes de L'incoherence et du Passage d'Onde sur L'Inter-Correlation Modale.

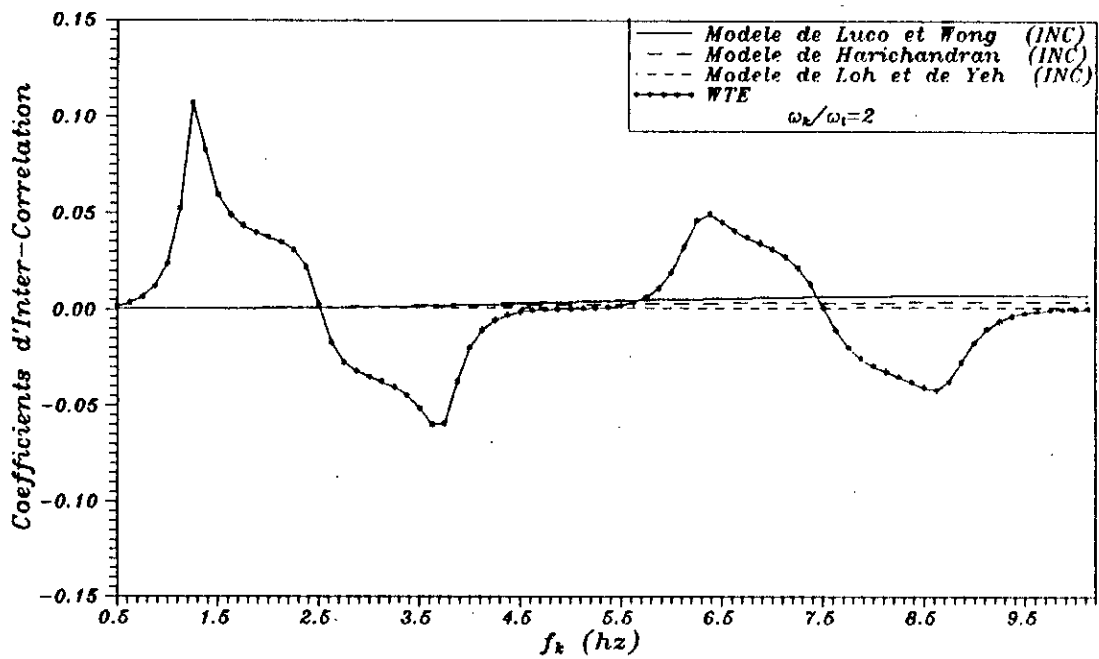


Figure 6.25. Effet d'Incoherence (les Trois Modeles) sur L'Inter-Correlation Modale.

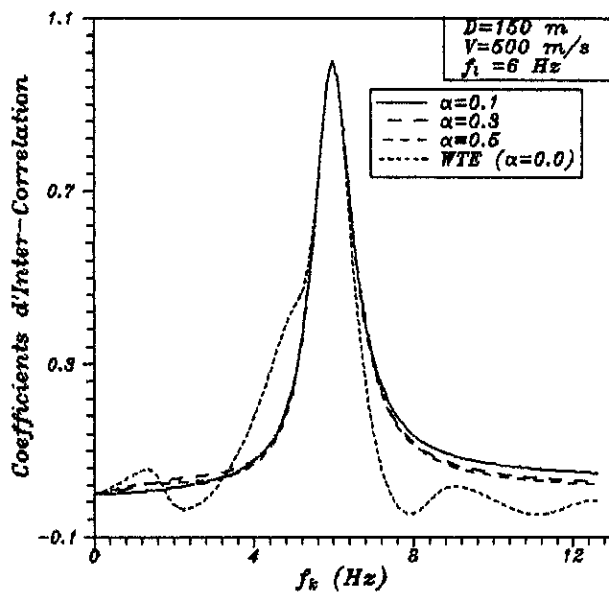
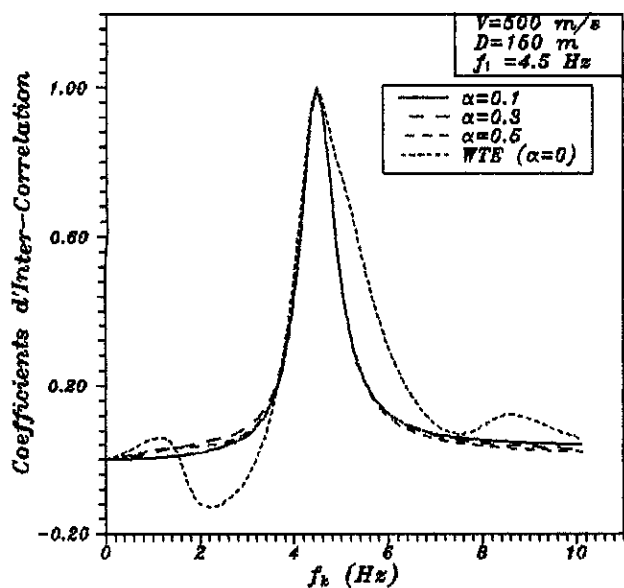


Figure 6.26. Variation de l'Inter-Correlation Modale en Fonction du Degré de Correlation Spatiale.

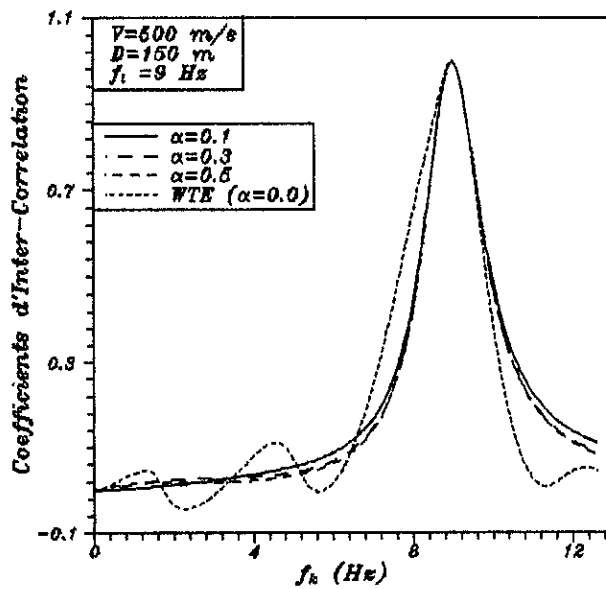
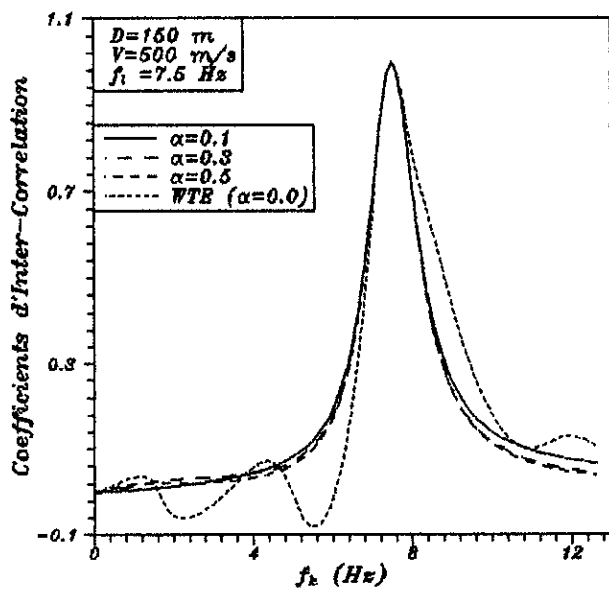


Figure 6.27. Variation de l'Inter-Correlation Modale en Fonction du Degré de Correlation Spatiale.

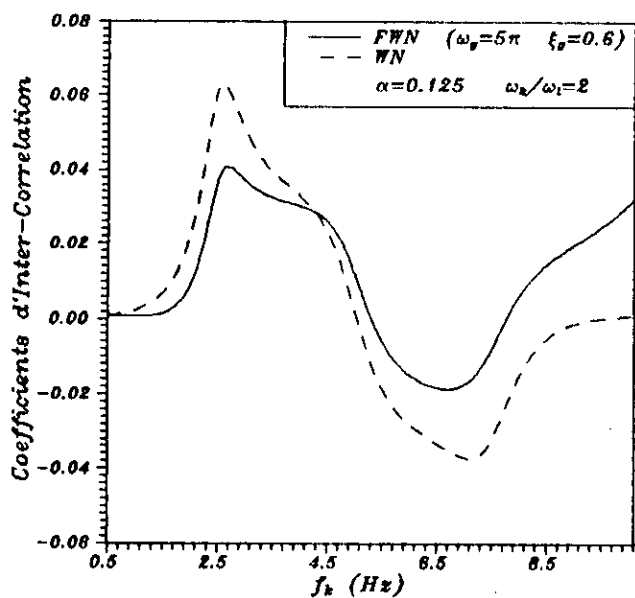


Figure 6.28. Coefficients d'Inter-Correlation dans le cas d'un Bruit Blanc et d'un Bruit Blanc Filtre. (Modele de Loh et Yeh).

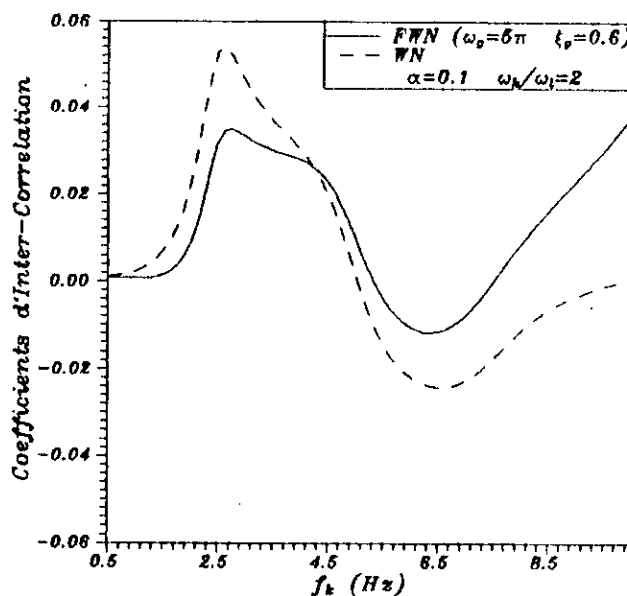


Figure 6.29. Coefficients d'Inter-Correlation dans le cas d'un Bruit Blanc et d'un Bruit Blanc Filtre. (Modele de Luco et Wong).

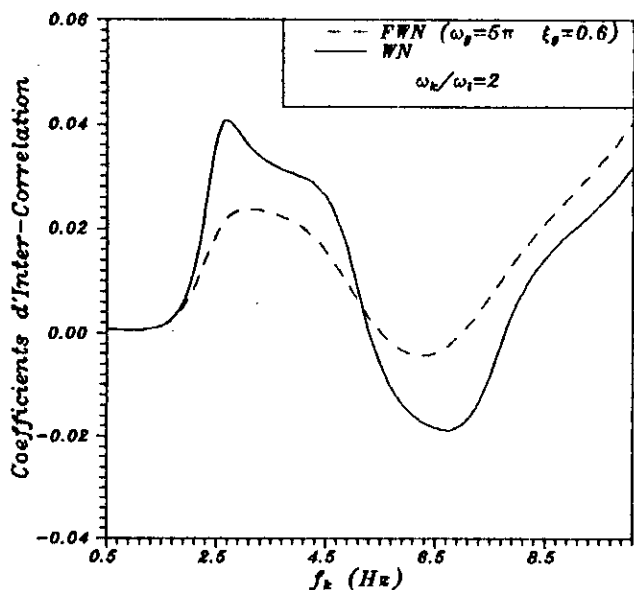


Figure 6.30. Coefficients d'Inter-Correlation dans le cas d'un Bruit Blanc et d'un Bruit Blanc Filtre. (Modele de Harichandran et Vanmarcke).

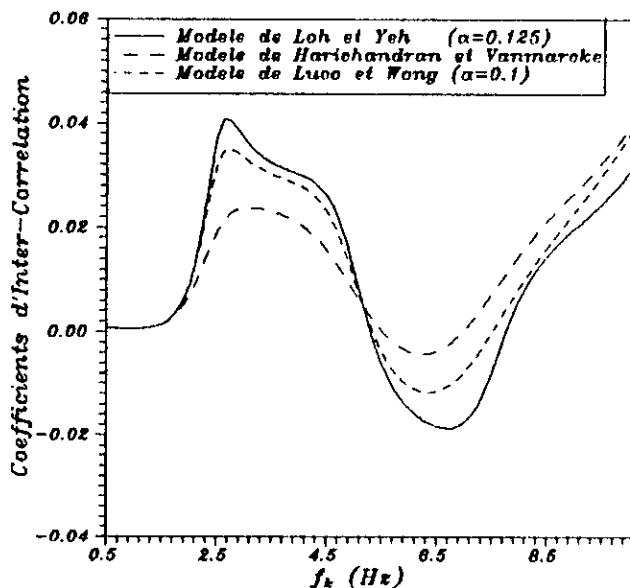


Figure 6.31. Resultats Obtenus par les Trois Modeles de Fonctions de Coherence.

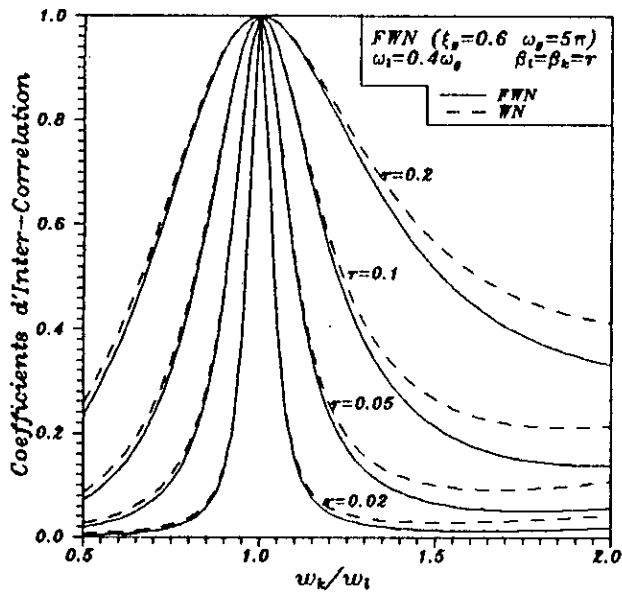


Figure 6.32. Coefficients d'Inter-Correlation pour Differentes Valeurs de l'Amortissement (Modele de Loh et Yeh ( $V=500\text{m/s}$   $D=100\text{m}$ )).

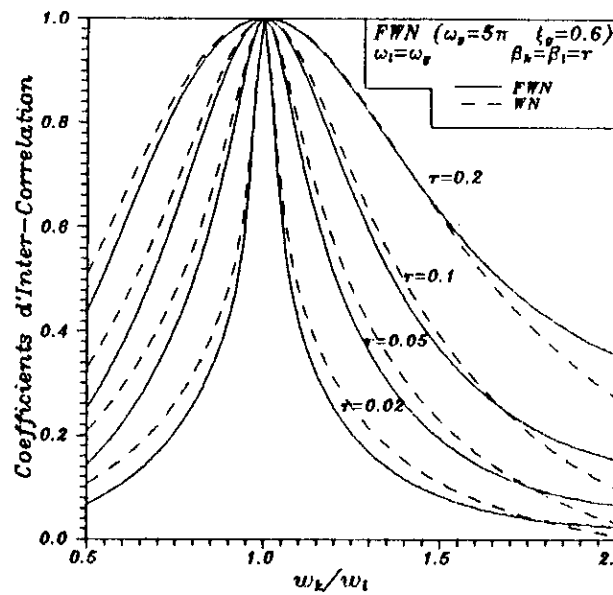


Figure 6.33. Coefficients d'Inter-Correlation pour Differentes Valeurs de l'Amortissement (Modele de Loh et Yeh ( $V=500\text{ m/s}$   $D=100\text{m}$ )).

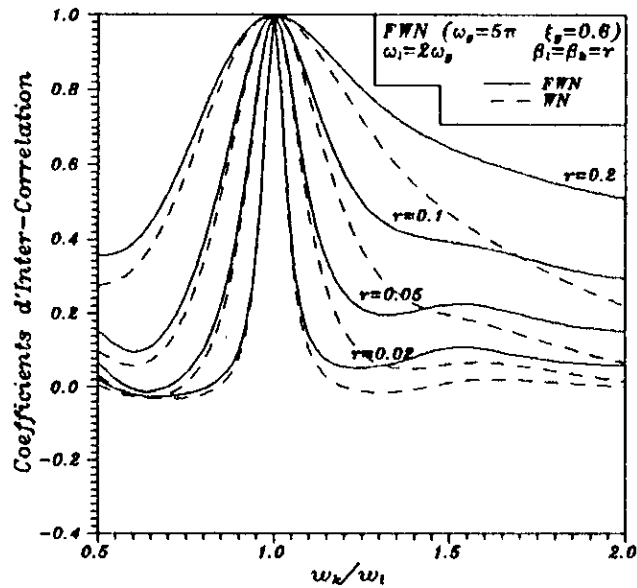


Figure 6.34. Coefficients d'Inter-Correlation pour Differentes Valeurs de l'Amortissement (Modele de Loh et Yeh ( $V=500\text{ m/s}$   $D=100\text{ m}$ )).



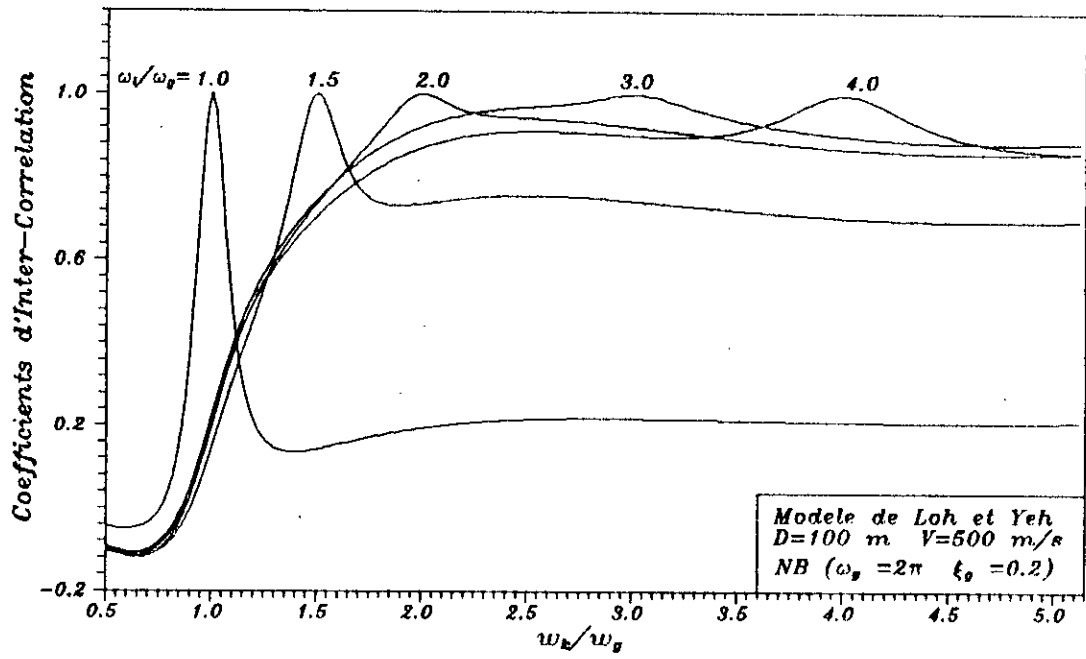


Figure 6.35. Coefficients d'Inter-Correlation pour un Input de type Bande Etroite (NB).

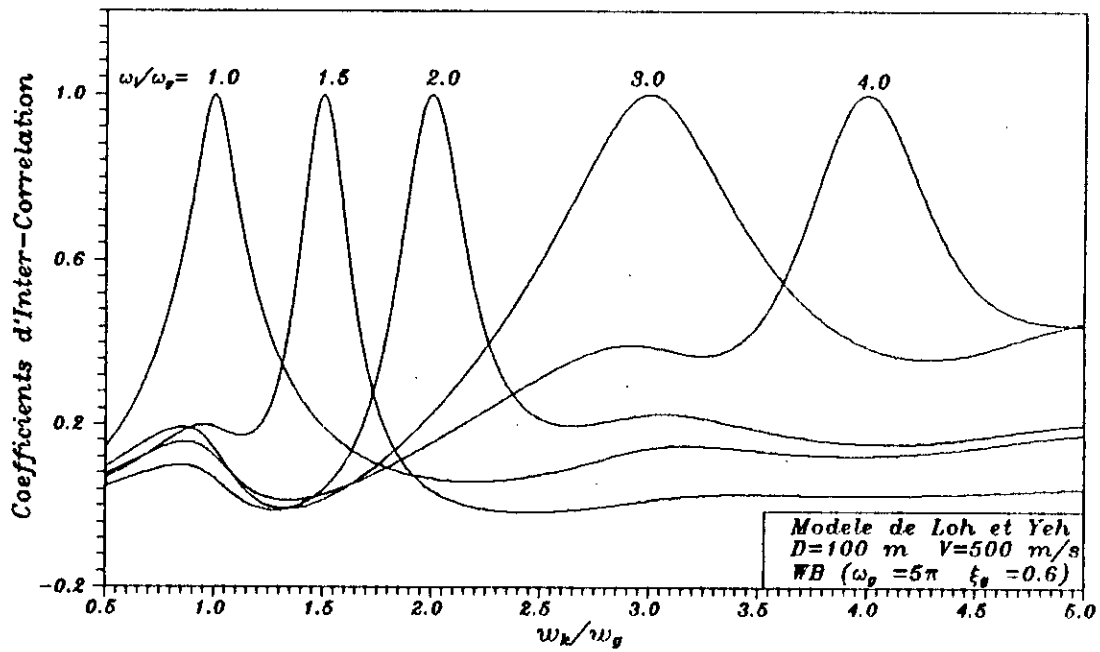


Figure 6.36. Coefficients d'Inter Correlation pour un Input de type Bande Large (WB).

# *Chapitre 7*

## *Conclusions et Suggestions*

### 7.1 CONCLUSIONS.

Présentement, le séisme en tant que chargement dynamique reste l'une des plus importantes et dangereuses actions à considérer dans le cadre de la conception et du calcul modernes des structures.

A l'instar de tout phénomène naturel, le mouvement séismique est essentiellement un phénomène aléatoire. En outre, les observations ont clairement démontré qu'en plus d'une variabilité temporelle, qui d'ailleurs a notablement été étudiée à travers une panoplie de travaux antérieurs, l'input séismique et plus précisément les mouvements forts, exhibent une variabilité spatiale non moins importante.

En effet, différentes installations stratégiques, notamment les centrales nucléaires et les structures étendues tels que les ponts et les barrages, subissent de manière sensible l'incohérence des ondes sismiques. Par ailleurs, les impératifs de sécurité requis par les structures sous-citées vis-à-vis du séisme, exigent la prise en compte, au moins de manière approximative, de la variabilité spatiale inhérente aux mouvements forts. Ainsi, dans le souci d'analyser de façon rigoureuse les structures sous l'effet d'un chargement sismique non uniforme, des techniques performantes basées essentiellement sur des fondements stochastiques ont été mises au point. A ce titre, et plus particulièrement dans le cadre d'une analyse modale, la règle de combinaison modale modifiée constitue assurément un moyen proéminent à la fois à la portée

de l'ingénieur et à même de prendre en charge l'incohérence des ondes sismiques. De surcroît, il permet de prendre en compte l'inter-corrélation modale dont l'effet s'avère à présent non négligeable.

L'étude numérique présentée dans la présente thèse a permis de lever quelque peu le voile sur l'importance des paramètres gouvernant l'inter-corrélation modale dans le cas d'input sismiques non uniformes. Les principales constatations et conclusions auxquelles a abouti l'étude numérique sont résumées dans les paragraphes subséquents.

Ainsi, les résultats ont révélé, dans le cas d'ondes sismiques incohérentes, l'existence d'une inter-corrélation modale différente de zéro là où cette dernière est pratiquement nulle pour le cas d'ondes sismiques parfaitement cohérentes.

Par ailleurs, il a été démontré que l'inter-corrélation modale dépend étroitement de la forme de l'input sismique, en l'occurrence la répartition énergétique du signal à la surface du sol. En effet, une densité spectrale de type bande étroite (*NB*) induit indubitablement une forte corrélation modale notamment entre les modes supérieurs. Ce résultat n'étant pas observé dans le cas d'un bruit blanc.

Notons, que l'influence de la vitesse de cisaillement du sol, de la distance entre appuis ainsi que de l'amortissement structural sur l'inter-corrélation modale ont également été examinés.

De surcroît, à fins de comparaison, l'examen de l'incidence de différents modèles de fonctions de cohérence sur l'inter-corrélation modale a conduit à des résultats plus ou moins comparables. Ceci étant relié au fait que les modèles considérés dans l'analyse ont été établis pour un même site d'étude. A cet effet, des résultats, sans doute, plus révélateurs sont escomptés, si toutefois d'autres modèles de fonctions de cohérence sont considérés.

Néanmoins, nous avons constaté que l'accroissement du degré d'incohérence tend à réduire l'inter-corrélation modale.

Enfin, s'agissant des incidences séparées de l'incohérence et du passage d'onde (*WTE*), il a été démontré que l'effet de ce dernier (*WTE*) est prépondérant comparé à celui de l'incohérence. En effet, à partir des courbes obtenues, l'acuité de l'effet de passage d'onde sur l'inter-corrélation modale est évidente et son importance est présentement justifiée. Rappelons pour mémoire, que l'influence de ce dernier paramètre (*WTE*) est prise en compte dans le calcul parasismique des structures depuis plus de deux décennies.

## 7.2 SUGGESTIONS.

Il serait sans doute intéressant d'étudier l'effet induit par des modèles complexes de fonction de cohérence, développés dans le cas de champs aléatoires non homogènes, sur l'inter-corrélation modale.

On pourra éventuellement considérer la réponse de différents types de structures étendues ou à supports multiples, sous l'effet d'un input sismique incohérent en utilisant la règle de combinaison modale présentée en chapitre 5 afin de comparer les résultats obtenus à ceux donnés par les méthodes purement probabilistes.

Par ailleurs, la règle de combinaison modale modifiée utilisée dans la présente thèse pourrait être étendue, aux cas de structures à amortissement non classique et éventuellement afin d'inclure l'effet de l'interaction sol-structure sur l'inter-corrélation modale dans le cas d'input sismiques présentant à la fois une variabilité temporelle et spatiale.

## *Références*

1. N.A.Abrahamson et al., 'Empirical Spatial Coherency Fonctions for Application to Soil-Structure Interaction Analysis', *Earthquake Spectra*, Vol.7, pp.1-28, 1991.
2. N.A.Abrahamson, 'Estimation of Seismic Wave Coherency and Rupture Velocity Using SMART-1 Strong-Motion Array Recordings', Report No R85-2, Earthquake Engineering Research Center, University of California Berkeley, California, 1985.
3. K.J.Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
4. M.K.Berrah and E.Kausel, 'Modified Response Spectrum Model for the Design of Structures Subjected to Spatially Varying Seismic Excitations', Report No R90-2, M.I.T., Department of Civil Engineering, Cambridge, Massachusetts, U.S.A., 1990.
5. M.K.Berrah and E.Kausel, 'Response Spectrum Analysis of Structures Subjected to Spatially Varying Motions', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.21, pp.461-470, 1992.
6. M.K.Berrah and E.Kausel, 'A Modal Combination Rule for Spatially Varying Seismic Motions', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.22, pp.791-800, 1993.
7. M.K.Berrah and E.Kausel, 'Spectrum Analysis of a Beam Under Non Uniform Seismic Motion', *Proceedings of the Second European Conference of Structural Dynamics*, Trondheim, Norway, pp.27-32, 1993.
8. M.K.Berrah and E.Kausel, 'On Combining Modes Under Non Uniform Ground Motion', *Proceedings of the Second International Conference on Earthquake Resistant Construction and Design*, Berlin, Germany, pp.661-668, 1994.

9. B.A.Bolt, 'Instrument Arrays and Spatially Correlated Ground Motions', Personal Manuscript, pp.1-26.
10. A.Capra et V.Davidovic, *Calcul Dynamique des Structures en Zone Sismique*, Eyrolles, 1982.
11. R.W.Clough and J.Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975.
12. A.Der kiureghian, 'Structural Response to Stationary Excitation', *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE Vol.106, pp.1195-1213, 1980.
13. A.Der kiureghian, 'A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.9, pp.419-435, 1981.
14. A.Der kiureghian, 'CQC Modal Combination Rule for High-Frequency Modes', *Transaction of the 11th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Tokyo, Japan, pp.231-236, 1991.
15. A.Der kiureghian and A.Neuenhofer, 'Response Spectrum Method for Multi-Support Seismic Excitations', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.21, pp.713-740, 1992.
16. W.J.Hall and S.L.McCabe, 'Observations on Spectra and Design', *Proceedings of the 3rd U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, Charleston, South Carolina, pp.1117-1127, 1986.
17. T.Harada, 'Spatial Correlation and Spectrum of Strong Earthquake Ground Displacements', *Proceedings of the 6th Japan Earthquake Engineering Symposium*, Tokyo, pp.353-360, 1982.
18. T.Harada, 'Probabilistic Modeling of Spatial Variation of Strong Earthquake Ground Displacements', *Proceedings of the 8th World Conference on Earthquake Engineering*, San Fransisco, U.S.A., Vol.2, pp.605-612, 1984.

19. T.Harada and T.Shinozuka, 'Ground Deformation Spectra', *Proceedings of the 3rd U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, Charleston, South Carolina, pp.2191-2202, 1986.
20. R.S.Harichandran and E.Vanmarcke, 'Space-Time Variation of Earthquake Ground Motion', Report No.R84-12, MIT, Departement of Civil Engineering, Cambridge, Massachusetts, U.S.A., 1984.
21. R.S.Harichandran and E.Vanmarcke, 'Stochastic Variation of Earthquake Ground Motion in Space and Time', *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.112, pp.154-174, 1986.
22. R.S.Harichandran and W.Wang, 'Response of Simple Beam to Spatially Varying Earthquake Excitation', *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.114, pp.1526-1541, 1988.
23. G.W.Housner, 'Design Spectrum', In: Wiegel, R.L. (editor): *Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
24. M.C.Lee and J.Penzien, ' Stochastic Analysis of Structures and Piping Systems Subjected to Stationary Multiple Support Excitations', *Earthquake Engineering and structural Dynamics*, Vol.11, pp.91-110, 1983.
25. C.H.Loh, 'Analysis of the Spatial Variation of Seismic Waves and Ground Movements from SMART-1 Array Data', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.13, pp.561-581, 1985.
26. C.H.Loh and Y.Yeh, 'Spatial Variation and Stochastic Modelling of Seismic Differential Ground Movement', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.16, pp.583-596, 1988.
27. C.H.Loh , 'Spatial Variability of Seismic Waves and its Engineering Application', *International Workshop on Spatial Variation of Earthquake Ground Motion*, Princeton University, U.S.A., pp.1-26, 1988.

28. D.E.Newland, *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*, Longman Inc., New York, 1984.
29. W.H.Press et al., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, London, 1986.
30. W.Smeby and A.Der Kiureghian, 'Modal Combination Rules for Multicomponent Earthquake Excitation', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.13, pp.1-12, 1985.
31. Somerville et al., 'The Influence of Site Conditions on the Spatial Incoherence of Ground Motions', *International Workshop on Spatial Variation of Earthquake Ground Motion*, Dunwalke, New Jersey, U.S.A., pp.1-21, 1988.
32. E.H.Vanmarcke and R.S.Harichandran, 'Models of the Spatial Variation of Ground Motion for Seismic Analysis of Structures', *Proceedings of the 8th World Conference on Earthquake Engineering*, San Francisco, U.S.A., 1984.
33. E.H.Vanmarcke, 'Properties of Spectral Moments with Applications to Random Vibration', *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.98, pp.425-446, 1972.
34. E.H.Vanmarcke, 'On the Distribution of the First-Passage Time for Normal Stationary Random Processes', *Journal of Applied Mechanics*, Vol.42, pp.215-220, 1975.
35. E.H.Vanmarcke, *Random Fields: Analysis and Synthesis*, The M.I.T Press, Cambridge, Massachusetts, 1983.
36. E.L.Wilson, A.Der Kiureghian and E.Bayo, 'A Replacement for the SRSS Method in Seismic Analysis', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.9, pp.187-192, 1981.
37. N.Yamamura and H.Tanaka, 'Response Analysis of Flexible MDF Systems for Multiple-Support Seismic Excitations', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.19, pp.345-357, 1990.



38. A.A.Zerva et al., 'Lifeline Response to Spatially Variable Ground Motions', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.16, pp.361-379, 1988.

39. A.A.Zerva, 'Response of Multi-Span Beams to Spatially Incoherent Seismic Ground Motions', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.19, pp.819-832, 1990.