

6/91

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Lex

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CONTRIBUTION AU CALCUL
DE PROFILS D'AUBAGES
PAR LA METHODE INVERSE

Proposé par :
M. M. BOUDJEMAA

Etudié par :
M. A. GUELLATI

Dirigé par :
M. M. BOUDJEMAA

PROMOTION : JUIN 91

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CONTRIBUTION AU CALCUL
DE PROFILS D'AUBAGES
PAR LA METHODE INVERSE

Proposé par :

M. M. BOUDJEMAA

Etudié par :

M. A. GUELLATI

Dirigé par :

M. M. BOUDJEMAA

PROMOTION : JUIN 91

خلاصة : يهدف هذا العمل، وانطلاقاً من بعض الفرضيات الميسرة، إلى المساهمة في إيجاد شكل ريشة دولاب محوري. يرجع هذا إلى حل جملة معادلات غير مستقيمة ذات مشتقات جزئية، حيث هيكل الريشة مجهول، مع إعطاء قانون السماكة، وتوزيع لحداثية واحدة للسرعة. يُسمح لنا حل المسألة عن طريق مخطط عددي تكرري. أخيراً، وبعد المرور إلى مرحلة التمهيف على الكمبيوتر، لم نتمكن من الحصول على نتائج.

RESUME : Ce travail a pour objet la contribution à la détermination moyennant certaines hypothèses simplificatrices, du profil d'aubage d'une roue de turbomachine axiale.

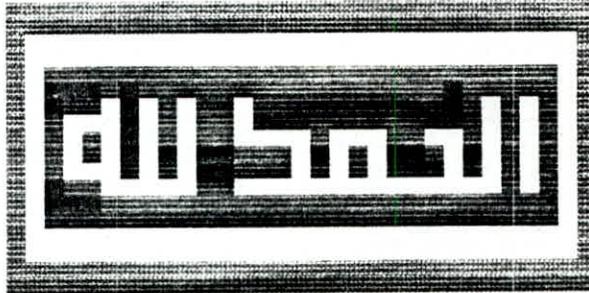
On est amené à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, avec le squelette du profil comme inconnue, en ayant pour données, une loi d'épaisseur et la distribution d'une composante du vecteur vitesse. Un schéma numérique itératif permet de résoudre ce problème. Enfin, mis en exécution, notre programme ne donne pas de résultats.

SUMMARY : This work aims at contributing in determining within the restriction of some simplifying assumptions, the blade profile of a row in an axial turbomachine.

One is led to solve a system of non-linear partial derivate equations within the profile camber as unknown, and the thickness law with one speed component as data. An iterative numerical algorithm permits to solve the problem. Finally, carried out, our programm does not give results.

REMERCIEMENTS

Je remercie ALLAH de m'avoir donné le courage ainsi que la force, pour pouvoir achever ce travail.



Je tiens à remercier mon promoteur M^r M^{ed}. Boudjemaa, pour l'aide qu'il m'a apportée, ainsi que les membres de mon jury, que j'ai l'honneur de citer:

M^r A. Gahmousse

M^r M^{ed}. Benbraïka.

Enfin, j'adresse mes remerciements à tous ce qui m'ont aidé, ou orienté, de près ou de loin.



L'auteur.

Guelhati Abdelmajid

DEDICACES

Je dédie ce travail à tout les membres de ma famille:

mon père : Siò ali

ma mère : Safia

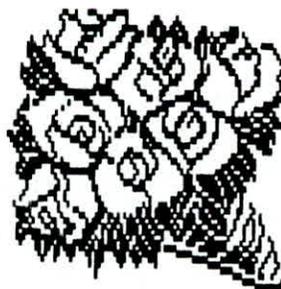
mes deux soeurs : Zakia & Samia

mes deux frères : Djamel eddine & Mohamed Rafik

*Ainsi qu'à tout mes amis, et en particulier la promotion 1991
Génie Mécanique de l'ENP .*

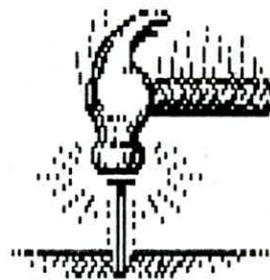
L'auteur.

Guellati Abdelmadjid



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PLAN DE TRAVAIL



PLAN DE TRAVAIL

INTRODUCTION

HYPOTHESES

POSITION DU PROBLEME

PROPRIETES D'UN ECOULEMENT
DANS UN ESPACE PERIODIQUE
APPLICATION AU CALCUL DE L'ECOULEMENT
ET A LA CONCEPTION
POUR LES GRILLES D'AUBES

RESOLUTION DU PROBLEME

CONCLUSION

SOMMAIRE

2.13.CAS DU MODE INVERSE 2	28
Chapitre.3.RESOLUTION DU PROBLEME	29
3.1.INTRODUCTION	30
3.2.DEVELOPPEMENT	31
3.3.INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES	33
3.4.ALGORITHME DE RESOLUTION	35
3.4.1.ORGANIGRAMME	37
3.4.2.PROGRAMME	39
3.5.RESULTATS ET COMMENTAIRES	40
Chapitre.4.CONCLUSION	41
* ANNEXES	43
ANNEXE 1 : Conception d'un écoulement incompressible	44
ANNEXE 2 : Décomposition du problème d'écoulement autour d'un profil mince à un nombre de Reynolds élevé.	45
ANNEXE 3 : Méthode des singularités	46
ANNEXE 4 : Méthode des transformations conformes	47
ANNEXE 5 : Méthodes travaillant dans le plan du potentiel	48
ANNEXE 6 : Méthodes travaillant dans le plan de l'hodographe	50
ANNEXE 7 : Méthodes pseudo-instationnaires	52
ANNEXE 8 : Développement des calculs importants du chapitre 2	54
ANNEXE 9 : Méthode de Newton-Raphson	75
ANNEXE 10 : Programme	76
* REFERENCES	103

INTRODUCTION



INTRODUCTION

Les problèmes d'écoulement sont généralement difficiles à résoudre, car les équations de base sont non linéaires. Il est donc, mis à part quelques cas très simples, impossible de trouver des solutions exactes.

L'évolution remarquable dans le domaine d'écoulement, est due aux échanges étroits entre la théorie et l'expérience.

En effet, d'une part l'expérience est indispensable pour vérifier les hypothèses et les résultats qui ressortent de la théorie, d'autre part, la théorie est nécessaire pour expliquer les résultats obtenus par l'expérience.

Grâce à l'arrivée des calculateurs puissants, on a fait un grand saut vers l'avant. Ainsi donc, la conception assistée par ordinateur (CAO), a apporté ses fruits dans ce domaine durant ces dernières années. On peut analyser par simulation, une situation correspondante à une certaine configuration d'un prototype.

L'intérêt dans tout ceci, c'est de diminuer le nombre d'essais (qui coutent excéssivement cher), et surtout de gagner en matière temps (en effet, une nouvelle connaissance est une fortune pour ce lui qui l'a aqut le premier, surtout dans ce domaine qui voit ses applications dans l'aviation par exemple.), c'est donc une optimisation dans l'investissement du temps et de l'argent.

C'est dans ce contexte, qu'on va essayer à travers notre étude, de dessiner un profil d'aubage correspondant à une certaine répartition du vecteur vitesse.

HYPOTHESES



HYPOTHESES

Il serait très pratique de pouvoir présenter une méthode, permettant de traiter des cas réels, où l'on tiendrait compte de tout, ou du moins, de la majorité des problèmes rencontrés, tels que la variation de la densité, la variation de l'énergie potentielle, les couches limites, les décollements, les sillages, etc...

Mais vu leur difficulté, ils sont traités chacun à part, et c'est grâce à certaines méthodes de couplage, qu'on arrive à cerner le problème dans une situation réelle. Ceci pour dire que le travail dans ce domaine, est un travail de groupe, où chacun apporte sa contribution, laquelle est nécessaire pour réaliser quelque chose de solide, et de consistant, et qui voit son application dans la pratique.

On posera donc comme hypothèse dans notre cas:

- 1) Ecoulement équipotentiel et stationnaire.
- 2) Régime subsonique.
- 3) Fluide idéal et incompressible (ANNEXE 2).
- 4) Ecoulement plan (profil de longueur infinie) .
- 5) On néglige la couche limite (ANNEXE 1).

Donc de notre part, on ne traitera que le problème régi par ces hypothèses, en attendant de trouver l'équipe complète.

CHAPITRE 1

POSITION DU PROBLEME



1.1. INTRODUCTION (problèmes directs et problèmes inverses)

Dans la conception assistée par ordinateur (CAO), celui-ci joue souvent le rôle d'un outil, certes très efficace, utilisé en tant que simulateur numérique des phénomènes physiques, et permettant l'analyse d'une situation correspondante à une certaine configuration d'un prototype. Cet usage du calculateur ou celui-ci n'intervenant pas dans la conception même du prototype, consiste à résoudre ce qu'on appelle un problème direct.

A l'opposé, lorsque le calculateur intervient dans le dimensionnement du prototype, en réponse à telle ou telle spécification, le problème traité est alors inverse.

De telles définitions doivent être acceptées avec prudence, la frontière entre les deux est souvent mal définie.

1.2. QUELQUES PROBLEMES POSES PAR LES METHODES INVERSES

L'écoulement est décrit par des équations, qui constituent un modèle liant les propriétés de l'espace entourant l'aubage à ses performances, au sens large. Il convient de remarquer que de telles équations (Euler généralement), paraissent par nature, mieux adaptées au calcul des performances (vitesses, pression, rendement, etc...) à partir des caractéristiques particulières de l'espace, introduites par les aubages, c'est à dire au problème direct.

N.B : Certaines des méthodes présentées au paragraphe suivant, constituent d'ailleurs, des tentatives pour contourner cette difficulté.

Un autre problème plus important, réside dans le choix des données nécessaires à la détermination d'un profil. Rien, sinon l'expérience de l'utilisateur (il en existe de très expérimentés dans ce domaine !), ne permet de connaître au départ

- Quelles caractéristiques physiques de l'écoulement doivent être imposées plutôt que d'autres.

- Comment ces données doivent être réparties pour obtenir une solution acceptable en pratique.

- Comment choisir à la fois, la nature, et la répartition de ces données pour obtenir une solution optimale.

Cette notion de solution optimale est d'ailleurs toute relative de beaucoup de points de vue. Un grand nombre de contraintes pèsent sur le concepteur, notamment économiques. D'autre part, la totalité des méthodes connues à l'heure actuelle, fournissent une solution associée à un seul régime de fonctionnement. On peut se demander si une telle situation est très raisonnable, le fonctionnement à charge partielle, ou en surcharge ayant quelquefois autant d'importance qu'au point nominal. Il sera de peu d'intérêt de tracer un profil dont les performances, excellentes pour un régime, s'effondrent en dehors d'une plage restreinte autour de celui-ci.

Sur ce point, l'expérience du concepteur peut avoir une importance considérable.

Il apparaît ainsi, que les résultats fournis par les méthodes inverses doivent être utilisés avec la plus grande prudence.

1.3. PRINCIPALES FAMILLES DE METHODES

Les méthodes utilisées à l'origine en mode inverse, ont été les méthodes analytiques, lesquelles ont surtout été élaborées, avant l'apparition des grands ordinateurs.

Deux de ces méthodes peuvent être citées:

Les plus à l'origine sont celles de type singularités; les aubages étant représentés par des répartitions de sources et de tourbillons, réparties le long de la corde (ANNEXE 3).

D'autres techniques, assez largement mises en oeuvre, ont utilisé les propriétés des transformations conformes, permettant de transformer l'écoulement autour de grilles de cercles ou d'ellipses en écoulement autour de profils (ANNEXE 4).

La possibilité de résoudre numériquement des systèmes d'équations aux dérivées partielles, apparue au cours des années 60, a fait apparaître de nouvelles méthodes. Elles peuvent être classées en deux catégories:

- Méthodes travaillant dans le plan du potentiel (ϕ, ψ) [1] à [5] (ANNEXE 5).
- Méthodes travaillant dans le plan de l'hodographe [6] à [9] (ANNEXE 6).

Ces deux types de méthodes, largement utilisées, présentent cependant (ainsi que les précédentes), certains inconvénients considérés comme importants actuellement:

- Leur mise en oeuvre suppose l'existence d'un potentiel des vitesses, ce qui exclue entre autre, le calcul des écoulements avec chocs.

- Ensuite, elles ne s'appliquent (à quelques exceptions près) qu'à des écoulements strictement bidimensionnels. Les effets dus à la contraction, et aux changements de rayon des nappes de courant dans le plan méridien, dont l'importance sur l'écoulement est considérable, ne peuvent être pris en compte.

- Enfin, ces méthodes ne permettent généralement pas de traiter simplement le cas des écoulements mixtes supersoniques-subsoniques (aubages transoniques).

De nouvelles méthodes sont apparues il y'a quelques années, suite au développement des techniques de résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles par les méthodes pseudo-instationnaires (ANNEXE 7).

Une des méthodes les plus connues en France a été développée par MEAUZE à l'ONERA. Cette méthode permet de s'affranchir des inconvénients mentionnés plus haut. Par contre, elle exige des temps de calcul sensiblement plus importants que les méthodes précédentes, et peut dans certains cas présenter des difficultés d'application.

1.4.TENDECES RECENTES

La tendance observée actuellement, consiste à étendre les méthodes du type précédent à des cas tridimensionnels. Un constructeur (R. R.) déclare avoir réalisé certains progrès, en utilisant ce type de méthodes dans le cas des turbines. Celles-ci sont obtenues généralement, par couplage entre une méthode quasi tridimensionnelle (type précédent), et une méthode de calcul de l'équilibre radial, associées dans un même programme.

Il convient de noter que dans certains cas, les effets de viscosité sont pris en compte [11].

CHAPITRE 2

PROPRIETES D'UN ECOULEMENT DANS UN
ESPACE PERIODIQUE.
APPLICATION AU CALCUL DE L'ECOULEMENT
ET A LA CONCEPTION POUR LES GRILLES
D'AUBES.



2.1. INTRODUCTION

Les méthodes numériques du calcul d'écoulement pour les grilles, introduisent généralement, le caractère périodique de l'écoulement depuis le début. Le domaine de calcul est fermé, et correspond à un pas, avec une extension amont et aval aussi large que nécessaire, pour pouvoir considérer l'écoulement uniforme aux limites correspondantes.

La condition de périodicité est automatiquement remplie par l'introduction de conditions identiques sur les limites latérales.

Quand le domaine de calcul n'est pas fermé, cette méthode de remplissage de la condition de périodicité, ne peut pas être utilisée. C'est le cas de la méthode inverse du canal transonique, et son application sur la conception d'aube de turbine.

Dans cette méthode, l'intrados de l'aube (surpression), et le domaine d'écoulement, sont calculés en commençant par la distribution du vecteur vitesse sur l'extrados, et la définition de l'une des composantes de la vitesse, le long du plan d'entrée et de sortie de la grille d'aube.

On a décidé de procéder à une étude fondamentale, des propriétés des écoulements dans des espaces périodiques, pour essayer d'obtenir d'avance des indications sur les compatibilités imposées, puis prouver l'applicabilité de la méthode à l'écoulement dans une grille d'aubes.

Cependant, la présente étude, montre qu'une méthode de calcul rapide peut être développée, et est à la fois applicable aux problèmes inverses et directs.

Remarques:

- 1°) Le développement des calculs en détail est présenté dans l'annexe 8.
- 2°) Attention! ne pas mélanger entre la numérotation de ce chapitre, et celle de l'annexe 8, en effet la numérotation est propre au chapitre où elle est effectuée, et ne peut pas servir de moyen d'intercommunication entre les différents chapitres.

2.2. EQUATION DU MOUVEMENT

Considérons un écoulement bidimensionnel, dans le plan de symétrie (x,y) du canal, limité par deux solides de $h(x)$ (Fig.1). L'écoulement est isentropique, et non visqueux. Son énergie totale est constante .

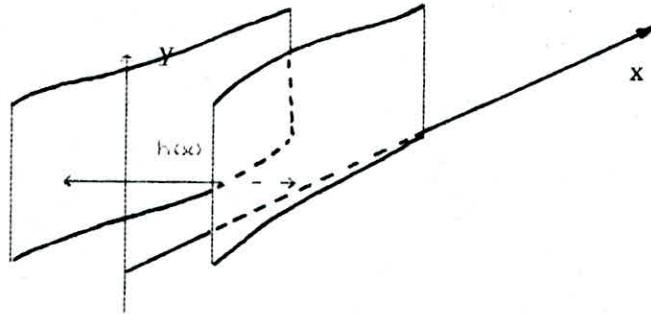


Fig.1.

Les équations suivantes peuvent être écrites:

$$Q(x,y) = \frac{\text{div } \rho V(x,y)}{\rho} + u \cdot w'(x) \quad \text{équation de continuité} \quad (1a)$$

$$R(x,y) = \text{rot } V \quad \text{quantité de mouvement} \quad (1b)$$

$$H(x,y) = V^2/2 + a^2 / (\gamma - 1) \quad (\text{constante}) \quad \text{équation d'énergie} \quad (1c)$$

Où $w'(x)$ est le coefficient de contraction du tube de courant:

$$w'(x) = \frac{d}{dx} \left[\text{Log } \frac{h(x)}{h(x_0)} \right] \quad (1d)$$

Dans les parties de fluide où il n'y a pas d'obstacles solides, les équations du mouvement dans le plan de symétrie du canal, peuvent être écrites comme:

$$Q(x,y) = 0 \quad (2a)$$

$$R(x,y) = 0 \quad (2b)$$

$$H(x,y) = H_0 \quad (\text{constante}) \quad (2c)$$

Les équations (1a), (1b), et (1c) peuvent être écrites dans le système des coordonnées rectangulaires, comme:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{dw}{dx} = Q(x,y) + F(x,y) \quad (3a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = R(x,y) \quad (3b)$$

$F(x,y)$ est une fonction qui prend en compte l'effet de la compressibilité, elle peut être écrite en utilisant (2c):

$$F(x,y) = \frac{1}{\gamma-1} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(\text{Log} \left(1 - \frac{\overline{V}^2}{2} \right) \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\text{Log} \left(1 - \frac{\overline{V}^2}{2} \right) \right) \right] \quad (3c)$$

où \overline{V}^2 est le carré de la vitesse adimensionnelle, par l'enthalpie totale:

$$\overline{V}^2 = \frac{u^2 + v^2}{C_p T_0}$$

2.3. ECOULEMENT PERIODIQUE DANS LA DIRECTION Y

Pour le cas d'un espace périodique dans la direction y, toutes les caractéristiques de l'écoulement dans cette direction, peuvent être exprimées, à partir des séries de Fourier.

Les équations (3a) et (3b) sont ainsi réduites à un système d'équations différentielles:

$$\frac{du_k}{dx} + \omega \cdot i_k \cdot v_k(x) + u_k(x) \frac{dw}{dx} - q_k(x) - f_k(x) = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{dv_k}{dx} - \omega \cdot i_k \cdot u_k(x) + r_k(x) = 0 \quad (4b)$$

peuvent être résolues pour toute valeur significative de k, en utilisant la période de l'espace le long de Oy comme unité de longueur.

$u_k(x)$, $v_k(x)$, $q_k(x)$, $r_k(x)$, $f_k(x)$ les coefficients des séries de Fourier respectifs de $U(x,y)$, $V(x,y)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$ et $F(x,y)$.

2.4. CALCUL DE L'ÉCOULEMENT MOYEN [HARMONIQUE D'ORDRE ZERO]

Pour $k=0$, les valeurs moyennes dans la direction y de u et v sont obtenues. Les équations correspondantes sont:

$$\frac{du_0}{dx} = u_0(x) \cdot w'(x) - q_0(x) - f_0(x) = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{dv_0}{dx} + r_0(x) = 0 \quad (5b)$$

La solution de ce système est trouvée immédiatement, en utilisant (1d):

$$u_0(x) = \frac{h(x_0)}{h(x)} \left[u_0(x_0) + \int_{x_0}^x \left[q_0(\tau) + f_0(\tau) \frac{h(\tau)}{h(x_0)} \right] d\tau \right] \quad (5c)$$

$$v_0(x) = v_0(x_0) - \int_{x_0}^x r_0(\tau) d\tau \quad (5d)$$

Il est clair, que cet écoulement moyen définit les conditions uniformes à l'infini amont et aval, et les forces globales agissant sur les aubes.

2.5. CALCUL DES HARMONIQUES D'ORDRE SUPERIEUR (K > 1)

Par raison de simplicité, le développement est produit pour :
 $w'(x) = 0$

L'expérience gagnée à travers différentes approches (voir méthodes des singularités) montre qu'il n'y a pas de difficulté, seulement une augmentation du temps de calcul, pour en tenir compte de $w'(x) \neq 0$.

La solution de (4a) et (4b) est dans ce cas :

$$u_k(x) = \left[u_k(x_0) + \int_{x_0}^x Z1_k(\tau) d\tau \right] \text{ch } \omega k(x-x_0) + \\ -i \left[v_k(x_0) + \int_{x_0}^x Z2_k(\tau) d\tau \right] \text{sh } \omega k(x-x_0) \quad (6a)$$

$$v_k(x) = \left[v_k(x_0) + \int_{x_0}^x Z1_k(\tau) d\tau \right] \text{ch } \omega k(x-x_0) \\ +i \left[u_k(x_0) + \int_{x_0}^x Z1_k(\tau) d\tau \right] \text{sh } \omega k(x-x_0) \quad (6b)$$

$Z1_k$ et $Z2_k$ sont des fonctions définies par:

$$Z1_k(\tau) = \left[q_k(\tau) + f_k(\tau) \right] \text{ch } \omega k\tau - i r_k(\tau) \text{sh } \omega k\tau \quad (6c)$$

$$Z2_k(\tau) = - \left[q_k(\tau) + f_k(\tau) \right] \text{sh } \omega k\tau + i r_k(\tau) \text{ch } \omega k\tau \quad (6d)$$

avec:

τ coordonnée axiale courant.

$u_k(0), v_k(0)$ sont des valeurs de la solution, pour une valeur arbitraire fixée pour $x = x_0$.

En général, u_k et v_k sont illimitées, quand x tend vers l'infini amont et aval. Cependant, si $q_k(x)$, $r_k(x)$, et $f_k(x)$ prennent des valeurs constantes, à partir d'une distance D donnée de x_0 , il existe des conditions initiales $u_k(0)$ et $v_k(0)$, tel que $u_k(x)$ et $v_k(x)$ soit constants pour $|x - x_0| > D$.

Ces conditions initiales ont à vérifier les corrélations suivantes:

$$u_k(x_0) - i v_k(x_0) = - \frac{Z1_k(D) - Z2_k(D)}{\omega k} + \int_{x_0}^D \left[Z1_k(\tau) - Z2_k(\tau) \right] d\tau \quad (7a)$$

Ce qui donne une solution finie pour $x-x_0 > D$ (infini aval) .

$$u_k(x_0) + i v_k(x_0) = \frac{Z1_k(-D) - Z2_k(-D)}{\omega k} - \int_{x_0}^D \left[Z1_k(\tau) - Z2_k(\tau) \right] d\tau \quad (7b)$$

Ce qui donne une solution finie pour $x-x_0 < D$ (infini amont) .

Considérons la forme linéaire de (6a) et (6b), il est clair que $u_k(x)$ et $v_k(x)$ vérifient (7a) et (7b) pour $-D < x < D$.

Ceci prouve que pour l'écoulement bidimensionnel et périodique, discuté ici, les harmoniques des deux composantes de vitesse ne sont pas indépendantes.

En introduisant (7a) et (7b) dans (6a) et (6b), on obtient:

$$u_k(x) = \left[\frac{Xk(x, -D) - Xk(x, D)}{2} - \int_{-D}^D \delta(x, \tau) Xk(x, \tau) d\tau \right] \quad (8a)$$

$$v_k(x) = -i \left[\frac{Xk(x, -D) - Xk(x, D)}{2} + \int_{-D}^D Xk(x, \tau) d\tau \right] \quad (8b)$$

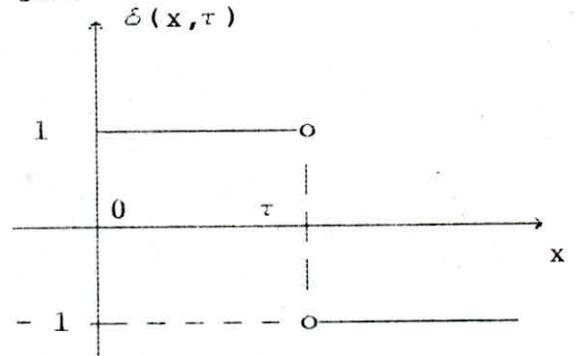
où :

$$Xk(x, \tau) = \frac{1}{2} \left[q_k(\tau) + f_k(\tau) + i \delta(x, \tau) \cdot r_k(\tau) \right] e^{-\omega k |\tau - x|} \quad (8c)$$

avec $\delta(x, \tau)$ une fonction étagée telle que:

$$\delta(x, \tau) = 1 \text{ si } \tau > x$$

$$\delta(x, \tau) = -1 \text{ si } \tau < x$$



Les solutions introduisent des intégrales couvrant le domaine $[-D, D]$, où les solutions varient avec x , et qui est ainsi pris comme domaine de calcul.

Du point de vue des calculs numériques, ce domaine devrait être le plus petit possible.

Pour le calcul de grilles, le champ d'écoulement va être divisé en trois sous domaines axiaux, I1, I2, et I3 (Fig.2.), où C, est la corde axiale d'une aube. Les fonctions $r_k(r)$ et $q_k(r)$ peuvent être prises identiques à zéro dans I1 et I3 (écoulement conservatif et irrotationnel).

A l'intérieur de I2, les solutions (8a) et (8b) peuvent s'écrire:

$$u_k(x) = wk1(x) + wk3(x) - \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) Xk(x, \tau) d\tau \quad (9a)$$

$$v_k(x) = -i \left[wk1(x) - wk3(x) + \int_{-c/2}^{c/2} Xk(x, \tau) d\tau \right] \quad (9b)$$

où :

$$wk1(x) = -1/2 u_k(-D) e^{-\omega k |D+x|} + \left[u_k(-c/2) + i v_k(-c/2) \right] e^{-\omega k |c/2+x|} \quad (9c)$$

$$wk3(x) = -1/2 u_k(D) e^{-\omega k |D-x|} + \left[u_k(c/2) - i v_k(c/2) \right] e^{-\omega k |c/2-x|} \quad (9d)$$

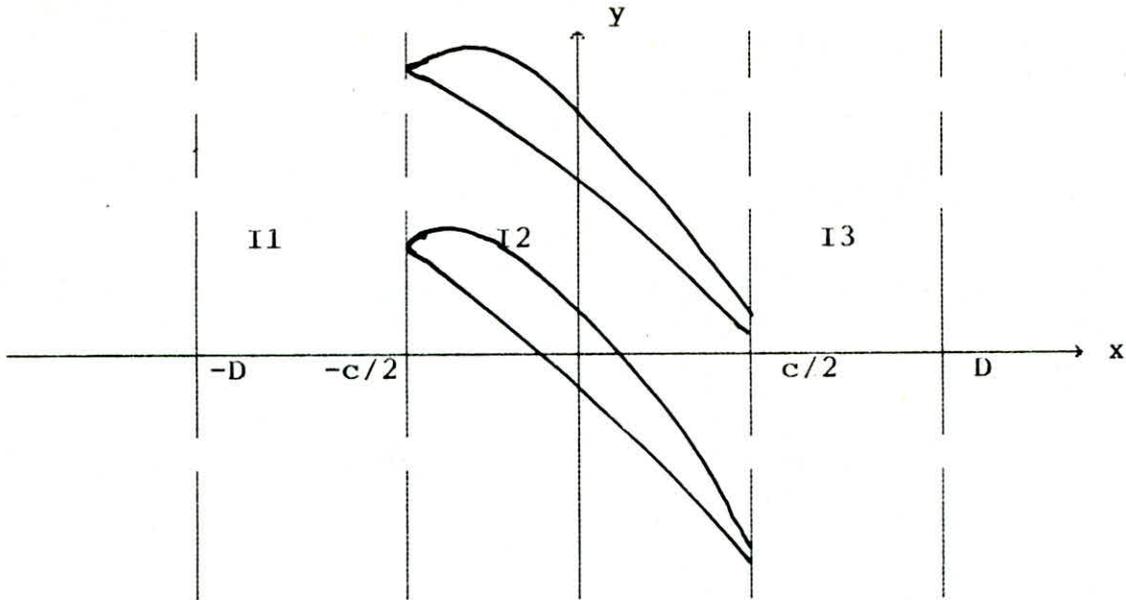


Fig.2. Division du champs d'écoulement

Les solutions correspondantes dans I1 et I3 ($|x| > c/2$) sont calculées après, par l'intermédiaire de (6a) et (6b), en prenant respectivement $x_0 = \pm c/2$.

La forme des fonctions $u_k(x)$ et $v_k(x)$ données par (9a) et (9b) respectivement, est une fonction du type d'écoulement:

1. Si l'écoulement est subsonique à l'infini amont et aval, il doit être uniforme pour $\tau = D$, et $\tau = -D$. Ainsi, $u_k(D) = u_k(-D) = 0$ (pour $k = 0$). Les fonctions $w_{k1}(x)$, et $w_{k3}(x)$ dépendent seulement des conditions aux plan d'entrée, et celui de sortie de la grille (limites amont et aval de I2).

2. Si l'écoulement est incompressible, ($f_k(x) = 0$), $w_{k1}(x)$ et $w_{k3}(x)$ sont nulles. Ceci peut être montré en introduisant (3) dans I3 avec $x_0 = c/2$, puis dans I1 avec $x_0 = -c/2$:

$$u_k(-c/2) + iv_k(-c/2) = 0 \quad (\text{dans I1})$$

$$u_k(c/2) - iv_k(c/2) = 0 \quad (\text{dans I3})$$

et ainsi, $w_{k1}(x) = w_{k3}(x) = 0$.

Dans ce cas (9a) et (9b) deviennent:

$$u_k(x) = - \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) X_k(x, \tau) d\tau \quad (9e)$$

$$v_k(x) = -i \int_{-c/2}^{c/2} X_k(x, \tau) d\tau \quad (9f)$$

et sont valables pour toutes les valeurs de x entre $-D$ et D .

2.6. MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT DANS UNE GRILLE D'AUBE

Les aubes localisées entre $-c/2$ et $c/2$, sont définies par leur ligne moyenne $S(x)$, et par la distribution de leur épaisseur $\varepsilon(x)$, qui est symétrique par rapport à $S(x)$ (Fig.3.) .

Le profil d'une aube est ainsi donné par:

$$P(x) = S(x) + \lambda \cdot \varepsilon(x) \quad (10)$$

avec $\lambda = 1$ sur l'extrados, et $\lambda = -1$ sur l'intrados.

La tangente au profil pour $x = \pm c/2$ est parallèle à Oy . Et la divergence et le rotationnel sont nuls en dehors du profil, $Q(x,y)$ et $R(x,y)$ donnés par (1a) et (1b), sont définies par des fonctions de la forme, $\alpha(x)\overline{T}(x,y), \beta(x)\overline{T}(x,y)$, respectivement, où $\overline{T}(x,y)$ est une fonction périodique, qui est nulle à l'extérieur du profil, et coïncide avec une fonction $T(x,y)$, choisie arbitrairement à l'intérieur du profil, mais qui est nulle pour $y = S \pm \varepsilon$ (Fig.4.) .

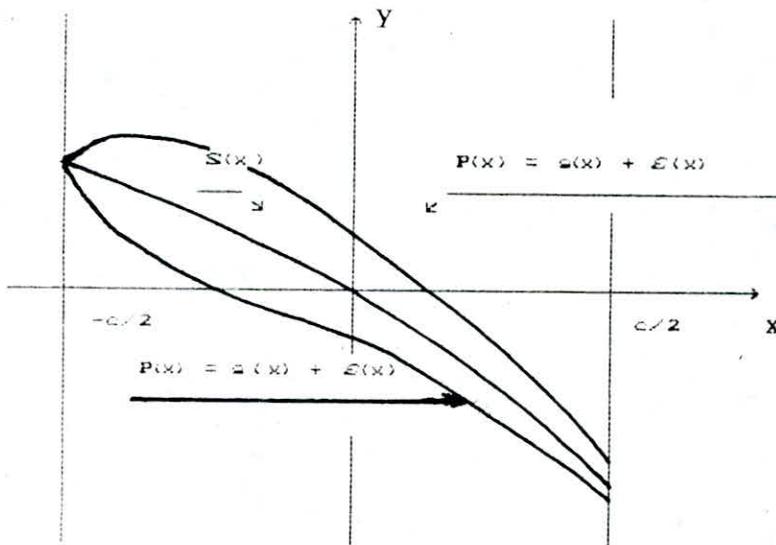


Fig.3.

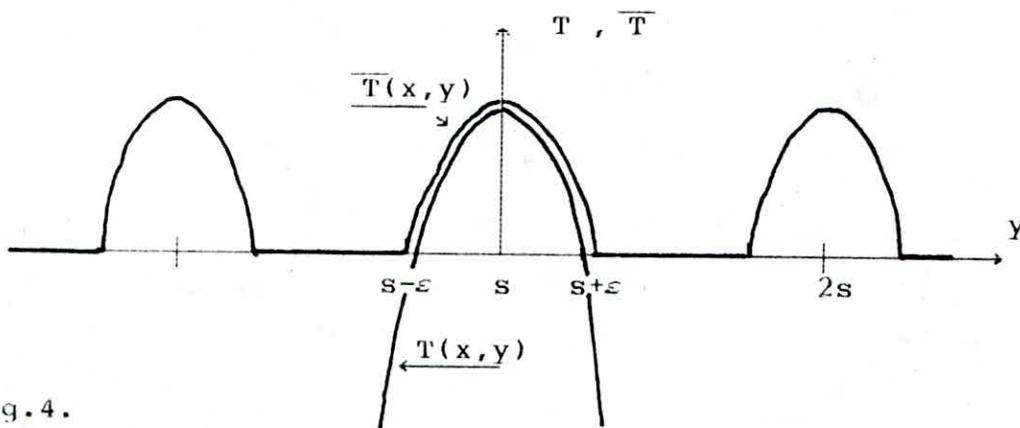


Fig.4.

Les séries de Fourier correspondantes à \overline{T} peuvent s'écrire:

$$\overline{T}(x, y) = \sum_k t_k(\varepsilon(x)) e^{i\omega k(y-s(x))} \quad (11)$$

où $t_k(\varepsilon(x))$ est nul pour $\varepsilon(x) = 0$.

Ainsi:

$$Q(x, y) = \sum_k q_k(x) e^{i\omega k y} = \alpha(x) \sum_k t_k(\varepsilon(x)) e^{i\omega k(y-s(x))} \quad (12a)$$

$$R(x, y) = \sum_k r_k(x) e^{i\omega k y} = \beta(x) \sum_k t_k(\varepsilon(x)) e^{i\omega k(y-s(x))} \quad (12b)$$

$\alpha(x)$ et $\beta(x)$ s'expriment facilement en fonction de $u_0(x)$ et $v_0(x)$, qui représente la moyenne des composantes de la vitesse.

On a avec (5a) et (5b) ($w'(x)=0$)

$$\alpha(x) t_0(\varepsilon(x)) = q_0(x) = - \frac{du_0}{dx} - f_0(x)$$

$$\beta(x) t_0(\varepsilon(x)) = r_0(x) = - \frac{dv_0}{dx}$$

Ainsi:

$$\alpha(x) = \frac{1}{t_0(\varepsilon(x))} \left[\frac{dv_0}{dx} - f_0(x) \right] \quad (13a)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{t_0(\varepsilon(x))} r_0(x) \quad (13b)$$

$q_k(x)$ et $r_k(x)$ deviennent alors:

$$q_k(x) = \left[\frac{du_0}{dx} - f_0(x) \right] \frac{t_k(\varepsilon(x))}{t_0(\varepsilon(x))} e^{-i\omega k S(x)} \quad (14a)$$

$$r_k(x) = \frac{dv_0}{dx} \frac{t_k(\varepsilon(x))}{t_0(\varepsilon(x))} e^{-i\omega k S(x)} \quad (14b)$$

avec $X_k(x, t)$ définie par (8a), qui devient pour les valeurs de x dans 12:

$$X_k(x, \tau) = X^*k(x, \tau) + X'k(x, \tau) \quad (15a)$$

avec X^*k la partie incompressible de X_k :

$$X^*k(x, \tau) = 1/2 \left[\frac{du_0}{dx}(\tau) + i\delta(x, \tau) \frac{dv_0}{dx}(\tau) \right] \quad (15b)$$

et $X'k(x, \tau)$ la partie compressible :

$$X'k(x, \tau) = 1/2 \left[f_k(\tau) - f_0(\tau) \frac{t_k(\varepsilon(x))}{t_0(\varepsilon(x))} e^{-i\omega k S(x)} \right] e^{-\omega k |\tau - x|} \quad (15c)$$

2.7. EXPRESSION DE LA VITESSE

Pour raison de simplicité, le développement sera fait uniquement pour le cas incompressible.

Dans le champs d'écoulement, en utilisant (9e), (9f) et (15b), les composantes $U(x,y)$ et $V(x,y)$ de la vitesse, sont obtenues à partir des relations suivantes :

$$U(x,y) = u_0(x) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau} G_u(x,y,\tau) d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau} G_v(x,y,\tau) d\tau \quad (16a)$$

$$V(x,y) = v_0(x) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau} G_v(x,y,\tau) d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau} G_u(x,y,\tau) d\tau \quad (16b)$$

où G_u et G_v , sont données par:

$$G_u(x,y,\tau) = \delta(x,\tau) G(x,y,\tau) \quad (16c)$$

$$G_v(x,y,\tau) = i G(x,y,\tau) \quad (16d)$$

$$G(x,y,\tau) = 1/2 \sum \frac{t_k(\varepsilon(x))}{t_0(\varepsilon(x))} e^{-i\omega k [|\tau-x| + (S(\tau)-y)]} \quad (16e)$$

$G_u(x,\tau,y)$ est discontinue pour $x = \tau$.

2.8. CONDITIONS A IMPOSER SUR LA PAROI DU PROFIL
(SANS LE BORD D'ATTAQUE ET LE BORD DE FUITE)

Sur la paroi du profil, d'après (16a) et (16b), on a:

$$U_p(x) = u_0(x) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau} G_u(x, \tau, P(x)) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau} G_v(x, \tau, P(x)) d\tau \quad (17a)$$

$$V_p(x) = v_0(x) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau} G_v(x, \tau, P(x)) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau} G_u(x, \tau, P(x)) d\tau \quad (17b)$$

où $P(x)$ a déjà été donné, voir (10).

Le calcul de la vitesse, exige la détermination des coefficients de Fourier, $tk(\varepsilon(\tau))$ de $\overline{T}(x, y)$ (11), qui est arbitraire. Ses formes particulières pour un profil donné, doivent être identifiées par l'intermédiaire des conditions de glissement:

$$\frac{V_p(x)}{U_p(x)} = P'(x)$$

$P'(x)$ est la dérivée de $P(x)$ par rapport à x , elle peut s'écrire comme:

$$v_0(x) - P'(x)u_0(x) = \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau} H_u(x, \tau) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau} H_v(x, \tau) d\tau \quad (18a)$$

avec H_u et H_v définies par:

$$H_u(x, \tau) = G_v(x, \tau, P(x)) - P'(x)G_u(x, \tau, P(x)) \quad (18b)$$

$$H_v(x, \tau) = G_u(x, \tau, P(x)) - P'(x)G_v(x, \tau, P(x)) \quad (18c)$$

qui sont discontinues pour $x = \tau$.

L'application de (18a) pour un nombre de points sur l'extados et l'intrados, nous permet d'évaluer $\overline{T}(x, y)$, qui est choisie de telle façon, à optimiser la convergence de la série exprimant $G(x, \tau, P(x))$.

2.9 TRAITEMENT DES POINTS NA ET NF
(BORD D'ATTAQUE ET BORD DE FUITE)

Au bord de fuite et celui d'attaque, les relations précédentes ne peuvent pas s'appliquer, car $P'(x)$ tend vers l'infini.

D'autre part, des relations supplémentaires doivent être utilisées, pour imposer une vitesse finie au bord de fuite (condition de KUTTA JOUKOVSKI), puis les relations suivantes sont utilisées .

Au points NA et NF (Fig.5), la conservation du moment peut s'écrire:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{R}$$

où V représente le module de la vitesse, R le rayon de courbure de la paroi, et n la direction orthogonale à la paroi.

En plus, la composante axiale de la vitesse U_p s'annule en ces points:

$$U_p(\pm c/2) = 0$$

Maintenant, tenant compte de la direction de la paroi en NA et en NF, les équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial V_p}{\partial x} = \frac{\partial U_p}{\partial y} = \frac{V_p(\pm c/2)}{R} \quad (19a)$$

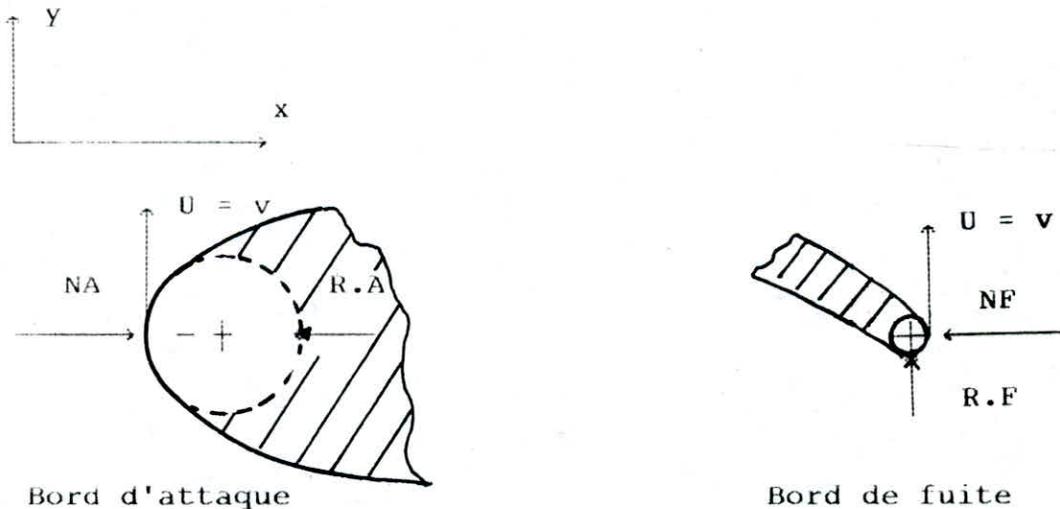


Fig.5.

$$U_p(\pm c/2) = 0 \quad (19b)$$

La dérivée $\partial U_p / \partial y$ est évaluée pour $x = \pm c/2$, $y = S(\pm c/2)$, dans:

$$\frac{\partial U_p}{\partial y} = (U(x, y+e) - U(x, y-e)) / (2e)$$

où e représente une petite fraction du pas (< 0.01).

En tenant compte de (16a), (16b), (17a) et (17b), (19a) et (19b) peuvent s'écrire :

$$\int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau} Fu(x, \tau, e) d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau} Fv(x, \tau, e) d\tau = v_0(x) \quad (20a)$$

$$\int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau} Gu(x, \tau, P(x)) d\tau + \int_{c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau} Gv(x, \tau, P(x)) d\tau = u_0(x) \quad (20b)$$

Pour $x = -c/2$ (bord d'attaque), et $x = c/2$ (bord de fuite), avec Fu et Fv définies par:

$$Fu(x, \tau, e) = (Gu(x, \tau, S(x)+e) - Gu(x, \tau, S(x)-e)) \frac{R}{2e} + Gv(x, \tau, S(x)) \quad (20c)$$

$$Fv(x, \tau, e) = -(Gu(x, \tau, S(x)+e) - Gu(x, \tau, S(x)-e)) \frac{R}{2e} + Gv(x, \tau, S(x)) \quad (20d)$$

2.10 POSSIBILITE D'APPLICATION POUR L'ECOULEMENT DANS UNE GRILLE D'AUBES

Les équations (17a) et (17b) relient:

(a) les composantes U_p et V_p du vecteur vitesse en chaque point du profil.

(b) les vitesses moyennes $u_0(x)$ et $v_0(x)$ sur le domaine I_2 .

(c) les caractéristiques géométriques complètes de la grille, spécialement la courbure et l'épaisseur du profil, $S(x)$ et $\varepsilon(x)$.

En partant de l'un des trois groupes d'informations ci-dessus, la solution de (17a) et (17b) en chaque point de l'aube, nous donne les autres informations .

Par exemple, partant de la vitesse en chaque point du profil, les caractéristiques géométriques du profil peuvent être obtenues , ce qui correspond au mode inverse 1.

Au contraire, connaissant la géométrie du profil, il est possible d'obtenir et les vitesses, et les vitesses locales (méthode directe).

Une autre possibilité peut être envisagée, elle consiste à donner la répartition de v_0 et une loi d'épaisseur , et d'obtenir la distribution de la courbure $S(x)$. Ce qui correspond au mode inverse 2.

2.11. UTILISATION DE LA METHODE EN MODE INVERSE

Considérons la relation représentant la condition de glissement :

$$Hu(i,j) \frac{du_0}{dr}(j) + Hv(i,j) \frac{dv_0}{dr}(j) = B(i) \quad (E)$$

avec

$$Hu(i,j) = \{P'(x_i) Cu(i,j) + Cv(i,j)\} w(j)$$

$$Hv(i,j) = \{P'(x_i) Cv(i,j) - Cu(i,j)\} w(j)$$

$$B(i) = 2/c \{P'(x_i) u_0(-c/2) - v_0(-c/2)\}$$

$Hu(i,j)$ et $Hv(i,j)$, sont donc des quantités s'exprimant analytiquement, en fonction de l'ordonnée de la ligne moyenne et de l'épaisseur aux différents points du profil.

2.12 CAS DU MODE INVERSE 1

Supposons que l'on s'impose u_0 et v_0 dans le champs, c'est à dire, entre le bord d'attaque et le bord de fuite . l'équation (E) écrite en chaque point x_i le long de la corde, nous donne un système de $2N$ équations non linéaires :

N points sur l'extrados

$$[Hue]\{du_0/dr\} + [Hve]\{dv_0/dr\} = \{Be\} \quad (E1)$$

N points sur l'intrados

$$[Hui]\{du_0/dr\} + [Hvi]\{dv_0/dr\} = \{Bi\} \quad (E2)$$

vérifiées par les $2N$ inconnues :

$$S(x_i) \quad i = 1, N$$

$$\varepsilon(x_i) \quad i = 1, N$$

On peut donc en principe, déterminer le profil défini par $S(x_i)$ et $\varepsilon(x_i)$ en chaque point, correspondant à une répartition de $u_0(x_i)$ et $v_0(x_i)$ donnée .

Le lecteur intéressé pourra envisager la résolution, qui n'entre pas dans le cadre de notre étude, en effet, on ne fait ici que poser le problème . Par contre, on essaiera de résoudre le problème dans le cas du mode inverse 2 .

2.13. CAS DU MODE INVERSE 2

ici par contre, on s'impose la répartition de v_0 , et une loi d'épaisseur pour le profil. Evidemment, on est désavantagé par rapport au mode inverse 1 du point de vue application, où l'on peut avoir pratiquement toutes les caractéristiques géométriques du profil, sachant uniquement les composantes de la vitesse, pour chaque point de la corde.

Toujours est-il, il est encore possible d'avoir une caractéristique, qui est la ligne moyenne $S(x)$, sachant toutefois, une composante de la vitesse, et une loi d'épaisseur pour le profil.

L'applicabilité de ce mode ci, se justifie dans le cas où on disposerait de tableaux, donnant des lois d'épaisseurs tirées de l'expérience.

Dans le cas d'une épaisseur négligeable ($\varepsilon(x) \rightarrow 0$), ce qui est le cas des aubes des turbines, des compresseurs, des éoliennes et ainsi que d'autres types de turbo-machines, ce mode ne présente aucun désavantage par rapport au premier.

Il faut noter, qu'il est possible de déduire la seconde composante de la vitesse, au cours des calculs faits pour obtenir $S(x)$.

Le problème peut se ramener un peu au précédent, en éliminant $\{du_0 / dr\}$ (ou bien $\{dv_0 / dr\}$).

Dans les systèmes (E1) et (E2), exprimons $\{du_0 / dr\}$ en fonction de tous les autres termes. On obtient ainsi :

$$\{du_0 / dr\} = [Hue]^{-1} \{ \{Be\} - [Hve] \cdot \{dv_0 / dr\} \} \quad (E3)$$

$$\{du_0 / dr\} = [Hui]^{-1} \{ \{Bi\} - [Hvi] \cdot \{dv_0 / dr\} \} \quad (E4)$$

en égalant (E3) à (E4), on obtient un système non linéaire de dimension N, de la forme :

$$\{F\} = \{0\} \quad (E5)$$

avec $F(i) = f_i(s_1, s_2, \dots, s_n) \quad i=1, N$

où s_1, s_2, \dots, s_n désignent respectivement : $S(x_1), S(x_2), \dots, S(x_n)$, ce sont donc les ordonnées de la ligne squelettique aux points x_i de la corde.

CHAPITRE 3

RESOLUTION DU PROBLEME.



3.1. INTRODUCTION

On peut résoudre un système tel que (E5) par plusieurs méthodes [13], dont on peut citer :

la méthode des substitutions successives, qui comprend :

- la méthode de Jacobi
- la méthode de Gauss-Seidel

la méthode de relaxation

la méthode de Newton-Raphson

etc...

On peut envisager d'essayer les quatre méthodes citées ci-dessus, et puis de faire une comparaison entre les résultats de celles-ci, mais vu le temps que cela pourrait prendre, on se contentera pour le moment des résultats fournis par la dernière méthode .

La méthode de Newton-Raphson (ANNEXE 9), permet de passer d'un système non linéaire tel que (E5), à un système linéaire de la forme :

$$A^k \cdot \Delta X^k = B^k \quad (E6)$$

pour lequel, plusieurs méthodes de résolution sont proposées [13].

Mais dans notre cas, la formation de la matrice A^k n'est pas évidente.

En effet, on se trouve confronté à deux problèmes :

1) Le vecteur colonne $\{F\}$ donné par (E5), comporte des matrices inverses.

2) En plus de cela, vient s'ajouter le problème de dérivation des termes de ce même vecteur.

L'inconvénient est plus ressenti dans le domaine du calcul numérique, car déjà l'inversion des matrices n'est pas très tolérée chez les informaticiens, vu le temps d'exécution qu'elle prendrait.

On a donc jugé utile de contourner le problème, au lieu d'aborder une jungle et de s'égarer.

Certes, cela n'a pas été simple, mais fort heureusement, on a finalement réussi.

3.2. DEVELOPPEMENT

On a fait introduire certaines modifications sur l'équation (E5), sans pour autant modifier la forme de l'équation.

L'idée était de se débarrasser de toutes les matrices inverses.

L'équation (E5) s'écrit sous une forme développée comme suit:

$$[Hue]^{-1}\{Be\} - [Hui]^{-1}\{Bi\} - \left[[Hui]^{-1}[Hve] - [Hui]^{-1}[Hvi] \right] \left\{ \frac{dvo}{d\tau} \right\} = \{0\} \quad (E5')$$

En multipliant le tout par [Hue] à droite, et en regroupant les mêmes termes, on obtient:

$$\{Be\} - [Hve] \left\{ \frac{dvo}{d\tau} \right\} - [Hue][Hui]^{-1} \left[\{Bi\} - [Hvi] \left\{ \frac{dvo}{d\tau} \right\} \right] = \{0\} \quad (E5'')$$

où sous une forme plus compacte,

$$\{X\} - [Hue][Hui]^{-1} \{Y\} = \{0\} \quad (E5''')$$

On a ainsi éliminé [Hue]⁻¹, il nous reste encore [Hui]⁻¹.

En écrivant {Y} en fonction de [Hui] tel que:

$$\{Y\} = [Hui] \cdot \{Z\} \quad (E7)$$

où {Y} et [Hui] sont connus, et {Z} est obtenu par la résolution du système (E7).

L'équation (E5'') devient alors :

$$\{X\} - [Hue]\{Z\} = \{0\} \quad (E8)$$

ou sous une forme plus compacte;

$$\{F2\} = \{0\} \quad (E8')$$

Donc, tout en ayant contourné le problème, on a bien gardé la forme de l'équation.

Pour pouvoir remplir la matrice A^k, il faut dériver les termes du vecteur {F2}.

D'après ce qui précède, {F2} s'écrit:

$$\{F2\} = \{Be\} - [Hve] \left\{ \frac{dvo}{d\tau} \right\} - [Hue]\{Z\} \quad (E9)$$

Soit {F2'}, le vecteur des dérivées des éléments de {F2}, {F2'} s'écrit:

$$\{F2'\} = \{Be'\} - [Hve'] \left\{ \frac{dvo}{d\tau} \right\} - [Hue']\{Z\} - [Hue]\{Z'\} \quad (E10)$$

où {Z} a déjà été défini par (E7), et {Z'} le vecteur des dérivées des éléments de {Z}.

La dérivation de (E7) donne:

$$\{Y'\} = [Hvi']\{Z\} + [Hui]\{Z'\} \quad (E11)$$

L'équation (E7) nous donne $\{Z\}$, et (E11) peut s'écrire sous la forme:

$$\{W\} = [Hui]\{Z'\} \quad (E12)$$

L'équation (E12) est un système linéaire, qui donne $\{Z'\}$.

Finalement, on peut remplir la matrice A^k .

3.3. INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites qui sont en nombre de quatre (deux au bord d'attaque, et deux au bord de fuite), présentent quelques inconvénients, en ce qui concerne leur utilisation.

En effet, chacune des quatre équations, est fonction des variables : $S_i, i = \overline{1, N}$.

On pourrait envisager donc, de les ajouter aux N équations précédentes, et obtenir ainsi, un système de $N+4$ équations, avec comme inconnues:

RA: rayon de courbure du bord d'attaque

RF: rayon de courbure du bord de fuite

SA: ordonnée du bord d'attaque

SF: ordonnée du bord de fuite

$S(j) \quad j = \overline{1, N}$: ordonnées de la ligne squelettique

Cela revient à élargir la matrice A^k à N dimensions, en une matrice FDI^k à $N + 4$ dimensions, ainsi que les vecteurs ΔX^k et B^k , en DX^k et FD^k respectivement, suivant le schéma ci-dessous:

$$[FDI^k] = \left[\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & A^k & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right]$$

$$\{ DX^k \} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\overline{\overline{\Delta X^k}}} \\ \hline \hline \hline \end{array} \right\}$$

$$\{ FD^k \} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\overline{\overline{B^k}}} \\ \hline \hline \hline \end{array} \right\}$$

Cela nous est permis, car on peut ajouter aux N fonctions $F2(i)$ de (E8'), quatre autres fonctions, $f1, f2, f_{N+3},$ et f_{N+4} , représentant les conditions aux limites, qui peuvent s'écrire:

Au bord d'attaque:

$$f1 = \{UA\}^t \{Z\} + \{VA\}^t \left\{ \frac{dvo}{d\tau} \right\} - 2/c \, vo(-c/2) = 0$$

$$f2 = \{MA\}^t \{Z\} + \{NA\}^t \left\{ \frac{dvo}{d\tau} \right\} - 2/c \, uo(-c/2) = 0$$

Au bord de fuite:

$$f_{n+3} = \{MF\}^t \{Z\} + \{NF\}^t \left\{ \frac{dvo}{d\tau} \right\} - 2/c u_0(-c/2) = 0$$

$$f_{n+4} = \{UF\}^t \{Z\} + \{VF\}^t \left\{ \frac{dvo}{d\tau} \right\} - 2/c v_0(-c/2) = 0$$

Et enfin, après dérivation de ces dernières, on arrive à former le système linéaire à N+4 équations et N+4 inconnues:

$$[FD1^k] \{DX^k\} = \{FD^k\} \quad (E13)$$

Il ne nous reste plus qu'à construire un algorithme, et d'en tirer un programme, en vue d'une résolution par l'outil informatique.

3.4. ALGORITHME DE RESOLUTION

Dans le but de rendre notre travail plus pratique, on a jugé utile d'aborder la résolution par ordinateur.

A cette fin, on a construit un algorithme de résolution, lequel est résumé dans un organigramme.

Les données sont:

- 1) Le nombre de points sur la corde (plus il est grand, plus on tend vers la solution exacte de la ligne squelettique).

Il peut être introduit par le clavier ou par un fichier de données.

- 2) La corde C du profil

Elle peut être introduite par le clavier ou par un fichier de données.

- 3) Une répartition de la composante de vitesse V_0 .

Le choix de cette répartition peut être guidé par l'expérience.

Introduction par un fichier de données.

- 4) Une solution initiale S^* , aussi proche que possible de la solution exacte, afin d'assurer la convergence.

Le choix de S^* , est d'une importance primordiale, en effet, un simple mauvais choix, peut rendre l'algorithme sans intérêt pratique (divergence vers des valeurs aberrantes), car lors de la résolution par la méthode de Newton-Raphson [13], on a supposé le problème de localisation de la racine, déjà résolu.

Introduction par un fichier de données.

- 5) Une loi d'épaisseur.

Celle-ci pourra être choisie à partir des documents appropriés.

De notre côté, on a essayé la loi d'épaisseur du profil N°490 de Göttingen.

Le lecteur a le choix de la garder, ou de la changer selon ses exigences, car c'est un bloc distinct dans le programme.

- 6) Le nombre des iterations.

Il ne doit pas être grand, car la méthode de Newton-Raphson converge rapidement, s'il y'a convergence [13].

- 7) Une erreur tolérée de la solution.

A partir de toutes ces données, on obtient par revanche la forme de la ligne squelettique, ainsi que les rayons de courbure du bord d'attaque, et du bord de fuite.

Tout ceci, en passant par :

1) L'introduction des éléments de la formule de Gauss,

- les zéros du polynome de Legendre $t(j)$.
- les facteurs poids $w(j)$.

Le lecteur a le choix entre les introduire à partir d'un fichier de données, où le nombre de points sera limité, ou bien d'apporter un algorithme, donnant ces coefficients pour n'importe quel nombre de points N .

N.B:

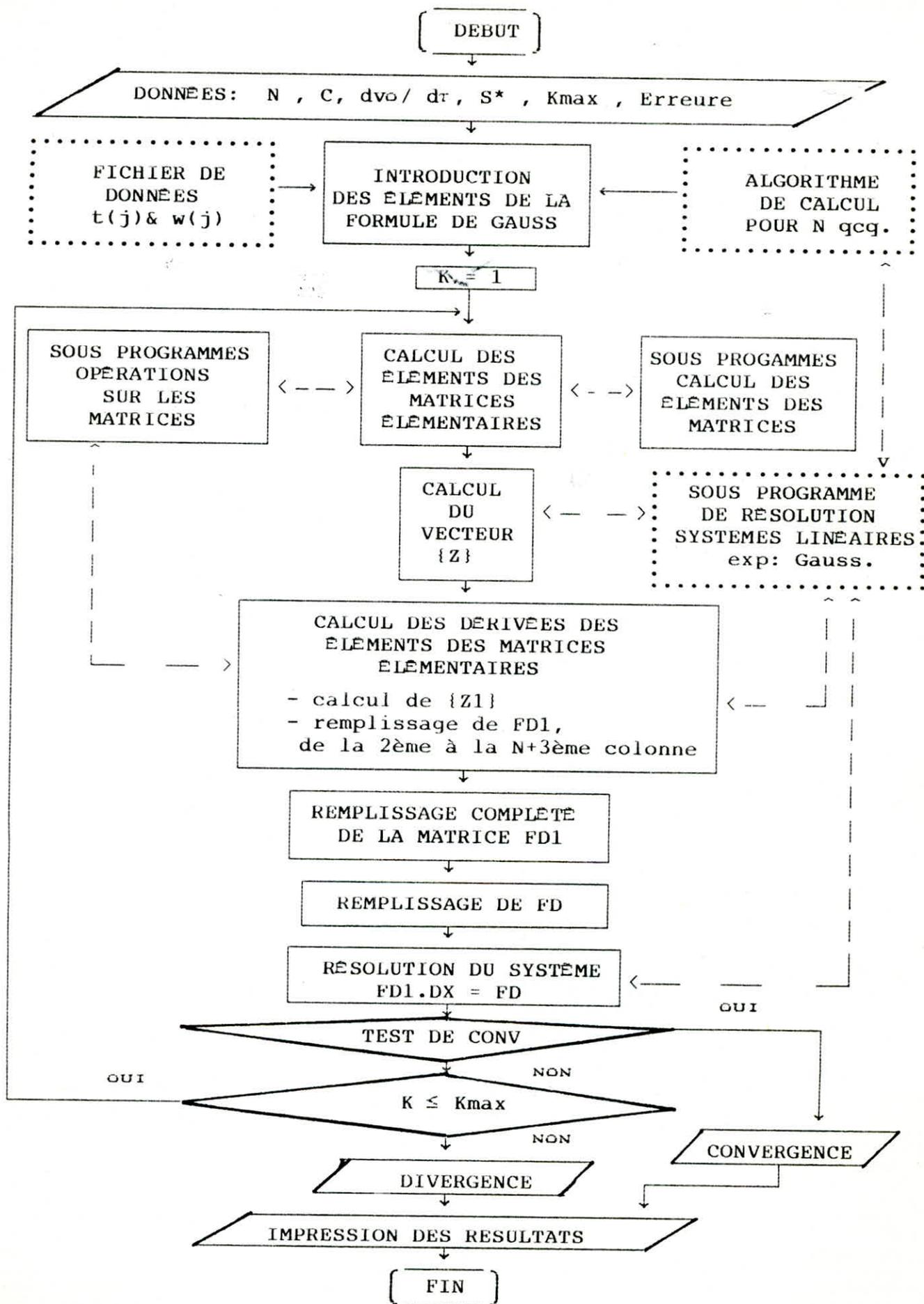
On a construit un algorithme donnant les éléments de la formule de Gauss, pour n'importe quel nombre de points, le principe étant simple, il suffit de résoudre un système non linéaire[14], cela revient à un système tel que (E5). Malheureusement, mis en exécution notre algorithme ne donne pas de résultats, et vu que cela n'est pas le but de notre travail, nous n'avons pas insisté la dessus.

3.4.1. ORGANIGRAMME

La meilleure façon de résumer un algorithme, c'est de dresser un organigramme.

Afin de rendre celui-ci visible, on a évité de trop le surcharger par des détails inutiles.

N.B: Les blocs en pointillés, peuvent être éventuellement changés, en faisant juste attention aux déclarations, ainsi qu'aux appels s'il s'agissait de sous programmes.



3.4.2. PROGRAMME

Par la lumière de l'organigramme ci-dessus, on a écrit un programme nommé OB, assez long d'ailleurs, comportant:

- Un programme principal .
- 17 sous programmes "function", dont la nécessité est observée lors du calcul des éléments des matrices élémentaires, ainsi que leurs dérivées.
- 5 sous programmes subroutine, comportant des opérations sur les matrices, et un mode de résolution des systèmes linéaires (on a utilisé la résolution de Gauss, le lecteur pourra le changer).

Le programme en détail est présenté dans l'annexe 10.

3.5. RESULTATS ET COMMENTAIRES

Après maintes reprises de la mise en exécution du programme, malheureusement, pas de résultats.

Ceci peut être dû à beaucoup de facteurs:

- Le mode de résolution des systèmes linéaires proposé ici, ne convient peut être pas à ce genre de problème, d'ailleurs, le pivot était nul à chaque fois. A partir de cette idée, on a essayé d'autres modes de résolution, hélas sans résultat.

- Peut être que le problème est simplement dû, à un mauvais choix de la solution initiale S^* .

- etc...

Bref, quelle que soit la cause, le problème reste toujours posé, et en attendant le secours qui lui sera apporté, on se contentera de ceci, tout en espérant que ce travail servira de base solide pour le secouriste.

CHAPITRE 4

CONCLUSION



CONCLUSION

Ce qui nous a poussé à choisir ce sujet, c'est bien la passion de découvrir, et non pas l'obsession par les calculs longs et difficiles.

Mais, puisque dans ce monde toute chose a un prix, on a préféré payer, afin d'avoir en contre partie, le plaisir de la découverte.

La plus grande déception qu'on a eu, c'était lors des échecs multiples, pendant la mise en exécution du programme, c'était arriver à la fontaine, et ne pas boire. Mais fort heureusement, lors du long parcours, en partant du désert, et en arrivant à la fontaine, on a découvert beaucoup de belles choses.

D'autre part, comme on l'a mentionné auparavant, le travail dans ce domaine est un travail de groupe, donc peut-être qu'on s'est surestimé, en pensant arriver tout seul à traiter cette partie.

Enfin, rien n'est encore perdu, puisque quelqu'un d'autre pourrait faire partie de l'équipe, et partir avec ce qu'on a réussi à faire, voire même, essayer d'améliorer le programme pour le faire marcher.

C'est avec cet esprit de complémentarité, qu'on se juge avoir achevé notre mission, et d'avoir contribué, d'une façon aussi modeste soit elle, dans ce vaste domaine des turbomachines.

ANNEXES



* Décomposition du problème d'écoulement autour d'un profil mince à un nombre de Reynolds élevé.

Pour des nombres de Reynolds élevés, l'épaisseur δ de la couche limite, est beaucoup plus petite par rapport à la longueur caractéristique de l'obstacle. Dans ce cas, le problème d'écoulement autour d'un profil mince, en incidence faible par rapport à l'écoulement homogène et parallèle (fig.1.1.a), peut donc se décomposer en deux parties [12] selon l'approximation de couche limite:

* Le problème extérieur d'un fluide considéré idéal, pour lequel $\mu \rightarrow 0$, avec pour conséquence que $\delta \rightarrow 0$, et que la vitesse V_n normale à la paroi du profil est nulle. Le vecteur vitesse devient ainsi tangent à la paroi du profil (fig.1.1.b).

Ceci entre dans le cadre de notre étude.

* Le problème intérieur de la couche limite, pour lequel la vitesse normale V_n , et tangentielle V_t , sont égales à zéro à la paroi, tandis que la vitesse à la limite extérieure de la couche est donnée par la résolution du problème extérieur (fig.1.1.c).

Notons toutefois, que ceci n'entre pas dans le cadre de notre étude.

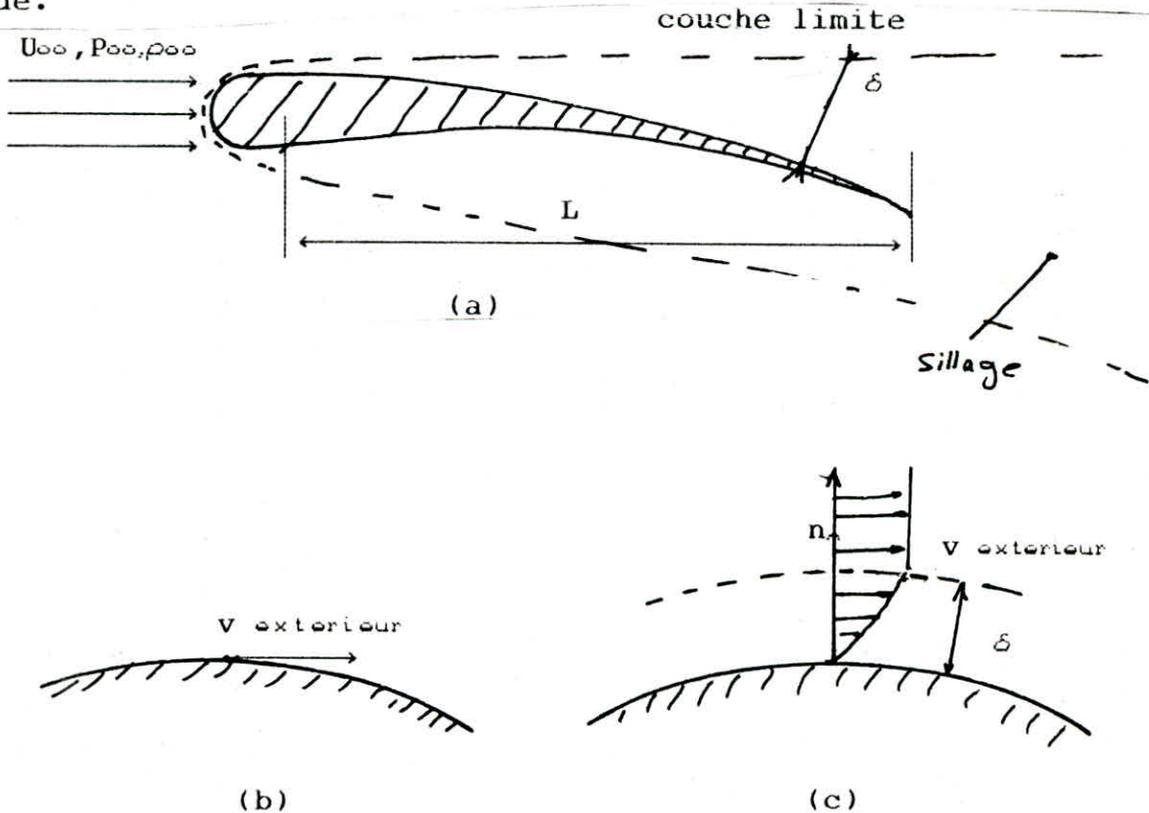


Fig.1.1. Décomposition du problème d'écoulement autour d'un profil mince à un nombre de Reynolds élevé (a), en un problème extérieur (b), et intérieur (c).

* Conception d'un écoulement incompressible.

Dans le cas où le fluide est compressible, on peut le considérer comme incompressible, si l'écoulement est stationnaire et présente des nombres de Mach petits. En effet, le développement de l'équation donnant la variation de la densité avec le nombre de Mach, donne:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{K-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{K-1}} = 1 + \frac{1}{2} M^2 + O(M^4)$$

Pour $M = 0.2$, la variation de densité est au maximum de 2% .

Un écoulement instationnaire d'un fluide compressible peut aussi être considéré comme incompressible, pourvu que le temps τ caractéristique du mouvement soit grand par rapport au temps de déplacement des ondes acoustiques d'une distance L , c'est à dire:

$$\tau \gg L/a$$

où L est la distance caractéristique de l'écoulement, et " a " est la vitesse du son.

En conclusion, la conception d'un écoulement incompressible, équivaut à l'hypothèse d'une vitesse infinie de propagation des perturbations de pression faibles, dans l'écoulement (cas des ondes acoustiques).

* Méthode de superposition de singularités.

L'écoulement autour d'un corps, peut être engendré par la superposition d'une source, d'un dipôle, à un écoulement homogène et parallèle. Dans cette approche, la forme du corps est obtenue comme résultat secondaire de la superposition. La superposition à un écoulement homogène et parallèle d'un dipôle et d'un fil tourbillonnaire, traduit l'écoulement autour d'un cylindre avec une portance $F_y = \rho U_{\infty} \Gamma$.

De façon similaire, un profil portant, avec une ligne de squelette courbée et inclinée d'un angle α , par rapport à l'écoulement plan et homogène, peut être construit par la superposition à un écoulement homogène, d'une distribution de sources et de puits, le long de l'axe du profil symétrique, puis, par adjonction d'une couche tourbillonnaire, le long de la ligne squelettique courbée C (fig.3.1).

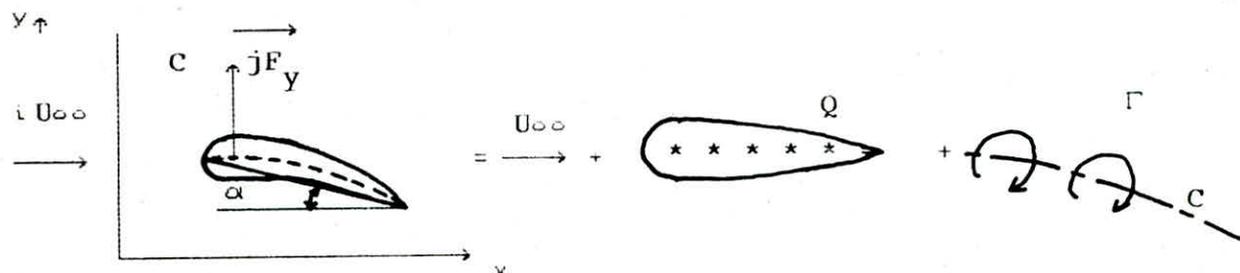


Fig.3.1. Schéma de superposition pour le profil portant

ANNEXE 4 [12]

* Méthode de transformation conforme.

Soit deux variables complexes, $\xi = \eta + i\gamma$ et $z = x + iy$, et leurs plans complexes correspondants, ξ et z . Si ξ est une fonction univoque de z telle que:

$$\xi = \xi(z);$$

on trouve que chaque point z dans le plan z , possède une image dans le plan ξ . Une courbe dans le plan z , équivaut à une courbe dans le plan ξ , de telle sorte, que la seconde corresponde à une image, ou à une transformation de la première.

Il s'ensuit particulièrement pour l'écoulement stationnaire, que l'écoulement autour d'un corps dans le plan z , équivaut à l'écoulement autour d'un corps dans le plan ξ .

La transformation conforme peut ainsi être utilisée, pour étudier par exemple, l'écoulement autour d'un profil d'aile quelconque, par la transformation du profil en un cylindre circulaire. Puisque l'écoulement autour d'un cylindre circulaire est connu dans ses moindres détails, l'écoulement autour d'un profil peut être calculé à l'aide de la transformation.

ANNEXE 5

* Principe des méthodes travaillant dans le plan du potentiel (ϕ, ψ).

Soit ϕ le potentiel des vitesses, et ψ la fonction de courant.

Par définition:

$$\psi = \int_{n_0}^n \rho q \, dn$$

$$\psi = \int_{s_0}^s q \, ds$$

avec

ρ : densité.

q : module de la vitesse.

s : abscisse curviligne comptée le long d'une ligne de courant.

n : direction orthogonale aux lignes de courant

(Fig.5.1.).

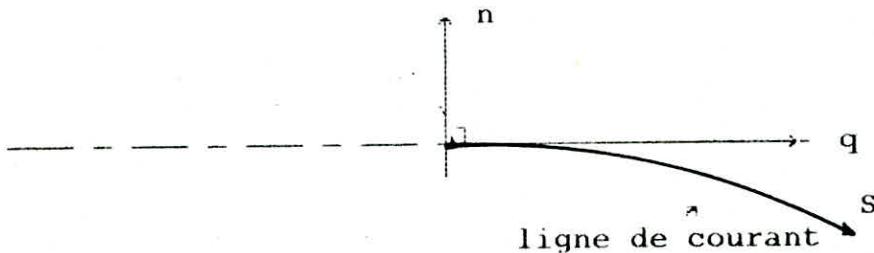
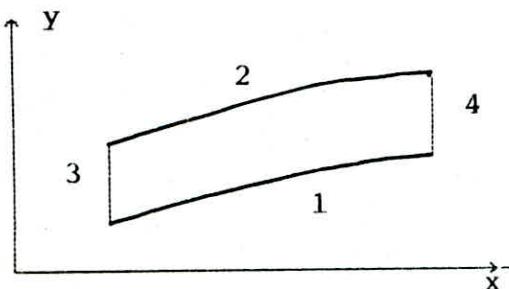
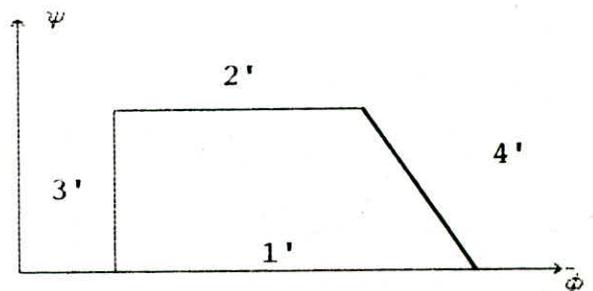


Fig.5.1. Ligne de courant.

Considérons le cas d'un canal C (Fig.5.2.a), pour lequel on supposera (pour simplifier) l'écoulement uniforme sur les frontières amont et aval (3) et (4):



(a) Plan physique (x, y)



(b) Plan (ϕ, ψ)

Fig.5.2. Canal dans le plan physique, et son image dans le plan du potentiel.

L'image C' dans le plan (ϕ, ψ) du canal (Fig.5.2.b.) est un contour fermé, limité par deux droites parallèles 1' et 2', images des parois (1) et (2) (ψ étant constant le long des lignes de courant), et deux droites 3' et 4'.

Les équations du mouvement sont écrites sous la forme :

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial L\rho}{\partial \phi} + \frac{\partial Lq}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial Lq}{\partial \psi} - \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3)$$

En combinant (1) et (2), on obtient une équation du second ordre, donnant q en fonction de ϕ et de ψ .

$$\frac{\partial^2 L\rho}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 Lq}{\partial \psi^2} - \frac{\partial L\rho}{\partial \phi} \left(\frac{\partial L\rho}{\partial \psi} + \frac{\partial Lq}{\partial \psi} \right) + \rho^e \frac{\partial Lq}{\partial \psi} - \frac{\partial L\rho}{\partial \psi} + \rho^e \frac{\partial^2 Lq}{\partial \psi^2} \quad (4)$$

Cette équation est résolue, par différentes méthodes numériques, à l'intérieur de C', en prenant comme condition aux limites, la valeur de q (module de la vitesse) sur le contour. Le module de la vitesse est ainsi imposé le long des parois (1) et (2).

Par intégration de (2) à l'intérieur de C', on obtient alors $\theta(\phi, \psi)$.

Le profil des lignes de courant (1) et (2) dans le plan physique est enfin donné par :

$$x = x_0 + \int \cos \theta ds = x_0 + \int \frac{\cos \theta}{q} d\psi \quad (5.a)$$

$$y = y_0 + \int \sin \theta ds = y_0 + \int \frac{\sin \theta}{q} d\psi \quad (\psi = \text{cst}) \quad (5.b)$$

θ et q ayant été déterminés en fonction de ϕ à l'étape précédente.

Dans le cadre des applications aux grilles d'aubes, quelques développements supplémentaires doivent être introduits, pour prendre en compte la périodicité de l'écoulement le long des lignes (1) et (2), en amont et en aval des profils.

Ces méthodes permettent donc de tracer un canal inter-aubes aux parois duquel la vitesse vérifie une répartition imposée.

Il convient cependant de remarquer, que cette vitesse n'est pas imposée en fonction de l'abscisse curviligne, ce qui peut présenter un inconvénient en cas de couplage avec une méthode de calcul de couche limite.

ANNEXE 6

* Principe des méthodes travaillant dans le plan de l'hodographe.

Dans ce cas, les équations du mouvement s'écrivent sous la forme:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial q} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = - \frac{1-M^2}{\rho q} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (7)$$

définissant une fonction λ de la vitesse par:

$$\lambda = \sqrt{1 - M^2} \frac{dq}{q}$$

(transformation seulement valable en régime subsonique)

Le système des équations précédentes s'écrit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = l(\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = - l(\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (l(\lambda) = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - M^2}) \quad (9)$$

En combinant (8) et (9), on obtient une équation donnant $\psi(\lambda, \theta)$.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{l'(\lambda)}{l(\lambda)} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (10)$$

Le "profil" de l'intrados et de l'extrados doivent alors être choisis dans le plan (λ, θ) (Fig.6.1.).

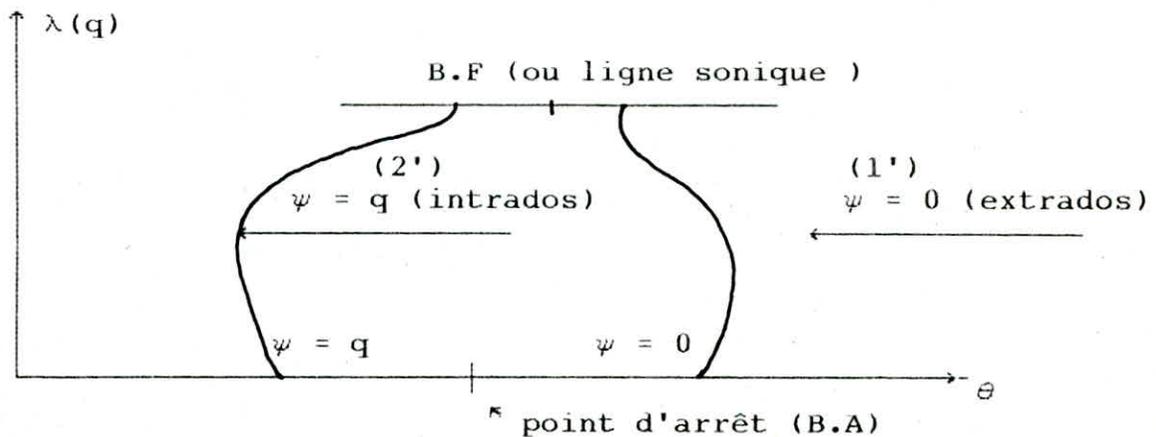


Fig.6.1. Plan (λ, θ)

Il est alors possible d'intégrer (10) avec les conditions aux limites suivantes :

$$\psi = 0 \quad \text{le long de (1')} \quad (\text{extrados})$$

$$\psi = q \quad \text{le long de (2')} \quad (\text{intrados})$$

La vitesse q est alors choisie en fonction de son inclinaison sur la direction axiale θ .

Les mêmes remarques que celles effectuées dans le cas des méthodes (ϕ, ψ) s'appliquent également ici .

Les deux types de méthodes précédentes ont été rarement appliquées en régime d'écoulement supersonique. Il convient de mentionner ici la méthode des caractéristiques souvent utilisée en couplage avec ces méthodes pour résoudre les problèmes d'écoulement mixtes (subsoniques-supersoniques).

ANNEXE 7

* Principe des méthodes pseudo-instationnaires [10]

Les équations de mouvement sont écrites en tenant compte des termes instationnaires :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + f \cdot \frac{u}{h} \frac{dh}{dx} = 0 \quad (11)$$

avec :

$$f = \begin{bmatrix} p \\ \rho u \\ \rho v \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u v \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ p + \rho v^2 \end{bmatrix}$$

h représentant l'épaisseur de la veine suivant la direction orthogonale au plan de calcul, supposée seulement fonction de la distance axiale .

Ce système d'équation est intégré numériquement en fonction du temps, à partir d'un état initial f_0 de f , et du maillage (technique de résolution pseudo-instationnaire qui présente l'avantage d'utiliser un schéma de discrétisation unique, quelle que soit la nature de l'écoulement ((11) étant toujours de type hyperbolique par rapport à t).

Les conditions aux limites peuvent être choisies de la façon suivante dans le plan physique (x, y), limité à un canal inter-aube (Fig.7.1.):

Frontière amont AB

- écoulement subsonique : θ imposé.
- écoulement supersonique : nombre de Mach imposé.

Frontières AA1, BB1 (amont), A2D, B2C (aval)

- condition de périodicité : consiste à imposer l'égalité de toutes les variables correspondantes sur ces deux frontières.

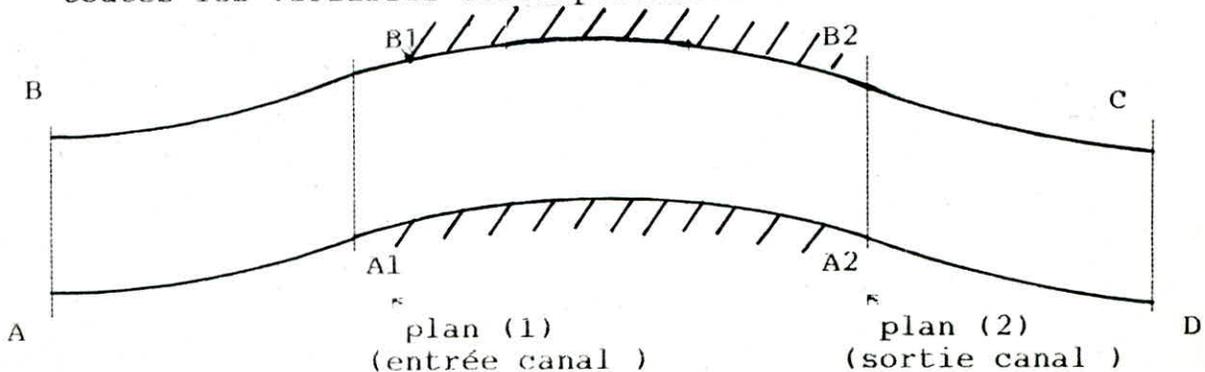


Fig.7.1. Canal inter-aube

Frontière aval CD

- écoulement subsonique : pression (ou q).
- écoulement supersonique : condition de non réflexion .

Parois du profil A1A2, B1B2 (à définir géométriquement)

- pression (ou q).

L'expérience prouve, que dans ces conditions, si le pas de la grille est imposé, il n'est pas possible de réaliser automatiquement la fermeture du profil dans le plan (2). Il est alors nécessaire d'effectuer des modifications du pas, qui ne peut plus alors être imposé. Or le long d'une pale de turbomachine, le pas ne peut pas prendre des valeurs arbitraires, mais varie linéairement avec le rayon.

Une solution proposée par MEAUZE [10], consiste à remplacer la donnée de la vitesse sur l'intrados par la donnée de l'épaisseur du profil. On obtient ainsi, des aubages satisfaisants sur le plan mécanique, dont le pas respecte la valeur imposée par le rayon.

La répartition de la vitesse sur l'intrados B1B2 est alors libre, (toutefois elle est généralement la moins critique).

ANNEXE 8

DEVELOPPEMENT DES CALCULS

N.B: Le développement est effectué pour $w'(x) = 0$.

1. Equation du mouvement

$$\frac{\text{div } PV(x,y)}{\rho} = Q(x,y) \quad \text{continuité} \quad (1)$$

$$\text{rot } v = R(x,y) \quad \text{quantité de mouvement} \quad (2)$$

$$H(x,y) = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} \quad (\text{cst}) \text{ énergie} \quad (3)$$

(1) peut s'écrire sous la forme :

$$\text{div } \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \ln \rho = Q(x,y)$$

ou bien, $\text{div } \vec{v} = Q(x,y) + F(x,y)$ (4)

(2) et (4) s'écrivent dans un repère cartésien:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x,y) + F(x,y) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = R(x,y) \quad (6)$$

où $F(x,y)$ est une fonction, qui s'écrit tenant compte de (3):

$$F(x,y) = \frac{1}{\gamma-1} \left[u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(1 - \frac{v^2}{2} \right) + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{v^2}{2} \right) \right] \right] \quad (7)$$

avec : $\overline{v}^2 = \frac{u^2 + v^2}{C_p T_0}$ terme adimensionnel.

2. Cas d'un écoulement périodique

Décomposons $U, V, Q, R,$ et F en séries de Fourier:

$$U(x,y) = \sum_k u(k,x) e^{ik\omega y}$$

$$V(x,y) = \sum_k v(k,x) e^{ik\omega y}$$

$$Q(x,y) = \sum_k q(k,x) e^{ik\omega y}$$

$$R(x,y) = \sum_k r(k,x) e^{ikwy}$$

$$F(x,y) = \sum_k f(k,x) e^{ikwy}$$

les équations (5) et (6) se transforment en un système de 2 équations différentielles:

$$\frac{du(k,x)}{dx} + ikw v(k,x) - q(k,x) - f(k,x) \quad (8a)$$

$$\frac{dv(k,x)}{dx} - ikw u(k,x) - r(k,x) = 0 \quad (8b)$$

vérifié par chaque harmonique de rang supérieur à 1.

les harmoniques d'ordre zéro étant solutions de:

$$\frac{du(0,x)}{dx} - q(0,x) - f(0,x) = 0$$

$$\frac{dv(0,x)}{dx} - r(0,x) = 0$$

qui donne immédiatement:

$$u(0,x) = u(0,x_0) + \int_{x_0}^x (q(0,\tau) + f(0,\tau)) d\tau \quad (9a)$$

$$v(0,x) = v(0,x_0) + \int_{x_0}^x r(0,\tau) d\tau \quad (9b)$$

$u(0,x_0)$, $v(0,x_0)$ étant les composantes du vecteur vitesse moyen, à l'abscisse x_0 représentant par exemple, la frontière amont du domaine de calcul.

N.B : Dans le développement qui suit, on prendra comme cas particulier : $x_0 = 0$.

3. Méthode de calcul des harmoniques de rang supérieur à 1.

Le système des 2 équations (8a) et (8b) donne par transformation de Laplace:

$$p \tilde{u}(k,x) + ikw \tilde{v}(k,x) = \tilde{q}(k,x) + \tilde{f}(k,x) + u(k,0)$$

$$p \tilde{v}(k,x) - ikw \tilde{u}(k,x) = \tilde{r}(k,x) + v(k,0)$$

\tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{q} , \tilde{r} , et \tilde{f} représentent les transformées de Laplace des fonctions correspondantes, et p la variable de Laplace.

On en déduit:

$$\begin{aligned} \bar{u}(k,x) &= \frac{\nu}{\nu^e - k^2 \omega^e} \left[\bar{q}(k,x) + \bar{f}(k,x) + u(k,0) \right] + \frac{ik\omega}{\nu^e - k^2 \omega^e} \left[\bar{r}(k,x) + v(k,0) \right] \\ \bar{v}(k,x) &= \frac{ik\omega}{\nu^e - k^2 \omega^e} \left[\bar{q}(k,x) + \bar{f}(k,x) + u(k,0) \right] + \frac{\nu}{\nu^e - k^2 \omega^e} \left[\bar{r}(k,x) + v(k,0) \right] \end{aligned}$$

Or: $\frac{\nu}{\nu^e - k^2 \omega^e}$ a pour original $\frac{e^{k\omega x} + e^{-k\omega x}}{2} = \text{ch}(k\omega x)$
 $\frac{ik\omega}{\nu^e - k^2 \omega^e}$ a pour original $i \frac{e^{k\omega x} - e^{-k\omega x}}{2} = i \text{sh}(k\omega x)$

$u(k,x)$ et $v(k,x)$ sont donc données par:

$$u(k,x) = \int_0^x Z u(k,x,\tau) d\tau + u(k,0) \text{ch}(k\omega x) - i v(k,0) \text{sh}(k\omega x) \quad (10a)$$

$$v(k,x) = \int_0^x Z v(k,x,\tau) d\tau + v(k,0) \text{ch}(k\omega x) + i u(k,0) \text{sh}(k\omega x) \quad (10b)$$

avec:

$$Z u(k,x,\tau) = [q(k,\tau) + f(k,\tau)] \text{ch}(k\omega(x-\tau)) + i r(k,\tau) \text{sh}(k\omega(x-\tau))$$

$$Z v(k,x,\tau) = -r(k,\tau) \text{ch}(k\omega(x-\tau)) + i [q(k,\tau) + f(k,\tau)] \text{sh}(k\omega(x-\tau))$$

Ces solutions sont valables en toute rigueur, pour $x > 0$, et le sont également pour $x < 0$ (il suffit de faire le changement de variable $x' = -x$).

3.1. Etude du comportement des solutions à l'infini

Dans tous les cas, les perturbations de la vitesse doivent rester bornées à l'infini amont ($x \longrightarrow -\infty$) et à l'infini aval ($x \longrightarrow +\infty$).

En particulier, si l'écoulement est subsonique, ces perturbations doivent s'y annuler.

On va montrer que si les fonctions $q(k,x)$, $f(k,x)$, et $r(k,x)$ restent constantes à partir d'une certaine distance D de l'origine, il existe alors des conditions initiales $u(k,0)$, et $v(k,0)$, c'est à dire une solution telle que $u(k,x)$ et $v(k,x)$ restent bornées à l'infini.

Cette hypothèse signifie que:

- Pour $x \geq D$:

$$q(k,x) = q(k,D) \quad (11a)$$

$$f(k,x) = f(k,D)$$

$$r(k,x) = r(k,D)$$

- Pour $x \leq -D$:

$$q(k, x) = q(k, -D)$$

$$f(k, x) = f(k, -D)$$

(11b)

$$r(k, x) = r(k, -D)$$

Les fonctions $Z_u(k, x, z)$ et $Z_v(k, x, z)$ définies en (10a) et (10b) se décomposent suivant :

$$Z_u(k, x, z) = \left\{ [q(k, z) + f(k, z)] \operatorname{ch}(k\omega z) - i r(k, z) \operatorname{sh}(k\omega z) \right\} \operatorname{ch}(k\omega x) \\ + \left\{ -[q(k, z) + f(k, z)] \operatorname{sh}(k\omega z) + i r(k, z) \operatorname{ch}(k\omega z) \right\} \operatorname{sh}(k\omega x)$$

$$Z_v(k, x, z) = \left\{ -r(k, z) \operatorname{ch}(k\omega z) - i [q(k, z) + f(k, z)] \operatorname{sh}(k\omega z) \right\} \operatorname{ch}(k\omega x) \\ + \left\{ r(k, z) \operatorname{sh}(k\omega z) + i [q(k, z) + f(k, z)] \operatorname{ch}(k\omega z) \right\} \operatorname{sh}(k\omega x)$$

Soit :

$$Z_u(k, x, z) = Z_1(k, z) \operatorname{ch}(k\omega x) + Z_2(k, z) \operatorname{sh}(k\omega x)$$

$$Z_v(k, x, z) = i Z_2(k, z) \operatorname{ch}(k\omega x) + i Z_1(k, z) \operatorname{sh}(k\omega x)$$

avec :

$$Z_1(k, z) = [q(k, z) + f(k, z)] \operatorname{ch}(k\omega z) - i r(k, z) \operatorname{sh}(k\omega z) \quad (12a)$$

$$Z_2(k, z) = -[q(k, z) + f(k, z)] \operatorname{sh}(k\omega z) + i r(k, z) \operatorname{ch}(k\omega z) \quad (12b)$$

On peut écrire dans ces conditions :

$$u(k, x) = \left[u(k, 0) + \int_0^x Z_1(k, z) dz \right] \operatorname{ch}(k\omega x) - i \left[v(k, 0) + \int_0^x Z_2(k, z) dz \right] \operatorname{sh}(k\omega x) \quad (13a)$$

$$v(k, x) = \left[v(k, 0) + i \int_0^x Z_2(k, z) dz \right] \operatorname{ch}(k\omega x) + i \left[u(k, 0) + \int_0^x Z_1(k, z) dz \right] \operatorname{sh}(k\omega x) \quad (13b)$$

Compte tenu de (11), les intégrales figurants dans ces expressions se décomposent de la façon suivante pour $x \geq D$:

$$\int_0^x z_1(k, \tau) d\tau = \int_0^D z_1(k, \tau) d\tau + \left[q(k, D) + f(k, D) \right] \int_D^x \text{ch}(k\omega\tau) d\tau - i r(k, D) \int_D^x \text{sh}(k\omega\tau) d\tau$$

etc..

Ainsi pour $x \geq D$:

$$\int_0^x z_1(k, \tau) d\tau = \int_0^D z_1(k, \tau) d\tau + \frac{q(k, D) + f(k, D)}{k\omega} \left[\text{sh}(k\omega x) - \text{sh}(k\omega D) \right] - i \frac{r(k, D)}{k\omega} \left[\text{ch}(k\omega x) - \text{ch}(k\omega D) \right]$$

$$\int_0^x z_2(k, \tau) d\tau = \int_0^D z_2(k, \tau) d\tau - \frac{q(k, D) + f(k, D)}{k\omega} \left[\text{ch}(k\omega x) - \text{ch}(k\omega D) \right] + i \frac{r(k, D)}{k\omega} \left[\text{sh}(k\omega x) - \text{sh}(k\omega D) \right]$$

On peut donc écrire pour $x \geq D$:

$$U(k, x) = \left\{ u(k, 0) + \frac{q(k, D) + f(k, D)}{k\omega} \left[\text{sh}(k\omega x) - \text{sh}(k\omega D) \right] - i \frac{r(k, D)}{k\omega} \left[\text{ch}(k\omega x) - \text{ch}(k\omega D) \right] + \int_0^D z_1(k, \tau) d\tau \right\} \text{ch}(k\omega x)$$

$$+ \left\{ -i v(k, 0) - \frac{q(k, D) + f(k, D)}{k\omega} \left[\text{ch}(k\omega x) - \text{ch}(k\omega D) \right] + i \frac{r(k, D)}{k\omega} \left[\text{sh}(k\omega x) - \text{sh}(k\omega D) \right] + \int_0^D z_2(k, \tau) d\tau \right\} \text{sh}(k\omega x)$$

Soit:

$$U(k, x) = \left\{ u(k, 0) - \frac{q(k, D) + f(k, D)}{k\omega} \text{sh}(k\omega D) + i \frac{r(k, D)}{k\omega} \text{ch}(k\omega D) + \int_0^D z_1(k, \tau) d\tau \right\} \text{ch}(k\omega x)$$

$$+ \left\{ -i v(k, 0) + \frac{q(k, D) + f(k, D)}{k\omega} \text{ch}(k\omega D) - i \frac{r(k, D)}{k\omega} \text{sh}(k\omega D) + \int_0^D z_2(k, \tau) d\tau \right\} \text{sh}(k\omega x) - i \frac{r(k, D)}{k\omega}$$

Ou :

$$U(k, x) = \left\{ u(k, 0) + \frac{z_2(k, D)}{k\omega} + \int_0^D z_1(k, \tau) d\tau \right\} \text{ch}(k\omega x)$$

$$+ \left\{ -i v(k, 0) + \frac{z_1(k, D)}{k\omega} + \int_0^D z_2(k, \tau) d\tau \right\} \text{sh}(k\omega x) - i \frac{r(k, D)}{k\omega}$$

Lorsque $x \longrightarrow +\infty$, cette expression se comporte comme:

$$\left\{ u(k,0) + i v(k,0) + \frac{z_1(k,D) + z_2(k,D)}{kw} + \int_0^D (z_1(k,\tau) + z_2(k,\tau)) d\tau \right\} \frac{e^{kwx}}{e}$$

Par conséquent, compte tenu de (11), $u(k,x)$ est borné lorsque $x \longrightarrow +\infty$, si et seulement si:

$$\left\{ u(k,0) - i v(k,0) = - \left[\frac{z_1(k,D) + z_2(k,D)}{kw} + \int_0^D (z_1(k,\tau) - z_2(k,\tau)) d\tau \right] \right. \quad (14)$$

Cette relation montre qu'il existe au moins une valeur de x (ici 0) pour laquelle :

On se place maintenant dans le cas où $x \longrightarrow -\infty$.

Les calculs sont identiques.

En effet, pour $x \leq -D$:

$$\int_0^x z_1(k,\tau) d\tau = \int_0^{-D} z_1(k,\tau) d\tau + \frac{q(k,-D) + f(k,-D)}{kw} [\text{sh}(kwx) + \text{sh}(kwD)] - i \frac{r(k,-D)}{kw} [\text{ch}(kwx) - \text{ch}(kwD)]$$

etc...

Toutes les relations établies précédemment restent valables, à condition de changer D en $-D$ dans celles-ci, en particulier, la dernière expression donnant $u(k,x)$, qui devient pour $x \leq -D$:

$$u(k,x) = \left\{ u(k,0) + \frac{q(k,-D) + f(k,-D)}{kw} \text{sh}(kwD) + i \frac{r(k,-D)}{kw} \text{ch}(kwD) + \int_0^{-D} z_1(k,\tau) d\tau \right\} \text{ch}(kwx) + \left\{ -i v(k,0) + \frac{q(k,-D) + f(k,-D)}{kw} \text{ch}(kwD) + i \frac{r(k,-D)}{kw} \text{sh}(kwD) + \int_0^{-D} z_2(k,\tau) d\tau \right\} \text{sh}(kwx) - i \frac{r(k,-D)}{kw}$$

Soit:

$$u(k,x) = \left\{ u(k,0) + \frac{z_2(k,-D)}{kw} + \int_0^{-D} z_1(k,\tau) d\tau \right\} \text{ch}(kwx) + \left\{ -i v(k,0) + \frac{z_1(k,-D)}{kw} + \int_0^{-D} z_2(k,\tau) d\tau \right\} \text{sh}(kwx) - i \frac{r(k,-D)}{kw}$$

Lorsque $x \longrightarrow -\infty$, cette expression se comporte comme:

$$\left\{ u(k,0) + iv(k,0) + \frac{z_1(k,-D) - z_1(k,D)}{kw} + \int_0^{-D} (z_1(k,\tau) - z_2(k,\tau)) d\tau \right\} e^{-kwx}$$

$u(k,x)$ est donc bornée lorsque $x \longrightarrow -\infty$, si et seulement si:

$$u(k,0) + iv(k,0) = \frac{z_1(k,-D) - z_1(k,D)}{kw} - \int_0^{-D} (z_1(k,\tau) - z_2(k,\tau)) d\tau \quad (15)$$

On montrerait d'une façon analogue, que les relations (14) et (15) s'appliquent également pour $v(k,x)$.

En conclusion, les fonctions q , r , et f vérifient les propriétés représentées par (11), pour que les composantes du vecteur vitesse $u(k,x)$ et $v(k,x)$ restent bornées à l'infini, il faut et il suffit que les conditions initiales $u(k,0)$, $v(k,0)$ vérifient (14) et (15) soit:

$$\begin{aligned} u(k,0) &= \frac{z_1(k,-D) - z_1(k,D) - z_2(k,D) - z_2(k,-D)}{ekw} \\ &\quad - \frac{1}{e} \int_0^D [z_1(k,\tau) + z_2(k,\tau)] d\tau - \frac{1}{e} \int_0^{-D} (z_1(k,\tau) - z_2(k,\tau)) d\tau \\ v(k,0) &= i \left\{ \frac{-z_1(k,D) - z_2(k,D) - z_1(k,-D) + z_2(k,-D)}{ekw} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{e} \int_0^D (z_1(k,\tau) + z_2(k,\tau)) d\tau + \frac{1}{e} \int_0^{-D} (z_1(k,\tau) - z_2(k,\tau)) d\tau \right\} \end{aligned}$$

Ou, sous une forme légèrement différente:

$$\begin{aligned} u(k,0) &= \frac{z_1(k,-D) - z_1(k,D) - [z_2(k,-D) + z_2(k,D)]}{ekw} - \frac{1}{e} \int_{-D}^D z_2(k,\tau) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{e} \int_0^D z_1(k,\tau) d\tau - \frac{1}{e} \int_0^{-D} z_1(k,\tau) d\tau \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} v(k,0) &= -i \left\{ \frac{z_1(k,-D) + z_1(k,D) + z_2(k,D) - z_2(k,-D)}{ekw} + \frac{1}{e} \int_{-D}^D z_1(k,\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{e} \int_0^D z_2(k,\tau) d\tau + \frac{1}{e} \int_0^{-D} z_2(k,\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (16b)$$

3.2. Formes des solutions bornées à l'infini

Considérons les expressions de $u(k,x)$ et $v(k,x)$ correspondants à (13a) et (13b).

On peut écrire:

$$\begin{aligned} u(k,0) + \int_0^x z_1 d\tau &= \frac{z_1(k,-D) - z_1(k,D) - [z_2(k,-D) + z_2(k,D)]}{ekw} \\ &\quad - \frac{1}{e} \int_{-D}^D z_2(k,\tau) d\tau + \int_0^x z_1(k,\tau) d\tau - \frac{1}{e} \int_0^D z_1(k,\tau) d\tau - \frac{1}{e} \int_0^{-D} z_1(k,\tau) d\tau \end{aligned}$$

Or:

$$\int_0^D z_1(k, \tau) d\tau = \int_0^x z_1(k, \tau) d\tau + \int_x^D z_1(k, \tau) d\tau$$

$$\int_0^{-D} z_1(k, \tau) d\tau = \int_0^x z_1(k, \tau) d\tau + \int_x^{-D} z_1(k, \tau) d\tau$$

On a donc:

$$\int_0^x z_1(k, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^D z_1(k, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{-D} z_1(k, \tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int_D^x z_1(k, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-D}^x z_1(k, \tau) d\tau$$

$$= -\frac{1}{2} \int_x^D z_1(k, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-D}^x z_1(k, \tau) d\tau$$

Considérons alors une fonction $\delta(x, \tau)$, telle que:

$$\delta(x, \tau) = 1 \quad \text{si } \tau > x \tag{17}$$

$$\delta(x, \tau) = -1 \quad \text{si } \tau < x$$

un exemple d'une telle fonction est donné par: $(\tau - x) / |\tau - x|$

On peut écrire alors:

$$-\frac{1}{2} \int_x^D z_1(k, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-D}^x z_1(k, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} \int_{-D}^D \delta(x, \tau) z_1(k, \tau) d\tau$$

Donc:

$$u(k, 0) + \int_0^x z_1(k, \tau) d\tau = \frac{z_1(k, -D) - z_1(k, D) - [z_2(k, -D) + z_2(k, D)]}{2kw}$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-D}^D [z_2(k, \tau) + \delta(x, \tau) z_1(k, \tau)] d\tau$$

Ou encore:

$$u(k, 0) + \int_0^x z_1(k, \tau) d\tau = -\frac{z_a(k, -D, x) + z_a(k, D, x)}{2kw}$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-D}^D z_a(k, \tau, x) d\tau$$

avec: $z_a(k, \tau, x) = z_2(k, \tau) + \delta(x, \tau) z_1(k, \tau)$ (18)

De même:

$$-iv(k, 0) + \int_0^x z_2(k, \tau) d\tau = -\frac{z_1(k, D) - z_1(k, -D) - z_2(k, D) + z_2(k, -D)}{2kw}$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-D}^D z_1(k, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_{-D}^D z_2(k, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_{-D}^D z_2(k, \tau) d\tau + \int_0^x z_2(k, \tau) d\tau$$

Or:
$$\int_0^D z_e(k, \tau) d\tau = \int_0^x + \int_x^D$$

$$\int_0^{-D} z_e(k, \tau) d\tau = \int_0^x + \int_x^{-D}$$

Donc:

$$\int_0^x z_e(k, \tau) d\tau - \frac{1}{e} \int_0^D z_e(k, \tau) d\tau - \frac{1}{e} \int_x^{-D} z_e(k, \tau) d\tau = -\frac{1}{e} \left[\int_x^D z_e(k, \tau) d\tau + \int_x^{-D} z_e(k, \tau) d\tau \right]$$

$$= -\frac{1}{e} \left[\int_x^D z_e(k, \tau) d\tau + \int_x^D z_e(k, \tau) d\tau \right] = -\frac{1}{e} \int_x^D \delta(x, \tau) z_e(k, \tau) d\tau$$

Donc:

$$-i\omega(k, 0) + \int_0^x z_e(k, \tau) d\tau = \frac{-z_1(k, D) - z_e(k, D) - z_1(k, -D) + z_e(k, -D)}{e} +$$

$$- \frac{1}{e} \int_x^D [z_1(k, \tau) + \delta(x, \tau) z_e(k, \tau)] d\tau$$

Soit:

$$-i\omega(k, 0) + \int_0^x z_e(k, \tau) d\tau = - \frac{z_b(k, -D, x) + z_b(k, D, x)}{e k \omega} +$$

$$- \frac{1}{e} \int_x^D z_b(k, \tau, x) d\tau$$

Avec: $z_b(k, \tau, x) = z_1(k, \tau) + \delta(x, \tau) z_e(k, \tau)$ (19)

On peut donc écrire les solutions bornées à l'infini du système (8) sous la forme:

$$u(k, x) = - \left[\frac{1}{e} \int_x^D z_a(k, \tau, x) d\tau + \frac{z_a(k, -D, x) + z_a(k, D, x)}{e k \omega} \right] ch(k\omega x) +$$

$$- \left[\frac{1}{e} \int_x^D z_b(k, \tau, x) d\tau + \frac{z_b(k, -D, x) + z_b(k, D, x)}{e k \omega} \right] sh(k\omega x)$$

Soit:

$$u(k, x) = - \frac{1}{e} \int_x^D [z_a(k, \tau, x) ch(k\omega x) + z_b(k, \tau, x) sh(k\omega x)] d\tau +$$

$$- \frac{[z_a(k, -D, x) + z_a(k, D, x)] ch(k\omega x) + [z_b(k, -D, x) + z_b(k, D, x)] sh(k\omega x)}{e k \omega}$$

On obtiendrait de même compte tenu de (13b):

$$v(k, x) = - \frac{i}{e} \int_x^D [z_b(k, \tau, x) ch(k\omega x) + z_a(k, \tau, x) sh(k\omega x)] d\tau +$$

$$- i \frac{[z_b(k, -D, x) + z_b(k, D, x)] ch(k\omega x) + [z_a(k, -D, x) + z_a(k, D, x)] sh(k\omega x)}{e k \omega}$$

Or, compte tenu de (18), (19) et (12):

$$\begin{aligned}
 Z_a(k, \tau, x) \operatorname{ch}(k\omega x) + Z_b(k, \tau, x) \operatorname{sh}(k\omega x) &= [Z_e(k, \tau) + \delta(x, \tau) Z_1(k, \tau)] \operatorname{ch}(k\omega x) + \\
 &+ [Z_1(k, \tau) + \delta(x, \tau) Z_e(k, \tau)] \operatorname{sh}(k\omega x) = \delta(x, \tau) Z_u(k, x, \tau) - i Z_v(k, x, \tau) \\
 Z_b(k, \tau, x) \operatorname{ch}(k\omega x) + Z_a(k, \tau, x) \operatorname{sh}(k\omega x) &= [Z_1(k, \tau) + \delta(x, \tau) Z_e(k, \tau)] \operatorname{ch}(k\omega x) + \\
 &+ [Z_e(k, \tau) + \delta(x, \tau) Z_1(k, \tau)] \operatorname{sh}(k\omega x) = Z_u(k, x, \tau) - i \delta(x, \tau) Z_v(k, x, \tau)
 \end{aligned}$$

Z_u et Z_v ayant été définies en (10a) et (10b) .

Donc:

$$\begin{aligned}
 u(k, x) &= -\frac{1}{2} \int_{-D}^D [\delta(x, \tau) Z_u(k, x, \tau) - i Z_v(k, x, \tau)] d\tau + \\
 &\quad - \frac{\delta(x, -D) Z_u(k, x, -D) - i Z_v(k, x, -D)}{2k\omega} - \frac{\delta(x, D) Z_u(k, x, D) - i Z_v(k, x, D)}{2k\omega} \\
 v(k, x) &= -\frac{i}{2} \int_{-D}^D [Z_u(k, x, \tau) - i \delta(x, \tau) Z_v(k, x, \tau)] d\tau + \\
 &\quad - \frac{i Z_u(k, x, -D) - \delta(x, -D) Z_v(k, x, -D)}{2k\omega} - \frac{i Z_u(k, x, D) - \delta(x, D) Z_v(k, x, D)}{2k\omega}
 \end{aligned}$$

Or compte tenu de (10a) et (10b)

$$\begin{aligned}
 \delta(x, \tau) Z_u(k, x, \tau) - i Z_v(k, x, \tau) &= \\
 &= \delta(x, \tau) [q(k, \tau) + f(k, \tau)] \operatorname{ch}(k\omega(x-\tau)) + i \delta(x, \tau) r(k, \tau) \operatorname{sh}(k\omega(x-\tau)) + \\
 &+ i r(k, \tau) \operatorname{ch}(k\omega(x-\tau)) + [q(k, \tau) + f(k, \tau)] \operatorname{sh}(k\omega(x-\tau)) \\
 &= [q(k, \tau) + f(k, \tau) + i \delta(x, \tau) r(k, \tau)] [\delta(x, \tau) \operatorname{ch}(k\omega(x-\tau)) + \operatorname{sh}(k\omega(x-\tau))] \\
 Z_u(k, x, \tau) - i \delta(x, \tau) Z_v(k, x, \tau) &= \\
 &= [q(k, \tau) + f(k, \tau)] \operatorname{ch}(k\omega(x-\tau)) + i r(k, \tau) \operatorname{sh}(k\omega(x-\tau)) + \\
 &+ i \delta(x, \tau) r(k, \tau) \operatorname{ch}(k\omega(x-\tau)) + \delta(x, \tau) [q(k, \tau) + f(k, \tau)] \operatorname{sh}(k\omega(x-\tau)) \\
 &= [q(k, \tau) + f(k, \tau) + i \delta(x, \tau) r(k, \tau)] [\operatorname{ch}(k\omega(x-\tau)) + \delta(x, \tau) \operatorname{sh}(k\omega(x-\tau))]
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \delta(x, \tau) \operatorname{ch}(k\omega(x-\tau)) + \operatorname{sh}(k\omega(x-\tau)) &= \\ &= \delta(x, \tau) \left[\operatorname{ch}(k\omega(x-\tau)) + \delta(x, \tau) \operatorname{sh}(k\omega(x-\tau)) \right] \\ &= \delta(x, \tau) e^{k\omega \delta(x, \tau)(x-\tau)} \end{aligned}$$

D'autre part : $\delta(x, D) = 1$ et $\delta(x, -D) = -1$

Les expressions de $u(k, x)$ et $v(k, x)$ se réduisent donc aux relations très simples :

$$u(k, x) = \frac{X(k, x, -D) - X(k, x, D)}{k\omega} - \int_{-D}^D \delta(x, \tau) X(k, x, \tau) d\tau \quad (20a)$$

$$v(k, x) = i \frac{X(k, x, D) + X(k, x, -D)}{k\omega} - i \int_{-D}^D X(k, x, \tau) d\tau \quad (20b)$$

avec :

$$X(k, x, \tau) = \frac{1}{2} \left[q(k, \tau) + f(k, \tau) + i \delta(x, \tau) r(k, \tau) \right] e^{-k\omega|\tau-x|} \quad (20c)$$

Donc, les composantes du vecteur vitesse deviennent :

$$U(x, y) = u_0(x) + \sum_{k \neq 0} \frac{X_k(x, -D) - X_k(x, D)}{k\omega} e^{ik\omega y} - \int_{-D}^D \delta(x, \tau) \sum_{k \neq 0} X_k(x, \tau) e^{ik\omega y} d\tau$$

$$V(x, y) = v_0(x) - i \sum_{k \neq 0} \frac{X_k(x, -D) + X_k(x, D)}{k\omega} e^{ik\omega y} - i \int_{-D}^D \sum_{k \neq 0} X_k(x, \tau) e^{ik\omega y} d\tau$$

avec :

$$X_k(x, \tau) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{du_k}{dx}(\tau) + i \left[e^{\pi k} v_k + \delta(x, \tau) r_k(\tau) \right] \right\} e^{-\pi k |\tau-x|}$$

4. Application aux grilles de profils

La divergence Q et le rotationnel R introduits en (1) et (2) caractérisent l'effet des obstacles placés dans l'écoulement. Ils sont donc indépendants des caractéristiques de cet écoulement, et sont nuls à l'extérieur de ces obstacles. Leurs valeurs et leur domaine de variation peuvent donc être parfaitement définis dans le champ de calcul.

A l'opposé, la fonction F définie en (5), représentative de la compressibilité, dépend de la vitesse en chaque point du champ de calcul. Aussi, ses propriétés, son domaine de variation et son influence sont moins nettement déterminés. Ses valeurs ne peuvent être obtenues explicitement, à partir des données du problème (dont la nature reste d'ailleurs à définir). Par conséquent, une technique de calcul basée sur le modèle théorique proposée ici, doit donc être itérative en partant d'une solution de type "incompressible" ($F = 0$).

Les propriétés de F n'étant pas connues, rien d'ailleurs, ne permet de savoir si une telle méthode peut converger et avec quelle rapidité (si en particulier l'écoulement devient supersonique). Le domaine de variation de F doit cependant être au moins estimé pour pouvoir mettre en oeuvre la présente méthode.

Dans un écoulement autour d'une grille de profils, à partir d'une certaine distance, en amont du bord d'attaque et en aval du bord de fuite, les perturbations de l'écoulement deviennent indépendantes de la distance axiale (étant nulles si l'écoulement est subsonique, ce qui représente notre cas). On considère généralement que cette distance est inférieure à deux fois la corde.

Ce critère (arbitraire mais effectivement vérifié en pratique) permet de fixer une distance D , au delà de laquelle les fluctuations de F sont indépendantes de la distance axiale, situation correspondante à l'hypothèse proposée au paragraphe précédent qui conduit à l'expression des composantes de la vitesse établie en (20a) et (20b).

Notons que cette distance D , fixe l'extension maximum du champ de calcul, la vitesse en un point quelconque compris entre l'infini amont et l'infini aval ne dépendant que de quantités définies dans l'intervalle $[-D, D]$.

4.1. Forme des solutions dans le cas d'une grille d'aubes

Compte tenu des considérations précédentes, les fonctions $q(k, x)$ et $r(k, x)$ ont leur support limité à l'intervalle $[-c/2, c/2]$ (c représentant la corde des profils) et sont nulles au delà.

Les relations (20a) et (20b) peuvent s'écrire dans ce cas:

$$U(k, x) = \frac{f(k, D) - f(k, -D)}{k\omega} - \int_{-D}^D \delta(x, \tau) f(k, \tau) e^{-k\omega(\tau-x)} d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} [\delta(x, \tau) q(k, \tau) + i r(k, \tau)] e^{-k\omega(\tau-x)} d\tau \quad (21a)$$

$$V(k, x) = -i \frac{f(k, D) + f(k, -D)}{k\omega} - i \int_{-D}^D f(k, \tau) e^{-k\omega(\tau-x)} d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} [q(k, \tau) + i \delta(x, \tau) r(k, \tau)] e^{-k\omega(\tau-x)} d\tau \quad (21b)$$

$f(k, -D)$, et $f(k, D)$ représentent des coefficients de Fourier de F , sur les frontières amont et aval du champ de calcul (nulles dans le cas d'un écoulement localement subsonique).

Il convient alors d'examiner comment peuvent être définies, les fonctions $q(k, \tau)$ et $r(k, \tau)$, caractéristiques des profils de la grille.

4.2. Calcul des coefficients de Fourier de la fonction $\overline{T}(x, y)$

soit :
$$\tilde{T}_k(x) = \frac{\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[\cos \varepsilon \pi k \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon \pi k \varepsilon}{\varepsilon \pi k \varepsilon} \right] e^{-i \varepsilon \pi k S(x)}$$

On aura

$$\Re \tilde{T}_k(x) = \frac{\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[\cos \varepsilon \pi k \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon \pi k \varepsilon}{\varepsilon \pi k \varepsilon} \right] \cos \varepsilon \pi k S(x)$$

$$\Im \tilde{T}_k(x) = - \frac{\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[\cos \varepsilon \pi k \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon \pi k \varepsilon}{\varepsilon \pi k \varepsilon} \right] \sin \varepsilon \pi k S(x)$$

donc :

$$a \tilde{t}_k(x) \cos \varepsilon \pi k y + b \tilde{t}_k(x) \sin \varepsilon \pi k y =$$

$$\frac{2\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[\cos \varepsilon \pi k \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon \pi k \varepsilon}{\varepsilon \pi k \varepsilon} \right] \cos(\varepsilon \pi k (y - S(x)))$$

avec $t_0 = -\frac{4}{3} \varepsilon^3$, on peut donc écrire :

$$\overline{T}(x, y) = -\frac{4}{3} \varepsilon^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[\cos \varepsilon \pi k \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon \pi k \varepsilon}{\varepsilon \pi k \varepsilon} \right] \cos(\varepsilon \pi k (y - S(x)))$$

et donc :

$$Q(x, y) = -\frac{4}{3} \varepsilon^3 \alpha(x) + \alpha(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[\cos \varepsilon \pi k \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon \pi k \varepsilon}{\varepsilon \pi k \varepsilon} \right] \cos(\varepsilon \pi k (y - S(x)))$$

Etant donné que $\frac{dU_0}{dx} = -\frac{4}{3} \varepsilon^3 \alpha(x)$, on aura donc : $\alpha(x) = -\frac{dU_0}{dx} \frac{3}{4\varepsilon^3}$

d'où :

$$Q(x, y) = \frac{dU_0}{dx} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 E(k, \varepsilon) \cos(\varepsilon \pi k (y - S(x))) \right]$$

$$R(x, y) = \frac{dV_0}{dx} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 E(k, \varepsilon) \cos(\varepsilon \pi k (y - S(x))) \right]$$

avec :
$$E(k, \varepsilon) = \frac{3}{4\varepsilon^2 \pi^2 k^2} \left[\frac{\sin \varepsilon \pi k \varepsilon}{\varepsilon \pi k \varepsilon} - \cos \varepsilon \pi k \varepsilon \right]$$

4.3. Etude du comportement de $E(k, \varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$
(cas de $\tau = \pm c/2$)

soit:

$$E(k, \varepsilon) = \frac{3}{e \varepsilon \pi^2 k^2} \left[\frac{\sin \pi k \varepsilon}{\pi k \varepsilon} - \cos \pi k \varepsilon \right]$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\sin \pi k \varepsilon}{\pi k \varepsilon} \rightarrow 1 - \frac{(\pi k \varepsilon)^2}{3!} + \frac{(\pi k \varepsilon)^4}{5!} + \dots$$

$$\cos \pi k \varepsilon \rightarrow 1 - \frac{(\pi k \varepsilon)^2}{2!} + \frac{(\pi k \varepsilon)^4}{4!} + \dots$$

donc: $\frac{\sin \pi k \varepsilon}{\pi k \varepsilon} - \cos \pi k \varepsilon \rightarrow \frac{(\pi k \varepsilon)^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{(\pi k \varepsilon)^4}{4!} \left(1 - \frac{1}{5}\right)$

c'est à dire: $\frac{(\pi k \varepsilon)^2}{3} - \frac{(\pi k \varepsilon)^4}{30}$

$E(k, \varepsilon)$ se comporte comme:

$$\frac{3}{e \varepsilon \pi^2 k^2} \left[\frac{(\pi k \varepsilon)^2}{3} - \frac{(\pi k \varepsilon)^4}{30} \right]$$

soit:

$$e - \frac{3 \times e^4}{e \times 30} \pi^2 k^2 \varepsilon^2 = e - \frac{4}{5} \pi^2 k^2 \varepsilon^2$$

On peut donc dire que: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(k, \varepsilon) = 2$

4.4. Définition des fonctions $Q(x, y)$ et $R(x, y)$
Modélisation des profils

L'influence locale des profils se décompose en deux effets, l'un de déplacement dû à l'épaisseur du profil représenté par la fonction $Q(x, y)$, l'autre de quantité de mouvement, dû à la portance et éventuellement, à la trainée du profil, représenté par la fonction $R(x, y)$.

Chaque profil sera représenté ici par une courbe d'équation :

$$y = S(x)$$

A l'intérieur d'une bande de largeur 2ε constante, située de part et d'autre de cette courbe, on supposera $Q(x, y)$ et $R(x, y)$ respectivement égaux à $Q_0(x)$ et $R_0(x)$, $Q(x, y)$ et $R(x, y)$ seront supposées nulles ailleurs (Fig.1).

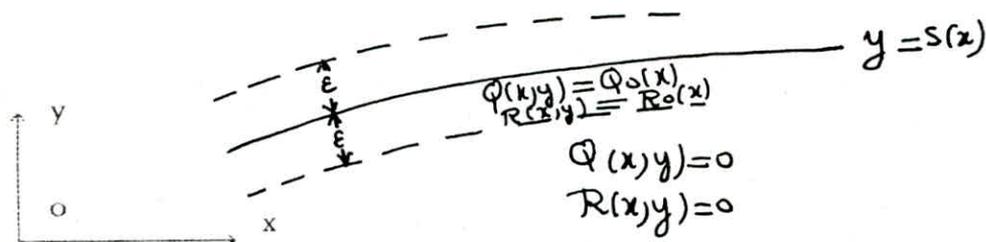


Fig.1

Ce type de répartition étant imposé périodiquement suivant la direction oy , on obtient immédiatement les composantes de Fourier $q(k,x)$, $r(k,x)$ de Q et R .

$$q(k,x) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\epsilon\pi/\omega} Q(x,y) e^{-ik\omega y} dy = \frac{\omega}{\pi} Q_0(x) \int_{s(x)-\epsilon}^{s(x)+\epsilon} e^{-ik\omega y} dy$$

$$r(k,x) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\epsilon\pi/\omega} R(x,y) e^{-ik\omega y} dy = \frac{\omega}{\pi} R_0(x) \int_{s(x)-\epsilon}^{s(x)+\epsilon} e^{-ik\omega y} dy$$

Supposons le pas de la grille égal à l'unité (dimension de référence), on obtient ainsi:

_ pour $k \geq 1$

$$q(k,x) = \frac{e Q_0(x)}{k\pi} \sin(\pi k \epsilon) e^{-i 2\pi k s(x)}$$

$$r(k,x) = \frac{e R_0(x)}{k\pi} \sin(\pi k \epsilon) e^{-i 2\pi k s(x)}$$

_ pour $k = 0$

$$q(0,x) = e \cdot Q_0(x) \cdot \epsilon$$

$$r(0,x) = e \cdot R_0(x) \cdot \epsilon$$

Comptr tenu de (9a) et (9b)

$$q(0,x) = \frac{du(0,x)}{dx} - f(0,x) \tag{22a}$$

$$r(0,x) = \frac{dv(0,x)}{dx} \tag{22b}$$

On peut donc écrire:

$$q(k,x) = \left[\frac{du(0,x)}{dx} - f(0,x) \right] \frac{\sin \pi k \epsilon}{2\pi k \epsilon} e^{-i 2\pi k s(x)} \tag{23a}$$

$$r(k,x) = \frac{dv(0,x)}{dx} \frac{\sin \pi k \epsilon}{2\pi k \epsilon} e^{-i 2\pi k s(x)} \tag{23b}$$

Il convient de remarquer, que les coefficients de Fourier d'ordre 0 de F , $f(0,x)$ ne dépendent pas en principe seulement des coefficients d'ordre 0 de la vitesse.

$f(0, x)$ n'est donc pas entièrement déterminé, à partir de $u(0, x)$ et $v(0, x)$

Les composantes d'ordre k de la vitesse s'écrivent dans ces conditions :

$$u(k, x) = \frac{f(k, -D) - f(k, D)}{2\pi k} - \frac{1}{2} \int_{-D}^D \delta(x, \tau) f(k, \tau) e^{-2\pi k |\tau - x|} d\tau + \\ - \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \left[\frac{du(0, \tau)}{d\tau} - f(0, \tau) \right] g(k, x, \tau) d\tau - i \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv(0, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau \quad (24a)$$

$$v(k, x) = -i \frac{f(k, -D) + f(k, D)}{2\pi k} - \frac{i}{2} \int_{-D}^D f(k, \tau) e^{-2\pi k |\tau - x|} d\tau + \\ - i \int_{-c/2}^{c/2} \left[\frac{du(0, \tau)}{d\tau} - f(0, \tau) \right] g(k, x, \tau) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \frac{dv(0, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau \quad (24b)$$

avec : $g(k, x, \tau) = E(k, \tau) e^{-2\pi k (|\tau - x| + i\delta(\tau))}$

(E peut être une fonction de τ)

4.5. Cas d'un écoulement incompressible

Dans ce cas, $f(k, x)$ est identiquement nulle dans tout le domaine de calcul.

les relations précédentes se réduisent à :

$$u(k, x) = - \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \frac{du(0, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau - i \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv(0, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau \\ v(k, x) = -i \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du(0, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \frac{dv(0, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau$$

Les deux composantes U et V de la vitesse, s'écrivent dans ces conditions :

$$U(x, y) = u(0, x) - \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \frac{du(0, \tau)}{d\tau} G_1(y, x, \tau) d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv(0, \tau)}{d\tau} G_2(y, x, \tau) d\tau \\ V(x, y) = v(0, x) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du(0, \tau)}{d\tau} G_2(y, x, \tau) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \frac{dv(0, \tau)}{d\tau} G_1(y, x, \tau) d\tau$$

avec:

$$G_1(y, x, \tau) = \sum_{k \neq 0} g(k, x, \tau) e^{iukiy}$$

$$G_2(y, x, \tau) = \sum_{k \neq 0} i g(k, x, \tau) e^{iukiy}$$

et:

$$g(k, x, \tau) = E(k, \tau) e^{-iuk[(c-\tau) + i\delta(\tau)]}$$

soit:

$$u(x, y) = u(0, x) +$$

$$- \int_{-c/2}^{c/2} \left[\delta(x, \tau) \frac{du(0, \tau)}{d\tau} G_1(y, x, \tau) + \frac{dv(0, \tau)}{d\tau} G_2(y, x, \tau) \right] d\tau$$

(25a)

$$v(x, y) = v(0, x) +$$

$$- \int_{-c/2}^{c/2} \left[\frac{dv(0, \tau)}{d\tau} G_2(y, x, \tau) - \delta(x, \tau) \frac{du(0, \tau)}{d\tau} G_1(y, x, \tau) \right] d\tau$$

(25b)

4.6. Condition à imposer pour qu'une courbe $y = g(x)$ soit ligne de courant

Cette condition s'écrit :

$$g'(x) = \frac{V(x, y)}{U(x, y)}$$

soit:

$$v(0, x) - g'(x) u(0, x) +$$

$$- \int_{-c/2}^{c/2} \left\{ \frac{dv(0, \tau)}{d\tau} (G_2 - \varepsilon g' G_1) - \frac{du(0, \tau)}{d\tau} [\varepsilon G_1 - g' G_2] \right\} d\tau = 0$$

(26)

à vérifier, en tout point (x, y) le long de la ligne de courant.

5. Ecriture des relations utilisées par le programme

N.B : A partir d'ici, on supposera pour une raison simpliste que le pas de la grille est égal à l'unité ($\omega = 2 \pi$, dimension de référence).

En prenant la partie réelle de (25a) et de (25b), on obtient :

$$u(x,y) = u_0\left(-\frac{c}{2}\right) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0(\tau)}{d\tau} \cdot C_u(x,y,\tau) d\tau + \int_{c/2}^{c/2} \frac{dv_0(\tau)}{d\tau} \cdot C_v(x,y,\tau) d\tau \quad (27a)$$

$$v(x,y) = v_0\left(-\frac{c}{2}\right) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0(\tau)}{d\tau} \cdot C_u(x,y,\tau) d\tau + \int_{c/2}^{c/2} \frac{du_0(\tau)}{d\tau} \cdot C_v(x,y,\tau) d\tau \quad (27b)$$

où: $C_u(x,y,\tau) = \delta(x,y) \cdot C1(x,y,\tau) - 1/2$

$C_v(x,y,\tau) = C2(x,y,\tau)$

où:

$$C1(x,y,\tau) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1} E(k, \varepsilon(\tau)) e^{-\varepsilon k |\tau-x|} \cos \varepsilon k (y - s(\tau))$$

$$C2(x,y,\tau) = \sum_{k=1} E(k, \varepsilon(\tau)) e^{-\varepsilon k |\tau-x|} \sin \varepsilon k (y - s(\tau))$$

Les integrales figurant dans (27a) et (27b), sont évaluées en utilisant la méthode de Gauss [14] pour N points:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)/2 \sum_{i=1}^N w(i) \cdot f(t(i)) \quad (28)$$

Les constantes $w(i)$ et $t(i)$ ($i=1, N$), sont données par des tables [14].
c désigne la corde.

A l'aide de (28), (27a) et (27b) deviennent:

$$u(x,y) = u_0\left(-\frac{c}{2}\right) - \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C_u(x,y,t_i) \frac{du_0}{d\tau}(t_i) - \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C_v(x,y,t_i) \frac{dv_0}{d\tau}(t_i) \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(x,y) = \vartheta_0\left(-\frac{c}{2}\right) - \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C_u(x,y, t_i) \frac{d\vartheta_0}{dt}(t_i) + \\ + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C_v(x,y, t_i) \frac{d\vartheta_0}{dt}(t_i) \end{aligned} \quad (29b)$$

5.1. Ecriture de la condition de glissement en chaque point du profil

Cette condition s'écrit:
$$\frac{\vartheta(x, P(x))}{u(x, P(x))} = P'(x) \quad (30)$$

Compte tenu de (29a) et de (29b), (30) s'écrit:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{c}{2} w(i) \left[P'(x) C_u(x,y, t_i) + C_v(x,y, t_i) \right] \frac{d\vartheta_0}{dt}(t_i) + \\ + \sum_{i=1}^N \frac{c}{2} w(i) \left[P'(x) C_v(x,y, t_i) - C_u(x,y, t_i) \right] \frac{d\vartheta_0}{dt}(t_i) = \\ = P'(x) \vartheta_0\left(-\frac{c}{2}\right) - \vartheta_0\left(-\frac{c}{2}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

5.2. Ecriture de la condition au bord d'attaque et de fuite (nez et queue du profil)



Aux deux points NA et NF, la nullité du rotationnel s'écrit:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{R} \quad (32a)$$

D'autre part : $u = 0 \quad (32b)$

R désignant le rayon de courbure du profil au points NA et NF, n la distance suivant la normale orientée vers l'extérieur du profil, v le module de la vitesse.

Compte tenu de la disposition des points NA et NF sur le profil, les relations (32) s'écrivent:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{R} \quad , \quad u = 0 \quad (33)$$

v désignant la composante tangentielle de la vitesse aux points NA et NF.

Or:
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

On obtient donc:
$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{R} = 0 \quad (34a)$$

$$u = 0 \quad (34b)$$

relations à vérifier par les composantes de la vitesse u et v, au voisinage du nez, et de la queue du profil. ($x = \pm c/2$).

La relation précédente (33) est discrétisée sous la forme:

$$u\left(-\frac{c}{2}, y_A + \Delta y\right) - u\left(-\frac{c}{2}, y_A - \Delta y\right) = v\left(-\frac{c}{2}, y_A\right) \cdot \frac{\Delta y}{R_A} \quad (35a)$$

pour le bord d'attaque ($y_A = P(-c/2)$)

$$u\left(\frac{c}{2}, y_F + \Delta y\right) - u\left(\frac{c}{2}, y_F - \Delta y\right) = v\left(\frac{c}{2}, y_F\right) \cdot \frac{\Delta y}{R_F} \quad (35b)$$

pour le bord de fuite ($y_F = P(c/2)$)

Ces relations s'écrivent compte tenu de (29a) et (29b):

— pour (34a)

$$\begin{aligned} & -\frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) \left[C u\left(-\frac{c}{2}, y_A + \Delta y, t_i\right) - C u\left(-\frac{c}{2}, y_A + \Delta y, t_i\right) \right] \frac{d u_0(t_i)}{d \tau} + \\ & -\frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) \left[C v\left(-\frac{c}{2}, y_A + \Delta y, t_i\right) - C v\left(-\frac{c}{2}, y_A - \Delta y, t_i\right) \right] \frac{d v_0(t_i)}{d \tau} = \\ & = v_0\left(-\frac{c}{2}\right) \frac{\Delta y}{R_A} - \frac{\Delta y}{R_A} \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C u\left(-\frac{c}{2}, y_A, t_i\right) \frac{d v_0(t_i)}{d \tau} + \\ & + \frac{\Delta y}{R_A} \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C v\left(-\frac{c}{2}, y_A, t_i\right) \frac{d u_0(t_i)}{d \tau} \end{aligned}$$

Soit:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) \left[\frac{RA}{2\Delta y} \left[Cu\left(-\frac{c}{2}, y_A + \Delta y, t_i\right) - Cu\left(-\frac{c}{2}, y_A - \Delta y, t_i\right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + Cv\left(-\frac{c}{2}, y_A, t_i\right) \right] + \\
 & -\frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) \left[\frac{RA}{2\Delta y} \left[Cv\left(-\frac{c}{2}, y_A + \Delta y, t_i\right) - Cv\left(-\frac{c}{2}, y_A - \Delta y, t_i\right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. - Cu\left(-\frac{c}{2}, y_A, t_i\right) \right] = u_0\left(-\frac{c}{2}\right)
 \end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \frac{c}{2} w(i) \left[-\frac{RA}{2\Delta y} \left[Cu\left(-\frac{c}{2}, y_A + \Delta y, t_i\right) - Cu\left(-\frac{c}{2}, y_A - \Delta y, t_i\right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + Cv\left(-\frac{c}{2}, y_A, t_i\right) \right] \frac{du_0}{dt_i} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{c}{2} w(i) \left[-\frac{RA}{2\Delta y} \left[Cv\left(-\frac{c}{2}, y_A + \Delta y, t_i\right) - Cv\left(-\frac{c}{2}, y_A - \Delta y, t_i\right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + Cu\left(-\frac{c}{2}, y_A, t_i\right) \right] \frac{dv_0}{dt_i}
 \end{aligned}$$

(36a)

La relation (33b) donnant par ailleurs:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \frac{c}{2} w(i) Cu\left(-\frac{c}{2}, y_A, t_i\right) \frac{du_0}{dt_i} + \sum_{i=1}^N \frac{c}{2} w(i) Cv\left(-\frac{c}{2}, y_A, t_i\right) \frac{dv_0}{dt_i} = \\
 & = u_0\left(-\frac{c}{2}\right)
 \end{aligned}$$

(36b)

Des relations équivalentes à (36a) et (36b), doivent être obtenues pour le bord de fuite ($x = c/2$, $y_f = P(c/2)$), en changeant le signe du rayon de courbure).

* Méthode de Newton-Raphson.

Soit X^* , le vecteur solution du système non linéaire:

$$f_i(X) = 0 \quad i = 1, N \quad (1)$$

$$f_i(X^*) = f_i(X^k + (X^* - X^k)) \quad (2)$$

On développe (2) en série de Taylor.

Si X^k est estimé proche de X^* , on a le système (1) qui s'écrit:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \bigg|_{X = X^k} (X^{*j} - X^{kj}) = -f_i(X^k) \quad (3)$$

$$A_{ij}^k = \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \bigg|_{X = X^k}$$

$$\Delta X_j^k = X^{*j} - X^{kj}$$

$$B_i^k = -f_i(X^k)$$

L'équation (3) s'écrit :

$$A^k \cdot \Delta X^k = B^k \quad (4)$$

Le système (4) est un système linéaire, voir les méthodes de résolution des systèmes linéaires [13].

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^k \quad \text{meilleur estimé de } X^*.$$

On continue jusqu'à ce que : $|\Delta X^k| \longrightarrow 0$

Arrêt des itérations:

On arrête les itérations si l'une de ces quatre conditions est réalisée:

- 1) $|X_i^{k+1} - X_i^k| < \varepsilon_1$
- 2) $|X_i^{k+1} - X_i^k| / |X_i^{k+1}| < \varepsilon_2$
- 3) $|f_i(X^{k+1})| < \varepsilon_3$
- 4) $K > K_{\max}$

ANNEXE 10

* Programme

Afin que le lecteur puisse analyser le travail de près, on a jugé
util de l'exposé en détail.

On a utilisé le langage FORTRAN , car c'est celui qu'on maitrise
le mieux .

PROGRAMME PRINCIPAL
OB.FOR

PROGRAM OB

```

C$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$  DECLARATIONS  $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
  IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)

  COMMON /BL1/ W(100)
  COMMON /BL2/ PI,DY, EP(100)
  COMMON /BL3/ S(100)
  COMMON /BL4/ X(100)
  COMMON /BL5/ N,C,SA,SF,RA,RF
  COMMON /BL6/ U0,V0
  DIMENSION  XS(30), DV0(30), T(30)
  DIMENSION BE(30),BI(30), UA(30), VA(30), UF(30), VF(30)
  DIMENSION AM(30), AN(30),FM(30), FN(30), AM1(30), FM1(30)
  DIMENSION AN1(30),FN1(30),UA1(30),UF1(30),VA1(30),VF1(30)
  DIMENSION BE1(30),BI1(30),AMA(30),FMF(30),ANA(30),FNF(30)
  DIMENSION URA(30),URF(30),VRA(30),VRF(30),USA(30),USF(30)
  DIMENSION VSA(30),VSF(30),FD(30),FI(30),DX(30),X100(30)
  DIMENSION Y100(30), ZEL(30,30), PR7(30), SO6(30)
  DIMENSION HUE(30,30), HUI(30,30), HVE(30,30), HVI(30,30)
  DIMENSION HUE1(30,30),HUI1(30,30),HVE1(30,30),HVI1(30,30)
  DIMENSION FD1(30,30),FI1(30),HEL(30,30),FEL(30,30)
  DIMENSION PR1(30),PR2(30),PR3(30),PR4(30),PR5(30),PR6(30)
  DIMENSION PR8(30),SO1(30),SO2(30),SO3(30),SO4(30),SO5(30)
  EXTERNAL MD,E,P,Q,H,CU,CCC,CCS,UC,US
  EXTERNAL H1C,H1S,H2C,H2S,AMMC,AMMS,GB
  CHARACTER *20 FICH,TITRE

C $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

```



```

C{||||| OUVERTURE DE LA BOUCLE DES ITERATIONS |||}
DO K1=1,KMAX
  ra=xs(1)
  sa=xs(2)
  sf=xs(n+3)
  rf=xs(n+4)
  do j=1,n
    s(j)=xs(j+2)
  end do

DO I=1,N
  be(i)=Gb(i,1)
  bi(i)=Gb(i,-1)

DO J=1,N
  hue(i,j)=h(i,j,1,1,0)
  hui(i,j)=h(i,j,-1,1,0)
  hve(i,j)=h(i,j,1,0,1)
  hvi(i,j)=h(i,j,-1,0,1)
C   PRINT*, 'HUE(' ,I,J, ')=' ,HUE(I,J)
C   PRINT*, 'HUI(' ,I,J, ')=' ,HUI(I,J)
C   PRINT*, 'HVE(' ,I,J, ')=' ,HVE(I,J)
C   PRINT*, 'HVI(' ,I,J, ')=' ,HVI(I,J)
END DO
END DO

DO J=1,N
  ua(j)=uC(2*N,j,ra,0)
  va(j)=uS(2*N,j,ra,0)
  uf(j)=uC(3*N,j,-rf,0)
  vf(j)=uS(3*N,j,rf,0)

  am(j)=Ccc(2*N,j,0,0,0)*w(j)
  an(j)=ccS(2*N,j,0,0,0)*w(j)
  fm(j)=- (1+Ccc(3*N,j,0,0,0))*w(j)
  fn(j)=ccS(3*N,j,0,0,0)*w(j)
C   PRINT*, 'UA(' ,J, ')=' ,UA(J)
C   PRINT*, 'VA(' ,J, ')=' ,VA(J)
C   PRINT*, 'UF(' ,J, ')=' ,UF(J)
C   PRINT*, 'VF(' ,J, ')=' ,VF(J)

```



```

VF1(j)=.0

END IF

DO J=1,N

IF(K.eq.j) THEN

AM1(j)=ammS(2*N,j,1)
FM1(j)=ammS(3*N,j,-1)
AN1(j)=ammC(2*N,j,-1)
FN1(j)=ammC(3*N,j,-1)

UA1(j)=-uS(2*N,j,-ra,1)
UF1(j)=-uS(3*N,j,rf,1)
VA1(j)=uC(2*N,j,-ra,1)
VF1(j)=uC(3*N,j,-rf,1)

    if(j.eq.i) then

BE1(i)=.0
BI1(i)=BE1(i)

huel(i,j)=.0
huil(i,j)=.0
hvel(i,j)=.0
hvil(i,j)=.0

        else if(j.eq.i-1) then

BE1(i)=-2./c*u0*q(i)
BI1(i)=BE1(i)

huel(i,j)=h1S(i,j,1,1,0,1)+h2C(i,j,1,1,-1)
huil(i,j)=h1S(i,j,-1,1,0,1)+h2C(i,j,-1,1,-1)
hvel(i,j)=h1C(i,j,1,0,1,1)+h2S(i,j,1,0,-1)
hvil(i,j)=h1C(i,j,-1,0,1,1)+h2S(i,j,-1,0,-1)

            else if(j.eq.i+1) then

```

BE1(i)=2./c*u0*q(i)

BI1(i)=BE1(i)

huel(i,j)=h1S(i,j,1,1,0,1)+h2C(i,j,1,1,1)

huil(i,j)=h1S(i,j,-1,1,0,1)+h2C(i,j,-1,1,1)

hvel(i,j)=h1C(i,j,1,0,1,1)+h2S(i,j,1,0,1)

hvil(i,j)=h1C(i,j,-1,0,1,1)+h2S(i,j,-1,0,1)

else

BE1(i)=.0

BI1(i)=BE1(i)

huel(i,j)=h1S(i,j,1,1,0,1)

huil(i,j)=h1S(i,j,-1,1,0,1)

hvel(i,j)=h1C(i,j,1,0,1,1)

hvil(i,j)=h1C(i,j,-1,0,1,1)

end if

ELSE IF(k.eq.i+1) THEN

BE1(i)=2./c*u0*Q(i)

BI1(i)=BE1(i)

AM1(j)=.0

FM1(j)=.0

AN1(j)=.0

FN1(j)=.0

UA1(j)=.0

UF1(j)=.0

VA1(j)=.0

VF1(j)=.0

if(j.eq.i) then

```
huel(i,j)=-.5*w(j)*q(i)
huil(i,j)=huel(i,j)
hvel(i,j)=h2S(i,j,1,0,1)
hvil(i,j)=h2S(i,j,-1,0,1)
```

```
else if(j.eq.i-1) then
```

```
huel(i,j)=h2C(i,j,1,1,1)
huil(i,j)=h2C(i,j,-1,1,1)
hvel(i,j)=h2S(i,j,1,0,1)
hvil(i,j)=h2S(i,j,-1,0,1)
```

```
else
```

```
huel(i,j)=h2C(i,j,1,1,1)
huil(i,j)=h2C(i,j,-1,1,1)
hvel(i,j)=h2S(i,j,1,0,1)
hvil(i,j)=h2S(i,j,-1,0,1)
```

```
end if
```

```
ELSE IF(k.eq.i-1) THEN
```

```
BE1(i)=-2./c*u0*q(i)
BI1(i)=BE1(i)
```

```
AM1(j)=.0
FM1(j)=.0
AN1(j)=.0
FN1(j)=.0
```

```
UA1(j)=.0
UF1(j)=.0
VA1(j)=.0
VF1(j)=.0
```

```
if(j.eq.i) then
huel(i,j)=.5*w(j)*q(i)
```

```
huil(i,j)=hue(i,j)
hvel(i,j)=h2S(i,j,1,0,-1)
hvil(i,j)=h2S(i,j,-1,0,-1)
```

```
    else if(j.eq.1+1) then
```

```
    hue1(i,j)=h2C(i,j,1,1,-1)
    huil(i,j)=h2C(i,j,-1,1,-1)
    hvel(i,j)=h2S(i,j,1,0,-1)
    hvil(i,j)=h2S(i,j,-1,0,-1)
```

```
    else
```

```
    hue1(i,j)=h2C(i,j,1,1,-1)
    huil(i,j)=h2C(i,j,-1,1,-1)
    hvel(i,j)=h2S(i,j,1,0,-1)
    hvil(i,j)=h2S(i,j,-1,0,-1)
```

```
    end if
```

```
ELSE
```

```
BE1(i)=.0
BI1(i)=BE1(i)
```

```
hue1(i,j)=.0
huil(i,j)=.0
hvel(i,j)=.0
hvil(i,j)=.0
```

```
AM1(j)=.0
FM1(j)=.0
AN1(j)=.0
FN1(j)=.0
```

```
UA1(j)=.0
UF1(j)=.0
VA1(j)=.0
VF1(j)=.0
```


FD1(1,2)=PP1+PP2+PP3

call prod2(AMA,Z,PP4,N)

call prod2(AM,Z1,PP5,N)

call prod2(ANA,dv0,pp6,n)

FD1(2,2)=PP4+PP5+PP6

call prod2(FM,Z1,PP7,N)

FD1(N+3,2)=PP7

call prod2(UF,Z1,PP8,N)

FD1(N+4,2)=PP8

Else if(L.eq.N+2) then

C calcul de la n+3ème colonne

call prod2(uA,Z1,pp9,n)

FD1(1,N+3)=PP9

call prod2(AM,Z1,PP10,N)

FD1(2,N+3)=PP10

call prod2(FMF,Z,PP11,N)

call prod2(FM,Z1,PP12,N)

call prod2(FNF,dv0,pp13,n)

FD1(N+3,N+3)=PP11+PP12+PP13

call prod2(USF,Z,PP14,N)

call prod2(UF,Z1,PP15,N)

call prod2(VSF,dv0,pp16,n)

FD1(N+4,N+3)=PP14+PP15+PP16

END IF

call prod(hvel,dv0,pr6,n,n)

call prod(huel,z,pr7,n,n)

call prod(hue,z1,pr8,n,n)

call som(1,pr6,so5,n,-1)

call som(so5,pr7,so6,n,-1)

call som(so6,pr8,F11,n,-1)


```
FD1(1,1)=P200+P21
```

```
c calcul de FD1(N+4,N+4)
call prod2(urf,z,p22,n)
call prod2(vrf,DV0,p23,n)
FD1(n+4,n+4)=P22+P23
```

```
do j=1,n+4
xs(j)=xs(j)+dx(j)
end do
```

```
FD1(2,1)=.0
FD1(N+3,N+4)=.0
```

```
CXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
```

```
xs(1)=ra
xs(2)=sa
xs(n+3)=sf
xs(n+4)=rf
do j=1,n
xs(j+2)=s(j)
end do
```

```
C TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT CALCUL DE DX TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT
CALL ELARG(FD1,FD,FEL,N)
CALL GAUSS(FEL,DX,N,N+1,EPS,DET)
```

```
C TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT
```

```
do j=1,n+4
xs(j)=xs(j)+ dx(j)
end do
```

```
C HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH TESTS DE CONVERGENCE HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH
```

```
    j=1
3  if(abs(dx(j)).lt.e1) then
    j=j+1
    if(j.le.n+4) then
    goto 3
```


SOUS PROGRAMMES : SUBROUTINE

C @@@@@@@@@@@@@@@@@@ SUBROUTINE SOM @@@@@@@@@@@@@@@@@@

SUBROUTINE SOM(A,B,SO,M,LA)

IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)

DIMENSION A(M), B(M), SO(M)

DO I=1,M

SO(I)=A(I)+LA*B(I)

END DO

RETURN

END

C @@@@@@@@@@@@@@@@@@

C @@@@@@@@@@@@@@@@@@ SUBROUTINE PROD @@@@@@@@@@@@@@@@@@

SUBROUTINE PROD(A,B,PR,L,M)

IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)

DIMENSION A(L,M), B(M), PR(L)

DO I=1,L

PR(I)=0.

DO K=1,M

PR(I)=PR(I)+A(I,K)*B(K)

END DO

END DO

RETURN

END

C @@@@@@@@@@@@@@@@@@

C YYYYYYYYYYYYYYYY SUBROUTINE PROD2 YYYYYYYYYYYYYYYY

SUBROUTINE PROD2(A,B,RR,M)

IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)

DIMENSION A(M),B(M)

RR=0.

DO J=1,M

RR=RR+A(J)*B(J)

END DO

RETURN

END

C YYYYYYYYYYYYYYYY

C ##### SUBROUTINE ELARG #####

```
SUBROUTINE ELARG(AQ,YQ,EL,N)
IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
  DIMENSION AQ(N,N),YQ(N),EL(N,N+1)
DO I=1,N
  EL(I,N+1)=YQ(I)
DO J=1,N
  EL(I,J)=AQ(I,J)
END DO
END DO
RETURN
END
```

C #####

C ~~~~~ SUBROUTINE GAUSS ~~~~~

```
  SUBROUTINE GAUSS(A6,X6,N,M6,EPS,DET)
  IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
C   RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE PAR LA
C   METHODE DE GAUSS_JORDAN AVEC PIVOTATION
C   TOTALE SANS ECHANGE DE LIGNE NI COLONNES
  INTEGER C6,S6
  DIMENSION A6(N,M6),X6(N,1),L6(100),C6(100),P6(100)

C   DO I=1,N
C   WRITE(*,*) (A6(I,J),J=1,M6)
C   ENDDO

C   RECHERCHE DU K_IEME PIVOT
DO 100 K=1,N
  P6(K)=0.
DO 30 I=1,N
DO 20 J=1,N
  IF(K.EQ.1) GO TO 15
DO 10 S6=1,K-1
  IF(I.EQ.L6(S6)) GOTO 30
  IF(J.EQ.C6(S6)) GOTO 20
100 CONTINUE
```

10


```

R1=SF
SS=S(N-1)
UN=0.
VW=EP(N-1)
ELSE
R1=S(I+1)
SS=S(I-1)
UN=EP(I+1)
VW=EP(I-1)
END IF
P=(R1-SS+L*(UN-VW))*Q(I)
RETURN
END

```

C:;;;

C:.....: FUNCTION Q(I) :.....:

```

FUNCTION Q(I)
IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
COMMON /BL4/ X(100)
COMMON /BL5/ N,C,SA,SF,RA,RF
IF(I.EQ.1) THEN
R2=X(2)
S2=-C/2.
ELSE IF(I.EQ.N) THEN
R2=C/2.
S2=X(N-1)
ELSE
R2=X(I+1)
S2=X(I-1)
END IF
CNN=R2-S2
Q=1./CNN
RETURN
END

```

C:.....:

C!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! FUNCTION UC(I,J,R,IBETA) !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION UC(I,J,R,IBETA)


```

IF(NB.EQ.0) THEN
  IPEN=1
ELSE
  IPEN=MD(I,J)
END IF
H2C=NDT*Q(I)*(IPEN*CCC(I,J,L,0,0)+NB*.5*(MD(I,J)-1))*
$ W(J)
RETURN
END

```

```

C #####
C ##### FUNCTION H2S(I,J,L,NB,NDT) #####

```

```

FUNCTION H2S(I,J,L,NB,NDT)
IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
COMMON /BL1/ W(100)
COMMON /BL5/ N,C,SA,SF,RA,RF
IF(NB.EQ.0) THEN
  IPEN=1
ELSE
  IPEN=MD(I,J)
END IF
H2S=NDT*Q(I)*(IPEN*CCS(I,J,L,0,0)+NB*.5*(MD(I,J)-1))*
$ W(J)
RETURN
END

```

```

C #####
C ##### FUNCTION AMMC(I,J,KDT) #####

```

```

FUNCTION AMMC(I,J,KDT)
IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
COMMON /BL1/ W(100)
COMMON /BL5/ N,C,SA,SF,RA,RF
AMMC=KDT*CCC(I,J,0,1,0)*W(J)
RETURN
END

```

```

C #####

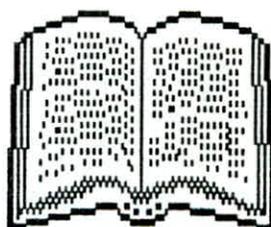
```

```

C ##### FUNCTION AMMS(I,J,KDT) #####
IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
COMMON /BL1/ W(100)
COMMON /BL5/ N,C,SA,SF,RA,RF

```


REFERENCES



REFERENCES

- [1]. STANITZ J.D.
Approximate Design Method for High Solidity Blade Elements in Compressors and Turbines
NACA TN 2408, 1951
- [2]. STANTZ J.D.
Design of two-dimensional Channels with prescribed Velocites Distribution along the Channel Walls
NACA TN 2593, 1952
- [3]. WHITNEY W . et al
Cold air Investigation of a Turbine for High-Temperature Engine Application
NASA TN D-3751, 1957
- [4]. PAYNE D.
Isolated and Cascade Aerofoils
Univ. London, 1964
- [5]. SCHMIDT E.
Computation of Supercritical Compressor and Turbine Cascade with a Design Method for Transonic Flows
ASME Paper, N° 79 GT-30, 1979
- [6]. LEGENDRE R.
Work in Progress in France Related to Computation of Profiles for Turbomachines Blades by Hodograph Method
ASME Paper, N°72 GT-41, 1972
- [7]. CANTREL H.N. , FOWLER J.E.
The Aerodynamic Design for Two-dimensional Turbine Cascade for incompressible flow with High Speed Computer
J. BASIC Engineering Trans. ASME, S.D., Vol.81, N°3, Sept. 1959, p.349
- [8]. COHEN M.J.
A Hodograph Design Method for Compressible Flow Problems
J. Appl. Mechan. Trans. ASME, S.E., Vol.84, N°3, Sept. 1962, p.533
- [9]. KARADINAS G.
Tracé des aubages de Turbines Transoniques par la Méthode de l'hodographe
Paper presented at the 2nd ISABE, March 1974, Sheffield (U.K.)
- [10]. MEAUZE G.
An inverse Time Marching Method for the Definition of Cascade Geometry
ASME Paper, 81-GT-167, 1981

- [11]. JENNIONS I.K., STOW P.
A Quasi three Dimensional Turbomachinery Blade Design
System
- Part I : Through flow Analysis
ASME Paper 84 GT-26, 1984
- Part II : Computerized System
ASME Paper 84 GT-27, 1984
- [12]. INGE L.RYHMING
Dynamique des Fluides
- [13]. M.BOUMAHRAT
Méthodes Numériques Appliquées
Edition O.P.U Alger
- [14]. B.DEMIDOVITCH I.MARON
Elément de Calcul Numérique
Edition MIR Moscow

