

وزارة الجامعات والبحث العلمي  
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : *Génie Mécanique*

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

*FORMULATION D'ORDRE SUPERIEUR*

*DE LA METHODE DE DISCONTINUE DE DEPLACEMENT*

Proposé par :

Mr. Y. BELKACEMI

Etudié par :

Mr. A. KARA

Dirigé par :

Mr. Y. BELKACEMI

PROMOTION : JUILLET / 1992

Élève Ingénieur : A. KARA

Promoteur : M. : Y. BELKACEMI

ملخص  
لقد تضمن عملنا هذا استعمال الصياغة ذات  
الرتبة العالية (استعمال الوحدات الخطية) في طريقة  
الازاحات المتقطعة وقد قارنا دقة وفعالية  
هذه الصياغة مع الصياغة الأصلية (الثابتة)  
في هذه الطريقة.

ABSTRACT :

-This work consists of the higher order formulation of the discontinuity displacement method, thus we have used the linear elements (discontinuities) and we have compared the efficiency and accuracy of this formulation to the original one (constant discontinuities).

RESUME :

-Ce travail consiste en la formulation d'ordre supérieur (utilisation d'éléments linéaires) de la méthode de discontinuité de déplacement et comparer son efficacité et sa précision avec la formulation originale (discontinuité constante).

S O M M A I R E

CHAPITRE -I) :

-INTRODUCTION ..... 4

CHAPITRE -II) :

-INTRODUCTION A LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES.....

II-1)-INTRODUCTION ..... 3

II-2)-UNE APPROCHE ALTERNATIVE ..... 4

II-3)-HISTORIQUE DE LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES

    II-3-1)-formulation indirecte de la M.E.I. .... 6

    II-3-2)-formulation directe de la M.E.I. .... 6

II-4)-DOMAINE D'APPLICATION DE LA M.E.I. .... 6

II-5)-COMPARAISON DES ATTRIBUTS DE LA M.E.F. ET LA M.E.I. .... 7

    II-5-1)-applicabilité ..... 7

    II-5-2)-dimension du problème ..... 8

    II-5-3)-modélisation intérieure continue ..... 10

    II-5-4)-précision et distribution d'erreur ..... 10

II-6)-REMARQUES DE CONCLUSION ..... 11

CHAPITRE -III) :

PROBLEME BIDIMENSIONNEL D'ELASTOSTATIQUE.....

III-1)-INTRODUCTION ..... 12

III-2)-EQUATION DE BASE DE L'ELASTOSTATIQUE ..... 12

III-3)-SOLUTIONS FONDAMENTALES..... 14

III-4)-FORMULATION INTEGRALE INDIRECTE..... 16

III-4-1)-formulation de base pour un corps isotrope homogène..... 16

III-4-2)-discretisation des integrales de frontiere et de volume..... 18

III-5)-FORMULATION INTEGRALE DIRECTE..... 20

III-5-1)-formulation de base pour un corps isotrope homogène..... 20

III-5-2)-discretisation des integrales de frontiere et de volume..... 23

CHAPITRE -IV :

METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT.....

IV-1)-INTRODUCTION..... 24

IV-2)-SOLUTION ELASTIQUE POUR UNE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT SUR UN SEGMENT FINI..... 24

IV-3)-PROCEDURE NUMERIQUE..... 33

IV-4)-TRANSFORMATION DES COORDONNEES..... 35

IV-5)-INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES..... 36

CHAPITRE -V :

FORMULATION D'ORDRE SUPERIEUR DE LA M.D.D.....

V -1)-INTRODUCTION..... 38

V-2)-FONCTION DE GREEN POUR LA M. E. I..... 38

V-3) -PROCEDURE NUMERIQUE..... 40

V-4) -COEFFICIENTS D'INFLUENCE..... 44

V-5) -ELEMENT BOUT DE FISSURE..... 42

CHAPITRE -VI) :

PROGRAMME DE RESOLUTION .....

VI-1) -INTRODUCTION..... 44

VI-2) -ORGANISATION ET STRUCTURE DU PROGRAMME..... 44

VI-3) -ORGANIGRAMME RECAPITULATIF..... 47

CHAPITRE -VII) :

EXEMPLES D'APPLICATION.....

VII-1) -FISSURE SOUS PRESSION..... 48

VII-1) -PROBLEME INTERIEUR..... 54

VII-1) -PROBLEME EXTERIEUR..... 57

CONCLUSION..... 62

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

Une caractéristique commune à la plupart des investigations quantitatives d'un problème réel en ingéniering et sciences appliquées est que la géométrie du domaine d'intérêt est très irrégulière pour que les solutions analytiques soient faisables , et les solutions numériques deviennent dans ce cas nécessaire .

Il faut dire que le développement des méthodes numériques de calcul , étant très lié au développement de l'industrie des ordinateurs , a connu ces vingt dernières années un essor remarquable grâce donc au progrès prodigieux dans la construction des ordinateurs ( capacité de mémoire et rapidité d'exécution ) . Ces méthodes constituent un ensemble de techniques d'analyse communes à plusieurs disciplines d'ingeneering et de sciences appliquées telles que le génie civil , la construction mécanique , aéronautique et navale etc .

Et c'est généralement en trois temps que se développent les disciplines nouvelles :

- Au début , c'est dans les publications périodiques que l'on peut suivre leur progression , et seuls quelques articles récapitulatifs font à l'occasion la synthèse des développements nouveaux , les applications pratiques sont alors rares .
- La seconde phase voit ensuite apparaitre des livres qui permettent aux chercheurs engagés dans le domaine d'en avoir une vue d'ensemble assez complète , on enregistre quelques applications dues à des équipes qui travaillent au sein d'institutions disposant de moyens financiers importants
- Dans un troisième temps enfin , les applications s'étendent à presque tous les niveaux , et l'enseignement supérieur propose l'étude de la nouvelle tranche sous forme de cours .

Il est à noter donc que ces techniques ne sont pas un objet mathématiques propice à des développements théoriques , mais un outil industriel à rendre le plus clair possible .

La technique la plus utilisée concernant une subdivision extensive ou étendue du domaine , soit par des grilles ou lignes pour définir les noeuds , comme en méthode de différences finies , ou par sa secrétion en large nombre de composants discrets comme en méthode d'éléments finis .

La dernière technique a atteint un haut niveau de développement et de popularité et est accompagnée de développements mathématiques théoriques extraordinaires . En outre l'étude des conditions d'application et de convergence , ceci dit on peut douter s'il existe une autre approche qui peut offrir une puissance et une simplicité comparables pour ne pas dire meilleure . Nous pourrions dire qu'il existe une telle alternative qui tente à redresser la balance , c'est la méthode des équations intégrales qu'on traitera en détails dans les chapitres qui vont suivre cette introduction .

L'objet de notre travail est l'étude de la formulation d'ordre supérieur de la méthode de discontinuité de déplacement étant une variante indirecte de la méthode des équations intégrales .

Le premier chapitre traitera la méthode des équations intégrales , ses fondements mathématiques et ses développements théoriques .

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution du problème bidimensionnel d'élastostatique par la M.E.I.

Dans le troisième chapitre traitera la méthode de discontinuité de déplacement (formulation indirecte de la M.E.I. ) nous passerons dans le quatrième chapitre à la formulation d'ordre supérieur de la M.D.D. qui fait l'objet de notre étude .

Dans le dernier chapitre , on passera à l'application de la formulation précédente et nous étudierons quelques exemples à cet égard.

Nous concluerons ce modeste travail par une conclusion , et des annexes seront donnés enfin .

## INTRODUCTION A LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES

### II-1) - INTRODUCTION

Quand un ingénieur ou un chercheur scientifique construit un modèle mathématique quantitatif de n'importe quel système physique, il doit commencer toujours par établir les équations du comportement d'un élément différentiel infinitésimal en assumant les relations entre les majeures variables concernées. Ceci conduit à une description du système sous forme d'un système d'équations différentielles, une fois le modèle de base établi et les propriétés de l'équation différentielle comprises, l'effort est ensuite dirigé vers l'obtention de la solution des équations à l'intérieur d'un domaine particulier qui a souvent une forme très compliquée et composé de zones de différents matériaux chacun avec des propriétés complexes. Il n'est pas surprenant alors que la solution de telles équations différentielles a été le souci majeur des analystes pour plus de deux siècles.

Donc la géométrie irrégulière de la majorité des problèmes pratiques nous prive de la solution analytique et les méthodes numériques deviennent le seul moyen à notre disposition pour obtenir des résultats précis et détaillés.

Les méthodes numériques les plus largement utilisées traitent directement les équations différentielles, sans aucune manipulation mathématique, par une des deux façons:

- soit par approximation des opérateurs différentiels dans les équations par des opérateurs algébriques plus simples valides en des séries de noeuds

- ou par représentation du domaine par des éléments finis qui sont assemblées pour approcher le système réel.

La méthode des différences finies, peut en principe être appliquée à n'importe quel système d'équations différentielles, mais malheureusement l'incorporation automatique des conditions limites est souvent une opération encombrante et difficile à manier, et la précision de la solution numérique obtenue dépend entièrement de la raffinité du maillage utilisé pour définir les noeuds et par conséquent de larges systèmes d'équations algébriques simultanées sont toujours générés.



Par la suite l'approche la populaire jusqu'à présent est l'alternative de la subdivision du domaine en éléments de taille finie, chaque élément reproduit approximativement le comportement de la petite région du domaine qu'il représente, mais une continuité complète entre les éléments est seulement réalisée dans les noeuds non pas le long des interfaces adjacentes (i.e., une telle méthode approche le domaine et son articulation). Le niveau et la puissance de la méthode des éléments finis en plus de la facilité relative avec laquelle les conditions limites peuvent être incorporées, présente en fait un véritable défi à n'importe quel autre système rival. Cependant ses aspects de faiblesse sont que c'est conceptuellement une discrétisation du domaine entier ce qui conduit inévitablement à de larges nombres d'éléments et par suite un large système d'équations algébriques.

#### 11-2) -UNE APPROCHE ALTERNATIVE

Une approche alternative évidente au système d'équations différentielles consiste à essayer de les intégrer analytiquement de certaines façons avant la procédure de discrétisation ou l'introduction d'approximations. Le principe de la méthode des équations intégrales est la transformation des équations différentielles en systèmes d'équations intégrales équivalentes comme première étape de la résolution.

Intuitivement, on douterait bien d'une telle opération si elle sera réussie, un système d'équations qui comporterait seulement les valeurs des variables aux bornes d'intégration (i.e., sur la frontière du domaine). Ceci en fait, implique que le schéma de discrétisation comporte seulement des subdivisions des surfaces de frontières du domaine. C'est exactement ce qui se passe avec la conséquence qu'un volume homogène exige seulement la discrétisation de la surface, non pas tout le domaine (volume). Quand les variables de la solution varient continuellement le long du domaine, toute approximation de la géométrie se rapporte seulement sur la frontière extérieure.

Une autre suspicion intuitive serait que le développement des équations intégrales et leur solution pourrait être mathématiquement plus complexe que les autres méthodes mentionnées ci-dessus. Heureusement, Ceci n'est qu'en partie juste, en effet on doit tenir compte du fait que les méthodes des équations intégrales ont été développées principalement par les mathématiciens dans le passé.

La situation est plus développée ces dernières années et les méthodes des équations intégrales (M.E.I) d'analyse, développées essentiellement de l'idée des équations intégrales sont maintenant applicables, et gagnent de plus en plus un terrain et une popularité considérables et sont incorporées dans les ordinateurs sophistiqués et immédiatement utiles pour l'analyse pratique.

#### HISTORIQUE DES (M.E.I.)

Tandis que la plupart des propriétés des équations différentielles ont été établies vers dix-neuvième siècle, la première investigation des équations intégrales a été publiée par Fredholm en 1905. Depuis, elles ont été étudiées intensivement, particulièrement en connection avec la théorie des champs.

La contribution majeure à la compression formelle des équations intégrales a été faite plus récemment par MIKHLIN. Tout ceci est présenté dans un aspect mathématique rigoureux, dont une grande partie n'est pas familière à la majorité des chercheurs en sciences appliquées. Malgré le développement formidable dans la classification et l'analyse des équations intégrales, personne de la plus part des auteurs n'a considéré la possibilité qu'un algorithme numérique général peut résoudre une large gamme de problèmes pratiques peut être basé sur elles. L'impulsion d'un tel développement a été amené par l'apparition des ordinateurs sophistiqués et un résultat a été l'émergence de la méthode des équations intégrales.

Historiquement, cette méthode a été développée en deux chemins parallèles et distincts (tout en ayant une origine commune ces deux catégories de M.E.I sont fermement rattachées), l'un est intuitif, l'approche physique, l'autre est un traitement plus mathématique basé sur les concepts de la théorie classique du potentiel.

### II-3-1)-FORMULATION DIRECTE DE LA (M. E. I.)

dans cette approche mathématique, les théorèmes fondamentaux d'intégration sont utilisés pour éliminer l'étape intermédiaire les fonctions inconnues dans les équations intégrales sont les variables physiques actuelles du problème. Dans un problème d'élasticité par exemple une solution d'une telle équation intégrale doit contenir tous les déplacements et les contraintes dans le système directement et ceux dans le domaine peuvent être calculées des valeurs de frontière par intégration numérique. Quelque algorithmes récents basés sur cette approche ont été développés par Cruse, Lachat, Rizzo, Watson et bien d'autres encore.

### II-3-2)-FORMULATION INDIRECTE DE LA (M. E. I.)

Dans cette approche physique, les équations intégrales sont formulées en terme de fonctions inconnues indirectes qui peuvent avoir aucune signification physique, on résout premièrement le système établi pour ces fonctions, les variables physiques actuelles du problème sont calculées par la suite à partir des fonctions indirectes, d'où le <sup>nom</sup> de la procédure indirecte.

### II-4)-DOMAINE D'APPLICATION

En principe ces méthodes peuvent être appliquées à n'importe quel problème régi par une équation différentielle linéaire ou incrémentablement linéaire.

Dans les problèmes ayant des équations différentielles elliptiques les solutions sont directes, cependant pour les systèmes d'équations paraboliques ou hyperboliques, un processus d'incrémentement en temps doit être introduit.

En effet une large catégorie de problèmes physiques est concernée, à commencer par ceux d'élastostatique, d'écoulement potentiel permanent et transitoire, d'élastohydrodynamique, d'élastoplasticité allant jusqu'à ceux d'acoustique etc... ils peuvent tous être résolus soit par la formulation directe ou indirecte des M E I .

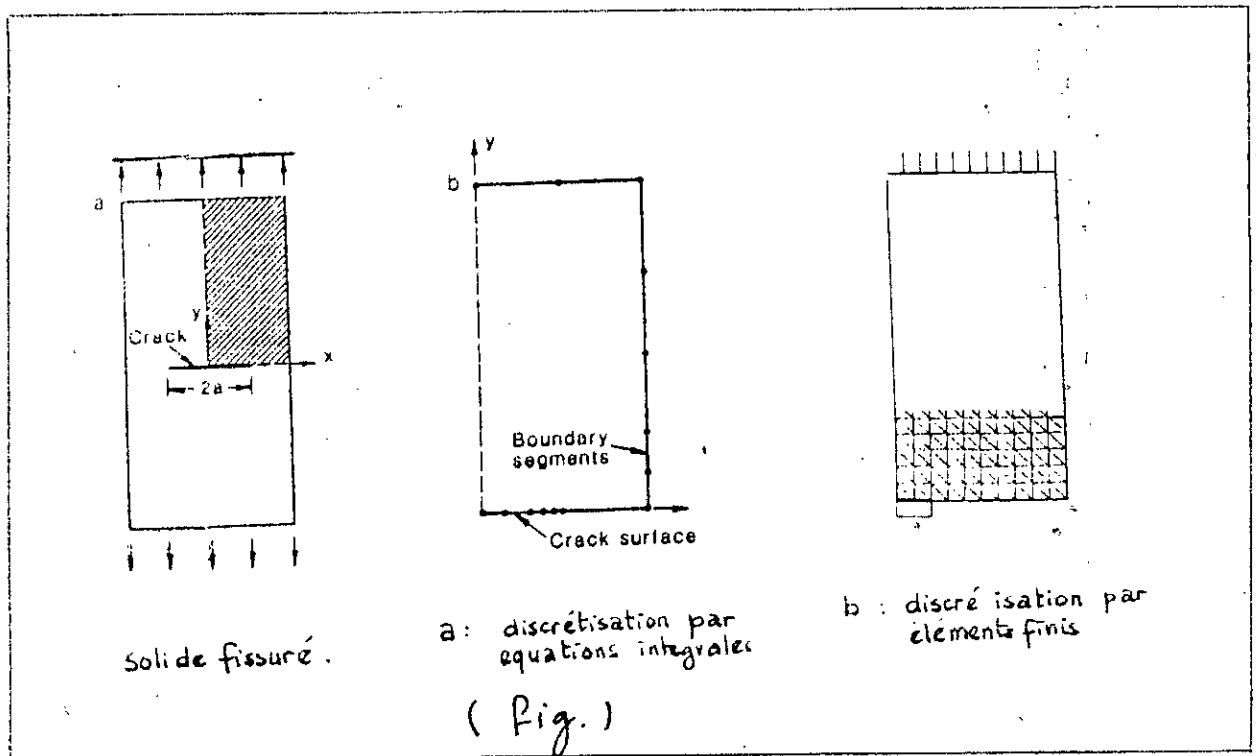
Les M E I peuvent de même être combinées avec d'autres techniques numériques, telles les méthodes des différences finies ou d'éléments finis dans une formulation mixte ou hybride. De telles solutions composées étendent indéfiniment le domaine d'application puisque les M E I ont des avantages très distinctes pour les problèmes physiques de grande dimension cependant, les M E F sont un moyen attractif d'incorporation de corps de taille finie dans de tels systèmes ou bon détail du domaine avec variation rapide des propriétés. Une comparaison plus compréhensive de ces attributs sera donnée dans le paragraphe ci-dessous comme conclusion de ce chapitre d'introduction.

## II-5)-COMPARAISON DES ATTRIBUTS DES MEF ET DES MEI

### II-5-1)-APPLICABILITE

Toutes les méthodes des équations intégrales utilisent le principe de superposition et sont alors seules applicables à des systèmes complètement linéaires ou ceux qui peuvent être approximés incrémentablement aux systèmes linéaires. Cette dernière catégorie étend ses limites à une large partie des problèmes intéressant les sciences de l'ingeneering. Il semble exister peu de problèmes solvables par la MEF et qui ne peuvent pas être résolus au moins aussi bien par la M.E.I. Ce sont les problèmes dans lesquels les propriétés de chaque matériaux élémentaire sont différents ou ceux dans lesquels la géométrie générale du problème est telle qu'une ou plusieurs dimensions spaciales sont disproportionnellement petit en comparaison à d'autres mais pas suffisamment pour réduire sa dimension effective .

## II-5-2) - DIMENSION DU PROBLEME



La méthode des équations intégrales réduit la dimension du problème par un , i.e., pour les problèmes bidimensionnels l'analyse génère un problème unidimensionnel , et pour un problème tridimensionnel seules deux dimensions apparaissent ( voir -fig.)

Chaque zone limitée distincte en analyse par M.E.I. doit être traitée comme homogène et donc pour les problèmes dont l'inhomogénéité est considérable de sorte qu'un grand nombre de petites zones homogènes sont à modéliser , le schéma de frontière zonale se dégénère en une subdivision unique du domaine globale . Dans ce cas les schémas de la M.E.F. et M.E.I. sont indistinguables un de l'autre .

Si , dans un problème à domaine homogène , des forces réparties de volume sont à être incluses ou les équations différentielles sont seulement quasi-linéaires (comme dans le cas d'élastoplasticité par exemple ) , alors on doit ajouter aux intégrales de de frontières des intégrales de volume contenant des subdivisions arbitraires de l'intérieur du domaine .

Cependant dans ces cas les subdivisions internes augmentent pas l'ordre du système d'équations algébriques final à être résolu et l'avantage reste avec la M.E.I.

Pour la majorité de ces cas pratiques une discrétisation simple de la frontière conduit nécessairement à un système très réduit d'équations simultanées que n'importe quel schéma de tout le domaine .

D'autre part , les matrices du système générées par la M.E.I. sont complètement remplies pour une région homogène , par contre les plus larges matrices apparaissent en M.E.F. et sont relativement moins remplies .

L'évaluation de chaque composante des matrices dans la M.E.I. comporte plus de calcul arithmétique son contrepartie en M.E.F. .

On peut donc conclure que pour la comparaison du temps de calcul entre M.E.F. et M.E.I sur des problèmes tridimensionnels résolues avec une précision similaire, montre généralement un avantage en temps de l'ordre de quatre à dix à un en faveur de la dernière .

Cette différence peut être plus grande dans certaines classes de problèmes qui sont particulièrement amenable aux M.E.I. , par exemple :

1-systèmes à frontières à l'infini , puisque la procédure de résolution par M.E.I. satisfait automatiquement les conditions limites admissibles à l'infini , aucune subdivision de ces frontières n'apparaît , alors qu'avec la M.E.F. on doit approximer ces frontières par un nombre appréciable d'éléments distants .

2-Ceux contenant des régions semi infinies avec des portions de la surface libres non chargées . Une fois de plus en choisissant la solution singulière appropriée à utiliser avec la M.E.I. les régions 'non chargées' , qui sont souvent la grande partie de la surface libre , n'ont pas du tout besoin d'être discretisées .

### II-5-3) - MODELISATION INTERIEUR CONTINUE :

La M.E.I. comporte seulement la modélisation de la géométrie de la frontière du système . Une fois l'information nécessaire à la frontière a été obtenue , les valeurs des variables de la solution peuvent être calculées à n'importe quel point intérieur . La solution est complètement continue à l'intérieur du domaine . (Chacune de ces caractéristiques semble être unique aux M.E.I. parmi les alternative possibles . Comme resultat de la dernière facilité l'analyste peut obtenir les valeurs des valeurs des variables à n'importe quel point intérieur spécifique ; il doit prendre soin de choisir l'ultérieur de l'analyse principale et avec une haute résolution pres , par exemple , les concentrations de contraintes dans les corps élastiques ou élastoplastiques .

### II-5-4) - PRECISION ET DISTRIBUTION D'ERREUR :

L'équation intégrale elle même est une déclaration de la solution exacte au problème posé et les erreurs dues à la discrétisation et aux approximations numériques surgissent seulement sur , et adjacent aux , frontières dues à notre inability d'effectuer les intégrations exigées dans leur forme précise .

Si la procédure d'intégration numérique est faite d'une façon précise (en utilisant par exemple des éléments de frontière curvilignes et la variation continue des fonctions de distribution sur la frontière ) , alors les erreurs introduites peuvent être très petites . L'intégration numérique est , bien sur , souvent un processus plus stable et précis que la différentiation numérique et ni la M.E.I. directe ni indirecte exige une différentiation de quantités numériques . Il serait maintenant clair que , en l'absence de forces de volume , l'analyste a besoin seulement de spécifier les données de la géométrie de la frontière d'un domaine (en plus des conditions limites , propriétés des matériaux , etc. communes a toutes les méthodes numériques ) . L'effort fourni à la préparation des données est moins que ce qui est exigé par n'importe quelle méthode comportant une modélisation de la géométrie interne . donc pour la majorité des problèmes pratiques la M.E.I. offre des avantages importants sur les méthodes d'analyse par éléments finis .

## II-6) REMARQUES DE CONCLUSION :

Dans ce chapitre nous avons décrit le développement historique de la M.E.I. comme étant un outil de résolution de problèmes et avons discuté de son utilité en comparaison à d'autres alternatives courantes et populaires. De ces comparaisons on conclut que la M.E.I. a un grand avantage potentiel sur les autres méthodes, quelques uns sont maintenant déjà réalisés et d'autres qui attendent encore à être mis en évidence.



PROBLEME BIDIMENSIONNEL D'ELASTOSTATIQUE

III-1) - Introduction :

Dans ce chapitre on décrira le développement et l'application de la MEI à la résolution numérique des problèmes bidimensionnels d'élastostatique.

Le développement de la MEI pour les problèmes d'élasticité est fermement lié à celui de la théorie des potentiels.

Cependant, à la différence des équations intégrales de la théorie du potentiel, qui sont des équations scalaires, les équations intégrales résultants en élasticité, comme prévu, sont plus complexes que ceux de la théorie du potentiel. Ce de fait, et dans le but de les introduire d'une manière compact et élégante nous allons utiliser quelques opérations de notation indicielle. Le lecteur non encore familier avec cette notation est conseillé consulter la bibliographie qui traite de cette notation.

III-2) - Equation de base de l'élastostatique :

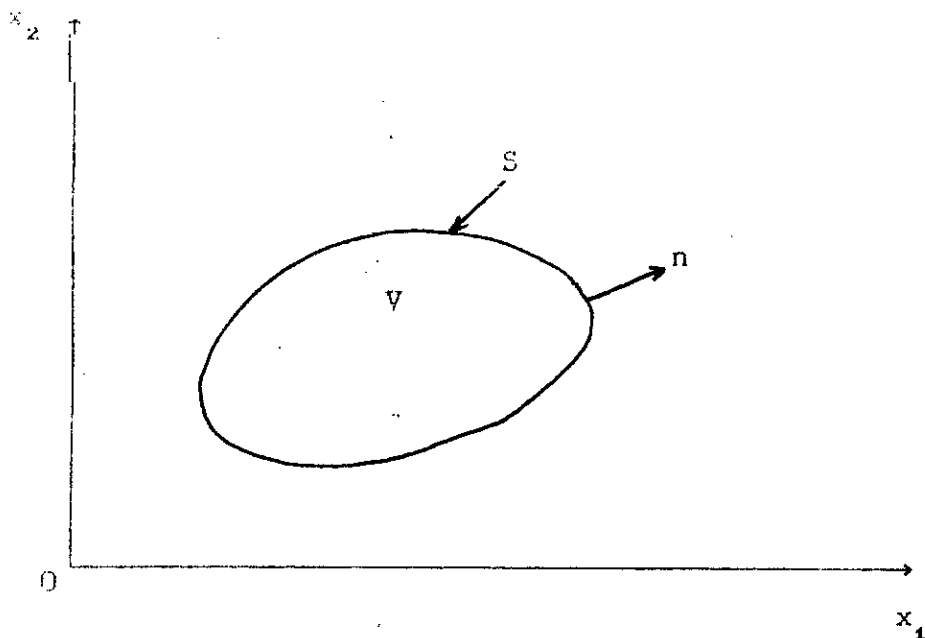


Fig.(3.1)

Considérons un milieu élastique homogène et isotrope dans le système de coordonnées cartésiennes représenté sur la Fig.(3.1).

L'équation différentielle d'équilibre d'un élément du milieu peut être écrite :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \psi_i = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (3.1)$$

$\sigma_{ij}$  : Composantes de contrainte.

$\psi_i$  : Composantes des forces de volume.

La loi de Hooke liant les composantes de contrainte et de déformation peut être écrite :

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.2)$$

où :

$\mu$  : Coefficient de Lamé.

$\nu$  : Coefficient de Poisson.

$\delta_{ij}$  : Symbole de Kronecker.

La relation déplacement-déformation est donnée par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.3)$$

En substituant l'équation (3.2) dans l'équation (3.1) en utilisant l'équation (3.3), on obtient les équations d'équilibre de Navier en termes des composantes de déplacement :

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij} + u_{i,jj} + \frac{1}{2} \psi_i = 0 \quad (3.4)$$

L'équation (3.4) est l'équation différentielle régissant notre problème qui a été résolu sujet à certaines conditions limites.

### III-3) - Solutions fondamentales :

Les solutions fondamentales de l'équations (3.4) sont une base de toute l'analyse ultérieure. Le résultat classique qui détermine le champ de déplacement  $u_i(x)$  due à une charge concentrée unité  $e_j(\xi)$  dans un milieu élastique forme la base de toute l'analyse ultérieure.

Pour un problème en déformation plane :

$$u_i(x) = G_{ij}(x, \xi) e_j(\xi) \quad (3.5)$$

Le tenseur  $G_{ij}$  est appelé tenseur de Kelvin.

Avec :

$$G_{ij}(x, \xi) = C_1 \left[ C_2 \delta_{ij} \ln(r) - \frac{y_i y_j}{r^2} \right] + A_{ij}$$

$$C_1 = - \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}$$

$$C_2 = 3 - 4\nu$$

$A_{ij}$  : Tenseur constant arbitraire. Sa valeur est déterminé en spécifiant qu'à une distance du point du chargement le déplacement est zéro [i.e. Eq.(3.5) détermine les déplacements relatifs à  $u_i(r_0) = 0$  seulement].

$$y_i = x_i - \xi_i$$

$$y_j = x_j - \xi_j$$

$$r^2 = y_i y_i$$

Les déformations correspondants au champ de déplacement pendant peuvent être obtenues par substitution de l'équation (3.5) dans les relations déplacement-déformation (3.3) comme :

$$\varepsilon_{ij} = B_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi) \quad (3.6)$$

Avec :

$$B_{ijk} = \frac{C_1}{r^2} [(1-2\nu)(\delta_{ik} y_j + \delta_{jk} y_i) + 2 \frac{y_i y_j y_k}{r^2} - \delta_{ij} y_k]$$

Les contraintes correspondantes peuvent être déduites des relations contraintes-déformations, comme :

$$\sigma_{ij}(x) = T_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi) \quad (3.7)$$

Avec :

$$T_{ijk}(x, \xi) = \left( \frac{C_3}{r^2} \right) [C_4(\delta_{ik} y_j + \delta_{jk} y_i + \delta_{ij} y_k) + 2 \frac{y_i y_j y_k}{r^2} - \delta_{ij} y_k]$$

$$C_3 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}$$

$$C_4 = 1 - 2\nu$$

On devrait connaître aussi la tension  $t_i(x)$  à un point  $(x_i)$  sur une surface de normale  $n_j(x)$  qui peut être calculée à l'aide de la formule :

$$t_i(x) = \sigma_{ij}(x) n_j(x) \quad (3.8)$$

$$= F_{ik}(x, \xi) e_k(\xi)$$

Avec dans notre cas :

$$F_{ik} = \frac{C_3}{r^2} [C_4(n_k y_i - n_i y_k) + (C_4 \delta_{ik} + \frac{2 y_i y_k}{r^2} + y_i n_j)]$$

Les équations (3.5) à (3.8) donnent toutes les composantes des déplacements, des contraintes, des déformations, et des tensions de surface de la solution unique exigée.

Les solutions pour le problème correspondant en contrainte plane peuvent être obtenues de celles en déformation plane données précédemment en utilisant le coefficient de Poisson effectif  $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$ .

On doit noter ici que les différentes fonctions  $G_{ij}$ ,  $B_{ijk}$ ,  $T_{ijk}$ ,  $F_{ik}$  sont singulières lorsque le point de chargement et le point du domaine coïncide (i.e :  $x_i = \xi_i$ ). La singularité dans  $G_{ij}$  est dans le terme en  $r$  (faiblement singulière) et dans les autres dans le terme  $1/r$  (fortement singulière). Les intégrales contenant des fonctions faiblement singulières existeront toujours dans le sens normal d'intégration même lorsque  $x_i = \xi_i$ , mais celles contenant des termes fortement singuliers doivent être interprétées dans le sens d'une valeur limite de l'intégrale lorsque le point du domaine se rapproche du point du chargement sur la frontière.

Le lecteur remarquera la complexité apparente de l'équation (3.7) qui peut après tout, être également bien écrite sous forme matricielle comme  $u = G e$  et toutes les autres équations en découleront aussi sous formes matricielles.

#### III-4)- Formulation intégrale indirecte :

##### III-4-1)- Formulation de base pour un corps isotrope homogène :

Considérons un corps  $V$  bidimensionnel, isotrope, linéaire, élastique, homogène renfermé dans une surface  $S$ , et appliquons une tension de surface  $\Phi_j(\xi)$  distribuée sur  $S$ .

Les déplacements  $u_i(x)$  en un point intérieur du domaine (voir Fig.(3.2))  $x_i$  dus à la traction de surface  $\Phi_j(\xi)$  et une distribution de forces de volume  $\Psi_j(z)$  définie à travers le volume peuvent être obtenus par intégration de la solution fondamentale avec  $\Phi$  et  $\Psi$  sur  $S$  et  $V$  respectivement comme suit :

$$u_i(x) = \int_S G_{ij}(x, \xi) \Phi_j(\xi) dS(\xi) + \int_V G_{ij}(x, z) \Psi_j(z) dV(z) + C_i \quad (3.9)$$

où :  $dV(\xi)$  et  $dV(z)$  indiquent que les variables d'intégration sont  $\xi$  et  $z$  respectivement.

$C_i$  : Sont les déplacements inconnus de corps rigides qui surgissent de la nature arbitraire de  $r_0$  dans l'éq.(4.7) [i.e le fait que cette équation donne seulement les valeurs relatives de  $u_i(x)$ ].

Les déformations peuvent être obtenus similairement de :

$$u_{ij}(x) = \int_S B_{ijk}(x, \xi) \Phi_k(\xi) dS(\xi) + \int_V B_{ijk}(x, z) \Psi_j(z) dV(z) \quad (3.10)$$

les contraintes correspondantes  $\sigma_{ij}(x)$  en  $(x_i)$  et les tensions de surface  $t_i(x)$  sur une surface de normale  $n_j(x)$  passant par le point  $(x_i)$  sont donné par :

$$\sigma_{ij}(x) = \int_S T_{ijk}(x, \xi) \Phi_k(\xi) dS(\xi) + \int_V T_{ijk}(x, z) \Psi_k(z) dV(z) \quad (3.11)$$

Et en utilisant la relation  $t_i(x) = \sigma_{ij}(x) n_j(x)$

on trouve :

$$t_i(x) = \int_S F_{ik}(x, \xi) \Phi_k(\xi) dS(\xi) + \int_V F_{ik}(x, z) \Psi_k(z) dV(z) \quad (3.12)$$

En ramenant le point  $x_i$  du domaine à la surface on trouve que l'équation (3.9) donne les champs de déplacements qui sont continus alors que les équations (3.10), (3.11) et (3.12) ne sont pas définies sur la surface lorsque le point du domaine coïncide avec le point de chargement.

En utilisant les méthodes standards de la théorie du potentiel. On peut obtenir par exemple :

$$u_{ij}(x_0) = \int_S G_{ij}(x_0, \xi) \Phi_j(\xi) dS(\xi) + \int_V G_{ij}(x_0, z) \Psi_j(z) dV(z) + C_i \quad (3.15)$$

$$\Phi_k(x_0) = \pm \frac{1}{2} \delta_{ik} \Phi_k(x_0) + \int_S F_{ik}(x_0, \xi) \Phi_k(\xi) dS(\xi) + \int_V F_{ik}(x_0, z) \Psi_k(z) dV(z) \quad (3.14)$$

Le terme  $\pm \frac{1}{2} \delta_{ik} \Phi_k(x_0)$  est positif ou négatif suivant le sens du parcours de la surface S (i.e ; problème intérieur ou extérieur).

On a à présent établi que les équations (3.13) et (3.14) sont des équations intégrales de frontières régissant la solution d'un problème bien posé par le biais de la méthode indirecte des équations intégrales.

#### II-4-2) - Discrétisation des intégrales de frontière et de volume :

Excepté un nombre limité de problèmes simples les solutions exactes des équations (3.13) et (3.14) ne sont pas possibles. Alors une méthode numérique de résolution est exigée.

On doit préciser que les équations (3.13) et (3.14) sont une formulation exacte de la solution du problème, les erreurs numériques dans le résultat final surgissent seulement et la discrétisation des intégrales et de la résolution des équations algébriques.

Nous allons décrire un algorithme qui a été trouvé efficace et usuel pour la plupart des problèmes pratiques. Ceci utilise des éléments de frontières linéaires et des éléments intérieurs triangulaires.

Par exemple on peut diviser notre domaine bidimensionnel en un nombre M d'éléments triangulaires et la frontière en N segments de droites et assumer les fonctions  $\Phi_j(\xi)$  et  $\Psi_j(z)$  uniformes, ou linéaires sur la frontière ou sur les éléments triangulaires.

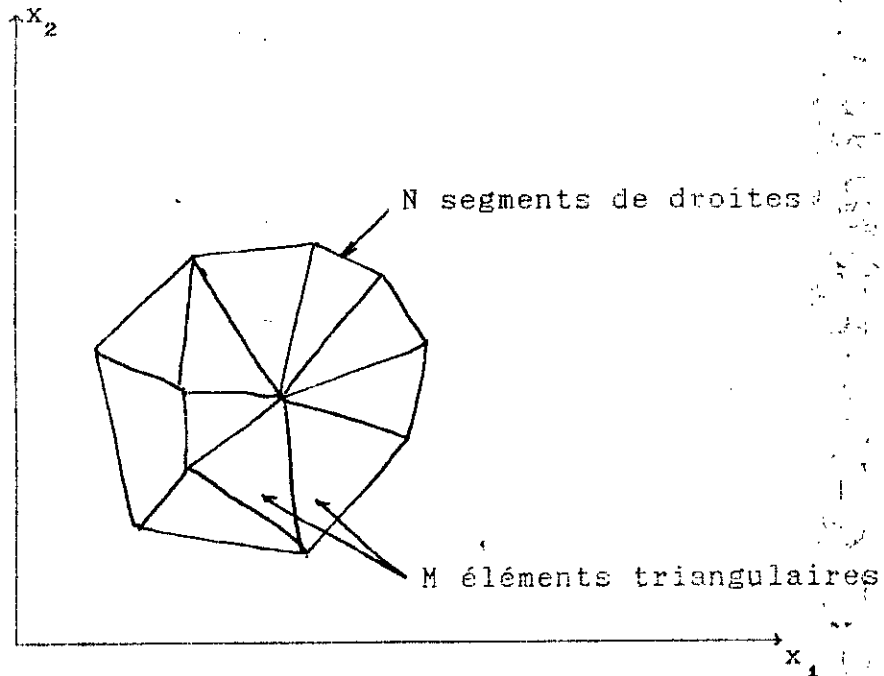


Fig.(3.3)

La figure (3.3) montre les détails d'un tel système.

Si nous assumons des distributions uniformes de  $\Phi$  et  $\Psi$  on peut écrire pour le  $p^{\text{ème}}$  élément de frontière :

$$u_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \Phi_j(\xi^q) \int_{\Delta s} G_{ij}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \Psi_j(z^l) \int_{\Delta v} G_{lj}(x_0^p, z^l) dV(z^l) + C_i \quad (3.15)$$

$$u_i(x_0^p) = \Phi_i(x_0^p) + \sum_{q=1}^N \Phi_j(\xi^q) \int_{\Delta s} F_{ij}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \Psi_k(z^l) \int_{\Delta v} F_{ik}(x_0^p, z^l) dV(z^l) \quad (3.16)$$



où :

- $x_0^P$  : Coordonnées d'un point représentatif du domaine sur le  $p^{\text{ème}}$  élément de frontière (comme au centre de l'élément)
- $\Delta s$  : Longueur du  $q^{\text{ème}}$  élément de frontière.
- $\Delta V$  : Aire du  $l^{\text{ème}}$  élément du domaine.

On doit noter que ces équations peuvent être écrites sous une forme matricielle plus convenable :

$$u^P = \left[ \int_{\Delta s} G^{Pq} dS \right] \Phi^q + \left[ \int_{\Delta V} G^{Pl} dV \right] \Psi^l + I C \quad (3.17)$$

$$t^P = \left[ \int_{\Delta s} F^{Pq} dS \right] \Phi^q + \left[ \int_{\Delta V} F^{Pl} dV \right] \Psi^l + \frac{1}{2} I \Phi^P \quad (3.18)$$

Où :

- $q = 1, 2, \dots, N$
- $l = 1, 2, \dots, M$

### III-5)- Formulation intégrale directe :

#### III-5-1)- Formulation de base pour un corps isotrope homogène :

La formulation directe de la MEI est une approche basée sur le théorème de réciprocité de Betti (voir annexe 1). Ce théorème dans notre cas peut s'énoncer comme suit :

Si deux états d'équilibre élastique  $(\Psi_1^*, u_1^*, v_1^*)$  et  $(\Psi_2, u_2, v_2)$  existent dans un domaine V limité par une surface S, alors le travail des forces du premier système (\*) sur les déplacements du second est égal au travail des forces du second système sur les déplacements du premier.

$$\int_S t_i^*(x) u_i(x) dS(x) + \int_V \Psi_i^*(z) u_i(z) dV(z) =$$

$$\int_S t_i(x) u_i^*(x) dS(x) + \int_V \Psi_i(z) u_i^*(z) dV(z) \quad (3.17)$$

où  $x$  est un point de la surface  $S$  et  $z$  un point dans  $v$ .

Si on choisit l'état actuel de déplacements, de tensions, et de forces de volume comme  $u_i$ ,  $t_i$ ,  $\Psi_i$  respectivement et le système (\*) comme ceux correspondant à un système de force unité, dans un solide infini, on peut écrire de l'équation (3.17) :

$$\int F_{ij}(x, \xi) u_i(x) dS(x) + \int \delta_{ij} \delta(z, \xi) u_i(z) dV(z) = \quad (3.18)$$

$$\int_S t_i(x) G_{ij}(x, \xi) dS(x) + \int_V \Psi_i(z) G_{ij}(z, \xi) dV(z)$$

Dans l'écriture de cette équation on a utilisé l'équation (3.6) etc ; et la manipulation de la force unité  $\Psi_i^* = e_i^*(z)$  du côté gauche de l'égalité i.e :

$$\begin{aligned} \int_V e_i^*(z) u_i(z) dV(z) &= \int_V e_i^*(\xi) \delta(z, \xi) u_i(z) dV(z) \\ &= \int_V e_j^*(\xi) \delta_{ij} \delta(z, \xi) u_i(z) dV(z) \end{aligned}$$

Le terme  $e_j^*$  est maintenant commun à toutes les intégrales et peut être mis à l'extérieur de l'intégrale ce qui permet d'écrire l'équation (3.18).

Ce terme particulier peut être simplifié en notant que

$$\int_V \delta_{ij} \delta(z, \xi) u_i(z) dV(z) = \int_V u_j(z) \delta(z, \xi) dV(z) = \beta u_j(\xi)$$

- b)  $\mu = 1$  à l'intérieur de  $V$ .
- c)  $\mu = 0$  à l'extérieur de  $V$ .

Alors de l'équation (3.18) on arrive à :

$$u_i(\xi) = \int_S [t_i(x)G_{ij}(x,\xi) - F_{ij}(x,\xi)u_j(x)]dS(x) + \int_V \Psi_i(z)G_{ij}(z,\xi)dV(z) \quad (3.19)$$

L'équation (3.19) donne les déplacements  $u_i(\xi)$  en un point intérieur  $\xi$  due à une combinaison admissible de  $t_i$  et  $u_j$  sur  $S$  et la distribution donnée de  $\Psi$  dans le volume. Cette équation est bien connue sous le nom : *équation intégrale de Somigliana*.

En ramenant le point du domaine ( $\xi$ ) en un point  $x_0$  sur la surface du domaine  $x_0$ .

On obtient les résultats suivants (pour  $\lim \xi \rightarrow x_0$ ) :

$$\int_S t_i(x)G_{ij}(x,\xi)dS(x) = \int_S t_i(x)G_{ij}(x,x_0)dS(x)$$

$$\int_S F_{ij}(x,\xi)u_j(x)dS(x) = \mp \frac{1}{2} \delta_{ij}u_j(x_0) + \int_S F_{ij}(x,x_0)u_j(x)dS(x)$$

Donc pour un point  $x_0$  de la surface on peut écrire l'équation (3.19) sous forme :

$$\frac{1}{2}u_j(x_0) = \int_S [t_i(x)G_{ij}(x,x_0) - F_{ij}(x,x_0)u_j(x)]dS(x) + \int_V \Psi_i(z)G_{ij}(z,x_0)dV(z) \quad (3.20)$$

L'équation (3.20) est l'équation intégrale voulue pour la résolution d'un problème aux limites bien posé.

Notons qu'on peut bien sur utiliser l'équation (3.19) et la relation déplacement-déformation pour obtenir les déformation et les contraintes sont ensuite trouvées à partir des relations contrainte-déformation.

III-5-2) - Discretisation des intégrales de frontière et de volume :

Comme précédemment, si on divise un domaine bidimensionnel en  $M$  éléments triangulaires et la frontière en  $N$  segments de droite, on peut écrire l'équation (3.20) pour le vecteur d'un noeud représentatif du  $p^{\text{ème}}$  élément de frontière en assumant  $t_i, u_i, \psi_i$  constants :

$$\frac{1}{2} u_j(x_o^p) = \sum_{q=1}^N \left[ t_i(x^q) \int_{\Delta S} G_{ij}(x^q, x_o^p) dS(x^q) - u_i(x^q) \int_{\Delta S} F_{ij}(x^q, x_o^p) dS(x^q) + \sum_{l=1}^M \psi_i(z^l) \int_{\Delta V} G_{ij}(z^l, x_o^p) dV(z^l) \right] \quad (3.21)$$

Ou sous forme matricielle :

$$\frac{1}{2} U^p = \sum_{q=1}^N \left\{ \left[ \int_{\Delta S} G^{pq} dS \right] t^q - \left[ \int_{\Delta S} F^{pq} dS \right] u^q \right\} + \sum_{l=1}^M \left\{ \left[ \int_{\Delta V} G^{pl} dV \right] \psi^l \right\} \quad (3.22)$$

Où :

- $q = 1, 2, \dots, N$
- $l = 1, 2, \dots, M$

## METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT

### IV-1) -INTRODUCTION:

Dans le chapitre précédent, on a donné une description générale de la méthode des équations intégrales et ses fondements mathématiques et ses développements théoriques. Cette description est celle trouvée couramment dans la littérature, cependant on est amené dans ce chapitre d'axer sur l'aspect pratique et physique sur une variante de la formulation indirecte de la méthode connue sous le nom de : **Méthode de discontinuité de déplacement.**

La M.D.D. est donc une technique numérique de résolution de problèmes aux limites, elle s'avère particulièrement adéquate pour les problèmes de la mécanique de la rupture ou on pourrait sentir sa signification physique, toutefois elle peut être utilisée pour un nombre d'autres problèmes.

Elle est basée sur la solution analytique du problème de la discontinuité de déplacement constante sur un segment fini de droite  $\Gamma$  dans un solide infini, et consiste à placer  $N$  discontinuités de déplacement de valeurs inconnues le long de la frontière du domaine d'analyse. Le système d'équations algébriques générale est ensuite résolu et les discontinuités (paramètres indirectes) sont calculées et par leurs biais on peut déterminer calculer toutes les autres variables du système.

### IV-2) -SOLUTION ELASTIQUE POUR UNE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT CONSTANTE SUR UN SEGMENT FINI:

En déformation plane et pour la direction  $Z$ , les composantes  $x, y$  du déplacement dans un solide élastique, homogène, isotrope et linéaire sont donnés par :

$$\begin{cases} U_x = B_x - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (xB_x + yB_y + \beta) \\ U_y = B_y - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} (xB_x + yB_y + \beta) \end{cases}$$

Où :

$\nu$  est le coefficient de poisson

$B_x, B_y, \beta$  : sont les fonctions de PAPIKOVITCH, qui sont l'origine des forces de volume et satisfont l'équation de LAPLACE:

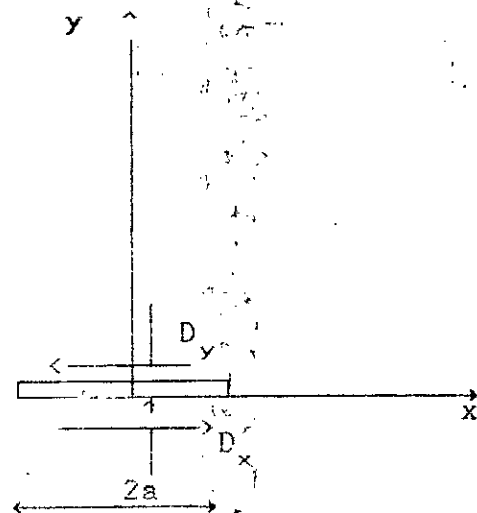
$$\Delta B_x = 0, \Delta B_y = 0, \Delta \beta = 0$$

Et pour une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite de longueur  $2a$  (voir fig.1), dans un plan infini  $x, y$ , considérons ses segments comme étant une fissure caractérisée par ses deux bords : supérieure (pour  $y = 0_+$ ) et inférieure (pour  $y = 0_-$ ).

La définition de la discontinuité de déplacement dans notre cas est

$$D_i = U_i(x, 0_+) - U_i(x, 0_-)$$

Avec :  $i = x, y$



(Fig.1)

L'existence de la discontinuité de déplacement dans les deux directions  $x, y$  correspond à un mode mixte, qui est la

superposition de deux modes élémentaires :

-Mode a : Le plan  $x, y$  ne contient pas de contraintes de cisaillement

-Mode b : Le plan  $x, y$  ne contient pas de contraintes normales.

Ces deux modes sont traduits mathématiquement par les conditions suivantes :

$$\text{Mode a : } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xy}(x,0) = 0 \quad -\infty < x < +\infty \\ U_y(x,0) = 0 \quad |x| > 0 \\ D_y = U_y(x,0_+) - U_y(x,0_-) \quad |x| > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Mode b : } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yy}(x,0) = 0 \quad -\infty < x < +\infty \\ U_x(x,0) = 0 \quad |x| > 0 \\ D_x = U_x(x,0_+) - U_x(x,0_-) \quad |x| \geq 0 \end{array} \right.$$

Les fonctions de PAPKOVITCH choisies, vérifiant respectivement les conditions (4.3) et (4.4) sont :

Pour le mode a :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = 0 \\ B_y = 4(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \beta = 4(1-\nu)(1-2\nu)\phi \end{array} \right.$$

Avec  $\Delta\phi = 0$ .

Pour le mode b :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = 0 \\ B_y = 4(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ \beta = 8(1-\nu)^2 \int \frac{\partial \chi}{\partial x} dy \end{array} \right.$$

Avec  $\Delta\chi = 0$

Les champs de déplacement et de contrainte, après superposition des fonctions (4.5) et (4.6) dans (4.1) s'écrivent :



Champ de déplacement:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = -(1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + 2(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \\ U_y = 2(1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + (1-2\nu) \frac{\partial \chi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

Champ de contraintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = 2G \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) + 2G \left( 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \sigma_{yy} = 2G \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) + 2G y \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \\ \sigma_{xy} = -2G y \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + 2G \left( 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^3 \chi}{\partial y^3} \right) \end{array} \right.$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

La condition pour que  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  soient nulles ( C.A.D. contrainte de cisaillement et normale nulles ) est que :

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \text{ soient finis}$$

Les fonctions  $\phi$  et  $\chi$  choisies doivent vérifier les conditions (4-3) et (4-4). Et en remarquant que la fonction  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  présente les propriétés suivantes.

$$\lim_{y \rightarrow 0_+} \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0_-} \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -\pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On Cherche à présent les relations liant  $\phi$  et  $\chi$  d'une part aux discontinuités  $D_x$  et  $D_y$  d'autre part :

$$D_x = 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} (\chi(x, 0_-) + \chi(x, 0_+)) \quad |x| < a$$

$$D_y = 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} (\phi(x, 0_-) + \phi(x, 0_+)) \quad |x| < a$$

Ou autrement dit :

$$\frac{\partial \chi}{\partial y}(x, 0_-) - \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, 0_+) = \frac{D_x}{2(1-\nu)} \quad |x| < a$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_-) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_+) = \frac{D_y}{2(1-\nu)} \quad |x| < a$$

En considérant la fonction :

$$h(x,y) = \text{Arctg} \left[ \frac{y}{x+a} \right] - \text{Arctg} \left[ \frac{y}{x-a} \right]$$

Et en passant à la limite

$$h(x,0_-) - h(x,0_+) = -2\pi \quad x < a$$

Ensuite Par identification de (4-12) et (4-13) on obtient

$$\frac{-1}{2\pi} \left[ h(x,0_-) - h(x,0_+) \right] = \frac{2(1-\nu)}{\partial y} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0_-) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0_+) \right]$$

d'où l'on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4\pi} \frac{Dy}{(1-\nu)} h(x,y)$$

Et finalement après intégration on a le resultat :

$$\phi(x,y) = \frac{-Dy}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \text{Arctg} \left[ \frac{y}{x-a} \right] - y \text{Arctg} \left[ \frac{y}{x+a} \right] \right. \\ \left. - (x-a) \text{Ln} \left[ \left[ (x-a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right] + (x+a) \text{Ln} \left[ \left[ (x+a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right] \right]$$

$$\chi(x, y) = \frac{-D_y}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \operatorname{Arctg} \left( \frac{y}{x-a} \right) - y \operatorname{Arctg} \left( \frac{y}{x+a} \right) \right]$$

$$-(x-a) \operatorname{Ln} \left[ \left[ (x-a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right] + (x+a) \operatorname{Ln} \left[ \left[ (x+a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right]$$

Les fonctions  $\phi$  et  $\chi$  vérifient les conditions aux limites (4-3) et (4-4) et présentant des singularités pour  $(x=\pm a, y=0)$

En posant :

$$\phi(x, y) = \frac{D_y F(x, y)}{4\pi(1-\nu)}$$

Et

$$\chi(x, y) = \frac{D_x F(x, y)}{4\pi(1-\nu)}$$

On obtient Les champs de déplacements et contraintes suivants :

$$\left[ \begin{array}{l} U_x = D_x \left[ 2(1-\nu)F_3 - yF_5 \right] + D_y \left[ -(1-2\nu)F_2 - yF_7 \right] \\ U_y = D_y \left[ 2(1-\nu)F_2 - yF_4 \right] + D_x \left[ 2(1-\nu)F_1 - yF_5 \right] \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G D_x \left[ z F_4 + y F_6 \right] + 2G D_y \left[ -F_5 + y F_7 \right] \\ \sigma_{yy} &= 2G D_x \left[ -y F_6 \right] + 2G D_y \left[ -F_5 - y F_7 \right] \\ \sigma_{xy} &= 2G D_x \left[ -F_5 + y F_7 \right] + 2G D_y \left[ -y F_7 \right] \end{aligned} \right.$$

Avec

$$F_2 = F.x = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \text{Ln} \left[ (x-a)^2 + y^2 \right]^{1/2} + \text{Ln} \left[ (x+a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right]$$

$$F_3 = F.y = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \text{Arctg} \left[ \frac{y}{x-a} \right] - \text{Arctg} \left[ \frac{y}{x+a} \right] \right]$$

$$F_4 = F.xy = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

$$F_5 = F.yy = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

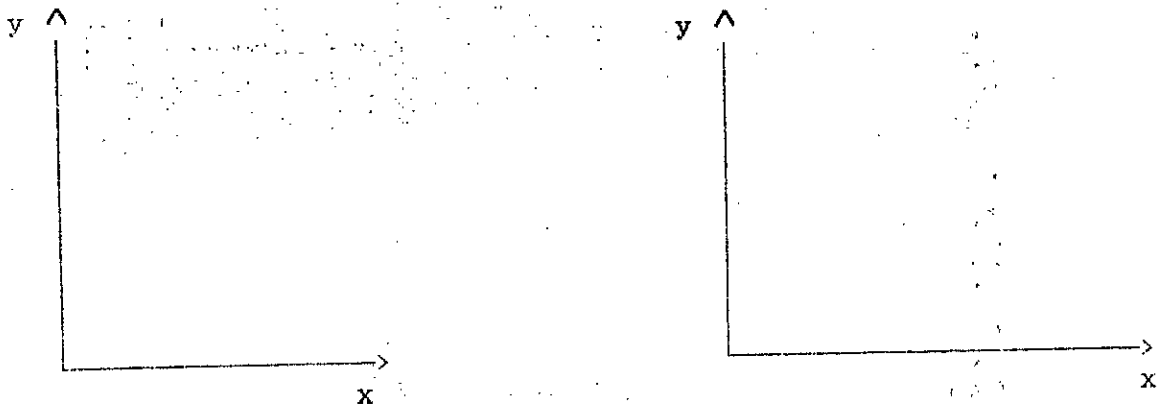
$$F_{\sigma} = F_{.xyy} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x-a)^2 - y^2}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

$$F_{\tau} = F_{.yyy} = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^2} - \frac{x+a}{((x+a)^2 + y^2)^2} \right]$$

#### IV-3) -PROCEDURE NUMERIQUE :

Après avoir obtenu la solution singulière de l'équation d'élasticité due à une discontinuité de déplacement constante dans un milieu infini, on peut construire une procédure numérique pour la résolution de problèmes plus complexes.

Une frontière courbe quelconque peut être approximer par N segments de droites, et chaque subdivision correspond à une discontinuité de déplacement



Les champs de déplacement et de contrainte en un point du domaine infini dus à une discontinuité de déplacement peuvent être calculés à partir des relations (4-20) et (4-21) et sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s^i = A_{ss}^{ij} D_s^i + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i = A_{ns}^{ij} D_s^i + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{array} \right. \quad i=1, n \quad (4-36)$$

Les champs de contraintes et de déplacements dus aux N discontinuités s'obtiennent par superposition et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{array} \right. \quad (4-36)$$

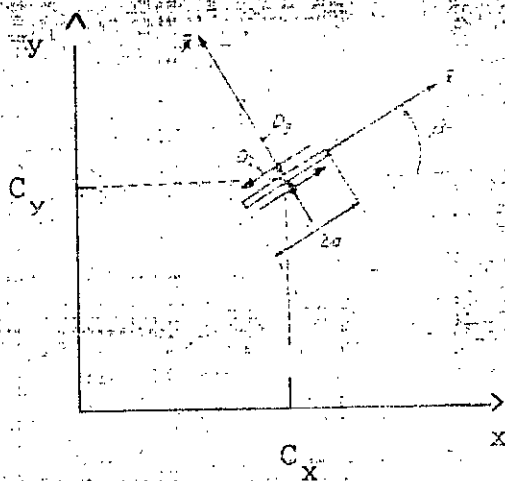
Avec  $D_s^j$  et  $D_n^j$  de la discontinuité de déplacement dans un repère local  $s, n$  et  $A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$  sont les coefficients d'influence des contraintes.

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ U_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{array} \right. \quad (4-36)$$

Avec  $B_{ss}^{ij}$ ,  $B_{sn}^{ij}$ ,  $B_{ns}^{ij}$ ,  $B_{nn}^{ij}$  sont les coefficients d'influence des déplacements.

IV-4) TRANSFORMATION DE COORDONNEES :

Les expressions précédentes sont obtenues dans un repère local ; pour faciliter la manipulation de ces discontinuités il est nécessaire de faire un changement de coordonnées. La transformation s'effectue par les formules ci dessous :



$$\begin{cases} \bar{X} = (x - C_x) \cos\beta + (y - C_y) \sin\beta \\ \bar{Y} = -(x - C_x) \sin\beta + (y - C_y) \cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_x = U \frac{\bar{X}}{x} \cos\beta - U \frac{\bar{Y}}{y} \sin\beta \\ U_y = -U \frac{\bar{X}}{x} \sin\beta + U \frac{\bar{Y}}{y} \cos\beta \end{cases}$$



$$\left[ \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx} \cos^2 \beta - 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \sin^2 \beta \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{xx} \sin^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \cos^2 \beta \\ \sigma_{xy} &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \end{aligned} \right.$$

#### IV-5)-INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES :

Dans le but de générer le système d'équations algébriques à résoudre il faut introduire les conditions aux limites sur la frontière discretisée, en posant  $\sigma_s^i = (\sigma_s^i)_0$  et  $\sigma_n^i = (\sigma_n^i)_0$ , on aboutit au système de 2N équations algébriques suivant :

$$\left[ \begin{aligned} (\sigma_s^i)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ (\sigma_n^i)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right.$$

Quand les conditions limites sont des déplacements on posera  $u_s^i = (u_s^i)_0$  et  $u_n^i = (u_n^i)_0$  et le système s'écrira alors :

$$\left[ \begin{aligned} (u_s^i)_0 &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ (u_n^i)_0 &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right.$$

Dans le cas de conditions limites mixtes le système s'écrira sous la forme :

$$\left[ \begin{array}{l} h_s^t = \sum_{j=1}^N C_{ss}^{tj} D_s^t + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{tj} D_n^j \\ b_n^t = \sum_{j=1}^N C_{ns}^{tj} D_s^t + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{tj} D_n^j \end{array} \right.$$

## FORMULATION D'ORDRE SUPERIEUR DE LA M.D.D.

V-1-1-INTRODUCTION :

Dans le chapitre précédant, on a décrit la formulation originale de la M.D.D. et dans celui-ci, nous allons décrire la formulation d'ordre supérieur (utilisation d'éléments quadratiques et élément spécial -bout de fissure-)

La fonction de GREEN ou la solution fondamentale de la M.M.D. a été dérivée, la solution correspondant aux discontinuités linéaires et quadratiques a été trouvée par intégration de la solution fondamentale.

Dans la technique numérique, le modèle de D.D. linéaire est présenté par deux noeuds à l'élément et trois noeuds sont exigés pour l'élément quadratique. La solution analytique montre que les contraintes tendent vers l'infini aux extrémités de la discontinuité.

Ces singularités de contraintes exigent la localisation des noeuds à l'intérieur de l'élément (non pas à l'extrémité).

Nous allons montrer que l'optimum de la localisation de ces noeuds est aux points zéros du polynôme de GAUSS-CHEBYCHEV.

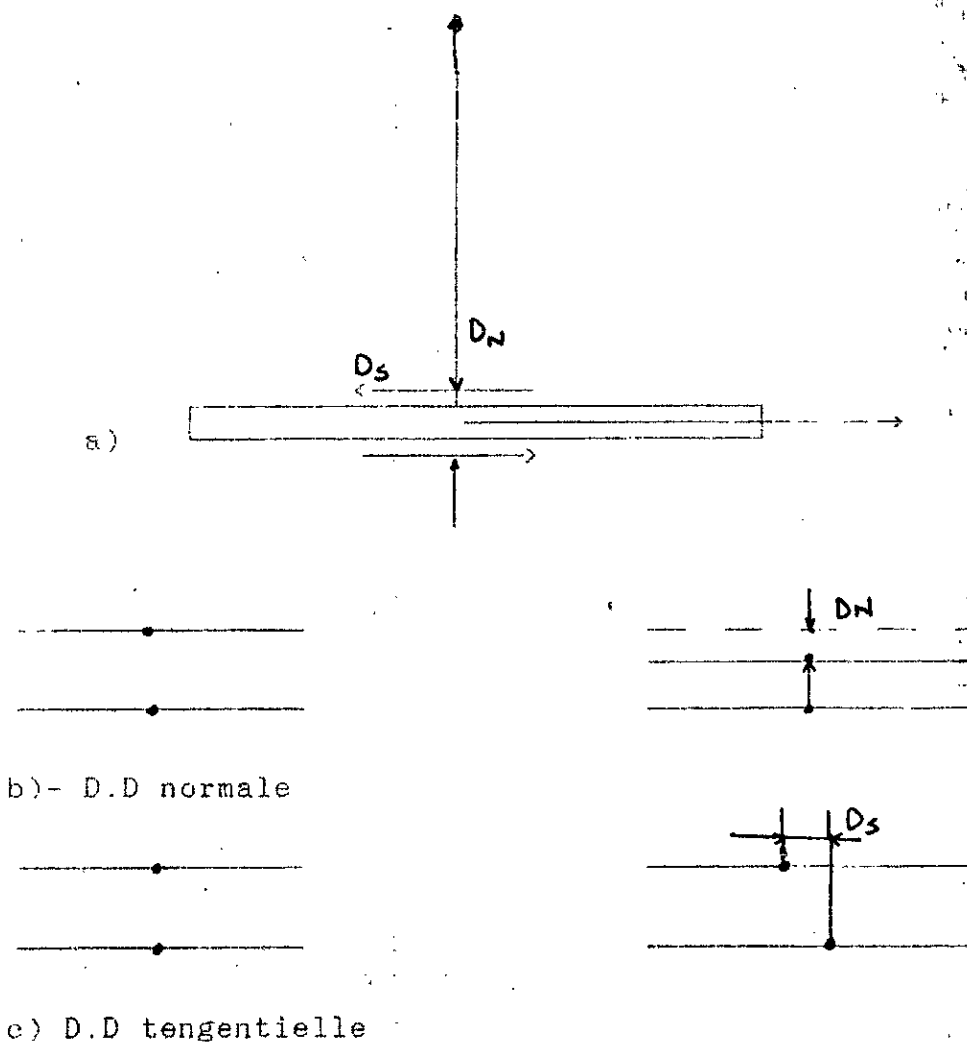
Dans le but de comparer l'efficacité et la précision de cette formulation, des exemples seront considérés; et pour le même nombre d'inconnues, il est montré que les éléments d'ordres supérieurs sont meilleures.

V-2-1-FONCTION DE GREEN POUR LA M.M.D :

L'approche usuelle pour la formulation de la M.E.D est de commencer par la fonction de GREEN ou solution fondamentale, puis obtenir la solution sur un segment fini par intégration.

L'avantage de cette approche devient évident lorsque les éléments d'ordre supérieur sont développés.

La formulation originale de la M.D.D était basée sur la solution pour une D.D. constante sur un segment de droite fini.



(fig.1 ) D.D. constante, normale et tangentielle

Les déplacements et les contraintes dans le domaine résultant d'un modèle de D.D arbitraire peuvent être déterminés si les dérivées partielles d'une fonction  $F(x,y)$  sont déterminées.

Cette fonction peut être obtenue de la solution du problème d'une D.D constante obtenue par CROUCH et est déterminée en exigeant que les D.D aient une valeur constante lorsque la limite de l'élément tend vers zéro.

En prenant la limite de la solution de CROUCH lorsque  $2a$  tend vers zéro, les équations aux dérivées partielles de  $F(x,y)$  suivantes sont obtenues:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (5-1)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (5-2)$$

L'avantage de l'utilisation est que si on assume une discontinuité du déplacement normal et tangentiel défini par:

$$D_n(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + \dots \quad (5-3)$$

$$D_s(x) = a_s + b_s x + c_s x^2 + \dots \quad (5-4)$$

Alors les déplacements et les contraintes seront donnés par les équations (A1) et (A2) [ voir annexe 1 ]

#### PROCEDURE NUMERIQUE :

Une procédure numérique de résolution de problèmes aux limites complexes en élasticité peut être développée en utilisant les équations (A1) et (A2). En plaçant N discontinuités (éléments) le long de la frontière, un système de 2N équations algébriques couplées en fonction des quantités nodales inconnues est établi.

Les valeurs de D.D. consistantes avec les conditions aux limites sont alors calculées.

En général, ces équations sont de la forme :

$$\begin{cases} c_n = \sum_{ij} A_{ns}^{ij} D_s + \sum_{ij} A_{nn}^{ij} D_n \\ \sigma_s = \sum_{ij} A_{ss}^{ij} D_s + \sum_{ij} A_{sn}^{ij} D_n \end{cases} \quad (5-5)$$

exactement comme celles déjà trouvées au chapitre précédent si que la taille du système est multipliée par 2 pour les éléments linéaires et par 3 pour les éléments quadratiques.

#### 5-2 - COEFFICIENTS D'INFLUENCE :

Dans le but de détermination des coefficients d'influences il est nécessaire d'exprimer le modèle de D.D. en fonction des déplacements nodaux. Ce modèle est souvent exprimé en forme des sinus de forme  $\epsilon$ . Si la coordonnée intrinsèque  $\epsilon$  varie de  $-1$  à  $1$  dans l'élément alors :

-pour l'élément à D.D. Linéaire :

$$D_N(\epsilon) = N1(\epsilon) D_N(1) + N2(\epsilon) D_N(2) \quad (5-7)$$

$$D_S(\epsilon) = N1(\epsilon) D_S(1) + N2(\epsilon) D_S(2) \quad (5-8)$$

avec :

$$N1(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \epsilon \right)$$

$$N2(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon \right)$$

où  $D_N(i)$ ,  $D_S(i)$ , ( $i = 1, 2$  sont des discontinuités nodales)

Similairement pour l'élément à D.D. quadratique :

$$D_N(\epsilon) = N1(\epsilon) D_N(1) + N2(\epsilon) D_N(2) + N3(\epsilon) D_N(3) \quad (5-10)$$

$$D_S(\epsilon) = N1(\epsilon) D_S(1) + N2(\epsilon) D_S(2) + N3(\epsilon) D_S(3) \quad (5-11)$$

avec :

$$N1(\epsilon) = \left( \frac{-1}{\sqrt{3}} \epsilon - \frac{2}{3} \epsilon^2 \right)$$

$$N2(\varepsilon) = \left(1 - \frac{4}{3} \varepsilon^2\right)$$

(5-12)

$$N3(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon + \frac{2}{3} \varepsilon^2\right)$$

Remarque : un calcul plus détaillé concernant l'élément lineaire qui fait l'objet de notre étude est fait en annexe 3.

### 2- ELEMENT BOUT DE FISSURE :

On a utilisé les éléments lineaires pour trouver une approximation numérique à la solution analytique pour la distribution du déplacement normal relatif entre les deux surfaces d'une fissure, il est apparent que les résultats sont moins précis près du bout de fissure.

Dans les problèmes de la mécanique de la rupture, une solution précise près du bout de fissure est importante (cette précision est surtout recherchée dans les cas de haute sécurité) et une approche plus sophistiquée est exigée. Pour cela nous allons considérer un élément d'ordre supérieur qui tient compte de la singularité de contrainte en bout de fissure. Le facteur d'intensité de contrainte est un concept important en mécanique de la rupture. Les solutions analytiques aux problèmes de fissures pour différents modes de chargement montrent que les contraintes à une distance  $r$  de la pointe de fissure varient en  $r^{-1/2}$  si  $r$  est petit.

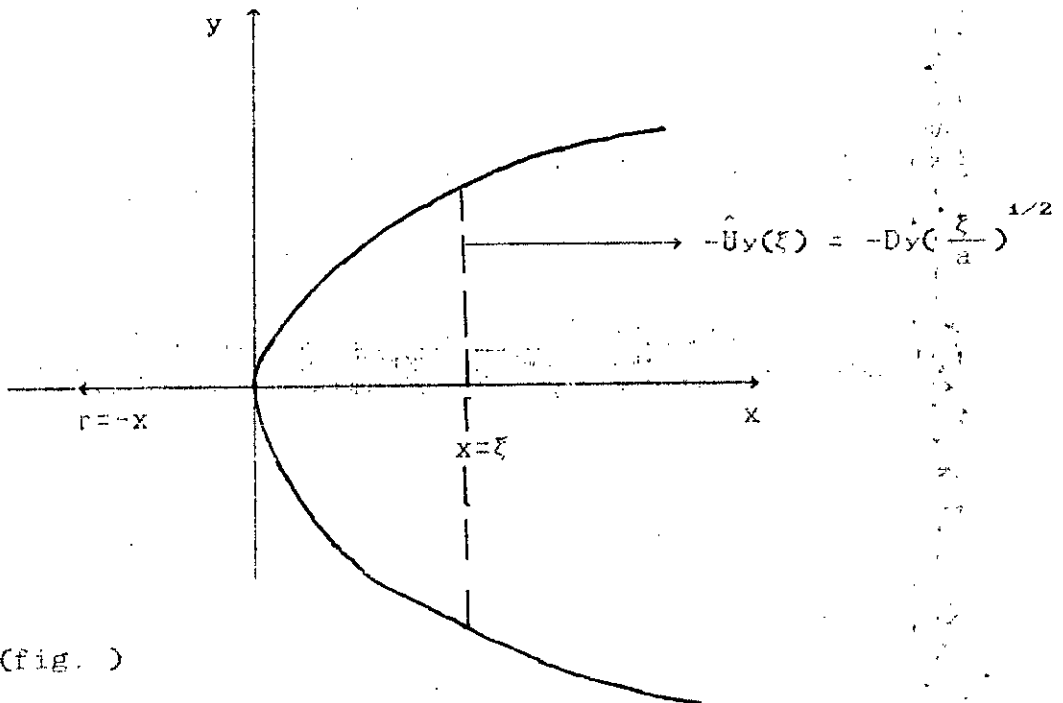
Un corollaire de la variation en  $r^{-1/2}$  de la contrainte près du bout de fissure est que le déplacement relatif entre les surfaces de cette fissure est proportionnel à  $x^{1/2}$  près du bout ou mesure à partir du bout le long de la fissure. Pour les problèmes de fissure, ceci nous pousse à utiliser un élément bout de fissure spécial dans lequel,  $\hat{U}_y$  le déplacement normal relatif entre les deux surfaces est donné par : (voir fig.)

$$\hat{U}_y = D_y \left[ \frac{x}{a} \right]^{1/2} \quad \text{ou} \quad 2a \quad \text{est la longueur de}$$

l'élément spécial est  $D_y$  la D.D. au centre de cet élément.

On peut alors développer une approche dans laquelle la fissure est divisée en éléments de D.D. ordinaires, excepté les deux éléments bouts. Un avantage de cette approche particulière est que les contraintes sont toujours calculées au milieu des éléments, évitant ainsi les problèmes de singularité de contrainte à l'extrémité.

Un calcul plus détaillé est donné en annexe 4.





PROGRAMME DE RESOLUTION.

V-1)-INTRODUCTION:

Comme nous l'avons déjà mentionné auparavant la M.D.D reviens à résoudre un système d'équations algébriques de la forme

$$[C]\{D\} = \{B\}$$

avec - [C]: Matrice des coefficients d'influence

- {D}: Vecteur des discontinuités de déplacement

- {B}: Vecteur des conditions limites imposées à la frontière.

Pour cela et dans le but de mettre en oeuvre la formulation d'ordre supérieur, nous avons conçu, en premier temps, un programme utilisant les éléments à discontinuité de déplacement linéaire biaxial duquel on a pu obtenir les résultats qui seront ultérieurement. Ensuite, et dans le but de la recherche de précision, nous avons essayé de faire l'assemblage des éléments linéaires avec l'élément spécial bout de fissure et à cet égard un programme général a été élaboré et qui peut traiter :

- Un problème sans bout de fissure .
- Un problème sans bout de fissure ( gauche ou droit ).
- Un problème avec deux bouts de fissure .

Mais malheureusement la taille du programme est devenue importante que la capacité des micro ordinateurs disponibles permettait pas son exécution. Alors on va exposer un programme (éléments linéaires).

V-2)-ORGANISATION ET STRUCTURE DU PROGRAMME :

On distingue les parties suivantes :

a)-Entrée des données:

C'est la première opération consistant à faire entrer toutes les informations, les caractéristiques du matériau (coefficient de POISSON, module de YOUNG ), les caractéristiques de la frontière à discrétiser (nombre de segments, d'arcs de cercles) et les caractéristiques du domaine dans lequel on cherche la solution.

(nombre de points). Cette partie est indispensable, elle transmet toutes les informations nécessaires aux autres parties qui vont suivre.

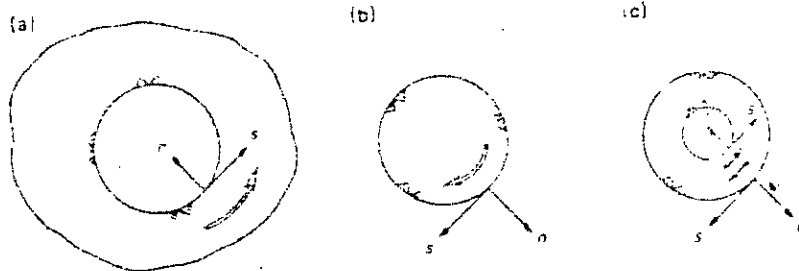
### b) Subroutine maillage:

Elle permet un maillage automatique (par segments de droites ou arcs de cercles) de la frontière, elle donne les coordonnées des noeuds, l'orientation et la taille des éléments et les conditions limites imposées sur l'élément.

On tient à noter que lors de la discrétisation, des précautions doivent être prises en compte.

#### 1 Convention de parcours de la frontière

Pour un problème intérieur (corps solide fini), le contour est parcouru dans le sens horaire, cependant le contour d'un problème extérieur est parcouru dans le sens antihoraire (voir fig.).



#### 2 Déplacement du corps rigide

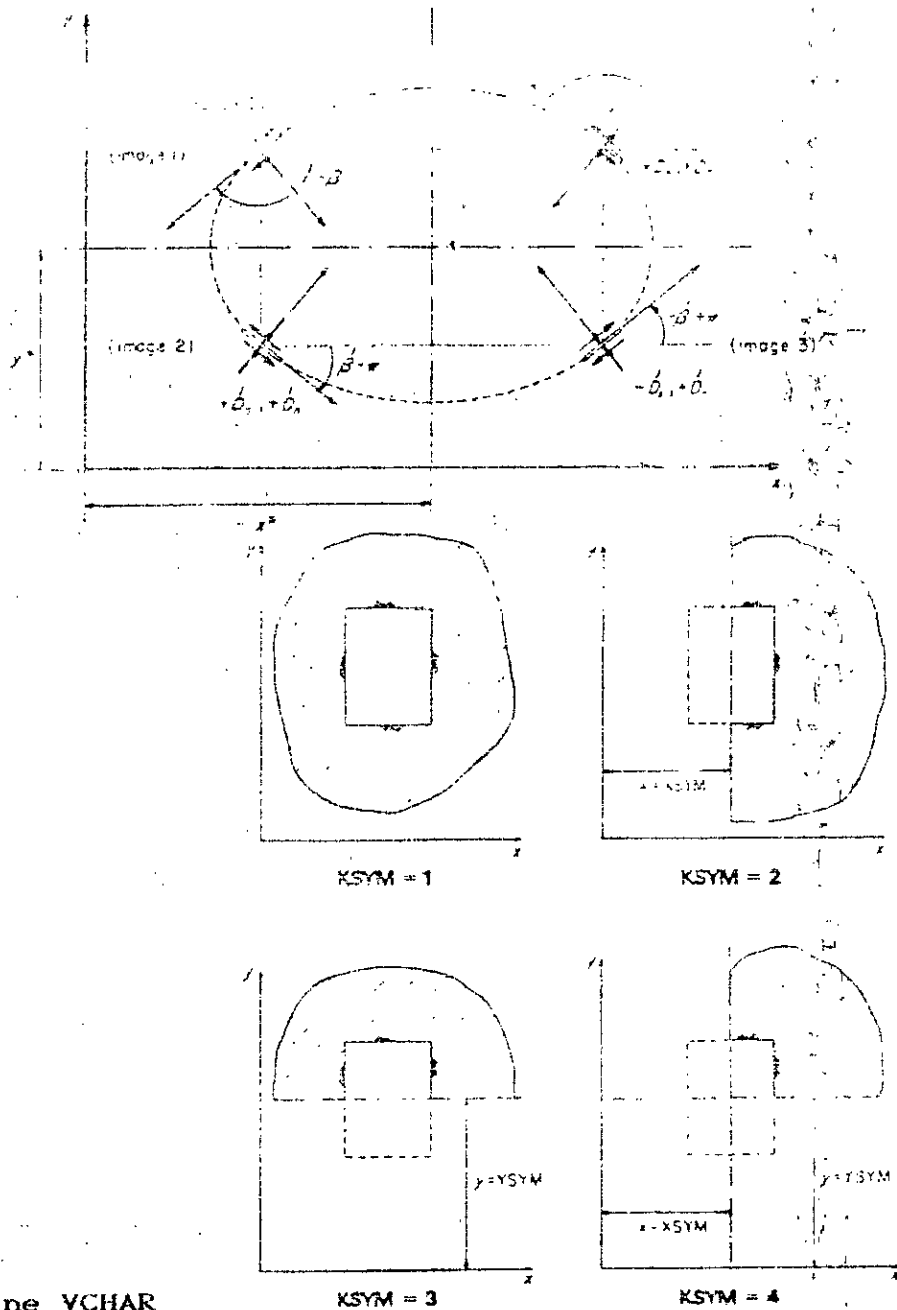
Pour le cas d'un problème intérieur, on impose au moins trois (3) composantes de déplacement en deux points de la frontière. Pour un problème extérieur, on risque le déplacement de ce corps rigide de la région intérieure, alors si dans ce cas on a une double symétrie, la région intérieure est automatiquement fixée par rapport aux axes de symétrie. Sinon, il faudrait au moins fixer deux éléments orientés différemment à l'intérieur de la région intérieure.

#### 3 Condition de symétrie

Lorsqu'il existe, pour un problème donné, une symétrie de géométrie et de chargement. On peut exploiter celle-ci et travailler juste sur une portion de notre domaine, la portion

restante n'est qu'une image de la précédente, les discontinuités de déplacement normales des éléments réels et images sont égales alors que les discontinuités tangentielles sont opposées.

Cette symétrie est donc prise en compte dans le programme ( un code en est spécifié suivant la nature de la symétrie ) et le problème est considérablement réduit (voir les schémas illustratifs ci dessous ).



c Subroutine VCHAR

Elle permet le transfert des conditions limites de l'infini à la frontière à discrétiser.

#### d Subroutine INITL

Elle permet l'initialisation du calcul des coefficients ( un calcul successif est fait à partir de ces coefficients ).

C'est là ou on calcule les coefficients d'influence .

#### e Subroutine INFACT

Après le calcul des coefficients d'influence, il faut faire un remplissage de la matrice [C] de ces coefficients, les changements de repère du local au global en est tenu compte .

#### f Subroutine SOLVE

Après l'établissement du système d'équations algébriques dans la subroutine précédente, ici on résoud ce système . C'est un programme simple de GAUSS sans pivots .

#### g Subroutine SFRONT

Elle permet le calcul des déplacements et les contraintes en les bords de la frontière.

#### h Subroutine SDOM

En spécifiant des points du domaine, les déplacements et les contraintes en ceux-ci sont calculés dans cette subroutine.

## CHAPITRE : VII

### EXEMPLES D'APPLICATION

Dans le but de mettre en oeuvre notre programme, nous avons testé sur des exemples classiques types, ce ne sont pas du tout une restriction et la liste des exemples et problèmes n'est pas tout exhaustive.

#### VII-1) EXEMPLE-1: ( FISSURE SOUS PRESSION )

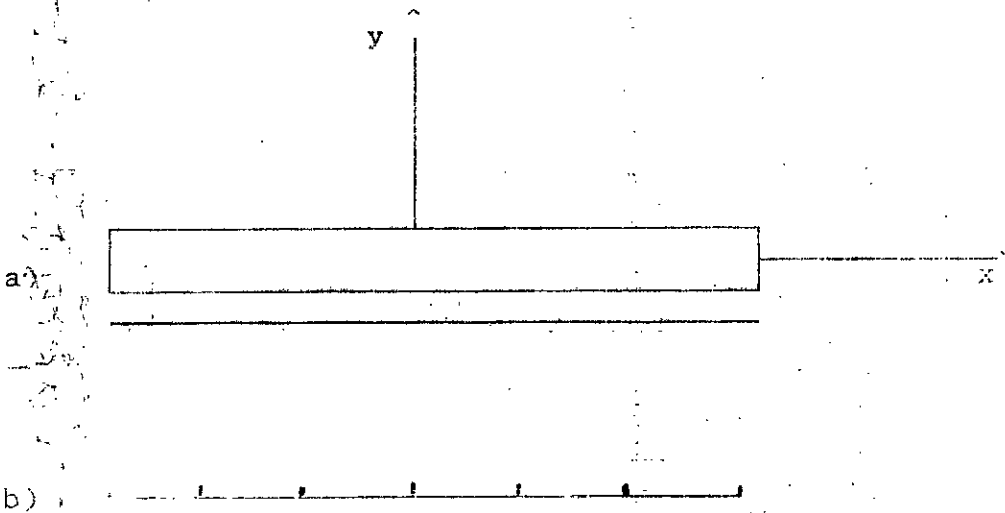
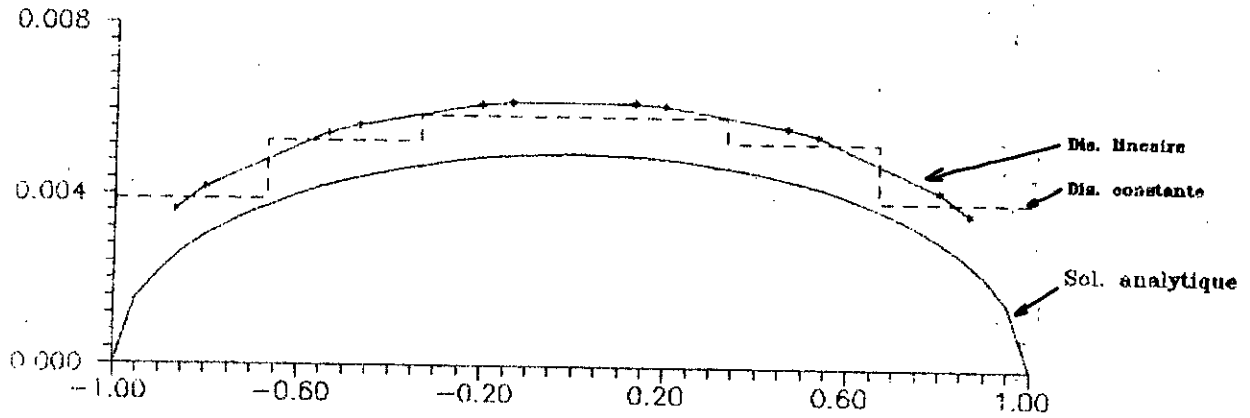


fig.(7-1) fissure sous pression

- a) modèle physique
- b) modèle numérique

Cet exemple simple confirmera numériquement l'optimum de position des noeuds qui correspond bien à  $\lambda = \left[ \frac{1}{2} \right]^{1/2}$

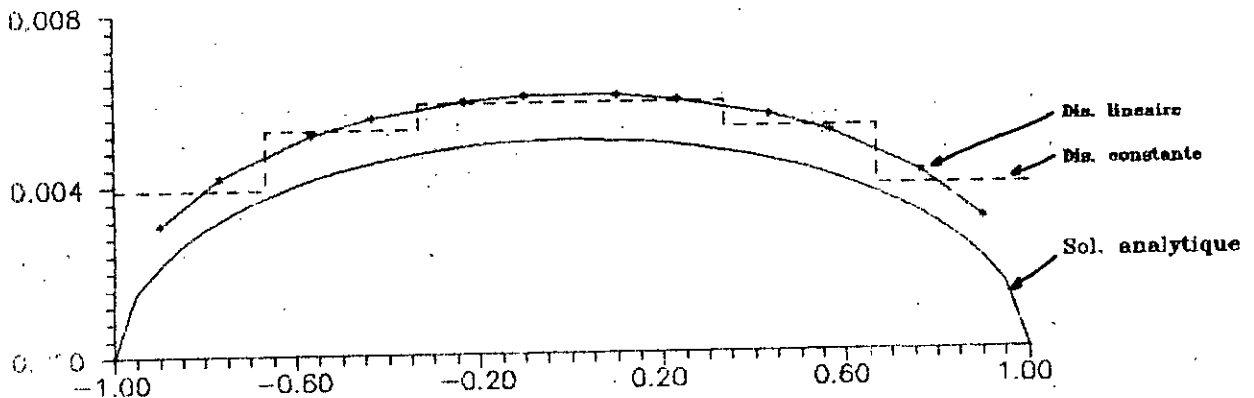
*Courbe de la discontinuite de deplacement  
comparee a la courbe analytique*



N = 6 - Nombre de segments  
 Nu = 0.20 - Coefficient de poisson  
 Lambda = 0.2 - position des noeuds 1 & 2

-fig.

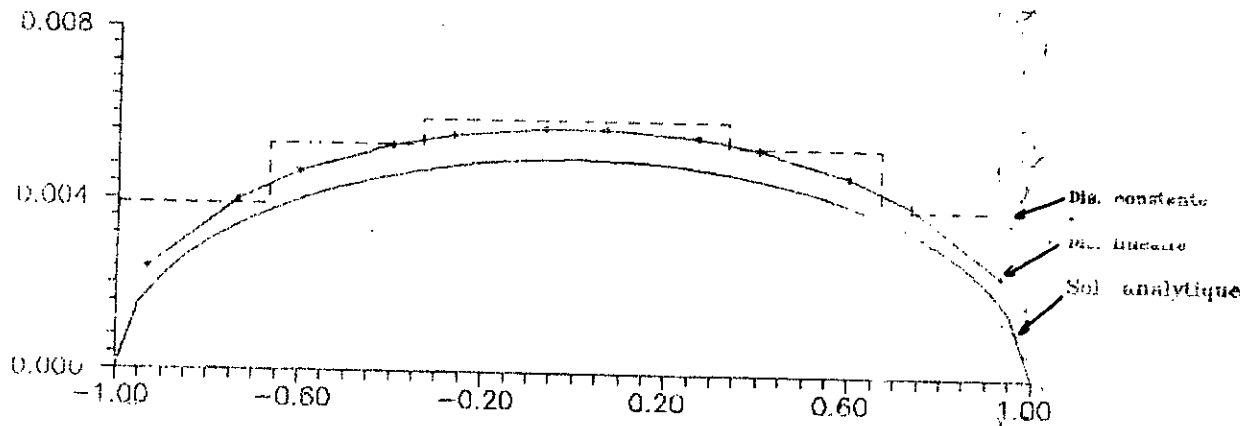
*Courbe de la discontinuite de deplacement  
comparee a la courbe analytique*



N = 6 - Nombre de segments  
 Nu = 0.20 - Coefficient de poisson  
 Lambda = 0.4 - position des noeuds 1 & 2

-fig.

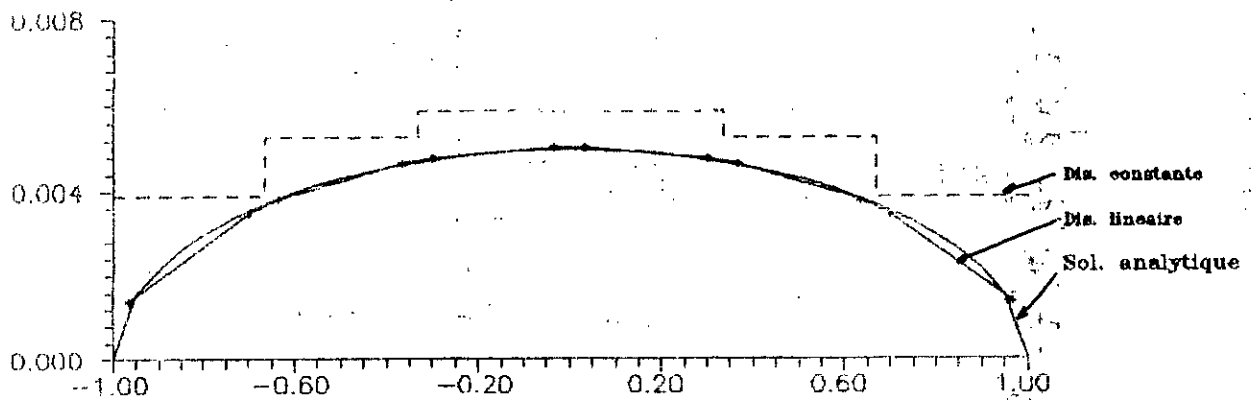
*Courbe de la discontinuite de déplacement  
comparee a la courbe analytique*



N = 6 - Nombre de segments  
 Nu = 0.20 - Coefficient de poisson  
 Lambda = 0.6 - position des noeuds 1 & 2

-fig.

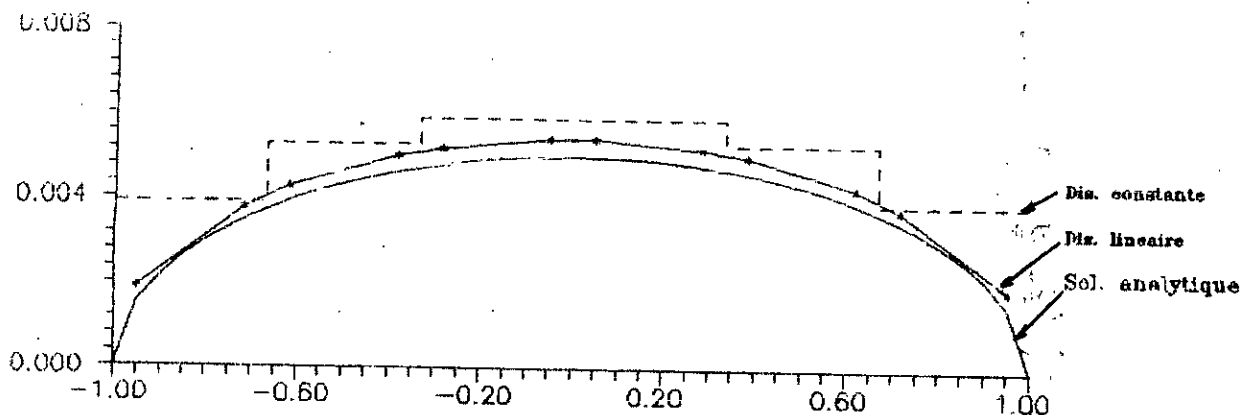
*Courbe de la discontinuite de déplacement  
comparee a la courbe analytique*



N = 6 - Nombre de segments  
 Nu = 0.20 - Coefficient de poisson  
 Lambda = Sqrt(2)/2 - position des noeuds 1 & 2

-fig.

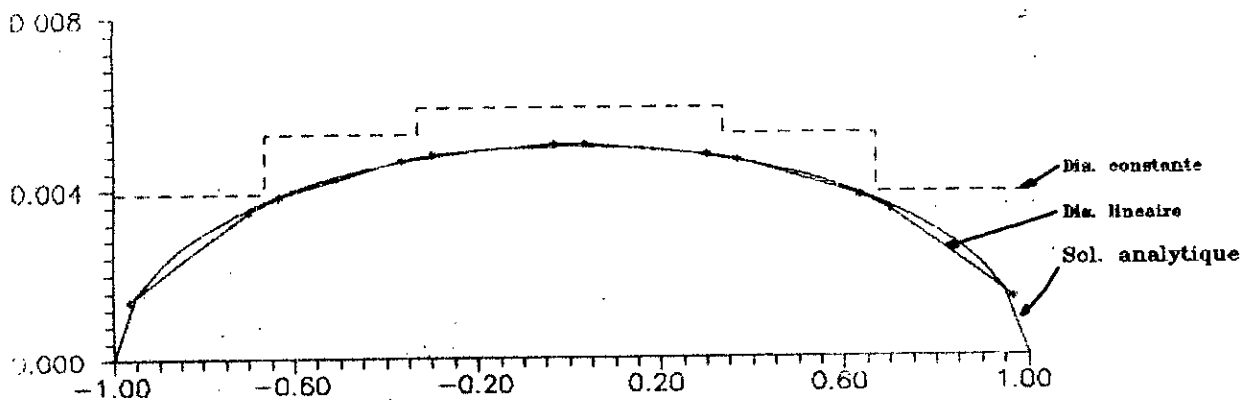
*Courbe de la discontinuite de déplacement  
comparee a la courbe analytique*



N = 6 - Nombre de segments  
 Nu = 0.20 - Coefficient de poisson  
 Lambda = 0.68 - position des noeuds 1 & 2

-fig.

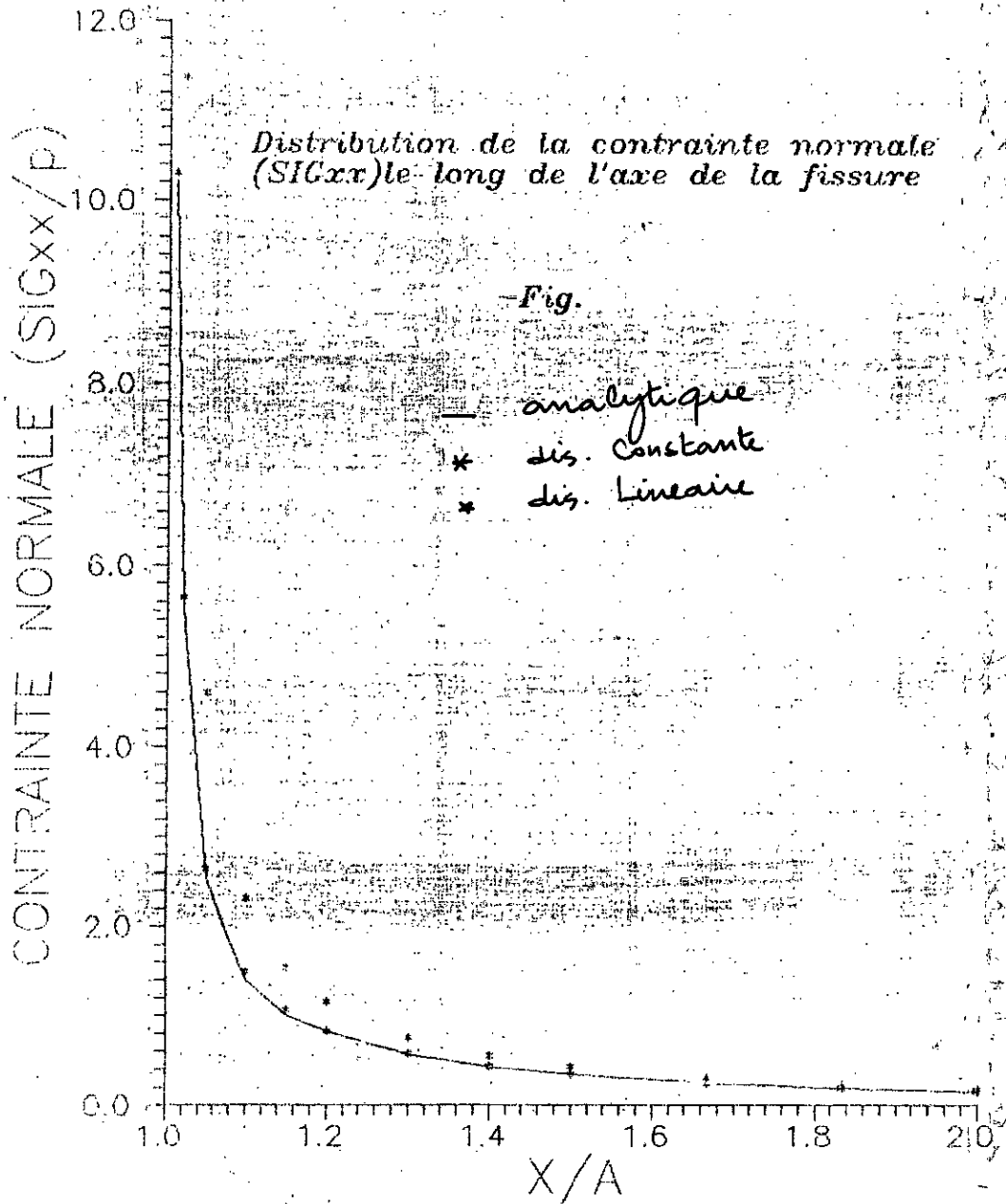
*Courbe de la discontinuite de déplacement  
comparee a la courbe analytique*

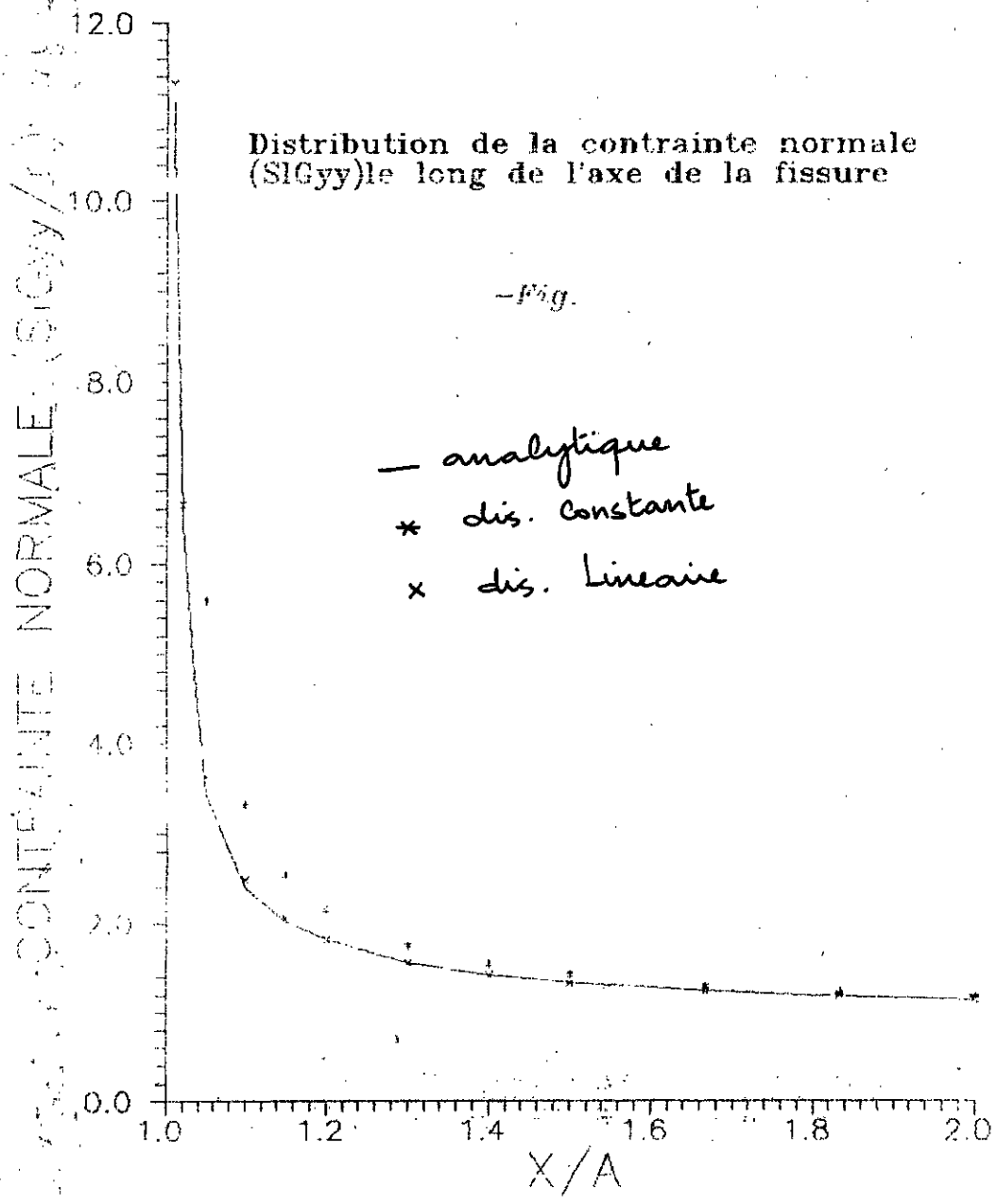


N = 6 - Nombre de segments  
 Nu = 0.20 - Coefficient de poisson  
 Lambda =  $\text{Sqrt}(2)/2$  - position des noeuds 1 & 2

-fig.

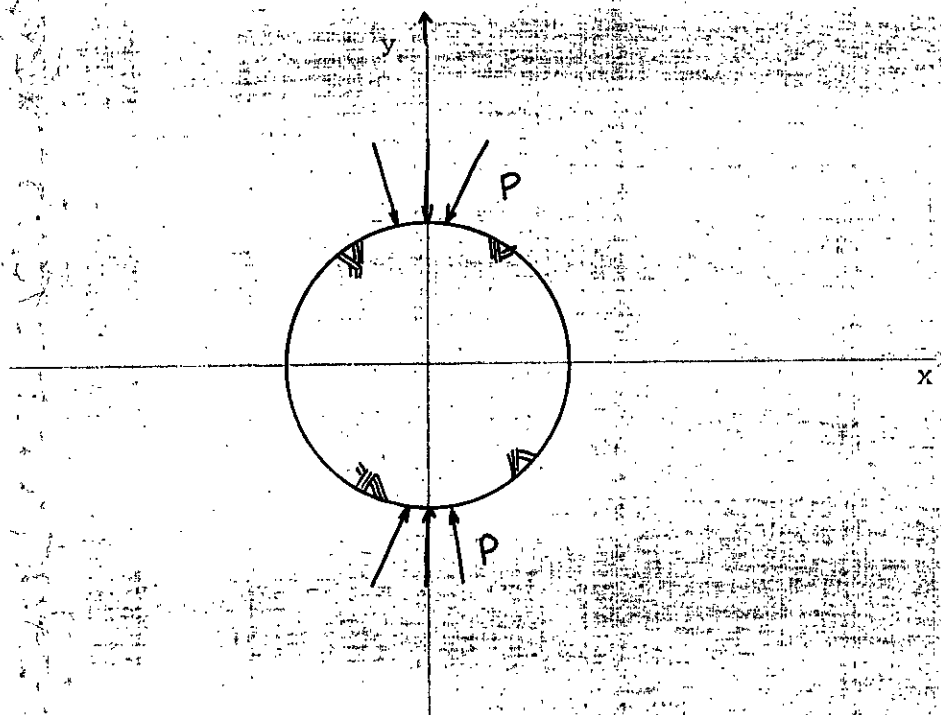




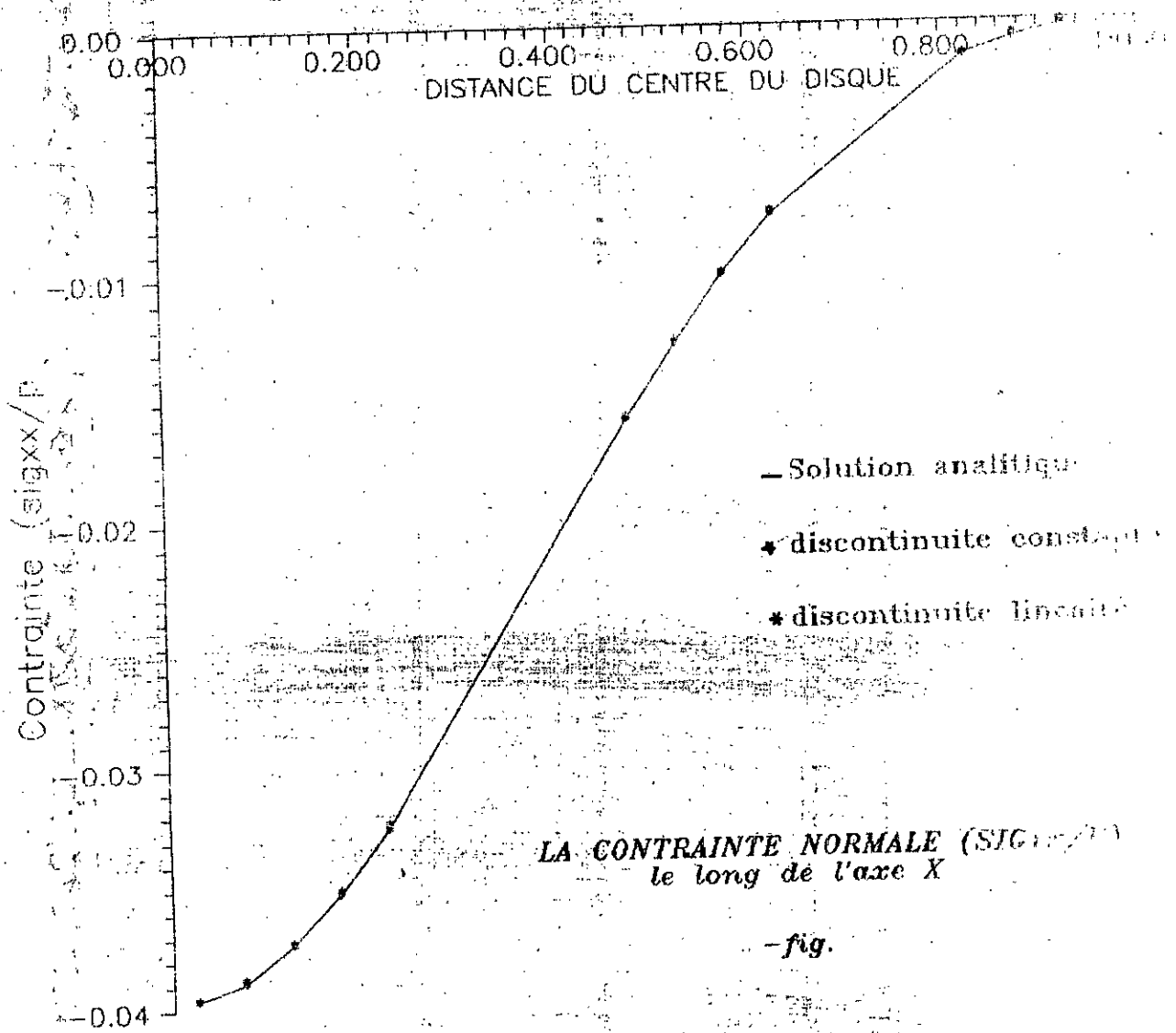


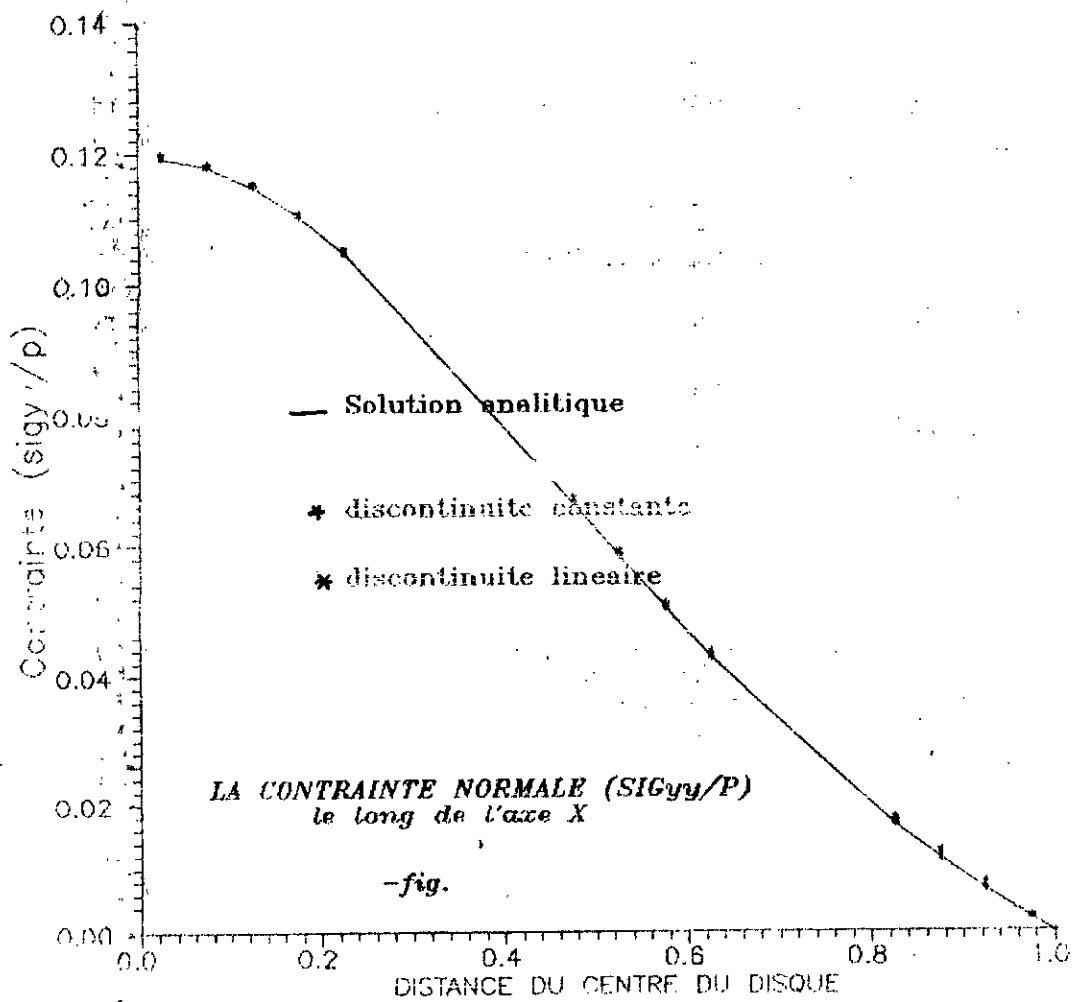
VIERS-EXEMPLE-2: ( PROBLEME INTERIEUR )

Considérons un disque plein et analysons son état de contrainte



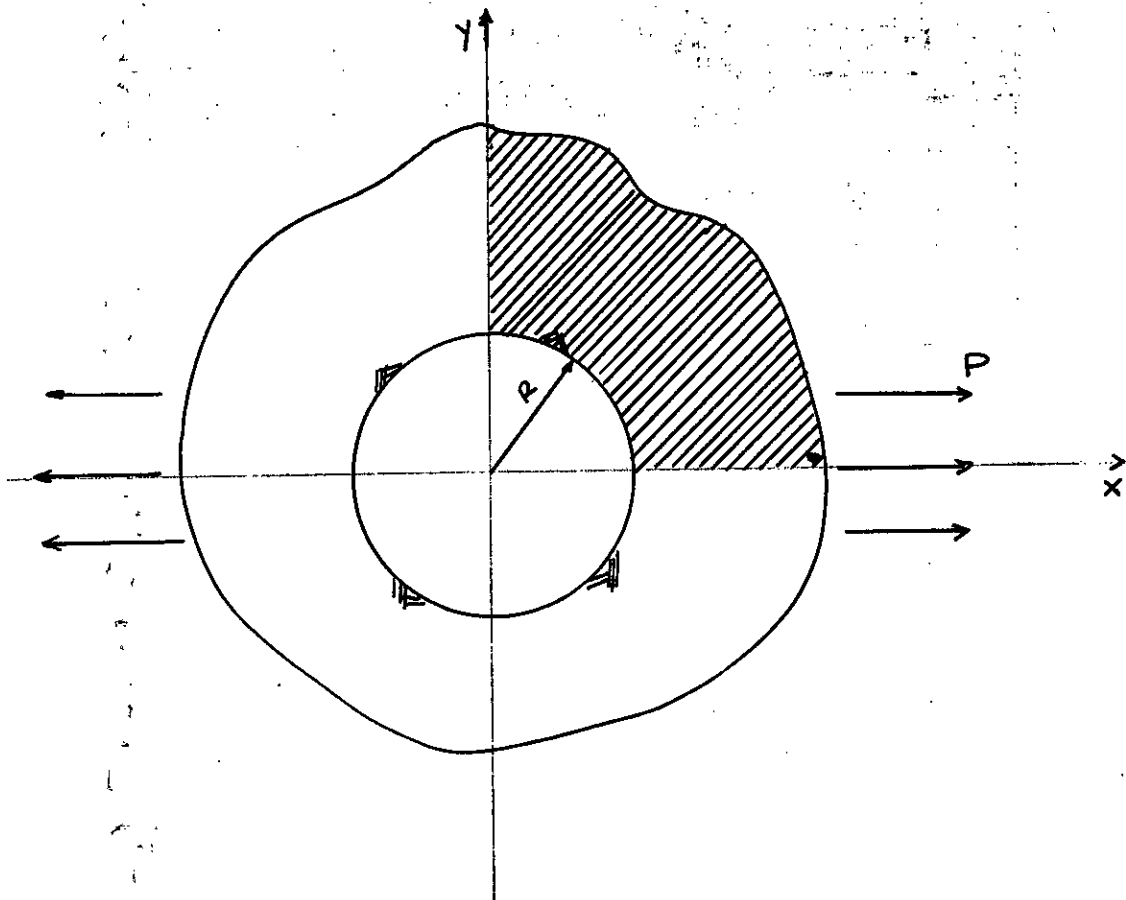
Les résultats sont exposés sur les graphes suivants :





VII-3)-EXEMPLE-3: ( PROBLEME EXTERIEUR )

Considérons une cavité circulaire dans un domaine infini et analysons son état de contraintes



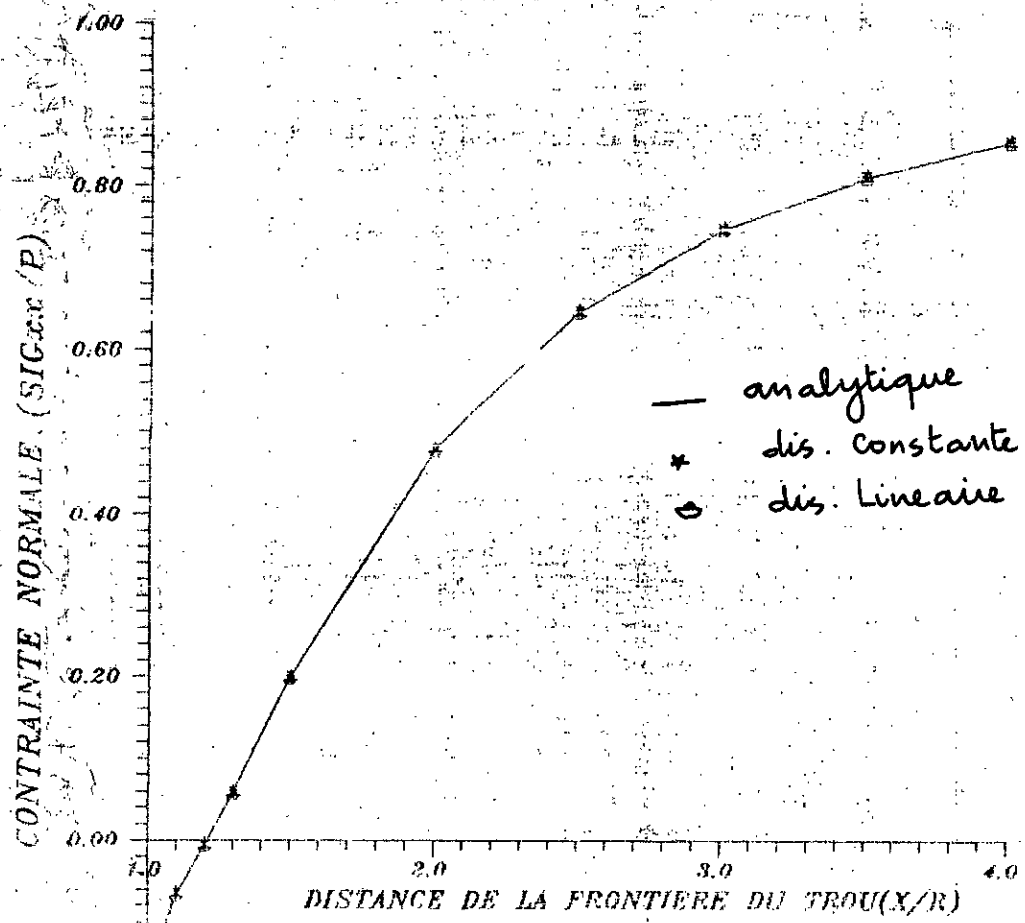
Les résultats sont exposés sur les graphes suivants :

$$\nu = 0.2$$

$$P_{xx} = P$$

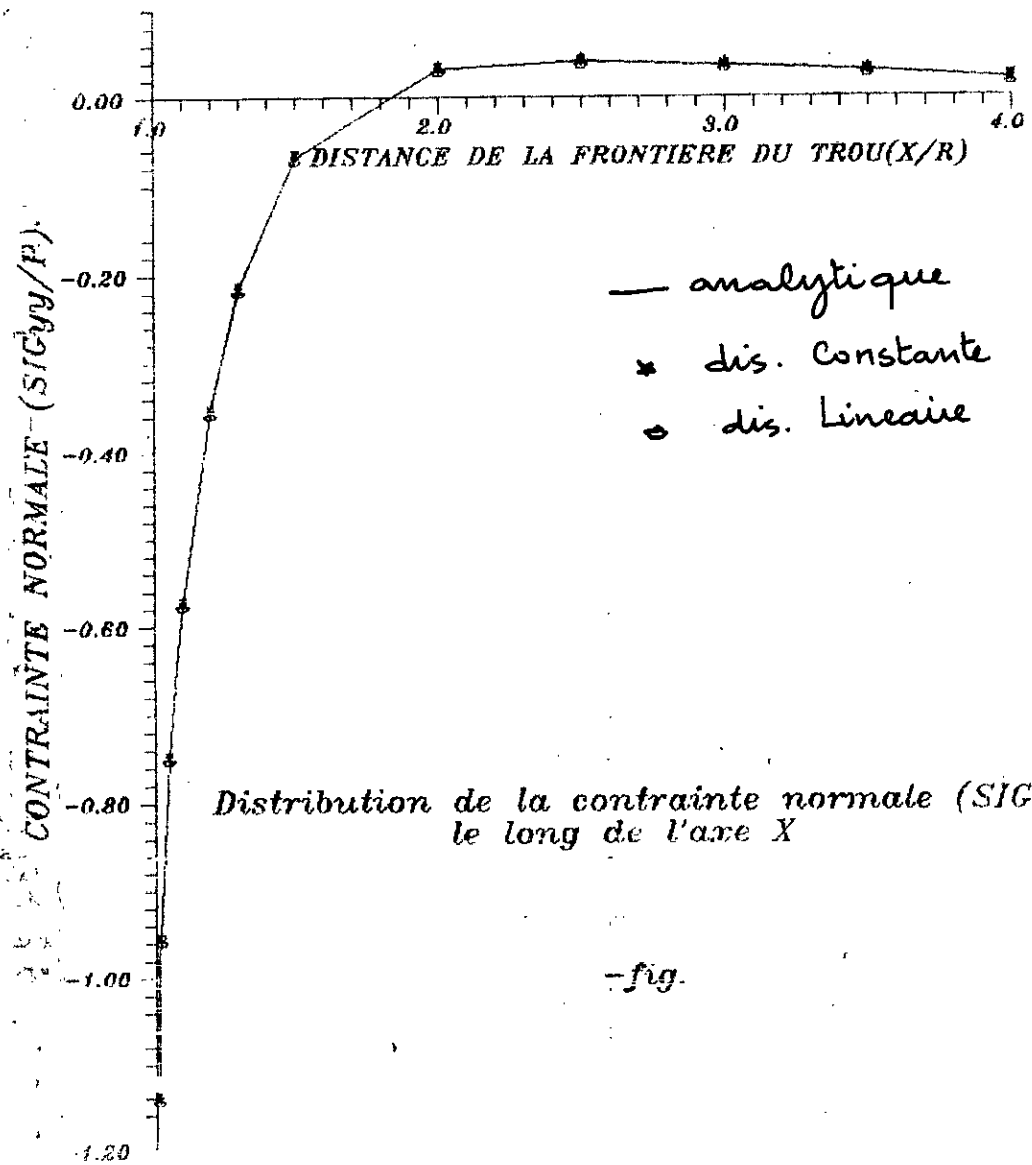
$$G = 0.7 \cdot 10^5$$

$$N = 24 \text{ elements}$$



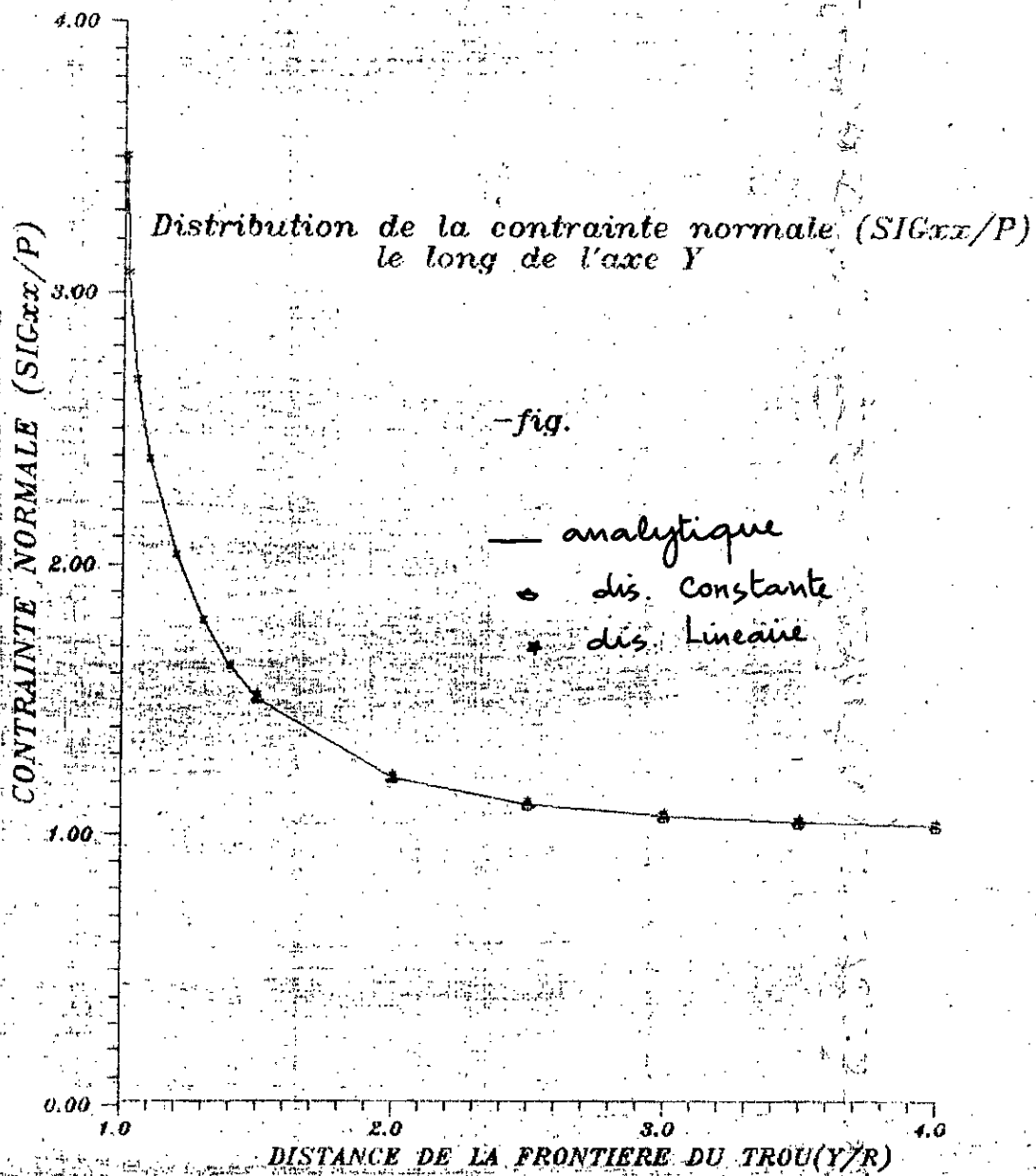
Distribution de la contrainte normale (SIG<sub>xx</sub>/E) le long de l'axe X.

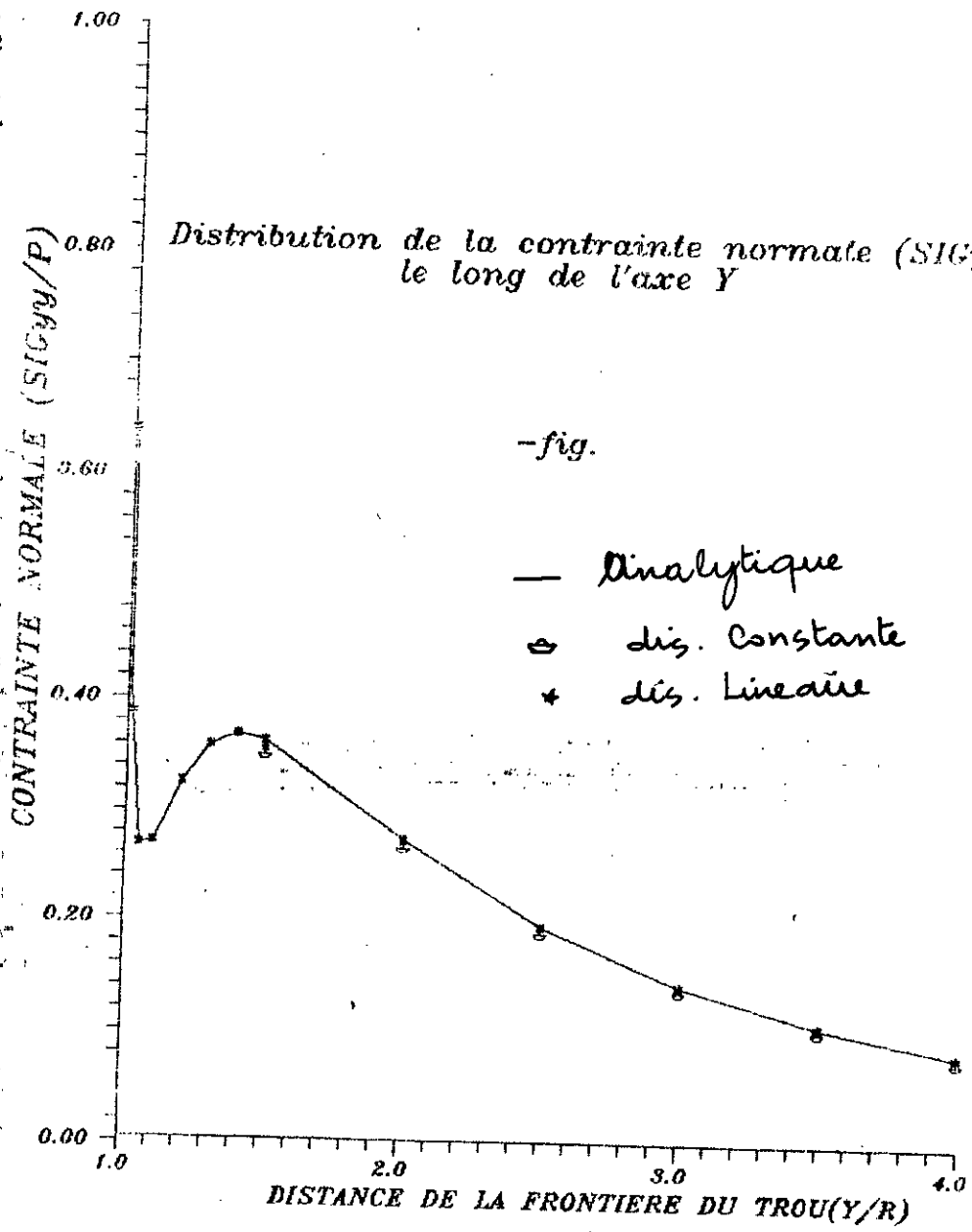
-fig.



-fig.







ANNEXE - 1

Déplacements et contraintes pour une discontinuité de  $\epsilon$  donnée :

1) Discontinuité de déplacement normale ,  $D_N(\epsilon)$ .

$$u_x = (1-2\nu) \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\epsilon, y)}{\partial x} D_N(\epsilon) + y \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\epsilon, y)}{\partial x} D_N(\epsilon)$$

$$u_y = -2(1-\nu) \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\epsilon, y)}{\partial y} D_N(\epsilon) + y \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\epsilon, y)}{\partial y} D_N(\epsilon)$$

$$\sigma_{xx} = 2G \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\epsilon, y)}{\partial y} D_N(\epsilon) + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\epsilon, y)}{\partial y} D_N(\epsilon) \right]$$

A1

$$\sigma_{yy} = 2G \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\epsilon, y)}{\partial y} D_N(\epsilon) - y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\epsilon, y)}{\partial y} D_N(\epsilon) \right]$$

$$\sigma_{xy} = 2G \left[ -y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial y} D_N(\varepsilon) \right]$$

2) Discontinuité de déplacement tangentielle,  $D_S(\varepsilon)$

$$u_x = -2(1-\nu) \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial y} D_S(\varepsilon) + y \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial x} D_S(\varepsilon)$$

$$u_y = -(1-2\nu) \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial x} D_S(\varepsilon) + y \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial x} D_S(\varepsilon)$$

$$A2 \quad \sigma_{xx} = 2G \left[ 2 \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial x} D_S(\varepsilon) + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial x} D_S(\varepsilon) \right]$$

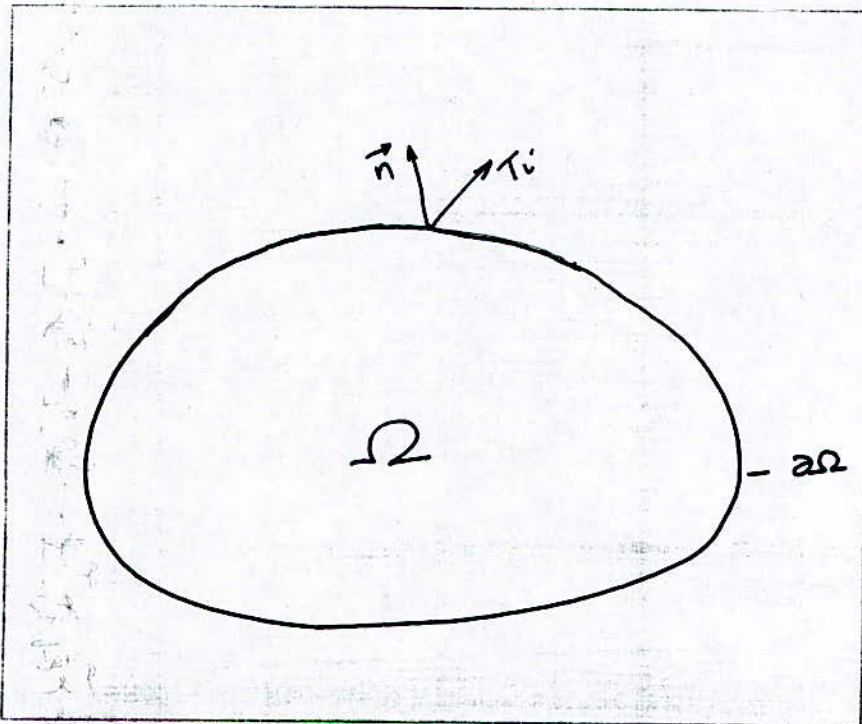
$$\sigma_{yy} = \left[ - y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial x} D_S(\varepsilon) \right]$$

$$\sigma_{xy} = 2G \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial y} D_S(\varepsilon) + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^a \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial y} D_S(\varepsilon) \right]$$

## ANNEXE 2

### -Théorème de réciprocité de BETTI

Soit un corps solide en équilibre sous l'action des forces de volume  $F_i (i=1,2,3)$  et des tensions de surface  $T_i (i=1,2,3)$  [voir fig.]



Considérons deux champs de déplacement  $u$  et  $v$  continus et dérivables et deux champs réguliers de contrainte associés  $\sigma(u)$  et  $\sigma(v)$  et considérons la différentiation suivante :

$$(U_i \sigma_{ij}(\vec{v}))_{,j} = U_i \sigma_{ij,j}(\vec{v}) \quad (2-1)$$

d'où par intégration :

$$\int_{\Omega} (U_i \sigma_{ij}(\vec{V}))_{,j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} U_i \sigma_{ij,j}(\vec{V}) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{i,j} \sigma_{ij}(\vec{V}) d\Omega \quad (2-2)$$

et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} (U_i \sigma_{ij}(\vec{V}))_{,j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} U_i \sigma_{ij,j}(\vec{V}) d\Gamma - \int_{\Omega} U_{i,j} \sigma_{ij}(\vec{V}) d\Omega \quad (2-3)$$

ainsi l'équation (2-2) s'écrit :

$$\int_{\Omega} (U_i \sigma_{ij}(\vec{V}))_{,j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} U_i \sigma_{ij}(\vec{V}) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} U_{i,j} \sigma_{ij}(\vec{V}) d\Omega \quad (2-4)$$

et en utilisant l'égalité :

$$\int_{\Omega} (U_{i,j} \sigma_{ij}(\vec{V})) d\Omega = \int_{\Omega} C_{ijk} v_{k,l} U_{i,j} d\Omega \quad (2-5)$$

sachant que le tenseur d'élasticité C vérifie les propriétés de symétrie suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{iklj} = C_{klij}$$

d'où il en découle :

$$\int_{\Omega} (U_i \sigma_{ij}(\vec{V}))_{,j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} U_i \sigma_{ij}(\vec{V}) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} C_{ijk} v_{k,l} U_{i,j} d\Omega \quad (2-6)$$

en établissant une expression analogue pour le produit  $v_i \sigma_{ij}(u)$  et en faisant la différence, on obtient :

$$\int_{\Omega} (u_i \sigma_{ij}(\vec{v}) - v_i \sigma_{ij}(\vec{u})) d\Omega$$

$$= \int_{\partial\Omega} (u_i \sigma_{ij}(\vec{v}) n_j - v_i \sigma_{ij}(\vec{u}) n_j) d\Gamma - \int_{\Omega} C_{ijkl} (v_{k,l} u_{i,j} - u_{k,l} v_{i,j}) d\Omega$$

(2-7)

due, à la symétrie de cette dernière équation, sa valeur est nulle, et par substitution des relations (2-2) et (2-6) d'après (2-7) on obtient finalement :

$$\int_{\Omega} F_i(\vec{v}) u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} T_i(\vec{v}) u_i d\Gamma = \int_{\Omega} F_i(\vec{u}) v_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} T_i(\vec{u}) v_i d\Gamma$$

qui est la formule de réciprocité de BETTI



### ANNEXE -3

Calcul concernant les coefficients d'influence pour l'équilibre de discontinuité linéaire.

D'après les équations de discontinuités (A1) et (A2) de l'annexe 2 :

$$A1 = \int_{-a}^{+a} \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial x} D_s(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$B1 = \int_{-a}^{+a} \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial x} D_n(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$A2 = \int_{-a}^{+a} \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial y} D_s(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$B2 = \int_{-a}^{+a} \frac{\partial f(x-\varepsilon, y)}{\partial y} D_n(\varepsilon) d\varepsilon$$

Les déplacements et contraintes s'écrivent alors :

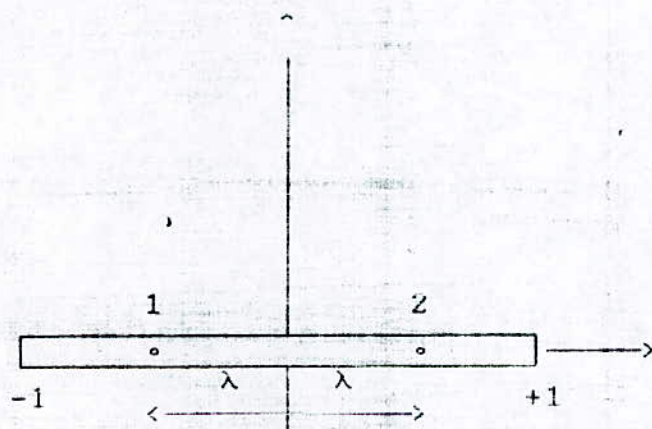
$$\begin{cases} u_x = \left[ -2(1-\nu) A2 + y \frac{\partial}{\partial x} (A1) \right] + \left[ (1-2\nu) B1 + y \frac{\partial}{\partial y} (A1) \right] \\ u_y = \left[ -2(1-\nu) A1 + y \frac{\partial}{\partial y} (A1) \right] + \left[ (1-2\nu) B2 + \nu \frac{\partial}{\partial y} (A1) \right] \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \left[ 2 \frac{\partial}{\partial y} (A1) + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (A1) \right] + 2G \left[ \frac{\partial}{\partial y} (B2) + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B2) \right] \\ \sigma_{yy} &= 2G \left[ -y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (A1) \right] + 2G \left[ \frac{\partial}{\partial y} (B2) - y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B2) \right] \\ \sigma_{xy} &= 2G \left[ 2 \frac{\partial}{\partial y} (A2) + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (A2) \right] + 2G \left[ -y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B1) \right] \end{aligned} \right.$$

Et pour une variation lineaire de la discontinuité, i.e. :

$$\left\{ \begin{aligned} D_s(\varepsilon) &= \frac{1}{2\lambda} (\lambda - \varepsilon) D_s(1) + \frac{1}{2\lambda} (\lambda + \varepsilon) D_s(2) \\ D_n(\varepsilon) &= \frac{1}{2\lambda} (\lambda - \varepsilon) D_n(1) + \frac{1}{2\lambda} (\lambda + \varepsilon) D_n(2) \end{aligned} \right.$$

Avec  $\lambda$  position des noeuds de part et d'autre du centre de l'élément ( ceci nous permettra de déterminer numériquement l'optimum de la localisation des noeuds à l'intérieur de l'élément )



Et, après intégration et arrangement on obtient :

Pour le champ de déplacement :

$$\left\{ U \right\} = K \left[ C \right] \left\{ D \right\}$$

Avec :

$$\left\{ U \right\} = \left\{ \begin{array}{c} U_x \\ U_y \end{array} \right\}$$

$$\left\{ D \right\} = \left\{ \begin{array}{c} D_s(1) \\ D_n(1) \\ D_s(2) \\ D_n(2) \end{array} \right\}$$

$$\left[ C \right] = \left[ \begin{array}{cccc} a1 & b1 & c1 & d1 \\ a2 & b2 & c2 & d2 \end{array} \right]$$

Avec :

$$a1 = 2(1 - \nu) f_3 - y f_{1,x}$$

$$b1 = -(1 - 2\nu) f_1 - y f_{1,y}$$

$$c1 = 2(1 - \nu) f_4 - y f_{2,x}$$

$$d1 = -(1 - 2\nu) f_2 - y f_{2,y}$$

$$a2 = (1 - 2\nu) f_1 - y f_{1,y}$$

$$b2 = 2(1 - \nu) f_3 - y f_{3,y}$$

$$c2 = (1 - 2\nu) f_2 - y f_{2,y}$$

$$d2 = 2(1 - \nu) f_4 - y f_{4,y}$$

-Pour le champ de déplacement :

$$\left\{ \sigma \right\} = 2 K G \left[ C \right] \left\{ D \right\}$$

-Avec :

$$\left\{ \sigma \right\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ D \right\} = \begin{Bmatrix} D_s(1) \\ D_n(1) \\ D_s(2) \\ D_n(2) \end{Bmatrix}$$

$$\left[ C \right] = \begin{bmatrix} e1 & f1 & g1 & h1 \\ e2 & f2 & g2 & h2 \\ e3 & f3 & g3 & h3 \end{bmatrix}$$

- Avec :

$$e1 = 2f_{1,y} + y f_{1,yy}$$

$$e2 = -y f_{1,yy}$$

$$e3 = f_{3,y} + y f_{3,yy}$$

$$f1 = f_{3,y} + y f_{3,yy}$$

$$f_2 = f_{3,y} - y f_{3,yy}$$

$$f_3 = -y f_{1,yy}$$

$$g_1 = 2f_{2,y} + y f_{2,yy}$$

$$g_2 = -y f_{2,yy}$$

$$g_3 = f_{4,y} + y f_{4,yy}$$

$$h_1 = f_{4,y} + y f_{4,yy}$$

$$h_2 = f_{4,y} - y f_{4,yy}$$

$$h_3 = -y f_{2,yy}$$

-K et G sont donés par :  $K = \frac{1}{2\lambda} \frac{1}{4\pi(1-\nu)}$

et  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Les fonctions  $f_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) sont les fonctions données par

$$f_1 = -2a - y \left( \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} \right) + (\lambda-x) \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}$$

$$f_2 = 2a + y \left( \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} \right) + (\lambda+x) \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}$$

$$f_3 = \frac{1}{2} y \operatorname{Log} \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} + (\lambda-x) \left( \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} \right)$$

$$f_4 = \frac{1}{2} y \operatorname{Log} \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} + (\lambda+x) \left( \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} \right)$$

-Les fonctions  $f_{i,j}$  et  $f_{i,jk}$  sont les dérivées première par rapport à  $j$  et deuxième par rapport à  $j$  et  $k$  respectivement des fonctions  $f_i$ .

## ANNEXE -4

Calcul concernant les coefficients d'influence pour les bouts de fissure : on pouvait de même utiliser les équations (a2) de l'annexe 2 pour le calcul de ces coefficients et

— Pour le bout gauche :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_S(\xi) = D_S\left(\frac{\xi+a}{a}\right)^{1/2} \\ D_N(\xi) = D_N\left(\frac{\xi+a}{a}\right)^{1/2} \end{array} \right.$$

— Pour le bout droit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_S(\xi) = D_S\left(\frac{a-\xi}{a}\right)^{1/2} \\ D_N(\xi) = D_N\left(\frac{a-\xi}{a}\right)^{1/2} \end{array} \right.$$

Mais en injectant ces équations dans les équations (a1) et (a2) on aboutit à des intégrales non faisables analytiquement. Alors deux issues sont à considérer pour contourner, ce problème :

- Faire une intégration numérique
- Suivre un autre chemin qui consiste à faire une formulation par la méthode complexe .

Alors on a envisagé la deuxième issue et on a eu recours à la méthode des complexes. Sans entrer dans les détails de la méthode, les équations à résoudre sont :

$$\phi(z) + \Omega(z) = 0 \quad (4-1)$$

$$k \phi(z) - \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{2 \mu D(t)}{t - z} dt \quad (4-2)$$

L'équation (4-2) représente la continuité de contraintes.  
L'équation (4-1) représente la discontinuité de déplacement.

De l'équation (4-1) on trouve  $\phi(z) = -\Omega(z)$

Et par suite on tire  $\phi(z)$  :

$$\phi(z) = \frac{\mu}{(k+1) i \pi} \int_{-a}^{+a} \frac{D(t)}{t - z} dt \quad (4-3)$$

Avec :  $-D(t) = a \sqrt{t + L}$  pour le bout gauche

et :

$-D(t) = a \sqrt{t + L}$  pour le bout gauche

Et les champs de déplacement et de contrainte sont donnés par les équations de KOLOSSOV MUSKHELISHVILI suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} [\phi'(z)] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2 i \sigma_{xy} = 2 [z \overline{\phi''(z)} + \Psi(z)] \\ 2 \mu (u_x + u_y) = k \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \end{array} \right. \quad (4-4)$$

Et en utilisant le changement de variable :

$$\Omega(\bar{z}) = -\bar{z} \phi(\bar{z}) - \Psi(z) \quad (4-5)$$

Les équations (4-4) deviènnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} [\phi'(z)] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i \sigma_{xy} = 2 [\bar{\phi}'(z) + (z - \bar{z}) \phi''(z) - \bar{\Omega}'(z)] \\ 2\mu (u_x + u_y) = k \phi(z) - (z - \bar{z}) \bar{\phi}(\bar{z}) + \Omega(\bar{z}) \end{array} \right. \quad (4-6)$$

D'où les champs de déplacement et de contrainte seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = 2 \operatorname{Re} [\phi'(z)] + \operatorname{Re} [\bar{\phi}'(z) + (z - \bar{z}) \phi''(z) - \bar{\Omega}'(z)] \\ \sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} [\phi'(z)] - \operatorname{Re} [\bar{\phi}'(z) + (z - \bar{z}) \phi''(z) - \bar{\Omega}'(z)] \\ \sigma_{xy} = -\operatorname{Im} [\bar{\phi}'(z) + (z - \bar{z}) \phi''(z) - \bar{\Omega}'(z)] \end{array} \right. \quad (4-7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} [k \phi(z) - (z - \bar{z}) \bar{\phi}(\bar{z}) + \Omega(\bar{z})] \\ u_y = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im} [k \phi(z) - (z - \bar{z}) \bar{\phi}(\bar{z}) + \Omega(\bar{z})] \end{array} \right. \quad (4-8)$$

-Avec :

-pour le bout gauche :

$$\phi(z) = \frac{\mu}{(k+1)i\pi\sqrt{L}} \left\{ -2\sqrt{2L} - \sqrt{L-z} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{L-z} - \sqrt{2L}}{\sqrt{L-z} + \sqrt{2L}} \right\}$$



$$\phi(z) = \frac{\mu}{(k+1)i\pi\sqrt{L}} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{L-z}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{L-z} - \sqrt{2L}}{\sqrt{L-z} + \sqrt{2L}} - \sqrt{2L} \frac{1}{\sqrt{L-z}} \right\}$$

$$\phi(z) = \frac{\mu}{(k+1)i\pi\sqrt{L}} \left\{ \frac{1}{4(L-z)^{3/2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{L-z} - \sqrt{2L}}{\sqrt{L-z} + \sqrt{2L}} + \sqrt{2L} \frac{1}{\sqrt{L-z}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{L-z}} + \frac{1}{\sqrt{L-z}} \right] \right\}$$

-pour le bout droit :

$$\phi(z) = \frac{\mu}{(k+1)i\pi\sqrt{L}} \left\{ 2\sqrt{2L} + \sqrt{L+z} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{L+z} - \sqrt{2L}}{\sqrt{L+z} + \sqrt{2L}} \right\}$$

$$\phi(z) = \frac{\mu}{(k+1)i\pi\sqrt{L}} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{L+z}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{L+z} - \sqrt{2L}}{\sqrt{L+z} + \sqrt{2L}} + \sqrt{2L} \frac{1}{\sqrt{z-L}} \right\}$$

$$\phi(z) = \frac{\mu}{(k+1)i\pi\sqrt{L}} \left\{ \frac{1}{4(L+z)^{3/2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{L+z} - \sqrt{2L}}{\sqrt{L+z} + \sqrt{2L}} + \sqrt{2L} \frac{1}{\sqrt{z-L}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{L+z}} + \frac{1}{\sqrt{z-L}} \right] \right\}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] -CROUCH S.L.,(1983),Boundary element methods in solid mechanics.Ed.G.Allen & Urwin Publishers Ltd.
- [2] -CRAWFORD A.M., CURRAN J.H.,(1981). Higher order functional variation displacement discontinuity elements.
- [3] -BELKACEMI Y.,(1985).Application de la M.D.D. aux milieux viscoélastiques lineaires .D.E.A de M.D.S
- [4] -GALLAGHER R.H.,(1976).Introduction aux éléments finis. Prentice-Hall, Inc.
- [5] -ROUAINIA "Modélisation numérique de la propagation de fissures dans les milieux élastiques".Rapport de stage.
- [6] -S.E.F.I.M.,(1984).Application de la M.E.I..Rapport.
- [7] -NASRAS K.,(1991),Simulation numérique par équations intégrales de frontières d'essais en mécanique de la rupture. P.F.E. (E.N.P.).
- [8] -HERROUR S.E.,(1991).Viscoélasticité lineaire couplée à la M.D.D. P.F.E. (E.N.P.).
- [9] -BABAAMER, Fortran 77.
- [10] -CROUCH S.L.,(1976).Solution of plane elasticity problems by the D.D. method. (I.J.N.M.E.)
- [11] -CROTTY J.M.,WARDLE L.J.. Boundary integral analysis of, piecewise homogeneous media with structural discontinuities.