

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

الدرجة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *Génie Mécanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*SIMULATION NUMERIQUE PAR EQUATIONS
INTEGRALES DE LA FISSURATION PAR FATIGUE*

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

S. RECHAK

Mr. N. MAKHLOUF

Mr. S. RECHAK

Mr. A. AINAOU

PROMOTION

JUILLET / 1992

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi El-Harrach - Alger

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : *Génie Mécanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

SIMULATION NUMERIQUE PAR EQUATIONS

INTEGRALES DE LA FISSURATION PAR FATIGUE

Proposé par :

Mr. S. RECHAK

Etudié par :

Mr. N. MAKHLOUFI

Mr. A. AINAQUI

Dirigé par :

Mr. S. RECHAK

PROMOTION : JUILLET / 1992

MINISTERE AUX UNIVERSITES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département : Génie Mécanique

Promoteur : Mr: S. RECHAK

Elèves-ingénieurs : Mr: N. MAKHLOUFI

&

Mr: A. AINAOUT



Sujet : Simulation numérique par équations intégrales de la fissuration par fatigue.

Résumé: Ce travail consiste à l'élaboration d'un logiciel pour le calcul des structures fissurées par fatigue à savoir la prédiction de la durée de vie et la direction de propagation par la méthode des équations intégrales.

Subject : Numerical simulation of crack's propagation by the boundary element methode.

Summary : This work consists of the elaboration of a software computing cracked structures by fatigue. thus the prediction of the life duration and the propagation's direction.

الموضوع : محاكاة عددية بطريقة المعادلات التكاملية لانتشار الشقوق بسبب الإجهاد.
الملخص : يتمثل هذا العمل في إعداد برنامج حاسوبي لحساب البنيات المشروخة بسبب الإجهاد لتحديد منحى الشروخ وكذا مدة استغلالها، وذلك باستعمال طريقة المعادلات التكاملية.

Remerciement:

Nous remercions vivement notre promoteur Mr Saïd RECHAK pour ses conseils et ses orientations.

Nos remerciements vont également à Mr Passine BELRAEMI pour l'aide qu'il nous a porté tout au long de ce projet.

Que tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce travail trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Mr: N. MAKHLOUFI

Mr: A. ANTOU

DEDICACES

A nos chers parents, nos frères et soeurs, nos amis
à toutes les voies libres à travers le monde nous dedions ce
modeste travail.

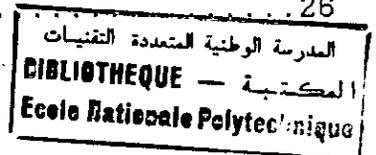
Mr N. MAKHLOUFI

Mr A. AINAOUI

-INTRODUCTION.GENERALE	1
r-PHENOMENE DE FATIGUE	
I.1-Introduction.....	3
I.2-Evolution structurale.....	3
I.3-Facteurs de fissuration.....	5
I.4-Endommagement par fatigue.....	6
I.4.1-Amorçage.....	6
I.4.2-Propagation stable	7
I.4.3-Propagation instable.....	7
I.5-Type de fatigue.....	8
I.5.1-Fatigue oligocyclique.....	8
I.5.2-Fatigue d'endurance limitée.....	8
I.5.3-Fatigue d'endurance illimitée.....	8
II)-RAPPELS DE LA MECANIQUE LINEAIRE DE RUPTURE	
II.1-Introduction.....	9
II.2-Approche globale.....	9
II.2.1-Formulation.....	10
II.2.2-Généralisation.....	12
II.3-Approche locale.....	16
II.3.1-Formulation.....	16
II.4-Relation entre K et G.....	22
III)-EVOLUTION DE LA FISSURE PAR FATIGUE	
III.1-Principaux modèles décrivant la propagation.....	23
III.2-Critiques des modèles.....	24

III.3-Estimation de la taille de la zone plastique.....25

III.4-Direction de propagation.....26



IV)-METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES

IV.1-Introduction.....28

IV.2-Méthode de discontinuité de déplacement.....28

V)-SIMULATION NUMERIQUE

V.1-Introduction.....42

V.2-Domaine de validité et d'emplois.....43

V.3-Procédure de simulation.....44

V.4-Organigramme.....48

V.5-Résultats et interprétation.....51

• VI)-CONCLUSION

INTRODUCTION GENERALE

"Vouloir c'est pouvoir."

Au cours du dimensionnement; l'ingénieur s'arrange toujours à éviter le fonctionnement de la pièce dans le domaine plastique; pour ce faire; la contrainte max ne doit pas dépasser la limite élastique du matériau, et donc tenir compte des concentrations de contraintes induites par variation de forme, entaille, rainure, etc..

Malgré ça, pour les pièces soumises à des sollicitations de nature variées spécialement cycliques; jugées très modestes par rapport aux capacités de résistance du matériau, on enregistre des endommagements, causant parfois des catastrophes.

C'est le phénomène de fatigue qui en est à l'origine. Il se manifeste par des variations des propriétés physiques et métallurgiques du matériau contribuant à des concentrations locales de contraintes, germination de microfissures. Puis propagation jusqu'à la rupture totale; phénomène inévitable dans les pièces ainsi sollicitées.

Le dimensionnement à ce sujet consiste en un calcul préventif de la durée de vie d'une pièce, afin d'éviter l'endommagement à conséquence grave.

Plusieurs travaux de recherches ont été menés à ce sujet en vu de proposer des modèles cohérents, approchant de mieux la réalité et gouvernant la propagation de la fissure tout en tenant compte des conditions de chargement, de la taille de la fissure, de sa localisation et des lois de comportement du matériau à la déformation.

Tous les modèles analytiques traitant ce type de problèmes sont valables uniquement pour des cas simples de sollicitation.

Pratiquement on ait confronté à des problèmes de fissuration très complexes.

L'étude dans ce cas est d'ordre expérimentale. Et le resultat ainsi trouvé est très restreint au matériau en vigueur, et dans des conditions d'expérimentation. Donc un calcul numérique s'avère nécessaire.

C'est dans cet esprit que nous avons essayer d'élaborer un logiciel permettant le dimensionnement préventif en fatigue pour un chargement d'amplitude constante. Entre autre le calcul des variables de fissuration par la methode des équations intégrales, le control de l'évolution de la loi de déformation, le nombre de cycles à la rupture; qui s'applique aussi bien pour les géométries simples qu'aux géométries complexes bidimensionnelles .

le chapitre un est consacré à la définition du phénomène de fatigue, son évolution physique et stucturale. Dans le chapitre deux on annonce des rappels de la mécanique linéaire de la rupture utilisés pour modeliser la propagation, Le chapitre trois est réservé à la propagation sous ses différentes formes; une présentation de la méthode des équations intégrales est donnée dans le chapitre quatre et enfin dans le chapitre cinq on décrit la procédure d'élaboration du travail et l'architecture du programme.

CHAPITRE 1

PHENOMENE DE FATIGUE

"A chaque phénomène ses variables
à chaque variable sa loi d'évolution."

I.1)-INTRODUCTION :

Au cours de la sollicitation cyclique, les contraintes apparentes ne sont pas assez intenses pour provoquer la rupture de la pièce, en effet c'est l'application des cycles de déformation qui contribue à une modification structurale du matériau, par conséquent ses propriétés mécanique et physique, ainsi ce dernier perd localement ses capacités de résistances et là; les microfissures prennent naissances.

En vue d'une meilleure compréhension du phénomène nous avons jugé utile de présenter dans ce chapitre les modifications que subit le matériau en question.

I.2.)-EVOLUTION STRUCTURALE.

Jusqu'à nos jours il n'y a pas de modèle analytique décrivant le changement cristallin de la structure en fatigue. La description du phénomène est basée sur l'analyse faite à l'aide des microscopes électroniques; la cohérence des résultats pour différents types de matériaux, et différentes conditions de sollicitation en constituent la source de validité.

Dès les premiers cycles de sollicitation on observe la formation de bandes de glissement superficielles qui, par un simple recuit ou palissage de la surface peuvent disparaître (augmentation de la durée de vie)

(Fig 1.1)

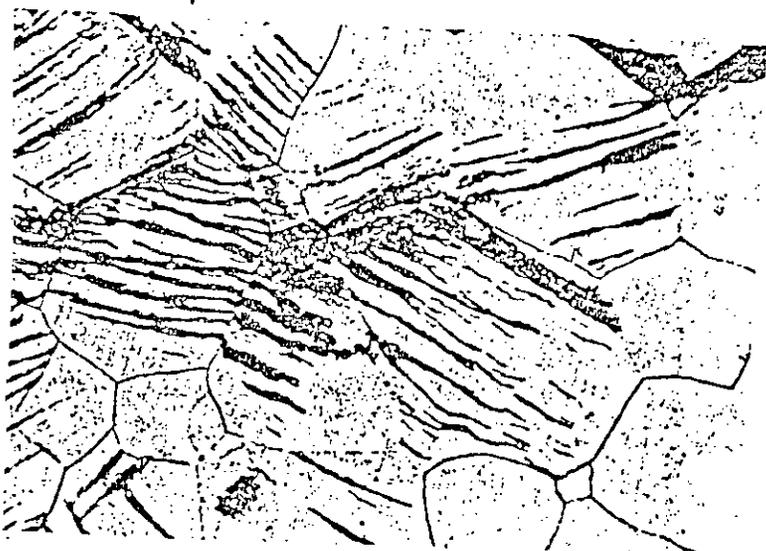


Fig.1.6 — Micrographie optique de la surface d'une éprouvette d'acier doux après 525 000 cycles de flexion alternée sous $\pm 13 \text{ daN/mm}^2$, montrant l'existence et la répartition des bandes de déformation ($\times 750$) (d'après G. Henry).

Par suite de sollicitation, ses bandes se multiplient et s'enfoncent et le glissement devient irréversible .

A ce stade ; par suite de déformation, les bandes de glissement se joignent bout à bout et engendrent des lignes de glissement correspondant à des plans de glissement à l'intérieur de la structure .

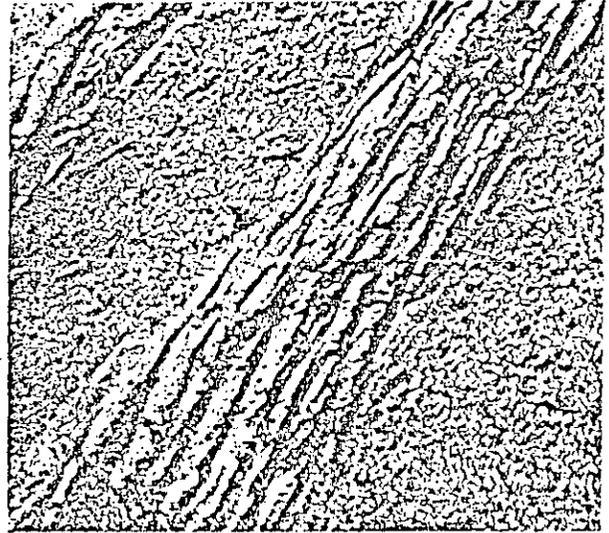
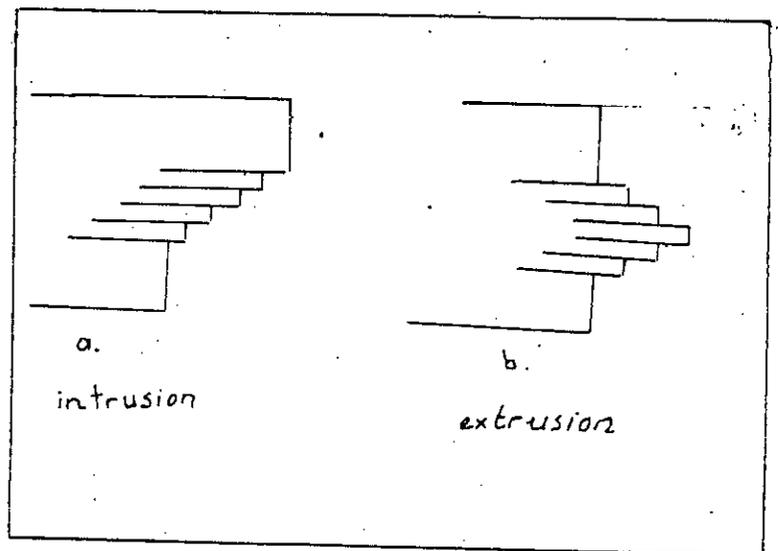


Fig.1.7 — Micrographie électronique de la surface d'une éprouvette d'acier doux après 125 000 cycles de flexion alternée montrant la présence de nombreux glissements déviés dans la bande de déformation (x 16 000) (d'après G. Henry).

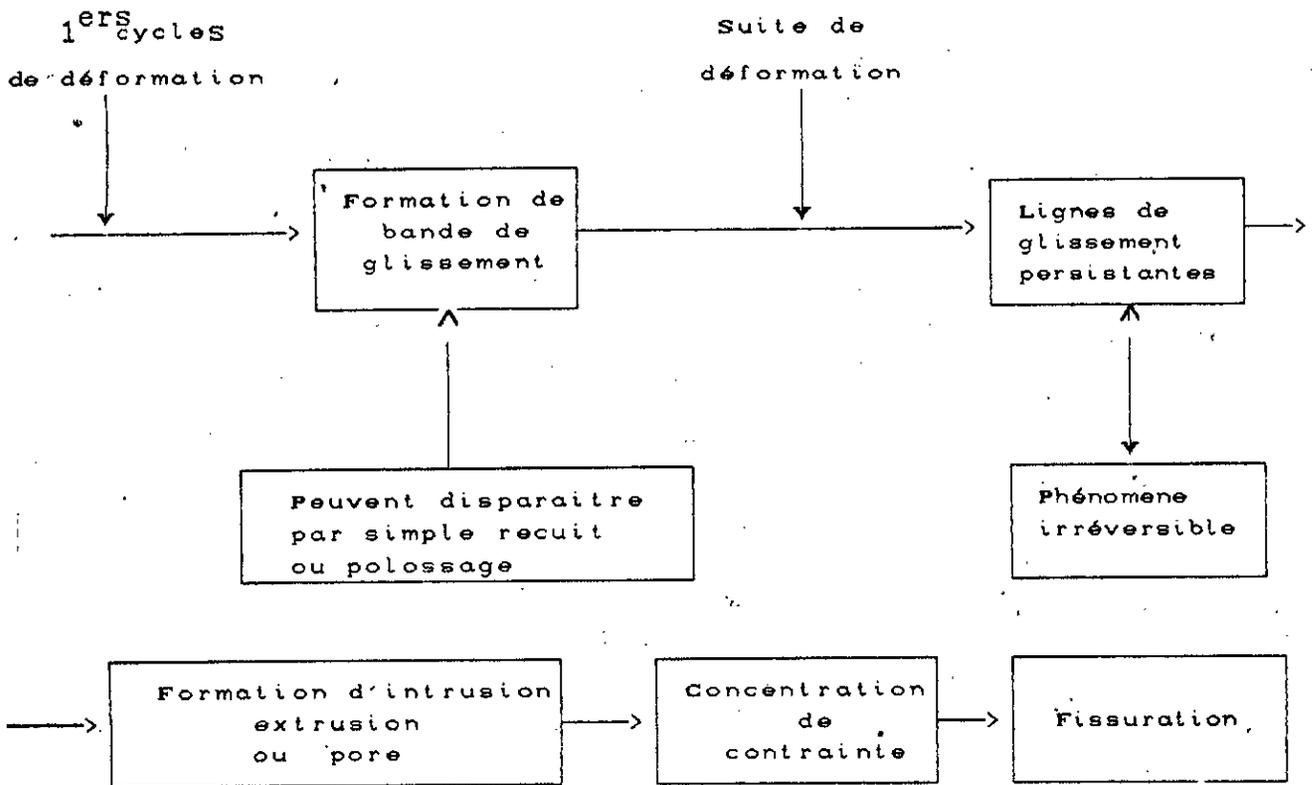
Ces glissements; selon le type de matériau deviennent soit des intrusions , extrusions ou des pores .

Ces derniers sont à l'origine des microfissures (constituant des zones de concentration de contrainte) .

(Fig 1.3)



L'évolution peut être schématiser comme suit :



I.3)-Facteurs causant la fissuration .

Les concentrations de contrainte contribuant à la germination des microfissures sont d'origines diverses:

I.3.1)-Facteurs métallurgiques :

la composition du matériau, sa mise en forme, les traitements thermiques subits, tous ces facteurs engendrent des défauts à l'intérieur de la structure qui, au cours de la sollicitation deviennent des microfissures et augmentent de taille par propagation

I.3.2)/Facteurs géométriques

les changements de section, rainure, filletage, entaille, concentrent des contraintes intensivement affectées en fatigue.

I.3.3 Etat de surface

Dans de nombreux cas pratiques, les couches superficielles sont les plus sollicitées et les fissures en prennent naissance. Ces irrégularités se comportent comme des micro-entailles qui provoquent des fissurations.

Pour éviter la fissuration à cette origine, il est recommandé d'augmenter la résistance de la surface par cémentation, éviter l'adoucissement de la couche superficielle.

I.3.4 Conditions de sollicitation:

Plusieurs types de sollicitation peuvent favoriser la fatigue t.q l'effet de l'environnement (corrosion), la température et le chargement cyclique.

ce dernier est le plus important, pratiquement l'affectation par ce mode est liée à l'histoire de l'amplitude de chargement constante ou variable, le rapport de chargement:

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$$

Un rapport de chargement d'amplitude constante affecte moins le matériau qu'un chargement d'amplitude variable.

Un grand rapport de chargement R est plus affectant qu'un rapport petit.

I.4) - Endommagement par fatigue:

L'évolution structurale décrite est une étape caractéristique de la fatigue, mais pas suffisante pour une étude qualitative du phénomène, en effet l'endommagement par fatigue est répartie en trois étapes ayant chacune ses caractéristiques.

I.4.1) - Amorçage.

C'est la première étape d'endommagement, les variations structurales et mécaniques se manifestent par: l'apparition d'intrusion et d'extrusion puis germination de microfissures.

Cette étape est caractérisée par le nombre de cycles à l'amorçage:

$$Na = A(\Delta\epsilon_{pl})^{-\alpha} \quad A, \alpha \text{ const du matériau}$$

Un autre aspect d'amorçage est celui du matériau contenant initialement une fissure provenant d'un défaut de mise en forme. Dès les premiers cycles de sollicitations aucune propagation n'est notable, il y a vieillissement du matériau, et au delà d'un certain nombre de cycles, il y aurait propagation, ce dernier caractérise le nombre de cycles à l'amorçage:

$$Na = \frac{a_0}{da/dN} \quad ; a_0 \text{ taille initiale}$$

I.4.2 Propagation stable :

Une fois la fissure est amorcée, elle passe au stade de propagation. Cette étape est caractérisée par une propagation stable de la fissure jusqu'à un seuil critique ou la rupture surgit rapidement.

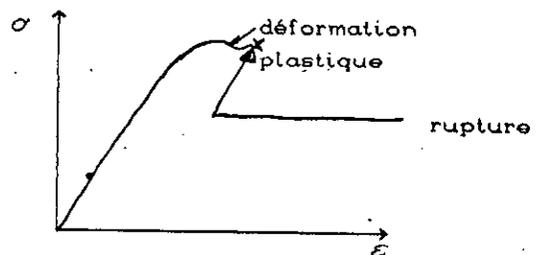
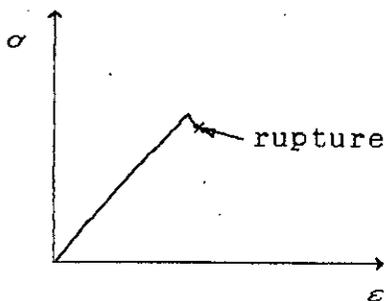
Elle constitue l'étape de fonctionnement admissible. Une structure est fiable lorsque sa durée de vie à ce stade est dominante en endommagement.

Pour cela toute pièce fissurée en fonctionnement nécessite la prédiction de la durée stable afin d'éviter la rupture à conséquence grave.

I.4.3 propagation instable:

C'est l'étape de rupture brutale, le matériau a atteint le seuil critique de propagation; la plastification est étendue, le nombre de cycles à la rupture est très limité (matériau ductile).

Le fonctionnement à ce stade est déconseillé. Pour les matériaux fragiles cette étape est dominante en propagation et donc la rupture est brutale.



I.5 Types de fatigue:

I.5.1 Fatigue oligocyclique

En générale ce type de fatigue est obtenue pour une contrainte apparente dépassant la limite élastique du matériau:

$$\sigma_{pf} > \sigma_{nom} > Re > \sigma_g$$

σ_{pf} : contrainte près de la fissure

σ_{nom} : contrainte nominale

Re : limite élastique

σ_g : contrainte globale

caractérisée par une plastification étendue et un nombre de cycles à la rupture très limité.

I.5.2 Fatigue d'endurance limitée

C'est le domaine habituel de fatigue là où la contrainte globale est au dessous de la limite élastique mais générant une contrainte près de la fissure dépassant la limite élastique, caractérisée par une plastification locale dont la taille dépend de l'intensité de contrainte.

le nombre de cycles à la rupture croit lorsque la contrainte à la rupture décroît.

I.5.2.3 Fatigue d'endurance illimitée

Généralement ce cas se présente pour des niveaux de contrainte faible, le nombre de cycles à la rupture dépasse la durée de vie prévue.

Phénomène d'apparence rentable mais un problème d'optimisation s'impose. On évite par conséquent un tel dimensionnement.

CHAPITRE 2

RAPPELS DE LA MECANIQUE

LINÉAIRE DE LA RUPTURE

"Une loi est un modèle qui n'est

plus (et pas encore !) contesté

CHAPITRE 00: RAPPELS DE LA MECANIQUE LINEAIRE DE LA RUPTURE

II.1) -INTRODUCTION:

En vue d'éviter les déformations irréversibles dans les structures continues, l'analyse des contraintes s'effectue par la mécanique des milieux continus; quand à la loi de comportement à la déformation, la théorie d'élasticité est l'hypothèse de base.

Pour les structures fissurées (milieux discontinus) la singularité de contrainte au front de fissure conditionne le choix du comportement à la déformation. En effet pour les matériaux fragiles la théorie d'élasticité linéaire constitue une très bonne approche. La singularité une fois qu'elle est critique ne modifie pas le comportement à la déformation; elle provoque la rupture.

Pour les matériaux ductiles la situation est différente, à sa valeur critique, la singularité donne naissance à une zone plastique, ainsi le matériau devient élastoplastique. Quand aux capacités de résistance, l'analyse par la M.M.C ne tient pas debout. La théorie de fissuration est l'outil de base elle permet de contrôler l'évolution de la fissure, analyser l'état de contrainte et prévoir la rupture; et ceci par l'introduction de deux approches qualifiées de globale et locale.

II.2) -APPROCHE GLOBALE:

Formulée par GRIFFITH (en 1920) pour les matériaux fragiles et généralisée par LEMAITRE et CHABOCHE (Thermodynamique des solides) en 1970 consiste à calculer le taux de l'énergie restituée " G " au cours d'une fissuration fictive de longueur dl, et il n'y aurait rupture que si $G \geq G_c$, ou G_c est la valeur critique caractéristique du matériau.

C'est ainsi qu'est formulé le 1^{er} critère de rupture.

II.2.1)-FORMULATION: (Théorie de GRIFFITH)

Basée sur le principe de conservation de l'énergie totale.
Soit un solide élastique:

$$W_{\text{tot}} = W_{\text{élast}} + W_{\text{ext}} + W_A + W_{\text{cin}} \quad (2-1)$$

$W_{\text{élast}}$: énergie élastique.

W_{ext} : travail des forces extérieures

W_A : énergie dissipée pour séparer 2 surfaces

$$W_A = 2 \gamma S$$

γ : tension superficielle.

W_{cin} : énergie cinétique.

principe de conservation de l'énergie totale:

$$dW_{\text{tot}} = dW_{\text{élast}} + dW_{\text{élast}} + dW_A + dW_{\text{cin}} = 0 \quad (2-2)$$

$$\partial W_{\text{cin}} = - (\partial W_{\text{élast}} + \partial W_{\text{ext}} + \partial W_A)$$

La propagation n'est possible que si $W_{\text{cin}} \geq 0$

$$\partial W_{\text{élast}} + \partial W_{\text{ext}} + \partial W_A \leq 0 \quad (2-3)$$

$$W_A = 2 \gamma S$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \langle W_{\text{élast}} + W_{\text{ext}} \rangle + 2 \gamma \leq 0$$

On définit le taux de l'énergie restituée au cours d'une propagation dS par :

$$G = - \frac{\partial}{\partial S} \langle W_{\text{élast}} + W_{\text{ext}} \rangle \quad (2-4)$$

$$-G + 2\gamma \leq 0$$

$$\text{Soit : } G \geq 2\gamma$$

(2-5)

$G < 2\gamma$ pas de propagation $\langle W_{cin} < 0 \rangle$

$G = 2\gamma$ début de propagation stable.

$G > 2\gamma$ propagation instable.

FORMULATION INTEGRALE:

Consiste à écrire le taux de restitution d'énergie en fonction du champs de contrainte et de déplacement sur les frontières du domaine fissuré.

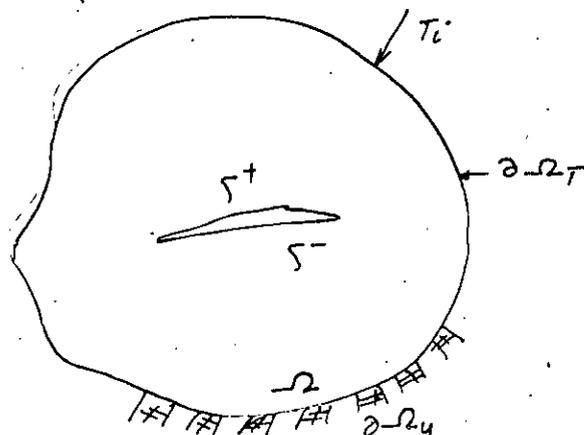
MILIEU PLAN:

On considère un domaine Ω présentant une discontinuité de taille a ; $\partial\Omega$ frontière du domaine extérieur.

ξ^+ U ξ^- frontière de la fissure.

$\partial\Omega_T$ = frontière du domaine à contrainte imposée.

$\partial\Omega_u$ = frontière du domaine à déplacement imposé.



On a :

$$G = - \frac{\partial}{\partial S} \left\langle W_{\text{élast}} + W_{\text{ext}} \right\rangle /$$

pour un solide élastique linéaire

$$W_{\text{élast}} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (2-6)$$

$$W_{\text{ext}} = - \int_{\partial\Omega_T} T_i \frac{dU_i}{dA} d\xi \quad (2-7)$$

Le théorème de GREEN-STOKS permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale curviligne.

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_T} \left\langle T_i \frac{dU_i}{dA} + U_i \frac{dT_i}{dA} \right\rangle d\Gamma \quad (2-8)$$

L'équation (2-4) devient :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_T} \left\langle T_i \frac{dU_i}{dA} - U_i \frac{dT_i}{dA} \right\rangle d\Gamma \quad (2-9)$$

II.2.2) -GENERALISATION PAR LE MAITRE-CHABOCHE:

La formulation de la théorie de GRIFFITH en matériau fragile constituait un grand handicap d'utilisation du critère G_c , en mécanique de la rupture et la théorie de fissuration, après sa généralisation par LEMAITRE-CHABOCHE en 1970, cette théorie est rendue d'une large utilisation à cause de son adaptation aux techniques de simulation numérique.

FORMULATION:

F : champs de force appliqué à une structure

$$F_q = K \cdot U_q \quad K : \text{rigidité de la structure} \quad (2-10)$$

On définit un potentiel thermodynamique ψ de la structure en tenant compte de toute les énergies du corps pour différentes lois de comportement, comme les comportements élastique et plastique sont prépondérants; dans les structures discontinues.

$$\psi = \psi_{\text{élast}} + \psi_{\text{plast}} \quad (2-11)$$

avec $\psi_{\text{plast}} = f \langle U, T, A, h_s \rangle$

U : déplacement significatif des travaux extérieurs.

$$\psi_p = f \langle T, h_s, h_p \rangle$$

L'exploitation de ce potentiel est comme suit:

$$F_q = \frac{\partial \psi_e}{\partial U_q} \quad S = - \frac{\partial \psi}{\partial T}$$

$$G = - \frac{\partial \psi}{\partial A} \quad H_s = \frac{\partial \psi}{\partial h_s}$$

D'autre part :

$$F = K \cdot q$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ q \right\}^T \cdot \left[K \langle T, A, h_s \rangle \right] \cdot \left\{ q \right\} + \psi_p \quad (2-13)$$

L'énergie interne est négligée.

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ q \right\}^T \cdot \left[K \right] \left\{ q \right\} + \psi_p \quad (2-14)$$

Le taux de restitution d'énergie est :

$$G = - \frac{\partial \psi}{\partial A} = - \frac{1}{2} \left\{ q \right\}^T \cdot \left[\frac{\partial K}{\partial A} \right] \left\{ q \right\} \quad (2-15)$$

Or $\left\{ q \right\} = \left[K \right]^{-1} \cdot \left\{ F \right\} \quad ; \quad \left\{ q \right\}^T = \left\{ F \right\}^T \cdot \left[K \right]^{-1}$

$$G = - \frac{1}{2} \left\{ F \right\}^T \cdot \left[K \right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial K}{\partial A} \right] \cdot \left[K \right]^{-1} \left\{ F \right\} \quad (2-16)$$

Cette forme sera simplifiée pour 2 cas de conditions aux limites :

a) En effort imposé : $\rightarrow dF=0$

$$\rightarrow d \left\langle \left[K \right] \left\{ q \right\} \right\rangle = 0 \rightarrow \partial \left[K \right] \left\{ q \right\} + \left[K \right] \left\{ \partial q \right\} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial [K]}{\partial A} \left\{ q \right\} \partial A + [K] \frac{\partial \left\{ q \right\}}{\partial A} \partial A = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial [K]}{\partial A} = - [K] \frac{\partial \{q\}}{\partial A} \left\{q\right\}^{-1} = 0$$

$$G = - \frac{1}{2} \{F\}^T \cdot [K]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial K}{\partial A} \right] \cdot [K]^{-1} \{F\}$$

$$G = \frac{1}{2} \{F\}^T \cdot \frac{\partial q}{\partial A}$$

(2-17)

b) En déplacement imposé:

Par le même raisonnement on obtient :

$$G = - \frac{1}{2} \{q\}^T \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial A} \right\}_q \quad (2-18)$$

Lorsque les 2 cas sont présents :

$$G = \frac{1}{2} \left[\{F\}^T \left\{ \frac{\partial q}{\partial A} \right\}_F - \{q\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial A} \right\}_q \right] \quad (2-19)$$

Où F et q signifient: le champ de force et de déplacement sur tout le domaine, autrement dit ;

$$\{F\}^T \left\{ \frac{\partial q}{\partial A} \right\} = \int_{\Omega_f} \vec{F} \cdot \frac{\vec{\partial U}}{\partial A} d\xi$$

$$\{q\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial A} \right\}_q = \int_{\partial\Omega_q} \begin{matrix} \rightarrow \\ U \end{matrix} \frac{\partial F}{\partial A} dA$$

$$G = \frac{1}{2} \left[\int_{\partial\Omega_f} \begin{matrix} \rightarrow \\ F \end{matrix} \frac{\partial U}{\partial A} dS - \int_{\partial\Omega_u} \begin{matrix} \rightarrow \\ U \end{matrix} \frac{\partial F}{\partial A} dS \right]$$

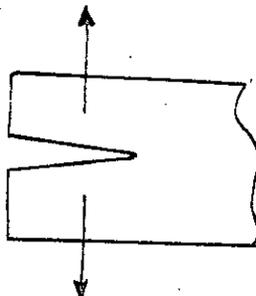
II. 3) - APPROCHE LOCALE:

Comme les principaux modèles décrivant la propagation en fatigue sont formulés à base de la singularité de contrainte l'approche globale ne s'y adapte pas toujours l'approche locale est dominante.

Formulation:

considérons le milieu élastique linéaire, l'analyse des contraintes et de la singularité est formulée de la même façon pour les 3 modes de sollicitation.

a) - Mode I:

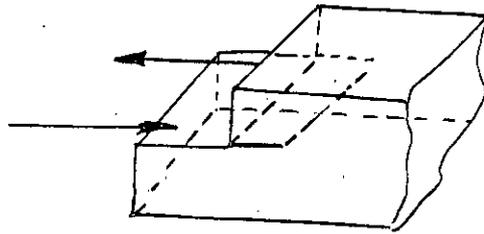


$$[U_1] = 0$$

$$[U_2] \neq 0$$

$$[U_3] = 0$$

b) - Mode II:

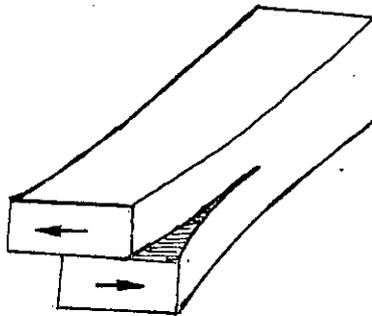


$$[U_1] \neq 0$$

$$[U_2] = 0$$

$$[U_3] = 0$$

c) - Mode III:

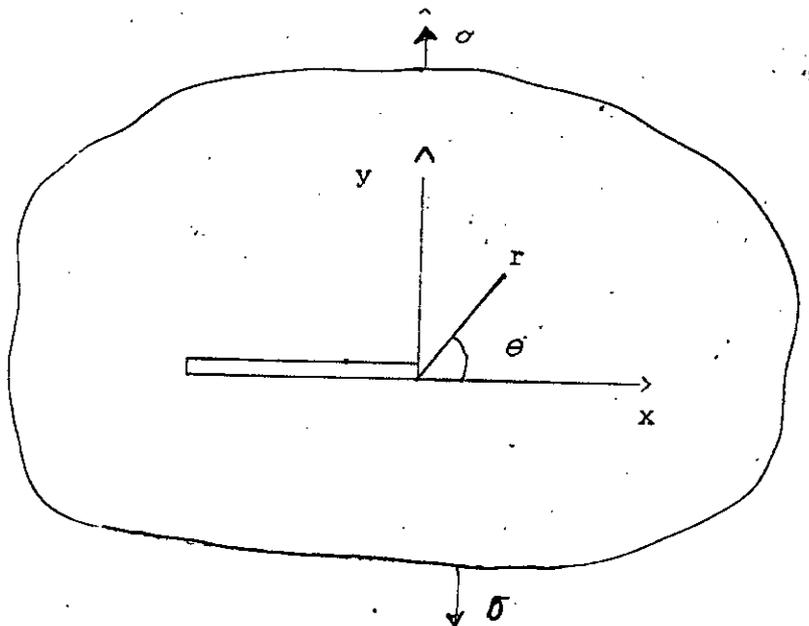


$$[U_1] = 0$$

$$[U_2] = 0$$

$$[U_3] \neq 0$$

Les premiers travaux dans ce domaine ont été élaborés par WESTERGARD en 1939, mais pour certaines conditions aux limites, généralisées par IRWIN en 1956. Il présenta le champ de contrainte au voisinage de la discontinuité sous la forme:



$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \downarrow \sigma \quad (2-20)$$

Les déplacements sous la forme :

$$U_i = K \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i(\theta) \quad (2-21)$$

Où K : facteur mesurant la singularité de contrainte appelé "facteur d'intensité de contrainte".

$f_{ij}(\theta)$: fonction caractéristique du mode de chargement

$g_i(\theta)$: fonction décrivant le déplacement dans le milieu dépendant du mode de déformation (contrainte plane [cp] ou déformation plane [dp]), et du mode de sollicitation en rupture (mode I, mode II ou mode III).

Exemple: en mode I:

$$\text{C.P.: } [\sigma] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) & \text{sym} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

$$U_1 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta \right] \quad (2-23)$$

$$U_2 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta \right] \quad (2-24)$$

D.P:

$$\sigma_{33} \approx 0$$

$$[\sigma] = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left[\begin{array}{l} \text{même} \\ \text{éxpres} \end{array} \right]$$

$$U_1 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(1+\nu)\cos\frac{\theta}{2}(3-4\nu-\cos\theta) \right]$$

$$U_2 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(1+\nu)\sin\frac{\theta}{2}(3-4\nu-\cos\theta) \right]$$

Le déplacement de l'ouverture de la fissure; appelé aussi discontinuité est donné par :

$$\left[D_2 \right] = U_2(r, \pi) - U_2(r, -\pi) \quad (2-25)$$

$$\left[D_1 \right] = U_1(r, \pi) - U_1(r, -\pi) \quad (2-26)$$

$$\left[D_2 \right] = 2 K_I \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{k+1}{g}$$

$$\left[D_a \right] = 2 K_{II} \left(\frac{r}{2 \pi} \right)^{1/2} \frac{k+1}{g}$$

G : Module de cisaillement.

$$k = 3 - 4 \nu \quad \text{C.P}$$

$$= \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{D.P}$$

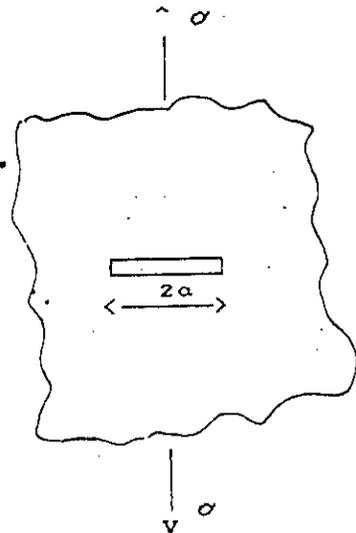
Les formulations ainsi présentées sont d'aspect analytique (difficile à utiliser); à base desquelles et moyennant certains chargements purement spécifiques à des configurations simples on trouve l'expression de K sous la forme.

$$K = \sigma \sqrt{2 \pi a} f(a,b)$$

f(a,b) facteurs géométriques

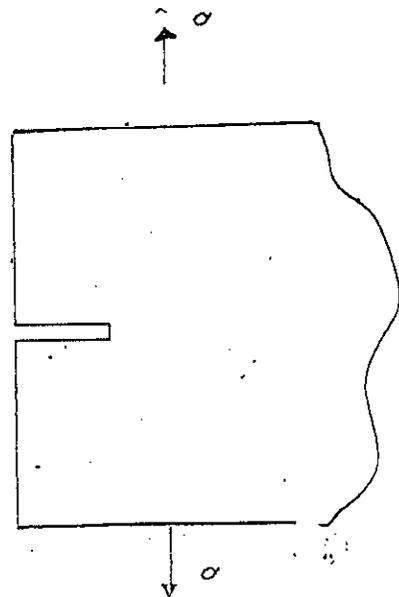
Exemples:

a) Milieu infini :



$$f(a,b) = 1$$

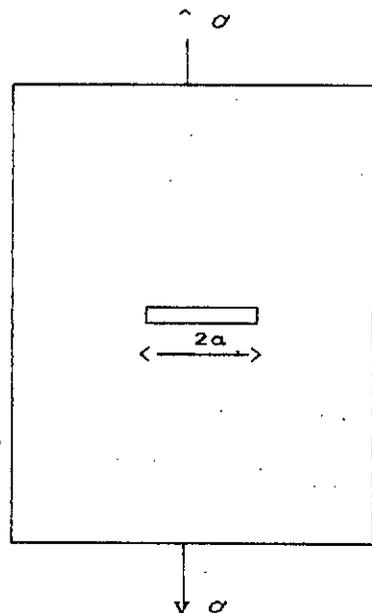
b) Solide semi-infini (fissure latérale) :



$$f(a,b) = 1.12$$

C) Solide fini fissure centrale:

$$f(a,b) = \sec \left[\frac{\pi a}{\omega} \right]^{1/2}$$



2-4)-Relation entre K et G :

D'après la formulation d'IRWINE :

$$G = \frac{1}{E} \left[K_I^2 + K_{II}^2 \right] + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad \text{C.P} \quad (2-27)$$

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} \left[K_I^2 + K_{II}^2 \right] + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad \text{D.P} \quad (2-28)$$

III.10-PRINCIPAUX MODELES DECRIVANT LA PROPAGATION:

Les phénomènes liés à la propagation des fissures par fatigue sont d'une complexité telle qu'il n'est pas possible de formuler des modèles représentatifs de toutes les propriétés essentielles. On se bornera donc à une généralisation de la loi la plus simple et à la description d'un modèle phénoménologique à seuil évolutif.

La principale loi dont la validité expérimentale s'étend pour plusieurs types de matériaux et différents types de sollicitations est la loi de PARIS proposée en 1962.

$$\frac{\partial a}{\partial N} = C \Delta K^\eta \quad (3-1)$$

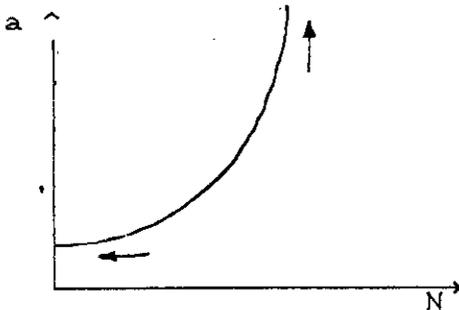
$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$$

a : la taille de la fissure .

N : le nombre de cycles.

$\left\{ \begin{array}{l} c : \\ \eta : \end{array} \right.$ Constantes du matériau.

K : facteur d'intensité de contrainte.



Si on regarde attentivement la courbe $a = f(N)$ par la loi de PARIS on remarque que cette dernière ne rend pas compte de l'existence de deux asymptotes qui définissent la rupture par instabilité et l'existence d'un seuil au dessous duquel la croissance des fissures est quasi-nulle

Pour traduire ces effets, certains modèles ont été proposés, citons le modèle de FORMAN pour la propagation instable

$$\frac{\partial A}{\partial N} = \frac{C \Delta K^\eta}{(1-R)(K_{Ic} - K_M)}$$

R : rapport de chargement $R = \frac{\sigma}{\sigma_{max}}$

K_M : valeur maximale.

Pour le seuil de non fissuration

$$\frac{\partial A}{\partial N} = C \left[\frac{K_M \frac{1-R}{m} - K_{th}}{K_{Ic} - K_M} \right]^{\eta_2}$$

m : coefficient de l'ordre de 0.5.

3-2)-CRITIQUE DES MODELES:

L'ensemble des modèles proposés et pratiquement tous, décrivent la propagation en mode découplé. La plupart des structures travaillent en sollicitation combinée. La prédiction de la fissuration pour ce cas est approchée par la loi de PARIS généralisée et formulée à base du taux de restitution d'énergie par LE MAITRE-CHABOCHE en 1970

CHAPITRE 3

EVOLUTION DE LA FISSURE

EN FATIGUE

"Une fissure instable est
une crique qui craque."

$$\frac{\partial A}{\partial N} = \frac{1}{C} \left[G_M^{*\eta/2} - G_m^{*\eta/2} \right]$$

avec :

$$G_M^* = \left[\sqrt{G_M} - \sqrt{G_s} \right]^2 ; \quad G_m^* = \left[\sqrt{G_m} - \sqrt{G_s} \right]^2$$

G_m : Taux d'énergie restituée minimale.

G_M : Taux d'énergie restituée maximale.

G_s : Seuil de l'énergie restituée.

Le problème de l'assymptote de rupture par instabilité n'est pas pris en considération

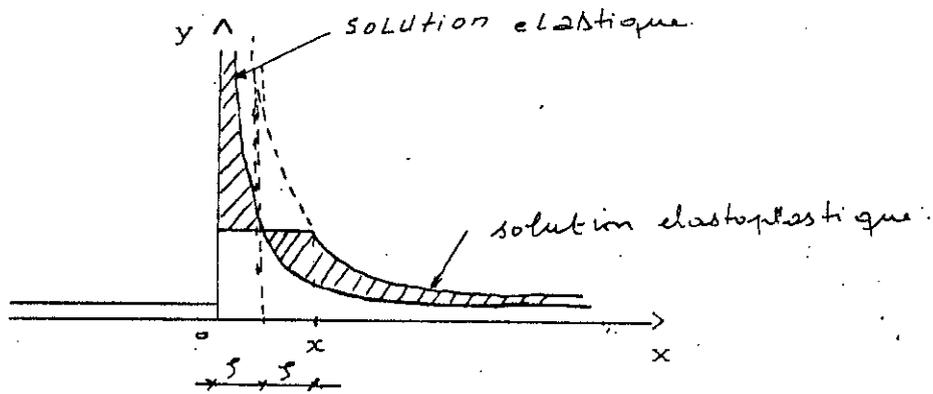
3-3)-INFLUENCE DE LA ZONE PLASTIQUE:

Comme nous l'avons déjà cité l'analyse élastique cerne bien la réalité pour les matériaux fragiles, mais insuffisante pour les matériaux ductiles on procède donc à une estimation de la taille de la zone plastique en forme et en dimension, les principaux modèles proposés à ce sujet sont ceux d'IRWINE et de DUGDALE.

LA TAILLE DE LA ZONE PLASTIQUE:

MODELE D'IRWINE:

Nous rappelons qu'en élasticité linéaire; la contrainte à fond de fissure varie comme $r^{-1/2}$. Cette singularité est limitée par l'existence de la zone plastique qui constitue une zone de relaxation.



$$x/2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{K_I}{\sigma_{yy}} \right]$$

IRWINE a estimé que la taille de la zone plastique est obtenue pour une valeur de contrainte σ_y globale appliquée,

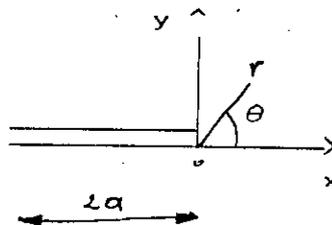
De forme circulaire de rayon $r_y = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{K_I}{\sigma_y} \right]^2$

3-4)-DIRECTION DE PROPAGATION:

Selon les conditions de chargement (direction et intensité) la fissure se propage selon une direction caractéristique d'une sollicitation maximale. La détermination de cette direction est possible à l'aide de deux critères.

CRITERE DE G MAX:

Ce critère consiste à déterminer le taux de restitution d'énergie pour un incrément de fissure dans différentes directions et la valeur maximale ainsi trouvée est la direction de branchement de la fissure.



CRITERE DE CONTRAINTE MAXIMALE:

De même on calcule la contrainte normale maximale au voisinage du front de fissure pour différentes orientations θ et les points où la contrainte est maximale forment la direction de propagation.

Les deux critères présentent une équivalence en terme de sollicitation (le point le plus sollicité sera le départ de fissure).

La différence réside dans la mise en oeuvre, tel que le critère de contrainte maximale s'adapte mieux en éléments finis (de point de vue optimisation)

En équation intégrale le problème ne se pose plus.

CHAPITRE 4

METHODE DES EQUATIONS

INTEGRALES DE FRONTIERES

"Un modèle devient une loi ...

ou , sombre dans l'oubli ! "

4-1)-Introduction:

La résolution des problèmes posés en ingéniering est obtenue par une modélisation mathématique caractérisée par une région Ω et un domaine $\partial\Omega$ définissant le domaine de validité et d'emploi de la solution suggérée, un système d'équations différentielles décrivant la physique du problème et ses conditions aux limites.

La solution analytique du modèle ainsi formé est possible lorsque la géométrie est simple, le système d'équations est linéaire.

En réalité, pour de nombreux cas la solution analytique n'est pas évidente (géométrie complexe, domaine hétérogène, système non linéaire); et parfois même les conditions aux limites sont difficiles à décrire par un modèle mathématique.

pour ce genre de situation on fait appel aux solutions approchées en utilisant des méthodes numériques.

Deux grandes classes caractérisent ces approches:

1^{ère} classe consiste à approcher tout le domaine Ω (méthode des éléments finis, différence finis)

2^{ème} classes : l'approche s'étend uniquement sur le contour $\partial\Omega$ c'est la méthode des équations intégrales.

plusieurs méthodes intégrales ayant le même principe mais chacune traitant un problème particulier. On adopte la méthode de discontinuité de déplacement qui s'adapte mieux aux problèmes de fissuration

4-2)-Methode de discontinuité de déplacement:

Formulée pour approcher les domaines présentant des discontinuités en se basant sur la résolution de l'équation de base de l'élastostatique.

4-2-1) - Equation de l'élastostatique:

Soit un milieu homogène isotrope; la relation contrainte-déformation s'écrit:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4-1)$$

condition d'équilibre

$$\sigma_{ij} = -F_i \quad (4-2)$$

F_i forces appliquées

(4-1) et (4-2) donnent

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} = -F_i$$

or

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji})$$

en terme de déplacement

$$\mu u_{i,ji} + \mu u_{j,ii} + \lambda u_{k,kj} = -F_j \quad (4-3)$$

avec

$$(\lambda + 2\mu)u_{i,ji} - \mu(u_{j,ii} - u_{i,ji}) = -F_j$$

autrement dit

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot } \vec{u} + \vec{F} = \vec{0} \quad (4-4)$$

Equation de NAVIER pour l'élasticité linéaire

4.2.2 Résolution de l'équation de NAVIER:

La résolution de l'équation (4-4) revient à écrire le champs de déplacement sous forme de fonction transformant cette dernière en équation différentielle intégrable sous certaines conditions aux limites.

soit

$$\vec{u} = \text{grad } x + \vec{B} \quad (4-5)$$

en remplace dans (4-4) on obtient

$$(\lambda + \mu) \text{grad div grad } x + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{B} + \mu \text{grad } x + \mu \vec{B} + \vec{F} = 0 \quad (4-6)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta \vec{B} &= 0 \\ \vec{F} &= 0 \end{aligned}$$

après simplification (4-6) devient:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{B} + (\lambda + 2\mu) \text{grad } \Delta x = 0 \quad (4-6)$$

après integration on obtient:

$$\Delta x = \frac{-\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \text{div } \vec{B} \quad (4-6)$$

Or

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{OM} \cdot \vec{B}) &= \Delta(x_1 \cdot B_1 + x_2 \cdot B_2 + x_3 \cdot B_3) \\ &= 2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right) \\ &\quad + (x_1 \cdot \Delta B_1 + x_2 \cdot \Delta B_2 + x_3 \cdot \Delta B_3) \end{aligned} \quad (4-7)$$

$$\text{Ou bien } \Delta(\vec{OM} \cdot \vec{B}) = 2 \text{div } \vec{B} + \vec{OM} \cdot \vec{B} = 2 \text{div } \vec{B} \quad (4-8)$$

L'équation (4-6) s'identifie à:

$$\Delta x = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \Delta(\vec{OM} \cdot \vec{B}) \quad (4-9)$$

résolution de l'équation (4-9) :

Solution homogène: Obtenue pour $\Delta x_0 = 0$

$$x_0 = - \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} B_0 \quad (4-10)$$

Avec $\Delta B_0 = 0$

Solution particulière :

$$x = - \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{B} \quad (4-11)$$

La solution générale:

$$\overrightarrow{U} = B - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad}(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{B} + B_0) \quad (4-12)$$

• Pour un milieu isotrope:

$$\begin{cases} \overrightarrow{U}_x = B_x - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (xB_x + yB_y + B_0) \\ \overrightarrow{U}_y = B_y - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} (xB_x + yB_y + B_0) \end{cases} \quad (4-13)$$

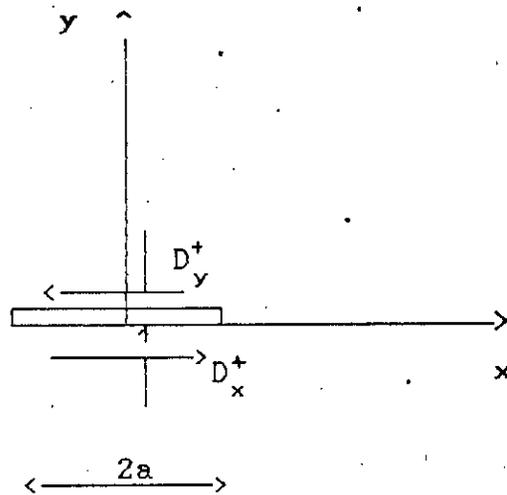
B_x, B_y, B_0 : fonction de PAPKOVICH satisfaisant l'équation de LAPLACE.

$$\Delta B_x = 0, \Delta B_y = 0, \Delta B_0 = 0$$

Principe de la méthode :

La solution singulière de l'équation de l'élasticité due à une discontinuité de déplacement constante dans un milieu infini est:

Deplacement:



De même le champ de déplacement à la même forme avec B satisfait les conditions aux limites caractéristiques des modes de fissuration.

Les conditions aux limites:

$$\text{Mode I: } \begin{cases} \sigma_{xy}(x, 0) = 0 & -\infty < x < +\infty \\ U_y(x, 0) = 0 & |x| > \alpha \quad (4-14) \\ D_y = U_y(x, 0_-) - U_y(x, 0_+) & |x| \geq \alpha \end{cases}$$

Condition sur B:

$$B_x = 0$$

$$B_y = 4(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$B_o = 4(1-\nu)(1-2\nu)\phi$$

Avec $\Delta \phi = 0$

$$\text{Mode II C.L: } \begin{cases} \sigma_{yy}(x, 0) = 0 & -\infty < x < +\infty \\ U_x(x, 0) = 0 & |x| > \alpha \quad (4-15) \\ D_x = U_x(x, 0_-) - U_x(x, 0_+) & |x| \geq \alpha \end{cases}$$

Conditions sur B:

$$B_x = 0$$

$$B_y = 4(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

$$B_o = 8(1-\nu)^2 \int \frac{\partial \chi}{\partial x} dy \quad \Delta x = 0$$

Champ de déplacement:

$$U_x = (1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + 2(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$$

(4-16)

$$U_y = 2(1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + (1-2\nu) \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

Champ de contrainte:

$$\sigma_{xx} = 2G \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) + 2G \left(2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$\sigma_{yy} = 2G \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) + 2G y \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \quad (4-17)$$

$$\sigma_{xy} = -2G y \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + 2G \left(2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^3 \chi}{\partial y^3} \right)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Avec $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^3}$ soient finis pour que

$$\sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

ϕ et χ pour satisfaire les conditions aux limites la fonction $\text{arctg} \frac{y}{x}$ présente les propriétés suivantes.

$$\lim_{y \rightarrow 0_+} \text{Arctg} \frac{y}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0_-} \text{Arctg} \frac{y}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -\pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cherchons les relations de ϕ et χ en fonction des discontinuités:

$$D_x = 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} (\chi(x, 0_-) + \chi(x, 0_+)) \quad |x| < a \quad (4-18)$$

$$D_y = 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} (\phi(x, 0_-) + \phi(x, 0_+)) \quad |x| < a$$

Ou bien:

$$\frac{\partial \chi}{\partial y}(x, 0_-) - \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, 0_+) = \frac{D_x}{2(1-\nu)} \quad |x| < a$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_-) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_+) = \frac{D_y}{2(1-\nu)} \quad |x| < a$$

d'autre part soit :

$$h(x, y) = \text{Arctg} \left[\frac{y}{x+a} \right] - \text{Arctg} \left[\frac{y}{x-a} \right] \quad (4-19)$$

En passant à la limite

$$h(x, 0_-) - h(x, 0_+) = -2\pi \quad x < a$$

par combinaison

$$\frac{-1}{2\pi} \left[h(x, 0_-) - h(x, 0_+) \right] = \frac{2(1-\nu)}{\partial y} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_-) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_+) \right] \quad (4-20)$$

on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{Dy}{(1-\nu)} h(x, y) \quad (4-22)$$

Après intégration :

$$\phi(x, y) = \frac{-Dy}{4\pi(1-\nu)} \left[y \operatorname{Arctg} \left[\frac{y}{x-a} \right] - y \operatorname{Arctg} \left[\frac{y}{x+a} \right] \right. \quad (4-23)$$

$$\left. - (x-a) \operatorname{Ln} \left[\left[(x-a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right] + (x+a) \operatorname{Ln} \left[\left[(x+a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right] \right]$$

De la même manière :

$$\chi(x, y) = \frac{-Dy}{4\pi(1-\nu)} \left[y \operatorname{Arctg} \left[\frac{y}{x-a} \right] - y \operatorname{Arctg} \left[\frac{y}{x+a} \right] \right. \quad (4-24)$$

$$\left. - (x-a) \operatorname{Ln} \left[\left[(x-a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right] + (x+a) \operatorname{Ln} \left[\left[(x+a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right] \right]$$

Les fonctions harmoniques ϕ et χ traduisent les contraintes et les déplacements nulles à l'infini et vérifient les conditions (4-14) et (4-15)

On pose :

$$\phi(x, y) = \frac{D_y F(x, y)}{4\pi(1-\nu)}$$

Et

$$\chi(x, y) = \frac{D_x F(x, y)}{4\pi(1-\nu)}$$

(4-25)

Les déplacements :

$$\begin{cases} U_x = D_x \left[2(1-\nu)F_3 - yF_5 \right] + D_y \left[-(1-2\nu)F_2 - yF_7 \right] \\ U_y = D_y \left[2(1-\nu)F_2 - yF_4 \right] + D_x \left[2(1-\nu)F_3 - yF_5 \right] \end{cases}$$

(4-26)

Les contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G D_x \left[2 F_4 + yF_6 \right] + 2G D_y \left[-F_5 + yF_7 \right] \\ \sigma_{yy} = 2G D_x \left[-yF_6 \right] + 2G D_y \left[-F_5 - yF_7 \right] \\ \sigma_{xy} = 2G D_x \left[-F_5 + yF_7 \right] + 2G D_y \left[-y F_7 \right] \end{cases}$$

(4-27)

Avec

$$F_2 = F \cdot x = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\text{Ln} \left[(x-a)^2 + y^2 \right]^{1/2} + \text{Ln} \left[(x+a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right]$$

$$F_3 = F.y = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\text{Arctg} \left[\frac{y}{x-a} \right] - \text{Arctg} \left[\frac{y}{x+a} \right] \right]$$

$$F_4 = F.xy = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} \right]$$

$$F_5 = F.yy = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} \right]$$

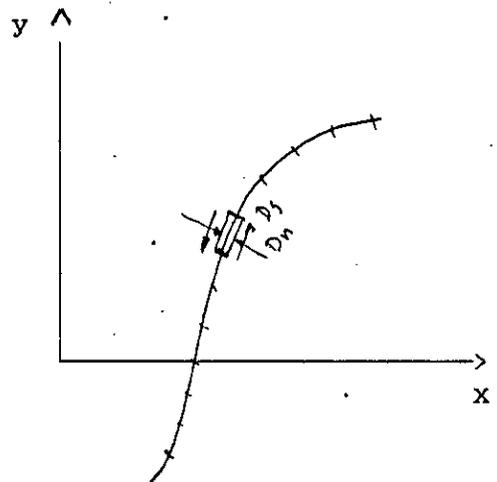
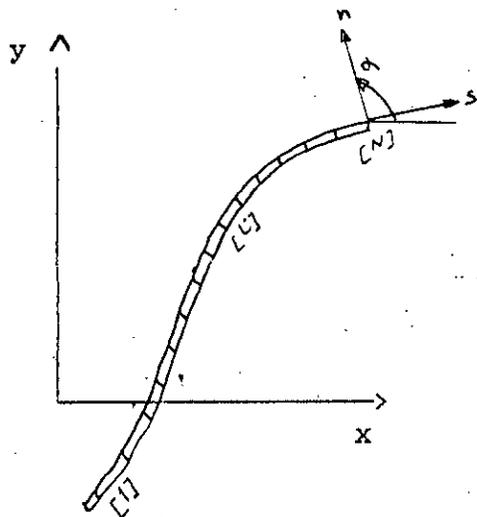
$$F_6 = F.xyy = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)^2-y^2}{(x-a)^2+y^2} - \frac{(x+a)^2-y^2}{(x+a)^2+y^2} \right]$$

$$F_7 = \dot{F}.yyy = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{((x-a)^2+y^2)^2} - \frac{x+a}{((x+a)^2+y^2)^2} \right]$$

IV-3) -PROCEDURE NUMERIQUE :

La solution singulière trouvée est relative à une discontinuité de déplacement constante sur un segment fini dans un milieu infini. Elle est généralisée par une procédure numérique pour construire une méthode des éléments de frontières et résoudre des problèmes complexes.

L'idée est de descriptiser une discontinuité de courbure quelconque en N éléments aussi petit que l'on veut (courbure négligeable) et analyser un élément j dans un repère locale. l'effet d'une discontinuité de déplacement d'un point quelconque de la frontière du domaine peut être écrit d'après l'équation



$$\left[\begin{array}{l} \sigma_s^i = A_{ss}^{ij} D_s^i + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i = A_{ns}^{ij} D_s^i + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{array} \right. \quad i=1, n \quad (4-28)$$

Les A_{ss}^{ij} ; A_{sn}^{ij} ; A_{ns}^{ij} ; A_{nn}^{ij} Coefficients d'influences.

L'influence des N éléments sur le $i^{\text{ème}}$ élément et obtenue par superposition :

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{array} \right. \quad (4-29)$$

Quand aux déplacements :

$$\left[\begin{array}{l}
 U_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\
 U_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j
 \end{array} \right. \quad (4-30)$$

Avec B_{ss}^{ij} B_{sn}^{ij} B_{ns}^{ij} B_{nn}^{ij} sont les coefficients d'influence des déplacements.

Resolution:

Une fois les systèmes (4.29) et (4.30) formulés on calcule:

Les discontinuités selon les conditions aux limites sur les déplacements et les contraintes on résoud le système :

$$\left[\sigma \right] = \left[A \right] \left\{ D \right\}$$

Ou.:

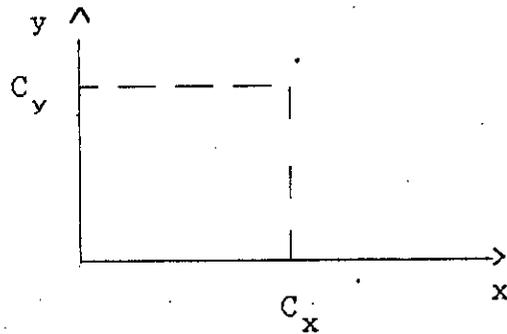
$$\left[U \right] = \left[B \right] \left\{ D \right\}$$

Puis on calcule par le même système le champ de contrainte et de déplacement en importe quel point en reformulant les matrices [A] et [B].

Transformation en coordonnées :

Nous rappelons que les systèmes formulés sont écrits en coordonnées locales pour des raisons programmation on procède à une

transformation des coordonnées dans le repère globale.



Coordonnées :

$$\begin{cases} \bar{X} = (x - C_x) \cos\beta + (y - C_y) \sin\beta \\ \bar{Y} = -(x - C_x) \sin\beta + (y - C_y) \cos\beta \end{cases}$$

Déplacements :

$$\begin{cases} U_x = U \frac{\partial}{\partial x} \cos\beta - U \frac{\partial}{\partial y} \sin\beta \\ U_y = U \frac{\partial}{\partial x} \sin\beta + U \frac{\partial}{\partial y} \cos\beta \end{cases}$$

Contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}} \cos^2 \beta - 2\sigma_{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}} \sin\beta \cos\beta + \sigma_{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}} \sin^2 \beta \\ \sigma_{yy} = \sigma_{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}} \sin^2 \beta + 2\sigma_{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}} \sin\beta \cos\beta + \sigma_{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}} \cos^2 \beta \\ \sigma_{xy} = (\sigma_{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}} - \sigma_{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}}) \cos\beta \sin\beta + \sigma_{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \end{cases}$$

CHAPITRE 5

SIMULATION NUMERIQUE

"Petit à petit, l'oiseau construira son nid."

"Necessite fait loi."

V.1) -INTRODUCTION:

La fatigue des structures est un problème sérieux revêlent d'un grand intérêt des chercheurs dans le domaine de la mécanique des solides, vue les catastrophes que peut causer une rupture surtout en Aérauotique et l'industrie nucléaire. Cependant pour assurer la fiabilité, il faut prédire la durée de vie de la structure. En réalité, ces dernières sont soumises à des chargements complexes à amplitudes variables; des expériences réalisées sur des éprouvettes et simulant les conditions en service sont relativement longues, coûteuses, complexes à réaliser et nécessitent des équipements sophistiqués ce qui n'est pas toujours possible .

Une autre technique d'approche de ce problème plus économique, facile à mettre en oeuvre, simulant correctement l'état de chargement, est la simulation numérique de la propagation. La simulation est possible soit par la méthode des éléments finis soit par celle des équations intégrales de frontière.

Des travaux de simulation en éléments finis ont été élaborés mais présentant des difficultés de maillage (à chaque incrément de propagation de l'éprouvette est remaillée), ce qui nécessite un temps d'exécution énorme, surtout pour des géométries complexes.

Dans le but d'une meilleure optimisation, nous avons essayer d'apporter un élément de solution, simulant le phénomène en utilisant la méthode des équations intégrales (méthode de discontinuité de déplacement).

Ci-après vous trouvez une description sommaire des principales démarches suivies pour élaborer ce travail.

V.2) - DOMAINE DE VALIDITE ET D'EMPLOI:

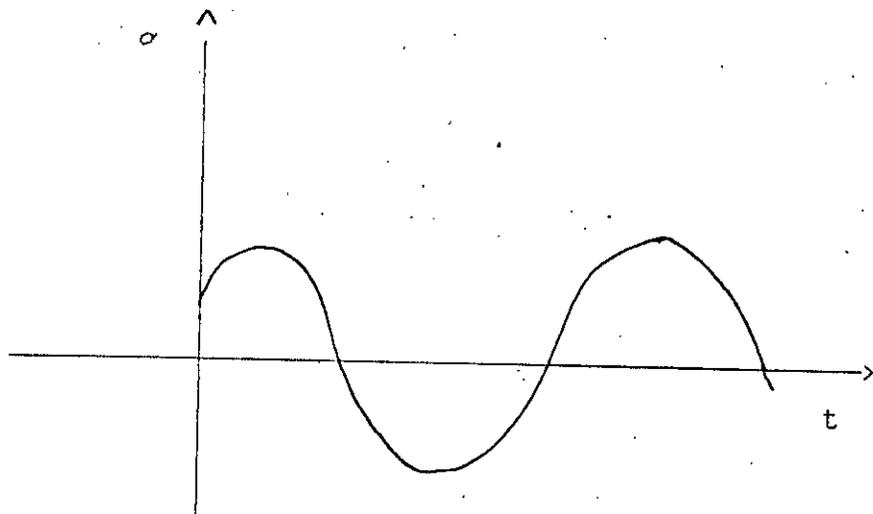
-En pratique toutes les structures fonctionnent dans le domaine d'endurance limitée.

-La fatigue oligocyclique est évitée par un dimensionnement explicite.

$$\sigma < R_e$$

-La fatigue d'endurance illimitée, également pour des raisons d'optimisation (éviter les surdimensionnements), ce pourquoi notre étude est limitée au domaine d'endurance limitée.

-Le chargement considéré est périodique d'amplitude constante.



-structure de dimension infinie et finie en déformation plane.

-Loi de comportement:

On considère un comportement élastique linéaire pour l'analyse des contraintes. Un comportement élastoplastique pour l'évolution de la fissure ramené par des corrections approchées à un domaine élastique linéaire.

V. 3) -PROCEDURE :

D'après les formules (2-22) et (2-29), le calcul de K et G nécessite l'analyse du champs de contraintes, déplacements et discontinuités. Pour cela on utilise la méthode des discontinuités des déplacements (Chap V).

V. 3.1) -CALCUL DE L'ETAT DE CONTRAINTE:

Pour différents modes de sollicitation et différentes géométries présentant des discontinuités (Fissures) on calcule les contraintes et les déplacements à l'intérieur du domaine pour chaque incrément de fissure (propagation par la méthode de discontinuité de déplacement).

V. 3.2) -CALCUL DES VARIABLES DE FISSURATION:

a) -CALCUL DE G:

D'après l'équation (2-9) on a en contrainte imposée:

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} T_i \frac{dU_i}{dl} d\Gamma$$

$$dU_i = U_i^{(2)} - U_i^{(1)}$$

$$G dl = \int_{\partial\Omega} T_i (U_i^{(2)} - U_i^{(1)}) d\Gamma + \int_{\Gamma^- \cup \Gamma^+} T_i (U_i^{(2)} - U_i^{(1)}) d\Gamma$$

Depuis on calcule G .

b) - CALCUL DE K:

De la même manière d'après (2-22) on calcule K pour un état de contrainte en un point (r, θ) près du front de fissure .

Ou d'après (2-27) (2-28) une fois G est calculé.

V. 3. 3) - ESTIMATION DE LA ZONE PLASTIQUE:

Sachant que la zone plastique selon sa taille perturbe le champ de contrainte élastique, pour cela on procède soit par une analyse élasto-plastique du domaine près de la fissure, soit par une correction de la zone plastique pour que l'hypothèse d'élasticité demeure valable .

Les deux procédures sont parfaitement équivalentes .

Selon le modèle d'IRWINE l'équation (3-5) on estime le rayon de la zone plastique.

-Si $r/a > 0.2$ on néglige l'influence de la zone plastique.

-Sinon correction:

On suppose comme si on a :

$$a = a_0 + r$$

Et on refait le calcul de:

-l'état de contrainte .

-calcul de K et G.

V.3.4) - CRITERE DE CHOIX DES MODELES DE PROPAGATION.

1) Detection du mode de déformation :

Une première étape de passage pour choisir le modèle de propagation est l'identification du mode de déformation, mode découplé (I ou II) ou mode couplé.

La détection est effectuée par des tests sur la discontinuité normale et tangentielle de l'élément d'incrément

$$\left\{ \begin{array}{l} D_s = 0 \longrightarrow \text{Pas de cisaillement} \\ D_n < 0 \longrightarrow \text{Ouverture des 2 lèvres} \end{array} \right. \quad \text{Mode I}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_s \neq 0 \longrightarrow \text{cisaillement} \\ D_n = 0 \longrightarrow \text{Pas d'ouverture des 2 lèvres} \end{array} \right. \quad \text{Mode II}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_s \neq 0 \longrightarrow \text{cisaillement et} \\ D_n < 0 \longrightarrow \text{Ouverture des 2 lèvres} \end{array} \right. \quad \text{Mode III}$$

2) Choix des modèles de propagation:

a) Mode découplé I ou II

Si $K < K_{th}$ Propagation lente (Loi de FORMAN).

Si $K_{th} < K < 0.7 K_c$ Propagation stable (Loi de PARIS).

Si $K_c < K < K_c$ Propagation instable (Rupture brutale).

b) Mode couplé:

Là; peu de modèle décrivent la propagation, le seul est celui de la loi de PARIS généralisée par LE MAITRE-CHABOCHE équation (3-4)

L'inconvénient de ce modèle est qu'il ne tient pas compte des deux asymptotes.

-Seuil de fissuration .

-Rupture par instabilité.

3) Intégration:

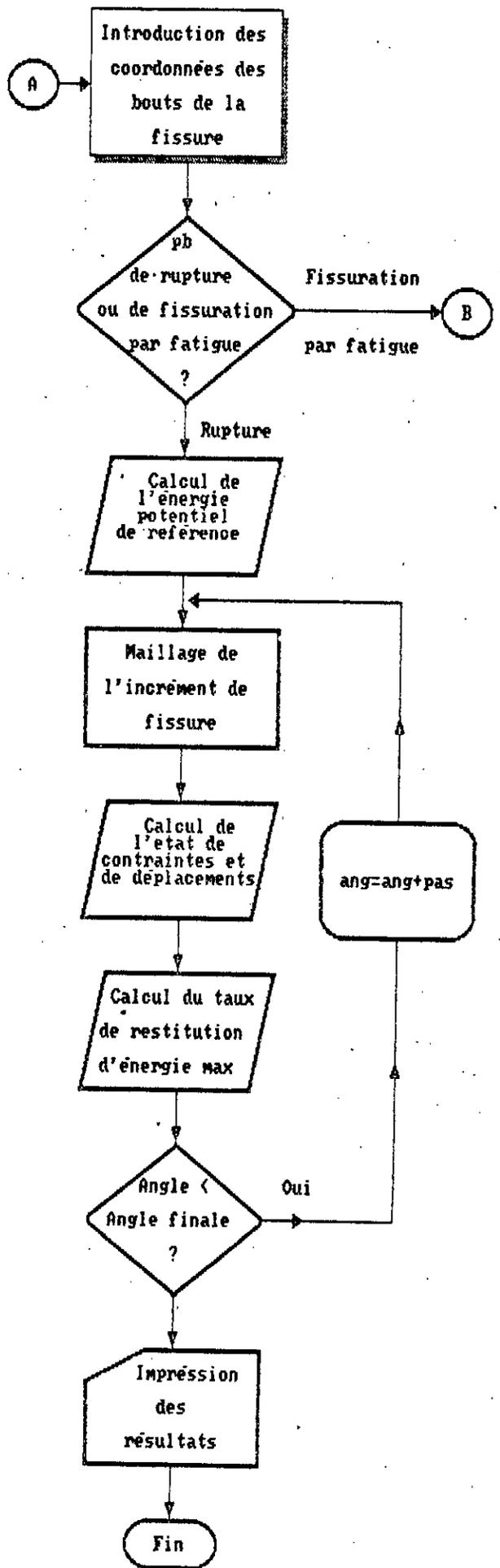
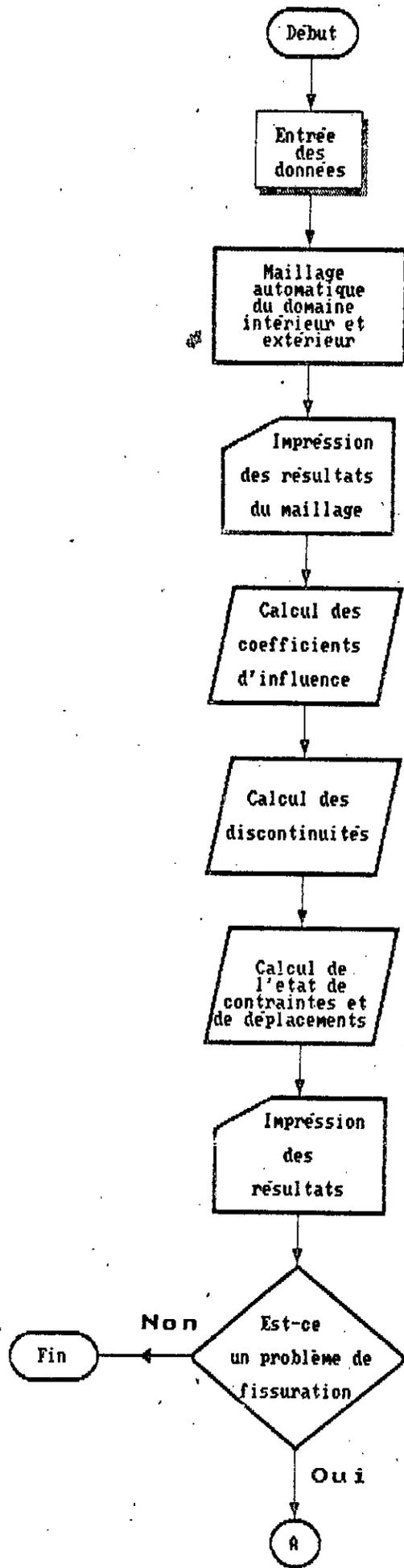
Une fois le modèle de propagation choisis on procède à une intégration numérique de la forme

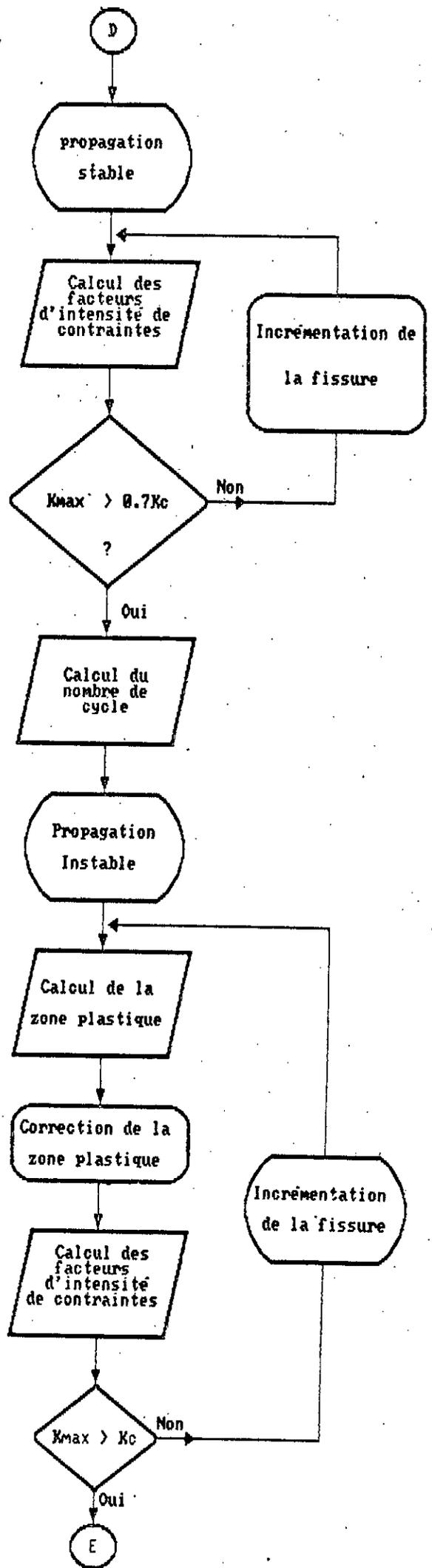
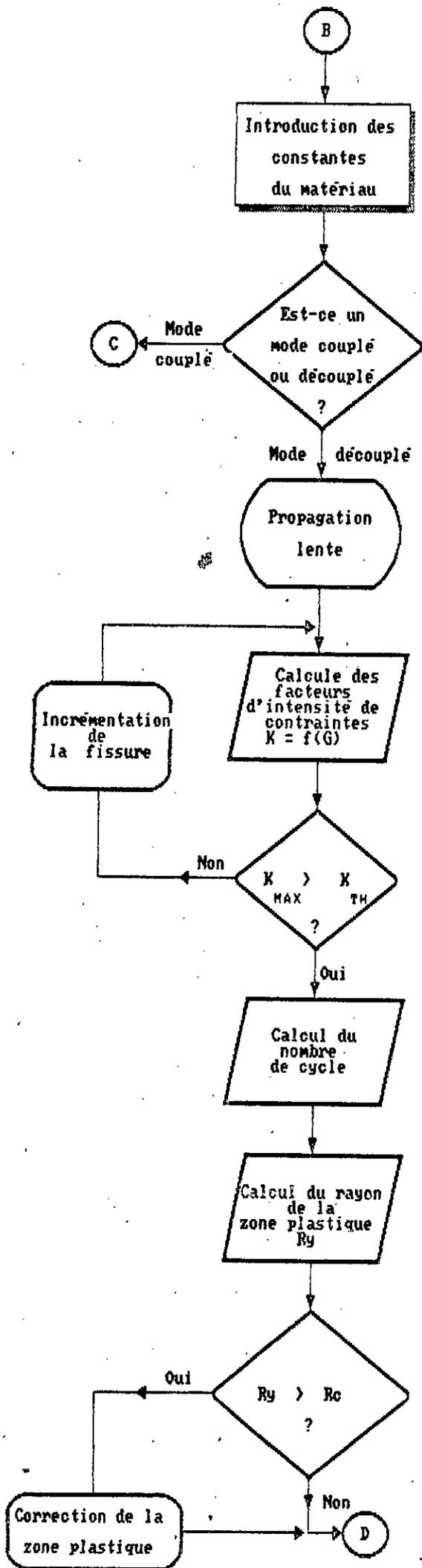
$$N = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{f(K,G)}$$

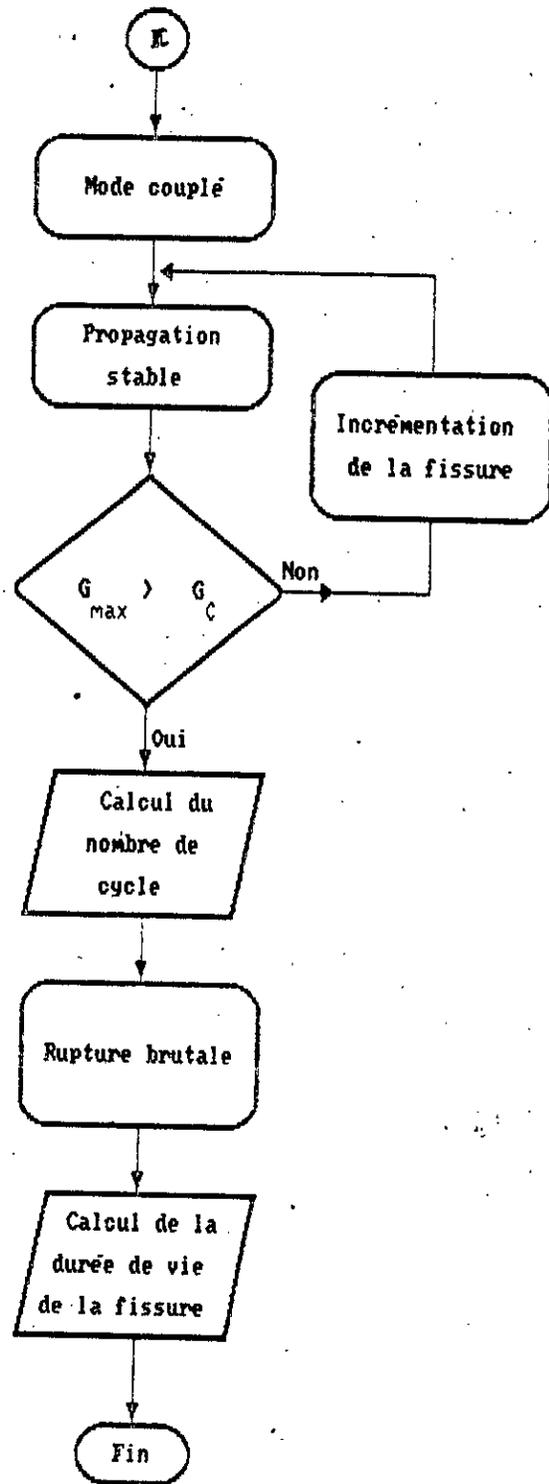
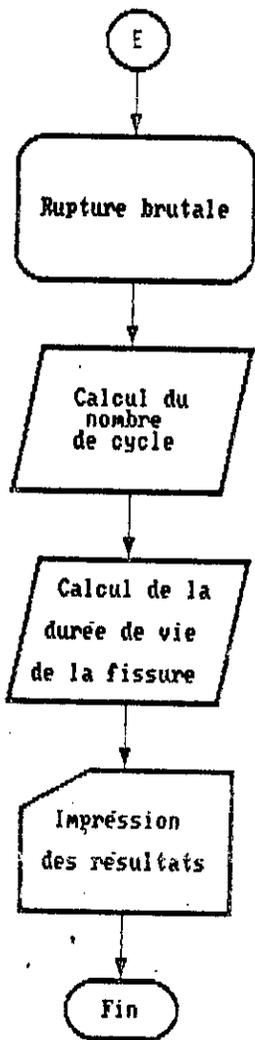
a_0 : taille initiale

a_c : taille finale conditionnée par K_c ou G_c

ORGANIGRAMME







INTERPRETATION DES RESULTATS:

Dans cette partie une série de tests est appliquée pour des cas de sollicitation ayant des solutions analytiques afin de tester la fiabilité du programme.

Pour avoir une bonne convergence, on doit augmenter le nombre d'élément de discrétisation, mais l'obstacle est que le système à résoudre pour un grand nombre d'élément qui augmente au cours de la propagation- dépasse la capacité du P.C utilisé.

Donc on a procédé à une validation point par point c'est à dire:

On augmente le nombre d'élément et on calcule les variables de fissuration pour des tailles de fissure sans propagation.

Les résultats sont très satisfaisant, ce qui a permis de valider la partie du programme calculant les variables de fissuration au cours de la propagation de la fissure.

Quand au calcul du nombre de cycle; l'intégration numérique et les modèles utilisés sont validés pour un cas simple (plaque infinie avec fissure centrale). On obtient un nombre de cycles proche de la valeur analytique ce qui permet de confirmer la validité des modèles de propagation et la méthode d'intégration numérique utilisée.

Après les tests de validité on a traité des cas n'admettant pas de solution analytique. La confirmation est l'ordre expérimentale, pour témoigner définitivement la fiabilité du programme et les procédures de simulation utilisées.

Pour la direction de propagation de la fissure la validation est purement expérimentale.

On considère un milieu infini présentant une fissure orientée d'un angle de 45° -problème rencontré dans les structures réelles ou la fissure peut être arbitrairement orientée.

-Les caractéristiques du matériaux sont présentées sur un fichier de données.

-L'élément de propagation est choisie de taille = 0.05 [inch]

Comme nous l'avons déjà cité ;la validation est par point, a donné les résultats suivants:

a[inch]	G _{num} [10 ⁻⁴]	G _{anal} [10 ⁻⁴]	N [10 ⁴]	%
0.1	.630	.625	0.00	.8
0.2	.940	.925	3.75	1.6
0.3	2.030	1.990	7.39	1.9

$$G_{anal} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2)$$

$$K_I = \sigma (\pi a)^{1/2} \sin \beta$$

$$K_{II} = \sigma (\pi a)^{1/2} \sin \beta \cos \beta$$

Le nombre de cycle n'admet pas de valeur analytique

La structure est sollicitée en mode mixte.

Le nombre de cycles est intégré avec un pourcentage d'erreur de 2% (intégration numérique par la méthode de sympson).

Pour la trajectoire de la fissure :

Au début; la propagation fait un angle α par rapport à la normale de chargement ce qui correspond à l'effet du cisaillement qui s'attenué en s'éloignant de la fissure initiale.

```

FICHER DE DONNEES : NSEG , NARC , NPDOM , KSYM   domaine exterieur
0 , 0 , 0 , 1
NU(REAL) , E , XSYM , YSYM
.3 , 2.E05 , 0. , 0.
CHARGEMENT MAX ET MIN
30. , 0. , 0.
0. , 0. , 0.
NUM , XBEG , YBEG XEND , YEND , KODE , BVS , BVN
NSEG , NARC (DE LA FISSURE)
1,0
NUM , XBEG , YBEG XEND , YEND , KODE , BVS , BVN
6 , -.035      -.035      .035      .035      1
0.  0.  0.  0.
L'ENDROIT OU SE PROPAGE LA FISSURE
-.035      0.
.035      0.
ORIENTATION DE L'ELEMENT PROPAGEANT (ANGB ANGE PAS)
0.          0.          20.
LES CONSTS DU MATERIAUX(M(REAL),C1,KIC(REAL),KTH(REAL),ETA,Ac,RE,Gs,Gc)
.4,1.5E-10,20.,14.,3.,.3,300.,2.3E-05,2.03E-03

```

Nseg : nombre de segments.

Narc : nombre d'arcs.

Npdom: nombre de points dans le domaine.

Ksym = [1,2,3,4] code de symétrie.

Nu = module de young.

E = module d'élasticité.

Bvs,Bvn : conditions aux limites imposées

Angb,Ange: angle début de balayage, fin de balayage

Pas : le pas de balayage

M

C1 : constantes caractéristiques du matériau

Eta

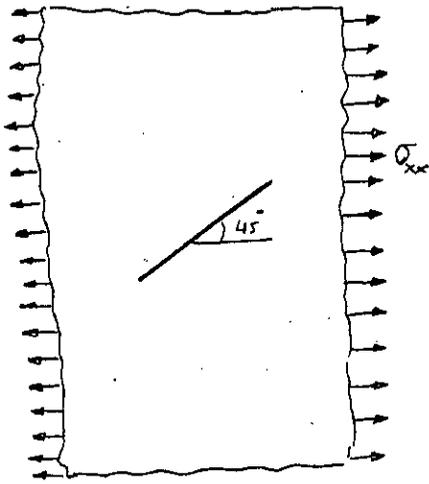
KIc,Kth : facteur d'intensité de contrainte critique et théorique

Ac : taille critique de la fissure

Re : limite d'élasticité

Gc, Gs : taux de restitution d'énergie critique et de seuil

σ_{xx} : chargement periodique
d'amplitude constante



$\sigma_{xx} =$

Fig: 5.a.1

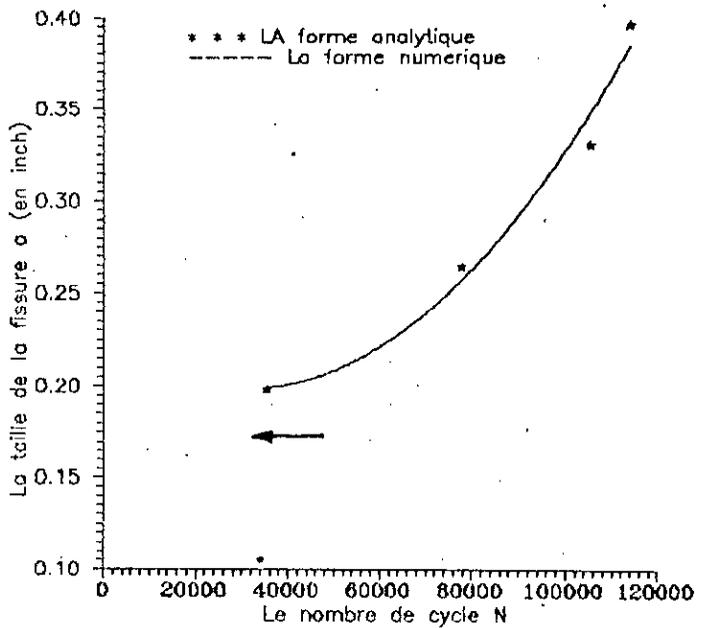


Fig.5.b.1 La taille de la fissure en fonction du nombre de cycle

Constants du materiau

$G_c = 5,5 \cdot 10^{-3}$

$K_{IC} = 20 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{inch}}$

$a_0 = 0,1 \text{ inch}$

$R_c = 250 \text{ MPa}$

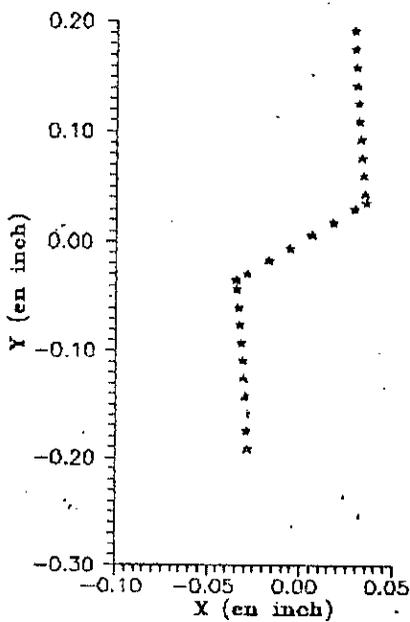


Fig. C.1 La direction de propagation

Chargement selon Y:

Même structure mais sollicitée par σ_{yy} , cet exemple est illustré pour montrer que la direction de propagation dépend essentiellement de la direction du chargement.

$\sigma_{yy} = 30 \text{ Ksi}$

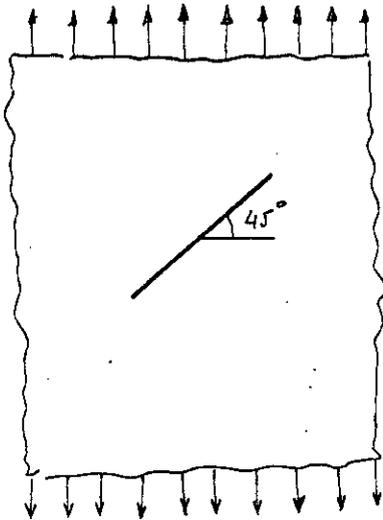


fig. 5.a.2

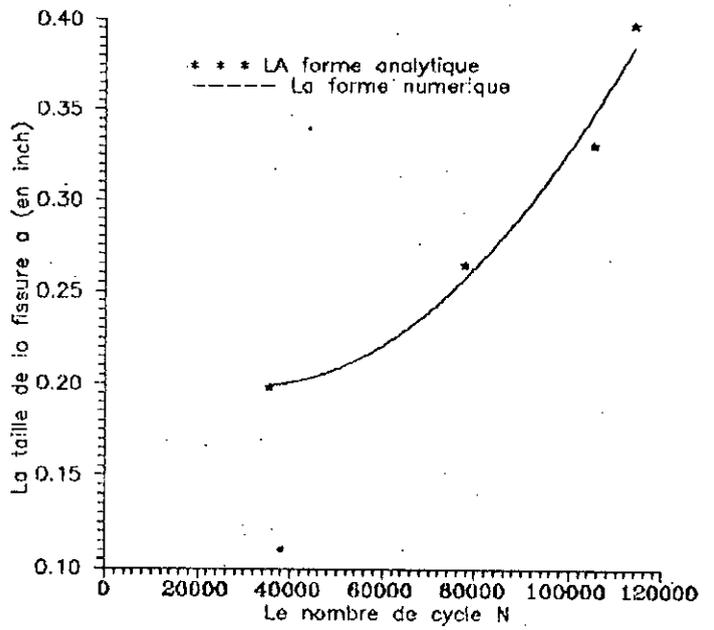


Fig.5.b.2 La taille de la fissure en fonction du nombre de cycle

constants du matériau

même matériau
du 5.1

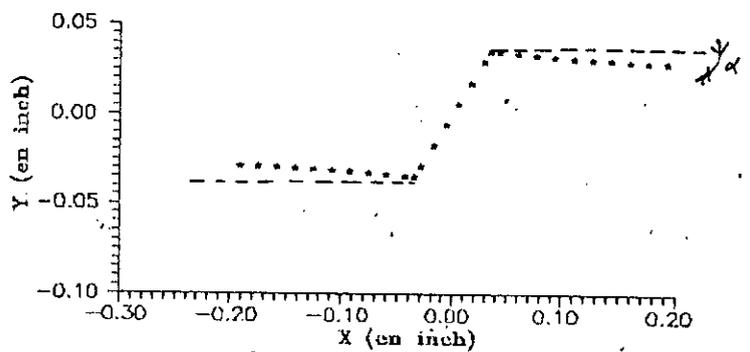


Fig.5.c.2. La direction de propagation

Cette fois ci la sollicitation est combinée (traction cisaillement). fig. 5.a.3

Pour les même valeurs critiques on voit que la rupture surgit rapidement.

Faible durée de vie, sous cet état de chargement (assymptote verticale).

-Il faut changer les caractéristiques du matériaux-.

Pas de valeur analytique gouvernant cet état de chargement, on se contentera par les valeurs numériques.

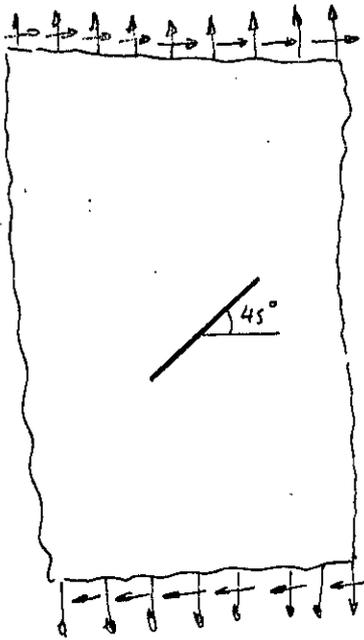
Trajectoire de propagation:

On voit que la fissuration s'enfonce à l'intérieur de la fissure c'est l'effet de cisaillement qui est à l'origine de cet effet.

Pour le cas de $\alpha_{xy} = 0$ la direction de propagation tend vers $\alpha = 0$.

$$\sigma_{yy} = 30 \text{ Ksci}_{\text{max}}$$

$$\sigma_{yx} = 1 \text{ Ksci}_{\text{max}}$$



5.a.3

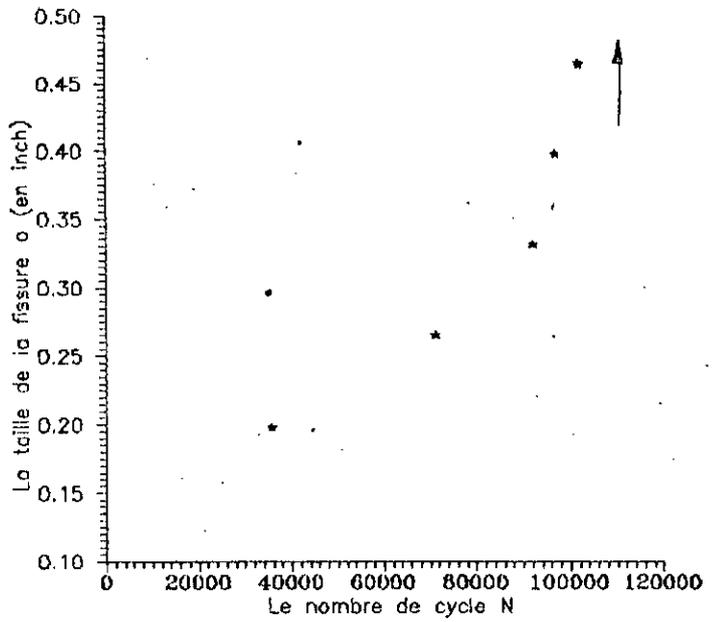


Fig.5.b.3 La taille de la fissure en fonction du nombre de cycle

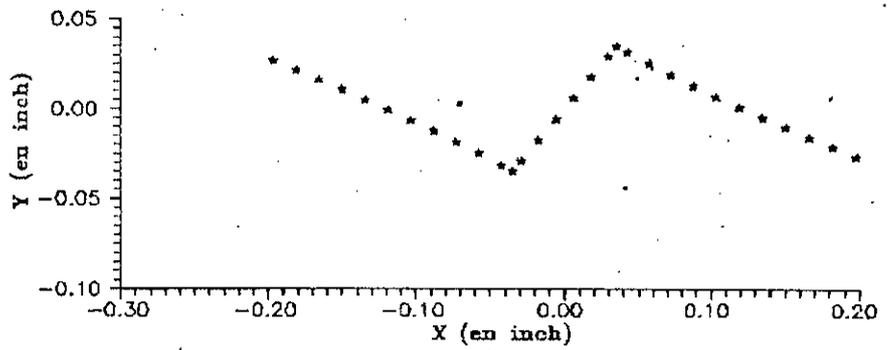


Fig.5.c.3 La direction de propagation

fig. 5.a.4

Dans ce cas on a sollicité la structure uniquement en traction selon x et y (σ_{xx} , σ_{yy}), même intensité de chargement.

La fissure est en équilibre, elle se propage selon sa propre direction. Ce qui a confirmé, les résultats obtenues pour les cas qui n'admettent pas de valeurs analytique.

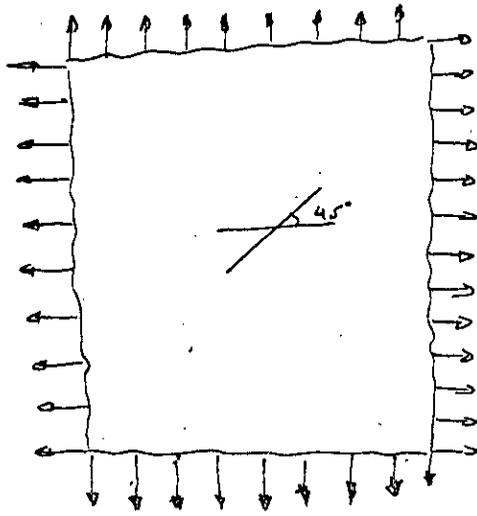
les caractéristiques du matériaux sont les même

La rupture surgit rapidement, c.a.d. que la propagation est instable (assymptote verticale).

Ceci est due à la faible capacité de résistance du matériau devant un tel état de chargement.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 30 \text{ ksi}$$

max max



5.2.4

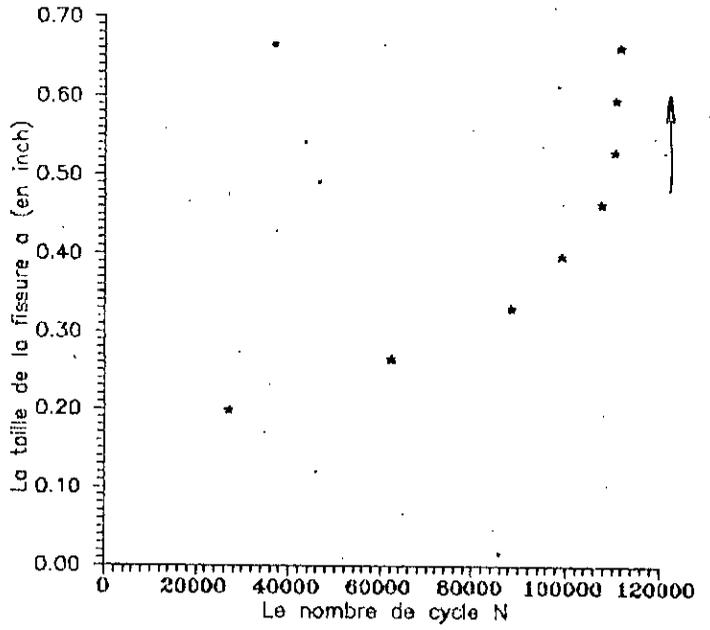


Fig. 5.6.4 La taille de la fissure en fonction du nombre de cycle

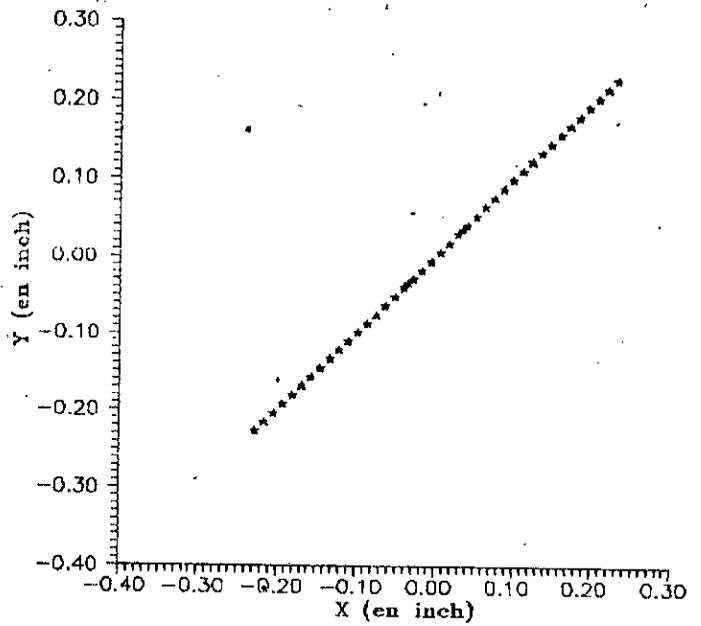


Fig. 5.6.4 La direction de propagation

Un autre test , une plaque finie avec fissure centrale horizontale. On a testé le programme pour un milieu fini, la plaque est maillée en 54 éléments (44 éléments pour le domaine extérieur et 10 éléments pour la fissure).

La direction de propagation continue dans sa direction initiale .

Le nombre de cycles est validé par le calcul analytique.

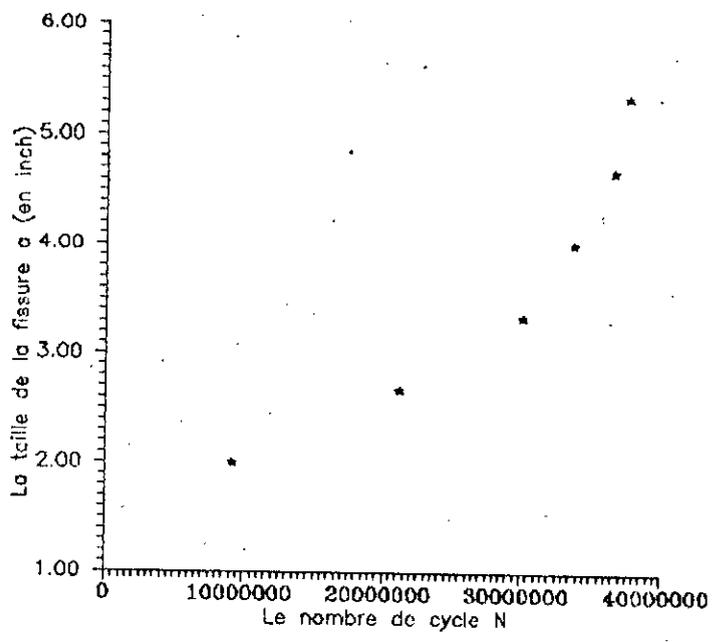
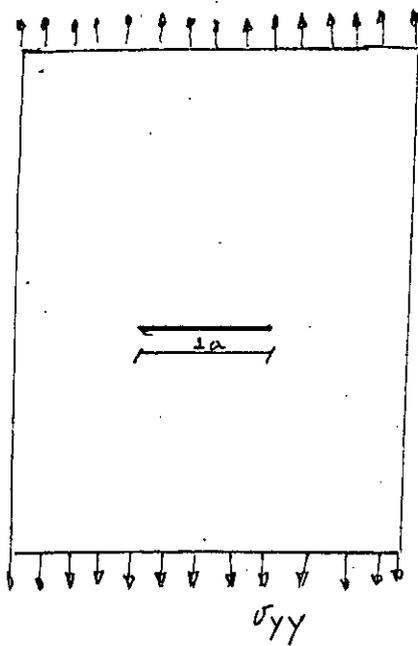


Fig. La taille de la fissure en fonction du nombre de cycle

Cas d'une plaque infinie avec une fissure centrale avec chargement uniaxial $\sigma_{yy} = 30 \text{ ksi}$

Données

La taille de fissure initiale : $2a = .200 \text{ [inch]}$

La plaque est décrite en 6 éléments

Le module d'élasticité : $E = 2E+05$

Le module de young : $\nu = .3$

le facteur d'intensité de contrainte théorique : $K_{th} = 15 \text{ ksi}(\text{inch})^{1/2}$

Le // // // critique : $K_c = 25 \text{ ksi}(\text{inch})^{1/2}$

Remarque : Dans cet exemple on ne tient compte que de la propagation stable.

a) Calcul analytique du nombre de cycles.

$$\text{Lois de PARIS: } \frac{\partial a}{\partial N} = C_1 (\Delta K)^\eta \quad (a)$$

Condition initial $a = a_0 \longrightarrow N = 0$

$$\partial a = \partial N C_1 (\Delta K)^\eta \longrightarrow \partial N = \frac{\partial a}{C_1 (\Delta K)^\eta} \quad (b)$$

or $\Delta K = K_r(a) \Delta \lambda \longrightarrow \Delta K = K_{\max}(a) - K_{\min}(a)$

$$b) \longrightarrow \partial N = \frac{\partial a}{C_1 [K_{\max}(a) - K_{\min}(a)]^\eta}$$

$$\longrightarrow N = \int_{a_0}^{a_c} \frac{\partial a}{C_1 [K_{\max}(a) - K_{\min}(a)]^\eta}$$

$$\longrightarrow N = \frac{2}{C(\Delta\sigma)^\eta \pi^{\eta/2}} \left[\frac{1}{1-\eta} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{a_c}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right]^{\eta-1}$$

Le nombre de cycles analytique et numérique sont comparés dans le tableau suivant:

a[inch]	N [10^4]	N num [10^4]	E %
.2	2.682	2.893	7.3
.266	6.182	6.645	6.9
.333	8.786	9.327	5.8
.400	9.849	10.740	8.3
.466	10.684	11.513	7.2
.533	10.978	11.741	6.5

Conclusion :

On remarque le bon accord entre le calcul analytique et le calcul numérique l'erreur peut être minimisée en augmentant le nombre d'élément.

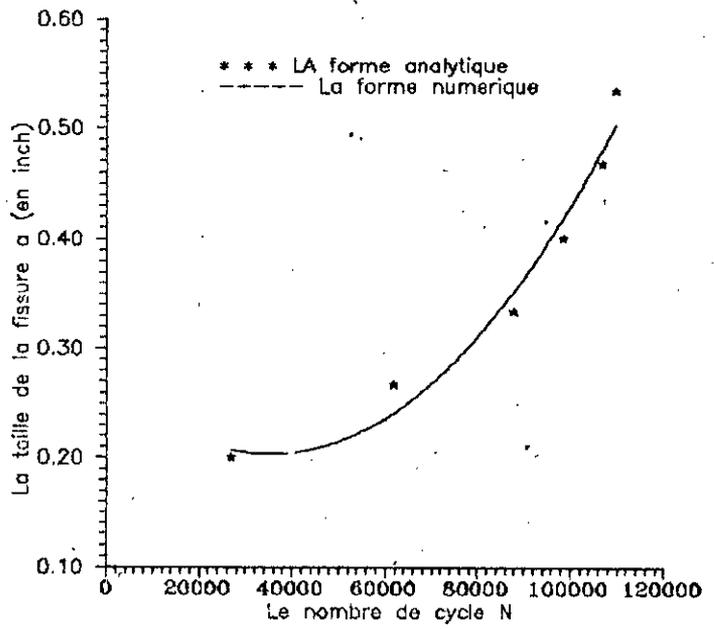
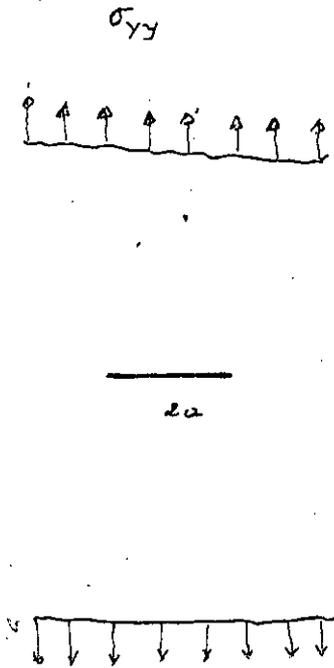


Fig. La taille de la fissure en fonction du nombre de cycle

NOTATIONS UTILISEES

Les principales notations utilisées dans ce mémoire se trouvent résumées dans le tableau suivant.

SYMBOLE	OBJET
2a	taille de la fissure
E	module d'élasticité
G	module de cisaillement
Nu	module de young
Gc	valeur critique du taux de restitution d'énergie
Gs	valeur seuil du taux de restitution d'énergie
GM	valeur correspondant au chargement max
Gm	valeur correspondant au chargement min
Kc	valeur critique du facteur d'intensité de contrainte
Ks	valeur seuil du // // // //
Kt	valeur théorique // // // //
KM	valeur correspondant au chargement max
Km	valeur correspondant au chargement min
ϵ	déformation
$\left[\begin{array}{l} \eta \\ c \\ m \end{array} \right.$	constante caractéristique de fatigue
N	nombre de cycles
Re	limite d'élasticité
R	rapport de chargement $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$
Rc	rayon critique de la zone plastique
Ry	rayon de la zone plastique

CONCLUSION

*"L'expérience, c'est l'ensemble des
erreurs qu'on ne recommencera pas"*

CONCLUSION:

La simulation numérique est un outil très puissant dans le domaine de recherche.

En élaborant ce travail nous avons pu avoir notre propre logiciel calculant les structures bidimensionnelles sollicitées en traction et cisaillement par fatigue . Les fissures sollicitées en compression posent également de sérieux problèmes.

Nous espérons qu'une simulation de ce dernier soit faite et que le travail élaboré soit au service de notre industrie.

BIBLIOGRAPHIE

"Les petits ruisseaux fond
les grandes hivrières."

BIBLIOGRAPHIE:

- 1). "La fatigue des matériaux et des structures"
Claude BATHIAS-JEANPAL-BAILON, Edition MALINE 1980
- 2). "Mécanique des matériaux solides"
J.LEMAITRE-J.L.CHABOCHE. (Dunod 1985)
- 3). "Mécanique de la rupture fragile"
H.D.BUI. (Edition MASSON 1978)
- 4). "Boundary element methode in engineering science"
BANARJEE. (M.C. GRAW HILL 1981)
- 5). "Boundary element methode in geomechanics "
CROUCH. S. L. STARFIELD A.M (1978)
- 6). " Introduction à la mécanique de la rupture "
LABBENS R. (Pularis)
- 7). " Simulation numérique par équations integrales de frontiere d'essais
en mécanique de la rupture "
NESNAS KARIM (P.F.E) (E.N.P)
- 8). "Fatigue of structures and materials"
Cours de Master. Université Purdu-Indiana U.S.A 1984.
- 9). Publication : "Tendance actuelle en calcul des structures"
3ème colloque BASTIA France 1985. Pub par : S.P.Grellier-G.M.Coupel.
- 10). "Solution of plane elasticity problemes by the displacement discontinuity
methode". S.L.CROUCH 1974