

وزارة الجامعات

Ministère aux Universités
المدسة الوطننة المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Genie Mecanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

2ea

SUJET

*Simulation numerique pour equations
integrales de frontiere d'essais en
mecanique de la rupture*

Proposé par :

M. Y. BELKACEMI

Etudié par :

M. N. NESNAS

Dirigé par :

M. Y. BELKACEMI

PROMOTION

*juin
1991*

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements à monsieur Y. Belkacemi. Ses conseils et ses remarques nombreuses sont à l'origine de ce travail.

Que tous ceux qui m'ont apporté une aide durant ce travail, trouve ici l'expression de ma gratitude.

Ministère de l'enseignement supérieur

Ecole nationale polytechnique.

Département : Génie mécanique

Promoteur : Dr Y. Belkacemi

Elève ingénieur : K. Nesnas.



Sujet : Simulation numérique par équations intégrales de frontière d'essais en mécanique de la rupture.

Résumé: Le présent travail a pour objectif l'élaboration d'un programme pour l'analyse de la propagation des fissures dans des conditions de déformation plane, en utilisant la méthode des discontinuités de déplacements, permettant la détermination de la variable de fissuration G (taux de restitution d'énergie) et le sentier de propagation de la fissure, dans un solide élastique homogène et isotrope.

Subject: Numerical simulation by boundary element method of tests in fracture mechanic.

Abstract: The aim of the present research is to develop a computer program (or software) to crack propagation analysis for plane strain conditions, by the Displacement-Discontinuity method, to permit the determination of the strain energy release rate and the crack path when fracture develops in linear elastic homogeneous isotropic solids.

يتمثل هذا المشروع في إعداد برنامج معلوماتي لتحليل انتشار الشقوق في حالات تشوه مستوى، باستخدام طريقة الإزاحات المتقطعة التي تمكن من الحصول على المتغير G (نسبة استرجاع الطاقة) ومسلك انتشار الشقوق في جسم صلب، مرن، متجانس ومتساوي المقارم.

SOMMAIRE



SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE 1: PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS ET LE THEOREME DE RECIPROCITE DE BETTI.

1.1 Introduction.	
1.2 Principe des travaux virtuels.....	3
1.3 Théorème de réciprocity de Betti.....	5

CHAPITRE 2: NOTIONS DE MECANIQUE DE LA RUPTURE.

2.1 Introduction.....	8
2.2 Généralités.	
2.2.1 Classement des phénomènes de rupture fragile.....	9
2.2.2 Caractère de la rupture fragile.....	9
2.3 Approche énergétique des phénomènes de rupture fragile.	
2.3.1 Théorie de la tension superficielle de Griffith.	
2.3.1.1 Critère de rupture de Griffith.....	11
2.3.1.2 Expression de G en fonction du champ sur frontières du domaine fissure...	13
2.3.2 Théorie de Griffith modifiée.....	14
2.4 Approche en terme de contrainte en front de fissure.	
2.4.1 Modes fondamentaux de rupture.....	15
2.4.2 Relation entre G et K.....	19
2.4.3 Critère de rupture en mode I.....	19

2.5 Critère de bifurcation ou de branchement.....20

CHAPITRE 3: INTRODUCTION A LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE.

3.1 Introduction.....21

3.2 Similitudes et différences
 entre la BEM et la FEM.....22

3.3 Equation de base de l'élastostatique.....23

3.4 Méthode directe.

 3.4.1 Solution du problème de Kelvin.....25

 3.4.2 Formulation intégrale.....26

3.5 Méthode indirecte.....28

3.6 Application aux domaines fissurés.

 3.6.1 Cas d'une fissure dans un domaine infini...30

 3.6.2 Cas d'une fissure formant un contour
 fermé dans un domaine infini.....31

3.7 Discrétisation de l'équation intégrale.

 3.7.1 Représentation de la géométrie. 32

 3.7.2 Représentation des fonctions. 33

CHAPITRE 4: METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT.

4.1 Introduction..... 35

4.2 Résolution analytique de l'équation de Navier,
 (Méthode de Neuber-Papkovitch)..... 35

4.3 Application de la méthode de Neuber-Papkovitch
 pour le cas d'une discontinuité de déplacement
 constante sur un segment fini dans un domaine
 infini.....37

4.4 Procédure numérique.....42

4.5 Transformation des coordonnées.....44

4.6 Conditions aux limites.....45

CHAPITRE 5: ORGANISATION DU PROGRAMME.

5.1 Introduction.....47
 5.2 Programmation.
 5.2.1 Problème d'élasticité plane.....47
 5.2.2 Problème de propagation des fissures.....50

CHAPITRE 6: APPLICATION DE LA METHODE DES DISCONTINUITES
 DE DEPLACEMENT A LA PROPAGATION DES FISSURES.

6.1 Plaque infini en traction.
 6.1.1 Fissure horizontale.....54
 6.1.2 Fissure arbitrairement orientée.....58
 6.2 Double fissure débouchante dans
 une plaque finie.....61
 6.3 Eprouvette flexion en trois points
 sans fissure.....65
 6.4 Eprouvette en trois points entaillée.....65
 6.5 Eprouvette compacte de traction.....66
 6.6 Eprouvette double poutre encastrée.....68
 6.7 Conclusion.....68

CONCLUSION.....69

BIBLIOGRAPHIE.....70

INTRODUCTION



INTRODUCTION GENERALE

Depuis plus d'un demi siècle, les ingénieurs sont de plus en plus conscients du besoin d'évaluation plus précise des contraintes locales dues aux irrégularités géométriques (défauts, fissures). Pour prendre deux exemples, un accident d'avion peut résulter de la croissance d'une crique de fatigue dans une entaille d'une pièce de moteur, ou bien un navire peut sombrer à la suite de la rupture fragile d'une soudure criquée. Pour atteindre la fiabilité et pour éviter des ruptures aux conséquences graves, l'ingénieur doit être persuadé de l'importance des concentrations de contrainte provoquées par de telles irrégularités.

Parmi les problèmes que posent ce genre de situation, le problème de la propagation des fissures, qui représente un problème de mécanique dans lequel les données sont constituées, par la géométrie de la structure, la configuration de la fissure initiale, les efforts appliqués, la loi de comportement à la déformation du matériau considéré. Le calcul consiste à trouver les paramètres mécaniques caractérisant la structure fissurée et la direction de propagation de la fissure.

Le problème ainsi posé est très complexe. En effet, traité des fissures en tridimensionnel est très difficile car dans les inconnues, figure la forme du front de fissure, dont un accroissement se représente par un champ de vecteur. De plus, les sollicitations peuvent varier en intensité et en direction, la loi de comportement à la déformation du matériau peut être élastique, élastoplastique et élasto-visco-plastique.

Par conséquent, nous considérerons des structures bidimensionnelles et nous supposerons le comportement linéaire de ces dernières, vu que dans la plus part des cas pratiques, elles travaillent dans le domaine élastique, la zone plastique à la

pointe de la fissure peut être négligée et les calculs peuvent être effectués en élasticité.

L'objet du présent travail est l'étude de la fissuration des éprouvettes standard de la mécanique de la rupture qui sont utilisées pour le calcul de la ténacité du matériau constitutives. Nous aurons donc à déterminer le champ de déplacement et de contrainte dans le domaine fissuré, calculer la variable de fissuration G (Taux de Restitution d'énergie), et déterminer la direction de propagation de la fissure. Pour ce faire, on appliquera une des méthodes des équations intégrales de frontière, la méthode des discontinuités de déplacement, qui s'avère très adéquate pour l'étude de la propagation des fissures. Cette méthode a été développée en premier par Crouch (1976) pour les problèmes tridimensionnels par Wiles et al (1984).

Dans le premier chapitre, on démontre le principe des travaux virtuels et le théorème de réciprocité de Betti qui seront respectivement utilisés dans le calcul du taux de restitution d'énergie et l'obtention de la forme intégrale dans le troisième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, un rappel sur la mécanique de la rupture est donné, ou on énoncera des critères de rupture.

Dans le troisième et le quatrième chapitre, on présentera respectivement la méthode des équations intégrales de frontière et la méthode des discontinuités de déplacement.

Dans le cinquième chapitre, on présentera l'organisation du programme et on donnera l'organigramme de la propagation des fissures.

Le dernier chapitre, se portera sur l'application de la méthode des discontinuités de déplacement, à l'étude de la propagation des fissures, on prendra des exemples d'éprouvettes utilisés en mécanique de la rupture.

CHAPITRE 1

PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS
ET THEOREME DE MAXWELL-BETTI



PREMIER CHAPITRE: PRINCIPE DES TRAVEAUX VIRTUELS ET
THEOREME DE RECIPROCITE DE BETTI.

1.1 INTRODUCTION:

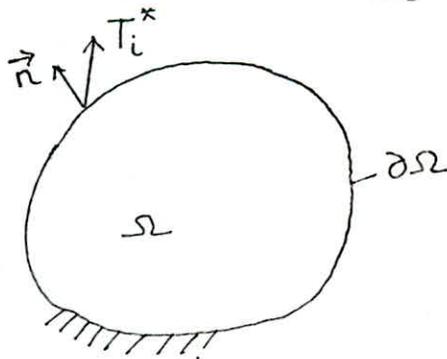
Dans plusieurs branches de la mécanique, les équations énergétiques permettent d'aboutir à des relations sans avoir à recourir aux conditions d'équilibre. Par principe, une équation différentielle d'équilibre forme une restriction générale du comportement des éléments individuels, tandis qu'une équation énergétique donne une plus vaste perspective sur une pièce de dimension finie, tenant compte à la fois des charges et des forces de liaison. Il en résulte que cette autre manière d'aborder le problème, en formulant les quantités d'énergie et en les égalant facilite habituellement une compréhension plus complète des problèmes d'élasticité.

Le principe des travaux virtuels est un principe énergétique, qui aboutit à l'écriture d'une équation énergétique. Dans ce qui suit nous allons démontrer ce principe et montrer le caractère général de ce dernier.

1.2 PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS:

Soit un corps solide en équilibre sous l'action des forces de volume F_i ; $i = 1, 2, 3$ et des forces de surface imposées T_i ; $i = 1, 2, 3$. Considérons un champ de déplacement virtuel U_i cinématiquement admissible ($u_i = 0$ sur $\partial\Omega_u$) et calculons le travail virtuel des forces de surface dans ce champ de déplacement, noté:

$$W^* = \int_{\partial\Omega} T_i u_i^* d\Gamma \quad (1-1)$$



L'intégrale sur $\partial\Omega_u$ est identiquement nulle car $u_i = 0$ sur $\partial\Omega_u$. De plus, à l'équilibre, on a:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{sur } \partial\Omega_\sigma \quad (1-2)$$

n_j : normale exterieur à la frontière.

On a :

$$W^* = \int_{\partial\Omega_u} T_i u_i^* d\Gamma + \int_{\partial\Omega_\sigma} T_i u_i^* d\Gamma = \int_{\partial\Omega_\sigma} T_i u_i^* d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma \quad (1-3)$$

En appliquant la formule de Green:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega \quad (1-4)$$

$$= \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (1-5)$$

En outre, à l'équilibre, on a:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1-6)$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma &= - \int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (1-7) \\ &= - \int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ji} u_{j,i}^*) d\Omega \end{aligned}$$

En vertue de:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{équilibre des moments}) \quad (1-8)$$

et des relations déformation-déplacement:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (1-9)$$

On écrit finalement:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{i,j}^* d\Omega \quad (1-10)$$

L'expression ci-dessus est l'expression générale du principe des travaux virtuels pour un corps solide déformable.

Le principe des travaux virtuels s'énonce comme suit:

"L'équilibre du corps solide déformable nécessite que pour tout

champs de déplacement virtuel infinitésimal satisfaisant les conditions aux limites essentiel de type déplacement imposé au corps, il y'ait égalité des travaux intérieurs et extérieurs".

Ce principe est général, pour le montrer, examinons la démonstration ligne par ligne:

La ligne (1), les déplacements virtuels ne sont pas dus aux forces surfaciques T_i . Par conséquent, le champ de déplacement virtuel est quelconque, il n'est pas nécessaire qu'il satisfasse les équations de Navier.

La ligne (2), les contraintes σ_{ij} représentent un état de contrainte qui équilibre les forces surfaciques T_i , qui ne sont pas nécessairement les forces surfaciques réelles sur $\partial\Omega$ du problème physique réel.

La ligne (3), la continuité des champs de contrainte et déplacement est obligatoire, pour appliquer le théorème de divergence.

La ligne (4), l'état de contrainte σ_{ij} satisfait aussi l'équilibre avec les forces de volume, il n'est pas nécessaire que ces composantes satisfassent les équations de compatibilité.

La ligne (5), cette écriture est possible, en vertu de,

$$\sigma_{ij} u_{i,j} = \sigma_{ji} u_{j,i} \quad (1-11)$$

La ligne (6), la restriction imposée est que les déplacements U_i^* soient petits. Ainsi, la formule (1-10) est valable seulement en élasticité.

1.3 THEOREME DE RECIPROCITE DE BETTI:

Dans les mêmes conditions que pour le problème précédent, considérons deux champs de déplacement \vec{u} et \vec{v} continument dérivables et deux champs réguliers de contrainte associés $\sigma(\vec{u})$ et $\sigma(\vec{v})$.

Considérons la différentiation suivante:

$$(u_i \sigma_{ij}(\vec{v}))_{,j} = u_i \sigma_{ij,j}(\vec{v}) + u_{i,j} \sigma_{ij}(\vec{v})$$

Par intégration, on a:

$$\int_{\Omega} (u_i \sigma_{ij}(\vec{v}))_{,j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} u_i \sigma_{ij}(\vec{v}) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{i,j} \sigma_{ij}(\vec{v}) d\Omega \quad (1-12)$$

En utilisant la formule de Green:

$$\int_{\Omega} (u_i \sigma_{ij}(\vec{v}))_{,j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} u_i \sigma_{ij}(\vec{v}) n_j d\Gamma \quad (1-13)$$

Ainsi, (1-12) s'écrit

$$\int_{\Omega} (u_i \sigma_{ij,j}(\vec{v})) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u_i \sigma_{ij}(\vec{v}) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{i,j} \sigma_{ij}(\vec{v}) d\Omega \quad (1-14)$$

Le dernier terme de l'équation peut s'écrire:

$$\int_{\Omega} (u_{i,j} \sigma_{ij}(\vec{v})) d\Omega = \int_{\Omega} C_{ijkl} v_{k,l} u_{i,j} d\Omega \quad (1-15)$$

Le tenseur d'élasticité C vérifie des propriétés de symétrie:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{lkij} = C_{klij}$$

Ainsi, on aura:

$$\int_{\Omega} (u_i \sigma_{ij,j}(\vec{v})) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u_i \sigma_{ij}(\vec{v}) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} C_{ijkl} v_{k,l} u_{i,j} d\Omega \quad (1-16)$$

En établissant, une expression analogue à (1-16) pour le produit $v_i \sigma_{ij}(\vec{u})$, et en faisant la différence, on obtient:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (u_i \cdot \sigma_{ij,j}(\vec{v}) - v_i \cdot \sigma_{ij,j}(\vec{u})) \, d\Omega \\
&= \int_{\partial\Omega} (u_i \cdot \sigma_{ij}(\vec{v}) n_j - v_i \cdot \sigma_{ij}(\vec{u}) n_j) \, d\Gamma - \int_{\Omega} C_{ijkl} (v_{k,l} u_{i,j} - u_{k,l} v_{i,j}) \, d\Omega
\end{aligned}
\tag{1-17}$$

La dernière intégrale de cette équation est nulle, à cause de la symétrie du tenseur C.

En substituant, les relations (1-2) et (1-6) dans (1-17).

Il vient:

$$\int_{\Omega} F_i(\vec{v}) u_i \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} T_i(v) u_i \, d\Gamma = \int_{\Omega} F_i(\vec{u}) v_i \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} T_i(\vec{u}) v_i \, d\Gamma$$

Cette expression est la formule de réciprocité de Betti.

CHAPITRE 2

NOTIONS DE MECANIQUE
DE LA RUPTURE.



2.1 INTRODUCTION:

Le calcul des pièces de machines ou de construction ont le plus souvent pour objet de prévenir les déformations importantes et sont en générale fondées sur la théorie de l'élasticité et la résistance des matériaux. Ces théories classiques reposent sur plusieurs hypothèses, parmi lesquelles celle de l'homogénéité de l'isotropie du matériau. Moyennant ces simplifications, on arrive à décrire de façon suffisamment précise pour les besoins courants l'état mécanique d'une pièce par un champ de contrainte. Ainsi, on obtient une marge de sécurité contre la déformation importante (plastique) qui s'exprime par une relation entre des contraintes calculées et la limite d'élasticité du matériau.

Mais, on a aussi observé des ruptures soudaines en domaine élastique. Et que cette situation se passait chaque fois qu'il y'avait un défaut (vide ou fissure). Par conséquent, les calculs habituels de la mécanique des milieux continus ne peuvent prévoir la rupture, puisqu'ils supposent l'absence de tout défaut.

Par ailleurs de nombreux accidents ont montré que de tels défauts peuvent conduire à des ruptures brutales et parfois catastrophiques. Lorsque les conditions de chargement et d'environnement sont propices.

D'où, le développement de la mécanique de la rupture, qui peut se définir comme la science de l'étude du comportement d'une structure avec ses défauts. Dans le but est de déterminer quelles sont les dimensions critiques de ces défauts, qui sous certaines conditions de charge et d'environnement conduiraient à des ruptures non prévisibles par la mécanique des milieux continus.

2.2 GENERALITES:

La rupture est caractérisée, au moins localement, par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties de part et d'autre d'une surface géométrique. Cette fissure initiale est soit créée par endommagement sous l'effet de

sollicitation, soit un défaut créé lors de l'élaboration du matériau ou lors de sa mise en forme.

2.2.1 CLASSEMENT DES PHENOMENES DE RUPTURE:

La rupture peut se produire:

- Sans déformation appréciable dans la phase de propagation de la fissure. Il n'y a pas de plasticité macroscopique observable, sauf au niveau de la fissure, c'est la rupture fragile. Cette fragilité se manifeste par une surface de rupture plus ou moins brillante.

- Après déformation plastique importante pendant cette même phase de propagation. Cette rupture est caractérisée par la présence d'asperités et de cupules au niveau des grains de la surface de rupture.

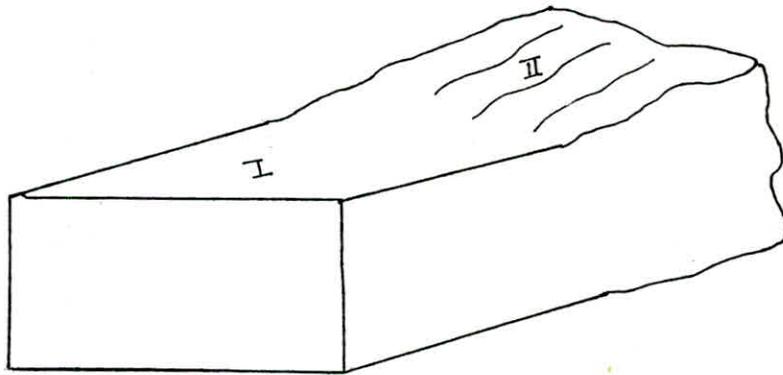


fig 5.1 : Surface de rupture

I : Rupture plate

II : Lèvres ductiles

2.2 CARACTERES DE LA RUPTURE FRAGILE:

L'étude de la rupture fragile dans le cas des matériaux élastiques linéaires constitue ce qu'on appelle la " Mécanique linéaire de la rupture ". La distinction macroscopique entre les types de rupture, ductile et fragile, est très claire lorsque l'on examine la réponse de la structure à des sollicitations extérieures.

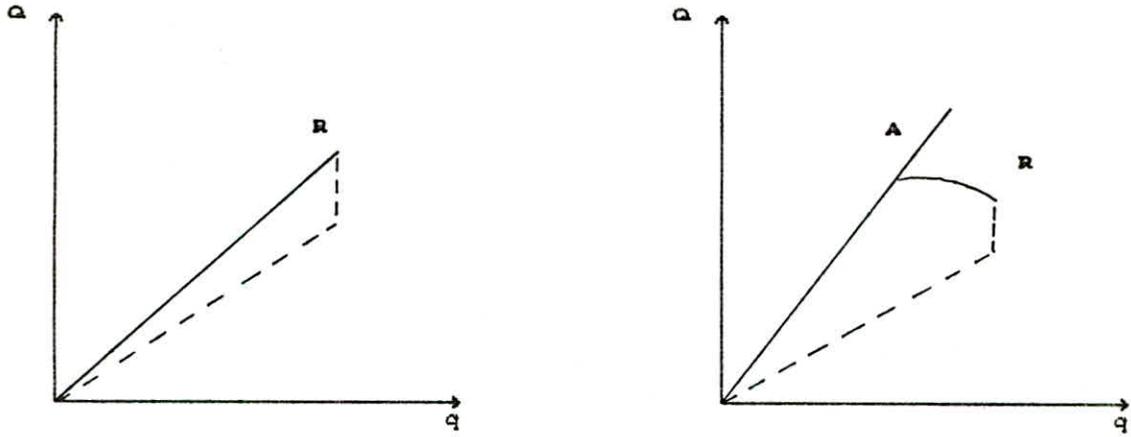


fig 2.2 : Courbe de réponse

Sur la courbe de réponse, on peut distinguer deux points remarquables:

- Point d'amorçage A, c'est le point à partir duquel la fissure croit de façon stable, en ce sens que pour la faire avancer il faut augmenter la force.

- Point de rupture R, la fissure croit de façon instable. Les deux points A et R sont pratiquement confondus dans le cas fragile.

La fragilisation de la structure est liée aussi à l'environnement, et en particulier à la température qui conditionne fortement, la nature de la cassure. En effet, plus la température s'abaisse, et plus le matériau devient fragile. Au contraire, quand la température est plus élevée, la rupture s'accompagne d'une plus grande déformation plastique, caractère révélateur d'une rupture ductile. Enfin, le dernier facteur macroscopique important est la vitesse de mise en charge

Tout accroissement de la vitesse de chargement rend le matériau plus sensible à la rupture fragile.

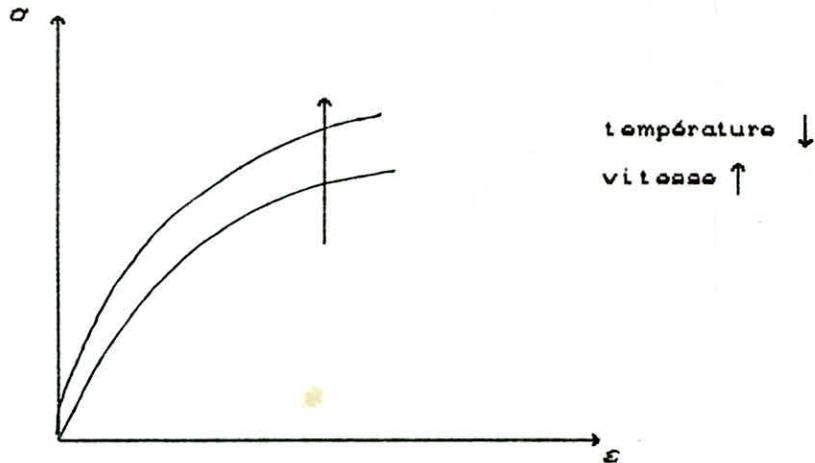


fig 2.3 : Paramètres influençant le type de rupture

2.3 APPROCHE ENERGETIQUE DES PHENOMENES DE RUPTURE FRAGILE:

2.3.1 Théorie de la tension superficielle de griffith:

2.3.1.1 Critère de rupture de griffith:

Vers 1920, Griffith a abordé le problème de la rupture des corps fissurés d'un point de vue énergétique, en exprimant le principe général de la physique, qui admet que tout système évolue pour rendre son énergie potentielle minimale, et il a expliqué que l'instabilité se produisait lorsque l'énergie potentielle mécanique libérée par l'extension d'une fissure dépassait l'énergie absorbée par cette extension.

Soit un solide élastique fissuré, l'énergie potentielle emmagasinée par cette structure est:

$$W_{tot} = W_{elas} + W_{ext} + W_A \quad (2-1)$$

W_{elas} : Energie élastique.

W_{ext} : Energie potentielle des forces extérieurs.

W_A : Energie dissipée dans la séparation.

Pour un accroissement virtuel dA , de la fissure A , l'équilibre énergétique sera atteint, lorsque W sera minimale.

Ce principe s'exprime par:

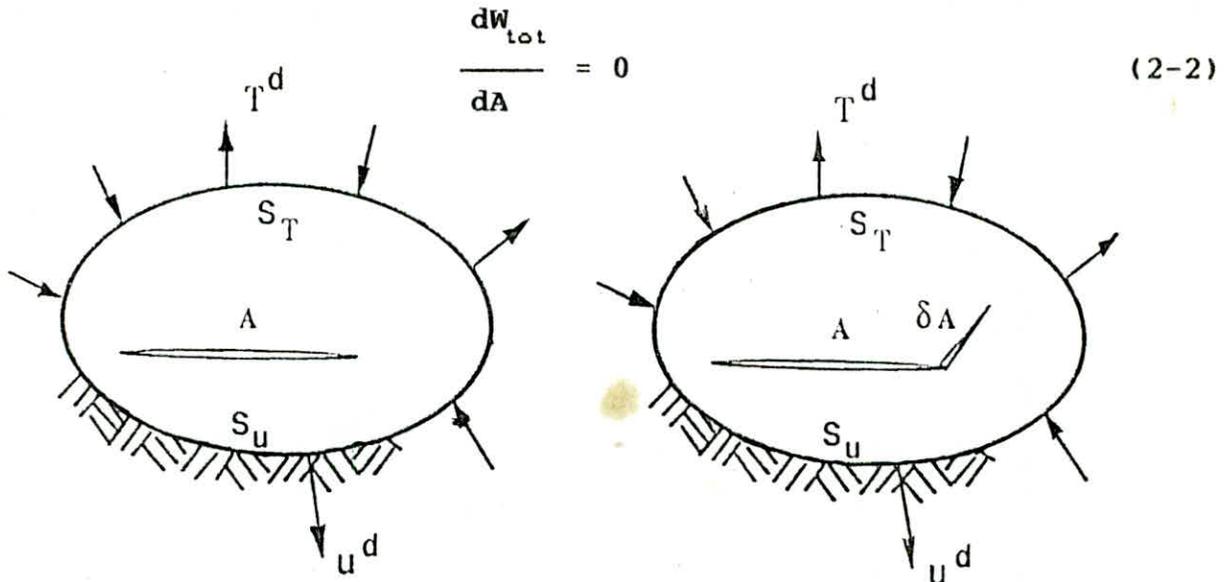


fig 2.4 : Accroissement virtuel de la fissure

La définition du taux de restitution d'énergie est donnée par :

$$G = - \frac{\partial}{\partial A} (W_{ext} + W_{elast}) \quad (2-3)$$

Griffith a admis l'existence d'une tension superficielle γ pour les solides comme pour les liquides. Ainsi, l'énergie superficielle correspondant au travail nécessaire à la création de nouvelles surfaces s'écrit :

$$dW_A = 2\gamma dA \quad (2-4)$$

Donc, (2-2) s'identifie a :

$$G = 2\gamma \quad (2-5)$$

Cette égalité traduit le debut de la propagation de la fissure. Au dessous de la valeur critique 2γ , la fissure ne peut pas croitre. Au voisinage de la valeur critique,

Lorsque $\frac{\partial G}{\partial a} < 0 \longrightarrow$ on a une croissance stable de la fissure.

Lorsque $\frac{\partial G}{\partial a} > 0 \longrightarrow$ on a une croissance instable de la fissure.

Ce qui constitue le critère de Griffith pour la propagation des fissures. Une partie de cette énergie disponible, sert à rompre les liaisons, l'excès d'énergie $(G-2\gamma)dS$ est transformé en énergie cinétique qui se dissipera dans la séparation de nouvelle surface.

2.3.1.2 Expression de G en fonction du champ sur les frontières du domaine fissuré:

Considérons l'élasticité linéaire et le problème plan. On impose sur la frontière $\partial\Omega_T$ du domaine fissuré, des forces surfaciques T_i , et sur la partie complémentaire $\partial\Omega_U$, les déplacements U_i .

G s'écrit sous la forme:

$$G = - \frac{d}{dA} \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} T_i \frac{dU_i}{dA} d\Gamma \quad (2-6)$$

$$= - \frac{d}{dA} \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} T_i \frac{dU_i}{dA} d\Gamma \quad (2-7)$$

$\partial\Omega_T$ est remplacé par $\partial\Omega$, car $\frac{dU_i}{dA} = 0$ sur $\partial\Omega_U$. Le terme W_{ext} est déjà curviligne, il suffit de transformer le terme W_{elast} en intégrale curviligne, on aura, d'après le théorème des travaux virtuels:

$$\frac{d}{dA} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (T_i \frac{dU_i}{dA} + U_i \frac{dT_i}{dA}) d\Gamma \quad (2-8)$$

D'où G devient:

$$G = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (T_i \frac{dU_i}{dA} + U_i \frac{dT_i}{dA}) d\Gamma \quad (2-9)$$

L'expression précédente permet le calcul de G connaissant les champs sur les contours extérieurs et permet aussi de le

déterminer expérimentalement, puisque les champs mécaniques considérés sont accessibles expérimentalement.

2.3.2 Théorie de Griffith modifiée:

L'hypothèse de la conservation de l'énergie mécanique (pas de dissipation d'énergie en chaleur) rend le modèle de Griffith très théorique, qui convient qu'à de rares matériaux très fragiles comme le verre, et à des aciers à très haute limite d'élasticité, ou fragilisés par un processus quelconque. En effet, Irwin et Orowan (1948-55) ont remarqué, que la plupart des matériaux subissent au voisinage du front de fissure une déformation plastique, dans laquelle se dissipe une grande partie de l'énergie libérée par l'extension de la fissure. Ceci a été confirmé par (Wells, 1953), qui a expérimentalement relevé un dégagement de chaleur croissant avec la longueur de la fissure.

De ce fait, ils essayent d'adapter la théorie de Griffith qui ne tenait pas compte de ces nouvelles données.

Ainsi, Irwin a fait l'hypothèse que si la zone de déformation plastique est limitée, le comportement hors de cette zone reste élastique.

Puis, Orowan ajoute au terme d'énergie superficielle de Griffith un terme de déformation plastique p .

$$G = 2\gamma + p \quad (2-10)$$

p : caractéristique du matériau

Pour l'acier,

$$p = 2.10\gamma \quad (2-11)$$

En négligeant γ , on obtient:

$$G = p \quad (2-12)$$

Une nouvelle formule qui traduit l'amorçage de la fissure.

2.4 CHAMPS DE CONTRAINTE ET DE DEPLACEMENT AU VOISINAGE DU FRONT DE FISSURE:

Irwin (1956) donna la forme du premier terme singulier du développement du champ de contrainte au voisinage d'un front de fissure. En s'inspirant des travaux de Westergaard, qui publia en 1939, une méthode de résolution des problèmes d'élasticité plane comportant des singularités, valable sous certaines conditions de symétrie de géométrie et de chargement, et des travaux de Sneddon qui traita quelques problèmes de fissure, et donna un développement limité au voisinage du front de fissure des champs de contrainte et de déplacement. Il a observé dans les résultats de dernier, et dans d'autres problèmes qu'il a traité, que les paramètres de chargement et de géométrie peuvent être représentés par un seul terme K , et que les expressions du champ singulier sont sous la forme:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} f_{ij}(\vartheta) \quad (2-13)$$

$$u_i = K \left[\frac{2r}{\pi} \right]^{1/2} g_i(\vartheta) \quad (2-14)$$

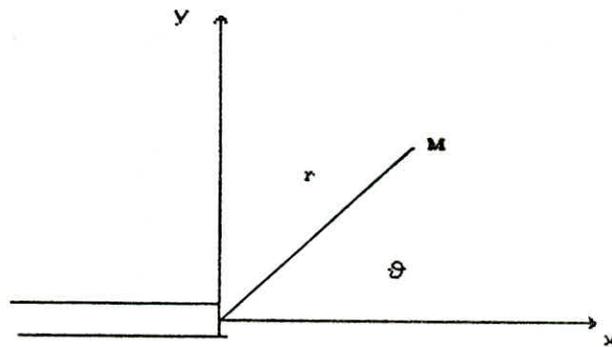


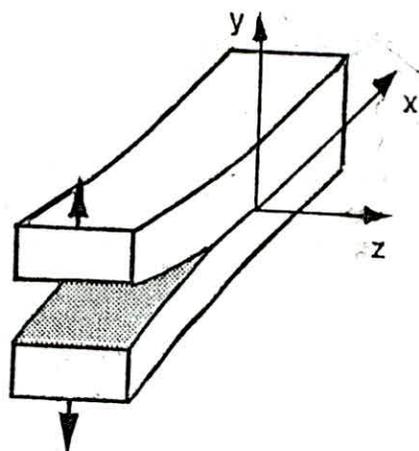
fig 2.5 : Voisinage de la fissure en coordonnées polaire.

K est le facteur d'intensité de contrainte qui définit le champ singulier de contrainte et le champ de déplacement correspondant.

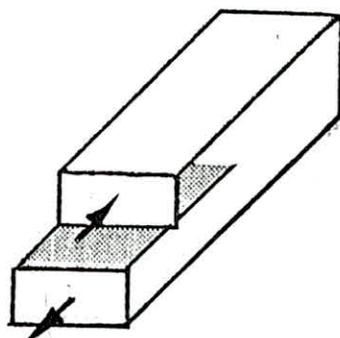
2.4.1 Modes fondamentaux de rupture:

Selon la direction de la sollicitation, par rapport à celle de la

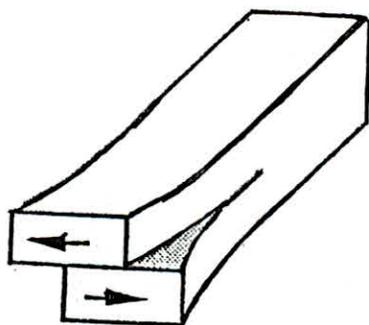
fissure, on distingue 3 modes de rupture :



Mode d'ouverture.



Mode de cisaillement plan.



Mode de cisaillement antiplan.

fig 2.6 : Modes fondamentaux de rupture

La distinction du champ de contrainte et de déplacement au voisinage d'un front de fissure est donnée par les formules

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left[1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right] \quad (2-15)$$

$$- \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left[2 - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left[1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right] \quad (2-16)$$

$$+ \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \quad (2-17)$$

$$+ \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left[1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right]$$

Et:

$$u_x = \frac{K_I}{G} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{\vartheta}{2} (k - \cos \vartheta) \right] \quad (2-18)$$

$$+ \frac{K_{II}}{G} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sin \frac{\vartheta}{2} (k + \cos \vartheta + 2) \right]$$

$$u_y = \frac{K_I}{G} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sin \frac{\vartheta}{2} (k - \cos \vartheta) \right] \quad (2-19)$$

$$- \frac{K_{II}}{G} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{\vartheta}{2} (k + \cos \vartheta - 2) \right]$$

Avec:

$$k = 3 - 4\nu \quad \text{en contrainte plane}$$

$$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{en déformation plane}$$

Les facteurs d'intensité de contraintes mesurent la force de la singularité de contrainte. Nous pouvons interpréter ces facteurs autrement.

D'après les formules (2-19/20), on a:

$$D_y = U_y(r, \pi) - U_y(r, -\pi) = 2 K_I \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{k + 1}{G} \quad (2-20)$$

$$D_x = U_x(r, \pi) - U_x(r, -\pi) = 2 K_{II} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{k + 1}{G} \quad (2-21)$$

En conclusion, les facteurs d'intensité de contrainte apparaissent comme des facteurs de discontinuité de déplacement. Ainsi, la méthode de discontinuité de déplacement peut être utilisée pour le calcul de ces facteurs.

2.4.2 Relation entre G et K:

Quand la fissure se propage dans sa propre direction, on démontre que le taux de restitution d'énergie prend la valeur:

En déformation plane

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2-22)$$

En contrainte plane

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2-23)$$

On remarque que les expressions de G dépendent de la nature du problème plan, ce qui n'est pas le cas pour les facteurs d'intensité de contrainte. Sauf pour les valeurs critiques K qui en dépendent.

2.4.3 Critère de rupture en mode I:

En mode I, la description du phénomène par un seul paramètre est physiquement satisfaisante. Ainsi, lorsque le taux de restitution d'énergie atteint une valeur critique, la fissure se propage. En vertu, des relations (2-6) et (2-19 ou 20). Il existe aussi une valeur critique K du facteur d'intensité de contrainte, telle que lorsque

$$K_I > K_{IC} \quad (2-24)$$

la fissure est en phase de propagation.

K_{IC} : Caractérise la résistance du matériau à la propagation plane des fissures en mode I. Sa valeur est indépendante de la géométrie et des conditions de chargement. La validité de ce critère se trouve en fait limitée par:

- L'existence de la zone plastique à la pointe de la fissure.
- L'effet tridimensionnel des éprouvettes utilisées.

2.5 CRITERE DE BIFURCATION OU DE BRANCHEMENT:

Dans le cas d'un problème d'ouverture symétrique, la fissure se propage dans sa propre direction. Cependant, dans le cas de problème où la symétrie n'existe pas, la fissure ne s'étendra pas dans sa propre direction, et le calcul du taux de libération d'énergie potentielle n'est pas possible analytiquement. Par conséquent, on associe au critère d'amorçage, un critère de branchement qui détermine la direction de propagation de la fissure

Parmi ces critères, on cite:

Le critère du taux de restitution d'énergie maximale:

Parmi tous les accroissements virtuels de fissure $\delta\vec{A}$, de même longueur δA , l'accroissement réel $\delta\vec{A}_{\text{réel}}$ est celui qui maximise G , donc la condition de branchement s'écrit:

$$\delta\vec{A}_{\text{réel}} \longrightarrow \underset{\delta\vec{A}}{\text{Sup}} (G(\delta A)) \quad (2-25)$$

ou bien:

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G = G_{\text{max}} \quad (2-26)$$

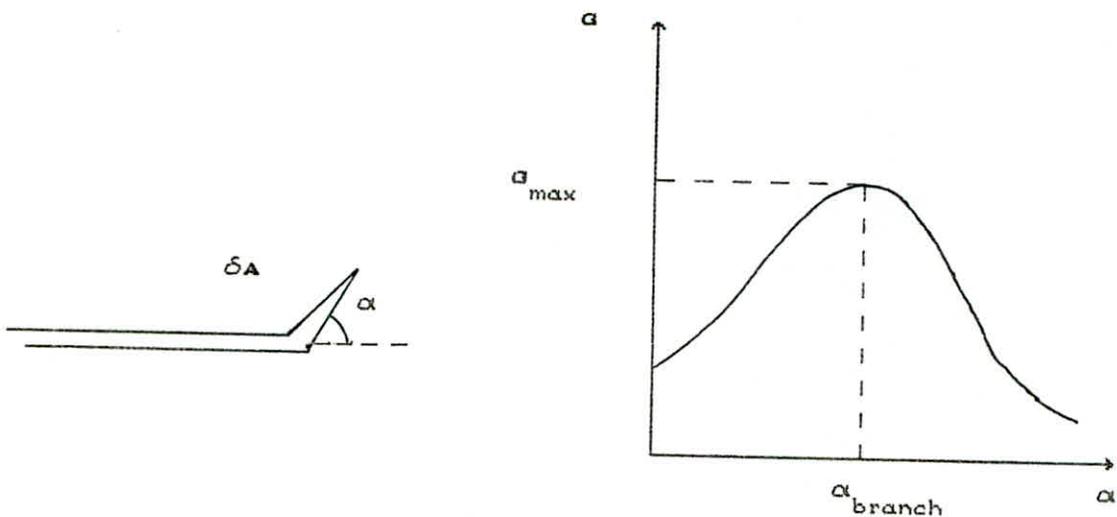
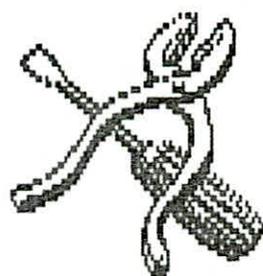


fig 2.7 : Critère de branchement de la fissure

CHAPITRE 3

INTRODUCTION A LA METHODE
DES EQUATIONS INTEGRALES
DE FRONTIERE.



CHAPITRE 3 : INTRODUCTION A LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE.

3.1 INTRODUCTION:

En engineering, plusieurs problèmes pratiques peuvent être représentés par des modèles mathématiques appartenant à une classe de problèmes qu'on appelle : Problèmes aux limites. Ces derniers se caractérisent par un domaine Ω occupant un certain espace et une frontière $\partial\Omega$ limitant ce domaine. La physique du problème est régie par une équation différentielle à dérivées partielles, dont la résolution donnera différentes solutions, selon les conditions aux limites imposées à la frontière.

Des solutions analytiques pour ce genre de problèmes sont de plus faciles, que le domaine est homogène, la géométrie est simple, les conditions aux limites relativement simples et une loi de comportement linéaire.

Pour l'ingénieur, confronté à des problèmes pratiques, le principal avantage est de fournir des réponses approchées aux problèmes courants pour lesquels les solutions rigoureuses (analytiques) des équations différentielles sont souvent trop compliqués pour être de quelque utilité. Si bien que, durant les vingt dernières années, les méthodes numériques ont vu une large utilisation dans différents domaines de la science et l'engineering, surtout avec le développement des ordinateurs scientifiques de grande capacité.

Une première méthode approchée de résolution est la méthode des éléments finis (FEM), qui est une méthode très puissante appliquée à plusieurs disciplines. Cependant, malgré sa souplesse et son vaste champ d'application, elle peut présenter un nombre d'inconvénients qui surgissent dans deux situations bien définies :

- Quand le domaine devient infini.

- Quand apparaissent des singularités en des points où certaines dérivées deviennent infinies.

La FEM ne s'applique pas telle quelle dans le premier cas. Dans le second cas, la solution est grossièrement approchée par des développements polynomiaux.

En revanche, une seconde méthode plus adaptée à ce genre de situations est la méthode des équations intégrales de frontière

(BEM).

En effet, la BEM est une méthode basée sur la solution analytique d'un problème simple, tel que un domaine infini contenant une singularité, la solution singulière obtenue est utilisée pour construire une solution numérique, pour des problèmes plus compliqués.

Le but de ce chapitre est de présenter la BEM par ses approches directes et indirectes. Dans un premier temps, nous ferons une description mathématique, puis nous aborderons la méthode par une approche physique.

3.2 SIMILITUDES ET DIFFERENCES ENTRE LA BEM ET LA FEM:

Les deux méthodes ont pour point commun d'utiliser une discrétisation tant géométrique - maillage du domaine représentatif du solide à étudier - que numérique - choix des fonctions de forme - des inconnues du problème. En effet, considérons un domaine, Ω régi par une équation différentielle à dérivée partielle du type linéaire jointe à des conditions aux limites imposées.

$$A(u) = \int_{\Omega} (u) + f = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (3-1)$$

$$B(u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (3-2)$$

La fonction inconnue est représentée par un ensemble de fonctions de forme, sous la forme.

$$\hat{u} = \sum_i N_i a_i \quad (3-3)$$

En élément fini, les fonctions de forme respectent les conditions aux limites imposées et satisfont l'équation de comportement dans Ω transformée sous forme intégrale.

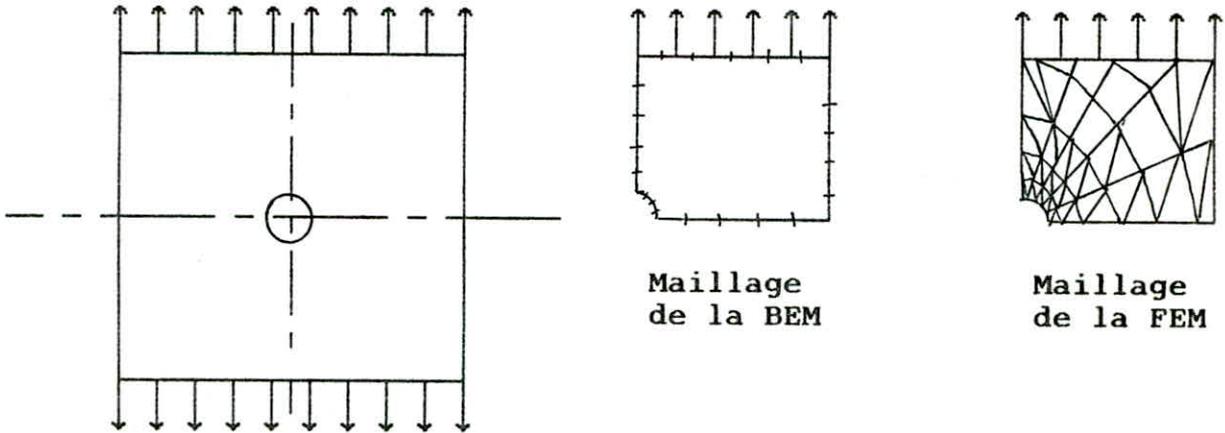
Au contraire, la BEM satisfait a priori la relation (3-1) dans Ω , tout au moins sous sa forme homogène. De plus, elle représente au moyen d'une sorte d'équation de transfert, la formulation du problème au niveau de la frontière délimitant le domaine et par le biais des fonctions de forme, elle essaie de satisfaire au mieux, les conditions aux limites imposées par le milieu extérieur.

Par conséquent, les différences entre ces deux méthodes résident,

- Dans le choix des fonctions de forme qui satisfont la relation (3-1).

- Dans le fait que l'approximation concerne uniquement les frontières.

Le maillage de la FEM concerne tout le domaine, l'affinement de ce maillage en vue de plus de précision, dans une région donnée nécessite de le modifier dans tout le domaine ce qui n'est pas le cas pour la BEM.



Domaine avec un trou
au milieu

Du point de vue limite de la méthode la BEM est plus restrictive, en ce sens que la satisfaction a priori des équations de volume avec répercussion du problème exclusivement au niveau de la surface, n'est pas toujours possible : plasticité existence d'hétérogénéité dans les propriétés mécanique des matériaux.

En revanche, l'intérêt de la méthode réside dans le fait que la dimension du problème à traiter diminue d'une unité, en contrepartie la résolution numérique conduit à l'inversion d'une matrice pleine et non symétrique, qui ne permet pas l'utilisation d'une méthode de stockage, utilisées en élément fini.

3.3 EQUATIONS DE BASE DE L'ELASTOSTATIQUE:

Dans le cas d'un milieu homogène isotrope, les relations contrainte-déformation sont:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3-4)$$

avec: ε_{ij} composante du tenseur de déformation, λ
et μ coefficients de lamé.

Les composantes de contrainte doivent satisfaire l'équation d'équilibre.

$$\sigma_{ij,i} = -F_i$$

Ce qui entraîne que:

$$2\mu \varepsilon_{ij,i} + \lambda \varepsilon_{kk,i} \delta_{ij} = -F_i \quad (3-5)$$

Mais la relation entre les déformations et les déplacements est:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

De plus,

$$\varepsilon_{kk} = u_{k,k} \quad (3-6)$$

En terme de déplacement, (3-5) devient:

$$\mu u_{i,ji} + \mu u_{j,ii} + \lambda u_{k,kj} = -F_j \quad (3-7)$$

Et avec:

$$(\lambda + 2\mu) u_{i,ji} - \mu (u_{j,ii} - u_{i,ji}) = -F_j \quad (3-8)$$

D'une façon plus condensée:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot } \vec{u} + \vec{F} = \vec{0} \quad (3-9)$$

C'est l'équation de Navier pour l'élasticité linéaire, elle admet une solution unique, qui existe toujours.

3.4 METHODE DIRECTE:

La méthode directe fait intervenir comme inconnues les variables physiques du problème, par opposition à la méthode indirecte qui utilise des sources auxiliaires. La clé de cette approche est le théorème de réciprocité de Betti.

3.4.1 Solution du problème de Kelvin:

Avant de formuler le problème en équation intégrale, donnons la solution de l'équation (3-9) pour un domaine infini, dans lequel on applique une force concentrée unité en un point P, suivant la direction e_i (problème de Kelvin).

$$F_i^* = \delta(M-P) e_i \quad (3-10)$$

3.4.1 Tenseur de Kelvin:

La solution est donnée à l'aide d'un tenseur du second ordre U_{ij}^* tel que:

$$u_j^* = U_{ij}^*(M,P) e_i \quad (3-11)$$

les expressions U_{ij}^* des solutions fondamentales du problème de Kelvin, dans le cas bidimensionnel, en déformation plane sont:

$$U_{ij}^* = \frac{1 + \nu}{4\pi E (1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \text{Log} \frac{1}{r} \delta_{ij} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^2} \right\} \quad (3-12)$$

Avec: $r = r(M,P)$ distance entre P et M.

ν : coefficient de Poisson.

3.4.1.2 Tenseur de Somigliana:

Le champ des vecteurs tensions sur un contour de normale \vec{n} au point M est donnée par Somigliana qui a introduit un tenseur T_{ij}^* .

Ce tenseur s'écrit, en déformation plane:

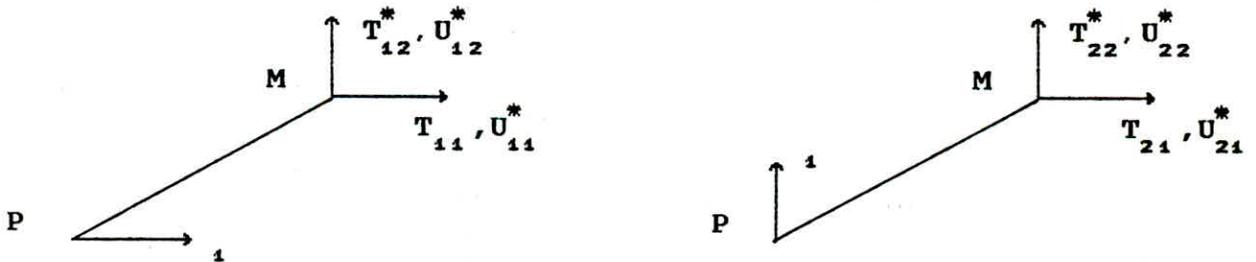
$$T_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] + (1-2\nu) \left[n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} \right] \right\} \quad (3-13)$$

3.4.2 Formulation intégrale:

Soit deux champs de déplacement:

$$\begin{aligned} 1^{\text{er}} \text{ champ} & \left\{ \begin{array}{l} - \vec{u} \text{ déplacement} \\ - T(\vec{M}, \vec{n}) \text{ vecteur tension au point M de normale } \vec{n}. \\ - \vec{F} \text{ force volume.} \end{array} \right. \\ 2^{\text{eme}} \text{ champ} & \left\{ \begin{array}{l} - U_{ij}^* \text{ déplacement du point M dans la direction j} \\ \text{du à une force unitaire selon i.} \\ - T_{ij}^* \text{ tension au point M dans la direction j due} \\ \text{à une force unitaire selon i.} \\ - F_i^* = \delta(M-P) e_i \text{ force volumique.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

avec: $\delta(M-P)$ est la distribution de Dirac.



En appliquant le théorème de réciprocité de Betti , on aura l'équation intégrale suivante:

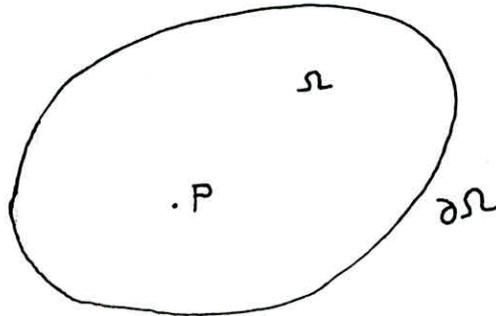
$$\int_{\partial\Omega} \vec{T}(\vec{M}, \vec{n}) \cdot \vec{u}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{u}^* d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{T}^*(\vec{M}, \vec{n}) \cdot \vec{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{F}^* \cdot \vec{u} d\Omega \quad (3-14)$$

Cette relation relie deux états élastostatiques $(\sigma, \varepsilon, u, F)$ et

$(\sigma^*, \varepsilon^*, u^*, F^*)$, le 1^{er} état est l'inconnu du problème, le 2^{ème} état est connu est constitue une solution test.

Le développement de cette expression aboutit à deux formes intégrales, selon que le point singulier se trouve à l'intérieur du domaine ou bien sur la frontière.

3.4.2.1 P est à l'intérieur du domaine:



Quand M coincide avec P , \vec{u}^* est singulier dans Ω , il faut prendre l'intégrale sur Ω en partie finie, puis on ajoute la partie singulière qui est nulle dans ce cas.

Après intégration, on obtient:

$$u_j(P) = \int_{\Omega} F_i U_{ij}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} T_i U_{ij}^* d\Gamma - \int_{\partial\Omega} u_i T_{ij}^* d\Gamma \quad (3-15)$$

Cette relation est connue sous le nom de formule de Somigliana, qui donne les déplacements en un point P du domaine en fonction des tensions et déplacements à la frontière.

Le premier terme de cette équation est une intégrale de volume qui doit être calculé dans le cas où les forces de volume sont quelconque, et peuvent être introduite comme une solution particulière de l'équation de Navier, quand elles représentent le poids propre d'un corps ou bien une force centrifuge...

Lorsque ces forces de volume sont nulles, (3-15) s'identifie à:

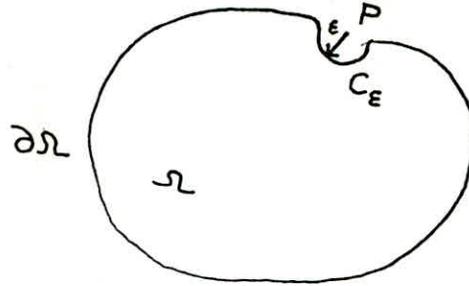
$$u_j(P) = \int_{\partial\Omega} T_i U_{ij}^* d\Gamma - \int_{\partial\Omega} u_i T_{ij}^* d\Gamma \quad (3-16)$$

3.4.2.2 P est sur la frontière:

Dans ce cas, la singularité des noyaux U_{ij}^* et T_{ij}^* se pose

pour P tendant vers M. Ainsi, on intégrera au sens des valeurs principales de Cauchy. Considérons un cercle C_ϵ rayon ϵ et de centre P.

L'équation intégrale s'écrit:



$$\int_{\partial\Omega - C_\epsilon} T_i U_{ij}^* d\Gamma + \int_{C_\epsilon} T_i U_{ij}^* d\Gamma = \int_{\partial\Omega - C_\epsilon} T_{ij}^* u_i d\Gamma + \int_{C_\epsilon} T_{ij}^* u_i d\Gamma \quad (3-17)$$

L'évaluation des intégrales singulières le long du contour C_ϵ , quand le rayon ϵ tend vers zéro donne:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} U_{ij}^*(M, P) T_i(M) d\Gamma \simeq T_i(M) \frac{A}{2\pi} \epsilon \text{Log} \epsilon \int_0^\pi d\vartheta = 0 \quad (3-18)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} T_{ij}^*(M, P) u_i(M) d\Gamma \simeq C_{ij} u_j(P) \quad (3-19)$$

C_{ij} : Terme libre dépend de la régularité du contour en M.

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \text{ pour un contour régulier.}$$

(3-17) s'écrit:

$$C_{ij} u_j(P) = \int_{\partial\Omega} U_{ij}^* T_i d\Gamma - \int_{\partial\Omega} T_{ij}^* u_i d\Gamma \quad (3-20)$$

C'est l'équation de base liant les déplacements en un point P de la frontière aux déplacements et aux tensions en tous points de la frontière $\partial\Omega$.

3.5 METHODE INDIRECTE:

Cette méthode consiste à imaginer un domaine réelle Ω

prolongée tout autour de sa frontière $\partial\Omega$, par un domaine fictive infinie, et de chercher une distribution de sources \vec{s} sur la frontière qui peut ne pas coïncider avec $\partial\Omega$, dont l'action soit telle que les conditions aux limites physique du problème soient exactement vérifiées. Ces sources sont des inconnues indirectes (d'où le nom de la méthode) du problème, les inconnues physiques en sont déduites après coup.

En absence des forces volumiques, on obtient pour une telle répartition.

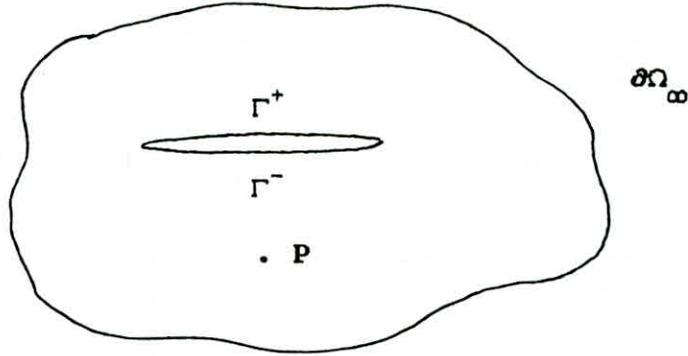
$$\vec{u}(P) = \int_{\partial\Omega} u(M,P) \vec{s}(M) d\Gamma(M) \quad (3-21)$$

$$\vec{\sigma}(P) = \int_{\partial\Omega} T(M,P,\vec{n}) \vec{s}(M) d\Gamma(M) \quad (3-22)$$

En utilisant, les conditions aux limites sur le contour $\partial\Omega$, on pourra résoudre l'équation intégrale pour une répartition de sources données. Malgré, la souplesse de cette méthode il reste la difficulté du choix de la distribution optimale. Ces sources peuvent être des forces concentrées, des discontinuités de déplacement.

3.6 APPLICATION AUX DOMAINES FISSURES:

3.6.1 Cas d'une fissure dans un domaine infini:



L'équation intégrale pour le système fissuré s'écrit:

$$u_i(P) = \int_{\partial\Omega_\infty} [U_{ij}^*(M,P) T_j(M) - T_{ij}^*(M,P) u_j(M)] d\Gamma \quad (3-23)$$

En considérant, les déplacements et contraintes nulles à l'infini, l'intégrale curviligne $\int_{\partial\Omega_\infty}$ s'annule.

Evaluons séparément les deux termes restants sur le contour $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

$$\int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} U_{ij}^* T_j d\Gamma = \int_{\Gamma^+} U_{ij}^* T_j^+ d\Gamma + \int_{\Gamma^-} U_{ij}^* T_j^- d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^* \Sigma T_j d\Gamma \quad (3-24)$$

$$\text{avec: } \Sigma T_j = T_j^+ + T_j^-$$

De plus, nous avons:

$$T_{ij}^* = C_{ijkl} \frac{\partial U_{ij}^*}{\partial x_l} \cdot n_j \quad (3-25)$$

$$n_j^+ = - n_j^- \quad (3-26)$$

Le deuxième terme s'écrit:

$$\int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \mathbf{T}_{ij}^* \cdot \mathbf{u}_j \, d\Gamma = \int_{\Gamma^+} c_{ijkl} \frac{\partial U_{ij}^*}{\partial x_l} \cdot \mathbf{n}_j^+ u_j^+ \, d\Gamma \quad (3-27)$$

$$+ \int_{\Gamma^-} c_{ijkl} \frac{\partial U_{ij}^*}{\partial x_l} \cdot \mathbf{n}_j^- u_j^- \, d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma} c_{ijkl} \frac{\partial U_{ij}^*}{\partial x_l} \cdot \mathbf{n}_j D_j \, d\Gamma \quad (3-28)$$

avec: $D_j = u_j^- - u_j^+$

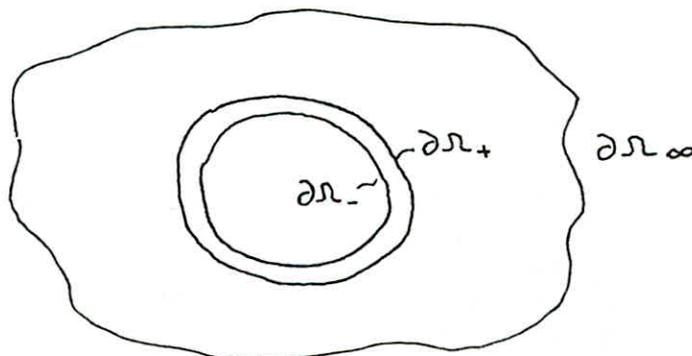
Finalement, l'équation intégrale s'écrit:

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}^* \cdot \Sigma T_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ij}^* \cdot D_i \, d\Gamma \quad (3-29)$$

Les inconnues de l'expression précédente ne sont ni des déplacements, ni des tensions. Dans le premier, c'est une discontinuité de contrainte, dans le second une discontinuité de déplacement.

3.6.2 Cas d'une fissure formant un contour fermé dans un domaine infini:

Cette situation génère deux contours, l'un représente la frontière d'une cavité dans un domaine infini (problème extérieur), l'autre représente la frontière d'un domaine infini (problème intérieur).



L'équation intégrale est la même que celle du cas précédent:

$$u_i(P) = \int_{\partial\Omega} U_{ij}^* \cdot \Sigma T_i \, d\Gamma + \int_{\partial\Omega} U_{ij}^* \cdot D_i \, d\Gamma \quad (3-30)$$

Les inconnues de l'expression précédente représentent les contraintes et les déplacements relatifs entre les deux frontières.

Ainsi, deux formules peuvent se présenter

- Quand il y'a continuité des déplacements à travers $\partial\Omega$ ie:

$$D_i = 0 \quad (3-31)$$

L'équation (3-30) devient:

$$u_i(P) = \int_{\partial\Omega} U_{ij}^* \Sigma T_i \, d\Gamma \quad (3-32)$$

Cette méthode est connue sous le nom de méthode des forces fictives (Crouch et Starfield 1983)

- Quand il y'a continuité de contrainte à travers $\partial\Omega$ ie:

$$\Sigma T_i = 0 \quad (3-33)$$

L'équation (3-30) devient:

$$u_i(P) = \int_{\partial\Omega} T_{ij}^* D_i \, d\Gamma \quad (3-34)$$

C'est la méthode des discontinuités de déplacement introduite par (Crouch 1976).

3.7 DISCRETISATION DE L'EQUATION INTEGRALE :

La discrétisation du contour $\partial\Omega$, est motivée par la précision désirée. Nous avons deux paramètres qui influent sur la forme intégrale discrétisée :

3.7.1 Représentation de la géométrie :

Le contour est divisé en un certain nombre d'éléments

rectilignes ou curvilignes .Ces derniers ont pour équivalent en élément fini, les éléments isoparamétriques. les coordonnées x_i d'un point du segment s'écrit :

$$x_i(\xi) = \{ N^a(\xi) \}^T \{ x_i^a \} \quad (3-35)$$

$N^a(\xi)$: fonctions de forme.

x_i^a : coordonnées des noeuds représentant la géométrie.

3.7.2 Représentation des fonctions:

Les fonctions u et T peuvent avoir, sur chaque élément du contour une variation linéaire, quadratique, cubique. La fonction s'écrit:

$$\Phi(\xi) = \{ N^a(\xi) \}^T \{ \Phi^a \} \quad (3-36)$$

$N^a(\xi)$: fonction de forme.

Φ^a : valeurs nodales de Φ .

Supposons le contour divisé en N éléments comportant chacun n noeuds où sont définis des inconnues. L'équation intégrale discrétisée se met sous la forme, au noeud x^a :

$$C_{ij} u_j(x^a) + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^n u_j(x^{d(b,c)}) \int_{\partial\Omega_b} T_{ij}^*(x^a, y(\xi)) N^a(\xi) J(\xi) d\xi \quad (3-37)$$

$$= \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^n T_{ij}^*(x^{d(b,c)}) \int_{\partial\Omega_b} U_{ij}^*(x^a, y(\xi)) N^a(\xi) J(\xi) d\xi$$

Avec:

$J(\xi)$: est le Jacobien de la transformation coordonnées cartésiennes, coordonnées intrinsèques.

$\partial\Omega_b$: Segment numéro b.

a : numéro global des noeuds.

Le cas le plus simple de discrétisation de l'équation intégrale est de découper, le contour en N segments de droite, repérés par le point P_i milieu du segment, et supposer les fonctions constantes sur le segment. En appliquant ceci pour l'expression (3-34):

On aura:

$$u_i(P_i) = \sum_{b=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_b} T_{ij}^* d\Gamma \right) D_j \quad (3-38)$$

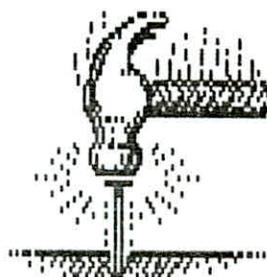
(3-38) est un système de 2N équations à 2N inconnues.

Les termes $\int_{\partial\Omega_b} T_{ij}^* d\Gamma$ correspondent aux coefficients d'influence

qu'on verra par la suite.

CHAPITRE 4

METHODE DES DISCONTINUITES
DE DEPLACEMENTS.



QUATRIEME CHAPITRE : METHODE DES DISCONTINUITES DE
DEPLACEMENT.

4.1 INTRODUCTION:

La description précédente de la méthode des équations intégrales est celle couramment trouvée dans la littérature. Elle a été dans un premier temps, pour montrer les fondements mathématiques de cette méthode, et permettre une formulation rigoureuse du problème. Toutefois, il est possible de procéder d'une autre manière, afin d'exhiber l'interprétation physique de la méthode. Mais, nous ne bornerons dans ce qui suit à développer la méthode des discontinuités de déplacement qui est une méthode indirecte.

4.2 RESOLUTION ANALYTIQUE DE L'EQUATION DE NAVIER:
(METHODE DE NEUBER-PAPKOVITCH)

Une méthode de résolution de l'équation (3-9) consiste à écrire le champ de déplacement en fonction de fonctions, qui sous certaines conditions, transforment (3-9) en une équation différentielle facilement intégrable.

Ainsi, le champ de déplacement s'écrit:

$$\vec{u} = \text{grad } \chi + B \tag{4-1}$$

En remplaçant cette expression dans (3-9), il vient:

$$(\lambda + \mu) \text{ grad div grad } \chi + (\lambda + \mu) \text{ grad div } B + \mu \text{ grad } \chi + \mu B + F = 0 \tag{4-2}$$

Avec les hypothèses suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta B &= 0 \\ \vec{F} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{4-3}$$

Et d'après:

$$\text{div grad } \chi = \Delta \chi \tag{4-4}$$

$$\text{grad } \Delta \chi = \Delta \text{ grad } \chi$$

L'expression (4-2) devient:

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad div B}} + (\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad } \Delta \chi} = 0 \quad (4-5)$$

Après intégration, on obtient:

$$\Delta \chi = \frac{-\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \overrightarrow{\text{div B}} + \text{constante} \quad (4-6)$$

La constante peut être prise égale à zéro sans perdre de généralité. Pour résoudre cette équation, remarquons que:

$$\begin{aligned} \Delta (\text{OM} \cdot \vec{B}) &= \Delta (x_1 \cdot B_1 + x_2 \cdot B_2 + x_3 \cdot B_3) \\ &= 2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right) + (x_1 \cdot \Delta B_1 + x_2 \cdot \Delta B_2 + x_3 \cdot \Delta B_3) \end{aligned} \quad (4-7)$$

Ou bien:

$$\Delta (\text{OM} \cdot \vec{B}) = 2 \text{ div } \vec{B} + \text{OM} \cdot \vec{B} = 2 \text{ div } \vec{B} \quad (4-8)$$

l'équation (4-6) s'identifie à:

$$\Delta \chi = - \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \Delta (\text{OM} \cdot \vec{B}) \quad (4-9)$$

La solution homogène de cette équation est χ_0 telle que:

$$\Delta \chi_0 = 0 \quad (4-10)$$

χ_0 peut s'écrire:

$$\chi_0 = - \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \text{OM} \cdot \vec{B} \quad (4-11)$$

Avec:

$$\Delta \text{OM} \cdot \vec{B} = 0$$

Une solution particulière de cette équation est:

$$\chi = \frac{-1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \text{OM} \cdot \vec{B} \quad (4-12)$$

Finalement, la solution générale s'écrit:

$$\vec{u} = B - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \text{grad} (\text{OM} \cdot B + B_0) \quad (4-13)$$

Dans un milieu plan élastique linéaire, homogène et isotrope, les déplacements s'écriront:

$$\begin{cases} u_x = B_x - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (xB_x + yB_y + B_0) \\ u_y = B_y - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} (xB_x + yB_y + B_0) \end{cases}$$

Avec:

B_x , B_y et B_0 fonctions de Papkovitch qui satisfont l'équation de Laplace

$$\Delta B_x = 0, \quad \Delta B_y = 0 \quad \text{et} \quad \Delta B_0 = 0$$

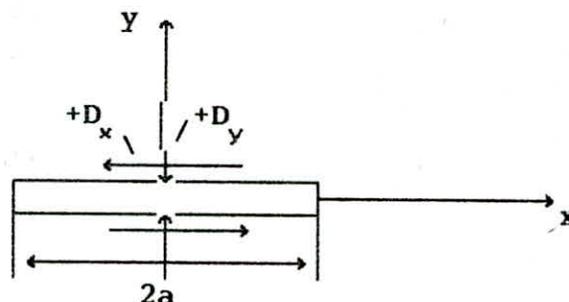
4.3 APPLICATION DE LA METHODE DE NEUBER-PAPKOVITCH POUR LE CAS D'UNE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT CONSTANTE SUR UN SEGMENT FINI DANS UN DOMAINE INFINI:

Dans une discontinuité de déplacement constante, sur un segment, dans un plan x, y infini, occupant la région $|x| < a$ et $y = 0$, En considérant, ce segment, comme une fissure, on distingue deux lèvres, la lèvre supérieure pour $y = 0_+$ et la lèvre inférieure pour $y = 0_-$.

On définit la discontinuité de déplacement par:

$$D_i = u_i(x, 0_-) - u_i(x, 0_+) \quad (4-15)$$

avec: $i = x, y$



L'intervention de discontinuité de déplacement dans les deux directions, correspond à un mode mixte, qui est la superposition de deux modes élémentaires, se distinguant selon que, le plan x, y ne contient pas des contraintes de cisaillement (mode I), ou bien ne contenant pas de contraintes normales (mode II).

Ces modes se traduisent mathématiquement par les conditions suivantes:

$$\text{Mode I} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{xy}(x, 0) = 0 & -\infty < x < +\infty \\ u_y(x, 0) = 0 & |x| > a \\ D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+) & |x| \geq a \end{array} \right. \quad (4-16)$$

$$\text{Mode II} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{yy}(x, 0) = 0 & -\infty < x < +\infty \\ u_x(x, 0) = 0 & |x| > a \\ D_x = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) & |x| \geq a \end{array} \right. \quad (4-17)$$

Les fonctions de Papkovitch choisies, vérifiant respectivement les conditions (4-16) et (4-17) sont:

$$\text{Mode I} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = 0 \\ B_y = 4(1 - \nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ B_\sigma = 4(1 - \nu)(1 - 2\nu) \phi \end{array} \right. \quad (4-18)$$

Avec: $\Delta \phi = 0$

$$\text{Mode II} \quad \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 4(1 - \nu) \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ B_o = 8(1 - \nu)^2 \int \frac{\partial \chi}{\partial x} dy \end{cases} \quad (4-19)$$

$$\text{Avec: } \Delta \chi = 0$$

Les composantes du vecteur déplacement deviennent, après superposition et substitutions des fonctions (4-18) et (4-19) dans (4-14):

$$\begin{cases} u_x = - (1 - 2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + 2(1 - \nu) \frac{\partial \chi}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \\ u_y = 2(1 - \nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + (1 - 2\nu) \frac{\partial \chi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (4-20)$$

Les composantes du vecteur contrainte:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) + 2G \left(2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \sigma_{yy} = 2G \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - y \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) + 2G y \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \\ \sigma_{xy} = - 2G y \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + 2G \left(2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^3 \chi}{\partial y^3} \right) \end{cases} \quad (4-21)$$

$$\text{Avec: } G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Pour avoir σ_{xy} et σ_{yy} nulles respectivement pour chaque mode, il faut que, $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}$ et $\frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2}$ - soient finis. les fonctions ϕ et χ

appropriés pour vérifiées respectivement les conditions (4-16) et (4-17), sont obtenus en remarquant que la fonction $\text{arctg} \frac{y}{x}$ présente les propriétés suivantes:

$$\lim_{y \rightarrow 0_+} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \pi & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4-22)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0_-} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -\pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Etablissons les expressions ϕ et χ en fonction des discontinuités de déplacement correspondants, Tout d'abord, exprimons D_x et D_y on aura:

$$\begin{aligned} D_x &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} (\chi(x, 0_-) + \chi(x, 0_+)), \quad |x| < a \\ D_y &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} (\phi(x, 0_-) + \phi(x, 0_+)), \quad |x| < a \end{aligned} \quad (4-23)$$

Ou bien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, 0_-) - \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, 0_+) &= \frac{D_x}{2(1-\nu)}, \quad |x| < a \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_-) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_+) &= \frac{D_y}{2(1-\nu)}, \quad |x| < a \end{aligned} \quad (4-24)$$

D'autre part, si on considère la fonction suivante:

$$h(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-a}\right) \quad (4-25)$$

En passant à la limite,

$$h(x, 0_-) - h(x, 0_+) = -2\pi \quad \text{pour } x < a \quad (4-26)$$

Par identification de (4-24) avec (4-26), on obtient:

$$\frac{-1}{2\pi} (h(x, 0_-) - h(x, 0_+)) = \frac{2(1-\nu)}{D_y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_-) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_+) \right) \quad (4-27)$$

D'où l'on tire:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{D_y}{1-\nu} h(x, y) \quad (4-28)$$

Enfin, après intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = & \frac{-D_y}{4\pi(1-\nu)} \left[y \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-a}\right) - y \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right) \right. \\ & \left. - (x-a) \ln [((x-a)^2 + y^2)^{1/2}] + (x+a) \ln [((x+a)^2 + y^2)^{1/2}] \right] \end{aligned} \quad (4-29)$$

On procède de la même manière que χ , on déduit que :

$$\begin{aligned} \chi(x,y) = & \frac{-D_x}{4\pi(1-\nu)} \left[y \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-a}\right) - y \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right) \right. \\ & \left. - (x-a) \ln [((x-a)^2 + y^2)^{1/2}] + (x+a) \ln [((x+a)^2 + y^2)^{1/2}] \right] \end{aligned} \quad (4-30)$$

Ainsi, nous avons obtenus les fonctions harmoniques ϕ et χ , qui traduisent des déplacements et des contraintes nulles à l'infini et vérifient respectivement les conditions (4-16) et (4-17).

En posant :

$$\phi(x,y) = \frac{D_y f(x,y)}{4\pi(1-\nu)} \quad (4-31)$$

$$\chi(x,y) = \frac{D_x f(x,y)}{4\pi(1-\nu)} \quad (4-32)$$

Les champs de déplacement et de contrainte s'écrivent :

$$\begin{cases} u_x = D_x [2(1-\nu) F_3 - y F_5] + D_y [-(1-2\nu) F_2 - y F_4] \\ u_y = D_x [2(1-\nu) F_2 - y F_4] + D_y [2(1-\nu) F_3 + y F_5] \end{cases} \quad (4-33)$$

et :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2 G D_x [2 F_4 + y F_6] + 2 G D_y [-F_5 + y F_7] \\ \sigma_{yy} = 2 G D_x [-y F_6] + 2 G D_y [-F_5 - y F_7] \\ \sigma_{xy} = 2 G D_x [-F_5 + y F_7] + 2 G D_y [-y F_6] \end{cases} \quad (4-34)$$

Avec:

$$F_2 = f_{,x} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} [\ln [((x-a)^2 + y^2)^{1/2}] + \ln [((x+a)^2 + y^2)^{1/2}]]$$

$$F_3 = f_{,y} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} [\arctg(\frac{y}{x-a}) - \arctg(\frac{y}{x+a})]$$

$$F_4 = f_{,xy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} [\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2}]$$

$$F_5 = f_{,yy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} [\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2}]$$

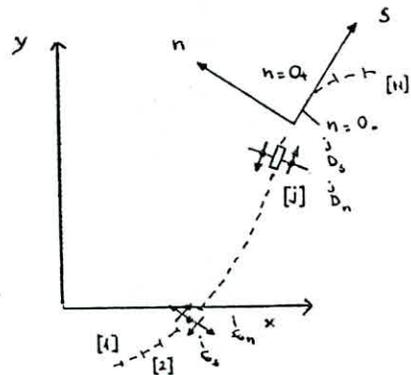
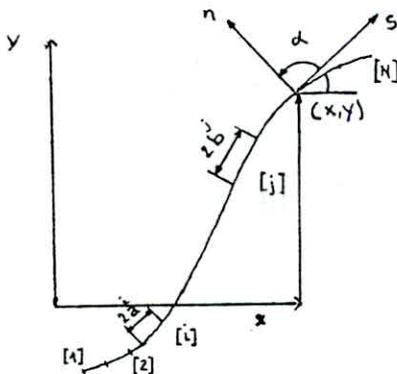
$$F_6 = f_{,xyy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} [\frac{(x-a)^2 - y^2}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{(x+a)^2 + y^2}]$$

$$F_7 = f_{,yyy} = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} [\frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x+a}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}}]$$

4.4 PROCEDURE NUMERIQUE:

Dans le paragraphe précédent, nous avons déterminé une solution singulière des équations de l'élasticité linéaire due à une discontinuité de déplacement constante dans un milieu infini. Cette équation peut être utilisée pour construire une méthode des éléments de frontière, pour trouver des solutions numériques à des problèmes plus compliqués.

Une courbe quelconque peut être représentée avec une bonne approximation par N segments de droite. Ces subdivisions correspondent à des discontinuités de déplacement.



Chaque discontinuité de déplacement est défini élémentaire est défini par rapport à un repère local s, n . Les composantes de discontinuité de déplacement par rapport à s, n seront notés D_s et D_n . Par conséquent, l'effet d'une discontinuité sur les contraintes et les déplacements en un point quelconque du domaine infini peut être calculé par les relations (4-33) et (4-34). alors, l'effet d'une discontinuité j sur le milieu d'un segment i est:

$$\begin{cases} \sigma_s^i = A_{ss}^{ij} D_s^i + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i = A_{ns}^{ij} D_s^i + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{cases} \quad i = 1, n \quad (4-36)$$

Avec: A_{ss}^{ij} A_{sn}^{ij} A_{ns}^{ij} A_{nn}^{ij} sont les coefficients d'influence des contraintes qui sont en fonction de la discrétisation et de la géométrie de la courbe.

La contribution des N discontinuités se fera par superposition de leurs effets on obtient:

$$\begin{cases} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{cases} \quad (4-34)$$

De même pour le champ de déplacement, on obtient:

$$\begin{cases} u_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ u_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^i + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{cases}$$

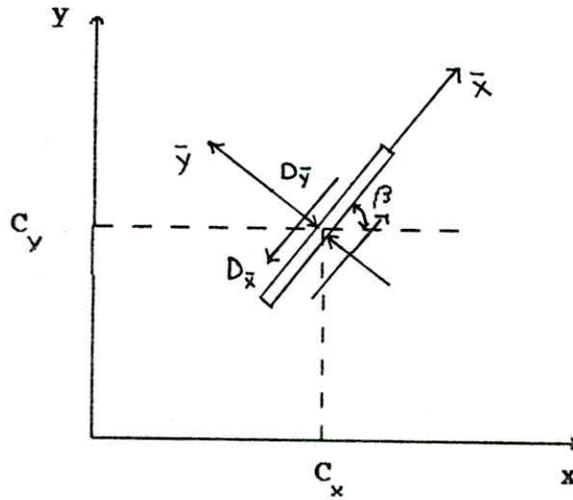
Avec B_{ss}^{ij} B_{sn}^{ij} B_{ns}^{ij} B_{nn}^{ij} sont les coefficients d'influence

des déplacements.

4.5 TRANSFORMATION DES COORDONÉES:

Les expressions précédente sont données par rapport à un repère local \bar{x}, \bar{y} de la discontinuité. Pour pouvoir, manipuler plusieurs discontinuités, il est nécessaire de transformer ces expressions dans le repère global x, y .

La transformation de coordonnée se fera par la formule suivante:



La transformation de coordonne se fera par la formule suivante:

$$\begin{cases} \bar{x} = (x - C_x) \cos \beta + (y - C_y) \sin \beta \\ \bar{y} = -(x - C_x) \sin \beta + (y - C_y) \cos \beta \end{cases} \quad (4-39)$$

La transformation des déplacements se fera par:

$$\begin{cases} u_x = u_{\bar{x}} \cos \beta - u_{\bar{y}} \sin \beta \\ u_y = u_{\bar{x}} \sin \beta + u_{\bar{y}} \cos \beta \end{cases} \quad (4-40)$$

la transformation des contraintes se fera par:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{xx} = \sigma_{\frac{x}{x}} \cos^2 \beta - 2 \sigma_{\frac{x}{y}} \sin \beta \cdot \cos \beta + \sigma_{\frac{y}{y}} \sin^2 \beta \\ \sigma_{yy} = \sigma_{\frac{x}{x}} \sin^2 \beta - 2 \sigma_{\frac{x}{y}} \sin \beta \cdot \cos \beta + \sigma_{\frac{y}{y}} \cos^2 \beta \\ \sigma_{xy} = \left(\sigma_{\frac{x}{x}} - \sigma_{\frac{y}{y}} \right) \sin \beta \cdot \cos \beta + \sigma_{\frac{x}{y}} \left(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta \right) \end{array} \right. \quad (4-41)$$

4.6 CONDITIONS AUX LIMITES:

L'aboutissement de la formulation de la méthode des discontinuités de déplacement est un système d'équations de $2N$ équations à $2N$ inconnues. La résolution de ce système se fera en connaissant les conditions aux limites à la frontière.

Quand les CL prescrites à la frontière sont des contraintes

$\sigma_a^i = (\sigma_s)_a^i$ et $\sigma_n^i = (\sigma_n)_a^i$, ce système devient:

$$\left[\begin{array}{l} (\sigma_a^i)_a = \sum_{j=1}^N A_{aa}^{ij} D_a^i + \sum_{j=1}^N A_{an}^{ij} D_n^j \\ (\sigma_n^i)_a = \sum_{j=1}^N A_{na}^{ij} D_a^i + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{array} \right. \quad (4-42)$$

Quand les CL prescrites sont des déplacements, $u_a^i = (u_s)_a^i$ et

$u_n^i = (u_n)_a^i$, le système devient:

$$\left[\begin{array}{l} (u_a^i)_0 = \sum_{j=1}^N B_{aa}^{ij} D_a^i + \sum_{j=1}^N B_{an}^{ij} D_n^j \\ (u_n^i)_0 = \sum_{j=1}^N B_{na}^{ij} D_a^i + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{array} \right. \quad (4-43)$$

Quand les CL prescrites sont constitués de déplacement et de contrainte, le système devient:

$$\left[\begin{array}{l} b_a^i = \sum_{j=1}^N C_{aa}^{ij} D_a^i + \sum_{j=1}^N C_{an}^{ij} D_n^j \\ b_n^i = \sum_{j=1}^N C_{na}^{ij} D_a^i + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j \end{array} \right. \quad (4-44)$$

Avec b_a^i et b_n^i les conditions aux limites connues sur la frontière de déplacement et de contrainte.

CHAPITRE 5

ORGANISATION DU PROGRAMME.



CINQUIEME CHAPITRE: ORGANISATION DU PROGRAMME.

5.1 INTRODUCTION:

La méthode des discontinuités de déplacement revient à écrire un système d'équation, qui s'écrit sous la forme:

$$[C] \{D\} = \{B\} \quad (5-1)$$

Où :

[C] : matrice des coefficients d'influence
{D} : vecteur des discontinuités de déplacement
{B} : vecteur des conditions aux limites connues sur la frontière

5.2 PROGRAMMATION:

Le programme peut traiter deux problèmes différents:

- Problème d'élasticité plane, en déformation plane.
- Problème de propagation des fissures.

5.2.1 Problème d'élasticité plane:

On distingue dans la structure du programme, les parties suivantes:

- Entrée des données:

Les données sont construites principalement d'information sur les caractéristiques mécaniques du matériau (coefficient de Poisson, module de Young), et sur le nombre de segment et d'arc de cercle formant la frontière du domaine.

Cette partie doit transmettre toutes les informations nécessaires aux autres parties du programme. Ainsi, la subroutine MAILLE, permet le maillage automatique des segments et des arcs. Elle donne les coordonnées du centre de l'élément, l'orientation de l'élément, la longueur de l'élément et les conditions aux limites de l'élément.

* Subroutine VCHAR: Elle permet de transférer les conditions aux limites de l'infini, sur la frontière du domaine.

Lors de la discrétisation, on doit prendre les précautions suivantes:

** Adopter la convention suivante:

Pour un corps fini, le contour est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre. Cependant, le contour d'une cavité est parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

** Prévenir le déplacement de corps rigide:

Dans le cas d'un problème intérieur, on impose au moins trois composantes de déplacement en deux points de la frontière. Pour un problème extérieur, on risque le déplacement de corps rigide de la région intérieure. Dans ce dernier cas, si on a une double symétrie, la région intérieure est automatiquement fixée par rapport aux axes de symétrie. Sinon, il faudrait au moins fixer deux éléments orientés différemment à l'intérieur de la région intérieure.

** Conditions de symétrie:

Pour certain problème, il existe des axes de symétrie, lorsqu'il y'a une symétrie de géométrie et de chargement, par rapport à ces axes. On pourrait mettre en profit cette symétrie, au lieu de discrétiser tout le contour, on discrétisera seulement une portion, qui jouera le rôle de la portion réelle, et puisque l'axe de symétrie agit comme un miroir, la portion restante représente une image. Par conséquent, les discontinuités de déplacement normales des éléments réels et images sont égaux, mais les discontinuités tangentielles changent de signe en traversant l'axe de symétrie. Cette symétrie peut être incorporée en introduisant l'effet des coefficients d'influence des éléments images et ceci en générant ces éléments et calculant leur coefficients d'influence par le programme

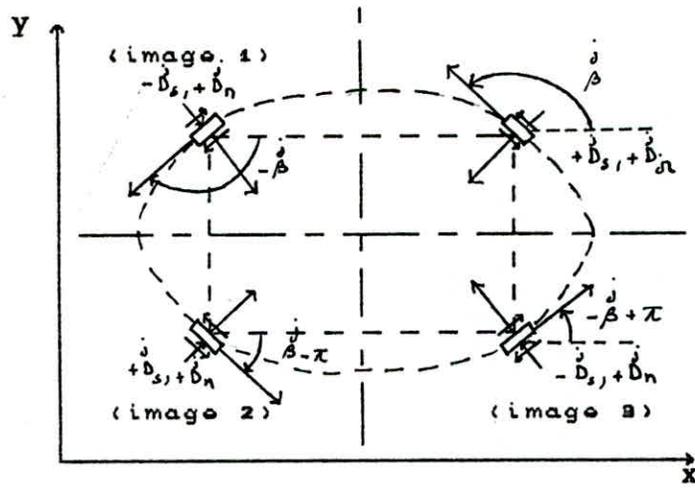


fig 5.1: conditions de symétrie pour les axes $x=x_{sym}$, $y=y_{sym}$

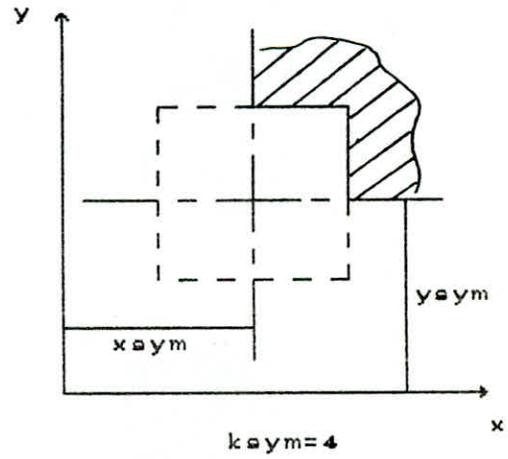
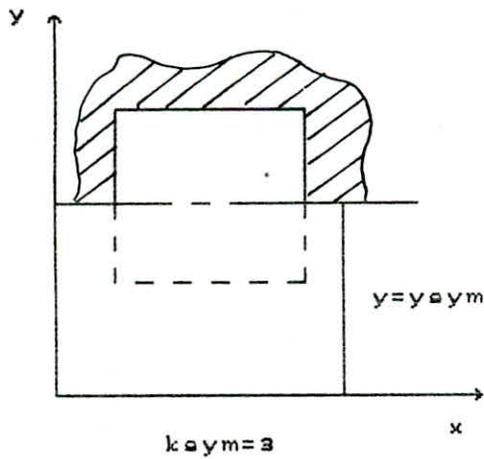
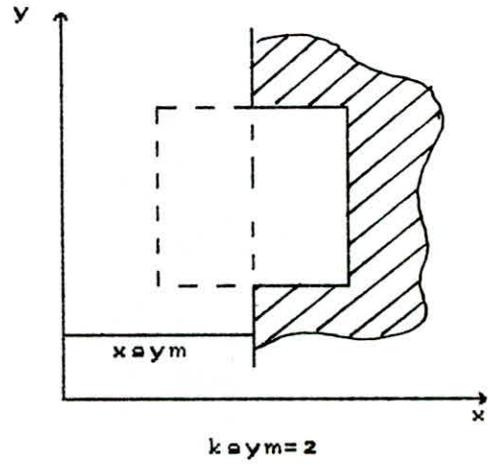
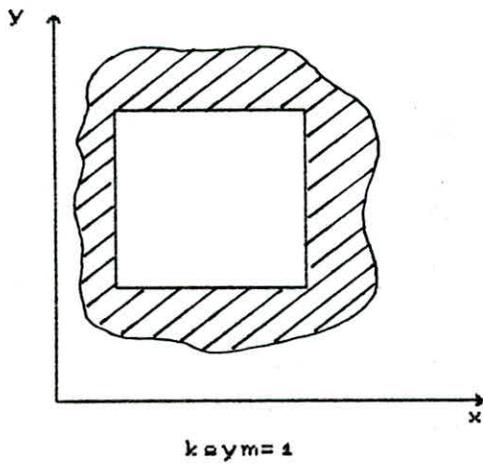


fig 5.2: Spécification de la nature de symétrie utilisant le code keym.

- remplissage de la matrice des coefficients d'influence:

* Subroutine COEFF: Elle permet le calcul des coefficients d'influence.

* Subroutine INFACT: Elle permet le remplissage de la matrice [C] des coefficients d'influence.

- Résolution du système d'équation:

Elle est effectuée par un sous programme simple de Gauss sans pivots (subroutine SOLVE)

- Calcul des contraintes et déplacements:

* Subroutine SFRONT: Elle permet le calcul des contraintes et déplacements sur la frontière.

* Subroutine SDOM: Elle permet le calcul des contraintes et déplacements, en des points choisis du domaine.

5.2.2 Problème de propagation des fissures:

Cette partie du programme calcul le taux de restitution d'énergie G, et la direction de propagation de la fissure pour deux situations différentes:

- Propagation par un seul bout de la fissure.

- Propagation par les deux bouts de la fissure.

** Calcul numérique de G:

En contrainte imposée, l'expression (2-10) s'écrit:

$$G = \frac{1}{2} \int T_i \frac{dU_i}{dl} d\Gamma \quad (5-2)$$

Ecrivons cette expression sous forme incrémentale, désignons par $U_i^{(1)}$ et $U_i^{(2)}$, les champs de déplacement avant et après progression de la fissure de dl.

Le terme sous le signe intégrale s'écrit:

$$T_i dU_i = T_i (U_i^{(2)} - U_i^{(1)}) \quad (5-3)$$

Alors, (5-2) s'identifie à:

$$G dl = \int_{\partial\Omega} T_i (U_i^{(2)} - U_i^{(1)}) d\Gamma + \int_{\Gamma^- \cup \Gamma^+} T_i (U_i^{(2)} - U_i^{(1)}) d\Gamma \quad (5-4)$$

Ou bien:

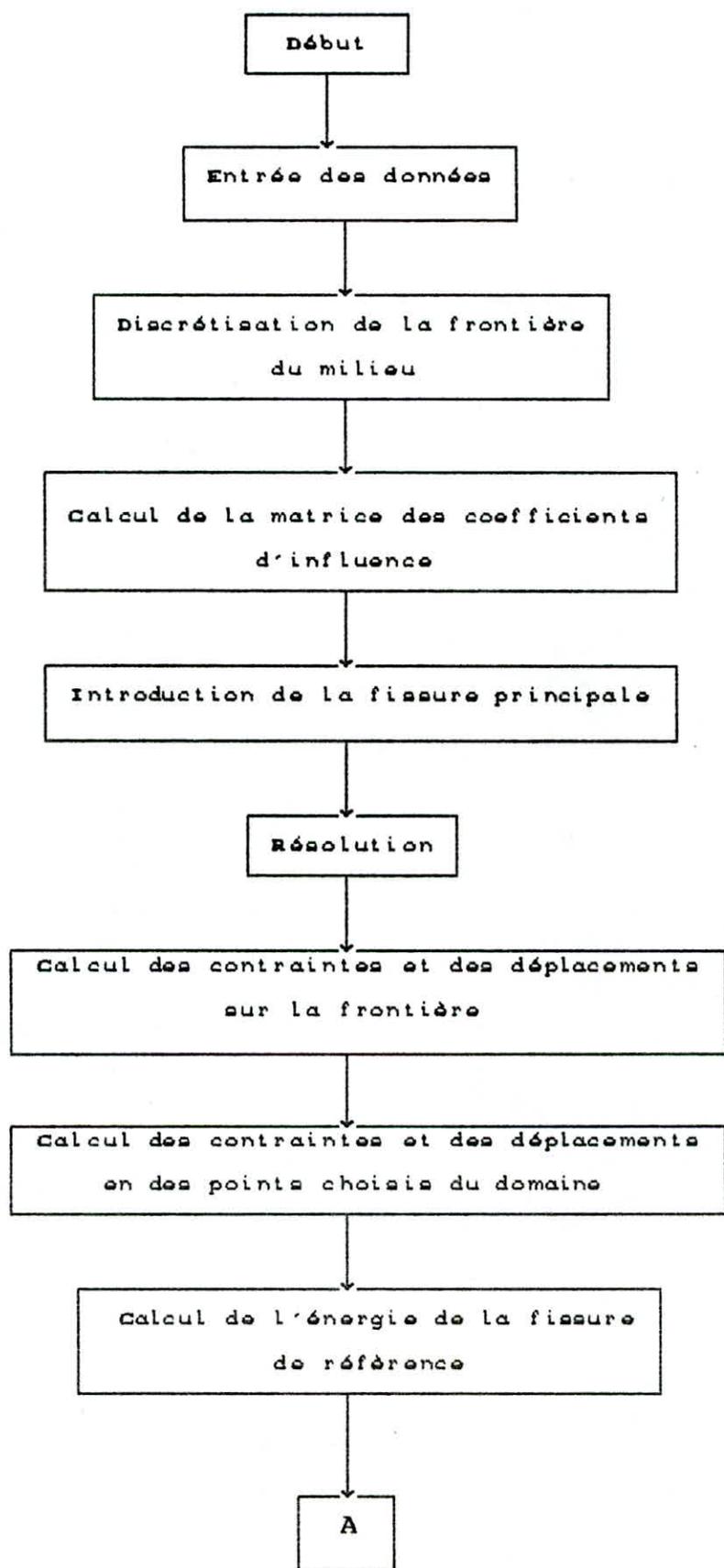
$$G dl = \int_{\partial\Omega} T_i (U_i^{(2)} - U_i^{(1)}) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_i (D_i^{(2)} - D_i^{(1)}) d\Gamma \quad (5-5)$$

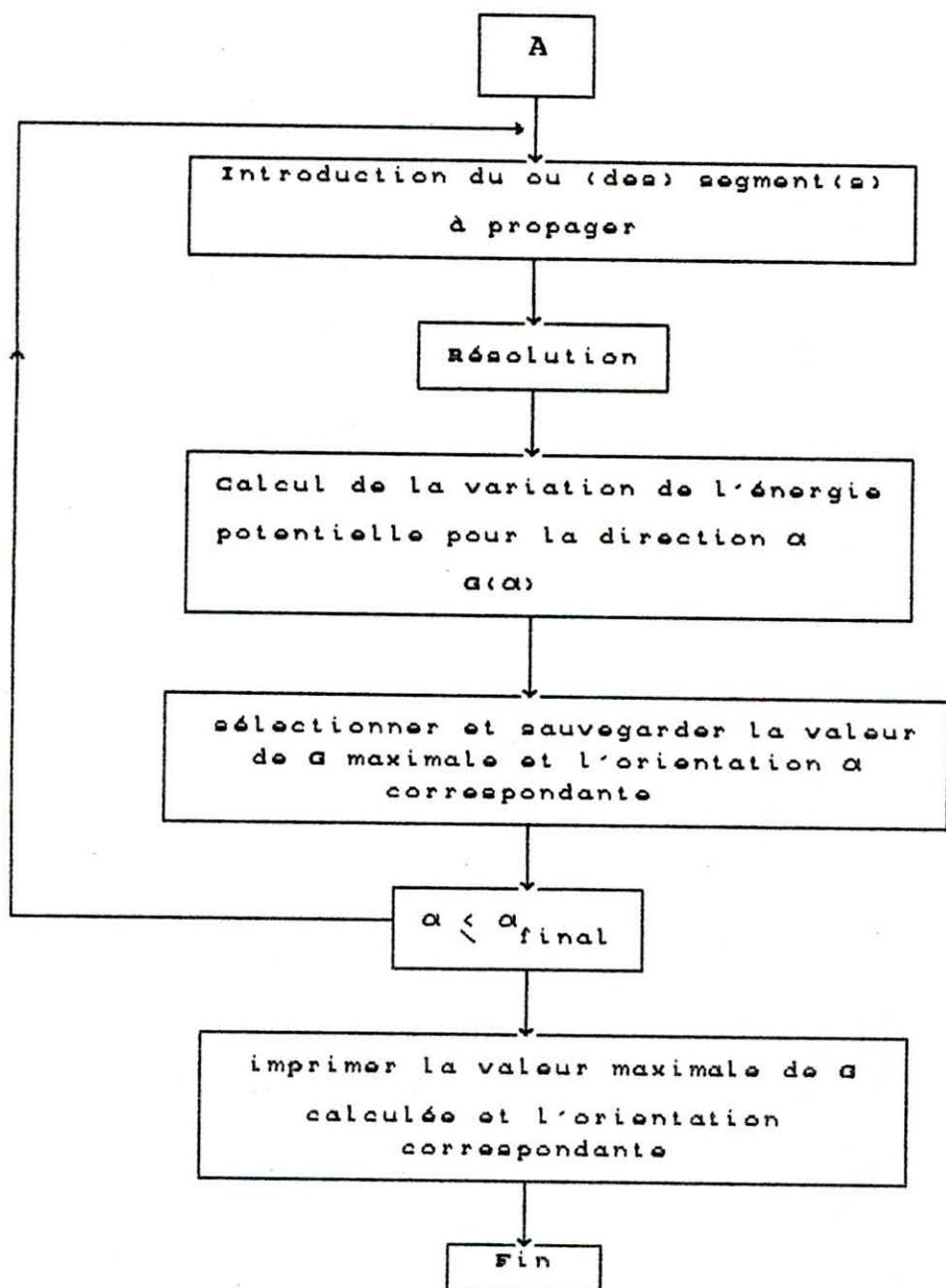
Ainsi, le calcul numérique de G se fera, en discrétisant l'expression (5-2), on obtiendra une somme des produits $T_i (U_i^{(2)} - U_i^{(1)})$ sur le contour $\partial\Omega$ et des produits $T_i (D_i^{(2)} - D_i^{(1)})$ sur la fissure.

La matrice des coefficients d'influence pour l'état (2) (après propagation) est obtenue, en ajoutant des lignes et des colognes, qui correspondent à ceux des éléments propagés, à celle obtenue pour l'état (1). Ce qui constitue un avantage pour la méthode des discontinuités de déplacement pour le calcul de G.

En plus de la,

* Subroutine DON: qui fait la même chose que la subroutine MAILLE, pour les éléments propagés.
 les sousroutines citées précédemment seront utilisées dans cette partie, pour le calcul des déplacement dans chaque état.





Organigramme de la propagation d'une fissure

CHAPITRE 6

APPLICATION DE LA METHODE
DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT
A LA PROPAGATION DES FISSURES.



SIXIEME CHAPITRE: APPLICATION DE LA METHODE DES
DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT A LA
PROPAGATION DES FISSURES.

Ce chapitre donne un certain nombre d'exemples de calculs bidimensionnels plans. Son but est d'illustrer le comportement de la méthode tant sur le plan numérique que sur le plan mécanique, on donnera des exemples d'application d'éprouvettes sollicitées en traction et en flexion. On prendra un matériau avec les caractéristiques suivantes:

$$E = 2.10^5 \text{ MPA}$$

$$\nu = 0.3$$

6-1 PLAQUE INFINIE EN TRACTION:

6.1.1 Fissure horizontale:

On considère un milieu élastique plan, contenant une fissure de longueur $2a$, sollicitée en traction. La solution analytique du taux de restitution d'énergie et du facteur d'intensité de contrainte.

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2$$

$$K_I = \sigma (\pi a)^{\frac{1}{2}}$$

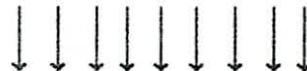
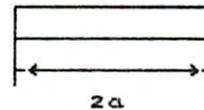
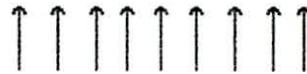
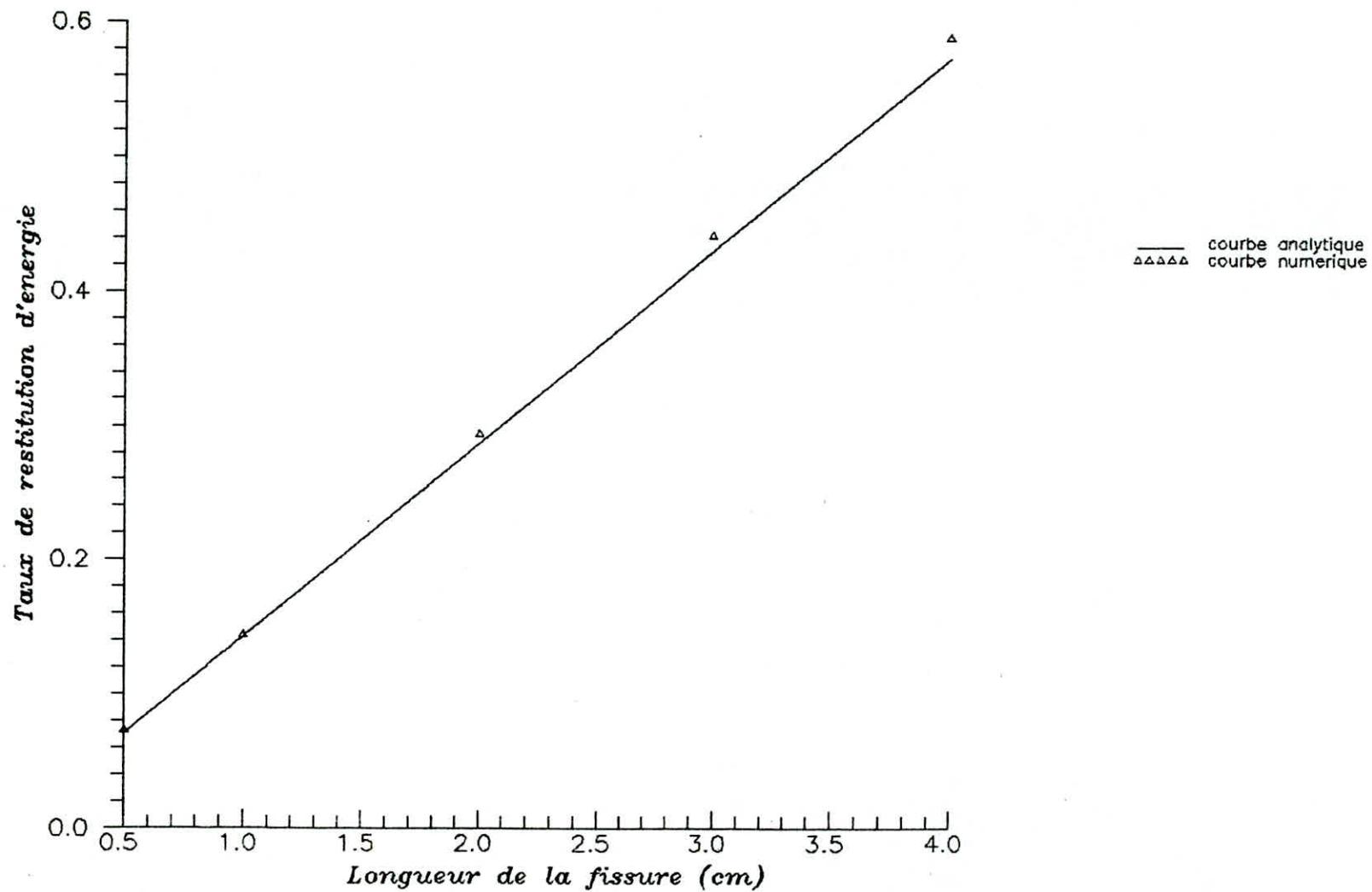


fig 6.1 : fissure horizontale.

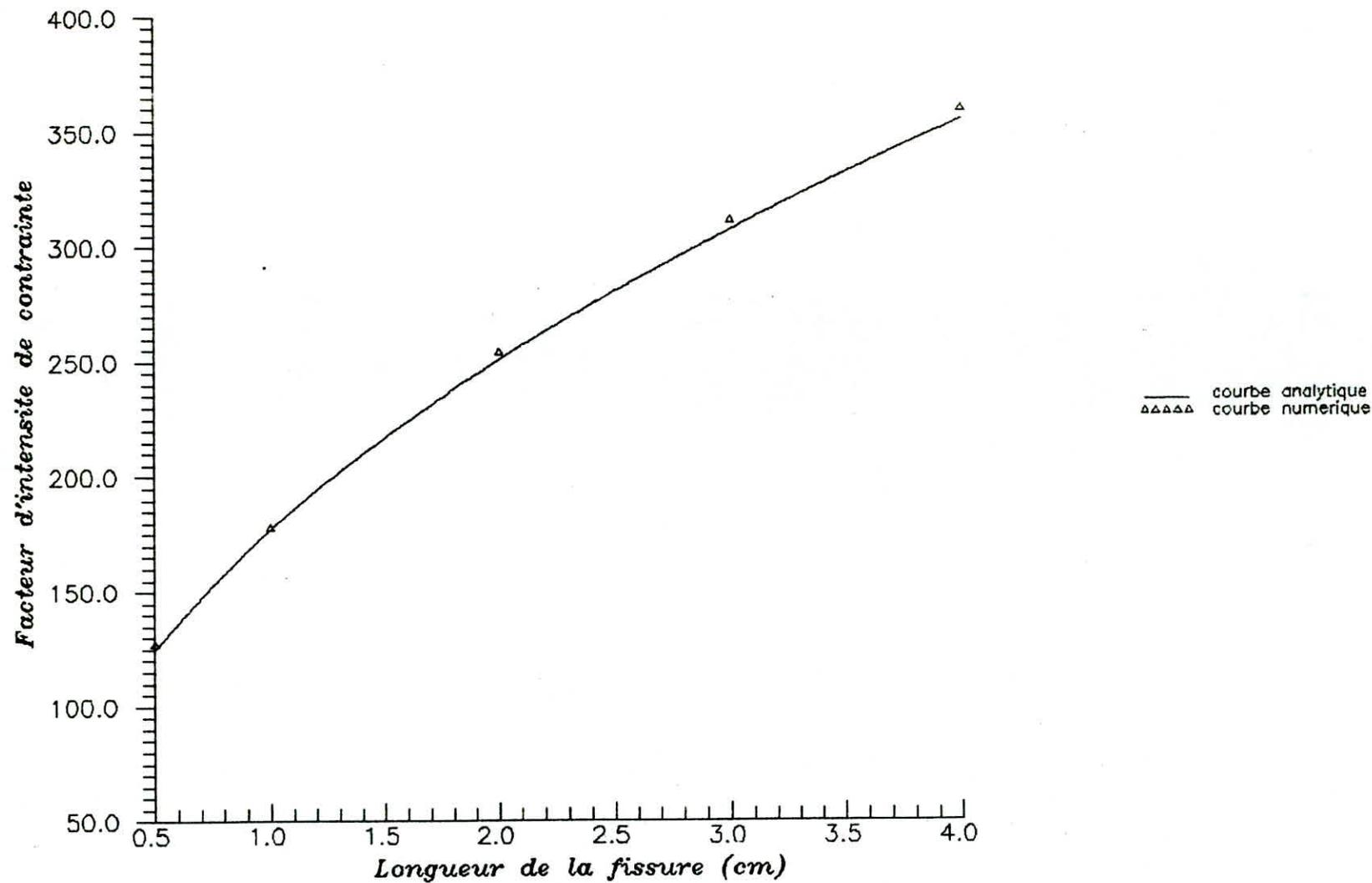
Les résultats numériques sont:

a	G_{anal}	G_{num}	$K_{r anal}$	$K_{r num}$	E %
0.5	0.071	0.074	124.92	127.53	1.4
1	0.143	0.145	177.28	178.51	2.7
2	0.286	0.294	250.71	254.19	2.7
3	0.429	0.441	307.06	311.32	2.7
4	0.572	0.588	354.56	359.48	3.5

La fissure a été discrétisé avec 50 éléments à un noeud. On remarque le bon accord entre les résultats numériques et analytiques, l'erreur moyenne est de 2.6 %, et qui peut être diminuée considérablement en augmentant le nombre d'éléments. La fissure se propage dans sa propre direction, ce qui est conforme aux résultats désirés, car la fissure s'ouvre symétriquement.



Courbe du taux de restitution d'energie



Courbe du facteur d'intensite de contrainte pour une fissure horizontale

6.1.2 Fissure orientée arbitrairement:

Le milieu infini contient une fissure orientée d'un angle β , par rapport à la direction de chargement. Dans cette exemple on a un mode mixte. La solution analytique de G , K_I , K_{II} .

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2)$$

$$K_I = \sigma (\pi a)^{\frac{1}{2}} \sin^2 \beta$$

$$K_{II} = \sigma (\pi a)^{\frac{1}{2}} \sin \beta \cos \beta$$

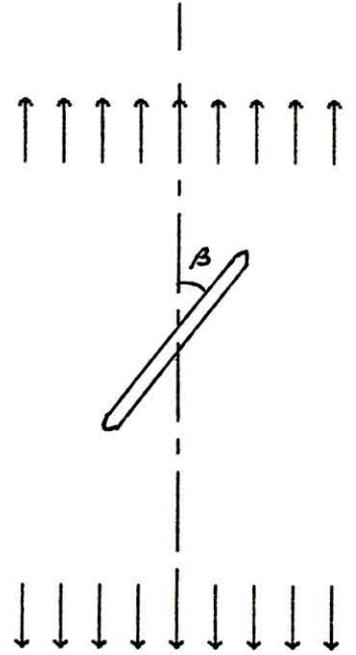
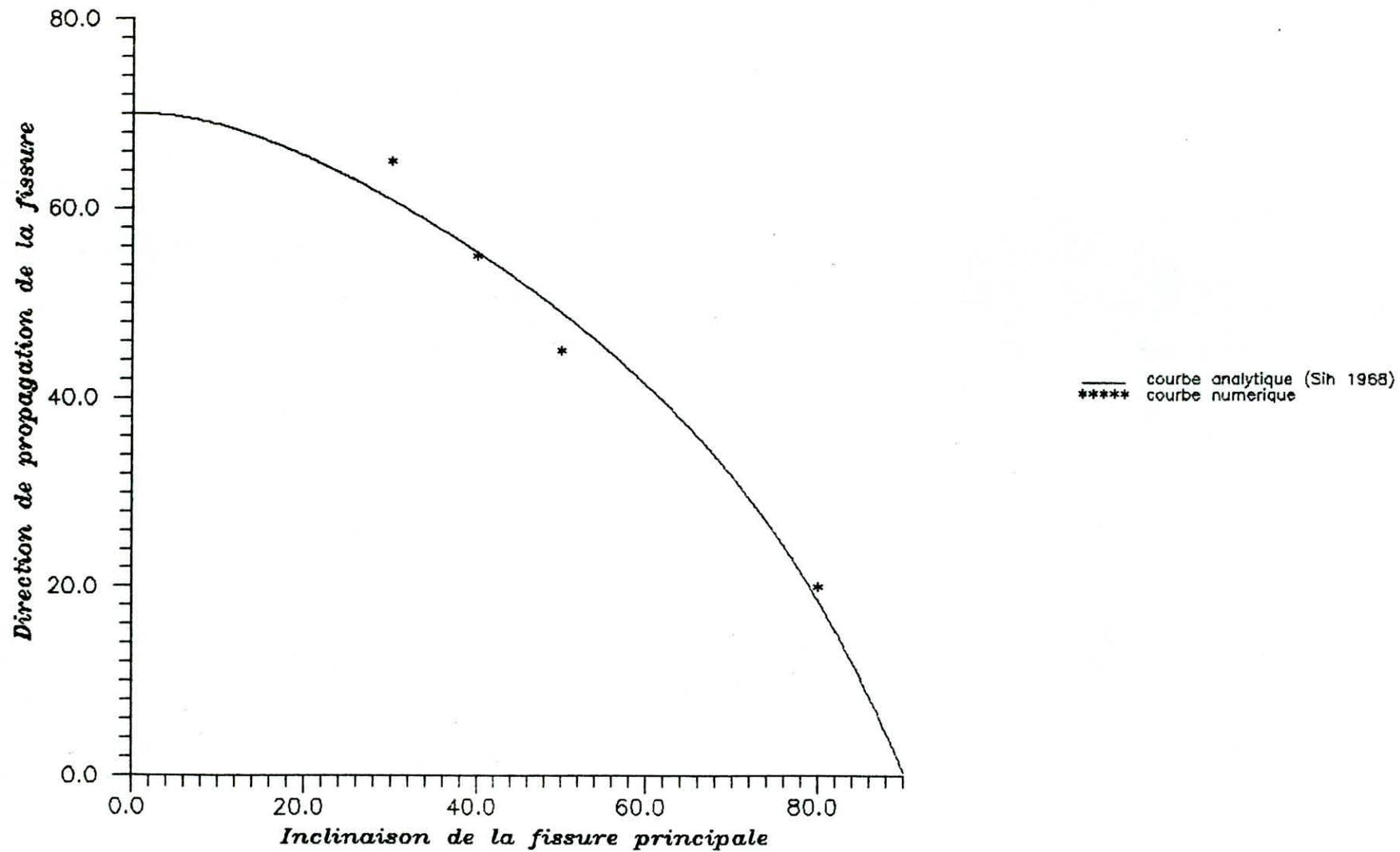
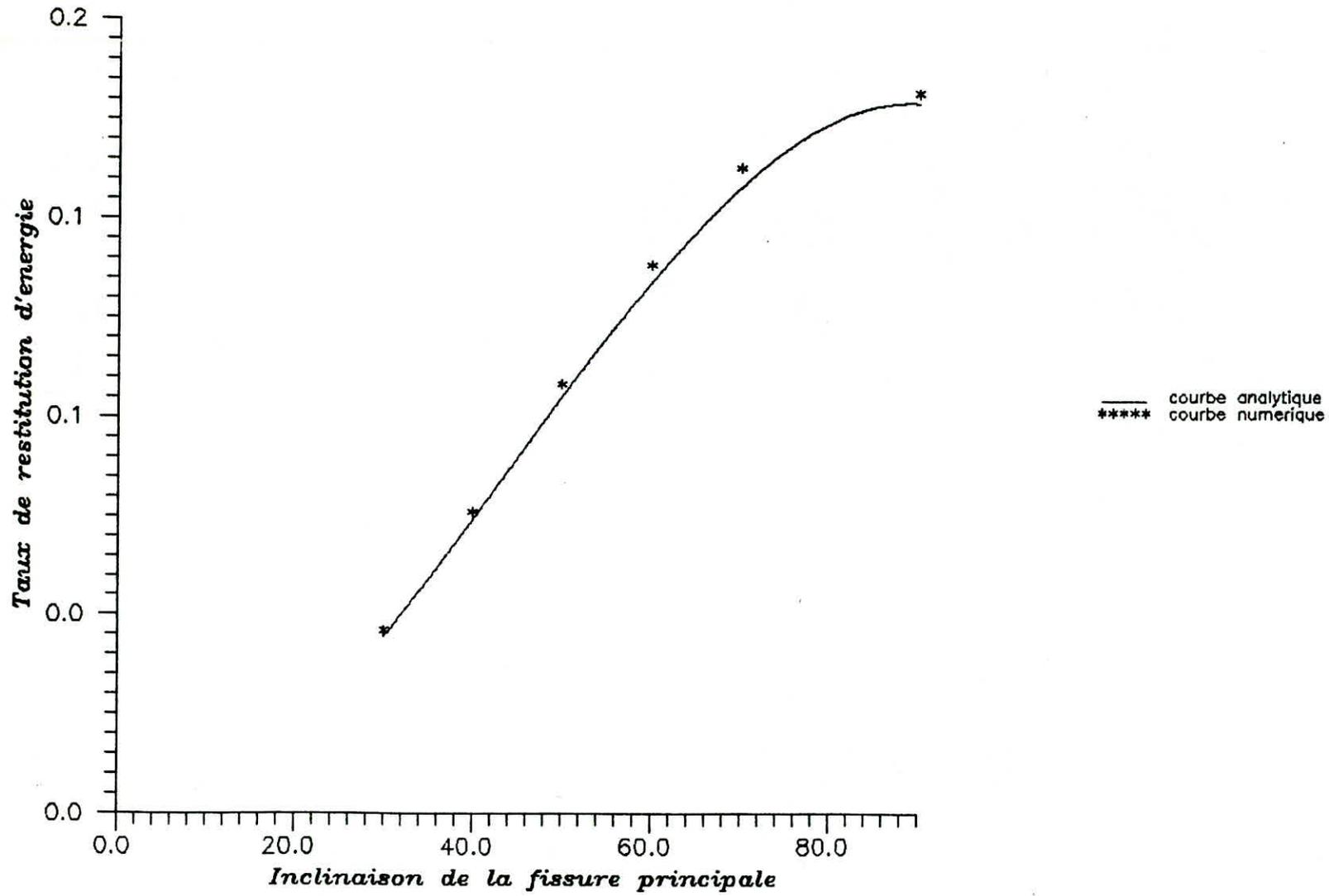


fig 6.2 : fissure orientée arbitrairement.

Cette exemple a été traité essentiellement pour déterminer la direction de propagation de la fissure principale, pour chaque orientation β de celle-ci. Les résultats obtenus sont conformes aux résultats analytiques données par (Sih 1968). Pour la recherche de l'inclinaison de la fissure la plus défavorable, nous déterminons le taux de restitution d'énergie en fonction de l'inclinaison β , cette direction correspond à la valeur maximale de G . Dans notre cas, l'inclinaison la plus défavorable est 90° .



*Direction de propagation de la fissure en fonction
de son inclinaison*



Recherche de l'orientation de la fissure
la plus defavorable

6.2 DOUBLE FISSURE DEBOUCHANTE DANS UNE PLAQUE FINIE:

Le cas des fissures dans une plaque de taille finie est évidemment d'un grand intérêt pratique. Analytiquement, le problème de la détermination du champ de contrainte est rendu complexe par les conditions aux limites. Ainsi, la valeur empirique du facteur d'intensité de contrainte pour cette exemple.

$$K_I = \sigma \sqrt{a} f\left(\frac{a}{b}\right)$$

avec: $f\left(\frac{a}{b}\right) = 1.99 + 0.76 \frac{a}{b} - 8.48 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 27.36 \left(\frac{a}{b}\right)^3$

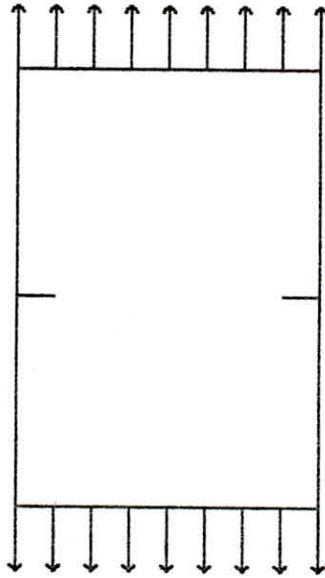
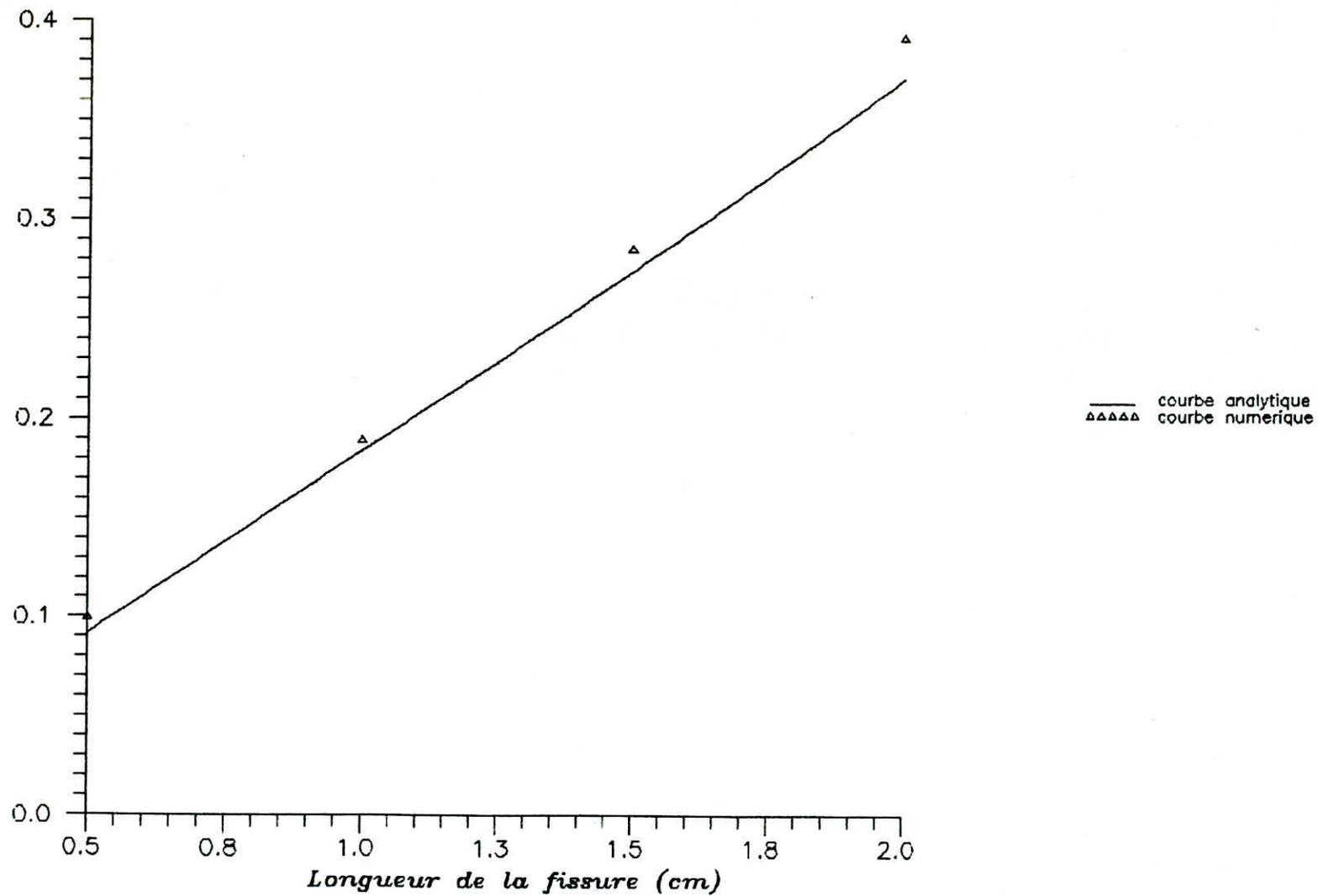


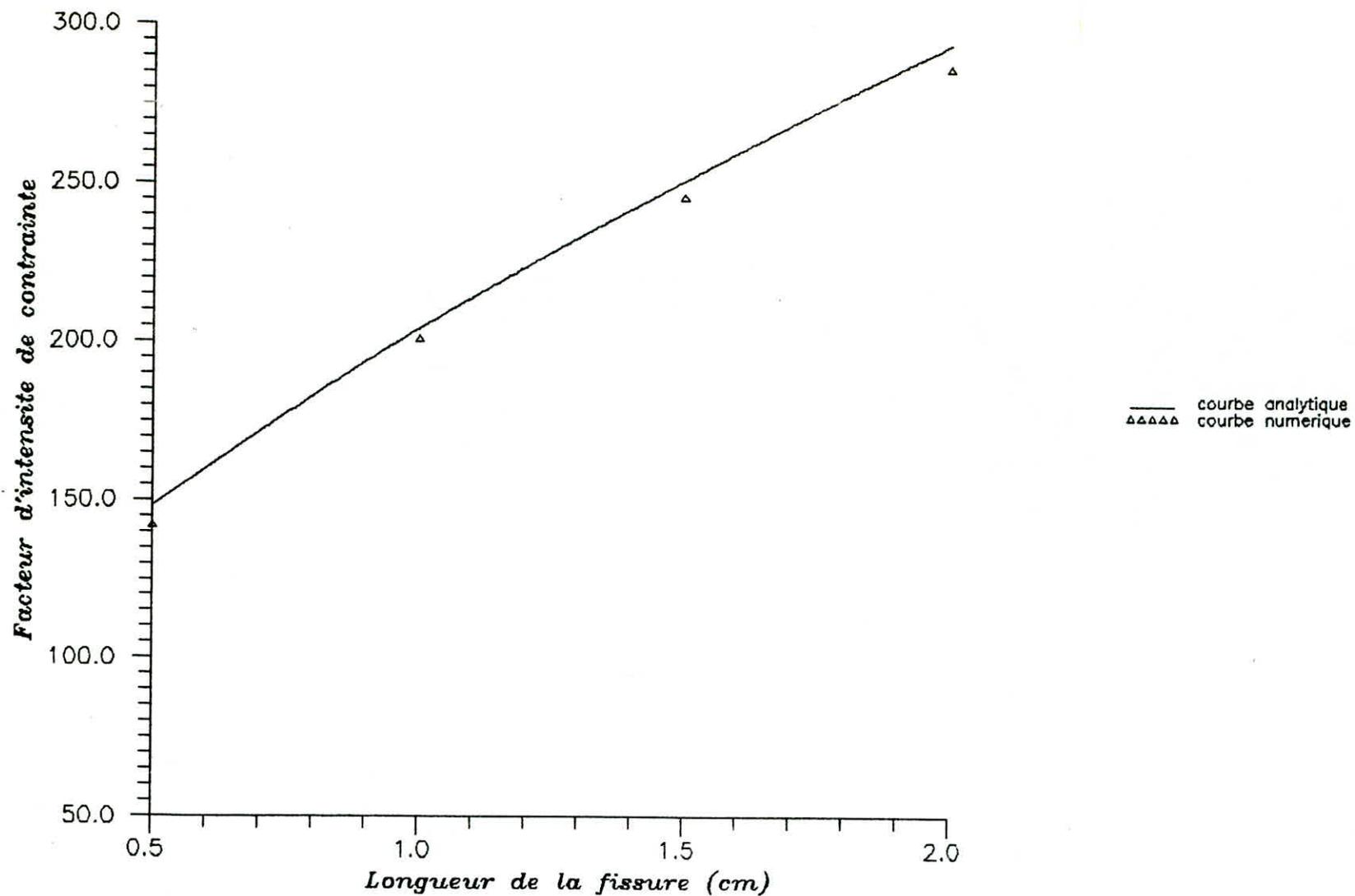
fig 3.3 : Double fissure débouchante dans une plaque finie.

Résultats numériques:

a	G _{anal}	G _{num}	K _{r anal}	K _{r num}	E %
0.5	0.099	0.092	148.18	142.02	4
1	0.189	0.184	204	201	1.4
1.5	0.286	0.274	250.6	254.63	1.6
3	0.391	0.371	293.33	285.91	2.5

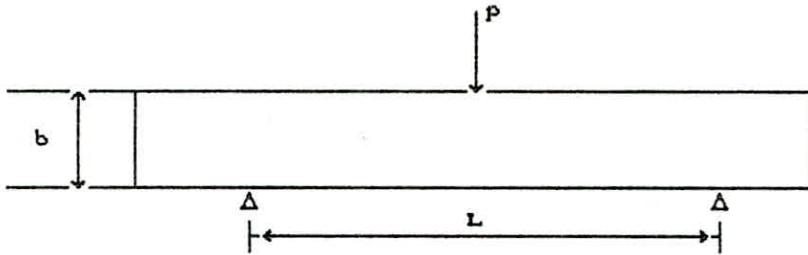


Courbe du taux de restitution d'energie pour une double fissure debouchant dans une plaque finie



Courbe du facteur d'intensité de contrainte pour une double fissure débouchant dans une plaque finie

6.3 EPROUVETTE FLEXION EN TROIS POINTS SANS FISSURE



La valeur analytique de l'énergie potentielle de l'éprouvette est :
(par la théorie de l'élasticité)

$$W = \frac{P^2 l^3}{64 EF}$$

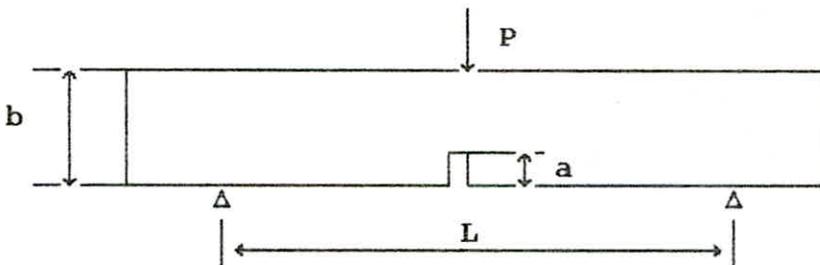
Résultat numérique

$$\begin{aligned} W_{\text{anal}} &= 0.0036 \text{ MJ} \\ W_{\text{num}} &= 0.0032 \text{ MJ} \end{aligned}$$

Cette exemple a été pris pour valider le calcul de l'énergie.

6.4 EPROUVETTE FLEXION EN TROIS POINTS ENTAILLEE : (SENB : Simple Edge Notched Beam Specimen)

L'éprouvette SENB est facile à usiner, elle est utilisée pour le calcul de la ténacité des matériaux fragiles (céramique). La géométrie de l'éprouvette est donnée par la figure :



La valeur empirique du facteur d'intensité de contrainte est :

$$K_I = \frac{3 PL}{2b^2 l} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right)$$

1^{er} référence:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = 1.09 - 1.735 \frac{a}{b} + 8.2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 14.18 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 14.57 \left(\frac{a}{b}\right)^4$$

2^{me} référence:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = 1.12 - 1.393 \frac{a}{b} + 7.317 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13.07 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 13.99 \left(\frac{a}{b}\right)^4$$

Avec les données:

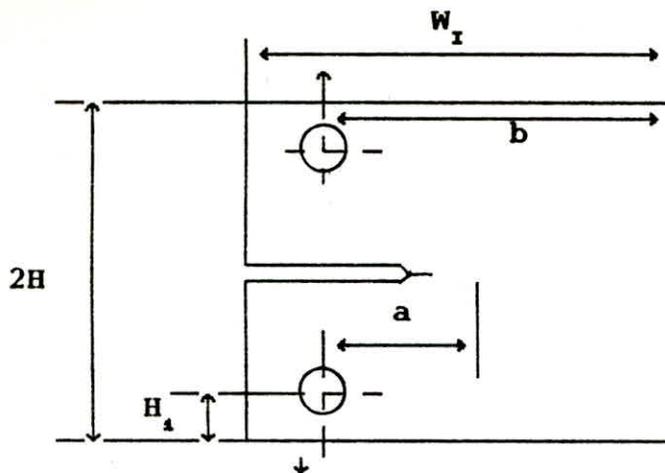
$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ Cm} \\ b &= 5 \text{ Cm} \\ l &= 20 \text{ Cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{anal} &= 0.410 \text{ MJ} && (1^{\text{er}} \text{ référence}) \\ G_{anal} &= 0.440 \text{ MJ} && (2^{\text{me}} \text{ référence}) \\ G_{numé} &= 0.406 \text{ MJ} \end{aligned}$$

Une bonne discrétisation de l'éprouvette SENB est très importante pour pouvoir obtenir le résultat correcte. En effet, on remarque sur plusieurs maillages de l'éprouvette que les valeurs de l'énergie sont sensiblement différentes. Une bonne discrétisation au niveau de la fissure est importante, il faut affiner le maillage de la fissure en raison de la forte concentration de contraintes. l'éprouvette a été maillé avec 102 éléments, sans utiliser la symétrie.

6.5 EPROUVETTE COMPACTE DE TRACTION NORMALISEE (CT):

La géométrie de l'éprouvette est représentée sur la figure 6.5,



$$\begin{aligned}
 b &= 21 \\
 a &= 1 \\
 H &= 1.21 \\
 D &= 0.51 \\
 W_I &= 2.51 \\
 H_I &= 0.651
 \end{aligned}$$

fig 6.5 : Eprouvette compacte de traction.

La valeur empirique de K_I :

$$\begin{aligned}
 K_I = \frac{P}{l (b)^{1/2}} & \left(29.6 \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2} - 185.5 \left(\frac{a}{b} \right)^{3/2} \right. \\
 & \left. + 655.7 \left(\frac{a}{b} \right)^{5/2} - 1017 \left(\frac{a}{b} \right)^{7/2} + 638.9 \left(\frac{a}{b} \right)^{9/2} \right)
 \end{aligned}$$

L'éprouvette a été discrétisée avec 147 éléments, sans utilisé la symétrie. Pour éviter le déplacement de corps rigide, on fixe le point qui se trouve sur la frontière à droite de la fissure sur le même axe de cette dernière. Les efforts de traction sont appliqués aux sommets des trous.

Le résultat analytique pour $l = 4$ cm

$$G_{anal} = 0.423 \text{ MJ}$$

Le résultat numérique

$$G_{num} = 0.400 \text{ MJ}$$

Nous remarquons bien l'accord entre la valeur analytique et la valeur numérique, qui peut être considérablement amélioré en affinant le maillage au niveau de la fissure.

6.6 EPROUVETTE DOUBLE POUTRE ENCASTREE: (DPE)

La géométrie de l'éprouvette est donnée par la figure suivante:

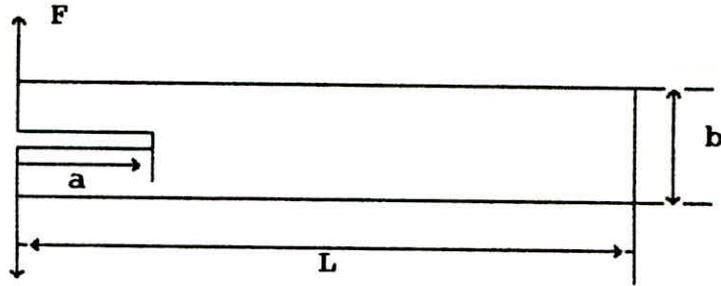


fig 6.6 : Eprouvette double poutre encastrée

Les données pour cette éprouvette sont:

$a = 5.083 \text{ cm}$	$E = 128680 \text{ MPA}$
$b = 0.67 \text{ cm}$	$\nu = 0.22$
$L = 19.8 \text{ cm}$	$F = 129.5 \text{ N}$

Cette éprouvette a été discrétisé avec 94 éléments, dont 50 éléments de même dimension pour la fissure. Cette éprouvette avec ces données a été traité par élément fini, le résultat obtenu est:

$$G_{ef} = 200 \text{ MJ}$$

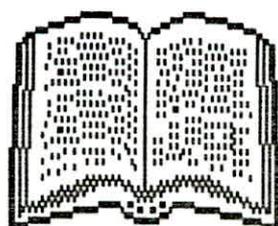
Avec notre méthode, on obtient:

$$G_{num} = 196.7 \text{ MJ}$$

6-7 CONCLUSION:

Ce chapitre a permis d'utiliser la méthode des discontinuités de déplacement à la propagation des fissures. Les exemples traités sont variés et la méthode peut être appliquée à d'autres éprouvettes (SENT, DCB). Le problème qui se pose dans l'analyse par la méthode des discontinuités de déplacement est le choix de la modélisation (le nombre d'éléments pour représenter le contour et le maillage fin dans les régions à la forte concentration de contrainte). La préparation des données ne pose aucun problème surtout avec l'utilisation du maillage automatique, et le changement des données pour traiter des cas avec d'autres longueurs de fissure ne nécessite pas de modification importante.

CONCLUSION



CONCLUSION GENERALE

La méthode des discontinuités de déplacement s'est avérée être un outil très puissant dans l'analyse des structures fissurées. En effet, sur le plan mécanique la simulation de ce genre de structure par cette méthode est parfaitement adaptée, vu que dans le cas de l'élasticité, la fissure pose un problème de singularité. Sur le plan numérique, la méthode ne nécessite pas une grande préparation de données, à l'opposé de la méthode des éléments finis qui, pour l'éprouvette CT nécessite environ une journée de préparation. De plus, pour le calcul du taux de restitution d'énergie qui s'écrit sous forme d'une intégrale sur le contour ne nécessite que la connaissance des déplacements et tensions à la frontière.

Dans le cas où, la zone plastique en bout de fissure prend de l'importance, la méthode se trouve inadaptée.

Cette méthode offre encore d'autres domaines d'application. Elle peut être étendue par exemple au milieu viscoélastique linéaire et aux milieux stratifiés.

En recommandation, nous espérons que le logiciel soit complété pour traiter des milieux semi-infinis, et reprendre, le travail en champ complexe, avec des éléments plus performants.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BABAAMER H. " Fortran 77 ".Ed Berti;
- [2] BARTHELEMY H." Notions de mécanique de la rupture ".Eyrolles
- [3] BELKACEMI Y.,(1990)" Méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe "_Thèse de Doctorat, Université des sciences et techniques de Lille.
- [4] BUI H.D. (1978)" Mécanique de la rupture fragile "_ed.Masson,Paris
- [5] C.E.T.I.M : " Application de la méthode des équations intégrales à la mécanique ".Rapp.1984.
- [6] CROUCH S.L.(1976)_ " Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method "_Int.J.for Num.Meth.in Eng., Vol.10,pp.301.
- [7] CROUCH S.L,STARFIELD A.M.(19783)" Boundary element methods in Geomechanics "_Ed.George Allen and Uwin.
- [8] LABBENS R: " Introduction à la mécanique de la rupture" .Pluralis
- [9] LEMAITRE J_ CABOCHE J.L. " Mécanique des matériaux solides ".Dunod
- [10] PARTON.V. " Méthode de la théorie mathématique de l'élasticité ".Ed Mir 1977.
- [11] ROUAINIA.M, " Modélisation numérique de la progression de fissures dans les solides élastiques "_Rapport de stage,Université des sciences et techniques de Lille.
- [12] SOLOMON.L. " Elasticité linéaire " . Masson.1968.
- [13] ZIENKIWICZ. " Méthode des éléments finis "

