

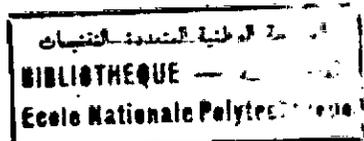
8/c

QUE A ENN

PUL

MINISTERE DE L'L

ECOLE NATIONALE POL JE



DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

# OBJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

ANALYSE D'ECOULEMENTS AUTOUR D'OBSTACLES  
ET ELABORATION D'UN MAILLEUR PAR  
LA METHODE DES SINGULARITES

P

M. BOU

Etudié par :

M. LAOUBI Habib  
M. ROUBI Mahdy

Dirigé par :

M. BOUDJEMAA M.

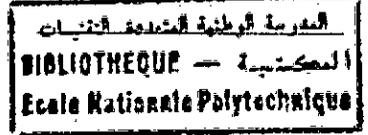
PROMOTION 1993-1994

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi - El-Harrach - ALGER

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

**ANALYSE D'ECOULEMENTS AUTOUR D'OBSTACLES  
 ET ELABORATION D'UN MAILLEUR PAR  
 LA METHODE DES SINGULARITES**

Proposé par :

M. BOUDJEMAA M.

Etudié par :

M. LAOUBI Habib  
M. ROUBI Mahdy

Dirigé par :

M. BOUDJEMAA M.

PROMOTION 1993-1994

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi - El-Harrach - ALGER

## DEDICACES

المركز الوطني المتعدد التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
École Nationale Polytechnique

A mes chers Parents, à qui je dois tout.

A mes Frères et Soeurs.

A toute ma Famille.

A tous ceux qui me sont chers.

Habib.

A mes très chers Parents, qui m'ont tout apporté.

A ma chère Famille.

Mahdy.

## REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Nous remercions particulièrement Monsieur BOUDJEMAA Mohamed, enseignant à l'Ecole Nationale Polytechnique, pour son dynamisme et ses compétences qu'il a su associer à travers ses précieux conseils. Nous le remercions aussi pour la disponibilité dont il a fait preuve tout au long de cette étude.

Que tous les enseignants qui ont contribué à notre formation trouvent ici notre profonde reconnaissance.

Nous remercions également l'ensemble du personnel de la bibliothèque de l'E.N.P.

Nous ne saurions oublier Monsieur NACEREDDINE Rabia, post-graduant à l'E.N.P., pour l'intérêt et les judicieux conseils qu'il a apporté à notre étude.

ملخص

إن تقارب الطرق الحسابية لتحليل سريان متواجد  
حول عوائق، تحتاج إلى ترفيع الدقظاب  
ولتبينا استعمال طريقة الأسايات التي تعتمد على  
وضع لوحات محملة بالأسايات المتواجدة حول محيط العوائق،  
يمكن لبعض أنواع السريان أن تتظاهر لتؤكد مجموعة من الدقظاب

## RESUME

La convergence des méthodes de résolution numérique lors de l'analyse d'écoulements autour d'obstacles dépend pour une grande part de la qualité des maillages utilisés.

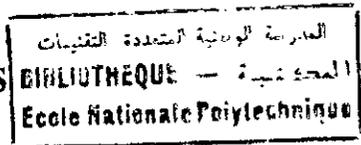
En adoptant la méthode des singularités, qui consiste à disposer des panneaux de singularités sur le contour de l'obstacle, certains types d'écoulements peuvent être simulés, permettant ainsi de générer un ensemble de maillages.

## ABSTRACT

The convergence of the resolution processes during the analysis of flows around obstacles depends in a large amounts on the quality of used grid.

Usind the singularity method, which consists on disposing singularity panels on the contour of the obstacle, some kinds of flow can be simulated, in this manner a set of grids is generated.

# TABLES DES MATIERES



I. GENERALITES .....	2
I.1 EQUATION DE CONSERVATION ET DE CONTINUE.....	2
I.2 LA DERIVEE PARTICULAIRE .....	2
I.3 EQUATION DE CONTINUE .....	3
I.4 VORTICITE .....	3
I.5 CIRCULATION .....	5
I.6 FONCTION DE COURANT .....	5
I.7 LIGNES DE COURANT ET TRAJECTOIRES .....	6
I.7.1 INTERPRETATION PHYSIQUE D'UNE FONCTION DE COURANT .....	7
II. THEORIE DES ECOULEMENTS POTENTIELS.....	9
II.1 INTRODUCTION .....	10
II.2 DEFINITION D'UN ECOULEMENT POTENTIEL.....	10
II.2.1 PROPRIETE CARACTERISTIQUE DE LA FONCTION POTENTIELLE.....	10
II.2.2 RELATIONS ENTRE LES LIGNES EQUIPOTENTIELLES ET LES LIGNES DE COURANT.....	11
II.3 EQUATION DE CONTINUE DES ECOULEMENTS POTENTIELS INCOMPRESSIBLES .....	11
II.3.1 PROPRIETE ESSENTIELLE DE L'EQUATION DE LAPLACE ..	12
II.4 ECOULEMENTS POTENTIELS ELEMENTAIRES .....	12
II.4.1 ECOULEMENT UNIFORME .....	12
II.4.1.1 FONCTION DE COURANT D'UN ECOULEMENT UNIFORME .....	13
II.4.1.2 POTENTIEL DE VITESSE D'UN ECOULEMENT UNIFORME .....	13
II.4.1.3 FONCTION DE COURANT ET POTENTIEL DE VITESSES D'UN ECOULEMENT UNIFORME EN COORDONNEES POLAIRES.....	14
II.4.2 SOURCE .....	15
II.4.2.1 DEFINITION D'UNE SOURCE .....	15
II.4.2.2 FONCTION DE COURANT D'UNE SOURCE.....	15
II.4.2.3 POTENTIEL DE VITESSES D'UNE SOURCE.....	16
II.4.3 PUIT.....	16
II.4.4 VORTEX.....	16
II.4.4.1 FONCTION DE COURANT D'UN VORTEX .....	17
II.4.4.2 POTENTIEL DE VITESSES D'UN VORTEX.....	17
II.4.5 DIPOLE.....	18
II.4.5.1 DEFINITION D'UN DIPOLE .....	18
II.4.5.2 FONCTION DE COURANT D'UN DIPOLE.....	18
II.4.5.3 POTENTIEL DE VITESSE D'UN DIPOLE.....	19

II.4.5.4 VITESSES D'UN DIPOLE .....	20
II-4.6 TABLEAU RECUPITULATIF .....	20
III. DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DES SINGULARITES .....	21
III.1 INTRODUCTION INTUITIVE A LA METHODE DES SINGULARITES .....	22
III.2 CADRE DE L'ETUDE .....	22
III.3 MODELE DE SMITH .....	22
III.4 ANALYSE D'ECOULEMENT AUTOUR DE DIFFERENTS PROFILS PAR LA METHODE DES SINGULARITES .....	24
III.4.1 ANALYSE D'ECOULEMENT AUTOUR D'UN PROFIL NON PORTANT .....	24
III.4.1.1 CHARGE CONCENTREE DE SOURCE .....	24
III.4.1.2 CHARGE CONCENTREE DE VORTEX .....	26
III.4.1.3 CHARGE CONCENTREE DE DOUBLET .....	27
III.4.1.4 DISTRIBUTION UNIFORME DE SOURCES .....	29
III.4.1.4.1 CALCUL DE L'INTEGRALE I .....	30
III.4.1.4.2 CALCULS DES COEFFICIENTS .....	32
III.4.1.4.3 CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES .....	33
III.4.1.4.4 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE .....	34
III.4.1.5 DISTRIBUTION UNIFORME DE VORTEX .....	35
III.4.1.5.1 CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES .....	37
III.4.1.5.2 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE .....	38
III.4.1.6 DISTRIBUTION UNIFORME DE DOUBLETS .....	39
III.4.1.6.1 CALCUL DE L'INTEGRALE L .....	40
III.4.1.6.2 CALCULS DES COEFFICIENTS .....	44
III.4.1.6.3 CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES .....	46
III.4.1.6.4 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE .....	47
III.4.2 ANALYSE D'ECOULEMENT AUTOUR D'UN PROFIL PORTANT .....	49
III.4.2.1 DISTRIBUTION LINEAIRE DE VORTEX .....	50
III.4.2.1.1 CALCUL DES INTEGRALES W et H .....	52
III.4.2.1.2 CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES .....	54
III.4.2.1.3 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE .....	55
III.4.2.2 DISTRIBUTION LINEAIRE DE DOUBLETS .....	56
III.4.2.2.2 CALCUL DE L'INTENSITE DES SINGULARITES .....	62
III.4.2.2.3 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE .....	63
IV. APPLICATIONS DE LA METHODE DES SINGULARITES .....	65
IV.1 INTRODUCTION .....	66
IV.2 PARAMETRES CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT .....	66
IV.2.1 COEFFICIENT DE PRESSION .....	66
IV.2.2 COEFFICIENT DE PORTANCE .....	66
IV.2.3 POTENTIEL DE VITESSES ET FONCTION DE COURANT .....	68
IV.3 APPLICATIONS AUTOUR DE DIFFERENTS OBSTACLES .....	68

IV.3.1	CYLINDRES .....	69
IV.3.1.1	CYLINDRE FIXE .....	69
IV.3.1.2	CYLINDRE TOURNANT .....	69
IV.3.1.3	RANGEE DE CYLINDRES FIXES .....	70
IV.3.1.4	PROFIL D'AILE .....	71
V. ELABORATION D'UN MAILLEUR PAR		
	LA METHODE DES SINGULARITES .....	72
V.1 INTRODUCTION .....		
	73	73
V.2 CALCUL DES POTENTIELLES DE VITESSES		
	ET DES FONCTIONS DE COURANT .....	73
V.2.1	DISTRIBUTION UNIFORME DE SOURCES .....	74
V.2.2	DISTRIBUTION LINEAIRE DE SOURCES .....	75
V.2.3	DISTRIBUTION UNIFORME DE VORTEX .....	75
V.2.4	DISTRIBUTION LINEAIRE DE VORTEX .....	76
V.2.5	DISTRIBUTION UNIFORME DE DOUBLETS .....	76
V.2.6	DISTRIBUTION LINEAIRE DE DOUBLETS .....	76
V.3 CONSTRUCTION D'UN MAILLAGE PAR		
	LES LIGNES EQUIPOTENTIELLES ET LES LIGNES DE COURANT	77
V.3.1	PRINCIPE DU MAILLAGE .....	77
V.3.2	TRACE DES LIGNES EQUIPOTENTIELLES .....	77
V.3.3	TRACE DES LIGNES DE COURANT .....	77
V.3.4	DETERMINATION DES COORDONNEES AUX NOEUDS .....	80
V.3.5	ORGANIGRAMME DU MAILLAGE .....	80
V.3.5	ORGANIGRAMME DU PROGRAMME .....	86
VI. RESULTATS ET INTERPRETATIONS .....		
		89

## CONCLUSION

- ANNEXE A : Influence d'un panneau sur lui-même dans le cas d'une distribution de sources ou de vortex
- ANNEXE B : Influence d'un panneau sur lui-même dans le cas d'une distribution de doublets
- ANNEXE C : Expressions analytiques des caractéristiques d'un écoulement par la méthode de superposition
- ANNEXE D : Programme du mailleur

## NOMENCLATURE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

$\rho$	:	Masse volumique du fluide
$q, U_{\infty}$	:	Vitesse de l'écoulement uniforme
$u, v$	:	Composantes des vitesses
$N$	:	Nombre de panneaux
$\Gamma$	:	Circulation
$\alpha$	:	Angle d'incidence de l'écoulement
$r_{ij}$	:	Rayon position
$\delta_i$	:	Angle du panneau $i$ avec l'horizontale
$S_j$	:	Abscisse suivant la longueur du panneau
$\theta_i$	:	Position angulaire des sommets
$Xs(i), Ys(i)$	:	Coordonnées du sommet $i$
$x(i), y(i)$	:	Coordonnées du point de contrôle $i$
$l_j$	:	Longueur du panneau $j$
$k_j$	:	Intensité de la source au point $j$
$\gamma_j$	:	Intensité du vortex au point $j$
$\mu_j$	:	Intensité du doublet au point $j$
$\gamma_{sj}$	:	Intensité du vortex au sommet $j$
$\mu_{sj}$	:	Intensité du doublet au sommet $j$
$R$	:	Rayon du cylindre
$C_p$	:	Coefficient de pression
$C_l$	:	Coefficient de portance
$C_d$	:	Coefficient de traînée
$V_n$	:	Vitesse normale
$V_t$	:	Vitesse tangentielle
$P$	:	Pression locale
$P_{\infty}$	:	Pression à l'infini amont
$\phi$	:	Fonction potentielle de vitesses
$\psi$	:	Fonction de courant

## INTRODUCTION

Durant ces dernières années les méthodes numériques ( éléments finis, différences finies, ... ) ont connu un essor important, permettant d'approcher par simulation numérique des phénomènes physiques réputés difficiles. Dans le domaine de l'aéronautique et de la turbomachinerie par exemple, les progrès constatés dans l'efficacité des algorithmes de résolution d'équations aux dérivées partielles ont autorisé à réduire au minimum les études expérimentales traditionnelles en soufflerie, pour déterminer la forme optimale d'une aile d'avion, d'une aube de turbomachine, ...

Quelques soit la formalisation mathématique et physique retenue pour modéliser le phénomène, les méthodes numériques nécessitent toujours une discrétisation de l'espace étudié ( par exemple l'extérieur d'un avion pour des calculs sur l'écoulement des fluides concernant sa forme aérodynamique ). La maîtrise de cette discrétisation apparaît maintenant déterminante pour assurer la fiabilité des solveurs numériques : En effet, la convergence et la précision des calculs dépendent pour une grande part de la qualité des maillages générés qui définissent la discrétisation sur les domaines analysés.

L'augmentation des moyens de calculs et la multiplication des outils de visualisation ont permis de faire progresser indiscutablement cette phase préliminaire des méthodes numériques. De nombreux travaux théoriques et appliqués ont aussi été entrepris dans ce sens, en particulier pour proposer des algorithmes de génération plus puissants, construisant des maillages de meilleure qualité sur des domaines à géométrie toujours plus complexe.

A cette fin, dans l'étude qui est présentée ici, nous nous intéressons à l'analyse d'écoulements autour d'obstacle en utilisant la méthode des singularités pour ensuite élaborer un maillage.

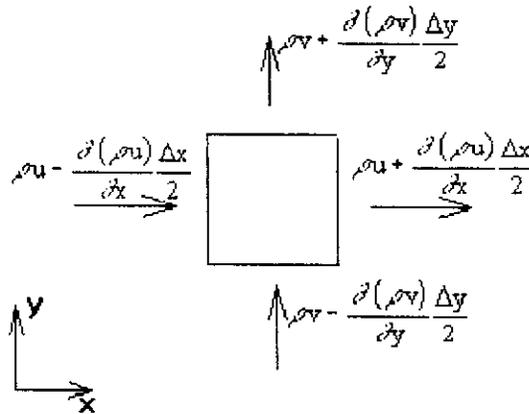
*CHAPITRE I*

**GENERALITES**

## I. GENERALITES

### I.1 EQUATION DE CONSERVATION ET DE CONTINUTE

Considérons un élément à travers lequel un fluide peut se déplacer librement (*fig.1.1*)



- figure 1.1 -

Bilan massique à travers un élément

Afin de retrouver la variation de masse contenue dans le volume considéré, établissons le bilan des masses entrantes et sortantes de l'élément, par unité de temps.

$$\begin{aligned} & \left( \rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \cdot 1 + \left( \rho v + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \cdot 1 \\ & - \left( \rho u - \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \cdot 1 - \left( \rho v - \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \cdot 1 = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \cdot \Delta y \\ \Rightarrow & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (I.1)$$

En écriture vectorielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}(\rho \bar{q}) = 0 \quad (I.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{q} \bar{\nabla} \rho + \rho \bar{\nabla} \bar{q} = 0 \quad (I.3)$$

### I.2 LA DERIVEE PARTICULAIRE

Dans la description Eulerienne de l'écoulement, la dérivée partielle  $\frac{\partial f(r,t)}{\partial t}$  d'une grandeur quelconque de l'écoulement de F, correspond au taux de

variation local de F. Cependant, nous avons besoin également du taux de variation total de F.

En utilisant les coordonnées cartésiennes x y z, la différentielle totale de  $F = f(x, y, z, t)$  est donnée par :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

d'où

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F \frac{\partial r}{\partial t}$$

Le vecteur  $\bar{r}$  est interprété ici comme une fonction des coordonnées Lagrangienne  $r_0$  et t, ce qui donne :

$$\frac{dr}{dt} = v$$

Puisque  $r_0$  est une constante, en écrivant la dérivée totale de F sous la forme :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v \nabla F$$

Ce type de dérivée s'appelle *DERIVEE PARTICULAIRE*. Elle est désignée par le symbole :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \nabla \quad (I.4)$$

### I.3 EQUATION DE CONTINUITE

Dans l'équation ( I.3 ), on reconnaît la dérivée particulière  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \nabla$ .

Finalement, on obtient l'*EQUATION DE CONTINUITE* sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{q} \nabla \rho + \rho \bar{\nabla} \bar{q} = 0 \quad (I.5)$$

### I.4 VORTICITE

Soit une particule fluide en mouvement sur un cercle infinitésimal de centre  $O(x, y)$  ( fig. I.2 ). Cherchons la vitesse angulaire de [ O, Q ] autour de Q.

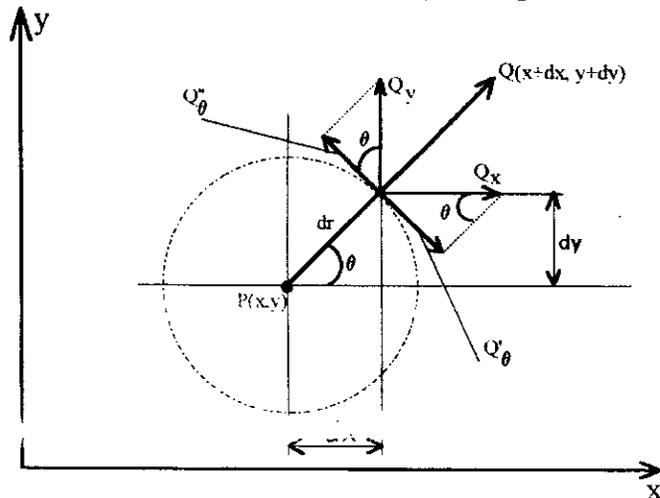


figure I.2

Soit dr le rayon du cercle tel que :  $dr = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

La vitesse relative de Q à O est :

$$\vec{Q} \begin{cases} Q_x = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ Q_y = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{cases}$$

La vitesse angulaire  $\omega$  de [ O, Q ] autour de O sera donc la somme des vitesses angulaires dues à  $Q_x$  et  $Q_y$ .

$$\omega_1 = \frac{Q_1}{dr} = \frac{Q_x \sin \theta}{dr} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta \right)$$

et

$$\omega_2 = \frac{Q_2}{dr} = \frac{Q_y \cos \theta}{dr} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta \cos \theta \right)$$

or  
d'où

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta + \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta$$

Cherchons la valeur moyenne  $\bar{\omega}$  de  $\omega$ , la connaissance de cette dernière étant une indication suffisante pour savoir la nature de l'écoulement.

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta \, d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right]$$

Après intégration :

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.6)$$

A partir de l'équation (1.6), on définit  $\Omega$  comme étant la **VORTICITE** et égale à :

$$\Omega = 2\bar{\omega} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.7)$$

Le cercle infinitésimal permet en fait de dire que, la vorticité n'est autre que la rotation de l'élément fluide autour d'un de ses axes, et de plus on reconnaît dans l'équation (1.7) que  $\Omega$  est le rotationnel du vecteur vitesse  $\vec{Q}$ .

$$\Omega = \text{rot } \vec{Q} = \vec{\nabla} \wedge \vec{Q} \quad (1.8)$$

Il est important de noter que la valeur de  $\Omega$  est une information locale, elle nous renseigne sur la nature de l'écoulement au point où celle-ci a été calculée.

On peut dire que l'écoulement est **IRROTATIONNEL** en un point si la vorticité, en ce point, est nulle.

Si la vorticité est nulle en chaque point d'une région, l'écoulement est **IRROTATIONNEL** dans toute cette région.

## I.5 CIRCULATION

La circulation d'un élément fluide  $ds$  est définie comme étant l'intégrale curviligne de la vitesse  $\bar{q}$  prise seule le long d'une courbe  $C$  ( *fig.1.3* ) sur la frontière de l'élément et on la note  $\Gamma$ .

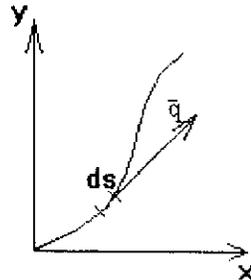


figure 1.3

On écrit alors :

$$\Gamma = \oint_C \bar{q} \cdot d\bar{s} \quad (I.9)$$

## I.5 FONCTION DE COURANT

Considérons un écoulement plan, celui-ci est obtenu quand le vecteur vitesse  $\bar{q}$  est parallèle, par exemple, au plan xy d'un système cartésien. Par conséquent, toutes les dérivées partielles par rapport à  $z$  sont nulles.

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$$

et  $\bar{q}$  contient uniquement les deux composantes :

$$q (u, v, 0)$$

Définissons en premier lieu un vecteur potentiel  $A$ , tel que :

$$q = \nabla \times A \quad (I.10)$$

En substituant l'équation ( I.10 ) dans l'équation de continuité ( I.5 ), et en considérant que le fluide est incompressible  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$ , nous voyons que ces équations sont bien vérifiées puisque la divergence d'un rotationnel est égale à zéro.

En particulier, afin d'arriver à une définition univoque, on peut choisir  $A$  tel que:

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (I.11)$$

En revenant à notre étude, autrement dit à un écoulement plan, le vecteur potentiel  $A$  peut être choisi tel que  $A$  ait les composantes :

$$A (0, 0, \psi)$$

où  $\psi$  est fonction des variables :

Par ce choix, la condition ( I.11 ) est bien remplie :

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y) = 0$$

D'autre part :

$$q = \nabla \cdot A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \psi(x, y) \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow (u, v, 0) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right)$$

D'une façon générale, on trouvera toujours une fonction  $\psi(x, y)$  telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Cette fonction est appelée " *FONCTION DE COURANT* " du domaine de vitesse  $u, v$ .

La fonction de courant permet ainsi le remplacement d'une fonction vectorielle  $q$  par une fonction scalaire  $\psi$  qui vérifie l'équation de continuité de manière identique :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \equiv 0$$

Mathématiquement, l'introduction de la fonction de courant réduit le problème à une inconnue  $\psi$  au lieu de deux inconnues  $u$  et  $v$ .

## 1.6 LIGNES DE COURANT ET TRAJECTOIRES

Chaque particule de fluide étant caractérisée par son vecteur vitesse, on définit la *LIGNE DE COURANT* comme étant l'ensemble des points d'application des lignes tangentes au vecteur vitesse en chaque point, d'une autre façon une ligne de courant est l'ensemble des points qui ont la même fonction de courant.

Donc pour un temps  $t_0$  fixé pour toutes les particules en même temps, on détermine les lignes de courant par le système équations :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t_0)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_0)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t_0)}$$

La *TRAJECTOIRE* d'une particule fluide quand à elle, est définie à chaque instant  $t$ .

Nous aurons donc dans le cas où le mouvement du fluide est stationnaire les lignes de courant et les trajectoires confondues, dans le cas contraire elles seront distinctes.

### I.6.1 INTERPRÉTATION PHYSIQUE D'UNE FONCTION DE COURANT

La fonction de courant  $\psi$  a un sens physique très important, pour exprimer ceci, évaluons le débit-masse au travers d'un élément  $dS$  d'une surface  $S$ . (fig. 1.4)

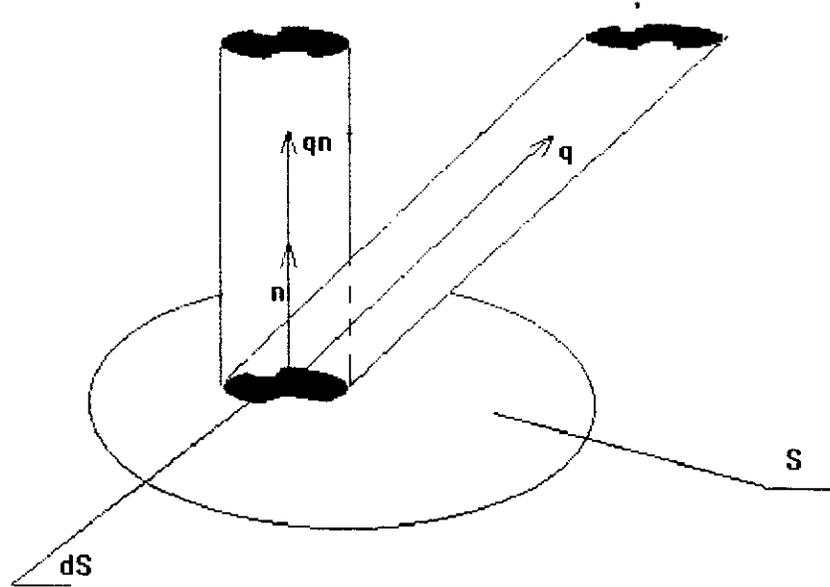


figure 1.4

$$d\dot{M}_s = \rho q_n dS = \rho q n dS$$

$$\Rightarrow \dot{M}_s = \int \rho q n dS$$

où  $\dot{M}_s$  est le débit masse exprimé par unité de longueur dans la direction des  $z$ .

Ainsi le débit masse  $\dot{M}_s$  qui traverse une courbe  $C$  (fig. 1.5) reliant deux points arbitraires est exprimé directement en fonction de  $\psi$ .

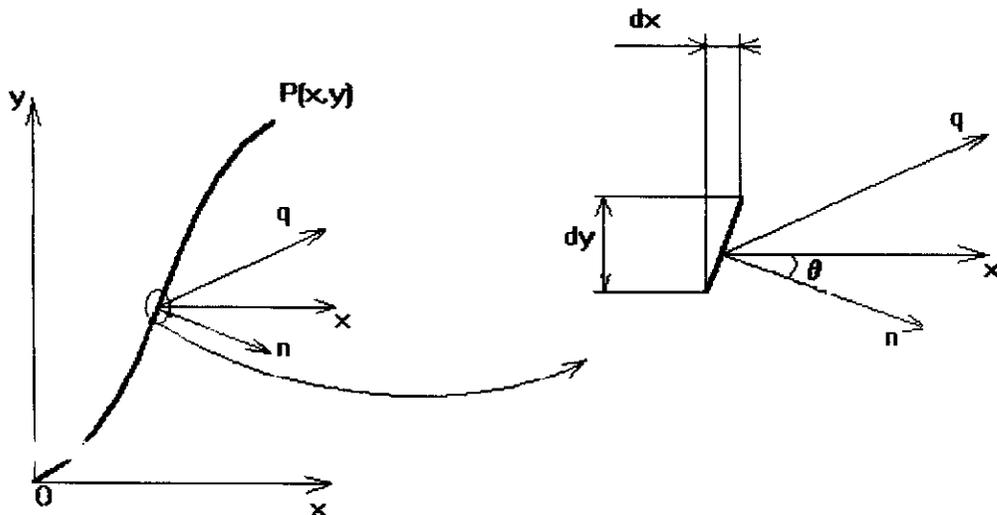


figure 1.5

$$\cos (n, x) = \cos \theta = \frac{dy}{dS}$$

$$\cos (n, y) = -\sin \theta = -\frac{dx}{dS}$$

$$n = [\cos (n, x), \cos (n, y), 0] = \left( \frac{dy}{dS}, -\frac{dx}{dS}, 0 \right)$$

Puisque  $n$  est perpendiculaire à  $dS$ , on obtient :

$$\dot{M}_s = \int_C \rho (u, v, 0) \left( \frac{dy}{dS}, -\frac{dx}{dS}, 0 \right) dS$$

$$\dot{M}_s = \int_C \rho (udy - vdx)$$

En exprimant  $u$  et  $v$  en fonction de  $\psi$  :

$$\dot{M}_s = \rho_0 \int \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \rho_0 \int d\psi$$

$$\dot{M}_s = \rho_0 (\psi_p - \psi_o) \quad (I.12)$$

avec

$P$  et  $O$  : deux points arbitraires mentionnés ci-dessus

$\rho_0$  : densité de référence pour un fluide compressible

ou densité du fluide même pour un fluide incompressible

Donc d'après l'équation ( I.12 ), il s'en suit que quelque soit le chemin suivi, la fonction de courant  $\psi$  fournit une mesure du débit masse dans l'écoulement.

Elle représente ainsi les lignes de courant sous la forme :

$$\psi (x, y) = cte$$

Nous aurons donc pour chaque valeur différente de cette constante, une ligne de courant, de plus l'écoulement ne se fera jamais à travers une ligne de courant mais le long.

*CHAPITRE II*

**THEORIE DES ECOULEMENTS  
POTENTIELS**

## II.1 INTRODUCTION

L'étude de problèmes en mécanique des fluides est dans la plupart des cas très complexe et mathématiquement irrésolvable, ceci étant dû aux différents paramètres du fluide qui engendrent des équations non linéaires et dont souvent on ignorent les solutions. Afin donc de pouvoir approcher la solution de certaines situations réelles, il a été montré que certaines hypothèses simplificatrices permettent de modéliser des écoulements réels et donnent des résultats appréciables, par conséquent notre étude portera sur les écoulements appelés *ÉCOULEMENTS POTENTIELS*.

## II.2 DEFINITION D'UN ÉCOULEMENT POTENTIEL

Un écoulement est dit à potentiel des vitesse dans un domaine ( D ) si en tout point P( x, y, z) de ce domaine et à tout instant t, on peut définir une fonction scalaire  $\phi(x, y, z, t)$  de coordonnées x, y, z et du temps t telle que, sauf éventuellement en certains points ou en certaines lignes ou en certaines surfaces isolées, le vecteur vitesse  $\bar{q}$  au point P et à l'instant t est le gradient de la fonction  $\phi$ , soit :

$$\bar{q} = \overline{\text{grad}}\phi$$

*REMARQUE :*

Dans notre étude, nous considérerons les écoulements potentiels incompressibles dans deux dimensions, néanmoins comme il est défini précédemment, il est à remarquer que des écoulements compressibles en 2D ou 3D peuvent être des écoulements potentiels.

### II.2.1 PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA FONCTION POTENTIELLE

Si C est une courbe orientée reliant deux points  $M_1$  et  $M_2$ , alors la circulation du vecteur vitesse  $\bar{q}$  sur la courbe C est égale à :

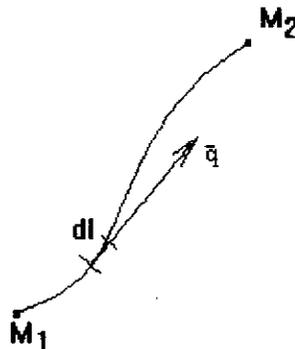


figure II.1

$$\int_C \bar{q} d\bar{l} = \int_C \overline{\text{grad}\phi} d\bar{l} = \phi(M_2) - \phi(M_1)$$

La circulation du vecteur  $\bar{q}$  ( à rotationnel nul ) le long de C ne dépend que des extrémités  $M_1$  et  $M_2$  de C.

### II.2.2 RELATIONS ENTRE LES LIGNES EQUIPOTENTIELLES ET LES LIGNES DE COURANT

Les lignes équipotentielle étant tracées en joignant les points qui ont le même potentiel de vitesses, il est à noter que celles-ci sont en tout point orthogonales aux lignes de courant.

En effet, soit un vecteur vitesse  $\bar{q}(u, v)$ , nous savons que suivant une ligne de courant, la différentielle totale de la fonction  $\psi$  s'écrit :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow -udy + vdx = 0 \Rightarrow \left( \frac{dy}{dx} \right)_\psi = \frac{v}{u} = \text{cte}$$

Par conséquent  $\bar{q}$  est perpendiculaire à  $\nabla\psi$ ; nous pouvons exprimer cela par un produit scalaire entre  $\bar{q}$  et  $\nabla\psi$ , soit :  $\bar{q} \cdot \nabla\psi = 0$

De plus nous savons que la vitesse  $\bar{q}$  dérive d'un potentiel  $\phi$ , donc :

$$\bar{q} = \nabla\phi \Rightarrow \nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$$

Ceci traduit bien l'orthogonalité de  $\phi$  et  $\psi$ .

### II.3 EQUATION DE CONTINUITÉ DES ECOULEMENTS POTENTIELS INCOMPRESSIBLES

Soit l'équation de continuité ( I.5 ), prenons comme première hypothèse que le fluide est incompressible  $\left( \frac{d\rho}{dt} = 0 \right)$ , celle-ci se réduit à :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bar{q} &= 0 \\ \Rightarrow \text{div } \bar{q} &= 0 \end{aligned} \quad ( \text{II.1} )$$

Prenons pour seconde hypothèse que l'écoulement est irrotationnel :  $\bar{\text{rot}} \bar{q} = 0$

La nullité du rotationnel du vecteur  $\bar{q}$  entraîne l'existence d'un potentiel  $\phi$  tel que:

$$\bar{q} = \overline{\text{grad}\phi} \quad ( \text{II.2} )$$

En combinant les équations ( II.1 ) et ( II.2 ), nous avons:

$$\begin{aligned} \text{div}(\overline{\text{grad}\phi}) &= \text{Lap}\phi = \nabla^2 \phi = 0 \\ \text{donc } \nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 z} = 0 \end{aligned} \quad ( \text{II.3} )$$

Ainsi nous avons abouti à l'équation de continuité que doivent vérifier les écoulements potentiels incompressibles.

Cette équation est appelée *EQUATION DE LAPLACE*.

### II.3.1 PROPRIETE ESSENTIELLE DE L'EQUATION DE LAPLACE

L'équation de Laplace est linéaire, ce qui signifie que le principe de superposition est applicable, autrement dit il est possible de construire des solutions complexes par la superposition de solutions simples.

Soit par exemple  $f(x, y)$  et  $g(x, y)$  deux solutions qui vérifient  $\nabla^2 f = 0$  et  $\nabla^2 g = 0$ , il s'en suit que la solution  $\varphi = f+g$  est aussi une solution de  $\nabla^2 \varphi = 0$ .

Il est important de noter que cette propriété est la case de départ du principe de la *METHODE DES SINGULARITES* que nous nous sommes proposer de développer dans cette étude.

### II.4 ECOULEMENTS POTENTIELS ELEMENTAIRES

Certains mouvements fluides idéaux peuvent être considérés comme ne se produisant pas dans la réalité mais combinés avec d'autres mouvements, on obtient des situations du fluide qui sont une très bonne situation physique.

Ces écoulements élémentaires sont :

- ECOULEMENT UNIFORME
- SOURCE
- PUIT
- DOUBLET
- VORTEX

Nous rappelons que la combinaison, ou superposition de ces écoulements élémentaires est possible grâce à la linéarité de l'équation de Laplace qui régit les écoulements potentiels incompressibles.

#### II.4.1 ECOULEMENT UNIFORME

Considérons un écoulement uniforme de vitesse  $\bar{q}$  incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe des  $x$ . (fig II.2)

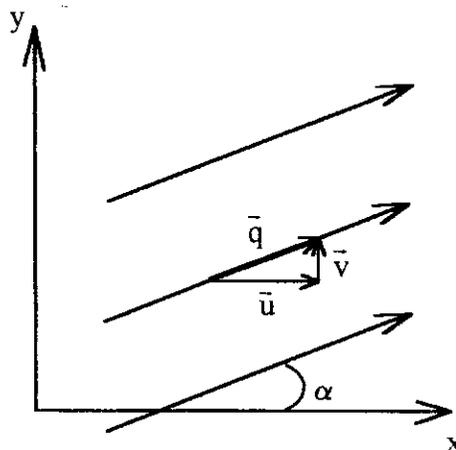


figure II.2

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} u &= q \cos\alpha \\ v &= q \sin\alpha \end{aligned} \quad (II.4)$$

#### II.4.1.1 FONCTION DE COURANT D'UN ECOULEMENT UNIFORME

Soit la différentielle totale de  $\psi$  :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (II.5)$$

Par définition, nous savons que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Donc l'équation ( II.5 ) devient :

$$d\psi = -v dx + u dy$$

d'où 
$$\psi = -vx + uy$$

En substituant  $u$  et  $v$  par les équations ( II.4 ), nous obtenons la fonction de courant d'un écoulement uniforme .

$$\psi = qy \cos\alpha + qx \sin\alpha \quad (II.6)$$

#### II.4.1.2 POTENTIEL DE VITESSE D'UN ECOULEMENT UNIFORME

Soit la différentielle totale de  $\phi$  :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \quad (II.7)$$

Par définition, nous savons que :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Donc l'équation ( II.7 ) devient :

$$d\phi = u dx + v dy$$

d'où 
$$\phi = u x + v y$$

Finalement, le potentiel de vitesse  $\phi$  d'un écoulement uniforme est :

$$\phi = qx \cos\alpha + qy \sin\alpha \quad (II.8)$$

### II.4.1.3 FONCTION DE COURANT ET POTENTIEL DE VITESSES D'UN ECOULEMENT UNIFORME EN COORDONNEES POLAIRES

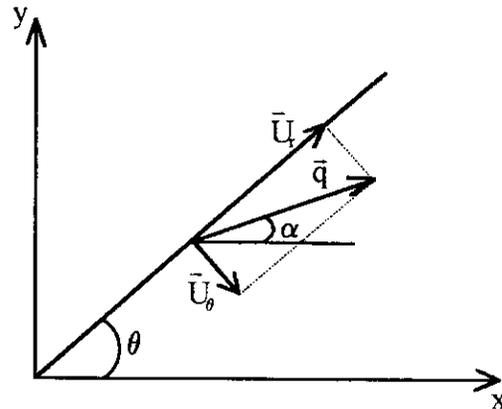


figure II.3

D'après la figure ( II.3 ) :

$$u_{\theta} = -q \sin(\theta - \alpha) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

et

$$u_r = q \cos(\theta - \alpha) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

or

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad \text{et} \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi = q r \sin(\theta - \alpha) \\ \phi = q r \cos(\theta - \alpha) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

En résumé pour un écoulement uniforme, nous avons :

$$\psi = qy \cos \alpha - qx \sin \alpha = qr \sin(\theta - \alpha)$$

et

( II.10 )

$$\phi = qy \sin \alpha + qx \cos \alpha = qr \cos(\theta - \alpha)$$

Dans le cas particulier où l'écoulement est horizontal (  $\alpha = 0$  ) :

$$\psi = qy = qr \sin \theta$$

et

( II.11 )

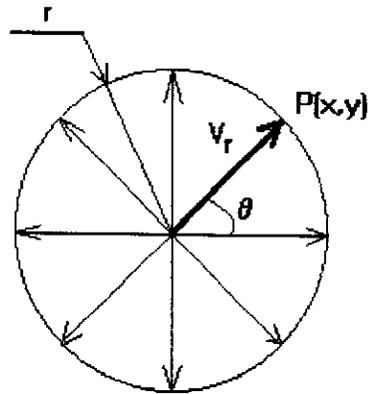
$$\phi = qx = qr \cos \theta$$

## II.4.2 SOURCE

### II.4.2.1 DEFINITION D'UNE SOURCE

Une source est point dans l'espace d'où est émit un fluide à débit  $Q$  constant ( ce concept ne peut bien sûr pas représenter une situation réelle).

Le caractère radial de l'écoulement est, par définition, bien apparant. ( *fig II.4* )



*figure II.4*

A une certaine distance  $r$  d'une source, la vitesse du fluide à partir de cette source étant dirigée dans une direction radiale, nous pouvons écrire :

$$Q = 2\pi r U_r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_r = \frac{Q}{2\pi r} \\ U_\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

### II.4.2.2 FONCTION DE COURANT D'UNE SOURCE

Soit la différentielle totale de  $\psi$  :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta \quad (\text{II.13})$$

Par définition :

$$U_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad U_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

donc

$$d\psi = r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta$$

$$d\psi = r U_r d\theta$$

$$\Rightarrow \psi = r U_r \theta = r \frac{Q}{2\pi r} \theta$$

Enfinement :

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (\text{II.14})$$

### II.4.2.3 POTENTIEL DE VITESSES D'UNE SOURCE

Soit la différentielle totale de  $\phi$  :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta$$

Par définition :  $U_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$  et  $U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$  ( II.15 )

donc

$$d\phi = U_r dr$$

$$d\phi = \frac{Q}{2\pi r} dr$$

Finalement :

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad ( II.16 )$$

En résumé pour une source, nous avons :

$$\psi = \frac{Q}{2\pi r} \theta$$

et

$$( II.17 )$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

### II.4.3 PUITÉ

Un puit est l'opposé d'une source, c'est donc un point de l'espace qui reçoit un fluide à débit constant.

Sa fonction de courant et son potentiel de vitesses sont déterminés de façon identique à une source mais en affectant simplement d'un signe moins le débit total  $Q$ . Nous aurons donc pour un puit :

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi r} \theta$$

et

$$( II.18 )$$

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r$$

### II.4.4 VORTEX

On définit un vortex comme étant un fil tourbillonnaire rectiligne et parallèle à l'axe  $z$  (fig.II.5) engendrant un écoulement irrotationnel dans le plan  $xy$ .

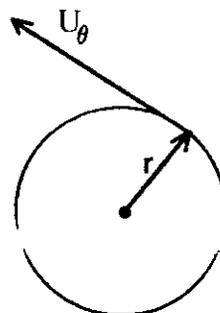


figure II.5

La nature axiale de l'écoulement nous permet d'écrire que  $U_r = 0$ , de plus en utilisant le concept de la circulation :

$$\Gamma = 2\pi r U_\theta \quad \Rightarrow \quad U_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

#### II.4.4.1 FONCTION DE COURANT D'UN VORTEX

Soit la différentielle totale de  $\psi$  :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta$$

Par définition :

$$U_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad U_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

donc

$$d\psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dr$$

$$d\psi = -U_\theta dr$$

$$\Rightarrow \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Finalement :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

#### II.4.4.2 POTENTIEL DE VITESSES D'UN VORTEX

Soit la différentielle totale de  $\phi$  :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta$$

Par définition :

$$U_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{et} \quad U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

donc

$$d\phi = r U_\theta d\theta$$

$$d\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta$$

Finalement :

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

En résumé pour un vortex, nous avons :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

( II.19 )

## II.4.5 DIPOLE

### II.4.5.1 DEFINITION D'UN DIPOLE

Un dipôle est la superposition d'une source et d'un puit de même débit, situés à une distance  $\delta s$  qui devra tendre vers zéro. (fig II.6)

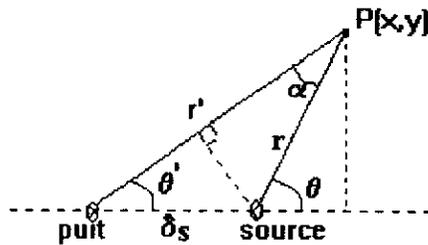


figure II.6  
Construction d'un dipôle

Nous savons que:

- Pour une source :  $U_r = \frac{Q}{2\pi r}$  et  $U_\theta = 0$
- Pour un puit :  $U_r = -\frac{Q}{2\pi r}$  et  $U_\theta = 0$

### II.4.5.2 FONCTION DE COURANT D'UN DIPOLE

En superposant une source et un puit, la différentielle totale de  $\psi$  sera :

$$d\psi_c = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_s dr + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_s d\theta + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_p dr + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_p d\theta$$

On voit bien que :

$$\psi_c = \psi_{\text{source}} + \psi_{\text{puit}}$$

Donc

$$\psi_c = \frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{Q}{2\pi} \theta' = \frac{Q}{2\pi} (\theta - \theta')$$

or  $\theta - \theta' = \alpha$

d'où 
$$\psi_c = \frac{Q}{2\pi} \alpha$$

D'après la figure ( II.6 ) :

$$\frac{\sin \alpha}{\delta s} = \frac{\sin \theta'}{r}$$

$$\Rightarrow r \sin \alpha = \delta s \sin \theta' = \delta s \sin(\theta - \alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{\delta s}{r} \sin(\theta - \alpha)$$

d'où En faisant tendre  $\delta s \rightarrow 0$  nous aurons  $\alpha \ll 1$  donc  $\sin \alpha \approx \alpha$  et  $(\theta - \alpha) \approx \theta$

$$\alpha \approx \frac{\delta s}{r} \sin \theta$$

donc

$$\psi_c \approx \frac{Q \delta s \sin \theta}{2 \pi r}$$

De plus si on augmente Q lorsque  $\delta s$  diminue de façon à ce que le terme  $Q \delta s$  reste constant, nous obtiendrons la fonction de courant d'un dipôle :

$$\psi = \lim_{\substack{\delta s \rightarrow 0 \\ Q \delta s \rightarrow \mu}} \psi_c = \frac{\mu \sin \theta}{2 \pi r}$$

$$\psi = \frac{\mu}{2 \pi r} \sin \theta \quad ( II.20 )$$

### II.4.5.3 POTENTIEL DE VITESSE D'UN DIPOLE

De façon analogue à la détermination de la fonction de courant, nous obtenons:

$$\phi_c = \phi_{\text{source}} + \phi_{\text{point}}$$

$$\phi_c = \frac{Q}{2 \pi} \ln r + \frac{Q}{2 \pi} \ln r'$$

$$\phi_c = -\frac{Q}{2 \pi} \ln \left( \frac{r'}{r} \right)$$

D'après la figure ( II.6 ) :

$$\begin{cases} r' \cos \theta' = r \cos \theta + \delta s \\ r' \sin \theta' = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r'^2 \cos^2 \theta' = (r \cos \theta + \delta s)^2 \\ r'^2 \sin^2 \theta' = r^2 \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow r'^2 = r^2 + \delta s^2 + 2r \delta s \cos \theta$$

$$r'^2 = (r + \delta s \cos \theta)^2 + \delta s^2 \sin^2 \theta \quad ( II.21 )$$

Comme  $\delta s \ll 1$ , nous avons :  $\delta s^2 \rightarrow 0$   
 Donc, d'après l'équation ( II.20 ) :  $r' \approx r + \delta s \cos\theta$

d'où

$$\frac{r'}{r} \approx 1 + \frac{\delta s}{r} \cos\theta$$

Un développement limité du logarithme nous donne :

$$\ln\left(\frac{r'}{r}\right) \approx \ln\left(1 + \frac{\delta s}{r} \cos\theta\right) \approx \frac{\delta s}{r} \cos\theta$$

Finalement :

$$\phi_c = -\frac{Q\delta s \cos\theta}{2\pi r}$$

En adoptant le même raisonnement que pour la fonction de courant, on obtient le potentiel de vitesses d'un doublet :

$$\phi = \lim_{\substack{\delta s \rightarrow 0 \\ Q\delta s \rightarrow \mu}} \phi_c = -\frac{\mu \cos\theta}{2\pi r}$$

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi r} \cos\theta \quad (\text{II.22})$$

#### II.4.5.4 VITESSES D'UN DIPOLE

Les composantes de vitesse peuvent être établies, soit de la fonction de courant, soit à partir du potentiel de vitesses.

$$U_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \Rightarrow U_r = \frac{\mu}{2\pi r^2} \cos\theta \quad (\text{II.23})$$

$$U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \Rightarrow U_\theta = \frac{\mu}{2\pi r^2} \sin\theta \quad (\text{II.24})$$

#### II.4.6 TABLEAU RECUPITULATIF

Écoulements	Écoulement Uniforme	Source	Vortex	Dipôle
$U_r$	$q \cos(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2\pi r}$	0	$\frac{\mu}{2\pi r^2} \cos\theta$
$U_\theta$	$-q \sin(\theta - \alpha)$	0	$\frac{\gamma}{2\pi r}$	$\frac{\mu}{2\pi r^2} \sin\theta$
$\psi$	$q r \sin(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2\pi} \theta$	$-\frac{\gamma}{2\pi} \ln r$	$\frac{\mu}{2\pi r} \sin\theta$
$\phi$	$q r \cos(\theta - \alpha)$	$-\frac{k}{2\pi} \ln r$	$\frac{\gamma}{2\pi} \theta$	$-\frac{\mu}{2\pi r} \cos\theta$

*CHAPITRE III*

**DEVELOPPEMENT DE LA  
METHODE DES SINGULARITES**

### III.1 INTRODUCTION INTUITIVE A LA METHODE DES SINGULARITES

L'ambition de ce chapitre est d'amener le lecteur, par une démarche intuitive et pragmatique, à découvrir la *METHODE DES SINGULARITES* dans le cas d'un problème d'écoulements potentiels incompressibles autour d'un corps.

Après avoir défini les écoulements potentiels élémentaires dans le chapitre précédent, nous établirons l'expression de la vitesse induite par la distribution d'un de ces écoulements sur un segment de droite, à l'aide de cette singularité il est possible d'imaginer un procédé de calcul qui permettra de déterminer une approximation numérique de l'écoulement autour d'un corps :

On distribue sur le contour de ce corps  $N$  segments chargés chacun d'une singularité, l'intensité de la singularité est a priori différente d'un segment à l'autre, on obtient ainsi  $N$  degrés de liberté. Ces  $N$  degrés de liberté seront déterminés par une approximation de la condition limite sur le contour en  $N$  points choisis au milieu de chaque segment.

Du point de vue numérique, le problème revient ensuite à résoudre un système linéaire de  $N$  équations, ce qui est facile avec un ordinateur.

Cette méthode a été inventée par deux ingénieurs : A.M.O. SMITH et J. PIERCE en 1958.

### III.2 CADRE DE L'ETUDE

Pour effectuer cette démarche intuitive, nous allons nous placer dans le cadre des écoulements stationnaires bidimensionnels et irrotationnels de fluide parfait incompressible.

### III.3 MODELE DE SMITH

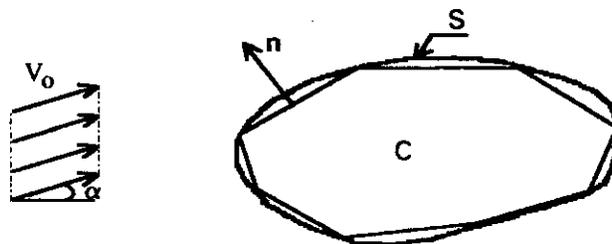


figure III.1

Soit le corps  $C$ , placé dans un écoulement uniforme de vitesse  $\bar{V}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. Pour approximer l'écoulement résultant, nous distribuons sur ce corps  $N$  segments. Sur chaque segment  $[Z_j, Z_{j+1}]$  est répartie une singularité de densité  $k_j$ . En suivant l'idée du paragraphe (§ III.1), les  $N$  valeurs de  $k_j$  sont nos paramètres de réglage (ou degrés de liberté) qu'il convient d'ajuster.

Pour effectuer cet ajustement, il faut disposer de  $N$  contraintes. Ces contraintes seront données par la condition de glissement sur la frontière  $S$  du corps  $C$ . Cette condition doit en principe, s'écrire en tout point de  $S$  mais cela n'est possible vu que nous disposons seulement de  $N$  degrés de liberté.

*SMITH* a proposé la solution suivante :

Si le nombre  $N$  de segments est suffisamment grand et si les segments sont convenablement disposés, alors les points  $\mu_k$ , milieux des segments  $[Z_j, Z_{j+1}]$  qu'on appelle "*POINTS DE CONTROLE*", sont proches de la frontière  $S$ . *SMITH* propose d'écrire la condition de glissement sur les  $N$  points  $\mu_k$ .

De la même façon, si le nombre  $N$  de segments est suffisamment grand et si les segments sont convenablement disposés, la normale  $\bar{n}_k$  aux segments  $[Z_j, Z_{j+1}]$  est une bonne approximation de la normale à la frontière  $S$  en un point proche de  $\mu_k$ .

Ainsi *SMITH* propose de limiter l'écriture de la condition de glissement aux  $N$  points  $\mu_k$  en utilisant les normales  $\bar{n}_k$ .

A partir de ce principe, on peut illustrer les étapes suivantes pour simuler la méthode :

① Discrétiser l'obstacle en subdivisant son contour en un nombre fini de points qu'on appellera "*SOMMETS*", ces sommets seront reliés par des segments de droite qu'on appellera "*PANNEAUX*", puis localiser en chaque milieu de panneau le "*POINT DE CONTROLE*" et définir ses coordonnées.

② Charger les panneaux de singularités

③ Calculer en chaque point de contrôle la vitesse normale produit par le chargement de sa singularité, notée  $\Delta V_{\eta p}$ . Ensuite en appliquant le principe de superposition, calculer la vitesse  $V_{\eta p}$  en ce point de contrôle induit par tous les panneaux. On obtient :

$$V_{\eta p} = \sum \Delta V_{\eta p}$$

On note que  $V_{\eta p}$  est la vitesse de perturbation.

A partir de ce résultat, on pourra obtenir la vitesse normale globale au point de contrôle par la superposition de la vitesse de perturbation  $V_{\eta p}$  et la vitesse de l'écoulement uniforme, notée  $V_{\eta ec. unif.}$ , on aura donc :

$$V_{\eta} = V_{\eta p} + V_{\eta ec. unif.}$$

④ Imposer la condition de glissement de Smith, autrement dit que la vitesse normale globale au point de contrôle soit nulle, ce qui nous permettra d'obtenir autant de conditions que de charges de singularités donc un système d'équations linéaires.

⑤ Résoudre le système linéaire pour trouver l'intensité de chaque singularité en utilisant une méthode de résolution numérique des systèmes linéaires.

⑥ Calculer les différents paramètres de l'écoulement.

### III.4 ANALYSE D'ÉCOULEMENT AUTOUR DE DIFFÉRENTS PROFILS PAR LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS

#### III.4.1 ANALYSE D'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN PROFIL NON PORTANT

Soit un corps  $C$  (fig.III.2), discrétisons la frontière de ce corps pour former un polygone de  $N$  cotés, les coordonnées des sommets ( $X_s, Y_s$ ) de cet obstacle étant bien définis.

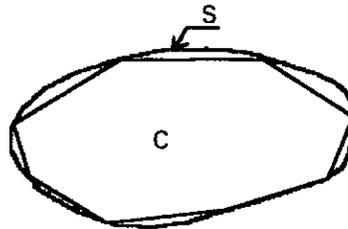


figure III.2  
Discrétisation d'un corps  $C$  en un polygone de  $N$  cotés

Nous proposons pour modéliser ce type d'écoulement, un chargement concentré ou uniforme de singularités. Le choix de ce type de chargement est justifié ultérieurement au paragraphe (§ III.4.2)

##### III.4.1.1 CHARGE CONCENTRÉE DE SOURCE

Considérons deux panneaux  $i$  et  $j$  (fig.III.3), chaque panneau est chargé en son point de contrôle d'une source d'intensité  $k_j$  défini par unité de longueur.

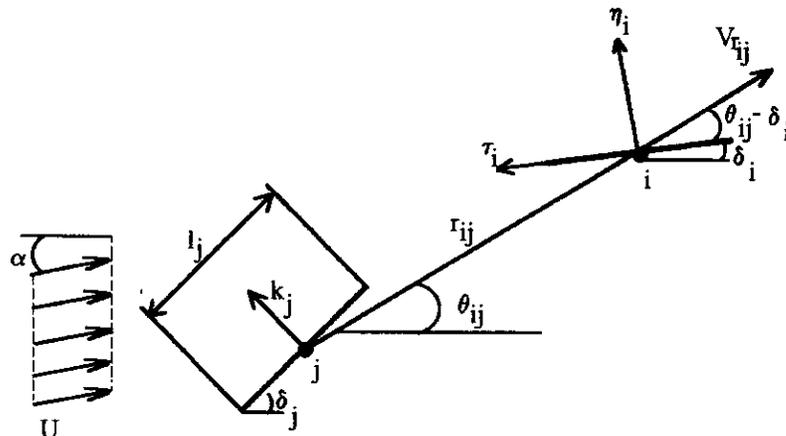


figure III.3  
Influence d'une charge concentrée de source d'un panneau  $j$  sur le point de contrôle d'un panneau  $i$

La vitesse induite par le panneau  $j$  sur le point de contrôle  $i$  suivant la normale  $n_i$  s'écrit :

$$V_{n_i} = V_{ij} \sin(\theta_{ij} - \delta_i)$$

avec 
$$V_{ij} = \frac{k_j l(j)}{2\pi r_{ij}}$$

d'où

$$V_{\eta ip} = \frac{k_j l(j)}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i)$$

La vitesse induite par l'écoulement uniforme sur le point de contrôle  $i$  suivant la normale est égale à :

$$V_{\eta cc. unif.} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \quad (III.1)$$

➤ Avant de continuer le développement de la méthode, il est très important de préciser que l'influence d'un panneau sur lui-même exige un développement particulier dépendant de plus du type de singularités posées, ce développement est contenu dans l'annexe A.

Pour trouver la vitesse normale globale  $V_{\eta i}$ , il suffit donc de superposer :

- La vitesse normale due à l'écoulement uniforme.
- La vitesse normale de perturbation ( $i \neq j$ ).
- La vitesse normale issue de l'influence d'un panneau sur lui-même ( $i = j$ ).

Soit : 
$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j l_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \frac{k_i}{2} \quad (III.2)$$

avec :

$$\sin \theta_{ij} = \frac{y(i) - y(j)}{r_{ij}}$$

$$\text{où } x(i) = \frac{Xs(i) + Xs(i-1)}{2}$$

$$\cos \theta_{ij} = \frac{x(i) - x(j)}{r_{ij}}$$

$$y(i) = \frac{Ys(i) + Ys(i-1)}{2}$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2}$$

#### • REMARQUE

La condition de fermeture de l'obstacle se traduit en imposant l'égalité suivante :

$$- \text{Si } j=1 \Rightarrow j-1 = N$$

En imposant la condition de glissement qui se traduit par  $V_{\eta i} = 0$  ( $i=1, n$ ), et ceci afin d'ajuster l'intensité des singularités, nous aboutissons à un système d'équations linéaires  $\{[A](k) = (B)\}$  à résoudre, tel que :

$$A_{i \neq j}(i, j) = \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i) l_j}{r_{ij}} = \frac{((y(i) - y(j)) \cos \delta_i - (x(i) - x(j)) \sin \delta_i) l_j}{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2}$$

$$A(i, i) = \pi$$

( III.3 )

$$B(i) = 2\pi U_\infty (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

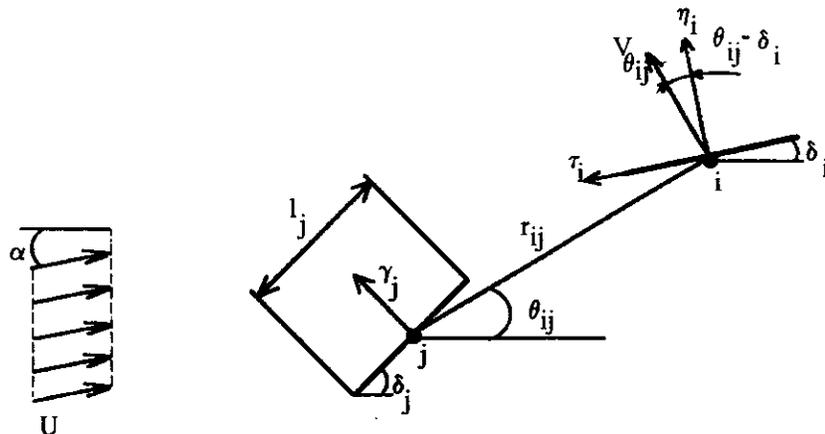
Pour la résolution de ce système, nous avons adopté la méthode de Gauss avec pivotation maximale de lignes.

L'intensité des singularités étant déterminées, nous pouvons maintenant calculer par projection, la vitesse tangentielle en chaque panneau.

$$V_{\tau, i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j l_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) \quad ( III.4 )$$

### III.4.1.2 CHARGE CONCENTREE DE VORTEX

Soit deux panneaux  $i$  et  $j$  ( *fig III.4* ) chargé chacun en leur point de contrôle d'un vortex d'intensité respectivement égal à  $\gamma_i$  et  $\gamma_j$  définis par unité de longueur.



*figure III.4*

*Influence d'une charge concentrée de vortex d'un panneau  $j$  sur le point de contrôle d'un panneau  $i$*

Comme précédemment ( § III.4.1.1 ), on calcule les différents termes de la vitesse normale globale.

La vitesse induite par le panneau  $j$  sur le panneau  $i$  suivant la normale  $\eta_i$  est :

$$V_{\eta, ij} = \frac{\gamma_j l_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i)$$

La vitesse induite par l'écoulement uniforme reste la même, soit :

$$V_{\eta, ec.unif.} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

➤ L'influence du panneau sur lui même suivant la normale pour un vortex est nulle ( voir annexe A ).

La vitesse normale globale qui en résulte est alors :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j l_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) \quad (III.5)$$

avec :

$$\sin \theta_{ij} = \frac{y(i) - y(j)}{r_{ij}} \quad \text{ou} \quad x(i) = \frac{Xs(i) + Xs(i-1)}{2}$$

$$\cos \theta_{ij} = \frac{x(i) - x(j)}{r_{ij}} \quad y(i) = \frac{Ys(i) + Ys(i-1)}{2}$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2}$$

La condition de glissement sur la frontière de l'obstacle impose que  $V_{\eta_i} = 0$  ( $i=1, n$ ), on aboutit alors pour le calcul des intensités des singularités au système  $\{[A](\gamma) = [B]\}$

$$A(i, j) = \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i) l_j}{r_{ij}} = \frac{((x(i) - x(j)) \cos \delta_i - (y(i) - y(j)) \sin \delta_i) l_j}{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2}$$

$$A(i, i) = 0 \quad (III.6)$$

$$B(i) = 2\pi U_{\infty} (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

La valeur des singularités étant connue, nous pouvons calculer la vitesse tangentielle :

$$V_{\tau_i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j l_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \frac{\gamma_i}{2} \quad (III.7)$$

### III.4.1.3 CHARGE CONCENTREE DE DOUBLET

De la même façon que pour une source ou un vortex, la vitesse normale globale  $V_{\eta_i}$  sera (fig.III.5) :

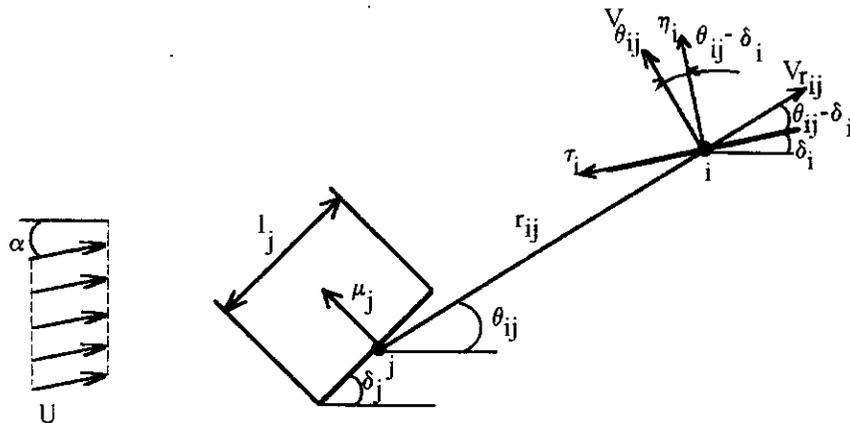


figure III.5

Influence d'une charge concentrée de doublet d'un panneau  $j$  sur le point de contrôle d'un panneau  $i$

- La vitesse normale induite par le panneau j sur le point de contrôle i, soit :

$$V_{\eta_{ij}} = V_{r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + V_{\theta_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i)$$

or : 
$$V_{r_{ij}} = \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} \cos\theta_{ij} \quad \text{et} \quad V_{\theta_{ij}} = \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} \sin\theta_{ij}$$

d'où

$$V_{\eta_{ij}} = \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} (\cos\theta_{ij} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \sin\theta_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i))$$

$$V_{\eta_{ij}} = \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)$$

- La vitesse normale due à l'écoulement uniforme :

$$V_{\eta_{ec.unif.}} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

- La vitesse normale induite par l'influence du panneau sur lui même nécessite un développement particulier établi en annexe B.

Finalement, on peut écrire :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j l_j}{2\pi r_{ij}^2} \sin(2\theta_{ij} - \delta_i) \quad (\text{III.8})$$

avec

$$\sin\theta_{ij} = \frac{y(i) - y(j)}{r_{ij}} \quad \text{où} \quad x(i) = \frac{Xs(i) + Xs(i-1)}{2}$$

$$\cos\theta_{ij} = \frac{x(i) - x(j)}{r_{ij}} \quad y(i) = \frac{Ys(i) + Ys(i-1)}{2}$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2}$$

La condition de glissement sur la frontière de l'obstacle impose que  $V_{\eta_i} = 0$  ( $i = 1, n$ ), on aboutit alors pour le calcul des intensités des singularités au système  $\{[A](\mu) = (B)\}$  :

$$A(i, j) = \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i) l_j}{r_{ij}^2} = \frac{(2 \sin\theta_{ij} \cos\theta_{ij} \cos\delta_i - (\cos^2\theta_{ij} - \sin^2\theta_{ij}) \sin\delta_i) l_j}{2\pi r_{ij}^2}$$

$$A(i, i) = 0 \quad (\text{III.9})$$

$$B(i) = 2\pi U_{\infty} (\sin\delta_i \cos\alpha - \cos\delta_i \sin\alpha)$$

La valeur des singularités étant connue, nous pouvons calculer la vitesse tangentielle :

$$V_{\tau_i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j l_j}{2\pi r_{ij}^2} \cos(2\theta_{ij} - \delta_i) \quad (\text{III.10})$$

### III.4.1.4 DISTRIBUTION UNIFORME DE SOURCES

Soit un panneau  $j$  chargé d'une distribution uniforme de sources d'intensités  $k_j$  par unité de longueur. (fig.III.6)

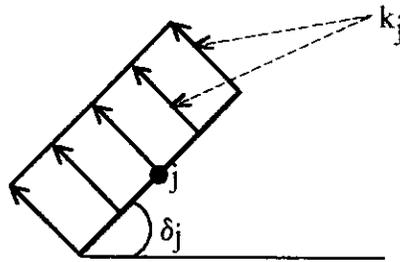


figure III.6

Distribution uniforme de sources sur un panneau  $j$

Considérons un élément différentiel  $dS_j$  sur le panneau  $j$  et étudions son influence sur un point de contrôle  $i$ . (fig.III.7)

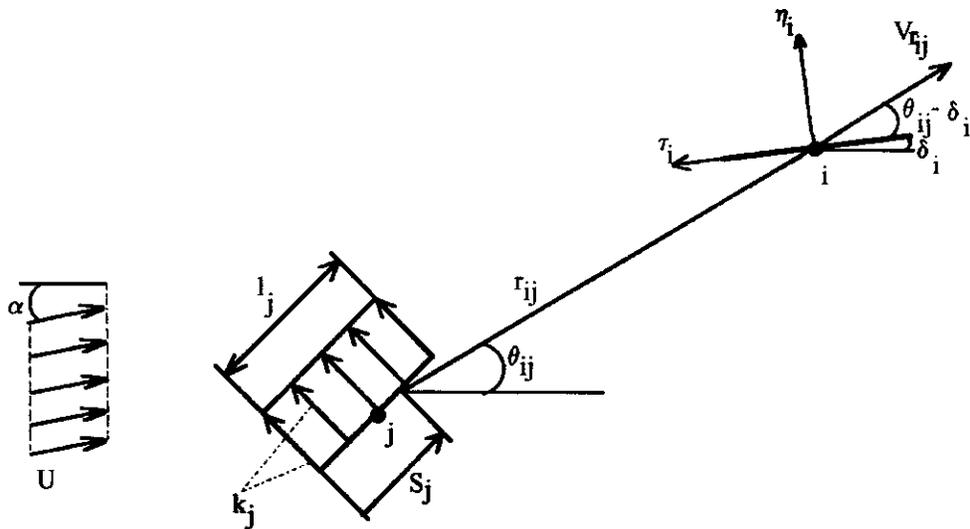


figure III.7

Influence d'un panneau  $j$  chargé uniformément de sources sur un point de contrôle  $i$

Au point de contrôle  $i$  de coordonnées  $(x(i), y(i))$ , chaque élément différentiel  $dS_j$  du panneau  $j$  induit une vitesse normale  $dV_{\eta_i}$  qui s'exprime :

$$dV_{\eta_i} = \frac{k_j \sin(\theta_{ij} - \delta_j)}{2 \pi r_{ij}} dS_j$$

$r_{ij}$  représente la distance qui sépare le point de contrôle  $i$  et un point situé sur le panneau  $j$ , soit :

$$r_{ij} = \sqrt{(x(i) - x_j)^2 + (y(i) - y_j)^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} x(i) &= \frac{Xs(i) + Xs(i-1)}{2} & \text{et} & & x_j &= Xs(j-1) + S_j \cos \delta_j \\ x(i) &= \frac{Ys(i) + Ys(i-1)}{2} & & & y_j &= Ys(j-1) + S_j \sin \delta_j \end{aligned}$$

Un passage à une intégrale le long du panneau j est nécessaire pour donner la vitesse normale induite par tout le panneau sur le point de contrôle i, en conséquence nous aurons donc l'expression de la vitesse qui sera :

$$V_{\eta_{ip}} = \int_0^{l_j} \frac{k_j \sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

➤ L'influence du panneau sur lui même suivant la normale donne une vitesse égale à  $\frac{k_i}{2}$  ( voir annexe A ).

La vitesse induite par l'écoulement uniforme selon la normale  $\eta_i$  reste toujours la même et est égale à :

$$V_{\eta_{ec.unif.}} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

La vitesse normale globale s'exprimera alors :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{k_j \sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + \frac{k_i}{2} \quad (\text{III.11})$$

On pose :

$$I = \int_0^{l_j} \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j$$

#### III.4.1.4.1 CALCUL DE L'INTEGRALE I

Pour le calcul de I, remarquons que les termes de l'intégrale sont fonction de S<sub>j</sub>, il est donc nécessaire de développer ces termes.

nous savons que :

$$\begin{aligned} x_j &= Xs(j-1) + S_j \cos \delta_j \\ y_j &= Ys(j-1) + S_j \sin \delta_j \\ r_{ij}^2 &= (x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 + (y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2 \end{aligned}$$

$$\sin \theta_{ij} = \frac{y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j}{r_{ij}} \quad \text{et} \quad \cos \theta_{ij} = \frac{x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j}{r_{ij}}$$

De plus :

$$\sin(\theta_{ij} - \delta_i) = \sin \theta_{ij} \cos \delta_i - \cos \theta_{ij} \sin \delta_i$$

Ainsi l'intégrale I s'écrira :

$$I = \int_0^{l_j} \frac{\left( (y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j) \cos \delta_i - (x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j) \sin \delta_i \right)}{\left( (y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2 + (x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 \right)} dS_j \quad (\text{III.12})$$

Afin de pouvoir calculer cette intégrale, mettons la sous la forme :

$$I = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j \quad (\text{III.13})$$

Les coefficients  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  sont fonctions des deux panneaux associés aux points de contrôles  $i$  et  $j$  et à chaque fois se répètent, il suffit donc de calculer cette intégrale en fonction de ces coefficients ensuite remplacer pour chaque cas les valeurs des coefficients appropriées.

Pour des raisons de commodités de calculs, nous poserons le dénominateur de l'intégrale I sous la forme :

$$r_{ij}^2 = S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2 = (S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2$$

**PREMIER CAS :**  $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$I = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j - I_3)^2} dS_j = I_1 \int_0^{l_j} \frac{(S_j - I_3 + I_3)}{(S_j - I_3)^2} dS_j + I_2 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2}$$

$$I = I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j - I_3}{(S_j - I_3)^2} dS_j + (I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2}$$

$$I = I_1 \ln |S_j - I_3| \Big|_0^{l_j} + (I_1 I_3 + I_2) \left( -\frac{1}{S_j - I_3} \right) \Big|_0^{l_j}$$

Finalemment :

$$I = I_1 \ln \left( \frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \quad (\text{III.14})$$

**SECOND CAS :**  $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$I = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} dS_j = I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} dS_j + I_2 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}$$

$$I = \frac{I_1}{2} \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3) + 2I_3}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} dS_j + I_2 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}$$

$$I = \frac{I_1}{2} \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3)}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} dS_j + (I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}$$

$$I = \frac{I_1}{2} \ln \left| (S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right| \Big|_0^{l_j} + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{I_4^2 - I_3^2} \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{\left( \frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)^2 + 1}$$

$$I = \frac{I_1}{2} \ln \left| (S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right| \Big|_0^{l_j} + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \Big|_0^{l_j}$$

Finalemnt :

$$I = \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \quad (\text{III.15})$$

### III.4.1.4.2 CALCULS DES COEFFICIENTS

Les calculs des coefficients  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  se font par identification entre la forme de l'intégrale de l'équation ( III.12 ) et celle de l'équation ( III.13 ).

$$I = \int_0^{l_j} \frac{\left( (y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j) \cos \delta_i - (x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j) \sin \delta_i \right)}{\left( (y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2 + (x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 \right)} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j + I_2}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j$$

d'où

$$(y_i - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j) \cos \delta_i - (x_i - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j) \sin \delta_i = I_1 S_j + I_2$$

$$(\sin \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \cos \delta_i) S_j + ((y_i - Y_s(j-1)) \cos \delta_i - (x_i - X_s(j-1)) \sin \delta_i) = I_1 S_j + I_2$$

et

$$(x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 + (y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2 = S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2$$

$$S_j^2 - 2((x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j) S_j + (x(i) - X_s(j-1))^2 + (y(i) - Y_s(j-1))^2 = S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2$$

En identifiant, nous obtenons finalement :

$$I_1 = \sin \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \cos \delta_i$$

$$I_2 = (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_i - (x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_i$$

$$I_3 = (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j$$

$$I_4^2 = (y(i) - Y_s(j-1))^2 + (x(i) - X_s(j-1))^2$$

$$I_4^2 - I_3^2 = ((x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j)^2$$

( III.16 )

#### • REMARQUE

$(I_4^2 - I_3^2)$  étant un carré parfait le cas où  $(I_4^2 - I_3^2) < 0$  ne se présentera jamais, c'est la raison pour laquelle ce cas n'a pas été développé.

### III.4.1.4.3 CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES

En considérant les deux cas cités précédemment pour la valeur du terme  $(I_4^2 - I_3^2)$ , l'ajustement des singularités se fera en imposant la condition de glissement,  $V_{\eta_i} = 0$  ( $i = 1, N$ ), sur la frontière S du corps C (fig. III.1). Soit :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_0^{l_j} \frac{k_j \sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + \frac{k_i}{2} = 0$$

- **PREMIER CAS** :  $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

En substituant l'expression de l'intégrale I de l'équation ( III.14 ), la vitesse normale globale devient alors :

$$\begin{aligned} V_{\eta_i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j}{2\pi} \left( I_1 \ln \left( \frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) + \frac{k_i}{2} = 0 \\ \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N k_j \left( I_1 \ln \left( \frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) + \pi k_i &= 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \end{aligned}$$

Les intensités des singularités seront déterminées en résolvant le système d'équations linéaires  $[A](k) = (B)$  où :

$$A(i, j) = I_1 \ln \left( \frac{|l_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right)$$

$$A(i, i) = \pi$$

( III.17 )

$$B(i) = 2\pi U_{\infty} (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

- **SECOND CAS** :  $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

De la même façon que pour le premier cas, on substitue l'expression de l'intégrale I de l'équation ( III.15 ), afin d'obtenir l'expression de la vitesse normale globale.

$$\begin{aligned} V_{\eta_i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j}{2\pi} \left( \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{|(l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + \frac{k_i}{2} = 0 \\ \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N k_j \left( \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{|(l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + \pi k_i &= 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \end{aligned}$$

Ce système se met sous la forme  $[A](k) = (B)$ , ce qui permet de déterminer l'intensité  $k_j$  des singularités ( $j = 1, N$ ), avec :

$$A(i, j) = \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)$$

$$A(i, i) = \pi \tag{III.18}$$

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

#### III.4.1.4.4 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE

L'intensité des singularités étant déterminées, nous pouvons maintenant calculer par projection, la vitesse tangentielle en chaque panneau.

$$V_{\tau i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{l_j} \frac{k_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + 0 \tag{III.19}$$

On pose :

$$J = \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \tag{III.20}$$

avec :

$$\cos(\theta_{ij} - \delta_i) = \cos\theta_{ij} \cos\delta_i + \sin\theta_{ij} \sin\delta_i$$

Remarquons que cette intégrale prend la même forme que l'intégrale I de l'équation ( III.13 ), et suivant la valeur du terme  $(I_4^2 - I_3^2)$  on obtient l'expression de l'intégrale I, il suffit donc de redéfinir les coefficients  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  qui se fera par identification. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cos\delta_i \cos\delta_j - \sin\delta_i \sin\delta_j \\ I_2 &= (y(i) - Ys(j-1)) \sin\delta_i + (x(i) - Xs(j-1)) \cos\delta_i \\ I_3 &= (x(i) - Xs(j-1)) \cos\delta_j + (y(i) - Ys(j-1)) \sin\delta_j \\ I_4^2 &= (y(i) - Ys(j-1))^2 + (x(i) - Xs(j-1))^2 \\ I_4^2 - I_3^2 &= ((x(i) - Xs(j-1)) \sin\delta_j - (y(i) - Ys(j-1)) \cos\delta_j)^2 \end{aligned} \tag{III.21}$$

Finalement, la vitesse tangentielle s'exprime de la façon suivante :

- PREMIER CAS :  $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

$$V = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{k_j}{2\pi} \left( \frac{1}{|I_3|} \ln \left( \frac{|I_j - I_3|}{|I_3|} \right) - (I_1 + I_2) \left( \frac{1}{(I_j - I_3)} + \frac{1}{I_3} \right) \right) \tag{III.22}$$

- **SECOND CAS :**  $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

$$V_{r,i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) - \sum_{j \neq i}^N \frac{k_j}{2\pi} \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \quad (III.21)$$

### III.4.1.5 DISTRIBUTION UNIFORME DE VORTEX

Soit un panneau  $j$  chargé d'une distribution uniforme de vortex d'intensités  $\gamma_j$  par unité de longueur.

Considérons un élément différentiel  $dS_j$  sur le panneau  $j$  et étudions son influence sur un point de contrôle  $i$ . (fig.III.8)

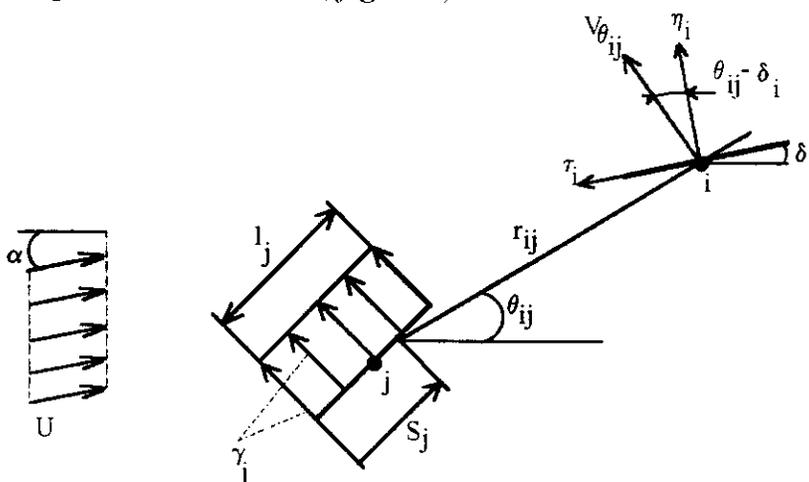


figure III.8

Influence d'un panneau  $j$  chargé uniformément de vortex sur un point de contrôle  $i$

Au point de contrôle  $i$  de coordonnées  $(x(i), y(i))$ , chaque élément différentiel  $dS_j$  du panneau  $j$  induit une vitesse normale  $dV_{n,i}$  qui s'exprime :

$$dV_{n,i} = \frac{\gamma_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

$r_{ij}$  représente la distance qui sépare le point de contrôle  $i$  et un point situé sur le panneau  $j$ , soit :

$$r_{ij} = \sqrt{(x(i) - x_j)^2 + (y(i) - y_j)^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} x(i) &= \frac{Xs(i) + Xs(i-1)}{2} & \text{et} & & x_j &= Xs(j-1) + S_j \cos \delta_j \\ y(i) &= \frac{Ys(i) + Ys(i-1)}{2} & & & y_j &= Ys(j-1) + S_j \sin \delta_j \end{aligned}$$

Un passage à une intégrale le long du panneau  $j$  est nécessaire pour donner la vitesse normale induite par tout le panneau sur le point de contrôle  $i$ , en conséquence nous aurons donc l'expression de la vitesse qui sera :

$$V_{\eta_{ip}} = \int_0^{l_j} \frac{\gamma_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

➤ L'influence du panneau sur lui même suivant la normale donne une vitesse nulle ( voir annexe A ).

La vitesse induite par l'écoulement uniforme selon la normale  $\eta_i$  reste toujours la même et est égale à :

$$V_{\eta_{cc.unif.}} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

La vitesse normale globale s'exprimera alors :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_0^{l_j} \frac{\gamma_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + 0 \quad (III.22)$$

L'intégrale de l'équation ( III.22 ) peut s'écrire sous la forme :

$$W = \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \quad (III.23)$$

Remarquons que l'intégrale  $W$  de l'équation ( III.23 ) est de la même forme que l'intégrale  $J$  de l'équation ( III.20 ), le calcul de  $W$  est identique à celui de  $J$ , nous aurons donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cos\delta_i \cos\delta_j - \sin\delta_j \sin\delta_i \\ I_2 &= (y(i) - Ys(j-1)) \sin\delta_i + (x(i) - Xs(j-1)) \cos\delta_i \\ I_3 &= (x(i) - Xs(j-1)) \cos\delta_j + (y(i) - Ys(j-1)) \sin\delta_j \\ I_4^2 &= (y(i) - Ys(j-1))^2 + (x(i) - Xs(j-1))^2 \\ I_4^2 - I_3^2 &= ((x(i) - Xs(j-1)) \sin\delta_j - (y(i) - Ys(j-1)) \cos\delta_j)^2 \end{aligned} \quad (III.24)$$

Finalement, la vitesse normale globale se met sous la forme :

- **PREMIER CAS :**  $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left( I_1 \ln \left( \frac{|I_j - I_3|}{|I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) + 0 \quad (III.25)$$

- **SECOND CAS :**  $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left( \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \quad (III.26)$$

### III.4.1.5.1 CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES

En considérant les deux cas cités précédemment pour la valeur du terme  $(I_4^2 - I_3^2)$ , l'ajustement des singularités se fera en imposant la condition de glissement,  $V_{\eta_i} = 0$  ( $i = 1, N$ ), sur la frontière S du corps C (fig.III.1). Soit :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j = 0$$

- **PREMIER CAS :**  $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

On impose la condition de glissement sur l'expression de la vitesse normale globale de l'équation ( III.25 ) :

$$\begin{aligned} V_{\eta_i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left( I_1 \ln \left( \frac{|I_j - I_3|}{|I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_j \left( I_1 \ln \left( \frac{|I_j - I_3|}{|I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) &= 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \end{aligned}$$

Les intensités des singularités seront déterminées en résolvant le système d'équations linéaires  $[A](k) = (B)$  où :

$$\begin{aligned} A(i, j) &= I_1 \ln \left( \frac{|I_j - I_3|}{|I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \\ A(i, i) &= 0 \end{aligned} \quad (III.27)$$

$$B(i) = 2\pi U_{\infty} (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

- **SECOND CAS :**  $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

De la même façon que pour le premier cas, on impose la condition de glissement sur l'expression de la vitesse normale globale de l'équation ( III.26 ) :

$$\begin{aligned} V_{\eta_i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left( \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_j \left( \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) &= 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \end{aligned}$$

Ce système se met sous la forme  $[A](k) = (B)$ , ce qui permet de déterminer l'intensité  $k_j$  des singularités ( $j = 1, N$ ), avec :

$$A(i, j) = \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{|(1_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{1_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right)$$

$$A(i, i) = 0 \quad (III.28)$$

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

### III.4.1.5.2 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE

L'expression de la vitesse tangentielle est directement obtenue par projection.

$$V_{\tau i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j \sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + \frac{\gamma_i}{2} \quad (III.29)$$

L'expression de l'intégrale de l'équation ( III.29 ) est de la même forme que l'intégrale I de l'équation ( III.13 ), les expressions des coefficients  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  seront celles du système ( III.16 ).

Suivant la valeur du terme  $(I_4^2 - I_3^2)$  la vitesse tangentielle sera donnée par :

- **PREMIER CAS :**  $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

$$V_{\tau i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left( I_1 \ln \left( \frac{|1_j - I_3|}{|I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{1_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right) + \frac{\gamma_i}{2} \quad (III.30)$$

- **SECOND CAS :**  $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

$$V_{\tau i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \left[ \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{|(1_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{1_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right] + \frac{\gamma_i}{2}$$

( III.31 )

### III.4.1.6 DISTRIBUTION UNIFORME DE DOUBLETES

Considérons toujours deux panneaux i et j, sur ce dernier une distribution uniforme de doublets d'intensité  $\mu_j$ , par unité de longueur, est appliquée. (fig III.9)

Etudions l'influence de cette distribution sur le point de contrôle i, prenons alors un élément différentiel  $dS_j$  et calculons la vitesse induite  $dV_{\eta ip}$  par cet élément suivant la normale  $\eta_i$ .

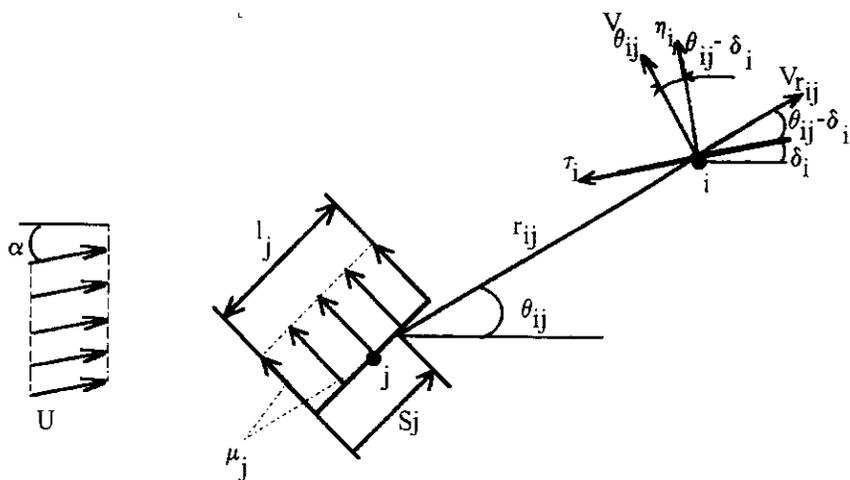


figure III.9

Influence d'un panneau  $j$  chargé uniformément de doublets sur un point de contrôle  $i$

$$dV_{\eta_{ip}} = dV_{r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + dV_{\theta_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) \quad (\text{III.32})$$

D'après le tableau ( II.4.6 ), nous savons que :

$$dV_{r_{ij}} = \frac{\mu_j \cos \theta_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} dS_j \quad \text{et} \quad dV_{\theta_{ij}} = \frac{\mu_j \sin \theta_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} dS_j$$

Donc l'équation ( III.32 ) devient :

$$\begin{aligned} dV_{\eta_{ip}} &= \frac{\mu_j \cos \theta_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j + \frac{\mu_j \sin \theta_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j \\ \Rightarrow dV_{\eta_{ip}} &= \frac{\mu_j}{2\pi r_{ij}^2} \sin(2\theta_{ij} - \delta_i) dS_j \end{aligned}$$

Pour le calcul de la vitesse normale  $V_{\eta_{ip}}$  induite par le panneau  $j$  sur le point de contrôle  $i$ , il faut passer par une intégrale le long de tout le panneau  $j$ .

$$\begin{aligned} V_{\eta_{ip}} &= \int_0^{l_j} dV_{\eta_{ip}} = \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j \\ V_{\eta_{ip}} &= \frac{\mu_j}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \end{aligned}$$

Posons :

$$L = \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad (\text{III.33})$$

➤ L'influence du panneau sur lui même suivant la normale est développer en annexe B.

La vitesse induite par l'écoulement uniforme selon la normale  $\eta_i$  reste toujours la même et est égale à :

$$V_{\eta_{ec.unif.}} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

La vitesse normale globale s'exprimera alors :

$$V_{ni} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\mu_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j \quad (\text{III.34})$$

### III.4.1.6.1 CALCUL DE L'INTEGRALE L

Notons que :

$$\sin(2\theta_{ij} - \delta_i) = \sin 2\theta_{ij} \cos \delta_i - \cos 2\theta_{ij} \sin \delta_i$$

$$\sin(2\theta_{ij} - \delta_i) = 2 \sin \theta_{ij} \cos \theta_{ij} \cos \delta_i - (\cos^2 \theta_{ij} - \sin^2 \theta_{ij}) \sin \delta_i$$

avec :

$$r_{ij}^2 = (x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j)^2 + (y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j)^2$$

$$\sin \theta_{ij} = \frac{y(i) - Ys(j-1) - S_j \sin \delta_j}{r_{ij}} \quad \text{et} \quad \cos \theta_{ij} = \frac{x(i) - Xs(j-1) - S_j \cos \delta_j}{r_{ij}}$$

D'après ces équations, on remarque que l'intégrale L est fonction uniquement de S<sub>j</sub> et peut se mettre sous la forme :

$$L = \int_0^{I_1} \frac{(I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5)}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j \quad (\text{III.35})$$

Les coefficients I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>, I<sub>4</sub> et I<sub>5</sub> seront déterminés ultérieurement par identification de l'expression de L de l'équation ( III.34 ) et celle de l'équation ( III.33 ).

$$L = I_1 \int_0^{I_1} \frac{S_j^2}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j - 2I_2 \int_0^{I_1} \frac{S_j}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j + I_5 \int_0^{I_1} \frac{dS_j}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2}$$

Soit :

$$L_1 = \int_0^{I_1} \frac{S_j^2}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j, \quad L_2 = \int_0^{I_1} \frac{S_j}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j$$

$$\text{et} \quad L_3 = \int_0^{I_1} \frac{dS_j}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2}$$

Mettons le dénominateur de ces intégrales sous la forme:

$$(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2 = ((S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)^2$$

Notons que les termes I<sub>3</sub> et I<sub>4</sub> restent identiques à ceux du paragraphe ( § III.4.1.4 ). A partir de là, calculons les intégrales L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> et L<sub>3</sub> suivant la valeur du terme (I<sub>4</sub><sup>2</sup> - I<sub>3</sub><sup>2</sup>).

- PREMIER CAS :  $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

$$\bullet L_1 = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^4} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{(S_j - I_3)^2 + 2I_3 S_j - I_3^2}{(S_j - I_3)^4} dS_j$$

$$L_1 = \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2} + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3 = - \frac{1}{S_j - I_3} \Big|_0^{l_j} + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3$$

$$L_1 = - \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3$$

$$\bullet L_2 = \int_0^{l_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^4} dS_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3)}{((S_j - I_3)^2)^2} dS_j + I_3 L_3$$

$$L_2 = - \frac{1}{2(S_j - I_3)^2} \Big|_0^{l_j} + I_3 L_3$$

$$L_2 = - \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 L_3$$

$$\bullet L_3 = \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^4} = - \frac{1}{3(S_j - I_3)^3} \Big|_0^{l_j}$$

$$L_3 = - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right)$$

Finalement, on établit :

$$L = I_1 L_1 - 2I_2 L_2 + I_3 L_3$$

$$L = I_1 \left( - \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3 \right) - 2I_2 \left( - \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 L_3 \right) + I_3 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right)$$

$$L = -I_1 \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_3 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2)$$

( III.36 )

- SECOND CAS :  $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

$$\bullet L_1 = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{((S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)^2} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2}{((S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)^2} dS_j + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3$$

$$L_1 = \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2} + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3 = \frac{1}{I_4^2 - I_3^2} \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{\left(\frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}\right)^2 + 1} + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3$$

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \Big|_0^{l_j} + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3$$

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3$$

$$\bullet L_2 = \int_0^{l_j} \frac{S_j}{((S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)^2} dS_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3)}{((S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)^2} dS_j + I_3 L_3$$

$$L_2 = - \frac{1}{2((S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} \Big|_0^{l_j} + I_3 L_3$$

$$L_2 = - \frac{1}{2((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} + I_3 L_3$$

$$\bullet L_3 = \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{((S_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)^2} = \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^2} \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{\left(\left(\frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}\right)^2 + 1\right)^2}$$

Faisons un changement de variables, en posant :

$$s = \frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \Rightarrow ds = \frac{dS_j}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$$

Nous aurons alors :

$$L_3 = \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b \frac{ds}{(s^2 + 1)^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$$

Posons encore  $p = \int_a^b \frac{ds}{(s^2 + 1)^2}$  et intégrons cette expression par parties.

$$\text{Soit : } \quad u = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{-2s}{(s^2 + 1)^2} ds$$

$$\quad \quad \quad dv = ds \quad \Rightarrow \quad v = s$$

$$\int_a^b \frac{ds}{s^2 + 1} = \int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du$$

$$= \frac{s}{s^2 + 1} \Big|_a^b - \int_a^b \left( -\frac{2s^2}{(s^2 + 1)^2} \right) ds = \frac{s}{s^2 + 1} \Big|_a^b + 2 \int_a^b \frac{s^2 + 1}{(s^2 + 1)^2} ds - 2 \int_a^b \frac{ds}{(s^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{ds}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 1} \Big|_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{ds}{s^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 1} \Big|_a^b + \frac{1}{2} \text{arctg}(s) \Big|_a^b$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\text{arctg}(b) - \text{arctg}(a))$$

L'expression de  $L_3$  sera donc :

$$L_3 = \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\text{arctg}(b) - \text{arctg}(a)) \right)$$

avec  $a = \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$  et  $b = \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$

Finalement l'intégrale  $L$  se mettra sous la forme :

$$L = I_1 \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \text{arctg} \left( \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \text{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + 2I_3 I_1 L_2 - I_1 I_4^2 L_3$$

$$- 2I_2 \left( -\frac{1}{2((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} + I_3 L_3 \right)$$

$$+ I_5 \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\text{arctg}(b) - \text{arctg}(a)) \right)$$

Après toutes substitutions, on trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{I_1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\
 & + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{\left( (I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2 \right)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)
 \end{aligned} \tag{ III.37 }$$

avec :  $a = \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$  et  $b = \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$

### III.4.1.6.2 CALCULS DES COEFFICIENTS

En comparaison avec les coefficients calculés au paragraphe ( § III.4.1.4.2 ), les valeurs de  $I_3$  et  $I_4$  restent inchangées.

Pour les coefficients  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_5$ , on identifie les numérateurs des expressions de  $L$  données par les équations ( III.33 ) et ( III.35 ) afin de déterminer leurs expressions. Soit :

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{I_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j = \int_0^{I_j} \frac{(I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5)}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j \\
 \Rightarrow r_{ij}^2 \sin(2\theta_{ij} - \delta_i) &= I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5 \\
 \Rightarrow r_{ij}^2 (2 \sin \theta_{ij} \cos \theta_{ij} \cos \delta_i - (\cos^2 \theta_{ij} - \sin^2 \theta_{ij}) \sin \delta_i) &= I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5 \\
 \Rightarrow r_{ij}^2 \left( 2 \left( \frac{y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j}{r_{ij}} \right) \left( \frac{x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j}{r_{ij}} \right) \cos \delta_i - \right. \\
 & \left. - \left( \left( \frac{x(i) - X_s(j-1) - S_j \cos \delta_j}{r_{ij}} \right)^2 - \left( \frac{y(i) - Y_s(j-1) - S_j \sin \delta_j}{r_{ij}} \right)^2 \right) \sin \delta_i \right) = I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5 \\
 \Rightarrow 2 \left( (y(i) - Y_s(j-1))(x(i) - X_s(j-1)) \right. \\
 & \left. - ((x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j) S_j + \sin \delta_j \cos \delta_j S_j^2 \right) \cos \delta_i \\
 & - \left( ((x(i) - X_s(j-1))^2 - (y(i) - Y_s(j-1))^2) \right. \\
 & \left. - 2((x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j) S_j + (\cos^2 \delta_j - \sin^2 \delta_j) S_j^2 \right) \sin \delta_i \\
 & = I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left( 2 \sin \delta_j \cos \delta_j \cos \delta_i - (\cos^2 \delta_j - \sin^2 \delta_j) \sin \delta_i \right) S_j^2 - 2 \left( \begin{aligned} & \left( (x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j \right) \cos \delta_i \\ & - \left( (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j \right) \sin \delta_i \end{aligned} \right) S_j + 2(y(i) - Y_s(j-1))(x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_i - \left( (x(i) - X_s(j-1))^2 - (y(i) - Y_s(j-1))^2 \right) \sin \delta_i = I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_3$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} I_1 &= 2 \sin \delta_j \cos \delta_j \cos \delta_i - (\cos^2 \delta_j - \sin^2 \delta_j) \sin \delta_i \\ I_2 &= \left( (x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j \right) \cos \delta_i \\ &\quad - \left( (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j \right) \sin \delta_i \\ I_3 &= 2(y(i) - Y_s(j-1))(x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_i \\ &\quad - \left( (x(i) - X_s(j-1))^2 - (y(i) - Y_s(j-1))^2 \right) \sin \delta_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} I_1 &= \sin 2\delta_j \cos \delta_i - \cos 2\delta_j \sin \delta_i \\ I_2 &= (x(i) - X_s(j-1)) (\sin \delta_j \cos \delta_i - \cos \delta_j \sin \delta_i) \\ &\quad + (y(i) - Y_s(j-1)) (\cos \delta_j \cos \delta_i + \sin \delta_j \sin \delta_i) \\ I_3 &= 2(y(i) - Y_s(j-1))(x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_i \\ &\quad - \left( (x(i) - X_s(j-1))^2 - (y(i) - Y_s(j-1))^2 \right) \sin \delta_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} I_1 &= \sin(2\delta_j - \delta_i) \\ I_2 &= (x(i) - X_s(j-1)) \sin(\delta_j - \delta_i) + (y(i) - Y_s(j-1)) \cos(\delta_j - \delta_i) \\ I_3 &= 2(y(i) - Y_s(j-1))(x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_i \\ &\quad - \left( (x(i) - X_s(j-1))^2 - (y(i) - Y_s(j-1))^2 \right) \sin \delta_i \end{aligned} \quad (III.38)$$

$$I_3 = (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j$$

$$I_4^2 = (y(i) - Y_s(j-1))^2 + (x(i) - X_s(j-1))^2$$

$$I_4^2 - I_3^2 = \left( (x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j \right)^2$$

Finalemment, la vitesse normale globale est :

- **PREMIER CAS** :  $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

$$V_{\eta i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{2\pi} \left( \begin{aligned} & \left( -I_1 \left( \frac{1}{l_j - l_3} + \frac{1}{l_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{(l_j - l_3)^2} - \frac{1}{l_3^2} \right) \right) \\ & \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - l_3)^3} + \frac{1}{l_3^3} \right) \right)^{1/3} - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2 \end{aligned} \right) + \text{terme}(i=j) \quad (III.39)$$

- **SECOND CAS** :  $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\mu_j}{2\pi} \left( I_1 \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \right. \\ \left. + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{(I_4^2 - I_3^2)^2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) + \text{terme}(i =$$

( III.40 )

### III.4.1.6.3 CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES

La condition de glissement imposée sur les N points de contrôle de la frontière S du corps C (fig.III.1) engendre N contraintes qui permettent d'établir un système d'équations qui donnera après résolution l'intensité des singularités.

Cette condition se traduit en annulant la vitesse normale  $V_{\eta_i}$  (eq.III.34) aux N points de contrôle. Soit :

$$V_{\eta_i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} ds_j + \text{terme}(i = j) = 0$$

De nouveau, suivant la valeur du terme  $(I_4^2 - I_3^2)$  deux cas se présente :

- **PREMIER CAS** :  $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

En annulant l'expression de la vitesse  $V_{\eta_i}$  donnée par l'équation ( III.39 ), on obtient le système linéaire  $\{ [A](\mu) = (B) \}$  où :

$$A(i, j) = -I_1 \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_5 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2) \\ A(i, i) = L(i, i) \quad (\text{v. annexe B})$$

( III.41 )

$$B(i) = 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

**- SECOND CAS :  $(I_4^2 - I_3^2) > 0$**

De la même façon que précédemment, on annule la vitesse normale donnée cette fois-ci par l'équation ( III.40 ), les termes du système seront par conséquent :

$$A(i, j) = I_1 \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \left( \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \arctg \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\ + \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{(I_4^2 - I_3^2)^{3/2}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\arctg(b) - \arctg(a)) \right)$$

$$A(i, i) = L(i, i) \quad (\text{v. annexe B})$$

( III.42 )

$$B(i) = 2 \pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

**III.4.1.6.4 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE**

L'expression de la vitesse tangentielle  $V_{\tau_i}$  est établie par projection sur l'axe  $\tau_i$  tangent au panneau  $i$ , de la vitesse due à l'écoulement uniforme et de la vitesse de perturbation et de l'influence du panneau sur lui-même ( annexe B ).

$$V_{\tau_i} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2 \pi r_{ij}^2} dS_j + \text{terme}(i=j) \quad (\text{III.43})$$

Posons :

$$H = \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad (\text{III.44})$$

On remarque que l'intégrale  $H$  (eq.III.44) peut se mettre sous la forme de l'intégrale  $L$  donnée par l'équation ( III.35 ), pour la définir il suffit seulement de redéfinir les coefficients  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  par identification de l'expression de  $H$  ( eq.III.44 ) et de l'expression de  $L$  (eq.III.35).

Les coefficients  $I_3$  et  $I_4$  demeurent inchangés (dénominateur identique). Nous obtenons :

$$I_1 = \cos(2\delta_j - \delta_i) \\ I_2 = (x(i) - Xs(j-1)) \cos(\delta_j - \delta_i) - (y(i) - Ys(j-1)) \sin(\delta_j - \delta_i) \\ I_3 = 2(y(i) - Ys(j-1))(x(i) - Xs(j-1)) \sin \delta_i \\ + ((x(i) - Xs(j-1))^2 - (y(i) - Ys(j-1))^2) \cos \delta_i \quad (\text{III.45})$$

- PREMIER CAS :  $(I_4^2 - I_3^2) = 0$

$$V_{\tau_i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\mu_j}{2\pi} \left( \begin{array}{l} -I_1 \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \\ - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_5 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2) \end{array} \right) + \text{terme}(i=j)$$

( III.46 )

- SECOND CAS :  $(I_4^2 - I_3^2) > 0$

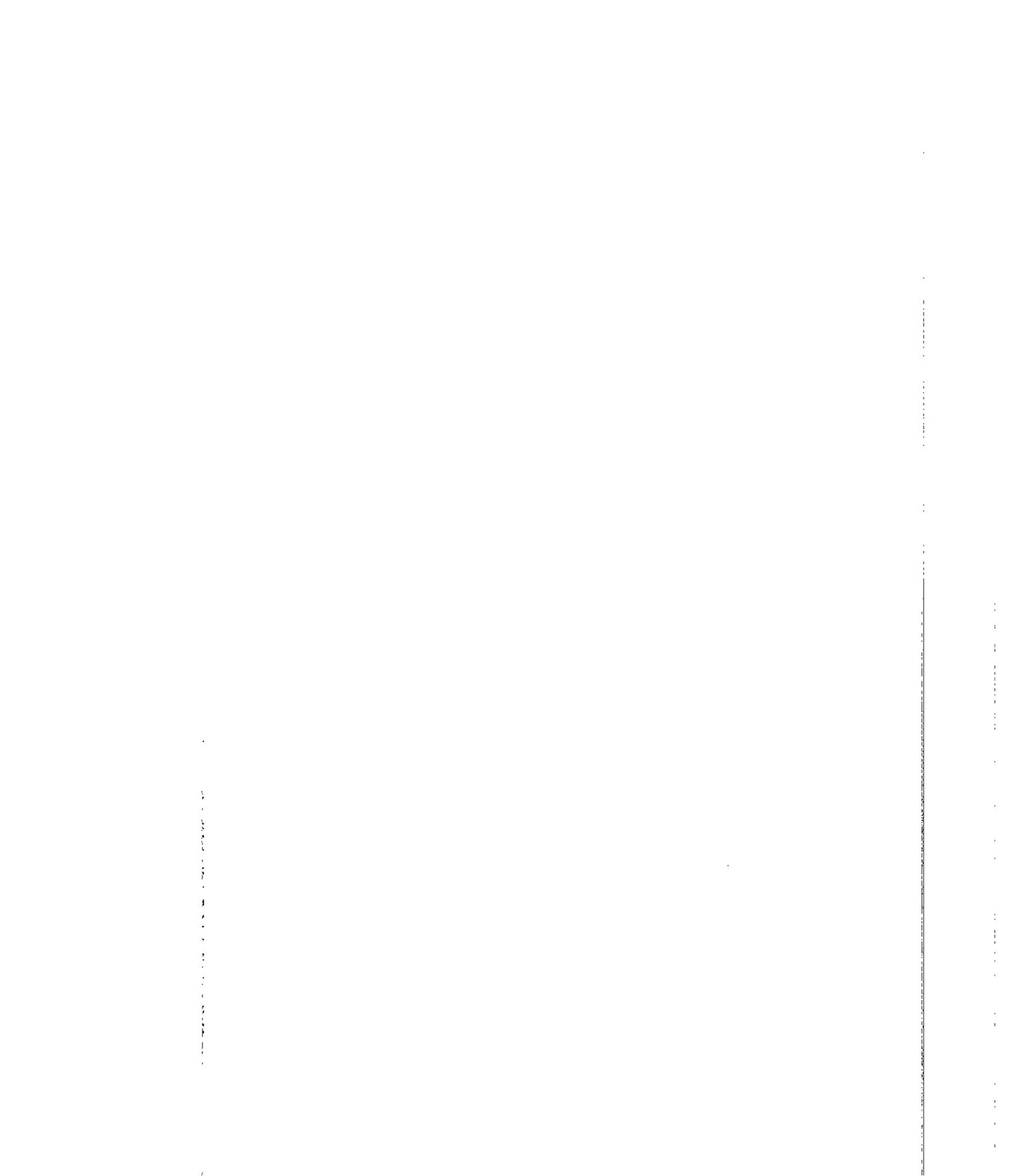
$$V_{\tau_i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\mu_j}{2\pi} \left( \begin{array}{l} I_1 \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \left( \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \arctg \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\ + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{((I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\ + \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\arctg(b) - \arctg(a)) \right) \end{array} \right) + \text{terme}(i=j)$$

( III.47 )

➤ Le terme  $(i = j)$  correspond à l'expression de H donnée par l'équation ( III.44 ) dans le cas particulier où  $i = j$ , cette condition se traduit en posant  $\theta_{ij} = \delta_i$ , donc l'expression de H deviendra :

$$H = \int_0^{l_j} \frac{\cos \theta_{ij}}{r_{ij}^2} dS_j$$

Le calcul de cette intégrale est effectuée en annexe B.



### III.4.2 ANALYSE D'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN PROFIL PORTANT

Considérons un écoulement autour d'un cylindre de longueur infinie (fig III.10).

En superposant le potentiel de vitesses  $\phi_1$  d'un écoulement uniforme et le potentiel de vitesses  $\phi_2$  d'un vortex de circulation  $\Gamma$ , où :

$$\phi_1 = qr \cos(\theta - \alpha) \quad \text{et} \quad \phi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

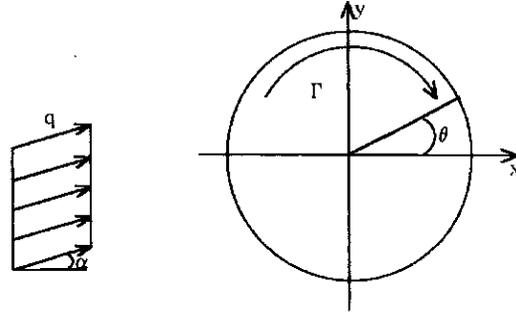


figure III.10

Écoulement uniforme et vortex (négatif) autour d'un cylindre en rotation.

La vitesse sur le cylindre, qui est tangente au cylindre, a pour expression :

$$U_\theta = -\left(2q \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right) \quad (\text{III.48})$$

Le signe négatif provient du sens de rotation du cylindre (CW).

Pour une circulation nulle, deux points de stagnation apparaissent à :

$$\theta_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \theta_2 = \pi + \alpha$$

En faisant augmenter la circulation, les deux points d'arrêt se déplacent le long de la surface du cylindre tel que :

$$\theta_1 = \alpha + \arcsin\left(-\frac{\Gamma}{4\pi qr}\right) \quad \text{et} \quad \theta_2 = \pi + \alpha - \theta_1$$

Pour une valeur singulière de  $\Gamma$ , les deux points de stagnation coïncideront de sorte que :

$$\theta = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad \Gamma = -4\pi qr$$

En appliquant le théorème de Bernoulli, on voit que les pressions sur le contour ACB sont inférieures à celles développées sur le contour ADB, par suite l'écoulement donne lieu à une résultante R dirigée de D vers C et ayant DC comme ligne d'action, cette résultante engendre une *PORTANCE*.

Le problème qui se pose est de modéliser la circulation afin d'analyser les écoulements autour de profils portants, pour cela faisons, par analogie, le bilan des efforts appliqués sur un panneau chargé de singularités.

Pour une distribution uniforme (fig.III.11), le bilan des efforts se réduit à une force exercée au point de contrôle, qui est le centre de gravité du panneau, et à un moment nul.

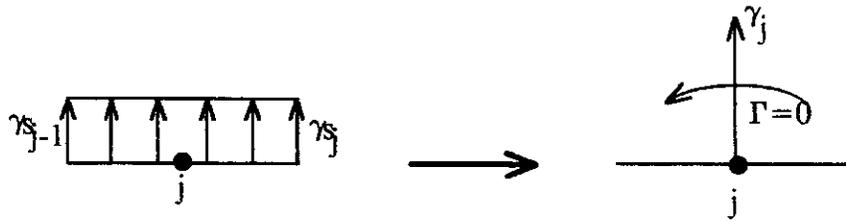


figure III.11  
Réduction d'une distribution uniforme au point de contrôle

L'existence d'une circulation ne sera donc pas modéliser par ce type de distribution, il est donc nécessaire de choisir une distribution non uniforme.

Choisissons une distribution linéaire et établissons de nouveau le bilan des efforts au point de contrôle (fig.III.12).

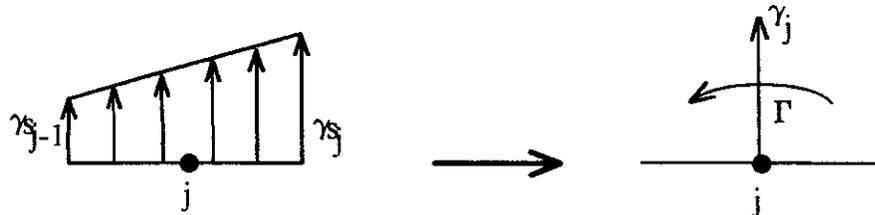


figure III.12  
Réduction d'une distribution linéaire au point de contrôle.

La réduction au point de contrôle engendre bien un moment non nul en ce point et donc on pourra modéliser la portance de profils par une distribution linéaire de singularités.

### III.4.2.1 DISTRIBUTION LINEAIRE DE VORTEX

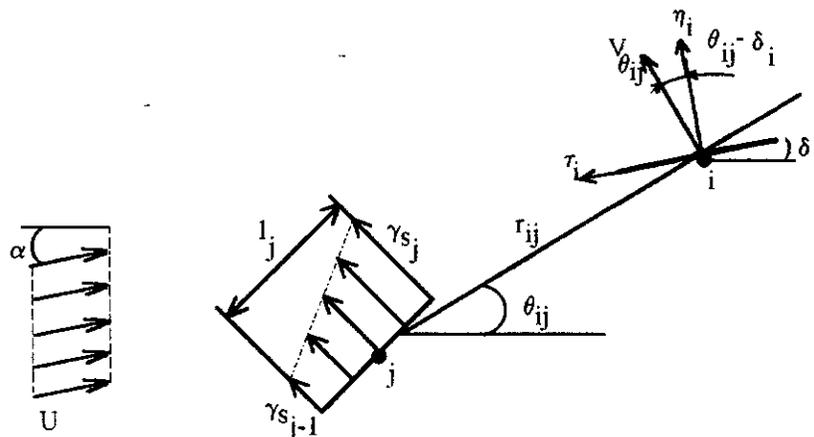


figure III.13  
Influence d'un panneau  $j$  chargé linéairement de vortex sur un point de contrôle  $i$

Pour une distribution linéaire de vortex ( *fig.III.13* ), le cheminement pour établir l'expression des vitesses est identique à la distribution uniforme de vortex ( § III.4.1.5 ) à la différence que l'intensité des singularités dans les intégrales des expressions de la vitesse normale et tangentielle données respectivement par les équations ( III.22 ) et ( III.29 ), est fonction de la variable d'intégration  $S_j$ , en effet :

$$\gamma(j) = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j \quad ( III.49 )$$

L'expression de la vitesse normale globale sera :

$$V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left( \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j$$

$$V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \left( \gamma_s(j-1) \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \int_0^{l_j} S_j \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j \right) \quad ( III.50 )$$

Pour des raisons de commodités, nous poserons :

$$W(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \quad \text{et} \quad H(i, j) = \int_0^{l_j} S_j \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \quad ( III.51 )$$

L'équation (III.50) s'écrira alors :

$$V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \left( W(i, j) - \frac{H(i, j)}{l_j} \right) \gamma_s(j-1) + \frac{H(i, j)}{l_j} \gamma_s(j) \right) \quad ( III.52 )$$

Notre ambition est de calculer l'intensité des singularités pour ce nous avons établi l'expression de la vitesse normale ( eq.III.52 ), à partir de celle-ci en imposant la condition de glissement sur le contour de l'obstacle ( *fig.III.1* ), nous pourrions établir le système qui nous permettra de déterminer ces intensités néanmoins afin d'aboutir aux résultats escomptés, en examinant l'équation ( III.52 ), il apparaît que l'intensité de la singularité pour  $j=1$  n'est pas définie, pour surmonter ce problème la sommation devra se faire de  $j=2$ ,  $N+1$  et pour éviter une redistribution sur le premier panneau, on confondra le point  $N+1$  avec le point 1 ce qui se traduit en imposant que :

$$\begin{aligned} W(i, N+1) &= W(i, 1) \\ H(i, N+1) &= H(i, 1) \\ l_{N+1} &= l_1 \end{aligned} \quad ( III.53 )$$

De plus le nombre d'inconnues du système, pour une distribution linéaire, est de  $N+1$  alors que nous disposons que de  $N$  équations, une condition supplémentaire est alors à imposer, c'est la condition de *KUTTA* :

$$\gamma_s(N+1) = -\gamma_s(1) \quad ( III.54 )$$

➤ L'influence du panneau sur lui-même (  $i = j$  ) exige un développement particulier qui se trouve en annexe A.

### III.4.2.1.1 CALCUL DES INTEGRALES W et H

• L'intégrale W ( eq.III.51 ) n'est autre que l'intégrale J ( eq.III.20 ) déjà calculée ( § III.4.1.4.4 ) qui prend la forme :

**PREMIER CAS :**  $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$W(i,j) = I_1 \ln \left( \frac{|I_j - I_3|}{|-I_3|} \right) - (I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \quad (\text{III.55})$$

**SECOND CAS :**  $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$W(i,j) = \frac{I_1}{2} \ln \left( \frac{|(I_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2|}{I_4^2} \right) + \frac{(I_1 I_3 + I_2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \arctg \frac{I_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \arctg \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \quad (\text{III.56})$$

avec

$$I_1 = -\cos \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_i \sin \delta_j$$

$$I_2 = (y(i) - Ys(j-1)) \sin \delta_i + (x(i) - Xs(j-1)) \cos \delta_i$$

$$I_3 = (x(i) - Xs(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Ys(j-1)) \sin \delta_j$$

$$I_4^2 = (y(i) - Ys(j-1))^2 + (x(i) - Xs(j-1))^2$$

$$I_4^2 - I_3^2 = ((x(i) - Xs(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Ys(j-1)) \cos \delta_j)^2$$

• Calculs de l'intégrale H

**PREMIER CAS :**  $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$\begin{aligned} H(i,j) &= \int_0^{I_j} \frac{S_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j = \int_0^{I_j} \frac{S_j (I_1 S_j + I_2)}{(S_j - I_3)^2} dS_j = I_1 \int_0^{I_j} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^2} dS_j + I_2 \int_0^{I_j} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^2} dS_j \\ &= I_1 \int_0^{I_j} \frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_3^2 - I_3^2 + 2I_3 S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_3^2} dS_j + I_2 \int_0^{I_j} \frac{(S_j - I_3) + I_3}{(S_j - I_3)^2} dS_j \\ H(i,j) &= I_1 \int_0^{I_j} dS_j + I_1 I_3 \int_0^{I_j} \frac{2(S_j - I_3) + I_3}{(S_j - I_3)^2} dS_j + I_2 I_3 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2} + I_2 \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{S_j - I_3} \\ &= I_1 \int_0^{I_j} dS_j + (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2} + (I_2 + 2I_1 I_3) \int_0^{I_j} \frac{dS_j}{S_j - I_3} \end{aligned}$$

$$H(i, j) = I_1 S_j \Big|_0^{l_j} + (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left( -\frac{1}{S_j - I_3} \right) \Big|_0^{l_j} + (I_2 + 2I_1 I_3) \ln(S_j - I_3) \Big|_0^{l_j}$$

Finalement :

$$H(i, j) = I_1 l_j - (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 + 2I_1 I_3) \ln \left( 1 - \frac{l_j}{I_3} \right) \quad (\text{III.57})$$

**SECOND CAS :**  $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$H(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{S_j(I_1 S_j + I_2)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j = \int_0^{l_j} \frac{I_1 S_j^2 + I_2 S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j$$

$$\begin{aligned} H(i, j) &= I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j^2}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + I_2 \int_0^{l_j} \frac{S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j \\ &= I_1 \int_0^{l_j} \frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2 - I_4^2 + 2I_3 S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + \frac{1}{2} I_2 \int_0^{l_j} \frac{2S_j + 2I_3 - 2I_3}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(i, j) &= I_1 \int_0^{l_j} dS_j + 2I_1 I_3 \int_0^{l_j} \frac{S_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j - I_1 I_4^2 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} I_2 \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + I_2 I_3 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(i, j) &= I_1 S_j \Big|_0^{l_j} + 2I_1 I_3 \left( \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + I_3 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \right) - I_1 I_4^2 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} I_2 \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + I_2 I_3 \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} \end{aligned}$$

$$H(i, j) = I_1 \int_0^{l_j} dS_j + \left( I_1 I_3 + \frac{1}{2} I_2 \right) \int_0^{l_j} \frac{2(S_j - I_3)}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2} dS_j + (2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_4^2) \int_0^{l_j} \frac{dS_j}{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2}$$

$$H(i, j) = I_1 S_j \Big|_0^{l_j} + \left( I_1 I_3 + \frac{1}{2} I_2 \right) \ln(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2) \Big|_0^{l_j} + \frac{(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{S_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \Big|_0^{l_j}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} H(i, j) &= I_1 l_j + \left( I_1 I_3 + \frac{1}{2} I_2 \right) \ln \left( \frac{S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2}{I_4^2} \right) \\ &\quad + \frac{(2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \end{aligned}$$

( III.58 )

Les coefficients étant définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\cos \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \sin \delta_i \\
 I_2 &= (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_i + (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_i \\
 I_3 &= (x(i) - X_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Y_s(j-1)) \sin \delta_j \\
 I_4^2 &= (y(i) - Y_s(j-1))^2 + (x(i) - X_s(j-1))^2 \\
 I_4^2 - I_3^2 &= ((x(i) - X_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Y_s(j-1)) \cos \delta_j)^2
 \end{aligned}$$

### III.4.2.1.2 CALCULS DE L'INTENSITE DES SINGULARITES

Afin d'établir le système qui nous permettra de déterminer l'intensité des singularités, il suffit d'imposer la condition de glissement sur le contour S de l'obstacle (*fig. III.1*), néanmoins il faut préalablement étudier le cas particulier de l'influence du panneau sur lui-même, ces calculs se trouvent en annexe.

$$V_{\eta_i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \left( W(i,j) - \frac{H(i,j)}{l_j} \right) \gamma_s(j-1) + \frac{H(i,j)}{l_j} \gamma_s(j) \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^N \left( \left( W(i,j) - \frac{H(i,j)}{l_j} \right) \gamma_s(j-1) + \frac{H(i,j)}{l_j} \gamma_s(j) \right) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^N A(i,j) \gamma_s(j) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

En imposant les conditions ( III.53 ) et ( III.54 ), on définit les matrices du système qui nous permettent de déterminer l'intensité des singularités, soit :

$$A(i,1) = W(i,2) - \frac{H(i,2)}{l_2} - \frac{H(i,1)}{l_1}$$

$$A(i,n) = W(i,1) - \frac{H(i,1)}{l_1} + \frac{H(i,N)}{l_N}$$

$$A(i,j) = W(i,j+1) - \frac{H(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{H(i,j)}{l_j}$$

( III.59 )

$$A(i,i) = W(i,i+1) - \frac{H(i,i+1)}{l_{i+1}} + \frac{H(i,i)}{l_i}$$

( H et W pour  $i = j$  développées en annexe A )

$$B(i) = 2\pi U_\infty \sin(\delta_i - \alpha)$$

### III.4.2.1.3 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE

De façon analogue au paragraphe ( § III.4.1.5.2 ), on établit l'expression de la vitesse tangentielle. Soit :

$$V_{\tau_i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} \left( \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}} dS_j \quad (III.60)$$

➤ L'influence du panneau sur lui-même (  $i = j$  ) exige un développement particulier qui se trouve en annexe A.

L'intégrale de l'équation ( III.60 ) étant de forme identique à celle donnée par l'équation ( III.52 ), la seule différence réside dans la définition des coefficients.

Ceci étant, la vitesse tangentielle s'écrit alors :

$$V_{\tau_i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \left( W(i,j) - \frac{H(i,j)}{l_j} \right) \gamma_s(j-1) + \frac{H(i,j)}{l_j} \gamma_s(j) \right)$$

$$V_{\tau_i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N A(i,j) \gamma_s(j)$$

avec :

$$A(i,1) = W(i,2) - \frac{H(i,2)}{l_2} - \frac{H(i,1)}{l_1}$$

$$A(i,n) = W(i,1) - \frac{H(i,1)}{l_1} + \frac{H(i,N)}{l_N}$$

$$A(i,j) = W(i,j+1) - \frac{H(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{H(i,j)}{l_j}$$

$$A(i,i) = W(i,i+1) - \frac{H(i,i+1)}{l_{i+1}} + \frac{H(i,i)}{l_i}$$

( H et W pour  $i = j$  en annexe A )

Les coefficients étant quand à eux définis par :

$$I_1 = \sin \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_j \cos \delta_i$$

$$I_2 = (y(i) - Ys(j-1)) \cos \delta_i - (x(i) - Xs(j-1)) \sin \delta_i$$

$$I_3 = (x(i) - Xs(j-1)) \cos \delta_j + (y(i) - Ys(j-1)) \sin \delta_j$$

$$I_4^2 = (y(i) - Ys(j-1))^2 + (x(i) - Xs(j-1))^2$$

$$I_4^2 - I_3^2 = ((x(i) - Xs(j-1)) \sin \delta_j - (y(i) - Ys(j-1)) \cos \delta_j)^2$$

### III.4.2.2 DISTRIBUTION LINEAIRE DE DOUBLETS

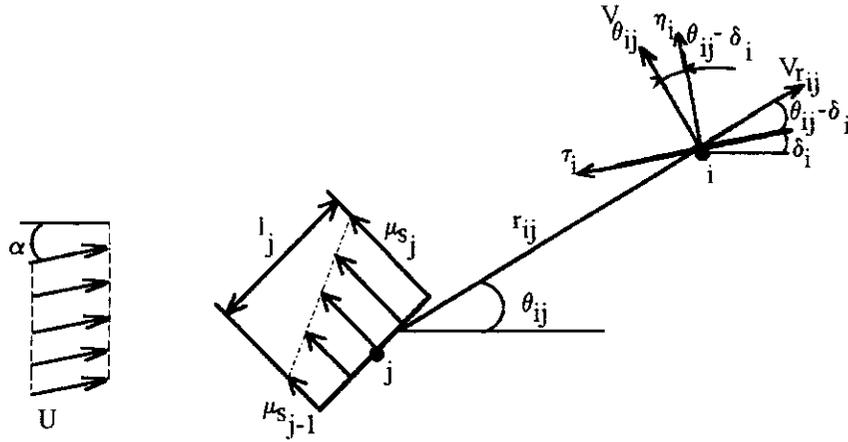


figure III.14

Influence d'un panneau  $j$  chargé linéairement de doublets sur un point de contrôle  $i$

Pour une distribution linéaire de doublets ( fig.III.14 ), les étapes de la formulation sont identiques à celles de la distribution linéaire de vortex ( § III.4.2.1 ).

Les expressions des vitesses sont identiques à celles données par une distribution uniforme (eq.III.34 et eq.III.43 ) à la différence que l'intensité des singularités est fonction de la variable d'intégration  $S_j$ , en effet :

$$\mu(j) = \mu_s(j-1) + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j \quad (\text{III.61})$$

L'expression de la vitesse normale globale est :

$$\begin{aligned} V_{\eta_i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu(j) \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j \\ V_{\eta_i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left( \mu_s(j-1) + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j \\ V_{\eta_i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \mu_s(j-1) \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} \int_0^{l_j} \frac{S_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \right) \end{aligned} \quad (\text{III.62})$$

Posons :

$$M(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad \text{et} \quad D(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

➤ L'influence du panneau sur lui-même (  $i = j$  ) engendre des calculs particuliers des intégrales  $M$  et  $D$  développés en annexe B.

On reconnaît l'intégrale M comme étant l'intégrale L donnée par l'équation ( III.33 ) dont le calcul a été fait, calculons alors l'intégrale D.

L'intégrale D peut s'écrire :

$$D(i, j) = \int_0^{I_j} \frac{S_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{I_{ij}^2} dS_j = \int_0^{I_j} \frac{S_j (I_1 S_j^2 - 2I_2 S_j + I_5)}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j$$

$$D(i, j) = I_1 \int_0^{I_j} \frac{S_j^3}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j - 2I_2 \int_0^{I_j} \frac{S_j^2}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j + I_5 \int_0^{I_j} \frac{S_j}{(S_j^2 - 2I_3 + I_4^2)^2} dS_j$$

$$D(i, j) = I_1 L_4 - 2I_2 L_1 + I_5 L_2 \quad ( III.63 )$$

Les intégrales  $L_1$  et  $L_2$  ont déjà été calculées au paragraphe ( § III.4.1.6.1 ), calculons alors l'intégrale  $L_4$  suivant la valeur du terme (  $I_4^2 - I_3^2$  ).

**PREMIER CAS :**  $I_4^2 - I_3^2 = 0$

$$L_4 = \frac{1}{4} \int_0^{I_j} \frac{4S_j^3 - 12I_3 S_j^2 + 12I_3^2 S_j - 4I_3^3}{(S_j - I_3)^4} dS_j + 3I_3 L_1 - 3I_3^2 L_2 + I_3^3 L_3$$

$$= \frac{1}{4} \ln(S_j - I_3)^4 \Big|_0^{I_j} + 3I_3 L_1 - 3I_3^2 L_2 + I_3^3 L_3$$

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{S_j - I_3}{I_3} \right)^4 + 3I_3 L_1 - 3I_3^2 L_2 + I_3^3 L_3$$

avec  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  définis au paragraphe ( § III.4.1.6.1 ).

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{I_j - I_3}{I_3} \right)^4 + 3I_3 \left( - \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 2I_3 L_2 - I_3^2 L_3 \right)$$

$$- 3I_3^2 \left( \frac{1}{2(I_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 L_3 \right)$$

$$+ I_3^3 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right)$$

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{l_j - I_3}{I_3} \right)^4 + 3I_3 \left[ \begin{aligned} & - \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 2I_3 \left( - \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \right) \\ & - I_3^2 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \\ & - 3I_3^2 \left( - \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \right) \\ & + I_3^3 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \end{aligned} \right]$$

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{l_j - I_3}{I_3} \right)^4 - 3I_3 \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 3I_3^2 \left( - \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} \right) + I_3^3 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right)$$

En substituant les expressions de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_4$  dans l'équation ( III.63 ), l'intégrale D s'écrit alors :

$$D(i, j) = I_1 \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{4} \ln \left( \frac{l_j - I_3}{I_3} \right)^4 - 3I_3 \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 3I_3^2 \left( - \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + I_3^3 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \right) \\ & - 2I_2 \left( - \left( \frac{1}{l_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + 2I_3 \left( - \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \right) \right) \\ & + I_5 \left( - \frac{1}{2(l_j - I_3)^2} + \frac{1}{2I_3^2} + I_3 \left( - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) \right) \right) \end{aligned} \right]$$

Finalemment :

$$\begin{aligned}
 D(i, j) = & \frac{I_1}{4} \ln \left( \frac{I_j - I_3}{I_3} \right)^4 - (3I_1 I_3 - 2I_2) \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) \\
 & - \frac{1}{2} (3I_1 I_3^2 - 4I_2 I_3 + I_5) \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \\
 & - \frac{1}{3} (I_1 I_3^3 - 2I_2 I_3^2 + I_5 I_3) \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right)
 \end{aligned} \quad (III.64)$$

et

$$\begin{aligned}
 M(i, j) = & -I_1 \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \\
 & - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^3} + \frac{1}{I_3^3} \right) (I_5 - 2I_2 I_3 + I_1 I_3^2)
 \end{aligned} \quad (III.65)$$

Les coefficients sont identiques à ceux déterminés au paragraphe ( § III.4.1.6.2 ) et sont donnés par le système ( III.38 )

**SECOND CAS :**  $I_4^2 - I_3^2 > 0$

$$\begin{aligned}
 L_4 &= \frac{1}{4} \int_0^{I_j} \frac{4Sj^3 - 12I_3 Sj^2 + 4(I_4^2 + 2I_3^2)Sj - 4I_3 I_4^2}{(Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2)^2} dSj + 3I_3 L_1 - (I_4^2 + 2I_3^2)L_2 + I_3 I_4^2 L_3 \\
 &= \frac{1}{4} \ln(Sj^2 - 2I_3 Sj + I_4^2)^2 \Big|_0^{I_j} + 3I_3 L_1 - (I_4^2 + 2I_3^2)L_2 + I_3 I_4^2 L_3 \\
 L_4 &= \frac{1}{4} \ln \left( \frac{I_j^2 - 2I_3 I_j + I_4^2}{I_4^2} \right)^2 + 3I_3 L_1 - (I_4^2 + 2I_3^2)L_2 + I_3 I_4^2 L_3
 \end{aligned}$$

avec  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  définis au paragraphe ( § III.4.1.6.1 ).

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{l_j^2 - 2I_3 l_j + I_4^2}{I_4^2} \right)^2 + 3I_3 \left( \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + 2I_3 L_2 - I_4^2 L_3 \right) \\ - (I_4^2 + 2I_3^2) \left( \frac{1}{2((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} + I_3 L_3 \right) \\ + I_3 I_4^2 \left( \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right)$$

Après toutes substitutions  $L_4$  peut se mettre sous la forme :

$$L_4 = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{l_j^2 - 2I_3 l_j + I_4^2}{I_4^2} \right)^2 + 3I_3 \left( \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) + 2I_3 \left( \frac{1}{2((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} + I_3 \left( \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \right) \right) \\ - I_4^2 \left( \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \\ - (I_4^2 + 2I_3^2) \left( \frac{1}{2((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} + I_3 \left( \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \right) \\ + I_3 I_4^2 \left( \frac{1}{(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
L_4 = & \frac{1}{4} \ln \left( \frac{l_j^2 - 2I_3 l_j + I_4^2}{I_4^2} \right)^2 + \frac{3I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\
& + \frac{(I_4^2 - 4I_3^2)}{2} \left( \frac{1}{((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
& + \frac{(4I_3^3 - 3I_3 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)
\end{aligned}$$

En substituant les expressions de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_4$  dans l'équation ( III.63 ), l'intégrale D s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
D(i, j) = & I_1 \left( \frac{1}{4} \ln \left( \frac{l_j^2 - 2I_3 l_j + I_4^2}{I_4^2} \right)^2 + \frac{3I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \right. \\
& + \frac{(I_4^2 - 4I_3^2)}{2} \left( \frac{1}{((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
& \left. + \frac{(4I_3^3 - 3I_3 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \\
& - 2I_2 \left( \frac{1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \right. \\
& + 2I_3 \left( \frac{1}{2((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{I_3}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right) \right) \\
& - \frac{I_4^2}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \\
& + I_5 \left( \frac{1}{2((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} + \frac{1}{2I_4^2} \right. \\
& \left. + \frac{I_3}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right) \right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 M(i, j) = & \frac{I_1}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\
 & + (I_2 - I_1 I_3) \left( \frac{1}{((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{(I_5 + 2I_1 I_3^2 - 2I_2 I_3 - I_1 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)
 \end{aligned} \tag{ III.66 }$$

$$\begin{aligned}
 D(i, j) = & \frac{I_1}{4} \ln \left( \frac{l_j^2 - 2I_3 l_j + I_4^2}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{3I_1 I_3 - 2I_2}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}} \right) \right) \\
 & + \frac{1}{2} (I_1 I_4^2 - 4I_1 I_3^2 + 4I_2 I_3 - I_5) \left( \frac{1}{((l_j - I_3)^2 + I_4^2 - I_3^2)} - \frac{1}{I_4^2} \right) \\
 & + \frac{(4I_1 I_3^3 + I_5 I_3 - 4I_2 I_3^2 + 2I_2 I_4^2 - 3I_1 I_3 I_4^2)}{2(I_4^2 - I_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \left( \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) + (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) \right)
 \end{aligned} \tag{ III.67 }$$

avec  $a = \frac{-I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$  et  $b = \frac{l_j - I_3}{\sqrt{I_4^2 - I_3^2}}$

Les coefficients sont identiques à ceux déterminés au paragraphe ( § III.4.1.6.2 ) et sont donnés par le système ( III.38 )

#### III.4.2.2.2 CALCUL DE L'INTENSITE DES SINGULARITES

En imposant la condition de glissement sur la frontière, de plus les conditions données par les équations ( III.53 ) et ( III.54 ) doivent être aussi appliquées pour ce type de distributions pour les mêmes raisons citées au paragraphe ( § III.4.2.1 ).

Ces conditions s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{aligned}
M(i, N+1) &= M(i, 1) \\
D(i, N+1) &= D(i, 1) \quad \text{et} \quad \mu_s(N+1) = -\mu_s(1) \quad (\text{III.68}) \\
l_{N+1} &= l_1
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire :

$$\begin{aligned}
V_{\tau i} &= -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \left( M(i, j) - \frac{D(i, j)}{l_j} \right) \mu_s(j-1) + \frac{D(i, j)}{l_j} \mu_s(j) \right) = 0 \\
\sum_{j=1}^N \left( \left( M(i, j) - \frac{D(i, j)}{l_j} \right) \mu_s(j-1) + \frac{D(i, j)}{l_j} \mu_s(j) \right) &= 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \\
\Rightarrow \sum_{j=1}^N A(i, j) \mu_s(j) &= 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)
\end{aligned}$$

➤ L'influence du panneau sur lui-même nécessite un développement particulier établi en annexe B.

En imposant les conditions ( III.68 ), on définit alors les matrices du système qui nous permettent de déterminer l'intensité des singularités, soit :

$$\begin{aligned}
A(i, 1) &= M(i, 2) - \frac{D(i, 2)}{l_2} - \frac{D(i, 1)}{l_1} \\
A(i, n) &= M(i, 1) - \frac{D(i, 1)}{l_1} + \frac{D(i, N)}{l_N} \\
A(i, j) &= M(i, j+1) - \frac{D(i, j+1)}{l_{j+1}} + \frac{D(i, j)}{l_j} \quad (\text{III.69}) \\
A(i, i) &= M(i, i+1) - \frac{D(i, i+1)}{l_{i+1}} + \frac{D(i, i)}{l_i} \quad (\text{M et D pour } i=j \text{ définis en annexe B})
\end{aligned}$$

$$B(i) = 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$$

### III.4.2.2.3 EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE

De façon analogue au paragraphe ( § III.4.1.6.4 ), on établit l'expression de la vitesse tangentielle. Soit :

$$V_{\tau i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} \left( \mu_s(j-1) + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j \right) \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{2\pi r_{ij}^2} dS_j$$

$$V_{r,i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \begin{aligned} & \mu_s(j-1) \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \\ & + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \end{aligned} \right) \quad (\text{III.70})$$

On remarque que les deux intégrales de l'expression ( III.70 ) sont de la même forme que les intégrales M et D, il faudra uniquement redéfinir les coefficients  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , à leur tour ces coefficients sont déjà définis par le système ( III.45 ).

Nous pouvons directement écrire l'expression de la vitesse tangentielle, soit :

$$V_{r,i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N A(i,j) \mu_s(j) \quad (\text{III.71})$$

avec  $A(i, j)$  défini par le système ( III.69 ).

*CHAPITRE IV*

**APPLICATIONS DE LA METHODE  
DES SINGULARITES**

## IV.1 INTRODUCTION

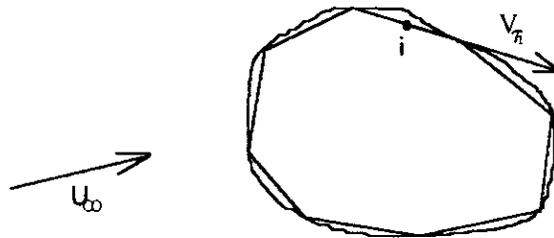
Dans le chapitre précédent nous avons établi l'algorithme de la méthode autour de profils, portants et non portants, de formes quelconques.

Dans ce chapitre nous nous proposons d'appliquer la méthode à des profils de formes connues ( cylindres, aubes, ... ) afin, dans un premier temps, de déterminer les caractéristiques de l'écoulement ( coefficients de pression, potentiels de vitesses, ... ) autour de ces profils et par la suite, ce qui est l'objectif principal de notre étude, d'élaborer un maillage automatique.

## IV.2 PARAMETRES CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT

### IV.2.1 COEFFICIENT DE PRESSION

Le coefficient de pression est déterminé en appliquant l'équation de Bernoulli entre un point à l'infini amont de l'obstacle et un point  $i$  de la frontière de l'obstacle (*fig IV.1*). Le point  $i$  sera donc nécessairement un point de contrôle.



*figure IV.1*

D'après l'équation de Bernoulli :

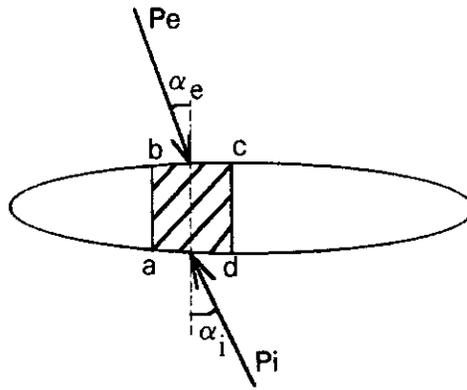
$$P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = P + \frac{1}{2} \rho V_{\tau i}^2 \Rightarrow P - P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \left( 1 - \left( \frac{V_{\tau i}}{U_{\infty}} \right)^2 \right)$$

On définit le coefficient de pression  $C_p$  pour les écoulements incompressibles comme étant le rapport de la différence des énergies cinétiques et l'énergie cinétique en amont, soit :

$$C_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = 1 - \left( \frac{V_{\tau i}}{U_{\infty}} \right)^2 \quad (IV.1)$$

### IV.2.2 COEFFICIENT DE PORTANCE

Considérons un profil  $C$  (*fig.IV.2*), faisons un bilan des forces qui s'exercent sur un élément  $abcd$  de largeur  $dx$ .



$$ds_e = bc$$

$$ds_i = ad$$

figure IV.2

Bilan des forces s'exerçant sur un élément abcd d'un profil

Par projection suivant la verticale :

$$dR = P_e ds_e \cos \alpha_e - P_i ds_i \cos \alpha_i$$

$$dR = (P_e - P_i) dx$$

$$\text{or } P_e - P_i = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (C_{p_i} - C_{p_e})$$

$$\Rightarrow R = -\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_0^1 (C_{p_i} - C_{p_e}) dx$$

avec  $C_{p_e}$  et  $C_{p_i}$  respectivement les coefficients de pression de la surface supérieure (extrados) et de la surface inférieure (intrados).

On définit alors le coefficient de portance Cl par :

$$Cl = \frac{1}{l} \int_0^1 (C_{p_i} - C_{p_e}) dx \quad (IV.2)$$

Dans le cas particulier où le profil est de forme cylindrique (fig.IV.3).

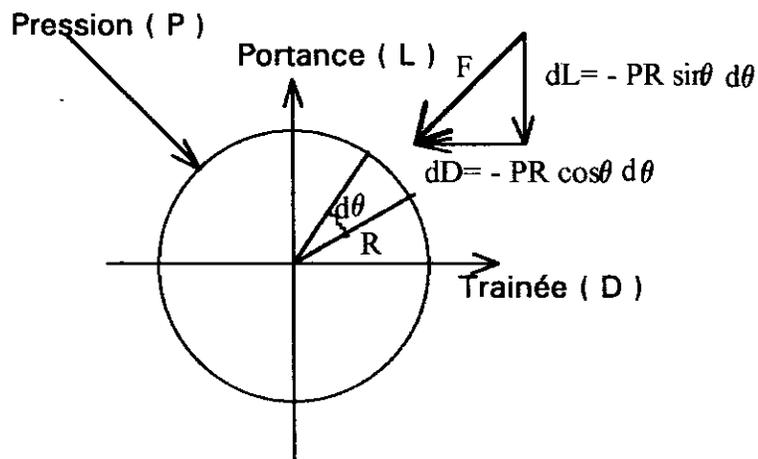


figure IV.3

Portance et traînée sur un profil cylindrique

L'expression de la portance et de la traînée sont obtenues par intégration le long de toute la surface :

$$L = -\int_0^{2\pi} P \cdot R \sin \theta \, d\theta \quad \text{et} \quad D = -\int_0^{2\pi} P \cdot R \cos \theta \, d\theta$$

Les coefficients de portance et de traînée sont alors déduits :

$$Cl = -\int_0^{2\pi} Cp \cdot R \sin \theta \, d\theta \quad \text{et} \quad Cd = -\int_0^{2\pi} Cp \cdot R \cos \theta \, d\theta \quad (\text{IV.3})$$

### IV.2.3 POTENTIEL DE VITESSES ET FONCTION DE COURANT

Le potentiel de vitesses en chaque point est obtenu en superposant le potentiel de vitesses dû à l'écoulement uniforme et celui dû à la perturbation créée par l'obstacle.

Suivant le type de singularités ( source, vortex, doublet ), dont est chargé l'obstacle, le potentiel de vitesses correspondant est différent et est donné par le tableau ( § II.4.6 ).

La fonction de courant est obtenue de la même façon que le potentiel de vitesse.

D'après les formules données par le tableau ( § II.4.6 ), il apparaît qu'il est important de bien définir la valeur de l'angle  $\theta_{ij}$  et le rayon  $r_{ij}$ .

Soit un point P de coordonnées ( x, y ) où nous désirons calculer le potentiel de vitesses ( *fig IV.4* ).

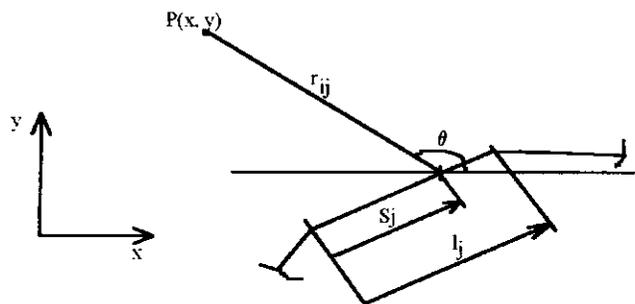


figure IV.4

*Influence d'une distribution de charge sur un panneau au point P*

On aura :

$$\theta_{ij} = \arctg \frac{y - y_j}{x - x_j} \quad \text{et} \quad r_{ij}^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2$$

$$\text{où} : \begin{cases} x_j = Xs(j-1) + S_j \cos \delta_j \\ y_j = Ys(j-1) + S_j \sin \delta_j \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

### IV.3 APPLICATIONS AUTOUR DE DIFFERENTS OBSTACLES

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la modélisation de la portance engendrait une distribution de charges non uniforme par conséquent le type de l'obstacle ( cylindre fixe, profil d'aile, ... ) gouverne le choix de la distribution.

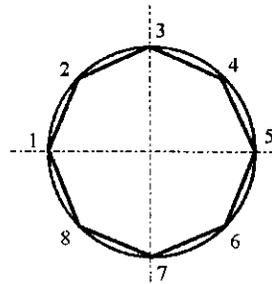
Autrement dit dans le cas de profils non portants, on doit utiliser un chargement concentré ou uniforme par contre dans le cas de profils portants, une distribution linéaire a été choisie.

Il est aussi important de remarquer que la différence au niveau de l'analyse des écoulements autour de différents obstacles réside dans la localisation des coordonnées des sommets de l'obstacle, les formules établies dans le chapitre III seront donc valables quelque soit la géométrie de l'obstacle.

### IV.3.1 CYLINDRES

#### IV.3.1.1 CYLINDRE FIXE

Considérons un cylindre centré et non tournant de rayon  $r$ , le calcul des coordonnées des sommets se fait par une localisation angulaire en fixant le nombre de panneaux  $N$  désiré (*fig.IV.5*).



*figure IV.5*

*Discretisation d'un cylindre en 8 panneaux*

$$\theta_i = \pi - \frac{2\pi}{N}(i-1) \quad \text{avec } i=1, N$$

où  $N$  représente le nombre de panneaux.

Les coordonnées des sommets sont égales à :

$$X_s(i) = r \cos \theta_i \quad \text{et} \quad Y_s(i) = r \sin \theta_i$$

Le cylindre étant fixe, ceci se traduit par une circulation nulle donc une non portance de l'obstacle. Un chargement concentré ou uniforme ( § III.4.1 ) sera donc adéquat pour ce type d'obstacle.

Les deux points de stagnation sont situés à  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , le bord d'attaque sera le premier sommet, ce qui correspond à un choix que nous nous fixerons pour les obstacles cylindriques.

#### IV.3.1.2 CYLINDRE TOURNANT

Soit un cylindre centré et tournant de rayon  $r$ , il apparaît que l'écoulement donne lieu à une portance qui se traduira en utilisant un chargement linéaire ( § III.4.2 ), de plus, suivant la valeur de la circulation  $\Gamma$  les points de stagnation se déplacent le long de la surface du cylindre ( § III.4.2 ) et afin de satisfaire la condition qui est que le premier sommet soit un point d'arrêt, il faudra alors définir les coordonnées des sommets en conséquence. (*fig.IV.6*)

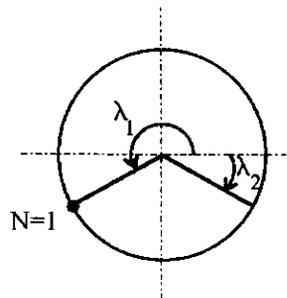


figure IV.6  
Discretisation d'un cylindre tournant

D'après l'équation ( III.48 ), nous localisons les points d'arrêt dans un écoulement rectiligne par :

$$\lambda_1 = \arcsin\left(\frac{\Gamma}{4\pi qr}\right) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \pi - \lambda_1$$

En imposant notre choix, les coordonnées des sommets seront alors :

$$Xs(i) = r \cos\theta_i \quad \text{et} \quad Ys(i) = r \sin\theta_i$$

avec :

$$\theta_i = \pi - \left(\frac{2\pi}{N}(i-1) + \lambda_1\right) \quad \text{avec} \quad i=1, N$$

### IV.3.1.3 RANGEE DE CYLINDRES FIXES

Soient deux cylindres de même rayon  $r$  disposés verticalement et distant d'une longueur  $L$  (fig.IV.7).

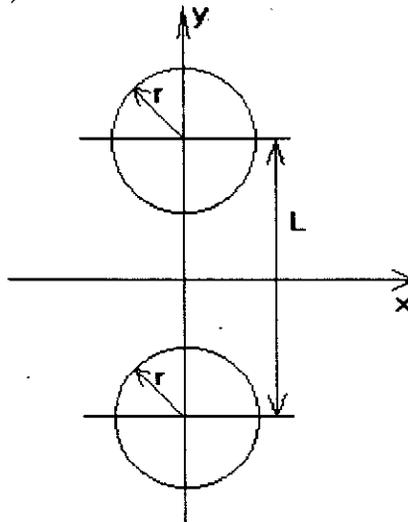


figure IV.7  
Discretisation d'une rangée de cylindres

Le principe reste le même que pour un cylindre isolé à la différence que l'ordonnée des centres des cylindres est de  $\pm L/2$ , nous aurons alors :

$$\begin{cases} Xs(i) = r \cos \theta_i & \text{et} & Ys(i) = -\frac{L}{2} + r \sin \theta_i & i=1, N \\ Xs(i) = r \cos \theta_i & \text{et} & Ys(i) = \frac{L}{2} + r \sin \theta_i & i=N+1, 2N \end{cases}$$

où

$$\theta_i = \pi - \left( \frac{2\pi}{N}(i-1) + \lambda_1 \right) \quad \text{avec} \quad i=1, 2N$$

#### IV.3.1.4 PROFIL D'AILE



figure IV.8

Un profil d'aile présente une partie arrondie à l'avant et une pointe F à l'arrière appelée *BORD DE FUITE* (fig.IV.8), le *BORD D'ATTAQUE* A est le point de contact du profil avec le cercle de centre F.

Un profil d'aile présente deux surfaces, une surface supérieure appelée *EXTRADOS* et une surface inférieure appelée *INTRADOS*.

La forme des profils étant normalisée (NACA), la discrétisation en N panneaux se fait en introduisant les coordonnées des points disponibles dans les tables.

Les profils d'ailes étant des corps portants, la distribution de singularités devra être linéaire. Lors de la détermination des intensités des singularités, une condition supplémentaire doit être introduite, c'est la condition de *KUTTA-JOUKOWSKI* qui consiste dans notre cas à ce que le bord de fuite soit un point d'arrêt.

Lors de l'étude de turbomachines, les écoulements se développant dans une grille d'aubes, il nous a paru important d'appliquer la méthode des singularités pour l'étude des écoulements aubes à aubes ou autrement dit à travers une rangée de profils.

Pour ce type d'obstacles, l'affectation des coordonnées des sommets des profils se fait automatiquement à partir du premier profil en précisant initialement le numéro du bord d'attaque et du bord de fuite.

*CHAPITRE V*

**ELABORATION D'UN MAILLEUR  
PAR LA METHODE DES SINGULARITES**

## V.1 INTRODUCTION

Lors de l'étude de certains problèmes de mécanique des fluides, on aboutit très souvent à des équations différentielles avec second membre.

Pour la résolution de ces équations, on utilise nécessairement une méthode numérique, nous citons par exemple la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis.

La particularité de ces méthodes est qu'elles utilisent un maillage, le premier problème qui se pose alors est au niveau de la construction de ce maillage car la convergence des résultats dépendra initialement de la qualité de ce dernier.

Plusieurs maillages ont déjà été utilisés, parmi eux nous citerons :

- maillage rectangulaire
- maillage rectangulaire incliné
- maillage curviligne

L'inconvénient de ces maillages est qu'ils sont construits d'une façon purement géométrique donc ne repose sur aucune considération physique ce qui d'une part, impose un certain nombre de tests assez lourds et d'autre part, ce qui est très important, fait quelques fois diverger les résultats.

Pour cela nous nous proposons d'élaborer un mailleur, basé sur la méthode des singularités et utilisant les lignes équipotentielles et les lignes de courant, donc reposant sur des considérations physiques, ce mailleur pourra être par la suite appliqué à différents types d'obstacles et différents types de problèmes.

## V.2 CALCUL DES POTENTIELLES DE VITESSES ET DES FONCTIONS DE COURANT

Considérons un point  $P$  de coordonnées  $(x_0, y_0)$  appartenant au plan (*fig.V.1*), le potentiel de vitesses et la fonction de courant en ce point seront respectivement déterminés en superposant le potentiel de vitesses et la fonction de courant de l'écoulement uniforme et le potentiel de vitesses et la fonction de courant résultants du chargement des singularités sur tous les panneaux de l'obstacle.

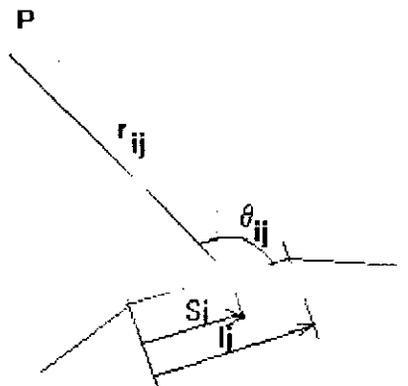


figure V.1

*Influence d'une distribution de singularités sur un panneau j en un point P*

Il se dégage alors que les expressions du potentiel de vitesses et de la fonction de courant devront être établies en fonction du type de singularités et du type de chargement. Il est intéressant de rappeler les potentiels de vitesses et les fonctions de courant, donnés par le tableau ( § II.4.6 ), correspondants aux types de singularités.

	Écoulement Uniforme	Source	Vortex	Dipôle
$U_r$	$q \cos(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2\pi r}$	0	$\frac{\mu}{2\pi r^2} \cos\theta$
$U_\theta$	$-q \sin(\theta - \alpha)$	0	$\frac{\gamma}{2\pi r}$	$\frac{\mu}{2\pi r^2} \sin\theta$
$\psi$	$q r \sin(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2\pi} \theta$	$-\frac{\gamma}{2\pi} \ln r$	$\frac{\mu}{2\pi r} \sin\theta$
$\phi$	$q r \cos(\theta - \alpha)$	$\frac{k}{2\pi} \ln r$	$\frac{\gamma}{2\pi} \theta$	$-\frac{\mu}{2\pi r} \cos\theta$

### V.2.1 DISTRIBUTION UNIFORME DE SOURCES

Par définition :

$$\phi(x_0, y_0) = \phi_{ec.unif.} + \sum_{j=1}^N \phi_{ij} \quad \text{et} \quad \psi(x_0, y_0) = \psi_{ec.unif.} + \sum_{j=1}^N \psi_{ij}$$

- Le potentiel de vitesses dû à l'écoulement uniforme restera quelque soit le type de chargement et le type de singularités égal à :

$$\phi_{ec.unif.} = U_\infty x_0 \cos\alpha + U_\infty y_0 \sin\alpha$$

- Il en est de même pour la fonction de courant :

$$\psi_{ec.unif.} = U_\infty y_0 \cos\alpha - U_\infty x_0 \sin\alpha$$

- Le potentiel de vitesses et la fonction de courant dus au chargement uniforme de sources sont égaux à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ij} = \int_0^{l_j} \frac{k(j) \ln r_{ij}}{2\pi} dS_j \\ \psi_{ij} = \frac{k(j) l_j}{2\pi} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{ij} = \int_0^{l_j} \frac{k(j) \theta_{ij}}{2\pi} dS_j \\ \phi_{ij} = \frac{k(j) l_j}{2\pi} \end{array} \right.$$

Finalement, on obtient les expressions :

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty x_0 \cos\alpha + U_\infty y_0 \sin\alpha + \sum_{j=1}^N \frac{k(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \ln r_{ij} dS_j$$

et

(V.1)

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos\alpha - U_\infty x_0 \sin\alpha + \sum_{j=1}^N \frac{k(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \theta_{ij} dS_j$$

Les termes  $\theta_{ij}$  et  $r_{ij}$  sont définis par les équations ( IV.4 ).

**REMARQUE :**

Pour le calcul des intégrales, nous utiliserons la méthode d'intégration numérique de *SIMPSON*.

### V.2.2 DISTRIBUTION LINEAIRE DE SOURCES

La différence qui réside entre les expressions du potentiel de vitesses et de la fonction de courant de ce type de distribution et de la distribution uniforme est que l'intensité de la singularité dépend de la variable d'intégration  $S_j$  (fig.V.2), en effet :

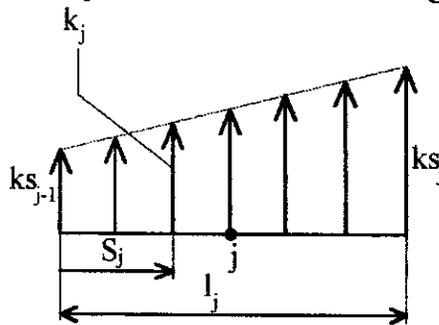


figure V.2

Soit une intensité :

$$k_j = k_s(j-1) + \frac{k_s(j) - k_s(j-1)}{l_j} S_j$$

Les expressions du potentiel de vitesses et de la fonction de courant se mettent sous la forme :

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty x_0 \cos \alpha + U_\infty y_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} k_j \ln r_{ij} dS_j$$

et

( V 2 )

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} k_j \theta_{ij} dS_j$$

### V.2.3 DISTRIBUTION UNIFORME DE VORTEX

On définit en un point P de coordonnées  $(x_0, y_0)$ , le potentiel de vitesses et la fonction de courant par :

$$\phi(x_0, y_0) = \phi_{cc.unif.} + \sum_{j=1}^N \phi_{ij} \quad \text{et} \quad \psi(x_0, y_0) = \psi_{cc.unif.} + \sum_{j=1}^N \psi_{ij}$$

Par analogie au paragraphe ( § V.2.1 ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ij} = \int_0^{l_j} \frac{\gamma(j)}{2\pi} \theta_{ij} dS_j \\ \Rightarrow \phi_{ij} = \frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \theta_{ij} dS_j \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{ij} = - \int_0^{l_j} \frac{\gamma(j)}{2\pi} \ln r_{ij} dS_j \\ \Rightarrow \psi_{ij} = - \frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \ln r_{ij} dS_j \end{array} \right.$$

Nous obtenons alors les expressions :

$$\phi(x_0, y_0) = U_{\infty} y_0 \sin \alpha + U_{\infty} x_0 \cos \alpha + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \theta_{ij} dS_j$$

et

( V.3 )

$$\psi(x_0, y_0) = U_{\infty} y_0 \cos \alpha - U_{\infty} x_0 \sin \alpha - \sum_{j=1}^N \frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \ln r_{ij} dS_j$$

#### V.2.4 DISTRIBUTION LINEAIRE DE VORTEX

De la même façon qu'au paragraphe ( § V.2.2 ), on tire l'expression de l'intensité des singularités, soit :

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j$$

D'où :

$$\phi(x_0, y_0) = U_{\infty} y_0 \sin \alpha + U_{\infty} x_0 \cos \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \gamma_j \theta_{ij} dS_j$$

et

( V.4 )

$$\psi(x_0, y_0) = U_{\infty} y_0 \cos \alpha - U_{\infty} x_0 \sin \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \gamma_j \ln r_{ij} dS_j$$

#### V.2.5 DISTRIBUTION UNIFORME DE DOUBLET

En se référant au tableau du paragraphe ( § II.4.6 ), et en procédant de la même façon que précédemment, on obtient les expressions suivantes :

$$\phi(x_0, y_0) = U_{\infty} x_0 \cos \alpha + U_{\infty} y_0 \sin \alpha - \sum_{j=1}^N \frac{\mu(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{\cos \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

et

( V.5 )

$$\psi(x_0, y_0) = U_{\infty} y_0 \cos \alpha - U_{\infty} x_0 \sin \alpha + \sum_{j=1}^N \frac{\mu(j)}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{\sin \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

#### V.2.6 DISTRIBUTION LINEAIRE DE DOUBLET

Dans ce type de distribution, l'intensité des singularités est exprimée par la

$$\mu_j = \mu_s(j-1) + \frac{\mu_s(j) - \mu_s(j-1)}{l_j} S_j$$

Les expressions du potentiel de vitesses et de la fonction de courant sont alors :

$$\phi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \sin \alpha + U_\infty x_0 \cos \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \cos \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

et

( V.6 )

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} \frac{\mu_j \sin \theta_{ij}}{r_{ij}} dS_j$$

### V.3 CONSTRUCTION D'UN MAILLAGE PAR LES LIGNES EQUIPOTENTIELLES ET LES LIGNES DE COURANT

#### V.3.1 PRINCIPE DU MAILLAGE

Le potentiel de vitesses et la fonction de courant étant calculables en tous points en utilisant la formulation basée sur la méthode des singularités, l'idée est de construire la ligne équipotentielle et la ligne de courant à partir d'un point P de coordonnées  $(x_0, y_0)$  bien choisies, puis en choisissant un incrément on boucle pour tracer les lignes équipotentielles et les lignes de courant suivantes jusqu'à certaines limites fixant le domaine à mailler.

Les lignes équipotentielles et les lignes de courant étant orthogonales entre elles ( voir § II.2.2 ), on obtiendra ainsi le maillage d'un domaine considéré.

#### V.3.2 TRACE DES LIGNES EQUIPOTENTIELLES

Une ligne équipotentielle étant construite en joignant les points ayant le même potentiel de vitesses, pour le tracé de celle-ci, considérons un point quelconque  $P(x_0, y_0)$  où l'on calcule son potentiel de vitesses, on cherche alors dans un proche périmètre à ce point, un autre point  $Q(x_1, y_1)$  ayant le même potentiel de vitesses, en répétant successivement cette démarche nous obtiendrons ainsi une ligne équipotentielle.

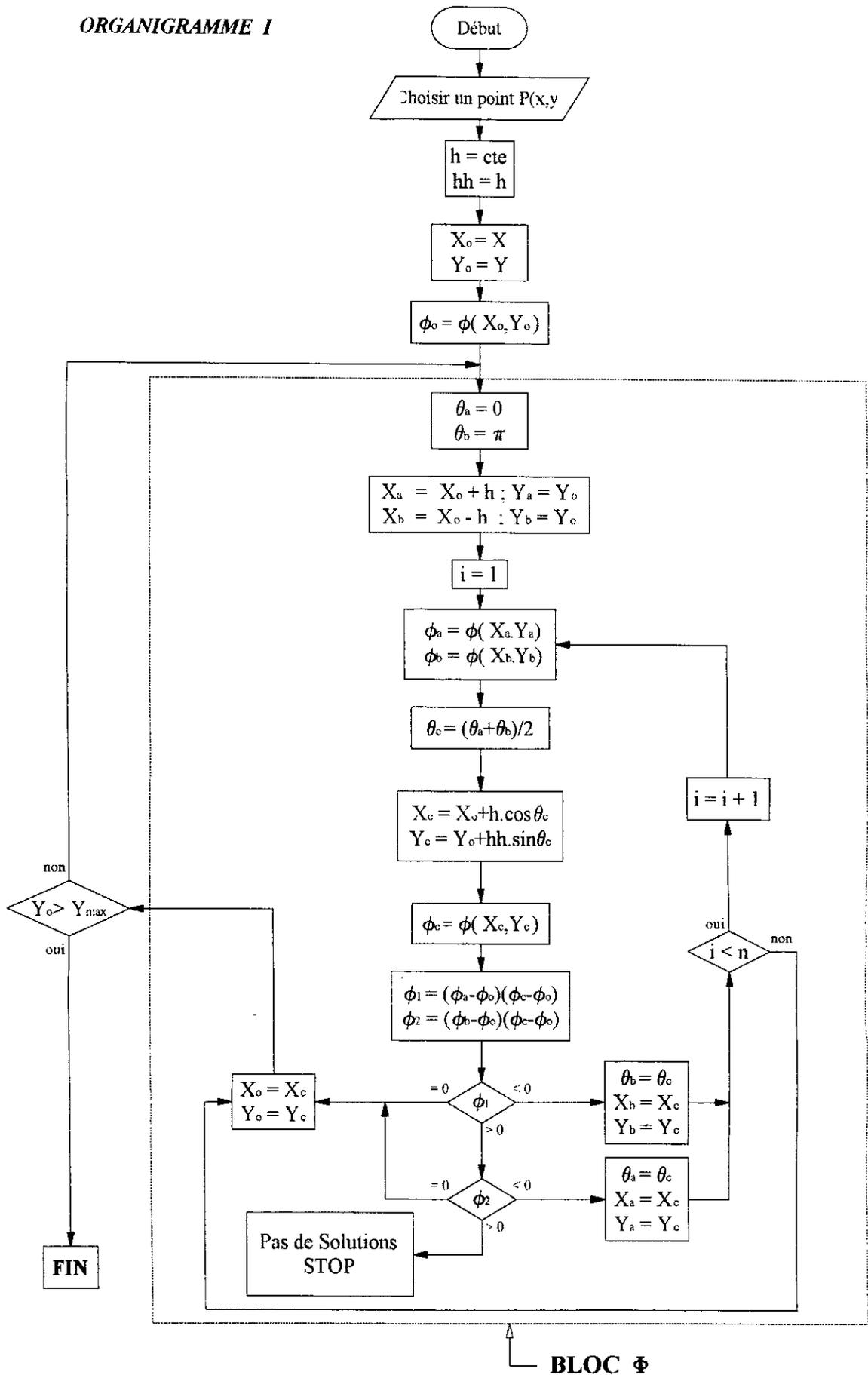
Pour la recherche du point  $Q(x_1, y_1)$ , dans un certain périmètre, qui a le même potentiel de vitesses que le point  $P(x_0, y_0)$ , on utilisera la méthode de dichotomie.

Il nous a semblé pour ce tracé, que la description des étapes à suivre serait plus claire en établissant un organigramme. ( v. *Organigramme I* )

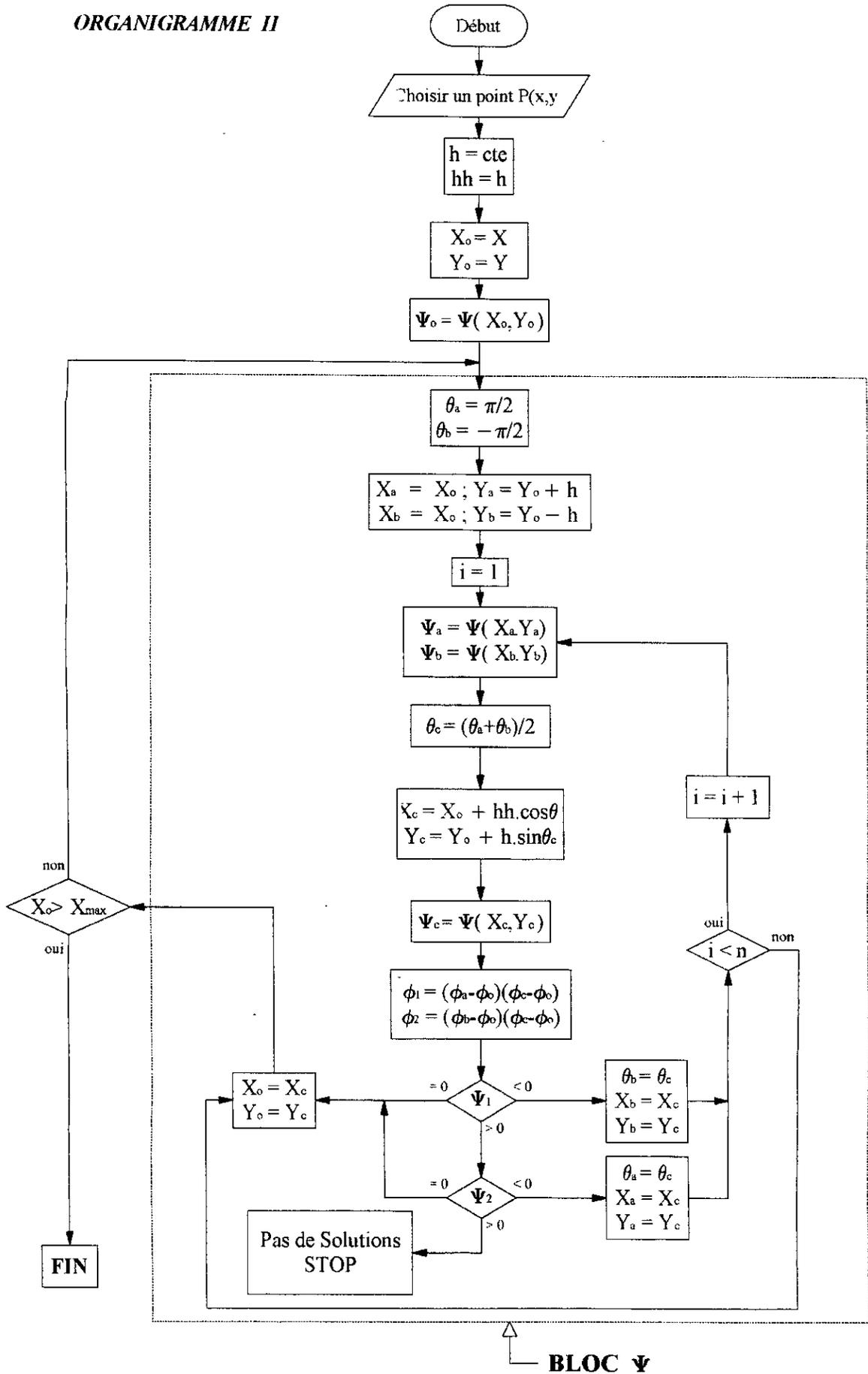
#### V.3.3 TRACE DES LIGNES DE COURANT

Le tracé des lignes de courant se fait de façon identique à celui des lignes équipotentielles à la différence que la recherche du prochain point se fait dans le premier et quatrième cadran. ( v. *Organigramme II* )

ORGANIGRAMME 1



ORGANIGRAMME II



### **V.3.4 DETERMINATION DES COORDONNEES AUX NOEUDS**

En suivant le principe décrit dans le paragraphe ( § V.3.1 ), les lignes équipotentiels et les lignes de courant peuvent être tracées, il s'agit maintenant de déterminer les points d'intersection de celles-ci autrement dit les coordonnées aux noeuds.

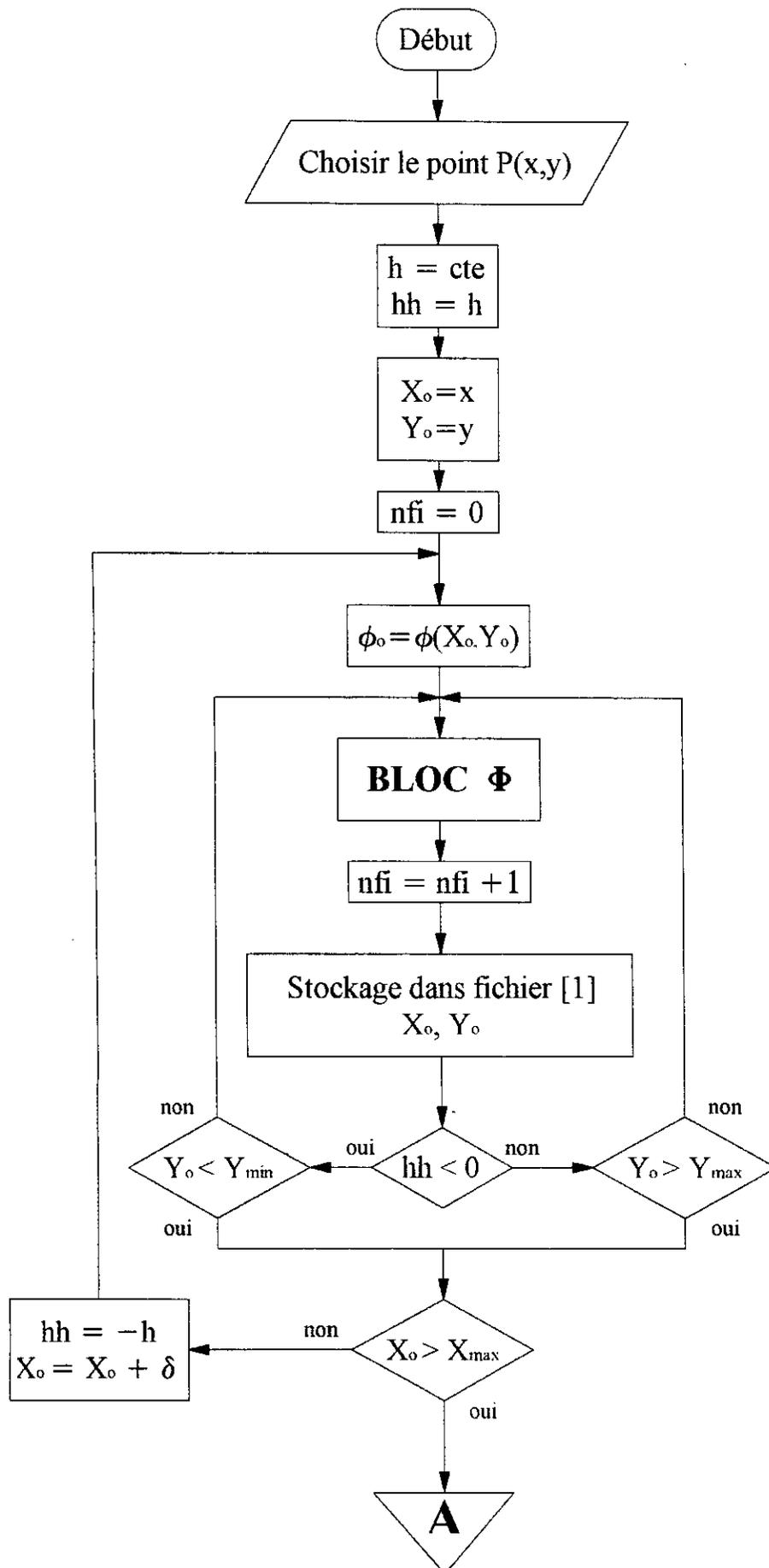
Pour cette recherche nous considérerons en premier lieu le segment reliant les deux premiers points successifs de la première ligne équipotentielle et chercherons tous les segments des points successifs formant les lignes de courant sécants avec ce segment, ceci en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires. A chaque intersection, nous localiserons alors les coordonnées du point où sont sécants les segments en utilisant leurs équations.

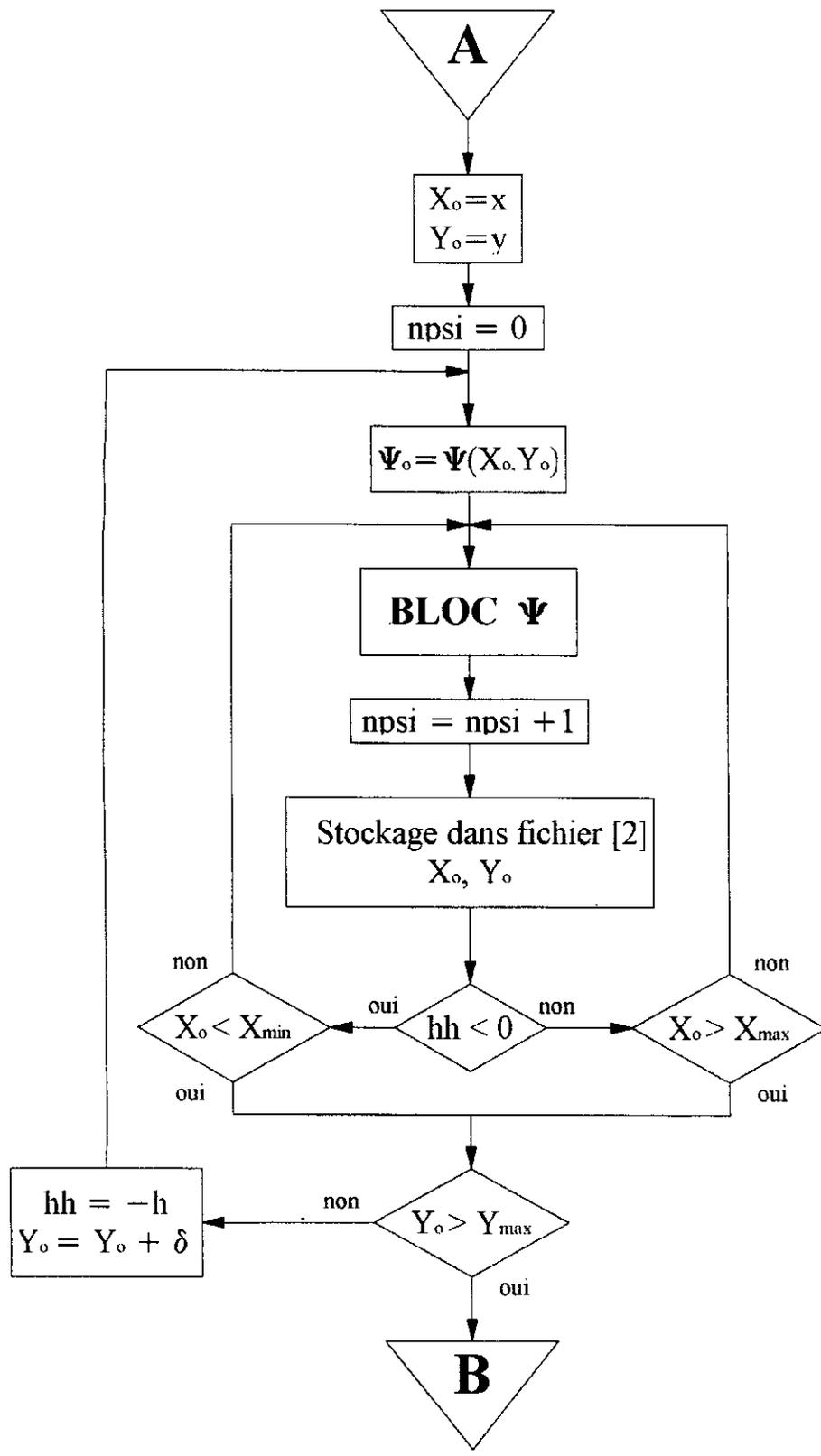
En considérant à chaque fois le segment suivant de la ligne équipotentielle, ces étapes se répéteront et ceci jusqu'à ce que tous les segments de toutes les lignes équipotentiels eut été considérés, on déterminera ainsi les coordonnées de tous les noeuds.

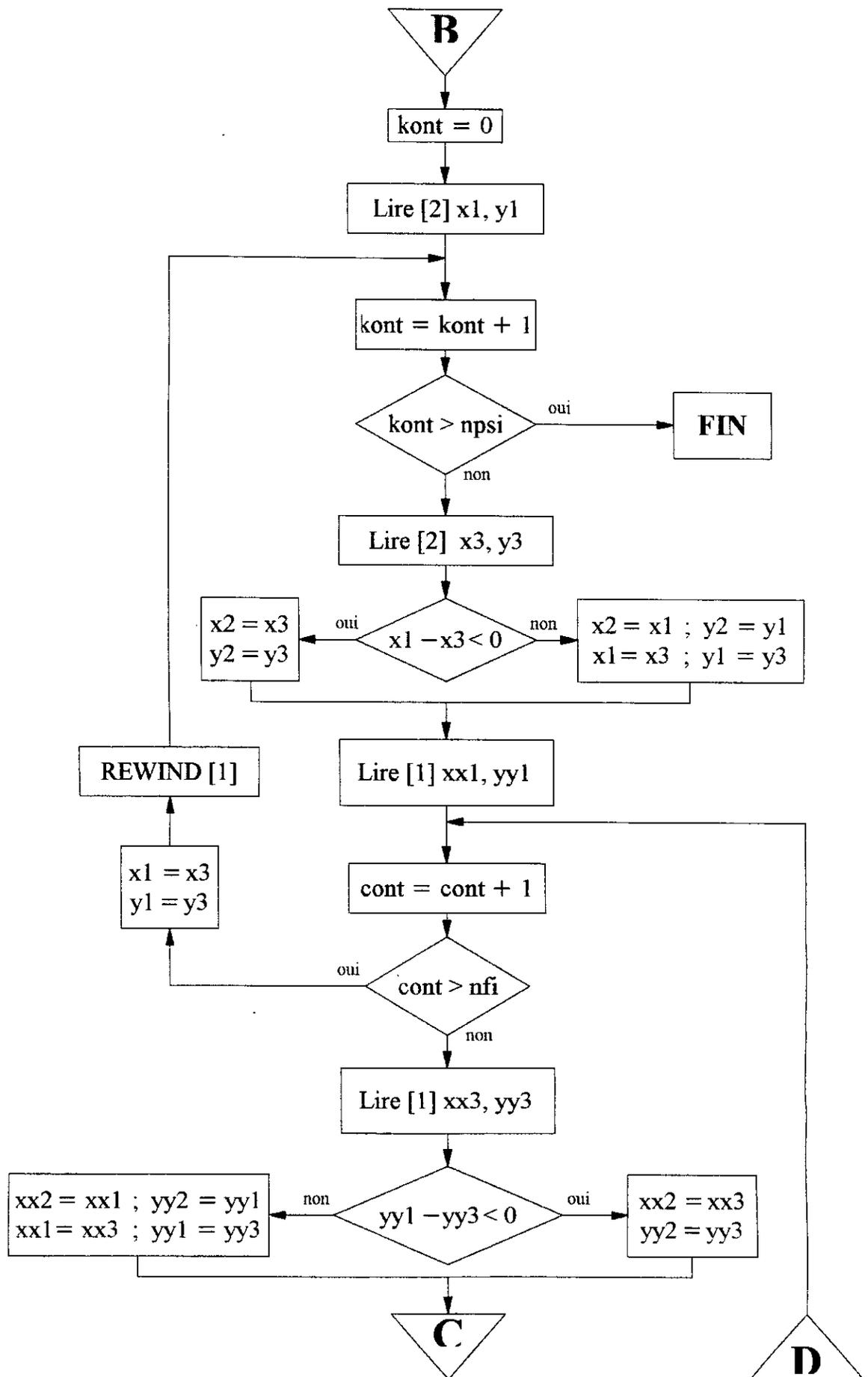
### **V.3.5 ORGANIGRAMME DU MAILLAGE**

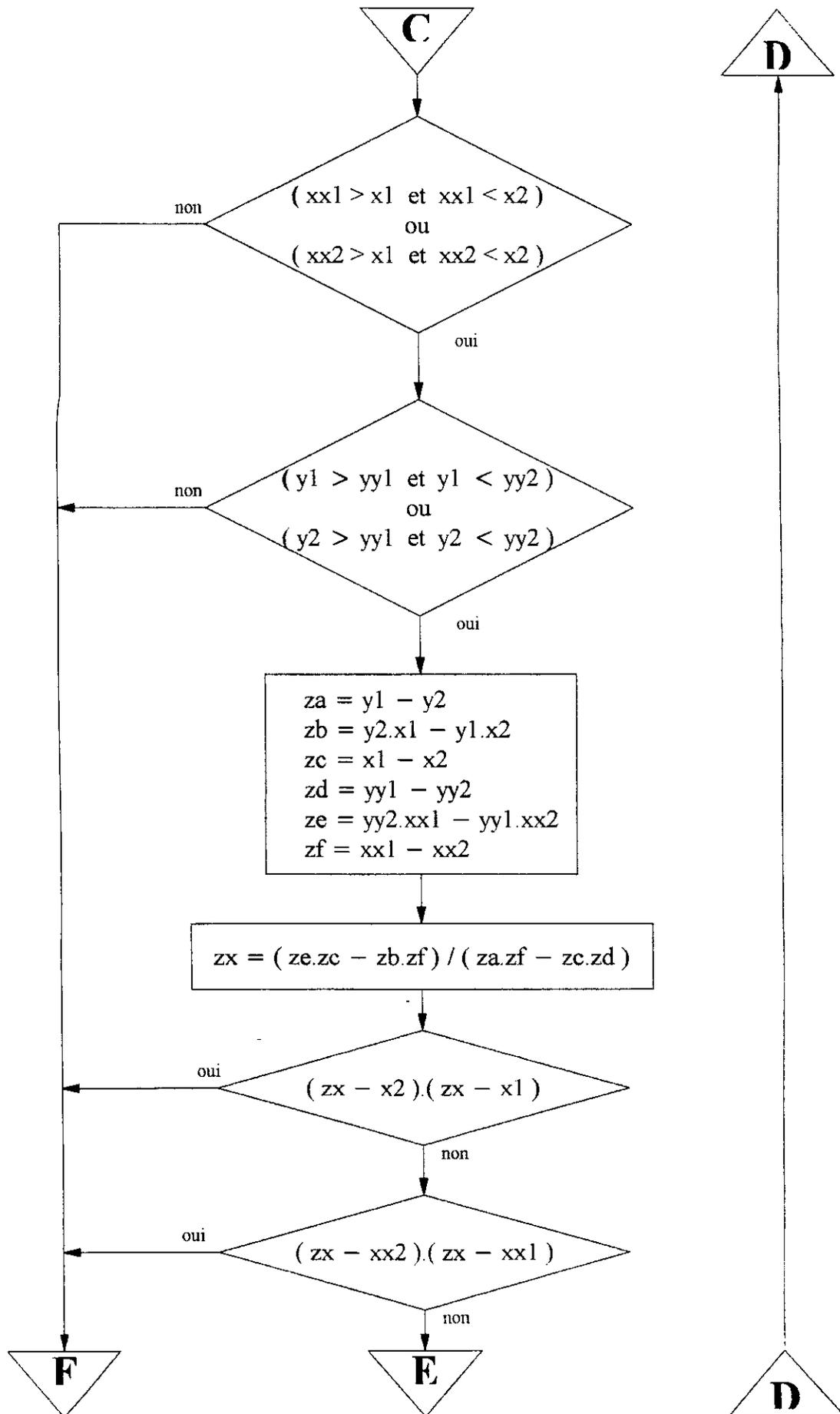
Afin de ne pas trop compliquer la compréhension de l'organigramme III établi par la suite, nous avons préféré ne pas y insérer certains tests qui existent dans le programme. Cependant nous précisons, d'une façon générale, que ces tests interviennent dans :

- Les limites du domaine à mailler qui dépendent de la géométrie des obstacles considérés ( cylindre isolé, rangée d'aubes, ... ).
- Le type de chargement adopté ( vortex, ... ).
- Le raffinement souhaité du maillage.

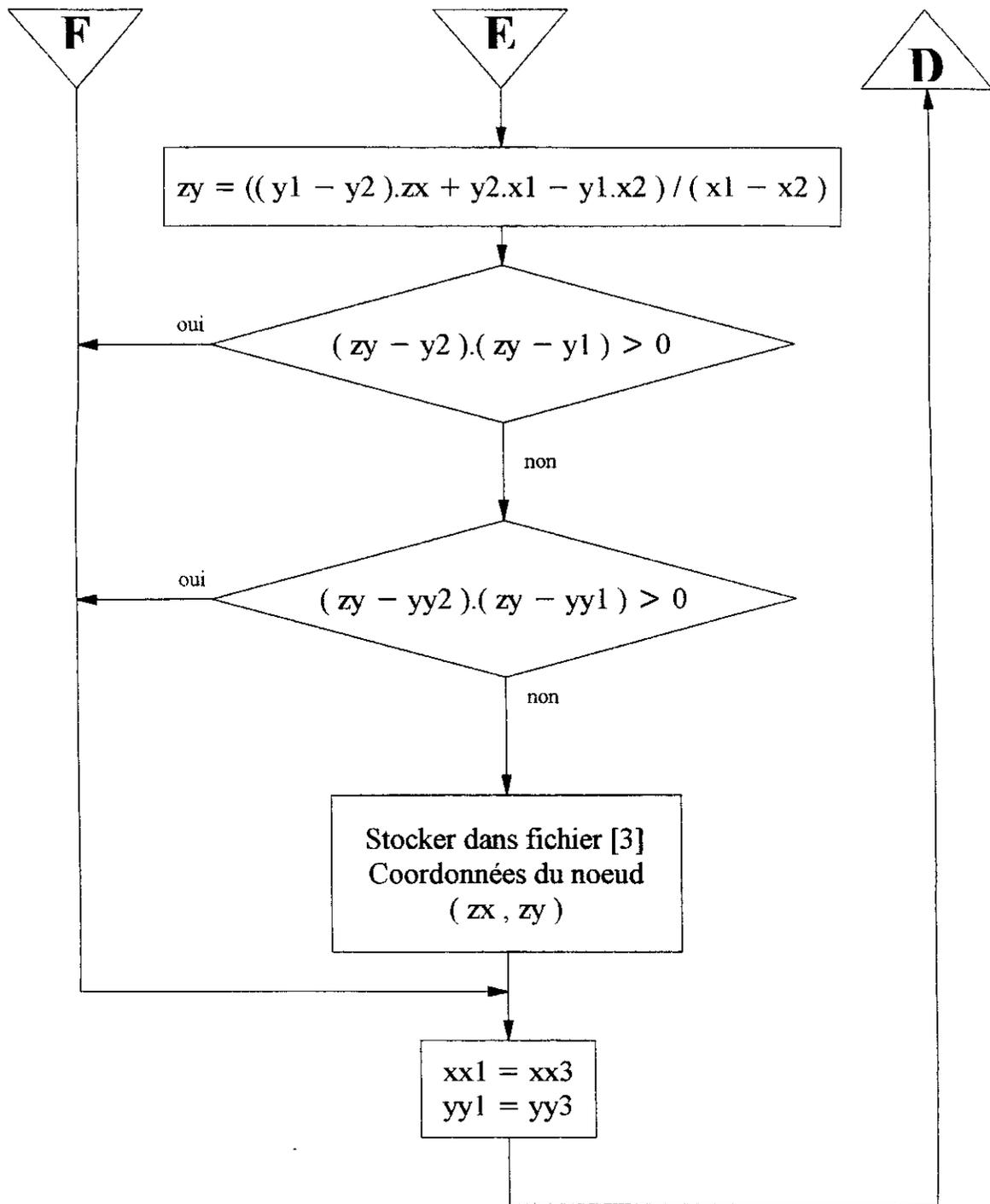




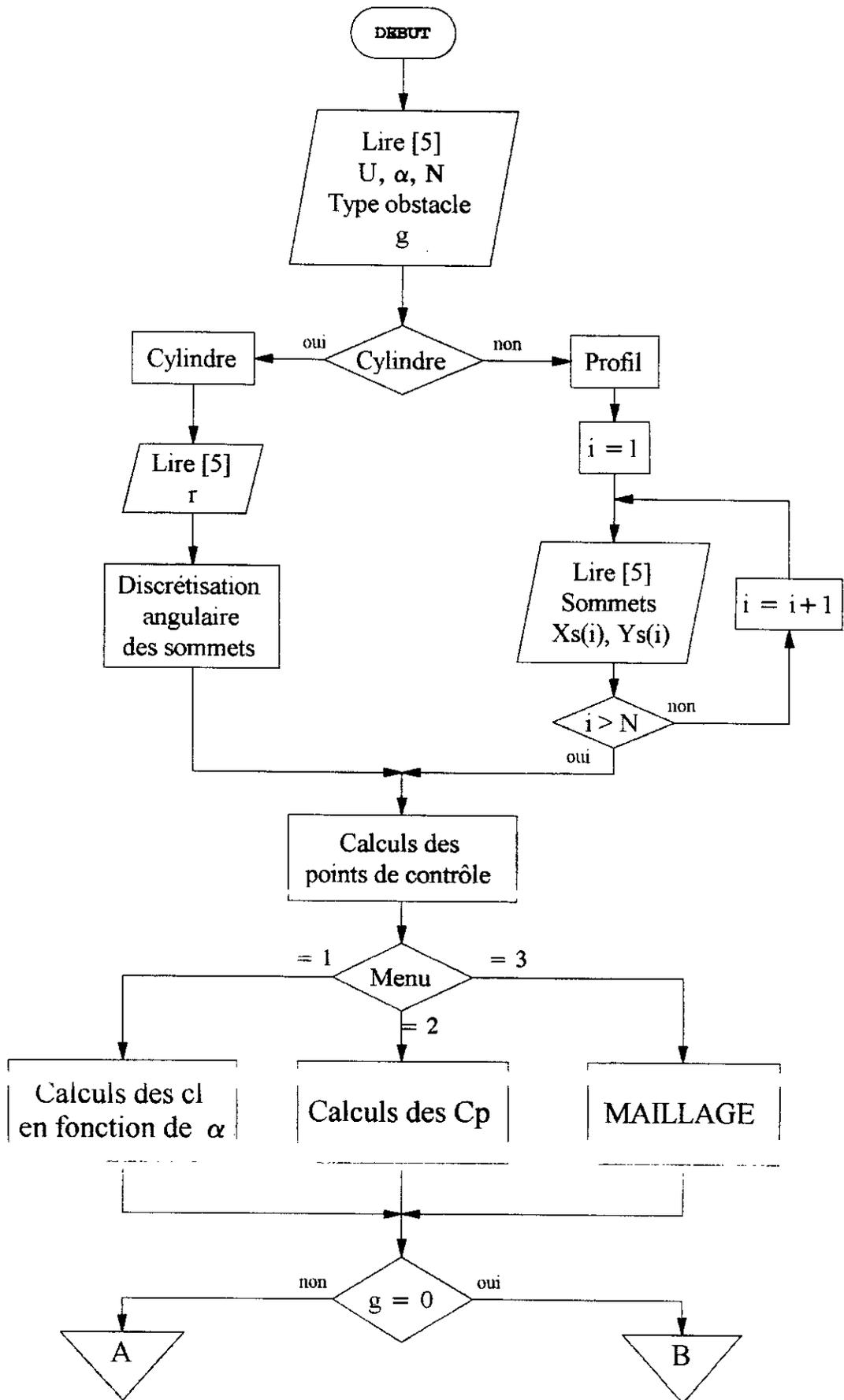


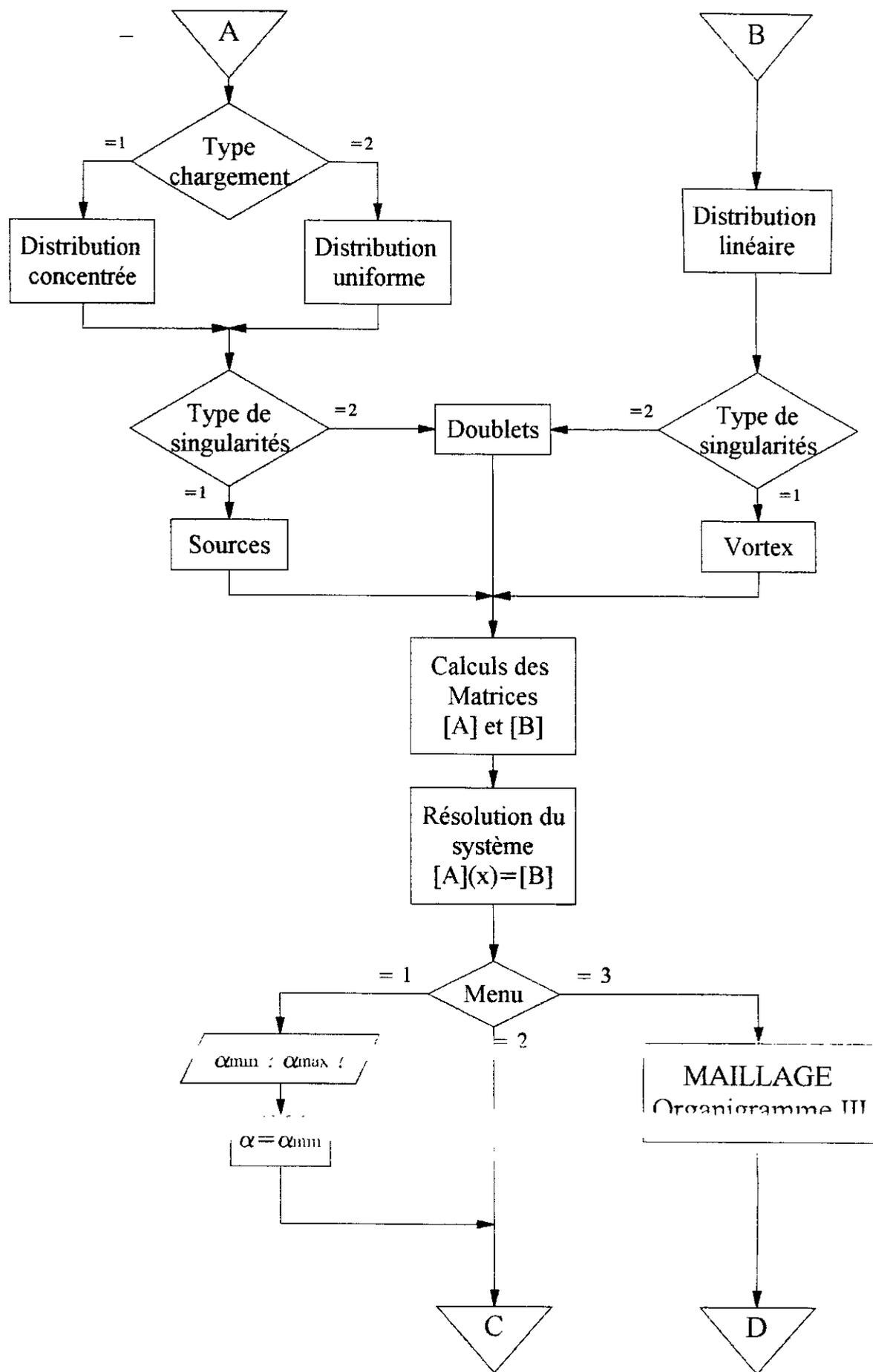


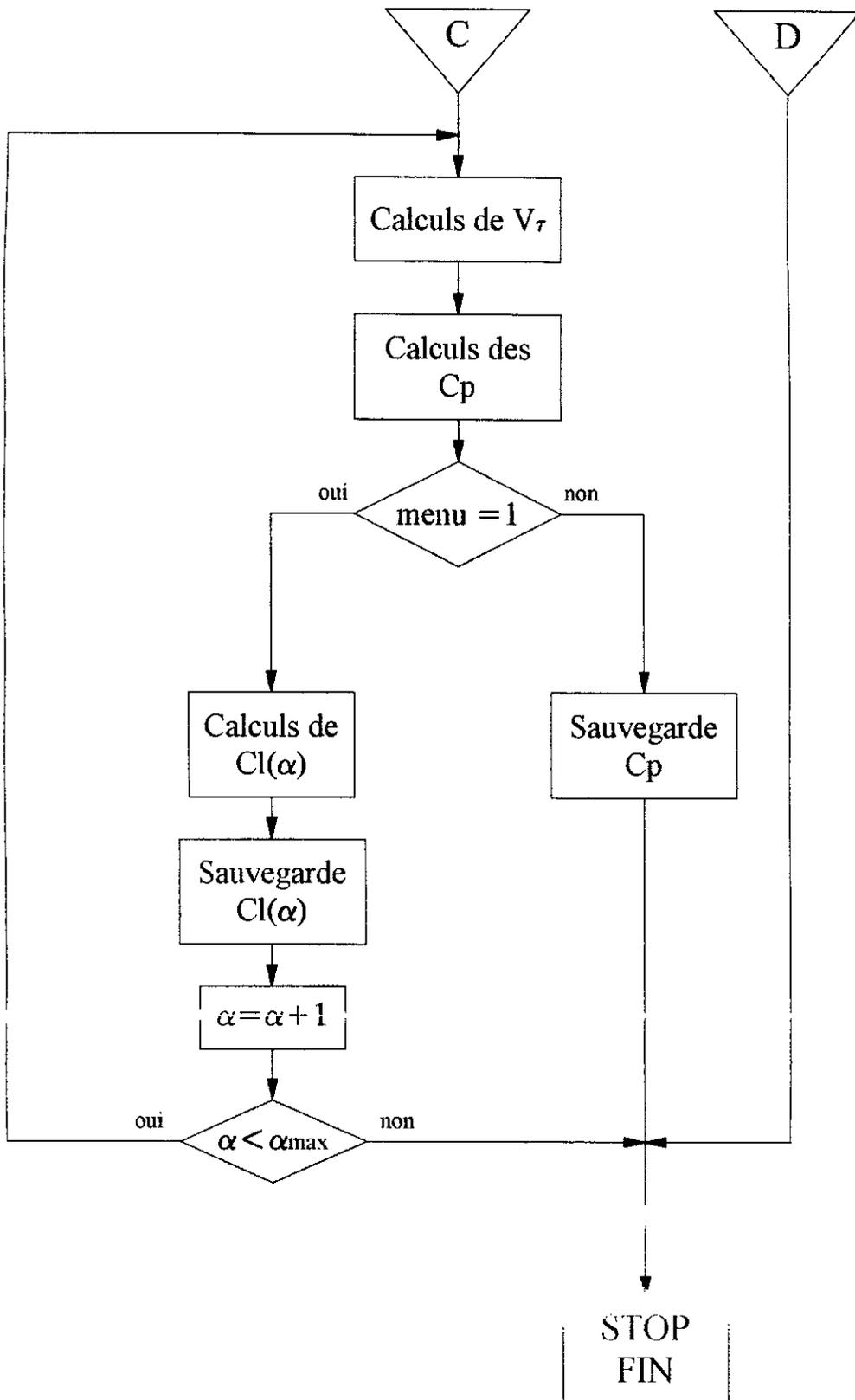




### V.3.6 ORGANIGRAMME DU PROGRAMME







*CHAPITRE VI*

**RESULTATS ET INTERPRETATIONS**

## VI.1 CALCUL DES COEFFICIENTS DE PRESSION

### VI.1.1 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE

#### VI.1.1.1 DISTRIBUTION DE SOURCES

En vue des courbes C1 et C2 obtenues respectivement pour une distribution concentrée (*fig.VI.1*) et une distribution uniforme de sources (*fig.VI.2*), il apparaît que :

- Les coefficients de pression aux points de stagnations ( $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ ) sont parfaitement déterminés par rapport à leurs valeurs théoriques ( $C_p = 1$ ).

- Les courbes C1 et C2 sont symétriques, ceci s'explique d'une part par la géométrie symétrique de l'obstacle et d'autre part par la nature de l'écoulement qui est non portant.

- Indépendamment aux calculs des coefficients de pression, on remarque que la somme des intensités de singularités est nulle pour une distribution de sources, on peut expliquer cette particularité par le fait que l'obstacle étudié est un corps fermé non portant et présente une symétrie ce qui engendre au niveau de la distribution un équilibre de sources et de puits de mêmes débits.

- Pour une distribution concentrée, on remarque qu'en s'éloignant de part et d'autre des deux points de stagnation les valeurs des coefficients de pression ( $N = 8$ ) s'écartent légèrement de celles calculées analytiquement (annexe C), ceci est conséquent aux variations rapides des vitesses, en effet, à partir du premier point de stagnation ( $C_p = 1$ ) les particules fluides accélèrent jusqu'à atteindre une vitesse maximale ( $C_p = -3$ ) puis décélèrent jusqu'au second point de stagnation où la vitesse s'annule de nouveau ( $C_p = 1$ ), toutefois en raffinant la discrétisation de l'obstacle autrement dit en augmentant le nombre de panneaux  $N$ , nous aurons d'autant plus une meilleure convergence des coefficients de pression.

- Pour une distribution uniforme, en adoptant une discrétisation de 8 panneaux les coefficients de pression calculés par la méthode des singularités appartiennent à la courbe théorique.

En première conclusion, lorsqu'on s'intéresse aux valeurs des coefficients de pression, il est préférable d'adopter une distribution uniforme car pour ce type de distribution la discrétisation de l'obstacle ne nécessite pas un raffinement particulier et les résultats obtenus sont d'une excellente précision.

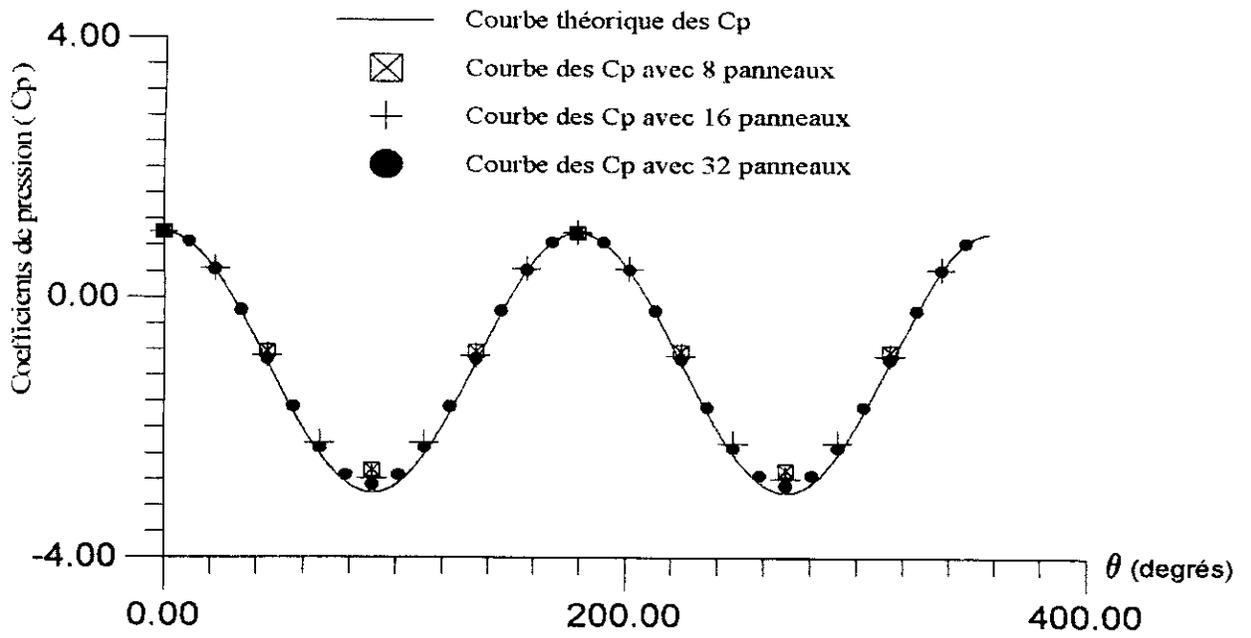


Figure VI.1  
*Distribution des coefficients de pression sur un cylindre fixe pour une charge concentrée de sources*

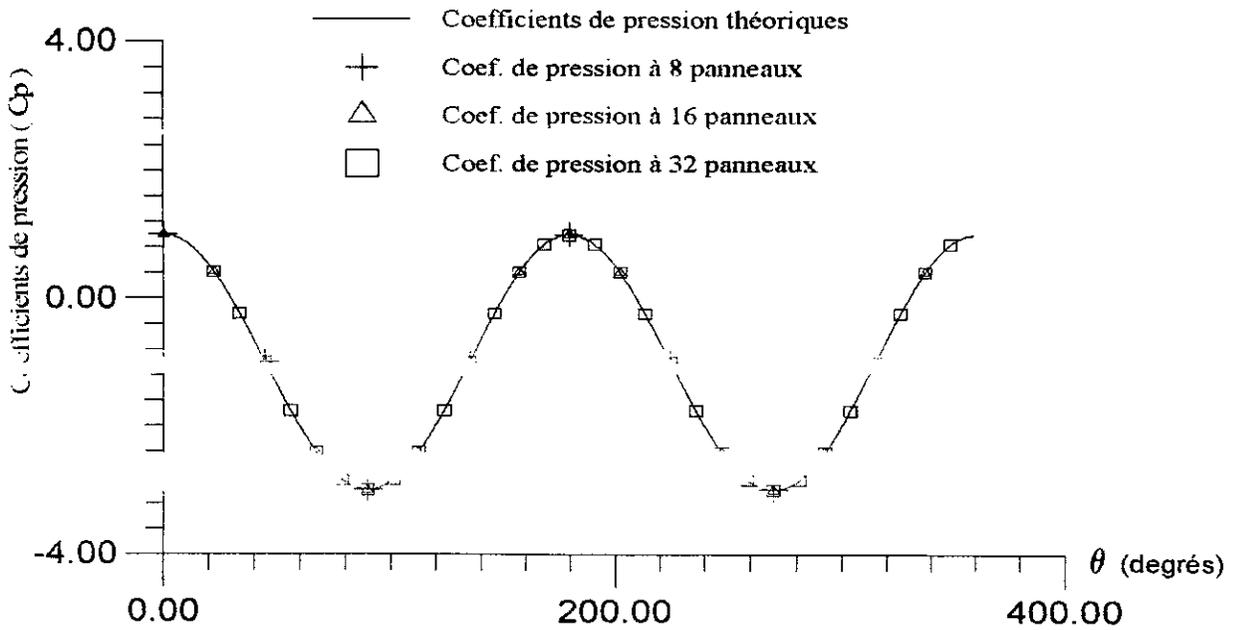


Figure VI.2  
*Distribution des coefficients de pression sur un cylindre fixe pour une charge répartie de sources*

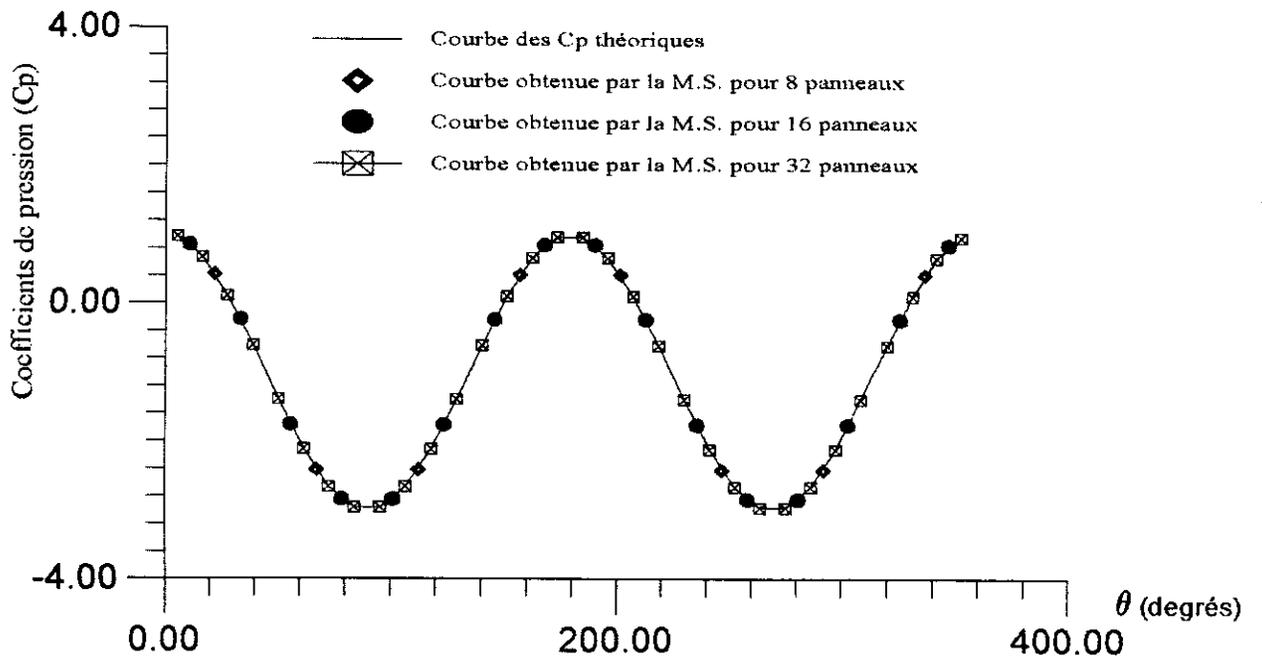


Figure VI.3  
 Distribution des coefficients de pression sur un cylindre fixe  
 pour une charge concentrée de doublets

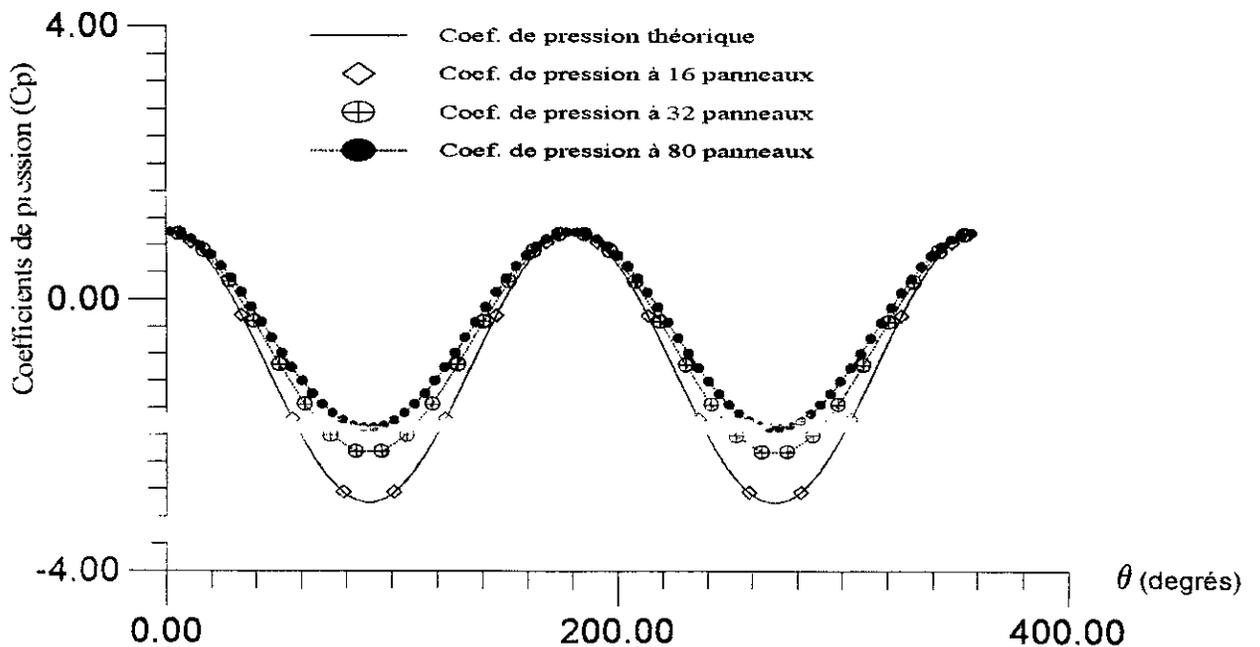


Figure VI.4  
 Distribution des coefficients de pression sur un cylindre fixe  
 pour un chargement uniforme de doublets

### VI.1.1.2 DISTRIBUTION DE DOUBLETS

La première remarque à faire pour ce type de singularités est que toutes les intensités des singularités sont égales, que ce soit pour une distribution concentrée ou uniforme, de plus les points de stagnation ( $C_p = 1$ ) sont très bien déterminés, l'allure des courbes quand à elle reste toujours symétrique.

Pour une distribution concentrée de doublets, les valeurs des  $C_p$  représentés par la courbe C3 (fig.VI.3), se confondent avec celles calculées analytiquement et ceci même pour un nombre de panneaux égal à 8 ce qui n'est pas le cas pour une distribution concentrée de sources, il est donc préférable, pour un chargement concentré, d'utiliser des doublets.

Pour une distribution uniforme de doublets, il est apparu que la valeur des coefficients de pression divergeait complètement de la solution exacte, et de plus que l'amplitude de la courbe C4 des  $C_p$  varie suivant la discrétisation de l'obstacle soit le nombre de panneaux adopté (fig.VI.4), ceci étant évidemment anormale.

En vue de ces variations aléatoires des valeurs des  $C_p$ , nous sommes donc arrivés à la conclusion qu'une distribution uniforme de doublets ne donnait pas de résultats et ne pourrait être adoptée pour certains types de problèmes.

### VI.1.2 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT

#### AUTOUR D'UNE RANGÉE DE CYLINDRES

La courbe C5 ( $C_p = f(\theta)$ ) obtenue pour un écoulement à travers une rangée d'obstacle est d'allure identique à celle obtenue pour un cylindre, la symétrie de celle-ci est liée à la symétrie géométrique que présente une rangée de cylindre (fig.VI.5.a et b).

Cependant, toujours en comparant C5 et C2, on remarque qu'en considérant pour un même angle les valeurs des coefficients de pression, celles correspondantes à l'écoulement autour d'une rangée de cylindre sont inférieures à celles autour d'un cylindre, en effet ceci s'explique par la contraction de la section d'entrée ce qui entraîne une accélération de la vitesse soit une chute de pression.

### VI.13 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT

#### AUTOUR D'UN CYLINDRE TOURNANT

La présence de circulation, donc d'une vitesse supplémentaire (annexe C) implique que la courbe C6 (fig.VI.6) qui donne la variation des  $C_p$  en fonction de  $\theta$  n'est plus symétrique (ceci en comparaison avec la courbe C1)

En prenant pour exemple une circulation  $\Gamma = 2\pi U_\infty$ , les points de stagnation sont parfaitement déterminés, cependant comme pour le cas d'une distribution concentrée de sources, les résultats convergent proportionnellement avec le nombre de panneaux surtout où le gradient de pression atteint des valeurs importantes ( $\theta \in [60^\circ, 120^\circ]$ ), il est donc nécessaire de choisir une bonne discrétisation de l'obstacle afin d'obtenir de meilleurs résultats.

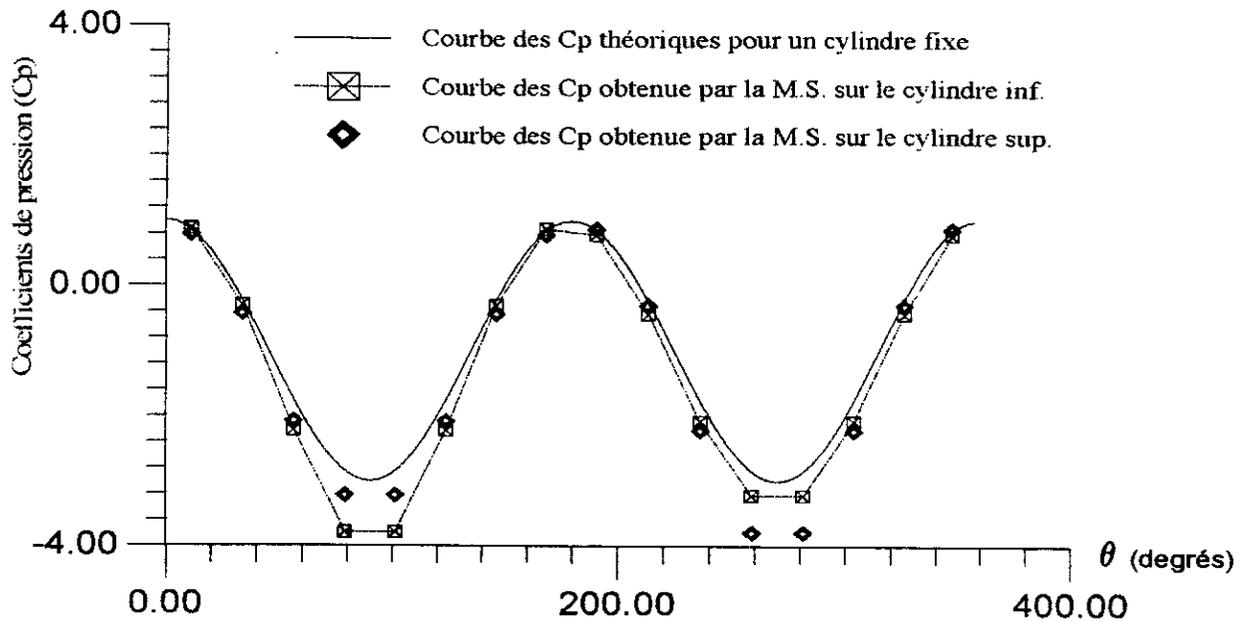


Figure VI.5.a  
 Distribution des coefficients de pression sur une rangée de deux cylindres  
 pour un nombre de panneaux  $N$  égal à 16

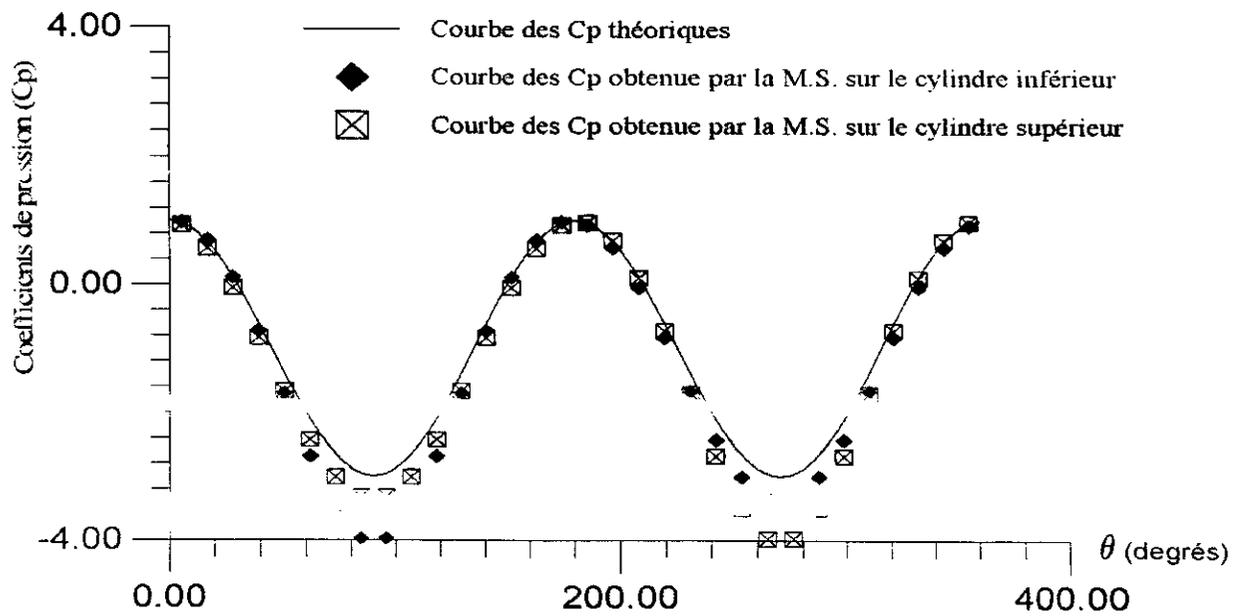


Figure VI.5.b  
 Distribution des coefficients de pression sur une rangée de deux cylindres  
 pour un nombre de panneaux  $N$  égale à 32

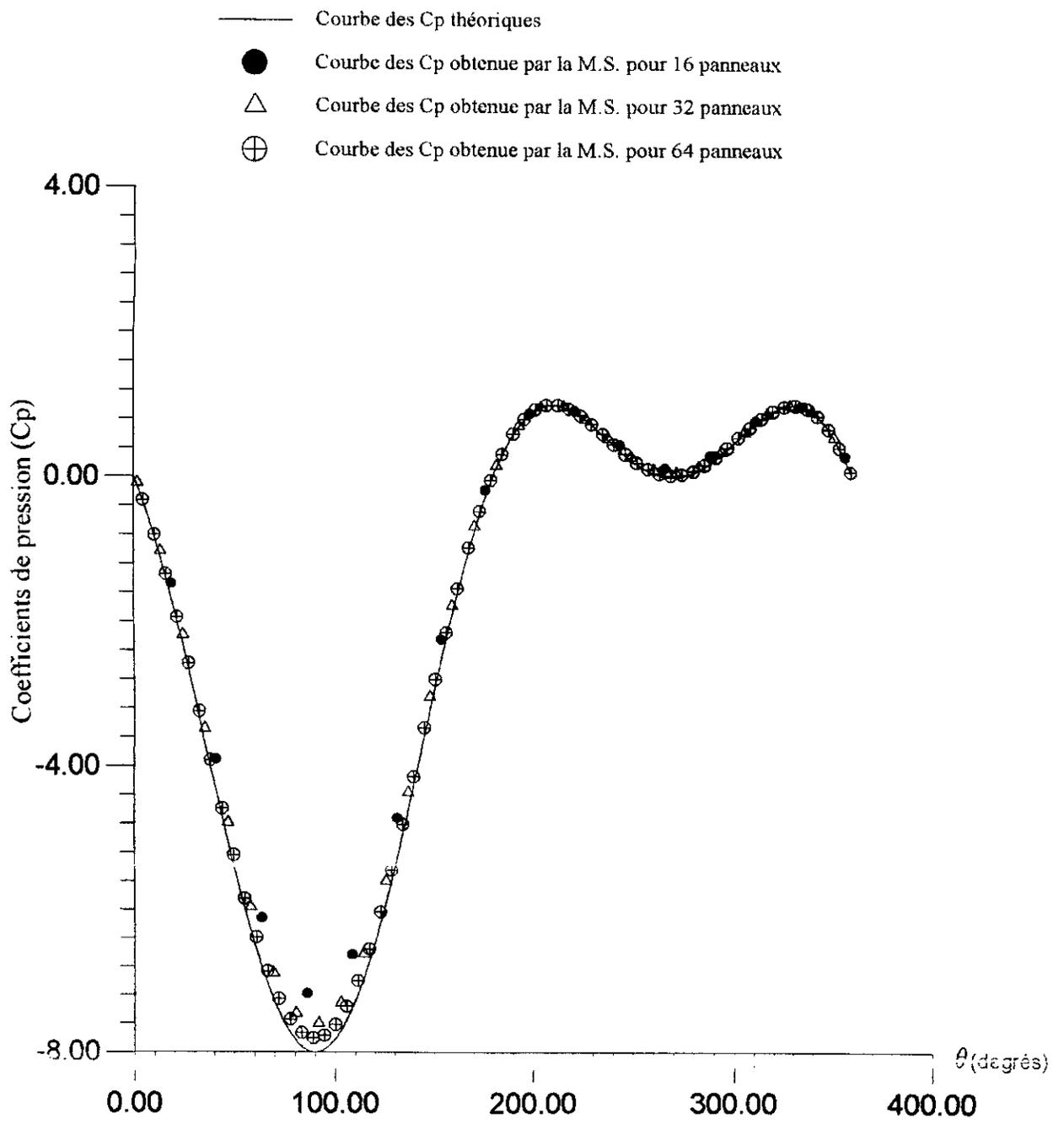


Figure 1.6  
 Distribution des coefficients de pression sur un cylindre tournant  
 pour une circulation égale à  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot U$

## VI.1.4 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT

### AUTOUR D'UN PROFIL D'AILE

Pour l'application de la méthode nous avons adopté le profil NACA 4412, le nombre de panneau qui est donnée par la table est de 54 et les variations du coefficient de pression  $C_p$  mesurées expérimentalement sont données pour deux angles d'incidence différents :  $\alpha = 2^\circ$  et  $\alpha = 16^\circ$ .

Les courbes C7 et C8 obtenues pour un angle d'incidence  $\alpha$  de  $2^\circ$  et un angle  $\alpha$  de  $16^\circ$  sont données respectivement par les figures ( VI.7 ) et ( VI.8 ).

Considérons la courbe C7 obtenue pour  $\alpha = 2^\circ$  :

- La valeur du coefficient de pression au bord d'attaque est parfaitement déterminée et est égale à 1 ce qui correspond bien au point de stagnation où la vitesse est nulle.

La concordance entre les valeurs obtenues par la méthode des singularités et les valeurs expérimentales est assez bonne, cependant certaines régions présentent quelques différences avec les valeurs expérimentales, pour commenter ces divergences, considérons deux zones :

➤ Zone 1 :  $0 < x < 8\%$

Remarquons en premier lieu que lorsqu'on dépasse le point de stagnation, le fluide est alors accéléré des deux cotés du profil, cependant l'accélération du fluide sur l'extrados est plus conséquente que celle sur l'intrados ce qui se traduit par des valeurs du  $C_p$  sur l'intrados supérieures à celles sur l'extrados.

En conséquence à ce phénomène il apparaît que pour le calcul des  $C_p$  dans cette zone, où le fluide accélère fortement, la méthode des singularités donne des résultats moins précis où l'évolution des vitesses est rapide.

➤ Zone 1 :  $8\% < x < 100\%$

Dans cette zone la concordance des  $C_p$  expérimentaux et calculés est assez bonne et ceci s'explique par des variations moins rapides des vitesses cependant au environ de 25 % de la corde, une divergence apparaît sur l'extrados, ceci s'explique par le changement de la pente du profil.

Considérons la courbe C8 obtenue pour  $\alpha = 16^\circ$  :

L'allure de la courbe C5 obtenue par la méthode des singularités est toujours similaire à celle obtenue expérimentalement.

On remarque que le point de stagnation n'est plus situé sur le bord d'attaque et est déplacé sur l'intrados et ceci en conséquence à l'angle d'incidence qui est plus prononcé que précédemment, d'autre part on remarque aussi que celui-ci ne correspond plus au point de stagnation déterminé expérimentalement, ceci s'explique par l'effet du décollement de la couche limite qui pour une incidence plus accentuée agit d'une façon

plus caractérisée sur l'extrados, en effet l'influence de la couche limite tend à augmenter l'épaisseur du profil sur l'extrados ce qui déplace le point de stagnation vers le bord d'attaque.

L'apparition de la couche limite ayant pour effet de réduire la vitesse sur l'extrados, sur ce dernier les coefficients de pression déterminés expérimentalement seront donc, en comparaison avec ceux déterminés par la méthode des singularités, supérieurs à ceux calculés, et sur l'intrados où l'effet du décollement de la couche limite est pratiquement négligeable, toujours en comparant les résultats analytiques et expérimentaux, on voit bien que les valeurs des coefficients de pression expérimentaux et ceux calculés coïncident très bien, de plus les valeurs très grandes de ces derniers montrent bien que l'intrados est une surface portante.

### **VI.1.5 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE RANGÉE DE PROFILS D'AILE**

Nous avons, pour une rangée de profils d'aile, considéré uniquement un écoulement à travers deux aubes, la connaissance de l'influence d'une aube sur une autre pourra être ensuite extrapolée pour anticiper les caractéristiques d'un écoulement dans une grille d'aubes.

Comme il a été expliqué dans le cas d'une rangée de cylindres ( § VI.1.2 ), la contraction de la section d'entrée du canal crée un effet de blocage qui a pour conséquence d'augmenter la vitesse, en comparant les coefficients de pression, déterminés par la méthode des singularités pour une aube isolée, et ceux déterminés pour deux aubes formant un canal, et ceci pour des angles d'incidence de  $2^\circ$  et de  $16^\circ$  respectivement représentés par les courbes C6 (*fig.VI.6*) et C7 (*fig.VI.7*), il apparaît bien que :

- sur la première aube, où son extrados forme la frontière inférieure du canal, on voit bien une chute de pression sur ce dernier.
- sur la seconde aube, où son intrados forme la frontière supérieure du canal, une chute de pression apparaît sur cette surface.

De plus, toujours à travers ces courbes, on remarque que les  $C_p$  de l'intrados de la première aube se confondent avec les  $C_p$  de l'intrados de l'aube isolée et que les  $C_p$  de l'extrados de la seconde aube se confondent avec les  $C_p$  de l'extrados de l'aube isolée. on peut alors conclure que mise à part sur les surfaces qui forment le canal. l'influence du chargement des singularités d'une aube sur l'autre est négligeable, ce qui n'est pas en contradiction avec la réalité.

Notons que l'influence de la variation de l'angle d'incidence sur les caractéristiques de l'écoulement à travers une rangée d'aubes agit dans le même sens que celle qui a été discuté pour un écoulement à travers une aube isolée ( § VI.3 ).

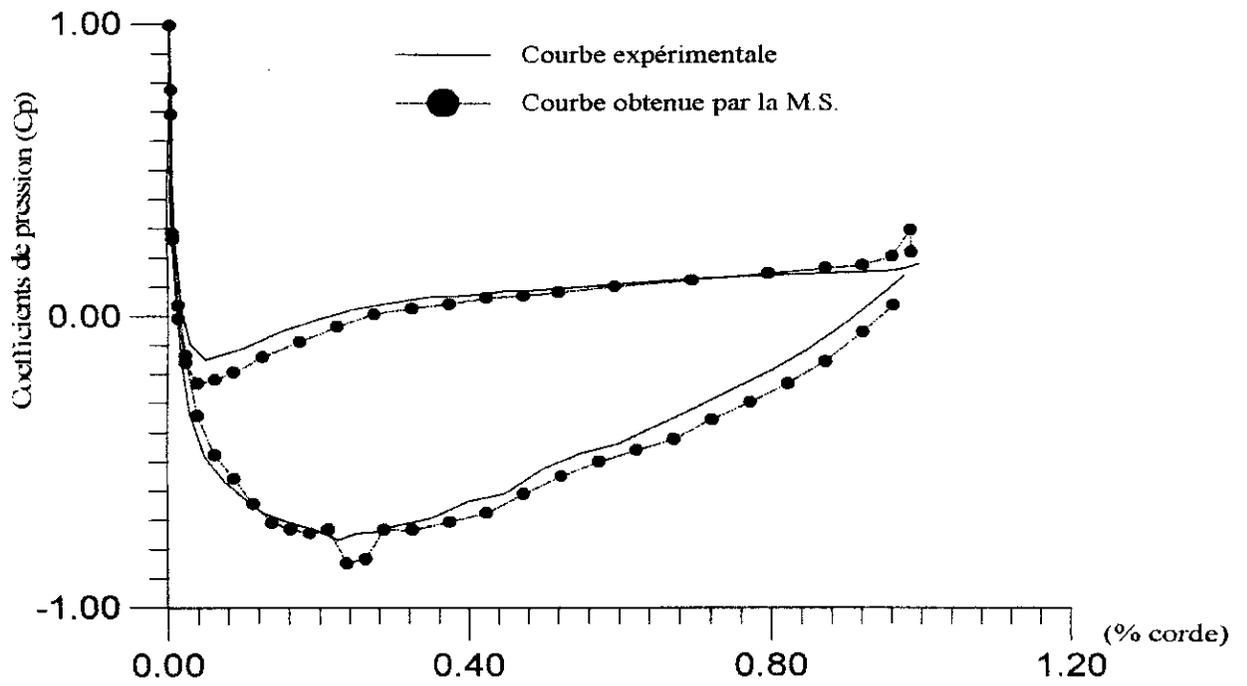


Figure VI.7  
 Distribution des coefficients de pression sur un profil  
 NACA 4412 avec un angle d'incidence de 02 degrés

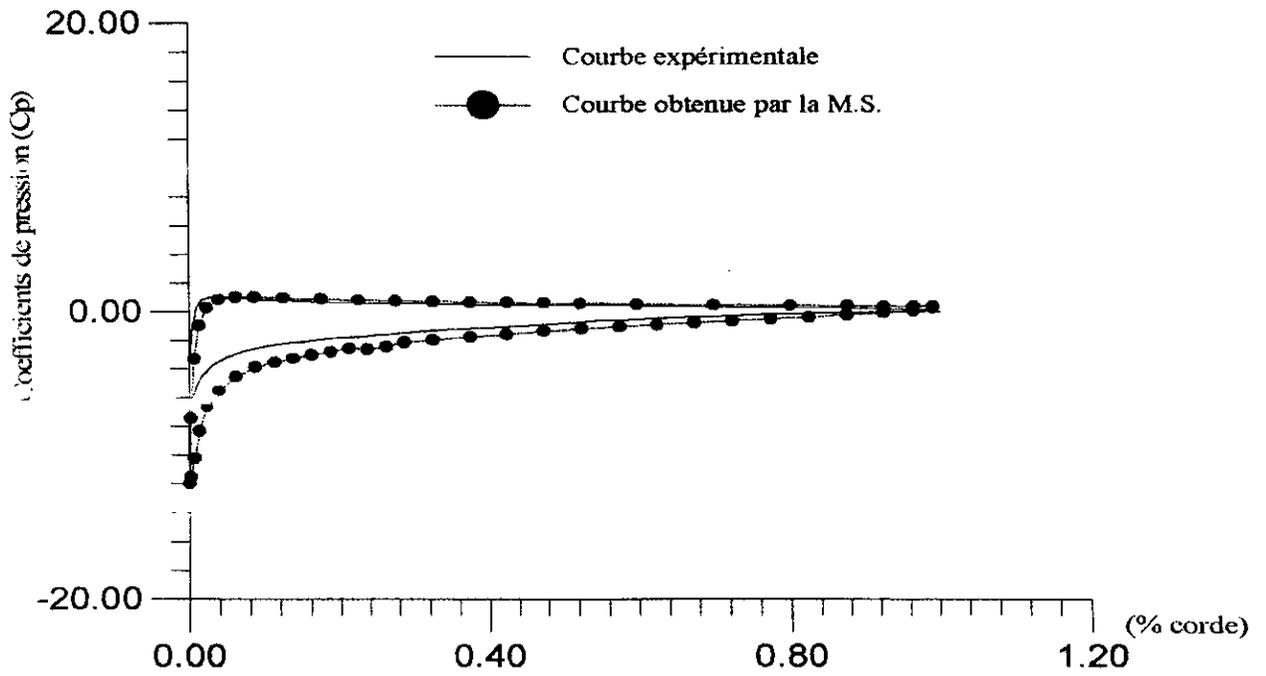


Figure VI.8  
 Distribution des coefficients de pression sur un profil  
 NACA 4412 avec un angle d'incidence de 16 degrés

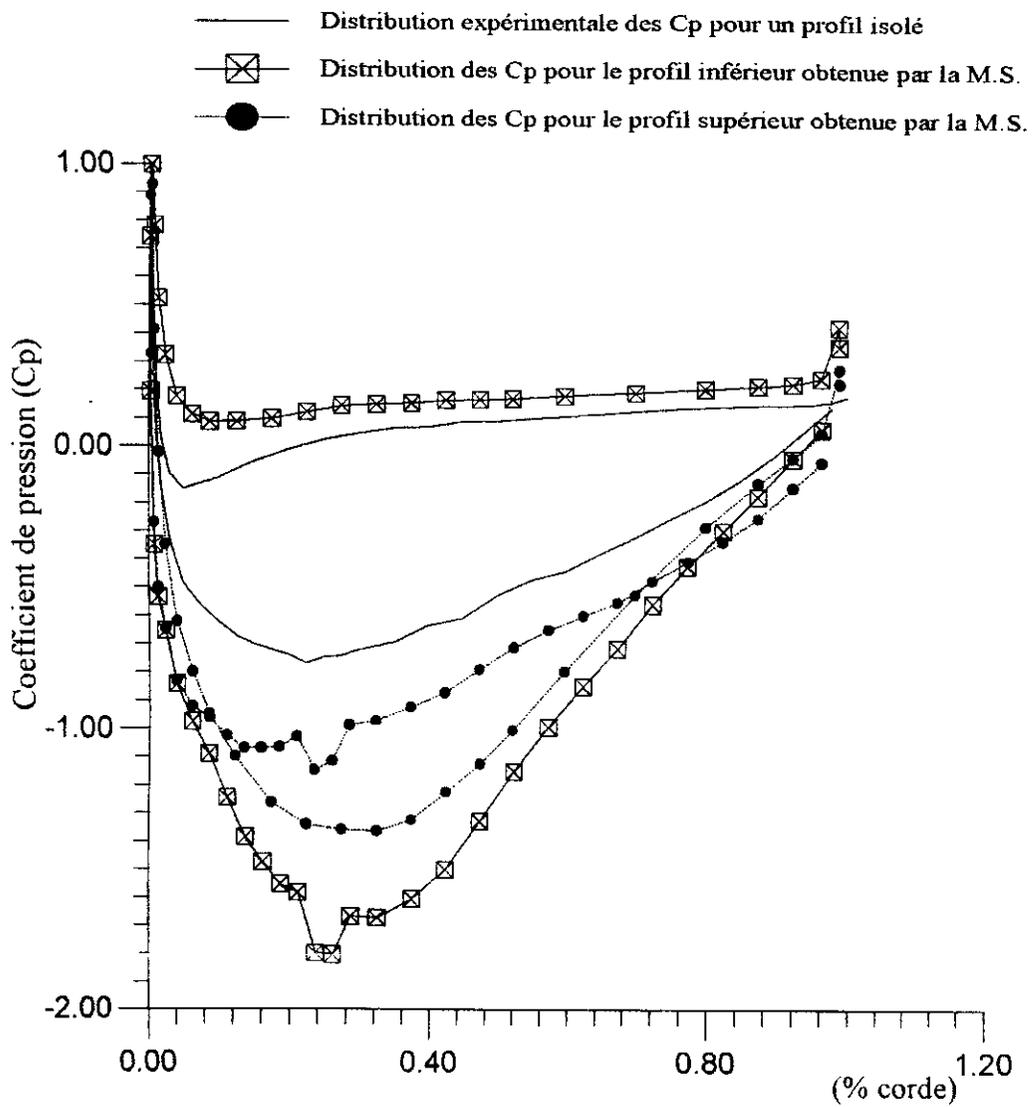


Figure VI.9  
 Distribution des coefficients de pression pour une rangée de deux profils  
 NACA 4412 avec un angle d'incidence de 2 degrés.

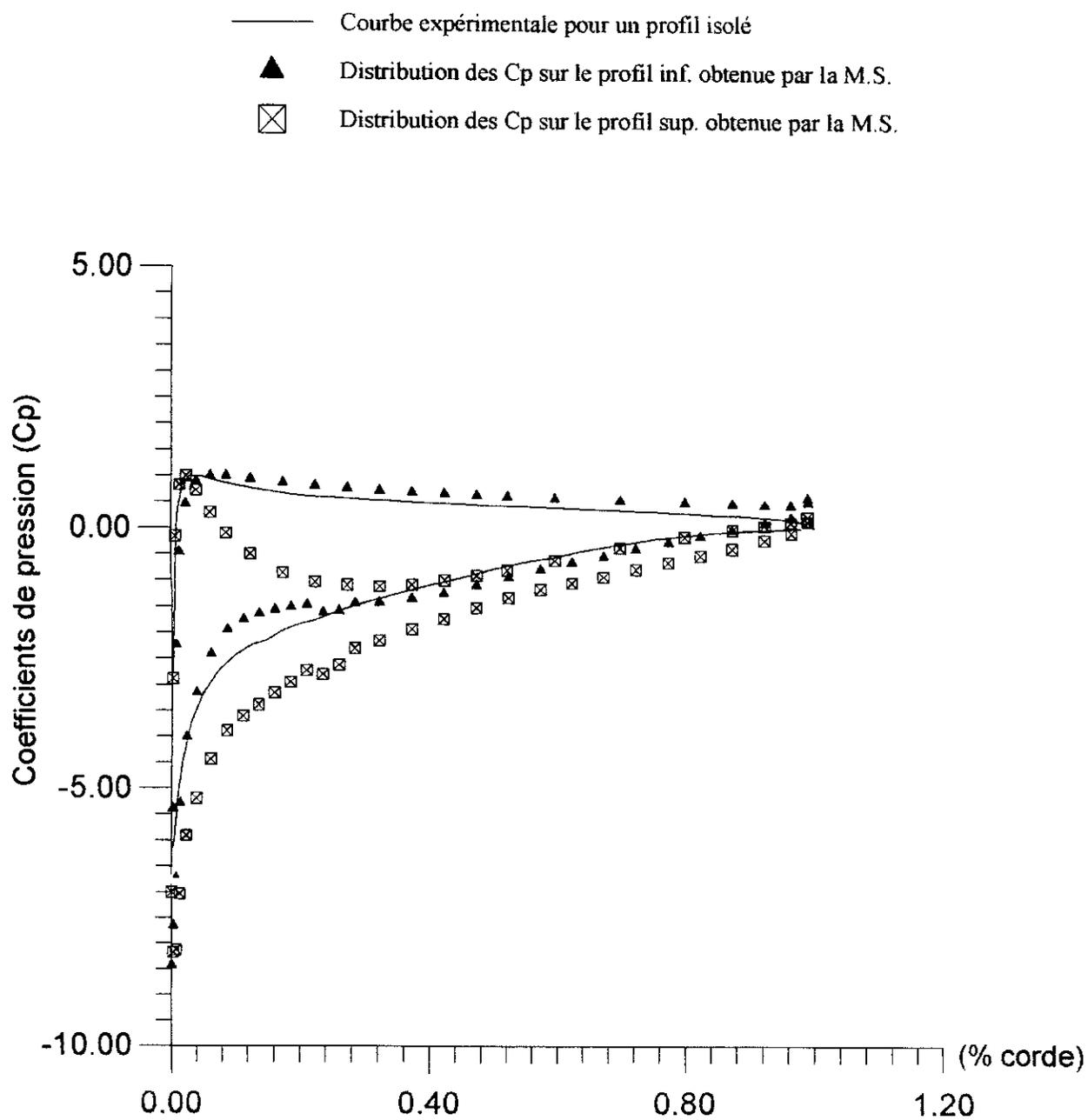
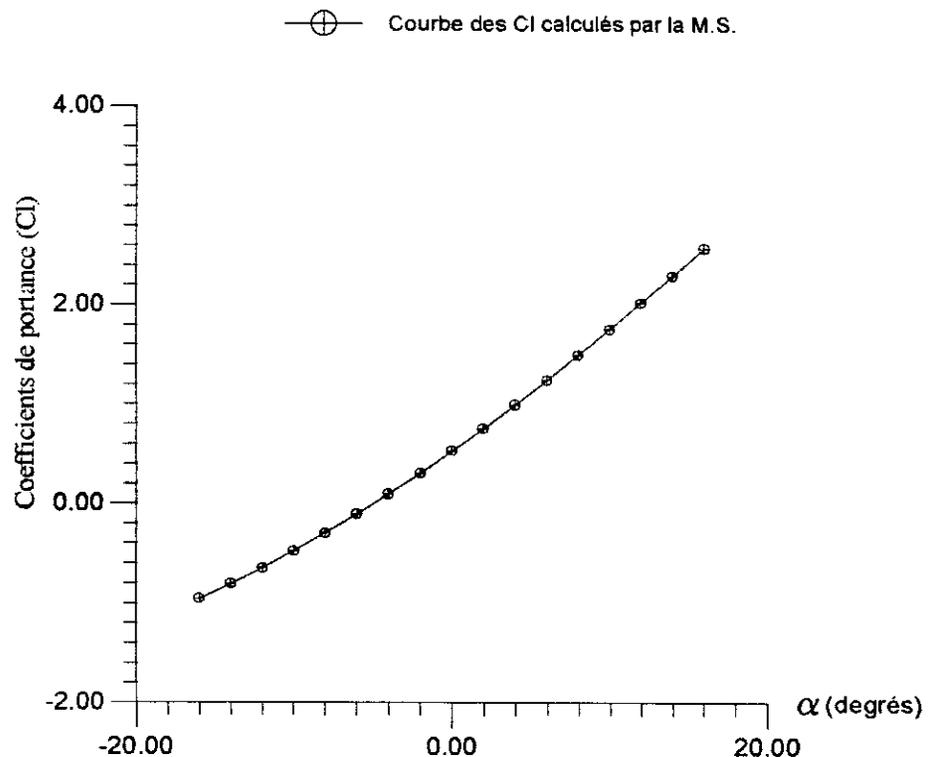


Figure VI.10  
 Distribution des coefficients de pression pour une rangée de deux profils  
 NACA 4412 avec un angle d'incidence de 16 degrés

## VI.2 INFLUENCE DE L'INCIDENCE DE L'ÉCOULEMENT SUR LA PORTANCE



*Figure VI.11*  
Influence de l'incidence sur le coefficient de portance dans le cas  
d'un profil NACA 4412

La courbe ( *fig.VI.11* ), obtenue par la méthode des singularités ( M.S. ), qui représente l'évolution du coefficient de portance en fonction de l'incidence de l'écoulement, montre que la portance augmente indéfiniment dans le même sens que cette incidence, dans une certaine plage à petites incidences ceci est vérifié, cependant, à partir de certaines valeurs où les phénomènes physiques ( décollement de la couche limite, viscosité, ... ) sont prépondérant, on devrait expérimentalement observer une diminution de la portance.

## VI.3 APPLICATION DU MAILLEUR A DIFFERENTS OBSTACLES

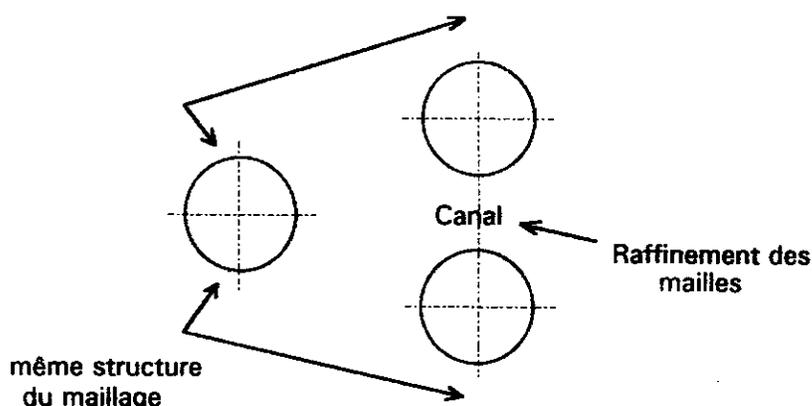
### VI.3.1 CYLINDRE FIXE

Pour une incidence nulle, les points de stagnation étant localisés aux angles  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , sur le maillage effectué autour d'un cylindre fixe ( *fig.VI.12* ), ces deux points se caractérisent bien par le changement du sens de l'évolution des lignes de courant, en effet on voit que sur la moitié supérieure du cylindre l'évolution est de sens inverse que sur de la partie inférieure.

On observe bien un raffinement des mailles dans les zones où les variations de vitesses sont sensibles.

### VI.3.2 RANGEE DE CYLINDRES FIXES

L'effet de blocage est bien matérialisé par le raffinement des mailles au niveau du canal formé par les deux cylindres, comme il a été montré par l'allure des courbes des  $C_p$ , l'influence d'une rangée de cylindres ne s'opère qu'au niveau du canal et ceci est apparent en comparant le maillage autour du cylindre fixe et de la rangée de cylindre où il apparaît qu'en dehors du canal, les maillages ont la même structure (fig.VI.13).



### VI.3.3 CYLINDRE TOURNANT

Pour l'exemple traité, nous avons adopté une circulation positive ce qui se traduit par une rotation du cylindre dans le sens des aiguilles d'une montre, les points de stagnation seront alors sur la partie inférieure de l'obstacle.

La connaissance de la zone dans laquelle se trouvent les points de stagnation est nécessaire pour obtenir un maillage raffiné, en effet, aux abords de ces points les variations des vitesses sont très sensibles, le principe de notre maillage nous imposera donc de choisir le point de départ du tracé des lignes équipotentielles dans la partie supérieure de l'obstacle. Les deux exemples traités ( fig.VI.13.a et b) illustrent clairement cette condition.

Notons aussi qu'il est nécessaire de bien choisir la discrétisation de l'obstacle ( $N \geq 16$ ) afin que les lignes de courant proches de l'obstacle décrivent précisément

### VI.3.4 PROFIL D'AILE ISOLEE

Les exemples traités sont représentés par les figures ( VI.14.a, b et c ) correspondent respectivement à des angles d'incidence de  $0^\circ$ ,  $10^\circ$  et  $-5^\circ$ .

Suivant cet angle, il apparaît bien, d'après l'allure des lignes de courant, que le point de stagnation se déplace par rapport au bord d'attaque :

- Pour un angle d'incidence nulle ( $\alpha = 0^\circ$ ), il se confond avec le bord d'attaque.

- Pour un angle d'incidence positif ( $\alpha = 10^\circ$ ), il se déplace sur l'intrados.
- Pour un angle d'incidence négatif ( $\alpha = -5^\circ$ ), il se déplace sur l'extrados.

Pour chacun de ces cas, on constate bien sur les figures, que les zones où les mailles se raffinent sont celles où se situe le point de stagnation soit où les gradients de pression sont faibles.

### **VI.3.5 RANGEE DE PROFILS D'AILE**

Nous examinons maintenant les résultats des différents cas traités, illustrés par les figures ( VI.16.a, b et c ) et correspondant respectivement à des angles d'incidence de  $0^\circ$ ,  $10^\circ$  et  $-5^\circ$ .

En plus de l'influence de cet angle sur le raffinement du maillage, qui a été discutée précédemment, il apparaît sur les figures, particulièrement pour une incidence positive ( *fig. VI.16. b* ), un raffinement de meilleure qualité est engendré dans le canal, ceci toujours dû à l'effet de blocage discuté explicitement pour le cas d'une rangée de cylindres ( § VI.3.2 ).

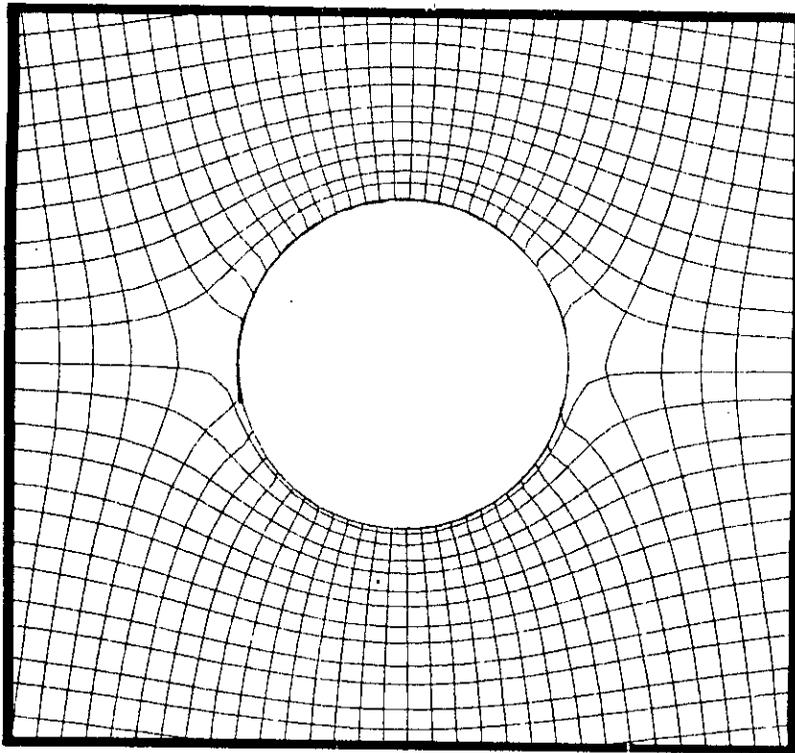


Figure VI.12  
Maillage d'un écoulement autour d'un cylindre fixe

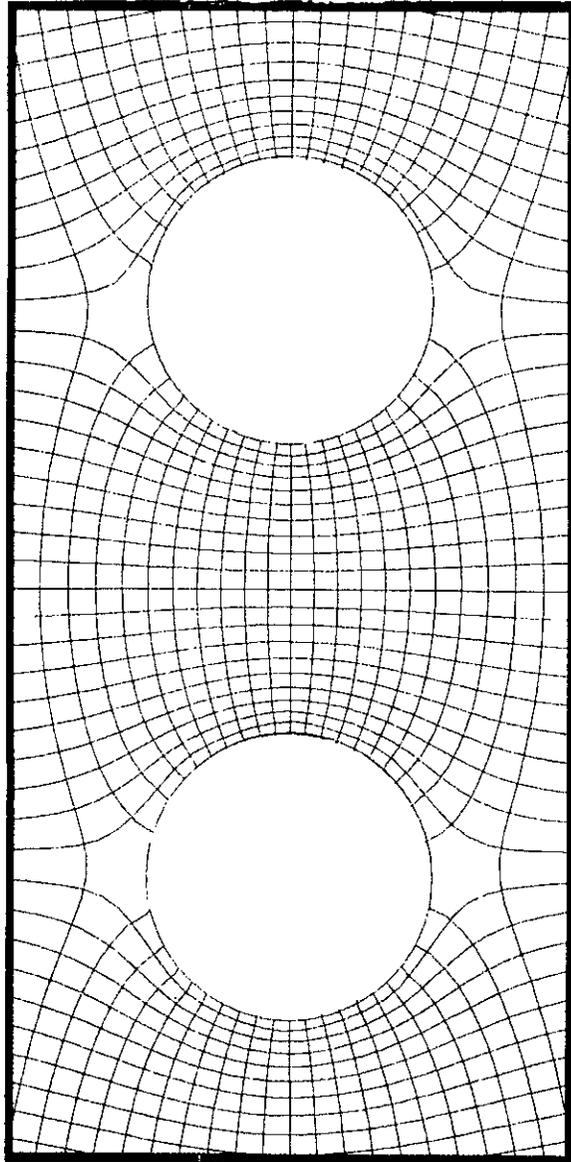


Figure VI.13  
Maillage d'un écoulement à travers une rangée de cylindre

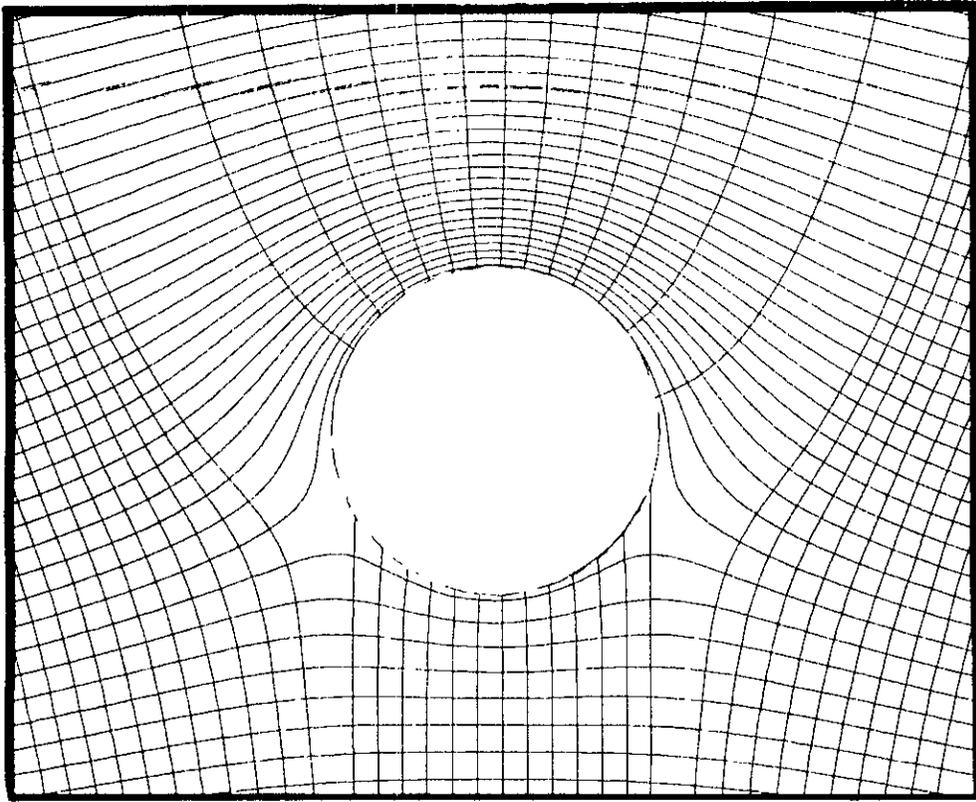


Figure VI.13 a  
Maillage d'un écoulement autour d'un cylindre tournant

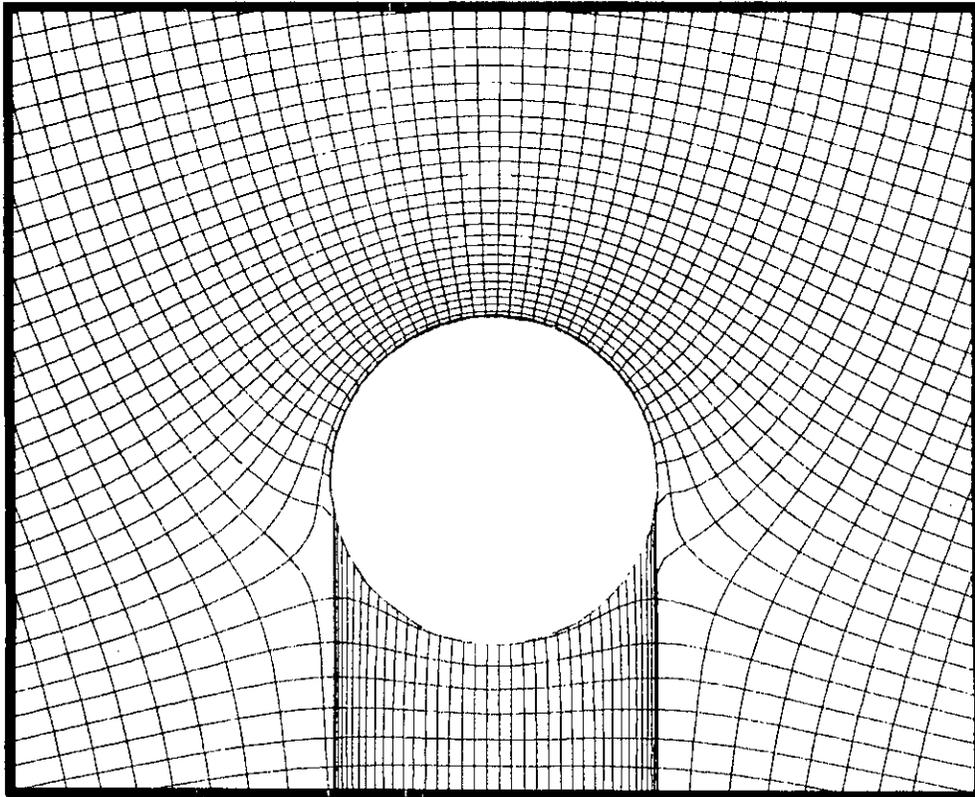


Figure VI.13 b  
Raffinement du maillage de l'écoulement autour d'un cylindre tournant

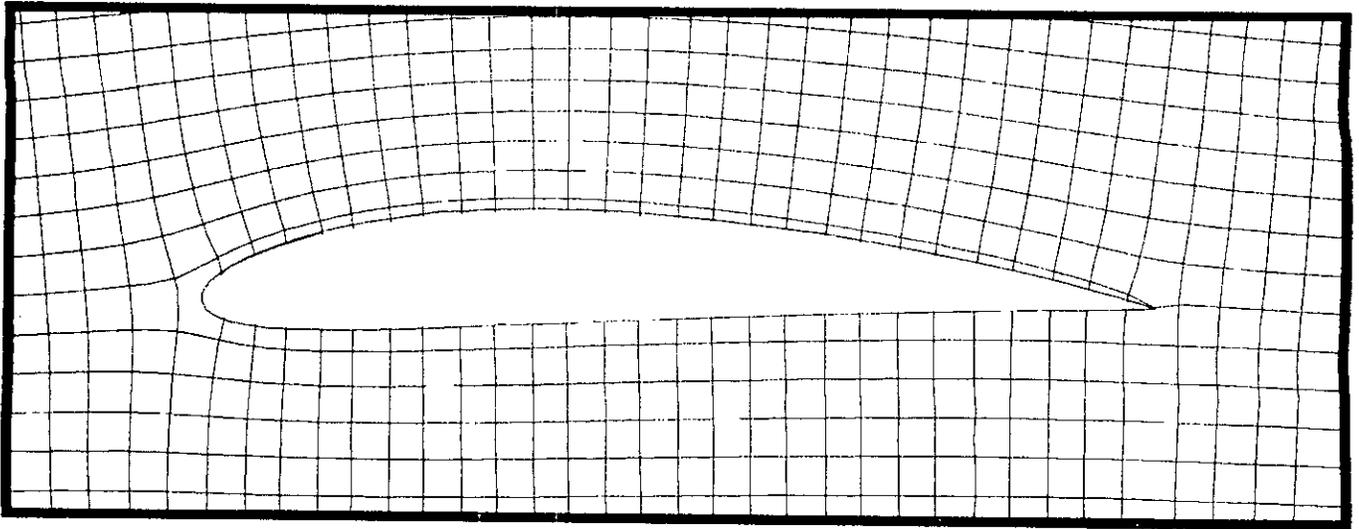


Figure VI.14.a  
Maillage d'un écoulement à incidence nulle autour  
du profil NACA 4412

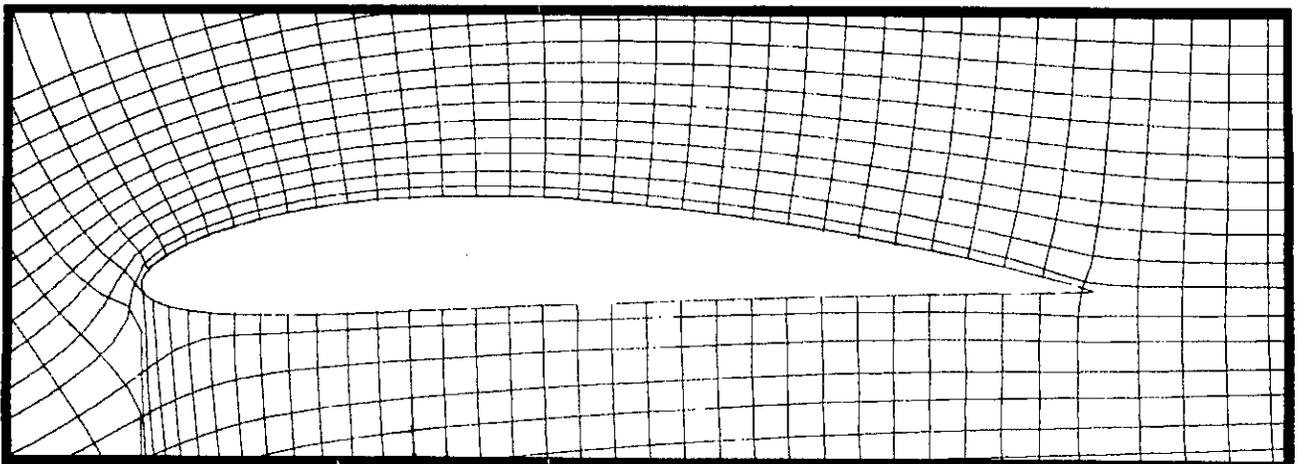


Figure VI.14.b  
Maillage d'un écoulement à incidence de  $10^\circ$  autour  
du profil NACA 4412

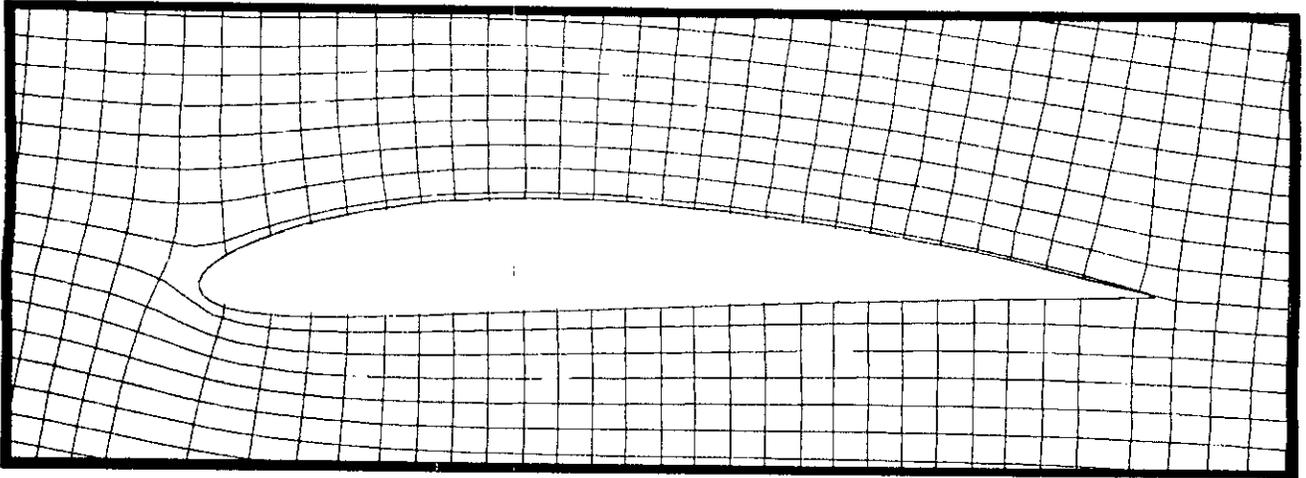


Figure VI.14.c  
Maillage d'un écoulement à incidence de  $-5^\circ$  autour  
du profil NACA 4412

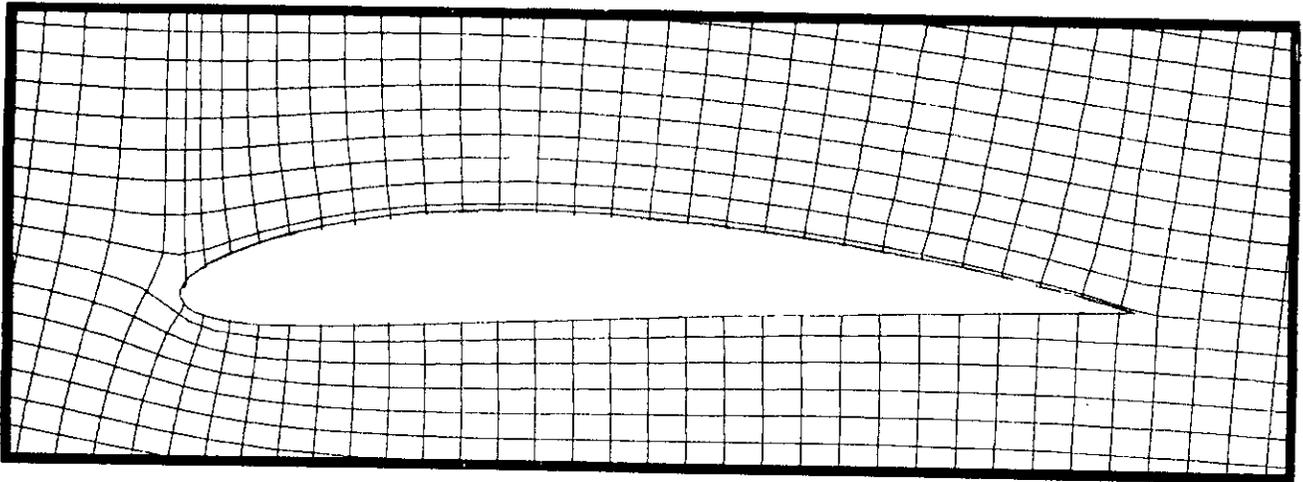


Figure VI.14.d  
Raffinement du maillage de l'écoulement à incidence de  $-5^\circ$  autour  
du profil NACA 4412

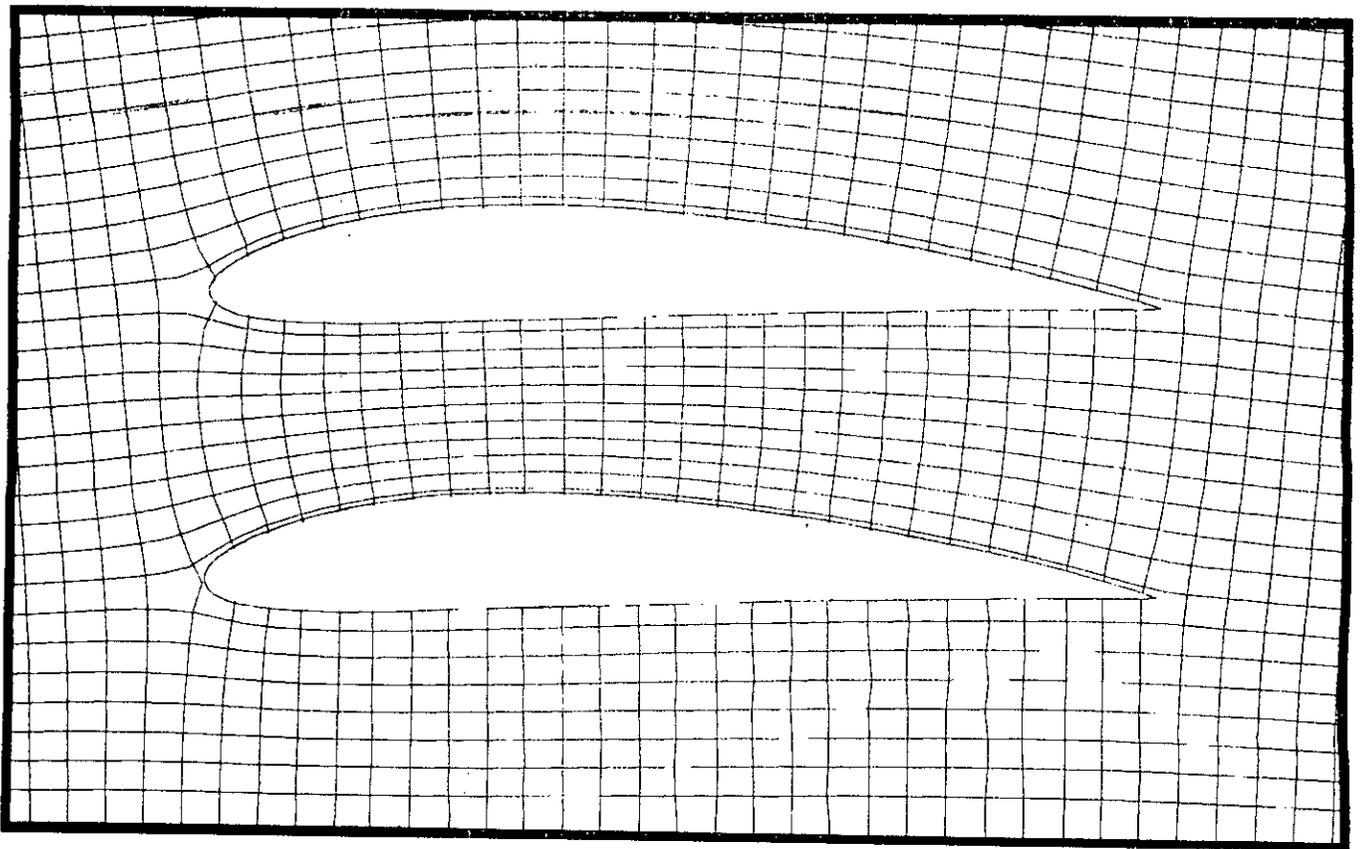


Figure VI.15.a  
Maillage d'un écoulement à incidence nulle autour  
d'une rangée de profils NACA 4412

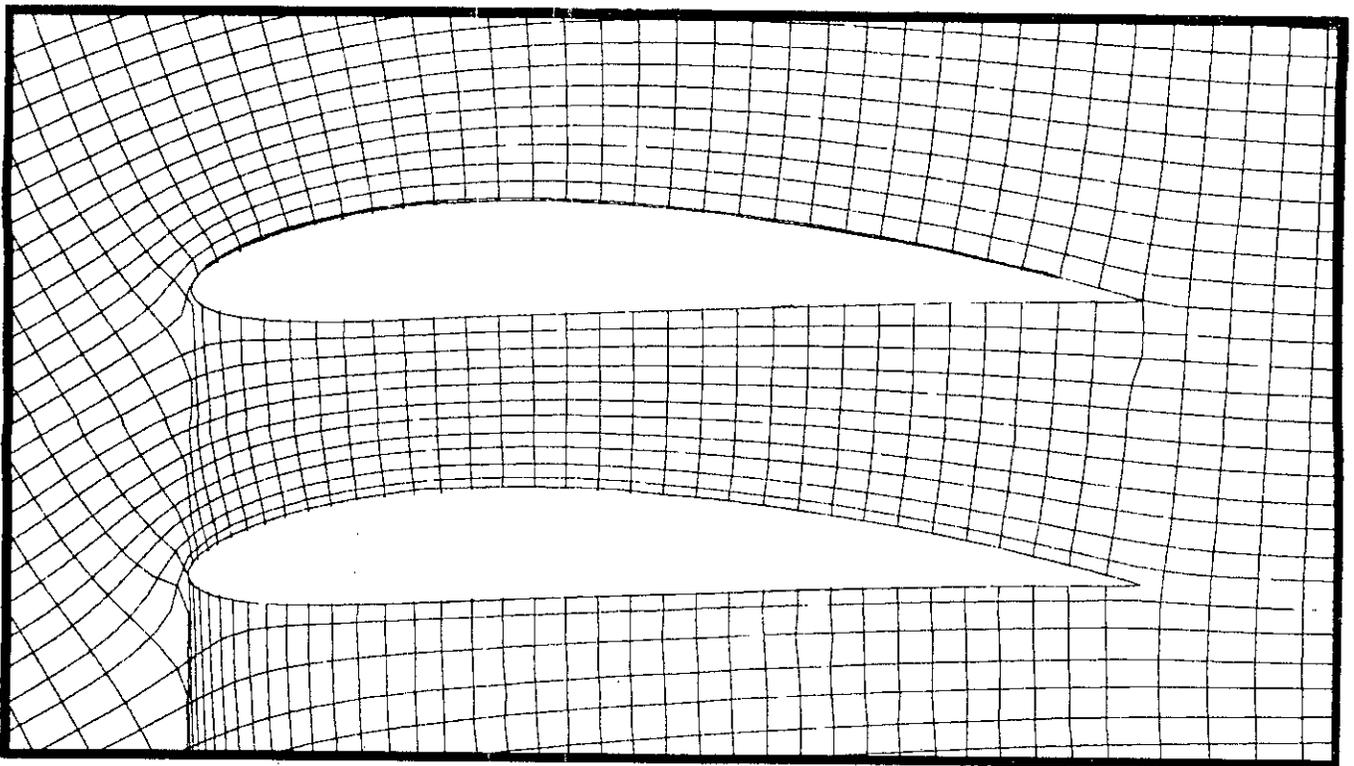


Figure VI.15.b  
Maillage d'un écoulement à incidence de  $10^\circ$  autour  
d'une rangée de profils NACA 4412

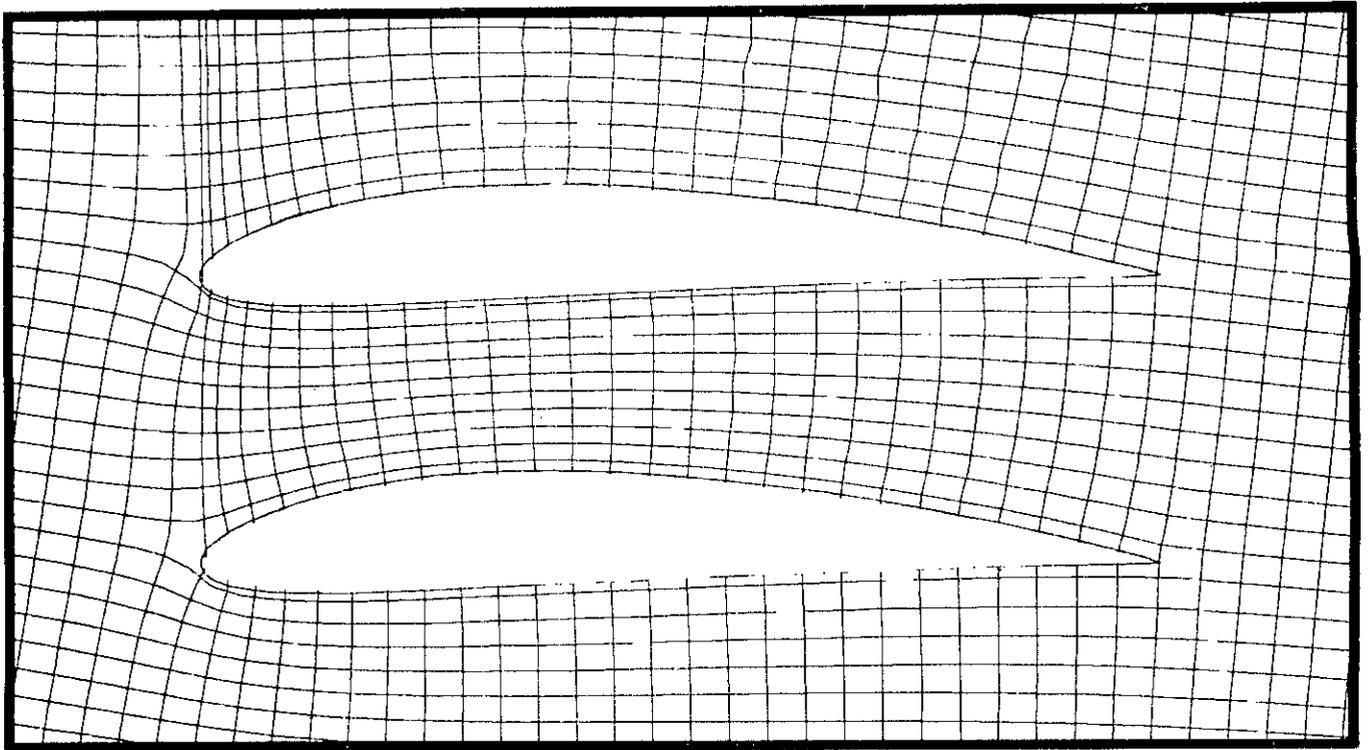


Figure VI.15.c  
Maillage d'un écoulement à incidence de  $-5^\circ$  autour  
d'une rangée de profils NACA 4412

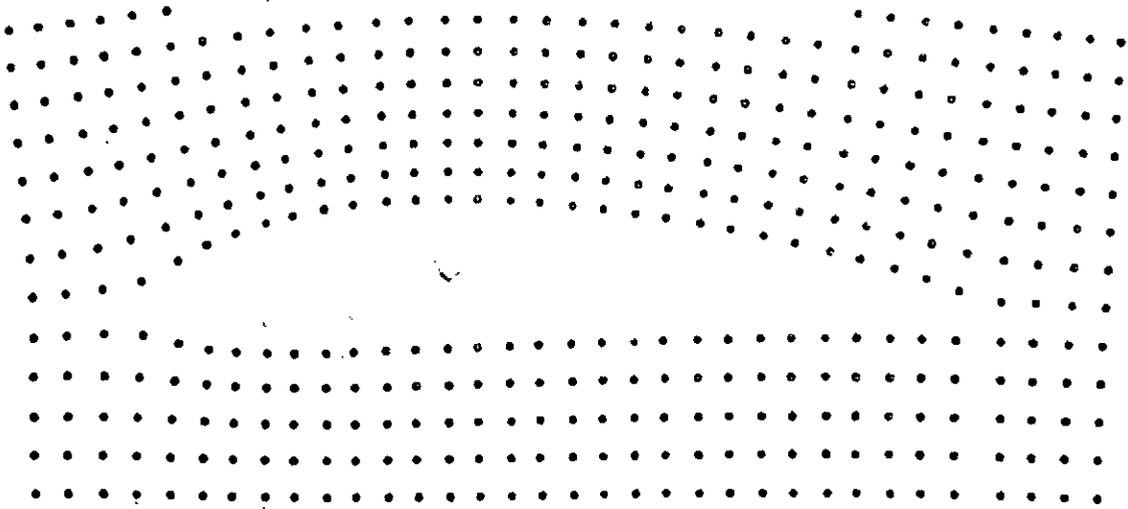
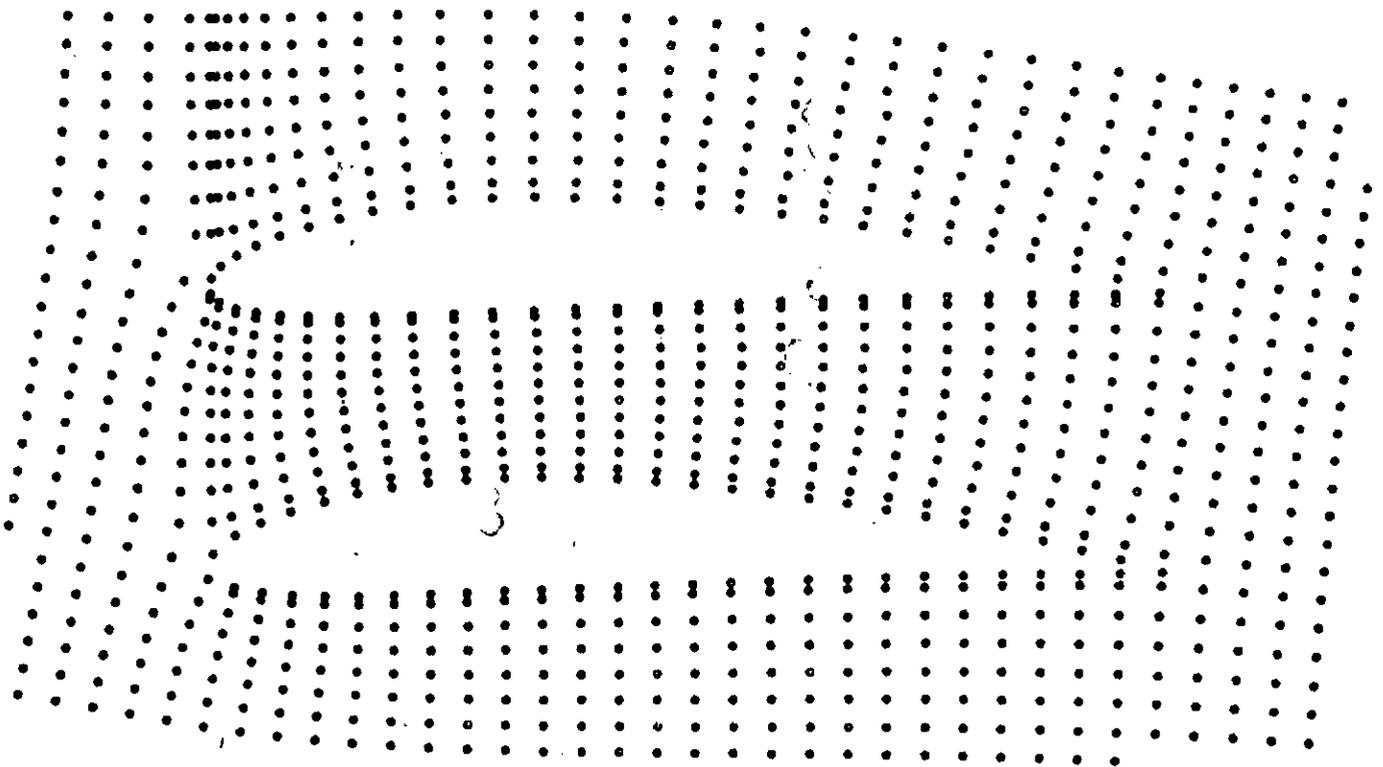


Figure VI.16.a  
Exemple de la localisation des nœuds du maillage de l'écoulement  
d'incidence nulle autour du profil NACA 4412



## CONCLUSION

Nous avons pu, au cours de ce travail, mettre en oeuvre un ensemble d'outils mathématiques et numériques pour simuler des écoulements autour de différents obstacles par la méthode des singularités. Le programme de calcul qui y est associé a donné des résultats très intéressants pour certains ou, au moins, significatifs pour d'autres.

La première conclusion à tirer est que le choix de la distribution n'obéit pas à un critère particulier, en effet plusieurs types de distributions peuvent être adoptées pour traiter un même problème, cependant les résultats obtenus ont montré que certaines singularités donnaient des résultats d'une meilleure convergence que d'autres et donc étaient plus adaptées à ce problème :

- Dans le cas de l'utilisation de sources, une distribution uniforme a donné une meilleure convergence que pour un chargement concentré.
- Dans le cas d'une utilisation de doublets, ce type de singularités a montré que son utilisation se limitait à un chargement concentré, néanmoins qu'elle donnait de meilleurs résultats qu'une distribution concentrée de sources.

A travers les courbes des coefficients de pression, il est apparu que la méthode a donné au niveau des variations sensibles des vitesses des résultats moins précis, ceci peut s'expliquer par le fait que les phénomènes physiques ( décollement de la couche limite, viscosité, ... ) dans ces zones ne peuvent plus être négligés, en conséquence les résultats expérimentaux seront quelques peu différents à ceux trouvés en considérant le fluide comme parfait.

Dans cette étude, notre objectif principal a été de proposer une démarche afin d'essayer de résoudre le problème de génération de maillage en deux dimensions.

Les maillages obtenus se sont avérés de bonne qualité :

- L'orthogonalité entre les lignes de courant et les lignes équipotentielles est respectée
- Dans les zones critiques, on observe bien un raffinement particulier des mailles, ceci réside du caractère physique avec lequel est construit le maillage ( $\phi$  et  $\psi$ ).

La structure de l'algorithme de notre mailleur offre la possibilité de raffiner davantage le domaine à mailler, ceci suivant les conditions imposées pour son utilisation.

Finalement, il est à noter que le maillage que nous avons construit est curviligne, cependant par une localisation des noeuds, il est possible de l'adapter pour réaliser un maillage constitué d'éléments triangulaires qui peut être aussi utilisé dans la formulation par éléments finis ou différences finies de certains problèmes.

## BIBLIOGRAPHIE

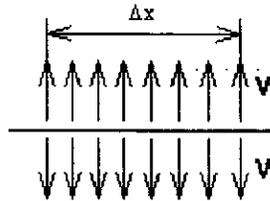
- [1] - **FOX , J. F.** - " An Introduction to Engineering Fluid Mechanics "   
Second Edition London MACMILLAN 1977
- [2] - **REBUFFET , P.** - " Aérodynamique Expérimentale " Tome I   
Troisième édition Paris DUNOD 1969
- [3] - **OLSON , M. R.** - " Essentiels of Engineering Mechanics "   
Thrid Edition Intext Educational Publishers NEW YORK
- [4] - **BRUN , E. A. , MARTINOT-LAGARDE et A. , MATHIEU , J.**   
- " Mécanique des Fluides " Tome II   
Paris DUNOD 1968
- [5] - **COMOLET , R.** - " Mécanique Expérimentale des Fluides "   
Paris MASSON 1961-1964
- [6] - **THWAITES , B.** - " Incompressible Aerodynamics "   
Oxford 1960
- [7] - **Mc GROMICK , B.W.** - " Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics "   
WILEY 1979
- [8] - **RYHMING , INGEL L.** - " Dynamique des Fluides "   
Première Edition. Presses Polytechniques Romandes. 1985
- [9] - **NACEREDDINE , R. et NOUIOUA , H.** - " Etude Comparative de la Méthode   
des Singularités Distribuées Appliquée aux Ecoulements Autour d'obstacles "   
E.N.P. P.F.E. 1993
- [10] - **DEMIDOVITCH , B.** - " Elément de Calcul Numérique "   
Edition MIR Moscou 1987
- [11] - **GOURDIN , A. et BOUMAH RAT , M.** - " Méthodes Numériques Appliquées "   
Seconde Edition Office des publications universitaires 10/91
- [12] - **PECASTAINGS , F. et SEVIN , J.** - " Chemin vers l'analyse " tome I et II   
Edition Vuibert 1985

*ANNEXE A*

**INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME  
DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION  
DE SOURCES OU DE VORTEX**

## A.I INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION UNIFORME DE SOURCE

Pour déterminer l'influence d'un panneau chargé uniformément de sources sur lui-même, considérons un volume de contrôle au voisinage de la source de longueur  $\Delta x$  et de hauteur infinitésimale (*fig.A.1*) et faisons un bilan.



*figure A.1*

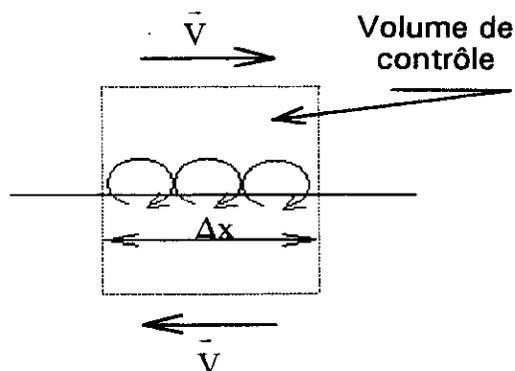
Le flux total accumulé à travers le volume de contrôle est égal au flux sortant, soit :

$$\begin{aligned} k_i \Delta x &= V \Delta x + V \Delta x \\ \Rightarrow k_i &= 2V \\ \Rightarrow V &= \frac{k_i}{2} \end{aligned}$$

La nature radiale d'une source entraîne que le flux l'est aussi, l'influence d'un panneau sur lui-même sera donc nulle suivant sa tangente et égale à  $\frac{k_i}{2}$  suivant sa normale.

## A.II.1 INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION UNIFORME DE VORTEX

De la même façon que précédemment, nous établissons un bilan pour une distribution uniforme de vortex (*fig.A.2*).



*figure A.2*

$$\begin{aligned} \gamma_i \Delta x &= 2V \Delta x \\ \Rightarrow V &= \frac{\gamma_i}{2} \end{aligned}$$

A l'inverse d'une source, l'influence d'un panneau vortex sur lui-même sera nulle suivant sa normale et égale à  $\frac{\gamma_i}{2}$  suivant sa tangente.

### A.II.2 INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION LINEAIRE DE VORTEX

$$W(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j \quad \text{et} \quad H(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui-même ( $i = j$ ) se traduit en posant  $\theta_{ij} = \delta_i$ , les intégrales W et H deviendront alors :

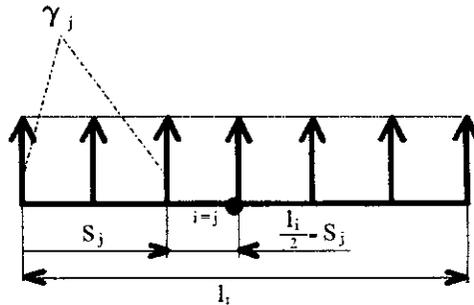


figure A.1

$$W(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{\cos(0)}{r_{ii}} dS_j \quad \text{et} \quad H(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{S_j \cos(0)}{r_{ii}} dS_j$$

$$\Rightarrow \quad W(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{r_{ii}} \quad \text{et} \quad H(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{S_j}{r_{ii}} dS_j$$

or d'après la figure ( A.1 ), on a aussi :

$$r_{ii} = \sqrt{(x(i) - Xs(i-1) - S_j \cos \delta_i)^2 + (y(i) - Ys(i-1) - S_j \sin \delta_i)^2}$$

$$\Rightarrow r_{ii} = \left| \frac{l_i}{2} - S_j \right|$$

$$\text{d'où :} \quad W(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{\left| \frac{l_i}{2} - S_j \right|} \quad \text{et} \quad H(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{S_j}{\left| \frac{l_i}{2} - S_j \right|} dS_j$$

• Calcul de l'intégrale W

$$W(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{\left| \frac{l_i}{2} - S_j \right|} = \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{\left| \frac{l_i}{2} - S_j \right|} = \left( -\ln \left| \frac{l_i}{2} - S_j \right| \right) \Big|_0^{l_i}$$

Finalement :

$$W(i, i) = 0$$

• Calcul de l'intégrale H

$$H(i,i) = \int_0^{l_i} \frac{S_j}{\left| \frac{l_i}{2} - S_j \right|} dS_j = - \int_0^{l_i} \frac{\frac{l_i}{2} - S_j + \frac{l_i}{2}}{\left| \frac{l_i}{2} - S_j \right|} dS_j = - \int_0^{l_i} dS_j + \frac{l_i}{2} \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{\left| \frac{l_i}{2} - S_j \right|}$$

$$H(i,i) = - \int_0^{l_i} dS_j + \frac{l_i}{2} W(i,i)$$

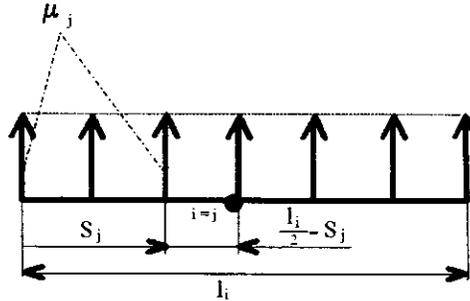
Finalement :

$$H(i,i) = -l_i$$

*ANNEXE B*

**INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME  
DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION DE DOUBLETS**

**B.I INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS  
LE CAS D'UNE DISTRIBUTION UNIFORME DE DOUBLETES**



*figure B.I.1*

**B.I.1 INFLUENCE DANS L'EXPRESSION DE LA VITESSE NORMALE**

$$L(i, j) = \int_0^{l_i} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui-même ( $i = j$ ) se traduit en posant  $\theta_{ij} = \delta_i$ , soit :

$$L(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{\sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (I.1)$$

Pour des raisons de commodités pour le calcul de cette intégrale, mettons-la sous la forme suivante :

$$L(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4)^2} dS_j \quad (I.2)$$

D'après la figure ( III.B.1 ), il apparaît que :

$$r_{ii} = \frac{l_i}{2} - S_j \Rightarrow r_{ii}^2 = \left(\frac{l_i}{2} - S_j\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{l_i}{2} - S_j\right)^2 = (S_j - I_3)^2 + I_4 - I_3^2 \quad (I.3)$$

La condition ( I.3 ) n'est vérifiée que pour (  $I_4 - I_3^2 = 0$  ), cette condition supplémentaire limitera le calcul de L uniquement au cas :  $I_4 - I_3^2 = 0$

• Calculs de l'intégrale L

$$\begin{aligned} L(i, i) &= \int_0^{l_i} \frac{\sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j = \int_0^{l_i} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j - I_3)^3} dS_j = I_1 \int_0^{l_i} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j + I_2 \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} \\ &= I_1 \int_0^{l_i} \frac{S_j - I_3}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (I_2 + I_1 I_3) \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} = I_1 \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2} + (I_2 + I_1 I_3) \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3} \end{aligned}$$

$$L(i,i) = I_1 \left( -\frac{1}{(S_j - I_3)} \right) \Big|_0^{l_i} + (I_2 + I_1 I_3) \left( -\frac{1}{2(S_j - I_3)^2} \right) \Big|_0^{l_i}$$

Finalemment :

$$L(i,i) = -I_1 \left( \frac{1}{(l_j - I_3)} + \frac{1}{I_3} \right) - \frac{I_2 + I_1 I_3}{2} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \quad (I.4)$$

### • DETERMINATION DES COEFFICIENTS $I_1$ , $I_2$ et $I_3$

La détermination des coefficients se fait en identifiant les équations ( I.1 ) et ( I.2 ) avec  $I_3 = I_4$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\sin \delta_j \\ I_2 &= y(i) - Y_s(j-1) \\ I_3 &= \frac{l_i}{2} \end{aligned} \quad (I.5)$$

### B.I.2 INFLUENCE DANS L'EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE

$$H(i,j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui-même se traduit en posant  $\theta_{ij} = \delta_i$ , soit :

$$H(i,i) = \int_0^{l_i} \frac{\cos \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (I.6)$$

Pour des raisons de commodités pour le calcul de cette intégrale, mettons-la sous la forme suivante :

$$H(i,i) = \int_0^{l_i} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4^2)^{\frac{3}{2}}} dS_j \quad (I.7)$$

On remarque que l'expression de H donnée par l'équation ( I.7 ) est identique à l'expression de L donnée par l'équation ( I.2 ), le calcul sera alors identique à la différence des coefficients qu'il faudra redéfinir en identifiant les équations ( I.6 ) et ( I.7 )

$$H(i,i) = -I_1 \left( \frac{1}{(l_j - I_3)} + \frac{1}{I_3} \right) - \frac{I_2 + I_1 I_3}{2} \left( \frac{1}{(l_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cos \delta_j \\ I_2 &= x(i) - X_s(j-1) \\ I_3 &= \frac{l_i}{2} \end{aligned} \quad (I.8)$$

## B.II INFLUENCE D'UN PANNEAU SUR LUI MEME DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION LINEAIRE DE DOUBLET

Il est important de rappeler que la condition ( I.3 ) est aussi à imposer pour ce type de distribution.

### B.II.1 INFLUENCE DANS L'EXPRESSION DE LA VITESSE NORMALE

$$M(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{\sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad \text{et} \quad D(i, j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \sin(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui-même (  $i = j$  ) se traduit en posant  $\theta_{ij} = \delta_i$ , soit :

$$M(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{\sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (II.1)$$

$$D(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{S_j \sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (II.2)$$

On remarque que l'intégrale M n'est autre que l'intégrale L calculée précédemment, calculons alors uniquement D.

L'intégrale D se met sous la forme :

$$D(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{(I_1 S_j + I_2) S_j}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4)^{3/2}} dS_j \quad (II.3)$$

avec :  $I_4 - I_3^2 = 0$

$$D(i, i) = \int_0^{l_i} \frac{S_j \sin \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j = \int_0^{l_i} \frac{(I_1 S_j + I_2) S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j = I_1 \int_0^{l_i} \frac{S_j^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j + I_2 \int_0^{l_i} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j$$

$$= \frac{I_1}{3} \int_0^{l_i} \frac{3S_j^2 - 6I_3 S_j + 3I_3^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_i} \frac{S_j}{(S_j - I_3)^3} dS_j - I_1 I_3^2 \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3}$$

$$D(i, i) = \frac{I_1}{3} \int_0^{l_i} \frac{3S_j^2 - 6I_3 S_j + 3I_3^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_i} \frac{S_j - I_3}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (2I_1 I_3^2 + I_2 I_3 - I_1 I_3^2) \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3}$$

$$= \frac{I_1}{3} \int_0^{l_i} \frac{3S_j^2 - 6I_3 S_j + 3I_3^2}{(S_j - I_3)^3} dS_j + (2I_1 I_3 + I_2) \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^2} + (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \int_0^{l_i} \frac{dS_j}{(S_j - I_3)^3}$$

$$D(i, i) = \frac{I_1}{3} \left( \ln(S_j - I_3)^3 \Big|_0^{l_i} \right) + (2I_1 I_3 + I_2) \left( -\frac{1}{S_j - I_3} \Big|_0^{l_i} \right) + (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left( -\frac{1}{2(S_j - I_3)^2} \Big|_0^{l_i} \right)$$

Finalemment :

$$D(i,i) = \frac{I_1}{3} \ln \left( \frac{(I_j - I_3)^3}{|I_3^3|} \right) - (2I_1 I_3 + I_2) \left( \frac{1}{I_j - I_3} + \frac{1}{I_3} \right) - \frac{1}{2} (I_1 I_3^2 + I_2 I_3) \left( \frac{1}{(I_j - I_3)^2} - \frac{1}{I_3^2} \right) \quad (II.4)$$

Les coefficients ont déjà été déterminés et sont donnés par le système ( I.5 ).

### B.II.2 INFLUENCE DANS L'EXPRESSION DE LA VITESSE TANGENTIELLE

$$J(i,j) = \int_0^{l_j} \frac{\cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j \quad \text{et} \quad K(i,j) = \int_0^{l_j} \frac{S_j \cos(2\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}^2} dS_j$$

L'influence du panneau sur lui-même se traduit en posant  $\theta_{ij} = \delta_i$ , soit :

$$J(i,i) = \int_0^{l_i} \frac{\cos \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (II.5)$$

$$K(i,i) = \int_0^{l_i} \frac{S_j \cos \theta_{ii}}{r_{ii}^2} dS_j \quad (II.6)$$

Ces intégrales peuvent s'écrire sous la forme :

$$J(i,i) = \int_0^{l_i} \frac{I_1 S_j + I_2}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4)^{\frac{3}{2}}} dS_j$$

$$K(i,i) = \int_0^{l_i} \frac{(I_1 S_j + I_2) S_j}{(S_j^2 - 2I_3 S_j + I_4)^{\frac{3}{2}}} dS_j$$

Le calcul de ces intégrales est identique à celui des intégrales M et D, il faudra uniquement définir les coefficients qui sont quant à eux déjà établis et donnés par le système ( I.8 ).

*ANNEXE C*

**EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES CARACTERISTIQUES  
D'UN ECOULEMENT PAR LA  
METHODE DE SUPERPOSITION**

## C.I CARACTERISTIQUES D'ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE

L'écoulement autour d'un cylindre fixe de section circulaire est obtenue en superposant deux écoulements :

- L'écoulement uniforme (parallèle homogène ).
- Un dipôle d'intensité  $\mu$ .

la fonction de courant peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\psi = U_{\infty} r \sin \theta - \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r}$$

En utilisant l'expression de la ligne de courant singulière, on pourra obtenir le rayon R du cylindre, en effet :

$$\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_{\infty} \sin \theta}{r} \left( r^2 - \frac{\mu}{2\pi U_{\infty}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \left( \frac{\mu}{2\pi U_{\infty}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La fonction de courant s'écrira alors :

$$\psi = U_{\infty} \sin \theta \left( r - \frac{R^2}{r} \right)$$

On peut donc déduire les expressions des vitesses et du potentiel de vitesses :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_{\infty} \cos \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$V_{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = U_{\infty} \sin \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$\phi = U_{\infty} \cos \theta \left( r + \frac{R^2}{r} \right)$$

## C.II CARACTERISTIQUES D'ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE TOURNANT

Pour un cylindre tournant, une superposition supplémentaire est nécessaire pour caractériser la circulation et qui ne peut être qu'un fil tourbillonnaire ( vortex ) de circulation  $\Gamma$ .

Les expressions des vitesses, du potentiel de vitesses et de la fonction de courant deviennent alors :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_{\infty} \cos \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$V_{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = U_{\infty} \sin \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$\phi = U_{\infty} \cos \theta \left( r + \frac{R^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = U_{\infty} \sin \theta \left( r - \frac{R^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

A la surface du cylindre  $r$  est égale à  $R$ , on peut en déduire :

$$V_r = 0$$

$$V_{\theta} = -2U_{\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R U_{\infty}}$$

Le coefficient de pression peut donc s'écrire :

$$C_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = 1 - \left( \frac{V_{\theta}}{U_{\infty}} \right)^2 \Rightarrow C_p = 1 - \left( 2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R U_{\infty}} \right)^2$$

En conclusion :

- Pour un cylindre fixe :

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

- Pour un cylindre tournant :

$$C_p = 1 - \left( 2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R U_{\infty}} \right)^2$$