

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

10/90

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

lea

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**OPTIMISATION DES
PROFILS D'ARONDIS DES
PIECES PAR ELEMENTS
FINIS.**

Proposé par :
Mr. BELBLIDIA

Etudié par:
Mr. HADID M.

Dirigé par:
Mr. BELBLIDIA

PROMOTION : Juin 1990

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**OPTIMISATION DES
PROFILS D'ARONDIS DES
PIECES PAR ELEMENTS
FINIS.**

Proposé par :
Mr. BELBLIDIA

Etudié par:
Mr. HADID

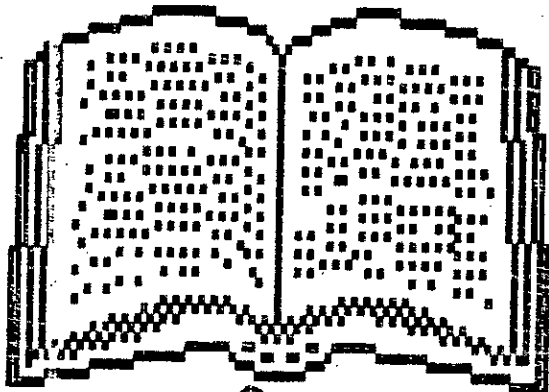
Dirigé par:
Mr. BELBLIDIA

PROMOTION : Juin 1990

**POUR L'OBTENTION
D'UN DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT**

SUJET

**OPTIMISATION DES PROFILS D'ARONDIS
DES PIECES PAR ELEMENTS FINIS**



اهداء

الى ابي الذي كان لي مثالا
قدس الله روحه وعفوه

الى ابي
الى من قدم حياته كي يخلص
الى من احببت من اهلواي
الى كل واحد

بإنتهاء هذا العمل أقدم شكري الى

- الموجه السيد بليليدية الذي أغانني بتوجيهاته

المنهجية

- الى كل أساتذتي

- الى كل من كلل له الفصل علي من قريب أوبعيد

لتكون هذه الثمرة

وزارة التعليم العالي
المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
دائرة الهندسة الميكانيكية
الموجه: السيد بلعيد في
الطالب المهندس محمد حديد

الموضوع: البحث عن أنجع أشكال التقويس لقطعة
باستعمال العناصر المحدودة.

الملاحظ: في هذا البحث سوف نحاول إيجاد أنجع
شكل لقطعة عند جانبها الملتصق باستخدام
طريقة العناصر المحدودة.

Sujet: Optimisation des profils d'arandis
d'une pièce par la méthode de
éléments finis.

Résumé: Dans cette étude nous cherchons
à optimiser la forme des arandis
d'une plaque au niveau de
l'encastrement par l'utilisation de
la méthode des éléments finis.

SOMMAIRE

Introduction

CHAPITRE I

- I-1 Elasticité plane
- I-2 Concentration de contraintes

CHAPITRE II

Exposition générale des éléments finis

- II-1 Données importantes.
- II-2 Méthodes d'approximation
- II-3 Concept et formulation d'éléments finis
- II-4 Représentation du comportement des éléments
- II-5 Convergence et précision de la M.E.F

CHAPITRE III

L'élément triangulaire et sa formulation

- III-1 L'élément triangulaire
- III-2 Formulation de l'élément

CHAPITRE IV

Application

Conclusion générale

Introduction

Actuellement la méthode des éléments finis est l'une des méthodes à part entière de plus en plus dans le domaine de calcul pour l'ingénieur ; Ses diverses applications sont justifiées par le fait de sa fiabilité prouvée.

En domaine structural et spécialement en élasticité plane, la méthode des éléments finis a connu sa première application avec succès [ref. 4]

Notre étude portera sur l'utilisation de la M.E.F pour l'étude du problème de l'élasticité plane, il s'agit d'une plaque plane chargée à une extrémité et encastree à l'autre. On remarque qu'il y a au niveau de l'encastrement une zone dangereuse où les contraintes sont élevées dû à la variation brusque de section. C'est le phénomène de concentration de contraintes.

L'étude aura pour but la mise en évidence de ce phénomène et nous allons essayer de remédier cela par un apport d'arrondis au niveau de l'encastrement, ces arrondis peuvent avoir plusieurs formes. Cherchons donc la forme optimale qui garantira un état de contrainte admissible.

L'enchaînement du travail est comme suit.

On commence par le chapitre I dans le quel on fait appel à la théorie d'élasticité et à la notion de concentration de contraintes.

Puis dans le deuxième chapitre on verra une exposition générale de la M.E.F., on insistera surtout sur les méthodes d'approximations et leur application pour la M.E.F., en passant par les différentes formulations d'élément fini et les lois de représentation de comportement des éléments ; On finira dans cette partie par la convergence et la précision de la M.E.F.

Au chapitre III on verra en détail l'élément triangulaire appelé aussi élément à déformation uniforme cet élément sera utilisé par notre logiciel pour les différents calculs.

On finira par la partie application dans la quelle on exposera les résultats obtenus. Puis une conclusion générale.

CHAPITRE I

Rappels

I.1 Theorie de l'élasticité :

La théorie de l'élasticité consiste à formuler trois types d'équations à savoir :

- Les équations différentielles d'équilibre
- Les équations différentielles de déformations-déplacements
- Les lois intrinsèques du matériau

Le matériau est supposé isotrope à l'état neutre

On adopte la notation suivante

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes normales

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: Contraintes tangentielles

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: Déformations suivant les axes

$\delta_{xy}, \delta_{xz}, \delta_{yz}$: Déformations tangentielles

E : module de Young

ν : Coefficient de Poisson

X, Y, Z : forces de volume

I-1-1 Les equations

a) Les equations differentielles d'equilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad \text{I-1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

b) Les equations differentielles deformations-deplacements
valable uniquement en deplacement faible

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{I-2}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

c) Les lois intrinseques du materiau

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \quad \text{I-3}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

I.1.2 Elasticité plane

Les problèmes d'élasticité plane concernent les structures continues chargées dans leur plans. Les problèmes peuvent être séparés en deux classes distinctes.

- Les problèmes en contraintes planes

Ces problèmes permettent d'étudier les structures continues (plaques, coques ...) qui ont une dimension suivant (z) très petite par rapport à ses dimensions dans le plan, ce qui fait que, les contraintes normales au plan de la structure seront négligées.

- Les problèmes en déformations planes

Dans ces problèmes, on suppose que la déformation normale au plan du chargement est nulle.

- Dans cette étude on ne verra que le cas de contraintes planes.

I.2 Concentration de contraintes :

Parmi les problèmes qui se posent en mécanique des solides et structures est le problème de concentration de contraintes ; le phénomène est à l'origine de plusieurs défaillances dans les matériaux (fissuration, fatigue, rupture, ...).

Ses causes sont nombreuses (changement de géométrie , trous de perforation , impuretés dans le matériau , changement des caractéristiques du matériau)

On va se contenter de voir un seul cas c'est l'effet de la variation de section.

CHAPITRE II

Exposition générale de la méthode des éléments finis

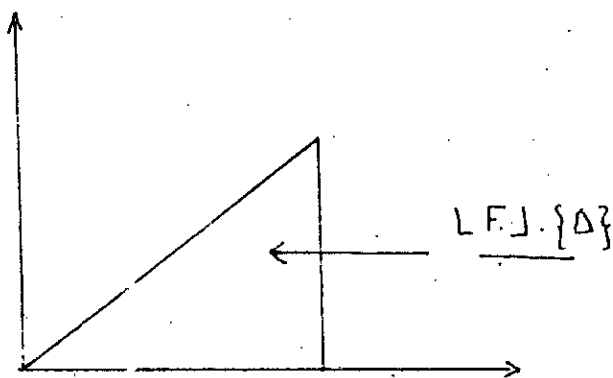
II-1 Données importantes

II-1.1 Travail et énergie

Le travail d'une force est égal au produit de cette force par le déplacement de son point d'application dans la direction de la force [fig II-1]

$$W = \frac{1}{2} [\Delta] \cdot \{ F \} = \frac{1}{2} [F] \cdot \{ \Delta \} \quad (\text{II-1})$$

Fig II-1 Travail d'une force appliqué d'une manière progressive en élasticité plane.



II-1-2 Théorème de Castigliano :

Soit une structure soumise à un système de forces ponctuelles $(F_1, \dots, F_i, \dots, F_N)$

Soit q_i les déplacements dans la direction d'application de la force au nœud M_i

Si les forces sont potentielles

Le théorème I Donne : $F_i = \frac{\partial U(q_i)}{\partial q_i}$ (II-2)

Le théorème II Donne : $q_i = \frac{\partial U_c(F_i)}{\partial F_i}$ (II-3)

U : Energie de déformation

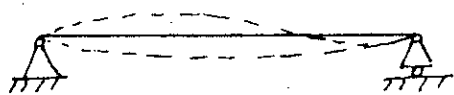
U_c : Energie de déformation complémentaire

II-1-3 Principe des travaux virtuels :

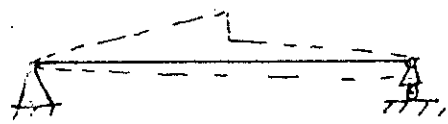
Énoncé du principe :

Si on a un corps en équilibre soumis à des forces extérieures et des forces de volumes. On lui impose un déplacement "fictif" dont le champ peut être décrit par δu , δv et δw ; le déplacement est cinématiquement admissible. [fig II-2]

fig II-2



a, Déplacement admissible



b, déplacement non admissible

Le principe des déplacements virtuels stipule que dans un déplacement virtuel $\delta \Delta$, la somme de la variation de potentiel δV des forces appliquées et de la variation δU de l'énergie de déformation interne est égale à zéro

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (\text{II-4})$$

II.1-4 Matrice de rigidité et de flexibilité d'une Structure.

Matrice de rigidité.

On appelle matrice de rigidité d'une structure, la matrice K permettant d'exprimer l'énergie de déformation sous forme quadratique des déplacements.

$$U = \frac{1}{2} q^T \cdot K \cdot q \quad (\text{II.5})$$

On applique Castigliano

$$F = K \cdot q \quad (\text{II.6})$$

Matrice de flexibilité (ou souplesse)

On appelle matrice de flexibilité d'une structure, la matrice permettant d'exprimer l'énergie de déformation complémentaire sous une forme quadratique des forces.

$$U_c = \frac{1}{2} F^T \cdot \varphi \cdot F \quad (\text{II.7})$$

Par application du second théorème de Castigliano, il vient

$$\nabla_F U_c = q = \varphi \cdot F \quad (\text{II.8})$$

Pour des structures en appui isostatique on a :

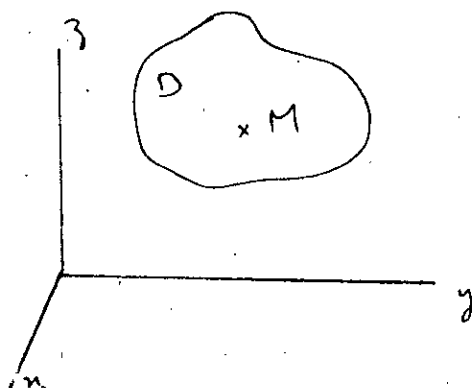
$$\varphi = K^{-1} \quad (\text{II.9})$$

Dans la méthode des éléments finis on va voir qu'il y a deux principales méthodes de résolution du problème

- Méthode déplacements (rigidité)
- Méthode forces (souplesse ou flexibilité)

II-2 Méthodes d'approximations [ref. 2]

fig II-3



Le problème général dans l'approximation consiste à approximer une fonction \tilde{u} par u dans un domaine D , de tel sorte que u satisfait au mieux les lois physiques aux quelles elle obéit. [fig II-3]

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \phi_i(M) \quad \forall M(x, y, z) \quad (\text{II-10})$$

$\phi_i(M)$: des fonctions choisies a "priori"

a_i : Sont appelées coordonnées généralisées

En notation matricielle :

$$\tilde{u} = [\phi]^T \cdot [a] \quad (\text{II-11})$$

Les méthodes d'approximations peuvent se classer en deux catégories principales, suivant la formulation du problème.

- Méthodes universelles (en utilisant les équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites appropriées) dans une formulation locale du problème.

- Méthodes variationnelles (énergétiques) utilisables dans le cas d'une formulation variationnelle du problème.

II-2-1 Méthodes universelles.

On ne va voir qu'une seule de ses méthodes

II-2-1-1 Méthode des résidus pondérés [ref 1].

L'une des méthodes universelles est celle des résidus pondérés qui mène au critère de Galerkin. La méthode suppose qu'on a choisi une fonction d'approximation qui ne satisfait pas exactement l'équation différentielle du phénomène et sa substitution dans l'équation fait apparaître un résidu noté R .

On a l'équation différentielle suivante

$$D(\Delta) = 0 \quad (\text{II-12})$$

D : l'opérateur différentielle.

Δ : la fonction du phénomène.

On approche Δ par \bar{u}

$$D(\bar{u}) = R \neq 0 \quad (\text{II-13})$$

Pour avoir de meilleurs résultats on s'efforce de minimiser l'intégrale des résidus portant sur le domaine concerné.

$$\int_{\text{vol}} R \cdot d(\text{vol}) = \text{minimum} \quad (\text{II-14})$$

Si de plus on associe des fonctions de pondération à ce résidu de telle sorte qu'on forme une nouvelle fonction produit des deux de manière à obtenir un minimum nul.

Notant ϕ la fonction de pondération.

$$\int_{\text{vol}} R \cdot \phi \cdot d(\text{vol}) = 0 \quad (\text{II-15})$$

Cette dernière équation résume la méthode des résidus.

II-2-1-2 Critère de Galerkin : [ref. 1]

Il s'agit d'approcher Δ par $\bar{\Delta}$, où $\bar{\Delta}$ est une combinaison de fonctions de déformées N_i ayant pour coefficient les déplacements des degrés de liberté correspondants.

N_i étant les polynômes de Lagrange.

On substituant $\bar{\Delta}$ dans l'équation.

$$D(\bar{\Delta}) = R \neq 0$$

Les fonctions de déformées N_i joueront le rôle des fonctions de pondérations.

On aboutira à n équations :

$$\int_{\text{vol}} N_i \cdot D(\bar{\Delta}) \cdot d\text{vol} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{II-16})$$

On représente le critère de Galerkin spécialement car il donne des équations identiques à celles obtenues à l'aide des méthodes variationnelles comme on va le voir.

II.2.2 Méthodes variationnelles [ref. 2]

Dans ces problèmes on cherche un extremum d'une fonctionnelle.

II.2.2.1 Méthode de Ritz.

Une des méthodes variationnelles est celle de Ritz.

Soit $V(u)$ l'énergie potentielle totale

$$V(u) = \int_V F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right) dV \quad (\text{II-17})$$

La solution exacte est :

$$\delta V(u) = 0 \quad (\text{II-18})$$

et cela quelque soit S_u cinématiquement admissible

F : est la fonctionnelle

m : l'ordre de la fonctionnelle

La méthode de Ritz cherche la "meilleur" approximation

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot \phi_i(M) \quad (\text{II-19})$$

ϕ_i : Fonctions de base

continue et satisfait les conditions aux limites

La meilleure approximation qui rend extrémale l'énergie potentielle totale $\tilde{V}(\tilde{u}) = \tilde{V}(a_i)$ est caractérisé par les N conditions de stationnarité de \tilde{V} par rapport à a_i soient :

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial a_i} = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (\text{II-20})$$

ou matriciellement :

$$\nabla_a \tilde{V} = 0$$

si l'énergie potentielle totale est sous forme quadratique et que les coordonnées généralisées soient les déplacements aux noeuds

Alors :

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \cdot q^T \cdot K \cdot q - q^T \cdot F$$

La condition de stationnarité :

$$\nabla_q \tilde{V} = K \cdot q - F = 0$$

d'où on tire la valeur minimale de l'énergie potentielle totale

$$\tilde{V}^* = -\frac{1}{2} \cdot q^T \cdot F \cdot q$$

II-2.2.2 Condition de convergence de la méthode de Ritz.

Il faut vérifier deux conditions pour que la méthode converge

a) Condition de complétude.

Il faut que les fonctions de base ϕ_i constituent une base complète de manière à pouvoir évaluer correctement l'énergie potentielle totale et spécialement l'énergie totale dans le cas de déplacement d'ensemble de corps rigide. C'est pour cela s'il y a lieu de tronquer elle doit se faire toujours en excluant les termes d'ordre supérieurs.

b) Condition d'admissibilité.

1) Satisfaire les conditions de continuité du problème qui dépend essentiellement de l'ordre m de la fonctionnelle (jusqu'à l'ordre $m-1$)

2) Satisfaire les "conditions au limites rigides" du problème variationnelle. c. a. d. les conditions aux limites cinématiques.

II.3 Concept et formulation d'élément fini

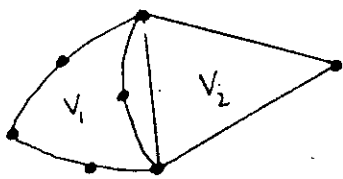
II.3-1 Concept

Le principe d'élément fini consiste à subdiviser un milieu dit "continu" formé d'une infinité de degrés de liberté, à un milieu dit "discret" formé par un nombre fini d'éléments définis par un certain nombre de variables ou de degrés de liberté.

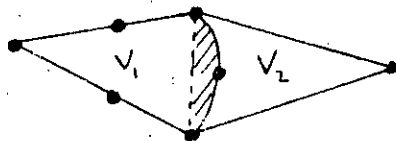
- Le passage du continu au discret nécessite un découpage fini du système.

- Le découpage aboutissant à des éléments dit finis, indépendants reliés entre eux par des points nodaux (nœuds); Toutefois on ne doit pas tolérer les recouvrements ni les vides le long des interfaces inter-éléments [fig II-4]

fig II-4



Vide inadmissible entre éléments



recouvrement inadmissible

On peut considérer alors que la M.E.F. est méthode de Ritz par sous-domaines ou "par morceau" car c'est pas toujours évident de trouver des fonctions de base pour des géométries complexes.

II-3-2 Différents formulations éléments finis.

Il faut signaler qu'il y a plusieurs sortes de formulations possibles d'éléments finis en mécanique des structures.

1°/ Formulation déplacements

Dans laquelle on a un champ de déplacement supposé, le principe variationnel étant celui de l'énergie potentielle totale.

2°/ Formulation contraintes (ou équilibre)

Le critère variationnel utilisé est celui de l'énergie potentielle complémentaire.

3°/ Les formulations hybrides

(Par exemple la formulation hybride de type contrainte.) Dans l'élément, on a un champ de contrainte supposé et en équilibre, et sur les frontières, on a des déplacements.

4° Formulations à plusieurs champs
ou formulation Mixtes.

Dans ce cas les champs supposés sont indépendants
ex: déplacements et contraintes.

Remarque

Pour empêcher toute confusion il faut qu'il y ait distinction entre formulation des éléments qui peut être par exemple en contrainte ou en déplacement et la résolution du problème par la méthode déplacement (rigidité) ou par force (souplesse).

II-4 Représentation du comportement des éléments.

Dans cette partie on va voir le problème de choix des champs ou fonctions de comportement.

II-4-1 Représentation des fonctions de comportements

II-4-1-1 Les Polynômes.

C'est la description la plus simple d'un champ de comportement d'un élément.

$$\Delta = \sum_{i=1}^n x^j \cdot y^k \cdot a_i \quad (\text{II-21})$$

$$\text{ou } \Delta = [p(m)] \cdot \{a\} \quad (\text{II-22})$$

- a_i : Coefficients généralisés
 Δ : le champ de comportement
 n : nombre total de termes du polynome
 j et k : Sont des exposants liés par :

$$i = \frac{1}{2} (j+k)(j+k-1) + k + 1$$

Le polynome sera dit complet jusqu'à un certain ordre s'il contient tous les termes de cet ordre et tous les termes d'ordre inférieur.

Il est commode d'utiliser le triangle de pascal pour disposer les termes de la série.

| | | | | | | |
|--|--------------|----------------|------------------|---------------|--------------|------|
| | | | a_1 | | | I |
| | | $a_2 x$ | $a_3 y$ | | | II |
| | $a_4 x^2$ | $a_5 xy$ | $a_6 y^2$ | | | III |
| | $a_7 x^3$ | $a_8 x^2 y$ | $a_9 xy^2$ | $a_{10} y^3$ | | III |
| | $a_{11} x^4$ | $a_{12} x^3 y$ | $a_{13} x^2 y^2$ | $a_{14} xy^3$ | $a_{15} y^4$ | IIII |

Les polynomes sont comme suit

- | | |
|------|-------------|
| I | Constant |
| II | lineaire |
| III | Quadratique |
| IIII | Cubique |
| IIII | Quartique |

Dans la plus part des cas le nombre de variables généralisées est égal au nombre de degrés de liberté au nœud. Il en résulte autant d'équations que de degrés de liberté donc :

$$\{\Delta\} = [B] \cdot \{a\} \quad (\text{II-23})$$

On exprime les déplacements généralisés en fonction des degrés de liberté aux nœuds comme suit :

$$\{a\} = [B]^{-1} \cdot \{\Delta\}$$

On aura pour le champ de comportement

$$\Delta = [P(m)] \cdot [B]^{-1} \cdot \{\Delta\} = [N] \cdot \{\Delta\} \quad (\text{II-24})$$

II-4-1-2 Conditions à remplir par les fonctions représentant le comportement des éléments.

C'est les mêmes conditions qu'on a vu dans la présentation de la méthode de Ritz.

II-4-2 Construction directe des fonctions de déformée par interpolation.

La forme polynomiale permet de déterminer le caractère complet d'une fonction et son respect de certaines conditions.

Mais parfois il est préférable d'exprimer le champ directement en fonction des degrés de liberté aux nœuds : On peut y parvenir par le procédé d'interpolation

II-4-2-1 Interpolation de Lagrange.

Dans cette interpolation on détermine les coefficients de la représentation polynomiale d'une fonction à partir des valeurs de cette fonction en certains points

Si on a $(m+1)$ points repérés par x_1, \dots, x_{m+1} et on veut construire une fonction Δ qui passe par les valeurs $\Delta_1, \dots, \Delta_{m+1}$ aux points choisis

En considérant un polynôme de degré m :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m+1} N_i \cdot \Delta_i = [N] \cdot \{\Delta\} \quad \text{II-25}$$

Les termes N_i ont la propriété

$$\begin{aligned} N_i &= 1 & \text{à} & \Delta_i \\ N_i &= 0 & \text{à} & \Delta_j \quad j \neq i \end{aligned}$$

Pour le cas unidimensionnel on a pour N_i la formule de Lagrange

$$N_i = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{m+1} (x - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{m+1} (x_i - x_j)} \quad i \neq j$$

II-4-2.2 Interpolation de Hermite.

Dans certains problèmes on a parfois besoin de représenter la fonction et ses dérivées. Comme degrés de liberté, on a recouru à l'interpolation de Hermite.

On veut construire une fonction Δ qui satisfait à des conditions sur des valeurs en certains points, et sur des dérivées (jusqu'à l'ordre $m-1$)

Cette fonction sera sous la forme.

$$\Delta = N_1 \cdot \Delta_1 + N_2 \cdot \Delta_1' + \dots + N_m \cdot \Delta_1^{(m-1)} + N_{m+1} \cdot \Delta_2 + \dots + N_{2m} \cdot \Delta_2^{(m-1)} \quad (\text{II-26})$$

L'indice sur $\Delta^{(i)}$ est l'ordre de dérivation.

Il faut $2m$ conditions pour construire chacune de ses fonctions de forme N_i puisque chacune de ses fonctions (ou ses dérivées) est évaluée au degré de liberté associé à N_i et sera nulle pour tous les $2m-1$ degrés de liberté restant.

II-5 Convergence de la méthode E.F et précision

II-5-1 Convergence de la méthode des éléments finis

Les conditions de convergence de la M.E.F se déduisent de celles de la méthode de Ritz.

Donc il faut que les éléments finis du type déplacement satisfassent les conditions de ~~admissibili-~~ admissibilité et de complétude présentées précédemment.

II.5.2 Precision et erreur sur la discretisation. [ref. 5]

Dans la formulation par déplacement aussi fin qu'il soit le maillage on ne peut avoir la solution "exacte".

L'énergie potentielle totale obtenue par discretisation converge vers l'énergie potentielle totale réelle du système par le haut. Car le corps réel a un nombre de degrés de liberté infini tandis que le corps discrétisé en a un nombre fini.

Donc nous avons un corps plus rigide qu'il ne l'est réellement, d'ailleurs on a toujours des erreurs sur le résultat obtenu.

Pour la détermination de l'erreur on a le corollaire suivant :

$$\|e\| \leq C \cdot h^{k+1-m} \|U_{ex}\| \quad (II.27)$$

où

C : coefficient indépendant de l'élément

h : taille de l'élément

k : degré du polynôme d'interpolation

m : Ordre de dérivées apparaissant dans l'expression de variables modales

Pour avoir une meilleure précision il faut :

- Diminuer la taille de l'élément (réduire h).
- Augmenter le degré du polynôme d'interpolation par:
 - a) L'augmentation du nombre de nœuds de l'élément (interpolation de Lagrange)
 - b) Augmenter le nombre de variables nodales pour chaque nœud en conservant le nombre de nœuds de l'élément (pour l'interpolation de Hermite.)

Après cette exposition de la M.E.F dans la partie qui suivra on utilisera l'élément triangulaire pour des raisons qu'on citera. La formulation de cette élément sera par déplacement.

CHAPITRE III

L'élément triangulaire et sa formulation

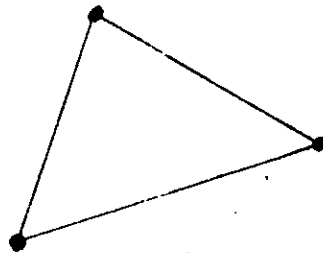
- Lorsque nous sommes devant un problème de contrainte plane en générale les éléments qui présentent un véritable intérêt sont les triangles et quadrilatères [ref. 1].

III - 1 L'élément triangulaire.

On utilisera l'élément triangulaire de base ne comportant que des degrés de liberté aux sommets [fig III - 1] est supposé en état de déformation uniforme.

fig III - 1

L'élément triangulaire
de base



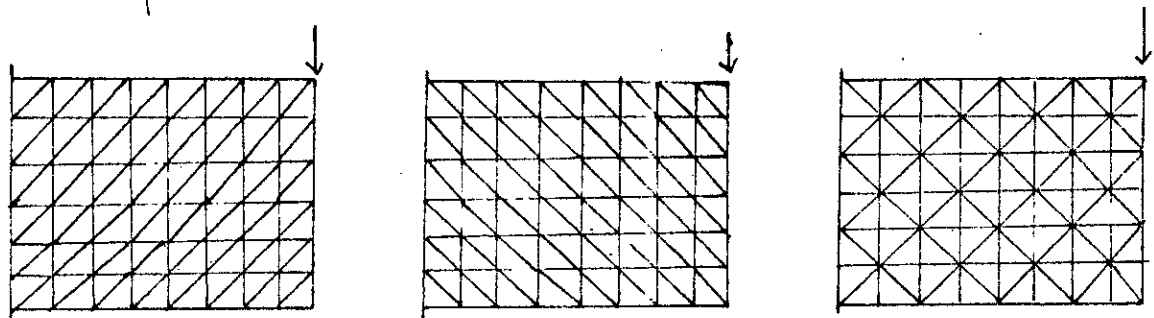
Pourquoi l'élément triangulaire?

- L'élément triangulaire de base représente des avantages qui justifient son utilisation.

C'est le seul élément qui définit un état de déformation uniforme ceci simplifie sa formulation.

Il peut représenter parfaitement des géométries complexes.

Néanmoins il pose un problème dans le choix du maillage. On est confronté au problème "Isotropie géométrique" [ref. 1]



a/

b/

c/

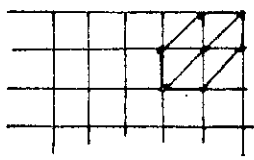
fig III - 2 influence du maillage sur la convergence

Ces trois cas de figure ont le même nombre d'éléments et le même nombre de nœuds [fig III - 2] mais donnent des résultats différents à cause du maillage.

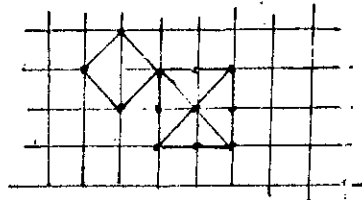
Pour conserver l'Isotropie géométrique il faut veiller à ce que les triangles formés des domaines rectangulaires; c'est pour cela que le cas c/ [fig III - 2] donne la meilleure solution.

Il faut signaler aussi que ce problème se pose moins avec le raffinement du maillage.

Des études théoriques ont été menées sur la rapidité de convergence de la solution de l'équation différentielle sur des maillages différents [ref. 1]

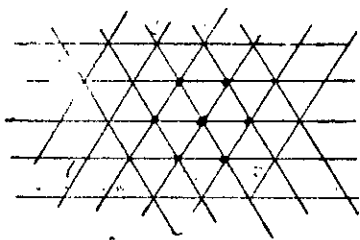


Motif A



Motif B

Motif C



Motif D

fig III-3 Maillage donnant lieu à l'étude de convergence

Les motifs A et D convergent rapidement avec A ayant une isotropie géométrique ; les motifs B et C convergent plus lentement

- Dans le maillage il faut éviter aussi la forme trop allongée des éléments, car l'erreur sur la solution est fonction du rapport des dimensions.

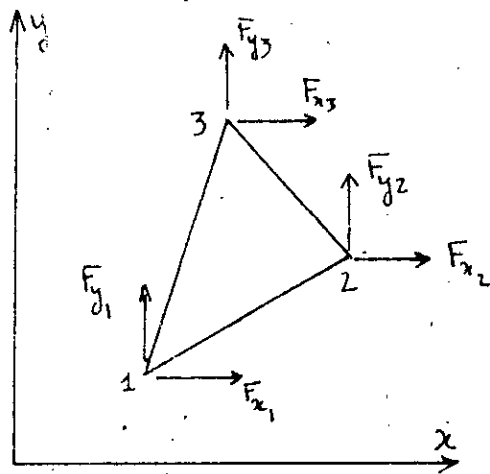
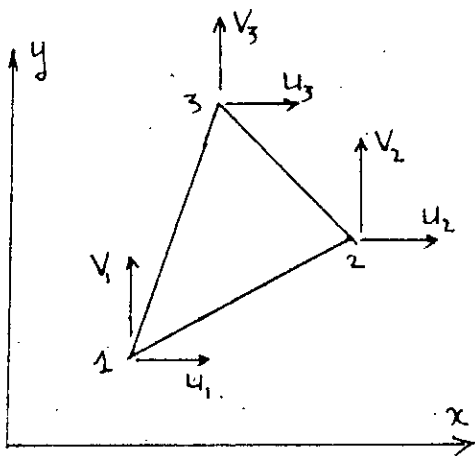
III - 2 Calcul De La Rigidite de l'element Triangulaire en elasticite plane [ref. 3]

- L'element utilise pour l'etude de l'elasticite plane, est l'element triangulaire a trois noeuds avec deux degres de liberte pour chaque noeuds a savoir deux translations u et v .

- L'elaboration de la matrice des raideurs de l'element utilise passe par sept etapes de base.

- Etape 1 :

Cette etape consiste en un choix du systeme de coordonnees convenables et la numerotation de l'element de reference.



- On adopte la notation suivante :

$\{s\}$: vecteur deplacement

$\{F\}$: vecteur force

Le vecteur déplacement en un point de coordonnées (x, y) .

$$\{S(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

- Le vecteur déplacements nodaux

$$\{S^e\} = \begin{Bmatrix} \{S_1\} \\ \{S_2\} \\ \{S_3\} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-1})$$

avec :

$$\{S_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

- Le vecteur forces nodales :

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-2})$$

avec :

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \end{Bmatrix}$$

notant que

$$\{F^e\} = [K^e] \{S^e\}$$

Dans notre cas $[K^e]$ est de l'ordre 6×6 .

Etape II :

Elle concerne le choix de la fonction de déplacement. Pour l'élasticité plane les déplacements peuvent être représentés par deux polynômes en x et y tels que :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x + \alpha_6 \cdot y \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

- Le nombre de degrés de liberté de l'élément de référence est six, de ce fait on a choisi deux polynômes à trois coefficients inconnus chacun.

- u et v étant linéaire, et puisque les déplacements des nœuds des éléments voisins sont identiques, donc la continuité inter-élément est assurée le long de l'interface.

$$\{ \delta(x, y) \} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \{ \alpha \} \quad (\text{III-4})$$

ou :

$$\{ \delta(x, y) \} = [\beta(x, y)] \cdot \{ \alpha \}$$

Etape III

On exprime les déplacements $\{ \delta(x, y) \}$ dans l'élément en fonction des déplacements des trois nœuds de l'élément.

$$\{ \delta_i \} = \{ \delta(x_i, y_i) \} = [\beta(x_i, y_i)] \cdot \{ \alpha \}$$

$$\{S^e\} = \begin{Bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \end{Bmatrix} \cdot \{\alpha\} \quad (\text{III-5})$$

$$\{S^e\} = [A] \cdot \{\alpha\}$$

Si on peut trouver l'inverse de $[A]$ on a :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{S^e\} \quad (\text{III-6})$$

De là on peut exprimer la fonction de déplacement en fonction des déplacements nodaux

$$\{S(x, y)\} = [f(x, y)] \cdot \{\alpha\}$$

$$\{S(x, y)\} = [f(x, y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{S^e\} \quad (\text{III-7})$$

On note :

$$[N(x, y)] = [f(x, y)] \cdot [A]^{-1} \quad (\text{III-8})$$

$N(x, y)$: est la fonction d'interpolation.

Les propriétés de la fonction d'interpolation :

$$1. \quad \begin{array}{ll} N_i(x, y) = 0 & \text{si } x \neq x_i \text{ ou } y \neq y_i \\ N_i(x, y) = 1 & \text{si } x = x_i \text{ et } y = y_i \end{array}$$

Pour $i = 1, 2, 3$.

$$2. \quad \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) = 1$$

3. $N(x, y)$ a le meme comportement que $f(x, y)$.
 On sait que la fonction de déplacements est continue sur la frontière des éléments et dérivable, mais ses dérivées ne sont pas forcément continues de même pour $N(x, y)$.

Etape IV :

On exprime les déformations en fonction des déplacements.

Pour les problèmes de contraintes et déformations planes

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ε_x et ε_y déformations directes
 γ_{xy} déformations de cisaillements.

La théorie de l'élasticité nous donne :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

En remplaçant u et v dans ε_x , ε_y et γ_{xy}

$$\{ \varepsilon(x, y) \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

$$\varepsilon(x, y) = [C] \cdot \{\alpha\}$$

ou encore

$$\{ \varepsilon(x, y) \} = [C][A]^{-1} \cdot \{s^e\}$$

$$\{ \varepsilon(x, y) \} = [B] \cdot \{s^e\} \quad (\text{III.11})$$

Avec : $[B] = [C][A]^{-1}$ (III.12)

$[B]$ est la matrice de déformations.

Etape 5

Relier les contraintes internes aux déformations et aux déplacements $\{s^e\}$:

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot \{\varepsilon(x, y)\}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$[D]$: est la matrice d'élasticité.

avec :

$$d_{11} = d_{22} = E \cdot (1 - \alpha \cdot \nu) / ((1 + \nu)(1 - \nu - \alpha \nu))$$
$$d_{12} = d_{21} = \nu d_{11} / (1 - \alpha \cdot \nu)$$
$$d_{33} = E / (2 \cdot (1 + \nu))$$

$\alpha = 0$ en contraintes planes

$\alpha = 1$ en déformations planes

des équations suivantes :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^e\}$$

$$\{\sigma(x, y)\} = [H] \cdot \{\delta^e\} \quad (\text{III.13})$$

$[H]$: Matrice contraintes

Etape VI

Remplacer les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ par des forces nodales statiquement équivalentes $\{F^e\}$, relier ces dernières aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$ et de là obtenir la matrice de rigidité de l'élément $[k^e]$.

Appliquant le principe des travaux virtuels ..

$$\{\delta^e\}^T \cdot \{F^e\} = \int_V \{\varepsilon^e\} \cdot \{\sigma\} dv$$

le travail des forces extérieures = le travail interne

$\{\delta_*^e\}$ et $\{\epsilon_*^e\}$: déplacement nodale supposé et sa déformation correspondante.

En tenant compte de ce qui précède

$$\{\delta_*^e\} \cdot \{F^e\} = \left[\int_V \{\delta_*^e\} \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dv \right] \cdot \{\delta^e\}$$

Cette égalité est vraie quelque soit $\{\delta_*^e\}$

donc :
$$\{F^e\} = \left[\int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dv \right] \cdot \{\delta^e\}$$

Dans notre cas $[B]$ et $[D]$ sont constants ; Il reste sous l'intégrale que dv

$$\int dv = \Delta \cdot t$$

Δ : l'aire du triangle

t : épaisseur du triangle

$$\{F^e\} = [[B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \Delta \cdot t] \cdot \{\delta^e\} \quad (\text{III.14})$$

$$\{F^e\} = [K^e] \cdot \{\delta^e\} \quad (\text{III.15})$$

$[K^e]$: matrice de rigidité

Pour notre triangle :

$$2 \cdot \Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

CHPITRE IV

Application

Dans cette partie on verra des résultats de la plaque avec ses différents arondis ; ses résultats sont obtenus par l'utilisation principalement du logiciel BBMEF [ref. 5] auquel on a apporté des modifications pour l'adapter à notre cas voir annexe.

On fera cinq cas de calcul avec la même plaque une fois sans arondi les autres cas avec des arondis de différentes formes on pourra après exploitation des résultats et interprétation, tirer une conclusion.

IV.1 Description de la plaque et des arondis

- La plaque est plate et mince en acier, elle a pour caractéristiques [fig IV.1]

Longueur = 0.12 m

Largueur = 0.06 m

Epaisseur = 0.003 m

Module d'Young = $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ Coefficient de poisson = 0,3

Force appliquée = 500 N

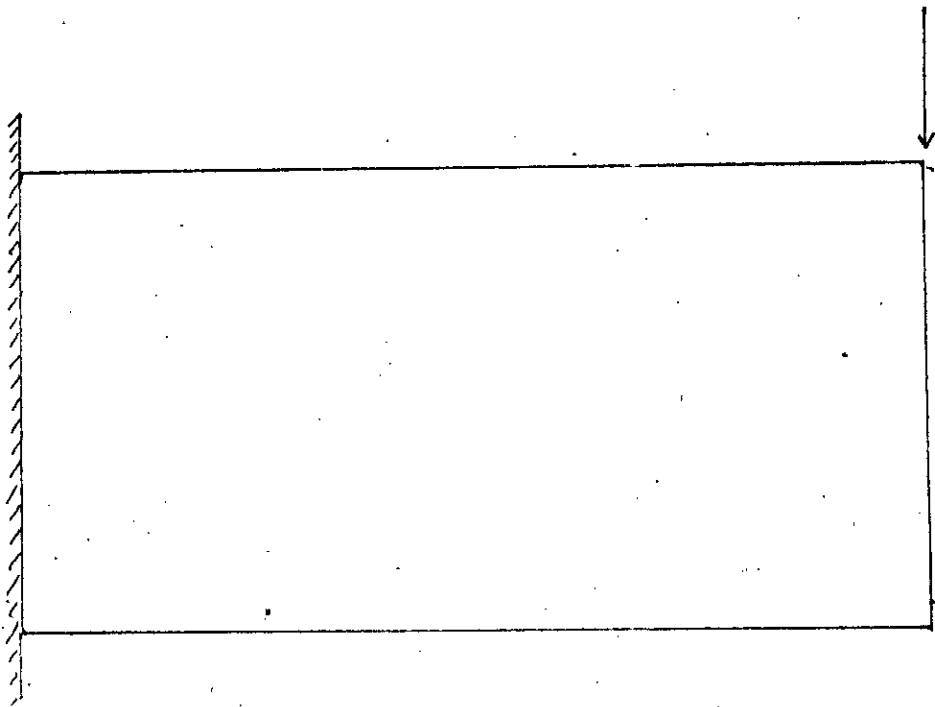


fig IV-1 Disposition de la plaque (échelle 1)

- Après cette brève description de la plaque on fait de même pour les arondis.

Ils sont du même matériau et ont la même épaisseur que la plaque.

Les différentes formes sont représentées ensemble [fig IV-2] pour pouvoir comparer leurs géométries

- Le premier arondi a la forme d'un quart de cercle

- Le deuxième est linéaire.

- Le troisième est hyperbolique

- Le quatrième est hyperbolique aussi mais plus concave que le troisième.

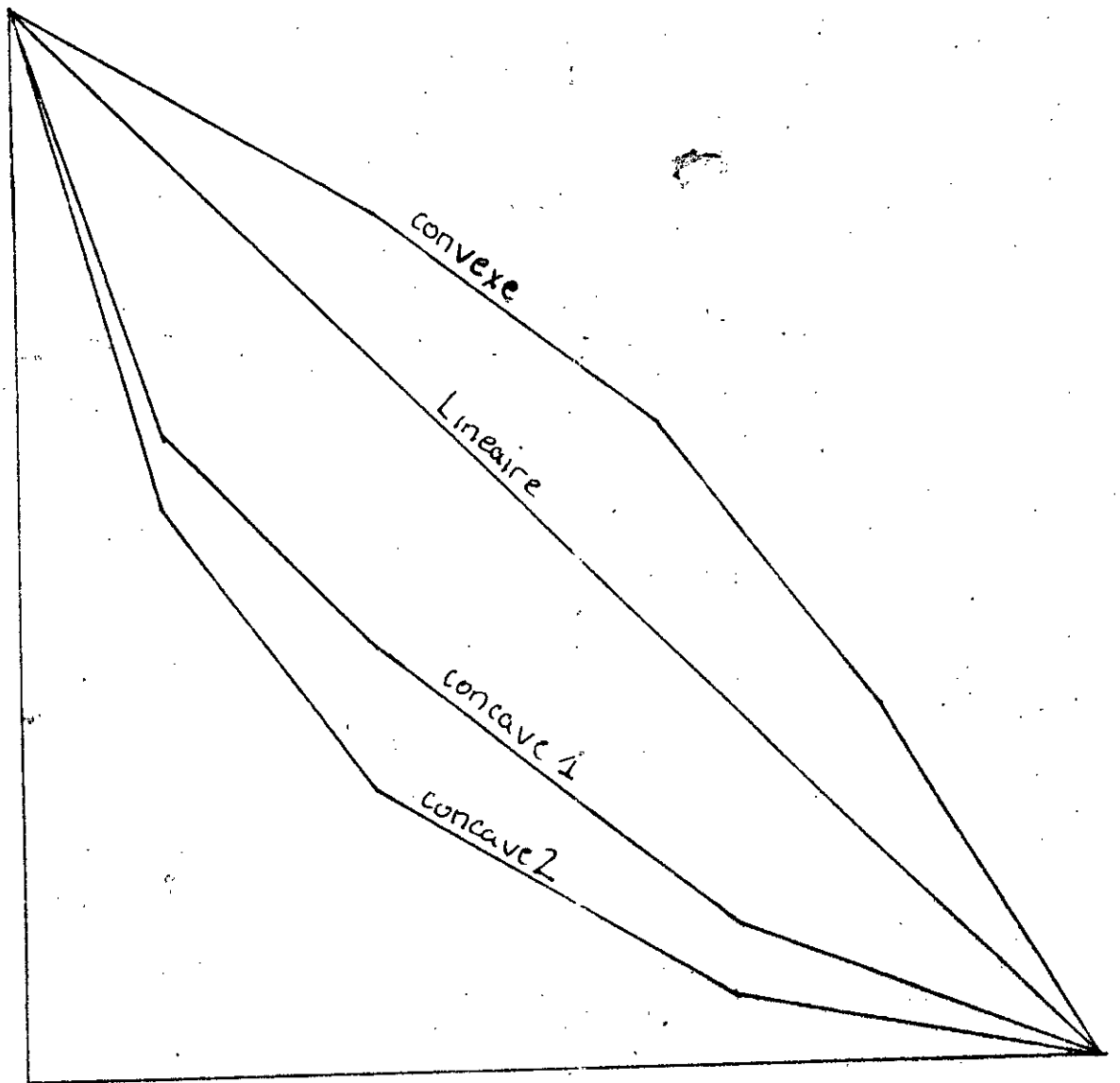


fig IV.2 Formes des differents arondis (échelle 10)

IV.2 Préparation du maillage

Avant le lancement des calculs il nous faut choisir un maillage pour la plaque et préparer les données du programme en fonction du maillage.

On a parlé au § III-1 du problème d'isométrie géométrique ; on a pu mettre ce problème en évidence et on a montré l'influence du maillage sur la convergence du résultat.

On prend la plaque décrite précédemment mais encadrée des deux côtés et chargée en son centre voir fig IV-3. Comme on peut le remarquer on a choisi deux maillages différents mais en gardant le même nombre d'éléments et de nœuds, cependant les deux cas donnent des résultats différents voir tableau IV-1

Le cas de fig IV.3.a/ a trois le maillage orienté dans un même sens, le cas fig IV.3.b a un maillage symétrique.

La plaque représente un problème parfaitement symétrique en chargement et en conditions aux limites, mais le maillage dans le cas a/ ne respecte pas cette symétrie donc la solution diverge vers des résultats erronés.

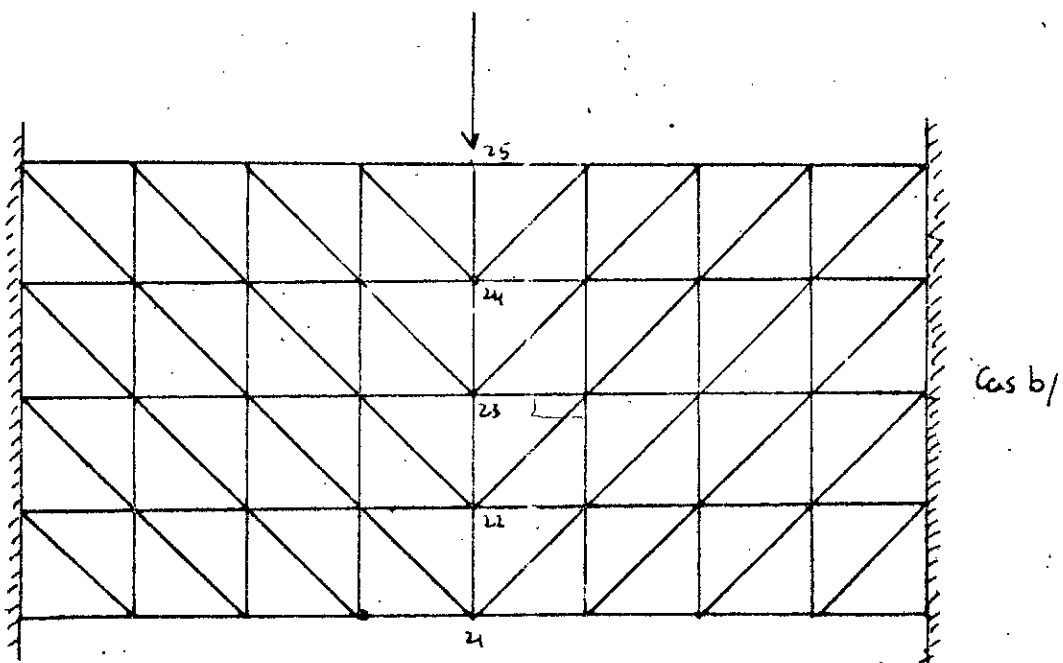
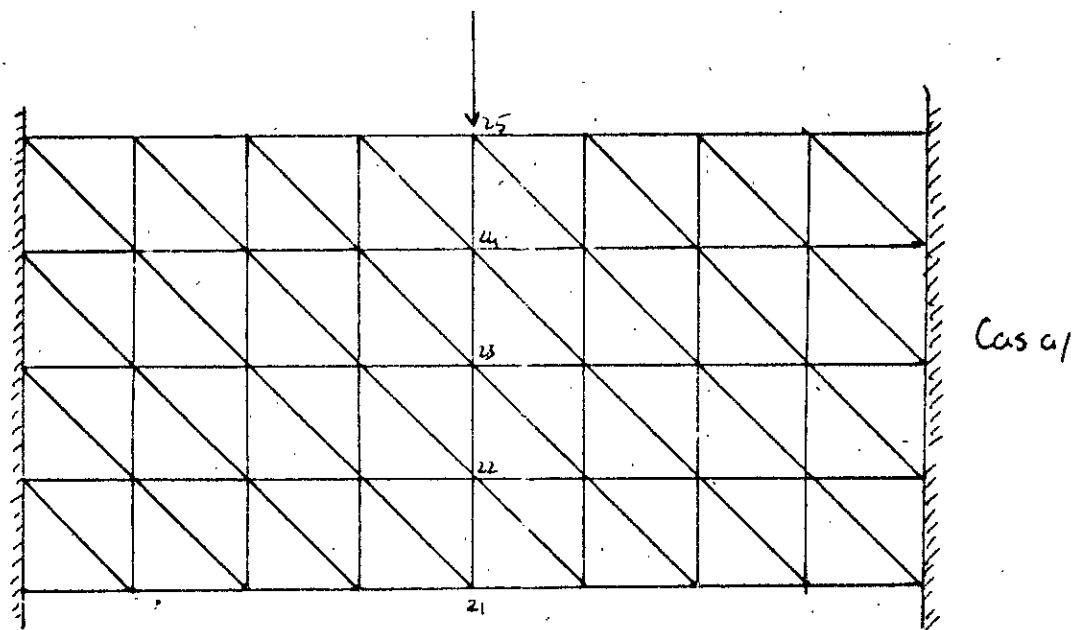


fig IV. 3 Influence du maillage sur la convergence des résultats.

Par contre comme on peut le prévoir les déplacements des noeuds centraux suivant l'axe x sont nuls cela est vérifié avec le cas b , mais ne l'est pas avec a .

- La conclusion qu'on peut tirer est que le maillage se définit après la définition de la géométrie du système et on ne peut pas le mettre comme on veut surtout pour l'élément triangulaire de base.

IV.3 Les contraintes obtenues.

Après la préparation du maillage il ne reste que le lancement des calculs voir annexe. Une fois fini on obtient les contraintes au centre de chaque élément et cela pour chaque cas d'arrondi.

On obtient σ_x , σ_y et τ_{xy} voir listing.

IV.4.1 Remarques sur les contraintes.

Dans ce paragraphe on essaiera de donner quelques remarques qui vont aider pour exploiter au mieux les valeurs des contraintes obtenues.

- On remarque facilement sur les listings que les valeurs de σ_x sont nettement au-dessus de σ_y , le rapport entre les deux est plus que 5 en moyenne de même pour τ_{xy} le rapport entre σ_x et τ_{xy} est

plus que 3 en moyenne.

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} > 5$$

$$\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} \gg 3$$

Donc le repérage des zones dangereuses se basera sur les valeurs de σ_x

- On remarque aussi des valeurs exceptionnellement élevées de σ_y et τ_{xy} dans l'élément où la force est appliquée et d'une façon discontinue. Elle est due au fort gradient de force.

IV - 4.2 Repérage des contraintes importantes.

- On ne va considérer que les éléments où il y a une forte concentration de contraintes. Cela nous évite de traîner beaucoup de valeurs.

Ces contraintes seront représentées dans un tableau avec l'élément correspondant et ses coordonnées. voir tableau IV-2.

L'origine des coordonnées des éléments dans ce tableau est conjuguée avec le sommet du bas à gauche de la plaque.







| Arendi | el ^t | Coordonnées de l'el ^t | | la contrainte $\sigma_x / 10^8$ Pa |
|-----------|-----------------|----------------------------------|-------|------------------------------------|
| | | X (m) | Y (m) | |
| Sans | 1 | 0,003 | 0,003 | - 0,3452 |
| | 12 | 0,003 | 0,057 | 0,3464 |
| Convexe | 81 | 0,018 | 0,003 | - 0,3206 |
| | 92 | 0,016 | 0,057 | 0,3337 |
| Linéaire | 55 | 0,018 | 0,003 | - 0,3223 |
| | 66 | 0,021 | 0,003 | 0,3112 |
| Concave 1 | 81 | 0,018 | 0,003 | - 0,3085 |
| | 92 | 0,016 | 0,057 | 0,2999 |
| Concave 2 | 79 | 0,013 | 0,057 | 0,2944 |
| | 81 | 0,018 | 0,003 | - 0,3008 |

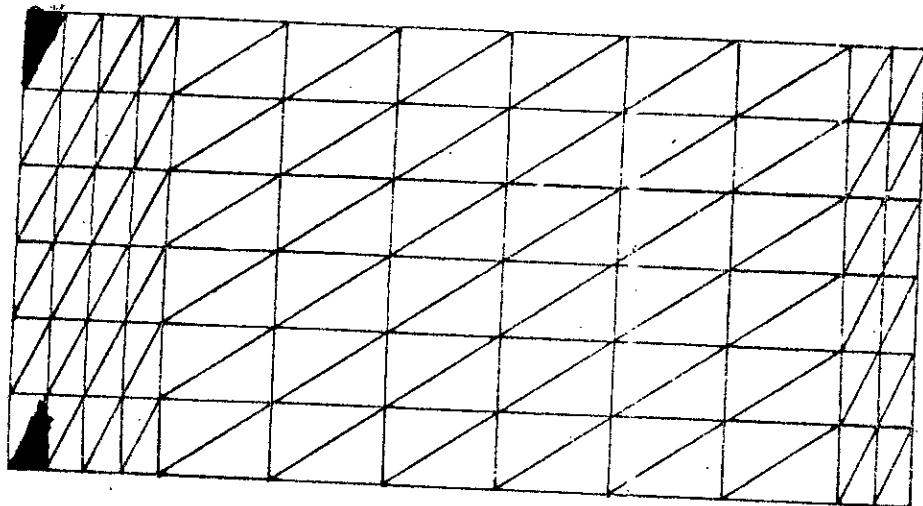
Tableau IV-2 Représentant les éléments ayant une forte concentration de contraintes

IV.5 Présentation explicite du phénomène de concentration de contraintes.

Pour bien visualiser le phénomène de concentration de contraintes on a donné à chaque intervalle de contraintes une couleur cela nous permet de voir l'influence de l'arrondi sur la réduction des contraintes voir fig IV.4

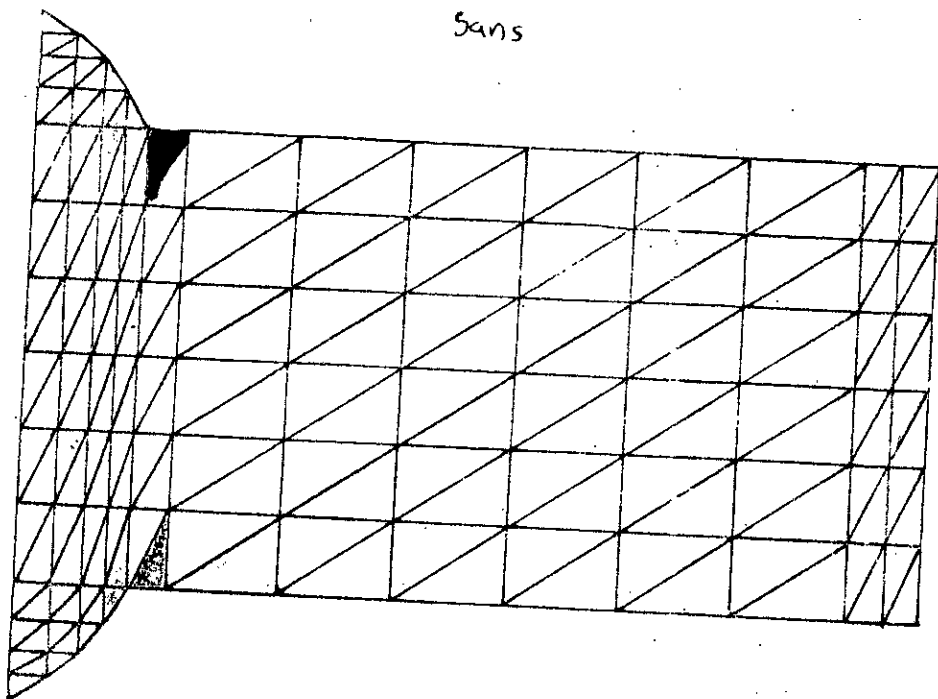
Les intervalles choisis et la couleur correspondante sont comme suit.

| | | | | |
|---|-------------------|---|----------------------|--------|
|  | $0,34 \cdot 10^8$ | - | $0,36 \cdot 10^8$ Pa | Rouge |
|  | $0,33 \cdot 10^8$ | - | $0,34 \cdot 10^8$ Pa | Violet |
|  | $0,32 \cdot 10^8$ | - | $0,33 \cdot 10^8$ Pa | Maron |
|  | $0,30 \cdot 10^8$ | - | $0,32 \cdot 10^8$ Pa | Vert |
|  | $0,25 \cdot 10^8$ | - | $0,30 \cdot 10^8$ Pa | Jaune |
|  | $0,20 \cdot 10^8$ | - | $0,25 \cdot 10^8$ Pa | bleu |



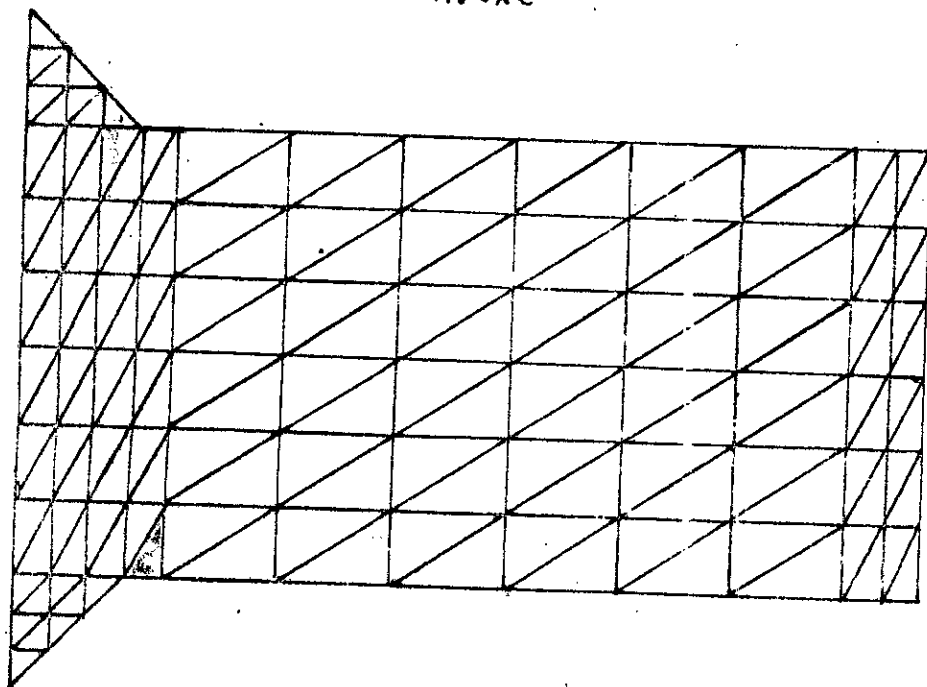
a/

Sans



b/

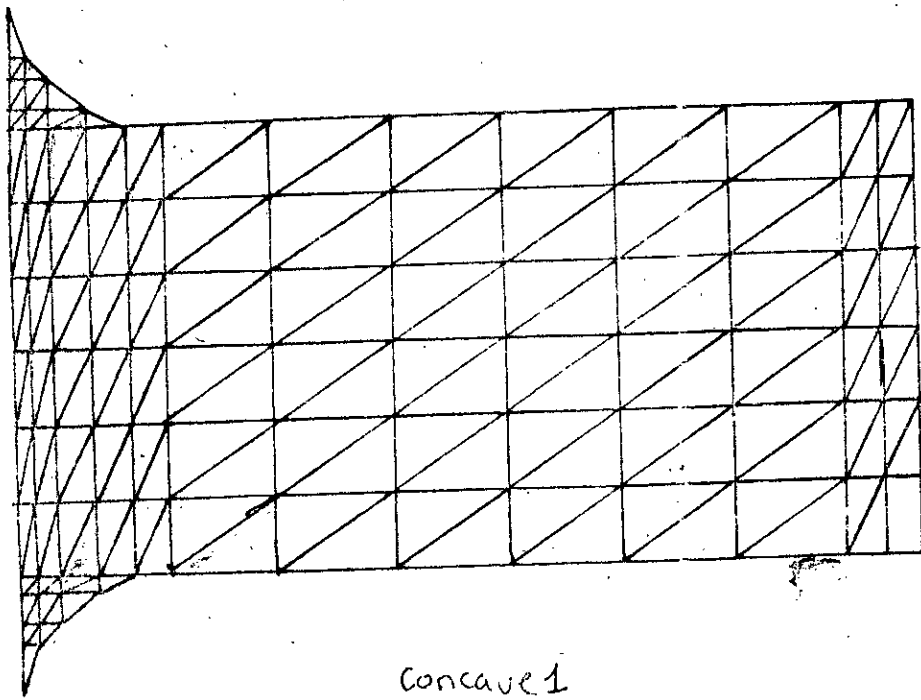
Convexe



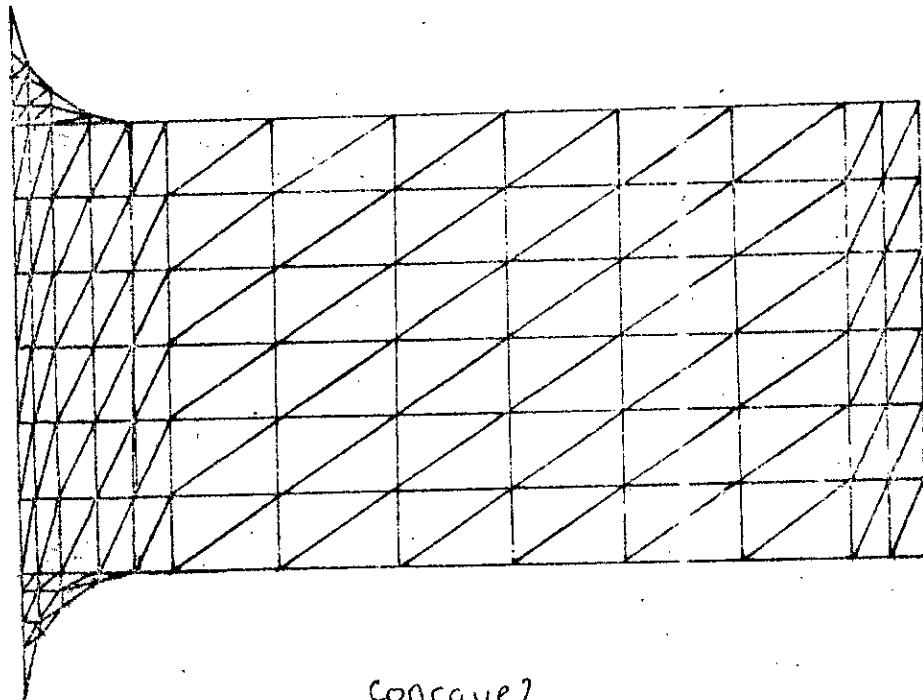
c/

Lineaire

47



concave 1



concave 2

Fig IV-4 Représentation des différents cas d'arondis avec leurs maillages et l'influence sur la concentration de contraintes.

IV - 6 Resultats et comparaisons .

Dans ce paragraphe on va représenter la valeur maxi des contraintes σ_x pour chaque cas d'arondi et essayer de trouver l'amélioration apportée en pourcentage par rapport a la plaque sans arondi Tableau IV - 3

| Plaque | valeur max $\sigma_x / 10^8$ [Pa] | Pourcentage (%) |
|------------------|--------------------------------------|-----------------|
| Sans Arondi | 0,3464 | — |
| Arondi convexe | 0,3337 | 3,67 |
| Arondi linéaire | -0,3223 | 6,96 |
| Arondi concave 1 | -0,3085 | 10,94 |
| Arondi concave 2 | -0,3008 | 13,16 |

Tableau IV - 3 Améliorations apportées par les différents arondis en pourcentage.

Le tableau IV-3 montre que les meilleurs résultats sont pour les deux arrondis concaves et surtout pour l'arrondi de plus grande concavité. L'arrondi linéaire est meilleur que l'arrondi convexe.

IV-7 Conclusion

Le problème de concentration de contraintes causé par la variation brusque de la section de la plaque a été réduit par l'apport d'arrondi.

On a montré la très grande importance de la géométrie de ces arrondis ; leur principale fonction est surmontée le problème de la variation brusque de la section. Cette tâche est assurée au mieux

C'est pour cela que la forme concave est la meilleure, dans la mesure où la forme hyperbolique permet de faire varier très rapidement la section de la plaque d'une façon considérable et continue, tandis que les arrondis convexe et linéaire n'améliorent que peu la concentration de contraintes, car ils présentent toujours une discontinuité dans la variation de section.

Conclusion générale

- A l'issue de ce travail dans lequel on a essayé d'utiliser la M.E.F. en élasticité plane, pour l'étude de l'évolution de la concentration de contraintes d'une plaque encadrée et l'étude peut apporter des arondis dans la minimisation de ces contraintes dans notre plaque. On souligne l'importance de la géométrie de ces arondis, car c'est pour la forme hyperbolique de l'arondi que nous avons obtenu les meilleurs résultats.

- Nous avons pu au cours de ce travail de nous familiariser avec la M.E.F. dans son côté théorique et avec son utilisation dans les calculs et acquérir ainsi des connaissances et quelques finesses d'ordre pratique de cette méthode.

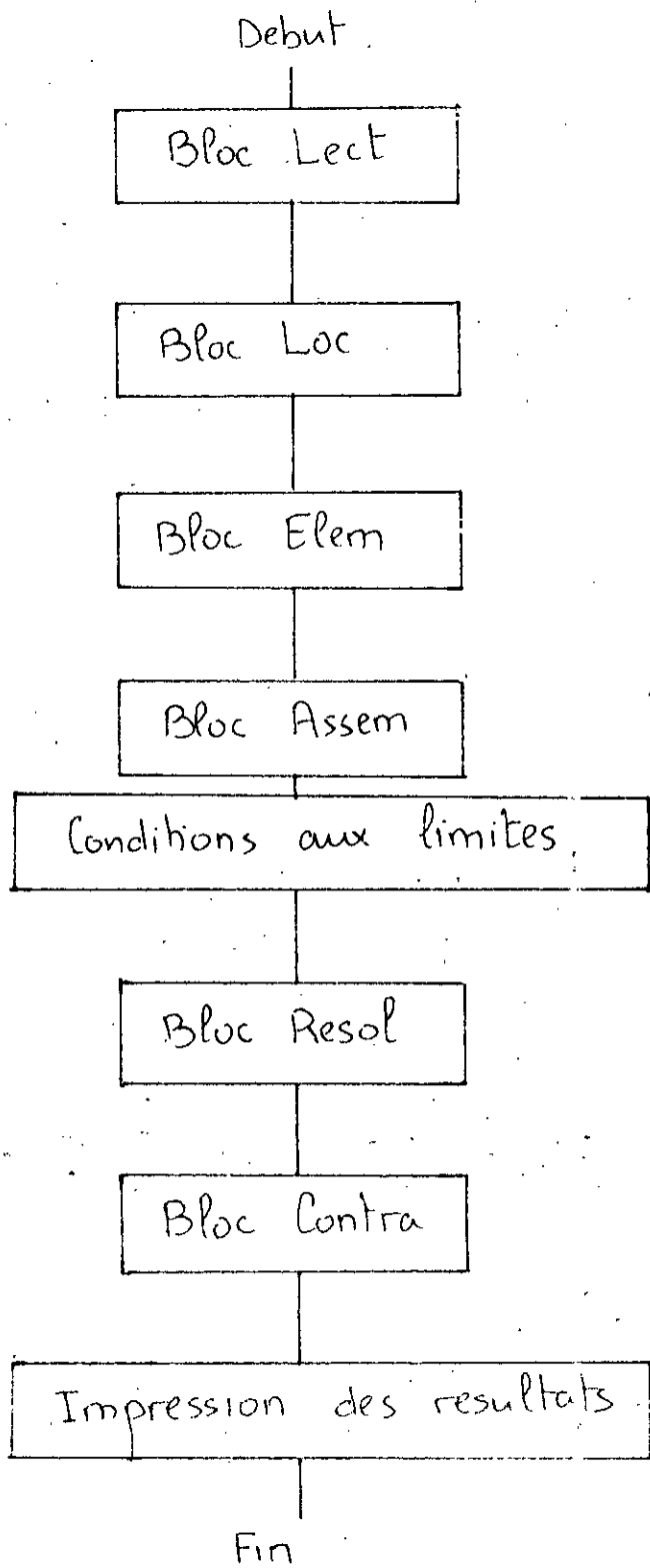
- Néanmoins ces calculs restent théoriques et l'absence de résultats expérimentaux qui serviront pour la comparaison, est un désavantage.

On recommande donc à l'avenir dans les limites du possible d'associer toujours les travaux semblables du type calculs des structures avec d'autres

qui traitent le même sujet mais dans le but d'obtenir
des résultats expérimentaux. De côté calcul
servira d'une façon plus efficace, autrement
on peut avoir des résultats ^{ou} numériques sans sens
physique aucun.

ANNEXE

Organigrammes et programmes



Notre logiciel comprend un programme principale qui fait appel a plusieurs sous-programme subroutine. Les blocs sont.

a/ Subroutine LECT

Il permet la lecture des données.

- Coordonnées des noeuds
- Connectivités des éléments
- Les caractéristiques du matériau.

b/ Subroutine LOC

Il permet la construction de la matrice de localisation c-a-d qu'il reserve la place dans la matrice de rigidité globale des éléments de la matrice de rigidité élémentaire en cours de calcul.

c/ Subroutine ELEM

Il permet de calculer la matrice de rigidité de chaque élément tenant compte des données.

d/ Subroutine ASSEM

C'est ce bloc qui permet après calcul de la matrice de rigidité élémentaire de la placer dans la matrice de rigidité globale a l'aide du subroutine LOC.

e/ Subroutine resol

Après avoir la matrice de rigidité globale et la recherche des conditions aux limites le bloc resol nous calcule les déplacements nodaux.

f/ Subroutine CONTRA

- Enfin ayant les déplacements nodaux ce bloc les utilise pour nous donner les contraintes dans chaque élément.

Bibliographie et references

- 1 - R.H. GALLAGHER
Introduction aux elements finis
Editions Pluralis 1976
- 2 - J.F. IMBERT
Analyse des structures par element fini
Editions Cepadues 1979
- 3 - L. ROCKEY
Introduction à la methode des elements finis
Editions Eyrolles 1975
- 4 - O.C. ZIENKIEWICZ
La methode des elements finis
Editions Groupe McGraw-Hill 1979
- 5 - G. DHATT
Une presentation de la methode des elements finis
Maloine S.A editeur 1984

انتصرون بعون الله هذا العمل
يوم الأربعاء على الساعة 20 و 20
27 دو القعدة 1410 هـ / 20 جوان 1990 م
سأل الله أن تكون في ميزان طاعته

