

M0035/93A

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

# THESE

en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER

SPECIALITE  
Construction Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

INTITULEE

ETUDE DES CHAMPS DE  
DEFORMATION  
ELASTO-PLASTIQUE ET  
ELASTO-VISCOPLASTIQUE EN  
FOND D'ENTAILLE

ETABLIE PAR :  
Mr. DJAMEL SAADOUN

Présentée devant le Jury composé de :

Mr. A. GAHMOUSSE	Professeur	E.N.P.	Président
Mr. S. RECHAK	Professeur	E.N.P.	Examineur
Mr. A. BALI	Professeur	E.N.P.	Examineur
Mr. H. BELHANECHÉ	Chargé de cours	E.N.P.	Examineur
Mr. Y. BELKACEMI	Maitre assistant	E.N.P.	Rapporteur

NOVEMBRE 1993

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

# THESE

en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER

SPECIALITE  
Construction Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

INTITULEE

ETUDE DES CHAMPS DE  
DEFORMATION  
ELASTO-PLASTIQUE ET  
ELASTO-VISCOPLASTIQUE EN  
FOND D'ENTAILLE

ETABLIE PAR :

Mr. DJAMEL SAADOUN

Présentée devant le Jury composé de :

Mr. A. GAHMUSSE	Professeur	E.N.P.	Président
Mr. S. RECHAK	Professeur	E.N.P.	Examineur
Mr. A. BALI	Professeur	E.N.P.	Examineur
Mr. H. BELHANECHÉ	Chargé de cours	E.N.P.	Examineur
Mr. Y. BELKACEMI	Maitre assistant	E.N.P.	Rapporteur

NOVEMBRE 1993

## REMERCIEMENTS

Je remercie DIEU de m'avoir permis de terminer ce modeste travail.

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin afin de bien mener ce travail, je cite en particulier le Professeur Pluinage qui m'a suggéré le sujet de cette thèse et m'a guidé lors de mon travail, et Mr Belkacemi qui n'a cessé durant mon travail de me prodiguer conseils et encouragements.

Je tiens aussi à remercier Messieurs les membres du Jury qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Enfin, mes remerciements vont également à tous mes amis pour leurs encouragements et leurs précieux conseils.

ملخص:

تتمثل هذه الدراسة في تحديد توزيع التشوهات في عمق الفجوات، تحليل الوسائط المتحكممة فيه، كذا إيجاد صيغة موصفة لهذا التوزيع في حالات المرونة المرونة- لدونة ثم المرونة- لزوجة- لدونة.

إن البرنامج المعلوماتي عن طريق العناصر المنتهية قد سمح بتعيين صيغة من الشكل  $(r^{-\alpha})$  بعد مسافة مميزة يكون عبرها التشوه ثابتاً وأعظماً، بحيث يُمثل  $\alpha$  عدداً حقيقياً يساوي 0.5 في حالة المرونة ويكون أصغر من 0.5 في الحالات الأخرى. كما سمحت لنا صيغة التوزيع هذه بتعريف معامل شدة التشوه الفجوي وهو معامل يسمح بمفرده التحكم في الانكسار.

إضافة إلى ذلك، وجدنا أن المسافة المميزة والانس  $\alpha$ ، بما في ذلك معامل شدة التشوه الفجوي يخضعون لقانون خطي بتابعية إستدانية الفجوة.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## ABSTRACT

The aim of this research work is to generalize the form of the local strain distribution at the notch tip for elastic, elasto-plastic and elasto-viscoplastic behaviours and to analyse the parameters which describe the strain field.

We are establish a finite element code which determines the stress and strain fields of bidimensional structures. The strain varies according to  $r^{-\alpha}$  beyond the characteristic distance where the strain is constant and maximum.  $\alpha$  is a real equal to 0,5 for an elastic behaviour and less than 0,5 for the others cases.

This approximation has allowed to define the notch strain intensity factor which is a parameter accounting for the strain state and the notch geometry; the fracture can than be governed by this parameter. Finally, we find that the characteristic distance, the exponent  $\alpha$  and the notch strain intensity factor vary linearly versus the notch acuity.

## RESUME

Cette étude consiste à déterminer la distribution de déformation en fond d'entaille, d'analyser les paramètres qui la décrivent et de trouver une forme généralisée de cette distribution pour des cas de comportement élastique, élasto-plastique et élasto-viscoplastique.

Le code de calcul par éléments finis que nous avons construit a permis de déterminer une forme en  $r^{-\alpha}$  au-delà d'une distance caractéristique au niveau de laquelle la déformation est constante et maximale.  $\alpha$  est un réel égal à 0,5 pour un comportement élastique, inférieur à 0,5 pour les deux autres cas de comportement. Cette forme de distribution nous a permis de définir le facteur d'intensité de déformation d'entaille qui est un paramètre qui peut, à lui seul, gouverner la rupture. Nous avons trouver, de plus, que la distance caractéristique, l'exposant  $\alpha$  ainsi que le facteur d'intensité de déformation d'entaille ont une évolution linéaire en fonction de l'acuité d'entaille.

## TABLE DES MATIERES

Introduction.....	8
<b>1/ Formulation de modèles élasto-plastique et élasto-viscoplastique.....</b>	<b>10</b>
1.1/ Modèle élasto-plastique.....	10
1.1.1/ Définition d'un problème élasto-plastique.....	10
1.1.2/ Description d'un comportement élasto-plastique.....	11
1.1.3/ Sollicitations multiaxiales.....	12
1.1.4/ Phénomène d'érouissage.....	12
1.1.5/ Critères de plasticité.....	14
1.1.6/ Lois d'écoulement plastique.....	16
1.2/ Modèle élasto-viscoplastique.....	17
1.2.1/ Aspects phénoménologiques.....	17
1.2.2/ Formulation des lois de comportement.....	20
<b>2/ Notions de mécanique de la rupture.....</b>	<b>23</b>
2.1/ Généralités sur la mécanique linéaire de la rupture.....	23
2.1.1/ Modes de rupture.....	23
2.1.2/ Champs de contrainte et de déplacement.....	25
2.1.3/ Approches énergétiques.....	26
2.1.4/ Critères de rupture.....	29

2.1.5/ Limites d'utilisation.....	29
2.2/ Mécanique élasto-plastique de la rupture.....	30
2.2.1/ Extensions de la mécanique linéaire de la rupture.....	30
2.2.2/ Modèles élasto-plastiques de fissuration.....	32
2.2.3/ Critères d'amorçage.....	33
2.2.4/ Avantages et inconvénients des critères de rupture.....	35
2.5/ Fissuration par fluage.....	35
<b>3/ Introduction de modèles élasto-plastique et élasto-viscoplastique dans un code d'éléments finis.....</b>	<b>36</b>
3.1/ Discrétisation en éléments finis.....	37
3.2/ Hypothèses fondamentales.....	38
3.3/ Formulation de la méthode des éléments finis.....	38
3.3.1/ Principe des travaux virtuels.....	38
3.3.2/ Approximation du problème par éléments finis.....	38
3.4/ Modélisation élasto-plastique.....	41
3.5/ Modélisation élasto-viscoplastique.....	43
3.6/ Expressions de base pour les problèmes bidimensionnels.....	45
3.6.1/ Problème élasto-plastique.....	47
3.6.2/ Problème élasto-viscoplastique.....	50
3.7/ Présentation du code de calcul.....	51
3.7.1/ Structure du code de calcul.....	51
3.7.2/ Méthodes de résolution des systèmes non-linéaires.....	53
3.7.3/ Méthodes de résolution des systèmes non-stationnaires.....	55
3.7.4/ Calcul des forces résiduelles d'un problème élasto-plastique.....	58
3.7.5/ Tests de convergence.....	60

#### 4/ Application du code de calcul à la distribution des déformations en fond

d'entaille. ....



4.1/ Exemples traités. ....	61
4.2/ Première approche de la distribution locale des déformations. ....	61
4.3/ Amélioration de la précision des résultats. ....	63
4.3.1/ Influence de la régularité du maillage. ....	66
4.3.2/ Influence du nombre de points de Gauss. ....	67
4.3.3/ Influence de la taille des éléments en fond d'entaille. ....	68
4.3.4/ Déformations nodales et déformations aux points de Gauss. ....	70
4.3.5/ Influence du nombre d'incrément de charge. ....	71
4.3.6/ Influence de la méthode de résolution. ....	72
4.4/ Discussion des résultats. ....	72
4.4.1/ Solution élastique. ....	72
4.4.2/ Solution élasto-plastique. ....	75
4.4.3/ Solution élasto-viscoplastique. ....	76
4.4.4/ Influence du chargement. ....	80
4.4.5/ Confrontation des trois solutions. ....	81
4.5/ Exemples d'éprouvette C.T. ....	83
Conclusion. ....	87
Références bibliographiques. ....	89

## INTRODUCTION

La présence d'entailles, de coins ou de zones de moindre résistance dans la plupart des structures réelles est la cause de concentrations de contraintes qui conduisent à des déformations élastiques et/ou plastiques importantes et peuvent aller jusqu'à provoquer une rupture prématurée. Dans la réalité, l'importance de ces concentrations de contraintes engendre, dans la plupart du temps, une zone de plasticité au voisinage des discontinuités géométriques. La déformation dépend alors de l'intensité du chargement imposé mais demeure constante dans le temps. Par contre, lorsque le matériau obéit à un comportement viscoplastique, comme c'est le cas en général à haute température, cette déformation varie au cours du temps. Ces discontinuités doivent donc être prises en compte dans le calcul des structures car elles modifient considérablement les champs de contrainte et de déformation.

L'étude de la rupture nécessite la connaissance des champs de contraintes et de déformations en fond de fissure et d'un critère d'amorçage adéquat. Pour cela, plusieurs critères ont été proposés; ils consistent à trouver une valeur critique, caractéristique du matériau, du paramètre gouvernant la rupture.

La première approche qui a montré qu'il était possible d'étudier un milieu fissuré à l'aide de variables intrinsèques et que le phénomène peut être gouverné par un seul paramètre a été établie par Griffith [1] en utilisant une analyse énergétique globale de matériaux élastiques fragiles. Une analyse élastique linéaire des champs de contrainte et de déplacement devait conduire Irwin [2], par la suite, à définir analytiquement ces champs au voisinage du front de fissure en introduisant le concept de facteur d'intensité de contrainte.

Les limites de ces analyses apparaissent du fait de la plasticité, inévitable en fond d'entaille, qui engendre des déformations importantes. Une première approche a été d'utiliser une analyse élastique tout en ajoutant des termes de correction de plasticité [3]. Cependant, une analyse plastique apparaît nécessaire lorsque les tailles des zones plastiques deviennent importantes.

Hutchinson [4], Rice et Rosengreen [5] ont été les premiers à pouvoir déterminer analytiquement les champs locaux de contrainte et de déformation à partir d'une analyse plastique d'une structure fissurée dont le matériau est écrouissable.



De nombreuses études traitant la validité de ces critères ont été publiées et les avis sont diversifiés. La formulation de nouveaux critères pour des cas de comportement élasto-plastique et élasto-viscoplastique reste encore un sujet de recherche et de discussion assez vaste.

Il est intéressant d'étudier le champ local des déformations en fond d'entaille et de prendre la déformation comme paramètre gouvernant la rupture car elle permet de mieux caractériser le comportement du matériau du fait de l'hypothèse de partition de la déformation en composante élastique réversible et en composante plastique irréversible. De plus, la déformation est le paramètre le mieux accessible à la mesure expérimentale et présente un sens physique apparent.

L'objet de cette étude est la détermination du champ local des déformations en fond d'entaille de plaques entaillées dont le matériau peut présenter un comportement élasto-plastique et élasto-viscoplastique.

L'analyse des déformations au voisinage d'une entaille basée sur la mécanique linéaire de la rupture conduit à une distribution de déformation de la forme :

$$\varepsilon_{ij} = f(r^{-0.5})$$

Notre objectif est de généraliser cette forme pour les cas de comportement élasto-plastique et élasto-viscoplastique comme :

$$\varepsilon_{ij} = f(r^{-\alpha})$$

Le calcul numérique a été réalisé en utilisant la méthode des éléments finis pour différentes acuités d'entaille. Les paramètres définissant le gradient de déformation ont été déterminés et analysés.

Le premier chapitre est consacré à la présentation des modèles élasto-plastiques et élasto-viscoplastique. Nous avons surtout insisté sur la plasticité à écrouissage isotrope.

Le second chapitre est consacré à la présentation des modèles de rupture fragile et ductile.

Le troisième chapitre présente la méthode de résolution que nous avons choisie pour résoudre de pareils problèmes ainsi que le code de calcul que nous avons établi.

Le quatrième chapitre présente les résultats de l'application du code de calcul aux distributions des déformations en fond d'entaille pour trois cas de comportements : élastique, élasto-plastique et élasto-viscoplastique.

Nous notons que cette étude entre dans le cadre d'un projet de recherche qui a pour but la formulation d'un nouveau critère de rupture sous déformation globale critique en relation avec le champ local de déformation en fond d'entaille.

# CHAPITRE 1

## FORMULATION DE MODELES ELASTO-PLASTIQUE ET ELASTO-VISCOPLASTIQUE

Le calcul des structures a le plus souvent pour objet de prévenir les déformations importantes et est en général fondé sur la théorie de l'élasticité et de la résistance des matériaux. Un calcul élastique permet de donner d'excellents résultats pour des structures dont les déformations permanentes sont faibles ou inexistantes. Cependant, la présence d'entailles ou d'angles vifs dans les structures réelles est la cause de concentrations de contrainte qui conduisent à des déformations importantes et peuvent aller jusqu'à provoquer une rupture prématurée. De plus, l'importance du chargement imposé peut lui aussi provoquer des déformations permanentes même en l'absence de "défauts géométriques".

L'importance des concentrations de contrainte ainsi que du chargement imposé provoque l'apparition de zones dites de plasticité; le calcul élastique ne rend donc pas compte du comportement réel des structures en présence de déformations permanentes; une analyse plastique devient donc nécessaire.

Dans notre étude, nous avons introduit deux modèles rhéologiques de plasticité. Le premier est le modèle de l'élasto-plasticité avec écrouissage dans lequel la déformation permanente dépend des conditions aux limites imposées mais demeure constante au cours du temps. Le deuxième est le modèle de l'élasto-viscoplasticité dans lequel la déformation permanente varie au cours du temps.

### 1.1/ MODELE ELASTO-PLASTIQUE

#### 1.1.1/ Définition d'un problème élasto-plastique

Nous distinguons deux principales théories : la théorie de la déformation plastique caractérisée par une relation contrainte-déformation explicite, donnant

la contrainte de façon unique connaissant la déformation et vice-versa. La deuxième est la théorie de l'écoulement plastique qui est à caractère incremental. Dans cette dernière, la déformation dépend de l'état de contrainte et du trajet de chargement. Nous parlerons alors de taux de contrainte et de taux de déformation.

Un problème d'élasto-plasticité est défini par :

- Les équations d'équilibre :  $\sigma_{ij,j} = 0$  ou  $d\sigma_{ij,j} = 0$
- Les relations déformation-déplacement :  $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$  ou  $2d\varepsilon_{ij} = du_{i,j} + du_{j,i}$
- Les relations contrainte-déformation :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{mn})$  ou  $d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{mn})$
- Les conditions aux limites :  $\sigma_{ij}n_j = F_i$  ou  $d\sigma_{ij}n_j = dF_i$  sur  $S_1$   
 $u_i = U_i$  ou  $du_i = dU_i$  sur  $S_2$

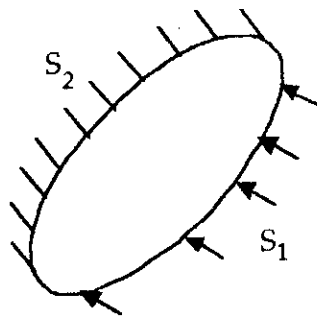


Fig. 1.1 Conditions aux limites d'un problème élasto-plastique.

### 1.1.2/ Description du comportement élasto-plastique

Le comportement élasto-plastique est caractérisé par une réponse initiale élastique sur laquelle s'ajoute une déformation plastique irréversible au-delà d'un certain niveau de contrainte qu'on appelle seuil de plasticité. Les propriétés matérielles requises pour définir le comportement élasto-plastique sont obtenues par un essai de traction simple. Plusieurs types de comportements élasto-plastiques sont mentionnés sur la figure (1.2).

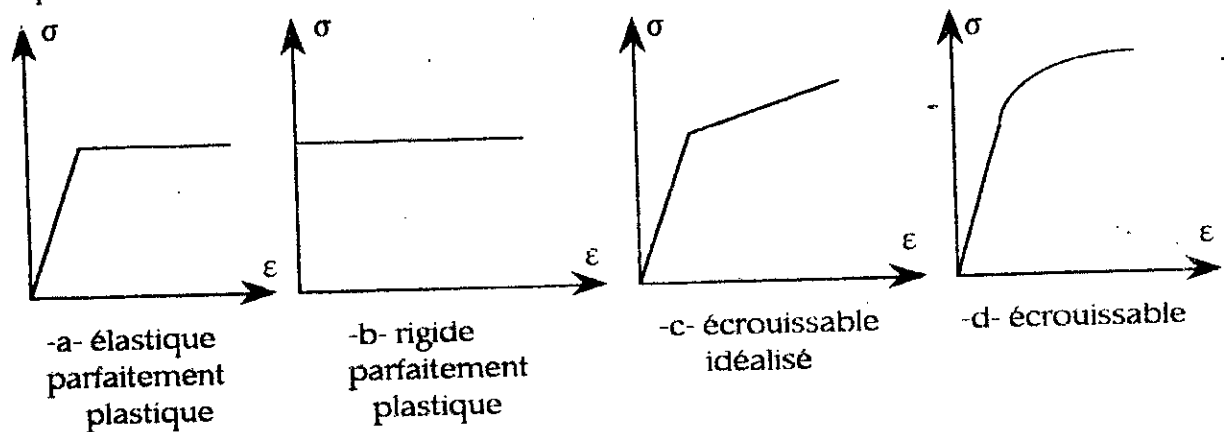


Fig. 1.2 Types de comportements des matériaux élasto-plastiques

Dans tout ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'aux matériaux écrouissables. Le matériau se déforme initialement de manière élastique jusqu'à ce que la contrainte atteigne le seuil de plasticité  $R_e$ , au-delà duquel le matériau subit un durcissement qu'on appelle écrouissage.

Au-delà du seuil de plasticité, un incrément de contrainte  $d\sigma$  engendre un incrément de déformation  $d\varepsilon$ .

### 1.1.3/ Sollicitation multiaxiale

Le taux de déformation est décomposé en un terme élastique et un terme plastique :

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \quad (1.1)$$

le terme élastique est donné par la loi de Hooke :

$$(d\varepsilon_{ij})_e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1.2)$$

$E$  étant le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Nous définissons la surface de charge comme étant la surface qui, à l'instant  $t$ , délimite le domaine élastique. La fonction de charge  $f$  est l'équation de la surface de charge; sa valeur est négative à l'intérieur du domaine élastique.

### 1.1.4/ Phénomène d'écrouissage

Au-delà du seuil de plasticité, le matériau subit un durcissement; il n'existe donc pas un seuil de plasticité, mais une infinité de seuils. La valeur de la contrainte d'écoulement d'un matériau est une caractéristique de son état; nous parlerons alors de contrainte d'écoulement d'un matériau donné dans un état donné. La fonction de charge dépend donc de l'état de contrainte et de l'écrouissage.

$$f(\sigma_{ij}, V_k) = 0 \quad (1.3)$$

$V_k$  sont des paramètres caractérisant l'écrouissage.

Deux modèles mathématiques permettent de représenter l'état d'écrouissage d'un matériau :

- L'écrouissage isotrope, où le domaine élastique croît uniformément sans se déplacer dans l'espace des contraintes lorsque le matériau se plastifie (Fig. 1.3a).

- L'écrouissage cinématique, où le domaine élastique conserve sa forme et son orientation mais subit une translation dans le plan des contraintes lors de la plastification (Fig. 1.3b).

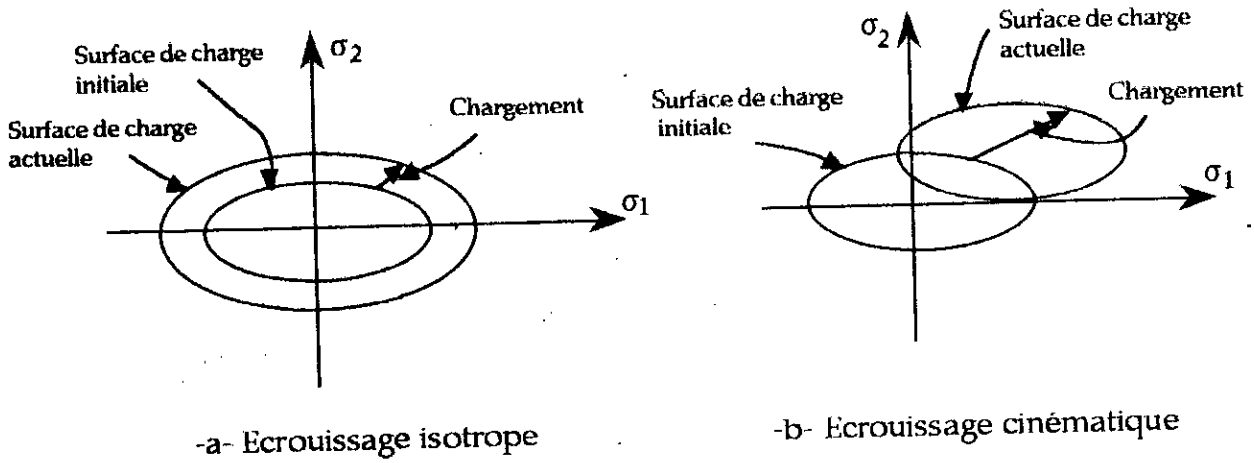


Fig. 1.3 Modèles mathématiques d'écrouissage.

Pour représenter l'état d'écrouissage d'un matériau, [6] nous utiliserons une variable scalaire (variable d'écrouissage isotrope) que nous noterons  $p$

- Soit la déformation plastique cumulée : 
$$\bar{\epsilon}_p = \int_0^t \left| \frac{3}{2} (d\epsilon_{ij})_p (d\epsilon_{ij})_p \right|^{1/2} d\tau$$

- Soit le travail plastique dissipé : 
$$U_{pl} = \int_0^t \sigma_{ij} (\epsilon_{ij})_p d\tau$$

et une ou plusieurs variables tensorielles (variable d'écrouissage cinématique) que nous noterons  $\alpha_{ij}$ .

Afin de décrire complètement le comportement élasto-plastique, il faut introduire un critère de charge-décharge. L'écoulement se produit si deux conditions sont réunies simultanément :

- Le point représentatif de l'état de contrainte est situé sur la surface de charge :

$$f(\sigma_{ij}, V_k) = 0$$

- Le point représentatif de l'état de contrainte ne peut sortir de la surface de charge ( $f > 0$  est impossible) pendant l'écoulement continu; nous introduisons donc la condition de consistance :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial V_k} dV_k = 0 \quad (1.4)$$

qui implique que le point représentatif de l'état de contrainte ( $\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}$ ) reste sur la surface de charge alors qu'une décharge est définie par  $df < 0$ . Nous avons donc

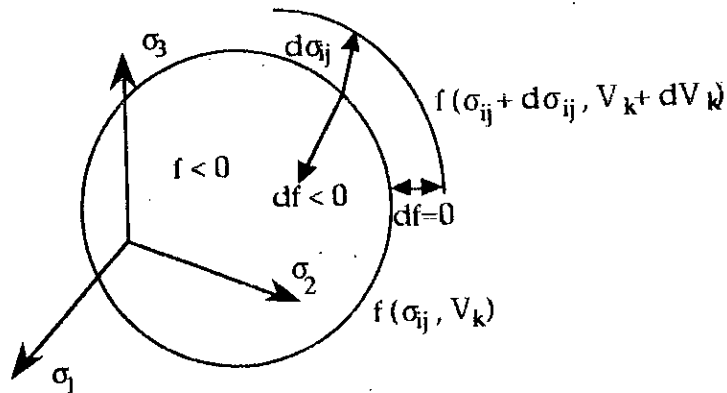
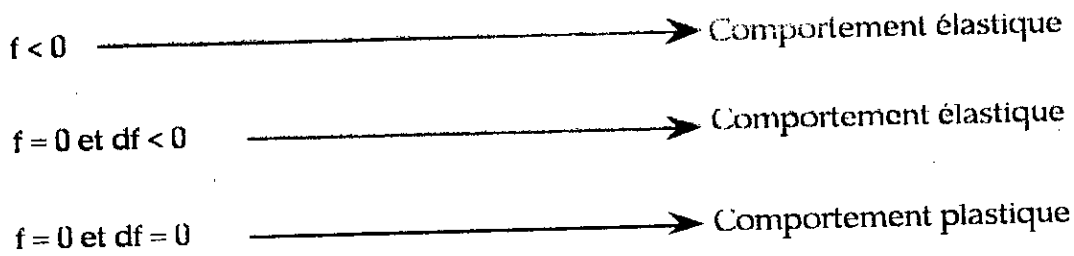


Fig. 14 Critère de charge décharge dans le cas d'un comportement élasto-plastique.

En résumé, nous distinguons :

- L'écroissage isotrope : une variable scalaire est suffisante pour représenter l'état d'écroissage.
- L'écroissage cinématique : nous faisons intervenir la translation de la surface de charge par un tenseur.
- L'écroissage anisotrope : une variable scalaire et un tenseur sont nécessaires pour définir l'état d'écroissage.

Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'à l'écroissage isotrope.

### 1.1.5/ Critères de plasticité

Un critère de plasticité doit être indépendant de l'orientation du système de coordonnées et sera donc fonction des invariants du tenseurs des contraintes.

$$J_1 = \sigma_{ii} \quad (1.5)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}$$

Les résultats expérimentaux indiquent que la déformation plastique ne dépend pas de la contrainte hydrostatique. Par conséquent, la surface de charge s'écrit [7] :

$$f(J'_2, J'_3, V_k) = 0 \quad (1.6)$$

$J'_2$  et  $J'_3$  sont respectivement le second et troisième invariant du tenseur déviateur des contraintes défini par :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1.7)$$

### 1.1.5.1/ Critère de Tresca

La déformation plastique apparaît lorsque la contrainte de cisaillement maximale dépasse un certain niveau. Si les contraintes principales sont  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  avec  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  alors la déformation plastique apparaît lorsque :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y(p) \quad (1.8)$$

$Y$  est un paramètre caractérisant le matériau et dépendant de l'état d'érouissage,  $p$  est le paramètre qui représente l'état d'érouissage isotrope.

La fonction de charge devient dans ce cas :

$$f(\sigma_{ij}, p) = \sigma_1 - \sigma_3 - Y(p) = 0 \quad (1.9)$$

La représentation géométrique du critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales est mentionnée sur la figure (1.5).

### 1.1.5.2/ Critère de Von-Mises

La déformation plastique apparaît lorsque le second invariant du tenseur déviateur des contraintes atteint une certaine valeur.

$$\sqrt{J'_2} = k(p) \quad (1.10)$$

que nous pouvons écrire de la manière suivante :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3} J'_2 = \sqrt{3} k(p) \quad (1.11)$$

où  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$  est la contrainte équivalente.

$k$  est une caractéristique du matériau; elle est liée à  $Y$  par :

$$Y(p) = \sqrt{3} k(p)$$

Deux interprétations possibles sont attribuées au critère de Von-Mises. Nadai [7] introduit une composante de contrainte qu'on appelle contrainte de cisaillement octaédrique  $\tau_{oct}$  définie par :

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2J_2'}{3}} \quad (1.12)$$

Selon Nadai [7], le début de plastification est gouverné par la contrainte de cisaillement octaédrique.

Hencky [7] stipule que le critère de Von-Mises s'explique par le fait que la plasticité débute lorsque l'énergie élastique de distorsion atteint une valeur critique.

La représentation géométrique du critère de Von-Mises dans l'espace des contraintes principales est donnée sur la figure (1.5).

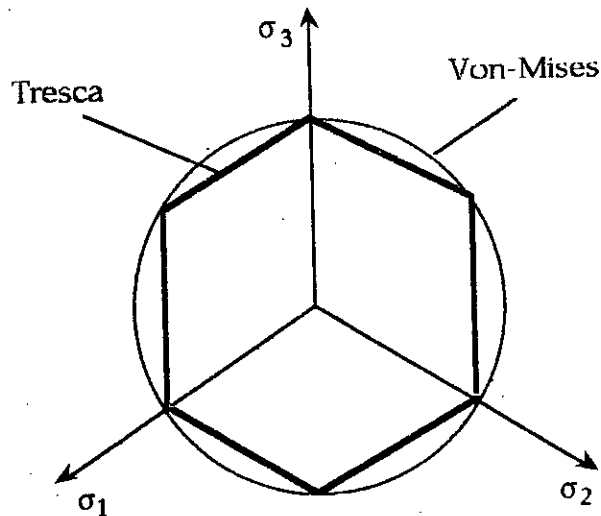


Fig. 1.5 Représentation géométrique des critères de plasticité de Tresca et de Von-Mises.

### 1.1.6/ Lois d'écoulement plastique

Dans les lois à écrouissage isotrope, l'évolution de la surface de charge est gouvernée par une seule variable scalaire : soit le travail plastique dissipé, soit la déformation plastique cumulée.

$$f(\sigma_{ij}, p) = 0$$

La fonction de charge dépend du paramètre d'écrouissage  $p$  par l'intermédiaire de la limite élastique  $k$ . De ce fait, nous pouvons écrire :

$$f(\sigma_{ij}, k(p)) = 0$$

Le principe du travail plastique maximal ou principe de Hill stipule que, pour une déformation donnée, un état de contrainte sur la surface de charge dissipe un maximum d'énergie. Parmi les conséquences de ce principe, le vecteur déformation plastique est normal à la surface de charge et orienté vers l'extérieur [6] d'où la loi de normalité :

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.13)$$



$d\lambda$  est un coefficient de proportionnalité dépendant de  $\sigma_{ij}$ ,  $p$  et  $d\sigma_{ij}$  ( $d\lambda > 0$ ) que nous appelons aussi multiplicateur plastique.

Nous avons vu que le critère de charge-décharge nécessitait d'imposer  $f = 0$  et  $df = 0$  au cours de l'écoulement plastique. Cette dernière condition implique que :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (1.14)$$

De plus, il a été montré que [6], [7] :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij} \quad (1.15)$$

d'où les relations de Prandtl-Reuss

$$d\epsilon_{ij} = (d\epsilon_{ij})_e + (d\epsilon_{ij})_p = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.16)$$

La définition d'un comportement élasto-plastique des matériaux écrouissables exige donc la connaissance de l'histoire du chargement ainsi que l'état d'écrouissage. D'autres lois d'écoulement plastique à écrouissage isotrope et cinématique peuvent être établies.

## 1.2 - MODELE ELASTO-VISCOPLASTIQUE

La théorie de l'élasto-viscoplasticité décrit l'écoulement de la matière qui, par rapport au cas de la plasticité, dépend du temps de façon essentielle. Généralement pour les métaux et alliages, ce phénomène prend naissance dès que la température dépasse environ le tiers de la température absolue de fusion, bien que certains alliages présentent de la viscoplasticité à température ambiante [6].

### 1.2.1 / Aspects phénoménologiques

#### 1.2.1.1 / Résultats tirés des essais d'écrouissage

Quatre différences essentielles sont mises en évidence lors de la comparaison des courbes d'écrouissage d'un matériau viscoplastique avec celles d'un matériau plastique [6] :

- plus la vitesse de déformation est élevée, plus la contrainte est élevée pour une même déformation (Fig. 1.6).
- un changement de vitesse de déformation en cours d'essai produit un changement immédiat de la courbe de traction qui a tendance à rejoindre la courbe monotone correspondant à la nouvelle vitesse (Fig. 1.7).
- les courbes à palier ne sont jamais observées.

- la notion de seuil de plasticité stricte disparaît, un écoulement peut se produire pour une contrainte inférieure à une contrainte appliquée antérieurement.

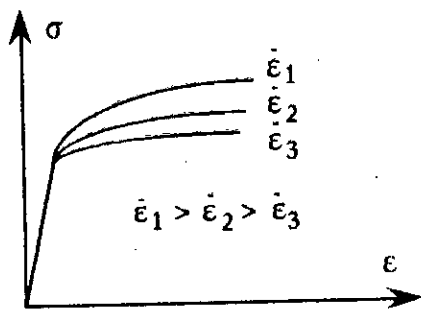


Fig. 1.6 Courbes d'écroûissage d'un matériau ayant un comportement élasto-viscoplastique

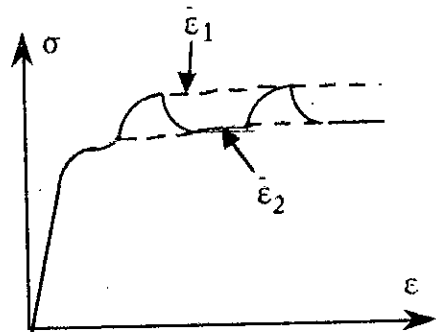


Fig. 1.7 Changement de vitesse de déformation d'un matériau ayant un comportement élasto-viscoplastique

### 1.2.12 / Résultats tirés des essais de fluage

La courbe de fluage représente l'évolution en fonction du temps de la déformation d'un matériau soumis à une contrainte constante. Cette courbe met généralement en évidence trois phases [6] (Fig. 1.8) :

- une phase de fluage primaire (zone I de la figure 1.8) au cours de laquelle l'écroûissage du matériau engendre une diminution de la vitesse de fluage initialement très grande. La loi d'Andrade la représente d'ailleurs assez bien :

$$\epsilon = A t^{1/q} \quad (1.17)$$

A et q sont des coefficients qui dépendent du matériau.

- une phase de fluage secondaire (zone II de la figure 1.8) pendant laquelle la vitesse de fluage est sensiblement constante. Différents essais de fluage effectués à des contraintes différentes permettent la mise en évidence de la relation qui existe entre la vitesse de fluage secondaire  $\dot{\epsilon}_p$  et la contrainte : c'est la loi de Norton

$$\dot{\epsilon}_p = \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^N \quad (1.18)$$

$\lambda$  et N dépendent du matériau et de la température.

- une phase de fluage tertiaire (zone III de la figure 1.8) où l'augmentation régulière de la vitesse de fluage conduit à la rupture. Cette augmentation est due à la diminution de section et le développement du phénomène d'endommagement qui réduit progressivement la résistance du matériau.

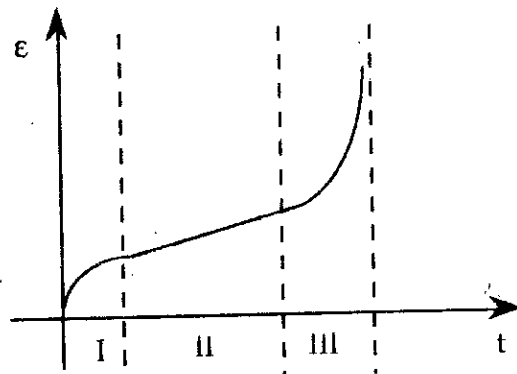


Fig. 1.8 Courbe de fluage d'un matériau élasto-plastique.

Les essais de fluage à plusieurs niveaux permettent de rendre compte des deux hypothèses d'écroissage admises pour traduire le fluage primaire : l'écroissage par la déformation et l'écroissage par le temps.

### 1.2.1.3 / Résultats tirés des essais de relaxation

Les essais de relaxation mettent en évidence la diminution de contrainte résultant du maintien d'un élément de volume à déformation constante. Ils caractérisent la viscosité et permettent de déterminer la relation qui existe entre la contrainte et la vitesse de déformation viscoplastique [6].

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (1.19)$$

Ainsi, chaque point de la courbe de relaxation (Fig. 1.9) donne la contrainte et la vitesse de déformation viscoplastique.

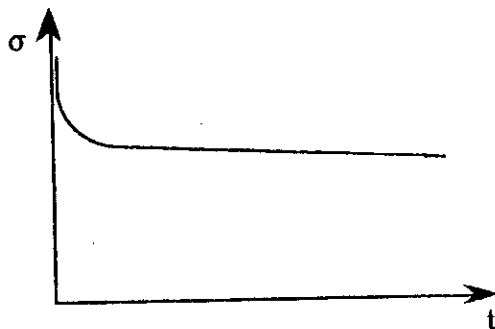


Fig. 1.9 Courbe de relaxation d'un matériau ayant un comportement élasto-viscoplastique

### 1.2.1.4 / Loi d'écroissage - viscosité

Les différents résultats qui viennent d'être décrits peuvent être rassemblés dans une loi de comportement à trois paramètres qui représente assez bien les phénomènes de viscoplasticité à déformation monotone croissante ( $\epsilon \geq 0$ ).

Pour de nombreux matériaux, un ensemble d'essais d'écroutissage, de fluage et de relaxation définissent dans le plan  $(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p)$  des isocontraintes avec une marge d'incertitude qui ne dépasse pas la dispersion des mesures [6]. Ceci prouve expérimentalement qu'une loi mécanique d'état :

$$\sigma = g(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p) \quad (1.20)$$

peut être définie dans le domaine de variation exploré des variables  $\epsilon_p$  et  $\dot{\epsilon}_p$ . Compte tenu de la loi de Norton et de l'affinité des courbes d'écroutissage, une particularisation raisonnable de la fonction  $f$  consiste à prendre un produit de fonctions puissance [6] :

$$\sigma = K \epsilon_p^m \dot{\epsilon}_p^n \quad (1.21)$$

$n$ ,  $m$  et  $K$  sont les trois paramètres fonction de la température et du matériau.  $n$  est l'exposant de viscosité,  $m$  est l'exposant d'écroutissage,  $K$  est le coefficient de résistance.

Nous remarquons que lorsque le paramètre  $n$  tend vers zéro, le matériau est justiciable d'une loi de plasticité.

## 1.2.2 / Formulation des lois de comportement

Nous nous plaçons là encore dans le cadre de l'hypothèse de partition de la déformation totale en une composante élastique et une composante viscoplastique irréversible :

$$\epsilon_{ij} = (\epsilon_{ij})_e + (\epsilon_{ij})_{vp} \quad (1.22)$$

de même que pour la vitesse de déformation totale :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (\dot{\epsilon}_{ij})_e + (\dot{\epsilon}_{ij})_{vp} \quad (1.23)$$

Le comportement viscoplastique apparaît lorsque :

$$f(\sigma_{ij}, p) - k(p) > 0 \quad (1.24)$$

$f$  étant la fonction de charge,  $k$  la limite élastique fonction de l'état d'écroutissage.

Comme pour le cas de la plasticité indépendante du temps, nous utilisons comme variables internes, une variable d'écroutissage isotrope de nature scalaire  $p$ .

Le comportement de plasticité indépendante du temps doit être considéré comme un cas particulier du schéma plus général de la viscoplasticité. En effet, dans l'espace des contraintes, les surfaces d'égale dissipation constituent une famille de surfaces (Fig. 1.10). Sur la surface la plus proche du centre du domaine d'élasticité, nous avons une vitesse d'écoulement nulle, sur la surface extérieure, une vitesse d'écoulement infinie. Entre les deux se situe le domaine de la viscoplasticité [6].

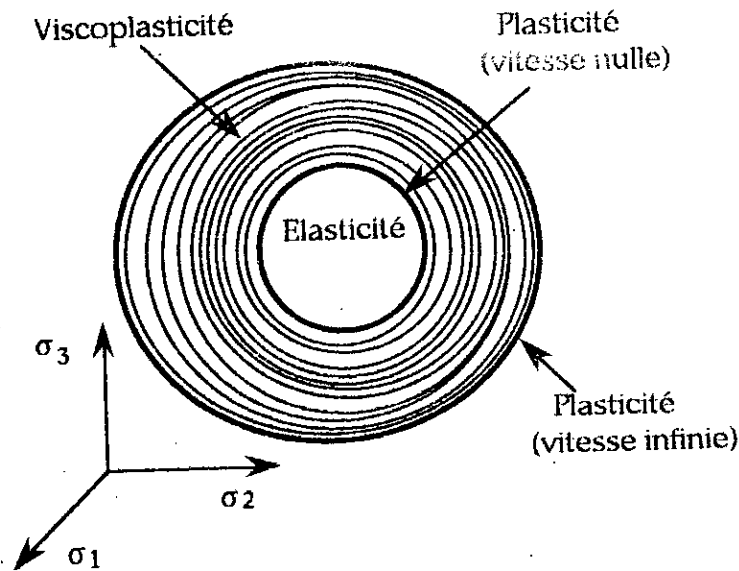


Fig 1.10 Surfaces équipotentielles de l'écoulement.  
Domaine viscoplastique.

Le schéma de plasticité indépendante du temps s'applique donc :

- soit au cas des chargements infiniment lents.
- soit au cas des chargements extrêmement rapides.
- soit au cas où les surfaces extérieure et intérieure sont confondues.

Il est maintenant nécessaire de choisir une loi spécifique définissant les déformations viscoplastiques. L'hypothèse la plus simple est que la vitesse de déformation viscoplastique ne dépend que de l'état de contrainte [7], [8] :

$$(\dot{\epsilon}_{ij})_{VP} = F(\sigma_{ij}) \quad (1.25)$$

Cette relation peut être généralisée en incluant l'effet de l'érouissage, de la température et de l'endommagement.

Une forme explicite de la fonction  $F$  de l'équation (1.25) est donnée par [7], [8] :

$$(\dot{\epsilon}_{ij})_{VP} = \gamma \Phi(f) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.26)$$

$\gamma$  étant un paramètre de viscosité.

Différents choix sont recommandés pour la fonction  $\Phi$ , les plus utilisés sont [7] :

$$\Phi(f) = \exp\left(M\left(\frac{f-k}{k}\right)\right) - 1 \quad (1.27)$$

$$\Phi(t) = \left( \frac{f - k}{k} \right)^N \quad (1.28)$$

M et N sont des constantes dépendant du matériau.

Nous remarquons qu'en substituant l'équation (1.28) dans l'équation (1.26), nous obtenons la loi de Norton qui décrit le fluage des métaux.

# CHAPITRE 2

## NOTIONS DE MECANIQUE DE LA RUPTURE

### 21/ GENERALITES SUR LA MECANIQUE LINEAIRE DE LA RUPTURE

La mécanique linéaire de la rupture est fondée sur une analyse élastique du champs de contrainte et de déformation en bout de fissure. Elle donne d'excellents résultats pour les matériaux élastiques fragiles.

La mécanique linéaire de la rupture suppose l'existence d'une fissure initiale dans la structure étudiée et un système de sollicitation extérieur. La fissure initiale est soit créée par endommagement, soit un défaut créé lors de l'élaboration du matériau, ou lors de sa mise en forme.

#### 21.1/ Modes de rupture

La rupture est caractérisé par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties. La coupure existante ou nouvellement créée est appelée fissure; c'est une surface de discontinuité pour le champ de déplacement.

En considérant une fissure dans un milieu plan et selon la direction relative de la sollicitation, nous distinguons trois cinématiques remarquables du déplacement relatif des lèvres de la fissure ou modes de rupture :

##### 21.1.1/ Mode I

ou mode d'ouverture, considéré comme étant le plus répandu et le plus dangereux (Fig. 2.1a). Le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par la discontinuité :

$$D_1 = u_1^+ - u_1^- = [u_1] = 0$$

$$D_2(x_1) = u_2^+ - u_2^- = [u_2] \neq 0 \quad (2.1)$$

$$D_3 = u_3^+ - u_3^- = [u_3] = 0$$

## 21.1.2/ Mode II

ou mode de cisaillement plan (Fig. 2.1b); la discontinuité de déplacement est donnée par :

$$D_1(x_1) = u_1^+ - u_1^- = [u_1] \neq 0$$

$$D_2 = u_2^+ - u_2^- = [u_2] = 0 \quad (2.2)$$

$$D_3 = u_3^+ - u_3^- = [u_3] = 0$$

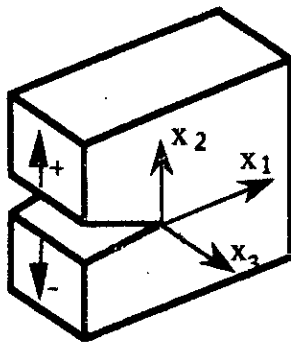
## 21.1.3/ Mode III

ou mode de cisaillement antiplan (Fig. 2.1c); la discontinuité de déplacement est donnée par:

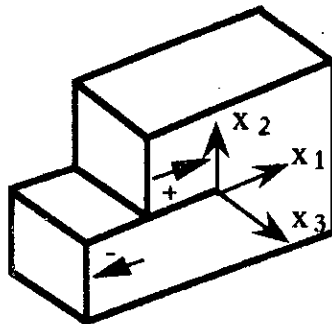
$$D_1 = u_1^+ - u_1^- = [u_1] = 0$$

$$D_2 = u_2^+ - u_2^- = [u_2] = 0 \quad (2.3)$$

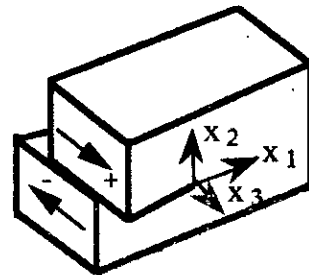
$$D_3(x_3) = u_3^+ - u_3^- = [u_3] \neq 0$$



-a- Ouverture



-b- Cisaillement plan



-c- Cisaillement antiplan

Fig. 2.1 Modes de rupture

Lorsque deux ou trois modes sont simultanément présents, nous dirons qu'il s'agit d'un mode mixte.

Lors du chargement d'une pièce mécanique fissurée, nous distinguons deux phases:

- Fissure immobile : La fissure s'ouvre sans que la surface de ses lèvres ne s'accroisse.
- Propagation de la fissure : La fissure se propage dans une direction donnée.



C'est dans la deuxième phase qu'il y a séparation effective du milieu continu, ce qui peut conduire à la rupture.

### 2.12/ Champs de contrainte et de déplacement

En élasticité linéaire, le système des équations de l'élasticité sans forces de volume et les conditions aux limites homogènes sur la fissure, les contraintes nulles à l'infini, admettent une solution non-triviale [9]. En déformation plane ou en contrainte plane, la répartition des déplacements et des contraintes est donnée par la solution d'Irwin [2] :

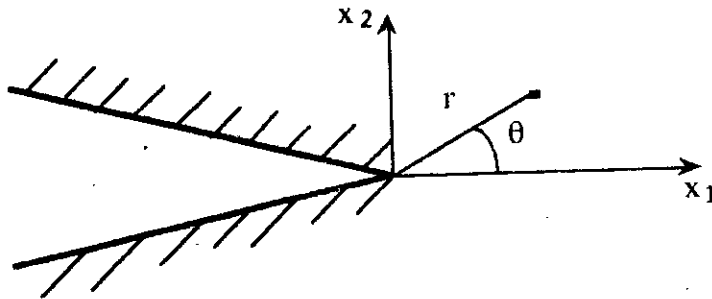


Fig. 2.2

#### Mode I :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\
 \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\
 \sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r) \\
 u_1 &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + O(r) \\
 u_2 &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + O(r)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

#### Mode II :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\
 \sigma_{22} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r) \\
 \sigma_{12} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\
 u_1 &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + O(r) \\
 u_2 &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( -1 + 2\nu - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + O(r)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Mode III :

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} + O(r) \\ \sigma_{23} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + O(r) \\ u_3 &= \frac{K_{III}}{\mu} \sin \frac{\theta}{2} + O(r)\end{aligned}\tag{2.6}$$

$\nu$  étant le coefficient de Poisson et  $\mu$  le module de cisaillement défini par :

$$2\mu(1+\nu) = E$$

Les facteurs  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  caractérisent à la fois la géométrie de la fissure et la nature des sollicitations. Ces facteurs sont proportionnels à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure; nous les appelons facteurs d'intensité de contrainte, respectivement en mode I, mode II et mode III.

Il a été montré qu'il existe une forme unique du premier terme des développements limités des champs de contrainte et de déformation au voisinage du bout de fissure. Il faut noter, de plus, que la théorie linéaire élastique se limite au premier terme de ces développements [10].

### 2.13/ Approches énergétiques

La rupture est un phénomène consommateur d'énergie. Cette consommation qui se produit lors de la propagation est due essentiellement à des mécanismes dissipatifs. L'évolution d'un système de solides avec fissure peut être décrite à partir des équations de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus. Nous distinguons deux approches :

#### 2.13.1/ Approche globale

Un apport d'énergie mécanique dans un système isolé sous forme de travail des forces extérieures produit trois effets distincts :

- Une variation de l'énergie dissipée de façon irréversible par le système.
- Une variation d'énergie cinétique du système.
- Une variation de l'énergie de déformation élastique emmagasinée dans le système.

Griffith [1] a, dans l'hypothèse la plus simple, admis que toute l'énergie libérée par une extension d'une fissure est absorbée par la création de nouvelles surfaces et que cette énergie est proportionnelle à ces dernières.

En appliquant le premier principe de la thermodynamique, le bilan énergétique s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial A} (E_p + E_c - E_d) = 0 \quad (2.7)$$

$E_p$  étant l'énergie potentielle,  $E_c$  l'énergie cinétique et  $E_d$  l'énergie dissipée lors de la création de nouvelles surfaces.

Ce bilan peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial}{\partial A} (W_{\text{ext}} - U_{\text{el}}) + \frac{\partial E_c}{\partial A} - \frac{\partial E_d}{\partial A} = 0 \quad (2.8)$$

$W_{\text{ext}}$  étant le travail des forces extérieures,  $U_{\text{el}}$  l'énergie de déformation élastique emmagasinée (travail des forces intérieures).

Lorsque la propagation se fait à déplacement constant et que le système est initialement au repos, les variations du travail des forces extérieures et de l'énergie cinétique sont nulles, l'équation (1.8) devient :

$$-\frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial a} = \frac{\partial E_d}{\partial a} = 2\gamma \frac{\partial A}{\partial a} \quad (2.9)$$

$\partial A$  étant la surface nouvellement créée, soit  $\partial A = B \partial a$

$B$  étant l'épaisseur de la fissure.

nous aboutissons donc à :

$$-\frac{1}{B} \left( \frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial a} \right)_d = 2\gamma = G \quad (2.10)$$

$\gamma$  étant l'énergie surfacique de rupture,  $G$  le taux d'énergie élastique disponible.

Lorsque la propagation de la fissure se fait à charge imposée, il a été montré que :

$$-\frac{1}{B} \left( \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial a} - \frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial a} \right)_p = G \quad (2.11)$$

Nous avons donc :

$$-\frac{1}{B} \left( \frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial a} \right)_d = -\frac{1}{B} \left( \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial a} - \frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial a} \right)_p = G \quad (2.12)$$

### 2.1.32/ Approche locale

Lorsque nous voulons connaître avec exactitude l'état d'endommagement au voisinage du bout de fissure, il est préférable d'utiliser une approche locale. Cela consiste à supposer que dans un élément de volume situé au voisinage du bout de fissure, la densité d'énergie disponible atteint une valeur critique.

## 2.1.3.3/ Intégrales de contour

Une autre façon de caractériser le champ singulier des contraintes par une approche énergétique est l'étude de certaines intégrales de contour que l'on peut déduire à partir de la loi de conservation d'énergie.

Soit un milieu plan élastique fissuré et soit un contour  $C$  entourant la pointe de la fissure,  $n$  étant sa normale extérieure (Fig. 2.3).

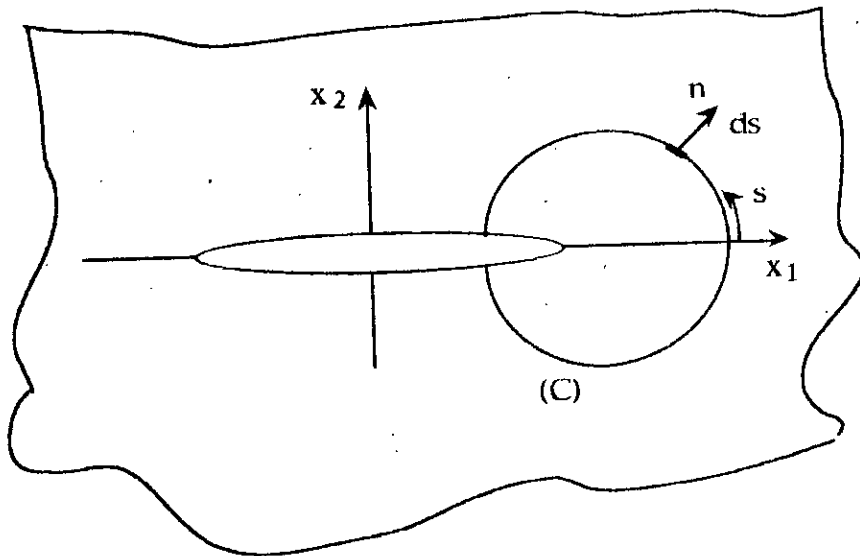


Fig. 2.3

L'intégrale de Rice est définie par :

$$J = \int_C \left( U_{el} n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds \quad (2.13)$$

L'intégrale de Bui, forme duale de la précédente, est définie par :

$$I = \int_C \left( -U_{el}^* n_1 + u_i n_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} \right) ds \quad (2.14)$$

$U_{el}$  étant la densité d'énergie de déformation élastique,  $U_{el}^*$  l'énergie complémentaire; nous avons donc :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_{el}}{\partial \epsilon_{ij}} \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial U_{el}^*}{\partial \sigma_{ij}}$$

Ces intégrales sont indépendantes du contour d'intégration. il a été montré que, pour un milieu élastique linéaire, le taux d'énergie élastique disponible ou taux de restitution d'énergie est strictement égal à ces intégrales [6].

$$G = J = I \quad (2.15)$$

## 2.1.4/ Critères de rupture

### 2.1.4.1/ Ténacité d'un matériau

La plupart des théories de la rupture fragile conduisent à la notion d'un seuil critique pour le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ . Nous avons alors un critère de rupture de la forme :

$$K_I = K_{Ic} \quad (2.16)$$

$K_{Ic}$  est une caractéristique physique du matériau appelée ténacité. Tant que  $K_I$  reste inférieur à  $K_{Ic}$ , il n'y a pas de propagation possible. Les valeurs de  $K_{Ic}$  sont déterminées expérimentalement sur des éprouvettes de forme simple.

### 2.1.4.2/ Critère énergétique

Le critère d'énergie surfacique se traduit par la stationnarité de l'énergie potentielle totale. Cela conduit à :

$$G \geq 2\gamma = G_c \quad (2.17)$$

$G_c$  étant l'énergie surfacique critique du matériau.

### 2.1.5/ Limites d'utilisation

La théorie repose sur l'élasticité et surtout sur la nature plane du problème; pour cela, il y a des restrictions à apporter dont la première concerne l'épaisseur de l'éprouvette. En effet, les valeurs critiques des facteurs d'intensité de contrainte rapportées à l'unité d'épaisseur, ne sont vraiment indépendantes de l'épaisseur que si celles-ci est supérieure à une certaine valeur  $B_0$  [9]. Sur la base de nombreuses expériences, il a été montré que [9] :

$$B_0 = 2,5 \left( \frac{K_{Ic}}{R_e} \right)^2 \quad (2.18)$$

$R_e$  étant la limite élastique du matériau.

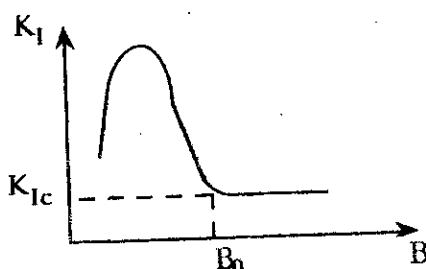


Fig 2.4 Valeur critique de  $K_{Ic}$ .

La deuxième restriction concerne la plasticité qui doit être confinée à la pointe de la fissure.

## 22/ MECANIQUE ELASTO-PLASTIQUE DE LA RUPTURE

L'analyse élastique cerne d'assez près la réalité physique pour les matériaux élastiques fragiles ou peu ductiles, mais elle est insuffisante lorsque les déformations plastiques interviennent dans un volume dont la dimension caractéristique dépasse 5 à 20% de la longueur de fissure [6].

### 22.1/ Extension de la mécanique linéaire de la rupture

La singularité du champ de contrainte à la pointe d'une fissure entraîne une plastification inévitable qui introduit une non-linéarité dans le diagramme charge-déplacement supposé linéaire en analyse élastique. Lorsque l'étendue de la plastification est limitée, le comportement global de la structure est proche d'un comportement élastique linéaire et lui est assimilé en introduisant des facteurs de correction de plasticité.

L'extension de la mécanique linéaire de la rupture consiste à remplacer le diagramme charge-déplacement non-linéaire par un diagramme linéaire équivalent; cette équivalence peut-être obtenue de deux manières:

- La charge critique est modifiée de façon à ce que l'énergie de déformation reste identique [11] (Fig. 2.9).

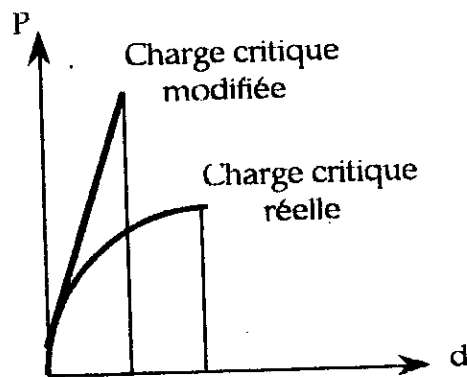


Fig. 2.9 Correction de la charge critique.

- La rigidité est modifiée soit directement [12], soit en modifiant la longueur de fissure (Fig. 2.10).

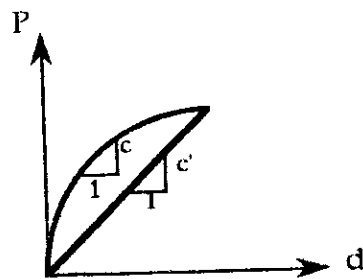


Fig. 2.10 Modification de la rigidité.

La modification de la longueur de fissure se fait de deux manières :

- En tenant compte de la zone plastique. Pour cela, Irwin [2] stipule que la plastification du matériau a le même effet qu'une fissure de longueur plus élevée. Cela revient à allonger fictivement la fissure d'une longueur égale au rayon de sa zone plastique (Fig. 2.11).

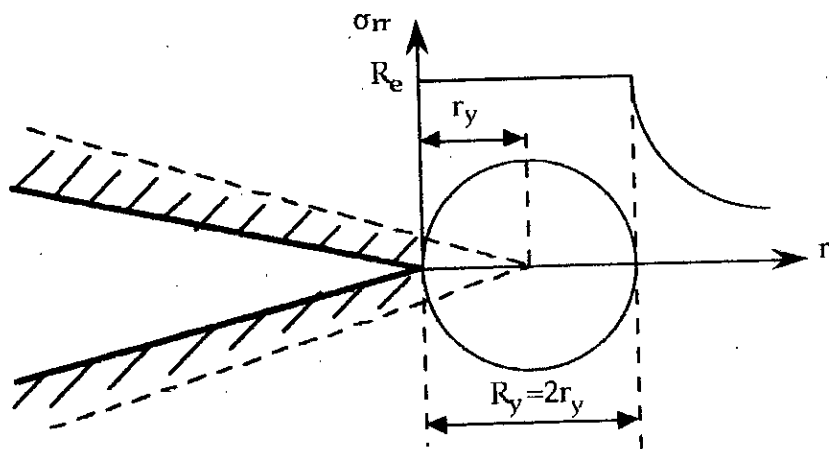
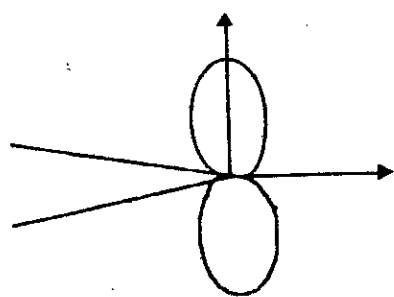


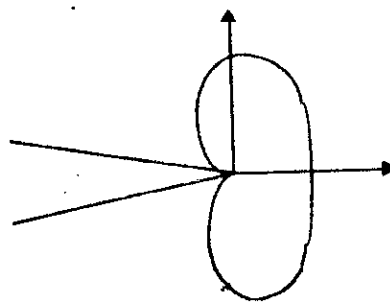
Fig. 2.11 Correction de plasticité selon Irwin.

- En calculant une longueur de fissure effective. Allen [13] a proposé de définir cette longueur expérimentalement.

Les formes approximatives des zones plastiques au voisinage du bout de fissure sont données par la figure (2.12) [10] :



-a- Déformation plane



-b- Contrainte plane

Fig. 2.12 Formes de la zone plastique en bout de fissure.

Ces contours ne sont qu'approximatifs, car ils sont calculés en appliquant le critère de Von-Mises aux contraintes singulières du domaine élastique, donc en supposant que les contraintes élastiques au-delà de la zone plastique ne sont pas affectées par l'existence de celles-ci [10].

Il faut noter que les dimensions de ces zones plastiques restent assez faibles pour des matériaux tenaces et ayant une limite d'élasticité moyenne.

Ces calculs supposent que la correction reste petite, c'est à dire que le chargement soit petit devant le chargement limite en l'absence de fissure. Il a été remarqué de plus, que l'approximation reste souvent bonne en déformation plane jusqu'à 50 à 60 % du chargement limite non-fissuré [10].

## 2.2.2/ Modèles élasto-plastiques de fissuration

### 2.2.2.1/ Modèle de Dugdale

Dugdale [14] suppose que la zone plastique s'étend à la pointe de la fissure sur une longueur  $a_{\text{eff}} - a = r_p$  et dans laquelle règnent des contraintes de cohésion dont l'amplitude est égale à la limite d'élasticité  $R_e$  (Fig. 2.13).

Dans cette zone, les atomes ou molécules sont écartés d'une distance  $\delta$ . cet écart résulte des contraintes de cohésion qui s'opposent à la séparation franche des lèvres de fissure. Ces contraintes de cohésion sont nulles à l'extrémité de la zone de cohésion ( $\delta = 0$ ) qui est indépendante du chargement et reste égale à elle-même dans une extension de la fissure. L'écartement des lèvres de fissure est donné par :

$$\delta = \frac{8R_e}{\pi E} a \log \left[ \sec \left( \frac{\pi \sigma_{\infty}}{2R_e} \right) \right] \quad (2.19)$$

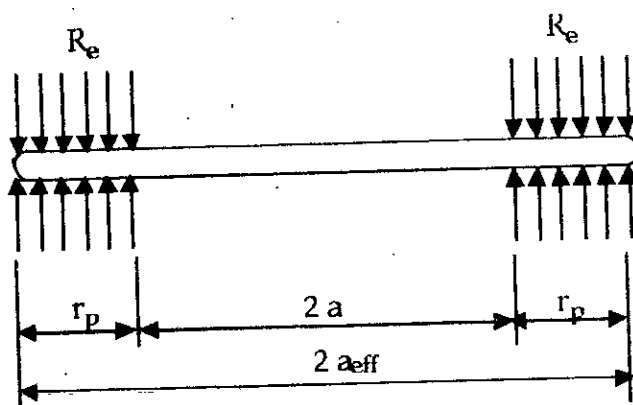


Fig. 2.13 Schéma du modèle de Dugdale.

### 2.2.2.2/ Solution H.R.R.

A partir de la loi d'écoulement d'un matériau écrouissable et de l'hypothèse d'indépendance de contour d'intégration du paramètre énergétique  $J$ , Hutchinson [4] et Rice et Rosegreen [5] ont pu déterminer analytiquement le champ de contrainte et de déformation en séparant les variables  $r$  et  $\theta$ . Le champ de contrainte présente une singularité en  $r^{-1/n+1}$ , celui des déformations en  $r^{n/n+1}$ .



$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(r,\theta) &= K r^{-1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \\
 \bar{\sigma}(r,\theta) &= K r^{-1/(n+1)} \tilde{\sigma}(\theta) \\
 \varepsilon_{ij}(r,\theta) &= a \varepsilon_y K^n r^{-n/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \\
 u_i(r,\theta) &= a \varepsilon_y K^n r^{1/(n+1)} \tilde{u}_i(\theta)
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

$K$  est une constante qu'il ne faut pas confondre avec le facteur d'intensité de contrainte,  $n$  est le coefficient d'écroûissage,  $a$  est une caractéristique du matériau,  $\varepsilon_y$  est la déformation à la limite d'élasticité.

### 2.2.3/ Critères d'amorçage

Nous pouvons distinguer les critères de rupture selon deux approches : une approche locale et une approche globale. Les critères peuvent aussi être classés en quatre familles : critères de contrainte, de déformation, énergétiques ou de transition entre deux états limites.

#### 2.2.3.1/ Ténacité apparente

La ténacité d'un matériau peut être calculée en terme de ténacité apparente  $K_{app}$  pour les critères considérés comme une extension de la mécanique linéaire de la rupture. La ténacité apparente est reliée au facteur d'intensité de contrainte équivalent élastique  $K_{1e}$  par la relation [3] :

$$K_{app} = K_{1e}^c \sqrt{\phi} \tag{2.21}$$

$\phi$  étant un facteur de correction de plasticité qui dépend de la modification apportée soit à la charge critique, soit à la rigidité comme cela est mentionné au paragraphe (3.1).

Le facteur d'intensité de contrainte équivalent élastique  $K_{1e}$  s'exprime par :

$$K_{1e}^c = \sigma_{\infty}^c \sqrt{\pi a} G_{\sigma} \left( \frac{a}{w} \right) \tag{2.22}$$

$G_{\sigma}(a/w)$  est un facteur de correction géométrique.

#### 2.2.3.2/ Critères énergétiques

Dans une approche locale, Guillemot [15] postule que la rupture se produira lorsque la densité d'énergie de déformation volumique atteindra une valeur critique :

$$W = W^*_c \tag{2.23}$$

$W^*_c$  étant la densité d'énergie spécifique de rupture.

Dans l'approche globale, Liebowitz [16] a proposé une généralisation du taux d'énergie élastique disponible au domaine élasto-plastique :

$$\frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial a} - \left( \frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial a} + \frac{\partial U_{\text{pl}}}{\partial a} \right) = 2\gamma' = \ddot{G} \quad (2.24)$$

$U_{\text{pl}}$  étant l'énergie de déformation plastique,  $\ddot{G}$  le taux d'énergie non-linéaire disponible.

Le critère d'énergie surfacique se traduit donc par :

$$\ddot{G} \geq 2\gamma' = \ddot{G}_c \quad (2.25)$$

Turner [17] a étendu le concept d'intégrale  $J$  au domaine élasto-plastique et a défini la quantité  $J$  par :

$$J = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} = \left[ \int_S P \Delta d \, ds - \Delta U_{\text{el}} - \Delta U_{\text{pl}} \right] \quad (2.26)$$

Le critère est défini par :

$$J = J_{1c} \quad (2.27)$$

$J_{1c}$  étant la ténacité énergétique du matériau.

### 2.2.3.3/ Critères de déformation critique

Selon une approche locale, Wells [18], Cottrel [19] et Barenblatt [20] ont émis l'hypothèse que l'écartement des lèvres de la fissure est une mesure de la déformation locale en fond de fissure. Cet écartement a été calculé à partir du modèle de Dugdale et est donné par :

$$\delta = \frac{8R_c}{\pi E} a \log \left[ \sec \left( \frac{\pi \sigma_{\infty}}{2R_c} \right) \right] \quad (2.28)$$

Le critère est donc défini par :

$$\delta = \delta_c \quad (2.29)$$

$\delta_c$  étant l'écartement de fissure critique.

Cottrel [19] a suggéré que l'écartement de fissure pouvait être lié à la déformation locale à rupture en utilisant le concept de micro-éprouvette, avec :

$$\epsilon_l^c = \text{Log} \left( \frac{l_0 + \delta_c}{l_0} \right) \quad (2.30)$$

$l_0$  étant la longueur de la micro-éprouvette.

Merkle et Randall [21] ont proposé une approche globale de la déformation critique en la calculant à partir du module tangent et d'une analyse élasto-plas-

tique des contraintes et déformations en fond de fissure basée sur la relation de Neuber.

## 2.2.4/ Avantages et inconvénients des critères de rupture

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, nous distinguons les critères de rupture selon deux approches : l'une locale, l'autre globale. L'approche locale semble plus rationnelle, car décrivant au mieux l'état de contrainte et de déformation au voisinage du bout de fissure, mais reste difficile à utiliser. En effet, il est évident que les mesures des déformations locales sont assez difficiles. En outre, pour utiliser un critère locale, de déformation par exemple, il faut calculer la déformation locale pour un chargement donné, pour la comparer à la valeur critique; or ce calcul est difficile, long et coûteux.

L'intérêt des critères énergétiques est qu'ils donnent une meilleure interprétation physique des phénomènes et de plus, les calculs sont généralement réalisés loin de la singularité comme c'est le cas des intégrales de contour. Seulement, il faut faire une analyse plastique suffisamment exacte du problème qui est souvent difficile. De plus, l'énergie, sous n'importe quelle forme, n'est pas une quantité mesurable expérimentalement.

L'avantage des critères globaux réside dans la simplicité de mesure. En effet, la déformation globale, par exemple, mesurée loin de la perturbation apportée par la fissure est un paramètre plus accessible que la déformation locale, bien qu'elle ne nous renseigne pas exactement sur l'état d'endommagement du matériau au voisinage du bout de fissure.

## 2.3/ FISSURATION PAR FLUAGE

La présence d'entailles ou de zones à fortes concentrations de contraintes au niveau de pièces mécaniques fonctionnant à haute température peut provoquer l'apparition de déformations viscoplastiques qui varient au cours du temps. C'est ce qui se passe, par exemple, pour les disques des turbines à gaz des moteurs d'avions [22].

L'importance de ces déformations engendre des décohésions qui peuvent conduire à une rupture prématurée : c'est la fissuration par fluage [6]. Dans ce cas, la fissure progresse même si la sollicitation reste constante; le phénomène s'accompagne donc d'effets du temps. Les phases primaire et secondaire du fluage sont présentes en tête de fissure et éventuellement dans l'ensemble du milieu. L'augmentation régulière de la vitesse de fluage tertiaire, conduit à la rupture totale.

# CHAPITRE 3

## INTRODUCTION DE MODELES ELASTO-PLASTIQUE ET ELASTO-VISCOPLASTIQUE DANS UN CODE D'ELEMENTS FINIS

Pour surmonter l'impossibilité de résoudre des problèmes continus réels, différentes méthodes ont été proposées dans le but d'approcher aussi précisément que possible la solution exacte du problème. En effet, le double processus de subdivision des systèmes en composants élémentaires dont le comportement peut être facilement appréhendé, et de reconstruction du système initial à partir de ses composants est un moyen naturel d'étude utilisé par l'ingénieur et le scientifique.

Parmi les méthodes de discrétisation les plus importantes et les plus utilisées dans le calcul des structures, la méthode des éléments finis qui consiste à subdiviser le milieu continu en un nombre fini d'éléments, et la méthode des équations intégrales qui consiste à subdiviser le contour du milieu continu en un nombre fini d'éléments. Cette dernière qui est moins connue et qui est d'une exploitation beaucoup plus récente, présente certains avantages par rapport à la première dont les plus importants sont :

- simplification du maillage.
- réduction de la taille du système d'équations à résoudre.

possibilité de calculer les contraintes et les déformations en tout point du milieu

Cette méthode présente néanmoins des inconvénients dont les plus importants sont :

- matrice du système d'équations nettement moins bien conditionnée.

- possibilité de calcul d'intégrales singulières.
- formulation assez complexe surtout pour des problèmes non-linéaires.

Cependant, avant de pouvoir éventuellement déterminer si, ou dans quel cas, une méthode est plus avantageuse que l'autre, il faudrait alors comparer temps de calcul, convergence et précision.

### 3.1/ DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS

Dans la méthode des éléments finis, la discrétisation est réalisée en subdivisant le milieu continu en un certain nombre d'éléments séparés par des lignes ou des surfaces imaginaires. Ces éléments sont supposés s'interconnecter en un nombre fini de points situés sur leur frontière et qu'on appelle nœuds. Les déplacements de ces nœuds seront les inconnus de base du problème.

Le choix d'un ensemble de fonctions permettra de définir de façon unique les déplacements en tout point interne à l'élément en fonction des déplacements nodaux [23].

Nous représentons approximativement les déplacements  $u_i$  en chaque point de l'élément par :

$$u_i = N_{ij} d_j \quad i = 1, m \quad j = 1, n \quad (3.1)$$

$m$  étant la dimension du problème,  $n$  le nombre de nœuds total,  $d_j$  sont les déplacements aux nœuds; c'est à dire que nous imposons que le déplacement approché coïncide avec le déplacement exacte en ces nœuds [24].

Les composantes  $N_{ij}$  sont des fonctions des coordonnées du point qui doivent être choisies de telle sorte que nous obtenions les bons déplacements nodaux par substitution des coordonnées des nœuds; ces fonctions sont dénomées fonctions de forme.

L'approximation par éléments finis présente deux aspects distincts [24] :

- Il faut d'abord définir la géométrie des éléments.
- Il faut ensuite construire les fonctions d'interpolation correspondant à chaque élément.

La partition du milieu en éléments doit respecter deux règles [24] :

- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments.
- L'ensemble de tous les éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du milieu réel à étudier. Cette condition exclut les "trous" entre éléments.

Il existe plusieurs types d'éléments définis par [24] :

- Leur forme.
- Leur nombre de nœuds.
- Les coordonnées de leurs nœuds.
- Le nombre de degrés de liberté par nœud.
- La base polynomiale de l'approximation.

Dans un milieu bidimensionnel, la discrétisation peut se faire par des triangles ou des quadrilatères; les nœuds se trouvant au niveau de chaque sommet. Nous notons que la précision peut être améliorée en ajoutant des nœuds sur la frontière et/ou à l'intérieur de l'élément [24].

### 3.2/ HYPOTHESES FONDAMENTALES

Dans cette étude, nous sommes amené à résoudre un problème aux limites non-linéaire. Pour cela, nous avons fait certaines hypothèses simplificatrices :

- Chargement quasi-statique; cela permet de négliger les termes dynamiques.
- Petits déplacements; cela permet de confondre les variables d'Euler et celles de Lagrange et de négliger le changement de configuration [25].

### 3.3/ FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

#### 3.3.1/ Principe des travaux virtuels

Soit un milieu  $\Omega$  de contour  $\Gamma$  sous l'action d'une force de volume  $b_i$  et d'une force de surface  $t_i$ . Le principe des travaux virtuels stipule qu'en imposant un déplacement virtuel arbitraire  $\delta u_i$ , l'énergie de déformation interne et le travail des forces extérieures sont égaux.

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \quad (3.2)$$

#### 3.3.2/ Approximation du problème par éléments finis

Comme nous l'avons mentionné auparavant, la discrétisation en éléments finis permet d'exprimer les déplacements en fonction des déplacements nodaux. La formulation isoparamétrique permet d'évaluer séparément la contribution de chaque élément. Pour cela, les déplacements sont exprimés de manière usuelle pour un élément (e) comme :

$$\begin{aligned} u_i &= N_{ij} d_j \\ \delta u_i &= N_{ij} \delta d_j \end{aligned} \quad (3.3)$$

Afin d'obtenir une bonne précision, nous avons opté pour les éléments isoparamétriques d'ordre élevé à savoir des éléments rectangulaires à huit nœuds (Fig. 3.1).

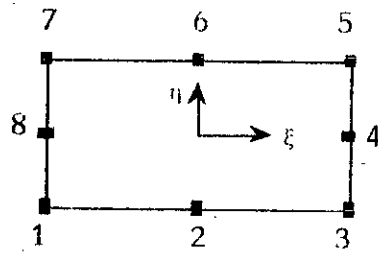


Fig. 3.1

Nous notons que l'évaluation de la contribution de chaque élément nécessite l'emploi d'un repère local lié à l'élément.

Les fonctions de forme correspondantes sont données par [7] :

$$N_{ij} = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad \text{pour les nœuds des coins soit } j = 1, 3, 5, 7 \quad (3.4)$$

$$N_{ij} = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi^2) \quad \text{Pour les nœuds des milieux de côtes soit } j = 2, 4, 6, 8.$$

$\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées exprimées dans le repère lié à l'élément.

Une fois le champ de déplacement connu, nous pouvons déterminer le champ de déformation en faisant l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations, soit :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.5)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_j} d_j + \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_i} d_j \right) \quad (3.6)$$

Pour des raisons de simplicité,  $\epsilon_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$  seront représentés sous forme de vecteurs  $\epsilon_i$  et  $\sigma_i$ , nous avons donc :

$$\epsilon_i = N_{ij,j} d_j \quad (3.7)$$

$B_{ij}$  sont les composantes de la matrice des dérivées des fonctions de forme.

Le champ de contrainte est déterminé à partir du champ de déformation par :

$$\sigma_i = H(\epsilon_i) \quad (3.8)$$

Dans le cas d'un comportement élastique, (3.8) devient :

$$\sigma_i = D_{ij} \epsilon_j \quad (3.9)$$

$D_{ij}$  sont fonction des constantes élastiques du matériau.

En substituant (3.3) et (3.7) dans l'expression du principe des travaux virtuels (3.2), nous obtenons :

$$\delta d_i \left[ \int_{\Omega} B_{ij} \sigma_j d\Omega - \int_{\Omega} N_{ij} b_j d\Omega - \int_{\Gamma} N_{ij} t_j d\Gamma \right] = 0 \quad (3.10)$$

$\delta d_i$  sont les déplacements nodaux virtuels arbitraires. L'équation (3.10) se réduit donc à :

$$\int_{\Omega} B_{ij} \sigma_j d\Omega - \int_{\Omega} N_{ij} b_j d\Omega - \int_{\Gamma} N_{ij} t_j d\Gamma = 0 \quad (3.11)$$

L'intégration se fera au niveau de chaque élément. L'élément de volume est donc donné par :

$$d\Omega = \det J d\xi d\eta \quad (3.12)$$

$J$  est le Jacobien défini par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

L'équation (3.11) devient pour un comportement élastique :

$$\int_{\Omega} B_{il} D_{il} B_{lj} d_j d\Omega - \int_{\Omega} N_{ij} b_j d\Omega - \int_{\Gamma} N_{ij} t_j d\Gamma = 0 \quad (3.14)$$

que nous pouvons mettre sous la forme :

$$k_{ij} d_j = f_{Bi} + f_{Ti} \quad (3.15)$$

avec

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_{il} D_{il} B_{lj} d_j d\Omega$$

$$f_{Bi} = \int_{\Omega} N_{ij} b_j d\Omega \quad (3.16)$$

$$f_{Ti} = \int_{\Gamma} N_{ij} t_j d\Gamma$$

$k_{ij}$  sont les composantes de la matrice de rigidité de l'élément (e),  $(f_{Bi} + f_{Ti})$  sont les forces nodales équivalentes.



Pour tenir compte de la contribution de tous les éléments, nous réalisons l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires et des vecteurs forces nodales par la sommation, au niveau de chaque degrés de liberté, des contributions des éléments. Nous aboutissons donc à un système d'équations global :

$$K_{ij} d_j = F_i \quad (3.17)$$

que nous pouvons résoudre soit par des méthodes directes, soit par des méthodes itératives.

### 3.4/ MODELISATION ELASTO-PLASTIQUE

La surface de charge s'écrit :

$$f(\sigma_i, p) = 0 \quad (3.18)$$

en différentiant l'équation (3.18), nous aboutissons à la condition de consistance (§ 1.1.4) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0 \quad (3.19)$$

$$\text{ou } a_i d\sigma_i - \Lambda d\lambda = 0 \quad (3.20)$$

avec

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \right]^T \quad (3.21)$$

et

$$\Lambda = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p} dp \quad (3.22)$$

$a_i$  est appelé vecteur d'écoulement plastique.

Les relations de Prandtl-Reuss s'écrivent :

$$d\epsilon_i = D'_{ij} d\sigma_j + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \quad (3.23)$$

$D'_{ij}$  étant les composantes de la matrice inverse des constantes élastiques. En multipliant les deux membres de l'équation (3.23) par  $dD_i = a_j D_{ij}$  et en éliminant le terme  $a_j d\sigma_j$ , nous obtenons :

$$d\lambda = \frac{1}{A + a_j D_{ij} a_i} a_j dD_i d\epsilon_i \quad (3.24)$$

En substituant l'équation (3.24) dans les relations de Prandtl-Reuss (3.23), nous obtenons la relation incrémentale contrainte-déformation :

$$d\sigma_i = (D_{ep})_{ij} d\epsilon_j \quad (3.25)$$

avec

$$(D_{ep})_{ij} = D_{ij} \frac{dD_i dD_j}{A + dD_i a_j} \quad (3.26)$$

et  $dD_i = D_{ij} a_j$

Il reste à déterminer le scalaire  $A$ ; pour cela, l'équation (3.18) est réécrite comme :

$$f(\sigma_i, p) = F(\sigma_i) - R_e(p) = 0 \quad (3.27)$$

et  $A$  devient donc :

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p} dp = \frac{1}{d\lambda} \frac{dR_e}{dp} dp \quad (3.28)$$

Nous utilisons le travail plastique dissipé comme variable scalaire évaluant l'état d'écroutissement du matériau.

$$dp = \sigma_i (d\epsilon_i)_p \quad (3.29)$$

A partir de l'équation (3.29) et (1.13), nous obtenons :

$$dp = \sigma_i d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \quad (3.30)$$

soit  $dp = d\lambda a_i \sigma_i \quad (3.31)$

Pour le cas d'un problème uniaxial,  $\sigma_i = \sigma - R_e$  et  $(d\epsilon_i)_p = d\epsilon_p$ , où  $\sigma$  et  $\epsilon_p$  sont respectivement la contrainte et la déformation équivalentes.

$$dp = R_e d\epsilon_p = d\lambda a_i \sigma_i$$

Nous avons de plus :

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = \frac{dR_e}{d\epsilon_p} = H' \quad (3.32)$$

En appliquant le théorème d'Euler pour les fonctions homogènes d'ordre un, nous avons à partir de l'équation (3.27) [7] :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \sigma_i = R_e \quad (3.33)$$

où  $a_i \sigma_i = R_e$

En substituant les équations (3.32) et (3.33) dans les équations (3.31) et (3.28), nous obtenons :

$$d\lambda = d\bar{\epsilon}_p \quad (3.34)$$

$$A = H'$$

A est donc la pente locale de la courbe contrainte-déformation plastique.

Pour un problème élasto-plastique, la rigidité du matériau varie continuellement, de plus le caractère incrémental de la relation contrainte-déformation exige l'utilisation d'une méthode de résolution itérative. En choisissant une solution initiale, le principe des travaux virtuels n'est pas vérifié à chaque itération et nous avons :

$$\Psi_i = \int_{\Omega} B_{ij} \sigma_j d\Omega - \left( f_i + \int_{\Omega} N_{ij} b_j d\Omega \right) \neq 0 \quad (3.35)$$

$\Psi_i$  étant le vecteur des forces résiduelles.

Une forme incrémentale de l'équation (3.35) devient donc nécessaire soit :

$$\Delta\Psi_i = \int_{\Omega} B_{ij} \Delta\sigma_j d\Omega - \left( \Delta f_i + \int_{\Omega} N_{ij} \Delta b_j d\Omega \right) \quad (2.36)$$

En substituant la relation incrémentale contrainte-déformation dans l'équation (3.36), nous obtenons :

$$\Delta\Psi_i = K_{Tij} d_j - \left( \Delta f_i + \int_{\Omega} N_{ij} \Delta b_j d\Omega \right) \quad (3.37)$$

où

$$K_{Tij} = \int_{\Omega} B_{il} (D_{ep})_{il} B_{lj} d\Omega \quad (2.38)$$

expression similaire à celle d'un comportement élastique linéaire.

La forme incrémentale revient donc à linéariser le système d'équations à résoudre.

### 35/ MODELISATION ELASTO-VISCOPLASTIQUE

En utilisant l'équation (3.21), nous écrivons l'équation (1.26) comme :

$$(\dot{\epsilon}_i)_{vp} = \gamma \Phi(f) a_i \quad (3.39)$$

nous définissons l'incrément de déformation  $(\Delta\epsilon_i^n)_{vp}$  qui survient au cours de l'intervalle de temps  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  en utilisant un algorithme d'Euler par :

$$\Delta(\epsilon_i^n)_{vp} = \Delta t_n \left[ (1-\theta) (\dot{\epsilon}_i^n)_{vp} + \theta (\dot{\epsilon}_i^{n+1})_{vp} \right] \quad (3.40)$$

$(\dot{\epsilon}_i^{n+1})_{vp}$  est obtenue en développant  $(\dot{\epsilon}_i^n)_{vp}$  en série de Taylor :

$$(\dot{\epsilon}_i^{n+1})_{vp} = (\dot{\epsilon}_i^n)_{vp} + \left( \frac{\partial (\dot{\epsilon}_i)_{vp}}{\partial \sigma_i} \right)^n \Delta \sigma_i^n \quad (3.41)$$

ou

$$(\dot{\epsilon}_i^{n+1})_{vp} = (\dot{\epsilon}_i^n)_{vp} + H_{ij}^n \Delta \sigma_j^n \quad (3.42)$$

avec

$$H_{ij}^n = \left( \frac{\partial (\dot{\epsilon}_i)_{vp}}{\partial \sigma_i} \right)^n = H_{ij}^n(\sigma_k^n) \quad (3.43)$$

$\Delta \sigma_i^n$  est l'incrément de contrainte qui survient au cours de l'intervalle de temps actuel  $\Delta t_n$ .

L'équation (3.40) pourra donc être réécrite comme :

$$(\Delta \epsilon_i^n)_{vp} = \epsilon_{vpi}^n + C_{ij}^n \Delta \sigma_j^n \quad (3.44)$$

avec

$$C_{ij}^n = \theta \Delta t_n H_{ij}^n \quad (3.45)$$

L'incrément de contrainte  $\Delta \sigma_j^n$  est donné par :

$$\Delta \sigma_j^n = D_{ij} (\Delta \epsilon_i^n)_e = D_{ij} (\Delta \epsilon_i^n - (\Delta \epsilon_i^n)_{vp}) \quad (3.46)$$

$D_{ij}$  sont fonction des constantes élastiques.

L'incrément de déformation totale est relié à l'incrément de déplacement par :

$$\Delta \epsilon_i^n = B_{ij} \Delta d_j^n \quad (3.47)$$

$B_{ij}$  étant les dérivées des fonctions de forme.

En substituant  $(\Delta \epsilon_i^n)_{vp}$  de l'équation (3.44), l'incrément de contrainte devient

$$\Delta \sigma_j^n = \tilde{D}_{ij}^n (B_{jl} \Delta d_l^n - (\dot{\epsilon}_i^n)_{vp} \Delta t_n) \quad (3.48)$$

avec

$$\tilde{D}_{ij}^n = (I_{ik} + D_{il} C_{lk}^n)^{-1} D_{kj} = (D_{ij}^{-1} + C_{ij}^n)^{-1} \quad (3.49)$$

Les équations d'équilibre qui doivent être satisfaites à chaque instant  $t_n$  sont :

$$\int_{\Omega} B_{ij} \sigma_j^n d\Omega + f_i^n = 0 \quad (3.50)$$

$f_i^n$  est le vecteur des forces nodales équivalentes.

Durant un intervalle de temps, les équations d'équilibre qui doivent être satisfaites sont données sous forme incrémentale :

$$\int_{\Omega} B_{ij} \Delta \sigma_j^n d\Omega + \Delta f_i^n = 0 \quad (3.51)$$

$\Delta f_i^n$  représente la variation de charge durant l'intervalle  $\Delta t_n$ . En substituant (3.44) et (3.48) dans les équations d'équilibre sous forme incrémentale, nous obtenons :

$$K_{Tij}^n \Delta d_j^n = \Delta V_i^n \quad (3.52)$$

expression similaire à celle d'un comportement élastique linéaire.

$K_{Tij}$  étant la matrice de rigidité tangentielle donnée par :

$$K_{Tij}^n = \int_{\Omega} B_{il} \tilde{D}_{il}^n B_{lj} d\Omega \quad (3.53)$$

$\Delta V_i^n$  le vecteur des incréments de pseudo-forces donné par :

$$\Delta V_i^n = \int_{\Omega} B_{il} \tilde{D}_{lj}^n (\dot{\epsilon}_j^n)_{vp} \Delta t_n d\Omega + \Delta f_i^n \quad (3.54)$$

L'incrément de déplacement est donc donné par :

$$\Delta d_j^n = [K_{Tij}^n]^{-1} \Delta V_i^n \quad (3.55)$$

La contrainte et le déplacement sont donnés par :

$$\begin{aligned} \sigma_i^{n+1} &= \sigma_i^n + \Delta \sigma_i^n \\ d_i^{n+1} &= d_i^n + \Delta d_i^n \end{aligned} \quad (3.56)$$

L'incrément de déformation viscoplastique est donné par :

$$(\Delta \epsilon_i^n)_{vp} = B_{ij} \Delta d_j^n - [\tilde{D}_{ij}^n]^{-1} \Delta \sigma_j^n \quad (3.57)$$

et la déformation viscoplastique est donnée par :

$$(\epsilon_i^{n+1})_{vp} = (\epsilon_i^n)_{vp} + (\Delta \epsilon_i^n)_{vp} \quad (3.58)$$

le processus se poursuit jusqu'à ce que la vitesse de déformation viscoplastique s'annule.

### 3.6/ EXPRESSIONS DE BASE POUR LES PROBLEMES BIDIMENSIONNELS

Pour connaître l'état de contrainte en un point d'un milieu considéré, il suffit de connaître les vecteurs contraintes qui agissent sur trois plans perpendiculaires entre eux en ce point. Les équations de transformation de coordonnées

servent alors à déterminer le vecteur contrainte en ce point relativement à n'importe quel autre plan. Il faut donc connaître les neuf composantes des trois vecteurs contrainte définies par le tenseur :

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

La symétrie de ce tenseur des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) conduit à dire que six composantes suffisent pour définir l'état de contrainte au point considéré. De même, six composantes suffisent pour définir l'état de déformation au point considéré. Le tenseur des déformations, lui aussi symétrique, est donné par :

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

La loi de comportement élastique liant le tenseur des contraintes à celui des déformations est donnée par :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

$D_{ijkl}$  sont les composantes de la matrice d'élasticité fonctions des constantes élastiques du matériau.

Comme nous avons vu précédemment (§ 3.3.2), pour des raisons de simplification des calculs numériques, les tenseurs de contrainte et de déformation sont représentés sous forme de vecteurs; la loi de comportement élastique devient donc :

$$\sigma_i = D_{ij} \epsilon_j$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^t$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}\}^t$$

Pour les problèmes bidimensionnels plans, les vecteurs contrainte et déformation sont indépendants de la coordonnée  $x_3$  et sont donnés par :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^t$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}\}^t$$

avec

$\sigma_{33} = 0$  en contrainte plane c'est à dire en faisant l'hypothèse que l'épaisseur est faible comparée aux autres dimensions; dans ce cas :

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Les contraintes principales déviatoriques sont les racines de l'équation :

$$t^3 - J_2' t - J_3' = 0 \quad (3.59)$$

En posant  $t = r \sin \theta$ , nous obtenons :

$$\sin^3 \theta - \frac{J_2'}{r^2} \sin \theta - \frac{J_3'}{r^3} = 0 \quad (3.60)$$

En comparant l'équation (3.60) à l'identité trigonométrique :

$$\sin^3 \theta - \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta = 0 \quad (3.61)$$

nous obtenons :

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2'} \quad (3.62)$$

$$\sin 3\theta = -\frac{4J_3'}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3'}{J_2'^{3/2}} \quad (3.63)$$

Les contraintes principales déviatoriques sont données par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1' \\ \sigma_2' \\ \sigma_3' \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{J_2'}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin \theta \\ \sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Le critère de Tresca peut s'écrire donc en fonction des invariants scalaires comme :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sqrt{J_2'}}{\sqrt{3}} \left[ \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) - \sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) \right] = R_e(p) \quad (3.65)$$

soit

$$2\sqrt{J_2'} \cos \theta = R_e(p) = \sqrt{3} k(p) \quad (3.66)$$

Le critère de Von-Mises reste inchangé soit :

$$\sqrt{J_2'} = k(p) \quad (3.67)$$

ou

$$\sqrt{3J_2'} = R_e(p)$$

Le vecteur d'écoulement plastique peut s'écrire aussi comme :

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2'}} \frac{\partial \sqrt{J_2'}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_i} \quad (3.68)$$

En différenciant l'équation (3.63), nous obtenons :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma_i} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{J_2^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_i} - \frac{3J_3}{J_2^2} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_i} \quad (3.69)$$

En substituant l'équation (3.12) dans l'équation (3.11), le vecteur d'écoulement plastique aura la forme :

$$a_i = C_1 a_{1i} + C_2 a_{2i} \quad (3.70)$$

avec  $a_{1i} = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_i}$  et  $a_{2i} = \frac{\partial \sqrt{J_3}}{\partial \sigma_i}$

les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont données dans le tableau 3.1 pour les critères de plasticité de Tresca et de Von-Mises.

Critère de plasticité	Tresca	Von-Mises
$C_1$	$2 \cos \theta (1 + \tan \theta \tan 3\theta)$	$\sqrt{3}$
$C_2$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{J_2 \cos 3\theta}$	0

Tableau 3.1

De plus, le vecteur  $d_{Di}$  est donné par :

- En déformation plane :

$$\{d_{Di}\} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_1 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_1 \\ \frac{E}{2(1+\nu)} a_3 \end{pmatrix}$$

- En contrainte plane :

$$\{d_{Di}\} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_2 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_2 \\ \frac{E}{2(1+\nu)} a_3 \end{pmatrix}$$



avec 
$$M_1 = \frac{E\nu(a_1+a_2)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad M_2 = \frac{E\nu(a_1+a_2)}{1-\nu^2}$$

$a_1, a_2$  et  $a_3$  sont les composantes du vecteur d'écoulement plastique.

Points singuliers de la surface de charge :

Eventuellement, il peut exister des points singuliers notamment pour le critère de Tresca où les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont indéterminées pour  $\theta = \pm 30^\circ$  (coins de la surface de charge).

Cette indétermination peut être levée en retournant à l'expression originale du critère, soit :

$$2 \sqrt{J'_2} \cos \theta = R_e(p)$$

pour  $\theta = 30^\circ$ , nous avons : 
$$\sqrt{3} J'_2 = R_e(p)$$

résultat confirmé par la figure (1.8) qui montre que la surface de charge de Von-Mises (cylindre) passe par les coins de l'hexagone de Tresca.

**3.6.2/ Problème élasto-viscoplastique**

Le calcul de l'incrément de déformation viscoplastique (3.44) exige l'évaluation de la matrice  $C_{ij}^n$  proportionnelle à la matrice  $H_{ij}^n$ .

$$H_{ij}^n = \left( \frac{\partial(\dot{\epsilon}_i)_{vp}}{\partial \sigma_j} \right)^n$$

$$C_{ij}^n = \theta \Delta t_n H_{ij}^n$$

A partir de (3.39) et (3.43) nous avons :

$$H_{ij}^n = \gamma \left[ \Phi \frac{\partial a_i}{\partial \sigma_j} + \frac{d\Phi}{df} a_i a_j \right] \tag{3.71}$$

d'après l'équation (3.67) et pour le critère de plasticité de Von-Mises, nous avons :

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \sqrt{3} J'_2}{\partial \sigma_i} \tag{3.72}$$

ou

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial J'_2} \frac{\partial J'_2}{\partial \sigma_i} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{J'_2}} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

soit

$$a_i a_j = \frac{3}{4 J'_2} M_{2ij} \tag{3.74}$$

avec

$$M_{2\ ij} = \begin{vmatrix} \sigma'_1{}^2 & \sigma'_1\sigma'_2 & \sigma'_1\sigma'_3 \\ \sigma'_1\sigma'_2 & \sigma'_2{}^2 & \sigma'_2\sigma'_3 \\ \sigma'_1\sigma'_3 & \sigma'_2\sigma'_3 & \sigma'_3{}^2 \end{vmatrix} \quad (3.75)$$

nous avons aussi à partir de l'équation (3.73) :

$$\frac{\partial a_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J'_2}} M_{1\ ij} - \frac{\sqrt{3}}{4J'_2{}^{3/2}} J'_2 M_{2\ ij} \quad (3.76)$$

avec

$$M_{1\ ij} = \begin{vmatrix} 3/2 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (3.77)$$

Les expressions de  $\frac{\partial a_i}{\partial \sigma_j}$  et  $a_i a_j$  ainsi déterminées, l'évaluation de la matrice  $H_{ij}^n$  dépend du choix de la fonction d'écoulement viscoplastique  $\Phi$ .

### 3.7/ PRESENTATION DU CODE DE CALCUL

#### 3.7.1/ Structure du code de calcul

Le calcul numérique a été réalisé sur la base du programme PLANET élaboré par Hinton et Owen [7]. Ce programme permettait initialement, en se basant sur une formulation isoparamétrique en déplacement et sur la théorie incrémentale d'élasto-plasticité, de déterminer l'état de contrainte et les zones plastifiées de structures bidimensionnelles planes (contrainte plane, déformation plane, problèmes axisymétriques) dont le matériau obéit à une loi de comportement élasto-plastique à écrouissage linéaire idéalisé (pente locale de la courbe contrainte-déformation plastique constante). Le programme a été modifié et amélioré en vue de déterminer les états de contrainte et de déformation ainsi que les zones plastifiées de structures bidimensionnelles planes dont le matériau peut présenter soit un comportement élastique, soit un comportement élasto-plastique, soit un comportement élasto-viscoplastique à écrouissage non-linéaire (la pente locale de la courbe dépend de la déformation plastique). De plus, la détermination des champs de déformation en fond d'entaille, qui est l'objet de notre étude, exige un maillage très fin au voisinage de cette dernière. Pour cela, un sous-programme permettant de réaliser le maillage automatique; à savoir calcul des coordonnées des nœuds et leur numérotation, a été incorporé. Il suffira alors de définir le contour de la structure à étudier et le degré d'affinité du maillage. La figure 3.3 donne la structure du programme de calcul après modifications.

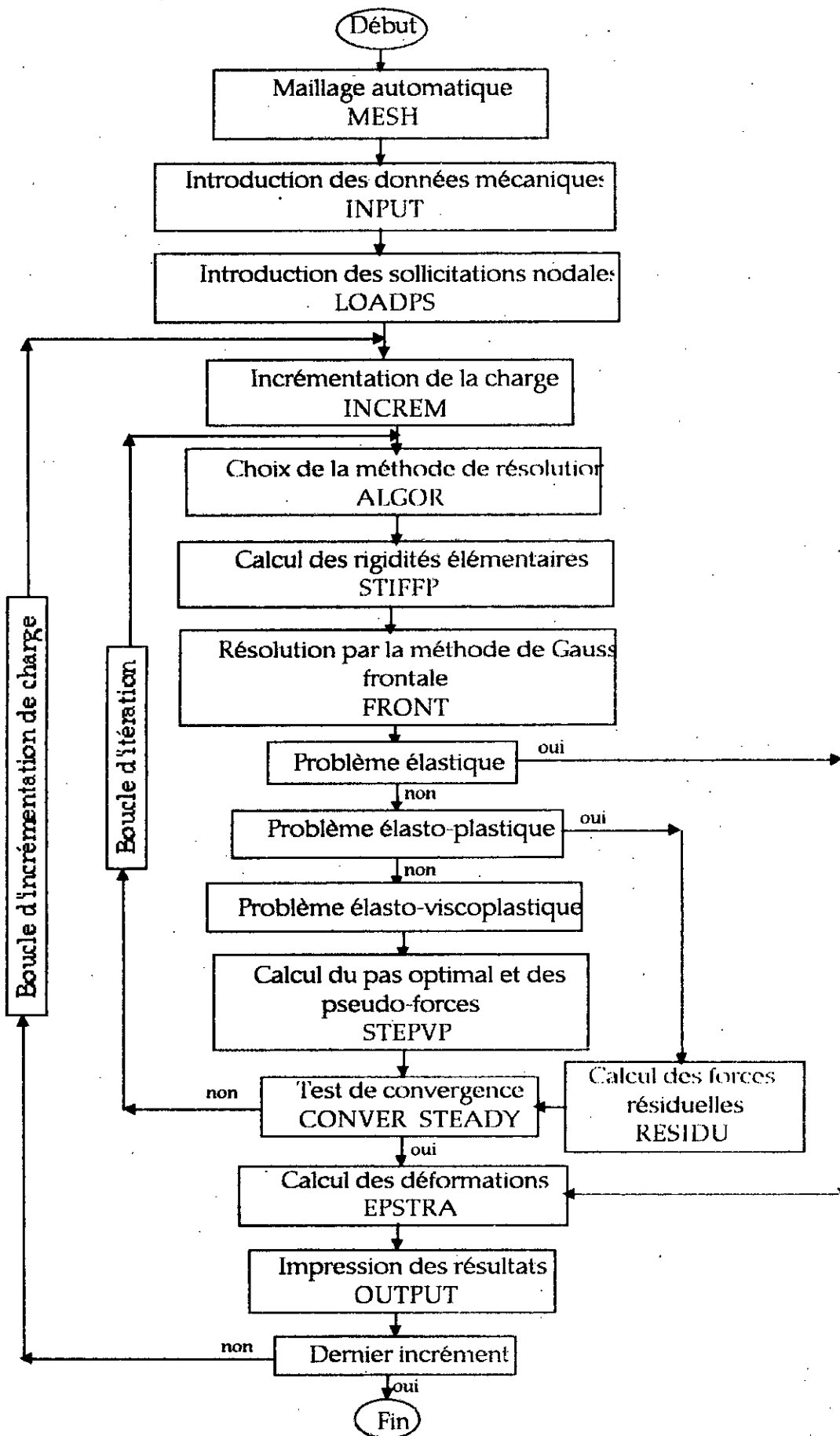


Fig. 3.3 Structure du code de calcul

### 3.7.2/ Méthodes de résolution des systèmes d'équations non-linéaires

La majorité des algorithmes conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération. Pour notre cas, nous avons choisi de résoudre les systèmes d'équations linéaires obtenus à chaque itération par la méthode de Gauss frontale qui combine la factorisation de Gauss à une optimisation de la taille mémoire. La méthode n'utilise, à un instant donné, qu'un sous-ensemble de la matrice du système, qui n'est jamais stockée en mémoire centrale. Cette particularité offre un gain sensible d'espace mémoire par rapport à un "stockage par bande" ou à un "stockage skyline" [26].

Le choix de l'algorithme de résolution doit tenir compte de plusieurs facteurs [24] :

- Type de non-linéarité.
- Existence d'une ou plusieurs solutions.
- Précision et rapidité de convergence désirées.
- Risques de divergence.

Quatre algorithmes sont développés dans le code de calcul que nous avons utilisé pour la résolution du système d'équations :

$$K_{ij} d_j - f_i = 0 \quad (3.78)$$

#### 3.7.2.1/ Méthode de substitution

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions  $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(r)}$  tel que pour la  $i^{\text{ème}}$  itération nous avons :

$$\begin{aligned} \Psi_i(d_i^{(r)}) &= f_i - K_{ij}(d_i^{(r)}) d_j^{(r)} \\ \Delta d_i^{(r+1)} &= [K_{ij}(d_i^{(r)})]^{-1} \Psi_i(d_i^{(r)}) \\ d_i^{(r+1)} &= d_i^{(r)} + \Delta d_i^{(r+1)} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Si le processus converge,  $d_i^{(r)}$  tend vers la solution exacte lorsque  $r$  tend vers l'infini. Nous remarquons que dans cette méthode, la matrice  $[K_{ij}]$  doit être calculée et inversée à chaque itération, ce qui rend le calcul long et coûteux. De plus, les risques de divergence sont grands [24] et [8].

#### 3.7.2.2/ Méthode de Newton-Raphson ou de la rigidité tangentielle

Cette méthode consiste à utiliser un développement de Taylor du premier degré à l'équation :

$$\Psi_i = K_{ij} d_j - f_i$$

A l'itération  $r$ , nous avons :

$$\Psi_i(d_k^{(r)} + \Delta d_k^{(r+1)}) = \Psi_i(d_k^{(r)}) + \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_j} \right) \Delta d_j^{(r+1)} \quad (3.80)$$

soit

$$\Delta d_i^{(r+1)} = - \left[ \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_j} \right]^{-1} \Psi_i(d_k^{(r)}) \quad (3.81)$$

et

$$d_i^{(r+1)} = d_i^{(r)} + \Delta d_i^{(r+1)}$$

l'équation (3.81) peut être écrite sous la forme :

$$\Delta d_i^{(r+1)} = [K_{Tij}(d_i^{(r)})]^{-1} \Psi_i(d_i^{(r)}) \quad (3.82)$$

La matrice dite tangente  $[K_{Tij}]$  est à calculer et à inverser à chaque itération, ce qui représente souvent la partie essentielle du temps de calcul.

Cette méthode est utilisée pour des problèmes dont la solution ne dépend pas seulement du déplacement actuel, mais aussi de l'histoire du chargement.

### 3.7.2.3/ Méthode incrémentale ou pas à pas

Afin d'éviter la résolution complète d'un système linéaire à chaque itération, nous faisons l'approximation suivante pour chaque incrément de charge :

$$K_{Tij}(d_i^{(r)}) = K_{Tij}(d_i^{(0)}) \quad (3.83)$$

Cette méthode nécessite un nombre d'itérations plus élevé que la méthode de Newton-Raphson, mais le coût de calcul est en général moins élevé, car la matrice  $[K_{Tij}]$  n'est calculée et inversée qu'à la première itération de chaque incrément.

### 3.7.2.4/ Méthode de la rigidité initiale

La matrice  $[K_{Tij}]$  est calculée et inversée uniquement à la première itération et nous avons :

$$\Delta d_i^{(r)} = - [K_{Tij}(d_i^{(0)})]^{-1} d_i^{(r)} \quad (3.84)$$

Cette méthode est utilisée pour des problèmes dont la non-linéarité est faible.

### 3.7.2.5/ Choix de la méthode de résolution

En tenant compte des remarques précédentes, nous avons choisi la méthode de la rigidité tangentielle pour la résolution du système d'équations non-linéaires. Celle-ci est mieux adaptée à la formulation des problèmes de plasticité [24] ; [8]. Cependant, la méthode incrémentale ou pas à pas permet de donner de bons résultats. D'ailleurs, une confrontation entre ces deux méthodes est traitée dans le chapitre suivant.

### 3.7.3/ Méthodes de résolution des systèmes d'équations non-stationnaires

La discrétisation en espace d'un problème non-stationnaire par la méthode des éléments finis, conduit à un système d'équations différentielles en temps, du premier ou du second ordre.

Un problème de viscoplasticité est traduit par un système d'équations différentielles du type :

$$\begin{aligned} G_{ij} \dot{d}_j + K_{ij} d_j &= f_i && \text{pour } t \geq t_0 \\ d_i(t_0) &= d_{0i} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Résoudre un tel système consiste à trouver un ensemble de fonctions  $d_i(t)$  qui satisfont l'équation (3.85) à tout instant  $t$  ainsi que les conditions initiales imposées à  $t = t_0$ . Pour cela, nous construisons numériquement, à partir de  $d_{0i}$ , une suite de valeurs de la solution aux instants successifs  $t_0 + \Delta t$ ,  $t_0 + 2\Delta t$ , ...,  $t_0 + n\Delta t$ , ... en utilisant des approximations des dérivées  $\dot{d}_j$  de type différences finies.

Cette résolution nécessite un nombre de pas d'intégration dans le temps important. Il importe donc de déterminer leurs valeurs avec soin afin d'en limiter le nombre et, par conséquent, le coût de calcul tout en assurant la bonne convergence des résultats.

#### 3.7.3.1/ Méthode d'Euler explicite

Le système différentiel du premier ordre peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{d}_j &= g(d_j, t) && \text{pour } t \geq t_0 \\ d_j(t_0) &= d_{0j} \end{aligned} \quad (3.86)$$

soit :

$$\dot{d}_j = [G_{ij}]^{-1} (f_i - K_{ij} d_j)$$

c'est à dire :

$$g(d_j, t) = [G_{ij}]^{-1} (f_i - K_{ij} d_j)$$

Nous discrétisons  $\dot{d}_j$  par la formule de différences finies décentrée à gauche

$$\dot{d}_j(t) = \dot{d}_j^n \approx \frac{1}{\Delta t_n} (d_j^{n+1} - d_j^n) \quad (3.87)$$

avec  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = t_0 + n\Delta t$

soit :

$$d_j^{n+1} = d_j^n + \Delta t_n \dot{d}_j^n \quad (3.88)$$

$$d_j^{n+1} = d_j^n + \Delta t_n g(d_j^n, t) \quad (3.89)$$

Cette formule de récurrence d'Euler est dite explicite car  $g$  ne fait pas intervenir l'inconnue  $d_j^{n+1}$ .

La forme incrémentale de l'équation (3.89) est donnée par :

$$\Delta d_j^n = \Delta t_n (f_i - K_{ij} d_j^n) = R_i^n \quad (3.90)$$

$$d_j^{n+1} = d_j^n + \Delta d_j^n$$

L'algorithme d'Euler explicite n'est stable que si  $\Delta t_n$  est inférieur à une valeur critique  $\Delta t_c$  [24].

### 3.7.3.2/ Méthode d'Euler implicite

Cette méthode consiste à écrire l'équation (3.86) à l'instant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$  et à utiliser la formule de différences finies décentrée à droite :

$$\dot{d}_j^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta t_n} (d_j^{n+1} - d_j^n) \quad (3.91)$$

d'où la formule d'Euler implicite :

$$d_j^{n+1} = d_j^n + \Delta t_n g(d_j^{n+1}, t_{n+1}) \quad (3.92)$$

Dans ce cas, l'équation de  $g$  fait intervenir le vecteur inconnu  $d_j^{n+1}$ .

En substituant l'équation (3.92) dans l'équation (3.85), nous obtenons :

$$(G_{ij} + \Delta t_n K_{ij}) d_j^{n+1} = \Delta t_n f_i^{n+1} + G_{ij} d_j^n = \Psi_i^{n+1} \quad (3.93)$$

La forme incrémentale est donnée par :

$$(G_{ij} + \Delta t_n K_{ij}) \Delta d_j^n = \Delta t_n (f_i^{n+1} - K_{ij} d_j^n) \quad (3.94)$$

$$d_j^{n+1} = d_j^n + \Delta d_j^n$$

Nous notons, de plus que l'algorithme d'Euler implicite est inconditionnellement stable [24], [8].

### 3.7.3.3/ Méthode d'Euler semi-implicite

Cette méthode consiste à écrire l'équation (3.86) à l'instant  $t_n + \theta \Delta t_n$  avec  $0 \leq \theta \leq 1$  comme :

$$d_j^{n+1} = d_j^n + \Delta t_n g(d_j^{n+\theta}, t_{n+\theta}) \quad (3.95)$$

où

$$d_j^{n+\theta} = \theta d_j^{n+1} + (1 - \theta) d_j^n$$

Nous retrouvons d'ailleurs la méthode d'Euler explicite lorsque  $\theta = 0$  et la méthode d'Euler implicite lorsque  $\theta = 1$ .

L'algorithme de type (3.93) s'écrit :

$$(G_{ij} + \theta \Delta t_n K_{ij}) d_j^{n+1} = \Delta t_n (\theta f_i^{n+1} + (1 - \theta) f_i^n) - (1 - \theta) K_{ij} d_j^n + G_{ij} d_j^n \quad (3.97)$$

La forme incrémentale est donnée par :

$$(G_{ij} + \theta \Delta t_n K_{ij}) \Delta d_j^{n+1} = \Delta t_n (\theta f_i^{n+1} + (1 - \theta) f_i^n) - K_{ij} d_j^n$$

$$d_i^{n+1} = d_i^n + \Delta d_i^n$$

Le domaine de stabilité inconditionnelle sans oscillations est défini par  $\theta \geq 0,5$  [24], [18].

### 3.7.3.4/ Choix de la méthode

Suite aux remarques précédentes, nous pouvons conclure que la méthode semi-implicite est la mieux adaptée à cause de sa stabilité inconditionnelle et du fait que le calcul des rigidités élémentaires se fait à chaque intervalle de temps. L'avantage que peut présenter la méthode explicite est la réduction importante du temps de calcul (3 à 4 fois) car ne calculant les rigidités élémentaires qu'au premier intervalle de temps seulement. Cette méthode est mieux adaptée pour des problèmes à faible non-linéarité.

### 3.7.3.5/ Calcul de l'intervalle de temps optimal

Il importe de déterminer les intervalles de temps optimaux afin d'en limiter le nombre et, par conséquent, le coût de calcul, tout en assurant cependant la bonne convergence des résultats. La plupart des méthodes utilisées sont à pas constant; le pas est choisi au départ en tenant compte de la plus ou moins grande non-linéarité des phénomènes à prévoir, et demeure le même tout au long du calcul. Ainsi, si à un moment donné, de très fortes non-linéarités sont prévisibles, le pas devra être choisi très faible alors que par la suite, les phénomènes se stabilisant, une valeur plus importante aurait été suffisante [22]. Ainsi apparaît donc l'intérêt d'une méthode dite de "choix optimal" dans laquelle le pas est déterminé à chaque instant du calcul en fonction des valeurs des variables représentatives de la non-linéarité du phénomène.

Le pas est limité par le fait que l'incrément de déformation viscoplastique équivalente survenu au cours de l'intervalle de temps actuel, représente une fraction de la déformation totale équivalente [7].



$$\Delta \epsilon_{vp}^n = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\epsilon}_{ij}^{n+1})_{vp} (\dot{\epsilon}_{ij}^n)_{vp} \Delta t_n \leq \tau \epsilon^n \quad (3.99)$$

avec  $0,01 \leq \tau \leq 0,15$

Une autre forme de l'équation ci-dessus est donnée par [7] :

$$\sqrt{(\dot{\epsilon}_{ii}^n)_{vp}} \Delta t_n \leq \tau \sqrt{\epsilon_{ii}^n} \quad (3.100)$$

$\epsilon_{ii}^n$  étant le premier invariant du tenseur des déformations totales,  $(\dot{\epsilon}_{ii}^n)_{vp}$  le premier invariant du tenseur des vitesses de déformation viscoplastique.

Le pas  $\Delta t_n$  peut donc être donné par [7] :

$$\Delta t_n \leq t \left[ \sqrt{\frac{\epsilon_{ii}^n}{(\dot{\epsilon}_{ii}^n)_{vp}}} \right]_{\min} \quad (3.101)$$

en prenant la valeur minimale à travers les points pour lesquels nous avons calculé les déformations.

Une autre condition imposée sur le pas est que sa valeur actuelle est liée à la précédente par la relation :

$$\Delta t_{n+1} \leq k \Delta t_n \quad (3.102)$$

$k$  étant une constante généralement prise égale à 1,5 [7]; c'est une méthode dite à pas liés.

La combinaison de la méthode du choix optimal avec celle des pas liés permet une meilleure évaluation de la valeur du pas; ceci se fait en choisissant la valeur minimale calculée par les deux méthodes.

Nous notons, de plus, que dans la littérature [27], des formules empiriques de calcul du pas optimal ont été établies pour des cas particuliers de fonctions d'écoulement viscoplastiques.

### 3.7.4/ Calcul des forces résiduelles pour un problème élasto-plastique

Les forces appliquées à la  $r^{\text{ième}}$  itération sont les forces résiduelles de la  $(r-1)^{\text{ième}}$  itération. Ces forces incrémentent les déplacements de  $\Delta d^{(r)}$  qu'on peut obtenir par la résolution du système d'équations linéaires. La figure 3.4 illustre la procédure de calcul des forces résiduelles dans le cas d'un comportement élasto-plastique.

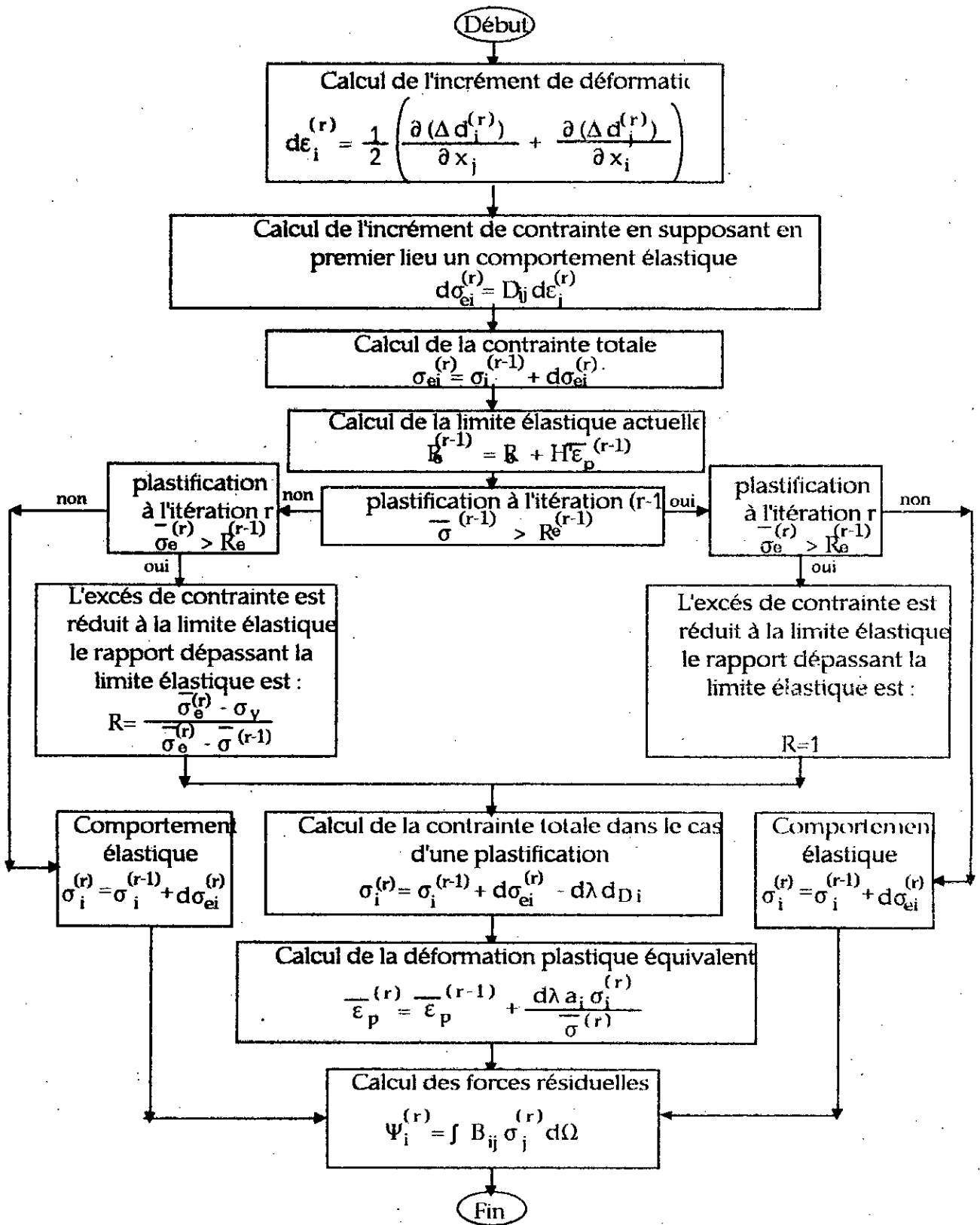


Fig. 3.4 Organigramme du calcul des forces résiduelles pour un problème élasto-plastique.

### 3.7.5/ Tests de convergence

#### 3.7.5.1/ Problème élasto-plastique

La convergence est atteinte lorsque le rapport de la norme des forces résiduelles et la norme des forces appliquées est inférieur à une certaine valeur qu'on se fixe selon la précision voulue [7], [8].

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \psi_i^{(r)} \psi_i^{(r)}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N f_i^{(r)} f_i^{(r)}}} 100 \leq T_0 \quad (3.103)$$

$i=1, N$   $N$  étant le nombre de nœuds total de la structure,  $r$  le numéro de l'itération.

Cela signifie qu'on admet une erreur de  $T_0\%$ . Dans des situations pratiques, une erreur de 1% est acceptable pour la majorité des cas [7].

#### 3.7.5.2/ Problème élasto-viscoplastique

La convergence est atteinte lorsque la vitesse de déformation viscoplastique ou l'incrément de déformation viscoplastique qui survient au cours de l'intervalle de temps actuel s'annule. Pour cela, l'incrément de déformation actuel doit être inférieur à une fraction du premier incrément de déformation que nous fixons dès le départ.

$$\left( \frac{\Delta t_n \sum_{i=1}^N \dot{\epsilon}_{vp}^{n+1}}{\Delta t_1 \sum_{i=1}^N \dot{\epsilon}_{vp}^1} \right) 100 \leq T_0 \quad (3.104)$$

Cela signifie que nous admettons une erreur de  $T_0\%$ . Dans des situations pratiques, une erreur de 1 % est acceptable pour la majorité des cas [7].

## CHAPITRE 4

### APPLICATION DU CODE DE CALCUL A LA DISTRIBUTION DE DEFORMATIONS EN FOND D'ENTAILLE

Dans cette étude, nous avons déterminé la distribution de déformations en fond d'entaille en vue de la formulation d'un critère de rupture sous déformation globale critique en relation avec le champ local des déformations. Cette distribution locale a été déterminée dans le cas d'un comportement élastique, élasto-plastique et élasto-viscoplastique.

#### 4.1/ EXEMPLES TRAITES

Nous avons déterminé la distribution locale des déformations en fond d'entaille de plaques entaillées en traction dont la géométrie est définie dans la figure (4.1).

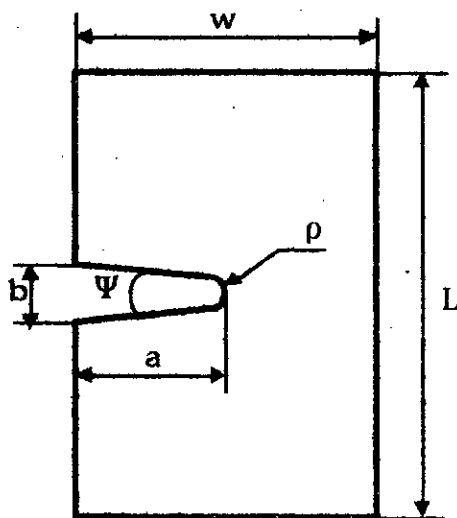


Fig 4.1

et dont les dimensions sont les suivantes :

$$W = 20 \text{ mm}$$

$$L = 30 \text{ mm}$$

$$b = 3 \text{ mm}$$

$$\Psi = 30^\circ$$

Les propriétés matérielles (acier E24) sont regroupées dans le tableau (4.1) pour les cas de comportement élastique, élasto-plastique et élasto-viscoplastique.

module de Young [daN/mm <sup>2</sup> ]	coefficient de Poisson	limite élastique [daN/mm <sup>2</sup> ]	coefficient de résistance plastique	coefficient d'écroûissage	paramètre de viscosité [jour <sup>-1</sup> ]	coefficient de viscosité
21000,0	0,3	24,0	43,5	0,22	0,001	1,0

Tableau 4.1

La courbe d'écroûissage du matériau suit la loi de Ludwik :

$$\sigma = \sigma_0 \varepsilon^n \quad (4.1)$$

$\sigma_0$  étant le coefficient de résistance plastique,  $n$  le coefficient d'écroûissage.

Dans le cas d'un comportement élasto-viscoplastique, la fonction d'écoulement viscoplastique du matériau est donnée par :

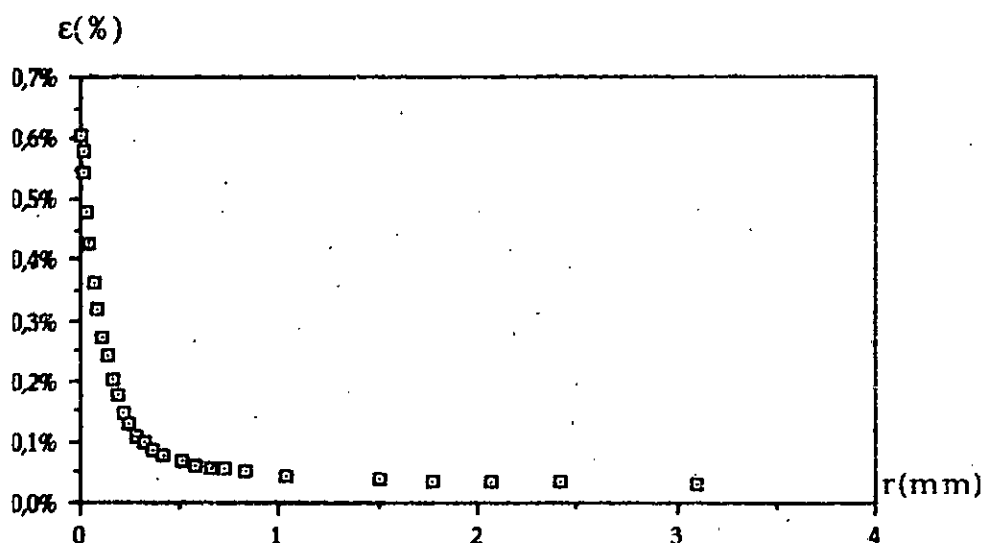
$$\Phi(f) = \left( \frac{f - k}{k} \right)^m \quad (4.2)$$

$m$  étant le coefficient de viscosité dépendant du matériau,  $k$  la limite élastique du matériau.

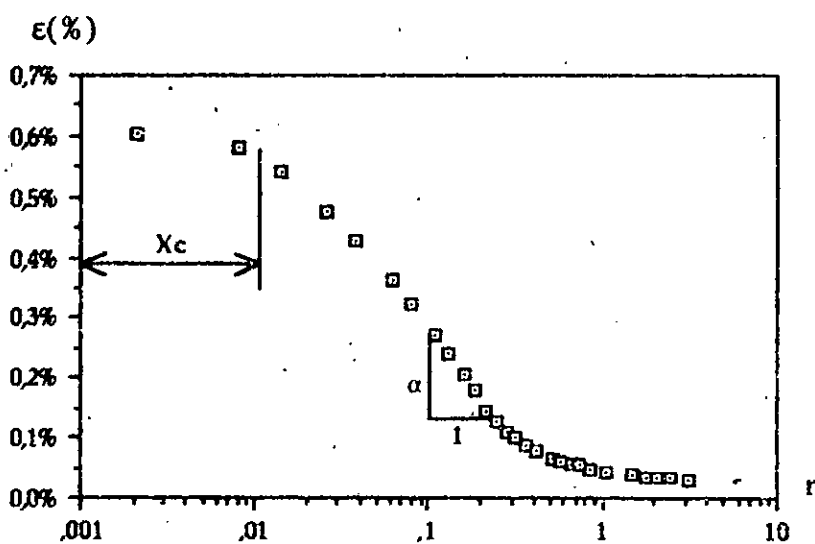
La symétrie de la géométrie de l'éprouvette nous permet de ne discrétiser que la moitié de cette dernière. La détermination du champ local de déformations nécessite une précision importante des calculs, ce qui, à cause de la singularité, impose un maillage très fin convergeant à la pointe de l'entaille (Fig. 4.2); les dimensions des éléments doivent s'affiner vers la pointe de l'entaille en progression géométrique [6].

#### 4.2/ PREMIERE APPROCHE DE LA DISTRIBUTION LOCALE DES DEFORMATIONS EN FOND D'ENTAILLE

En un premier temps, nous avons fait les calculs avec un maillage manuel (sur papier millimétré). Le code d'éléments finis donne, pour une charge répartie de 14 daN/mm et pour un comportement élasto-plastique les résultats suivants en utilisant le critère de plasticité de Von-Mises :



-a-



-b-

Fig 42 Distribution des déformations au voisinage d'une entaille de 4,40 mm de longueur et de 0,20 mm d'acuité.

Après détermination des paramètres  $\alpha$ ,  $K_{\epsilon, \rho}$  et  $X_c$  pour les différents cas traités, nous obtenons les résultats mentionnés sur le tableau (4.2).

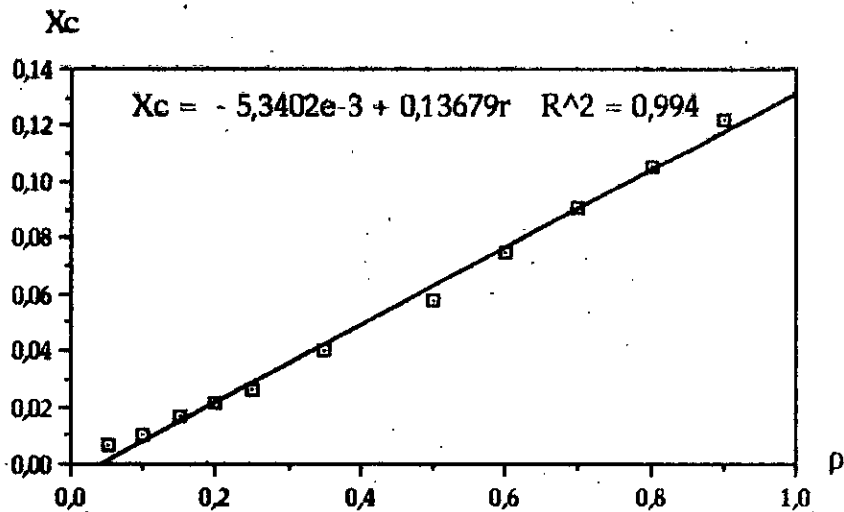


Fig. 4.6 Variation de  $X_c$  en fonction de l'acuité d'entaille.

Nous notons aussi que d'après la figure (4.3), la déformation maximale diminue lorsque l'acuité d'entaille augmente, de plus, l'effet d'entaille est localisé en son voisinage et s'affaiblit au fur et à mesure que l'on s'éloigne d'elle.

La distance caractéristique augmente linéairement avec l'acuité d'entaille (Fig 4.6) alors que l'exposant  $\alpha$  et le facteur d'intensité de déformation d'entaille diminuent linéairement lorsque l'acuité  $\rho$  augmente (Fig 4.4 et 4.5).

#### 4.3/ AMELIORATION DE LA PRECISION DES RESULTATS

Afin de pouvoir améliorer la précision des résultats, nous devons diminuer les erreurs :

- En régularisant le maillage.
- En choisissant la taille optimale des éléments en fond d'entaille.
- En choisissant le nombre de points de Gauss optimal.
- En choisissant le nombre d'incrémentes de charge optimal.

##### 4.3.1/ Influence de la régularité du maillage

La régularité du maillage est un paramètre très influent sur la précision des résultats; pour cela, l'incorporation d'un sous-programme permettant de réaliser le maillage automatique dans le code de calcul s'impose. De plus, cela nous permet de réduire au maximum la taille des fichiers de données ainsi que le temps de leurs préparations.

Le sous-programme de maillage automatique consiste à subdiviser la structure en plusieurs zones; pour chacune d'entre-elle, nous choisissons les nombres de divisions verticales et horizontales convenables ainsi que les raisons géomé-

triques correspondantes définissant l'évolution de la taille des éléments suivant l'horizontale et la verticale (Fig. 4.7).

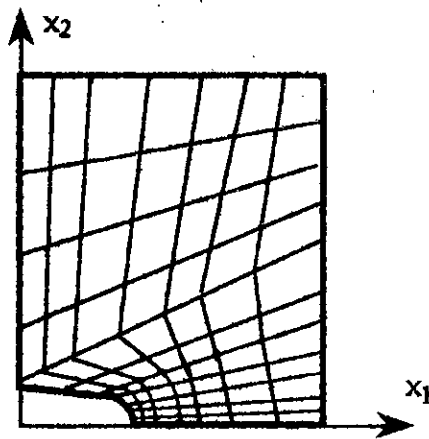


Fig. 4.7 Exemple de maillage.

Les résultats obtenus dans le cas d'un maillage manuel et d'un maillage automatique pour un comportement élasto-plastique d'une plaque entaillée de 0,35 mm d'acuité sont illustrés par la figure (4.8).

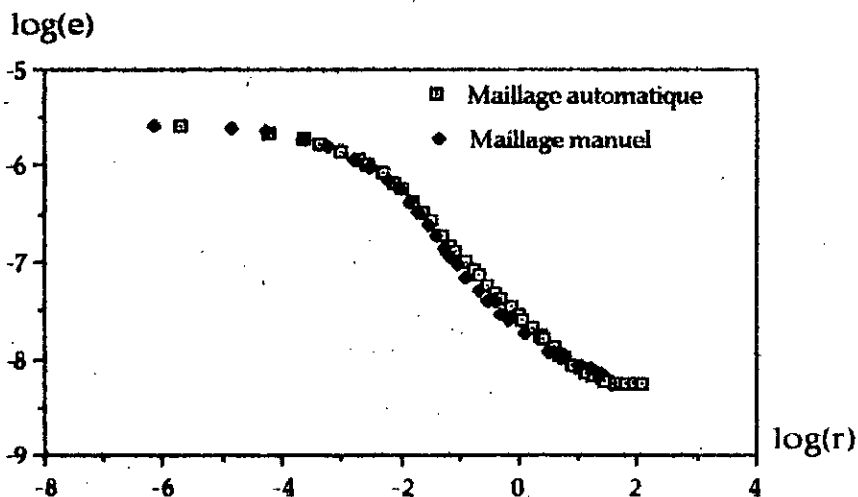


Fig. 4.8 Influence de la régularité du maillage sur la précision des résultats.

Nous remarquons que l'allure de la courbe dans le cas d'un maillage automatique permet de mieux décrire la distribution de déformations surtout dans la zone où le gradient de déformation est important que dans le cas d'un maillage manuel.

#### 4.3.2/ Influence du nombre de points de Gauss

Pour un élément rectangulaire à huit nœuds, le produit matriciel  $B_{ij} D_{ij} B_{ij}$  que nous devons effectuer pour calculer la matrice de rigidité contient tous les monômes jusqu'au quatrième ordre ( $\xi^i \eta^j ; i+j \leq 4$ ). Par la méthode d'intégration



de Gauss, il faut  $3 \times 3$  points pour intégrer exactement la matrice  $[K_{ij}]$ , cependant, une intégration à  $2 \times 2$  points permet de donner de bons résultats; l'intégration est alors dite "réduite" [24].

La figure (4.9) donne la distribution de déformations en fond d'entaille pour une intégration à  $2 \times 2$  points et à  $3 \times 3$  points. Nous remarquons que l'intégration à  $3 \times 3$  points permet de donner une courbe dont l'allure est nettement plus régulière.

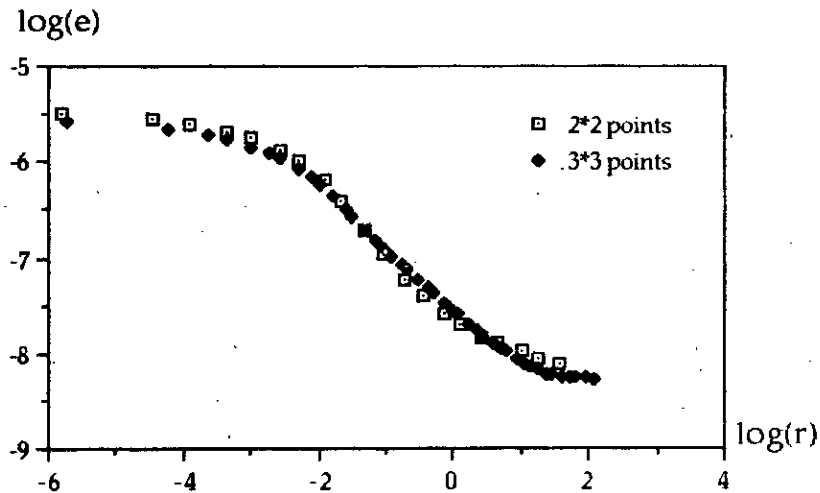
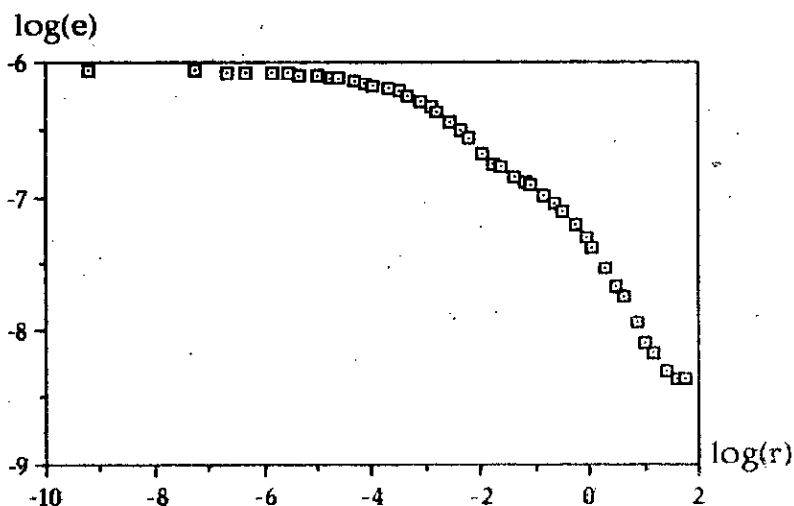


Fig. 4.9 Influence du nombre de points de Gauss sur la précision des résultats.

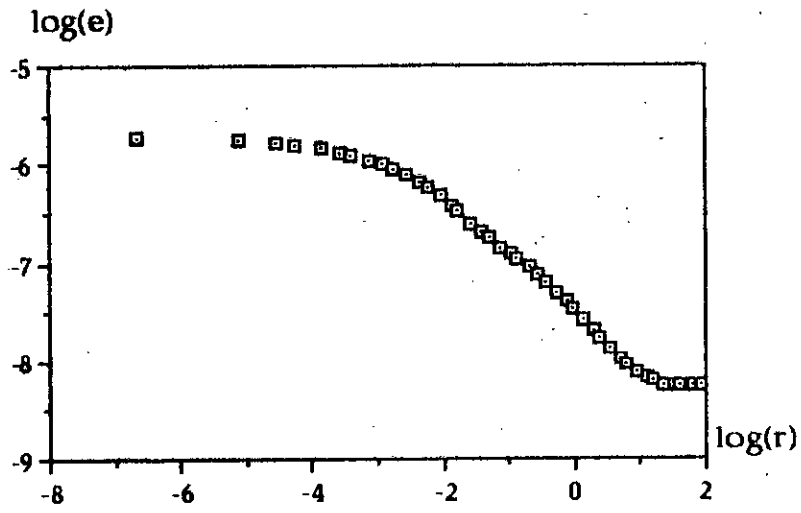
#### 4.3.3/ Influence de la taille des éléments en fond d'entaille

La taille des éléments situés en fond d'entaille doit être de telle manière à bien décrire la distribution des déformations à savoir, mise en évidence de la distance caractéristique et du gradient de déformation.

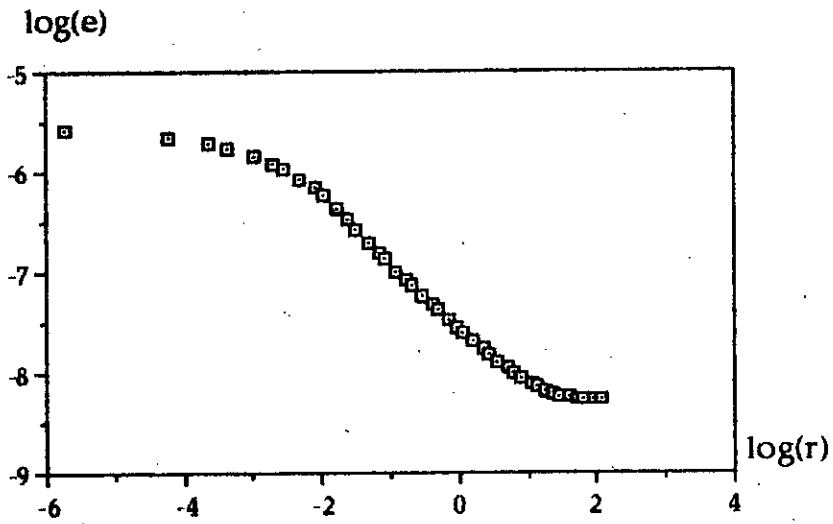
La figure (4.10) présente les distributions de déformations en fond d'entaille pour un même nombre de divisions et pour différentes raisons géométriques de la taille des éléments.



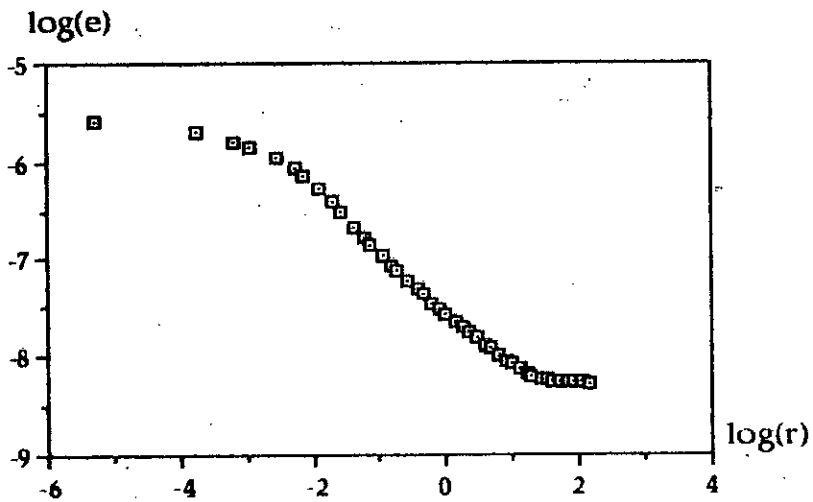
-a- raison géométrique = 1,75



-b- raison géométrique= 1,50



-c- raison géométrique = 1,40



-d- raison géométrique = 1,35

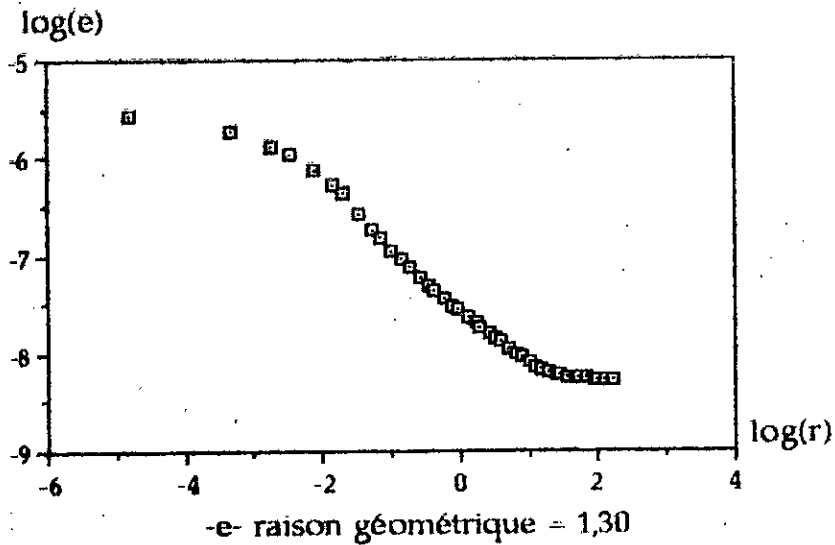


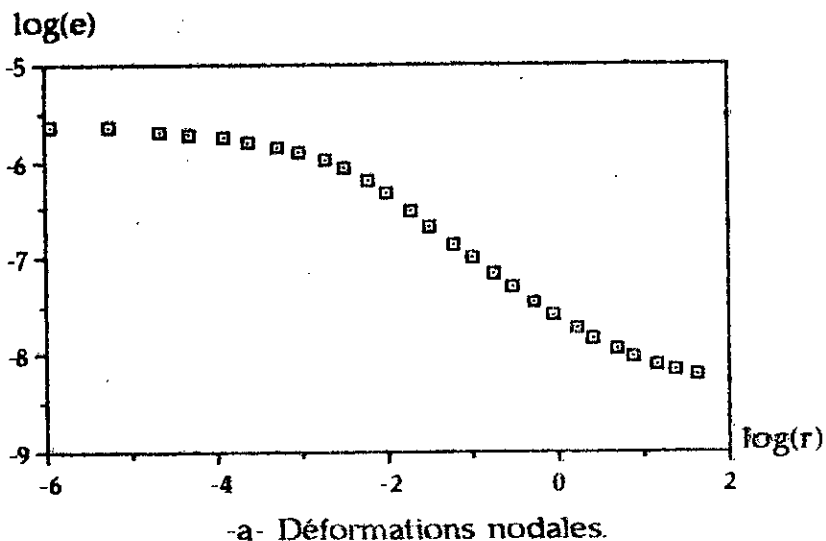
Fig. 4.10 Influence de la taille des éléments sur la précision des résultats.

Nous remarquons que pour des raisons supérieures à 1,7 la distribution des déformations nous renseigne surtout sur la distance caractéristique alors que la précision au niveau du gradient de déformation laisse à désirer. Pour des raisons comprises entre 1,3 et 1,7 les résultats obtenus décrivent le champ des déformations avec une très bonne précision. Pour des raisons inférieures ou égales à 1,3 la distance caractéristique n'est pas mise en évidence.

Suite à ces remarques, nous concluons que la taille de l'élément situé en bout de fissure doit être légèrement inférieure à la distance caractéristique et que les tailles des éléments voisins doivent être du même ordre de grandeur (raison géométrique faible).

#### 4.3.4/ Déformations nodales et déformations aux points de Gauss

Le code de calcul permet de déterminer les déformations aux nœuds et aux points de Gauss. La figure (4.11) illustre les distributions des déformations en fond d'entaille lorsque nous calculons les déformations aux nœuds et aux points de Gauss.



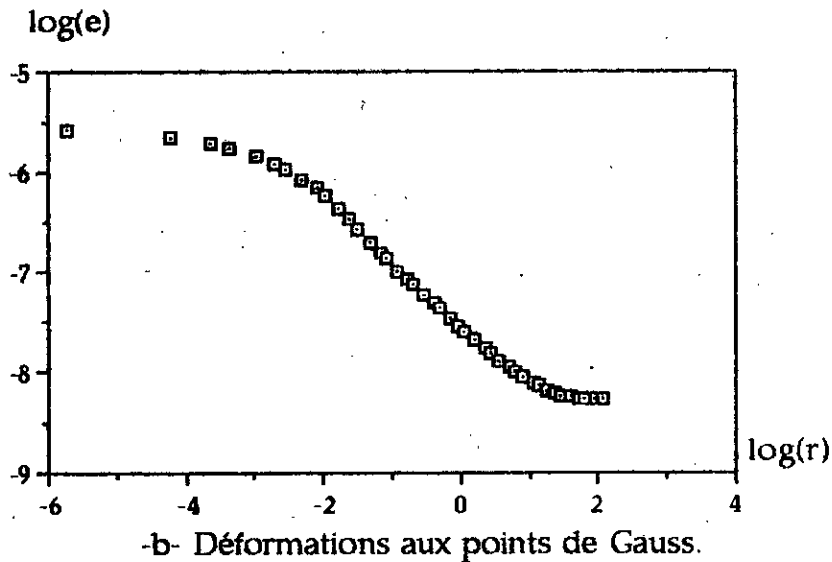


Fig. 4.11 Déformations nodales et aux points de Gauss.

Nous remarquons que le calcul des déformations aux points de Gauss permet d'obtenir une meilleure précision.

#### 4.3.5/ Influence du nombre d'incrément de charge

Les non-linéarités des phénomènes de plasticité nécessitent de calculer les déformations en incrémentant la charge. La figure (4.12) donne les distributions de déformations en fond d'entaille pour différents nombres d'incrément de charge.

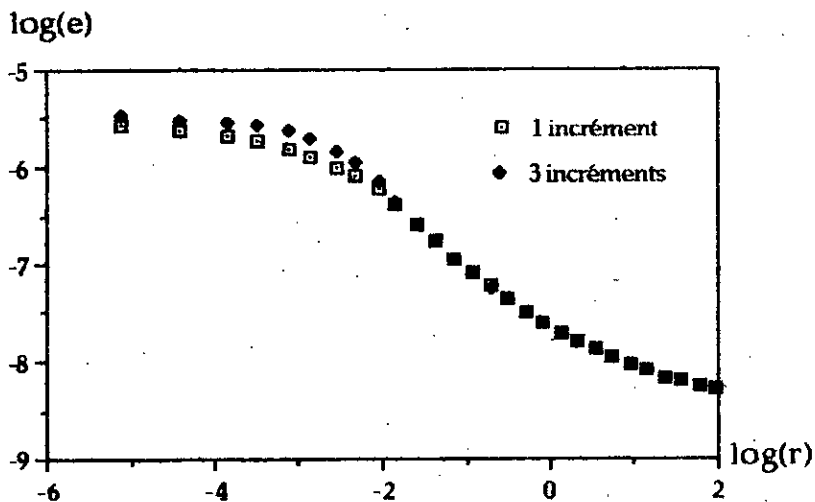


Fig. 4.12 Influence du nombre d'incrément de charge sur la précision des résultats.

Nous remarquons que le nombre d'incrément de charge n'a pas une grande influence sur la précision des résultats dans la mesure où le niveau de charge n'est pas très élevé. Cependant, un nombre d'incrément plus élevé permet une meilleure mise en évidence de la distance caractéristique.

### 4.3.6/ Influence de la méthode de résolution

Les non-linéarités qui apparaissent du fait de la plasticité nous conduisent à utiliser des méthodes itératives pour résoudre le système d'équations; cela revient à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération (§ 3.7.2).

Pour des problèmes d'analyse plastique des structures, nous utilisons soit la méthode de la rigidité tangentielle, soit la méthode incrémentale ou pas à pas [7]. Dans la première, nous calculons les rigidités élémentaires à chaque itération alors que dans la seconde, nous ne les calculons qu'à la première itération de chaque incrément.

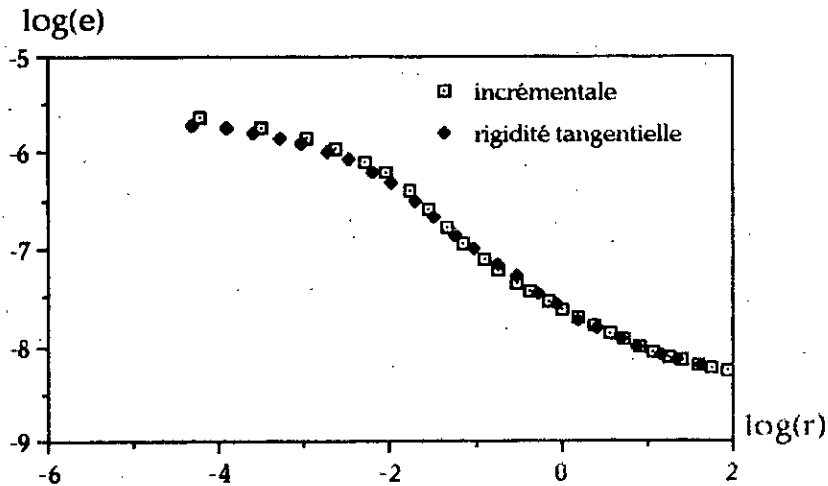


Fig. 4.13 Influence de la méthode de résolution sur la précision des résultats.

Les résultats obtenus avec les deux méthodes sont sensiblement les mêmes (Fig. 4.13), seulement, la méthode incrémentale permet de réduire le temps de calcul par itération au dépend de la vitesse de convergence.

## 4.4/ DISCUSSION DES RESULTATS

### 4.4.1/ Solution élastique

Pour un matériau élastique fragile, le champ des déformations en fond d'entaille peut être donné par la solution d'Irwin en mode I :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Soit en appliquant la loi de Hooke :

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \epsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \epsilon_{12} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (4.5)$$

La solution analytique d'Irwin nous permet, d'après l'équation (4.5), d'obtenir la distribution locale de déformation suivant la direction de propagation, soit  $\theta = 0^\circ$  sous la forme :

$$\epsilon_{22} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4.6)$$

La figure (4.14) illustre la distribution locale de déformation obtenue par calcul par éléments finis sur le plan de fissure :

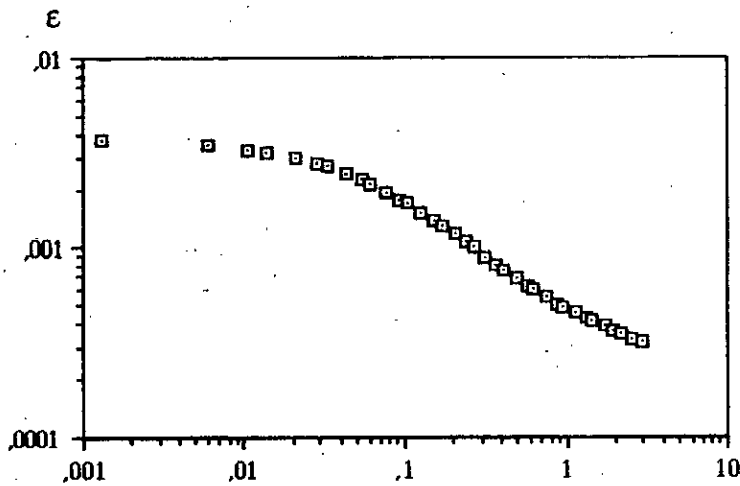


Fig. 4.14 Distribution de déformations en fond d'entaille pour une acuité de 0,25 mm et un comportement élastique.

A partir de cette figure, nous pouvons déterminer les paramètres  $\alpha$ ,  $K_{\epsilon,\rho}$ ,  $X_c$ . Pour différentes acuités d'entailles, nous obtenons les résultats mentionnés sur le tableau (4.3)

$\rho$ (mm)	$\alpha$	$X_c$ (mm)	$K_{\epsilon,\rho}$ (%m $^\alpha$ ) $10^3$
0,05	0,5009	0,0047	1,2210
0,10	0,5039	0,0089	1,2184
0,15	0,4995	0,0145	1,2104
0,20	0,4974	0,0188	1,2016
0,25	0,5102	0,0247	1,1954
0,35	0,5037	0,0377	1,1850

Tableau 4.3

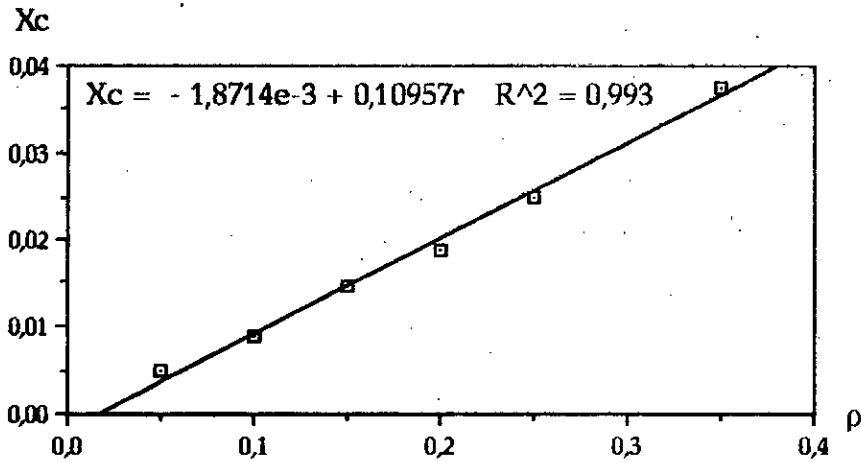


Fig. 4.15 Variation de  $X_c$  en fonction de l'acuité pour un comportement élastique.

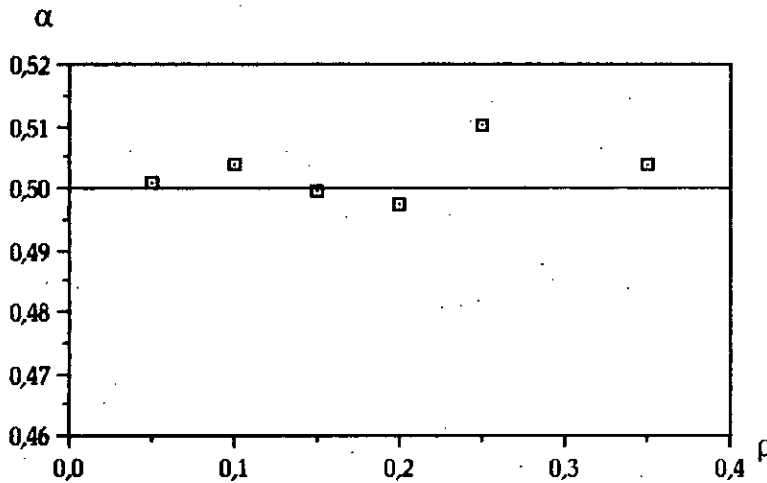


Fig. 4.16 Variation de  $\alpha$  en fonction de l'acuité d'entaille pour un comportement élastique.

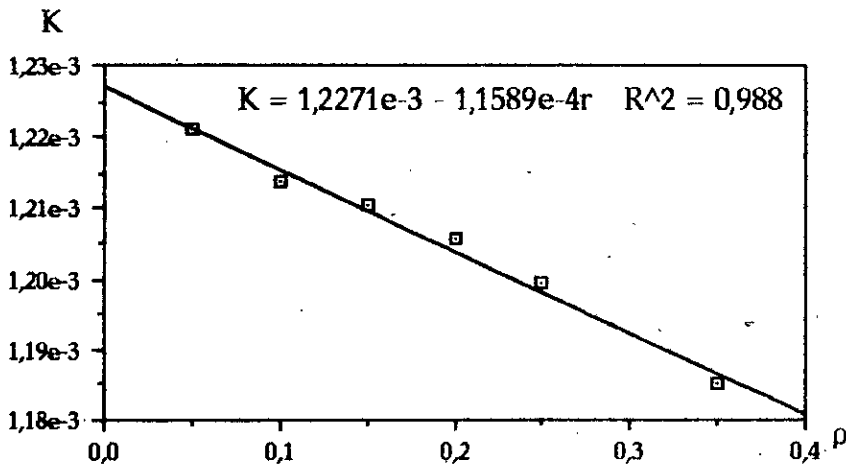


Fig. 4.17 Variation de  $K_{\epsilon,\rho}$  en fonction de l'acuité pour un comportement élastique.

Nous remarquons que la distance caractéristique, au niveau de laquelle la déformation est sensiblement constante et maximale, croît en fonction de l'acuité d'entaille de façon linéaire alors que la solution analytique d'Irwin ne permet pas de la mettre en évidence du fait que cette dernière a été déterminée à partir d'une fissure aigüe d'acuité nulle. Or d'après la figure 4.15, la distance caractéristique

nulle correspond à une acuité non-nulle qui est de l'ordre de 0,0170 mm; cela signifie qu'une fissure n'est en réalité jamais aigue, elle possède toujours une acuité aussi petite soit-elle. Encore faudrait-il souligner qu'au niveau de la distance caractéristique qui représente d'ailleurs la dimension de la zone d'élaboration du processus de rupture, la déformation locale (maximale) est la paramètre qui permet de mieux prévoir l'amorçage de la rupture. Nous constatons, de plus, que la solution d'Irwin est vérifiée d'une manière assez précise au-delà de la distance caractéristique. En effet, nous pouvons approximer la distribution de déformation locale par :

$$\varepsilon = \frac{K_{\varepsilon,\rho}}{\sqrt{2\pi r^\alpha}} \quad (4.7)$$

$$\alpha = 0,5$$

avec

$$K_{\varepsilon,\rho} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu) K_I}{E} \quad (4.8)$$

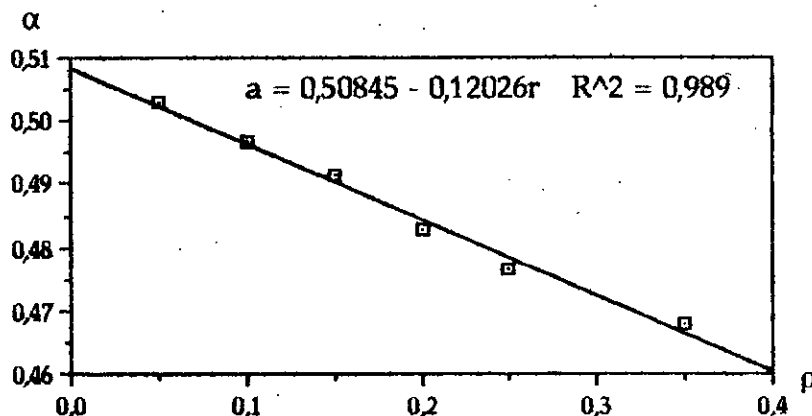
L'exposant  $\alpha$  est de l'ordre de 0,5 alors que le facteur d'intensité de déformation d'entaille est lié au facteur d'intensité de contrainte par la relation (4.8). De plus, nous constatons que le facteur d'intensité de déformation d'entaille est maximale lorsque l'acuité d'entaille est minimale. La même évolution est constatée concernant la variation de la déformation maximale en fonction de l'acuité d'entaille. Le facteur d'intensité de déformation est donc un paramètre qui permet de gouverner la rupture au-delà de la distance caractéristique.

#### 4.42/ Solution élasto-plastique

En faisant les calculs pour différentes acuités d'entailles, nous obtenons :

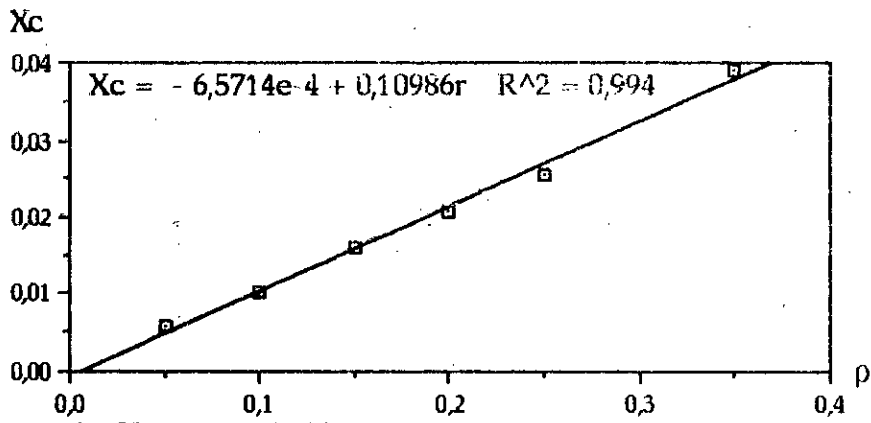
$\rho$ (mm)	$\alpha$	$X_c$ (mm)	$K_{\varepsilon,\rho}$ (%m $^\alpha$ ) 10 <sup>3</sup>
0,05	0,5029	0,0058	1,3353
0,10	0,4966	0,0100	1,2854
0,15	0,4916	0,0159	1,2776
0,20	0,4827	0,0207	1,2671
0,25	0,4767	0,0255	1,2329
0,35	0,4679	0,0390	1,1952

Tableau 4.4

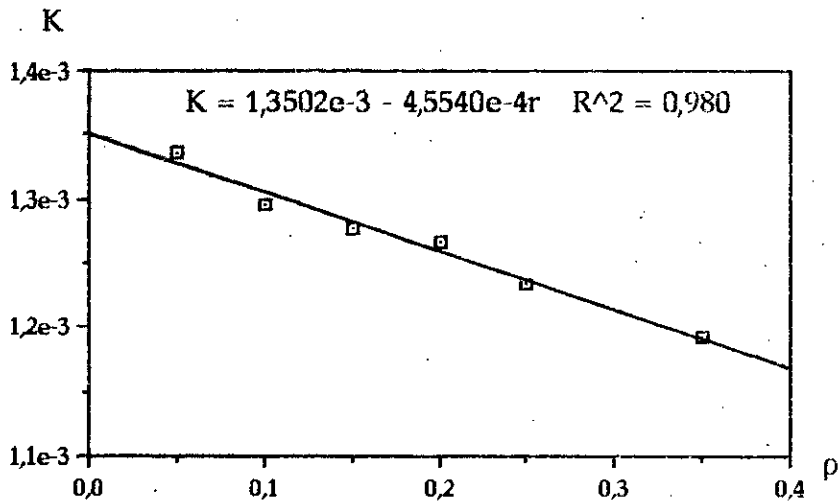


-a- Variation de  $\alpha$  en fonction de l'acuité pour un comportement élasto-plastique.





-b- Variation de  $X_c$  en fonction de l'acuité pour un comportement élasto-plastique.



-c- Variation de  $K_{e,\rho}$  en fonction de l'acuité d'entaille pour un comportement élasto plastique.

Fig. 4.18

Nous remarquons que la distance caractéristique croît linéairement avec l'acuité d'entaille, de plus, la distance caractéristique nulle correspond à une acuité de 0,0059 mm. L'exposant  $\alpha$  est inférieur à 0,5 et décroît linéairement lorsque l'acuité d'entaille augmente. Le facteur d'intensité de déformation d'entaille décroît lui aussi linéairement lorsque l'acuité augmente.

L'approximation de la distribution de déformation locale par cette forme expliquée ci-dessus (§ 4.2) permet de conclure que le facteur d'intensité de déformation d'entaille peut gouverner la rupture au-delà de la distance caractéristique, alors qu'au niveau de cette dernière, la déformation locale permet de mieux prévoir le processus de rupture.

#### 4.4.3/ Solution élasto-viscoplastique

Le code de calcul permet de donner l'évolution de la déformation en fonction du temps (Fig. 4.19) et la distribution des déformations en fond d'entaille après que le test de convergence ait été vérifié (Fig. 4.20).

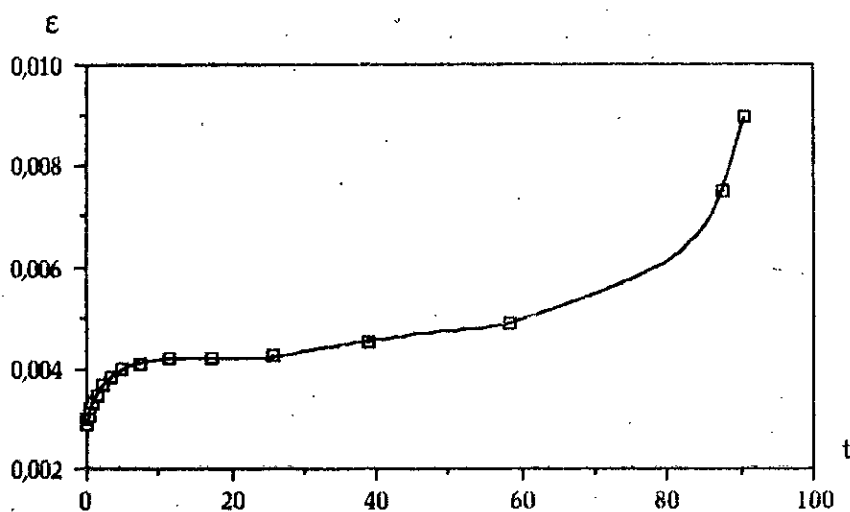


Fig. 4.19 Evolution de la déformation en fonction du temps pour une acuité de 0,35.

D'après la figure (4.19), nous remarquons qu'il y a d'abord une déformation instantanée suivie d'un écoulement plastique qui se fait progressivement en fonction du temps. Le phénomène commence à se stabiliser puis devient instable. La courbe exprimant la vitesse de déformation en fonction du temps (Fig. 4.20) permet d'interpréter plus clairement le phénomène.

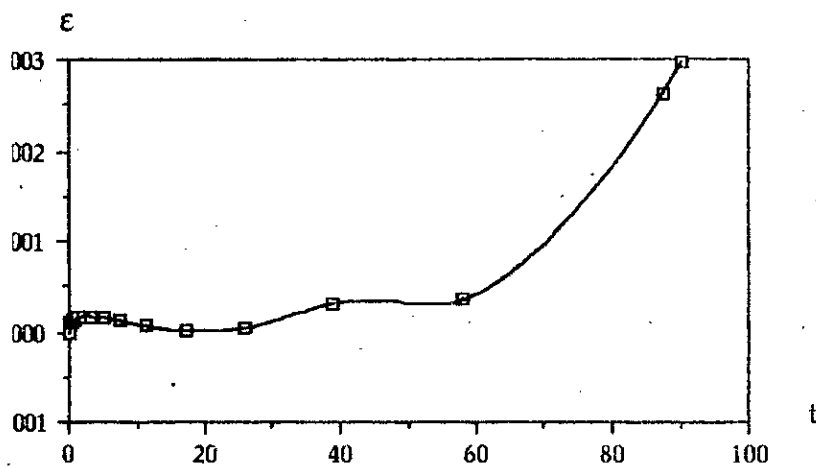


Fig. 4.20 évolution de la vitesse de déformation en fonction du temps.

En effet, nous remarquons (Fig. 4.20) que la vitesse de déformation, initialement nulle, augmente rapidement jusqu'à atteindre une valeur maximale, puis elle diminue, passe par un minimum et croît ensuite jusqu'à la rupture; ce sont les trois phases de fluage, primaire, secondaire et tertiaire que nous avons décrit dans le premier chapitre (§ 1.2.1.2). Ce comportement est lié à l'apparition d'une instabilité dans l'écoulement plastique qui se traduit par le fait que la déformation, au lieu d'être homogène, se concentre dans une zone très localisée de l'éprouvette : c'est le phénomène de striction qui s'amplifie rapidement et conduit à la rupture [29]. D'ailleurs, la distribution des déformations en fond d'entaille n'est pas régulière; nous sommes en présence d'une instabilité plastique et les équations de l'élasto-viscoplasticité ne permettent pas de décrire ce

phénomène. Il est donc nécessaire d'introduire dans le code de calcul un critère de stabilité de la déformation. En remarquant que l'instabilité plastique commence au début de la phase tertiaire de la courbe de fluage, nous prendrons comme critère de stabilité la condition suivante : "La déformation reste stable tant que la vitesse de déformation ne dépasse pas sa valeur minimale". Le critère de stabilité s'écrit donc :

$$\frac{\sum_i ((\epsilon^n)_{vp})_i}{\sum_i ((\epsilon^{n+1})_{vp})_i} > a_0 \quad (4.9)$$

$a_0$  est un réel permettant de considérer que la variation de la vitesse de déformation est négligeable.

D'après les nombreux tests numériques que nous avons traités, nous avons remarqué qu'une valeur de  $a_0$  de 0,85 est acceptable. Cela veut dire que la déformation viscoplastique survenue précédemment (intervalle de temps précédent) doit être égale à au moins 85% de la déformation viscoplastique actuelle. Après introduction de ce critère dans le code de calcul, nous obtenons les résultats illustrés par les figures ci-dessous.

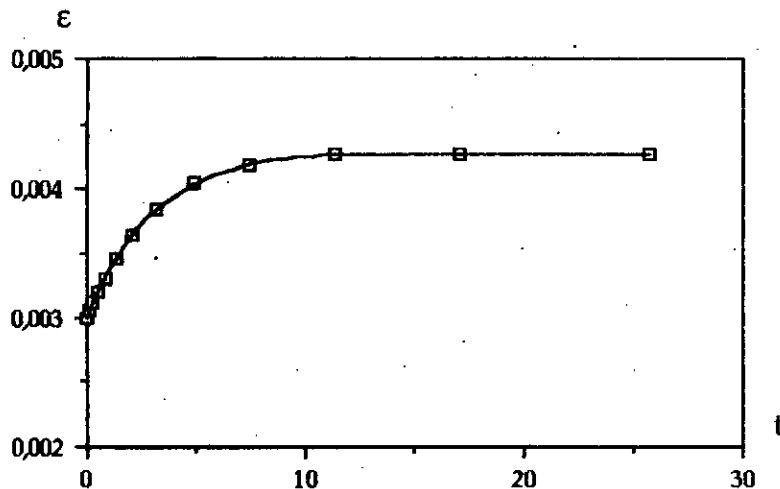


Fig. 4.21 Evolution de la déformation en fonction du temps.

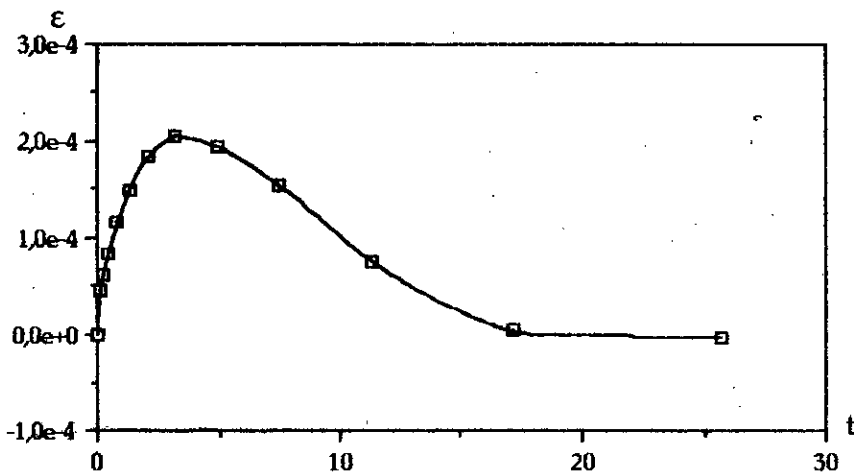


Fig. 4.22 Evolution de la vitesse de déformation en fonction du temps.

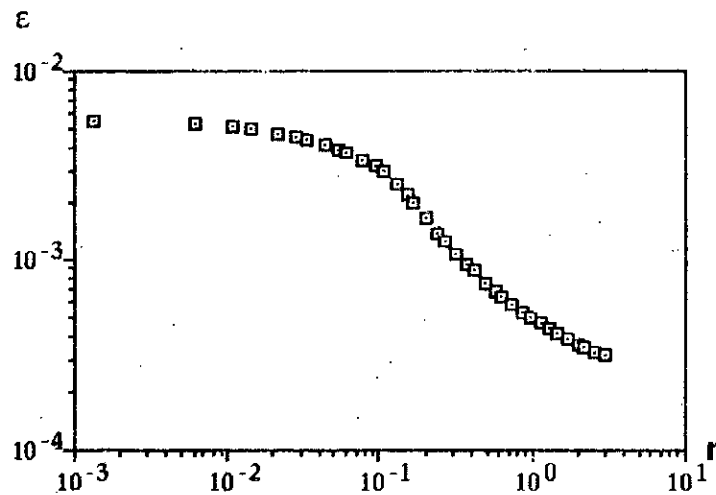
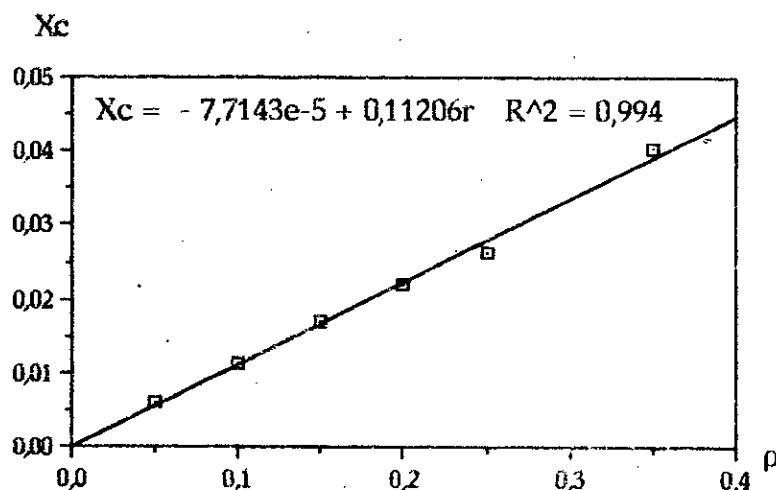


Fig. 4.23 Distribution des déformations en fond d'entaille.

Nous constatons donc que la déformation augmente rapidement en fonction du temps, puis se stabilise (Fig. 4.21). La vitesse de déformation croît rapidement, passe par un minimum puis diminue jusqu'à atteindre une valeur minimale très proche de zéro (Fig. 4.22). Nous remarquons que la distribution des déformations en fond d'entaille est assez régulière et que nous pouvons l'approximer par la forme en  $r^{-\alpha}$  comme pour le cas d'un comportement élasto-plastique. Après détermination des paramètres  $\alpha$ ,  $K_{\epsilon,\rho}$  et  $X_c$  pour les différents cas traités, nous obtenons les résultats mentionnés sur le tableau (4.5).

$\rho$ (mm)	$\alpha$	$X_c$ (mm)	$K_{\epsilon,\rho}$ (%m $^\alpha$ ) $10^3$
0,05	0,5034	0,0060	1,3712
0,10	0,4991	0,0112	1,3409
0,15	0,4944	0,0170	1,3110
0,20	0,4866	0,0220	1,2824
0,25	0,4794	0,0263	1,2545
0,35	0,4707	0,0403	1,2117

Tableau 4.5


 Fig. 4.24 Variation de  $X_c$  en fonction de l'acuité d'entaille pour un comportement viscoplastique.

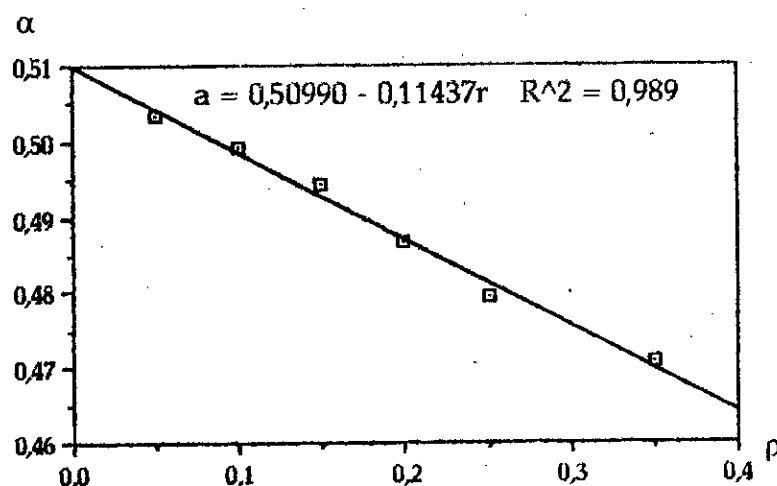


Fig 4.25 Variation de  $\alpha$  en fonction de l'acuité d'entaille pour un comportement viscoplastique.

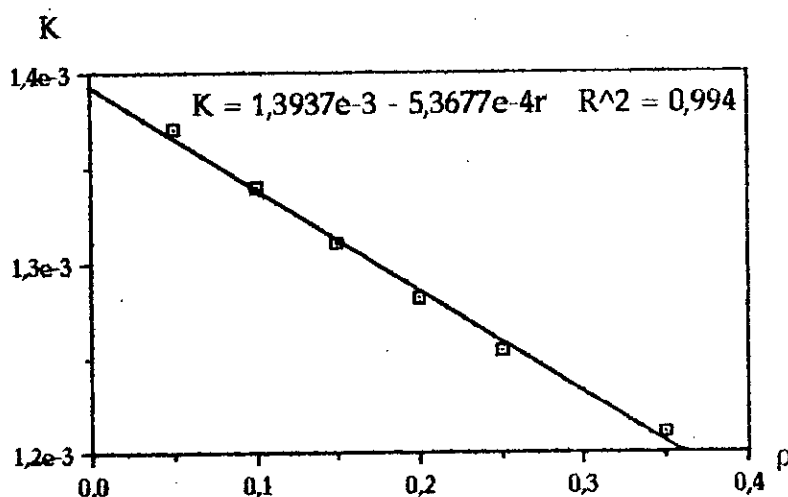


Fig 4.26 Variation de  $K_{\epsilon,\rho}$  en fonction de l'acuité d'entaille pour un comportement viscoplastique.

Nous remarquons que la distance caractéristique croît linéairement avec l'acuité d'entaille, de plus, la distance caractéristique nulle correspond à une acuité de 0,0007 mm. L'exposant  $\alpha$  est inférieur à 0,5 et décroît linéairement lorsque l'acuité d'entaille augmente. Le facteur d'intensité de déformation d'entaille décroît lui aussi linéairement lorsque l'acuité augmente.

#### 4.4.4/ Influence du chargement

Nous avons déterminé, pour une même acuité d'entaille, les distributions locales de déformation en fond d'entaille pour différentes valeurs du chargement (Fig. 4.27).

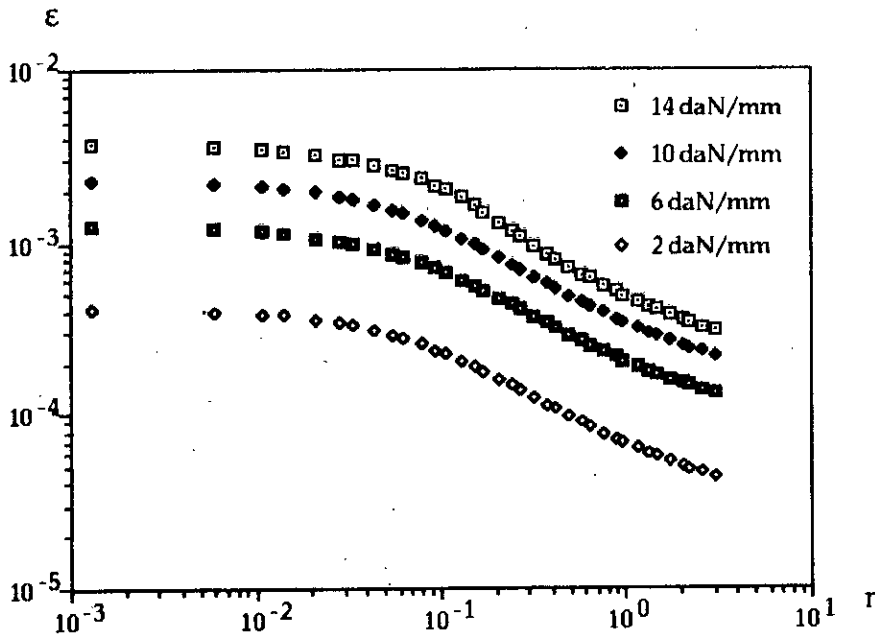


Fig. 4.27 Influence du chargement sur la distribution locale des déformations en fond d'entaille.

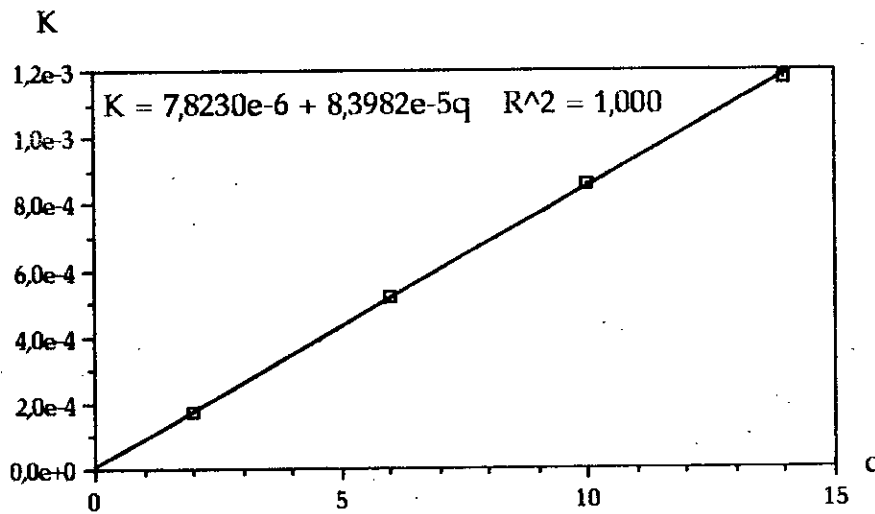


Fig. 4.28 Influence du chargement sur  $K_{\epsilon,\rho}$ .

Nous remarquons que la distance caractéristique ainsi que l'exposant  $\alpha$  sont indépendants du chargement alors que le facteur d'intensité de déformation d'entaille en dépend de façon essentielle (Fig. 4.28); cela confirme le fait que le facteur d'intensité de déformation d'entaille permet de gouverner la rupture au-delà de la distance caractéristique.

#### 4.4.5/ Confrontation des trois solutions

Nous avons superposé les trois solutions, élastique, élasto-plastique et élasto-viscoplastique, pour une même acuité d'entaille dans un seul graphe (Fig. 4.29).

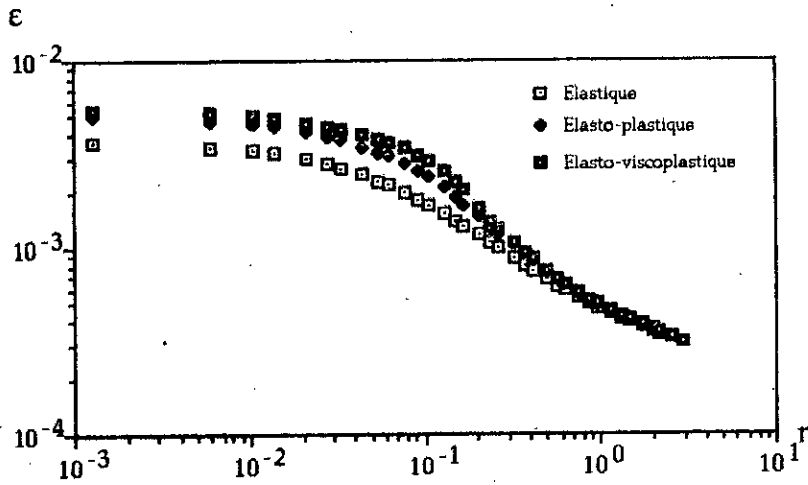


Fig. 4.29 Superposition des trois solutions

Nous remarquons qu'au niveau de la distance caractéristique et du gradient de déformation, la solution élastique est la plus faible alors que la solution élasto-viscoplastique est la plus importante bien que cette dernière est très proche de la solution élasto-plastique. Nous remarquons de plus que la déformation rejoint la valeur de la solution élastique tout en s'éloignant du fond d'entaille; la plasticité est donc confinée en fond d'entaille.

$X_c$

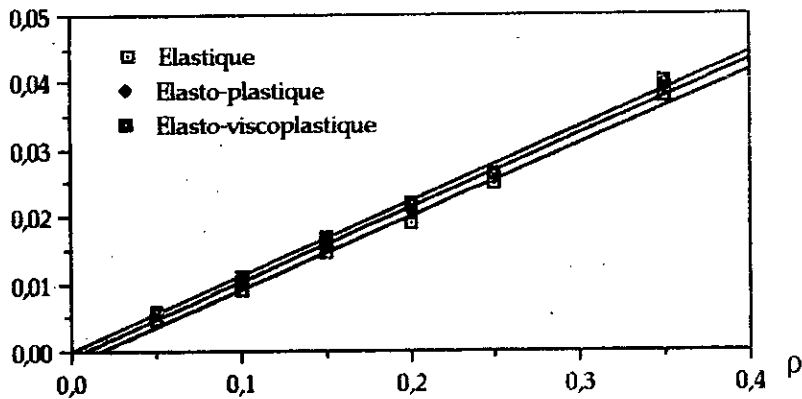


Fig. 4.30 Variation de  $X_c$  en fonction de l'acuité d'entaille pour les trois solutions.

$\alpha$

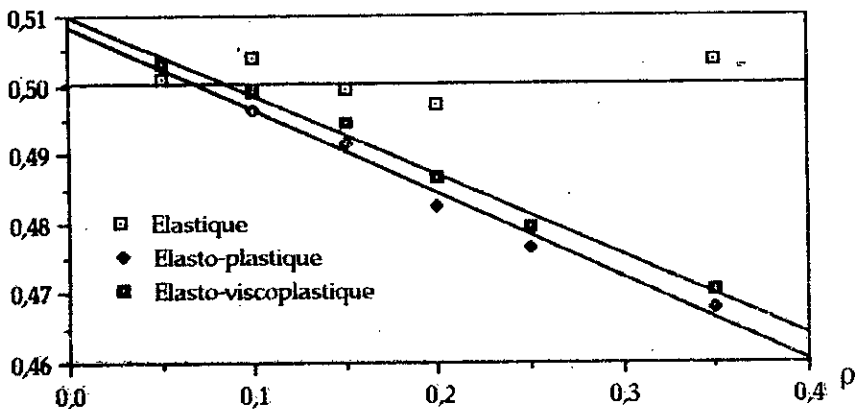


Fig. 4.31 Variation de  $\alpha$  en fonction de l'acuité d'entaille pour les trois solutions.

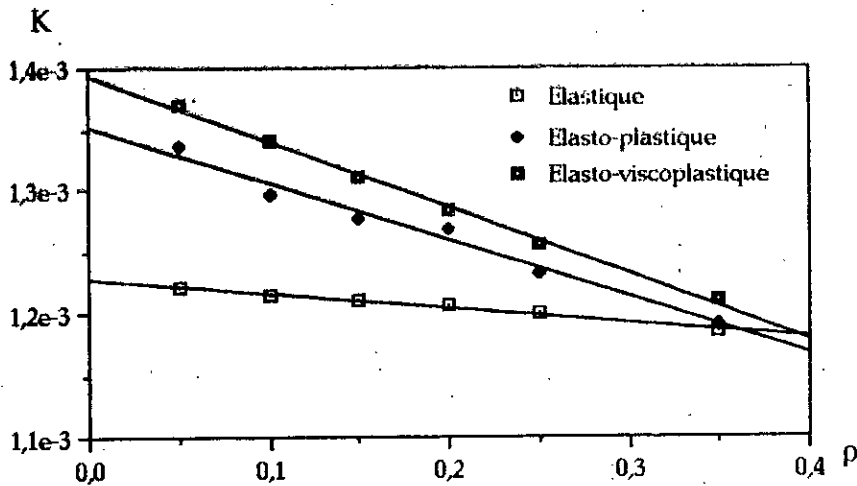


Fig. 4.32 Variation de  $K_{\epsilon,\rho}$  en fonction de l'acuité d'entaille pour les trois solutions.

Concernant les distances caractéristiques, nous constatons que les pentes sont sensiblement égales pour les trois solutions. Les distances caractéristiques de la solution élastique sont les plus faibles alors que celles de la solution élasto-viscoplastique sont les plus importantes quoique les trois solutions sont du même ordre de grandeur.

L'exposant  $\alpha$  de la solution élastique est de l'ordre de 0,5 alors que pour les deux autres solutions, l'évolution est à peu près la même; cependant, les valeurs de la solution élasto-viscoplastique sont légèrement supérieures à celles de la solution élasto-plastique.

Dans le cas d'un comportement élastique, la pente de la droite exprimant  $K_{\epsilon,\rho}$  en fonction de l'acuité d'entaille est inférieure à celles des deux autres comportements; la même constatation est faite concernant les valeurs des facteurs d'intensité de déformation d'entaille. Pour les cas de comportements élasto-plastique et élasto-viscoplastique, nous observons la même évolution sauf que les valeurs de  $K_{\epsilon,\rho}$  pour un comportement élasto-viscoplastique sont plus importantes que celles d'un comportement élasto-plastique.

#### 4.5/ EXEMPLES D'ÉPROUVETTE C.T.

Afin de pouvoir valider nos résultats par des essais expérimentaux, le Professeur Pluinage nous a communiqué les dimensions géométriques ainsi que les propriétés matérielles réelles d'éprouvettes C.T. (Fig. 4.33) du fait de leur disponibilité au sein du laboratoire qu'il dirige. Pour des raisons indépendantes de notre volonté, nous n'avons pas pu réaliser les essais envisagés. Nous nous contentons donc de présenter les résultats obtenus par le calcul numérique.



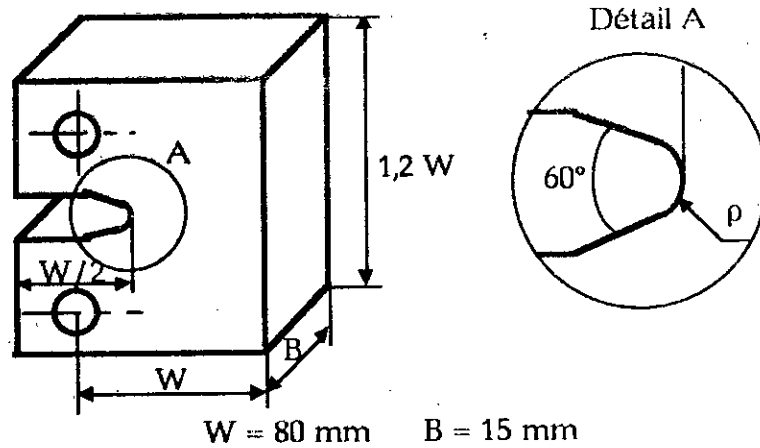


Fig. 4.33 Schéma de l'éprouvette C.T.

Les propriétés matérielles de l'éprouvette C.T. sont données par le tableau 4.6.

module de Young [daN/mm <sup>2</sup> ]	coefficient de Poisson	limite élastique [daN/mm <sup>2</sup> ]	coefficient de résistance plastique	coefficient d'écroutissage
20600,0	0,3	37,5	125,5	0,21

Tableau 4.6

Le code de calcul permet de donner les résultats suivants :

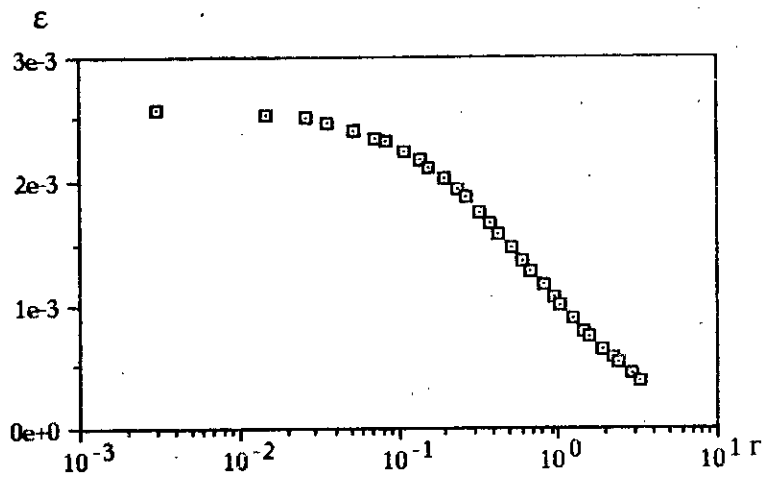


Fig. 4.34 Distribution de déformation en fond d'entaille pour une acuité de 2 mm d'une éprouvette C.T.

$\rho$ (mm)	$\alpha$	$X_c$ (mm)	$K_{c,\rho}$ (%in <sup><math>\alpha</math></sup> ) 10 <sup>3</sup>
0,5	0,4861	0,0476	2,9987
1,0	0,4649	0,0838	2,8879
1,5	0,4474	0,1389	2,7391
2,0	0,4315	0,1761	2,6179
2,5	0,4116	0,2274	2,5413

Tableau 4.7

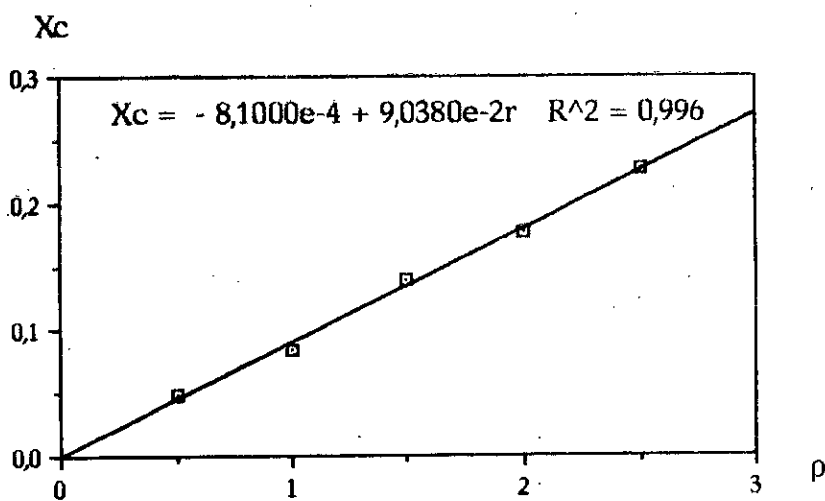


Fig. 4.35 Influence de l'acuité d'entaille sur  $X_c$  pour une éprouvette C.T.

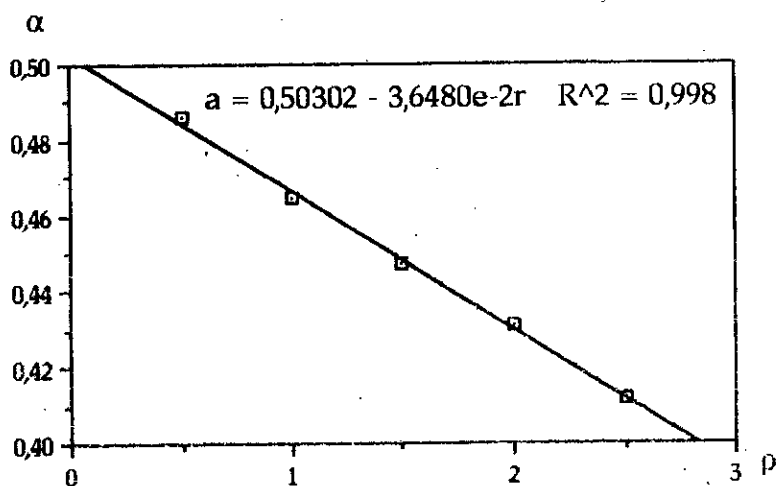


Fig. 4.36 Influence de l'acuité d'entaille sur  $\alpha$  pour une éprouvette C.T.

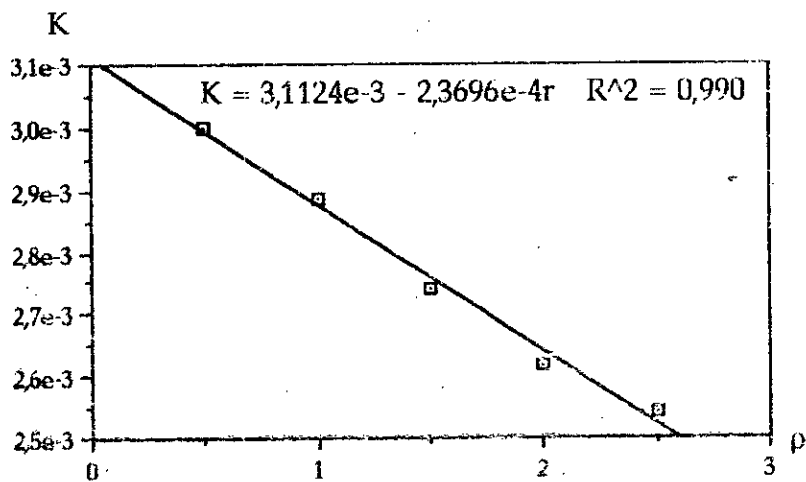


Fig. 4.37 Influence de l'acuité d'entaille sur  $K_{c,0}$  pour une éprouvette C.T.

Nous remarquons, comme pour le cas d'une plaque en traction, que la distance caractéristique croît linéairement avec l'acuité d'entaille, de plus, la distance caractéristique nulle correspond à une acuité de 0,0089 mm. L'exposant  $\alpha$  est inférieur à 0,5 et décroît linéairement lorsque l'acuité d'entaille augmente. Le facteur d'intensité de déformation d'entaille décroît lui aussi linéairement lorsque l'acuité augmente.

L'approximation de la distribution de déformation locale par cette forme expliquée ci-dessus (§ 4.2) permet de conclure que le facteur d'intensité de déformation d'entaille peut, à lui seul, gouverner la rupture au-delà de la distance caractéristique, alors qu'au niveau de cette dernière, la déformation locale permet de mieux définir l'amorçage de la rupture.

## CONCLUSION

Dans cette étude, nous nous étions proposé de déterminer la distribution des déformations en fond d'entaille pour des cas de comportements élasto-plastique et élasto-viscoplastique, d'analyser tous les paramètres décrivant le champs local de déformation et de déterminer une forme généralisée de cette distribution.

Nous avons donc mis au point un code de calcul par éléments finis déterminant les distributions de contrainte et de déformation de structures bidimensionnelles planes (contrainte plane, déformation plane et problème axisymétrique) dont le comportement du matériau peut être soit élastique, soit élasto-plastique, soit élasto-viscoplastique.

Pour le cas d'un comportement élastique, nous avons vérifié que la distribution des déformations en fond d'entaille est donnée par la solution d'Irwin au-delà de la distance caractéristique et qui est de la forme :

$$\epsilon_{ij} = f(r^{-0.5})$$

Nous avons donc pu généraliser cette forme pour les cas de comportement élasto-plastique et élasto-viscoplastique au-delà de la distance caractéristique comme :

$$\epsilon_{ij} = f(r^{-\alpha})$$

$\alpha$  étant un réel inférieur à 0.5

Cependant, pour le cas des comportements élasto-viscoplastiques, nous avons montré, à travers une série de tests numériques, qu'il fallait introduire un critère de stabilité de la déformation pour pouvoir approximer la distribution des déformations avec la forme ci-dessus.

Pour arriver à cette fin, il a fallu définir le facteur d'intensité de déformation d'entaille qui est un paramètre permettant de rendre compte de l'état de déformation ainsi que de la géométrie de l'entaille.

Nous avons, de plus, étudié la dépendance de la distance caractéristique, de l'exposant  $\alpha$  ainsi que du facteur d'intensité de déformation d'entaille en fonction de l'acuité d'entaille et en fonction du niveau de chargement. Nous avons conclu que ces trois paramètres ont une évolution linéaire en fonction de l'acuité d'entaille pour les trois cas de comportements alors que seul le facteur d'intensité de déformation d'entaille dépend du niveau de chargement; c'est donc un paramètre qui peut, à lui seul, gouverner la rupture.

La méthode des éléments finis nous permet donc de traduire l'évolution des contraintes et des déformations aux points les plus sollicités à l'aide de lois assez simples. Seulement, elle est caractérisée par des temps de calcul relativement importants surtout pour les cas de comportement élasto-viscoplastique.

Il serait intéressant d'envisager la comparaison de cette méthode avec la méthode des équations intégrales et de voir les avantages qu'elle pourra présenter quant à la rapidité de convergence, la qualité de la précision des résultats, et l'importance du temps de calcul.

Nous envisageons en perspectives de confronter ces résultats avec ceux d'essais expérimentaux réalisés sur éprouvettes entaillées en traction et sur éprouvettes C.T. afin de pouvoir les valider et par la suite, de formuler un critère de rupture sous déformation critique ou bien sous facteur d'intensité de déformation d'entaille critique. Nous envisageons de plus, d'améliorer le code de calcul en vue de traiter des problèmes de propagation de fissure, en introduisant le critère de rupture à formuler, d'enrichir la bibliothèque d'éléments, d'incorporer un sous-programme permettant de réaliser un maillage automatique adaptatif et d'optimiser le temps de calcul surtout pour les problèmes élasto-viscoplastiques qui est relativement important.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] GRIFFITH  
"The theory of rupture"  
Proceedings of the international congress for applied mechanics  
Deft 1924, p. 55-63
- [2] IRWIN G.R.  
"Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate"  
Trans. A.S.M.E. Journal of applied mechanics 24, p. 361-364 1948
- [3] PLUVINAGE G.  
"Mécanique élasto-plastique de la rupture : critères d'amorçage"  
CEPADUES Editions 1989
- [4] HUTCHINSON J.W.  
"Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material"  
Journal of mechanics and physics of solids 16, n°1 p. 13-31 1968
- [5] RICE J.R. ROSENGREEN G.F.  
"Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material"  
Journal of mechanics and physics of solids 16, n°1 p. 1-12 1968
- [6] LEMAITRE J. CHABOCHE J.L.  
"Mécanique des matériaux solides"  
Edition DUNOD 1988
- [7] OWEN D.R.J. HINTON E.  
"Finite elements in plasticity : theory and practice"  
Pineridge Press Limited 1980
- [8] ZIENKIEWICZ O.C. TAYLOR R.L.  
"The finite element method : non-linear problems" Tome 2  
Mc Graw Hill Book Company 1989

- [9] BUI H.D.  
 "Mécanique de la rupture fragile"  
 Editions MASSON 1978
- [10] LABBENS R.  
 "Introduction à la mécanique de la rupture"  
 Edition PLURALIS 1980
- [11] WITT F.J.  
 "Equivalent energy procedures for preceding gross plastic fracture"  
 4<sup>th</sup> National Symposium on Fracture Mechanics - Pittsburgh 1970
- [12] JONES G.T.  
 "Post-yield fracture mechanics analysis and its application to turbo-generator design"  
 3<sup>rd</sup> International Conference on Fracture - Munich 1973
- [13] ALLEN R.J.  
 "The calculation and use of the plasticity correction in toughness"  
 British rail research department report ME/70/74 1974
- [14] DUGDALE D.S.  
 "Yielding of sheets containing slits"  
 Journal of mechanical physics solids 8, p. 100-104 1960
- [15] GUILLEMOT L.F.  
 "Criterion of crack initiation and spreading"  
 Doc. X. 873. 77. IIS 1977
- [16] LIEBOWITZ  
 "On non-linear effects in fracture mechanics"  
 Engineering fracture mechanics Vol. 3 p. 267-281 1971
- [17] TURNER C.E.  
 "Methods for post-yield fracture and safety assessment"  
 Post-yield fracture mechanics, Ed. LATZKO p. 23-210 1979
- [18] WELLS  
 "Unstable crack propagation in metals : clivage and fast fracture"  
 Symposium on crack propagation College of Aeronautics Cranfield paper B4 1961
- [19] COTTEREL A.H.  
 "Theoretical aspects of radiation damage and brittle fracture in steel pressure vessels"  
 Iron and Steel Inst. Spec. report n° 69 , p. 281-296 1961
- [20] BARENBLATT G.I.  
 "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture"  
 Advances in applied mechanics 7 Academic press N.Y. 1962

- [21] MERKLE J.G. RANDALL P.N.  
 "Effects of crack size on the gross strain crack tolerance of A 533-B steel"  
 Journal of engineering for industry  
 Transactions of the A.S.M.E. p. 935-941 August 1972
- [22] CHAUDRONNERET M.  
 "Calcul des concentrations de contraintes en élasto-viscoplasticité"  
 Office National d'Etude et de Recherche Aéropaciales. Thèse d'état 1978.
- [23] ZIENKIEWICZ O.C. TAYLOR R.L.  
 "The finite element method : Basic formulation and linear problems" Tome 1  
 Mc Graw Hill Book Company 1989
- [24] DHATT G. TOUZOT G.  
 "Une présentation de la méthode des éléments finis"  
 MALOINE S.A. Editeur 1984
- [25] SHAO J.F.  
 "Etude du comportement d'une craie blanche très poreuse et modélisation"  
 Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois  
 septembre 1987
- [26] JOLY P.  
 "MODULEF : Méthode frontale"  
 I.N.R.I.A. Version 1985
- [27] CORMEAU I.  
 "Numerical stability in quasi-static elasto-viscoplasticity"  
 International Journal of Numerical Methods in Engineering 9, p. 109-127 1975
- [28] BOUKHAROUBA T. TAMINE T. CHEHIMI C. PLUVINAGE G.  
 "Utilisation d'un nouveau critère d'amorçage en fatigue"  
 Laboratoire de Fiabilité Mécanique Faculté des sciences Ile du Saulcy Metz 1992
- [29] POIRIER J.P.  
 "Plasticité à haute température des solides cristallins"  
 Editions EYROLLES 1976
- [30] BARTHELEMY B.  
 "Notions pratiques de mécanique de la rupture"  
 Editions EYROLLES 1980
- [31] BURDEKIN F.M. STONE D.E.W.  
 "The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding  
 materials"  
 Journal of strain analysis Vol. 1 n° 2 p. 145-153 1966
- [32] GDOUTOS E.E. PAKALIAKIS G.  
 "Dependance of crack growth initiation on the form of the stress-strain diagram  
 of the material in tension"  
 Engineering fracture mechanics Vol. 34 n° 1 p. 148-151 1989



- [33] JENDOUBI K. RANGANATHAN N. DE FOUQUET J.  
"Modélisation expérimentale du champ élasto-plastique en bout d'une fissure de fatigue"  
Revue Française de Mécanique p. 309-316 n° 1990-4
- [34] KANNINEN M.F. POPELAR C.H.  
"Advanced fracture mechanics"  
Oxford University Press Clarendon Press 1985
- [35] SALENCON J. HALPHEN B.  
"Elasto-plasticité"  
Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
- [36] WASHIZU K.  
"Variational methods in elasticity and plasticity"  
Pergamon Press 1975