

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

Génie Mécanique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

**MODELISATION DE LA RUPTURE DES  
MATERIAUX VISCOELASTIQUES PAR LA  
METHODE DES DISCONTINUITES DE  
DEPLACEMENT**

Proposé par :

**Mr: Y.BELKACEMI**

Etudié par :

**Mr: Z.BENRABAH  
Mr: A.ZEGNOUNÉ**

Dirigé par :

**Mr: Y.BELKACEMI**

PROMOTION

**Juin 1994**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

:Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

**MODELISATION DE LA RUPTURE DES  
MATERIAUX VISCOELASTIQUES PAR LA  
METHODE DES DISCONTINUITES DE  
DEPLACEMENT**

Proposé par :

**Mr: Y.BELKACEMI**

Etudié par :

**Mr: Z.BENRABAH  
Mr: A.ZEGNOUNE**

Dirigé par :

**Mr: Y.BELKACEMI**

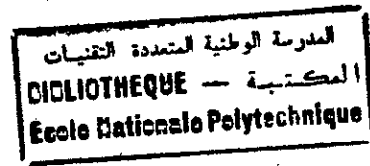
PROMOTION

*Juin 1994*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

### DEDICACES

*A mes chers parents que, j'espère, trouveront le fruit de leurs amours et leurs souffrances pour moi, à mes frères et soeurs, à toute ma famille que je dédie ce modeste travail.*



\* \*  
\* **REMERCIEMENTS** \*  
\* \*

*Nous tenons à exprimer nos remerciements à notre promoteur Mr YACINE BELKACEMI .Ses conseils et ses remarques nombreuses sont à l'origine de ce travail.*

*Nos remerciements vont également à Mr SAHNOUN pour l'aide qu'il nous a porté tout au long de ce projet.*

*On tient également à exprimer notre gratitude envers Mr BOURAHLA pour son aide continue ainsi que Mr A. MEKRI.*

*Nos remerciements vont également à tout ce qui ont contribué à notre formation en particulier :*

*Mr S. RECHAK  
Mr F.BELBLIDIA*

الموضوع: نمذجة إنكسار المواد اللزجة المرنة

بطريقة الإنقطاعات الإنتقالية.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

الملخص: يتناول هذا العمل في الجاز برنامج معلوماتي يسمح بتحليل الشروخ بانتشار الشقوق و تجديد منعق إنتشارها في حالات تشوه هستوي، وهذا في أجسام ذات تصرف مرني ولنح مرني باستعمال طريقة الإنقطاعات الإنتقالية التي تمكن من الحصول على متغيرات الشقوق  $G$  (نسبة إسترجاع الطاقة) و  $K$  (معامل شدة الإجهادات).

*SUBJECT*: Modélisation de la Rupture des Matériaux Viscoélastiques par la Méthode des Discontinuités de Déplacement

*RESUME*: Ce travail consiste à l'élaboration d'un logiciel permettant l'analyse de la rupture par fissuration et la prédiction de la direction de propagation en condition de déformation plane dans les matériaux viscoélastiques, en utilisant la méthode des discontinuités de déplacement, permettant le calcul des variables de fissuration  $G$  (taux de restitution d'énergie) et  $K$  (facteur d'intensité de contrainte).

*SUBJECT*: Fracture Model for Viscoelastic Materials Based on the Displacement Discontinuity Method

*ABSTRACT*: The purpose of this work is to develop a software for analyzing the fracture crack and predicts its propagation in plane deformation for the viscoelastic materials. The use of the displacement discontinuity method allows the computation of crack variables  $G$  (Release Rate Energy) and  $K$  (Stress Intensity Factor).

## S O M M A I R E

### INTRODUCTION GENERALE

#### I - VISCOELASTICITE LINEAIRE

I.1 Introduction.....	03
I.2 - Modélisation du Comportement Viscoélastique uni axial.....	03
I.2.1 - Expériences Fondamentales.....	03
I.2.1.1 - Fluage.....	03
I.2.1.2 - Relaxation.....	04
I.2.2 - Loi de Comportement.....	05
I.2.2 - Loi de Comportement.....	05
I.2.2.1- Intégrale Héritaire.....	06
I.3 - Modélisation du Comportement Viscoélastique Tridimensionnel.....	08
I.4 - Equation des Problèmes Viscoélastique.....	09
I.5 - Principe de Correspondance.....	10
I.6 - Modèles Rhéologiques pour le Comportement Viscoélastique uni axial.....	10
I.6.1 - Modèles de Base .....	11
I.6.1.1 - Ressort .....	11
I.6.1.2 - Amortisseur .....	11
I.6.2 - Modèles Intermédiaires.....	11
I.6.2.1 - Modèle de MAXWEL.....	11
I.6.2.2 - Modèle de KELVIN.....	13
I.6.2.3 - Modèle du Solide à trois Paramètres.....	14

#### II - NOTION DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE APPLIQUEE AUX MILIEUX VISCOELASTIQUES

II.1 - Introduction.....	17
II.2 - Généralités sur les ruptures .....	17
II.2.1 - Classement des Phénomènes de ruptures.....	17
II.2.1.1 - Rupture Ductile.....	17
II.2.1.2 - Rupture Fragile.....	18
II.2.2 - Mode Fondamentaux de la Rupture.....	18
II.2.2.1 - Mode I ( mode d'ouverture).....	18
II.2.2.2 - Mode II ( mode de cisaillement ).....	18
II.2.2.3 - Mode III ( mode de torsion ).....	19
II.3 - Approche Energétique.....	20
II.3.1 - Approche Globale.....	20
II.3.1.1- Formulation de la Théorie de GRIFFITH.....	20
II.3.1.2 - Formulation Intégrale énergétique .....	21
II.3.2 - Approche Locale .....	23

II.3.2.1 - Champs de Déplacement et de Contrainte au Voisinage de l'extrémité d'une Fissure.....	23
II.3.2.2 - Solution pour le Mode I.....	23
II.3.2.3 - Solution pour le Mode II.....	24
II.3.2.4 - Solution pour le Mode III.....	25
II.4 - Notion de Rupture des Matériaux Viscoélastique.....	27
II.4.1 - Champs de Déplacement et de Contraint au Voisinage du Front de fissure.....	27
II.4.2 - Facteur d'Intensité de Contrainte .....	28
II.4.3 - Calcul du Taux d'Energie Viscoélastique .....	29
II.4.4 - Expression du Taux d'Energie Viscoélastique en Fonction du Temps et Critère Rupture.....	29
II.4.5 - Critère de Branchement des Fissures dans un Milieu Viscoélastique....	30
II.4.5.1 - Critère de la Contrainte Normale Maximale.....	30
II.4.5.2 - Critère du Taux de Restitution d'Energie Viscoélastique Maximale....	30
<b>III - METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERES</b>	
III.1 - Introduction.....	32
III.2 - Méthode des Discontinuités de Déplacement .....	33
III.3 - Solution Analytique.....	34
III.3.1 - Principe de Représentation de NEUBER-PAPKOVITCH pour le cas d'une Discontinuité de Déplacement Constante.....	34
III.3.2 - Conditions aux Limites .....	35
III.4 - Procédure Numérique.....	38
III.5 - Coefficient d'Influence.....	41
<b>IV-APPLICATION DE LA M.D.D AUX PROBLEMES VISCOELASTIQUES</b>	
IV.1 - Introduction.....	43
IV.2 -Problème de Fluage .....	43
IV.2.1 - Contrainte à l'intérieur du Corps.....	44
IV.2.2 - Déplacement à l'intérieur du Corps.....	45
IV.3 - Problème de Relaxation.....	48
IV.3.1 - Déplacement à l'intérieur du Corps.....	49
IV.3.2 - Contrainte à l'intérieur du Corps.....	49
IV.4 - Exemples de calcul et interprétation des résultats.....	50
IV.4.1 - problème de Fluage.....	52
IV.4.2 - problème de Relaxation.....	60
<b>V - SIMULATION NUMERIQUE DE LA PROPAGATION DES FISSURES DANS LES MILIEUX VISCOELASTIQUES PAR LA M.D.D.</b>	
V.1 - Introduction .....	63
V.2 - Procédure de Calcul des Variables de Fissurations.....	63
V.2.1 - Calcul du Taux de Restitution d'énergie Viscoélastique.....	63

V.2.2 - Calcul des Facteurs d'intensité de Contrainte.....	65
V.3 - Organigramme du Programme.....	66
V.4 - Résultats Numériques et Interprétation.....	70
CONCLUSION.....	80
BIBLIOGRAPHIE.....	81



## INTRODUCTION GENERALE

Durant la seconde moitié du 19ème siècle, l'usage des différents matériaux se développa considérablement. Avec cet essor se multiplièrent aussi les accidents dus à l'utilisation inadéquate de ces matériaux, de même que bien souvent à des faiblesses de conception et de dimensionnement. Certains de ces accidents, de part leur soudaineté et leur brutalité, défrayèrent à raison lachronique.

En effet les règles de calcul des pièces avaient le plus souvent pour objet de prévenir les déformations importantes qui sont en général fondées sur la théorie de l'élasticité linéaire qui considère le milieu comme continue, situation que l'on sait fortement éloignée de la réalité, en raison de la présence inévitable des irrégularités géométriques (fentes, entailles, fissures, etc...), qui vont servir d'amplificateurs de contrainte c'est à dire existence des points de concentrations des contraintes qui vont permettre l'amorçage de la rupture.

Bien que ces ruptures soient finalement en nombre très faible, par comparaison avec celles causées par surcharge (plastification) ou instabilité, elle sont particulièrement dangereuses, en effet elle ne peuvent que difficilement être détectées à l'avance car elles se produisent avec peu ou pas de déformation préalable, par ailleurs une fois initiée la rupture fragile se propage avec une vitesse illimitée, que toutes actions correctives est impossible, ces caractères justifient l'immense effort de la recherche qui a été consacré et qui a aboutit à la création d'une discipline : La mécanique de la rupture .

Parmi les données qui gouvernent la propagation des fissures, la loi du comportement du matériau considéré, pour bien approcher le problème réel en mécanique des solides on ait amené parfois à considérer le matériau viscoélastique linéaire. Les polymères organiques, le bois etc. peuvent être considéré comme étant des matériaux ayant un comportement viscoélastique . Donc une prévision du comportement des matériaux non seulement au début de l'utilisation mais aussi après un certain temps de mise en service.

La formulation théorique du problème de viscoélasticité en utilisant le principe de correspondance et certain nombre de modèles rhéologiques nous ont permis de présenté la lois du comportement de ces matériaux . Le choix convenable d'un de ces modèles pour la formulation de l'application de la méthode des discontinuités des déplacements aux problèmes viscoélastiques qui nous permet de déterminer le champ contrainte et de déplacement dans un domaine viscoélastique fissuré, calculer les variables de fissuration (taux de restitution d'énergie et facteur d'intensité de contrainte ), et déterminer la direction de propagation de fissure. Par conséquent l'objet du présent travail, est la modélisation des ruptures des matériaux viscoélastiques linéaires en bidimensionnelles : la zone plastique à la pointe de la fissure peut être négligée .

Dans le chapitre I on présentera la modélisation des matériaux viscoélastiques et l'énoncé du principe de correspondance . Le chapitre II est un rappel de la mécanique linéaire élastique de la rupture et son extension en milieu viscoélastique en utilisant le principe de correspondance. La méthode des équations intégrales de frontières est présentée dans le chapitre III avec un développement de la méthode des discontinuités de déplacement en coordonnées cartésiennes en utilisant un potentiel de déplacement. Dans le chapitre IV on appliquera la M.D.D aux milieux viscoélastiques fissurés.

On terminera par le chapitre V ou on exposera la procédure numérique du travail et l'architecture du programme, ainsi que les résultats numériques de l'étude de propagation de fissure en structures viscoélastiques fissurées.

## CHAPITRE I :

### VISCOELASTICITE LINEAIRE

#### I.1 :INTRODUCTION :

Tous les matériaux présentent à des degrés divers des propriétés viscoélastique , leur comportement s'apparenté à la fois au comportement du solide élastique parfait et du liquide visqueux newtonien , la théorie des milieux viscoélastiques est donc une généralisation des deux domaines qui sont développés séparément à savoir :

- La théorie de l'élasticité
- la mécanique des milieux visqueux

Cette théorie permet d'introduire le temps comme un nouveau facteur dans les équations d'état des matériaux , cela signifie prendre compte des évolutions différées et de relaxation.

L'approche fonctionnelle est plus simple à formuler les matériaux viscoélastiques linéaires , elle essaye de traduire sous forme analytique leurs comportement réel.

#### I.2 :MODELISATION DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE UNI AXIAL:

##### I.2.1 :Expériences Fondamentales :-

Les expériences prépondérantes qui mettent en évidence le comportement viscoélastique sont :

##### I.2.1.1 FLUAGE :

A une éprouvette on applique un échelon de contrainte d'amplitude  $\sigma_0$  à  $t = t_0$  :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - t_0) \quad (I-1)$$

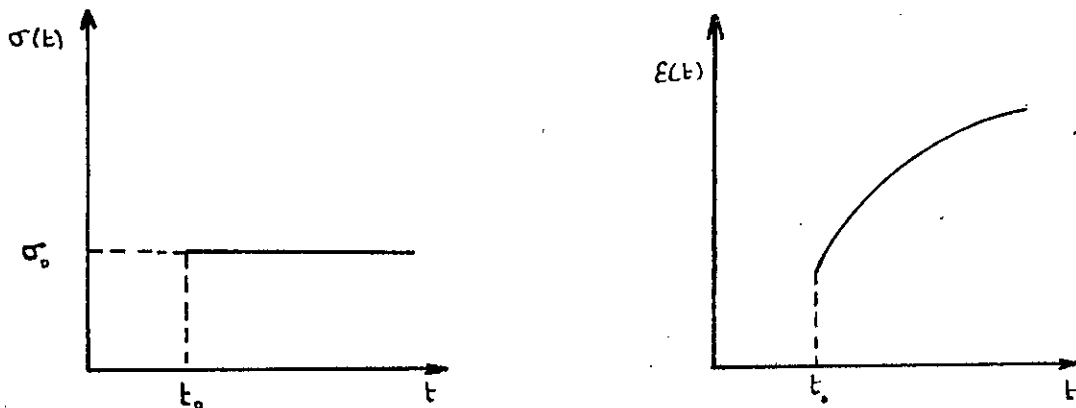
ou  $H(t)$  fonction échelon d'Heaviside définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (I-2)$$

et on observe l'évolution de la déformation en fonction du temps (fig I-1) qui peut être décrite par la relation :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t, t_0; \sigma_0) \quad (I-3)$$

ou  $J(t, t_0; \sigma_0)$  fonction de fluage qui est la déformation subie par le matériau lorsqu'on impose à celui-ci une contrainte d'amplitude unité à l'instant  $t = t_0$ , contrainte qui reste constante au cours du temps



fig(I-1): expérience de fluage

### 1.2.1.2 : RELAXATION :

On impose à une éprouvette un échelon de déformation d'amplitude  $\varepsilon_0$  à  $t = t_0$  :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - t_0) \quad (I-4)$$

on observe que la contrainte diminue au cours du temps (fig I-2) cette évolution peut être décrite par la relation :

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t, t_0; \varepsilon_0) \quad (I-5)$$

ou  $R(t, t_0; \varepsilon_0)$  fonction de relaxation qui est la contrainte résultant de l'application d'une déformation d'amplitude unité à  $t = t_0$ , déformation qui est maintenue constante au cours du temps.

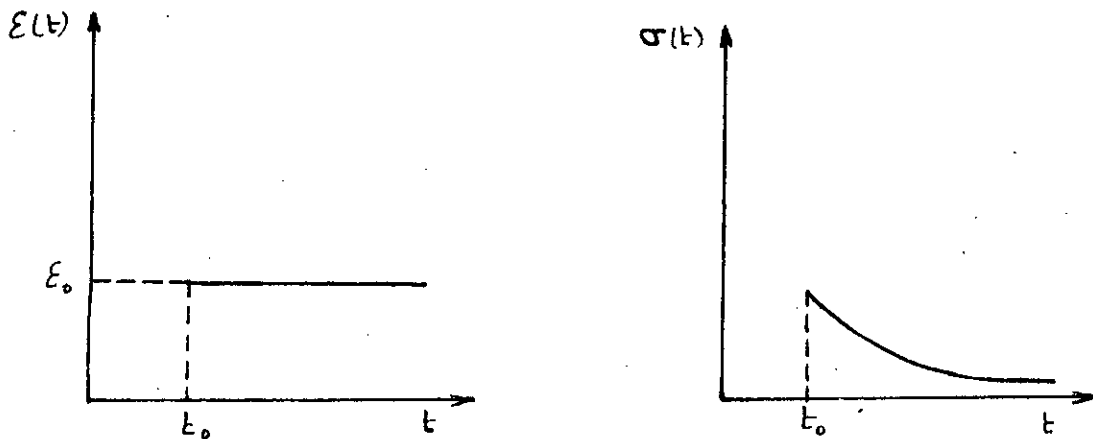


fig (I-2) : Expérience de relaxation.

Remarques :

1°) La déformation présente un saut à  $t=t_0$  (fig I-1) , il correspond à l'élasticité instantané du matériau , on peut observer des réponses sans élasticité instantané.

2°) Quand  $\lim_{t \rightarrow \infty} J_{t \rightarrow \infty}(t, t_0; \sigma_0)$  est finie , le matériau est asymptotiquement stable et il est dit solide , lorsque le cas est contraire il est dit fluide.

### I.2.2 : LOI DE COMPORTEMENT :

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique traduit la correspondance entre l'histoire des contraintes et celle des déformations :

$$\epsilon(t) = F[\sigma(t)]_t \quad (I-6)$$

F est une fonctionnelle de l'histoire des contraintes

On considère le comportement du matériaux linéaire (ce qui est vraie pour la plupart des matériaux lors que des sollicitations son suffisamment faibles) dont la traduction fait que la fonctionnelle F est linéaire c'est à dire

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R} \quad F[\alpha\sigma^1(t) + \beta\sigma^2(t)] = \alpha F[\sigma^1(t)] + \beta F[\sigma^2(t)] \quad (I-7)$$

On remarque bien que la linéarité nous dicte directement le principe de superposition de BOLTZMAN qui stipule que : " si l'on superpose deux histoires de sollicitation chacune apporte sa contribution à la déformation finale et la réponse est la superposition des réponses ".

On ajoute dans un souci de simplification à l'hypothèse de linéarité celle de non vieillissement c'est à dire que les propriétés mécanique du matériau n'évoluent pas avec le temps. Dans ce cas les fonctions de fluage et de relaxation ne dépend que d'une seule variable :

$$\begin{aligned} J(t, t_0, \sigma_0) &= J(t - t_0) \\ R(t, t_0, \varepsilon_0) &= R(t - t_0) \end{aligned} \quad (\text{I-8})$$

### I.2.2.1 : INTEGRALE HEREDITAIRE :

Compte tenu de la linéarité du comportement du matériau et du principe de BOLTZMAN la réponse à une sollicitation qui se compose d'une série de fonction échelon d'amplitude  $\Delta\sigma_i$  (fig I-3) est :

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i J(t - t_i) \quad (\text{I-9})$$

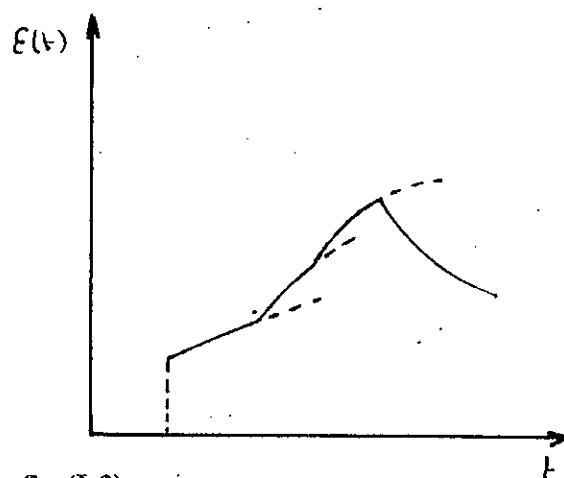
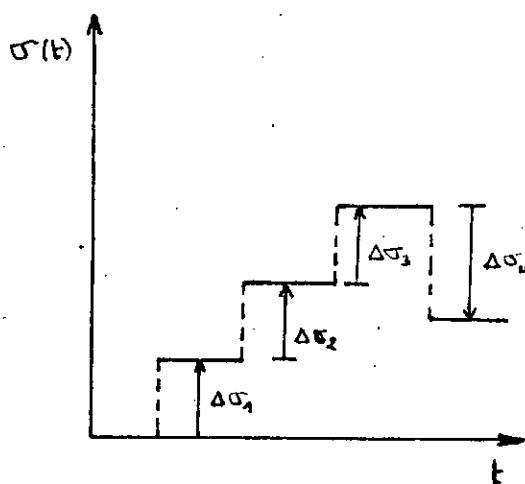


fig (I-3)

Pour une sollicitation continue on peut toujours décomposer  $\sigma(t)$  en une série de fonctions d'échelon d'amplitude infinitésimale  $d\sigma(t)$  fig (I-4) donc la réponse est :

$$\varepsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t - t_1) + d\sigma(t_1) J(t - t_1) + d\sigma(t_2) J(t - t_2) + \dots \quad (\text{I-10})$$

En faisant tendre  $d\sigma(t)$  vers zéro de façon que la décomposition du graphe escalier tend vers la fonction  $\sigma(t)$  réelle on obtient la réponse suivante :

$$\varepsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t-t_1) + \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{I-11})$$

ou l'intégrale est connue sous le nom d'intégrale héréditaire [FLUGGE]

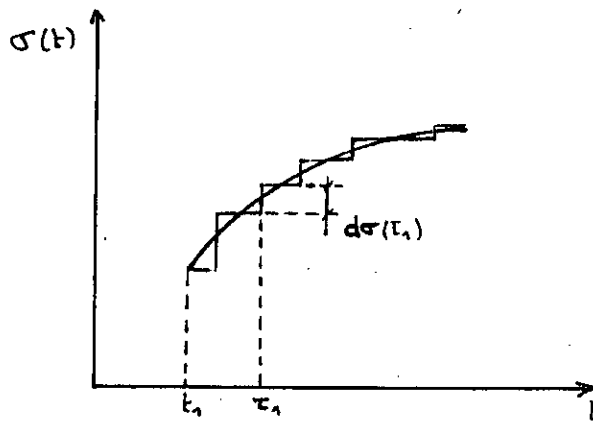


fig (I-4) : Décomposition d'une sollicitation continue

Pour une sollicitation quelconque la réponse s'exprime donc sous forme d'une intégrale à la quelle il faut ajouter les discontinuités éventuelles :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^n J(t-\tau) \Delta\sigma_j \quad (\text{I-12})$$

expression que l'on peut écrire avec la notation de produit de convolution et avec la

définition de la dérivée au sens des distributions  $\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$  pour tenir compte des termes de saut

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta J(t)}{\Delta t} * \sigma(t) \quad (\text{I-13})$$

De même la réponse d'une sollicitation en déformation  $\varepsilon(t)$  quelconque est :

$$\sigma(t) = \frac{\Delta R(t)}{\Delta t} * \varepsilon(t) \quad (\text{I-14})$$

les deux relations précédentes représentent l'équation d'état dans le cas uni axial , le rôle prépondérant des fonctions de fluage et de relaxation est mis en évidence

### I.3 : MODELISATION DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE TRIDIMENSIONNEL :

Pour un cas de sollicitation tridimensionnelle avec les mêmes hypothèses que Précédemment , les expériences de fluage et de relaxation nous amènent à définir :

- une matrice de fonctions de fluage [ J ] telle que pour une sollicitation de type suivant:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^0 H(t - \tau) \quad (\text{I-15})$$

la réponse est :

$$\varepsilon_{ij}(t) = J_{ijkl}(t - \tau) \sigma_{kl}^0 \quad (\text{I-16})$$

- Une matrice de fonctions de relaxation [ R ] telle que pour une sollicitation de type suivant :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^0 H(t - \tau) \quad (\text{I-17})$$

la réponse est :

$$\sigma_{ij}(t) = R_{ijkl}(t - \tau) \varepsilon_{kl}^0 \quad (\text{I-18})$$

D'une manière similaire que pour le cas uni axiale , la réponse à une sollicitation quelconque est :

réponse en déformation :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{\Delta J_{ijkl}(t)}{\Delta t} * \sigma_{kl}(t) \quad (\text{I-19})$$



réponse en contrainte :

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{\Delta R_{ijkl}(t)}{\Delta t} * \varepsilon_{kl}(t) \quad (I-20)$$

Remarque :

Avec le même raisonnement que dans le cas d'élasticité linéaire et avec l'hypothèse d'isotropie, on peut ramener à deux le nombre de fonctions indépendantes définissant les composantes de chacune des matrices [ J ] et [ R ].

On peut choisir deux fonctions L(t) et M(t) qui jouent un rôle équivalent aux coefficients de lamé. Nous avons alors pour une sollicitation quelconque :

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{\Delta L(t)}{\Delta t} * \varepsilon_{ij}(t) \delta_{ij} + 2 \frac{\Delta m(t)}{\Delta t} * \varepsilon_{ij}(t) \quad (I-21)$$

#### I.4 : EQUATION DES PROBLEMES VISCOELASTIQUES :

La formule obtenue précédemment montre que tous les calculs concernant un problème viscoélastique se font dans une algèbre de convolution. La propriété de la transformée de Laplace relative au produit de convolution permet de les remplacer dans une algèbre ordinaire portant sur la transformée de Laplace, qui est définie pour une fonction quelconque f.

$$\bar{f}(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (I-22)$$

Exprimons ainsi l'ensemble des équations d'un problème viscoélastique en transformé de Laplace :

Données et inconnues :

- Force volumique :  $f(t) \rightarrow \bar{f}(s)$

- Conditions aux limites :

$$U_i(t) = \bar{U}_i(t) \rightarrow U_i(s) = \bar{U}_i(s) \quad \text{en déplacement} \quad (I-23)$$

$$T_i(t) = \bar{T}_i(t) \rightarrow T_i(s) = \bar{T}_i(s) \quad \text{en contrainte}$$

$$\text{avec } \bar{T} = \bar{\sigma}_{ij} n_j$$

Equations :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{f} &= 0 && \text{équation d'équilibre} \\ \bar{\varepsilon}_{ij} &= 1/2 [\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}] && \text{relation déformation - déplacement} \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \bar{\lambda} \cdot \bar{\varepsilon}_{ii} \delta_{ij} + 2\bar{\mu} \bar{\varepsilon}_{ij} && \text{loi de comportement} \end{aligned} \quad (I-24)$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = s\bar{L}(s) \\ \bar{\mu} = s\bar{M}(s) \end{cases} \quad \text{pseudo coefficient de Lamé}$$

Equations tout à fait similaires à celles d'un problème d'élasticité linéaire si le type de conditions aux limites ne varie pas au cours du temps.

### I.5 : PRINCIPE DE CORRESPONDANCE :

Cette analogie étroite existant entre le problème viscoélastique transformé et le problème élastique appelé aussi principe de correspondance a été mise en valeur par MANDEL. elle consiste à :

- Résoudre le problème élastique correspondant
- Prendre l'écriture transposée , en remplaçant dans la solution correspondante :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &\text{ par } \lambda(s) \\ \bar{\mu} &\text{ par } \mu(s) \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

- On obtient ainsi la transformé de Laplace de la solution viscoélastique , en prenant son inverse , on trouve la solution dans l'espace temps.

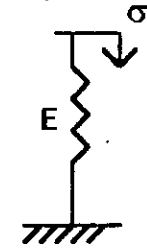
### I.6 : MODELES RHEOLOGIQUES POUR LE COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE UNI AXIAL :

On associe les deux modèles de bases , ressort et amortisseur pour obtenir des modèles de comportement intermédiaire dans le but de construire des équations d'états plus représentatives du comportement viscoélastique linéaire.

### I.6.1 - Modèles de base :

#### I.6.1.1 - Ressort : modélisé le matériau élastique linéaire

- Sa loi de comportement :  $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$  (loi de HOOKE)
- Fonction de fluage :  $J(t) = 1/E H(t)$
- Fonction de relaxation :  $R(t) = E H(t)$

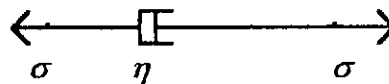


E: module de young.

#### I.6.1.2 - L'amortisseur : modélise la viscosité linéaire

- Sa loi de comportement :  $\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t)$  (loi de NEWTON)
- Fonction de fluage :  $J(t) = 1/\eta H(t)$
- Fonction de relaxation :  $R(t) = \eta \delta(t)$

ou  $\delta(t)$  : impulsion de DIRAC



$\eta$  : coefficient de viscosité.

### I.6.2 - Modèles intermédiaires :

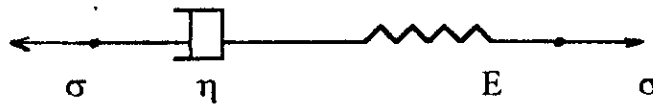
#### I.6.2.1-Modèle de MAXWELL :

Modélise un fluide viscoélastique

- Sa loi de comportement est :  $\frac{\sigma(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} = \varepsilon(t)$

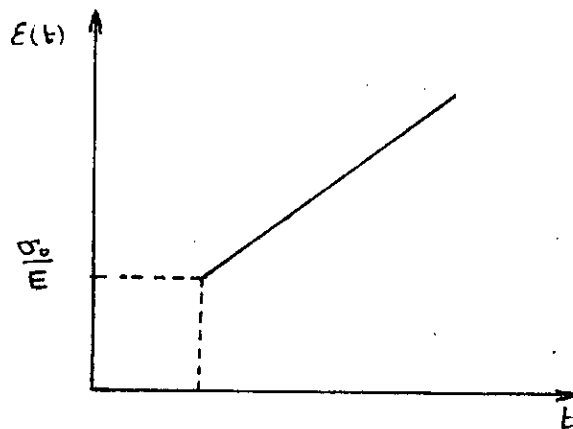
- Fonction de fluage :  $J(t) = \left[ \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right] H(t)$

- Fonction de relaxation :  $R(t) = E \exp\left(-\frac{E \cdot t}{\eta}\right) \cdot H(t)$



l'essai de fluage nous donne la réponse en déformation fig(I-5)

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E} + \frac{t-t_0}{\eta} \right] H(t-t_0) \quad (I-26)$$

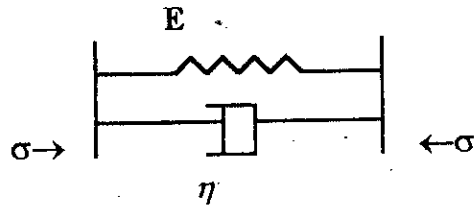


(Fig I-5)

$\varepsilon(t)$  augmente indéfiniment avec le temps c'est à dire le modèle de MAXWELL décrit un comportement fluide.

### I.6.2.2- modèle DE KELVIN

Modélise un solide élastique



- Sa loi de comportement est :  $\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t)$  (I-27)

- Fonction de fluage :  $J(t) = \frac{1}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E \cdot t}{\eta}\right) \right] H(t)$  (I-28)

- Fonction de relaxation :  $R(t) = EH(t) + \eta\delta(t)$  (I-29)

L'essai de fluage nous donne la réponse en déformation fig (I-6)

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \frac{1}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}(t-t_0)\right) \right] H(t-t_0) \quad \text{(I-30)}$$

On remarque que  $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t)$  est finie. Donc le modèle est asymptotiquement stable . Il décrit un comportement solide.

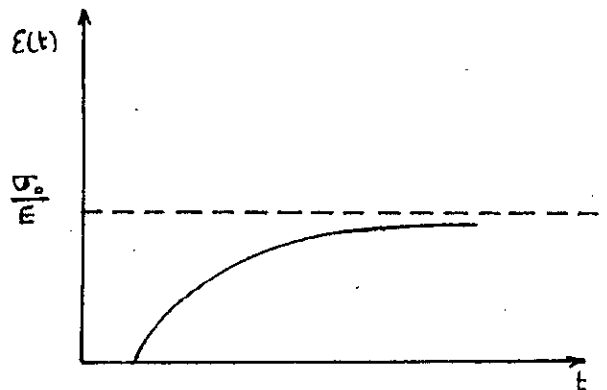
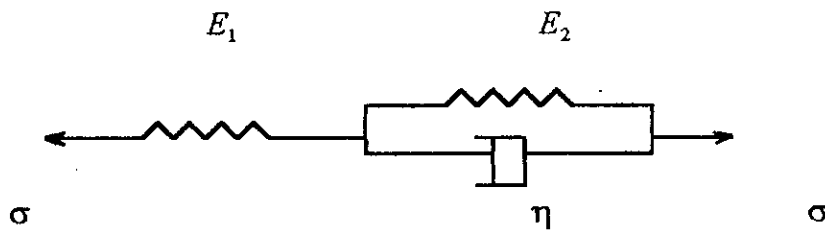


fig (I-6)

### I.6.2.3-Modèle du solide à trois paramètres :

- Sa loi de comportement est : 
$$\sigma \left[ \frac{E_1 + E_2}{E_2} \right] + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon} + E_1 \varepsilon \quad (I-31)$$



sous forme générale :

$$P_0 \sigma + P_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = \frac{\eta}{E_1 + E_2} \\ q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \\ q_1 = \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \end{cases} \quad (I-32)$$

En faisant la transformé de Laplace des équations d'état (I-13) et (I-14) on a :

$$\bar{J} = \frac{\bar{\varepsilon}}{s\sigma} \quad \text{transformé de la fonction de fluage} \quad (I-33-a)$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{\sigma}}{s\varepsilon} \quad \text{transformé de la fonction de relaxation} \quad (I-33-b)$$

Dans notre cas l'équation d'état s'écrit en transformé de Laplace :

$$\bar{\sigma}(P_0 + P_1 s) = (q_0 + q_1 s) \quad (I-34)$$

On peut la mettre :

$$\bar{P}\sigma = \bar{Q}\varepsilon \quad (I-35)$$

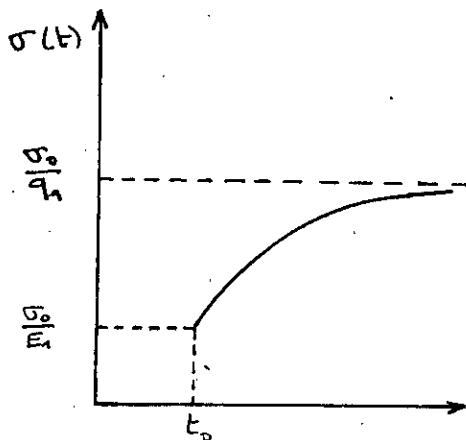
ainsi par identification on 'a :  $\bar{J} = \frac{\bar{P}}{s\bar{Q}}$  et  $\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{s\bar{P}}$

soit donc en faisant l'inverse :

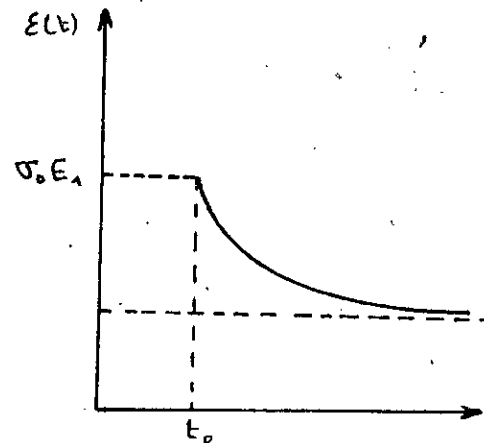
$$J(t) = \left[ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left( 1 - \exp\left( \frac{-E_2 \cdot t}{\eta} \right) \right) \right] \cdot H(t) \quad (I-36-a)$$

$$R(t) = \left[ \frac{E_1}{E_1 + E_2} \right] \cdot \left[ E_2 + E_1 \exp\left[ \left( -\frac{E_1 + E_2}{\eta} \right) \cdot t \right] \right] \cdot H(t) \quad (I-36-b)$$

Les deux essais prépondérant en viscoélasticité pour ce modèle nous donne les réponses suivantes :



essai de fluage



essai de relaxation

**Remarque:**

Le modèle montre une élasticité instantané et il est asymptotiquement stable , il représente un modèle standard du solide viscoélastique linéaire.

**Conclusion:**

Un matériau est dit viscoélastique si sous l'action d'une charge constante, il manifeste l'existence de la déformation différé et cela quelque soit le niveau de charge inférieur à la limite de la rupture.

Les modèles rhéologiques donnent l'expression analytique des lois de comportement (*fonction de fluage et de relaxation*) qui ne suffisent pas, car les coefficients qui les définissent, sont inconnus, mais expérimentalement la fonction de fluage est accessible (*certaines rhéomètres en fournissent un enregistrement graphique*) et par analyse mathématique de ce graphe on peut alors déduire les valeurs des différents paramètres rhéologiques, ainsi que le nombre du modèle solide à trois paramètres dont est constitué le matériau (*méthode de INOKUCHI*).

Dans notre étude en ce qui concerne de prendre un matériau viscoélastique représenté par un le modèle de solide à trois paramètres.



# ***CHAPITRE II:***

## ***NOTION DE MECANIQUE DE RUPTURE APPLIQUEES AUX MILIEUX VISCOELASTIQUES***

## **CHAPITRE II:**

### **NOTION DE MECANIQUE DE RUPTURE APPLIQUEES AUX MILIEUX VISCOELASTIQUES**

#### **II.1 : INTRODUCTION :**

C'est un fait d'expérience courant que , si on fait croître suffisamment le chargement au dessus du début de la déformation permanente , la rupture peut se produire. Mais on 'a aussi observé des ruptures soudaines en domaine élastique sans déformation importante préalable qui ont d'abord apparu surprenantes .On a constaté qu'on trouvait toujours à l'origine d'une rupture, un défaut , vide ou fissure.

Par conséquent , les calculs habituels de la mécanique des milieux continus ne peuvent prévoir la rupture puisqu'ils supposent l'absence de tout défaut.

#### **II.2: GENERALITES SUR LES RUPTURES :**

##### **II.2.1 : CLASSEMENT DES PHENOMENES DE RUPTURES :**

A l'échelle macroscopique , les surfaces de rupture sont loin d'avoir des formes simples.On peut cependant considérer deux modes principaux de ruptures : la rupture plate et la rupture inclinée.Le premier cas de la rupture se retrouve généralement dans des ruptures se produisant avec une faible déformation plastique c'est la rupture fragile. Quand le plan de la rupture est incliné , la rupture s'accompagne d'une forte déformation plastique c'est la rupture ductile. Dans la plupart des cas, la rupture est une combinaison des deux type de rupture précédents.

##### **II.2.1.1 :LA RUPTURE DUCTILE :**

Avec l'intervention de la plasticité ou la viscoplasticité , on entre dans la mécanique non linéaire de la rupture. C'est le cas des matériaux ductiles comme les aciers à faibles teneur en carbone , les aciers inoxydables , certains alliages d'aluminium , les polymères. La plasticité intervient sous deux aspects :au niveau d'une zone plastique en amont du front de fissure ; au niveau du mécanisme de progression de fissure par superposition de mécanisme de rupture ductile[J. LEMAITRE].

### II.2.1.2 : LA RUPTURE FRAGILE :

La mécanique linéaire de la rupture est fondée sur une analyse linéaire des champs de contrainte et déplacement. Elle donne d'excellents résultats pour les matériaux élastiques - fragiles comme les aciers à hautes résistances , les verres , ect....

Donc sous le sens macroscopique la rupture fragile est caractérisée par la faible plasticité , globale de la structure ce qui permet de dire que le matériau continue de se comporter élastiquement [J. LEMAITRE].

### II.2.2 : MODE FONDAMENTAUX DE LA RUPTURE :

On distingue trois cinématique remarquables du déplacement relative des lèvres de la fissure ou mode de rupture[BARTHELEMY] [J. LEMAITRE].

#### II.2.2.1 : MODE I (*mode d'ouverture*) :

Les lèvres de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre fig (II-1-a) , et est défini par les discontinuités de déplacement:

$$\begin{aligned}D_1 &= U_1^+ - U_1^- = 0 \\D_2(x_2) &= U_2^+ - U_2^- \neq 0 \\D_3 &= U_3^+ - U_3^- = 0\end{aligned}$$

#### II.2.2.2 : MODE II (*mode de cisaillement*):

Les lèvres de la fissure se déplacent dans un même plan , perpendiculairement au front de fissure fig (II-1-b) .Il est définie par les discontinuités de déplacement :

$$D_1(x_1) = U_1^+ - U_1^- \neq 0$$

$$D_2(x_2) = U_2^+ - U_2^- = 0$$

$$D_3 = U_3^+ - U_3^- = 0$$

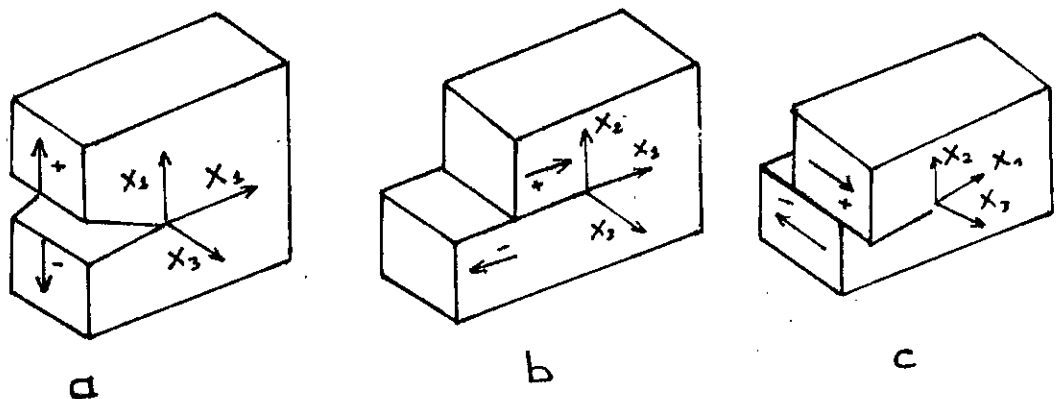
### II.2.2.3 : MODE III (mode de torsion) :

Les lèvres de la fissures se déplacent dans un même plan parallèlement au front de fissure fig (II-1-c) , il est définie par les discontinuités de déplacement:

$$D_1 = U_1^+ - U_1^- = 0$$

$$D_2 = U_2^+ - U_2^- = 0$$

$$D_3(x_3) = U_3^+ - U_3^- \neq 0$$



Fig(II-1)

Il est a signaler que l'état le plus général de propagation de fissure peut être ramené à la superposition des trois modes simples .Mais que les ruptures dangereuses sont généralement des ruptures de mode I. C'est la raison pour laquelle la plupart des études de la mécanique de la rupture ont porté sur ce mode. On s'intéressera de plus dans ce qui suit au cas du problème plans et en particulier le cas du mode I.

### II.3 : APPROCHE ENERGETIQUES :

La rupture est un phénomène consommateur d'énergie. L'évolution d'un système solide avec fissure peut être décrit à partir des équations de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus. Nous distinguons deux approches.

#### II.3.1 : APPROCHE GLOBALE :

Formulée par GRIFFITH ( en 1920 ) pour les matériaux fragiles et généralisée par LE MAITRE ET CHABOCHE en 1970 consiste à calculer le taux d'énergie restituée "G" au cours d'une fissuration fictive de longueur  $da$ , et il n'y aurait rupture que si  $G \geq G_c$  ou  $G_c$  est la valeur critique caractéristique du matériau.

##### II.3.1.1 : Formulation de la théorie de GRIFFITH :

La formulation de la théorie de GRIFFITH est basé sur le principe de conservation d'énergie totale [H.D.BUI].

Soit un solide élastique :

$$\text{L'énergie total du système} \quad W_{Tot} = W_{elas} + W_{ext} + W_A + W_{cin} \quad (II-1)$$

$W_{elas}$ : énergie élastique

$W_{ext}$ : énergie des forces extérieur

$W_A$ : énergie dissipé pour séparer 2 surfaces

$W_{cin}$ : énergie cinétique

$$W_A = 2\gamma s \quad (II-2)$$

$\gamma$  : Energie superficielle( analogie avec les liquides)

Principe de conservation de l'énergie totale :

$$\begin{aligned} dW_{tot} &= dW_{elas} + dW_{ext} + dW_A + dW_{cin} = 0 \\ \partial W_{cin} &= -(\partial W_{elas} + \partial W_{ext} + \partial W_A) \end{aligned}$$

La propagation n'est possible que si  $\partial W_{cin} \geq 0$  donc :

$$\begin{aligned} \partial W_{elas} + \partial W_A + \partial W_{ext} &\leq 0 \\ \partial W_A &= G \partial s \end{aligned} \quad (II-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (W_{elas} + W_{ext}) + 2\gamma \leq 0$$

On définit le taux de l'énergie restituée au cours d'une propagation  $da$  par :

$$G = - \frac{\partial}{\partial s} (W_{elas} + W_{ext}) \quad (II-4)$$

$$-G + 2\gamma \leq 0$$

$$\text{Soit } G \geq 2\gamma = G_c \quad (II-5)$$

quand :

$$G < 2\gamma \quad \text{pas de propagation}$$

$$G = 2\gamma \quad \text{début de propagation}$$

$$G > 2\gamma \quad \text{propagation instable}$$

### II.3.1.2 : Formulation Intégrale énergétique local:

Consiste à écrire le taux de restitution d'énergie en fonction du champ de contrainte et de déplacement sur les frontières du domaine fissuré.

Milieu plan :

On considère un domaine  $\Omega$  présentant une discontinuité de taille  $a$ :  $\partial\Omega$  frontière du domaine extérieur.

$\xi^+ \cup \xi^-$  : frontière de la fissure.

$\partial\Omega_c$  : frontière du domaine de contrainte imposé.

$\partial\Omega_u$  : frontière du domaine de déplacement imposé.

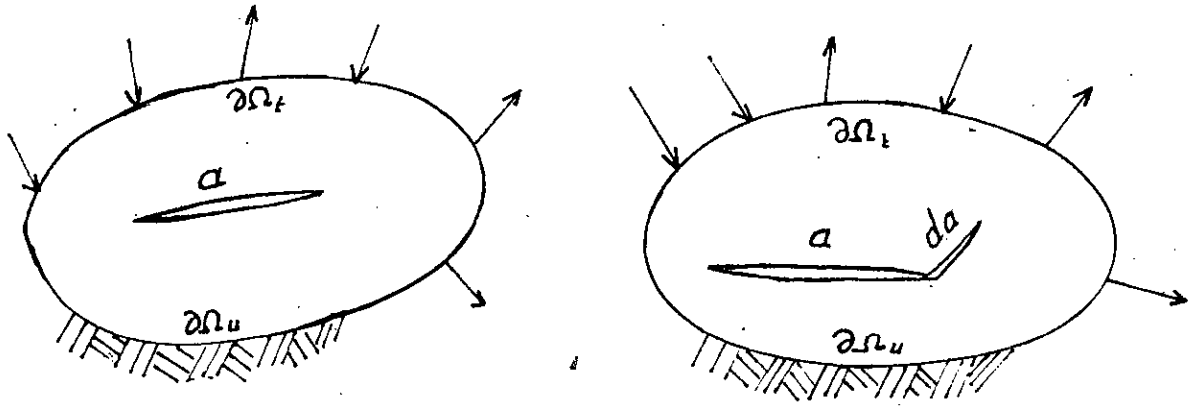


fig (II-2)

On'a :

$$G = -\frac{\partial}{\partial a}(W_{elas} + W_{ext}).$$

pour un solide élastique linéaire :

$$W_{elas} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (II-6)$$

$$W_{ext} = - \int_{a_i \cup \xi^+ \cup \xi^-} T_i \frac{du}{dA} d\xi \quad (II-7)$$

Le théorème de GREEN-STOKES permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale curviligne et le principe de travaux virtuels donne :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{a_i \cup \xi^+ \cup \xi^-} \left( T_i \frac{du_i}{dA} + U_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (II-8)$$

Donc l'équation (II-4) devient :

$$G = \frac{1}{2} \int_{a_i \cup \xi^+ \cup \xi^-} \left( T_i \frac{du_i}{dA} - u_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (II-9)$$

### II.3.2 : APPROCHE LOCALE :

Lorsque nous voulons connaître l'état d'endommagement au voisinage du bout de fissure . On utilise une approche locale.

#### II.3.2.1 : Champ de déplacement et de Contrainte au voisinage de l'extrémité d'une fissure :

Comme il a été mentionné la présence d'une fissure dans une structure perturbe énormément le champ des contraintes. Donc le problème de base est l'analyse du champ des contraintes dans les milieux fissurés plan , élastiques linéaires isotropes.

En se basant sur la théorie de l'élasticité, G.R IRWIN (1956) a pu établir les champs de contraintes et de déplacements au voisinage du front de fissure[R.LABBEN] [J.LEMAITRE ].

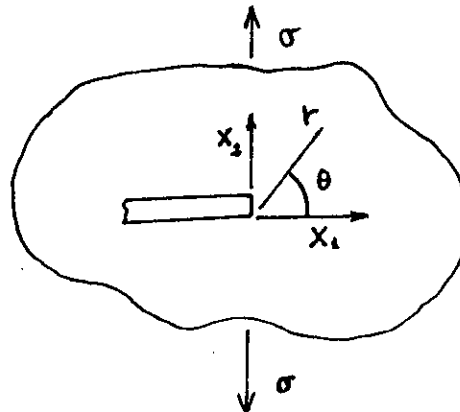


fig (II-3)

#### I.3.2 : Solution pour le mode I :

On'a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} + O(r) \quad (\text{II-10})$$



$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left( \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \right) \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left[ X - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ \sin \frac{\theta}{2} \left[ X - 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (\text{II-11})$$

avec  $X=3-4\nu$  : déformation plane ( DP )

$$X = \frac{3-4\nu}{1+\nu} : \text{contrainte plane (CP)}$$

### II.3.2.3 : Solution pour le mode-II :

Contraintes et déplacements sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} + O(r) \quad (\text{II-14})$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (X + 2 + \cos \theta) \\ \cos \frac{\theta}{2} (X - 2 + \cos \theta) \end{Bmatrix} \quad (\text{II-13})$$

### II.3.2.4 : Solution pour le mode III:

Contraintes anti-planes :

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{cases} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} 0 \\ -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} + O(r) \quad (\text{II-14})$$

Déplacements anti-plans :

$$\begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases} = \frac{4(1+\nu)K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

on remarque que les contraintes et les déplacements sont toutes de forme:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad (\text{II-16})$$

$$u_i = \frac{K}{2\mu} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} g_i(\theta) \quad (\text{II-17})$$

$f_{ij}(\theta)$  : fonction caractéristique du mode de chargement.

$g_i(\theta)$  : fonction dépendant du mode de déformation ( contrainte plane [ CP ] ou déformation plane [ DP ] ), et du mode de sollicitation en rupture ( mode I , mode II ou mode III ).

On a d'parés les équations (II-11) et (II-13) les facteurs d'intensité de contrainte qui mesurent la force de la singularité de contrainte

Nous pouvons interpréter ces facteurs autrement

$$D_2 = U_2(r, \pi) - U_2(r, -\pi) = \frac{(\chi+1)}{G} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot K_{II} \quad (\text{II-18})$$

$$D_1 = U_1(r, \pi) - U_1(r, -\pi) = \frac{2(\chi+1)}{G} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot K_{II} \quad (\text{II-19})$$

En conclusion, les facteurs d'intensité de contrainte, apparaissent comme des facteurs de discontinuité de déplacement. Ainsi, la méthode de discontinuité de déplacement peut être utilisée pour le calcul de ces facteurs.

**Remarque :**

Pour les grandes valeurs de r les contraintes  $\sigma_{22}$  tend vers zéro, alors qu'elle doit tendre vers la valeur de la contrainte appliquée à l'infini sur la structure. Les équations (II-16) et (II-17) sont valables uniquement dans la zone limitée au tour de la tête de la fissure. Et elles montrent aussi que les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure ont toujours la même forme quelles que soient la géométrie de la pièce et de la façon dont elle est chargée. Cette analyse a permis à G.R IRWIN de mettre en évidence un facteur indépendant des coordonnées polaires r et  $\theta$ , faisant la synthèse de la géométrie et du chargement, qu'il appela : facteur d'intensité de contrainte : K. Ce facteur qui traduit en fait, l'état de contrainte au voisinage du front de fissure admet une valeur critique notée  $K_c$ , pour laquelle l'amorçage de la fissure survient.

## II.4- NOTION DE RUPTURE DES MATERIAUX VISCOELASTIQUES:

Le principe de correspondance qui a été présenté au chapitre ( I ) permet de ramener un problème de viscoélasticité linéaire à un problème d'élasticité linéaire. La même démarche peut être utilisée pour passer de la mécanique linéaire de la rupture à la mécanique de la rupture d'un matériau viscoélastique.

### II.4.1-CHAMPS DE DEPLACEMENT ET DE CONTRAINTE AU VOISINAGE DU FRONT DE FISSURE:

La distribution des contraintes à la pointe d'une fissure a pour forme générale, relation (II-16):

$$\sigma_y = \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \times F_y(\theta)$$

La transformée de Laplace de cette équation s'écrit[G.PLUVINAGE]:

$$\sigma_y(s) = \frac{\bar{K}(s)}{(2\pi r)} \times F_y(\theta) \quad (\text{II-20})$$

$\sigma_y(s)$  et  $\bar{K}(s)$  sont respectivement les transformées au sens de Laplace des contraintes et du facteur d'intensité de contrainte.

De façon similaire l'expression du déplacement à la pointe d'une fissure s'écrit, (relation(II-17)).

$$U_i = \frac{K}{E} \left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} \times g(\theta, \nu)$$

Et par transformation :

$$\bar{U}_i(s) = \frac{\bar{K}(s)}{\bar{E}(s)} \left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} \times \bar{g}(\theta, \bar{\nu}(s)) \quad (\text{II-21})$$

$\bar{U}_i(s)$  et  $\bar{E}(s)$  sont respectivement les transformées de Laplace des déplacements et du module de Young, cette dernière dépend du modèle rhéologique choisi,  $\bar{g}_i(\theta, \nu(s))$  la transformée de la fonction  $g_i(\theta, \nu)$  qui dépend du coefficient  $\bar{\nu}(s)$ .

En utilisant la transformation de Laplace inverse on aura les champs de contrainte et de déplacement dans l'espace temps [G.PLUVINAGE]:

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} F_{ij}(\theta) \cdot L^{-1}(\bar{k}(s)) \quad (\text{II-22})$$

$$U_i(t) = \left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} \cdot L^{-1}\left(\frac{\bar{K}(s)}{\bar{E}(s)} g_i(\theta, \nu(s))\right) \quad (\text{II-23})$$

Qu'on peut les mettre sous la forme:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}(0) F_{\sigma}(t) \quad (\text{II-24})$$

$$U_i(t) = U_i(0) F_u(t) \quad (\text{II-25})$$

$F_{\sigma}(t)$  et  $F_u(t)$  sont respectivement les fonction temporelles des contraintes et des déplacements à la pointe de fissure. Elle dépendent du modèle rhéologique choisi .

On remarque bien que le principe de correspondance ne présente aucune difficulté pour la première étape (solution du problème élastique correspondant existe). Avant de passer à la transformation de Laplace ou la difficulté se met en évidence.

#### II.4.2- FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE EN ETAT DE DEFORMATION PLANE:

Après l'utilisation du principe de correspondance sur les relations (II-18) et (II-19) on peut déduire la transformée de Laplace des facteurs d'intensité de contrainte :

$$\begin{aligned} \bar{K}_I(s) &= \frac{\bar{G}(s)}{4(1-\nu)} \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{1/2} \bar{D}_2(s) \\ \bar{K}_{II}(s) &= \frac{G(s)}{4(1-\nu)} \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{1/2} \bar{D}_1(s) \end{aligned} \quad (\text{II-26})$$

En utilisant la transformée inverse on obtient:

$$\begin{aligned} K_I(t) &= 1/4 \left( \frac{2\pi}{r} \right)^{1/2} L^{-1} \left( \frac{\bar{G}(s)}{(1-\nu(s))} D_2(s) \right) \\ K_{II}(t) &= 1/4 \left( \frac{2\pi}{r} \right)^{1/2} L^{-1} \left( \frac{G(s)}{(1-\nu(s))} D_1(s) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-27})$$

#### II.4.3- CALCUL DU TAUX D'ENERGIE VISCOELASTIQUE:

Une fois qu'on a le champs de déplacement et de contrainte au voisinage du front de fissure, on peut utiliser la formulation intégrale [II.3.1.2] pour la détermination du taux d'énergie viscoélastique.

Après que LIEBOWITZ et EFTIS, ont étendue la définition du taux d'énergie disponible  $G$  au cas d'un comportement élastique non linéaire. L'utilisation de ce dernier peut se faire pour tout lois de comportement dépendante du temps [G. PLUVINAGE].

#### II.4.4- EXPRESSION DU TAUX D'ENERGIE VISCOELASTIQUE EN FONCTION DU TEMPS ET CRITERE DE RUPTURE:

D'après [PLUVINAGE] on peut mettre l'évolution du taux d'énergie viscoélastique en fonction du temps sous la forme :

$$G(t) = G(0)F_G(t)$$

ou:

$G(0)$ : Taux d'énergie instantané

$F_G(t)$ : Fonction temporelle du taux d'énergie viscoélastique, elle dépend du modèle rhéologique choisi et elle admet en général une limite finie pour  $t \rightarrow \infty$ .

En conclusion :

1/ Le taux d'énergie viscoélastique va s'accroître avec le temps jusqu'à atteindre une valeur finie .

2/ Les critères de ruptures (G ou K) sont donc en fonction du temps. Le taux de restitution d'énergie augmente au cours du temps sous le même niveau de contrainte, et si  $G(t)$  atteint la valeur  $G_c$  l'équilibre de la fissure devient instable la fissure se propage d'où la rupture .

Le temps d'apparition de la rupture ( temps critique  $t_c$  ) peut être considéré comme un temps qui dépend de l'amplitude  $G(0)$ .

#### **II.4.5- CRITERE DE BRANCHEMENT DES FISSURES DANS UN MILIEUX VISCOELASTIQUE:**

Les critères de branchement, ou de déviation des fissures, permettent de déterminer l'orientation des accroissements des fissures dans les cas de chargements complexes .

##### **II.4.5.1- CRITERE DE LA CONTRAINTE NORMALE MAXIMALE:**

Ce critère est très utilisé car facile à mettre en oeuvre. On suppose que la direction de l'accroissement de fissure correspondant à un chargement donné se fait dans la direction telle que  $\sigma_{\theta\theta}$  ( contrainte normale à la facette définie par l'angle  $\theta$  ) est maximale.

##### **II.4.5.2- CRITERE DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE VISCOELASTIQUE MAXIMALE:**

On considère que la direction de propagation de fissure à chaque instant rend maximal le taux de restitution d'énergie viscoélastique libérée  $G$ . Celui ci est défini, pour le chargement considéré, avec une fissure branchée, aussi petite soit elle fig (II-4).

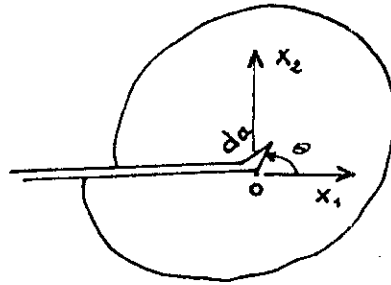


fig (II-4) Fissure branchée

**Remarque:**

La différence entre les deux critères réside dans la mise en oeuvre, tel que en éléments finis le critère de contrainte maximale s'adapte mieux que le critère de  $G_{max}$ . En méthode intégrale le problème ne se pose pas.

**conclusion:**

Dans notre étude on utilise l'approche global, car elle nous permis de calculer le taux de restitution d'énergie "G" par une procédure numérique bien adapté à la M.D.D, et qui analyse bien la propagation des fissures en mécanique linéaire de la rupture.



***CHAPITRE III:***

***METHODE DES***

***EQUATIONS INTEGRALES***

***DE FRONTIERES***

## CHAPITRE III:

# METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERES

### III.1 : INTRODUCTION :

La solution de plusieurs problèmes pratiques posés en engineering peuvent être obtenue par des modèles mathématiques caractérisés par un domaine  $\Omega$  occupant un certain espace et une frontière  $\partial\Omega$  limitant ce domaine .

La physique du problème est régie par équation ou système d'équation différentielle à dérivées partielles , dont la résolution donnera différentes solutions , selon les conditions aux limites imposées à la frontière.

En mécanique des solides les équations aux dérivées partielles sont l'équation d'équilibre élastique , ou sous une autre forme , l'équation de NAVIER dont les inconnues sont les déplacements .

La solution analytique pour ce genre de problème n'existe que pour des cas très simples ou la région  $\Omega$  est homogène , de géométrie très simple et avec les conditions aux limites relativement franches.

En général, on a recours aux méthodes numériques.

Deux classe sont utilisés:

1ere classe : consiste à discrétiser tout le domaine  $\Omega$  ( méthode des éléments finis )

2eme classe : la discrétisation s'étant uniquement sur le contour  $\partial\Omega$  c'est la méthode des équations intégrales.

Historiquement, la méthode des équations intégrales a été développée de deux manières distinctes :

La première approche : Est une approche mathématique. La clé de cette approche est le théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI en mécanique des solides qui éliminent les paramètres intermédiaires , et relie directement les inconnues de la surface au conditions aux limites. Cette approche est appelée la méthode des équations intégrale DIRECTE.

La deuxième approche : Dans cette approche on cherche en premier lieu les valeurs des perturbations fictives dont les effets sur la surface sont les conditions aux limites spécifiées. On calcule le reste des paramètres de la surface comme étant les effets de ces perturbations "fictives" en ces points.

Ces perturbations fictives peuvent être des forces concentrées , des discontinuités de déplacement.

Puisque les paramètres de la surface sont obtenus indirectement , cette approche est appelée méthode des équations intégrales INDIRECTE.

### III.2 : METHODE DES DISCONTINUITES DES DEPLACEMENTS :

La méthode des discontinuités des déplacements est formulée pour modéliser les domaines présentant des fissures. Elle est basée sur la solution analytique du problème d'une discontinuité de déplacement dans un corps élastique infini. Physiquement on doit imaginer une discontinuité de déplacements comme une fissure représentée par deux surfaces ayant un déplacement relatif entre elles. Pour obtenir la solution numérique du problème considéré , on discrétise la surface  $S'$  en  $N$  éléments et on cherche  $2N$  inconnues (*discontinuités de déplacements*) dans les effets sur  $S'$  sont les conditions aux limites sur la surface  $S$ . Cela revient à résoudre un système d'équation de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues.

Une fois les discontinuités de déplacements obtenues , la solution en chaque point de la région  $R$  sera la superposition des effets de ces discontinuités de déplacements en ce point.

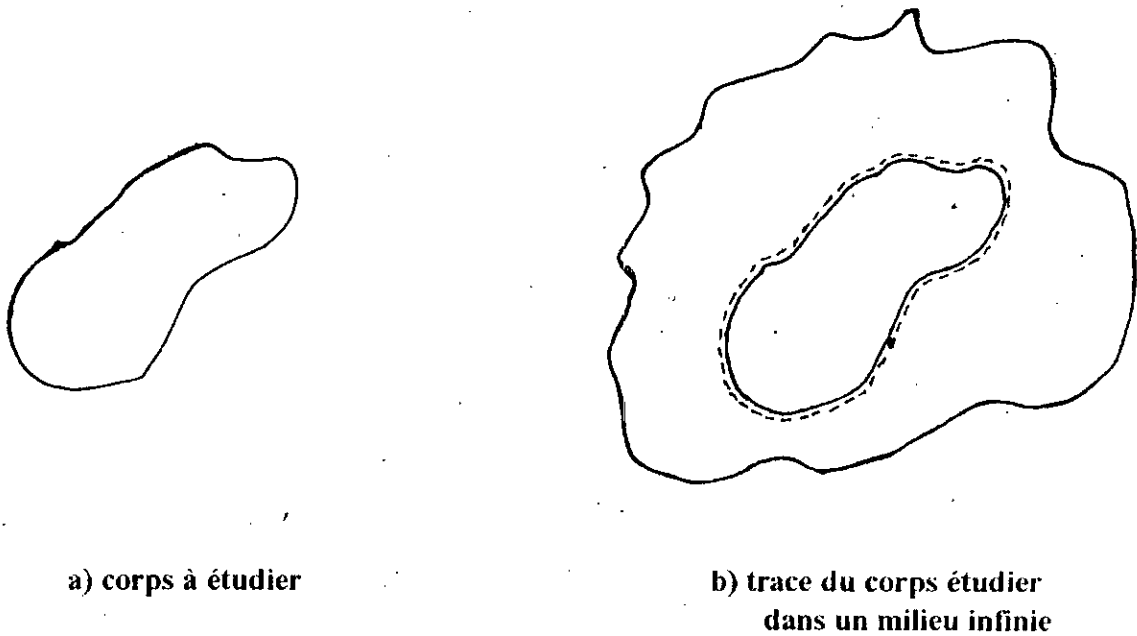


fig (III-1)

La figure III-1-a représente la région  $R$  limité par la surface  $S$ .

La figure III-1-b représente une région infinie et  $S'$  est la surface dans cette région.

### III.3 : SOLUTION ANALYTIQUE :

Soit l'équation d'équilibre de NAVIER pour l'élasticité linéaire

$$\vec{F} + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{III-1})$$

Cette équation, admet une solution suite à des représentations spéciales. Dans notre cas on considère la représentation de PAPKOVITCH et sous l'hypothèse des forces volumiques nulles, on obtient [L.SOLOMON]:

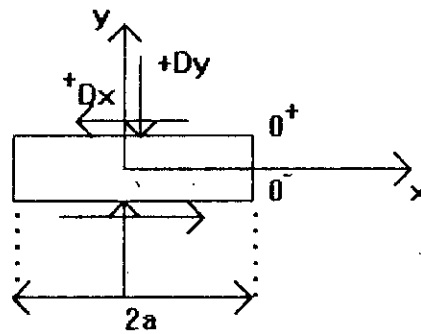
$$\begin{aligned} u_x &= B_x - \frac{1}{4}(1-\nu)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (xB_x + yB_y + B_0) \\ u_y &= B_y - \frac{1}{4}(1-\nu)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} (xB_x + yB_y + B_0) \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

ou  $B_x, B_y, B_0$  sont les fonctions de PAPKOVITCH satisfaisant l'équation de LAPLACE

#### I.3.1 : PRINCIPE DE LA REPRESENTATION DE NEUBER-PAPKOVITCH POUR LE CAS D'UNE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT CONSTANTE :

Dans une discontinuité de déplacement constante disposée sur l'axe  $\vec{X}$  suivant le segment  $|x| \leq a$ , on distingue deux lèvres, la lèvre supérieure pour  $y=0^+$  et la lèvre inférieure pour  $y=0^-$ . On définit deux discontinuités de déplacement par:

$$\begin{aligned} \text{suivant } \alpha x: \quad D_x &= u_x(x, 0^-) - u_x(x, 0^+) \\ \text{suivant } \alpha y: \quad D_y &= u_y(x, 0^-) - u_y(x, 0^+) \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$



(discontinuité de déplacement en milieu infini)

fig (III-2)

La solution singulière de l'équation de l'élasticité due à une discontinuité de déplacement constante dans un milieu infini est de la même forme précédente. De même le champ de déplacement a la même forme avec  $\bar{B}$  satisfaisant les conditions aux limites .

### III.3.2 : LES CONDITIONS AUX LIMITES :

$$\text{Mode I} \quad \begin{cases} \sigma_{xy} = 0 & -\infty < x < +\infty \\ u_y(x, 0) = 0 & |x| > a \\ D_y = u_y(x, 0^-) - u_y(x, 0^+) & |x| \leq a \end{cases} \quad (\text{III-4-a})$$

Condition sur les fonction de PAPKOVITCH

$$\begin{aligned} B_1 &= 0 \\ B_2 &= 4(1-\nu)\partial\bar{\phi}/\partial y \\ B_0 &= 4(1-\nu)(1-2\nu)\bar{\phi} \quad \text{avec} \quad \Delta\bar{\phi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-4-b})$$

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = 0 & -\infty < x < +\infty \\ u_x(x, 0) = 0 & |x| > a \\ D_x = u_x(x, 0^-) - u_x(x, 0^+) & |x| \leq a \end{cases} \quad (\text{III-5-a})$$

Conditions sur les fonctions de PAPKOVICH

$$\begin{aligned} B_1 &= 0 \\ B_2 &= 4(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ B_0 &= 8(1-\nu^2) \int \frac{\partial \chi}{\partial x} dy \quad \text{avec} \quad \Delta \chi = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-5-b})$$

Donc on obtient après superposition des deux modes, le cas le plus générales (mode mixte) et on pose que :

$$\begin{aligned} \varnothing(x, y) &= D_y F(x, y) / 4\pi(1-\nu) \\ \chi(x, y) &= D_x F(x, y) / 4\pi(1-\nu) \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

et pour pouvoir utilisé le principe de superposition et généraliser le calcul à tout les discontinuités de déplacements, on exprime le champ de déplacement et de contrainte dans le repère global (x,y). Le champ de déplacement et de contrainte dans le repère global (x,y) [S.L.CROUCH] sont données par:

1) Les déplacements :

$$\begin{aligned} u_x &= D_x \left\{ -(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 + \bar{y} (\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right\} \\ &\quad + D_y \left\{ -(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right\} \\ u_y &= D_x \left\{ (1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right\} \\ &\quad + D_y \left\{ -(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 - \bar{y} (\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-7-a})$$

2) Les contraintes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2GD_x \left\{ 2 \cos^2 \beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y} (\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right\} \\
 &\quad + 2GD_y \left\{ -\bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right\} \\
 \sigma_{yy} &= 2GD_x \left\{ 2 \sin^2 \beta \bar{F}_4 - \sin 2\beta \bar{F}_5 - \bar{y} (\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right\} \\
 &\quad + 2GD_y \left\{ -\bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right\} \\
 \sigma_{xy} &= 2GD_x \left\{ \sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y} (\cos 2\beta \bar{F}_7 + \sin 2\beta \bar{F}_6) \right\} \\
 &\quad + 2GD_y \left\{ -\bar{y} (-\sin 2\beta \bar{F}_7 + \cos 2\beta \bar{F}_6) \right\}
 \end{aligned}$$

(III-7-b)

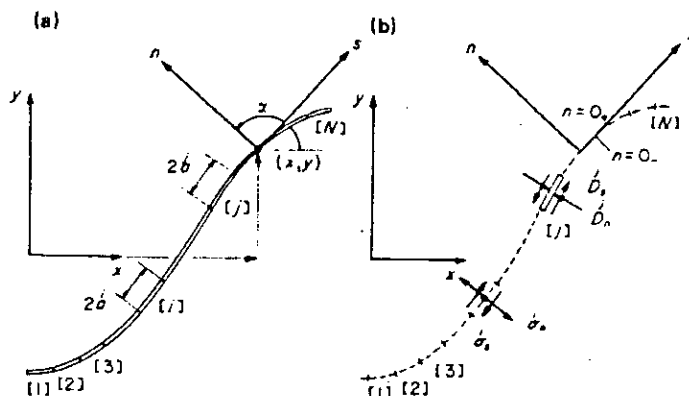
avec :

$\beta$  : angle de repérage du repère local par rapport au repère globale.

$$\begin{aligned}
\bar{F}_2 = F, \bar{x} &= 1/4\pi(1-\nu) \cdot \left\{ \log \left[ (\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \log \left[ (\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
\bar{F}_3 = F, \bar{y} &= 1/4\pi(1-\nu) \cdot \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{(\bar{x}-a)} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{(\bar{x}+a)} \right\} \\
\bar{F}_4 = F, \bar{x}\bar{y} &= 1/4\pi(1-\nu) \cdot \left\{ \frac{\bar{y}}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{y}}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right\} \\
\bar{F}_5 = F, \bar{y}\bar{y} &= 1/4\pi(1-\nu) \cdot \left\{ \frac{\bar{x}-a}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{x}+a}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right\} \\
\bar{F}_6 = F, \bar{x}\bar{y}\bar{y} &= 1/4\pi(1-\nu) \cdot \left\{ \frac{(\bar{x}-a)^2 - \bar{y}^2}{\left[ (\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2 \right]^2} - \frac{(\bar{x}+a)^2 - \bar{y}^2}{\left[ (\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2 \right]^2} \right\} \\
\bar{F}_7 = F, \bar{y}\bar{y}\bar{y} &= \frac{2\bar{y}}{4\pi(1-\nu)} \cdot \left\{ \frac{(\bar{x}-a)}{\left[ (\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2 \right]^2} - \frac{(\bar{x}+a)}{\left[ (\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2 \right]^2} \right\}
\end{aligned} \tag{III-8}$$

### III.4 : PROCEDURE NUMERIQUE :

La solution singulière trouvée est relative à une discontinuité de déplacement constante sur un segment dans un milieu élastique linéaire infini. Elle est généralisée par une procédure numérique pour construire une méthode des éléments de frontières et résoudre des problèmes complexes. L'idée est de décrire une ligne de courbure quelconque en  $N$  éléments aussi petit que l'on veut et analyser un élément  $I$  dans un repère locale [ S.L.CROUCH ].





L'effet d'une discontinuité sur les champs de déplacement et de contrainte peut être écrit d'après les équations (III-7-a) et (III-7-b). Donc l'effet d'une discontinuité J sur le milieu d'un élément I est :

$$\begin{aligned} \sigma_s^j &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^j &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i=1,n \quad \text{(III-9)}$$

Les  $A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$  coefficients d'influences.

Donc l'influence de N éléments sur le i éme élément est obtenue par superposition.

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^n (A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j) \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^n (A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j) \end{aligned} \quad i=1,n \quad \text{(III-10)}$$

Quand aux champs de déplacements :

$$\begin{aligned} u_s^i &= \sum_{j=1}^n (B_{ss}^{ij} D_s^j + B_{sn}^{ij} D_n^j) \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^n (B_{ns}^{ij} D_s^j + B_{nn}^{ij} D_n^j) \end{aligned} \quad i=1,n \quad \text{(III-11)}$$

Avec  $B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij}$  sont les coefficients d'influence des déplacements.

**RESOLUTION :** Une fois les systèmes (III-9) et (III-10) formulés on calcule les discontinuités des déplacements selon les conditions aux limites en contraintes et en déplacements.

On résoudre le système :

$$\begin{aligned} [\sigma] &= [A] \cdot \{D\} \\ \text{ou} \\ [u] &= [B] \cdot \{D\} \end{aligned}$$

L'effet d'une discontinuité sur les champs de déplacement et de contrainte peut être écrit d'après les équations (III-7-a) et (III-7-b). Donc l'effet d'une discontinuité J sur le milieu d'un élément I est :

$$\begin{aligned}\sigma_s^j &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^j &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j\end{aligned}\quad i=1,n \quad \text{(III-9)}$$

Les  $A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$  coefficients d'influences

Donc l'influence de N éléments sur le i éme élément est obtenue par superposition.

$$\begin{aligned}\sigma_s^i &= \sum_{j=1}^n (A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j) \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^n (A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j)\end{aligned}\quad i=1,n \quad \text{(III-10)}$$

Quand aux champs de déplacements :

$$\begin{aligned}u_s^i &= \sum_{j=1}^n (B_{ss}^{ij} D_s^j + B_{sn}^{ij} D_n^j) \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^n (B_{ns}^{ij} D_s^j + B_{nn}^{ij} D_n^j)\end{aligned}\quad i=1,n \quad \text{(III-11)}$$

Avec  $B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij}$  sont les coefficients d'influence des déplacements.

**RESOLUTION :** Une fois les systèmes (III-9) et (III-10) formulés on calcule les discontinuités des déplacements selon les conditions aux limites en contraintes et en déplacements.

On résoudre le système :

$$\begin{aligned}[\sigma] &= [A] \cdot \{D\} \\ \text{ou} \\ [u] &= [B] \cdot \{D\}\end{aligned}$$

puis on calcul par le même système le champ de contrainte et de déplacement en n'importe quel point en reformulant les matrices [A] et [B].

### III.5 : COEFFICIENTS D'INFLUENCES :

Soit un contour  $\mathcal{A}\Omega$ , discrétisé sur lequel on considère deux éléments distincts "i" et "j" reliés chacun par un repère local  $(\bar{x}, \bar{y})$  et  $(\bar{x}', \bar{y}')$  respectivement. Ces deux systèmes de coordonnées sont reliés par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{x}' \cos \gamma + \bar{y}' \sin \gamma \\ \bar{y} &= -\bar{x}' \sin \gamma + \bar{y}' \cos \gamma\end{aligned}\tag{III-12}$$

Ou  $\gamma = \beta - \beta'$  (inclinaison du  $i^{\text{eme}}$  élément /  $j^{\text{eme}}$  élément).

En utilisant les composantes normales et tangentiels on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}u'_s &= D'_s \left[ (1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}' (\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5) \right] + \\ & D'_n \left[ -(1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}' (\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5) \right].\end{aligned}\tag{III-13-a}$$

$$\begin{aligned}u'_n &= D'_s \left[ (1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}' (\sin \gamma \bar{F}_4 - \cos \gamma \bar{F}_5) \right] + \\ & D'_n \left[ -(1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 + \bar{y}' (\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5) \right].\end{aligned}$$

$$\sigma'_s = 2GD'_s \left[ -\sin 2\gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y} \left( -\cos 2\gamma \bar{F}_7 + \sin 2\gamma \bar{F}_6 \right) \right] + 2GD'_n \left[ -\bar{y}' \left( \sin 2\gamma \bar{F}_7 + \cos 2\gamma \bar{F}_6 \right) \right].$$

(III-13-b)

$$\sigma'_n = 2GD'_s \left[ \sin^2 \gamma \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y} \left( \cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7 \right) \right] + 2GD'_n \left[ -\bar{F}_5 + \bar{y}' \left( \sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7 \right) \right].$$

Où les expressions entre parenthèses représentent les coefficients d'influences.  
Les équations (III-13-a) et (III-13-b) peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{aligned} u'_s &= B_{ss}^{ij} D_s^j + B_{sn}^{ij} D_n^j \\ u'_n &= B_{ns}^{ij} D_s^j + D_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad \text{(III-14-a)}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_s &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma'_n &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad \text{(III-14-b)}$$

**CHAPITRE IV:**

**APPLICATION DE LA  
METHODE DES  
DISCONTINUITES DE  
DEPLACEMENT AUX  
PROBLEMES  
VISCOELASTIQUES**

## CHAPITRE IV :

### APPLICATION DE LA M.D.D AUX PROBLEMES VISCOELASTIQUES

#### IV.1 : INTRODUCTION :

Le principe de correspondance présenté au chapitre I nous permet de ramener un problème de viscoélasticité linéaire à un problème d'élasticité linéaire en passant par la transformé de LAPLACE-CARSON .

#### IV.2 : PROBLEME DE FLUAGE :

Les conditions aux limites sont décrits par :

$$t_i(t) = \bar{t}_i(t) = [H(t)] \cdot t_i^0 \quad (\text{IV-1})$$

en tout point de  $\partial\Omega_p$

Ceux-ci se traduisent dans le modèle numérique :

$$\{\sigma_i(t)\} = [H(t)] \cdot \{\sigma_i^0\} \quad (\text{IV-2})$$

avec:

$\{\sigma_i^0\}$  : sont les conditions aux limites sur la frontière.

$$[H(t)] = [I] \cdot H(t) \quad [I] \text{ étant la matrice identité}$$

- Le problème élastique correspondant est formulé par:

$$\{\sigma_c\}_e = [A] \cdot \{D\}_e \quad (\text{IV-3})$$

ou  $[A]$  est la matrice des coefficients d'influences . Elle peut être décomposée sous la forme :

$$[A]_e = \left( \frac{Ge}{2\pi(1-\nu e)} \right) \cdot [A]^* \quad (\text{IV-4})$$

$[A]^*$  est une matrice à coefficients géométriques seulement .

En supposant qu'elle est inversible , l'équation (IV-3) permet d'écrire les D.D par :

$$\{D\}_e = \frac{2\pi(1-\nu e)}{Ge} [A]^{*1} \{\sigma_c\}_e \quad (\text{IV-5})$$

Utilisant le principe de correspondance, les discontinuités de déplacement pour le problème viscoélastique sont données par :

$$D(s) = \frac{2\pi(1-\bar{\nu}(s))}{G(s)} [A]^{*1} \{\bar{\sigma}_c(s)\} \quad (\text{IV-6})$$

ou  $\nu(s)$  et  $G(s)$  dépendent du modèle considéré.

En appliquant la transformé inverse de Laplace à l'équation (IV-6) on obtient les D.D viscoélastiques en fonction du temps, soit :

$$D(t) = 2\pi[A]^{*1} L^{-1} \left[ \frac{1-\nu(s)}{G(s)} \bar{\sigma}_c(s) \right] \quad (\text{IV-7})$$

D'après l'équation (IV-2) :

$$L^{-1}[\bar{\sigma}_c(s)] = \{\sigma_c^o\} [I] L^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right]$$

Donc :

$$D(t) = 2\pi[A]^{*1} \{\sigma_c^o\} L^{-1} \left[ \frac{1-\nu(s)}{sG(s)} \right] \quad (\text{IV-8})$$

#### IV.2.1 : CONTRAINTE A L'INTERIEURE DU CORPS :

Le champ de contrainte pour le problème élastique correspondant s'écrit :

$$\{\sigma_m\} = \frac{Ge}{2\pi(1-\nu e)} [K]^* \{D\}_e \quad (\text{IV-9})$$

ou  $[K]^*$  est une matrice à coefficient géométrique seulement. D'après l'équation (IV-5), on peut écrire le champ de contrainte sous la forme :

$$\{\sigma_m\} = [K]^* [A]^{*-1} \{\sigma_c\}_e \quad (\text{IV-10})$$

soit en utilisant le principe de correspondance :

$$\{\sigma_m(t)\} = [K]^* [A]^{*-1} \{\sigma_c(t)\} \quad (\text{IV-11})$$

Conclusion :

$[K]^*$  et  $[A]^{*-1}$  ne dépendent que de la géométrie du problème. Les contraintes à l'intérieur du corps viscoélastique pour le cas de fluage sont identiques à celle du problème élastique correspondant :

$$\{\sigma_m(t)\} = \{\sigma_m\}_e \quad (\text{IV-12})$$

#### IV.2.1 : DEPLACEMENT A L'INTERIEURE DU CORPS :

En utilisant le principe de correspondance, comme précédemment, le champs de déplacement du corps dû à une discontinuité "i" est donné par:

$$\{U(t)\}_v = \frac{1}{2} [A]^{*-1} \times \{\sigma_c^0\} \times L^{-1} \{ [\bar{W}(s)]_i \} \quad (\text{IV-13})$$

ou: 
$$[W(s)]_i = \left( \frac{1}{sG(s)} \right) \times [\bar{M}(s)]_i$$

La matrice  $[\bar{M}(s)]_i$  est donnée par:



$$[\overline{M}(s)]_i = \begin{bmatrix} -(1-2\nu(s)) \sin \beta_i \overline{F}_2^* + 2(1-\nu(s)) & -(1-2\nu(s)) \sin \beta_i \overline{F}_2^* - 2(1-\nu(s)) \\ \cos \beta_i \overline{F}_3^* + \overline{y}_i (\sin \beta_i \overline{F}_4^* - \cos \beta_i \overline{F}_5^*) & \sin \beta_i \overline{F}_3^* - \overline{y}_i (\cos \beta_i \overline{F}_4^* + \sin \beta_i \overline{F}_5^*) \\ (1-2\nu(s)) \cos \beta_i \overline{F}_2^* + 2(1-\nu(s)) & -(1-2\nu(s)) \sin \beta_i \overline{F}_2^* + 2(1-\nu(s)) \\ \sin \beta_i \overline{F}_3^* - \overline{y}_i (\cos \beta_i \overline{F}_4^* - \sin \beta_i \overline{F}_5^*) & \cos \beta_i \overline{F}_3^* - \overline{y}_i (\sin \beta_i \overline{F}_4^* - \cos \beta_i \overline{F}_5^*) \end{bmatrix}$$

Avec  $\overline{F}_k^* = 4\pi(1-\nu_e)\overline{F}_k$   $k=1,5$

Ce sont des fonctions à des termes géométrique seulement.

Ainsi le champ de déplacement en fonction du temps est obtenu par l'inversion de la matrice  $[W(s)]_i$ , qui se réduit à l'inversion des expressions suivantes [GRAWFORD1983]

$$\frac{1-2\nu(s)}{sG(s)} ; \frac{1-\nu(s)}{sG(s)} ; \frac{1}{sG(s)}$$

En posant :

$$\begin{aligned} FI1 &= L^{-1} \left[ \frac{1-2\nu(s)}{sG(s)} \right] \\ FI2 &= L^{-1} \left[ \frac{1-\nu(s)}{sG(s)} \right] \\ FI3 &= L^{-1} \left[ \frac{1}{sG(s)} \right] \end{aligned} \tag{IV-15}$$

Remarque :

Les fonctions FI dépendent du modèle considéré

Donc:

$$[W(t)]_i = \begin{bmatrix} -FI1 \sin \beta_i \overline{F_2^*} + 2FI2 \cos \beta_i \overline{F_3^*} & -FI1 \cos \beta_i \overline{F_2^*} - 2FI2 \sin \beta_i \overline{F_3^*} \\ +FI3 \overline{y_i} (\sin \beta_i \overline{F_4^*} - \cos \beta_i \overline{F_5^*}) & -FI3 \overline{y_i} (\cos \beta_i \overline{F_4^*} + \cos \beta_i \overline{F_5^*}) \\ FI1 \cos \beta_i \overline{F_2^*} + 2FI2 \sin \beta_i \overline{F_3^*} & -FI1 \sin \beta_i \overline{F_2^*} + 2FI2 \cos \beta_i \overline{F_3^*} \\ -FI3 \overline{y_i} (\cos \beta_i \overline{F_4^*} + \cos \beta_i \overline{F_5^*}) & -FI3 \overline{y_i} (\sin \beta_i \overline{F_4^*} - \cos \beta_i \overline{F_5^*}) \end{bmatrix}$$

Pour N-DD le principe de superposition permet de définir le champ de déplacement comme :

$$u(t) = \frac{1}{2} [W(t)] [A]^{-1} \{\sigma_c^o\} \quad (IV-16)$$

Dans notre étude on considère les matériaux viscoélastique présentant une élasticité instantané (la majorité des matériaux peuvent être considéré comme tels).

Dans ce cas l'expression  $[A]^{-1} \{\sigma_c\}$ , peut être calculée numériquement à partir d'une formule similaire à l'équation (IV-5) telle qu'à l'instant  $t=t_0$  on 'a un comportement élastique soit :

$$[A]^{-1} \{\sigma_c\} = \frac{G_0}{2\pi(1-\nu_0)} \quad (IV-17)$$

Les relations (IV-7), (IV-11) et (IV-16) s'écrivent

$$\{D(t)\}_v = FI2 \frac{G_0}{(1-\nu_0)} \{D\}_0 \quad (IV-18)$$

$$\{\alpha(t)\}_v = [K]^* \{D\}_0 \frac{G_0}{2\pi(1-\nu_0)} \quad (IV-19)$$

$$\{U(t)\}_v = [W(t)] \frac{G_0}{(1-\nu_0)} \{D\}_0 \quad (\text{IV-20})$$

### IV.3 : PROBLEME DE RELAXATION :

Les conditions aux limites en déplacement sont décrits par :

$$U_i(t) = \bar{U}_i(t) = H(t) \cdot U_i^0 \quad (\text{IV-21})$$

En tout point de  $\mathcal{A}\Omega_U$

Ceux ci se traduisent dans le modèle numérique par:

$$\{U_c(t)\} = [H(t)] \{U_c^0\} \quad (\text{IV-22})$$

-Le problème élastique correspondant est formulé par:

$$\{U_c\}_e = [B] \{D\}_e \quad (\text{IV-23})$$

ou [B] matrice des coefficients d'influence :

La résolution du système (IV-23) nous donne :

$$\{D\}_e = [B]^{-1} \{U_c\} \quad (\text{IV-24})$$

L'écriture transposée de l'équation (IV-24) est :

$$\{\bar{D}(s)\} = [\bar{B}(s)]^{-1} \cdot \{\bar{U}_c(s)\} \quad (\text{IV-25})$$

La matrice [B] ne peut être décomposée en un produit de deux termes l'un, purement géométrique et l'autre élastique.

A ce stade et vu que [B] ne fait intervenir que le coefficient de poisson  $\nu_e$  comme caractéristique du matériau on restreindra notre étude aux matériaux ayant une fonction  $\nu(s)$  correspondante de  $\nu_e$  constante dans ce cas nous avons :

$$\nu_0 = \nu_e = \bar{\nu}(s) = cste$$

L'inverse de l'équation (IV-25) s'écrit :

$$\{D(t)\}_v = [B]^{-1} \{U_c(t)\} = [B]^{-1} \{U_i\}$$

Donc

$$\{D(t)\}_v = \{D\}_v \quad (\text{IV-26})$$

#### IV.3.1 : DEPLACEMENT A L'INTERIEURE DU CORPS :

En appliquant le principe de correspondance on'a :

$$\{U(t)\} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} [m] \{D\}_v \quad (\text{IV-27})$$

ou  $[M]_v$  ne dépend que  $\nu(s)$  comme caractéristique du matériau .

#### IV.3.2 : CONTRAINTE A L'INTERIEURE DU CORPS :

- Pour le problème élastique correspondant on'a :

$$\{\sigma_i\} = \frac{Ge}{2\pi(1-\nu(s))} [A]^* \{D\}_v \quad (\text{IV-28})$$

- La transformée de Laplace du champ de contraintes viscoélastique est :

$$\{\bar{\sigma}(s)\} = \frac{\bar{G}(s)}{2\pi(1-\nu(s))} [A]^* \{\bar{D}(s)\} \quad (\text{IV-29})$$

- En inversant l'équation (IV-29), l'expression du champ de contrainte  $\sigma(t)$  du corps viscoélastique en fonction du temps et comme suit:

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\pi(1-\nu(s))} [A]^* \{D\}_v L^{-1}[G(s)] \quad (\text{IV-30})$$

#### IV.4 : EXEMPLES DE CALCULS ET INTERPRETATION DES RESULTATS:

Afin d'illustrer l'efficacité de la méthode des discontinuités de déplacement pour les problèmes viscoélastiques et ainsi tester la fiabilité du programme, une série de tests est faite pour des cas de sollicitations ayant des solutions analytiques.

Pour le problème de fluage on considère un matériau viscoélastique présentant un comportement élastique en dilatation et un comportement de solide à 3 paramètres en cisaillement ainsi on aura :

- $K = \text{cste}$  module de dilatation volumique
- D'après la loi de HOOK nous obtenons l'expression du module de cisaillement  $G$  :

$$G = \frac{\sigma_{xy}}{2\varepsilon_{xy}}$$

Soit d'après l'équation (I-35) on a :  $G(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2sP(s)}$

Pour un solide à 3 paramètres, nous avons à partir de l'équation (I-35):

$$\bar{Q}(s) = q_0 + q_1 s \quad \bar{P}(s) = 1 + p_1 s$$

avec :

$$q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

$$p_1 = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$$

$$q_1 = \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2}$$

Tout calcul fait on trouve :

$$G(t) = \frac{E_1}{2} \exp(-t/p_1) + \frac{q_1}{2} (1 - \exp(-t/p_1)) \quad (\text{IV-31})$$

- L'expression du coefficient de Poisson  $\nu$  en fonction de  $K$  et  $G$  étant:

pour l'élasticité :  $\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{3K - 2G}{3K + G} \right)$

Nous pouvons déduire  $\nu(s)$  sous la forme:

$$\bar{\nu}(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{3K - 2\bar{G}(s)}{3K + \bar{G}(s)} \right)$$

- Les fonctions FI1 , FI2 , FI3 s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 FI1 &= L^{-1} \left\{ \frac{1-2\bar{u}(s)}{s.G(s)} \right\} = \left\{ \frac{6P_1}{q_1+6KP_1} \right\} \cdot \left\{ \exp(-ct) + \frac{B}{C}(1-\exp(-ct)) \right\} \\
 FI2 &= L^{-1} \left\{ \frac{1-\bar{u}(s)}{s.G(s)} \right\} = \left\{ \frac{4P_1}{q_0} - \frac{4}{q_0} \right\} \cdot \left\{ \exp(-Dt) + \frac{4}{q_0} - \left( \frac{18KP_1}{(6KP_1+q_1)q_1} \right) \right\} \\
 &\quad \left\{ \frac{B^2}{D.C} + \frac{(B-D)^2}{D(D-C)} \cdot \exp(-D.t) + \frac{(B-C)^2}{C(C-D)} \cdot \exp(-C.t) \right\} \\
 FI3 &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{sG(s)} \right\} = \frac{2}{q_0} + \left\{ \frac{2P_1}{q_1} - \frac{2}{q_0} \right\} \exp(-Dt)
 \end{aligned}$$

(IV-32)

avec :

$$B = \frac{1}{P_1} \quad C = \frac{q_0+6K}{q_1+6K} \quad D = \frac{q_0}{q_1}$$

D'où à l'instant t=0

$$\begin{aligned}
 G(0) &= G_0 = \frac{E_1}{2} \\
 u(0) &= \frac{1}{2} \left( \frac{3K-E_1}{3K+\frac{E_1}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

soit enfin le problème élastique correspondant :

$$E = E_1(1+\nu_0)$$

$$\nu = \nu_0$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu_0)}$$

Pour le problème de relaxation on considère un matériau viscoélastique ayant un coefficient de Poisson constant , et un comportement de solide à 3 paramètres en cisaillement c'est à dire:

$$\nu_v = \bar{\nu}(s) = cste$$

$$G(o) = \frac{E_1}{2}$$

Les fonctions FI1 , FI2 se simplifient à:

$$FI1 = (1 - 2\nu_v)FI3$$

$$FI2 = (1 - \nu_v)FI3$$

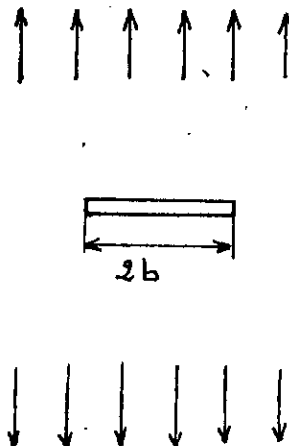
Où FI est donnée par (IV-32 )

#### IV.4.1: PROBLEME DE FLUAGE :

**EXEMPLE 1: Plaque infinie en traction avec une fissure horizontale.**

Le problème est définie par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{xy} & -\infty < x < \infty, y = 0 \\ \sigma_{yy} = -\sigma_0 H(t - t_0) & |x| < b, y = 0 \\ U_y = 0 & |x| \geq b, y = 0 \end{cases}$$



fissure horizontal  
Fig(IV-1)

Avec tous les conditions en contraintes nuls à l'infini, d'après la solution analytique donnant les discontinuités normale en élastique [S.L.CROUCH]:

$$D_y(x) = U_y(x, 0^-) - U_y(x, 0^+) = -2Pb \frac{(1-\nu)}{G} \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right).$$

Nous pouvons déduire celle ci en fonction du temps sous la forme :

$$D_y(t, x) = U_y(x, t, 0^-) - U_y(x, t, 0^+) = -2pb \left(1 - x^2/b^2\right)^{1/2} \cdot \left\{ \frac{4P_1}{q_0} - \frac{4}{q_0} \right\} \exp(-Dt) \\ + \frac{4}{q_0} \cdot \left\{ \frac{18KP_1}{(6KP_1 + q_1)q_1} \right\} \cdot \left\{ \frac{B^2}{DC} + \frac{(B-D)^2}{D(D-C)} \exp(-Dt) + \frac{(B-C)^2}{C(C-D)} \exp(-ct) \right\}$$

On prend comme données :

pour l'élasticité instantané:

$$E_0 = 4800 \text{ MPA} \quad \nu_0 = 0,2$$

pour le modèle rhéologique :

$$E_1 = 4000 \text{ MPA} \quad E_2 = 4000 \text{ MPA} \quad \eta = 4000 \text{ MPA.Heure}$$

Les courbes des figures (IV-1) et (IV-2) donnent les solutions analytiques et numériques des discontinuités normale à l'instant t=0 et t=10 Heure respectivement, avec une discrétisation de 50 éléments de la fissure, on remarque qu'il y a convergence vers la solution analytique.



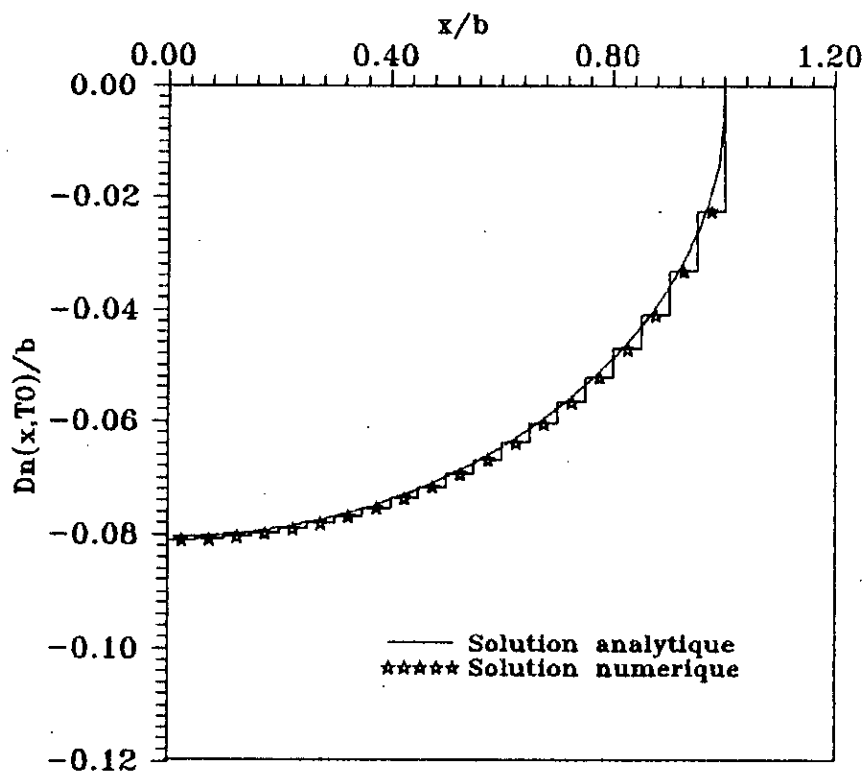


Figure IV.1: Distribution de la discontinuite de déplacement normale a l'instant  $T=T_0$

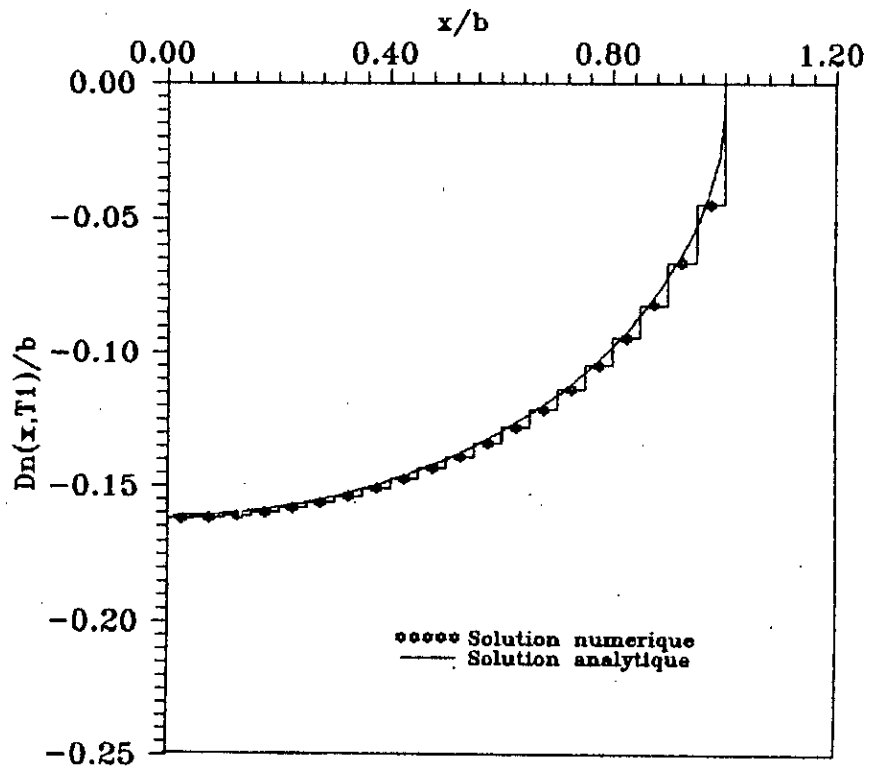


Figure IV.2: Distribution de la discontinuite de déplacement normale a l'instant  $T_1=10$  Heures

On va s'intéresser maintenant au déplacement relative entre les deux lèvres du bout de fissure(dernier élément) en fonction du temps fig(IV-3), on constate bien que l'ouverture croit avec le temps jusqu'à atteindre une valeur finie.

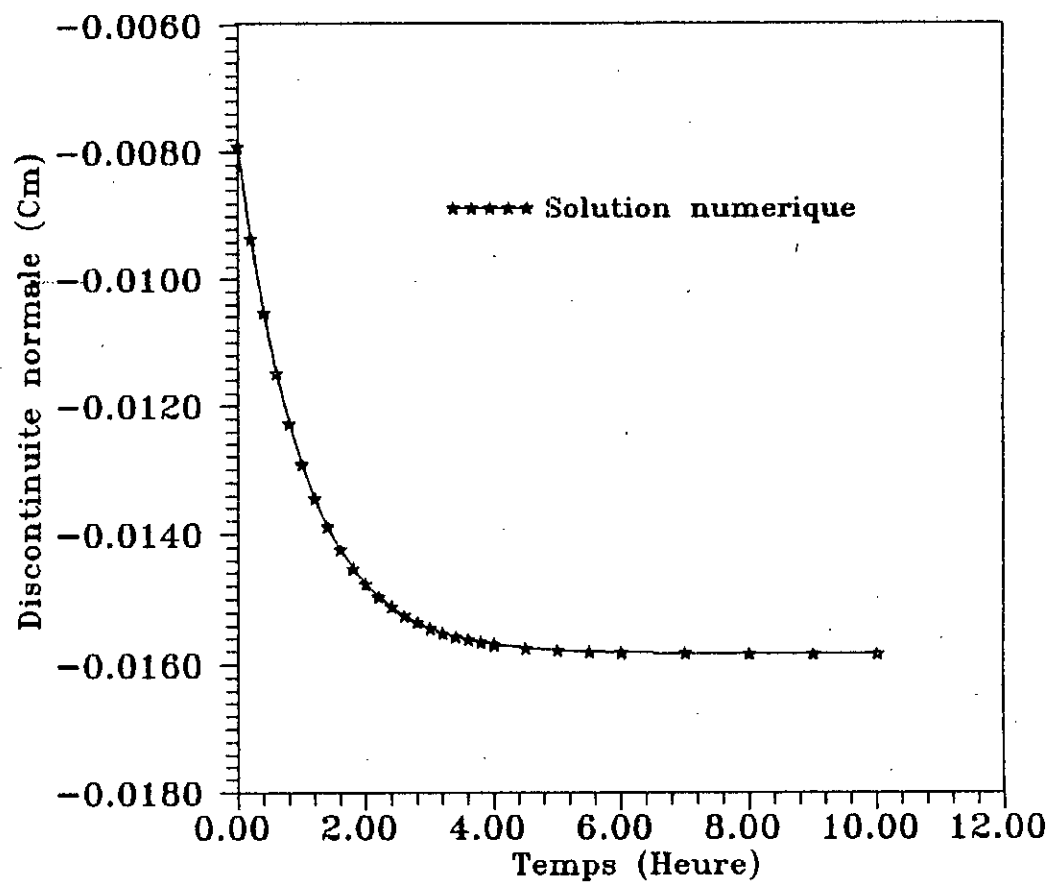


Figure IV.3: Variation de la discontinuite de déplacement normale du dernier element en fonction du temps

### EXEMPLE 2: Tunnel sous pression

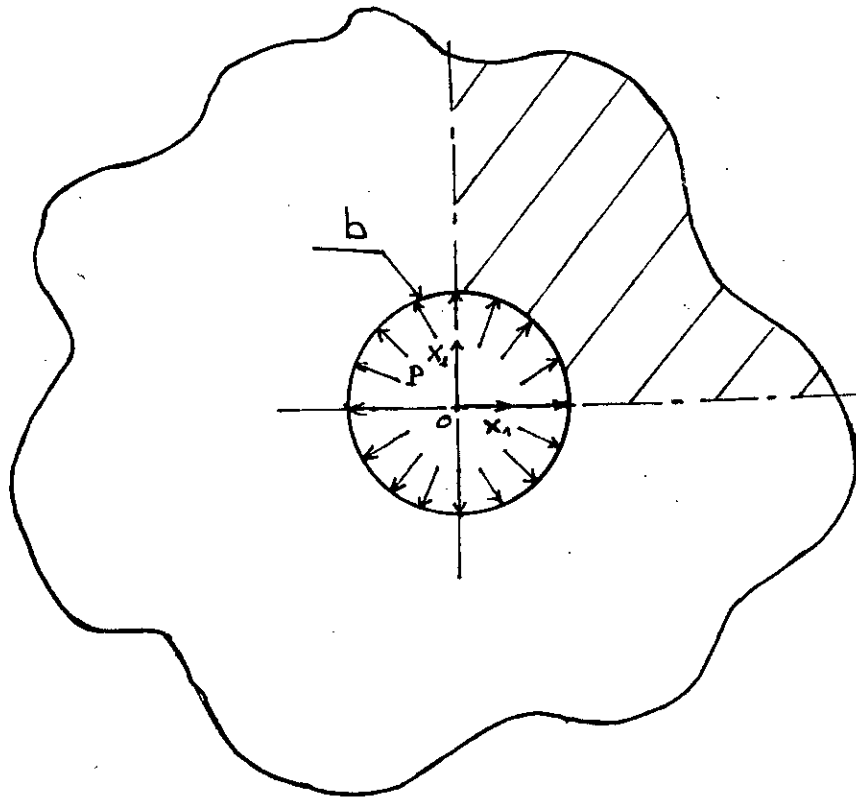
On considère un trou circulaire dans une plaque infinie soumise à une pression uniforme, la solution analytique du problème est donnée par:

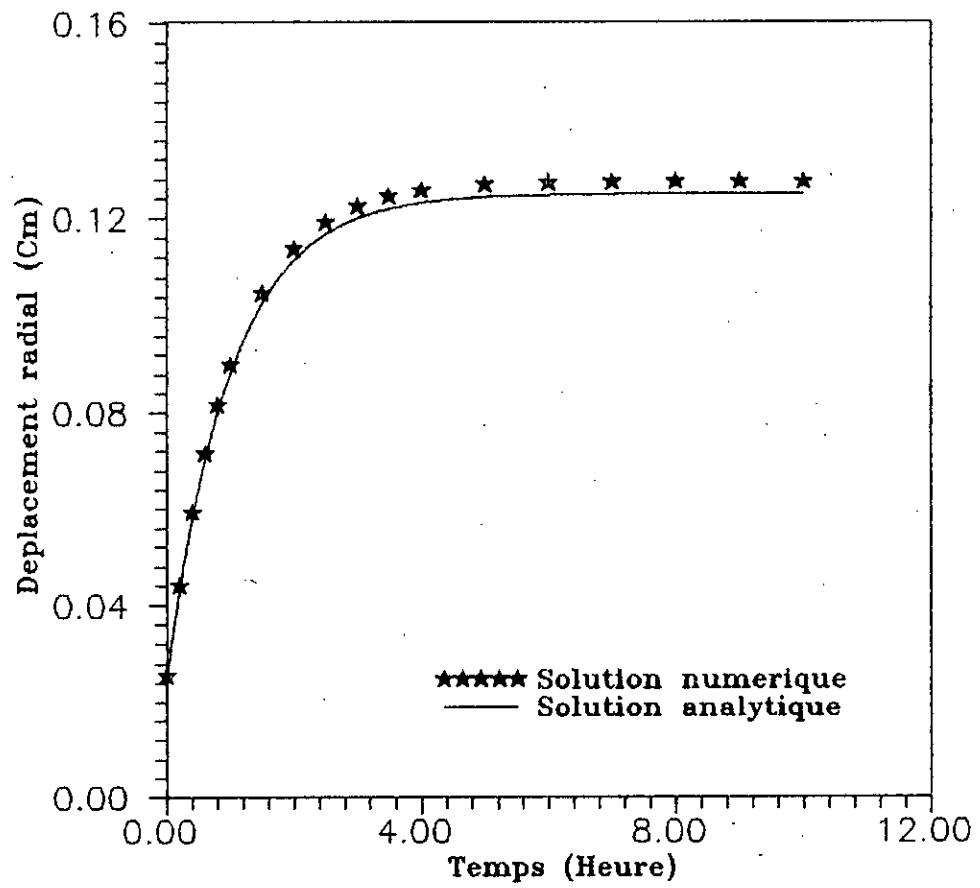
$$U(r,t) = \frac{Pb^2}{r} \left\{ \frac{1}{q_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{q_0}{q_1}\right).t \right] + \frac{P_1}{q_1} \exp\left(-\frac{q_0}{q_1}\right).t \right\}$$

En tenant compte de la double symétrie on discrétise seulement l'arc entre 0 et  $\pi/2$  pour  $r=b$ , la figure (IV-4) révèle la précision avec laquelle les résultats numériques convergent vers la solution analytique.

$$b = 5 \text{ Cm}$$

$$P = 100 \text{ MPa}$$





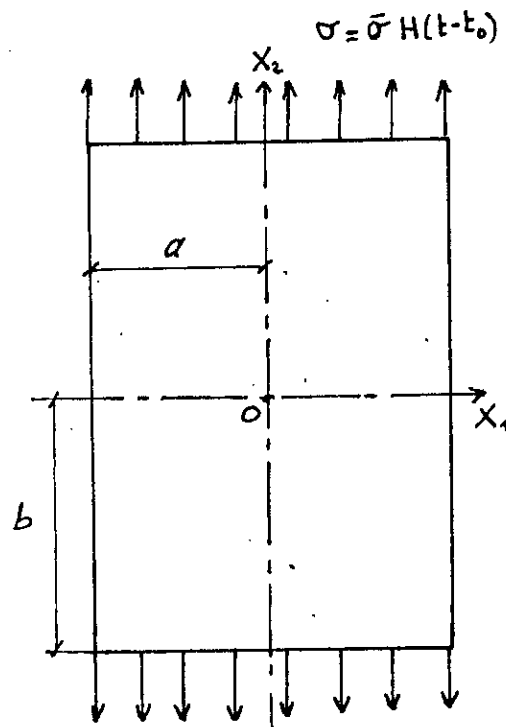
*Figure IV.4: Variation du déplacement  $U_r$  en fonction du temps*

### EXEMPLE 3 : Plaque finie en fluage

La solution analytique donnant le déplacement vertical est:

$$U_y(y,t) = y(1 - \nu^2) \bar{\sigma} \left\{ \frac{1}{q_0} + \left[ \frac{p_1}{q_1} - \frac{2}{q_0} \right] \cdot \exp(-D \cdot t) \right\}$$

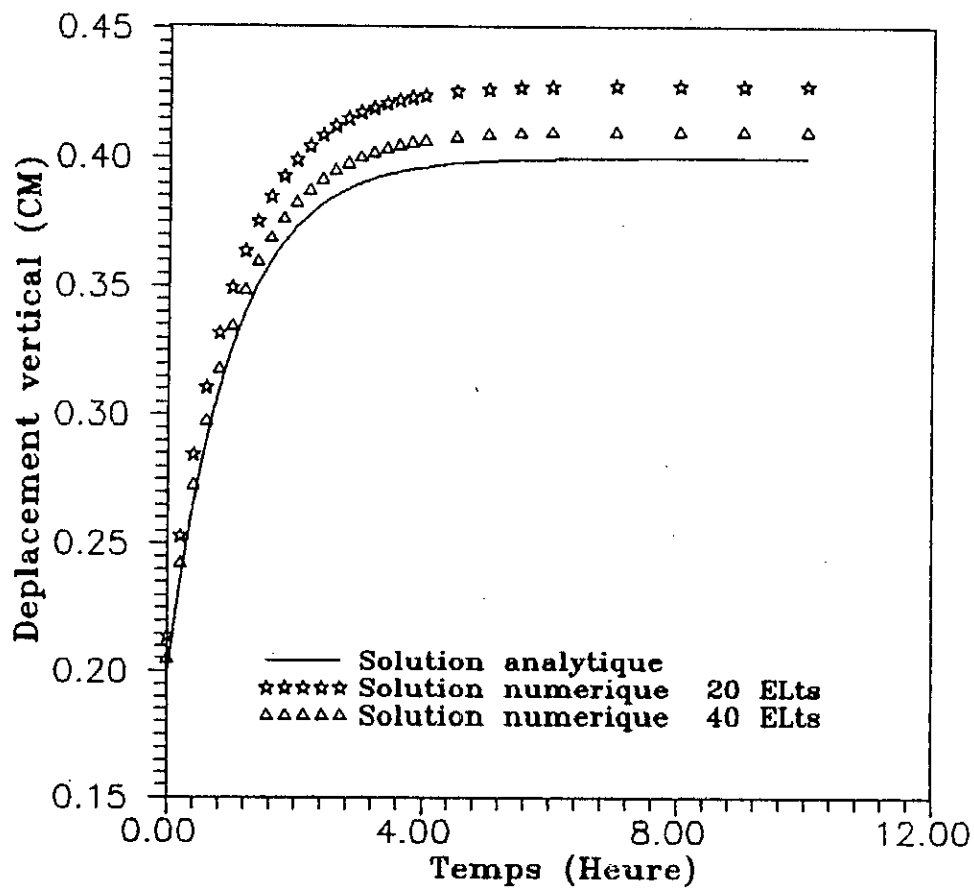
La fig(IV-5) donne la solution numérique obtenue pour différents maillage, l'erreur est d'autant plus faible qu'on affine le maillage.



$$\bar{\sigma} = 100 \text{ MPa}$$

$$a = 5 \text{ Cm}$$

$$b = 10 \text{ Cm}$$



*Figure IV.5: Variation du déplacement vertical de la face supérieure en fonction du temps*

#### IV.4.2- PROBLEME DE RELAXATION :

##### EXEMPLE 1 : Plaque finie

On impose un déplacement  $\Delta=0.375\text{cm}$  à  $t=0$  qu'on maintien constant par la suite.

La solution analytique donnant la contrainte  $\sigma_y$  est:

$$\sigma_y = \frac{\Delta \cdot E_1}{10[E_1 + E_2] \cdot (1 - \nu^2)} \left[ E_2 + E_1 \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} \cdot t\right) \right]$$

La fig(IV-6 ) donne les courbes des solutions analytiques et numériques.

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

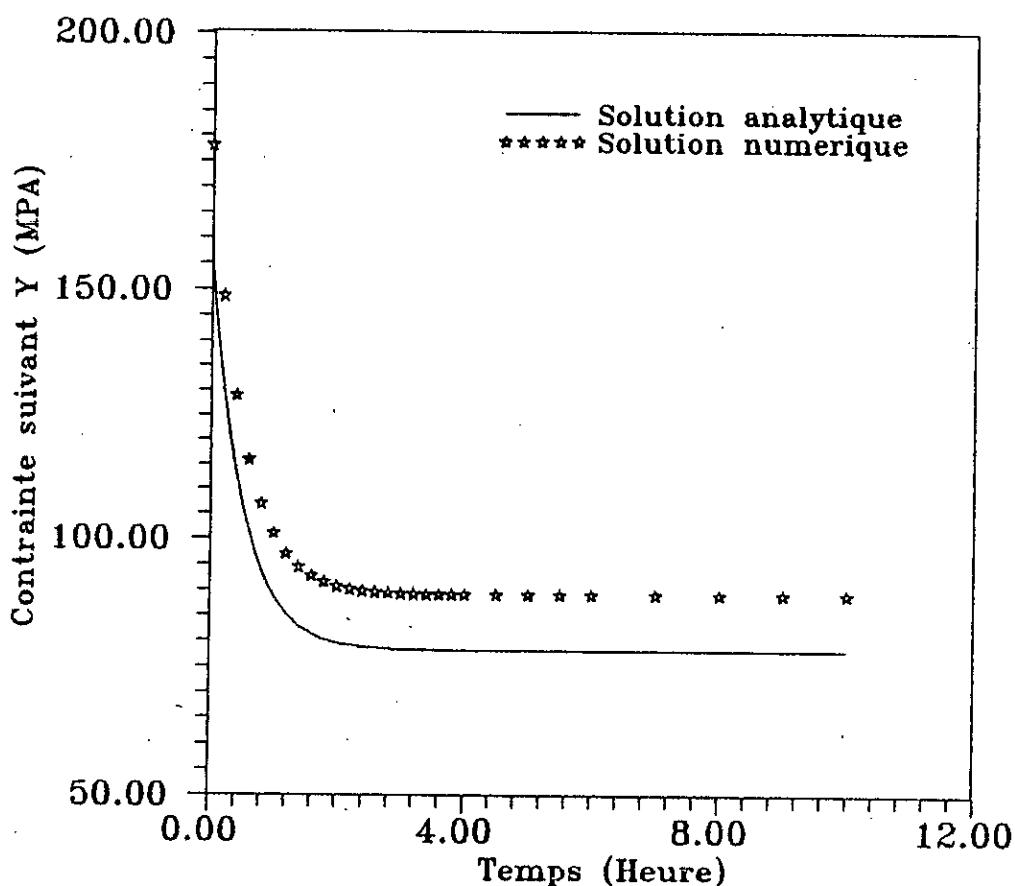


Figure IV.6: Variation de la contrainte normale  $\sigma_{yy}$  en fonction du temps

**EXEMPLE 2: Tube en relaxation**

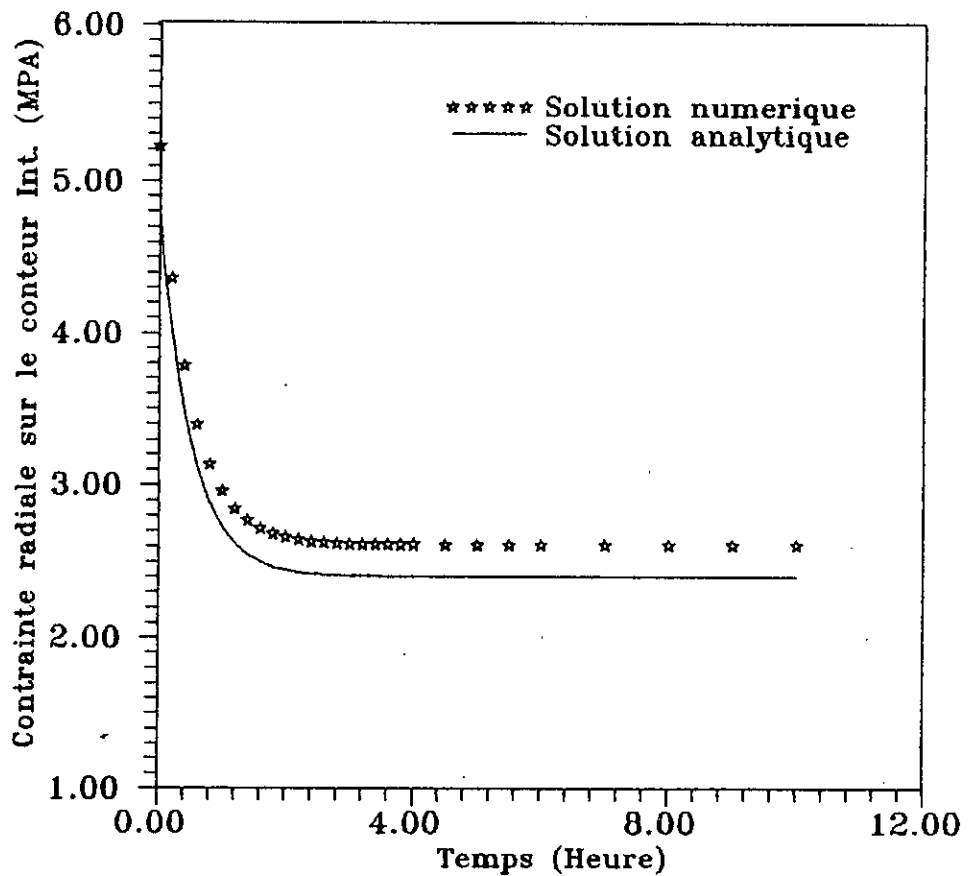
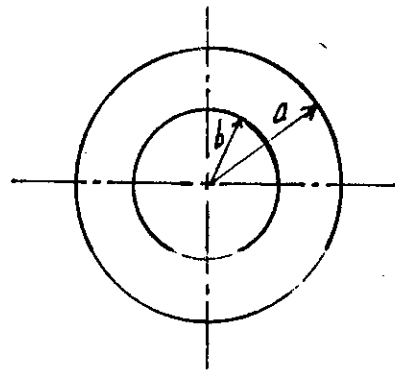
On impose un déplacement radial  $\Delta=0.001\text{cm}$  au contour intérieur, la solution analytique donnant la contrainte radiale sur le contour intérieur est :

$$\sigma_r(t) = \frac{-\Delta}{(1+\nu)} \left[ q_0 + \frac{q_0}{E_2} \cdot E_1 \cdot \exp\left(\frac{-t}{p_1}\right) \right]$$

La fig(IV-7) donne les courbes des solutions analytiques et numériques de la contrainte radiale.

$a = 10\text{ cm}$

$b = 5\text{ cm}$



*Figure IV.7: Variation de la contrainte radiale sur le contour Int. en fonction du temps*



## CONCLUSION:

Les résultats obtenues par la M.D.D pour les exemples traités sont très satisfaisant, avec un maillage fin on arrive à converger vers la solution exacte, ce qui est possible grâce à la symétrie prise en compte, on ne discrétise qu'une partie de la structure.

L'allure des courbes s'explique par le fait qu'à l'instant  $t=t_0$  la valeur est égale à celle du problème élastique correspondant, puis elle tend vers une valeur finie d'où le comportement asymptotiquement stable du modal choisi.

***CHAPITRE V:***

***SIMULATION  
NUMERIQUE DE LA  
PROPAGATION DES  
FISSURES DANS LES  
MILIEUX  
VISCOELASTIQUES PAR  
LA M.D.D***

## **CHAPITRE V:**

### **SIMULATION NUMERIQUE DE LA PROPAGATION DES FISSURES DANS LES MILIEUX VISCOELASTIQUES PAR LA M.D.D**

#### **V.1- INTRODUCTION:**

La majorité des structures mécanique utilisées en industrie présentent des irrégularités géométriques (défaut, fissures, entailles,..), qui peuvent diminuer la résistance à la rupture de ces structures, cela est due à l'existence des contraintes locales fortement amplifiées qui vont permettre l'amorçage de la rupture, cependant pour atteindre la fiabilité et éviter des ruptures aux conséquences grave, il faut un calcul préventif de la propagation de la fissure.

En premier lieu, des techniques expérimentales ont été utilisées sur des éprouvettes sous des conditions bien déterminées, qui nécessitent des équipements sophistiqués pour être compatible avec celles de l'emploi en pratique, ce qui n'est pas toujours possible, une autre technique qui s'avère très efficace et facile à mettre en oeuvre est la simulation numérique du phénomène. Par la méthode des éléments finis ou la méthode des équations intégrales de frontière.

Dans notre étude on a opté pour le choix de la méthode des équations intégrales de frontière (M.D.D), qui s'avère très adéquate pour l'étude de la propagation des fissures des milieux viscoélastiques, ainsi dans ce qui suit vous trouvez la description de la procédure suivi pour l'élaboration de ce travail, et en dernier une série de tests est appliquée pour la validité des résultats.

#### **V.2.- PROCEDURE DE CALCUL DES VARIABLE DE FISSURATION :**

D'après les équations (II-9), (II-18) et (II-19) le calcul de G et K nécessitent l'analyse des champs de contrainte, déplacement et de discontinuité.

La méthode choisie M.D.D appliquée aux milieux viscoélastique nous a bien permis d'approcher ces champs.

##### **V.2.1-CALCUL DU TAUX D'ENERGIE VISCOELASTIQUE:**

On a d'après l'équation ( II-9)

$$G = \frac{1}{2} \int_{(a) \cup \xi^+ \cup \xi^-} (T_i \frac{\partial U_i}{\partial a} - U_i \frac{\partial T_i}{\partial a}) . d\Gamma$$

Cette expression est exploitée directement par calcul numérique, elle nécessite une variation d'aire, donc au moins deux calculs. En viscoélasticité les déplacements  $U_i$  et les contraintes  $T_i$  sont en fonction du temps (chapitre IV), d'où la conséquence que  $G$  est aussi en fonction du temps.

A chaque instant, les dérivées partielles sont remplacés par des différences finies provenant de deux calculs effectués pour deux configurations voisines, avant propagation de la fissure de longueur  $a$ , et après propagation de  $da$  donc :

$$G = \frac{1}{2} \int_{(a) \cup \xi^+ \cup \xi^-} (T_i \frac{\Delta U_i(t)}{\Delta a} - U_i \frac{\Delta T_i(t)}{\Delta a}) . d\Gamma \quad (\text{V-1})$$

avec:

$$\Delta U_i(t) = U_i(t, a + da) - U_i(t, a) = U^2(t) - U^1(t) \quad (\text{V-2})$$

$$\Delta T_i(t) = T_i(t, a + da) - T_i(t, a) = T^2(t) - T^1(t) \quad (\text{V-3})$$

En forces imposées on obtient:

$$G(t).da = \int_a T_i(U_i^2(t) - U_i^1(t))d\Gamma + \int_{(\xi^+ \cup \xi^-)} T_i(U_i^2(t) - U_i^1(t))d\Gamma \quad (\text{V-4})$$

ou sous la forme:

$$G(t).da = \int_a T_i(U_i^2(t) - U_i^1(t)).d\Gamma + \int_{\xi} T_i(D_i^2(t) - D_i^1(t)).d\Gamma \quad (\text{V-5})$$

Ainsi en discrétisant l'expression (V-5), on obtiendra le taux de restitution d'énergie viscoélastique sous forme d'une somme des produit  $T_i(D_i^2(t) - D_i^1(t))$  sur la fissure et des produits  $T_i(U_i^2(t) - U_i^1(t))$  sur le contour à chaque instant.

Le calcul de l'état (2) ne nécessite pas une reformulation du problème, tel que la matrice des coefficients d'influence après propagation est obtenue en ajoutant des lignes et des colonnes, qui correspondent à ceux des éléments propagés, à celle obtenue avant propagation, ce qui constitue un avantage pour la méthode des discontinuités de déplacement.

## V.2.2 CALCUL DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE :

D'après le système d'équation (II-27) on peut calculer les facteurs d'intensité de contrainte, et cela on utilisant les discontinuités de déplacements des bouts de fissure. (dernier élément) soient :

$$K_I(t) = \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi}{r} \right)^{1/2} L^{-1} \left( \frac{G(s)}{(1-\nu(s))} \times D_2(s) \right)$$

$$K_{II}(t) = \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi}{r} \right)^{1/2} L^{-1} \left( \frac{G(s)}{(1-\nu(s))} \times D_2(s) \right)$$

On pose

$$F(t) = L^{-1} \left( \frac{G(s)}{(1-\nu(s))} \right)$$

D'après la propriété du produit de convolution [N.PISKOUNOV]:

$$K_I(t) = \left( \frac{\pi}{8r} \right)^{1/2} \int_0^t F(t-\tau) \cdot D_2(\tau) \cdot d\tau \quad (V-6)$$

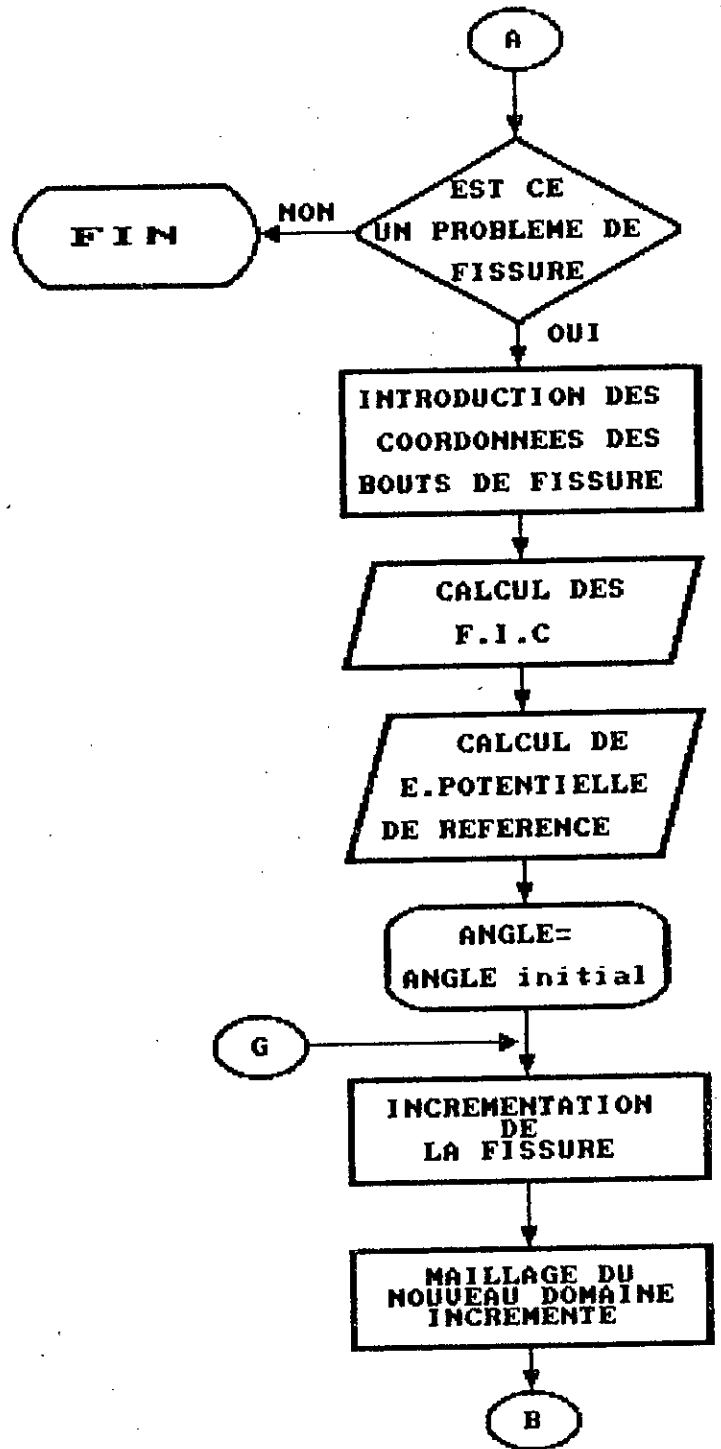
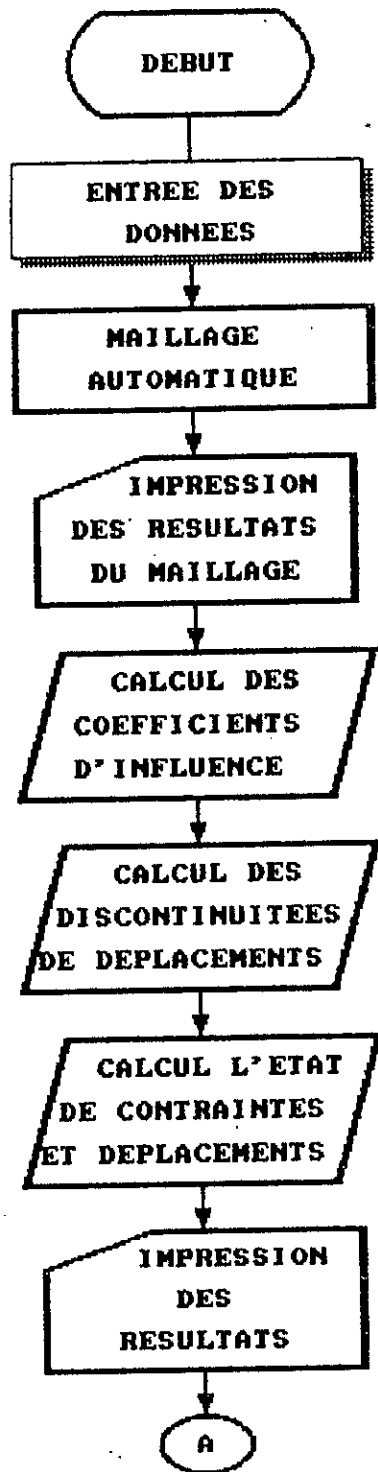
$$K_{II}(t) = \left( \frac{\pi}{2r} \right)^{1/2} \int_0^t F(t-\tau) \cdot D_1(\tau) \cdot d\tau \quad (V-7)$$

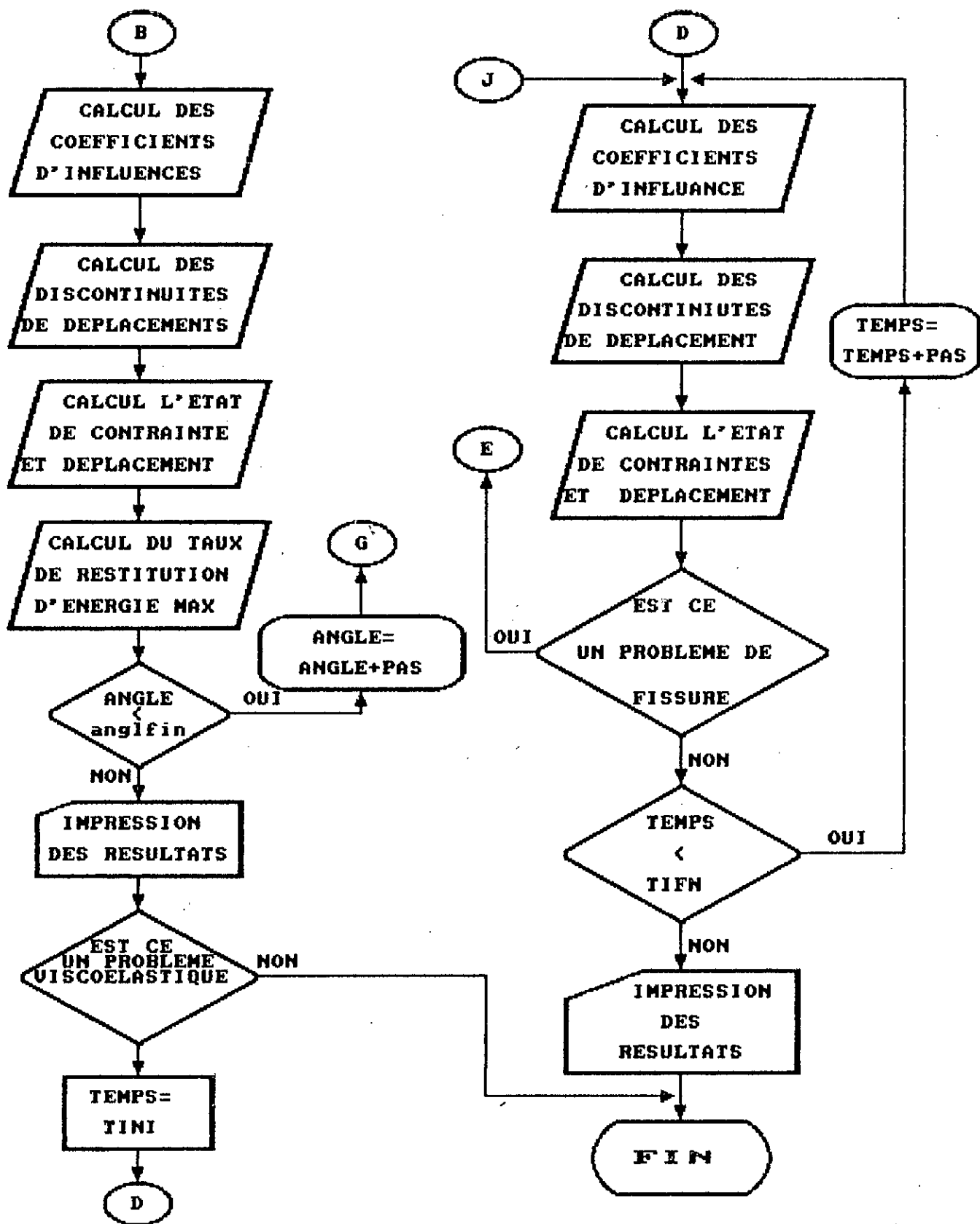
En calculant les valeurs des intégrales (produit de convolution) ci dessus entre 0 et t pour chaque instant à l'aide d'une intégration numérique, on obtient les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte pour chaque instant "t".

**V.3:**  
***ORGANIGRAMME***

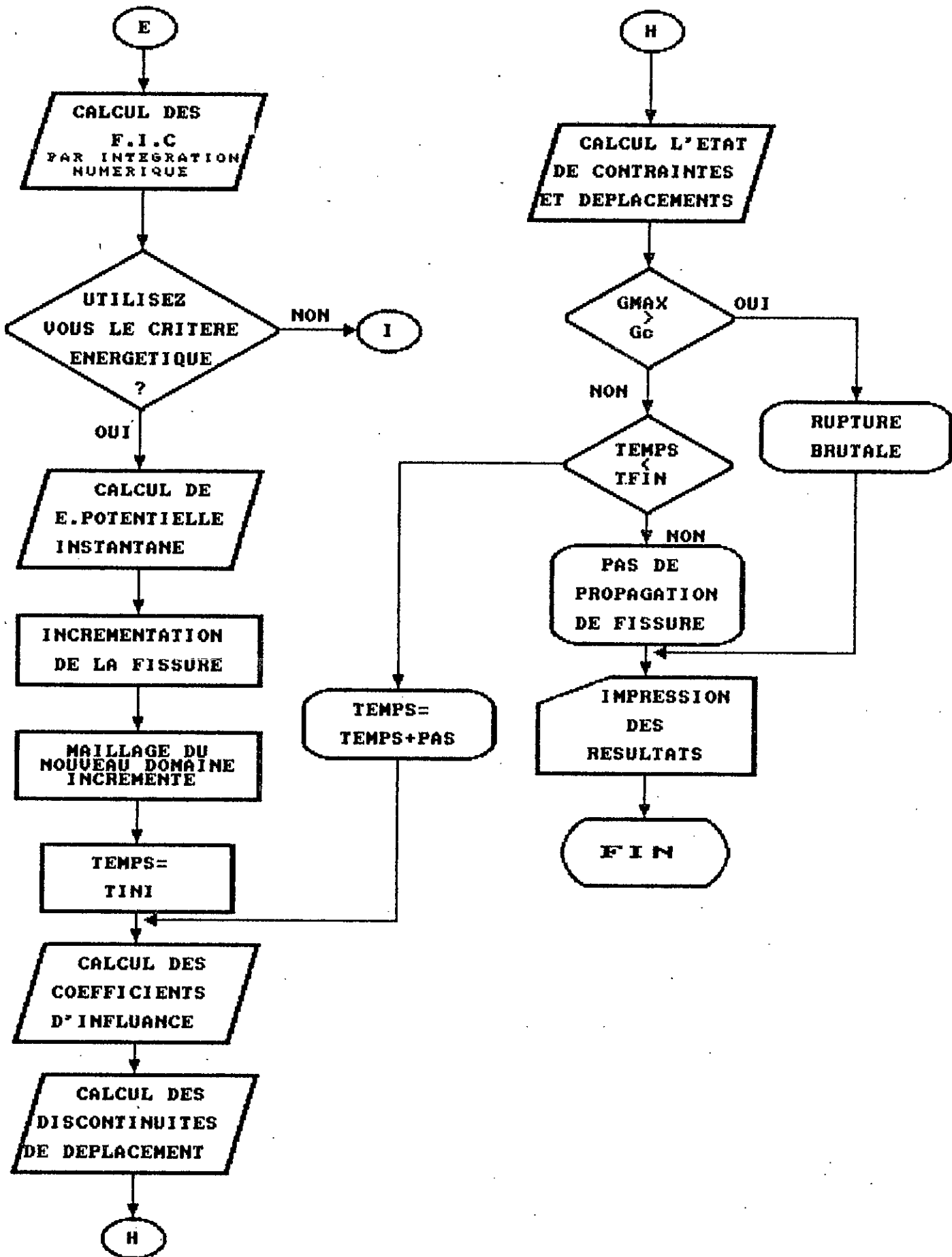
***DU***

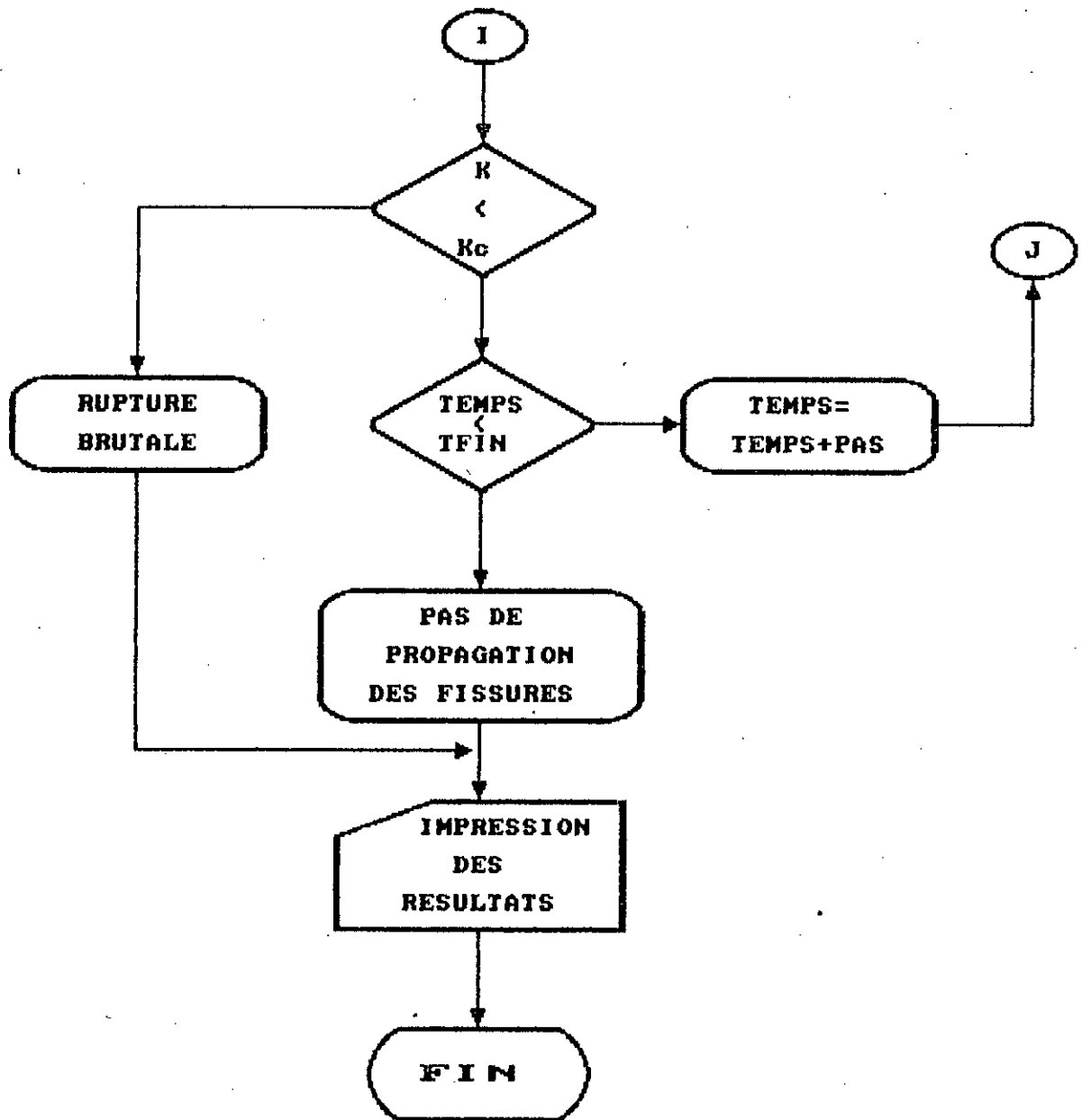
***PROGRAMME***











#### V.4 - EXEMPLE DE CALCULS ET INTERPRETATION DES RESULTATS :

On considère un matériau viscoélastique présentant un comportement élastique en dilatation et un comportement de solide à trois paramètres, on prendra comme caractéristiques du modèle rhéologique:

$$E_1 = 4000 \text{ MPA}$$

$$E_2 = 4000 \text{ MPA}$$

$$\eta = 4000 \text{ MPA.Heure}$$

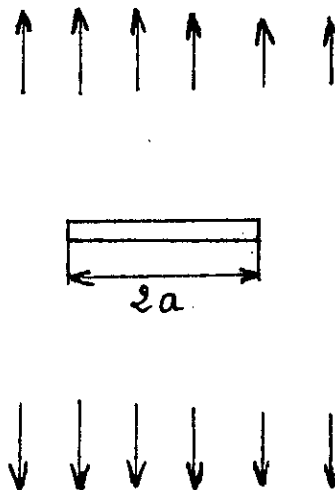
Ainsi pour le problème élastique correspondant on aura:

$$E_0 = 4800 \text{ MPA}$$

$$\nu_0 = 0.2$$

##### V.4.1- PROBLEME DE GRIFFITH :

Sous ce nom est désigné le problème élémentaire d'une fissure horizontale de longueur  $2a$ , dans une plaque infinie sollicitée en traction (fig V.1).



Fig(V.1)

La solution numérique donnant le taux de restitution d'énergie viscoélastique en fonction du temps est obtenue en discrétisant la fissure avec 50 éléments ( fig V.2), on remarque qu'à l'instant  $t=t_0$  la valeur de  $G(t_0)$  est égale à celle du problème élastique correspondant, puis une convergence vers une valeur finie au cours du temps, un fait qui s'explique par le comportement du matériau asymptotiquement stable. Avec la même discrétisation de la fissure, on obtient la solution numérique du facteur d'intensité de contrainte en fonction du temps fig(V-3). On remarque la même allure que celle de  $G(t)$ .

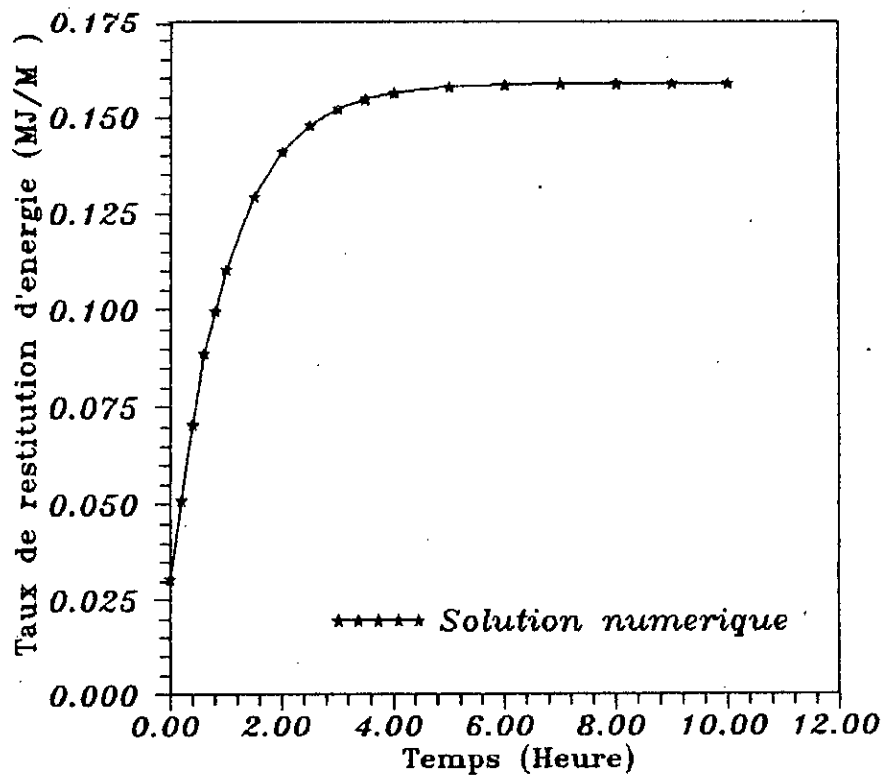


Figure V.2: Variation du taux de restitution d'énergie viscoelastique en fonction du temps

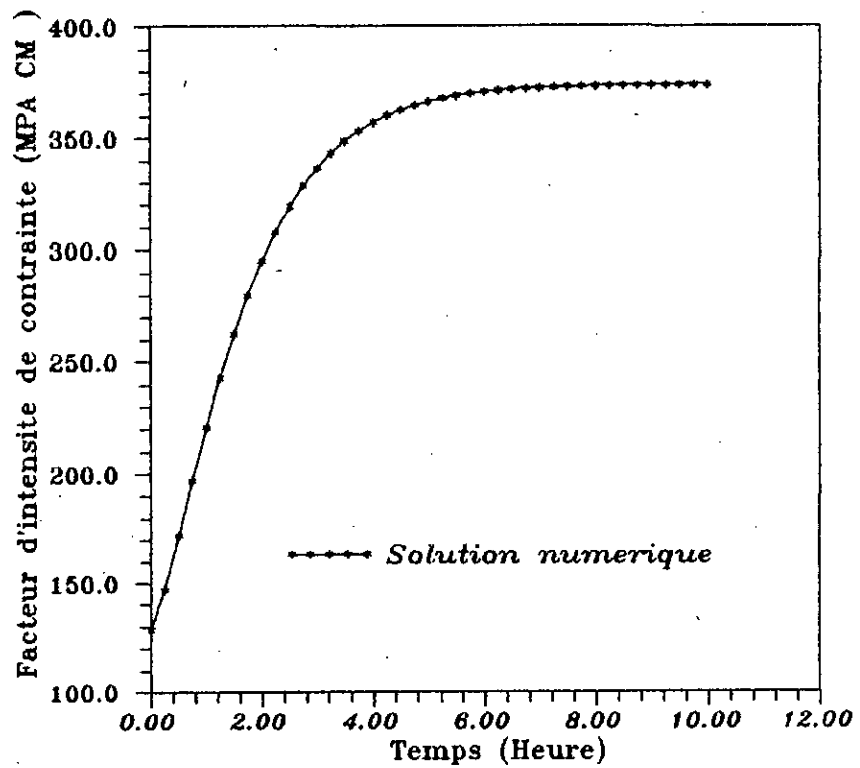


Figure V.3: Variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction du temps

Pour bien tester la fiabilité du programme, on se contente à valider les résultats numériques pour le problème élastique correspondant c'est à dire a  $t=t_0$  seulement, vu qu'on a pas de solution analytique en viscoélasticité.

La solution analytique du taux de restitution d'énergie et du facteur d'intensité de contrainte sont données par:

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} \times K_I^2$$

$$K_I = \bar{\sigma} \times (\pi a)^{1/2}$$

Les résultats obtenus:

$$K_{I_{anal}} = 125.33 \text{ MPa } \sqrt{\text{cm}}$$

$$K_{I_{num}} = 128.62 \text{ MPa } \sqrt{\text{cm}}$$

$$G_{anal} = 0.0312 \text{ MJ/m}^2$$

$$G_{num} = 0.0306 \text{ MJ/m}^2$$

avec

$$\sigma = 100 \text{ MPa}$$

$$a = 0.5 \text{ cm}$$

La fissure se propage dans sa propre direction, ce qui est conforme à l'expérimentale car la fissure s'ouvre symétriquement

#### V.4.2- FISSURE ORIENTE ARBITRAIREMENT :

On considère une plaque infinie, contenant une fissure orienté d'un angle  $\beta$ , par rapport à la direction de la traction fig(V-4), on test cet exemple essentiellement pour déterminer la direction de la propagation de la fissure principale pour chaque orientation  $\beta$ .

Les résultats numériques obtenue fig(V-5) sont conformes aux résultats analytiques données par Sih(1968) pour un milieu élastique, d'où la direction de propagation des fissures du problème viscoélastique est la même que celle du problème élastique correspondant.

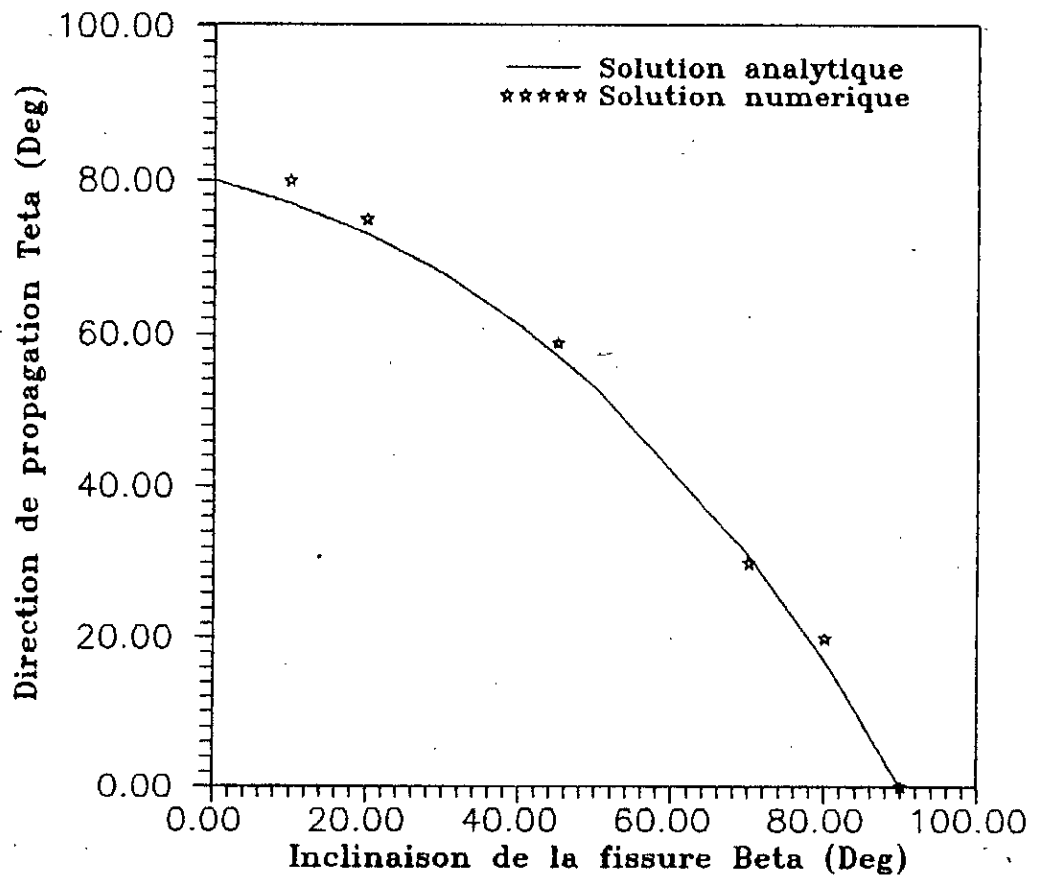
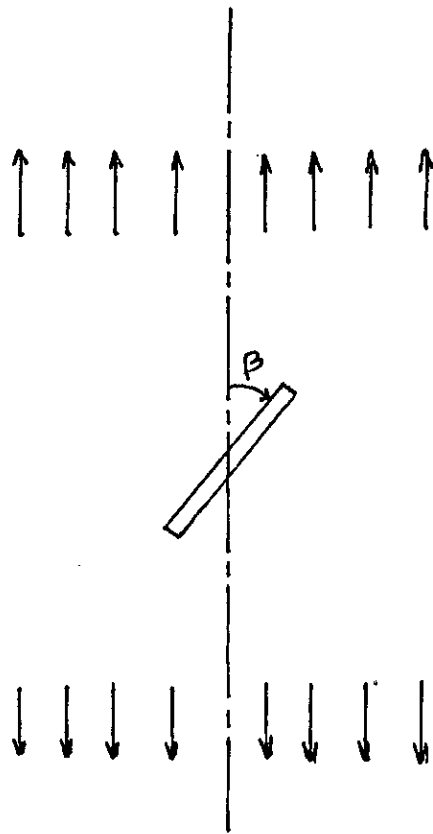


Figure V.5: direction de la propagation de la fissure en fonction de son inclinaison

### V.4.3- DOUBLE FISSURE LATÉRALE DANS UNE PLAQUE FINIE:

On a obtenue les résultats numérique illustrés par la fig(V-6), donnant le taux de restitution d'énergie en fonction du temps et la fig(V-7) donnant le facteur d'intensité de contrainte en fonction du temps, on remarque la même allure que celle de l'exemple précédent et ou le comportement asymptotiquement stable se met en évidence.

La valeur empirique du facteur d'intensité de contrainte est:

$$K_I = \sigma \sqrt{a} \cdot \pi \times f(a/b)$$

$$f(a/b) = \left( 1 + 0.122 \cos^4 \left( \frac{\pi a}{2b} \right) \right) \cdot \left( \frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi a}{2b} \right) \right)^{1/2}$$

Les résultats obtenus a l'instant  $t=0$ :

$$K_{I_{anal}} = 140.47 \text{ MPa } \sqrt{\text{cm}}$$

$$K_{I_{num}} = 145.25 \text{ MPa } \sqrt{\text{cm}}$$

$$G_{anal} = 0.042 \text{ MJ/m}^2$$

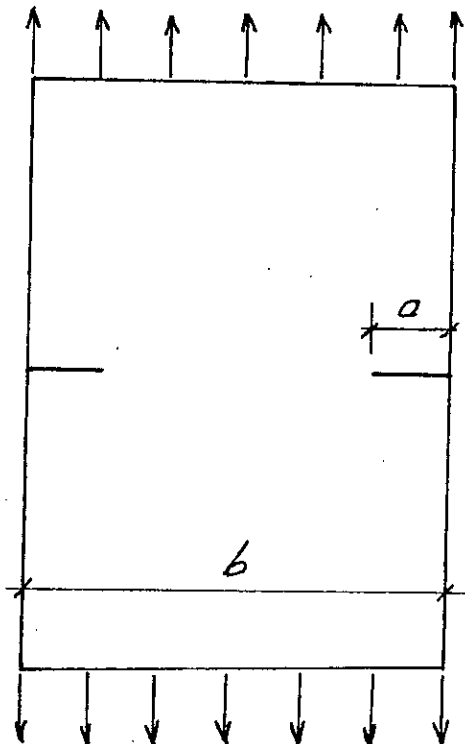
$$G_{num} = 0.040 \text{ MJ/m}^2$$

Avec

$$\sigma = 100 \text{ MPa}$$

$$a = 0.5 \text{ cm}$$

$$b = 5 \text{ cm}$$



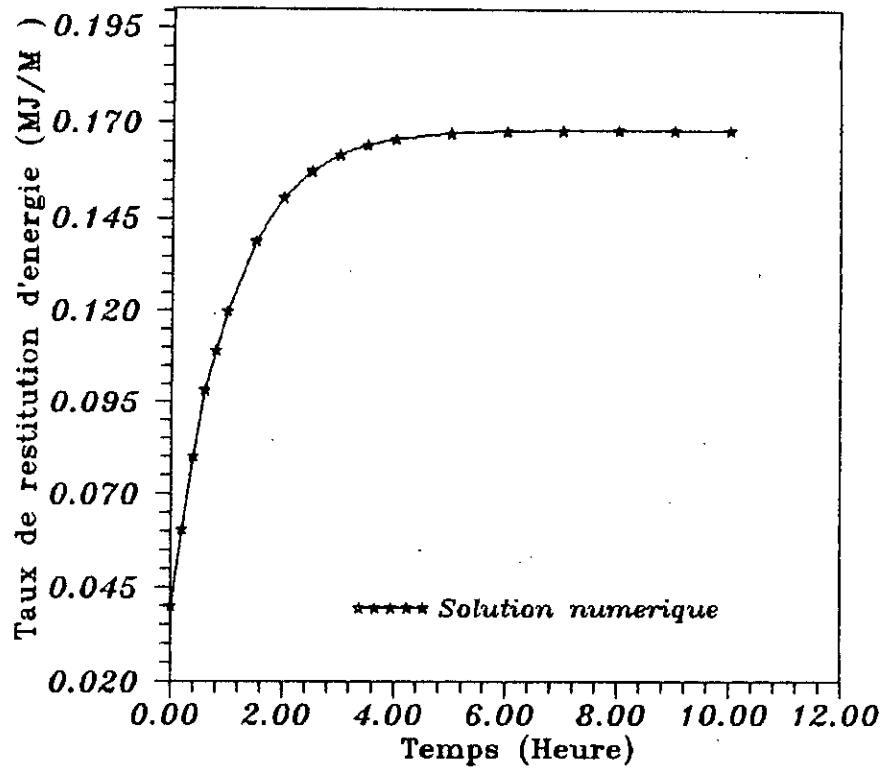


Figure V.6: Variation du taux de restitution d'energie viscoelastique en fonction du temps

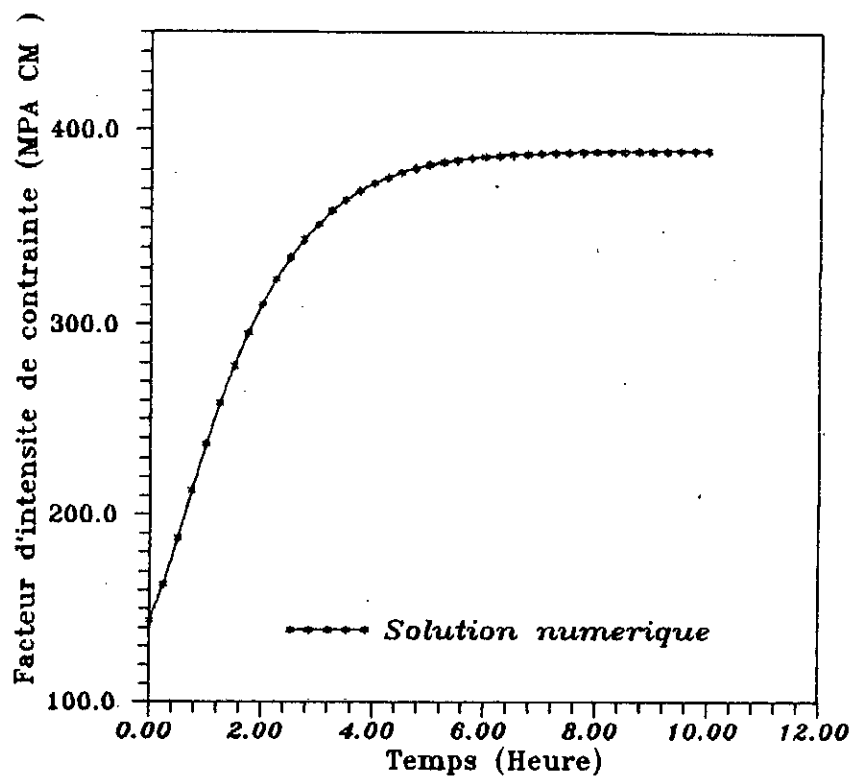


Figure V.7: Variation du facteur d'intensite de contrainte en fonction du temps



#### V.4.4 EPROUVETTE DE FLEXION EN TROIS POINT: S.E.N.B

La géométrie de l'éprouvette est donnée par la figure suivante:

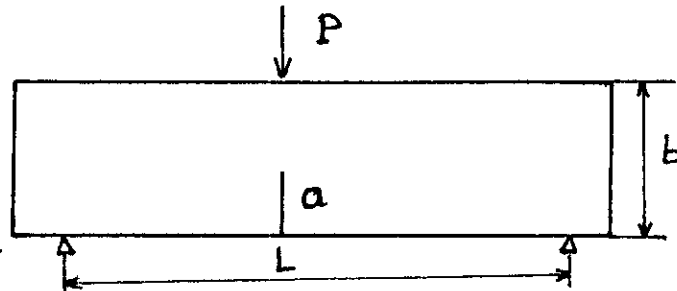
$$P = 10^5 N$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

$$L = 20 \text{ cm}$$

$$e = 1 \text{ cm}$$

$$a = 2 \text{ cm}$$



La valeur empirique du facteur d'intensité de contrainte [BARTHELEMY] est:

$$K_I = \frac{3PL}{2b^2 e} \sqrt{a} \times f(a/b)$$

Pour  $L/B=4$

$$f(a/b) = (1.93 - 3.07(a/b) + 14.53(a/b)^2 - 25.11(a/b)^3 + 25.80(a/b)^4)$$

Pour pouvoir obtenir des résultats satisfaisants, il est nécessaire d'effectuer une bonne discrétisation de l'éprouvette en particulier un maillage très raffiné au niveau de la fissure en raison de la forte concentration de contrainte. On a effectué un maillage de 120 éléments sans utiliser la symétrie et les résultats obtenus pour l'instant  $t=0$  sont:

$$G_{anal} = 0.249 \text{ MJ/m}^2$$

$$G_{num} = 0.230 \text{ MJ/m}^2$$

La fig(V-8) donne la variation du taux de restitution d'énergie en fonction du temps.

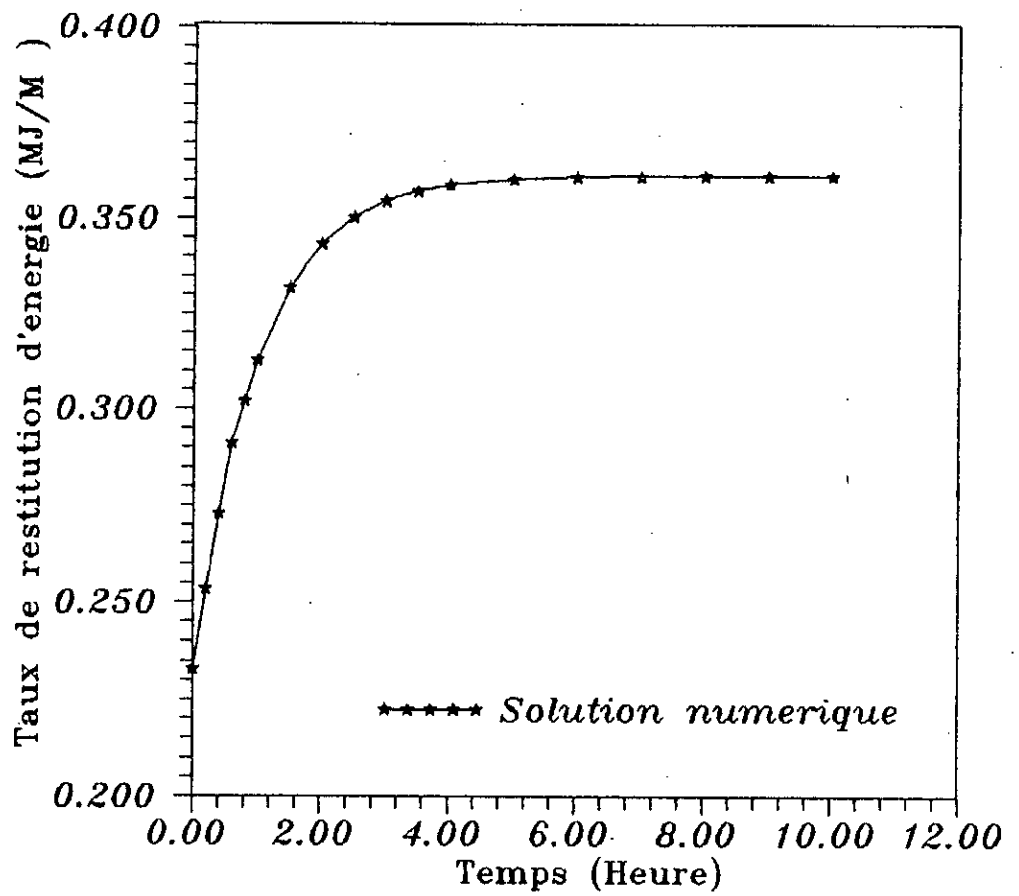


Figure V.8: Variation du taux de restitution d'énergie viscoelastique en fonction du temps

#### V.4.5: RELATION ENTRE $G(t)$ et $K^2(t)$ :

On remarque que le rapport  $C(t) = \frac{G(t)}{K_1^2(t)}$  atteint un extremum pour  $t = 0.5$  H , après il commence à diminuer et enfin il se stabilise à partir de  $t = 6$  H comme le montre la figure ci-dessous.

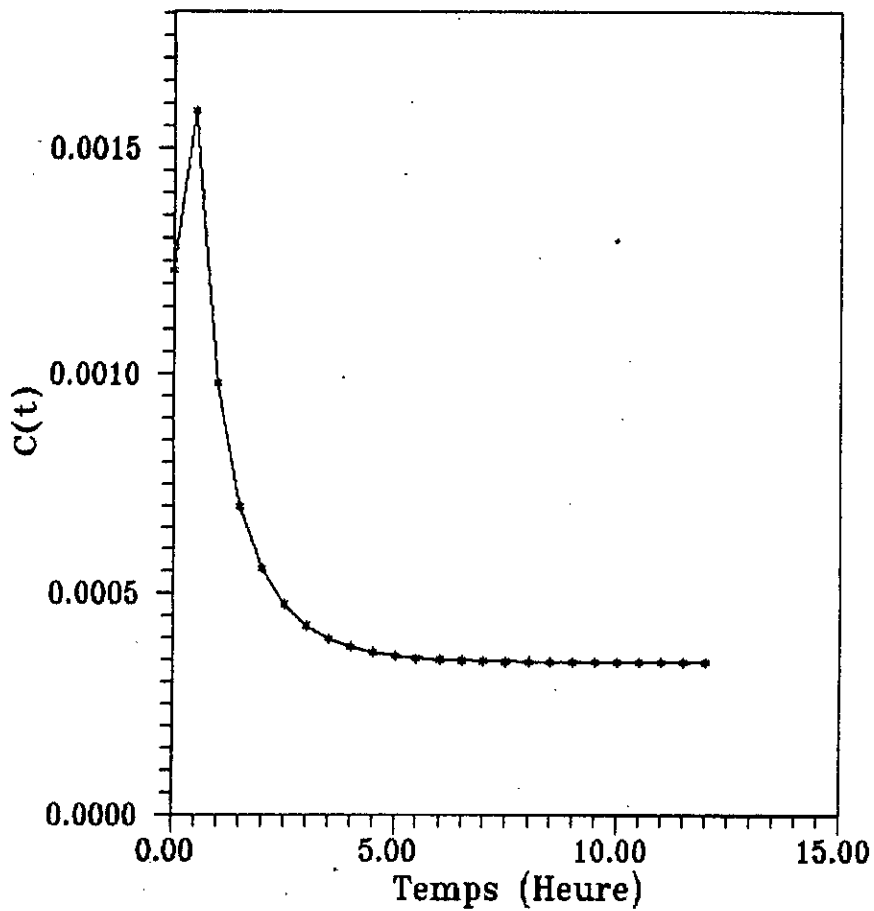


Figure.V.9: Variation du rapport  $G/K_1^2$  en fonction du temps  
PLAQUE INFINIE

## CONCLUSION:

Au cours de ce chapitre on a pu toucher l'efficacité de la méthode des discontinuités de déplacement pour la simulation de la propagation des fissures dans milieux viscoélastiques, elle nous a permis de dégager l'idée que les conditions de l'amorçage d'une rupture dans un milieu viscoélastique ne sont pas imposées seulement par la taille du défaut, le niveau de contrainte et la résistance à la rupture mais aussi par *le facteur temps*.

Les résultats obtenus sont satisfaisants pour une bonne discrétisation surtout un maillage fin dans la région à forte concentration de contrainte.

## CONCLUSION GENERALE

La méthode des discontinuités de déplacement s'est avérée être un outil très puissant dans l'analyse des structures viscoélastiques fissurées. Elle se prête facilement à la simulation de la loi de comportement de ce type de matériau.

Les résultats de ce travail nous ont permis de connaître l'évolution des contraintes et des déplacements, ainsi que les variables qui gouvernent la propagation des fissures au cours du temps. Nous avons pu mettre, grâce à l'utilisation de l'ouverture du bout de fissure le calcul du facteur d'intensité de contrainte  $K$  et le calcul du taux de restitution d'énergie  $G$ , une relation  $G(t) = C(t) \cdot K_I^2(t)$  dans le cadre de la mécanique de la rupture viscoélastique.

Sur le plan numérique, la méthode ne nécessite pas une grande préparation de données à l'opposée de la méthode des éléments finis. De plus pour le calcul du taux de restitution d'énergie qui nécessite deux configurations voisines la M.E.F nécessite un remaillage pour la deuxième au moins localement.

Nous espérons que ce travail sera étendue par d'autre utilisations d'éléments de discrétisation plus performants pour pouvoir traiter des problèmes plus généraux et améliorer les résultats, en particulier l'utilisation de l'élément de bout de fissure où la solution est très importante.

## BIBLIOGRAPHIE

" *Notion Pratique de Mécanique de Rupture* "  
B.BARTHELEMY ( Edition Eyrolles 1980 )

" *Bondary Elements*  
*An Introduction Cours* "  
C.A.BREBBIA and DOMINGUEZ  
( *Computation Mechanics Publication MC.GRAW-HILL NOVEMBER 1989* )

" *Mécanique de La Rupture Fragile* "  
H.D. BUI ( *Edition Masson 1978* )

" *Numerical Analysis* "  
R.L.BURDEN - J.D.FAIREZ  
( *Third Edition. Weber & Schmidt. 1985* )

" *Bondary Element In Solid Mechanics* "  
S.L.CROUCH - A.M.STARFIELD ( *George Allen & Anwin 1983* )

" *Viscoelasticity* "  
FLUGGE ( *Spinger - verlag 1975* )

Publication: " *A Diplacement Discontinuity Approach to Modelling the Creep  
Behaviour of Roch and it's Discontinuities* "  
A.M.GRAWFORD - J.H.CURRAN  
*International Journal of Numerical Methode in Inginneering. 1983*

" *Introduction A la Mécanique de Rupture* "  
R.LABBENS ( *Edition Pularis 1980* )

" *Mécanique Des Matériaux Solides* "  
J. LEMAITRE - J.L. CHABOCHE ( *Dunod 1985* )

*" Simulation Numérique Par Equation Intégrales de Frontière d'Essais en Mécanique de La Rupture "*

*K.NESNAS ( P.F.E JUIN 1991 ) E.N.P*

*" Théorie Du Fluage "*

*W.NOWACKI (Edition Eyrolles 1965 )*

*" Calcul Differentiel et Intégral- Tome: II*

*N. PISKOUVOV ( Edition Mir 1986 )*

*" La Rupture du Bois et ces Composites "*

*G. PLUVINAGE ( Edition Cépadues 1992 )*

*" Elasticité Linéaire "*

*L.SOLOMON ( Edition Masson 1968 )*

*Publication : " Numerical Modelling of Mode I Linear Viscoelastic Fracture "*

*M.K.WARBY - J.R.WALTON and WHITEMAN*

*Transaction of the Conference on Applied Mathematics and Computing*

*( 9 th ) Held in Minneapolis , Minnesota on 18-21 June 1991*

*Publication: " Propagation of Crazing in Viscoelastic Media "*

*Z.D.ZHANG - S.S.CHERN and C.C.HSIAO*

*University of Minnesota , Minneapolis*

*( NASA - CR - 173244 ) HC A 03/MF A01*