

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Département de Génie Mécanique**

**Laboratoire Mécanique du Solide**

المركز الوطني للتكنولوجيا  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**THESE DE MAGISTER**

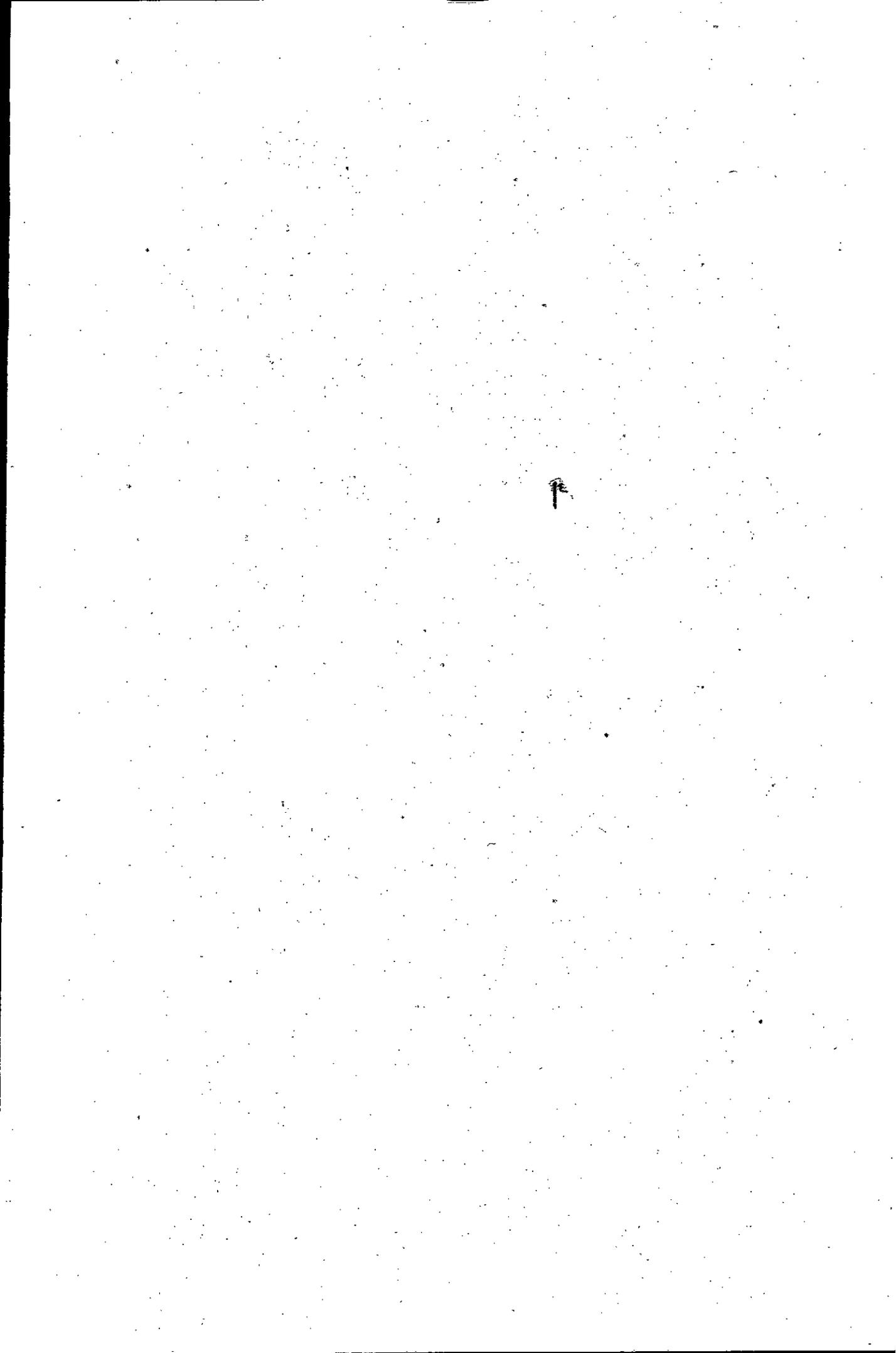
*Présentée par: Youcef BENHALIMA*

*Ingénieur à l'Etat Diplômé de l'E.N.P.*

**SIMULATION NUMERIQUE DE LA PROPAGATION  
DE FISSURES PAR FATIGUE  
APPLICATION AUX VEHICULES INDUSTRIELS DE LA S.N.V.I./C.V.I.**

Soutenue en Juin 1993 devant le jury composé de:

<b>MM. A. GAHMOUSSE</b>	Professeur	Président
<b>N. BACHA</b>	Maître de conférences	Examinateur
<b>M. BOUKABACHE</b>	Docteur Es-sciences	Examinateur
<b>Y. BELKACEMI</b>	Chargé de cours	Examinateur
<b>S. HECHAK</b>	Professeur	Rapporteur



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Education Nationale

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Département de Génie Mécanique**

**Laboratoire Mécanique du Solide**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**THESE DE MAGISTER**

*Présentée par: Youcef BENHALIMA*

*Ingénieur d'Etat Diplômé de l'E.N.P.*

**SIMULATION NUMERIQUE DE LA PROPAGATION  
DE FISSURES PAR FATIGUE  
APPLICATION AUX VEHICULES INDUSTRIELS DE LA S.N.V.I./C.V.I.**

Soutenu en Juin 1993 devant le jury composé de:

<b>MM. A. GAHMOUSSE</b>	Professeur	Président
<b>N. BACHA</b>	Maître de conférences	Examineur
<b>M. BOUKABACHE</b>	Docteur Es-sciences	Examineur
<b>Y. BELKACEMI</b>	Chargé de cours	Examineur
<b>S. RECHAK</b>	Professeur	Rapporteur



## REMERCIEMENTS

Il m'est particulièrement agréable d'exprimer au professeur S.RECHAK, directeur de thèse, ma profonde gratitude pour sa sollicitude, ses conseils efficaces et les encouragements permanents qu'il m'a prodigués durant le déroulement de ce travail de recherche.

Je prie notre distingué Professeur A. GAHMOUSSE, de bien vouloir agréer l'expression de ma respectueuse gratitude pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Y.BELKACEMI, chargé de cours au département de génie mécanique d'avoir bien voulu consacrer une partie de son temps à lire et évaluer cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur M. BOUKABACHE, Docteur d'état Es-sciences, pour l'intérêt qu'il a manifesté à ce travail en acceptant de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur N. BACHA, Maître de conférences à l'université de BLIDA de m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

Enfin, je suis heureux de remercier mes collègues et amis de l'ENP et de l'IGM (USTHB) pour leur contribution à l'élaboration de cette thèse.

## DEDICACES

*A mes parents;*

*A mes frères;*

*A mes soeurs;*

*A ma femme;*

*A ma petite fille Sara.*

***Je dédie ce modeste travail.***

## ملخص

يهدف هذا البحث إلى دراسة إنتشار الشقوق الناتجة عن الإجهاد في هيكل الشاحنات الصنوعة من طرف الشركة الوطنية للسيارات الصناعية (ش.وس.ص).  
لقد تم إعداد برنامج معلوماتي لدراسة و تحليل الهياكل المعرضة لإنتشار الشقوق مع وجود مناطق تركز الإكراهات . البرنامج بإمكانه حساب عوامل شدة الإجهاد في هياكل ذات ثلاثة أبعاد و تقييم مدة تشغيلها وذلك بمعرفة سرعة إنتشار الشقوق عبر هذه الهياكل .  
عدة حلول عملية أقرحت في هذا الإطار على الشركة المعنية .

## ABSTRACT

The purpose of this research work is to study the propagation of cracks found on the frame of vehicles made by SNVI/CVI.

A computer program was developed to analyze structures affected by crack fatigue and stress concentration.

The program computes the stress intensity factor in 3D structures, predicts their reliability and crack rate propagation.

Technical solutions have been suggested to SNVI/CVI.

## RESUME

Dans ce travail, on propose l'étude de propagation de fissure qui se manifeste au niveau du longeron du chassis des véhicules industriels de la SNVI/CVI.

Un logiciel a été élaboré pour le calcul des structures fissurées par fatigue en 3D en présence des zones de concentration de contrainte. Ce logiciel nous permet:

De calculer les facteurs d'intensité de contrainte en 3D.

De prédire la durée de vie de la structure en calculant la vitesse de propagation des fissures dans les différents stades.

Des solutions pratiques ont été proposées pour la SNVI/CVI dans ce cadre.

# SOMMAIRE

## Chapitre I : INTRODUCTION

I.1 - Présentation du problème	1
I.2 - Etude bibliographique	5

## Chapitre II : MECANIQUE ET MECANISME DE LA RUPTURE PAR FATIGUE

II.1 - Introduction	7
II.2 - L'amorçage des fissures de fatigue	7
II.2.1 - Seuil de propagation	8
II.2.1.1 - Estimation du seuil de propagation	8
II.2.2 - Mécanisme physique de l'amorçage	10
II.2.2.1 - Importance relative des stades d'amorçage et de propagation	10
II.2.2.2 - Prise en compte de l'effet d'entaille	12
II.2.3 - Méthodes d'évaluation de l'amorçage	14
II.2.3.1 - Coefficient de concentration de contrainte au niveau d'une entaille	14
II.2.3.2 - Méthode fondée sur le coefficient de Neuber	15
II.2.3.3 - Méthode fondée sur le facteur d'intensité de contrainte	16
II.2.3.4 - Méthode fondée sur l'amplitude locale de la déformation	16
II.3 - La propagation des fissures par fatigue	20
II.3.1 - Modèles décrivant la propagation d'une fissure	20
II.3.1.1 - Modèles phénoménologiques	21

II.3.2 - Application des lois de fissuration	23
II.3.2.1 - Les différents stades de la propagation en fatigue	23
II.3.2.2 - Domaines des fortes valeurs de K	23
II.3.2.3 - Domaines des valeurs intermédiaires de K	25
II.3.2.4- Domaine des faibles valeurs de K	25
II.3.2.5- Nombre de cycles à rupture	25
II.4 - Conclusion	26

### Chapitre III: PROBLEMES BIDIMENSIONNELS

III.1 - Eléments sur l'analyse des milieux fissurés	27
III.1.1 - Fissures initiales	27
III.2 Analyse élastique	28
III.2.1 - Modes de sollicitation	28
III.2.2 - Solution asymptotique de Westergaard	30
III.2.3 - Solution exacte de Muskhelishvili	36
III.2.5 - Solutions analytiques	38
III.3 - Variables de fissuration	40
III.3.1 - Facteur d'intensité des contraintes	41
III.3.1.2 - Méthode de la détermination des facteurs d'intensité	42
III.3.1.2.1 - Méthode semi-analytique	43
III.3.1.2.1.1 - Méthode basée sur les fonctions analytiques particulières	43
III.3.1.2.1.1 - Méthode basée sur la représentation conforme	43
III.3.1.2.2 - Méthode Numériques (éléments finis)	44
III.3.1.2.2.1 Eléments spéciaux par la méthode de déplacement	45

III.3.1.2.2.2 - Eléments spéciaux par la méthode d'hybride	46
III.3.1.2.2.3 - Méthode de l'ouverture de fissure	50
III.3.1.2.2.4 - Méthode de raccordement	50
III.3.2 - Calcul de G : Taux de restitution d'énergie	50
III.3.2.1 - Théorie de GRIFFITH	50
III.3.2.2 - Diverses expressions de G	52
III.3.2.3 - Invariant Intégral	53
III-3-3 Méthode de l'intégrale J	55
III.3.1.2.3 - Méthodes expérimentales	56
III.3.1.2.3.1 - Méthode des complaisances	56
III.3.1.2.3.2 - Méthode des raideurs	57
III.3.1.2.3.3 - Méthode photoélastique	58
III.3.1.2.3.4 - Analogie des plaques en flexion	58
III.3.1.2.3.5 - Analogie électrique	59
III.4 - Conclusion	59

#### Chapitre IV: PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS

IV.1- Cas des structures fissurés tridimensionnelles	61
IV.2 - Utilisation de la méthode des éléments finis	65
IV.3 - Généralisation de loi de Paris:	69
IV.4 - Exemple et comparaison (plaque en flexion):	72
IV.5 - Conclusion	75

#### Chapitre V: SIMULATION NUMERIQUE DU PROBLEME 3D:

V.1 - Dimension et forme des défauts	76
V.2 - Valeur du facteur correctif Y	77
V.3 - Simulation du problème présent	82

V.3.1 - Calcul du facteur d'intensité de contrainte	82
V.4) Présentation du logiciel élaboré	86
V.4.1 - Modèles empiriques utilisés	87
V.4.1.1 - Modèle de Walker	87
V.4.1.2 - Modèle de Forman	87
V.4.2 - Calcul de la durée de vie de la structure	88
V.4.2.1 - Nombre de cycles à l'amorçage	88
V.4.2.2 - Nombre de cycles de propagation	88
V.4.2 - Organigramme	89
V.5 - Résultats et interprétation:	90
V.5.1 - Le nombre de cycles	90
V.5.1.1 - Influence de la contrainte appliquée	90
V.5.1.2 - Influence du type de sollicitation	90
V.5.1.3 - Influence du rapport de contrainte	90
V.5.1.4 - Influence de la nature de la fissure	91
V.5.2 - vitesse de propagation de fissure	91
V.5.2.1 - Influence du facteur d'intensité de contrainte maximal	91
V.5.2.2 - Influence du rapport de contrainte R	91
V.5.3 - Facteur d'intensité de contrainte	91
V.5.3.1 - Influence de la contrainte maximale	91
V.5.3.2 - Influence de l'angle d'orientation	92
V.5.3.3 - L'effet de la géométrie de la structure	92
V.6) Comparaison des résultats	98
V.7 - Conclusion et recommandations	100

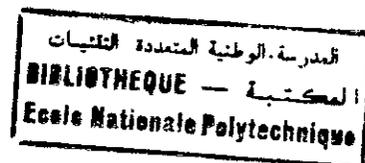
## NOTATION

$K$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	: Facteur d'intensité de contrainte.
$K_I$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	: Facteur d'intensité de contrainte en mode I.
$K_{II}$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	: Facteur d'intensité de contrainte en mode II.
$K_{III}$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	: Facteur d'intensité de contrainte en mode III.
$K_{max}$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	: Facteur d'intensité de contrainte maximal.
$K_{min}$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	: Facteur d'intensité de contrainte minimal.
$K_{th}$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	: Facteur d'intensité de contrainte de seuil.
$K_c$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	: Facteur d'intensité de contrainte critique.
$\Delta K$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	: Amplitude du facteur d'intensité de contrainte.
$\sigma_{min}$ [MPa]	: Contrainte minimale.
$\sigma_{max}$ [MPa]	: Contrainte maximale.
$\sigma_g$ [MPa]	: Contrainte globale.
$\sigma_m$ [MPa]	: Contrainte moyenne.
$\sigma_{nom}$ [MPa]	: Contrainte nominale.
$\sigma_{xx}$ [MPa]	: Contrainte normale suivant la direction x.
$\sigma_{yy}$ [MPa]	: Contrainte normale suivant la direction y.
$\sigma_{zz}$ [MPa]	: Contrainte verticale suivant la direction z.
$\sigma_{\theta\theta}$ [MPa]	: Contrainte suivant la direction $\theta$ .
$\tau_{xy}$ [MPa]	: Contrainte tangentielle.
$G$ [MPa m]	: Taux de restitution d'énergie.
$G_M$ [MPa m]	: Taux de restitution d'énergie maximal.
$G_m$ [MPa m]	: Taux de restitution d'énergie minimal.
$G_s$ [MPa m]	: Taux de restitution d'énergie seuil.
$J$ [MPa m]	: Intégrale de contour de Rice.
$Q_i$ [MPa]	: Force généralisée.
$q_i$ [mm]	: Déplacement généralisée.
$\frac{da}{dN}$ [mm/cycle]	: Vitesse de fissuration linéique.
$\frac{dA}{dN}$ [mm <sup>2</sup> /cycle]	: Vitesse de fissuration surfacique.
$N$ [cycles]	: Nombre de cycles.
$N_a$ [cycles]	: Nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure.
$N_p$ [cycles]	: Nombre de cycles de propagation d'une fissure.
$N_t$ [cycles]	: Nombre de cycles total.

a [mm]	: Longueur linéique d'une fissure.
A [mm <sup>2</sup> ]	: Longueur surfacique d'une fissure.
t [mm]	: Epaisseur de la plaque.
w [mm]	: Largeur de la plaque.
l [mm]	: Longueur de la plaque.
r [mm]	: Rayon du trou de rivetage.
ρ [mm]	: Rayon en fond d'entaille.
u <sub>1</sub> [mm]	: Vecteur déplacement suivant x.
u <sub>2</sub> [mm]	: Vecteur déplacement suivant y.
u <sub>3</sub> [mm]	: Vecteur déplacement suivant z.
E [MPa]	: Module de Young.
R	: Rapport de contrainte $\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{K_{\min}}{K_{\max}}$
ν	: Coefficient de Poisson.
ε <sub>e</sub>	: Déformation élastique.
ε <sub>p</sub>	: Déformation plastique.
ε <sub>t</sub>	: Déformation totale.
K <sub>t</sub>	: Coefficient de concentration de contrainte.
K <sub>f</sub>	: Coefficient d'effet d'entaille en fatigue.
K <sub>N</sub>	: Coefficient d'effet d'entaille en statique.
K <sub>σ</sub>	: Facteur de concentration de contrainte dans le modèle élasto-plastique.
K <sub>ε</sub>	: Facteur de concentration de déformation dans le modèle élasto-plastique.
q	: Indice de sensibilité a l'effet d'entaille.
φ	: Angle d'orientation de la fissure.
Y	: Facteur de correction géométrique.
M <sub>m</sub>	: Facteur correctif pour le cas de membrane.
M <sub>b</sub>	: Facteur correctif pour le cas de flexion.
Q	: Facteur de forme pour une fissre elleptique.
σ <sub>m</sub>	: Contrainte de membrane.
σ <sub>b</sub>	: Contrainte de flexion.



## Chapitre I : INTRODUCTION



### I.1 - Présentation du problème

Dans le cadre de cette thèse, on se propose de résoudre un problème de fissuration qui se manifeste au niveau des châssis des véhicules de transport K 120 de la Société Nationale des Véhicules Industriels S.N.V.I/C.V.I.

Ces véhicules sont utilisés en général pour le transport de matériaux de construction.

D'après l'étude statistique tirée des rapports techniques montrants les incidents déjà produits au niveau de ces châssis, la fissuration apparaît au niveau des rivets (concentration de contrainte) soit du longeron droit soit du longeron gauche. Dans certains cas, la fissure se propage sur toute la largeur causant ainsi une rupture totale. Notons aussi que la fissure commence de la partie inférieure en passant par l'âme centrale et termine par la partie supérieure du longeron (Fig.1.2).

Avant de lancer nos hypothèses utilisés pour résoudre le problème, on cite les principes généraux de calcul.

Deux problèmes peuvent être considérés selon que l'on se trouve au stade de la conception ou au stade de l'utilisation de la structure.

Au stade de la conception on va s'assurer, le matériau étant supposé parfait qu'il n'y a pas de risque d'apparition de petites fissures dans les zones les plus sollicitées de la structure.

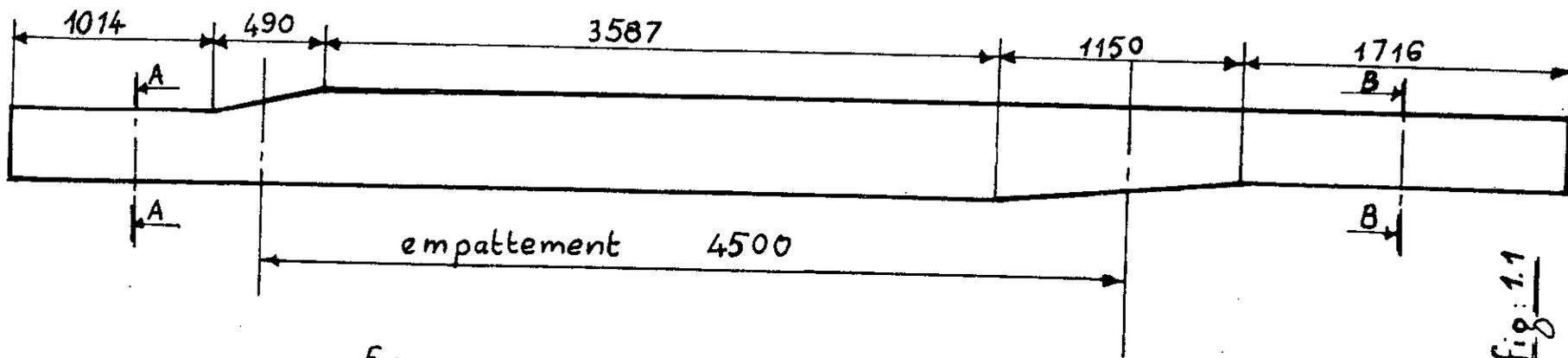
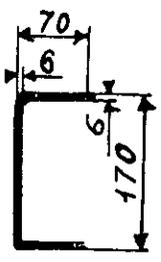
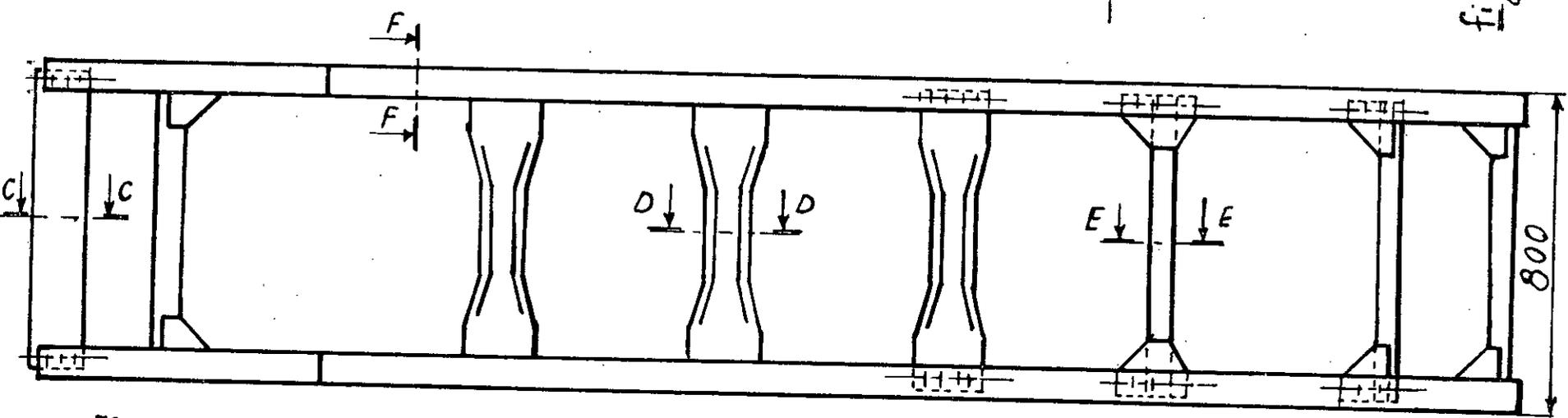
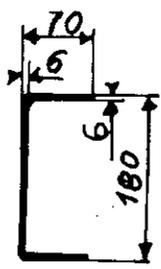


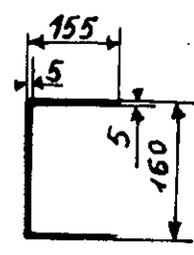
fig. 1.1



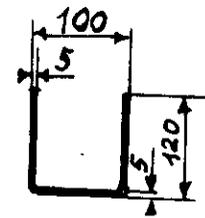
section AA



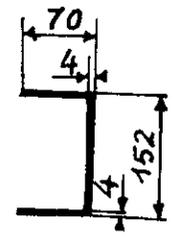
section BB



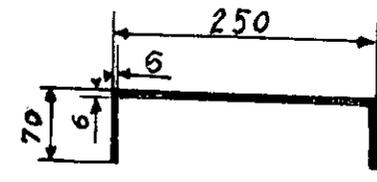
Section CC



section DD



section EE



section FF

DIMENSIONS des ELEMENTS du CHASSIS

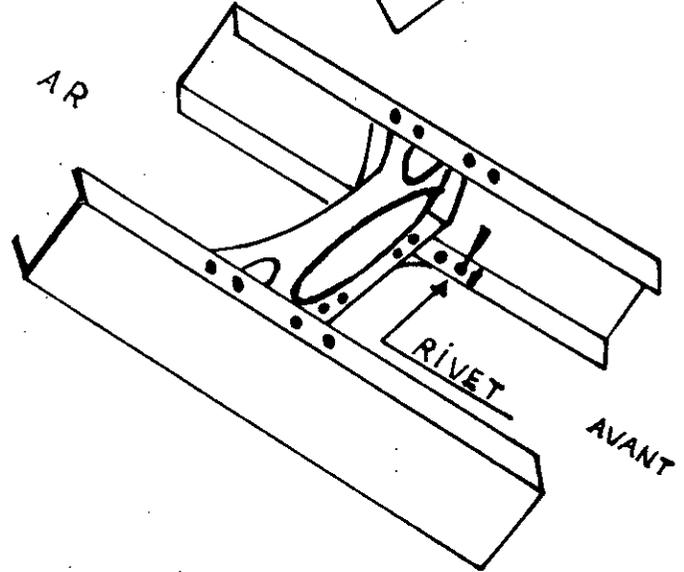
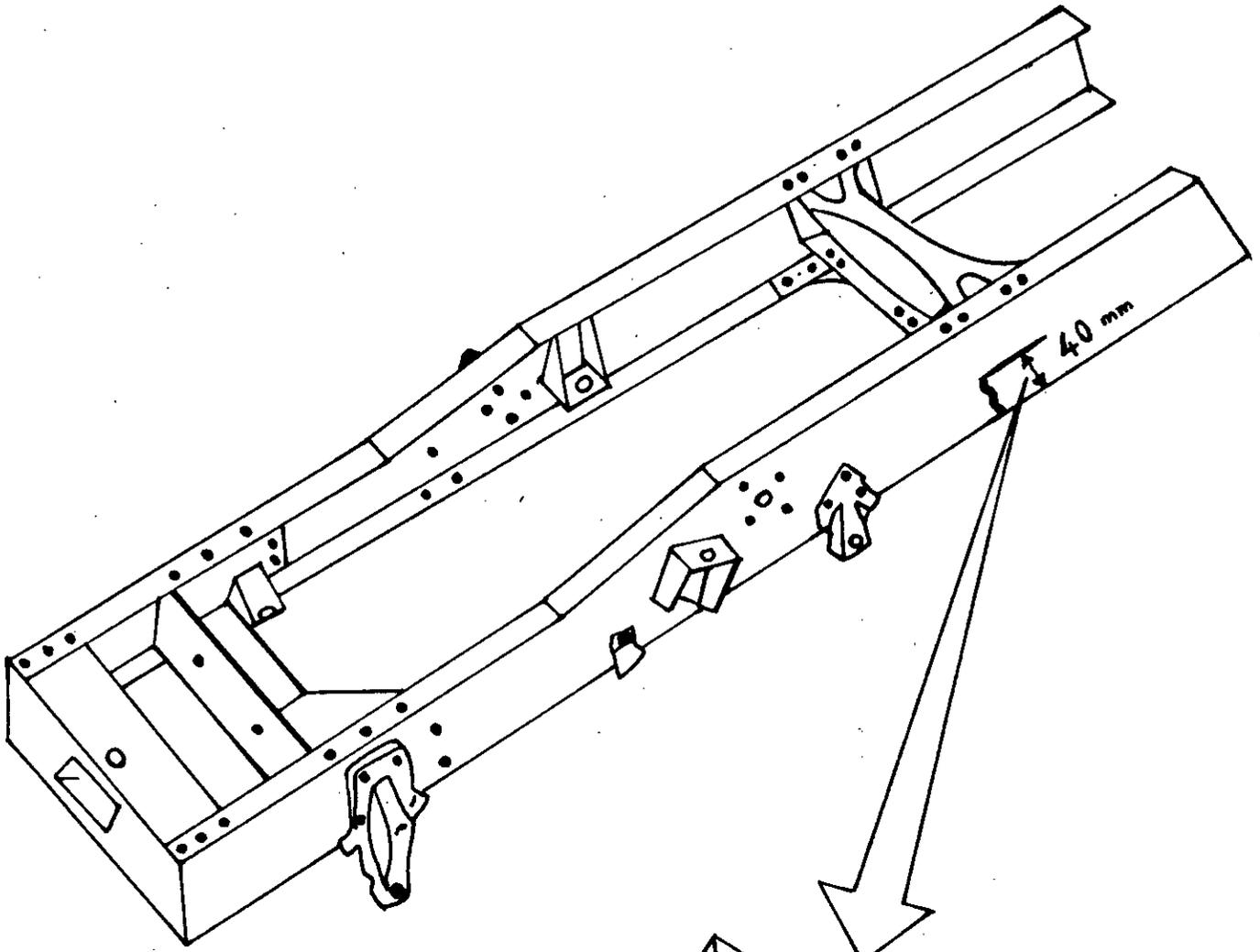


fig: 1.2

CADRE du CHASSIS K 120

La méthode consiste à établir une correspondance entre les sollicitations subies dans chacune des zones les plus sollicitées et celle d'une éprouvette d'essai de fatigue oligocyclique.

Une condition nécessaire pour la validité d'une telle correspondance et d'obtenir l'accommodation plastique de la structure c'est à dire que la déformation plastique dans les zones les plus sollicitées reste réversible lors de la répétition du chargement, cela revient à refuser la déformation progressive.

Au stade de l'utilisation, le principal problème est de pouvoir porter un diagnostic sur l'évolution potentielle des défauts microstructuraux détectés lors des contrôles non destructifs, inclusions, soufflures, microfissures, câblages, manques de fusion ....

L'analyse demanderait de s'intéresser aux stades d'amorçage et de propagation des fissures, le plus souvent on manque d'informations suffisantes sur la nature et la géométrie des défauts pour analyser l'amorçage et l'on se contente d'une analyse de propagation qui est faite au moyen de la mécanique de la rupture.

Dans notre première intervention, on avance les hypothèses suivantes qui sont des guides pour les étapes futures :

- soit le châssis est sous dimensionné en fatigue.
- soit au niveau du rivet (trou) un autre facteur de contrainte s'ajoute lors de la fixation de la traverse au châssis par rivetage se manifestant par des contraintes normales et tangentiellles.

## I.2 - Etude bibliographique

Depuis quelque cent-soixante années que les constructeurs et chercheurs se préoccupent du phénomène de fatigue. Ce dernier n'a rien perdu de sa complexité laquelle est lié en fait à la multiplicité des facteurs en jeu, et si, dès le milieu du dix neuvième siècle, la notion de la limite d'endurance sous cycles à amplitude fixe, dégagée par Wöhler [1] a aidé à réaliser certaines structures capables de tenir aux sollicitations cycliques, il s'en faut de beaucoup que cette notion permette de faire face, avec juste le nécessaire quant à la matière ou au moyen, à n'importe lequel des problèmes pratiques actuels : tenue sous sollicitation cyclique à amplitude variable ou en fatigue oligocyclique, dimension limite des défauts tolérables, rôle du milieu ou de la température ... etc

En 1920 Griffith [2] montrait que la rupture d'un milieu élastique fragile pouvait être caractérisée par une variable appelée plus tard taux de restitution d'énergie dont la valeur critique indépendante de la géométrie de la structure était une caractéristique du matériau.

Rappelons ainsi que depuis le premier traité sur la fatigue publié en 1926 par H.J Gough [3] jusqu'au travail encyclopédique de R.Cazaud [4] remis à jour par G.Pomez, P.Rabbe et ch.Jansen, le sujet a été bien des fois abordé soit dans son ensemble soit dans telle ou telle perspective particulière.

L'approche de Griffith citée ci-dessus qualifiée de globale a été généralisée et formellement construite à partir de la thermodynamique des processus irréversibles au cours des années 1970 (N.Q.Son, Lemaitre et chaboche) [5]. Elle montrait en tout cas

que les phénomènes essentiels se situent au voisinage du front de fissure et qu'il est possible d'étudier le milieu fissuré macroscopique à l'aide de variables intrinsèques, ceci est dû aux fortes concentrations de contraintes qui existent à la pointe des fissures et que l'analyse élastique linéaire traduit par des singularités du champ de contraintes.

L'étude de ces singularités devait conduire G.R.Irwin [6] à définir des facteurs d'intensité des contraintes correspondants à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Ces paramètres semi-locaux sont largement utilisés pour étudier la rupture fragile ou la rupture par fatigue des milieux bidimensionnels, ensuite généralisés pour les structures en 3D.

Entre ces deux approches, globale et semi-local se situent les intégrales de contour, intégrales de Rice [7] en 1968 et Bui [8] en 1973, cette approche caractérise la singularité du point de vue énergétique.

Aussi les études tant expérimentales que théoriques sur le phénomène de fatigue n'ont cessé d'intéresser les chercheurs, et par conséquent plusieurs ouvrages et articles ont été publiés dans les trois dernières décennies.

Parmi ces ouvrages, on cite "la fatigue des matériaux et des structures" [9] édité par : J.P.BAILLON et C.BATHIAS, "Elementary Engineering Fracture Mechanics" [10] par D.Brock, "Métal Fatigue Engineering" [11] publié par H.O.Fuchs et R.I. Stephens.

## Chapitre II : MECANIQUE ET MECANISME DE LA RUPTURE PAR FATIGUE

### II.1 - Introduction

Les phénomènes d'endommagement par fatigue peuvent se développer dans toutes les pièces, toutes les structures soumises à des chargements répétés. On estime que la fatigue est responsable d'au moins 90% des ruptures en service. Suite à un endommagement par fatigue, la rupture peut se produire de manière extrêmement brutale sans que l'aspect des pièces concernées ne soit modifié à l'échelle macroscopique.

La vie d'une pièce soumise à une sollicitation cyclique suffisamment sévère peut être divisée en trois parties:

- Amorçage d'une fissure (fissure courte).
- Régime de propagation lente (fissure longue).
- Propagation brutale (fissure longue).

### II.2 - L'amorçage des fissures de fatigue

L'expérience montre qu'en général, l'amorçage des fissures résulte de la concentration de déformation plastique qui se produit dans un petit domaine de dimension finie.

Du point de vue structural, les déformations plastiques localisées en relation avec les mécanismes d'extrusion et d'intrusion conduisent au développement de la fissuration en stade I.

Du point de vue pratique, il faut chercher à relier le nombre de cycles nécessaires à un amorçage macroscopique, aux conditions d'emploi (charges appliquées, géométrie de la structure) pour pouvoir calculer le nombre total de cycles à rupture.

### II.2.1 - Seuil de propagation

Quand le facteur d'intensité de contraintes  $\Delta K$  atteint des faibles valeurs, la fissure de fatigue voit sa vitesse  $da/dN$  décroître très rapidement quand  $\Delta K$  diminue faiblement jusqu'à atteindre la valeur asymptotique  $\Delta K_{th0}$  pour laquelle il devient très difficile, sinon impossible, de mettre expérimentalement en évidence une avancée significative de la fissure.

L'importance de ce seuil de propagation dans le calcul de certaines structures soumises à de très fortes exigences de sécurité (par exemple les réacteurs nucléaires) est l'une des causes qui poussent les spécialistes de la fatigue à l'étude de ce phénomène de seuil de propagation.

#### *II.2.1.1 - Estimation du seuil de propagation*

De tous les paramètres extrinsèques, le rapport des contraintes  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$  est certainement celui qui a le plus d'effet sur les très faibles vitesses de fissuration et sur le seuil de propagation.

De façon générale, cette influence peut se traduire par une relation générale du type :

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0} \cdot f(R) \quad 2.1$$

où  $\Delta K_{th}$  est la valeur du seuil pour une certaine valeur de R,  $\Delta K_{th0}$ , la valeur à R = 0 et f(R) une fonction de R. Plusieurs équations empiriques ou théoriques ont été proposées pour f(R).

Klesnil et Lukasil [12] ont proposé la relation empirique :

$$f(R) = (1 - R)^\gamma \quad \text{avec } \gamma = 0.7 \quad 2.2$$

Masonnave et Bailon [13] ont vérifié expérimentalement la relation:

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0} (1 - R)^{1/2} \quad \text{c.à.d } \gamma = 1/2 \quad 2.3$$

Pook et Frost [14] prévoient que :

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0} \left( \frac{1 - R}{1 + R} \right)^{1/2} \quad 2.4$$

La figure 2.1 montre la variation de f en fonction de R pour diverses expressions de f(R), la figure 2.2 donne l'écart en % de la fonction f(R) à la fonction (1-R) en fonction de R.

Certains lois de propagation  $\frac{da}{dn} = f(\Delta K)$  ont tenté d'intégrer simultanément l'effet de R et la notion de seuil  $\Delta K_s$  si ce dernier est défini pour une vitesse égale à une distance interatomique par cycle.

Cela souligne bien que l'influence exacte de R sur le seuil de propagation n'est actuellement pas connue parfaitement. Cette méconnaissance est renforcée par le fait que pour un même matériau le coefficient  $\gamma$  de l'équation  $f(R) = (1 - R)^\gamma$  peut prendre une valeur nulle au cours d'essai de fatigue sous vide. Si  $\gamma$  est égale

à zéro ceci signifie que le seuil de propagation est uniquement défini par  $\delta k$ , quelque soit la valeur de  $K_{max}$ , ce qui est difficilement acceptable physiquement.

Pour conclure, si la connaissance du seuil est requise pour une application quelconque et que sa variation en fonction de R est peu ou pas établie avec certitude, il est recommandé d'un point de vue sécuritaire d'être conservateur et d'appliquer la relation théorique

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{tho} (1-R) \quad 2.5$$

### II.2.2 - Mécanisme physique de l'amorçage

Pour évaluer le stade d'amorçage dans une structure, on se réfère de préférence à une notion de microfissure.

Mais cette notion elle-même dépend directement de la résolution du moyen d'observation utilisé. Aussi en l'absence d'un accord général sur la définition de l'amorçage, différents auteurs définissent le nombre de cycles d'amorçage  $N_a$  pour une longueur  $a_o$  de l'ordre 0,1 mm. En effet, cette dimension peut être détectée assez facilement. L'expérience enseigne que bon nombre de cas, dès qu'une fissure atteint une profondeur voisine de cette dimension, elle se propage régulièrement à travers la section.

#### *II.2.2.1 - Importance relative des stades d'amorçage et de propagation*

L'importance relative des stades d'amorçage et de propagation (Fig.2.3 et 2.4) dépend de l'amplitude de la sollicitation, de la géométrie de la pièce, de la nature du matériau, de la

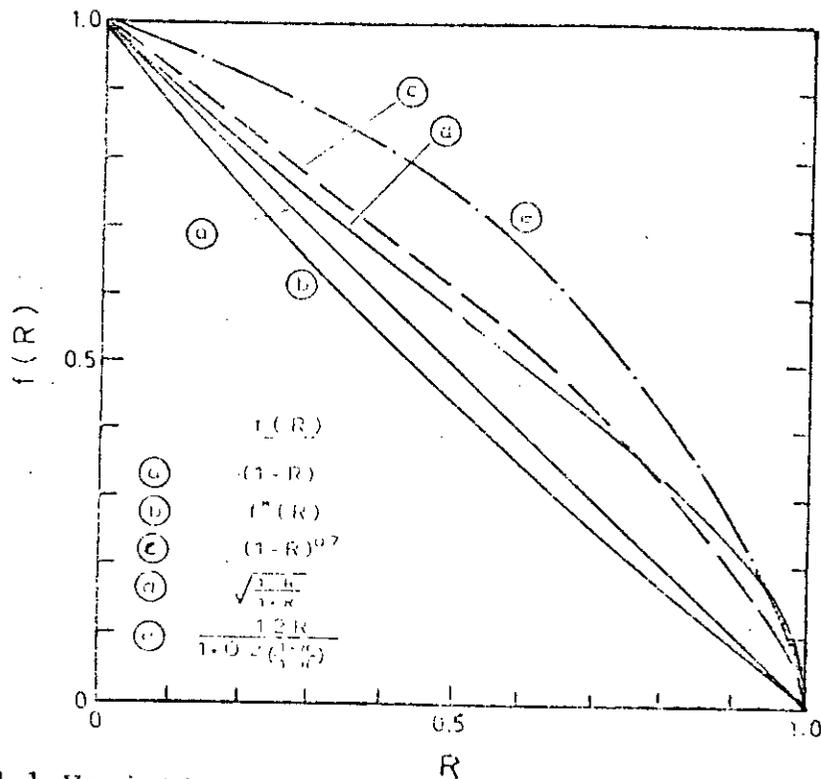


Fig.2.1 Variation de la fonction  $f(R)$  en fonction de  $R$ .  
 $f^*(R)$  est une fonction complexe.

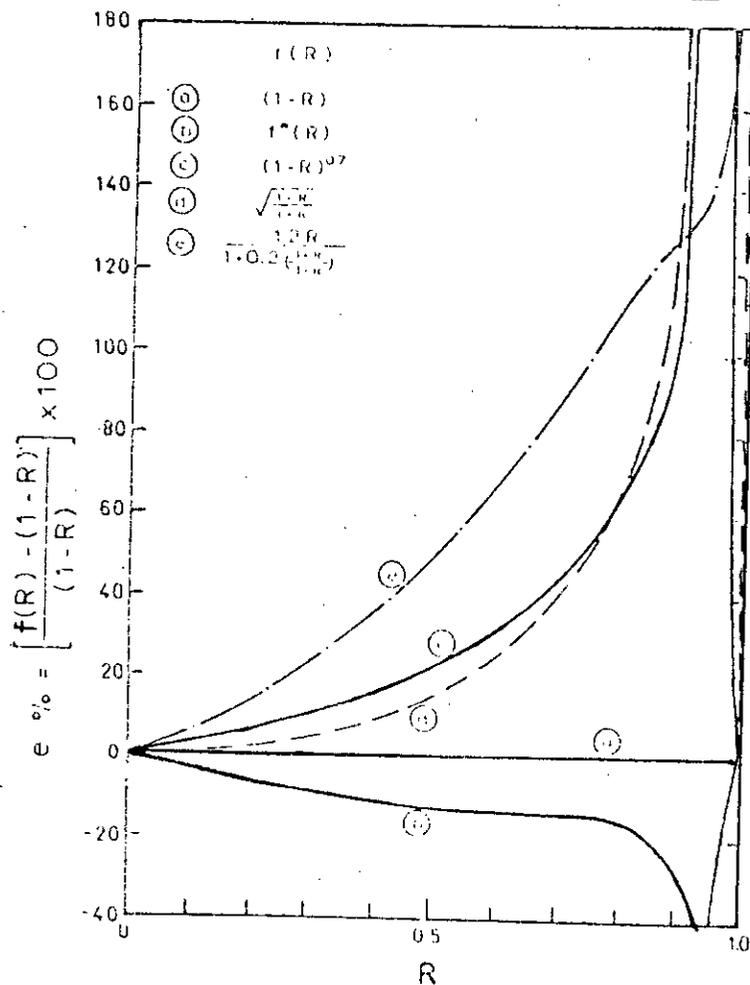


Fig.2.2 Ecart en (%) de la fonction  $f(R)$  à la fonction  $(1-R)$  en fonction de  $R$  pour diverses expressions de  $f(R)$ .

température, du chargement antérieur et de l'environnement. On remarque dans le tableau 1:

- Le rapport  $N_a/N_r$  diminue lorsque la contrainte (ou la déformation) alternée augmente, de sorte que dans le domaine des très faibles nombres de cycles, la phase de propagation occupe la majeure partie de la durée de vie. De plus, le nombre de sites d'amorçage augmente lorsque la contrainte (ou la déformation) augmente.

- Lorsqu'on introduit une concentration de contrainte (entaille par exemple), on réduit le rapport  $N_a/N_r$ .

- En général, les microfissures apparaissent plus rapidement dans les matériaux ductiles.

- Pour les matériaux présentant un amorçage dans les bandes de glissement, le rapport  $N_a/N_r$  augmente lorsque la température diminue.

- Lorsqu'on fait subir à un matériau un écrouissage superficiel, introduisant des contraintes résiduelles de compression, on augmente la phase d'amorçage.

#### *II.2.2.2 - Prise en compte de l'effet d'entaille*

L'effet d'une discontinuité géométrique dans un élément de structure chargée est d'intensifier la valeur de la contrainte nominale au voisinage de la discontinuité.

En conséquence, pour prévoir les effets de concentrations de contrainte dans les structures, le comportement en fatigue des zones plastiques localisées a été simulé par des éprouvettes lisses sous déformation imposée (Fig.2.5 a).

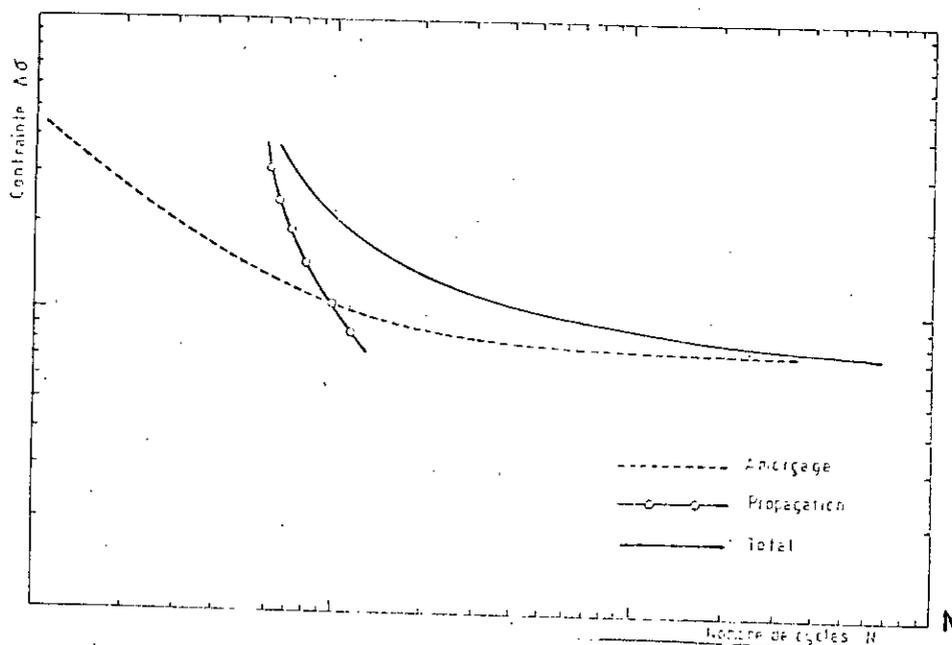


Fig.2.3 Courbe schématique (contrainte-nombre de cycles) donnant les durées d'amorçage et de propagation

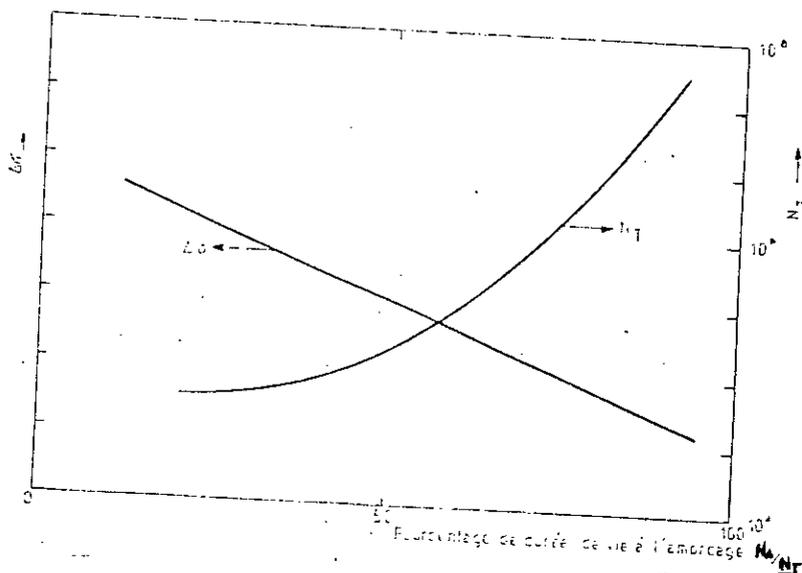


Fig.2.4 Relation schématique entre le pourcentage de durée de vie à l'amorçage, la contrainte appliquée et la durée de vie totale.

Une meilleure simulation des effets des concentrations de contrainte est obtenue en essayant des éprouvettes entaillées du type de celles utilisées en mécanique de la rupture sous charge imposée (Fig.2.5 b).

### II.2.3 - Méthodes d'évaluation de l'amorçage

Actuellement, trois principales méthodes d'évaluation de l'amorçage ont été étudiées. L'une est fondée sur le coefficient de Neuber [16] l'autre sur le facteur d'intensité de contrainte et enfin la dernière sur l'amplitude locale de déformation.

#### *II.2.3.1 - Coefficient de concentration de contrainte au niveau d'une entaille*

La concentration de contrainte locale due à l'entaille est mesurée à l'aide des coefficients de concentration de contrainte définis par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad 2.6$$

où

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_g} \quad 2.7$$

$\sigma_{\max}$  : la contrainte maximale.

$\sigma_{\text{nom}}$  : la contrainte nominale au droit d'entaille calculée sans tenir compte de l'acuité du fond d'entaille.

$\sigma_g$  : contrainte d'effet d'entaille en fatigue  $K_f$  :

$$K_f = \frac{\text{limite d'endurance sur éprouvette lisse}}{\text{limite d'endurance sur éprouvette entaillée}}$$

$K_f$  est un coefficient cyclique par contre  $K_t$  est un coefficient statique.

La sensibilité à l'effet d'entaille s'exprime par le facteur  $q$ :

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad 2.8$$

### II.2.3.2 - Méthode fondée sur le coefficient de Neuber

Pour tenir compte du rayon à fond d'entaille du matériau, Neuber [16] a proposé un coefficient effectif de concentration de contrainte  $K_N$  en sollicitation statique :

$$K_N = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\rho'/\rho}} \quad 2.9$$

où

$\rho'$  : est une constante du matériau qui représente une distance au delà de laquelle il n'y a pas de gradient de coût.

$\rho$  : rayon à fond d'entaille.

Il a été montré qu'en fatigue  $K_f$  pouvait s'exprimer sous une forme analogue :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\rho'/\rho}} \quad 2.10$$

Allery et Birbeck [17] ont tenté d'appliquer l'analyse précédente à l'amorçage et à la durée de vie totale, sur un acier doux au carbone manganèse.

L'amorçage a été détecté optiquement à la surface des éprouvettes et défini comme l'apparition d'une fissure de 0,1 mm de longueur.

Ces auteurs ont trouvé une relation linéaire entre le nombre de cycles d'amorçage  $N_a$  et le logarithme de  $K_N$  (fig.2.6) de la

forme:

$$\log K_N = 1,2969 - 0,1602 N_a$$

2.11

### II.2.3.3 - Méthode fondée sur le facteur d'intensité de contrainte

Jack et Price [18] trouvent qu'à sollicitation égale, le nombre de cycles d'amorçage dépend de la largeur de l'éprouvette mais, là encore, il existe un seuil de 20 mm au dessus duquel la largeur n'a plus d'influence et pour lequel  $N_a$  atteint une valeur maximale et constante.

Il s'ensuit que pour une entaille aiguë contenue dans une plaque de largeur  $\geq 20$  mm et d'épaisseur  $> 5$  mm le nombre de cycles d'amorçage est une fonction simple du facteur d'intensité de contrainte, Jack et Price trouvent pour l'acier doux, la relation paramétrique suivante :

$$N_a = \frac{2,9 \cdot 10^8}{\Delta K^4} \quad 2.12$$

### II.2.3.4 - Méthode fondée sur l'amplitude locale de la déformation

A la base de cette méthode se trouve la règle de Neuber :

$$K_t^2 = K_\sigma^2 K_\epsilon^2$$

où

$K_t$  : est le facteur de concentration de contrainte dans le modèle élastique du comportement du matériaux.

$K_\sigma$  : est le facteur de concentration de déformation dans le même modèle élasto-plastique.

$K\epsilon$  : est le facteur de concentration de déformation dans le même modèle.

La règle de Neuber a été modifiée et devient:

$$K_f^2 = K\sigma \cdot K\epsilon \quad 2.13$$

Smith et ses collaborateurs [19] ont proposé la fonction suivante qui peut s'appliquer tant aux éprouvettes lisses qu'entaillées :

$$\log N_a = A + B \cdot \log(E\sigma_{\max} \epsilon_a)^{1/2} \quad 2.14$$

A et B sont des constantes,  $\sigma_{\max}$  est la contrainte maximale de traction.

$\epsilon_a$  : est l'amplitude locale de la déformation dans la direction de la sollicitation.

E : Module de Young.

La figure 2.8 montre l'évolution du rayon à fond d'entaille en fonction du nombre de cycles d'amorçage.

La figure 2.9 montre son influence sur la fraction du nombre de cycles d'amorçage au nombre de cycles total.

Matériau	Forme de l'éprouvette	Localisation amorçage	$N_r$ cycles	Longueur de la fissure pour $N_r$	$N_a/N_r$
Cu pur	fissure	glissement	$2 \cdot 10^6$	$0,203 \cdot 10^{-2}$ mm	0,05
Al pur	---	joint de grain	$3 \cdot 10^5$	$0,127 \cdot 10^{-1}$ mm	0,10
2024-T3	---		$4 \cdot 10^4$	0,101 mm	0,40
	---		$10^6$	0,101 mm	0,70
2024-T4	---		150	0,254 mm	0,80
	---		$10^3$	0,254 mm	0,72
4130	---		$5 \cdot 10^3$	0,254 mm	0,80
Al pur	entailée ( $K_t = 2$ )	glissement	$10^4$	0,254 mm	0,72
2024-T4	---	inclusion	$2 \cdot 10^6$	$0,254 \cdot 10^{-3}$ mm	0,005
	---		$10^5$	$0,203 \cdot 10^{-1}$ mm	0,05
2014-T6	---		$3 \cdot 10^3$	$0,101 \cdot 10^{-1}$ mm	0,07
	---		$2 \cdot 10^3$	$0,635 \cdot 10^{-1}$ mm	0,015
	---		$2 \cdot 10^4$	$0,635 \cdot 10^{-1}$ mm	0,02
	---		$10^7$	$0,635 \cdot 10^{-1}$ mm	0,05
7075-T6	---	inclusion	$2 \cdot 10^3$	0,508 mm	0,64
7075-T6	---		$5 \cdot 10^3$	$0,762 \cdot 10^{-1}$ mm	0,20
	---		$10^5$	$0,762 \cdot 10^{-1}$ mm	0,40
4340	---		$10^3$	$0,762 \cdot 10^{-1}$ mm	0,25
	---		$2 \cdot 10^4$	$0,762 \cdot 10^{-1}$ mm	0,30

Tableau 2.1 - Nombre de cycles à l'amorçage des fissures de fatigue par rapport à la durée de vie  $N_a/N_r$  (d'après J. C. Grosskreutz).

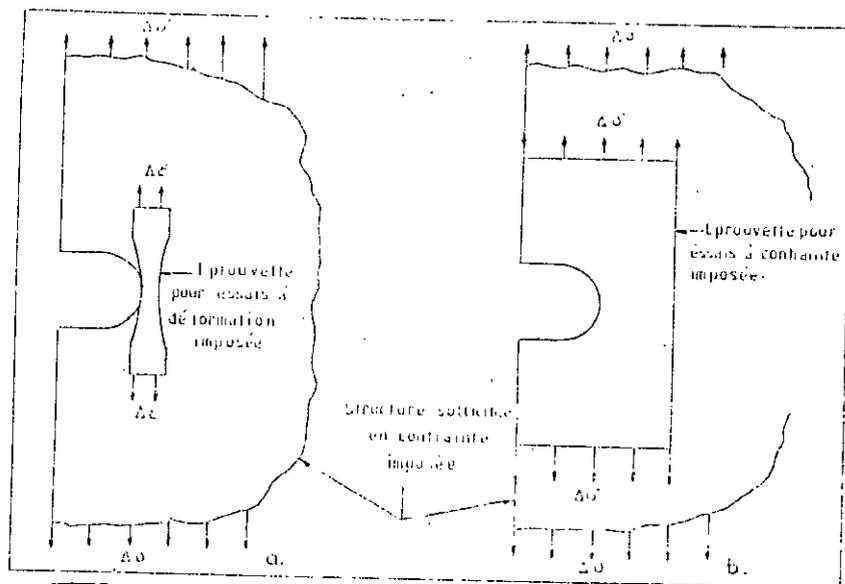


Fig.2.5 Epruvettes de simulation des concentrations de contrainte dans une structure.

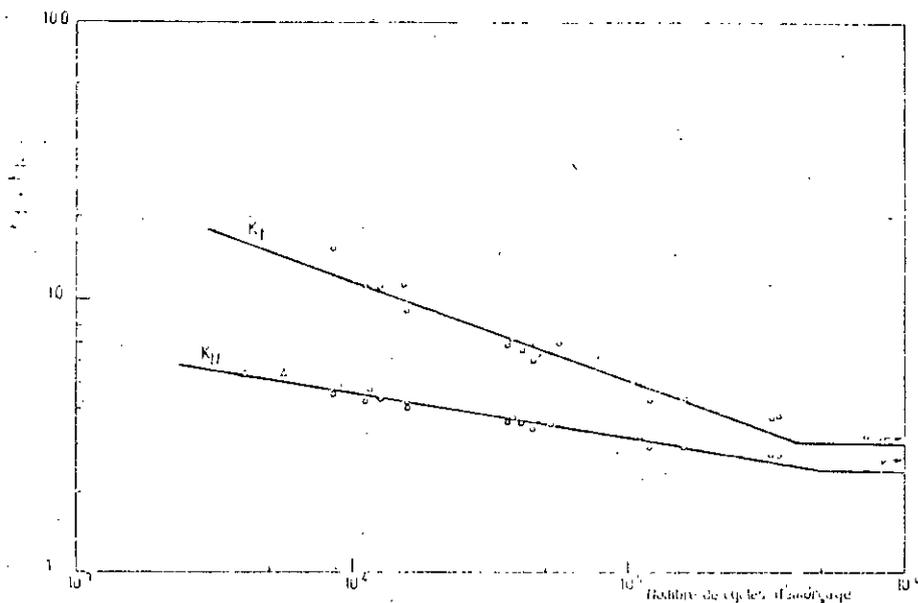


Fig.2.6 Relation entre les facteurs de concentration de contrainte et le nombre de cycles d'amorçage

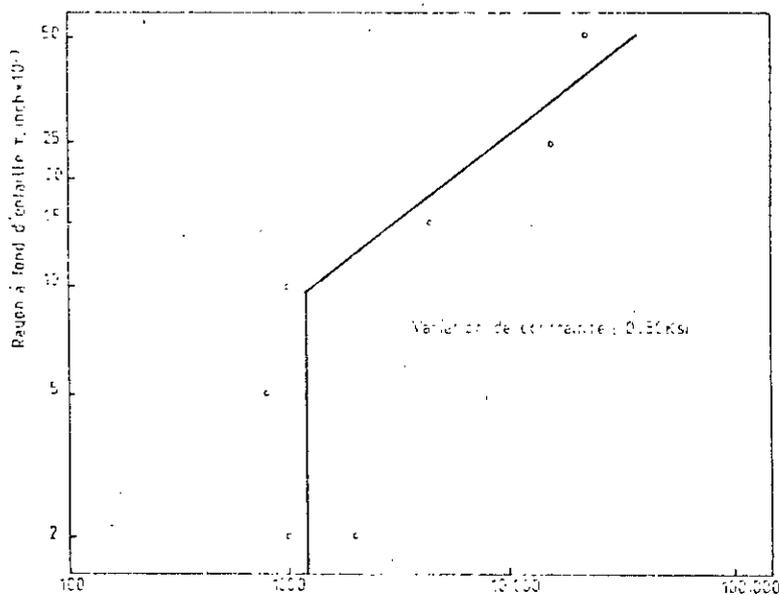


Fig.2.7 Evolution du rayon à fond d'entaille  $r$  en fonction du nombre de cycles d'amorçage

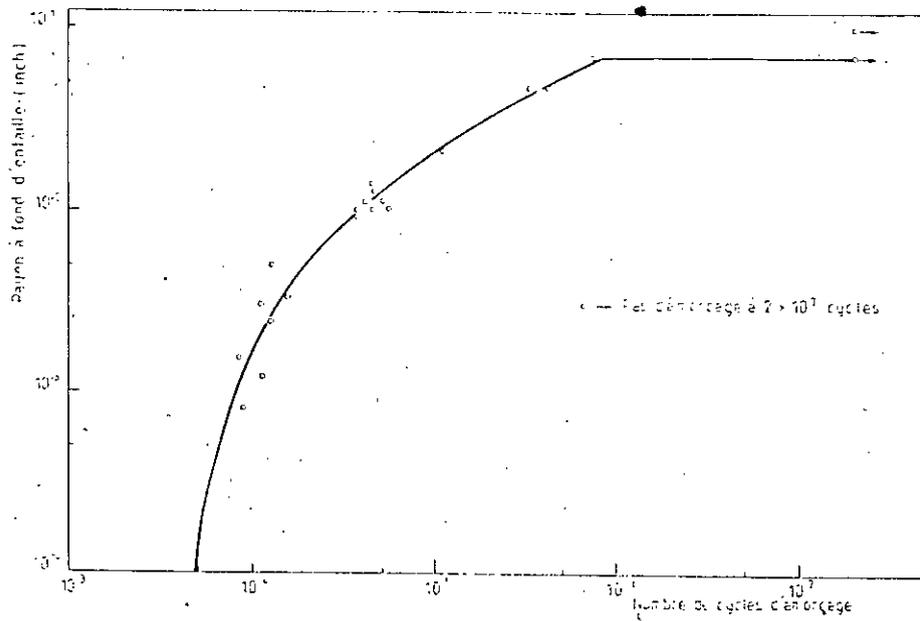


Fig.2.8 Evolution du rayon à fond d'entaille en fonction du nombre de cycles d'amorçage, pour une contrainte donnée.

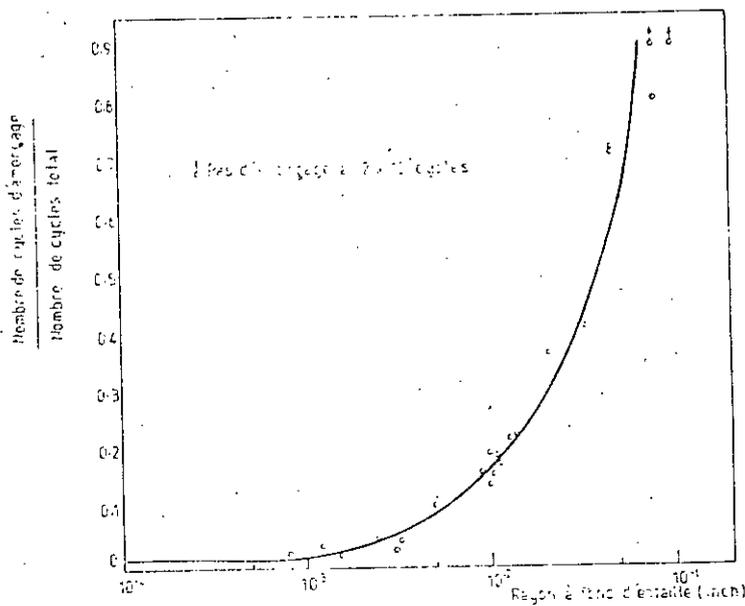


Fig.2.9 Influence du rayon à fond d'entaille sur la fraction du nombre de cycles d'amorçage au nombre de cycles total.

## II.3 - La propagation des fissures par fatigue

Si les mécanismes proposés à la fatigue commencent à être connus, l'influence de certaines paramètres sur la vitesse de fissuration est généralement mieux définie. Nous pouvons classer les paramètres qui agissent sur la fissuration en deux catégories:

- Les paramètres extrinsèques qui dépendent des conditions de l'essai, quelque soit le matériau étudié : température, fréquence, environnement, dimension de l'éprouvette, rapport de contrainte  $R$  etc...

- Les paramètres intrinsèques qui dépendent du matériau lui-même, Module d'Young, limite d'élasticité, propriétés cycliques et état métallurgique du matériau.

### II.3.1 - Modèles décrivant la propagation d'une fissure

Les modèles qui se proposent de décrire la propagation d'une fissure devraient tenir compte de tous les paramètres qui conditionnent cette propagation dans un matériau donné, mais un tel modèle n'existe actuellement pas. Aussi, la première tendance a été d'écrire des relations empiriques qui décrivent, le plus correctement possible, l'effet de certains paramètres sur la vitesse de propagation: ce sont les modèles phénoménologiques, dont le nombre s'est considérablement accru ces dernières années. Nous allons donc distinguer des grandes classes de modèles et expliquer succinctement quelques modèles à titre d'exemple.

### II.3.1.1 - Modèles phénoménologiques

En 1963, Paris et Erdogan [20] proposent une loi qui allait probablement être la plus utilisée en pratique. Les auteurs utilisent les notions de facteur d'intensité de contrainte  $K$ , développées par IRWIN. Le calcul de  $K$  n'est valable, en toute rigueur, que pour les matériaux fragiles, et en principe inapplicable à un matériau plastique. En pratique, tant que la plasticité reste faible, le calcul de  $K$  reste acceptable, Paris et Erdogan trouvent expérimentalement :

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad 2.15$$

$C, m$  des constantes qui dépendent du matériau.

Si cette relation permet de présenter simplement les résultats, elle ne précise l'influence des paramètres intrinsèques sur la propagation.

Elle ne décrit pas non plus le comportement de la fissure près de la rupture  $K_c$  ou du seuil de propagation  $\Delta K_{th}$ . Lorsque  $K_{max}$  devient supérieur à  $0,7 K_c$ , l'équation de Paris donne des valeurs de la vitesse trop faibles.

De même lorsque  $\Delta K$  tend vers  $\Delta K_{th}$ , l'équation de Paris surestime la vitesse de propagation.

Plusieurs auteurs ont donc tenté de modifier l'équation (2.15) pour tenir compte de ces conditions limites et intégrer des paramètres tels que le rapport  $R$  des contraintes ou  $K_{max}$ .

En tenant compte de  $R$ , Brock et Schyve [21] proposent une relation empirique:

$$\frac{da}{dN} = C_1 \left( \frac{\Delta K}{1 - R} \right)^3 \exp(-C_2 R) \quad 2.16$$

Où  $C_1, C_2$  sont des paramètres caractéristiques du matériaux pour  $R = 0$  cette relation se réduit à :

$$\frac{da}{dN} = C_1 (\Delta K)^3 \quad 2.17$$

Forman et Al [22] constatent que ces équations ne tiennent pas compte, de la rupture pour  $K=K_c$  et proposent donc une nouvelle relation:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^n}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad 2.18$$

Erdogan et Ratwani [23] constatent que la relation de Forman ne décrit pas le comportement de la fissure aux basses vitesses lorsque  $\Delta K$  tend vers  $\Delta K_{th}$ , proposent la relation :

$$\frac{da}{dN} = \frac{c(1+\beta)^\alpha (\Delta K - \Delta K_{th})^m}{K_c - (1+\beta)\Delta K} \quad 2.19$$

$$\text{avec } \beta = \frac{1 + R}{1 - R}$$

$c, m$  et  $\alpha$  des paramètres expérimentaux.

Sper [24] partant des mêmes remarques propose la relation :

$$\frac{da}{dN} = c \frac{(\Delta K - \Delta K_{th})^m}{(1 - R)K_c - \Delta K} \quad 2.20$$

Walker [25] propose pour une structure tridimensionnelle une relation empirique qui tient compte de  $R$  et  $K_{max}$ .

$$\frac{da}{dN} = C \left[ (1-R)^m K_{max} \right]^n \quad 2.21$$

## II.3.2 - Application des lois de fissuration

### II.3.2.1 - Les différents stades de la propagation en fatigue

II.3.2.1.1 - Stade I : correspondant au début de la fissuration, pour lequel la vitesse de propagation semble dépendre de la charge maximale. Toutes les études faites mettent en évidence une valeur minimale de  $\Delta K$  en dessous de laquelle il n'y a pas propagation de la fissure.

II.3.2.1.2 - Stade II : Correspond à la propagation stable gouvernée généralement par la loi de Paris.

II.3.2.1.3 - A partir d'un certain niveau du facteur d'intensité de contrainte la propagation devient très rapide, elle correspond au dernier stade qui se termine par la rupture brutale de la structure.

Ces trois stades sont précédés d'une zone de non-fissuration en dessous de  $\Delta K_0$  et d'une zone de propagation brutale au delà de  $K_c$ , qui ne relèvent plus de la fissuration progressive.

### II.3.2.2 - Domaines des fortes valeurs de $K$

Pour les fortes valeurs de  $K$ , approchant  $K_c$ , des effets particuliers apparaissent au cours de la fissuration.

Pour des éprouvettes peu épaisses, pour lesquelles la rupture finale tend à se produire en contrainte plane avec apparition de lèvres de cisaillement importantes, la fissure de fatigue se propage rapidement c.à.d que la vitesse de fissuration en fonction de  $K$  présente une accélération.

Cette transition a été observée par de nombreux auteurs [26] et certains d'entre eux ont constaté qu'elle était accompagnée d'une modification de la pente de la courbe :  $\frac{da}{dN} = f(\Delta K)$

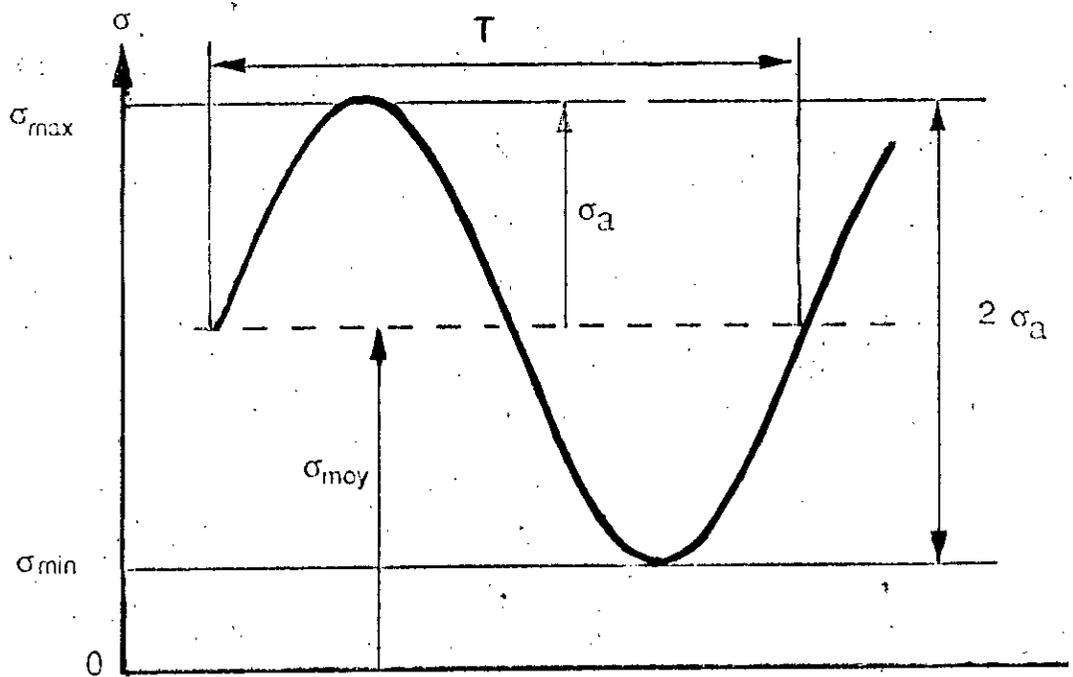


Fig.2.10 cycle de contrainte de fatigue

- T : cycle de contrainte (période) (s)
- $\sigma_{moy}$  : contrainte moyenne (MPa)
- $\sigma_{min}$  : contrainte minimale (MPa)
- $\sigma_{max}$  : contrainte maximale (MPa)
- $\sigma_a$  : amplitude de la contrainte (MPa)
- $2 \sigma_a$  : étendue de la variation de la contrainte (MPa).

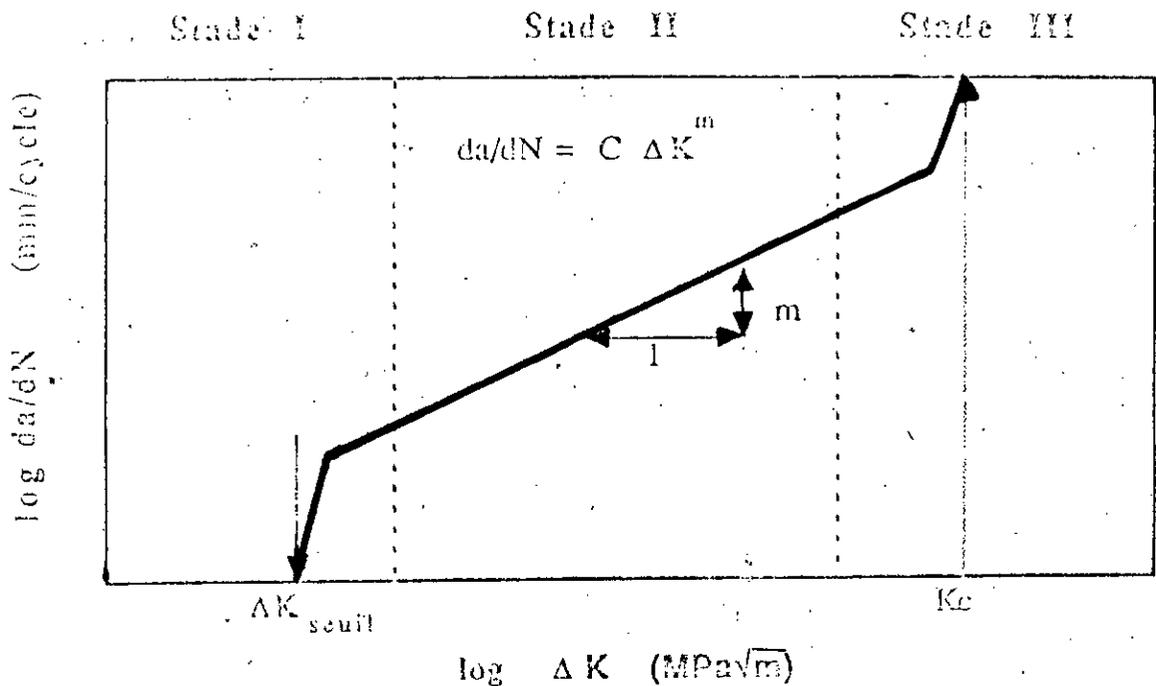


Fig.2.11 Représentation schématique de la vitesse de propagation d'une fissure en fonction du facteur d'intensité de contrainte

### II.3.2.3 - Domaines des valeurs intermédiaires de $\Delta K$

C'est le domaine d'élection de la mécanique de la rupture pour lequel les équations exprimant la vitesse de fissuration en fonction de  $\Delta K$ , de  $\Delta K$  et de  $R$  ou  $K_{max}$  et  $R$  sont en bon accord avec les résultats expérimentaux (fig.2.10 et 2.11)

### II.3.2.4- Domaine des faibles valeurs de $\Delta K$

Des essais effectués par Paris mettent en évidence l'existence d'un seuil de  $\Delta K$  en dessous duquel la vitesse de fissuration devient pratiquement nulle. Ce résultat montre que pour une longueur de fissure donnée il existe une valeur minimale de la contrainte cyclique en dessous de laquelle la fissure ne se propage pas. Il semble donc logique de relier cette contrainte à la limite de fatigue du matériau. Pour déterminer la valeur limite  $\Delta K_s$  on procède par charge décroissante.

La détermination de  $\Delta K_s$  est d'une grande importance pratique, puisque sa connaissance permet de déterminer la contrainte en dessous de laquelle il y a lieu de faire travailler une structure si l'on désire qu'une fissure de longueur donnée ne se propage pas en service.

### II.3.2.5- Nombre de cycles à rupture

$$N_t = N_a + N_p + N_r \quad 2.22$$

$N_t$  = Nombre de cycles totale

$N_a$  = Nombre de cycles nécessaires à l'amorçage.

$N_p$  = Nombre de cycles de propagation stable

$N_r$  = Nombre de cycles de rupture brutale.

Pour calculer  $N_a$ , on utilise la relation paramétrique de Jack et Price:

$$N_a = \frac{2,9 \cdot 10^8}{(\Delta K)^4}$$

Tandis que pour  $N_p$ , on utilise la loi de Walker

$$\frac{da}{dN} = C \left[ (1-R)^m K_{max} \right]^n \quad 2.23$$

$$N_p = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C \left[ (1-R)^m \cdot K_{max} \right]^n} \quad 2.24$$

$N_r$  est très petit comparé à  $N_a$  et  $N_p$ , il peut être estimé par la loi de Forman.

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K^n}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad 2.25$$

$$N_r = \int_{a_f}^{a_c} \frac{da}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad 2.26$$

#### II.4 - Conclusion

On constate que construire un modèle est chose peu aisée. Certains des phénomènes ne sont pas connus clairement, l'action des différents paramètres est parfois controversée. Beaucoup de modèles, théoriques ou empiriques, ne décrivent convenablement qu'une situation donnée et devient inadaptes dès qu'un paramètre de l'expérience varie. Donc il faut savoir le domaine de validité et d'emploi de chaque modèle.

## Chapitre III: PROBLEMES BIDIMENSIONNELS

### III.1 - Eléments sur l'analyse des milieux fissurés

L'analyse des contraintes et des déformations au voisinage des pointes au front de fissures constitue une base nécessaire pour étudier le comportement des fissures. Celui-ci est en effet gouverné par des transferts d'énergie de déformation en énergie de cohésion dans ces zones. Bien qu'une zone plastique, ou endommagée, soit toujours présente en pointe de fissure on verra que l'analyse élastique linéaire fournit une schématisation suffisamment correcte de la réalité.

#### III.1.1 - Fissures initiales

La mécanique de la rupture par fissuration suppose l'existence d'une fissure initiale dans la structure étudiée et un système de sollicitations extérieures.

La fissure initiale est soit une fissure créée par endommagement sous l'effet de cette sollicitation, soit un défaut créé lors de l'élaboration du matériau ou lors de sa mise en forme. Dans le premier cas, elle progressera par continuité du mécanisme d'endommagement, sans transition. Dans le second cas, il n'y a pas de relation entre l'orientation de la fissure et le système de chargement. Sa progression met en jeu un phénomène d'amorçage d'une nouvelle direction qui constitue une phase transitoire, on la qualifie de fissure incompatible.

Pour savoir s'il y a lieu ou non d'étudier cette phase dans un problème donné on appliquera la définition suivante : un système de chargement est compatible avec une fissure de configuration de front de fissure  $\Gamma (X_1, X_2, X_3)$  si l'accroissement de fissure  $\delta\Gamma$  qui résulte du chargement s'opère sans bifurcation au sens des trois critères de rupture,  $\Gamma(X_1, X_2, X_3)$  étant l'équation de la ligne de front de fissure dans un repère orthonormé  $(X_1, X_2, X_3)$ . Des exemples sont donnés ci-dessous (Fig.3.1).

### III.2 Analyse élastique

En mécanique de la rupture, le problème de base est l'analyse du champ des contraintes dans les milieux fissurés plans, élastiques linéaires.

#### III.2.1 - Modes de sollicitation

Considérons une fissure dans un milieu plan, selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissure, on distingue trois cinématiques remarquables du déplacement relatif des lèvres de la fissure, elles sont indiquées sur la figure 3.2 dans le repère  $(X_1, X_2, X_3)$

- Mode I : ou mode d'ouverture, le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par la discontinuité :

$$[u_1] = 0, [u_2(x)] = a, [u_3] = 0$$

- Mode II : ou mode de cisaillement plan :

$$[u_1(x_1)] = 0, [u_2] = 0, [u_3] = 0$$

- Mode III : ou mode de cisaillement antiplan :

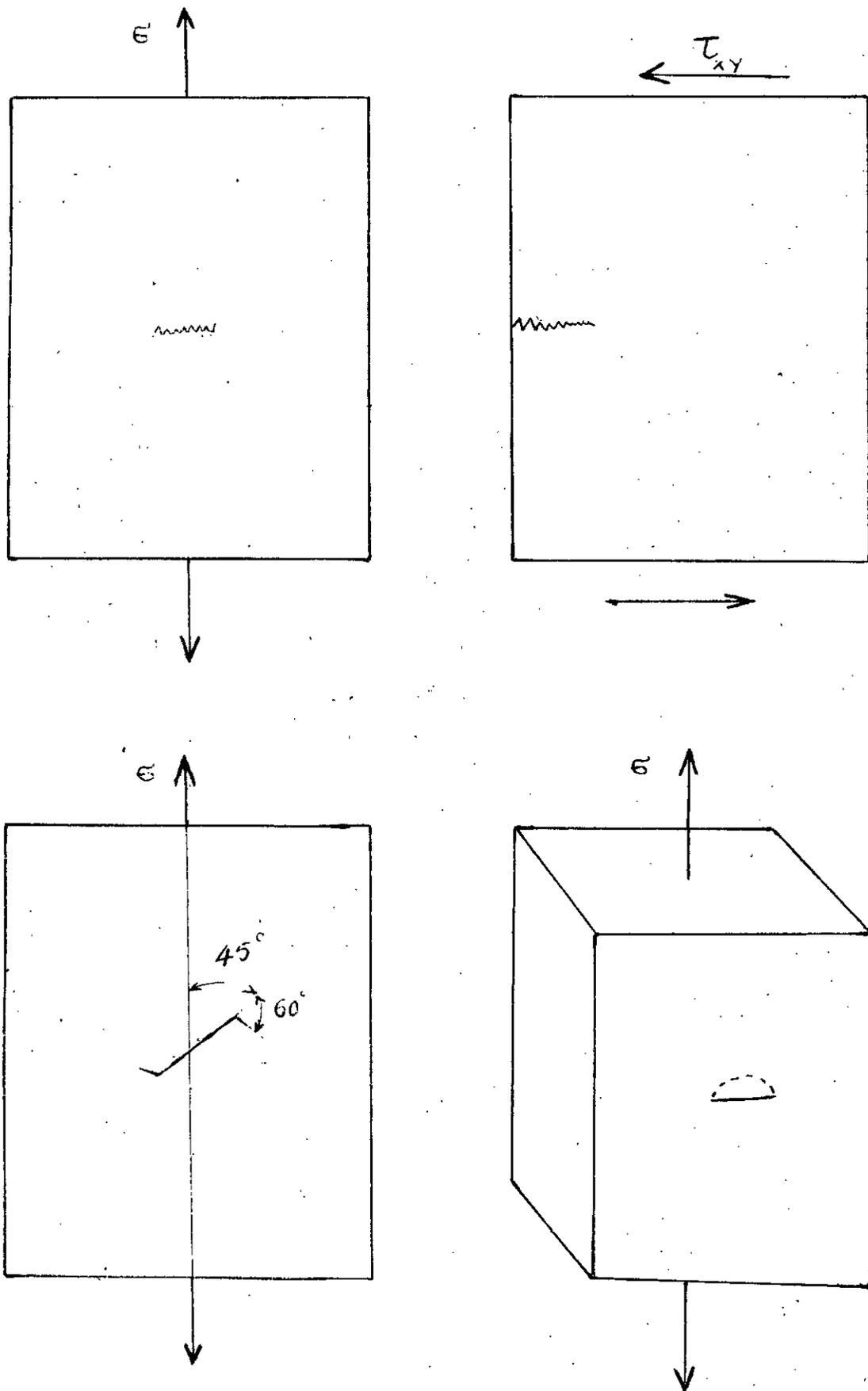


Fig.3.1 Exemples de sollicitation et fissures compatibles.

### III.2.2 - Solution asymptotique de Westergaard

Traisons par exemple le problème du milieu plan fini peu épais, avec un champ de contrainte  $\sigma_{ij} = 0$  sauf  $\sigma_{22} = \sigma_{22}$  sollicitant la fissure en mode I (figure 3.3).

Le problème de l'élasticité plane à résoudre se pose ainsi :

$$\text{Contraintes : } [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad 3.1$$

$$\text{Déformation : } [\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{du_1}{dx_2} + \frac{du_2}{dx_1} \right) & \epsilon_{13} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{du_1}{dx_2} + \frac{du_2}{dx_1} \right) & \frac{du_2}{dx_2} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad 3.2$$

Loi du comportement d'élasticité linéaire:

$$[\epsilon] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \gamma \sigma_{22} & (1 + \gamma) \sigma_{12} & 0 \\ (1 + \gamma) \sigma_{12} & \sigma_{22} - \gamma \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{bmatrix} \quad 3.3$$

La solution du problème asymptotique au voisinage de la pointe de la fissure s'obtient par la fonction d'Airy de la variable complexe :  $Z = x_1 + ix_2$

$$x = \text{Re}(\bar{z}) + x_2 \text{Im}(\bar{z}) \quad 3.4$$

$$\text{avec } \frac{d\bar{z}}{dz} = \bar{z}, \quad \frac{d\bar{z}}{dz} = z, \quad \frac{dz}{dz} = z' \text{ et } z = \frac{K_I (\sigma_{22}, a)}{\sqrt{\frac{\pi}{a} (z^2 - a^2)}}$$

où  $K_I$  est un paramètre scalaire indépendant du point et qui ne varie qu'avec la sollicitation  $\sigma_{22}$  et la demi-longueur de la fissure  $a$ .

Les équations d'équilibre sont automatiquement satisfaites et les conditions de Cauchy-Riemann permettant d'effectuer le calcul des contraintes :

$$\sigma_{11} = \frac{d^2 x}{dx_2^2} = \operatorname{Re} Z - x_2 \operatorname{Im} Z' \quad 3.5a$$

$$\sigma_{22} = \frac{d^2 x}{dx_1^2} = \operatorname{Re} Z - x_2 \operatorname{Im} Z' \quad 3.5b$$

$$\sigma_{12} = -\frac{d^2 x}{dx_1 dx_2} = -x_2 \operatorname{Re} Z' \quad 3.5c$$

avec le changement de variable  $Z - a = r \exp(i\theta)$  qui permet de repérer les contraintes en coordonnées polaires, l'origine étant prise à la pointe de la fissure (fig.3.3) et en considérant l'approximation  $r/a \ll 1$ , on obtient l'expression de la fonction  $Z$ , valable lorsque  $r$  tend vers zéro (et pour le mode I).

$$Z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (\cos \theta/2 - i \sin \theta/2) \quad 3.6$$

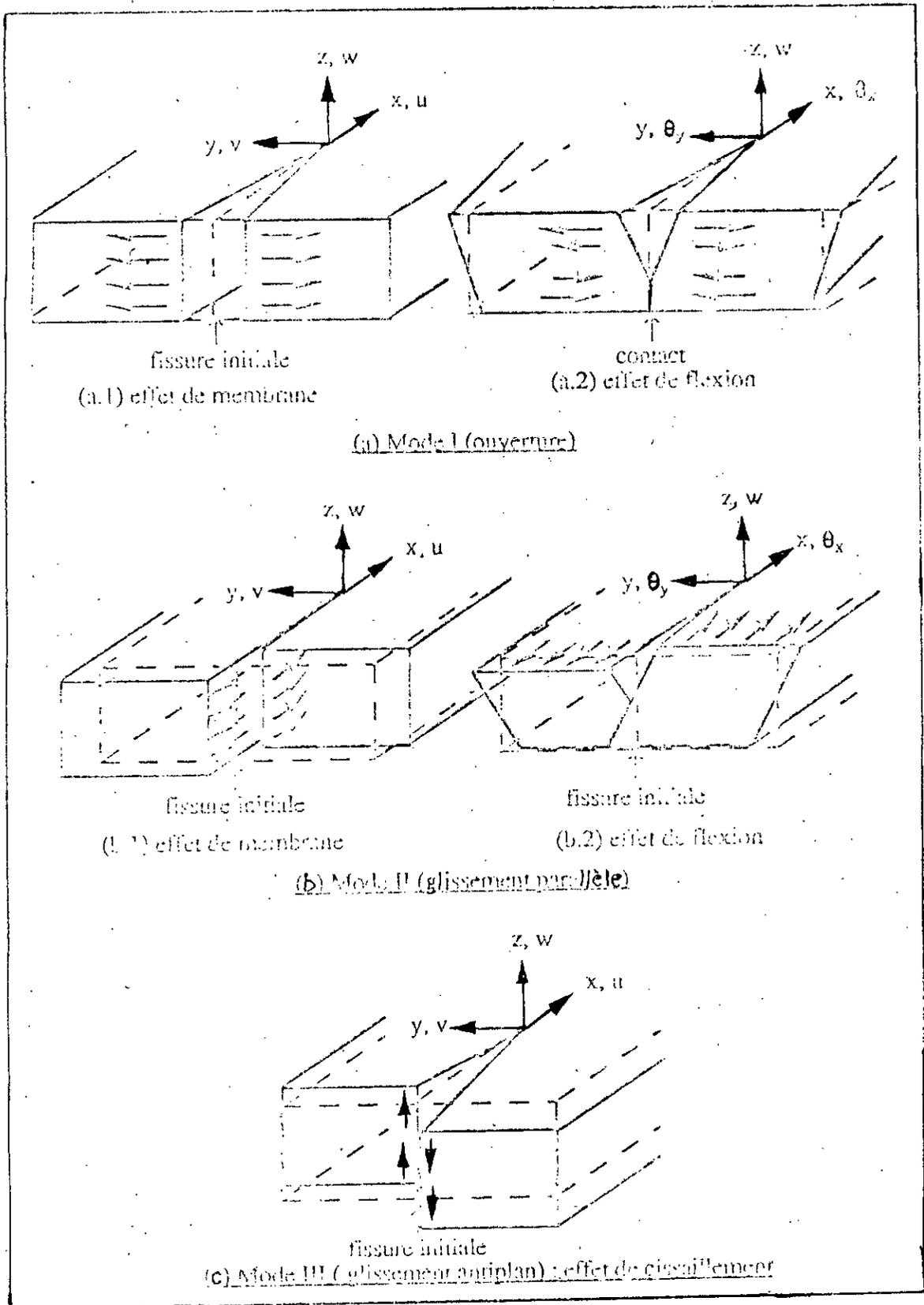


Fig. 3.2 Modes de sollicitation d'une fissure.

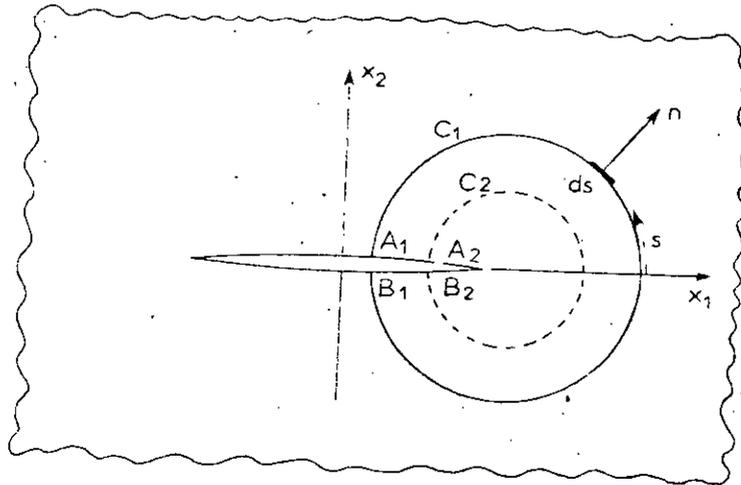
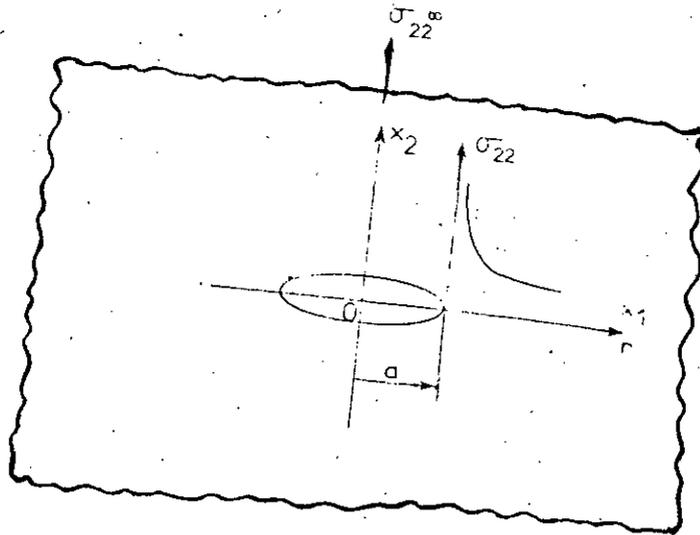


Fig.3.3 Fissure sollicitée en mode I.

Les contraintes et déplacements au voisinage de la pointe de la fissure s'en déduisent par :

$$[\sigma] = \frac{K_I (\sigma_{22,a})}{\sqrt{2\pi r}} \times \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta & \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta) \end{bmatrix} \quad 3.7$$

$$u_1 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta) \quad 3.7a$$

$$u_2 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta) \quad 3.7b$$

Le déplacement d'ouverture de fissure  $[u_2]$  est définies en contraintes planes par :

$$[u_2] = u_2(r, \pi) - u_2(r, -\pi) = \frac{8K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad 3.8$$

Ce qui montre qu'à la pointe de la fissure, les contraintes sont singulières en  $r^{-1/2}$  et que le déplacement d'ouverture tend vers 0 comme  $r^{1/2}$ .

Le même problème traité avec l'hypothèse des déformations planes donne les mêmes expressions pour les contraintes avec :

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \neq 0$$

Mais un champ de déplacement différent :

$$u_1 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) \quad 3.9a$$

$$u_2 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) \quad 3.9b$$

et une ouverture de fissure exprimée par :

$$|u_2| = \frac{8K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 - \nu^2) \quad 3.9c$$

Mode II:

- contraintes et déplacements dans l'hypothèse des contraintes planes ou des déformations planes:

$$[\sigma] = \frac{K_{II}(\sigma_{12}, a)}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad 3.10$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} (C_1 + 2 + \cos \theta) \quad 3.10a$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} (C_1 - 2 + \cos \theta) \quad 3.10b$$

avec  $C_1 = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  en contraintes planes,

$C_1 = 3 - 4\nu$  en déformations planes.

Le déplacement de cisaillement plan des lèvres de la fissure est évalué par:

$$[u_1] = u_1(r, \pi) - u_1(r, -\pi) \quad 3.11a$$

$$\text{en contraintes planes: } [u_1] = \frac{8K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad 3.11b$$

$$\text{en déformations planes: } [u_1] = \frac{8(1 - \nu^2)K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad 3.11c$$

Mode III :

contraintes antiplanes :

$$|\sigma| = \frac{K_{III}(\sigma_{13}, a)}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad 3.12a$$

Déplacements antiplans :

$$u_1 = u_2 = 0 \quad 3.12b$$

$$u_3 = \frac{4(1+\nu)}{E} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad 3.12c$$

Déplacement antiplan de cisaillement des lèvres de la fissure:

$$|u_3| = u_3(r, \pi) - u_3(r, -\pi)$$

$$|u_3| = \frac{8(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad 3.13$$

### III.2.3 - Solution exacte de Muskhelishvili

Si le milieu est infini dans les deux directions, on connaît la solution exacte pour le mode I de sollicitation.

Elle s'obtient par superposition des solutions du problème trivial du milieu sans fissure et du problème à contrainte nulle à l'infini est égale à  $-\sigma_{22}$  sur la ligne de fissure  $-a < x_1 < a$ .

Cette solution est analytique pour  $x_2 = 0$ . Dans le cas des contraintes planes, elle est la suivante :

Pour  $x_1 \geq a$  :

$$\sigma_{22}(x_2 = 0) = \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_1}\right)^2}} \quad 3.14a$$

$$\sigma_{11}(x_2=0) = \sigma_{22} - \sigma_{22} \quad 3.14b$$

$$\epsilon_{22}(x_2=0) = \frac{\sigma_{22}}{E} \left[ \frac{1 - \nu}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_1}\right)^2}} + \nu \right] \quad 3.14c$$

Si dans l'expression de  $\sigma_{22}$ , on fait le changement de variable:

$$x_1 = a + r$$

on trouve :

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\frac{r^2 + 2ar}{(a+r)^2}}} = \sigma_{22} \frac{a+r}{\sqrt{r(2a+r)}} \quad 3.15$$

Où pour  $r$  petit devant  $a$  :  $\sigma_{22} \longrightarrow \sigma \sqrt{\frac{a}{r}}$

Ce qui montre que la composante  $\sigma_{22}(x_2 = 0)$  est bien singulière en  $r^{-1/2}$  à la pointe de la fissure  $r = 0$  (ou  $x_1 = a$ ) on retrouve la solution approchée de Westergaard en posant  $K_I = \sigma_{22} \sqrt{\pi a}$ .

Cette expression est celle du facteur  $K_I$  correspondant à une plaque de grande dimension contenant une fissure centrale de longueur  $2a$  (petite), perpendiculaire à la direction de traction contrairement à la solution approchée, la solution ci-dessus conduit à une contrainte au loin qui est égale à la contrainte appliquée.

Par ailleurs, l'expression du déplacement d'ouverture de fissure montre que la forme de la fissure sollicitée est une ellipse (fig.3.3).

### III.2.5 - Solutions analytiques

Un certain nombre de problèmes d'élasticité correspondant à des cas types de solides fissurés ont été résolus, soit exactement, soit d'une manière approchée par des méthodes basées sur des fonctions analytiques particulières ou sur la représentation conforme [8].

Les facteurs d'intensité des contraintes définis par la singularité du champ de contrainte sont donnés ci-dessous [5] pour quelques cas particuliers :

1) Fissure dans un milieu infini

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \alpha$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \cos \alpha \sin \alpha$$

2) Fissure latérale dans un milieu semi-infini :

$$K_I = 1,122 \sigma \sqrt{\pi a}$$

3) Fissure centrale dans une plaque finie :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[ 1 - 0,025 \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 0,06 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right] \left[ \cos \frac{\pi a}{2b} \right]^{-1/2}$$

4) Fissure latérale dans une plaque finie :

$$K_I \approx \sqrt{\pi a} \left( \frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b} \right) \left\{ 0,752 + 2,02 \frac{a}{b} + 0,37 \left( 1 - \sin \frac{\pi a}{2b} \right)^3 \right\} / \cos \frac{\pi a}{2b}$$

5) plaque fissurée sur les deux bords :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[ 1 + 0,122 \cos^4 \left( \frac{\pi a}{2b} \right) \right] \left[ \frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b} \right]$$

6) Poutre fissurée en flexion pure :

$$K_I = \sigma_M \sqrt{\pi a} \left[ 1,122 - 1,4 \frac{a}{b} + 7,33 \frac{a^2}{b^2} - 13,08 \frac{a^3}{b^3} + 14 \frac{a^4}{b^4} \right]$$

7) Poutre fissurée en flexion 3 points :

$$K_I = \sigma \sqrt{a} \left[ A_0 + A_1 \left( \frac{a}{b} \right) + A_2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 + A_3 \left( \frac{a}{b} \right)^3 + A_4 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right]$$

$$\sigma = \frac{3PL}{2b^2 e} = \frac{6M}{b^2 e}$$

Coefficients	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
Flex 3Pts L/b = 4	1,93	- 3,07	14,53	-25,11	25,80
Flex 3Pts L/b = 8	1,95	- 2,75	13,60	-23,98	25,22
Flexion 4 Pts	1,99	- 2,47	12,97	-23,17	24,80

8) Eprouvette CT 15:

$$K_I = \frac{P \sqrt{a}}{be} \left[ 129,6 - 185,5 \frac{a}{b} + 655,7 \frac{a^2}{b^2} - 1017 \frac{a^3}{b^3} + 638,9 \frac{a^4}{b^4} \right]$$

9) Fissure semi-elliptique dans une coque :

$$K_I(M) \approx 0,5 (1,2 \pi a)^{1/2} \sigma \left[ 2 + \frac{0,731 e}{R(1-\nu)^2} \left( \frac{b}{a} \right)^{0,043} \left( \frac{e}{a} \right)^{0,047} \right]$$

10) Fissure elliptique dans un milieu infini:

$$K_I(\theta) = \frac{\sigma}{E(h)} \sqrt{\frac{b}{a}} \left[ a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta \right]^{1/4}$$

$$E(h) = \int_0^{\pi/2} [1 - h^2 \sin^2 \theta]^{1/2} d\theta$$

$$h = [1 - \sqrt{b/a}]^{1/2}$$

11) Fissure émanant d'un trou :

$$K_I = f\left(\frac{a}{R}\right) \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$f\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{F_1}{F_2 + a/R} + F_3$$

un seul bout de fissure

$$F_1 = 0,8733$$

$$F_2 = 0,3245$$

$$F_3 = 0,6762$$

deux bouts de fissure

$$F_1 = 0,6865$$

$$F_2 = 0,2772$$

$$F_3 = 0,9439$$

12) Fissure dans une entaille:

$$K_I = 1,1215 \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{1 + \frac{c}{a}}$$

### III.3 - Variables de fissuration

Trois variables sont couramment utilisées pour caractériser le comportement à la fissuration des matériaux. Elles sont équivalentes pour le cas simple du milieu bidimensionnel élastique linéaire fragile en chargement simple mais permettent des degrés de généralisation plus au moins grands pour le cas plus complexe.

Ces trois variables sont: le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ , le taux de restitution d'énergie  $G$  et l'intégrale de Rice  $J$ .

Dans le cas de la progression par fatigue, la loi de fissuration exprime l'accroissement de la longueur ou de la surface de fissure par cycle  $\delta A / \delta N$  en fonction de ces variables

$$\frac{\delta A}{\delta N} = f(K_I \text{ ou } G \text{ ou } J) \quad 3.16$$

$K_I$ ,  $J$  ou  $G$  dépendent de la longueur  $a$  ou de la surface  $A$  de

fissure et des sollicitations éventuellement variables avec le nombre de cycles  $N$ .

### III.3.1 - Facteur d'intensité des contraintes

Les fonctions  $K_I(\sigma_{22}, a)$ ,  $K_{II}(\sigma_{12}, a)$ ,  $K_{III}(\sigma_{13}, a)$  introduites dans l'expression de la fonction d'Airy de Westergaard caractérisent finalement l'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe de la fissure et sont proportionnelles à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure, on les appelle facteurs d'intensité des contraintes respectivement en mode I, mode II et mode III.

Si l'on connaît leurs valeurs, ils permettent de déterminer complètement les champs de contraintes ou de déplacement dans la structure fissurée considérée comme élastique.

Inversement, si l'on connaît les expressions des composantes non nulles des contraintes et des déplacements, on peut déterminer les facteurs d'intensité des contraintes par les expressions suivantes qui constituent leurs définitions pour les milieux fissurés plans :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8c_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} |u_2| \right) \quad 3.17a$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8c_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} |u_1| \right) \quad 3.17b$$

avec  $c_2 = 1$  en contraintes planes

$c_2 = 1 - \nu^2$  en déformations planes

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} |u_3| \right) \quad 3.17c$$

Si par exemple on applique la définition de  $K_I$  à la solution de Muskhlishvili relative au milieu plan infini sollicité en mode I on retrouve :

$$K_I = \sigma_{22} \sqrt{\pi a} \quad 3.18a$$

De la même façon pour un milieu plan infini sollicité en mode II, on trouve :

$$K_{II} = \sigma_{12} \sqrt{\pi a} \quad 3.18b$$

L'unité des facteurs d'intensité des contraintes est le  $N m^{-3/2}$  ou le  $Mpa m^{1/2}$ .

### III.3.1.2 - Méthode de la détermination des facteurs d'intensité

Nous examinerons principalement trois groupes de méthodes:

III.3.1.2.1 - Méthode semi-analytique: Il s'agit de méthodes utilisant les fonctions analytiques combinées avec la résolution numérique, cette technique a été utilisée pour résoudre la plupart des problèmes posés.

III.3.1.2.2 - Méthodes Numériques basées sur l'utilisation de la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales.

III.3.1.2.3 - Méthodes analogiques ou expérimentales permettant parfois d'accéder directement au facteur d'intensité sur une structure réelle.

### III.3.1.2.1.1 - Fonctions Analytiques

III.3.1.2.1.1.1 - Méthodes basées sur les fonctions analytiques particulières:

$$\Phi(Z) = Z^{1/2} \cdot F(Z) \quad 3.19a$$

$$\Psi(Z) = Z^{1/2} \cdot \overline{F(Z)} - Z\Phi'(Z) \quad 3.19b$$

Où  $Z^{1/2}$  : fonction réelle

sous réserve que  $F(Z)$  et  $\overline{F(Z)}$  soient toutes deux analytiques et régulières dans le domaine étudié  $\Omega$ , et continues à la traversée de la fissure.

$$F(Z) = \sum \left\{ a_n Z^n + b_n (Z - C_n)^{-n} \right\} \quad 3.20$$

Le facteur d'intensité complexe est:

$$K_I(0) - iK_{II}(0) = (2\pi)^{1/2} F(0) \quad 3.21$$

Détermination de F:

$$F(s) = i \int_0^s (T_1 + iT_2) ds \quad 3.22$$

$$F(s) = H(Z)$$

$$H(Z) = \Phi(Z) + Z\Phi'(Z) + \Psi(Z) \quad 3.23$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \int |\dot{H}(s) - F(s)|^2 ds = 0 \quad 3.24$$

III.3.1.2.1.1.2 - Méthode basée sur la représentation conforme utilisation de la transformation conforme:  $Z = \omega(\tau)$  tel que  $\omega' \neq 0$  dans l'image  $\Omega_\tau$ .

$|\tau|=1$  cercle de rayon unité

On a une singularité sur le cercle  $acb$ , elle est du type

$$\begin{aligned}\omega'(\tau) &= (\tau-c)^{\alpha-1} & 3.25 \\ \omega(\tau_0) &= 0 \quad \text{et} \quad \omega'(\tau_0) = 0\end{aligned}$$

On a au voisinage de  $\tau_0$ :

$$\omega(\tau) = (\tau - \tau_0)^2$$

et enfin, (après une série de transformation) on aura:

$$K_{I} - iK_{II} = 2\sqrt{\pi} \left[ \omega''(\tau_0) \right] \Phi'(\tau_0) \quad 3.26$$

#### III.3.1.2.2 - Méthode des éléments finis

Pour la mécanique de la rupture, la méthode des éléments finis est devenue un outil très efficace du calcul des facteurs d'intensité de contrainte. L'application directe de la méthode des éléments finis en utilisant l'élément classique converge très lentement à cause de la mauvaise représentation de la singularité au voisinage du front de fissure. Pour obtenir un résultat suffisamment précis; il est donc nécessaire de faire un maillage très fin au voisinage de la fissure; ce qui rend la méthode très coûteuse. des techniques plus efficaces ont été proposées:

L'utilisation d'éléments spéciaux tenant compte de la forme propre de singularité dans la région fixée au voisinage du front de fissure, par contre on utilise les éléments classiques pour le reste de la structure.

L'utilisation de la méthode énergétique basée sur le calcul du taux d'énergie élastique libéré  $G$ , ou l'invariant intégral.

L'utilisation de la méthode d'éléments frontières.

Chaque méthode présente des avantages et des inconvénients quelque soient les caractéristiques des problèmes. Cependant nous nous limitons aux éléments spéciaux permettant de décrire les champs singuliers au moyen des expressions asymptotiques des contraintes et déplacements, dépendant des facteurs d'intensité de contrainte.

Nous distinguons deux classes d'éléments spéciaux, suivant que le choix de la formulation des éléments finis: méthode de déplacement ou méthode hybride [27].

#### III.3.1.2.2.1 Eléments spéciaux par la méthode de déplacement

Nous pouvons classer ces méthodes en trois catégories. Dans la première, la forme connue du déplacement est utilisée pour modéliser la singularité de déformation au front de fissure. Benzley [28] a présenté un élément spécial de déplacement dans lequel il introduit le terme supplémentaire de la solution analytique de déplacement pour définir les fonctions d'interpolation du champ de déplacement. Afin d'assurer la compatibilité de déplacement, cette fonction a une forme appropriée dans une zone tampon entourant le voisinage de la singularité. Fochi et Barret [29], Heppler et Hansen [30] ont étendu cette méthode dans les matériaux anisotrope, et Hilton [31] dans les problèmes tridimensionnels. Cette méthode introduit les facteurs d'intensité de contrainte comme des variables inconnues définies en des noeuds non géométriques, cela conduit à une augmentation de la largeur de bande de la matrice de rigidité.

Dans la seconde catégorie, la singularité peut être modélisée en utilisant des fonctions de forme spéciales en déplacement.

Blackburn [32] a proposé l'élément spécial conforme avec une distribution radiale en racine carrée de  $r$  près de la pointe de la fissure. Cette technique a été généralisée aux problèmes tridimensionnels par Blackburn et Hellen [33]. Akin [34] a présenté une méthode qui permet de convertir n'importe quel élément standard en un élément conforme portant une singularité et ceci en 2D et 3D.

La troisième méthode remarquable est l'utilisation de la technique du déterminant de la matrice jacobienne de l'élément isoparamétrique. Henshell et Shaw [35] et Barsoum [36] ont montré indépendamment que la singularité de déformation peut être obtenue par positionnement de noeuds d'interface au quart du côté de l'élément. Barsoum a étendu cette méthode aux plaques fissurées en flexion [37]. Ingraffea et Manu [38] ont développé quelques formules qui donnent directement le facteur d'intensité de contrainte en fonction des déplacements nodaux. de Saxé et Nguyen Dang Hung [39] ont proposé des formules améliorées qui satisfont les modes rigides dans le cas des problèmes tridimensionnels.

#### III.3.1.2.2.2 - Eléments spéciaux par la méthode d'hybride

Le modèle hybride en se basant sur deux champs indépendants est bien adapté au développement d'un élément spécial pour la mécanique de la rupture. Pian, Pin Ton et Lasry [40] ont introduit le concept de super-élément par la combinaison de la technique de variable complexe avec les éléments hybrides de contrainte. En utilisant une intégration par partie, ils ont obtenu la forme intégrale de contour de la fonctionnelle et considéré les tractions et les déplacements de frontière en tenant compte du

comportement singulier. Pin Ton [41] et Lin et pin Ton [42] ont appliqué ce concept aux matériaux anisotrope et composites en utilisant la technique de développement spectrale. Mandell et Al [43] ont utilisé l'élément singulier pour une tôle mince fissurée avec matériau anisotrope. Rhee et Atluri [44] l'ont étendu au calcul des facteurs d'intensité de moment d'une plaque fissurée en flexion. En se basant sur l'hypothèse de Kirchhoff et sur des principes d'adaptation, Chen et Chen [45] ont proposé un élément singulier par le modèle hybride de déplacement pour résoudre les problèmes de flexion de tôles minces fissurées soumises à des charges statiques et dynamiques. Chi-Hang Kang [27] a proposé une famille d'éléments hybrides singuliers appelés éléments métis pour l'étude des plaques fissurées en traction et en flexion pour les problèmes bidimensionnels et tridimensionnels.

Comme le critère de rupture s'exprime par le fait que  $K_I = K_{Ic}$ , il est obligatoire de pouvoir calculer l'évolution des facteurs d'intensité de contraintes en fonction de la sollicitation et en fonction du front de fissure. La solution qui consiste à effectuer des discrétisations très fines en pointe de fissure puis à calculer  $K_I, K_{II}, K_{III}$  par un passage élastique, à la limite n'est pas à retenir, car elle est très couteuse et trop incertaine comme on l'a cité ci-dessus.

Pour déterminer le champ des contraintes et des déformations qui existent au voisinage immédiat d'une pointe de fissure, la solution consiste à travailler avec des mailles qui comportent en elle-même la singularité en  $r^{-1/2}$ . On montre d'une façon rigoureuse qu'elle est obtenue lorsque, pour des mailles à 6 ou 8 noeuds [46], deux noeuds sont placés à une distance de la pointe

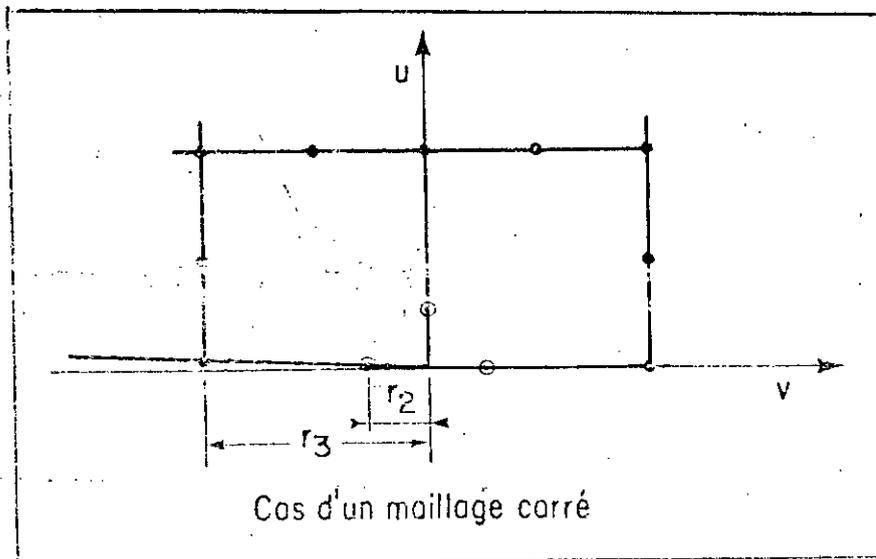
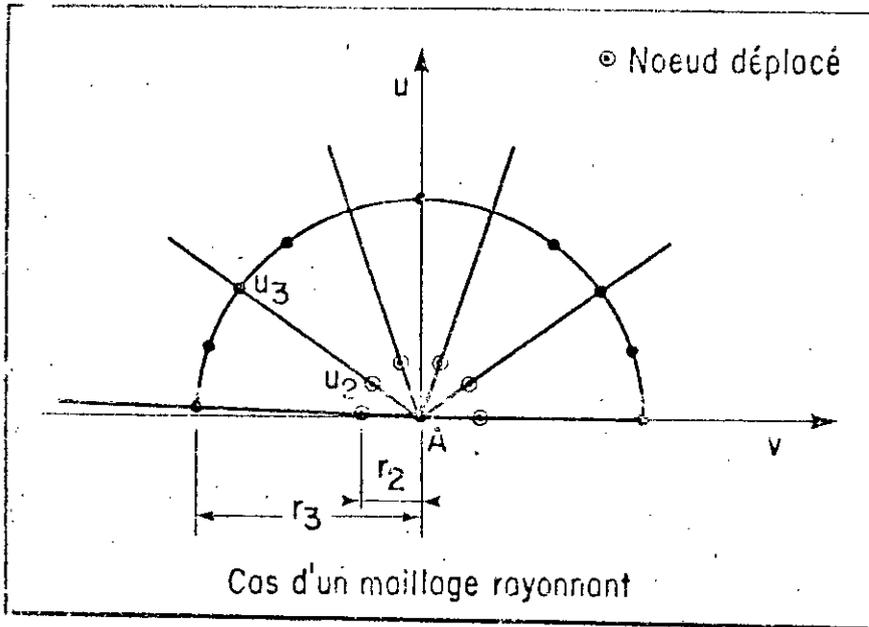


Fig.3.4 Maille singulière à la pointe d'une fissure pour un cas bidimensionnel.

de fissure égale au quart de la longueur de la maille (fig.3.4). Par exemple, dans ce cas, le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  peut se mettre sous la forme:

$$K_I = \frac{E}{(1+\nu)\cos\theta/2(1-2\nu+\sin^2\theta/2)} \frac{\sqrt{\pi}}{2r_3} (-3u_1 + 4u_2 - u_3) \quad 3.27$$

Il ne s'exprime donc qu'en fonction des déplacements des noeuds situés directement derrière la fissure. La rigueur et la simplicité de cette méthode qui s'applique également au modes II et III en font un outil important pour déterminer dans le cas de l'élasticité: soit les contraintes et les déformations au voisinage d'une pointe de fissure, soit les facteurs d'intensité de contraintes.

Fonction Déplacement linéaire :

$$U_i = a_{ij} x_j + b_i \quad 3.28$$

le potentiel P est donné par :

$$P = 1/2 K_{\alpha\beta} V_{\alpha} V_{\beta} - R_{\alpha} V_{\alpha} \quad 3.29$$

On déduit le système linéaire suivant partant du principe variationnel:

$$K_{\alpha\beta} V_{\beta} - R_{\alpha} = 0 \quad 3.30$$

Les conditions aux limites sont définies par:

$$V_{\gamma} = v_{\gamma}^d \quad \gamma = 1 \dots 2P \quad (P \text{ nombre de Noeuds}) \quad 3.31$$

### III.3.1.2.2.3 - Méthode de l'ouverture de fissure

Cette méthode repose sur le développement asymptotique. On calcule la discontinuité normale  $[U_2]$  et on porte sur un graphique le carré de la discontinuité obtenue en fonction de la distance  $r$  des noeuds à la pointe de la fissure. La pente d'une droite moyenne qui passe par les points obtenus est proportionnelle à  $K_I^2$ . On peut procéder de la même manière avec la discontinuité tangentielle et obtenir  $K_{II}$ .

### III.3.1.2.2.4 - Méthode de raccordement

On utilise des éléments finis spéciaux permettant de décrire les champs singuliers.

L'énergie potentielle comprend deux termes :

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = 1/2 K_{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta - R_\alpha V_\alpha$$

$$V_\gamma = V_\gamma^d \quad \gamma = 1, 2, \dots, 2P$$

On ajoute les deux équations :

$$\frac{\lambda P}{\lambda K_I} = 0 \quad 3.32$$

$$\frac{\lambda P}{\lambda K_{II}} = 0 \quad 3.33$$

## III.3.2 - Calcul de G : Taux de restitution d'énergie

### III.3.2.1 - Théorie de GRIFFITH

Griffith a abordé le problème de la rupture des corps fissurés d'un point de vue énergétique.

Lorsque la propagation a lieu la géométrie de la fissure change.

La conservation de l'énergie totale s'écrit:

$$dW_{tot} = dW_{elas} + dW_{ext} + dW_s + dW_{cin} = 0 \quad 3.34$$

où:  $dW_{elas}$ : Variation de l'énergie élastique

$dW_{ext}$ : Variation d'énergie potentielle des forces extérieures ou travail de ces forces (données) changé de signe.

$dW_s$ : Energie dissipée dans la séparation ou  $2\gamma ds$

$dW_{cin}$ : Variation d'énergie cinétique.

La fissure se propagera de façon instable si l'énergie cinétique augmente  $dW_{cin} > 0$  soit:

$$\frac{\partial}{\partial s} ( W_{elas} + W_{ext} ) + 2\gamma < 0 \quad 3.35$$

On pose la définition du paramètre G

$$G = - \frac{\partial}{\partial s} ( W_{elas} + W_{ext} ) \quad 3.36$$

on l'appelle taux de restitution d'énergie.

On peut exprimer le taux de restitution d'énergie G autrement:

Le critère de propagation de Griffith se traduit par:  $G > 2\gamma$

L'initiation de la fissure (propagation) est possible lorsque  $G=2\gamma$

si: les sollicitations extérieures sont telles que à tout moment on a l'égalité:

$$G=2\gamma \quad 3.37$$

alors il n'y a pas d'accroissement d'énergie cinétique. On dit que la rupture est contrôlée, dans ce cas c'est une croissance stable de la fissure.

### III.3.2.2 - Diverses expressions de G

Nous supposons dans ce qui suit l'élasticité linéaire et le problème plan.

$$G = -\frac{d}{dl} \int_{\Omega} W(\epsilon_{ij}) dw + \int_{s_T} T_i^d \frac{du_i}{dl} ds = -\frac{d}{dl} \int_{\Omega} W(\epsilon_{ij}) dw + \int_{s_T} T_i \frac{du_i}{dl} ds$$

$s_T$  : surface extérieure

Par application du théorème des travaux virtuels on aura :

$$\frac{d}{dl} \int_{\Omega} 1/2 \delta_{ij} \epsilon_{ij} dw = 1/2 \int_{d\Omega} ( T_i \frac{du_i}{dl} + U_i \frac{dT_i}{dl} ) ds$$

$$G = 1/2 \int_{s_T} ( T_i \frac{du_i}{dl} - U_i \frac{dT_i}{dl} ) ds \quad 3.38$$

$$G = 1/2 \int_{s_T} T_i^d \frac{du_i}{dl} - 1/2 \int_{s_u} U_i^d \frac{dT_i}{dl} ds \quad 3.39$$

charge imposée :	$G = \frac{1}{2} Q_i q_i$	sur la surface de la fissure $T_i = 0$
déplacement imposé :	$G = -\frac{1}{2} q_i Q_i$	

### III.3.2.3 - Invariant Intégral

D'après le théorème de réciprocity de Betti, nous pouvons écrire:

$$\int (T_i U_i^* - U_i T_i^*) ds = 0 \quad \text{et en appliquant sur (3.38) on aura:}$$

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (T_i \frac{du_i}{dl} - U_i \frac{dT_i}{dl}) ds \quad 3.40$$

C'est une intégrale indépendante du choix du contour d'intégration

Réécrivons (3.40) sous la forme :

$$G dl = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (T_i du_i - U_i dT_i) ds$$

(1)

$U_i$  champ de déplacement lorsque la fissure l s'arrête en A .

(2) champ de déplacement lorsque la fissure l+dl s'arrête en B .

$$T_i du_i = T_i^{(1)} (U_i^{(2)} - U_i^{(1)}) = T_i^{(1)} U_i^{(2)} - T_i^{(1)} U_i^{(1)}$$

$$G dl = \frac{1}{2} \int_{A+B} T_i^{(1)} U_i^{(2)} ds + \frac{1}{2} \int_{A+B} T_i^{(1)} U_i^{(2)} ds \quad 3.41$$

La formule 3.41 s'interprète comme le travail nécessaire pour former la fissure AB de longueur dl.

Formule d'IRWIN  $G = \frac{K + 1}{8\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2$  (3 modes)

Déformation plane  $G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2)$  (2 modes I et II)

Contrainte plane  $G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2)$  (2 modes I et II)

$G = \frac{K + 1}{2\mu}$  (mode I)

On peut exprimer le taux de restitution d'énergie G autrement:

cas de force imposé :

Reprenons l'équation (3.30) :  $K_{\alpha\beta} W_{\beta} - R_{\alpha} = 0$

$$P = -1/2 K_{\alpha\beta} W_{\alpha} W_{\beta} = -1/2 R_{\alpha} W_{\alpha} \quad 3.42$$

Quand on a la propagation, la matrice de rigidité change; par contre  $R_{\alpha}$  ne change pas et par conséquent:

$$R'_{\alpha} = 0 \quad , \quad K'_{\alpha\beta} \neq 0 \quad , \quad W'_{\alpha} \neq 0$$

Cette différentiation est par rapport à  $l$ . Le taux de restitution d'énergie est:

$$G = 1/2 R_{\alpha} dW_{\alpha} / dl = -1/2 W_{\alpha} W_{\beta} \frac{dK_{\alpha\beta}}{dl} \quad 3.43$$

Cas de déplacement imposé :

$$K_{\alpha\beta} W_{\beta} = 0 \quad \alpha = p+1, \dots, 2n \quad 3.44$$

$$R_{\alpha} = V_{\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, p \quad 3.45$$

L'expression du potentiel est:

$$P = 1/2 K_{\alpha\beta} V_{\alpha} W_{\beta} \quad \alpha = 1, \dots, p \quad 3.46$$

Comme  $W_{\alpha}$  sont constants pour  $\alpha = 1, \dots, p$  on peut écrire G:

$$G = -1/2 \frac{dp}{dl} = -1/2 W_{\alpha} \frac{d}{dl} (K_{\alpha\beta} W_{\beta}) \quad 3.47$$

$Q_{\alpha} = K_{\alpha\beta} W_{\beta}$  Forces généralisées associés aux déplacement

### III-3-3 Méthode de l'intégrale J

Les concepts de la mécanique linéaire élastique de la rupture ont permis de prédire avec précision suffisante les conditions de rupture de certaines pièces industrielles massives ou de structures réalisées avec des matériaux à haute résistance. La mesure directe du paramètre caractéristique  $K_{IC}$  nécessite l'emploi d'éprouvette ayant une épaisseur  $B$  supérieure ou égale au rapport  $2,5.(K_{IC}/\sigma_y)^2$ , pour rester dans le domaine élastique. En pratique, cette condition devient difficile à satisfaire avec des matériaux qui possèdent à la fois une limite d'élasticité  $\sigma_y$  relativement basse et une ténacité  $K_{IC}$  élevée. La méthode de l'intégrale  $J$  a alors été développée, dans le but d'évaluer la ténacité  $K_{IC}$  avec une éprouvette de dimension réduite.  $J_{IC}$  est une caractéristique de la ténacité d'un matériau en état de déformation plane, ceci depuis le régime élastique jusqu'au régime élasto-plastique.

La grandeur de  $J$  est déterminée à partir du travail fourni au corps fissuré. On enregistre pendant la mise en charge de l'éprouvette la variation de la force  $F$  appliquée en fonction du déplacement  $\delta$  de ses points d'application; l'aire sous-tendue par la courbe expérimentale jusqu'à un déplacement quelconque est proportionnelle à l'énergie  $U$  emmagasinée dans l'éprouvette [47].

Cette énergie  $U$  est ensuite reliée à  $J$  par la formule d'approximation suivante qui s'applique à des éprouvettes entaillée profondément:

$$J = \frac{2\alpha U}{B(W-a)} = \frac{2\alpha U}{Bb} \quad 3.48$$

Où  $\alpha$  et  $B$  sont respectivement l'épaisseur et la largeur de

l'éprouvette,

a est la longueur de la fissure,

b = (W-a) est la longueur du ligament.

et  $\alpha$  est le facteur de correction géométrique de l'éprouvette.  $\alpha = 2$  pour l'éprouvette de flexion trois points et  $\alpha = 2.2$  pour l'éprouvette CT.

J est une intégrale de contour donnée aussi par la formule:

$$J = \int_{\Gamma} \left( W_{n1} - \lambda_{ik} n_k \frac{\lambda u_i}{\lambda x1} \right) ds \quad 3.49$$

$\vec{n}$  la normale au contour.

L'intégrale J est liée aux facteurs d'intensité de contraintes pour un cas bidimensionnel par la relation suivante:

$$J = \frac{K + 1}{8 \mu} ( K_I^2 + K_{II}^2 ) \quad 3.50a$$

En déformation plane :  $J = \frac{1 - \nu^2}{E} ( K_I^2 + K_{II}^2 ) \quad 3.50b$

En contrainte plane :  $J = \frac{1}{E} ( K_I^2 + K_{II}^2 ) \quad 3.50c$

L'intégrale J est exactement le taux de restitution d'énergie.

### III.3.1.2.3 - Méthodes expérimentales

#### III.3.1.2.3.1 - Méthode des complaisances

Le taux de restitution d'énergie s'écrit sous la forme:

$$G = 1/2 Q_i^d \frac{dq_i}{dl} = 1/2 Q_i^d \frac{dc_{ik}}{dl} Q_k^d \quad 3.51$$

$C_{ik}$  : Matrice des complaisances qui associe aux forces généralisées les déplacements correspondants définis par :

$$q_i = C_{ik} Q_k$$

Où  $C_{ik}$  est symétrique.

Dans le cas d'une force ou une paire de force unique on a :

$$G = 1/2 Q^2 \frac{dc}{dl} \quad 3.52$$

$c$  : l'inverse de la pente de la droite habituelle élastique.

Le principe expérimental est le suivant :

On réalise deux mesures de pentes des graphes forces-déplacement correspondants à deux longueurs de fissures légèrement différentes ( deux méthodes géométriques identiques mais la longueur de fissure est différente ).

### III.3.1.2.3.2 - Méthode des raideurs

le taux de restitution d'énergie s'écrit sous la forme :

$$G = -1/2 q_i^d \frac{dq_i}{dl} = -1/2 q_i^d \frac{dR_{ik}}{dl} q_k^d \quad 3.53$$

où  $q_i^d$  : déplacement imposé,

$R_{ik}$  : Matrice des raideurs inverse de  $C_{ik}$ .

$$Q_i = R_{ik} q_k \quad 3.54$$

### III.3.1.2.3.3 - Méthode photoélastique

Les facteurs d'intensité de contraintes sont donnés par:

$$(\delta_I - \delta_{II})^2 = \frac{K_I^2 \sin^2 \sigma}{2\pi r} + \frac{K_I K_{II} \sin 2\sigma}{\pi r} + \frac{2K_{II}^2}{\pi r} (1 - 3/4 \sin^2 \sigma) \quad 3.55$$

C'est une ellipse paramétrée par trois quantités:  $(\delta_I - \delta_{II})^2$ ,  $r$  et  $\sigma$ , on la découvre en utilisant les rayons laser.

### III.3.1.2.3.4 - Analogie des plaques en flexion

$$\Delta \Delta W = 0 \quad \text{fonction d'Airy} \quad 3.56$$

Introduisons une constante dimensionnelle convenable  $K$ .

$$\begin{cases} \delta_{11} = KW_{,22} \\ \delta_{22} = KW_{,11} \\ \delta_{12} = -KW_{,12} \end{cases} \quad 3.57$$

On peut établir d'après (3.56) que la déflexion et sa dérivée normales satisfont aux relations suivantes:

$$W = \int_0^a \phi_i n_i ds \quad \text{sur } \lambda\Omega \quad 3.58$$

$$\frac{\lambda W}{\lambda h} = - \phi_i t_i \quad \text{sur } \lambda\Omega \quad 3.59$$

$$\text{où } \phi_i = \frac{1}{K} \int_0^a T_i ds$$

$n_i$ : Normale extérieure

$t_i$ : tangente au contour

### III.3.1.2.3.5 - Analogie électrique

Ici l'intégrale  $J$  est une force, elle s'appelle force d'extension de la fissure, elle est donnée par:

$$J = \frac{1}{2\mu} \int_{\Gamma} f'(z) dz \quad 3.60$$

$\Gamma$ : contour entourant la pointe de la fissure.

posons:  $-Q = T$  et  $\vec{V} = (\delta_{13}, \delta_{32})$ .

L'intégrale duale s'écrit:

$$I = \frac{dT}{dl} \quad 3.61$$

$$V_n = \delta_{3i} n_i \quad (\text{Vitesse Normale}) \quad T = \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \vec{V}^2 dv \quad 3.62$$

tel que  $\frac{1}{\mu} = \rho$  (densité du solide).

Par simulation on aura:  $K_{III}^2 = 2\mu j = 2\mu I$ .

par analogie électrique:

$$P = R \int_{\Omega} \vec{J}^2 dv = 2\mu R \beta^2 T \quad 3.63$$

$$I = \frac{1}{2\mu R \beta^2} \frac{dp}{dl} \quad 3.64$$

### III.4 - Conclusion

Pour être proche de la réalité il faut faire une confrontation entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux en partant des mêmes conditions initiales ce qui nécessite la collaboration de plusieurs chercheurs.

## Chapitre IV: PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS

### IV.1- Cas des structures fissurés tridimensionnelles

L'étude de la propagation des fissures dans les structures tridimensionnelles, même en se limitant au cas des fissures surfaciques, est un problème difficile, tant du point de vue de l'analyse des contraintes et déformations que de celui des lois de propagation ou de rupture. C'est pourtant un cas fréquent : fissures non transversantes dans les tôles épaisses, fissures de coin dans les pièces complexes ou dans les zones de concentrations de contrainte.

Le front de fissure  $\Gamma$  est repéré par l'abscisse curviligne  $S$  du point  $M(S)$ . Son évaluation est définie par un champ de vitesse de fissuration, noté  $\dot{a}(S)$  physiquement admissible (fig 4.1). On se place dans le cas d'un solide élastique fragile et, pour fixer les idées, dans le cas d'efforts extérieurs imposés. Un point de  $\delta\mathcal{S}_F$  est repéré par  $P$  et l'on note  $\dot{U}(P)$  la vitesse de déplacement associée à la vitesse de fissuration  $\dot{a}(M)$

La puissance des effort extérieurs (constants) s'écrit dans ce cas (où  $F$  est une densité surfacique d'efforts) :

$$P(x) = \int_{\delta\mathcal{S}_F} F(P) \dot{U}(P) ds \quad 4.1$$

Mais la vitesse  $\dot{U}(P)$  ne dépend que des  $\dot{a}(S)$  (à  $F$  constant) ce qui peut s'écrire en ne retenant que les termes du premier ordre :

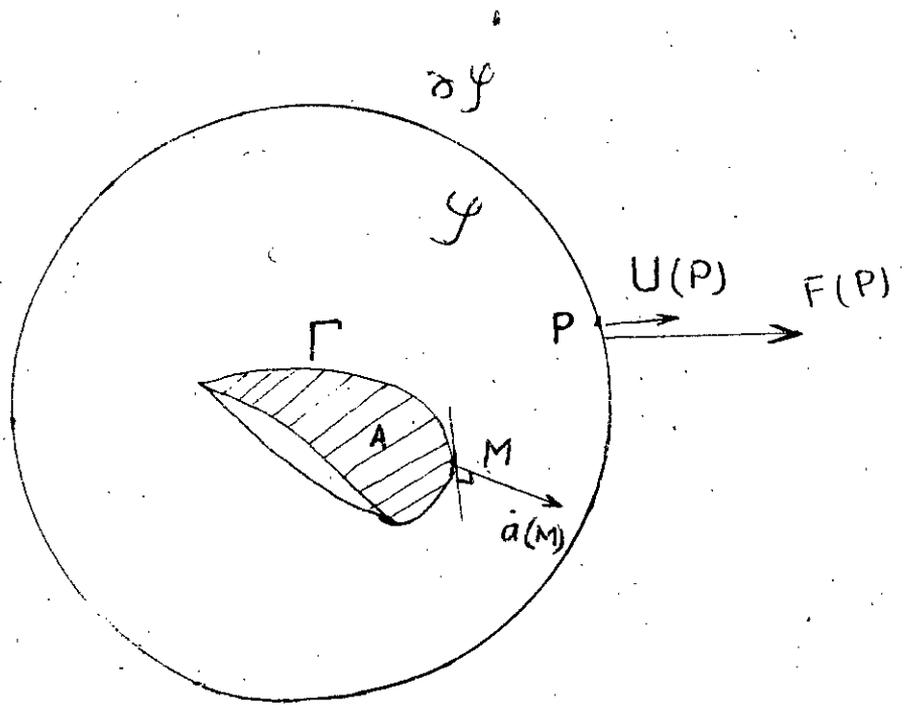


Fig. 4.1 Champ de vitesse d'un front de fissuration dans une structure tridimensionnelle.

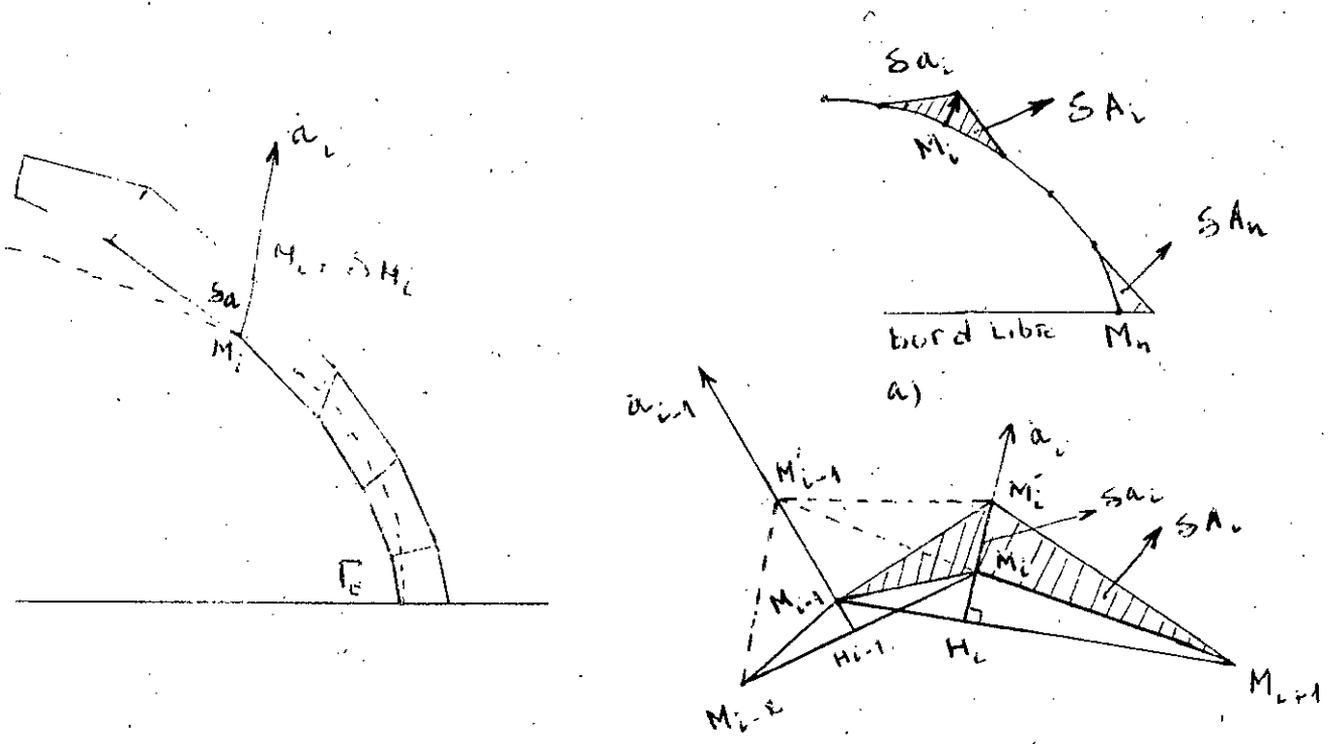


Fig. 4.2 Description du front de fissure en utilisant la méthode de perturbation.

$$U(P) = \int_{\Gamma} h(P,M) \dot{a}(M) dS \quad 4.2$$

En remplaçant dans  $P(x)$  et en permutant l'ordre des intégrations, on trouve :

$$P(x) = \int_{\Gamma} g(M) \dot{a}(M) dS \text{ avec } g(M) = \int_{\delta \mathcal{F}} F(P) h(P,M) dS \quad 4.3$$

On voit que  $h(P,M)$  correspond à un taux  $du(P)/da(M)$  et que  $g(M)$  peut être considéré comme le gradient de l'énergie libre. Une écriture formelle correcte de ce gradient d'énergie dans le cas de dimension infinie nécessite des outils mathématiques particuliers. L'énergie libre  $\psi$  est supposée différentiable au sens de Gateaux : il existe une fonction  $g(M)$  définie sur  $\Gamma$ , telle que :

$$\Delta\psi = - \int_{\Gamma} g(M) \dot{a}(M) dS \quad 4.4$$

Par définition,  $g(S)$  représente une distribution de force le long de  $\Gamma$ . On peut l'écrire à partir des facteurs d'intensité de contraintes en  $M(S)$  :

$$g(S) = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2(S) + \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2(S) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2(S) \quad 4.5$$

Cette notion de force reste valable en élasticité non linéaire et lorsque la singularité de contrainte change de nature le long de  $\Gamma$ , par exemple dans le cas d'une fissure débouchant en surface.

La puissance dissipée dans le processus de fissuration est donnée par :

$$\dot{\phi} = \int_{\Gamma} g(S) \dot{a}(S) dS \geq 0 \quad 4.6$$

On suppose qu'il s'agit d'un mécanisme dissipatif normal, c'est à dire qu'il existe en chaque point de  $\Gamma$  un potentiel  $\mathcal{P}(a)$ , fonction convexe de  $a$  tel que l'on ait :

$$g = g(S) = \frac{\delta \mathcal{P}}{\delta \dot{a}} \quad 4.7$$

Notons  $\mathcal{P}^*(g)$  la transformée de Legendre Fenchel de  $\mathcal{P}(a)$ . On en déduit la relation :  $\dot{a}(S) = \frac{\delta \mathcal{P}^*}{\delta g(S)}$  qui s'applique en tout point du front.

Notons que l'aire de la fissure  $A$  est la surface balayée par le front  $\Gamma$  et que son taux s'exprime par :

$$\dot{A} = \int_{\Gamma} \dot{a}(S) dS \quad 4.8$$

Dans le cas où la fissuration peut être décrite par la seule variable  $A$ , c'est à dire lorsque  $g(S)$  est uniforme,  $g(S) = G$ , on trouve évidemment :

$$\dot{\phi} = \int_{\Gamma} g(S) \dot{a}(S) dS = G \int_{\Gamma} \dot{a}(S) dS = G \dot{A} \quad 4.9$$

Le choix du potentiel de dissipation  $\mathcal{P}^*(g)$  conditionne la loi d'évolution de la fissure. On peut choisir une fonction puissance :

$$\mathcal{P}^*(g) = \frac{C'}{n/2 + 1} g^{n/2+1} \quad 4.10$$

Ce qui conduit à une loi locale de type loi de Paris puisque :

$$\dot{a}(S) = \frac{\delta \mathcal{F}^*}{\delta g} = C' g(S)^{n/2} = C' \left( \frac{K^2(S)}{E} \right)^{n/2} = CK^n(S) \quad 4.11$$

Si l'on choisit un potentiel quadratique,  $\eta = 2$ , on retrouve la loi dite du gradient, bien adaptée aux calculs numériques :

$$\dot{a}(S) = \alpha g(S) \quad 4.12$$

Dans ce cas, la progression se fait de façon à maximiser le taux d'énergie libérée, ce qui correspond à l'un des critères étudiés pour les processus de bifurcation.

#### IV.2 - Utilisation de la méthode des éléments finis

On s'intéresse au cas des fissures représentés par un nombre fini de variables, ce qui constitue une discrétisation du formalisme continu présenté au paragraphe précédent.

Considérons le front  $\Gamma$ , décomposé en un certain nombre de segments, et supposons que son évolution soit entièrement définie par l'évolution des points  $M_i$  (Fig.4.2). Notons  $a_i$  la vitesse normale au point  $M_i$  : ce n'est pas la vitesse d'un point matériel mais celle du point géométrique.

Pour simplifier, on ne considère qu'un seul effort extérieur imposé sur  $\delta \mathcal{F}_F$ ,  $\vec{u}$  désigne le déplacement du point d'application de cet effort.

L'énergie libre du système peut s'écrire :

$$\psi = (\vec{u}, 0) = 1/2 R(0) \vec{u} \vec{u} \quad 4.13$$

Notons que l'on peut imaginer une infinité de modification du front  $\Gamma$  qui conservent la même rigidité (exemple ligne pointillée sur la fig 4.2). Cela signifie que dans l'espace des paramètres  $a_i$  on peut tracer une surface équipotentielle définie par :

$$\psi(\vec{u}, a_i) = \psi(\vec{u}, 0) \quad 4.14$$

L'évolution du front  $\Gamma$  est définie au travers de la discrétisation, par celle des points  $M_i$  :

$$M_i = M_{i0} + \delta M_i = M_{i0} + \delta a_i = M_{i0} + a_i \delta t \quad 4.15$$

Mais aussi par celle des segments adjacents, avec une approximation linéaire.

Les variables du problème d'évolution sont en fait les aires  $A_i$  donnés par :

$$\delta A_i = \frac{1}{2} \delta a_i |M_{i+1} - M_{i-1}| \quad 4.16$$

On note sur la figure 4.2 que l'évolution du segment  $(M_{i-1}, M_i)$  se décompose facilement à partir de l'évolution des points  $M_{i-1}$  et  $M_i$  et que les aires  $\delta A_i$  s'additionnent de façon cohérente (en négligeant des termes d'ordre 2 lorsque  $\delta a_i$  est petit). Pour l'extrémité du front, sur un bord libre, l'évolution du point  $M_n$  se fait suivant le bord libre.

$$\text{Dans le cas ou} \quad \delta A_n = \frac{1}{2} \delta a_n |M_n - M_{n-1}| \quad 4.17$$

L'énergie libre s'écrit:

$$\psi(\vec{u}, A_i) = \frac{1}{2} R(A_i) \vec{u} \cdot \vec{u} \quad 4.18$$

La variable thermodynamique associée à la variable  $A_i$  est définie par :

$$g_i = - \frac{d\psi}{\delta A_i} = - \frac{1}{2} \frac{\delta R}{\delta A_i} \frac{u}{u} \quad 4.19$$

La puissance dissipée s'exprime par :

$$\phi_i = - \frac{d\psi}{\delta A_i} \dot{A}_i = g_i \dot{A}_i \quad 4.20$$

et l'on suppose que la fissuration est un mécanisme dissipatif normal. Le potentiel de dissipation peut s'écrire  $\mathcal{D}^*(g_i)$  et la loi de fissuration :

$$\dot{A}_i = \frac{\delta \mathcal{D}^*}{\delta g_i} \quad 4.21$$

Si  $\mathcal{D}^*$  est quadratique, la progression de fissure se fait dans la direction du gradient de l'énergie :

$$\dot{A}_i = \frac{\delta \mathcal{D}^*}{\delta g_i} = \alpha g_i = -\alpha \frac{d\psi}{\delta A_i} \quad 4.22$$

Cette loi, dite du gradient, est assez bien confirmée par l'expérience. Une bonne corrélation a pu être obtenue sur plusieurs matériaux, diverses géométries, divers types de fissures initiales, plusieurs chargements, entre la vitesse normale  $A_i$  mesurée sur quelques points du front expérimental et la quantité  $g_i$  calculée par éléments finis à partir de la variation du travail extérieur des efforts extérieurs.

Le calcul numérique du taux local d'énergie dissipée  $g_i$  se fait par la méthode des perturbations. Pour chaque front étudié, la structure et le front sont discrétisés par éléments finis

tridimensionnels (Fig.4.5). La résolution du problème d'élasticité fournit les déplacements nodaux  $\{q\}$ . Chaque noeud du front est ensuite perturbé suivant la normale d'une quantité  $\delta a_i$  et la quantité  $g_i$  associé est fournie par:

$$g_i = \frac{1}{2\delta A_i} (-\{q\}^T [\delta K] \{q\}) \quad 4.23$$

où  $[\delta K]$  est la variation de la matrice de rigidité induite par la perturbation.

Pour avoir une bonne précision il faut que le maillage soit assez fin dans la région du front de fissure, c'est l'inconvénient de cette approche.

Cette méthode est adaptée aux problèmes de progression des fissures non traversantes. Elle permet:

1°) de calculer les facteurs d'intensité de contrainte locaux sur la base du taux d'énergie relâchée:

$$g(s) = \frac{1-p}{E} \left[ K_I^2(s) + K_{II}^2(s) + K_{III}^2(s) \right] \quad 4.24$$

2°) de calculer l'évolution du front de fissure à partir d'une loi établie sur la base d'un certain nombre d'expériences.

3°) de traiter le même type de problème avec une approximation par des fissures elliptiques: les deux variables du problème sont alors les demi-axes de l'ellipse.

4°) de calculer la durée de vie de la structure en intégrant le modèle de progression de fissure adopté.

#### IV.3 - Généralisation de loi de Paris:

Considérons un milieu tridimensionnel fissuré sollicité par une force  $F$  qui engendre une évolution de fissure ne dépendant que d'une seule variable  $A$ . Le milieu est élastique linéaire et l'énergie de dissipation plastique au voisinage du front de fissure est petit par rapport à l'énergie élastique. Le seuil est  $G_s$ .

On suppose que le taux d'accroissement de la fissure  $A$  est fonction de  $G^*$  :  $\left( \sqrt{G} - \sqrt{G_s} \right)^2$  par l'intermédiaire d'un potentiel de dissipation. De plus on utilise le même formalisme que pour la rupture ductile avec les variables  $h_p$  et  $H_p$  en choisissant le potentiel  $\varphi^*$  sous la forme:

$$\varphi^* = f - G^* - H_p \quad 4.25$$

et la partie  $\psi_p$  du potentiel thermodynamique sous la forme:

$$\psi_p(h) = \frac{\eta c'}{\eta+2} h_p^{2/\eta+1} \quad 4.26$$

$\eta$  est l'exposant de la loi de Paris et  $c'$  est une constante également caractéristique du matériau. les lois d'évolution donnent des expressions:

$$\dot{A} = \frac{\eta}{2c'} \left( \frac{G^*}{c'} \right)^{\eta/2 - 1} \langle \dot{a}^* \rangle \quad 4.27$$

dans la pratique, les lois de fatigue exprimées en cycles. Il suffit d'intégrer sur un cycle de période  $\Delta t$  défini par les valeurs maximale  $G_M^*$  et minimale  $G_m^*$ :

$$\frac{\delta A}{\delta N} = \int_0^{t+\Delta t} A dt = \int_{G_m^*}^{G_M^*} \frac{\eta}{2c} \left( \frac{G^*}{c} \right)^{\eta/2 - 1} dG^* \quad 4.28$$

$$\frac{\delta A}{\delta N} = \frac{1}{c \cdot \eta/2} \left( G_M^{\eta/2} - G_m^{\eta/2} \right) \quad 4.29$$

avec :

$$G_M^* = \left[ \sqrt{G_M} - \sqrt{G_S} \right]^2, \quad G_m^* = \left[ \sqrt{G_m} - \sqrt{G_S} \right]^2 \quad 4.30$$

Lorsque  $G_m$  est inférieur au seuil  $G_S$  on retrouve exactement la loi de Paris avec  $\Delta K_{\text{eff}} = K_M - K_S$ .

$$\frac{\delta A}{\delta N} = \frac{1}{c \cdot \eta/2} \left( \sqrt{G_M} - \sqrt{G_m} \right)^\eta = \frac{1}{c \cdot \eta/2} \left( K_M - K_S \right)^\eta \quad 4.31$$

Certains auteurs [27] ont présenté un élément tridimensionnel spécial appelé élément hybride singulier HS3D qui permet de calculer directement ou indirectement le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . La formulation de cet élément est similaire à celle de l'élément bidimensionnel. L'élément de référence choisi est la brique 20 noeuds, car cet élément à bords courbes quadratiques est adéquat dans la modélisation de fissures quelconques. Il permet aussi d'obtenir la singularité de déformation en dégénéralant un côté de l'élément brique en une arête et en positionnant les noeuds d'interface au quart des côtés le long des lèvres de la fissure (fig 4.4 et 4.5).

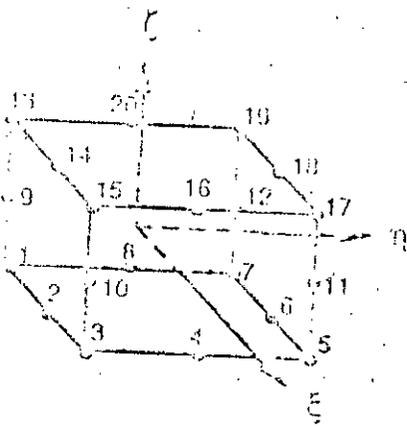


Fig. 4.1 Elément de référence.

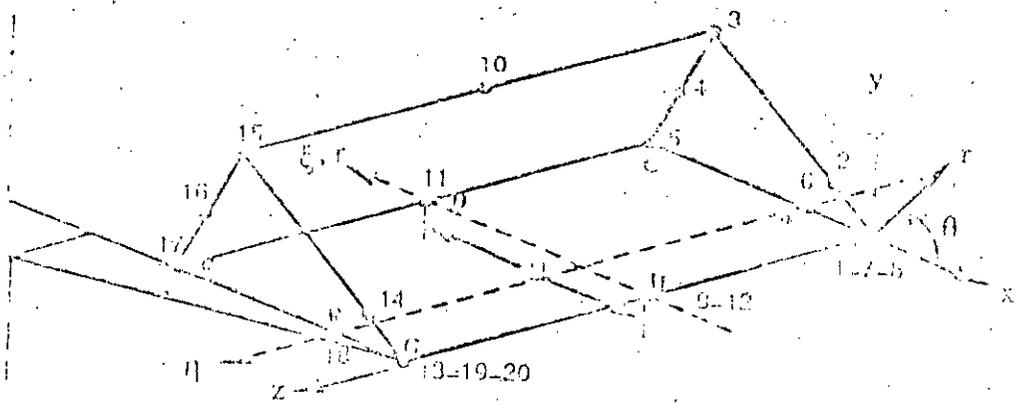


Fig. 4.1a L'élément 3-D prisme dégénéré.

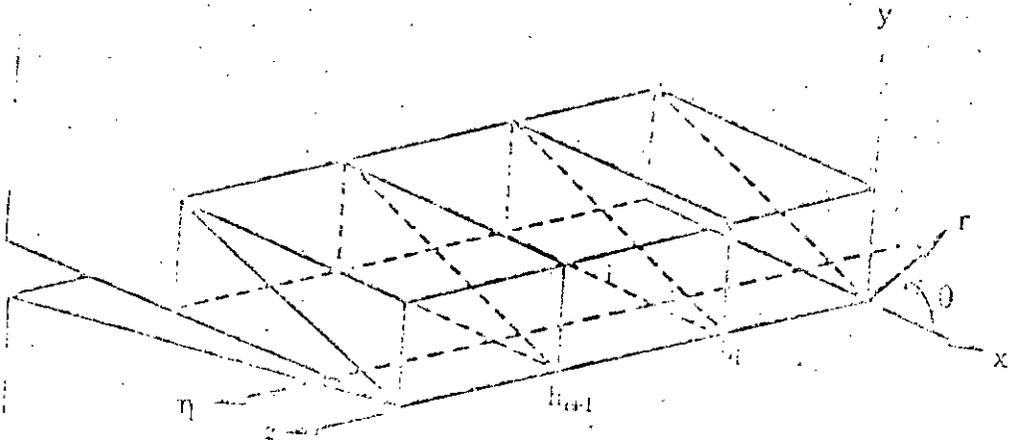


Fig. 4.4b.

#### IV.4 - Exemple et comparaison (plaque en flexion):

On a étudié [27] la distribution tridimensionnelle de la contrainte au voisinage du front de fissure sous un chargement de moment uniforme à l'extrémité de la plaque. Nous considérons une tôle rectiligne fissurée au centre, soumise à un moment de flexion  $M_0$  (fig 4.7), les caractéristiques du problème sont:  $a=2$ ,  $b=4$ ,  $c=2$ ,  $E=10^6$  et  $\nu=0.3$ . Hilton (48) et Alwar et Nambissan [49] ont traité le même problème.

Les tractions appliquées à la surface  $y=\pm C$  pour ce cas sont:

$$\sigma_y = \frac{2\sigma_0 h^2}{h} \quad 4.33$$

Ce qui conduit à un moment de flexion par longueur unité égale à:

$$M_0 = \frac{\sigma_0 h^2}{6} \quad 4.34$$

Le moment de flexion  $M_0$  à l'extrémité  $y=\pm C$  provoque sur la fissure un état de contrainte analogue au mode I, du problème plan, et l'expression de la contrainte d'ouverture  $\sigma_y$  permet de définir un facteur d'intensité de contrainte, linéairement variable dans l'épaisseur.

$$K_I = \frac{2z}{h} \cdot \frac{6M_0}{h^2} \sqrt{\pi a} \quad 4.35$$

Remarque: Ce résultat n'est valable que si l'on y superpose une traction uniforme qui empêche la fermeture du côté des fibres comprimés par la flexion. Cela limite le domaine de validité de la méthode des éléments finis surtout en ce qui concerne les tôles épaisses en flexion.

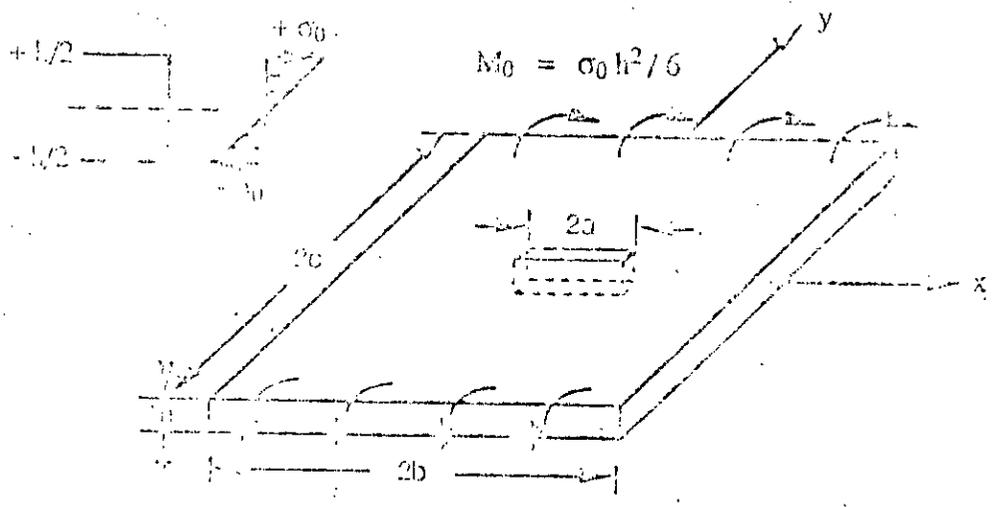


Fig.4.5 Plaque en flexion à fissure centrale.

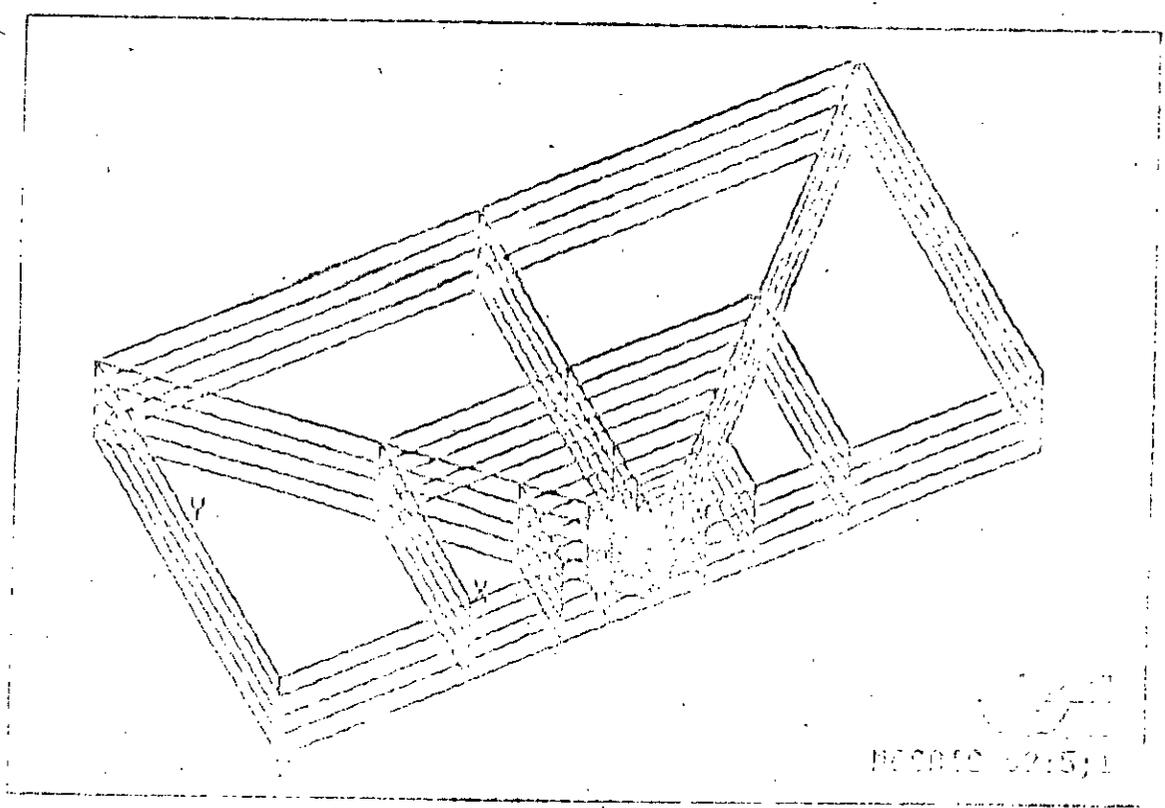


Fig.4.6 le maillage de la plaque en flexion.

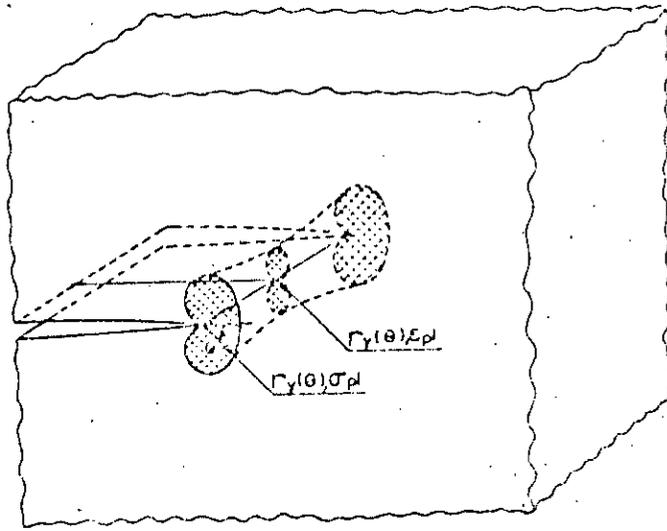


Fig.4.7 Zone plastique au front de fissure.

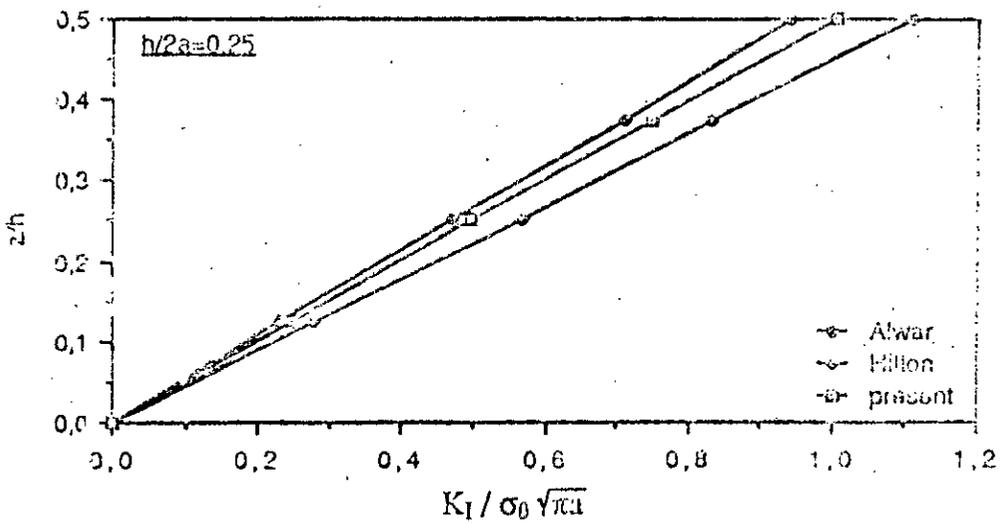


Fig.4.8 Les valeurs de  $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  en fonction de l'épaisseur de la plaque.

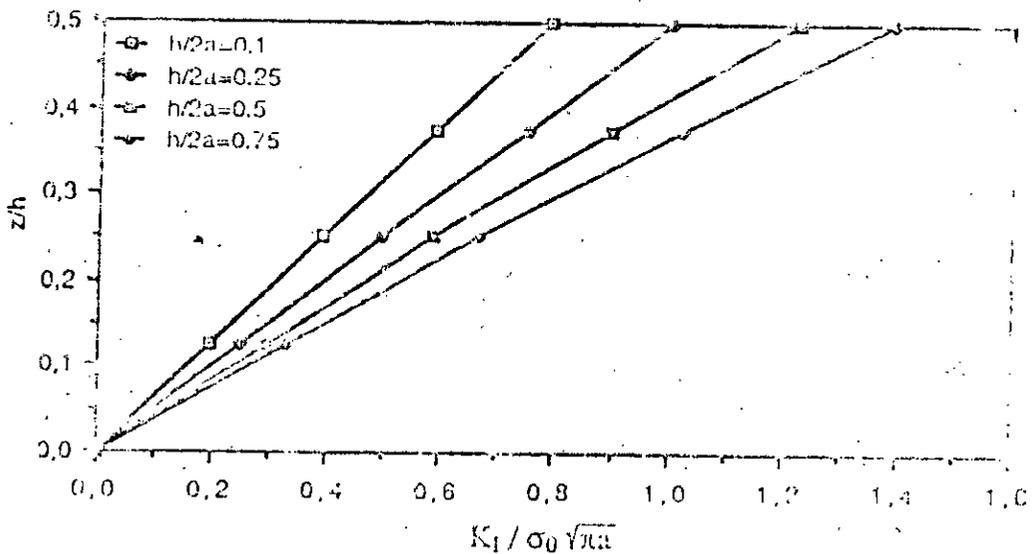


Fig.4.9 Les valeurs de  $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  en fonction de l'épaisseur de la plaque.

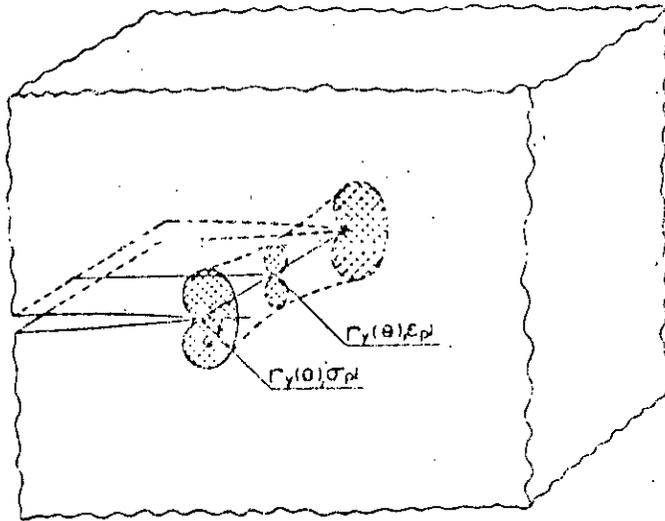


Fig.4.7 Zone plastique au front de fissure.

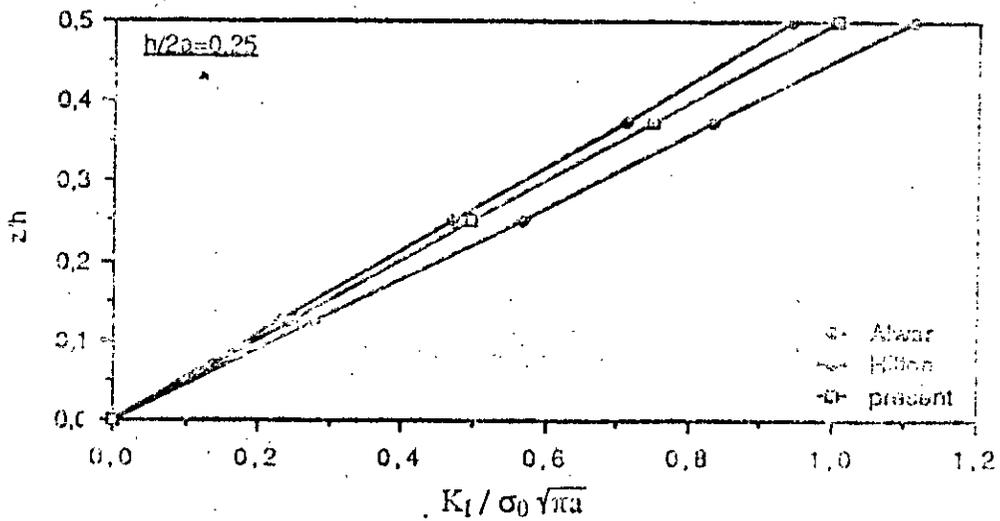


Fig.4.8 Les valeurs de  $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  en fonction de l'épaisseur de la plaque.

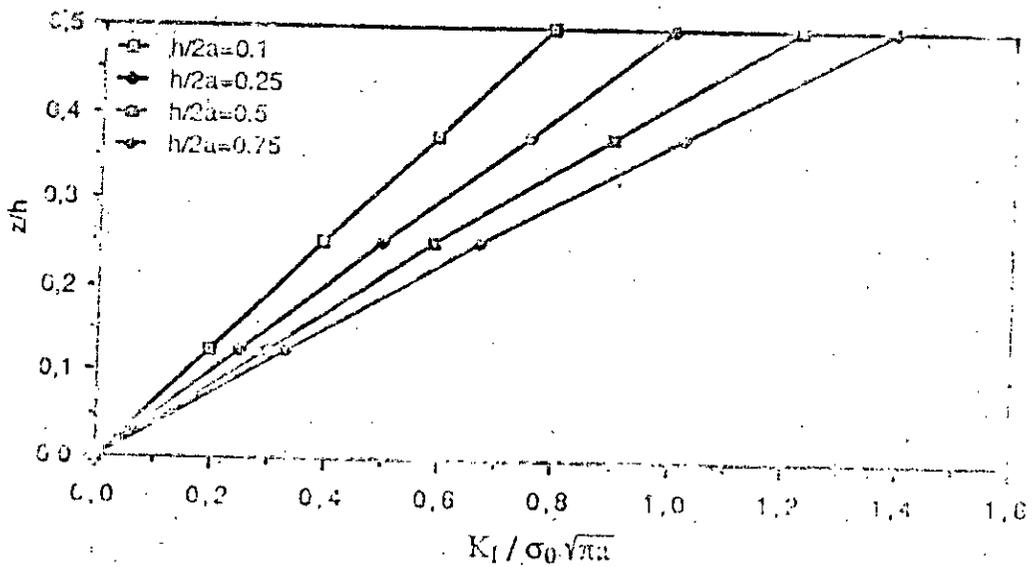


Fig.4.9 Les valeurs de  $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  en fonction de l'épaisseur de la plaque.

Par raison de symétrie du problème par rapport aux plans  $xz$  et  $yz$ , seulement  $1/4$  de la plaque est considéré pour la solution. Le maillage est illustré à la figure 4.8.

Pour ce problème, il faut faire attention aux fixations des noeuds. On doit libérer les degrés de liberté des noeuds suivant  $y$  et  $z$  et fixer suivant  $x$ .

La figure 4.9 montre la distribution de  $K_I$  normalisé à travers l'épaisseur de la plaque, comparée aux résultats obtenus par des méthodes présentées par Hilton [48] et Alwar et Nambissan [49]. On trouve que les résultats obtenus sont en accord avec ceux de Alwar et Nambissan. La figure 4.10 représente la variation de  $K_I$  normalisé à travers l'épaisseur de la plaque pour divers rapports de  $h/2a$  correspondant à des plaques fines.

#### IV.5 - Conclusion

Les éléments finis peuvent constituer un outil important pour résoudre les problèmes de fissuration en 3 dimensions en utilisant l'élément prisme obtenu par dégénérescence de l'élément brique 20 noeuds avec positionnement des noeuds d'interface le long des lèvres de la fissure, donc le voisinage de la fissure est modélisé par de tels éléments singuliers et le reste de la structure est modélisé par des éléments réguliers. le problème essentiel qui se pose est le temps de calcul.

Pour le problème de fissure en flexion, le facteur  $K_I$  varie linéairement le long de l'épaisseur. En toute rigueur, pour ce cas les lèvres opposées de la fissure dans la zone de compression peuvent entrer en contact ceci nous conduit à étudier le problème de contact en annexe.

## Chapitre V: SIMULATION NUMERIQUE DU PROBLEME 3D:

### V.1 - Dimension et forme des défauts

La détection des défauts révèle souvent des formes complexes qui sont difficiles à analyser mathématiquement. Comme de toute façon le contrôle non destructif ne permet pas de garantir qu'elles correspondent aux formes réelles, il est d'usage de les simplifier en les assimilant à des ellipses. c'est en particulier ce que recommande le code ASME, section XI. Les défauts détectés sont inscrits dans un rectangle dont les côtés sont alors le grand axe et le petit axe de l'ellipse considérée (fig.5.1 , 5.2). Comme les ellipses dont le grand axe est parallèle à la surface de la fissure conduisent aux facteurs d'intensité de contrainte les plus grands, c'est cette disposition qui est toujours retenue pour l'analyse, pour des raisons de sécurité. En l'absence de théorie correcte pour les modes mixtes, c'est la projection du défaut sur le plan perpendiculaire à la contrainte principale maximale qui est prise en compte.

Un problème se pose si les défauts voisins interagissent ou s'ils sont très proches de la surface. Des calculs de facteurs d'intensité de contrainte de fissures ayant ces dispositions ont été effectués. Ils montrent que ces facteurs sont alors magnifiés.

Pour simplifier l'analyse on peut considérer que dès que cette augmentation dépasse 5% les défauts coalescent très rapidement ou rejoignent la surface, et qu'ils ne forment alors

plus qu'un. C'est ce que montre la figure 5.1 (code ASME).

Le comité WEE 37 des "British standards" donne à ce sujet des règles différentes et plus complètes car elles prennent aussi en considération des défauts non coplanaires. Le coefficient d'augmentation de K est là de 20% (Fig. 5.3 et 5.4).

## 5.2 - Valeur du facteur correctif Y

Le facteur correctif Y est fonction de la géométrie de la pièce, de la forme et des dimensions de la fissure et du chargement.

Une méthode de calcul de  $K_I$  est donnée dans la section XI du code ASME.

$$K_I = \sigma_m \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} + \sigma_b \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \quad 5.1$$

Dans cette formule,  $\sigma_m$  est la contrainte de membrane,  $\sigma_b$  est la contrainte de flexion. Q est un facteur de forme qui dépend notamment de l'excentricité du défaut représenté par une ellipse (Fig. 5.5).

$M_m$  et  $M_n$  sont des facteurs correctifs qui tiennent compte de la profondeur relative  $a/t$  de la fissure (Fig. 5.6). Cette figure montre l'importance de la profondeur  $a$  du défaut, malheureusement difficile à mesurer.

De façon plus générale si la variation de contrainte dans la structure peut être représentée sous forme polynomiale:

$$\sigma(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \quad 5.2$$

Labbens, Pellissier Tanon et Héliot [50] Buchalet et Bamford [51] montrent que  $K_I$  est donné par:

$$K_I = (A_0 f_0 + a A_1 f_1 + a^2 A_2 f_2 + a^3 A_3 f_3) \sqrt{\pi a} \quad 5.3$$

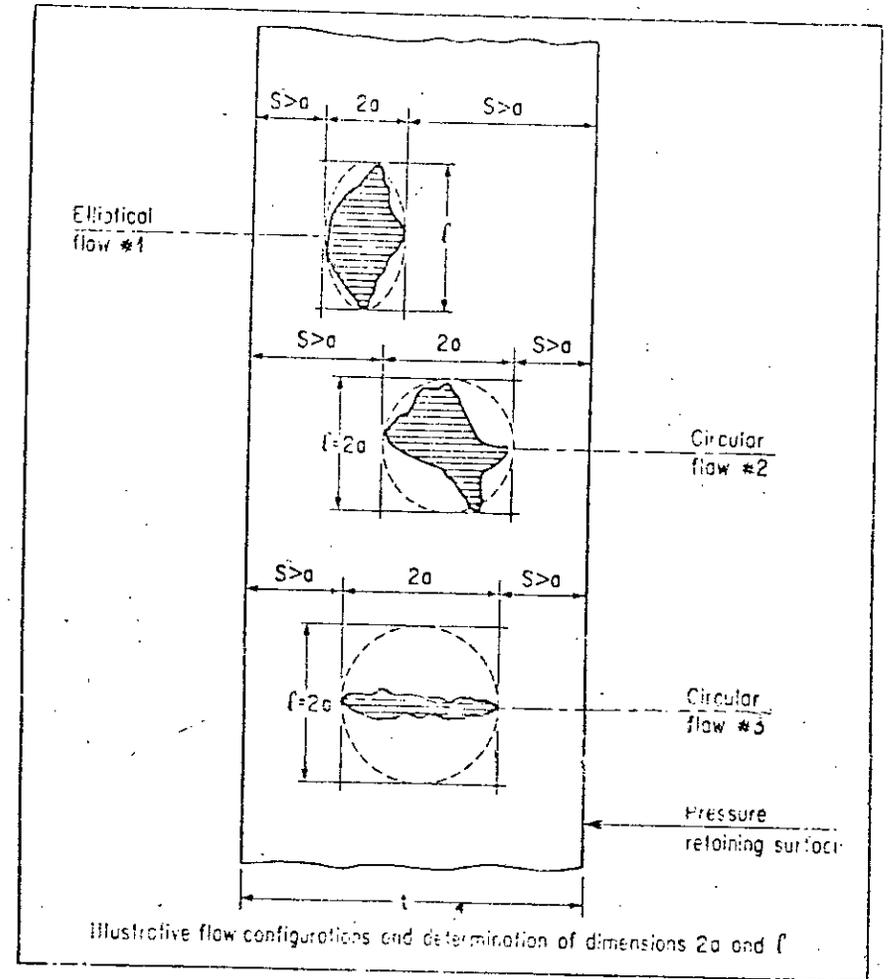
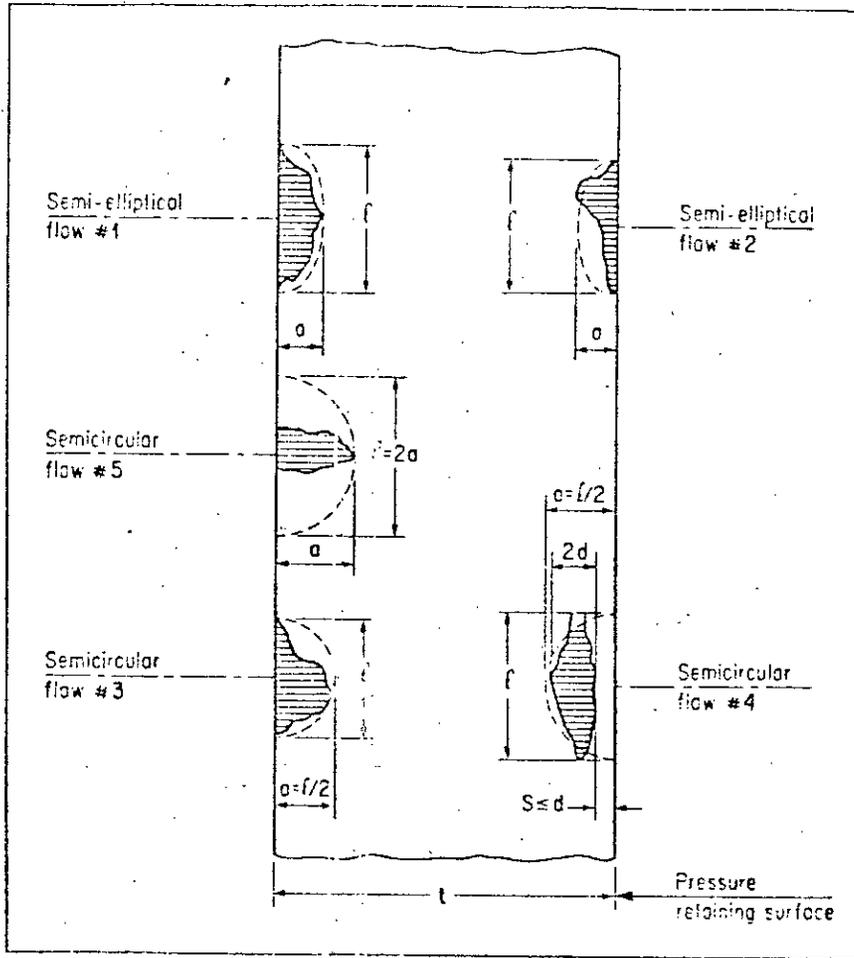


Fig. 5.1 Assimilation de défauts débouchants à la surface à des fissures semi-elliptiques (code ASME).

Fig. 5.2 Assimilation de défauts internes à des fissures elliptiques (code ASME).

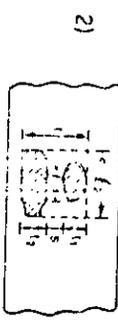
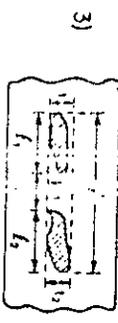
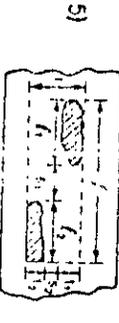
Schematic defects	Criterion for interaction	Effective dimensions after interaction
Coplanar surface defects 	$s \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s$
Coplanar embedded defects 	$s \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s$
Coplanar surface and embedded defects 	$s \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s$
Coplanar embedded defects 	$s \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s$
Coplanar embedded defects 	$s_1 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ and $s_2 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s_2$ $L = l_1 + l_2 + s_1$
Surface and embedded defects 	$s_1 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ and $s_2 \leq l_1 + \frac{l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s_2$ $L = l_1 + l_2 + s_1$

Fig. 5.3 Assimilation de défauts coplanaires à

une fissures elliptiques (code WEE 37).

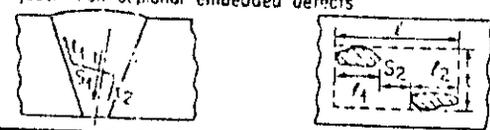
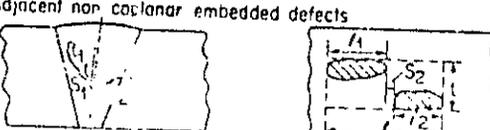
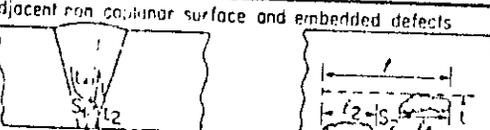
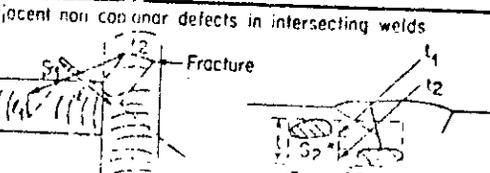
Schematic defects	Criterion of interaction	Effective dimensions for interaction
Adjacent non coplanar embedded defects 	$s_1 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ and $s_2 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ [ $l_1$ & $l_2$ are projected lengths]	$l = \text{the minimum height of containment rectangle constructed on the plane normal to the maximum principal stress in the weld}$ $L = l_1 + l_2 + s_2$
Adjacent non coplanar embedded defects 	$s_1 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ and $s_2 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ [ $l_1$ & $l_2$ are projected lengths]	$l = \text{the minimum height of containment rectangle constructed on the plane normal to the maximum principal stress in the weld}$ $L = l_1 + l_2 + s_2$
Adjacent non coplanar surface and embedded defects 	$s_1 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ and $s_2 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ [ $l_1$ & $l_2$ are projected lengths]	$l = \text{the minimum height of containment rectangle constructed on the plane normal to the maximum principal stress in the weld}$ $L = l_1 + l_2 + s_2$
Adjacent non coplanar defects in intersecting welds 	$s_1 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ and $s_2 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ [ $l_1$ & $l_2$ are projected heights]	$l = l_1 + l_2 + s_2$ $L = \text{the minimum length of containment rectangle constructed on the plane normal to the maximum principal stress in the weld}$

Fig. 5.4 Assimilation de défauts non coplanaires à

une fissures elliptiques (code WEE 37).

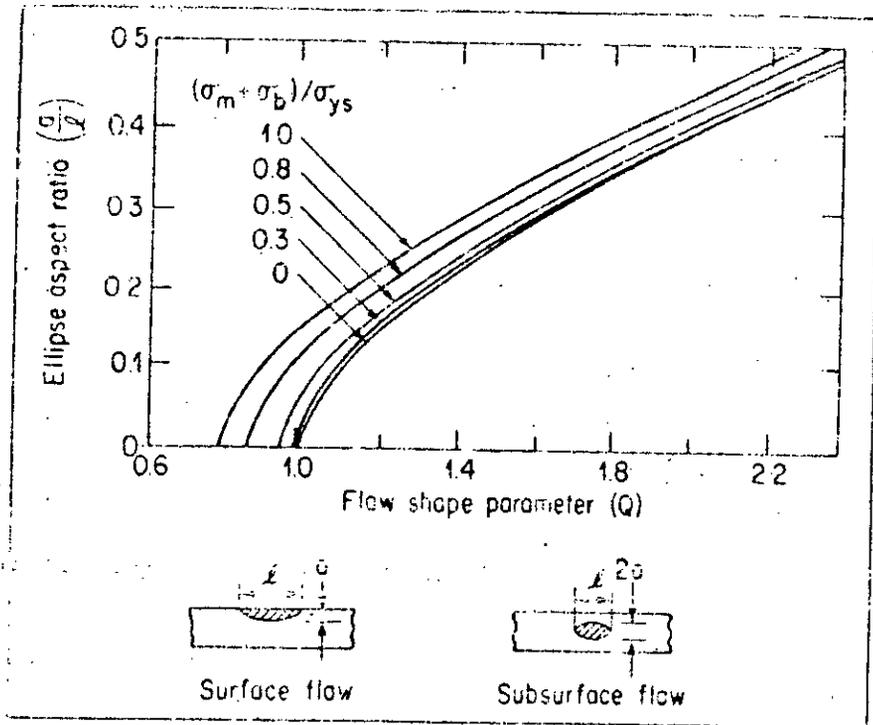


Fig.5.5 Facteur de forme  $Q$  pour une fissure elleptique.

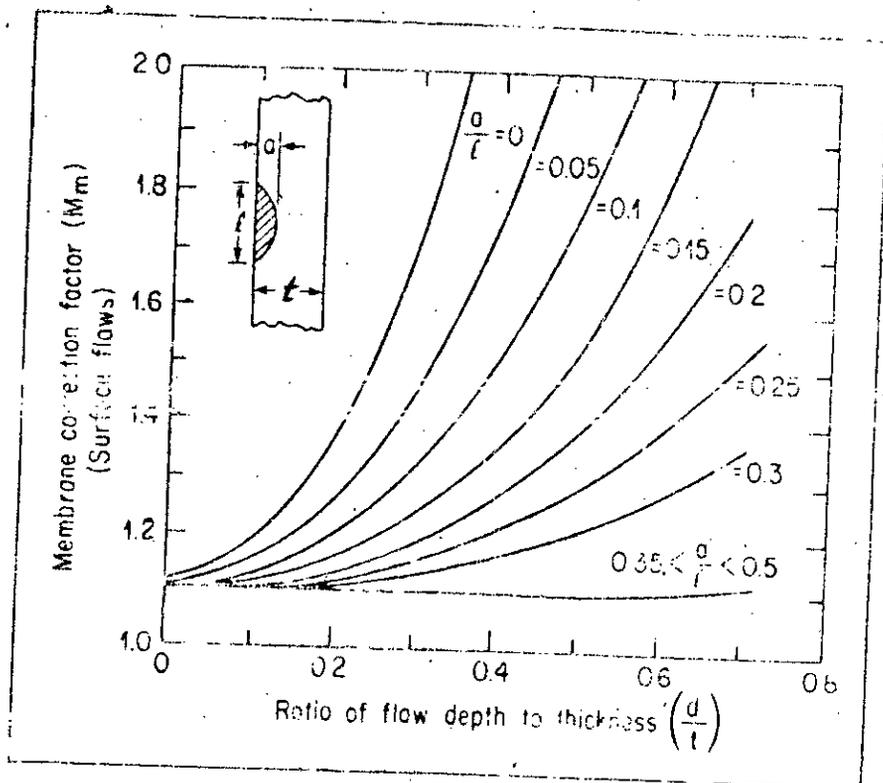


Fig.5.6 Facteur correctif  $M_m$  pour une fissure en surface.

Il est important de remarquer que la courbure du front de fissure introduit une variation du facteur  $K$  le long de ce front. Il semble que l'évolution de la fissure en fatigue puisse être correctement prédite en considérant que chaque point du front suit localement la loi de Paris (52). La rupture brutale survient au moment où  $K_{max}$  atteint la valeur critique  $K_{1c}$ . La fatigue tend à donner à la fissure une forme telle que  $K$  soit constant le long du front. Cependant, le comportement de la fissure au voisinage de la surface libre doit être assez différent de celui des points situés dans la profondeur de la pièce, car les zones plastiques y sont de nature très différente. Ce problème est mal élucidé.

On rencontre souvent des cas de figures plus compliqués que celui d'une fissure semi-elliptique en surface, par exemple au raccordement des tubulures, zones particulièrement critiques, ou encore dans les coudes de canalisations. Il est alors toujours possible de faire une analyse numérique particulière pour le cas spécifique considéré mais il faut y mettre le prix.

Une autre difficulté résulte de la forme initiale du défaut qui bien souvent n'est pas du tout elliptique. Néanmoins, la fatigue régularise assez rapidement le front. Comme on l'a vu au paragraphe précédent, on peut prendre comme forme initiale une ellipse dans laquelle s'inscrit le défaut, provoquant ainsi une sous-estimation de la durée de vie, ce qui va dans le sens de la sécurité au détriment de la justesse.

### 5.3 - Simulation du problème présent

Pour notre cas la fissure commence à partir d'un trou de rivetage; elle est considérée comme une fissure de coin émanant d'un trou. Elle a la forme d'une petite ellipse dans un grand volume (Fig. 5.8 et 5.9).

- Le grand et le petit axe de l'ellipse sont:  $2c$  et  $2a$

- Les positions sur le périmètre de l'ellipse sont définies par  $\phi$  et  $\alpha$

a)  $\phi$  = l'angle elliptique

b)  $x, y$  : coordonnées des points du périmètre tel que :

$$x = c \cos(\phi) \qquad y = a \sin(\phi)$$

c) la relation entre  $\alpha$  et  $\phi$  est donnée par:

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{a \sin(\phi)}{c \cos(\phi)} = (a/c) \tan(\phi) \qquad 5.4$$

### 5.3.1 - Calcul du facteur d'intensité de contrainte

Le calcul des contraintes est donné pour ce cas par Irwin [53] et utilisé par G.R.Irwin [54] pour calculer le facteur d'intensité de contrainte en mode I:

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{E(k)} \left[ \sin^2 \phi + (a/c)^2 \cos^2 \phi \right]^{1/4} \qquad 5.5$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi \qquad k^2 = 1 - (a/c)^2 \qquad 5.6$$

Si on examine les termes de  $K_I$  on constate que:

a)  $K_I$  est fonction de la longueur de la fissure  $a$  d'une part et de la contrainte globale  $\sigma$  d'autre part, il s'agit du terme

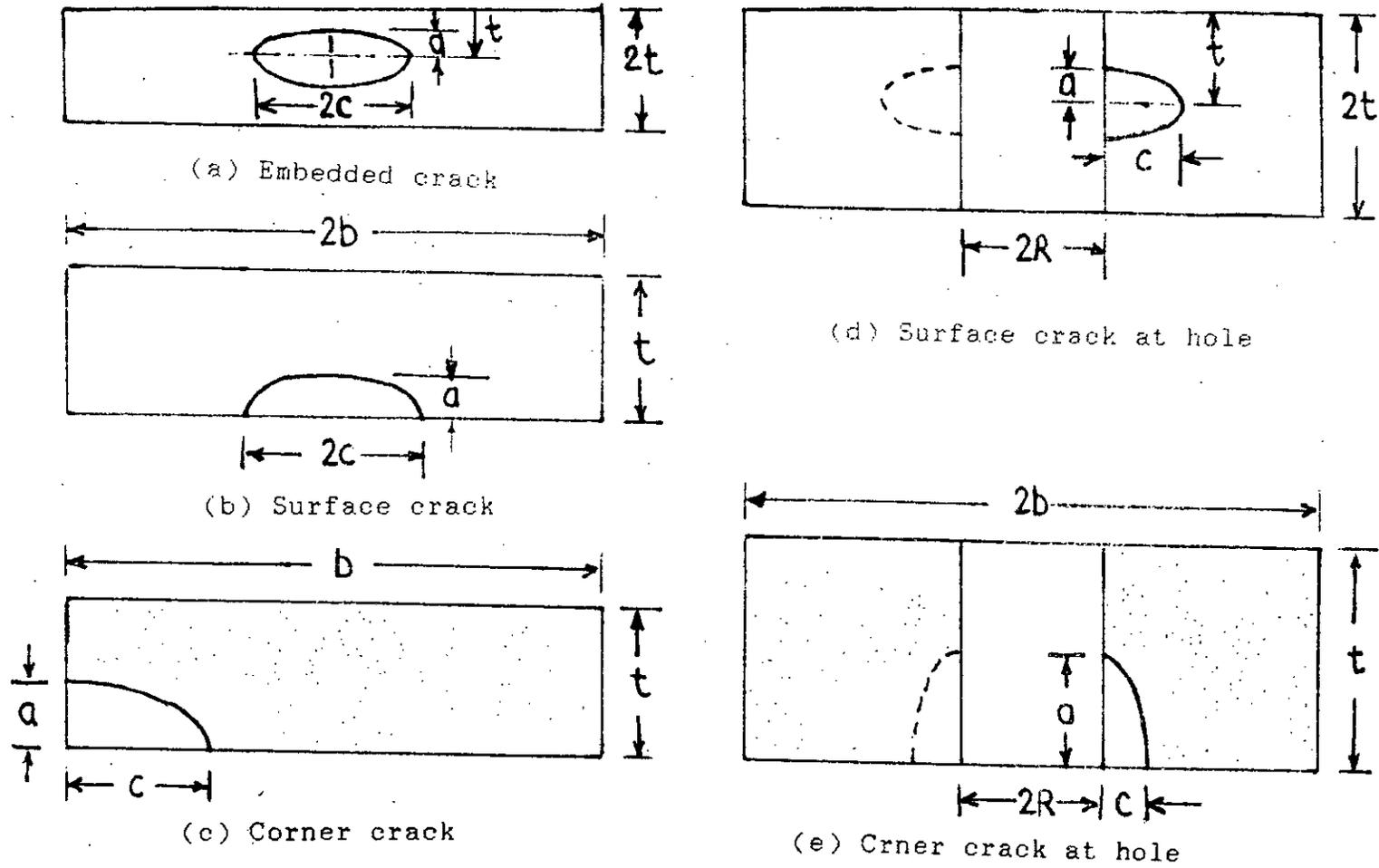


Fig.5.7 Embedded, surface and corner crack configurations.

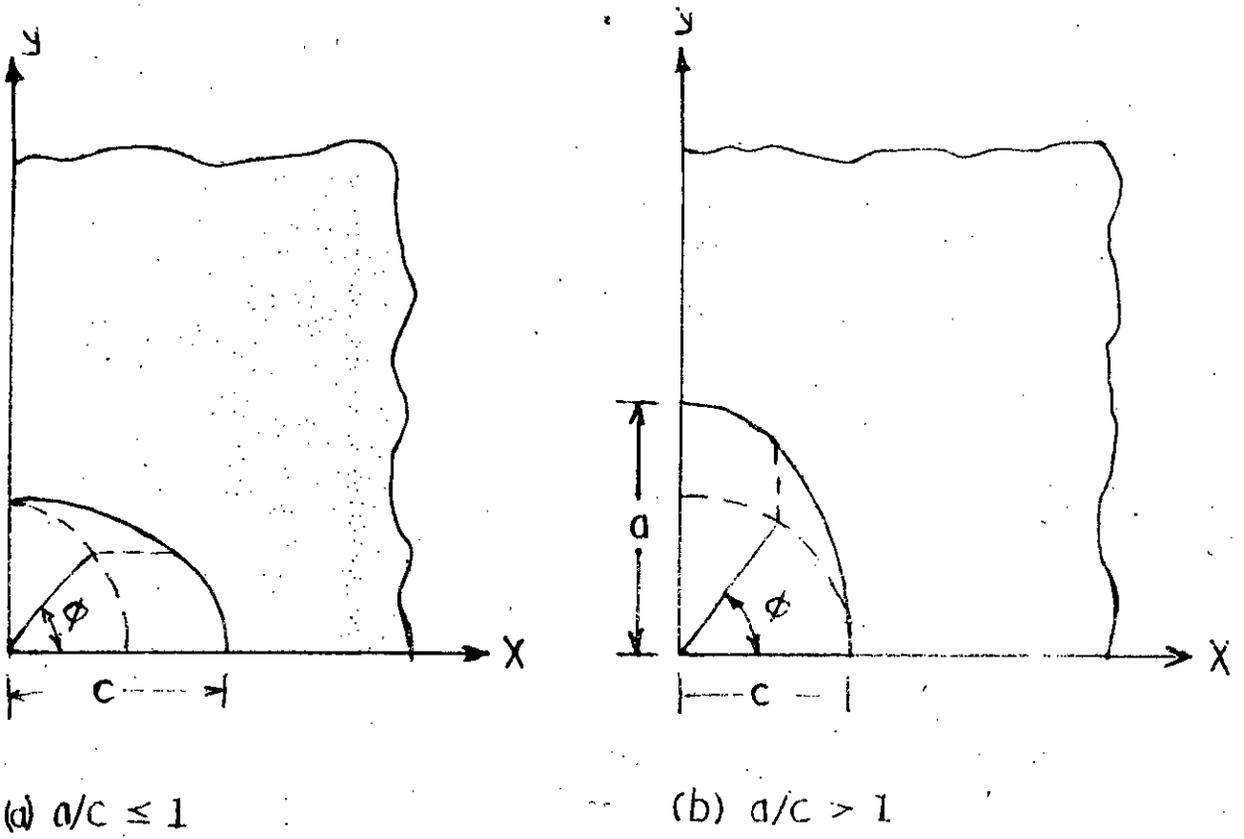


Fig.5.8 Coordinate system used to define parameters  $a/c$  and  $\phi$ .

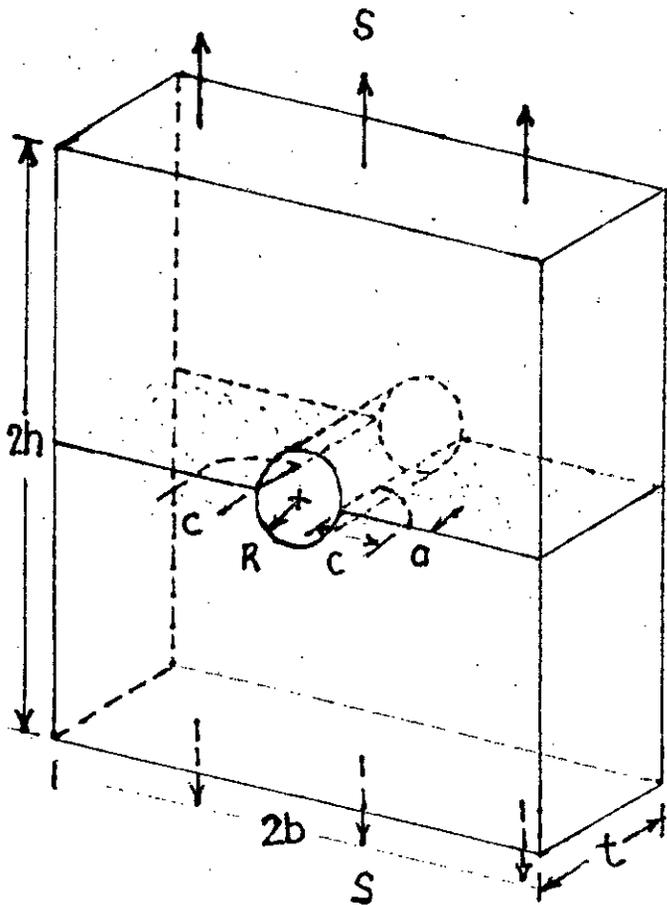


Fig.5.9 corner cracks at the edge of a hole in a finite plate subjected to remote tension.

b) KI est encore fonction de la largeur de la fissure exprimée par le rapport a/c représenté par:

- le terme:  $\left[ \sin^2 \phi + (a/c)^2 \cos^2 \phi \right]^{1/4}$

- l'intégrale elliptique E(k) qui dépend uniquement de a/c et donné dans des tableaux. Les valeurs limites de E(k) sont:

$E(k) = \pi/2$  pour  $a/c = 1$  et  $E(k) = 1$  pour  $a/c = 0$

Les expressions empiriques pour estimer E(k) sont données par:

$$E(k) = \left[ 1 + 1,464 (a/c)^{1,65} \right]^{1/2} \quad \text{pour } a/c \leq 1 \quad 5.7$$

$$E(k) = \left[ 1 + 1,464 (c/a)^{1,65} \right]^{1/2} \quad \text{pour } a/c > 1 \quad 5.8$$

c) KI est fonction de la position du point sur le périmètre:

- Cas d'une fissure circulaire: (a=c)

$$\left[ \sin^2 \phi + (a/c)^2 \cos^2 \phi \right]^{1/4} = 1 \quad \text{alors } E(k) = \pi/2$$

Pour ce cas on aura  $KI = 2 \sigma \sqrt{a/\pi}$  5.9

- Position  $\phi = 0$  et  $\left[ \sin^2 \phi + (a/c)^2 \cos^2 \phi \right]^{1/4} = \sqrt{a/c}$

on aura:

$$KI = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{E(k)} \sqrt{a/c} \quad 5.10$$

- Position  $\phi = \pi/2$  on aura  $KI = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{E(k)}$  5.11

d)  $K_I$  est fonction du facteur de correction géométrique  $Y$  défini ci-dessus relatif à une plaque de largeur finie. Ce facteur est fonction des paramètres suivants:

- Le diamètre du trou  $2R$
- La largeur de la structure  $w$
- L'épaisseur de la plaque  $t$
- Les deux demi-axes de l'ellipse  $a$  et  $c$
- La nature de la fissure: un seul bout ou deux bouts de fissure. (La valeur de  $\gamma$  renseigne sur la nature de la fissure).

$Y$  est donné par la fonction suivante:

$$Y = F(w) = \left[ \cos \left[ \frac{\pi(2R+\gamma c)(a/t)^{1/2}}{4(w-c) + 2\gamma c} \right] \cos \left[ (\pi R)/2w \right] \right]^{-1/2} \quad 5.12$$

Finalement on a la valeur de  $K_I$ :

$$K_I = Y \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\left[ 1 + 1,464 (a/c)^{1,65} \right]^{1/2}} \left[ \sin^2 \phi + (a/c)^2 \cos^2 \phi \right]^{1/4} \quad 5.13$$

#### V.4) Présentation du logiciel élaboré

Nous allons présenter les différentes étapes du programme et les modèles empiriques qu'on a utilisé pour calculer les paramètres principaux de la fissuration par fatigue, à savoir:

Le facteur d'intensité de contrainte sur le front de fissure dans les deux directions: la direction transversale et suivant l'épaisseur de la structure. On fait varier l'angle paramétrique  $\phi$  de l'ellipse on constate que  $K_I$  prend sa valeur maximale pour  $\phi = \pi/2$  ( ce qui correspond à la trajectoire de la fissure dans la structure réelle ).

La vitesse de fissuration est également connue dans les différents stades. Au début de la propagation elle est faible; de l'ordre de  $10^{-6}$  mm/cycle environ, ensuite elle commence à augmenter en passant par des valeurs intermédiaires correspondant au stade de la fissure contrôlée, elle termine par de très grandes valeurs; de l'ordre de 1 mm/cycle environ ce qui correspond à la rupture brutale ( fissure non contrôlée ).

Connaissant la vitesse de propagation dans les différents stades nous pouvons calculer la durée de vie de la structure.

#### V.4.1 - Modèles empiriques utilisés

Pour le calcul de la vitesse de fissuration on a utilisé deux modèles:

##### *V.4.1.1 - Modèle de Walker*

Ce modèle tient compte de  $K_{max}$  et du rapport R.

$$\frac{da}{dn} = c \left[ (1-R)^n K_{max} \right]^m \quad 5.14$$

c, n, m des constantes caractéristiques du matériau.

Cette loi est utilisée pour calculer la vitesse de propagation stable il s'agit du domaine défini par:

$$K_{th} < K < 0.7 K_c$$

$K_{th}$ : facteur d'intensité de contrainte du seuil de propagation.

$K_c$ : facteur d'intensité de contrainte critique (ténacité du matériau).

##### *V.4.1.2 - Modèle de Forman*

Ce modèle tient compte de  $K_c$ ,  $K_{max}$  et R.

$$\frac{da}{dn} = \frac{\lambda \cdot \Delta K^\mu}{(1-R) K_c - \Delta K} = \frac{\lambda \cdot K_{max}^\mu}{K_c - K_{max}} \quad 5.15$$

$\lambda$  et  $\mu$  des constantes caractéristiques du matériau.

Cette loi est valable surtout pour les fortes valeurs de  $\Delta K$  c'est à dire quand on se rapproche de la valeur critique  $K_c$ .

Rappelons que dans ce stade on a une fissure instable (rupture brutale de la structure).

#### V.4.2 - Calcul de la durée de vie de la structure

La durée de vie de la structure est traduite par le nombre de cycles total causant la rupture brutale. Ce dernier est la somme des résultats de deux phénomènes: l'amorçage et la propagation.

Donc le nombre de cycles total est la somme des deux quantités:

nombre de cycles à l'amorçage + le nombre de cycles de propagation.

##### *V.4.2.1 - Nombre de cycles à l'amorçage*

Il est estimé par deux approches différentes: Les essais expérimentaux et les modèles théoriques. L'un des modèles théoriques est celui de Jack et Price [18] donné par la loi:

$$N_a = \frac{2,9 \times 10^8}{(\Delta K)^4} \quad 5.16$$

$N_a$ : est le nombre de cycles à l'amorçage.

$\Delta K$ : l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte

$(K_{max} - K_{min})$ .

##### *V.4.2.2 - Nombre de cycles de propagation*

Le nombre de cycles de propagation est estimé en intégrant les deux relations (5.14) et (5.15). Le résultat de l'intégration est:

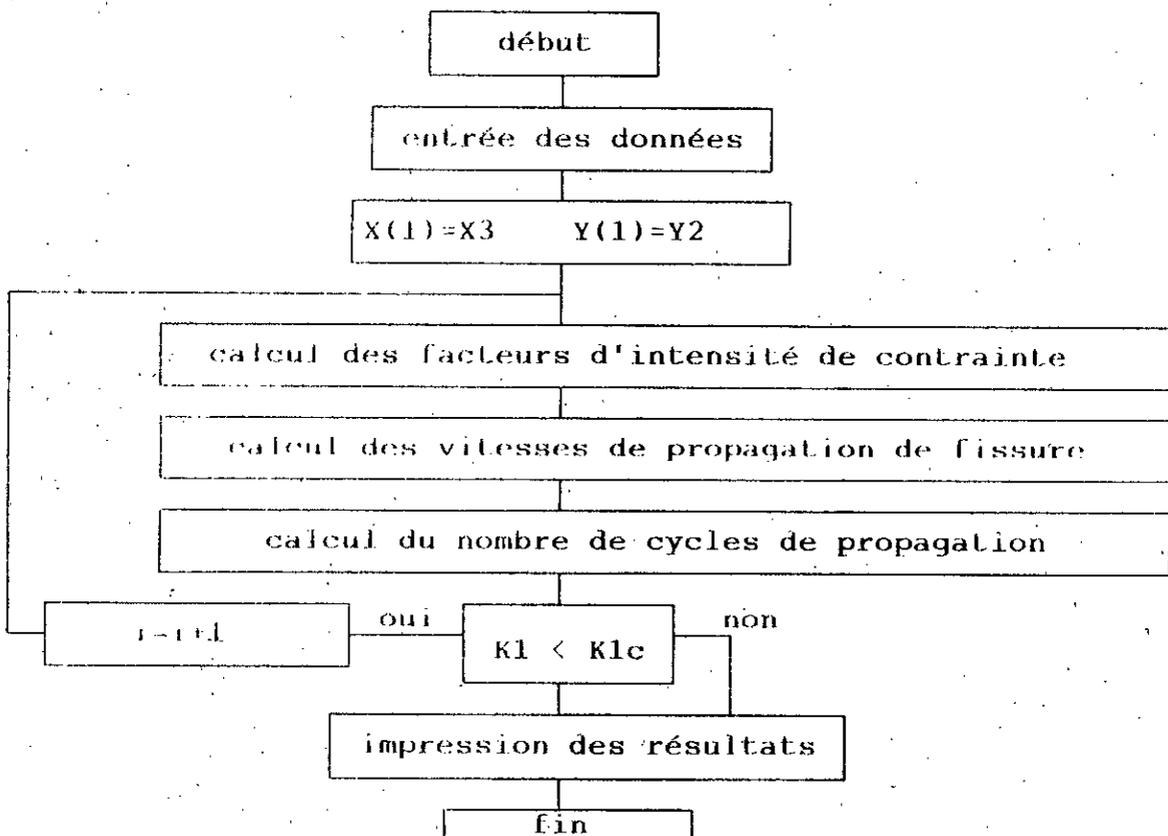
$$N_p = \int_{k_{th}}^{0.7K_c} \frac{da}{\left[ (1-R)^n \times K_{max} \right]^m} + \int_{0.7K_c}^{K_c} \frac{(1-R) \cdot K_c^{-\Delta K}}{\lambda \cdot \Delta K^H} da \quad 5.17$$

$N_p$  est le nombre de cycles de propagation.

Pour estimer la durée de vie de la structure c'est à dire le nombre de cycles à rupture on est amené à calculer la vitesse de propagation de fissure, cette dernière est donnée en fonction du facteur d'intensité de contrainte qui est calculé au moyen de la mécanique de la rupture.

#### V.4.2 - Organigramme

Un logiciel a été développé simulant la propagation de fissure dans un milieu élastique à trois dimensions. Nous présentons l'organigramme principal qui est à l'origine du présent programme :



## V.5 - Résultats et interprétation:

Notre logiciel nous a permis de savoir les paramètres de fissuration par fatigue et les facteurs qui influent sur ces derniers dans les différents stades.

### V.5.1 - Le nombre de cycles

En ce qui concerne le nombre de cycles à l'amorçage il est uniquement fonction de  $\Delta K_{th}$  facteur d'intensité de contrainte correspondant au seuil de propagation. Tandis que le nombre de cycles de propagation, il existe plusieurs paramètres qui rentrent en jeu.

#### *V.5.1.1 - Influence de la contrainte appliquée*

On remarque que le nombre de cycles de propagation diminue quand la valeur de la contrainte appliquée augmente. (Fig.5.10a).

#### *V.5.1.2 - Influence du type de sollicitation*

On constate pour la même contrainte appliquée que le nombre de cycles en traction est supérieur au nombre de cycles en flexion pure qui est supérieur au nombre de cycles en flexion trois points. (Fig.5.10b).

#### *V.5.1.3 - Influence du rapport de contrainte*

Le nombre de cycles de propagation augmente avec le rapport de contrainte la figure 5.11 montre l'influence de R sur  $N_p$  pour les valeurs positives et négatives de R.

#### *V.5.1.4 - Influence de la nature de la fissure*

La figure 5.12 nous montre la différence qui existe dans les deux cas: le nombre de cycles à la rupture relatif à un seul bout de fissure est supérieur au nombre de cycles à la rupture relatif à deux bouts de fissure pour les mêmes conditions de sollicitation.

### V.5.2 - vitesse de propagation de fissure

#### *V.5.2.1 - Influence du facteur d'intensité de contrainte maximal*

Le facteur d'intensité de contrainte est la variable principale qui gouverne la vitesse de propagation de fissure, les deux sont liés par une courbe bilogarithmique linéaire dans le domaine de la rupture contrôlée (stable), cette proportionnalité augmente très rapidement qu'on se rapproche de  $k_c$  (fig 5.13).

#### *V.5.2.2 - Influence du rapport de contrainte R*

Le rapport de contraintes R a une très grande influence sur la vitesse de fissuration. On constate que quand R augmente la vitesse diminue.

### V.5.3 - Facteur d'intensité de contrainte

#### *V.5.3.1 - Influence de la contrainte maximale*

La figure 5.14 montre que le facteur d'intensité de contrainte augmente d'une manière très rapide pour les grandes valeurs de la contrainte, par contre on remarque que la longueur critique de la fissure diminue quand la contrainte augmente (voir Fig. 5.15)

#### V.5.3.2 - Influence de l'angle d'orientation

Le facteur d'intensité de contrainte (Fig 5.16) prend sa plus grande valeur pour  $\phi = \pi/2$  cet angle correspond au trajet de la fissure dans la structure réelle. La plus petite valeur correspond à  $\phi = 0$  ( l'axe longitudinal ).

#### V.5.3.3 - L'effet de la géométrie de la structure

Plusieurs paramètres géométriques influent sur le facteur d'intensité de contrainte à savoir: La largeur, l'épaisseur de la structure, le diamètre du trou de rivetage et la taille de défaut, tous ces paramètres ont été pris en compte dans nos calculs.

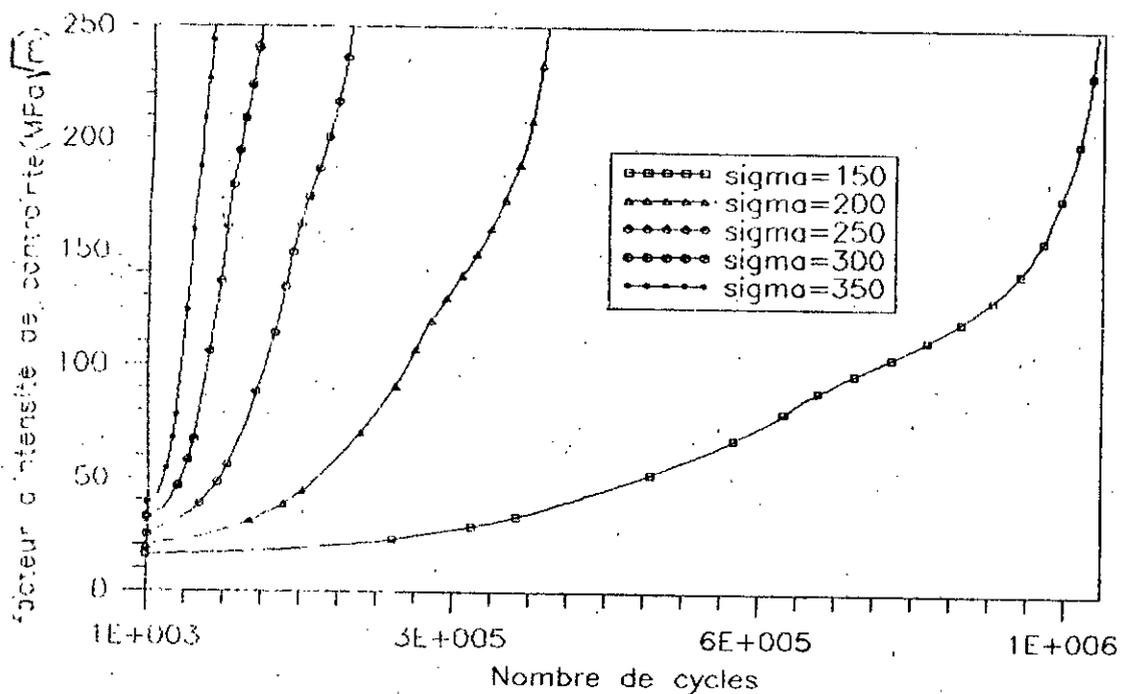


Fig. 5.10a : Influence de la contrainte sur le nombre de cycles de propagation

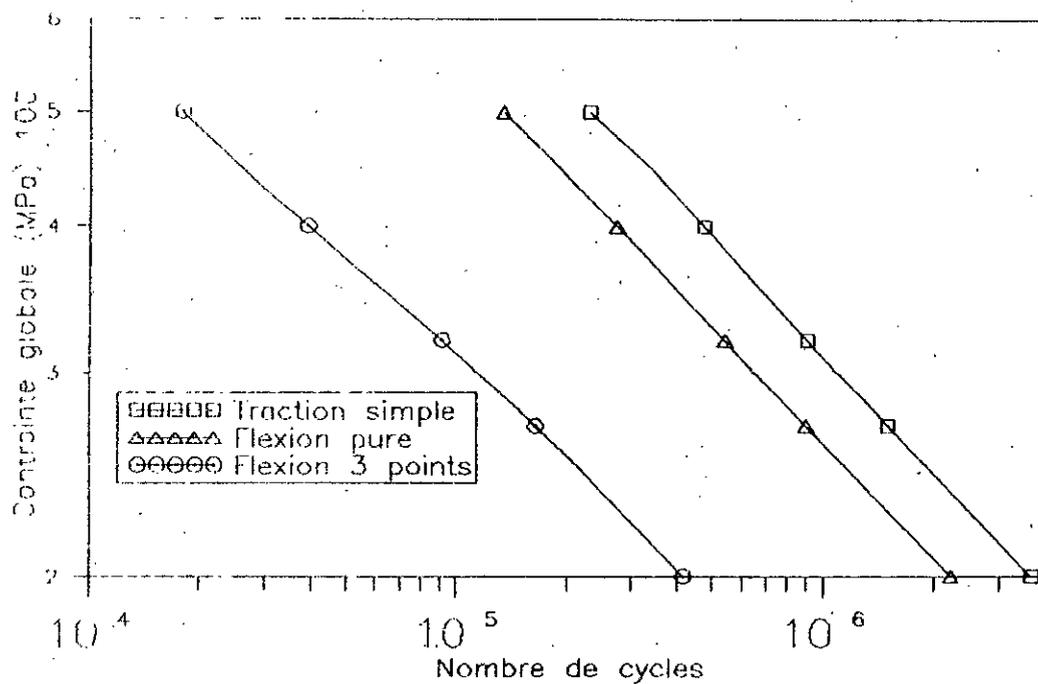


Fig. 5.10b : Influence du type de sollicitation sur le nombre de cycles à rupture

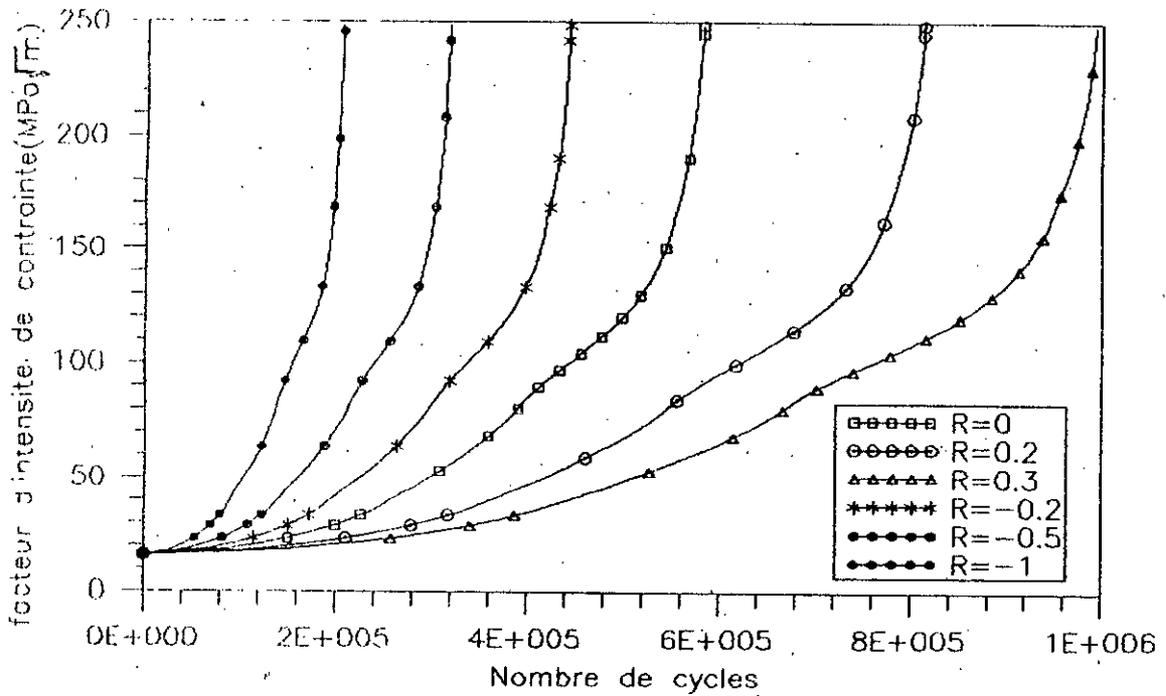


Fig. 5.11 : Influence du rapport de contrainte sur le nombre de cycles de propagation

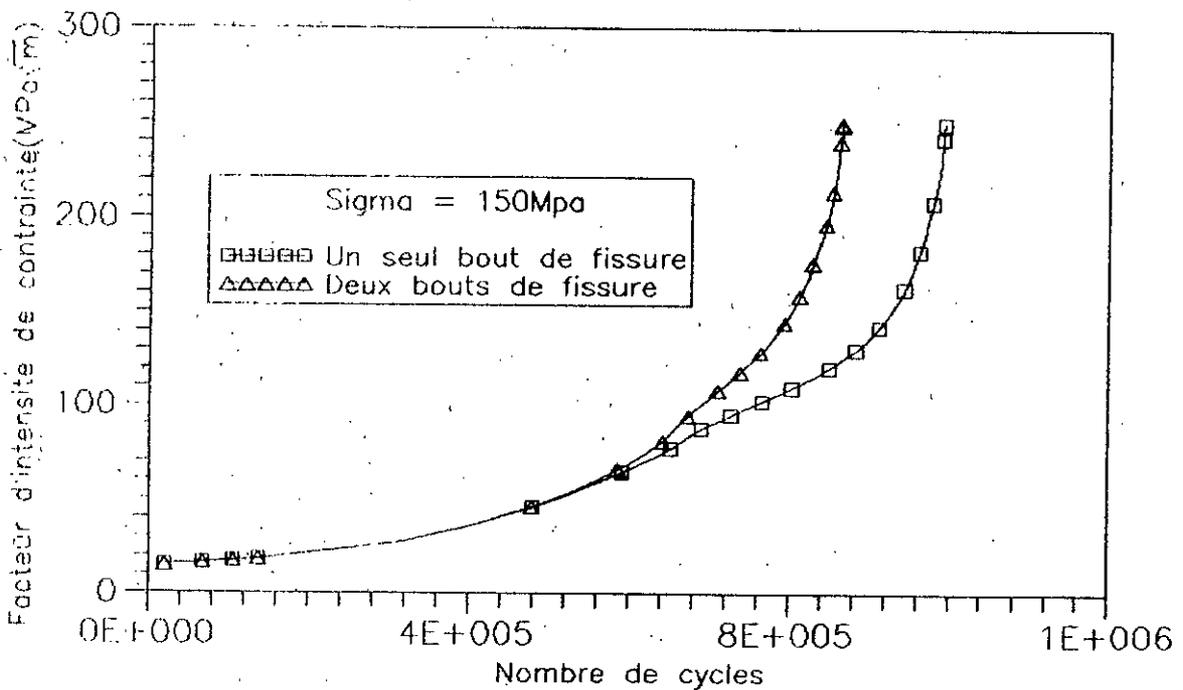


Fig. 5.12 : Facteur d'intensité de contrainte en fonction du nombre de cycles pour deux cas différents de rupture

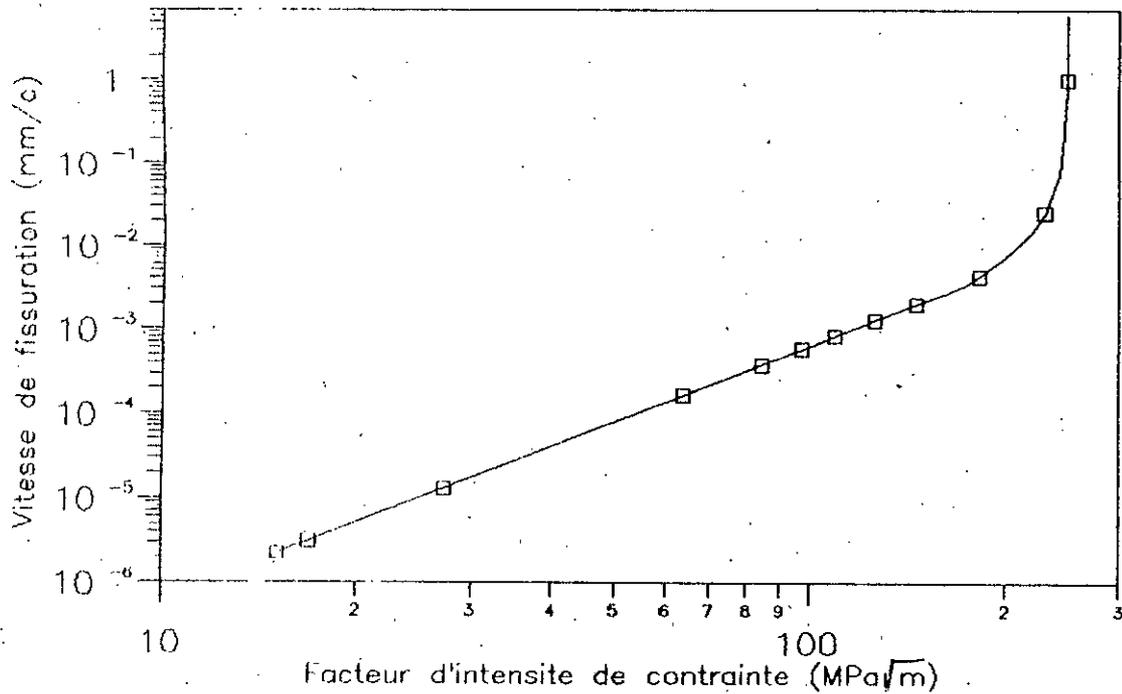


Fig. 5.13 : Vitesse de propagation en fonction du facteur d'intensité de contrainte

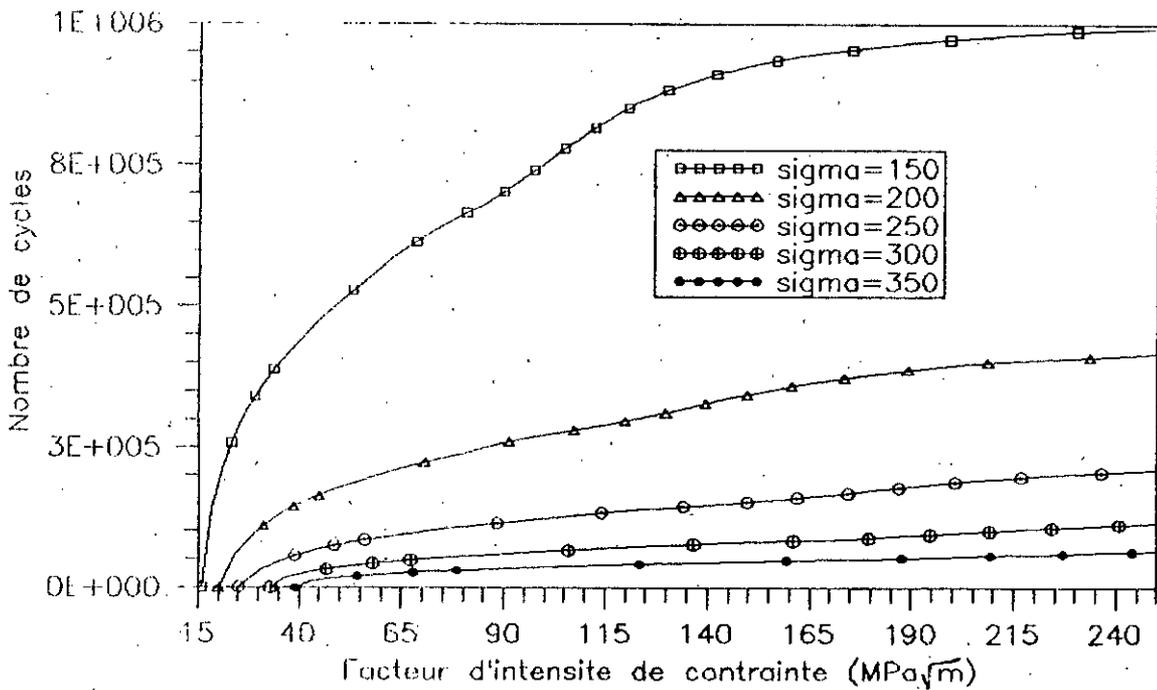


Fig. 5.14 : Influence de la contrainte maximale sur le facteur d'intensité de contrainte

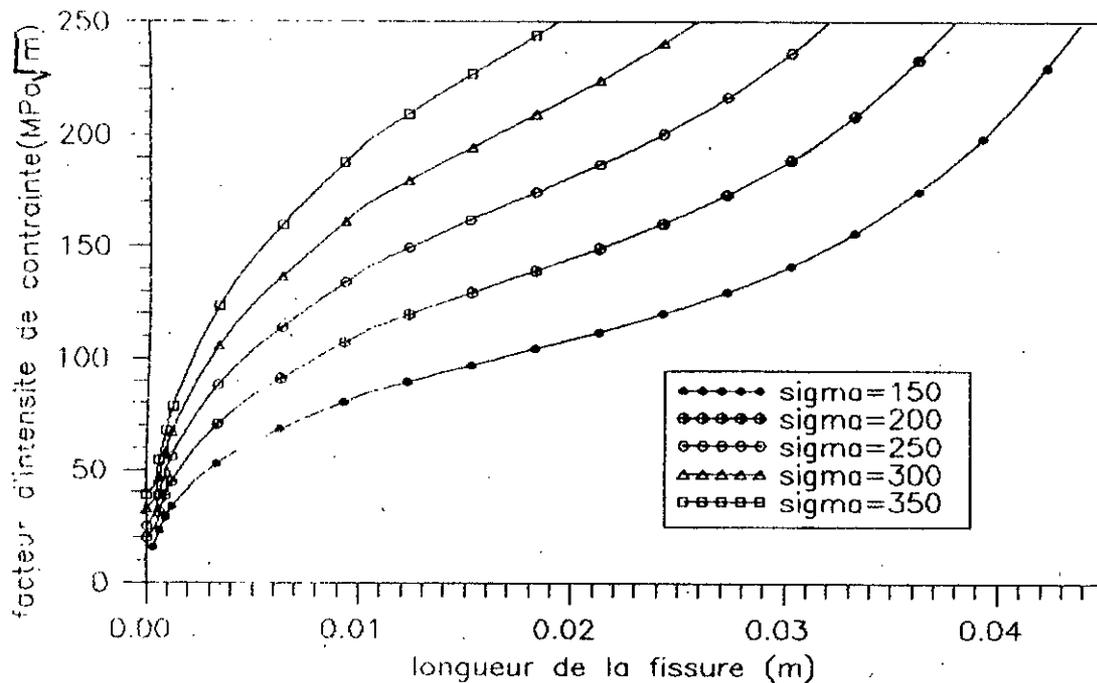


Fig. 5.15 : Influence de la contrainte maximale sur la longueur critique de la fissure

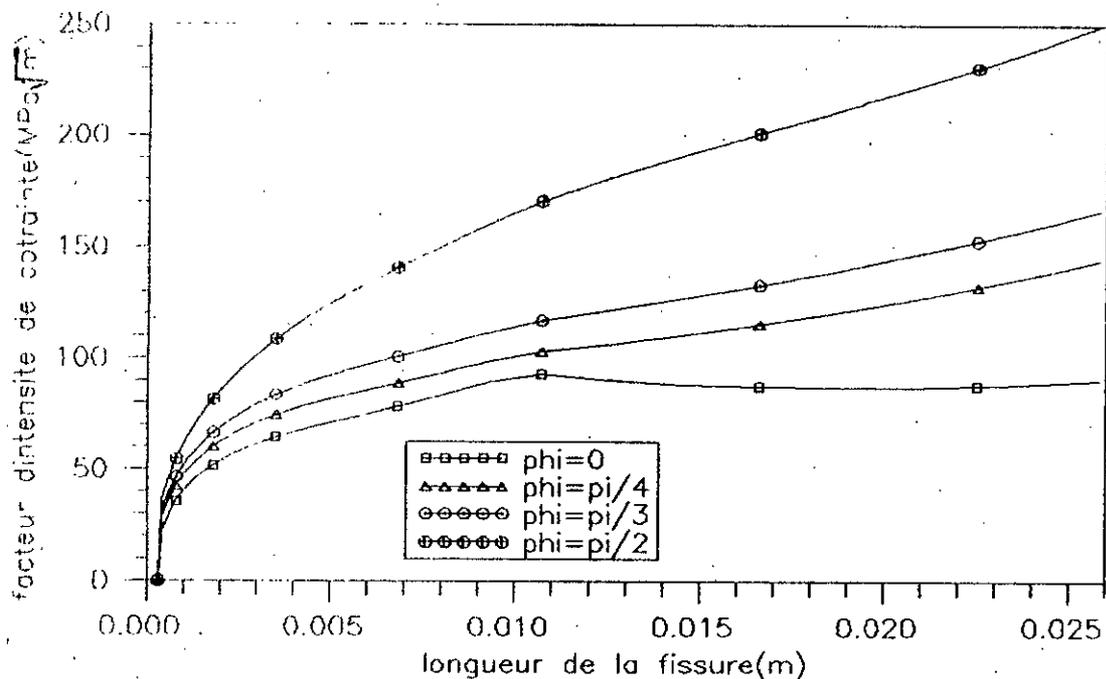


Fig. 5.16 : Influence de l'angle d'orientation sur le facteur d'intensite de contrainte

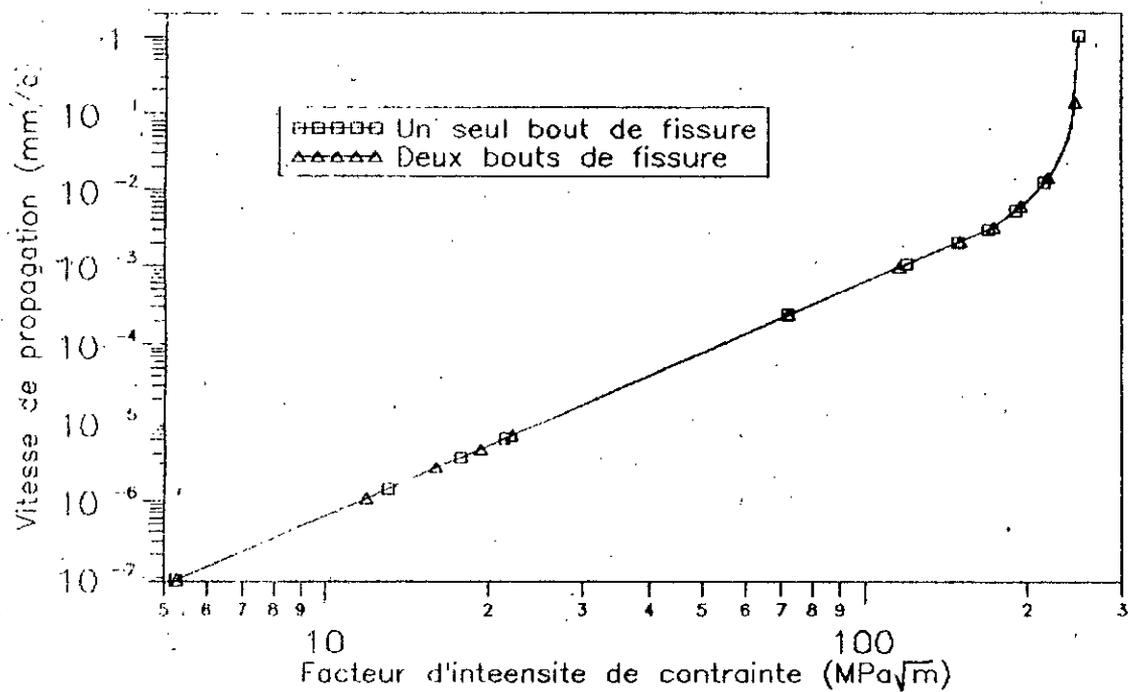


Fig. 5.17 : Vitesse de propagation de fissure en fonction du facteur d'intensité de contrainte pour deux cas différents de rupture

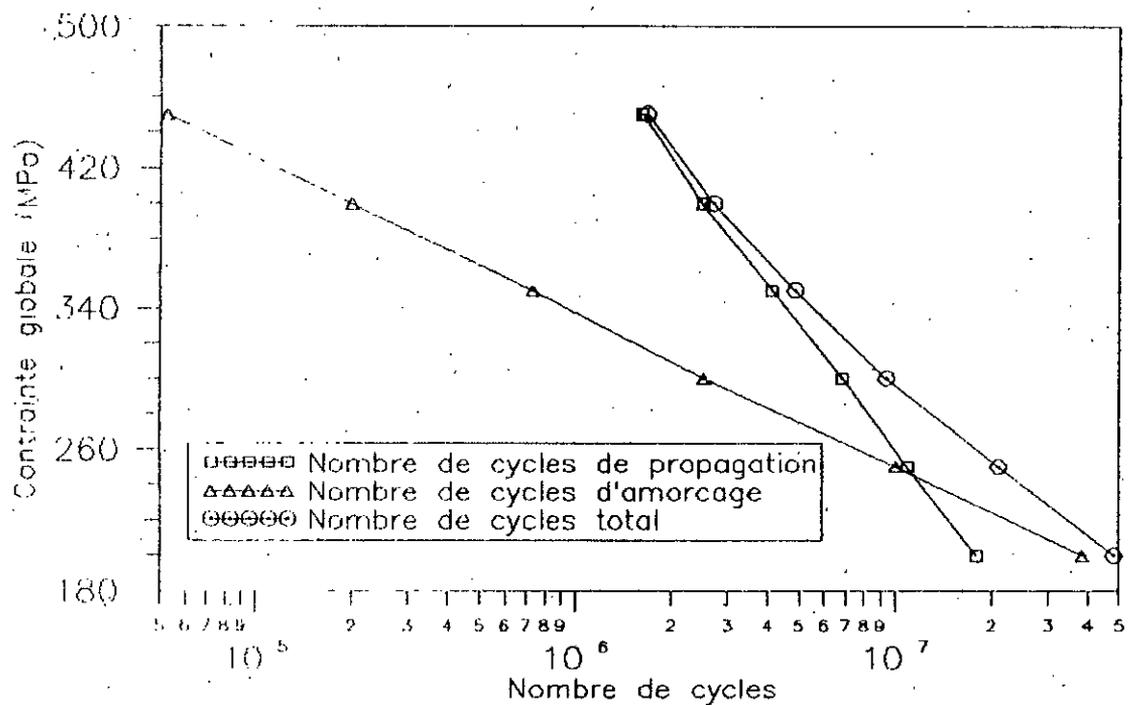


Fig. 5.18 : Influence de la charge maximale sur le nombre de cycles

## V.6) Comparaison des résultats

Pour justifier la validité de notre modèle, on a comparé nos résultats avec ceux obtenus par deux formulations différentes [55] partant des mêmes hypothèses et mêmes conditions initiales:

A) la formule proposée par Popp et coles [56] avec des facteurs correctifs qui ne tiennent pas compte de la géométrie de la structure.

B) la formulation de Newman et Raju [57] qui est très proche de notre modèle, c'est à dire avec des facteurs correctifs qui tiennent compte de la géométrie de la structure.

Les deux formulations ont été comparées à l'expérience et on a pu obtenir différentes combinaisons donnant les résultats présentés dans le tableau V.1. Ces derniers se situent entre 82 et 103 % de la valeur expérimentale, ce qui est une bonne précision.

En ce qui concerne l'amorçage, on a pu comparer la courbe  $(N_a, \sigma)$  avec les résultats expérimentaux obtenus par Pluinage et Boukharrouba [58] fig (5.19), on a un bon accord avec l'expérience.

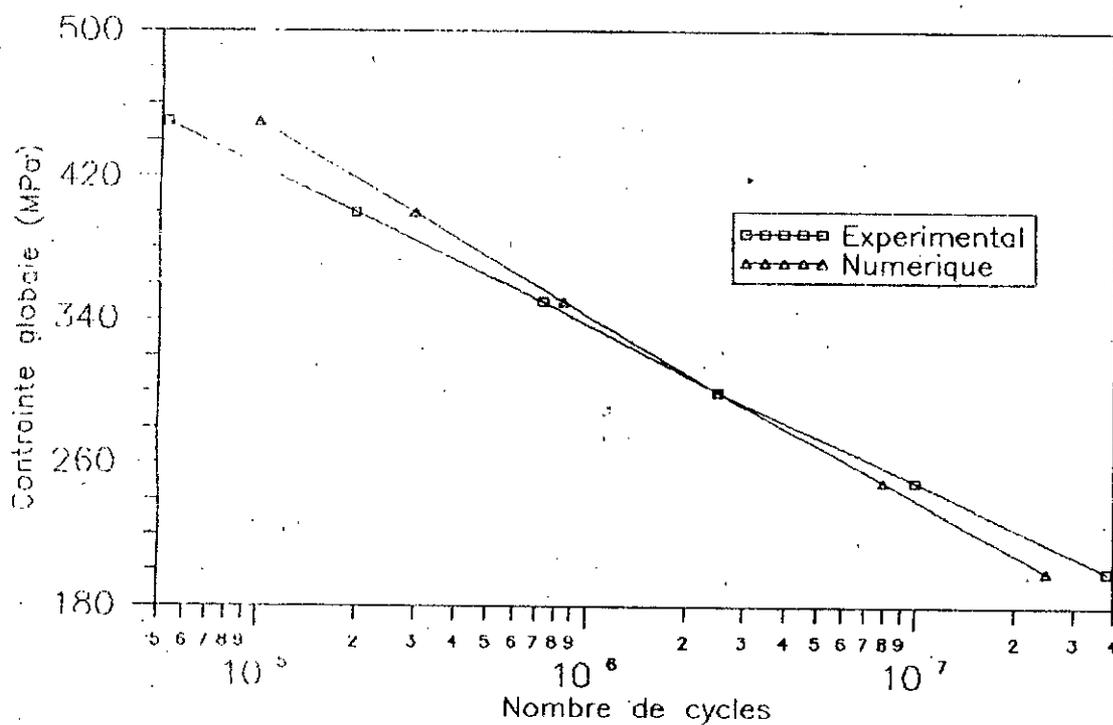


Fig. 5.19 : Influence de la contrainte globale sur le nombre de cycles d'amorçage

TABLEAU V.1

Modèles	Popp et coles		Newman et rajju		Modèle proposé	
	550	650	550	650	550	650
Contrainte(MPA)	550	650	550	650	550	650
Nombre de cycles calculé	14700	13350	16600	15250	14990	15570
$\frac{N \text{ calculé}}{N \text{ effectué}}$	0,90	0,82	1,03	0,95	0,93	0,97

Résultats de la simulation numérique

## V.7 - Conclusion et recommandations

Nous avons présenté dans cette étude une méthode pour calculer la durée de vie des structures fissurées par fatigue, exposées à des différentes sollicitations (traction, flexion pure, flexion trois points) en deux et trois dimensions.

Basé sur les concepts de la mécanique de la rupture nous avons calculé les facteurs d'intensité de contrainte, la vitesse de propagation de la fissure par fatigue, le nombre de cycles nécessaire à l'amorçage et à la propagation de cette dernière.

La présente étude est utilisée pour calculer la durée de vie des châssis fissurés des camions de la SNVI/CVI. La source de ces fissures est la concentration de contrainte causée par les trous de fixation des traverses. La solution de ce problème consiste à éliminer ou à la limite atténuer cette cause. Nous proposons ainsi pour la SNVI/CVI les modifications suivantes:

Application d'un procédé de grenailage de pré-contrainte sur les longerons finis pour améliorer leur résistance en fatigue.

Utilisation du procédé de soudage au lieu du rivetage pour éviter le perçage des trous qui constituent des zones de concentration de contrainte. Cette solution a été proposée par l'un de nos collègues [58], mais la soudure elle-même peut être une source de concentration de contrainte et déformation à cause de la modification microstructurale du matériau ce qui nécessite le choix du meilleur procédé pour faire cette opération mais il faut y mettre le prix.

Changement du type d'acier en utilisant une nuance ayant une plus forte résistance à la fatigue.

Substitution des trous circulaires par des trous ovales (elliptiques) pour atténuer la concentration de contrainte de telle façon que le petit axe de l'ellipse soit:

- confondu avec la trajectoire de la fissure.
- inférieur au rayon des rivets déjà utilisés.

Après cette étude du phénomène de fatigue je souhaite une exploitation sérieuse de ce travail pour améliorer la qualité de notre industrie d'une part et encourager la recherche scientifique d'autre part, je recommande aussi une continuité dans le même sujet par d'autres chercheurs surtout dans le domaine expérimental pour que l'étude soit plus complète.

## REFERENCES

- [1] Wholer's experiments on the strength of metals - August 23 1967 - P:160.
- [2] A.A.Griffith - The phenomena of rupture and flow in solids Trans.R.Sos. (Lond.) Vol. A221 1920 P:163.
- [3] E.J.GOUGH - The fatigue of metals, Scott, Greenwood and son London 1924.
- [4] R.Cazaud: Publication technique N°39 du ministère de l'air 1934.
- [5] J.Lemaitre, J.L.Chaboche - Mécanique des matériaux solides, Bordas Paris 1985.
- [6] G.K.Irwin - Analysis of stresses and strains near the end of a plate traversing a plate. Trans.ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.24 P:361 (1957).
- [7] J.Rice - A path independ integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. J.App.Mec.
- [8] H.D.Dui - Mécanique de la rupture fragile. Masson 1978.
- [9] J.Bailon et C.Bathias - Fatigue des matériaux et des structures.Ecole d'été Québec Canada 1978.
- [10] E.Brock - Eng-fract.mech. Noordhoff, Leyden (1974).
- [11] H.O.Fuchs, R.I.Stephens - Metal fatigue in engineering. Stanford, California - Iowa city, Iowa; April 1980.
- [12] M.Klensil, P.Lukas - Mat. Sci. Eng. 9: 231-240. (1972).
- [13] J.Masounave, J.P.Bailon - Scripta Met. 9: 723 (1975).
- [14] G.Pluvinage - Communication personnelle.
- [15] R.F.Peterson - Material research and standards, Vol.3 N°2; (1963).
- [16] H.Neuber - Kerbspannungslehre, springer, (1958).
- [17] Allery, Birbeck - Eng.Fract.Mech., Vol.4, P:325, (1972).
- [18] A.R.Jack, A.T.Price - International Journal of Fracture Mechanics, 6, N°4 P:401 (1970).
- [19] K.N.Smith, P.Watson et T.H.Topper - Journal of Materials, Vol.5 P:767. (1970).
- [20] P.Paris, F.Erdogan - Trans. ASME, 528-534, December 1963.

- [21] D.Brock, Schyve - NLR - TR, 101-361, National aeronautic and astronautical research institute, Amstrdam, (1963).
- [22] A.G.Forman, Al - Journal of basic Engineering, Vol.89 P:459-464, (1967).
- [23] F.Erdogan, M.Ratwani - Int. Jour. Fract. Mech., Vol.6, P:373, (1970).
- [24] W.R.Sperr - Fracture 77, Vol.2, P:1049-1056, (Waterloo Canada 1977).
- [25] S.R.Walker - ASTM - STP, 462, 1-15 (1970).
- [26] S.J.Le Boiteux - La fatigue dans les matériaux, Ediscience (Paris 1973).
- [27] Chi-Hang Kang - Une famille d'éléments hybrides singuliers pour l'étude des plaques fissurées métalliques et composites, Thèse de doctorat de l'U.T.Compiègne (France 1991).
- [28] S.F.Benzley - Representation of singularities with isoparametric finite elements, Int. Jour. Num. Meth. Engng., Vol.10, 1281-1287 (1974).
- [29] E.O.Boschi, J.D.Barret - stress-intensity factors in anisotropic plates using singular isoparametric element. Int. Jour. Num. Meth. Engng., 17, 445-464 (1976).
- [30] G.Happler, J.S.Bensen - Mixed mode fracture analysis of rectilinear anisotropic plates by high order finite elements, Int. Jour. Num. Meth. Engng., (1981).
- [31] P.D.Hilton - A specialized finite element approach for three dimensional crack problems, Mechanics of fracture 3 (Ed. by G.C.Sih), Noordhoff (1977).
- [32] S. Blackburn - Calculation of stress-intensity factors at a crack tip using special finite element, The mathematical of finite element and applications (Ed. by J.R.Whiteman), Academic press (1973).
- [33] W.S.Blackburn, T.K.Hellen - Calculation of stress-intensity factors in three dimensions by finite element methods, Int Jour. Num. Meth. Engng., 11, 211-229 (1977).
- [34] J.E.Akin - The generation of elements with singularities, Int. Jour. Num. Meth. Engng., 10, 1249-1259 (1976).
- [35] S.D.Fordham, K.C.Shaw - Crack tip finite elements are quadrilateral, Int. Jour. Num. Meth. Engng., 9, 495-507 (1975).
- [36] R.S.Parsoum - On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, Int.J.Num.Meth.Eng., 10, 25-35 (1976).
- [37] R.S.Parsoum - A degenerate solid element for linear fracture analysis of plate bending and general shells, Int. Jour. Num. Meth. Engng., 10, 551-564 (1976).

- [138] A.R.Ingraffea, C.Manu - Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter point elements, Int. Jour. Num. Meth. Engng., 15, 1427-1445 (1976).
- [139] G.de Saxcé, Nguyen Dang Hang - Modified formulae for three dimensional direct Stress-intensity factor computation, Int. Jour. Num. Meth. Engng., (Discussion de la référence 38) (1990).
- [140] Pin Tong, T.H.H.Pian et S.J.Lazry - A hybrid element approach to crack problems in plate elasticity, Int. Jour. Num. Meth. Engng., 7, 297-308 (1973).
- [141] Pin Tong - A hybrid crack element for rectilinear anisotropic material, Int.J.Num. Meth. Engng., 11, 377-403 (1977).
- [142] E.Y.Lin, Pin Tong - A hybrid crack element for the fracture mechanics analysis of composite materials, Numerical method in fracture mechanics (Ed. by A.R.Luxmore and D.R.J.Owen), Swansea (1978)
- [143] J.J.Mandell, F.J..Mc Garry, S.S.Wang et J.Im - Stress-intensity factor for anisotropic fracture test specimens of several geometries, Jour. Comp. Materials, 8, 106-116 (1974).
- [144] H.C.Rhee, S.N.Atluri - Hybrid stress finite element analysis of bending of plate with a through flaw, Int. Jour. Num. Meth. Engng., 10, 551-564 (1976).
- [145] H.H.Chen, P.Y.Chen - A hybrid displacement finite element model for the bending analysis of thin cracked plates, Int. Jour. Num. Meth. Engng., 13-106 (1984).
- [146] Rupture Contrôle Sûreté - (Revue scientifique), 470-478 R.F.C. France (1988).
- [147] A.S.Beranger, P.Heuillet et D.Lai - Travaux pratiques mécanique de la rupture, U.T.Compiègne France (1991).
- [148] P.D.Hilton - A specialized finite element approach for three-dimensional crack problems, Mechanics of fracture 3 (ed. by G.Giblin), Noordhoff (1977).
- [149] A.S.Patil, W.N.B.Nashibaman - Three-dimensional finite element analysis of cracked thick plates in bending, Int. J. Num. Meth. Engng., 19, 293-303 (1983).
- [150] ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section XI, Article A 3000 P:229.
- [151] R.Labbens, A.Pellissier Tanon et J.Héliot - ASTM STP 590 94368 (1976).
- [152] J.J.McGowan, M.Raymond - XIII National Symposium on Fracture Mechanics (1978).
- [153] A.E.green and Sneddon - The distribution of stress in the neighborhood of a plate elliptical crack in an elastic solid. Proceedings, Cambridge philosophical soc. Vol 46 1950 P:159-164.

[154] G.P. Irwin - Crack extension force for a part-through crack in a plate, Journal of applied mechanics, December 1962 PP: 651 - 654.

[155] L.Foret, J.Y.Guedou, A.Pineau - Résistance à la propagation de fissure de l'alliage inconel 718.

[156] H.G.Popp, A.Coles - Subcritical crack growth criteria for inconel 718 at elevated temperature - Proceeding airforce conference on fatigue and fracture of aircraft structures and materials september 1970 dayton U.S.A.

[157] J.C.Hewman, E.S.Raju - An empirical stress intensity factor equation for the surface crack - Eng. Fract. Mech. Vol. 15 - N° 1-2 1981 P:185.

[158] T.Boukharrouba - Thèse de magister - Fevrier 1991 - E.N.P (ALGERIE).

[159] R.J.Hartranft, G.C.Sih - Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks, Int. Math. and physics, 47, 276-291 (1968).

[160] B.Fredrikson - Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems, Computers & Structures, 6, 281-290 (1976).

[161] D.P.Jones, J.L.Swedlow - The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate, Int. J. Fract., 11, 897-914 (1975).

[162] F.S.Heming Jr - Sixth order analysis of crack closure in bending in an elastic plate, Int. J. Fract., 16, 289-304 (1980).

[163] A.S.Alwar, K.N.R.Nambissan - Influence of crack closure on the stress intensity factor for plate subjected to bending-A 3-D finite element analysis, Eng.Fract.Mech., 17, 323-333 (1983).

[164] G.Yagawa, H.Hirayama - A finite element method for contact problems related to fracture mechanics, Int. J. Num. Meth. Inqng., 20, 2175-2195 (1984).

[165] M.V.V.Murthy, S.Viswanath, A.V.Krishna et K.P.Rao - A two dimensional model for crack closure effect in plate under bending, Eng.Fract.Mech., 29, 435-452 (1988).

[166] 3.2.1 eng. G.Touzot et G.de Saxé - A mixed finite element solution for the elastic contact problems with friction, published in Euro. Struct. Mech., (1991).

[167] Manuel de référence SIC V3.0, MNM, U.T.Compiègne (1990).

[168] B.Gross, Al. - NASA TN D-2603 (1965).

## ANNEXE 1: ETUDE DE LA FERMETURE D'UNE FISSURE DE PLAQUE EN FLEXION

### 1- Introduction

Dans les problèmes de la mécanique élastique linéaire de la rupture, la non-linéarité émane de la fermeture des lèvres de la fissure. La fermeture de la fissure est provoquée par une charge extérieure. Quand une fissure se ferme pendant un chargement cyclique, les lèvres de la fissure se touchent. Pour une plaque fissurée en flexion pure, les lèvres de la fissure du côté de la compression se touchent également. La solution théorique de Hartmann et Sih [1] pour une plaque fissurée en flexion pure, est basée sur l'hypothèse que des tensions de membrane suffisamment fortes existent pour éviter le contact des lèvres de la fissure du côté en compression de la plaque. En toute rigueur, une partie de la lèvre de la fissure du côté comprimé sera en contact sur une aire, qui dépend de la dimension de la plaque et de la longueur de la fissure. Une analyse exacte de l'effet de fermeture de fissure est très compliquée, à cause de la nature tridimensionnelle de cette analyse et de la non-linéarité due au contact.

La plupart des travaux tenant compte de la fermeture de fissure sont basés sur une méthode numérique. Fredrikson [2] a étudié l'influence de la fermeture de fissure sur le facteur d'intensité de contrainte pour une plaque avec une fissure débouchante pendant un chargement cyclique sous une tension uniforme et un moment de flexion. Jones et Swedlon [3] ont proposé des solutions numériques en déplacement au voisinage du front de

fissure en utilisant la théorie de plaque de Kirchoff. Heming [4] a amélioré cette méthode avec la théorie de plaque de Mindlin. Pour tenir compte de la fermeture de la fissure, ils ont utilisé la technique de multiplicateur de Lagrange. Pour étudier l'effet de cette fermeture sur les facteurs d'intensité de contrainte traversant l'épaisseur de plaque, Alwar et Nambissant [5] ont utilisé un élément 3-D dégénérés avec des éléments transitions entre éléments singuliers et éléments réguliers pour la variation linéaire du champ singulier de contrainte. L'aire de fermeture sur le côté en compression a été détectée par procédure d'essai et erreur. Yagawa et Hirayama [6] ont résolu le même problème en utilisant la méthode de fonction de pénalité en 3D. Récemment, Murthy, Viswanash et Rao [7] ont développé une méthode analytique basée sur la méthode de collocation. Comme il est montré dans le Tableau 2, les solutions numériques proposées par les auteurs mentionnés plus haut conduisent à deux conclusions opposées: l'effet de fermeture de la fissure par flexion augmente le facteur d'intensité de contrainte ou le diminue.

Feng, Touzot et de Saxé [8] ont développé une méthode numérique pour les problèmes de contacts 2D et 3D, basée sur la méthode mixte, dans un logiciel appelé SIC [9].

Pour le problème de fermeture de fissure dû à une charge cyclique on trouve dans la littérature l'analyse d'une plaque avec une fissure débouchante sujette à une traction uniforme et un moment de flexion par une modélisation 2D. La même analyse est faite sur une plaque avec fissure centrale traversant l'épaisseur en flexion par une modélisation 3D. L'effet de fermeture sur les facteurs d'intensité de contrainte, sur l'aire de contact et sur la distribution de  $K_{II}$  le long de l'épaisseur est discuté.

## II-DESCRIPTION DU PROBLEME DE CONTACT

### II-1)Equation de contact

Le phénomène de contact est caractérisé par sa propre non-linéarité, à cause de la variation de l'aire de contact avec la déformation et l'irréversibilité de l'effet de frottement. Pour traiter l'irréversibilité avec la formulation incrémentale, le chargement est divisé en plusieurs pas ou incréments et les équations de contact sont résolues par la méthode itérative à chaque pas.

Nous considérons deux solides A et B qui seront en contact (Fig.A1). Sur la surface de contact, le repère local  $x',y',z'$  est défini en chaque étape incrémentale et est fixé au solide B. Nous supposons que le plan  $x'-y'$  est tangent au solide B et l'axe  $z'$  est un vecteur normal au solide B dans la direction du volume A au point de contact étudié.

En pratique ces les équations du système global sont modifiées de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_{12} \\ K_{12}^T & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad 1$$

Où  $F_c$  est un vecteur de forces extérieures et  $F_c$  est un vecteur de forces de contact. Afin de réduire la dimension du problème avant la procédure itérative, on peut utiliser la technique de condensation. On reformule l'équation d'équilibre de la structure sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} \\ K_{rc}^T & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_r \\ F_c^* \end{bmatrix} \quad 2$$

$$K_{rr} q_r + K_{rc} q^* = F_r, \quad K_{rc}^T q_r + K_{cc} q^* = \tilde{F}^* \quad 3$$

Où  $q^*$  sont les déplacements des noeuds de contact et  $q_r$  sont les déplacements des autres noeuds. Les degrés condensés  $q_r$  sont éliminés par:

$$q_r = K_{rr}^{-1} (F_r - K_{rc} q^*) \quad 4$$

Remplaçant 4 dans 3, on obtient:

$$K^* q^* = F^* \quad 5$$

Avec

$$K^* = K_{cc} - K_{rc}^T K_{rr}^{-1} K_{rc}, \quad F^* = \tilde{F}^* - K_{rc}^T K_{rr}^{-1} F_r$$

Les déplacements relatifs  $q_R^*$  des noeuds de A et B susceptibles de venir en contact sont reliés aux déplacements nodaux  $q_A^*$  par la relation de compatibilité suivante:

$$q_R^* = q_A^* - q_B^* = \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_A^* \\ q_B^* \end{bmatrix} \quad 6$$

Par l'équation d'équilibre de forces des noeuds de contact dans les solides A et B, on obtient:

$$\bar{F}_A^* = -\bar{F}_B^* = F^* \quad \text{d'où} \quad F^* = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$$

Avec:

$$F^* = F_e^* + F_c^* \quad 7$$

En remplaçant 6 et 7 dans 5, on obtient:

$$q_R^* = C^T K^{*-1} C F^* = S^* F^* \quad 8$$

Où  $S$  est la matrice de flexibilité.

Le vecteur distance entre les solides A et B est alors défini par:

$$X^* = S^* q_R^* X_0^* \quad 9$$

Où  $X_0^*$  est le vecteur distance initial. Introduisant 8 et 9, le vecteur distance s'exprime en fonction du vecteur des forces de contact et la matrice de flexibilité par:

$$X^* = S^* F_c^* + U_{Fe}^* + X_0^* \quad 10$$

Avec

$$U_{Fe}^* = S^* F_e^*$$

Où  $U_{Fe}^*$  est le vecteur des déplacements relatifs à chaque paire de noeuds de contact dus à l'application des forces extérieures  $F_e^*$ .

Pour travailler en coordonnées locales, nous employons la matrice de rotation  $T$  correspondant à la transformation du repère local  $(x', y', z')$  au repère globale  $(X, Y, Z)$ . Soient  $\Delta x$  et  $f_e$  respectivement le vecteur des distances et le vecteur des forces de contact dans le repère local. L'équation 4 s'exprime dans le repère local sous la forme suivante:

$$x = S f_c + u_{fe} + x_0 \quad 11$$

Avec

$$X^* = T^T x, \quad F_c^* = T^T f_c, \quad S = T S^* T^T, \quad u_{fe} = T U_{Fe}^*, \quad x_0 = T X_0^*$$

## II-2 Forme incrémentale

À cause du caractère irréversible du phénomène de contact, l'équation de contact (11) doit être écrite sous forme incrémentale. Les quantités mécaniques précédentes peuvent donc être décomposées en incréments suivant le schéma suivant:

$$\begin{aligned} x^i &= x^{i-1} + \Delta x^i, & x_0^i &= x_0^{i-1} + \Delta x_0^i, \\ f_c^i &= f_c^{i-1} + \Delta f_c^i, & u_{fe}^i &= u_{fe}^{i-1} + \Delta u_{fe}^i \end{aligned}$$

À la fin du pas (i-1), on doit avoir:

$$x^{i-1} = S f_c^{i-1} + u_{fe}^{i-1} + x_0^i \quad 12$$

Tandis qu'à la fin du pas i, on aura:

$$\Delta x^i = S \Delta f_c^i + \Delta u_{fe}^i + \Delta x_0^i \quad 13$$

Par soustraction membre à membre des deux équations précédentes, l'équation 10 peut être exprimée sous la forme:

$$\Delta x^i = S \Delta f_c^i + \Delta u_{fe}^i + \Delta x_0^i \quad 14$$

ou sous la forme abrégée:

$$S \Delta f_c^i = g \quad 15$$

avec

$$g = \Delta x^i - \Delta x_0^i - \Delta u_{fe}^i$$

où  $\Delta f_c^i$  et  $\Delta x_0^i$  sont connus  $\Delta x^i$  et  $\Delta u_{fe}^i$  inconnus.

### II-3 Loi de contact

Si on ne considère que les composantes relatives à un couple de noeuds en contact, le vecteur de distance et le vecteur de forces nodales à l'interface peuvent être décomposés en partie normale et tangentielle à la surface de contact (Fig.A2):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_n \\ x_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_n \\ f_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_0^*}{\|\mathbf{x}_0^*\|}$$

Si les tractions sont à peu près uniformes localement, on peut remplacer le vecteur des tractions locales aux noeuds par celui des réactions car la loi de contact ne fait intervenir que la direction des efforts de contact.

On peut donc écrire la loi de contact sous la forme discrétisée suivante:

-contact unilatéral:

$$\left. \begin{array}{l} \text{non-pénétration: } x_n \geq 0 \\ \text{compression: } f_n \geq 0 \end{array} \right\} \text{ et } x_n f_n = 0$$

friction:

adhérence: si  $\|f_t\| < \mu f_n$  alors  $\dot{x}_t = 0$

glissement: si  $\|f_t\| < \mu f_n$  alors il existe  $\lambda > 0$

$$\text{tel que } \dot{x}_t = -\lambda \frac{f_t}{\|f_t\|}$$

Utilisant un schéma implicite, nous devons vérifier la loi de contact à la fin du pas en chaque couple de noeuds:

$$x_{n0} + \Delta x_n \geq 0$$

$$f_{n0} + \Delta f_n \geq 0$$

$$(x_{n0} + \Delta x_n) (f_{n0} + \Delta f_n) = 0$$

Ensuite,

si  $\|f_{t_0} + \Delta f_t\| < \mu(f_{n_0} + \Delta f_n) = 0$  alors  $\Delta x_t = 0$

si  $\|f_{t_0} + \Delta f_t\| = \mu(f_{n_0} + \Delta f_n) = 0$  alors  $\exists \lambda > 0$  tel que:

$$\Delta x_t = \lambda \frac{f_{t_0} + \Delta f_t}{\|f_{t_0} + \Delta f_t\|}$$

L'ensemble de (15) et ces relations définit le problème non-linéaire de contact.

### II-3 Procédure de résolution itérative

Pour chaque pas, on obtient la solution du problème non-linéaire de contact par une méthode itérative décrite dans [10]. A chaque itération, on calcule un nouvel itéré de  $\{\Delta x^i\}$  et on modifie  $\{S\}$  et  $\{g\}$ , de manière à satisfaire au mieux la loi de contact local, puis on calcule une nouvelle valeur de  $\{\Delta f_c^i\}$  en résolvant l'équation (15). Cette procédure itérative poursuivie jusqu'au moment où toutes les conditions de contact sont satisfaites. Dès que nous avons appliqué tous les pas de chargement, nous obtenons les forces de contact finales  $F_c$ . En les mettant dans l'équation (1), nous pouvons obtenir les deux vecteurs indéterminés  $q$  et  $b_2$ , lesquels sont les déplacements des noeuds et les facteurs d'intensité de contrainte. L'algorithme en programmation structurée est le suivant:

lire les données

construire  $[K]$  et  $\{F_e\}$

modifier  $[K]$  et  $\{F_e\}$  pour tenir compte des conditions aux limites  
si calcul du contact alors

décomposer  $[K]$

construire  $[S]$

pour chaque pas de chargement répéter

construire  $\{g\}$

répéter

modifier  $[S]$  et  $\{g\}$

résoudre  $[S]\{\Delta f_c^i\} = \{g\}$

calculer  $\{f_c\}$  et  $\{\Delta x\}$

jusqu'à état de contact non changé

résolution de  $[K] \begin{pmatrix} q \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_c \end{pmatrix}$

sinon

résolution de  $[K] \begin{pmatrix} q \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_e \\ 0 \end{pmatrix}$

post-calcul

impression des résultats

## II-4 Résultats numériques

II-4-1 Contact ligne: plaque avec une fissure débouchante  
sous une charge cyclique:

Le premier exemple étudié est une plaque avec une fissure débouchante soumise à une tension  $\sigma_0$  et à un moment  $M$ , comme montré à la figure A2. On suppose l'état de contrainte plane. A cause de la symétrie du problème, seule une moitié de la plaque est analysée avec deux éléments singulier. Dans le maillage on a utilisé 4 éléments et 232 degrés de liberté, comme montré à la fig.A3.

La figure A4 montre la distribution du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  obtenu en fonction de  $a/w$  pour le cas de la traction pure en la comparant à la solution théorique de Gross [10] et à la solution numérique de Fredriksson [11]

Les figures A5, A6 et A7 montrent les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  comme fonction du moment appliqué  $M$  ( $m=M/\sigma_0 hw^2$ ,  $h$  : épaisseur de plaque) à traction uniforme  $\sigma_0$  constante.

Comme le moment appliqué est croissant, le facteur d'intensité de contrainte décroît linéairement jusqu'à ce que la fissure soit complètement fermée. Quand la fissure est fermée, la non-linéarité apparaît. Cependant, la non-linéarité n'est pas très prononcée, mais son intensité dépend de la longueur de la fissure. Le changement de signe de  $K_{II}$  correspond à l'inversion du sens des  $\tau$  moyens autour de la pointe de la fissure. Nous remarquons également que les valeurs de  $K_{II}$  sont négligeables par rapport à celle de  $K_I$ .

Pour le cas  $a/w > 0.5$ , la valeur de  $K_I$  augmente encore après fermeture de la fissure mais reste petite. La fermeture n'est pas complète le long des lèvres de la fissure à cause de la portion de tension du moment. La figure A6 indique bien ce phénomène.

La figure A6 montre la région de fermeture de fissure obtenue pour le cas  $a = 0.25w$ ,  $a = 0.5w$  et  $a = 0.625w$ . on trouve que le premier point de fermeture de la fissure dépend de la longueur de fissure et du moment appliqué. Les valeurs  $m = 0.2$ ,  $0.27$ ,  $0.325$  correspondent respectivement aux cas  $a = 0.25w$ ,  $a=0.5w$  et  $a = 0.625$ .

La figure A8 montre l'effet du frottement sur les lèvres de la fissure pour le cas  $a = 0.5w$ . Nous trouvons que l'influence du frottement sur le facteur d'intensité de contrainte est négligeable dans le cas  $\mu = 0.1$  et  $\mu = 0.2$ .

II-4-2 Contact de surface: Une plaque avec une fissure centrale en flexion pure.

Le deuxième exemple est une plaque avec une fissure centrale traversant l'épaisseur en flexion pure (Fig.A9). A cause de la symétrie du problème, seul un quart de la plaque est analysé.

Pour le cas de non-fermeture de la fissure, la valeur obtenue de  $K_1$  pour le rapport  $h/2a = 0.25$  est montrée à la figure A11 et comparée avec les résultats de Alwar et Nambissan [12] et de Hilton [13].

La figure A12 montre les résultats obtenus, lesquels indiquent que l'effet de fermeture de fissure diminue la valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte  $K_1$  sur la surface de compression d'environ 9% dans le cas  $h/2a = 0.1$ . La figure A13 représente l'aire de contact des lèvres de la fissure. On représente également les comparaisons de différents résultats donnés dans la littérature au tableau I.

## II.5 - Discussion

L'usage d'une théorie de plaque d'ordre inférieur (Kirchhoff) dans ce problème n'est pas adéquat à cause de la non prise en compte de l'effet de cisaillement, qui conduit à une augmentation de  $K_1$ .

Avec une théorie de plaque d'ordre supérieur (Reissner/Mindlin), la fermeture de la fissure provoque la réduction du déplacement d'ouverture sur le côté en traction de même que dans le plan moyen.

Tableau I Comparaison des différents résultats

Auteurs	Méthodes numériques			Influence sur $K_I$
	dimen	élément	contact	
Jones, Swedlon (1975)	2-D	Kirchhoff	multiplicateur de Lagrange	augmente
Healing (1990)	2-D	Mindlin	multiplicateur de Lagrange	diminue
Murthy, Viswanat Murty, Rao (1988)	2-D	Mindlin	méthode de collocation	diminue de 10%
Yagawa, Hirayama (1984)	3-D	volume	fonction de pénalisation	augmente de 43%
ALLERT Nambiassan (1983)	3-D	volume dégénéré	erreur et essai	diminue de 11%
Chi-Hang Kang (1991)	3-D	volume hybride métis dégénéré	méthode mixte	diminue de 9.5%
Smith, Smith (1970)		expérience	photoélastique	augmente de 40%

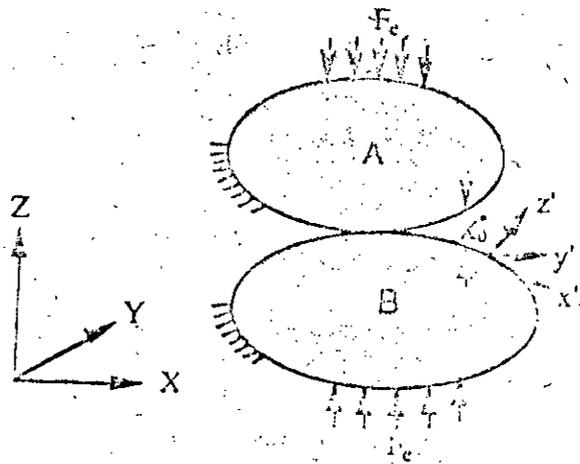


Fig. A1 Système coordonné du problème de contact

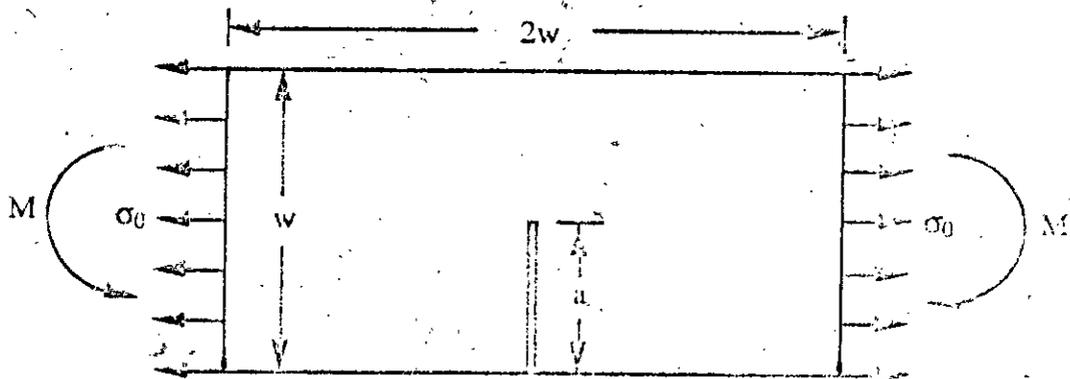


Fig. A2 Une fissure débouchante et des chargements

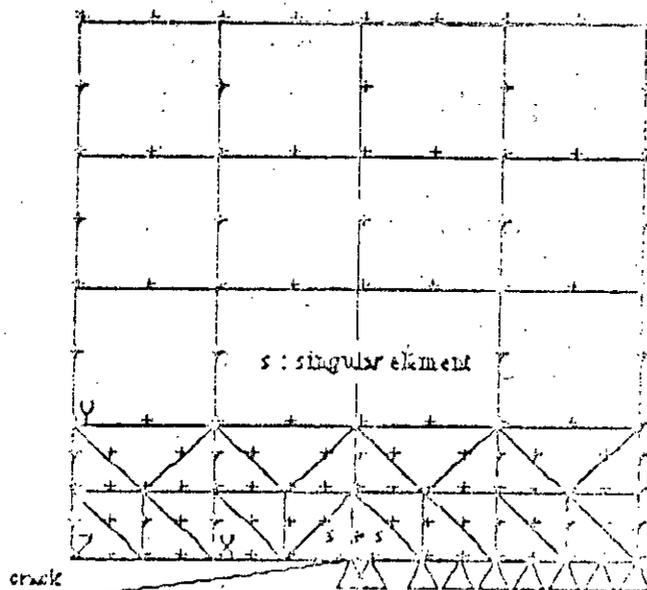


Fig. A3 Maillage de la moitié de la plaque

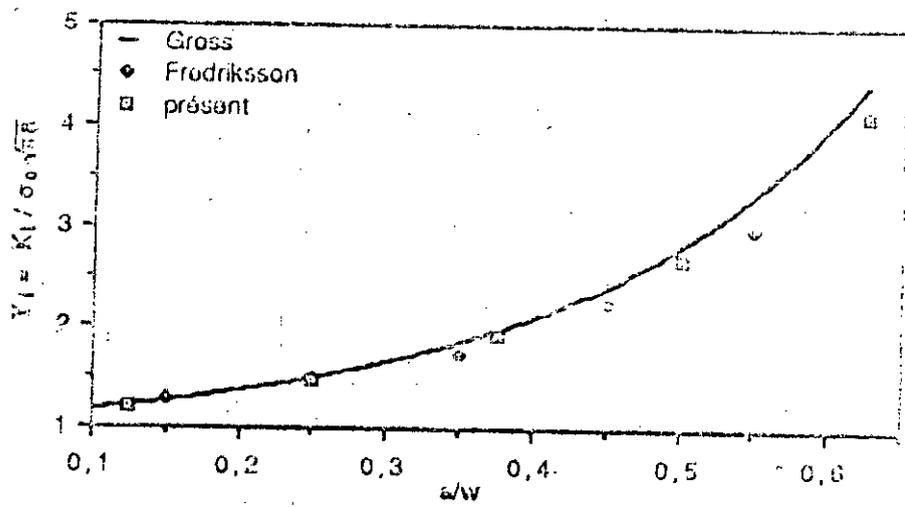


Fig. A4  $Y_I = K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  pour une plaque avec une fissure débouchante en traction pure

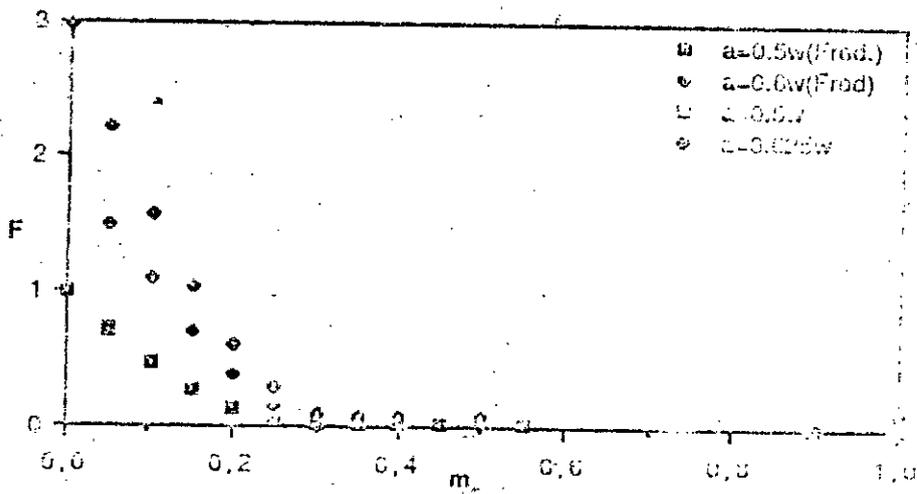


Fig. A5 Fermeture de la fissure.  $F = K_I^2 / K_0^2$  ( $K_0$  est la valeur de  $K_I$  pour  $m=0$ ,  $a=0.5w$ )

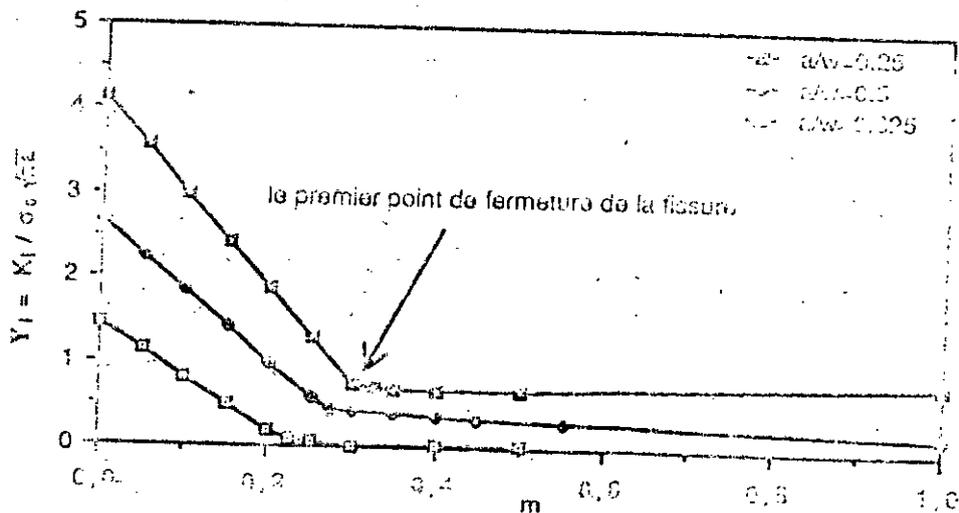


Fig. A6 Variation de  $K_I$  (cas : fissure fermée),  $Y_I = K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$

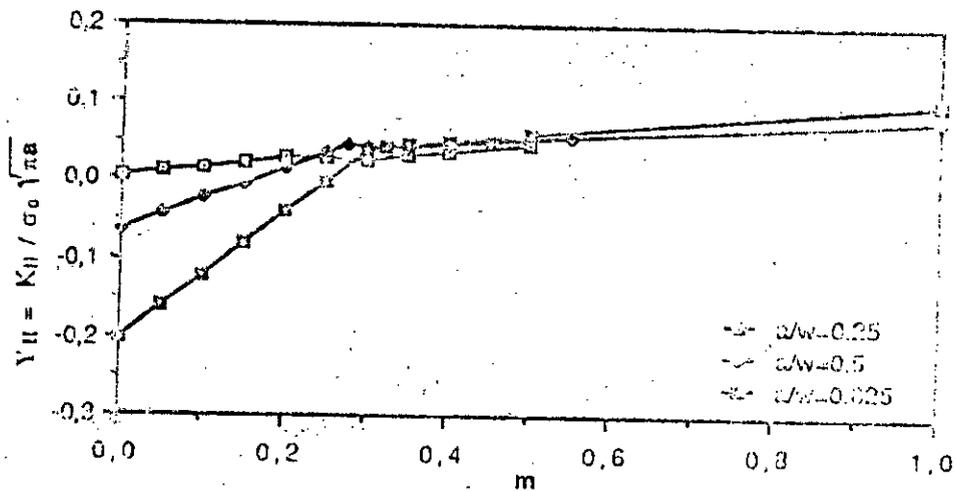


Fig. A7 Variation de  $K_{II}$  (cas : fissure fermée),  $Y_{II} = K_{II} / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$

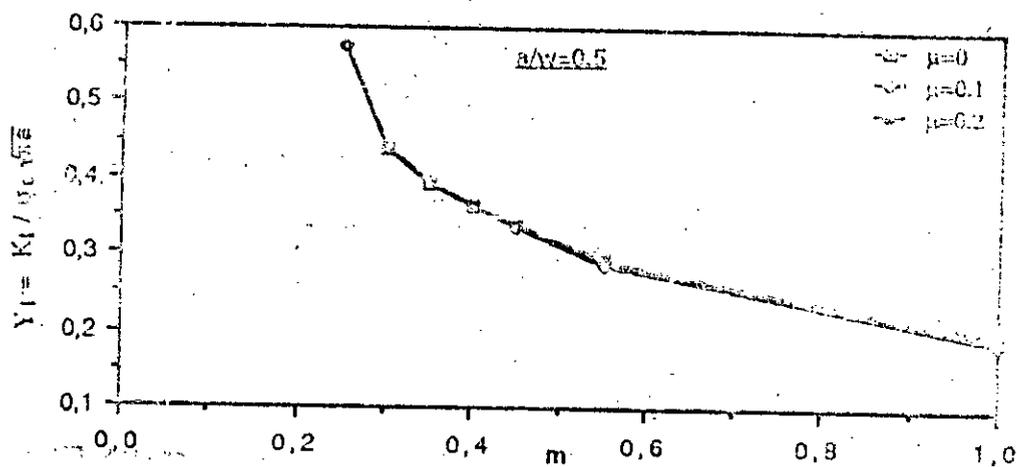


Fig. A8 L'effet de frottement pour le cas  $a/w=0.5$

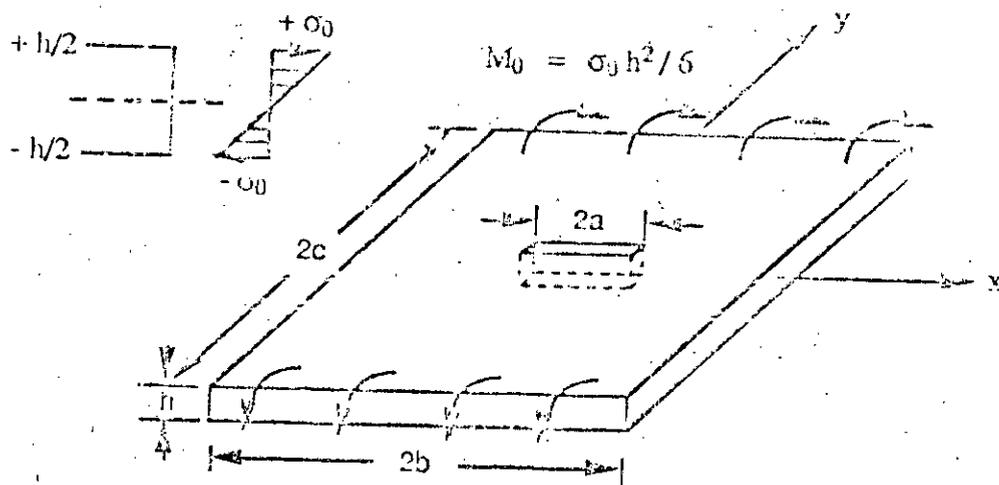


Fig. A9 PIAQUE avec une fissure centrale traversant l'épaisseur en flexion pure

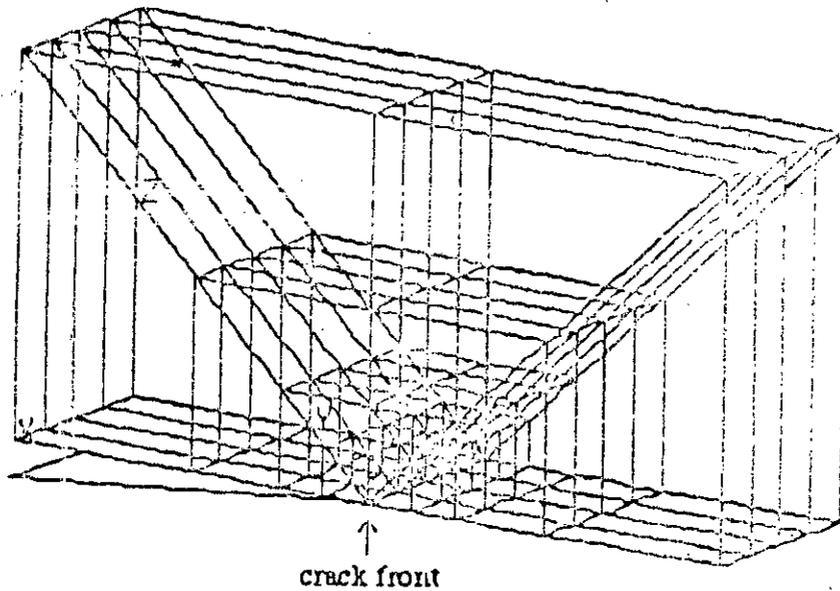


Fig. A10 Le maillage du quart de plaque

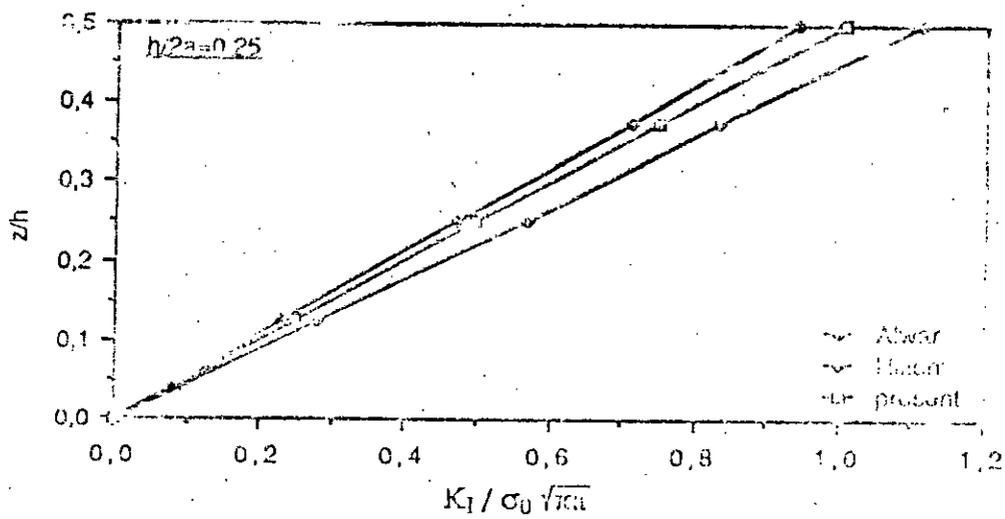


Fig. A11 Variation de  $K_I$  traversant l'épaisseur de plaque (non-fermeture)

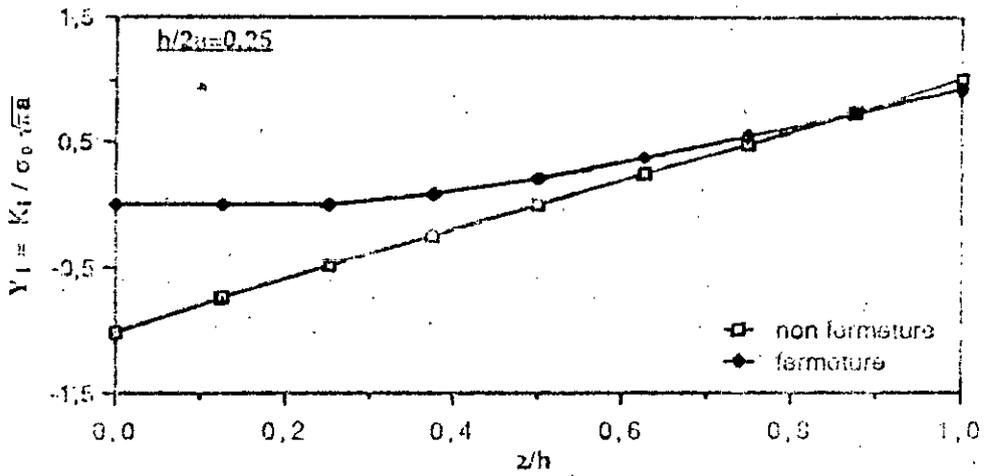
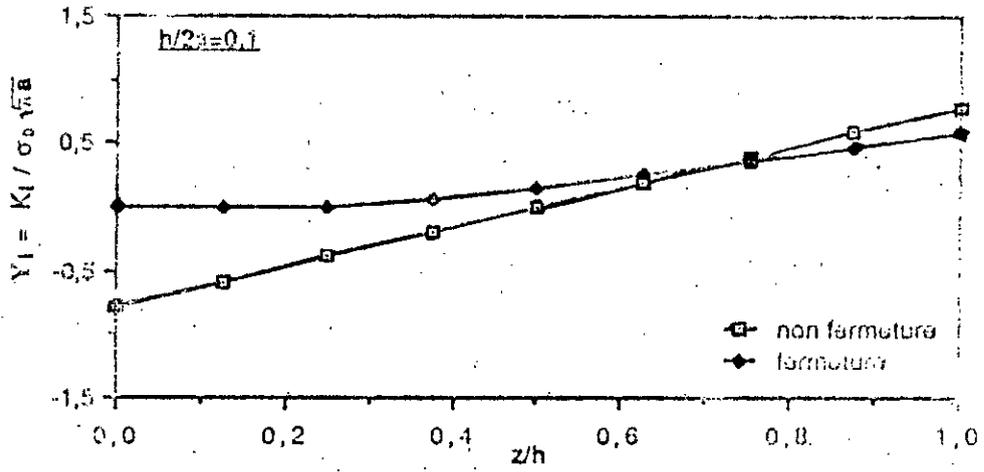


Fig. A12 Variation de  $K_I$  traversant l'épaisseur de la plaque

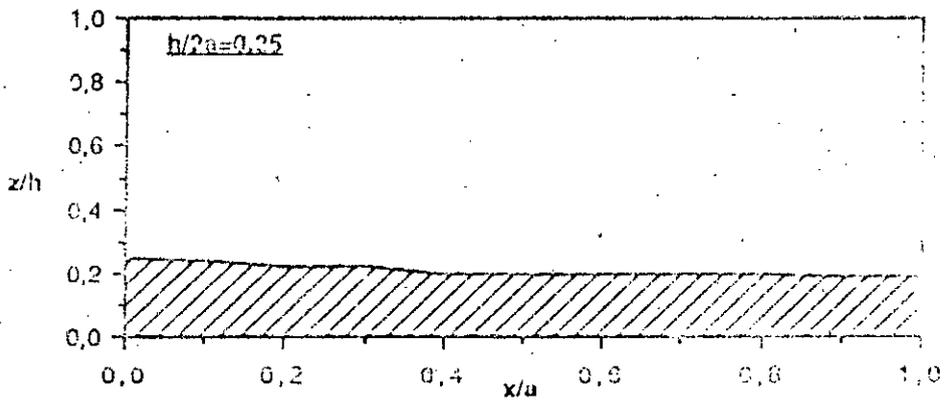


Fig. A13 Région de la fermeture