

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

43/88

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1er

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**DIMENSIONNEMENT
d'un
VILEBREQUIN
par la methode des
ELEMENTS-FINIS**

Proposé Par :

Etudié par :

Dirigé par :

BOUKABACHE M.

MOUSSAOUI M.L.

RECHAK S.

PROMOTION :

JUIN 1988

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

DIMENSIONNEMENT
d'un
VILEBREQUIN
par la methode des
ELEMENTS-FINIS

Proposé Par :

Etudié par :

Dirigé par :

BOUKABACHE M.

MOUSSAOUI M.L.

RECHAK S.

PROMOTION :

JUIN 1988

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ :

أَنْخِي ظَمًا بِالْقَلَمِ ،

ظَمُّ الْإِنْسَانِ مَا لَمْ يَعْلَمْ =

ظَمُّ اللَّهِ الْعَظِيمِ .

المكتبة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE —
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة التعليم العالي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole nationale polytechnique
Département de mécanique
Promoteur : Rechak Saïd
الموجه : رشاق سعيد
Elève ingénieur : Moussaoui M.L.
الطالب المهندس : موسى محمد الأمين

الموضوع : إيجاد أبعاد عمود مرفقي بطريقة العناصر المحدودة.
الملخص : تهدف هذه الدراسة إلى إعداد برنامج معلوماتي
مستعملا طريقة العناصر المحدودة لإيجاد
الأبعاد الملائمة لعمود مرفقي وبالتالي الإجهادات
في كل مقطع لهذا الأخير.

Sujet : Dimensionnement d'un vilebrequin par les éléments finis .
Résumé : L'objet de cette étude est l'établissement d'un logiciel
utilisant les éléments finis pour la détermination des
dimensions optimales d'un vilebrequin. Ainsi que
les contraintes à chaque section de ce
dernier .

Subject : The crank-shaft dimensionnement by the finite element method.
Abstract : The subject of this study is the setting up of
a program using finite elements method to
determine optimal dimensions of a crank-shaft
as well as the stresses of its sections .

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à :

- la mémoire de ma mère trois fois .
- mon père qui a souffert pour me voir ainsi diplômé .
- mes frères et sœurs .
- ma famille .
- tous mes amis .

M. Med Lamine .

REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à mon promoteur M^r Saïd Rechak pour son aide et son suivi durant cette étude .

Ainsi qu'à M^r M. Boukabache , professeur au département de Genie-Mecanique, pour ses précieuses aides .

Que tous ceux qui ont de près ou de loin , contribué à l'élaboration de ce memoire , et, à ma formation , trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance , et mes sincères salutations .

M. Med Lamine .

TABLE DES MATIERES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

| | |
|---|----|
| I. GENERALITES | 1 |
| II. DETERMINATION des EFFORTS..... | 2 |
| II.1. Etude cinématique..... | 2 |
| II.2. Etude dynamique..... | 4 |
| II.3. Application..... | 7 |
| III. MODELISATIONS du VILEBREQUIN..... | 11 |
| III.1. Première modelisation..... | 11 |
| III.2. Deuxième modelisation..... | 12 |
| III.3. Troisième modelisation..... | 13 |
| IV. METHODE des ELEMENTS FINIS..... | 15 |
| IV.1. INTRODUCTION..... | 15 |
| IV.2. FORMULATION du PROBLEME STATIQUE..... | 15 |
| IV.3. DEVELOPPEMENT d'un ELEMENT POUTRE..... | 17 |
| a. Matrice de rigidité extension-compression..... | 19 |
| b. Matrice de rigidité en torsion autour de l'axe OX..... | 21 |
| c. Matrice de rigidité en flexion autour de l'axe OZ..... | 22 |
| d. Matrice de rigidité en flexion autour de l'axe OY..... | 24 |

| | |
|--|----|
| IV.4. PRINCIPE D'ASSEMBLAGE..... | 27 |
| IV.5. CHANGEMENT de REPERE..... | 29 |
| IV.6. RESOLUTION..... | 32 |
| V. FORMULATION des CONTRAINTES..... | 34 |
| V.1. Contraintes normales..... | 34 |
| V.2. Contraintes de cisaillement..... | 37 |
| VI. APPLICATIONS et RESULTATS..... | 39 |
| VI.1. Premier modèle..... | 39 |
| VI.1.a. Discretisation et répartition des efforts..... | 39 |
| VI.1.b. Résultats obtenus..... | 42 |
| VI.2. Deuxième modèle..... | 47 |
| VI.2.a. Discretisation et repartition des efforts..... | 47 |
| VI.2.b. Resultats obtenus..... | 49 |
| VI.3. Troisième modèle..... | 57 |
| VI.3.a. Discretisation et repartition des efforts..... | 57 |
| VI.3.b. Resultats obtenus..... | 61 |
| VI.4. Comparaison avec la methode classique..... | 68 |
| VII. CONCLUSIONS..... | 70 |
| ANNEXE | |

TABLE DES FIGURES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

- Fig. II.1 Système bielle-manivelle .
- Fig. II.2 Efforts exercés sur le piston .
- Fig. II.3 Efforts appliqués sur la bielle .
- Fig. II.4 Efforts appliqués sur la manivelle .
- Fig. III.1 Premier modèle du vilebrequin sur appuis rigides .
- Fig. III.2 Premier modèle du vilebrequin sur appuis élastiques .
- Fig. III.3 Deuxième modèle du vilebrequin sur appuis rigides .
- Fig. III.4 Troisième modèle du vilebrequin sur appuis rigides .
- Fig. IV.1 Element poutre à six degrés de liberté par nœud .
- Fig. IV.2 Element poutre en extension-compression .
- Fig. IV.3 Element poutre en torsion autour de l'axe Ox .
- Fig. IV.4 Element poutre en flexion autour de l'axe Oz .
- Fig. IV.5 Element poutre en flexion autour de l'axe Oy .
- Fig. IV.6 Element poutre dans le repère global .
- Fig. V.1 Contraintes de cisaillement dans une section rectangulaire .
- Fig. VI.1 Discretisation du premier modèle .
- Fig. VI.2 Diagramme du moment de torsion du premier modèle .
- Fig. VI.3 Reduction de la force sur le maneton .
- Fig. VI.4 Discretisation du deuxième modèle .
- Fig. VI.5 Diagramme du moment de torsion du deuxième modèle .
- Fig. VI.6 Discretisation du troisième modèle .
- Fig. VI.7 Diagramme du moment de torsion du troisième modèle .

NOTATIONS UTILISEES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

θ : Angle de rotation du vilebrequin.

ω : Vitesse angulaire du vilebrequin.

φ : Angle d'oscillation de la bielle.

m_p : Masse du piston et ses accessoires.

m_b : Masse de la bielle.

m_m : Masse la manivelle.

I_{Gz} : Moment d'inertie de la bielle par rapport à l'axe \vec{z} passant par son centre de gravité G.

I_p : Moment quadratique polaire.

I_y : Moment quadratique par rapport à l'axe OY.

I_z : Moment quadratique par rapport à l'axe OZ.

L : Longueur.

S : Section transversale.

E : Module d'élasticité longitudinal.

G : Module d'élasticité transversal.

$\{q\}$: Vecteur colonne des déplacements.

$\{Q\}$: Vecteur colonne des sollicitations externes.

$[K]$: Matrice de rigidité globale de la structure.

$[K_e]$: Matrice de rigidité élémentaire.

$[T]$: Matrice de transfert du repère global au repère local.

$[f(x)]$: Matrice des fonctions polynômes.

U : Energie de déformation.

W : Energie potentielle due aux efforts extérieurs.

T : Energie potentielle totale.

u, v, w : Déplacements respectivement selon les axes Ox^*, Oy^*, Oz^* .

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$: Rotations respectivement autour des axes Ox^*, Oy^*, Oz^* .

M_y, M_z : Moments flechissants.

σ_x, τ : Contraintes normale et tangentielle.

M_t : Moment de torsion.

I. GENERALITES

Dernier organe de l'équipage mobile, le vilebrequin transmet sous la forme d'un couple le travail produit par l'effort des gaz et le déplacement des pistons. Il est constitué de coudes (ou manivelles) en nombre égal au nombre des cylindres, excepté sur la plupart des moteurs à cylindres en V où l'on dispose généralement deux bielles par coude.

Chaque coude se compose de deux bras reliés par un maneton autour duquel tourne la tête de bielle; deux coudes consécutifs peuvent être reliés par un touillon selon la disposition choisie. L'ensemble des manetons et des touillons forme la ligne d'arbre.

Le vilebrequin d'un moteur Diesel à n cylindres est donc un arbre coudé reposant sur $(n+1)$ ou $(\frac{n}{2}+1)$ appuis équidistants et alignés et est soumis à des flexions et torsions cycliques.

Dans ce mémoire, trois types de modèles ont été développés pour l'étude d'un vilebrequin. Un logiciel général utilisant les éléments finis a été mis au point. Une étude optimale des dimensions a été faite ainsi que les contraintes à chacune des sections de ce dernier.

II. DETERMINATION des EFFORTS

Une étude cinématique et dynamique du système bielle-manivelle est nécessaire pour déterminer les efforts appliqués sur la manivelle d'un vilebrequin.

1. Etude cinématique

a. repère fixe :

$(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère lié au cylindre.

b. repères mobiles :

$(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: lié à la manivelle

$(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: lié à la bielle.

$$OA = R$$

$$BA = L$$

$$BG = L_B$$

G : centre de gravité de la bielle.

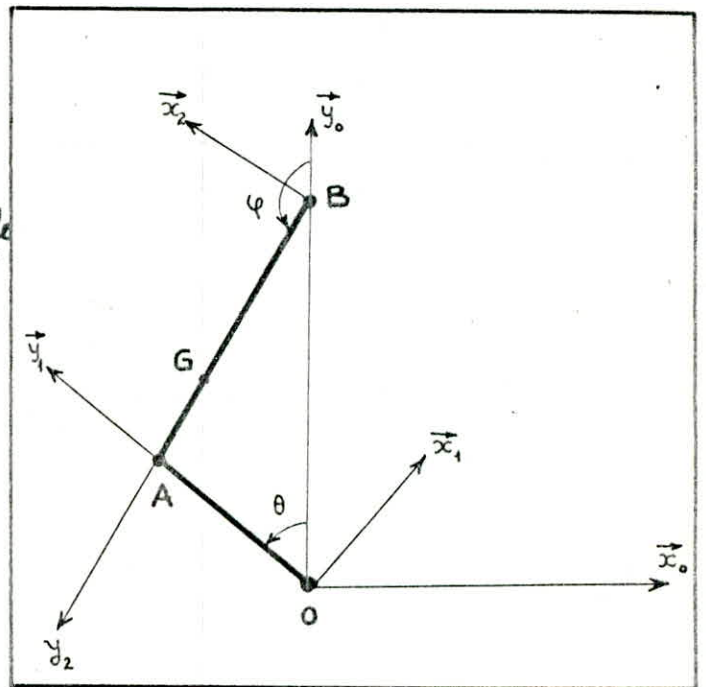


Fig. II-1: Système bielle-manivelle

$\dot{\theta} = \omega = \frac{d\theta}{dt}$: vitesse angulaire du moteur.

$\vec{\Omega}(m/o) = \omega \vec{z}_0$: vecteur rotation de la manivelle par rapport au repère zéro autour de $O\vec{z}$.

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$; $\vec{\Omega}(b/o) = \dot{\varphi} \vec{z}_0$.

c. formules de passage entre repères :

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos\theta \cdot \vec{x}_0 + \sin\theta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 = -\sin\theta \cdot \vec{x}_0 + \cos\theta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^{\circ} \vec{x}_1}{dt} = \vec{\Omega}(m/o) \wedge \vec{x}_1 = \omega \cdot \vec{y}_1 \\ \frac{d^{\circ} \vec{y}_1}{dt} = \vec{\Omega}(m/o) \wedge \vec{y}_1 = -\omega \cdot \vec{x}_1 \\ \frac{d^{\circ} \vec{z}_1}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\text{car } \frac{d^{\circ} \vec{OA}}{dt} = \underbrace{\frac{d^1 \vec{OA}}{dt}}_0 + \vec{\Omega}(m/o) \wedge \vec{OA}$$

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{x}_0 + \sin \varphi \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2 = -\sin \varphi \cdot \vec{x}_0 + \cos \varphi \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^{\circ} \vec{x}_2}{dt} = \vec{\Omega}(b/o) \wedge \vec{x}_2 = \dot{\varphi} \cdot \vec{y}_2 \\ \frac{d^{\circ} \vec{y}_2}{dt} = \vec{\Omega}(b/o) \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\varphi} \cdot \vec{x}_2 \\ \frac{d^{\circ} \vec{z}_2}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

d. relations cinématiques :

$$\vec{OA} = R \cdot \vec{y}_1 = -R \sin \theta \cdot \vec{x}_0 + R \cos \theta \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{BA} = L \cdot \vec{y}_2 = -L \sin \varphi \cdot \vec{x}_0 + L \cos \varphi \cdot \vec{y}_0$$

$$\text{on a : } R \sin \theta = L \sin \varphi \quad \text{donc } \cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \theta}$$

φ varie autour de π et est positif ; son cosinus est donc négatif.

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{R\omega \cos \theta}{L \cos \varphi} \quad \text{et } \ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - \omega^2) \text{tg } \varphi$$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{V}_A = \begin{pmatrix} -R\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{\gamma}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} -L_B \sin \varphi \\ R \cos \theta + (L_B - L) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{V}_G = \begin{pmatrix} -L_B \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\omega R \sin \theta - (L_B - L) \dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_G = \begin{pmatrix} L_B \omega^2 \sin \varphi \\ -(\omega^2 R \cos \theta + (L_B - L)(\dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} R \cos \theta & -L \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}; \quad \vec{V}_B = \begin{pmatrix} L \dot{\varphi} \sin \varphi - R \omega \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_B = \begin{pmatrix} L \ddot{\varphi} \sin \varphi + L \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - R \omega^2 \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

2. Etude dynamique

a. le piston :

$$-\vec{F}_B = \begin{pmatrix} -X_B \\ -Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad : \text{action de l'axe du piston sur le piston en B.}$$

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad : \text{action de la chemise sur le piston en C.}$$

$$\vec{F}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_P(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad : \text{action des gaz sur le piston en P.}$$

avec $Y_P(\theta) = S(P(\theta) - P_0)$ où $P(\theta)$: est la pression des gaz en fonction de θ .

P_0 : la pression dans le carter.
 S : la section du piston.

$$\begin{cases} m_p \vec{\gamma}(G_p, \text{piston}/o) = \sum \vec{F}_{\text{ext.}} / \text{piston} \quad \text{(I)} \\ \vec{\delta}(\text{piston}/G_p) = \sum \vec{m}_{\text{Fext.}} / G_p \quad \text{(II)} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{\delta} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \\ \vec{\sigma} = \vec{I} \cdot \vec{\Omega}(p/o) \end{cases}$$

projection de l'equation (I) :

sur \vec{x}_0 : $m_p \ddot{x}_B = X_C - X_B$; $\ddot{x}_B = 0$

sur \vec{y}_0 : $m_p \ddot{y}_B = -Y_P(\theta) - Y_B$

sur \vec{z}_0 : $0 = 0$

projection de l'equation (II) :

sur \vec{x}_0 : $0 = 0$

sur \vec{y}_0 : $0 = 0$

sur \vec{z}_0 : $0 = L_2 X_B - L_4 X_C$

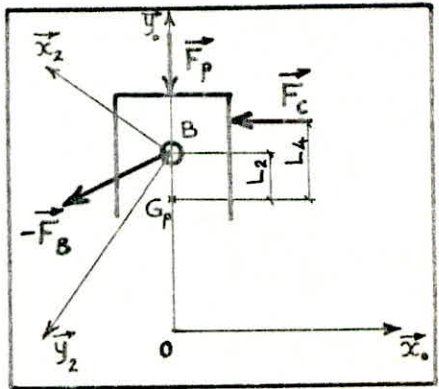


Fig.II.2: Efforts exercés sur le piston.

b. la bielle :

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} : \text{action du piston sur la bielle en B.}$$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} : \text{action du maneton sur la bielle en A.}$$

$$m_b \vec{\gamma}(G \text{ bielle}/o) = \sum \vec{F}_{\text{ext.}/b} \quad \text{(III)}$$

$$\vec{\delta}(bielle/G) = \sum \vec{M}_{\vec{F}_{\text{ext.}/G}} \quad \text{(IV)}$$

$\vec{\sigma}(b/G) = \vec{I}(b/G) \cdot \vec{\Omega}(b/o)$: moment cinétique de la bielle par rapport à son centre de gravité G.

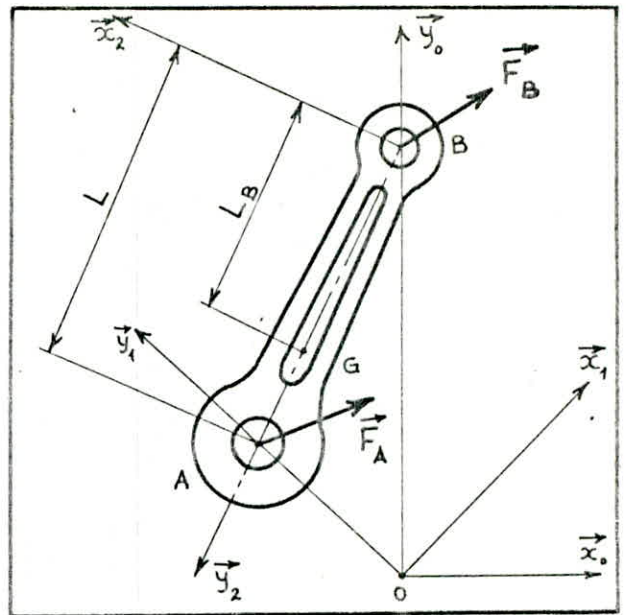


fig.II-3:efforts appliqués sur la bielle

$$\vec{I}(b/G) = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} A = I_{Gx_2} & ; & B = I_{Gy_2} & ; & C = I_{Gz_2} \\ D = I_{Gx_2y_2} & ; & E = I_{Gz_2x_2} & ; & F = I_{Gy_2z_2} \end{matrix}$$

pour une bielle possédant deux plans de symétrie ; les produits d'inertie sont nuls.

$$\vec{\sigma}(b/G) = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ C\dot{\varphi} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{vmatrix} = C\dot{\varphi} \vec{z}_2 = C\dot{\varphi} \vec{z}_0$$

Donc $\vec{\delta}(b/G) = C\ddot{\varphi} \vec{z}_0$

Calcul des moments :

$$\vec{M}_{\vec{F}_B/G} = \underbrace{\vec{M}_{\vec{F}_B/B}}_0 + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B = \begin{pmatrix} -L_B \sin\varphi \\ -L_B \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_B(X_B \cos\varphi + Y_B \sin\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{\vec{F}_A/G} = \underbrace{\vec{M}_{\vec{F}_A/A}}_0 + \vec{GA} \wedge \vec{F}_A = \begin{pmatrix} -(L-L_B) \sin\varphi \\ (L-L_B) \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-L_B)(X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi) \end{pmatrix}$$

projection de l'équation (III) :

sur \vec{x}_0 : $m_b \ddot{x}_G = X_A + X_B$

sur \vec{y}_0 : $m_b \ddot{y}_G = Y_A + Y_B$

sur \vec{z}_0 : $0 = 0$

projection de l'équation (IV) :

$$\text{sur } \vec{x}_0 : 0 = 0$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : 0 = 0$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : C \ddot{\varphi} = -(L - L_B)(X_A \cos \varphi + Y_A \sin \varphi) + L_B(X_B \cos \varphi + Y_B \sin \varphi)$$

c. la manivelle :

$$-\vec{F}_A = \begin{bmatrix} -X_A \\ -Y_A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} : \text{action de la bielle} \\ \text{sur le maneton en A.}$$

$$\vec{R}_e = \begin{bmatrix} X_e \\ Y_e \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} : \text{action des paliers sur} \\ \text{les tourillons en O.}$$

$$\vec{F}_k = m_m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \vec{y}_1 : \text{Force d'inertie.}$$

$$\vec{KO} = -r \cdot \vec{y}_1$$

K : centre de gravité de la manivelle.

m_m : masse de la manivelle.

C_m : couple moteur.

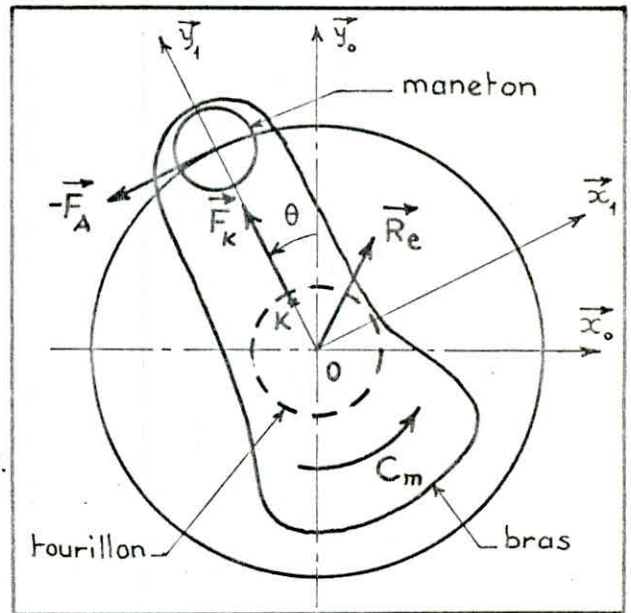


Fig.II-4: efforts appliqués sur la manivelle

$$\vec{\sigma}(m/k) = C' \cdot \omega \cdot \vec{z}_1 ; \vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}(m/k) = \vec{0} \quad \text{car } \omega = \text{constante.}$$

Calcul des moments :

$$\vec{M}_{-\vec{F}_A/k} = \underbrace{\vec{M}_{-\vec{F}_A/A}}_0 + \begin{bmatrix} -(R-r) \sin \theta \\ (R-r) \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{bmatrix} -X_A \\ -Y_A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (R-r)(X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{M}_{\vec{R}_e/k} = \underbrace{\vec{M}_{\vec{R}_e/O}}_0 + \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ -r \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{bmatrix} X_e \\ Y_e \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r(X_e \cos \theta + Y_e \sin \theta) \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Equations scalaires :

$$\begin{cases} m_m \omega^2 r \sin \theta = -X_A + X_e \\ m_m \omega^2 r \cos \theta = -Y_A + Y_e \\ 0 = (R-r)(X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) + r(X_e \cos \theta + Y_e \sin \theta) + C_m \end{cases}$$

Ainsi, on a obtenu un système de 3 équations à 10 inconnues.

En supposant que $L_2 = L_4$, on aura 8 équations à 8 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_B = -Y_P(\theta) - m_P [R\omega(\dot{\varphi} - \omega) \cos\theta + R\ddot{\varphi} \sin\theta] \\ Y_A = m_b [R\omega(\dot{\varphi} - \omega - \frac{L_B}{L}\dot{\varphi}) \cos\theta + R\ddot{\varphi}(1 - \frac{L_B}{L}) \sin\theta] - Y_B \\ X_A = \frac{1}{L \cos\varphi} [L_B Y_B \sin\varphi - (L - L_B) Y_A \sin\varphi + m_b L_B^2 \sin\varphi \cos\varphi - I_{Gz} \ddot{\varphi}] \\ X_B = -X_A + m_b L_B \omega^2 \sin\varphi \\ X_C = X_B \\ X_e = m_m \omega^2 r \sin\theta + X_A \\ Y_e = m_m \omega^2 r \cos\theta + Y_A \\ C_m = (r - R)(X_A \cos\theta + Y_A \sin\theta) - r(X_e \cos\theta + Y_e \sin\theta) \end{array} \right.$$

3. Application

L'application est faite pour le moteur en ligne F4L912. Le programme développé dans ce chapitre en langage FORTRAN permet de déterminer les composantes X_A et Y_A de l'effort appliqué sur le maneton en fonction de l'angle de rotation θ du vilebrequin avec un pas de 1° . La version en BASIC du même programme permet de tracer les courbes des efforts \vec{F}_A et \vec{R}_e en fonction de θ .

D'après les résultats obtenus, on peut déduire que l'effort maximal appliqué au maneton se produit à : $\theta = 377^\circ$ tel que $F_{A_{max}} \begin{cases} X_A = 21836,5156 \text{ N} \\ Y_A = 48404,9336 \text{ N} \end{cases}$

Les données sont :

masse du piston : $m_p = 1,635 \text{ kg}$

masse de la bielle : $m_b = 1,700 \text{ kg}$

masse de la manivelle : $m_m = 2,800 \text{ kg}$

diamètre du piston : $D = 0,1 \text{ m}$

course du piston : $C = 2.R = 0,12 \text{ m}$

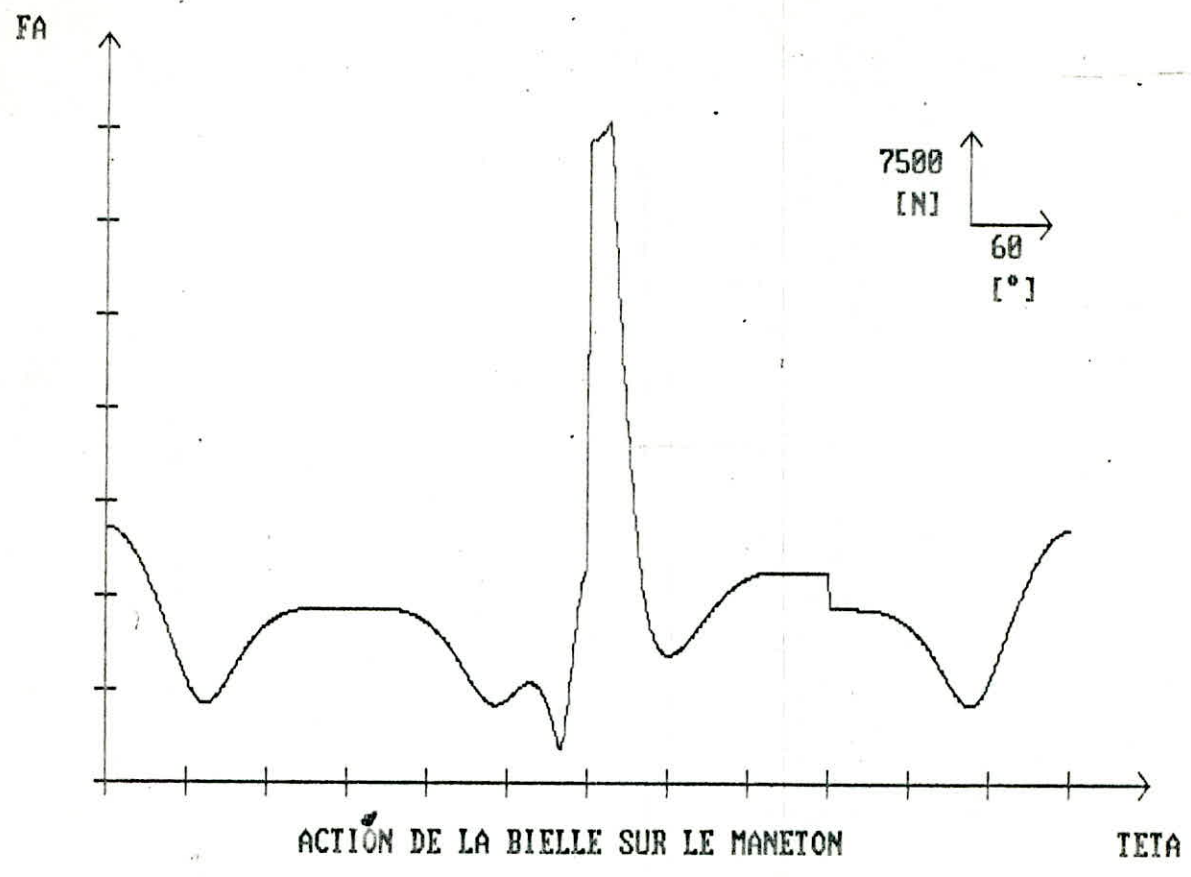
$L = 0,21 \text{ m}$

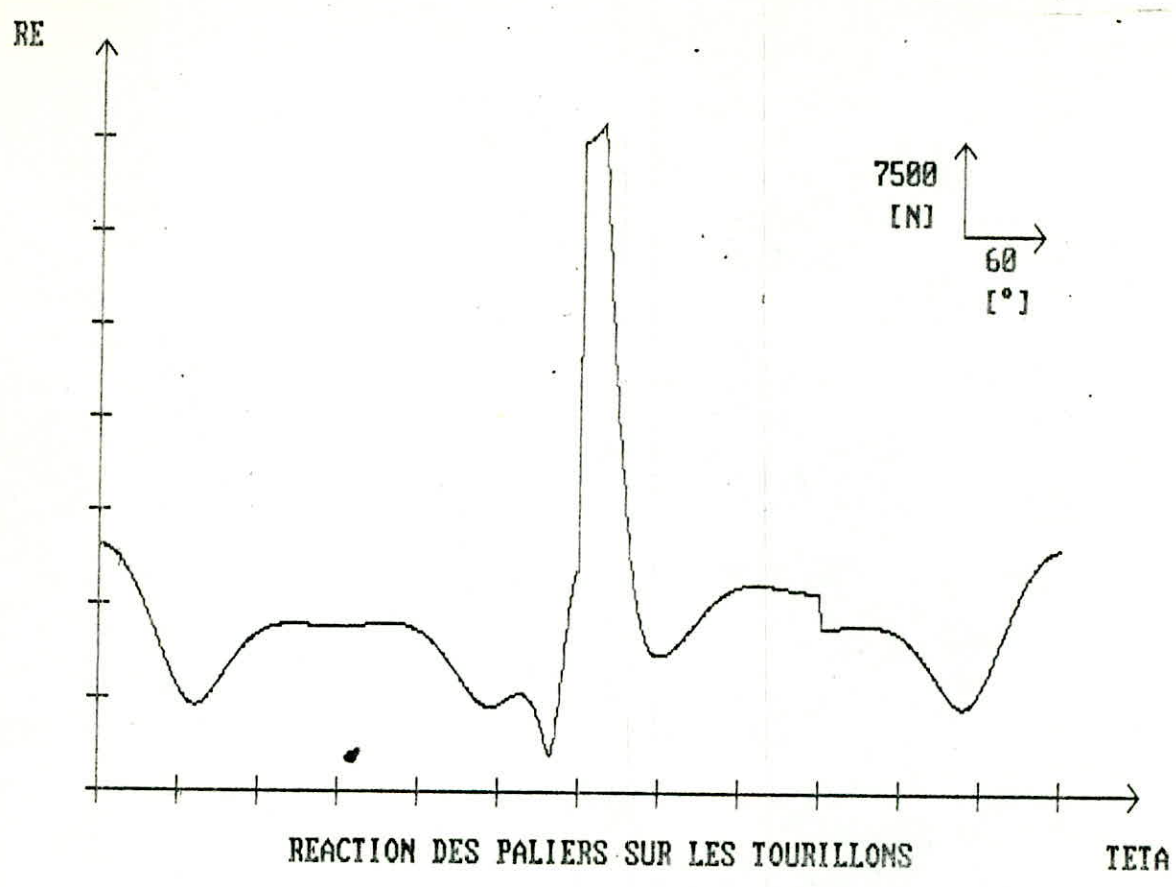
$L_B = 0,14 \text{ m}$

$r = 0,003 \text{ m}$

$I_{gz} = 0,02095 \text{ kg.m}^2$

Remarque : La pression $P(\theta)$ est déduite d'un cycle quasi-réel et est calculée dans le sous-programme SXX.





III. MODELISATIONS du VILEBREQUIN

En première approche on considèrera le vilebrequin comme une poutre hyperstatique reposant sur cinq appuis rigides dans les deux premières modelisations. Par contre dans la dernière on le considèrera comme un arbre coudé reposant sur les mêmes appuis.

Les appuis seront considérés en premier lieu comme étant rigides. Dans une deuxième approche le film d'huile est modélisé comme étant un support élastique.

1. Première modelisation

a. appuis rigides

Cette première approche consiste à considérer le maneton et les deux bras d'une manivelle (ou coude) comme étant un seul élément de diamètre constant.

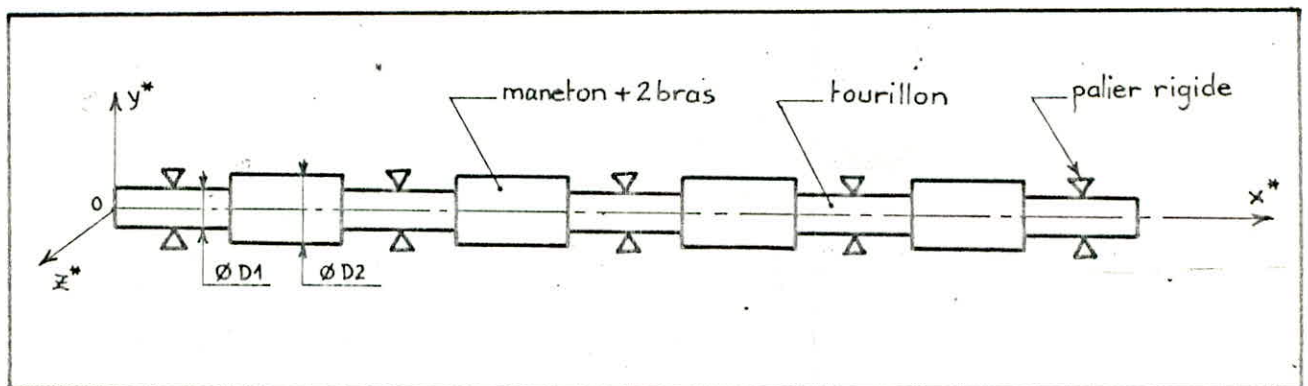


Fig. III.1 : premier modèle du vilebrequin sur appuis rigides.

b. appuis élastiques

Pour les développements qui précèdent, nous avons admis des liaisons rigides à rotule (Fig. III-1).

En réalité, il faut tenir compte de l'élasticité du matelas d'huile interfacial qui amortit les accélérations intenses que connaît radialement le tourillon. Cette huile se comporte comme un ressort à raideur constante et le vilebrequin est assimilable à une poutre déformable tourillonnant par intermédiaire élastique dans des appuis déformables (Fig. III-2).

De nombreux chercheurs [9] proposent des méthodes pour déterminer la raideur des ressorts modélisant le lubrifiant au niveau des paliers. On admettra une valeur de $k = 10^8 \text{ N/m}$.

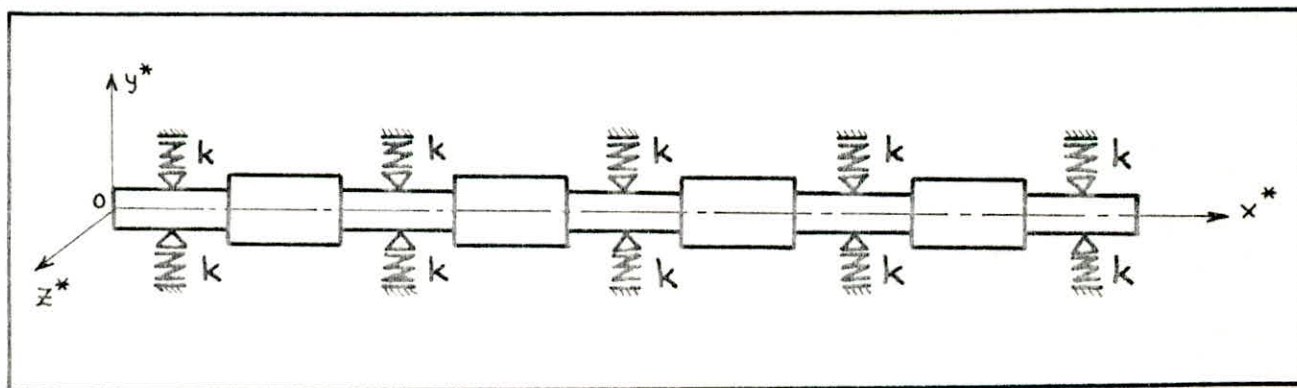


Fig. III-2 : premier modèle du vilebrequin sur appuis élastiques.

2. Deuxième modélisation

a. appuis rigides

Une deuxième approche consiste à modéliser chaque élément par une poutre de section circulaire (Fig. III-3).

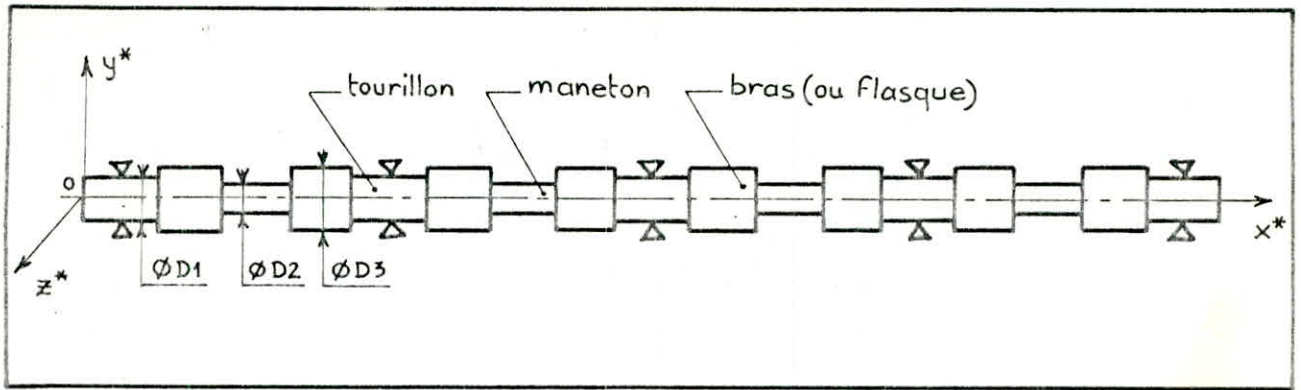


Fig. III.3 : Deuxième modèle du vilebrequin sur appuis rigides.

b. appuis élastiques

Même modélisation que dans la (Fig. III.3) ci-dessus mais avec des appuis élastiques de raideur $k = 10^8 \text{ N/m}$.

3. Troisième modélisation

Dans ce cas, on considèrera le vilebrequin comme un arbre coudé tel que les tourillons et manetons soient des éléments à sections circulaires et les bras (ou flasques) à section rectangulaire.

a. appuis rigides

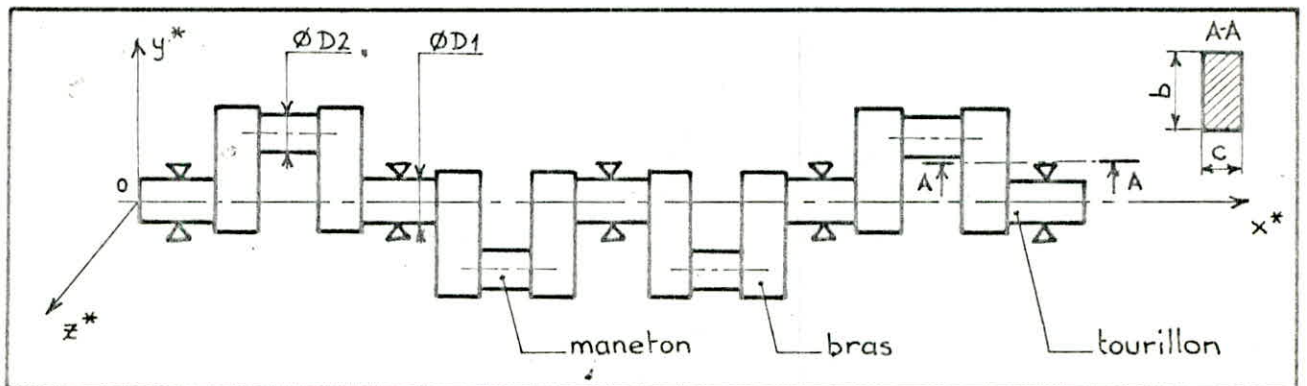


Fig. III.4 : Troisième modèle du vilebrequin sur appuis rigides.

La modélisation présentée dans la (Fig. III-4) approche très bien la structure réelle du vilebrequin du moteur en ligne F4L912.

b. appuis élastiques

Dans ce cas on considèrera le même modèle que celui présenté dans la (Fig. III-4) mais en admettant que les paliers soient flexibles de rigidité $k = 10^8 \text{ N/m}$.

IV. METHODE des ELEMENTS FINIS

1. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est essentiellement un procédé de calcul qui consiste à représenter un milieu continu doté d'une infinité de degrés de libertés par un assemblage de sous-régions appelés éléments. Le nombre de degrés de libertés devient alors fini. Le nom de la méthode en découle logiquement. Les inconnues relatives à chaque élément, qui jouent en fait le rôle de paramètres à déterminer dans la théorie générale sont, soit des déformations, soit des efforts attachés à chaque nœud de l'élément.

Cette méthode se prête donc aisement à l'interpolation physique du problème.

Ainsi la méthode se révèle très générale et très puissante. Elle est apte à résoudre un grand nombre de problèmes. En plus, grâce au progrès de l'ordinateur, la méthode semble rencontrer beaucoup de succès auprès des spécialistes de calcul de structure et est l'objet de développements très importants à l'heure actuelle.

2. FORMULATION du PROBLEME STATIQUE

L'idée de base des éléments finis consiste à réaliser l'approximation d'un milieu continu au

moyen de l'assemblage de sous-domaines ou éléments finis. La structure ou le domaine est ainsi subdivisé en un nombre finis de tels éléments qui sont soumis à des conditions de continuité au niveau des noeuds.

Chaque élément est régi par un nombre fini de paramètres qui permettent de définir en tout point de l'élément les inconnues recherchées.

La subdivision ainsi réalisée forme un maillage dans la structure ou le domaine étudié.

Il existe deux manières de formuler le problème. La première fait appel au théorème des travaux virtuels; la deuxième plus générale, utilise le théorème désigné habituellement sous le nom du théorème de l'énergie potentielle du système.

Nous développons sommairement cette dernière méthode qui consiste à déterminer l'extrémum de l'énergie potentielle du système.

Considérons une structure (S) et désignons par :

U : l'énergie de déformation du système (S).

W : l'énergie potentielle due aux efforts extérieurs exercés sur (S).

L'énergie potentielle totale du système (S) est alors :

$$T = U + W \quad (\text{IV-1})$$

Le théorème de l'énergie potentielle indique que :

$$d(T) = 0$$

Désignons par :

$\{q\}$: le vecteur des déplacements aux nœuds du maillage (dimension n)

$\{Q\}$: le vecteur des efforts extérieurs aux nœuds du maillage (dimension n)

L'énergie de déformation du système est une forme quadratique symétrique des déplacements $\{q\}$; on peut donc la mettre sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\} \quad (\text{IV.2})$$

où $\{q\}^t$: est la matrice ligne transposée du vecteur colonne.

$[K]$: une matrice symétrique que l'on appelle matrice de rigidité.

L'énergie potentielle totale du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\} - \{q\}^t \{Q\} \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{Donc } d(T) = 0 \quad \text{entraîne } \frac{\partial T}{\partial \{q\}} = 0.$$

$$\text{ou encore : } [K] \{q\} = \{Q\} \quad (\text{IV.4})$$

Le système d'équations linéaires à résoudre sera ramené à la forme (IV.4) :

Connaissant les déplacements on en déduit les efforts internes ou les contraintes.

3-DEVELOPPEMENT d'un ELEMENT POUTRE

On se propose dans ce paragraphe de déterminer la matrice de rigidité d'un élément poutre.

L'étude générale et complète nous amène à considérer 12 degrés de liberté pour chaque élément (Fig. IV.1)

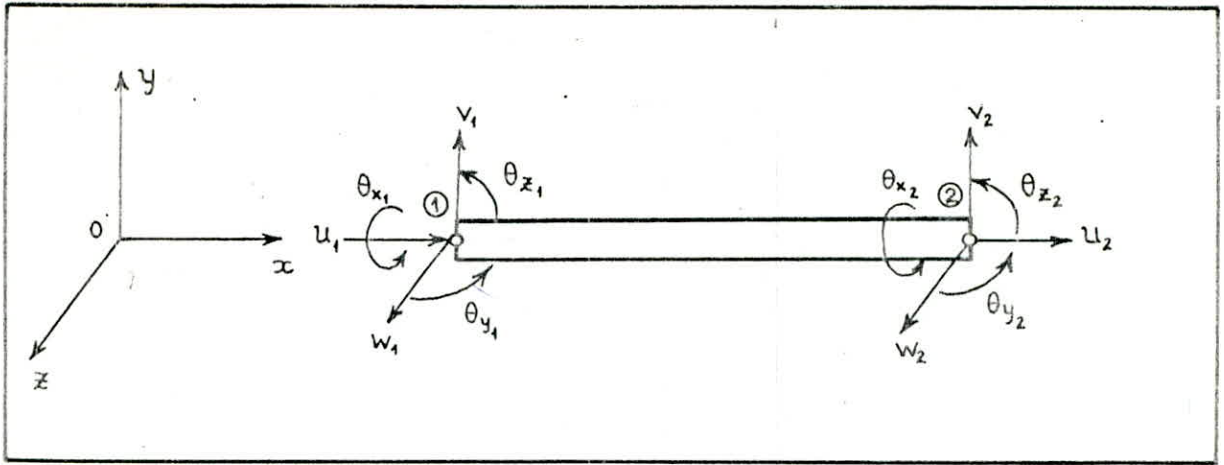


Fig. IV.1 : élément poutre à six degrés de liberté par nœud.

Le vecteur des déplacements aux nœuds est :

$$\{q\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \theta_{z_1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, \theta_{z_2}\}^t$$

Le vecteur des forces nodales est :

$$\{Q\} = \{F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1}, M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1}, F_{x_2}, F_{y_2}, F_{z_2}, M_{x_2}, M_{y_2}, M_{z_2}\}^t$$

Les termes u_i, v_i, w_i et $\theta_{x_i}, \theta_{y_i}, \theta_{z_i}$ étant respectivement les déplacements et rotations du nœud i dus aux forces $F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}$ respectivement appliquées selon les axes X, Y, Z et aux moments $M_{x_i}, M_{y_i}, M_{z_i}$ autour de ces mêmes axes.

Pour déterminer la matrice de rigidité on est amené à considérer les hypothèses suivantes :

- La section transversale est uniforme le long de l'axe ox .
- Oy et Oz sont les axes principaux de la section transversale de l'élément poutre.
- O est le centre d'inertie.
- On négligera dans notre étude les effets de l'effort tranchant qui sont minimales par rapport au moment flechissant.

La matrice de rigidité élémentaire peut être obtenue en superposant les quatre cas suivants :

- (a) - Extension - compression selon l'axe Ox .
- (b) - Torsion autour de l'axe Ox .
- (c) - Flexion autour de l'axe Oz .
- (d) - Flexion autour de l'axe Oy .

Connaissant les composantes aux nœuds de chaque élément, par interpolation au moyen d'une fonction de déplacement, nous pouvons déduire les composantes inconnues en tout point à l'intérieur de l'élément.

Cette fonction de forme $q(x)$ est une expression polynomiale d'ordre $(n-1)$ correspondant à n degrés de liberté :

$$q(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1} \quad (\text{IV-5})$$

Les constantes α_i ($i=1, \dots, n$) sont déterminées d'après les conditions aux limites.

- (a) - Matrice de rigidité en extension - compression

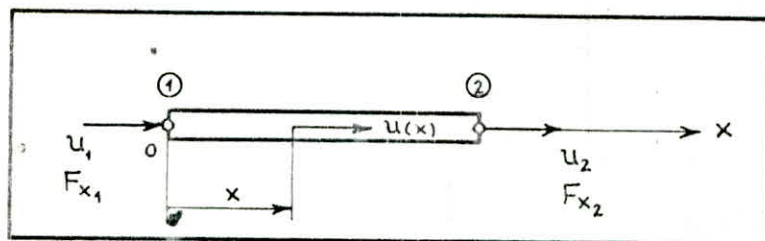


Fig. IV.2 : élément poutre en extension-compression.

La fonction de déplacement est de la forme :

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (\text{IV-6})$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \quad u = u_1 \\ x=L \quad u = u_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = u_1 \\ \alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{L} \end{array} \quad (\text{IV.7})$$

$$\text{donc : } u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 \quad (\text{IV.8})$$

L'énergie de déformation est :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

La loi de Hooke appliquée en élasticité linéaire donne :

$$\sigma = \varepsilon E \quad \text{où } E : \text{ est le module de Young.}$$

$$\text{donc : } U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV = \frac{ES}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \quad (\text{IV.9})$$

$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{L} u_1 + \frac{1}{L} u_2$ par intégration, on obtient :

$$U = \frac{ES}{2L} (u_2 - u_1)^2 \quad (\text{IV.10})$$

L'application du théorème de Castigliano conduit à déterminer les forces appliquées aux nœuds, donc :

$$F_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial u_1} = \frac{ES}{L} (u_1 - u_2) \quad (\text{IV.11})$$

$$F_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial u_2} = -\frac{ES}{L} (u_1 - u_2)$$

sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{Bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

ce système d'équations n'est autre que $\{F_e\} = [K_e]\{q_e\}$
où $\{F_e\}$ est le vecteur force nodal en extension-compression.

$\{q_e\}$ le vecteur des déplacements aux nœuds.

$$[K_e] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice de rigidité en extension-compression.}$$

②. Matrice de rigidité en torsion autour de l'axe OX

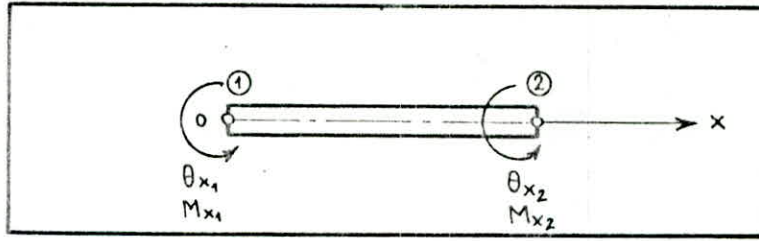


Fig. IV-3 : Élément poutre en torsion autour de l'axe OX.

La fonction de déplacement en torsion est de la forme:

$$\theta_x(x) = e_1 + e_2 x \quad (\text{IV-13})$$

Appliquons les conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \quad \theta_x = \theta_{x_1} \\ x=L \quad \theta_x = \theta_{x_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e_1 = \theta_{x_1} \\ e_2 = \frac{\theta_{x_2} - \theta_{x_1}}{L} \end{array} \quad (\text{IV-14})$$

La fonction de déplacement en torsion peut donc s'écrire:

$$\theta_x(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \theta_{x_1} + \frac{x}{L} \theta_{x_2} \quad (\text{IV-15})$$

L'énergie de déformation en torsion a pour expression:

$$U = \frac{G I_p}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta_x}{dx}\right)^2 dx \quad (\text{IV-16})$$

telle que; I_p : moment quadratique polaire.

G : module d'élasticité transversal.

les moments aux nœuds sont déterminés par application du théorème de Castigliano :

$$M_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial \theta_{x_1}} = \frac{G I_p}{L} (\theta_{x_1} - \theta_{x_2}) \quad (\text{IV-17})$$

$$M_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial \theta_{x_2}} = -\frac{G I_p}{L} (\theta_{x_1} - \theta_{x_2})$$

sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} M_{x_1} \\ M_{x_2} \end{Bmatrix} = \frac{G I_p}{L} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_1} \\ \theta_{x_2} \end{Bmatrix}$$

(IV-18)

La matrice de rigidité en torsion est donc : $[K_e] = \frac{GI_p}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

©. Matrice de rigidité en flexion autour de l'axe OZ

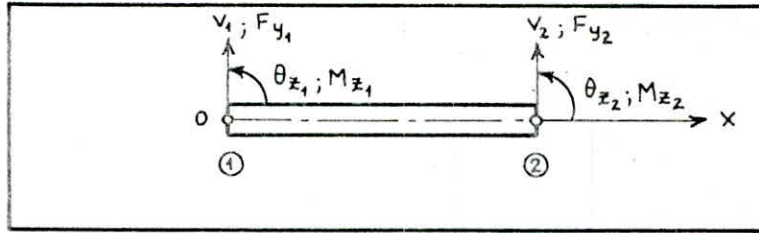


Fig. IV.4 : élément poutre en flexion autour de l'axe OZ .

La fonction de déplacement à 4 degrés de libertés a pour expression :

$$v(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 \quad (\text{IV.19})$$

d'où la rotation :

$$\theta_z(x) = \frac{dv(x)}{dx} = b_2 + 2b_3 x + 3b_4 x^2$$

Appliquons les conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \quad v=v_1 \quad \theta_z = \theta_{z_1} \\ x=L \quad v=v_2 \quad \theta_z = \theta_{z_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = b_1 \\ \theta_{z_1} = b_2 \\ v_2 = b_1 + b_2 L + b_3 L^2 + b_4 L^3 \\ \theta_{z_2} = b_2 + 2b_3 L + 3b_4 L^2 \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \equiv [A] \{b\} \quad (\text{IV.21})$$

Les constantes b_i ($i=1, \dots, 4$) sont obtenues en inversant la matrice $[A]$ tel que :

$$\{q_e\} = [A] \{b\} \quad \text{entraîne} \quad \{b\} = [A]^{-1} \{q_e\} \quad (\text{IV.22})$$

D'où le résultat :

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \end{Bmatrix} \quad (IV.23)$$

En négligeant l'effet de l'effort tranchant, l'énergie de déformation s'écrit dans ce cas :

$$U = \frac{1}{2} EI_z \int_0^L \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (IV.24)$$

$$v(x) = v_1 + \theta_{z_1} x + \left(-\frac{3}{L^2} v_1 - \frac{2}{L} \theta_{z_1} + \frac{3}{L^2} v_2 - \frac{1}{L} \theta_{z_2} \right) x^2 + \left(\frac{2}{L^3} v_1 + \frac{1}{L^2} \theta_{z_1} - \frac{2}{L^3} v_2 + \frac{1}{L^2} \theta_{z_2} \right) x^3$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta_{z_1} + 2 \left(-\frac{3}{L^2} v_1 - \frac{2}{L} \theta_{z_1} + \frac{3}{L^2} v_2 - \frac{1}{L} \theta_{z_2} \right) x + 3 \left(\frac{2}{L^3} v_1 + \frac{1}{L^2} \theta_{z_1} - \frac{2}{L^3} v_2 + \frac{1}{L^2} \theta_{z_2} \right) x^2$$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \underbrace{\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12}{L^3} x \right)}_{h_1(x)} v_1 + \underbrace{\left(-\frac{4}{L} + \frac{6}{L^2} x \right)}_{h_2(x)} \theta_{z_1} + \underbrace{\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3} x \right)}_{h_3(x)} v_2 + \underbrace{\left(-\frac{2}{L} + \frac{6}{L^2} x \right)}_{h_4(x)} \theta_{z_2}$$

Les charges sont déterminées par application du théorème de Castigliano :

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = EI_z \int_0^L \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] dx$$

$$\text{or } \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] = h_i(x) \quad (i = 1, \dots, 4)$$

$$\text{donc : } Q_i = EI_z \int_0^L \frac{d^2 v(x)}{dx^2} h_i(x) dx \quad (IV.26)$$

ou encore :

$$\begin{Bmatrix} F_{y_1} \\ M_{y_1} \\ F_{z_2} \\ M_{z_2} \end{Bmatrix} = EI_z \begin{bmatrix} \int_0^L h_1(x) h_1(x) dx \\ \int_0^L h_1(x) h_2(x) dx \\ \int_0^L h_3(x) h_1(x) dx \\ \int_0^L h_3(x) h_2(x) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \end{Bmatrix} \quad \dots i$$

D'où le résultat :

$$\begin{Bmatrix} F_{y_1} \\ M_{z_1} \\ F_{y_2} \\ M_{z_2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ \text{symétrique} & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & & & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

La matrice de rigidité en flexion autour de l'axe Oz est donc :

$$[K_e] = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ \text{Sym.} & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & & & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

d) Matrice de rigidité en flexion autour de l'axe Oy

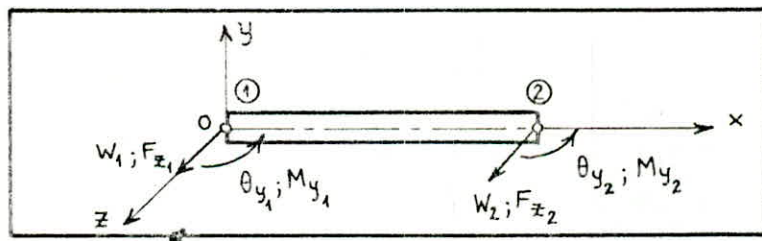


Fig. IV.5 : élément poutre en flexion autour de l'axe Oy .

La fonction de déplacement a pour expression :

$$W(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (\text{IV.29})$$

La rotation $\theta_y(x)$ s'écrit donc :

$$\theta_y(x) = \frac{dW(x)}{dx} = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} x=0 & \quad W = W_1 & \quad \theta_y = \theta_{y_1} \\ x=L & \quad W = W_2 & \quad \theta_y = \theta_{y_2} \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

En procédant de la même manière que dans le cas précédent, on détermine la matrice de rigidité en flexion autour de l'axe OY .

L'énergie de déformation étant :

$$U = \frac{1}{2} E I_y \int_0^L \left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (\text{IV.31})$$

D'où le résultat :

$$[K_e] = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ \text{Sym.} & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & & & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

La matrice de rigidité élémentaire en extension-compression, torsion, flexion autour de OY et flexion autour de OZ est obtenue en superposant les quatre cas cités ci-dessus telle que :

$$\{Q_e\} = [K_e] \{q_e\} \quad (\text{IV.33})$$

$$\text{où } \{Q_e\} = \{F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1}, M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1}, F_{x_2}, F_{y_2}, F_{z_2}, M_{x_2}, M_{y_2}, M_{z_2}\}^t$$

$$\{q_e\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \theta_{z_1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, \theta_{z_2}\}^t$$

$[K_e] =$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 & & & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 & & & & & \frac{4EI_z}{L} & & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
 & & & & & & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
 & & & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L}
 \end{bmatrix}$$

Symetrique

4. PRINCIPE D'ASSEMBLAGE

La procédure utilisée pour assembler les matrices de rigidité élémentaires dans la matrice de rigidité globale du système est connue sous le nom d'assemblage par éléments.

L'assemblage consiste à construire le système d'équations global :

$$[K]\{q\} = \{Q\} \quad (\text{IV.34})$$

en utilisant :

- la continuité des déplacements; c'est-à-dire que les déplacements de deux nœuds communs sont les mêmes.
- l'équilibre des forces qui se traduit, en chaque nœud i , par : $\sum_e P_i^e = 0$

Le procédé d'assemblage pour obtenir la matrice de rigidité $[K]$ de la structure est écrit symboliquement :

$$[K] = \sum_i [K_e]^{(i)} \quad (\text{IV.35})$$

où $[K_e]^{(i)}$ est la matrice de rigidité du $i^{\text{ème}}$ élément.

Dans la pratique, on se limite à ranger la matrice de rigidité réduite dont l'ordre est égal

au nombre de degrés de liberté total de telle façon que les lignes et colonnes correspondant aux degrés de liberté nuls soient supprimées.

Nous allons donc diviser notre système d'équations en deux sous-systèmes : l'un correspondant aux nœuds non appuyés et l'autre aux nœuds appuyés. Au niveau de la matrice ceci peut se traduire par une permutation des lignes et des colonnes c'est-à-dire une succession d'opérations simples. Nous pouvons donc mettre notre système sous la forme :

$$[K] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

et même partitionner notre matrice $[K]$ telle que :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

avec $\{q_1\}$ vecteur des déplacements inconnus de tous les nœuds non appuyés.

$\{q_2\}$ vecteur des déplacements connus de tous les nœuds appuyés, tel que $\{q_2\} = \{0\}$.

$\{Q_1\}$ vecteur force pour les nœuds non appuyés ; ce vecteur est parfaitement déterminé.

$\{Q_2\}$ vecteur des forces inconnues pour les nœuds appuyés.

Nous pouvons donc nous ramener à une résolution en deux temps : tout d'abord détermination de $\{q_1\}$ à partir de l'équation :

$$[K_{11}]\{q_1\} = \{Q_1\} \quad (\text{IV.38})$$

puis alors connaissant les déplacements $\{q_1\}$, nous en déduisons $\{Q_2\}$ par :

$$[K_{21}]\{q_1\} = \{Q_2\} \quad (\text{IV.39})$$

et à partir de $\{Q_2\}$ nous pouvons retrouver les réactions d'appuis.

5. CHANGEMENT de REPERE

L'analyse de notre structure, et celle des efforts dans les poutres, nous a conduit à utiliser deux repères.

Le repère global, ou repère de la structure, noté (O^*, X^*, Y^*, Z^*) , sert à définir les coordonnées des nœuds. Dans ce repère seront fournis les déplacements des nœuds.

Le repère local ou repère lié à la poutre, noté (O, X, Y, Z) , est un repère propre à chaque poutre défini par la fibre neutre de la poutre (axe Ox orienté du nœud début au nœud fin)

et par les axes OY et OZ formant un trièdre avec l'axe OX .

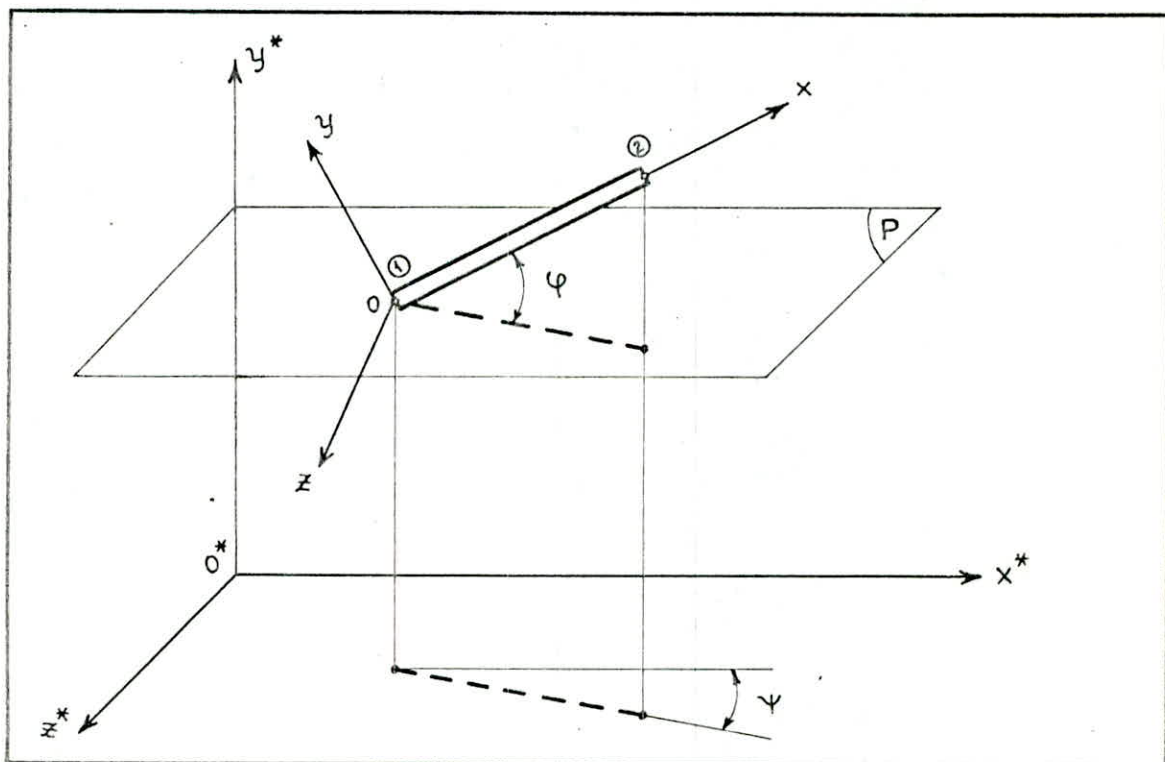


Fig. IV.6 : élément poutre dans le repère global.

Soient les déplacements u_i^* , v_i^* , w_i^* dans le repère global (O^*, x^*, y^*, z^*) .

Les déplacements u_i , v_i , w_i exprimés dans le repère local (O, x, y, z) sont :

$$\begin{cases} u_i = u_i^* \cos \varphi \cos \psi + v_i^* \sin \varphi + w_i^* \cos \varphi \sin \psi. \\ v_i = -u_i^* \sin \varphi \cos \psi + v_i^* \cos \varphi - w_i^* \sin \varphi \sin \psi. \\ w_i = -u_i^* \sin \psi + w_i^* \cos \psi. \end{cases}$$

(IV.40)

Le système (IV.40) peut être mis sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = [\lambda] \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ w_i^* \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.41})$$

tel que :

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

avec :

$$\cos \varphi = \frac{[(x_2^* - x_1^*)^2 + (z_2^* - z_1^*)^2]^{1/2}}{[(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2 + (z_2^* - z_1^*)^2]^{1/2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y_2^* - y_1^*}{[(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2 + (z_2^* - z_1^*)^2]^{1/2}} \quad (\text{IV.42})$$

$$\cos \psi = \frac{x_2^* - x_1^*}{[(x_2^* - x_1^*)^2 + (z_2^* - z_1^*)^2]^{1/2}}$$

$$\sin \psi = \frac{z_2^* - z_1^*}{[(x_2^* - x_1^*)^2 + (z_2^* - z_1^*)^2]^{1/2}}$$

les x_i^* , y_i^* , z_i^* étant les coordonnées du nœud i dans le repère global.

En généralisant pour un élément poutre à 12 degrés de liberté, on aura :

$$\{q\} = [T] \{q^*\} \quad (\text{IV.43})$$

tel que :

$$[T] = \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\lambda] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\lambda] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.44})$$

$[T]$ étant la matrice de transfert du repère global au repère local et ayant pour propriété :

$$[T][T]^{-1} = [T][T]^t = [I] \quad (\text{IV.45})$$

$[I]$ est la matrice identité.

On a encore pour la matrice de rigidité :

$$[K] = [T][K^*] \quad (\text{IV.46})$$

On peut démontrer facilement que :

$$\{q^*\} = [T]^t \{q\} \quad (\text{IV.47})$$

$$[K^*] = [T]^t [K] [T] \quad (\text{IV.48})$$

t : désigne le transposé.

6. RESOLUTION

L'algorithme de Jordan opère le passage de la matrice $[C] = [K, Q]$ à la matrice $[D] = [I, q]$.

où $\{q\}$ est la solution du système linéaire :

$$[K]\{q\} = \{Q\}$$

soit $\{q\} = [K]^{-1} \{Q\}$

[I] est la matrice identité.

L'algorithme s'écrit :

• Recherche du pivot :

$$P_m = k_{l_m c_m}$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$m = 1, \dots, n$$

où $k_{l_m c_m} = \max_{i, j} |k_{ij}|$

$$i \neq l_1, \dots, l_{m-1}$$

$$j \neq c_1, \dots, c_{m-1}$$

• Normalisation :

$$k_{l_m j} = k_{l_m j} / P_m$$

$$j = 1, \dots, n+1$$

$$m = 1, \dots, n$$

• Reduction :

$$z = k_{i c_m}$$

$$k_{ij} = k_{ij} - z \cdot k_{l_m j}$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, n+1$$

$$i \neq l_m$$

$$m = 1, \dots, n$$

• Remise en ordre :

$$X_{c_m} = k_{c_m, n+1}$$

$$m = 1, \dots, n$$

V. FORMULATION des CONTRAINTES

1. CONTRAINTES NORMALES

Dans le cas général de traction ou compression et flexion déviée simultanées dans une section droite arbitraire de la poutre, la contrainte normale est égale à la somme algébrique des contraintes normales provoquées par l'effort axial normal N_x à la section droite et les moments flechissants M_y et M_z .

On a donc :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{S} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \quad (\text{V.1})$$

où S : est la section transversale de la poutre considérée.

I_y : moment quadratique par rapport à Oy .

I_z : moment quadratique par rapport à Oz .

ou encore :

$$\sigma_x = E \varepsilon_{xx} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\text{or } \varepsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx} = u'(x)$$

$$M_y = -EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -EI_y \cdot w''(x)$$

$$M_z = -EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -EI_z \cdot v''(x)$$

La contrainte normale à la section peut donc s'écrire :

$$\sigma_x = E (u'(x) - y \cdot v''(x) - z \cdot w''(x)) \quad (\text{V.2})$$

Les déplacements $u(x)$, $v(x)$ et $w(x)$ s'expriment par :

- $u(x) = [1 \ x] \{a_1 \ a_2\}^t$
- $v(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \{b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4\}^t$ (V.3)
- $w(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \{c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4\}^t$

Les a_i , b_i , et c_i sont des constantes à déterminer d'après les conditions aux limites.

sous forme matricielle :

$$\{q(x)\} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = [f(x)] \{\alpha\} = [f(x)] [A]^{-1} \{q_e\} \quad (V.4)$$

$\{q_e\}$: étant le vecteur des déplacements aux nœuds.

$[f(x)]$: matrice des fonctions polynômes.

$\{\alpha\}$: vecteur colonne des constantes.

En différenciant une fois la première ligne de la matrice $[f(x)]$ et deux fois les deuxième et troisième lignes, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} u'(x) \\ v''(x) \\ w''(x) \end{Bmatrix} = [\text{différentielle de } f(x)] [A]^{-1} \{q_e\} \quad (V.5)$$

tel que :

$$[f(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.6)$$

$$\{q_e\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \theta_{z_1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, \theta_{z_2}\}^t$$

La différentiation de $[f(x)]$ donne :

$$[\text{différentielle de } f(x)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les contraintes normales sont donc exprimées en fonction des déplacements aux nœuds $\{q_e\}$.

2. CONTRAINTES de CISAILLEMENT

La contrainte de cisaillement s'exprime par la relation :

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (\text{V.7})$$

G : étant le module d'élasticité transversal du matériau
 γ : la déformation angulaire.

① Pour une poutre à section circulaire, la contrainte de cisaillement est proportionnelle au rayon de la poutre :

$$\tau = G \cdot r \cdot \theta \quad (\text{V.8})$$

r : rayon de la poutre variant de 0 à R .

θ : angle de torsion par unité de longueur.

Le cisaillement est maximum pour $r = R$, c'est-à-dire sur la surface latérale de la poutre :

$$\tau_{\max} = G R \theta \quad (\text{V.9})$$

En considérant la poutre comme isotrope, d'axe rectiligne et de poids propre négligeable, le moment de torsion a pour expression :

$$M_t = G \theta \iint_{(S)} r^2 dS = G \theta I_p \quad (\text{V.10})$$

$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$: moment quadratique polaire.

et finalement :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot R}{I_p} \quad (\text{V.11})$$

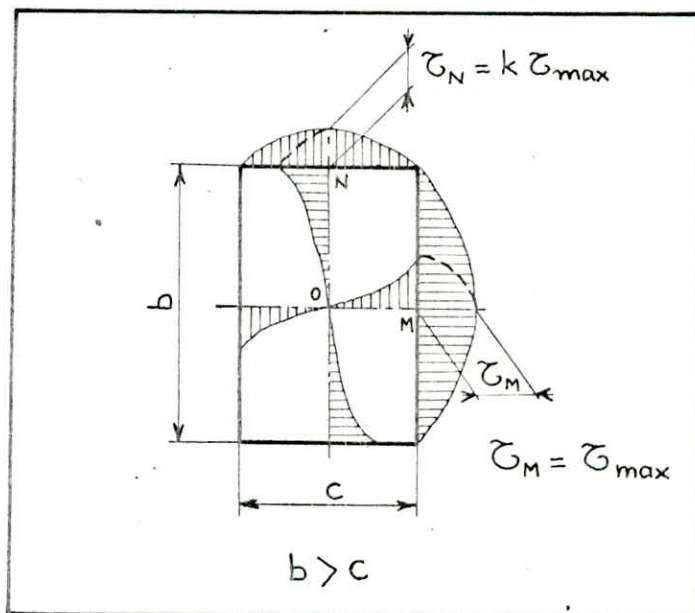
⑥. Pour une poutre à section rectangulaire, le problème est complexe en raison du gauchissement pendant la torsion.

Cependant, il a été montré expérimentalement que la contrainte de cisaillement est maximale au milieu des côtés et nulle aux angles de la section.

Une étude rigoureuse montre que la contrainte de cisaillement est maximum au milieu des grands côtés de la section rectangulaire (Fig. V.1).

On calcule la contrainte de cisaillement avec une exactitude satisfaisante [6], d'après la relation approchée :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{bc^2} \left(3 + 1,8 \frac{c}{b} \right) \quad (\text{V.12})$$



k dépend de $\frac{b}{c}$

Fig. V.1 : contraintes de cisaillement dans une section rectangulaire

VI. APPLICATIONS et RESULTATS

Dans ce paragraphe on procédera au dimensionnement du vilebrequin du moteur en ligne F4L912 par rapport à l'effort maximal dû aux gaz dans les cylindres ; en déterminant les dimensions optimales vérifiant les contraintes admissibles du matériau.

Les contraintes admissibles du vilebrequin en acier forgé et traité exprimées en daN/mm^2 sont :

| Element | maneton | bras | tourillon |
|-------------------------|---------|------|-----------|
| Contrainte normale | 15 | 14 | 6 |
| Contrainte tangentielle | 17 | 14 | 12 |

Les propriétés du matériau sont :

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$$

1. Premier modèle

① - Discretisation et répartition des efforts

Le premier modèle établi dans le paragraphe III (Fig. III-1) permet de discretiser le vilebrequin selon les éléments présentés dans la (Fig. VI-1) ci-dessous tels que les appuis correspondent à des nœuds.

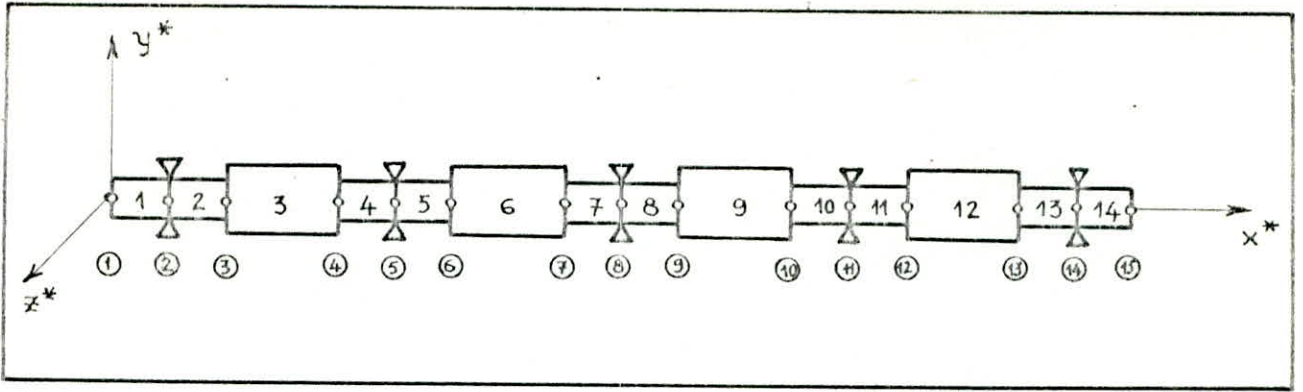


Fig. VI.1 : Discretisation du premier modèle.

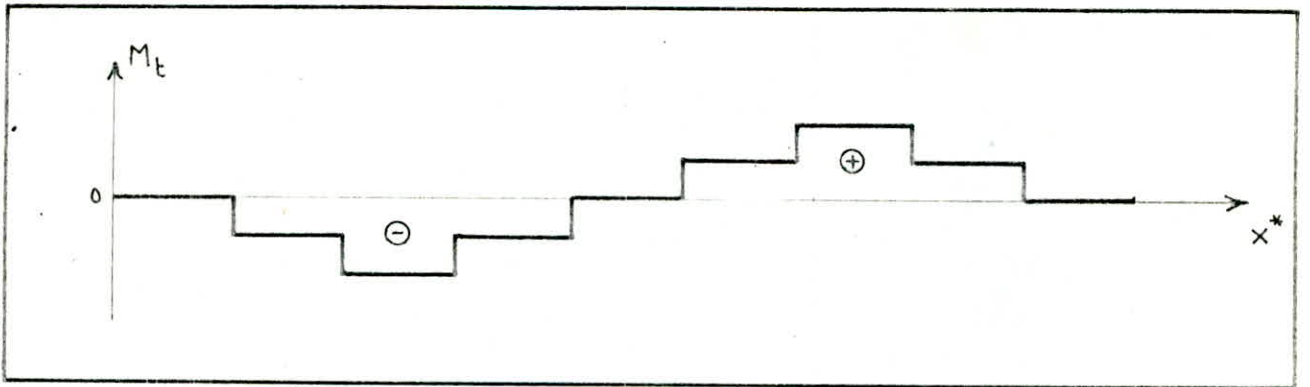


Fig. VI.2 : Diagramme du moment de torsion du premier modèle.

Nombre de nœuds total = 15

Nombre d'éléments total = 14

• Réduction des forces :

L'effort maximal exercé au milieu du maneton est réduit aux nœuds de cet élément tel que :

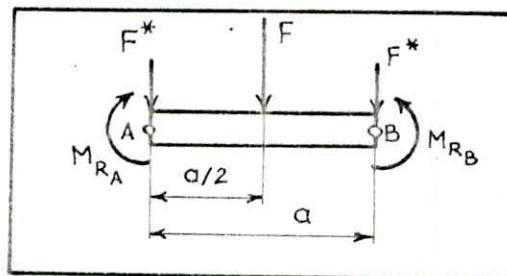


Fig. VI.3 : Réduction de la force sur le maneton.

$$\begin{cases} F^* = \frac{F}{2} \\ F^* \cdot a + F \cdot \frac{a}{2} - M_{R_A} = 0 \end{cases} \Rightarrow M_{R_A} = \frac{3}{2} F \cdot a$$

$$M_{R_i} = \pm \frac{3}{2} F \cdot a$$

Les forces F^* et les moments réduits M_{R_i} ainsi calculés seront répartis aux nœuds 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12 et 13

Le moment de torsion est ainsi calculé par les formules

$$M_{t_1} = M_{t_2} = 0$$

$$M_{t_3} = -F_{z_3} \cdot D_2 / 2$$

$$M_{t_4} = M_{t_3} - F_{z_4} \cdot D_2 / 2$$

$$M_{t_5} = M_{t_4}$$

$$M_{t_6} = M_{t_5} - F_{z_6} \cdot D_2 / 2$$

$$M_{t_7} = M_{t_6} - F_{z_7} \cdot D_2 / 2$$

$$M_{t_8} = 0$$

et ainsi de suite.

Remarque: La lecture du moment de torsion dans le tableau des données se fait de façon nulle, ensuite il est calculé dans le programme en fonction des efforts tangentiels F_{z_i} répartis aux nœuds et des dimensions afin de faciliter la variation de ces dernières (entrée sur clavier) jusqu'à avoir les dimensions optimales et par la suite le moment de torsion en fonction de celles-ci.

⑥ - Résultats obtenus

L'analyse des résultats obtenus d'après les hypothèses:

- Comportement linéaire - élastique du matériau.
- Matériau isotrope.

conduit aux observations suivantes :

- Distribution des déplacements :

- les déplacements selon l'axe ox^* sont nuls ; $u = 0$.
- les valeurs maximales des déplacements selon Oy^* et rotations autour de Oy^* sont :

$$\text{appuis rigides : } \begin{cases} v = 0,42 \cdot 10^{-5} \text{ m.} \\ \theta_y = 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ rd.} \end{cases}$$

$$\text{appuis élastiques : } \begin{cases} v = 0,91 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \\ \theta_y = 0,12 \cdot 10^{-2} \text{ rd.} \end{cases}$$

- les valeurs maximales des déplacements selon Oz^* et rotations autour du même axe sont :

$$\text{appuis rigides : } \begin{cases} w = 0,82 \cdot 10^{-5} \text{ m.} \\ \theta_z = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ rd.} \end{cases}$$

$$\text{appuis élastiques : } \begin{cases} w = 0,47 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \\ \theta_z = 0,10 \cdot 10^{-2} \text{ rd.} \end{cases}$$

- les rotations maximales dues à la torsion sont :

$$\text{appuis rigides : } \theta_x = 0,10 \cdot 10^{-1} \text{ rd.}$$

$$\text{appuis élastiques : } \theta_x = 0,10 \cdot 10^{-1} \text{ rd.}$$

Données du premier modèle

| appuis rigides | | | | | | appuis elastiques | | | | | | | |
|----------------|--------|---|---|---|---|-------------------|------|--------|---|---|---|---|---|
| Nœud | d.d.l. | | | | | | Nœud | d.d.l. | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 11 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 14 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| x^* | y^* | z^* |
|--------|--------|--------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0185 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0370 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1300 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1485 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1670 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2600 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2785 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2970 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.3900 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4085 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4270 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.5200 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.5385 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.5570 | 0.0000 | 0.0000 |

| Element | connections | | E | G |
|---------|-------------|----|-------|-------|
| 1 | 1 | 2 | 2.E11 | 8.E10 |
| 2 | 2 | 3 | 2.E11 | 8.E10 |
| 3 | 3 | 4 | 2.E11 | 8.E10 |
| 4 | 4 | 5 | 2.E11 | 8.E10 |
| 5 | 5 | 6 | 2.E11 | 8.E10 |
| 6 | 6 | 7 | 2.E11 | 8.E10 |
| 7 | 7 | 8 | 2.E11 | 8.E10 |
| 8 | 8 | 9 | 2.E11 | 8.E10 |
| 9 | 9 | 10 | 2.E11 | 8.E10 |
| 10 | 10 | 11 | 2.E11 | 8.E10 |
| 11 | 11 | 12 | 2.E11 | 8.E10 |
| 12 | 12 | 13 | 2.E11 | 8.E10 |
| 13 | 13 | 14 | 2.E11 | 8.E10 |
| 14 | 14 | 15 | 2.E11 | 8.E10 |

| F_x | F_y | F_z | M_x | M_y | M_z |
|--------|-------------|-------------|--------|------------|------------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Resultats

appuis rigides :

DEPLACEMENTS

NOEUX

| N° | U [mm] | V [mm] | W [mm] | TETAx [rd] | TETAy [rd] | TETAz [rd] |
|----|----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| 1 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | -0.10E-01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 2 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | -0.10E-01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 3 | 0.00E+00 | 0.42E-03 | 0.82E-03 | -0.10E-01 | 0.87E-03 | 0.42E-03 |
| 4 | 0.00E+00 | 0.42E-03 | 0.82E-03 | -0.98E-02 | -0.87E-03 | -0.42E-03 |
| 5 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | -0.97E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 6 | 0.00E+00 | -0.42E-03 | -0.82E-03 | -0.80E-02 | -0.87E-03 | -0.42E-03 |
| 7 | 0.00E+00 | -0.42E-03 | -0.82E-03 | -0.68E-02 | 0.87E-03 | 0.42E-03 |
| 8 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | -0.50E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 9 | 0.00E+00 | -0.42E-03 | -0.82E-03 | -0.32E-02 | -0.87E-03 | -0.42E-03 |
| 0 | 0.00E+00 | -0.42E-03 | -0.82E-03 | -0.20E-02 | 0.87E-03 | 0.42E-03 |
| 1 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | -0.85E-03 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 2 | 0.00E+00 | 0.42E-03 | 0.82E-03 | -0.17E-03 | 0.87E-03 | 0.42E-03 |
| 3 | 0.00E+00 | 0.42E-03 | 0.82E-03 | 0.16E-17 | -0.87E-03 | -0.42E-03 |
| 4 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.92E-13 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 5 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.16E-11 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |

* CONTRAINTES *

| ELEMENT | SIGMA _{max} | TAU _{max} |
|---------|----------------------|--------------------|
| 1 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 2 | -.74E+05 | 0.00E+00 |
| 3 | -.12E+08 | -.54E+07 |
| 4 | 0.87E+07 | -.44E+08 |
| 5 | 0.74E+05 | -.44E+08 |
| 6 | 0.12E+08 | -.54E+07 |
| 7 | -.87E+07 | 0.00E+00 |
| 8 | 0.74E+05 | 0.00E+00 |
| 9 | 0.12E+08 | 0.54E+07 |
| 10 | -.87E+07 | 0.44E+08 |
| 11 | -.74E+05 | 0.44E+08 |
| 12 | -.12E+08 | 0.54E+07 |
| 13 | 0.87E+07 | 0.00E+00 |
| 14 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |

** MOMENT DE TORSION **

| | |
|----|------------------------|
| 1 | 0.0000000000000000E+00 |
| 2 | 0.0000000000000000E+00 |
| 3 | -393.05728800000000 |
| 4 | -786.11457600000000 |
| 5 | -786.11457600000000 |
| 6 | -786.11457600000000 |
| 7 | -393.05728800000000 |
| 8 | 0.0000000000000000E+00 |
| 9 | 393.05728800000000 |
| 10 | 786.11457600000000 |
| 11 | 786.11457600000000 |
| 12 | 786.11457600000000 |
| 13 | 393.05728800000000 |
| 14 | 0.0000000000000000E+00 |
| 15 | 0.0000000000000000E+00 |

appuis elastiques :

D E P L A C E M E N T S

N O D A U X

| N° | U [cm] | V [cm] | W [cm] | TETAx [rd] | TETAy [rd] | TETAz [rd] |
|----|----------|----------|----------|------------|------------|------------|
| 1 | 0.00E+00 | 0.61E-04 | 0.27E-04 | -.10E-01 | -.31E-19 | -.34E-19 |
| 2 | 0.00E+00 | 0.61E-04 | 0.27E-04 | -.10E-01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 3 | 0.00E+00 | 0.59E-04 | 0.33E-04 | -.10E-01 | 0.59E-03 | -.20E-03 |
| 4 | 0.00E+00 | -.50E-05 | 0.41E-05 | -.98E-02 | -.12E-02 | -.10E-02 |
| 5 | 0.00E+00 | -.15E-04 | -.68E-05 | -.91E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 6 | 0.00E+00 | -.25E-04 | -.18E-04 | -.80E-02 | -.12E-02 | -.10E-02 |
| 7 | 0.00E+00 | -.89E-04 | -.47E-04 | -.68E-02 | 0.59E-03 | -.20E-03 |
| 8 | 0.00E+00 | -.91E-04 | -.41E-04 | -.50E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 9 | 0.00E+00 | -.89E-04 | -.47E-04 | -.32E-02 | -.59E-03 | 0.20E-03 |
| 10 | 0.00E+00 | -.25E-04 | -.18E-04 | -.20E-02 | 0.12E-02 | 0.10E-02 |
| 11 | 0.00E+00 | -.15E-04 | -.68E-05 | -.85E-03 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 12 | 0.00E+00 | -.50E-05 | 0.41E-05 | -.17E-03 | 0.12E-02 | 0.10E-02 |
| 13 | 0.00E+00 | 0.59E-04 | 0.33E-04 | 0.18E-17 | -.59E-03 | 0.20E-03 |
| 14 | 0.00E+00 | 0.61E-04 | 0.27E-04 | 0.92E-18 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 15 | 0.00E+00 | 0.61E-04 | 0.27E-04 | 0.16E-11 | -.44E-19 | -.16E-19 |

* CONTRAINTES *

| ELEMENT | SIGMAX | TAUmax | ELEMENT | SIGMAX | TAUmax |
|---------|----------|----------|---------|----------|----------|
| 1 | 0.12E+08 | 0.00E+00 | 10 | -.15E+08 | 0.44E+08 |
| 2 | 0.12E+08 | 0.00E+00 | 11 | -.31E+07 | 0.44E+08 |
| 3 | 0.32E+07 | -.54E+07 | 12 | -.18E+08 | 0.54E+07 |
| 4 | 0.94E+07 | -.44E+08 | 13 | 0.17E+08 | 0.00E+00 |
| 5 | -.29E+07 | -.44E+08 | 14 | 0.12E+08 | 0.00E+00 |
| 6 | 0.12E+08 | -.54E+07 | | | |
| 7 | -.23E+08 | 0.00E+00 | | | |
| 8 | -.18E+08 | 0.00E+00 | | | |
| 9 | -.90E+07 | 0.54E+07 | | | |

- Distribution des contraintes :

. les contraintes normales maximales s'obtiennent

pour : appuis rigides : $\sigma_{x_{max}} = 0,12 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

appuis élastiques : $\sigma_{x_{max}} = 0,23 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

. les contraintes tangentielles maximales calculées

sont : appuis rigides : $\tau_{max} = 0,44 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$

appuis élastiques : $\tau_{max} = 0,44 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

- Dimensions optimales :

Les résultats obtenus ci-dessus ont été déterminés pour des diamètres vérifiant les contraintes admissibles du matériau sans torsion excessive :

. tourillon : $D_1 = 45 \text{ mm}$.

. bras + maneton : $D_2 = 72 \text{ mm}$.

2 - Deuxième modèle

ⓐ - Discretisation et répartition des efforts

La discretisation du deuxième modèle est établie dans la (fig. VII-4).

Le nombre de nœuds total = 23

Le nombre d'éléments total = 22

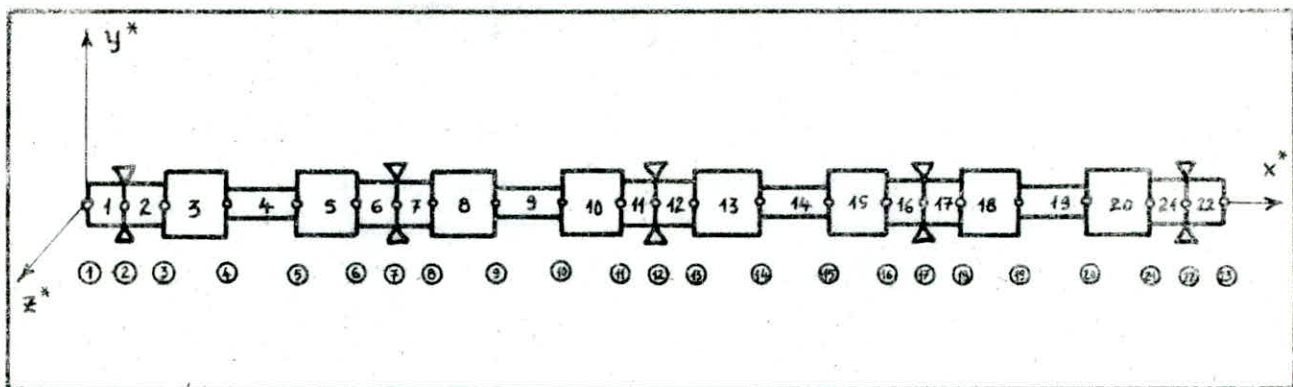


Fig. VI.4: Discretisation du deuxième modèle.

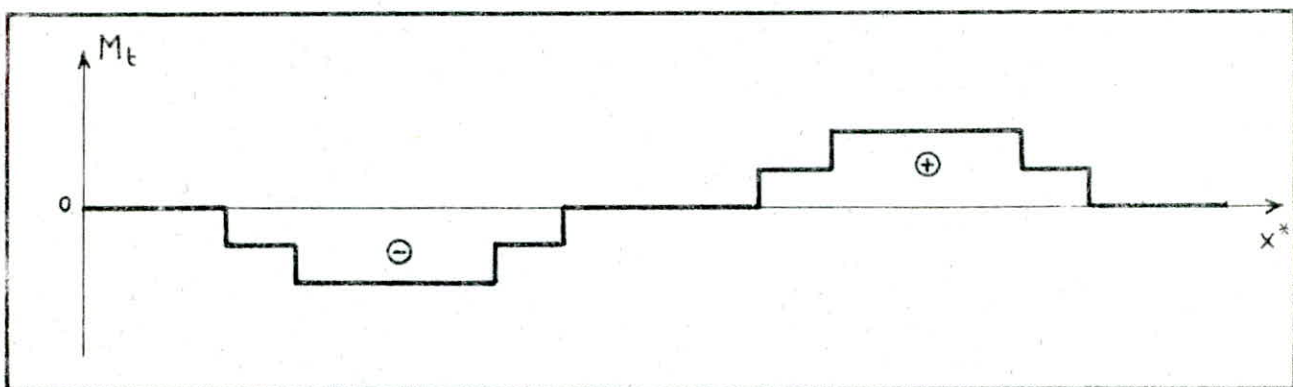


Fig. VI.5 : Diagramme du moment de torsion du deuxième modèle.

Les forces et les moments réduits sont répartis aux nœuds 4, 5, 9, 10, 14, 15, 19 et 20

Le moment de torsion est calculé par les formules :

$$M_{t1} = M_{t2} = M_{t3} = 0$$

$$M_{t4} = M_{t3} - F_{z3} \cdot D_2 / 2$$

$$M_{t5} = M_{t4} - F_{z5} \cdot D_2 / 2$$

$$M_{t6} = M_{t5}$$

$$M_{t7} = M_{t6}$$

$$M_{t8} = M_{t7}$$

$$M_{t_9} = M_{t_8} - F_{z_9} \cdot D_2 / 2$$

$$M_{t_{10}} = M_{t_9} - F_{z_{10}} \cdot D_2 / 2$$

$$M_{t_{11}} = M_{t_{10}}$$

$$M_{t_{12}} = M_{t_{11}}$$

Pour les autres nœuds on inversera les signes en procédant par symétrie.

② - Résultats obtenus

L'analyse des résultats obtenus conduit aux observations suivantes :

- Distribution des déplacements :

- les déplacements suivant l'axe ox^* sont nuls ; $u = 0$.
- les valeurs maximales des déplacements selon oy^* et rotations autour de oy^* s'obtiennent pour :

$$\text{appuis rigides : } \begin{cases} v = 0,10 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \\ \theta_y = 0,49 \cdot 10^{-3} \text{ rd.} \end{cases}$$

$$\text{appuis élastiques : } \begin{cases} v = 0,36 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \\ \theta_y = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ rd.} \end{cases}$$

- les valeurs maximales des déplacements selon oz^* et rotations autour du même axe sont :

$$\text{appuis rigides : } \begin{cases} w = 0,18 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \\ \theta_z = 0,27 \cdot 10^{-3} \text{ rd.} \end{cases}$$

$$\text{appuis élastiques : } \begin{cases} w = 0,30 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \\ \theta_z = 0,40 \cdot 10^{-3} \text{ rd.} \end{cases}$$

Données du deuxième modèle

appuis rigides

| Noeud | d.d.l. | | | | | |
|-------|--------|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

appuis elastiques

| Noeud | d.d.l. | | | | | |
|-------|--------|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 17 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 22 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

 x^* y^* z^*

| | | |
|--------|--------|--------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0185 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0370 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0665 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1005 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1300 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1485 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1670 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1965 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2305 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2600 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2785 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2970 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.3265 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.3605 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.3900 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4085 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4270 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4565 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4905 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.5200 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.5385 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.5570 | 0.0000 | 0.0000 |

| Element | connections | | E | G |
|---------|-------------|----|-------|-------|
| 1 | 1 | 2 | 2.E11 | 8.E10 |
| 2 | 2 | 3 | 2.E11 | 8.E10 |
| 3 | 3 | 4 | 2.E11 | 8.E10 |
| 4 | 4 | 5 | 2.E11 | 8.E10 |
| 5 | 5 | 6 | 2.E11 | 8.E10 |
| 6 | 6 | 7 | 2.E11 | 8.E10 |
| 7 | 7 | 8 | 2.E11 | 8.E10 |
| 8 | 8 | 9 | 2.E11 | 8.E10 |
| 9 | 9 | 10 | 2.E11 | 8.E10 |
| 10 | 10 | 11 | 2.E11 | 8.E10 |
| 11 | 11 | 12 | 2.E11 | 8.E10 |
| 12 | 12 | 13 | 2.E11 | 8.E10 |
| 13 | 13 | 14 | 2.E11 | 8.E10 |
| 14 | 14 | 15 | 2.E11 | 8.E10 |
| 15 | 15 | 16 | 2.E11 | 8.E10 |
| 16 | 16 | 17 | 2.E11 | 8.E10 |
| 17 | 17 | 18 | 2.E11 | 8.E10 |
| 18 | 18 | 19 | 2.E11 | 8.E10 |
| 19 | 19 | 20 | 2.E11 | 8.E10 |
| 20 | 20 | 21 | 2.E11 | 8.E10 |
| 21 | 21 | 22 | 2.E11 | 8.E10 |
| 22 | 22 | 23 | 2.E11 | 8.E10 |

| F_x | F_y | F_z | M_x | M_y | M_z |
|--------|-------------|-------------|--------|------------|------------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Resultats

*** MOMENT DE TORSION ***

```
1 0.0000000000000000E+00
2 0.0000000000000000E+00
3 0.0000000000000000E+00
4 -294.7929660000000
5 -589.5859320000000
6 -589.5859320000000
7 -589.5859320000000
8 -589.5859320000000
9 -589.5859320000000
10 -294.7929660000000
11 0.0000000000000000E+00
12 0.0000000000000000E+00
13 0.0000000000000000E+00
14 294.7929660000000
15 589.5859320000000
16 589.5859320000000
17 589.5859320000000
18 589.5859320000000
19 589.5859320000000
20 294.7929660000000
21 0.0000000000000000E+00
22 0.0000000000000000E+00
23 0.0000000000000000E+00
```


appuis rigides :

| D E P L A C E M E N T S | | | N O D A U X | | | |
|-------------------------|----------|----------|-------------|------------|------------|------------|
| N° | U [cm] | V [cm] | W [cm] | TETAx [rd] | TETAy [rd] | TETAz [rd] |
| 1 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | -.81E-11 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 2 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | -.95E-18 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 3 | 0.00E+00 | 0.24E-05 | 0.41E-05 | -.19E-17 | 0.44E-03 | 0.25E-03 |
| 4 | 0.00E+00 | 0.10E-04 | 0.18E-04 | -.20E-17 | 0.49E-03 | 0.27E-03 |
| 5 | 0.00E+00 | 0.10E-04 | 0.18E-04 | 0.15E-03 | -.49E-03 | -.27E-03 |
| 6 | 0.00E+00 | 0.24E-05 | 0.41E-05 | 0.16E-03 | -.44E-03 | -.25E-03 |
| 7 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.33E-03 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 8 | 0.00E+00 | -.24E-05 | -.41E-05 | 0.58E-03 | -.44E-03 | -.25E-03 |
| 9 | 0.00E+00 | -.10E-04 | -.18E-04 | 0.61E-03 | -.49E-03 | -.27E-03 |
| 10 | 0.00E+00 | -.10E-04 | -.18E-04 | 0.23E-02 | 0.49E-03 | 0.27E-03 |
| 11 | 0.00E+00 | -.24E-05 | -.41E-05 | 0.23E-02 | 0.44E-03 | 0.25E-03 |
| 12 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.27E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 13 | 0.00E+00 | -.24E-05 | -.41E-05 | 0.31E-02 | -.44E-03 | -.25E-03 |
| 14 | 0.00E+00 | -.10E-04 | -.18E-04 | 0.32E-02 | -.49E-03 | -.27E-03 |
| 15 | 0.00E+00 | -.10E-04 | -.18E-04 | 0.48E-02 | 0.49E-03 | 0.27E-03 |
| 16 | 0.00E+00 | -.24E-05 | -.41E-05 | 0.49E-02 | 0.44E-03 | 0.25E-03 |
| 17 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.51E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 18 | 0.00E+00 | 0.24E-05 | 0.41E-05 | 0.53E-02 | 0.44E-03 | 0.25E-03 |
| 19 | 0.00E+00 | 0.10E-04 | 0.18E-04 | 0.53E-02 | 0.49E-03 | 0.27E-03 |
| 20 | 0.00E+00 | 0.10E-04 | 0.18E-04 | 0.54E-02 | -.49E-03 | -.27E-03 |
| 21 | 0.00E+00 | 0.24E-05 | 0.41E-05 | 0.54E-02 | -.44E-03 | -.25E-03 |
| 22 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.54E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 23 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.54E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |

* CONTRAINTES *

| ELEMENT | SIGMA _x | TAU _{max} |
|---------|--------------------|--------------------|
| 1 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 2 | -.56E+05 | 0.00E+00 |
| 3 | -.12E+08 | 0.00E+00 |
| 4 | -.35E+07 | -.95E+07 |
| 5 | 0.15E+08 | -.14E+07 |
| 6 | 0.64E+07 | -.10E+08 |
| 7 | 0.56E+05 | -.10E+08 |
| 8 | 0.12E+08 | -.14E+07 |
| 9 | 0.35E+07 | -.95E+07 |
| 10 | -.15E+08 | 0.00E+00 |
| 11 | -.64E+07 | 0.00E+00 |
| 12 | 0.56E+05 | 0.00E+00 |
| 13 | 0.12E+08 | 0.00E+00 |
| 14 | 0.35E+07 | 0.95E+07 |
| 15 | -.15E+08 | 0.14E+07 |
| 16 | -.64E+07 | 0.10E+08 |
| 17 | -.56E+05 | 0.10E+08 |
| 18 | -.12E+08 | 0.14E+07 |
| 19 | -.35E+07 | 0.95E+07 |
| 20 | 0.15E+08 | 0.00E+00 |
| 21 | 0.64E+07 | 0.00E+00 |
| 22 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |

appuis elastiques :

| D E P L A C E M E N T S | | | N O D A U X | | | |
|-------------------------|----------|----------|-------------|------------|------------|------------|
| N° | U [m] | V [m] | W [m] | TETAx [rd] | TETAy [rd] | TETAz [rd] |
| 1 | 0.00E+00 | 0.15E-08 | -.44E-09 | -.81E-11 | -.35E-18 | 0.13E-17 |
| 2 | 0.00E+00 | 0.16E-19 | -.44E-20 | -.95E-18 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 3 | 0.00E+00 | 0.11E-05 | 0.36E-05 | -.19E-17 | 0.39E-03 | 0.12E-03 |
| 4 | 0.00E+00 | 0.49E-05 | 0.16E-04 | -.20E-17 | 0.43E-03 | 0.14E-03 |
| 5 | 0.00E+00 | -.57E-06 | 0.13E-04 | 0.15E-03 | -.55E-03 | -.40E-03 |
| 6 | 0.00E+00 | -.12E-04 | -.24E-05 | 0.16E-03 | -.50E-03 | -.37E-03 |
| 7 | 0.00E+00 | -.16E-04 | -.71E-05 | 0.33E-03 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 8 | 0.00E+00 | -.19E-04 | -.12E-04 | 0.58E-03 | -.50E-03 | -.37E-03 |
| 9 | 0.00E+00 | -.31E-04 | -.27E-04 | 0.61E-03 | -.55E-03 | -.40E-03 |
| 10 | 0.00E+00 | -.36E-04 | -.30E-04 | 0.23E-02 | 0.43E-03 | 0.14E-03 |
| 11 | 0.00E+00 | -.33E-04 | -.18E-04 | 0.23E-02 | 0.39E-03 | 0.12E-03 |
| 12 | 0.00E+00 | -.31E-04 | -.14E-04 | 0.27E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 13 | 0.00E+00 | -.33E-04 | -.18E-04 | 0.31E-02 | -.39E-03 | -.12E-03 |
| 14 | 0.00E+00 | -.36E-04 | -.30E-04 | 0.32E-02 | -.43E-03 | -.14E-03 |
| 15 | 0.00E+00 | -.31E-04 | -.27E-04 | 0.48E-02 | 0.55E-03 | 0.40E-03 |
| 16 | 0.00E+00 | -.19E-04 | -.12E-04 | 0.49E-02 | 0.50E-03 | 0.37E-03 |
| 17 | 0.00E+00 | -.16E-04 | -.71E-05 | 0.51E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 18 | 0.00E+00 | -.12E-04 | -.24E-05 | 0.53E-02 | 0.50E-03 | 0.37E-03 |
| 19 | 0.00E+00 | -.57E-06 | 0.13E-04 | 0.53E-02 | 0.55E-03 | 0.40E-03 |
| 20 | 0.00E+00 | 0.49E-05 | 0.16E-04 | 0.54E-02 | -.43E-03 | -.14E-03 |
| 21 | 0.00E+00 | 0.11E-05 | 0.36E-05 | 0.54E-02 | -.39E-03 | -.12E-03 |
| 22 | 0.00E+00 | 0.21E-17 | -.72E-18 | 0.54E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 23 | 0.00E+00 | 0.21E-17 | -.72E-18 | 0.54E-02 | -.46E-19 | -.19E-19 |

* CONTRAINTES *

| ELEMENT | SIGMAX | TAUmax |
|---------|----------|----------|
| 1 | 0.30E+03 | 0.00E+00 |
| 2 | -.48E+05 | 0.00E+00 |
| 3 | -.10E+08 | 0.00E+00 |
| 4 | -.38E+07 | -.95E+07 |
| 5 | 0.14E+08 | -.14E+07 |
| 6 | 0.44E+07 | -.10E+08 |
| 7 | -.30E+07 | -.10E+08 |
| 8 | 0.99E+07 | -.14E+07 |
| 9 | 0.13E+06 | -.95E+07 |
| 10 | -.18E+08 | 0.00E+00 |
| 11 | -.12E+08 | 0.00E+00 |
| 12 | -.60E+07 | 0.00E+00 |
| 13 | 0.44E+07 | 0.00E+00 |
| 14 | -.23E+07 | 0.95E+07 |
| 15 | -.20E+08 | 0.14E+07 |
| 16 | -.10E+08 | 0.10E+08 |
| 17 | -.31E+07 | 0.10E+08 |
| 18 | -.16E+08 | 0.14E+07 |
| 19 | -.63E+07 | 0.95E+07 |
| 20 | 0.12E+08 | 0.00E+00 |
| 21 | 0.54E+07 | 0.00E+00 |
| 22 | 0.43E-06 | 0.00E+00 |

• les rotations maximales autour de l'axe Ox^* sont :

appuis rigides : $\theta_x = 0,54 \cdot 10^{-2}$ rd.

appuis élastiques : $\theta_x = 0,54 \cdot 10^{-2}$ rd.

- Distribution des contraintes :

• les contraintes normales maximales calculées sont :

appuis rigides : $\bar{\sigma}_{x_{max}} = 0,15 \cdot 10^8$ N/m².

appuis élastiques : $\bar{\sigma}_{x_{max}} = 0,20 \cdot 10^8$ N/m².

• les contraintes tangentiellles maximales calculées sont :

appuis rigides : $\bar{\tau}_{max} = 0,10 \cdot 10^8$ N/m².

appuis élastiques : $\bar{\tau}_{max} = 0,10 \cdot 10^8$ N/m².

- Dimensions optimales :

Les dimensions optimales vérifiant les contraintes admissibles du matériau s'obtiennent pour :

• diamètre du tourillon : $D_1 = 0,067$ m.

• diamètre du maneton : $D_2 = 0,054$ m.

• diamètre du bras : $D_3 = 0,130$ m.

3. Troisième modèle

① - Discretisation et repartition des efforts

La discrétisation du troisième modèle du vilebrequin en éléments finis est établie dans la (Fig. VI-6).

Le nombre de nœuds total = 23

Le nombre d'éléments total = 22

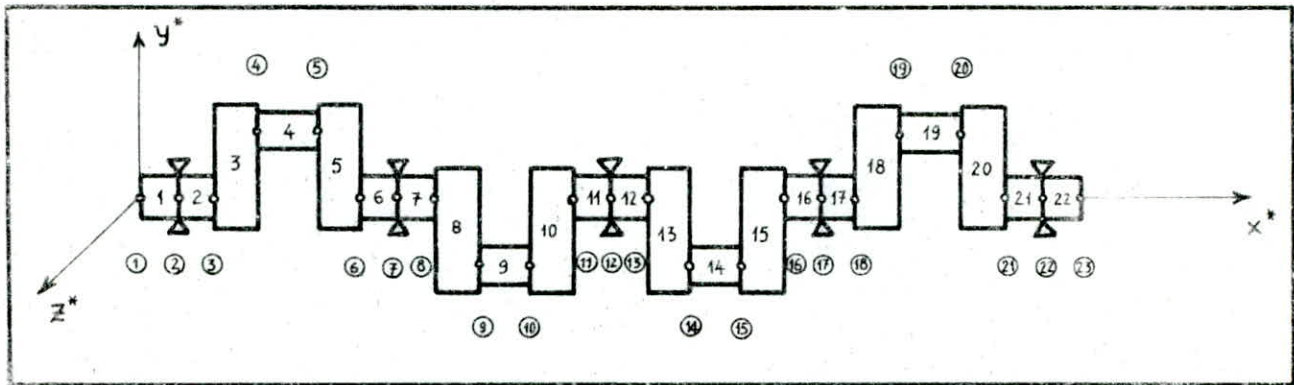


Fig. VI.6 : Discretisation du troisième modèle.

Le diagramme du moment de torsion est établi par rapport aux fibres neutres des éléments constituant la structure :

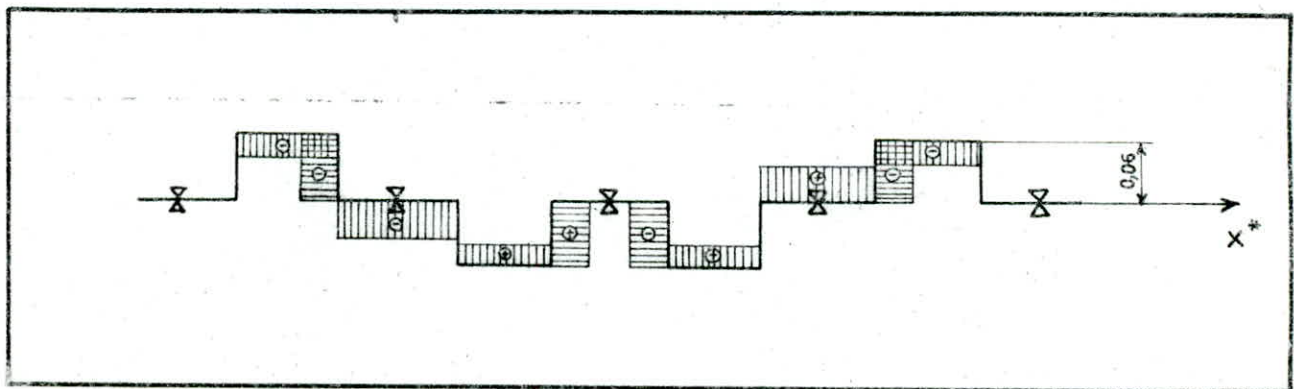


Fig. VI.7 : Diagramme du moment de torsion du troisième modèle.

Les forces et les moments réduits seront répartis aux nœuds 4, 5, 9, 10, 14, 15, 19 et 20.

Données du troisieme modèle

appuis rigides

| Noeud | d.d.l. | | | | | |
|-------|--------|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

appuis elastiques

| Noeud | d.d.l. | | | | | |
|-------|--------|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 17 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 22 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| X^* | Y^* | Z^* |
|--------|---------|--------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0185 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0370 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0665 | 0.0600 | 0.0000 |
| 0.1005 | 0.0600 | 0.0000 |
| 0.1300 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1485 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1670 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1965 | -0.0600 | 0.0000 |
| 0.2305 | -0.0600 | 0.0000 |
| 0.2600 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2785 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2970 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.3265 | -0.0600 | 0.0000 |
| 0.3605 | -0.0600 | 0.0000 |
| 0.3900 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4085 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4270 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4565 | 0.0600 | 0.0000 |
| 0.4905 | 0.0600 | 0.0000 |
| 0.5200 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.5385 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.5570 | 0.0000 | 0.0000 |

| Element | connections | | E | G |
|---------|-------------|----|-------|-------|
| 1 | 1 | 2 | 2.E11 | 8.E10 |
| 2 | 2 | 3 | 2.E11 | 8.E10 |
| 3 | 3 | 4 | 2.E11 | 8.E10 |
| 4 | 4 | 5 | 2.E11 | 8.E10 |
| 5 | 5 | 6 | 2.E11 | 8.E10 |
| 6 | 6 | 7 | 2.E11 | 8.E10 |
| 7 | 7 | 8 | 2.E11 | 8.E10 |
| 8 | 8 | 9 | 2.E11 | 8.E10 |
| 9 | 9 | 10 | 2.E11 | 8.E10 |
| 10 | 10 | 11 | 2.E11 | 8.E10 |
| 11 | 11 | 12 | 2.E11 | 8.E10 |
| 12 | 12 | 13 | 2.E11 | 8.E10 |
| 13 | 13 | 14 | 2.E11 | 8.E10 |
| 14 | 14 | 15 | 2.E11 | 8.E10 |
| 15 | 15 | 16 | 2.E11 | 8.E10 |
| 16 | 16 | 17 | 2.E11 | 8.E10 |
| 17 | 17 | 18 | 2.E11 | 8.E10 |
| 18 | 18 | 19 | 2.E11 | 8.E10 |
| 19 | 19 | 20 | 2.E11 | 8.E10 |
| 20 | 20 | 21 | 2.E11 | 8.E10 |
| 21 | 21 | 22 | 2.E11 | 8.E10 |
| 22 | 22 | 23 | 2.E11 | 8.E10 |

| F_x | F_y | F_z | M_x | M_y | M_z |
|--------|-------------|-------------|--------|------------|------------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | -24202.4673 | -10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | 6752.4883 | 3046.1940 |
| 0.0000 | 24202.4673 | 10918.2580 | 0.0000 | -6752.4883 | -3046.1940 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

La procédure de calcul du moment de torsion dans ce cas est la suivante :

$$M_{t_1} = M_{t_2} = M_{t_3} = 0$$

$$M_{t_4} = -F_{z_4} (D_2/2)$$

$$M_{t_5} = -F_{z_4} (\alpha + c/2) - F_{z_5} (c/2)$$

$$M_{t_6} = -2 \cdot F_{z_4} (D_2/2 + 0,06)$$

$$M_{t_7} = M_{t_6}$$

$$M_{t_8} = M_{t_7}$$

$$M_{t_9} = -F_{z_9} (D_2/2)$$

$$M_{t_{10}} = -F_{z_9} (\alpha + c/2) - F_{z_{10}} (c/2)$$

$$M_{t_{11}} = -2 \cdot F_{z_9} (D_2/2 + 0,06)$$

$$M_{t_{12}} = 0$$

pour les autres nœuds, on procédera de la même manière.

α : est la longueur du maneton = 0,034 m.

c : est l'épaisseur du bras = 0,0295 m.

D_2 : le diamètre du maneton.

Les forces F_{z_i} sont établies dans le tableau des données du troisième modèle.

②. Résultats obtenus

L'analyse des résultats obtenus dans le cas de la troisième modélisation (appuis rigides, appuis élastiques) conduit aux observations suivantes :

- Distribution des déplacements

- les déplacements suivant l'axe Ox^* sont nuls ; $u = 0$.
- les valeurs maximales des déplacements selon Oy^* et des rotations autour de Oy^* sont :

$$\text{appuis rigides : } \begin{cases} v = 0,71 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \\ \theta_y = 0,10 \cdot 10^{-2} \text{ rd.} \end{cases}$$

$$\text{appuis élastiques : } \begin{cases} v = 0,35 \cdot 10^{-3} \text{ m.} \\ \theta_y = 0,26 \cdot 10^{-2} \text{ rd.} \end{cases}$$

- les déplacements maximums selon Oz^* et rotations maximales autour du même axe sont :

$$\text{appuis rigides : } \begin{cases} w = 0,20 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \\ \theta_z = 0,46 \cdot 10^{-3} \text{ rd.} \end{cases}$$

$$\text{appuis élastiques : } \begin{cases} w = 0,22 \cdot 10^{-3} \text{ m.} \\ \theta_z = 0,96 \cdot 10^{-3} \text{ rd.} \end{cases}$$

- les rotations maximales autour de l'axe Ox^* sont :

$$\text{appuis rigides : } \theta_x = 0,16 \cdot 10^{-1} \text{ rd.}$$

$$\text{appuis élastiques : } \theta_x = 0,16 \cdot 10^{-1} \text{ rd.}$$

- Distribution des contraintes

- les contraintes normales maximales obtenues sont :

$$\text{appuis rigides : } \sigma_{x \max} = 0,20 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$\text{appuis élastiques : } \sigma_{x \max} = 0,76 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

Resultats

** MOMENT DE TORSION **

| | |
|----|------------------------|
| 1 | 0.0000000000000000E+00 |
| 2 | 0.0000000000000000E+00 |
| 3 | 0.0000000000000000E+00 |
| 4 | -316.6294820000000 |
| 5 | -693.3093830000000 |
| 6 | -1943.4499240000000 |
| 7 | -1943.4499240000000 |
| 8 | -1943.4499240000000 |
| 9 | 316.6294820000000 |
| 10 | 693.3093830000000 |
| 11 | 1943.4499240000000 |
| 12 | 0.0000000000000000E+00 |
| 13 | -1943.4499240000000 |
| 14 | -693.3093830000000 |
| 15 | -316.6294820000000 |
| 16 | 1943.4499240000000 |
| 17 | 1943.4499240000000 |
| 18 | 1943.4499240000000 |
| 19 | 693.3093830000000 |
| 20 | 316.6294820000000 |
| 21 | 0.0000000000000000E+00 |
| 22 | 0.0000000000000000E+00 |
| 23 | 0.0000000000000000E+00 |

appuis rigides :

| D E P L A C E M E N T S | | | N O D A U X | | | |
|-------------------------|----------|----------|-------------|------------|------------|------------|
| N° | U [m] | V [m] | W [m] | TETAx [rd] | TETAy [rd] | TETAz [rd] |
| 1 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | -.17E-10 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 2 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | -.22E-17 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 3 | 0.00E+00 | 0.39E-05 | 0.50E-06 | -.45E-17 | 0.51E-04 | 0.42E-03 |
| 4 | 0.00E+00 | 0.71E-04 | 0.20E-04 | -.92E-17 | 0.10E-02 | 0.46E-03 |
| 5 | 0.00E+00 | 0.71E-04 | 0.20E-04 | 0.12E-03 | -.10E-02 | -.46E-03 |
| 6 | 0.00E+00 | 0.39E-05 | 0.50E-06 | 0.41E-03 | -.51E-04 | -.42E-03 |
| 7 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.80E-03 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 8 | 0.00E+00 | -.39E-05 | -.50E-06 | 0.14E-02 | -.51E-04 | -.42E-03 |
| 9 | 0.00E+00 | -.71E-04 | -.20E-04 | 0.34E-02 | -.10E-02 | -.46E-03 |
| 10 | 0.00E+00 | -.71E-04 | -.20E-04 | 0.59E-02 | 0.10E-02 | 0.46E-03 |
| 11 | 0.00E+00 | -.39E-05 | -.50E-06 | 0.75E-02 | 0.51E-04 | 0.42E-03 |
| 12 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.80E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 13 | 0.00E+00 | -.39E-05 | -.50E-06 | 0.85E-02 | -.51E-04 | -.42E-03 |
| 14 | 0.00E+00 | -.71E-04 | -.20E-04 | 0.10E-01 | -.10E-02 | -.46E-03 |
| 15 | 0.00E+00 | -.71E-04 | -.20E-04 | 0.13E-01 | 0.10E-02 | 0.46E-03 |
| 16 | 0.00E+00 | -.39E-05 | -.50E-06 | 0.15E-01 | 0.51E-04 | 0.42E-03 |
| 17 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.15E-01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 18 | 0.00E+00 | 0.39E-05 | 0.50E-06 | 0.16E-01 | 0.51E-04 | 0.42E-03 |
| 19 | 0.00E+00 | 0.71E-04 | 0.20E-04 | 0.16E-01 | 0.10E-02 | 0.46E-03 |
| 20 | 0.00E+00 | 0.71E-04 | 0.20E-04 | 0.16E-01 | -.10E-02 | -.46E-03 |
| 21 | 0.00E+00 | 0.39E-05 | 0.50E-06 | 0.16E-01 | -.51E-04 | -.42E-03 |
| 22 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.16E-01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 23 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.16E-01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |

* CONTRAINTES *

| ELEMENT | SIGMA _{max} | TAU _{max} |
|---------|----------------------|--------------------|
| 1 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 2 | -.66E+04 | 0.00E+00 |
| 3 | -.24E+06 | 0.00E+00 |
| 4 | 0.21E+07 | -.83E+07 |
| 5 | 0.20E+08 | -.14E+08 |
| 6 | 0.14E+07 | -.36E+08 |
| 7 | 0.66E+04 | -.36E+08 |
| 8 | 0.24E+06 | 0.66E+07 |
| 9 | -.21E+07 | 0.83E+07 |
| 10 | -.20E+08 | 0.14E+08 |
| 11 | -.14E+07 | 0.00E+00 |
| 12 | 0.66E+04 | 0.00E+00 |
| 13 | 0.24E+06 | -.14E+08 |
| 14 | -.21E+07 | -.83E+07 |
| 15 | -.20E+08 | -.66E+07 |
| 16 | -.14E+07 | 0.36E+08 |
| 17 | -.66E+04 | 0.36E+08 |
| 18 | -.24E+06 | 0.14E+08 |
| 19 | 0.21E+07 | 0.83E+07 |
| 20 | 0.20E+08 | 0.00E+00 |
| 21 | 0.14E+07 | 0.00E+00 |
| 22 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |

appuis elastiques :

D E P L A C E M E N T S

N O D A U X

| N° | U [m] | V [m] | W [m] | TETAx [rd] | TETAy [rd] | TETAz [rd] |
|----|----------|----------|----------|------------|------------|------------|
| 1 | 0.00E+00 | 0.43E-08 | 0.21E-08 | -.17E-10 | 0.21E-17 | 0.42E-17 |
| 2 | 0.00E+00 | 0.51E-19 | 0.26E-19 | -.22E-17 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 3 | 0.00E+00 | -.35E-06 | -.12E-06 | -.45E-17 | -.13E-04 | -.38E-04 |
| 4 | 0.00E+00 | -.68E-05 | -.87E-05 | -.92E-17 | -.57E-03 | -.46E-04 |
| 5 | 0.00E+00 | -.25E-04 | -.63E-04 | 0.12E-03 | -.26E-02 | -.96E-03 |
| 6 | 0.00E+00 | -.17E-03 | -.11E-03 | 0.41E-03 | -.12E-03 | -.87E-03 |
| 7 | 0.00E+00 | -.17E-03 | -.11E-03 | 0.80E-03 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 8 | 0.00E+00 | -.18E-03 | -.11E-03 | 0.14E-02 | -.12E-03 | -.87E-03 |
| 9 | 0.00E+00 | -.32E-03 | -.16E-03 | 0.34E-02 | -.26E-02 | -.96E-03 |
| 10 | 0.00E+00 | -.34E-03 | -.21E-03 | 0.59E-02 | -.57E-03 | -.46E-04 |
| 11 | 0.00E+00 | -.35E-03 | -.22E-03 | 0.75E-02 | -.13E-04 | -.38E-04 |
| 12 | 0.00E+00 | -.35E-03 | -.22E-03 | 0.80E-02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 13 | 0.00E+00 | -.35E-03 | -.22E-03 | 0.85E-02 | 0.13E-04 | 0.38E-04 |
| 14 | 0.00E+00 | -.34E-03 | -.21E-03 | 0.10E-01 | 0.57E-03 | 0.46E-04 |
| 15 | 0.00E+00 | -.32E-03 | -.16E-03 | 0.13E-01 | 0.26E-02 | 0.96E-03 |
| 16 | 0.00E+00 | -.18E-03 | -.11E-03 | 0.15E-01 | 0.12E-03 | 0.87E-03 |
| 17 | 0.00E+00 | -.17E-03 | -.11E-03 | 0.15E-01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 18 | 0.00E+00 | -.17E-03 | -.11E-03 | 0.16E-01 | 0.12E-03 | 0.87E-03 |
| 19 | 0.00E+00 | -.25E-04 | -.63E-04 | 0.16E-01 | 0.26E-02 | 0.96E-03 |
| 20 | 0.00E+00 | -.68E-05 | -.87E-05 | 0.16E-01 | 0.57E-03 | 0.46E-04 |
| 21 | 0.00E+00 | -.35E-06 | -.12E-06 | 0.16E-01 | 0.13E-04 | 0.38E-04 |
| 22 | 0.00E+00 | 0.82E-16 | 0.53E-16 | 0.16E-01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 23 | 0.00E+00 | 0.82E-16 | 0.53E-16 | 0.16E-01 | -.82E-21 | 0.23E-19 |

* CONTRAINTES *

| ELEMENT | SIGMA _x | TAU _{max} |
|---------|--------------------|--------------------|
| 1 | 0.86E+03 | 0.00E+00 |
| 2 | 0.16E+04 | 0.00E+00 |
| 3 | 0.32E+06 | 0.00E+00 |
| 4 | 0.60E+07 | -.83E+07 |
| 5 | 0.15E+08 | -.14E+08 |
| 6 | -.30E+08 | -.36E+08 |
| 7 | -.33E+08 | -.36E+08 |
| 8 | -.30E+08 | 0.66E+07 |
| 9 | -.32E+08 | 0.83E+07 |
| 10 | -.57E+08 | 0.14E+08 |
| 11 | -.66E+08 | 0.00E+00 |
| 12 | -.67E+08 | 0.00E+00 |
| 13 | -.62E+08 | -.14E+08 |
| 14 | -.73E+08 | -.83E+07 |
| 15 | -.76E+08 | -.66E+07 |
| 16 | -.36E+08 | 0.36E+08 |
| 17 | -.33E+08 | 0.36E+08 |
| 18 | -.32E+08 | 0.14E+08 |
| 19 | -.35E+08 | 0.83E+07 |
| 20 | -.47E+07 | 0.00E+00 |
| 21 | -.24E+06 | 0.00E+00 |
| 22 | 0.16E-04 | 0.00E+00 |

- les contraintes de cisaillement maximales s'obtiennent pour :
- appuis rigides : $\tau_{\max} = 0,36 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.
 - appuis élastiques : $\tau_{\max} = 0,36 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

- Dimensions optimales

Les résultats cités ci-dessus correspondent aux dimensions optimales des éléments constituant le vilebrequin étudié : telles que :

- diamètre du tourillon : $D_1 = 0,065 \text{ m}$.
- diamètre du maneton : $D_2 = 0,058 \text{ m}$.
- largeur du bras : $b = 0,182 \text{ m}$.

4 - Comparaison avec la méthode classique

| element | | tourillon | maneton | bras |
|----------------------------------|------------------------|-----------|-----------|---------|
| dimension | | D_1 [m] | D_2 [m] | b [m] |
| methode classique | | 0,059 | 0,033 | 0,049 |
| methode des elements Finis | 1 ^{er} Modèle | 0,045 | - | - |
| | 2 ^e Modèle | 0,067 | 0,054 | - |
| | 3 ^e Modèle | 0,065 | 0,058 | 0,182 |
| dimensions reelles utilisées | | 0,070 | 0,060 | - |

Une comparaison des résultats obtenus par la méthode classique avec ceux de la méthode des

éléments finis montre que les dimensions des différents éléments sont nettement différentes entre les deux méthodes. Ceci est dû à ce que la méthode classique concernait l'étude d'une seule manivelle isostatique, par contre, dans cette méthode on a fait intervenir l'influence des manivelles les unes sur les autres telle que la torsion qui a un effet prépondérant.

Cependant, les résultats obtenus par la méthode des éléments finis, surtout dans le troisième modèle qui s'adapte à la structure réelle étudiée, sont très proches des dimensions pratiques du vilebrequin du moteur en ligne F4L912.

VII. CONCLUSIONS

Notre travail nous a permis d'apprécier la puissance de la méthode des éléments finis et son aptitude à résoudre des problèmes de structures complexes.

La distribution des déplacements et des contraintes de la structure établis par le calcul statique en éléments finis nous a permis de procéder au dimensionnement d'un vilebrequin et de vérifier que les différents cas développés dans cette étude modélisent très bien notre structure.

La comparaison des dimensions obtenues par éléments finis avec celles de la méthode classique montre une certaine différence entre les résultats. Ceci est dû à ce que l'étude classique considèrerait une seule manivelle isostatique. Par contre dans cette étude on a procédé au dimensionnement du vilebrequin sur cinq appuis hyperstatiques, en considérant l'influence des manivelles les unes sur les autres. Ce qui est très proche de la réalité.

Enfin l'étude élaborée et le logiciel développé dans ce mémoire peuvent être adaptés à n'importe quel vilebrequin à condition que l'on ait les sollicitations externes et le modèle à étudier.

ANNEXE

ORGANIGRAMME

debut

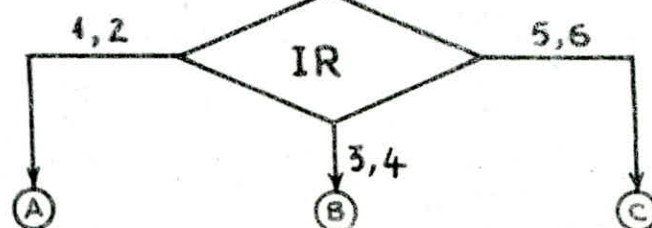
methode choisie

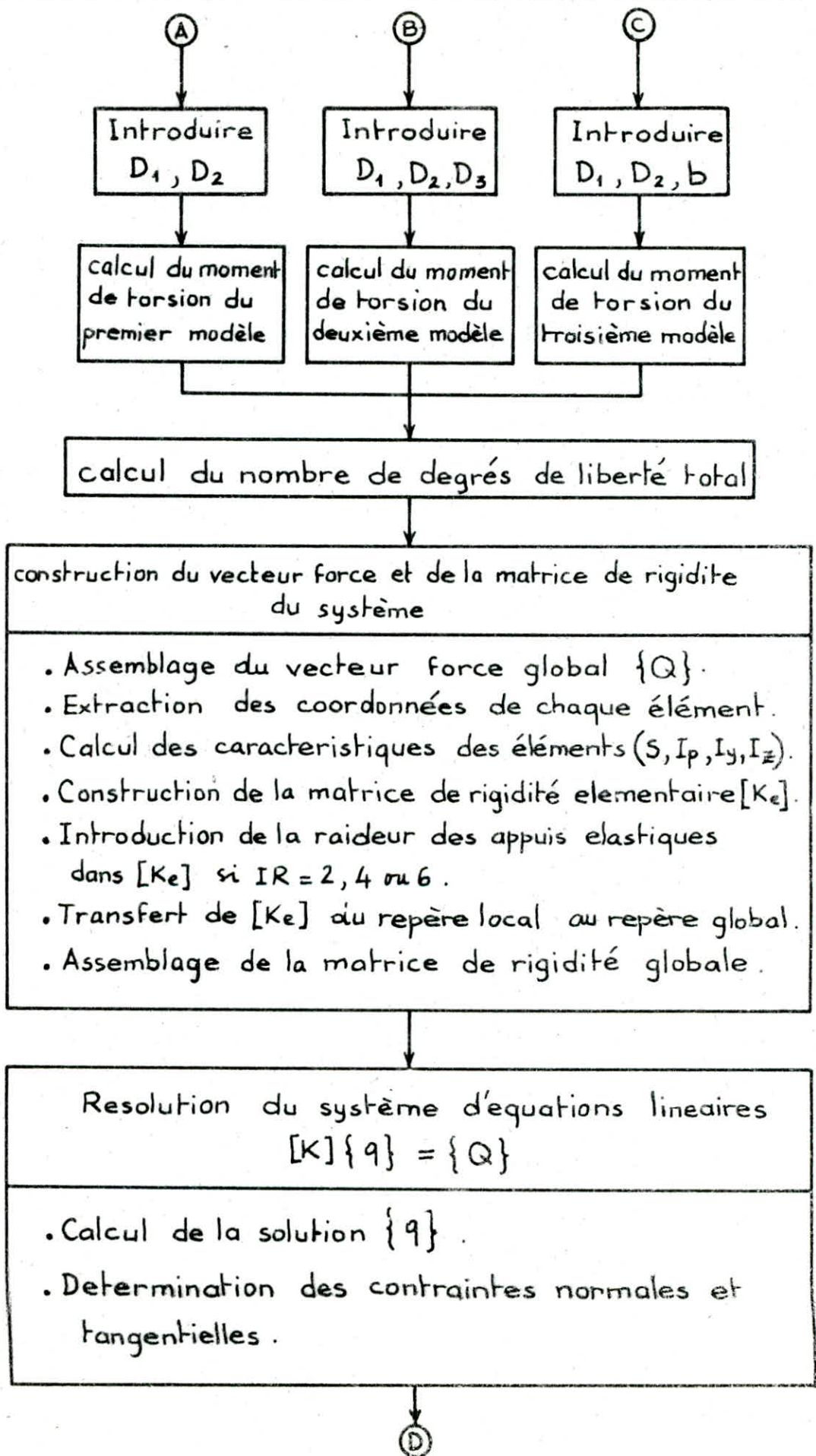
- 1/ première modelisation : appuis rigides
- 2/ " " " : appuis elastiques
- 3/ deuxième modelisation : appuis rigides
- 4/ " " " : appuis élastiques
- 5/ troisième modelisation : appuis rigides
- 6/ " " " : appuis élastiques

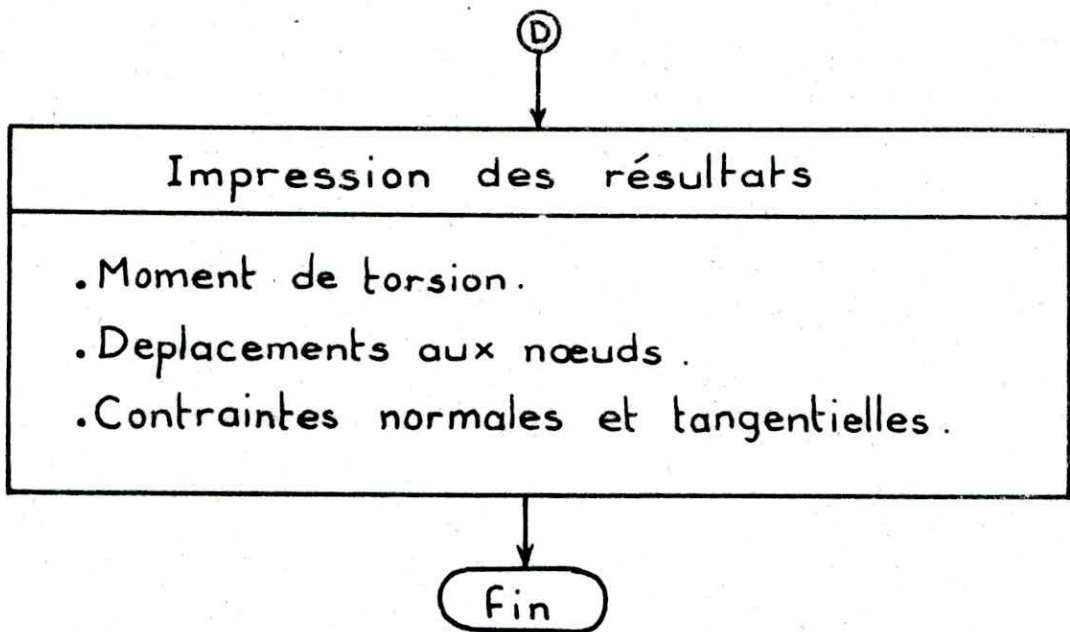
Introduire IR

Introduction des données

- . nombre de nœuds total .
- . nombre d'elements total .
- . conditions aux limites (degrés de liberté) .
- . coordonnées des nœuds .
- . connections des elements .
- . caracteristiques mécaniques du materiau .
- . sollicitations aux nœuds .







Sous programmes utilisés :

| Nom | Fonction |
|--------|--|
| MATRIG | Construction de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local. |
| TRANSF | Transfert du repère local au repère global. |
| CARACT | Calcul des caractéristiques des éléments (S, I_p, I_y, I_z) . |
| MULT | Multiplication des matrices. |
| Retour | Retour du vecteur déplacement du repère global au repère local. |
| RESOL | Resolution du système $[K]\{q\} = \{Q\}$ par la méthode de Jordan. |
| INV | Inversion des matrices. |

Les sous programmes communiquent entre eux par l'intermediaire des variables du "common".

Le logiciel a été réalisé en langage "Fortran-77" et implanté sur le "micro-VAX" de l'ENP.

Tous les calculs ont été effectués en Double-precision.

BIBLIOGRAPHIE

1. KLAUS - JÜRGEN BATHE

Finite element procedures in engineering analysis .
by PRENTICE - HALL - 1982 .

2. A. J. DAVIES

The finite element method : a first approach .
Oxford applied mathematics and computing science
series - 1980 .

3. G. DHATT et G. TOUZOT

Une présentation de la méthode des éléments finis .
Maloinès S.A. éditeur - 1984 .

4. R. BRUN

Science et technique du moteur Diesel industriel
et de transport .
Editions technip - 1984 .

5. J. F. AUBOIN

Calcul des structures et informatique .
Eyrolles - 1983 .

6. S. P. TIMOSHENKO

Resistance des matériaux . Tome 1 .
DUNOD Paris 1968 .

7. GUY VILLARD

Notions de resistance des materiaux. Tome 2.

SNED - Alger - 1974 .

8. QUILLET

Encyclopedie des sciences industrielles - 1974 .

9. R. BIGRET

Techniques de l'ingenieur - B772 - 1975

10. S. BOUTALEB

Projet de fin d'étude : dimensionnement de la manivelle d'un vilebrequin - janvier 1987 .

11. A. BENMACHICHE

Projet de fin d'étude : étude dynamique du chassis du camion K120 par la méthode des éléments finis .

Juin 1987 .

