الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقـــراطيـــة الشـعبيـــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

2/93

وزارة التربيـــة الوطنيـــة
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GÉNIE MÉCANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CONTRIBUTION AU CALCUL DE PROFILS D'AUBAGES PAR UNE MÉTHODE INVERSE EN ECOULEMENT COMPRESSIBLE

Proposé par :
Mr. : M. BOUDJEMAA

Etudié par :
N. AMOURA
M.L.C. FOURA

Dirigé par
Mr M. BOUDJEMAA

PROMOTION
JUILLET 1993

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi El-Harrach - ALGER

الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقـــراطيـــة الشـعبيـــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربيـــة الوطنيـــة
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GÉNIE MÉCANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CONTRIBUTION AU CALCUL DE PROFILS D'AUBAGES PAR UNE MÉTHODE INVERSE EN ECOULEMENT COMPRESSIBLE

Proposé par :
Mr. : M. BOUDJEMAA

Etudié par :
N. AMOURA
M.L.C. FOURA

Dirigé par
Mr M. BOUDJEMAA

PROMOTION
JUILLET 1993

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi El-Harrach - ALGER

بسم الله الرحمن الرحيم

" قل إنّ صلاتي ونسكي ومحياي ومماتي لله ربّ العالمين ، لا شريك له وبذلك أمرت وأنا أوّل المسلمين "

سورة الأنعام الآية (١٦٢، ١٦٣)

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer à Monsieur BOUDJEMAA Mohamed, chargé de cours à l'E.N.P, notre attachement pour l'aide efficace et les encouragements qu'il nous a prodigué. Sous son encadrement, nous avons eu l'occasion d'aborder les nombreux problèmes que pose l'étude théorique d'un écoulement autour d'un profil, aérodynamique, ce qui a été pour nous une source d'enrichissement profond. Nous tenons à lui témoigner ici notre profonde reconnaissance .

Monsieur A.GAHMOUS, Professeur, par ses enseignements nous a permis pour une large part, de nous initier aux problèmes liés à l'aérodynamique des turbomachines. Il n'a cessé tout au long de l'achévement de ce travail de nous faire bénéficier de son expérience considérable dans le domaine des turbomachines. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de nos remerciements et de notre profonde gratitude.

Nous sommes très sensibles à l'honneur que nous fait, en acceptant d'être membre du jury, Monsieur B.BENKOUSSAS chargé de cours au département Mécanique à l'E.N.P. dont les enseignements que nous avons suivis dans le passé , nous ont été d'une grande utilité.

Nous ne saurions associer à ce travail Monsieur R.HAOUI , Chargé de cours à l'U.S.T.H.B. dont les conseils ont été précieux ainsi que MONSIEUR F.BELBLIDIA, chargé de cours au département Mécanique pour l'assistance technique qu'il nous a apporté.

Qu'il nous soit permis enfin de témoigner notre reconnaissance à l'ensemble du personnel du département Mécanique de l'école Nationale Polytechnique qui, depuis plusieurs années nous a toujours apporté son aide et a permis enfin à ce modeste travail d'être accompli.

Ministere de l' Education Nationale
Ecole Nationale Polytechnique
Departement Genie Mécanique
Promoteur Mr Med BOUDJEMAA
Eléves Ingénieurs N. AMOURA
Med. L. FOURA

وزارة التربية و التعليم
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
دائرة : الهندسة الميكانيكية

الأستاذ الموجه : محمد بوجمعة

صاحبا الأطروحة : نصر الدين عمورة

محمد الأمين فورة

ملخص :

الهدف من هذا العمل هو محاولة إيجاد شكل ريشة دولاب محوري يشتغل بواسطة سائل قابل للضغط .
ولتحقيق ذلك إستعملنا طريقة *H. Miton* العكسية مع إدخال بعض التغييرات تسمح بأخذ تأثير إنضغاطية السائل بعين الإعتبار

Resumé

L' Objet de ce travail est la détermination d' un profil d' aubage d' une roue de turbomachine axiale utilisant un fluide compressible.

Pour celà on a utilisé le modele inverse de H. MITON avec l'introduction d' un developpement permettant de mettre en évidence l' effet de la compressibilité du fluide.

Substract

This works aims at contributing in determining the blade profile of a row an axial Turbomachime with a compressible fluid.

For this, we use the Reverse mode calculation methode of H. MITON with a developpement wich permit to take the effect of compressibility in consuderation.

SOMMAIRE

Chapitre IV :

Référence bibliographiques:

Introduction

" Par où donc faut-il commencer ? - Si tu consens,
je te dirai que tu dois d'abord comprendre les mots "

Epictéte, Entretiens

Définir un profil,c'est chercher une forme géométrique bidimensionnelle répondant à la fois à des contraintes aérodynamiques et technologiques.

Pour effectuer cette tâche,l'aérodynamicien dispose d'un nombre de méthodes de calcul directes ou inverses :

- les méthodes directes permettant à partir d'une géométrie fixée d'estimer avec plus ou moins de précision les performances aérodynamiques.
- Les méthodes inverses consistes à rechercher la géométrie d'un profil correspondant à une répartition de pression ou de vitesse choisie à priori ou éventuellement déterminée en vue d'une optimisation de certaines performances.

L'application d'une méthode inverse dans la détermination d'un profil aérodynamique suppose l'éxistence d'un modèle mathématique dont il est possible d'estimer la validité en examinant avec soin les hypothèses sur lesquelles il se fonde.Dans le cas où ces hypothèses paraissent raisonnablement vérifiées par l'écoulement réel , les résultats obtenus à l'aide du modèle doivent pouvoir s'appliquer sans trop de difficultés.

La situation en ce qui concerne l'écoulement dans les turbomachines est loin d'être toujours aussi nette et l'évaluation du degré de précision avec lequel un modèle donné décrit l'écoulement auquel il correspond est toujours délicate.

Le travail que fait l'objet du présent mémoire à pour thème: L'APPLICATION DU MODE INVERSE À UN ÉCOULEMENT DE FLUIDE COMPRESSIBLE POUR LA DÉTERMINATION DE LA DISTRIBUTION DU SQUELETTE D'UN PROFIL sachant connues une loi d'épaisseur de l'aube et une répartition de la composante verticale de la vitesse moyenne.

Les hypothèses suivantes sont avancées :

- Ecoulement plan stationnaire et isentropique.
- Fluide parfait compressible.
- Régime subsonique.
- L'effet de viscosité est négligé.

Cette dernière hypothèse consiste a supposer que l'effet de viscosité et conductivité ne sont sensibles que dans une couche d' épaisseur limitée le long des parois de la veine et des profils dont on néglige l'effet sur l'écoulement .En pratique la validité de cette hypothèse parait assurer dans la mesure où les gradients (Vitesse et Température suivant une direction normale a l'écoulement restent faibles).

Chapitre 1

Présentation des Equations et Application à un Ecoulement Périodique

" It will be a very delicate point to cut the feather, and divide the several reasons to a nice and curious reader, how the numerical difference in the brain can produce effects of so vast a difference "

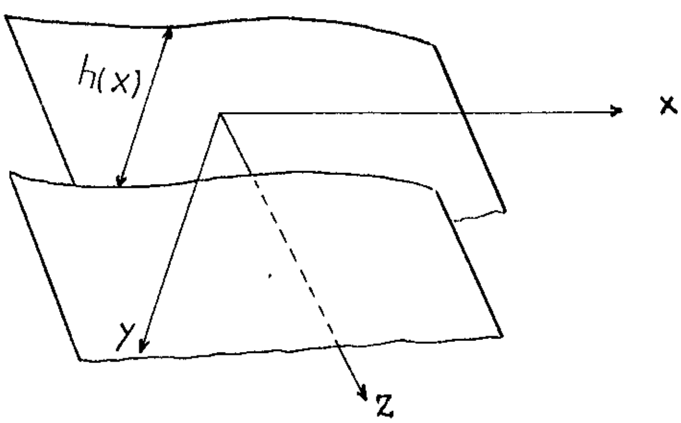
Swift, a table of a tub

I.1 INTRODUCTION:

En s'inspirant des méthodes de singularités et en introduisant le caractère de périodicité à un écoulement plan dont le domaine de calcul est fermé,nous pouvons développer une méthode de calcul qui sera applicable aussi bien pour les problèmes directs que pour les problèmes inverses ; la condition de périodicité est systématiquement satisfaite par l'introduction de conditions identiques sur les limites latérales.

I.2 EQUATIONS DU MOUVEMENT :

On suppose ici que l'écoulement s'effectu dans un plan contenant les axes ox et oy,disposés symétriquement entre deux parois espacées d'un intervalle : h(x)



(fig.1)

Les équations de l'écoulement supposé isoénergétique, stationnaire et non visqueux s'écrivent:

a- Équation de continuité

$$\frac{div(\rho\,.\,V(x,y)}{\rho}+\vartheta.\,W'(x)=Q(x,y) \qquad (1.1.a)$$

b- Equation de quantité de mouvement :

$$RotV=R(x,y) \qquad (1.1.b)$$

c- Equation d'énergie :

$$\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=H(x,y) \qquad (1.1.c)$$

W'(x) est le coefficient de contraction du tube de courant :

$$W'(x)=\frac{d}{dx}\left[Log\frac{h(x)}{h(x_0)}\right] \qquad (1.1.d)$$

En dehors de l'obstacle, les équations du mouvement se réduisent à :

$Q(x,y) = 0$

$R(x,y) = 0$

$H(x,y) = H_o = C^{te}$

Par la suite, et pour simplifier, nous prendrons $W'(x)=0$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, les équations (1.1.a) et (1.1.b) s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=Q(x,y)+F(x,y) \qquad (1.2.a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}=R(x,y) \qquad (1.2.b)$$

F(x,y) étant la fonction regroupant les termes de compressibilité.

$$F(x,y)=\frac{1}{\gamma-1}\left[U\frac{\partial}{\partial x}Log\left(1-\frac{V^2}{2}\right)+V\frac{\partial}{\partial y}Log\left(1-\frac{V^2}{2}\right)\right] \qquad (1.3)$$

V^2 : est le carré de la vitesse adimensionnelle par l'enthalpie totale.

$$V^2=\frac{U^2+V^2}{C_p \cdot T_0}$$

T_0 : Température d'arrêt

1.3 CALCUL DE L'ECOULEMENT MOYEN ET DES HARMONIQUES D'ORDRE SUPERIEUR :

Dans la suite du développement,et pour éviter de charger le document on évitera de détailler les démonstrations (voir Ref.8.)

L'espace étant périodique dans la direction y nous introduisons le développement en séries de Fourier des différentes fonctions U,V,Q,R et F :

Soit :

$$U(x,y)=\sum_{k\geq 1} u(k,x)\, e^{ik\omega y}$$

$$V(x,y)=\sum_{k\geq 1} v(k,x)\, e^{ik\omega y}$$

$$Q(x,y)=\sum_{k\geq 1} q(k,x)\, e^{ik\omega y}$$

$$R(x,y)=\sum_{k\geq 1} r(k,x)\,e^{ik\omega y}$$

$$F(x,y)=\sum_{k\geq 1} f(k,x)\,e^{ik\omega y}$$

Les équations (1.2.a) et (1.2.b) sont alors réduites à un système d'équations différentielles :

$$\frac{dU_k(x)}{dx}+i.k.\omega.V_k(x)-q_k(x)-f_k(x)=0 \qquad (1.4.a)$$

$$\frac{dV_k(x)}{dx}-i.\omega.k.U_k(x)+r_k(x)=0 \qquad (1.4.b)$$

Qui peuvent être résolues pour toute valeur significative de k en utilisant la période de l'éspace le long de oy comme unité de longueur ; (ie : W = 2π)

Pour l'écoulement moyen (k=0) on a :

$$\frac{dU(0,x)}{dx}-q(0,x)-f(0,x)=0 \qquad (1.5.a)$$

$$\frac{dV(0,x)}{dx}+r(0,x)=0 \qquad (1.5.b)$$

qui donnent :

$$U(0,x)=U(0,x_0)+\int_{x_0}^{x}[q(0,\tau)+f(0,\tau)]\,d\tau \qquad (1.5.c)$$

$$V(0,x)=V(0,x_0)+\int_{x_0}^{x} r(0,\tau)\,d\tau \qquad (1.5.d)$$

où : u(o,xo) et v(o,xo) sont les composantes initiales du vecteur vitesse moyen à l'abscisse xo correspondant à la frontière amont du domaine de calcul.
(Dans ce qui suit,on prendra xo = o)

En utilisant les transformées de LAPLACE des différentes fonctions du système (1.4) nous pouvons tirer les coefficients de Fourier de U(x,y) et V(x,y) soit :

$$U(k,x)=\int_{0}^{x} Zu(k,x,\tau)\,d\tau+U(k,0)\,ch(2\pi kx)-iv(k,0)\,sh(2\pi kx) \qquad (1.6.a)$$

$$V(k,x)=\int_{0}^{x} Zv(k,x,\tau)\,d\tau+V(k,0)\,ch(2\pi kx)+iu(k,0)\,sh(2\pi kx) \qquad (1.6.b)$$

avec :

$$Zu(k,x,\tau)=(q(k,\tau)+f(k,\tau))\,ch(2\pi k(x-\tau))+ir(k,\tau)\,sh(2\pi k(x-\tau))$$

$$Zv(k,x,\tau)=-r(k,\tau)\,ch(2\pi k(x-\tau))+i[q(k,\tau)+f(k,\tau)]\,sh(2\pi k(x-\tau))$$

Les solutions précédentes étant valables pour x>o.
Pour x<0 , il suffit de faire le changement de variable (x'=-x)

1.4 COMPORTEMENT DES SOLUTIONS A L'INFINI :

Les valeurs de u(k,x) et v(k,x) étant finies quand x tend vers l'infini amont ou aval, ceci impose des valeurs finies pour q(k,x), r(k,x) et f(k,x).
Donc il suffit que ces fonctions prennent des valeurs finies à partir d'une certaine distance D donnée de l'origine en plus des conditions initiales u(k,o) et v(k,o).
Ce qui se traduit par :
pour $x \geq D$

$$q(k,x) = q(k,D)$$
$$f(k,x) = f(k,D)$$
$$r(k,x) = r(k,D)$$

pour $x \leq -D$

$$q(k,x) = q(k,-D)$$
$$f(k,x) = f(k,-D)$$
$$r(k,x) = r(k,-D)$$

Ces conditions ont à vérifier les corrélations suivantes:

$$U(k,0)-iv(k,0) = -\frac{1}{2\pi k}\left[Z_1(k,-D)+Z_2(k,D)\right]+\int_0^D\left[Z_1(k,\tau)+Z_2(k,\tau)\right]d\tau \quad (1.8.a$$

Ce qui donne une solution finie pour $x \geq D$ (infini aval) et:

$$U(k,0)+iV(k,0) = \frac{1}{2\pi k}\left[Z_1(k,-D)-Z_2(k,D)\right]-\int_0^D\left[Z_1(k,\tau)+Z_2(k,\tau)\right]d\tau \quad (1.8.b)$$

Ce qui donne une solution finie pour x ≤ -D (infini amont) Avec :

$$Z_1(k,\tau)=[q(k,\tau)+f(k,\tau)]\,ch(2\pi k\tau)-ir(k,\tau)\,sh(2\pi k\tau) \quad (1.9.a)$$

$$Z_2(k,\tau)=-[q(k,\tau)+f(k,\tau)]\,sh(2\pi k\tau)+ir(k,\tau)\,ch(2\pi k\tau) \quad (1.9.b)$$

ceci résume les relations donnant u(k,x) et v(k,x) aux formes simplifiées suivantes :

$$U(k,x)=\frac{1}{2\pi k}\,[X_1(k,x,-D)-X_1(k,x,D)]-\int_{-D}^{D}\delta(x,\tau)\,.X_1(k,x,\tau)\,d\tau \quad (1.10.a)$$

$$V(x,y)=\frac{-i}{2\pi k}\,[X_1(k,x,D)+X_1(k,x,-D)]-i\int_{-D}^{D}X_1(k,x,\tau)\,d\tau \quad (1.10.b)$$

avec :

$$X_1(k,x,\tau)=\frac{1}{2}\,[q(k,\tau)+f(k,\tau)+i\delta(x,\tau)\,.r(k,\tau)]\,e^{-2\pi k|\tau-x|}$$

$\delta(x,\tau)$ étant la fonction définie par :

$$\delta(x,\tau)=\begin{bmatrix} 0 & \text{si } x=\tau \\ 1 & \text{si } x<\tau \\ -1 & \text{si } x>\tau \end{bmatrix}$$

Les composantes du vecteur vitesse sont alors :

$$U(x,y)=U(0,x)+\sum_{k>0}\frac{1}{2\pi k}[X(k,x,-D)-X(k,x,D)]\,e^{2\pi kiy}$$

$$-\int_{-D}^{D}\delta(x,\tau)\sum_{k>0}X(k,x,\tau)\,e^{2\pi kiy}d\tau \qquad (1.11.a)$$

$$V(x,y)=V(0,x)-i\sum_{k>0}\frac{1}{2\pi k}[X(k,x,-D)+X(k,x,D)]\,e^{2\pi kiy}$$

$$-i\int_{-D}^{D}\sum_{k>0}X(k,x,\tau)\,e^{2\pi kiy}d\tau \qquad (1.11.b)$$

avec :

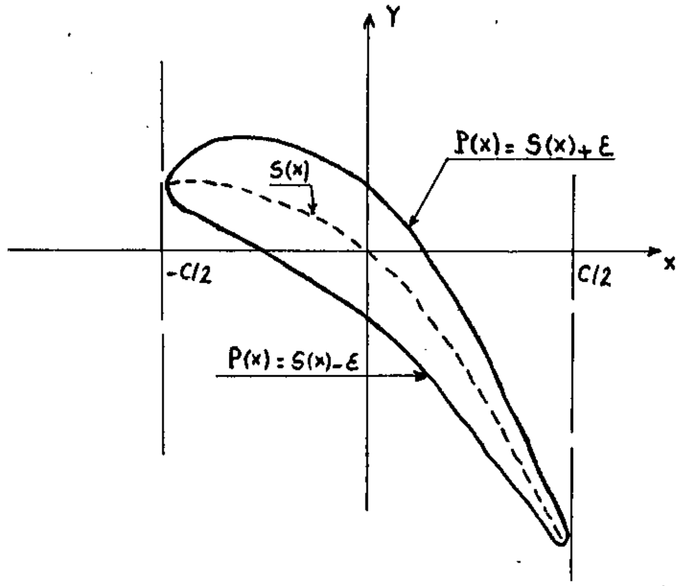
$$X(k,x,\tau)=\frac{1}{2}\left[\frac{dU_k}{dx}(\tau)+i\,[2\pi k.\,v(k,\tau)+\delta(x,\tau).\,r(k,\tau)]\right].\,e^{-2\pi k|\tau-x|}$$

I.5 MODELISATION DES PROFILS ET DEFINITION DES FONCTIONS Q(x,y) et R(x,y) :

Un profil d'aube est défini par sa ligne moyenne S(x) et par la distribution de son épaisseur $\epsilon(x)$;(fig 2) Le profil est ainsi donné par:

$$P(x)=S(x)+\lambda\epsilon(x)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{sur l'extrados} \\ -1 & \text{sur l'intrados} \end{cases}$$

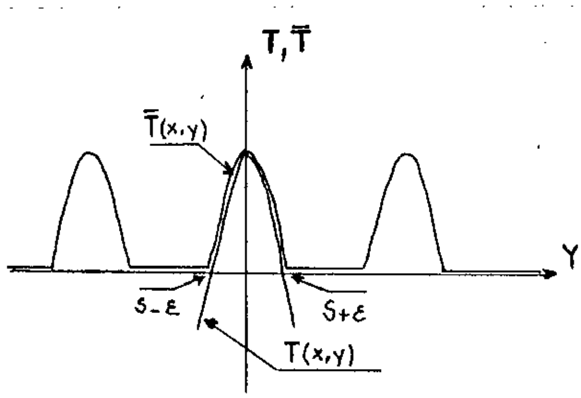


- fig 2 -

La tangente au profil pour $X=\pm c/2$ (c étant la corde) est parallèle à oy et la divergence et le rotationnel sont nuls en dehors du profil.

Q(x,y) et R(x,y) sont définies par des fonctions de la forme :

$\alpha(x).\bar{T}(x,y)$; $\beta(x).\bar{T}(x,y)$ respectivement ; où $\bar{T}(x,y)$ est une fonction périodique qui est nulle à l'extérieur du profil et coïncide avec une fonction T(x,y) choisie arbitrairement à l'intérieur du profil mais qui est nulle pour $Y = S \pm \epsilon$. (fig.3)



- fig 3 -

$\bar{T}$ (x,y) peut s'écrire :

$$\bar{T}(x,y)=\sum_{k\geq 0} t_k[\varepsilon(x)]\, e^{2\pi jk(y-s(x))}$$

où

$$t_k[\varepsilon(x)]=0 \; pour \; \varepsilon(x)=0$$

ainsi

$$Q(x,y)=\sum_{k\geq 0} q_k(x)\,.\,e^{2\pi jky}=\alpha(x)\sum_{k\geq 0} t_k[\varepsilon(x)]\,.\,e^{2\pi ik(y-s(x))}$$

$$R(x,y)=\sum_{k\geq 0} r_k(x)\,.\,e^{2\pi iky}=\beta(x)\,.\sum_{k\geq 0} t_k[\varepsilon(x)]\,.\,e^{2\pi ik(y-s(x))}$$

α(x) et ß (x) s'expriment en fonction de u(0,x) et v(0,x) qui représentent les valeurs moyennes des composantes de la vitesse.

Pour le calcul des coefficients t_k, on considère les coefficients de la fonction T (x,y):

Soit :

$$\hat{t}_k(x)=\frac{\varepsilon}{\pi^2.K^2}\,[\cos 2\pi k\varepsilon-\frac{\sin 2\pi k\varepsilon}{2\pi k\varepsilon}]\,.\,e^{-2\pi kis(x)}$$

$$R\hat{t}_k(x)=\frac{\varepsilon}{\pi^2.K^2}\,[\cos 2\pi k\varepsilon-\frac{\sin 2\pi k\varepsilon}{2\pi k\varepsilon}]\cos 2\pi ks(x)$$

$$I\hat{t}_k(x)=\frac{-\varepsilon}{\pi^2.K^2}\,[\cos 2\pi k\varepsilon-\frac{\sin 2\pi k\varepsilon}{2\pi k\varepsilon}]\sin 2\pi ks(x)$$

donc

$$a\check{t}_k(x)\cos(2\pi ky) + b\hat{t}_k\sin(2\pi ky) =$$

$$\frac{2\varepsilon}{\pi^2 k^2}\left[\cos(2\pi k\varepsilon) - \frac{\sin(2\pi k\varepsilon)}{2\pi k\varepsilon}\right]\cos(2\pi k(y-s(x))) \qquad \text{(REF 8)}$$

avec:

$$t_0 = -\frac{4}{3}\varepsilon^3$$

on peut donc écrire :

$$\overline{T}(x,y) = -\frac{4}{3}\varepsilon^3 + \sum_{k\geq 1}\frac{2\varepsilon}{\pi^2 . K^2}\left[\cos 2\pi k\varepsilon - \frac{\sin 2\pi k\varepsilon}{2\pi k\varepsilon}\right]\cos(2\pi k(y-s(x)))$$

$$\frac{dU_0}{dx} = -\frac{4}{3}\varepsilon^3 . \alpha(x) + f(0,x)$$

on aura

$$\alpha(x) = -\frac{3}{4\varepsilon^3}\left[\frac{dU_0(x)}{dx} - f(o,x)\right]$$

d'où

$$Q(x,y) = \left[\frac{dU_0(x)}{dx} - f(0,x)\right]\left[1 + \sum_{k\geq 1} 2E(k,\varepsilon)\cos(2\pi k(y-s(x)))\right] \quad (1.12.a)$$

$$R(x,y) = -\frac{dV_0(x)}{dx}\left[1 + \sum_{k\geq 1} 2E(k,\varepsilon) . \cos(2\pi k(y-s(x)))\right] \quad (1.12.b)$$

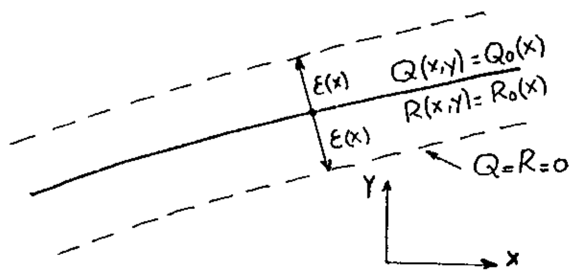
avec:

$$E(k,\varepsilon)=\frac{3}{4\varepsilon^2\pi^2k^2}\left[\frac{\sin(2\pi k\varepsilon)}{2\pi k\varepsilon}-\cos(2\pi k\varepsilon)\right] \qquad (1.13)$$

L'influence du profil se décompose en deux effets :

- L'un de déplacement dû à l'épaisseur du profil présenté par la fonction Q(x,y)
- L'autre de quantité de mouvement dû à la portance et éventuellement à la trainée du profil présenté par la fonction R(x,y)

Le profil étant représenté par la fonction y = S(x)



- fig.4 -

A l'interieur d'une bande de longeur 2 ε constante située de part et d'autre de cette courbe, on supposera Q(x,y) et R(x,y) respectivement égaux à $Q_0(x)$ et $R_0(x)$; Q(x,y) et R(x,y) seront supposées nulles ailleurs.

Ce type de répartition étant imposé périodiquement suivant la direction OY on obtient les composantes de Fourier q(k,x) et r(k,x) de Q(x,y) et R(x,y) Ce qui donne :

$$q(k,x)=\left[\frac{dU_0(x)}{dx}-f(0,x)\right]\frac{\sin 2\pi k\varepsilon}{2\pi k\varepsilon}\cdot e^{-2\pi k i s(x)} \qquad (1.14.a)$$

$$r(k,x)=\frac{dV(0,x)}{dx}\cdot\frac{\sin 2\pi k\varepsilon}{2\pi k\varepsilon}\cdot e^{-2\pi k i s(x)} \qquad (1.14.b)$$

1.6 APPLICATION AUX GRILLES D'AUBES ET FORME DES SOLUTIONS :

La divergence Q et le rotationnel R introduits en (1.1.a) et (1.1.b) caractérisent l'effet des obstacles, ils sont nuls à l'extérieur de ces obstacles.

La fonction $F(x,y)$ caractérise l'effet de compressibilité et dépend de la vitesse en chaque point de calcul, aussi, ses propriétés, son domaine de variation et son influence sont moins déterminés. Par conséquent, une technique de calcul basée sur le modèle théorique proposée ici doit être itérative en partant d'une solution du type "INCOMPRESSIBLE" ($F(x,y)=0$).

Dans un écoulement autour d'une grille de profils, à partir d'une certaine distance, en amont du bord d'attaque et en aval du bord de fuite, les perturbations de l'écoulement deviennent indépendantes de la distance axiale.

On considére généralement que cette distance et inférieure à deux fois la corde, ce qui est vérifié en pratique.

Ce qui permet de fixer une distance D au de là de laquelle, les fluctuations de F sont indépendantes de la distance axiale, situation correspendant à l'hypothése proposée au paragraphe précédant qui conduit à l'exppression des composantes de la vitesse établie en (1.10.a) et (1.10.b).

La distance D, fixe l'extension maximale du champ de calcul, la vitesse en un point quelconque compris entre l'infini amont et l'infini aval ne dependant que de quantités définies dans l'intervalle $[-D,D]$.

En remplaçant les coefficients $q(k,x)$ et $r(k,x)$ par leurs expressions en (1.14) les composantes d'ordre k du vecteur vitesses s'écrivent dans ce cas :

$$U(k,x)=\frac{1}{2\pi k}\left[f(k,-D)-f(k,D)\right]-\frac{1}{2}\int_{-D}^{D}\delta(x,\tau)\,.\,f(k,\tau)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}d\tau$$

$$-\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)\left[\frac{dU_0(\tau)}{d\tau}-f(0,\tau)\right]g(k,x,\tau)-i\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0(\tau)}{d\tau}g(k,x,\tau)\,d\tau$$

$$V(k,x)=\frac{-i}{2\pi k}\left[f(k,-D)+f(k,D)\right]-\frac{i}{2}\int_{-D}^{D}f(k,\tau)\,e^{-2\pi k|\tau-x|}d\tau$$

$$-i\int_{-c/2}^{c/2}\left[\frac{dU_0(\tau)}{d\tau}-f(0,\tau)\right]g(k,x,\tau)\,.\,d\tau+\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)\,\frac{dV_0(\tau)}{d\tau}g(k,x,\tau)\,d\tau$$

$$g(k,x,\tau)=E(k,\tau)\,.\,e^{-2\pi k(|\tau-x|+i.S(\tau))}$$

$$E(k,\tau)=\frac{3}{4\pi^2\varepsilon^2k^2}\left[\frac{\sin(2\pi k\varepsilon)}{2\pi k\varepsilon}-\cos(2\pi k\varepsilon)\right]$$

Ou sous une forme plus développée en remplaçant les coefficients de Fourier de F(x,y) par leurs valeurs :

$$U(k,x)=\frac{1}{2\pi k}[2\int_0^1(F(-D,r)-F(D,r)).e^{2\pi ikr}dr]$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-D}^{D}\delta(x,\tau)\ [2\int_0^1 F(x,r)\,e^{2\pi kir}dr]\,e^{-2\pi k|\tau-x|}d\tau$$

$$-\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)\ [\frac{dU_0(\tau)}{d(\tau)}-f(0,\tau)]\,g(k,x,\tau)\,d\tau-i\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0(\tau)}{d\tau}g(k,x,\tau)\,d\tau$$

$$V(k,x)=\frac{-i}{2\pi k}[2\int_0^1(F(-D,r)+F(D,r))\,e^{2\pi kir}dr]$$

$$-\frac{i}{2}\int_{-D}^{D}[2\int_0^1 F(x,r)\,e^{2\pi kir}dr]\,e^{-2\pi k|\tau-x|}d\tau$$

$$-i\int_{-c/2}^{c/2}[\frac{dU_0(\tau)}{d\tau}-f(o,\tau)]\,g(x,k,\tau)\,d\tau+\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)\ \frac{dV(0,\tau)}{d\tau}g(k,x,\tau)\,d\tau$$

Les équations (1.11) deviennent alors:

$$U(x,y)=U(0,x)+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2\pi k}\,[2\int_0^1(F(-D,r)-F(D,r))\,e^{2\pi kir}dr]\,e^{2\pi kiy}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-D}^{D}\delta\,(x,\tau)\sum_{k\geq 1}\,[2\int_0^1 F(x,r)\,.\,e^{2\pi kir}dr]\,.\,e^{-2\pi k(|\tau-x|-iy)}\,.\,d\tau$$

$$-\int_{-c/2}^{c/2}\delta\,(x,\tau)\,[\frac{dU_0(\tau)}{d\tau}-f(0,\tau)]\sum_{k\geq 1}E(k,\tau)\,e^{-2\pi k(|\tau-x|+iS(\tau)-y))}d\tau$$

$$-i\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0(\tau)}{d\tau}\sum_{k\geq 1}E(k,\tau)\,e^{-2\pi k(|\tau-x|+i(S(\tau)-y))}d\tau \qquad (1.15.a)$$

$$V(x,y)=V(0,x)-i\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2\pi k}\,[2\int_0^1(F(-D,r)+F(D,r)]\,.\,e^{2\pi kir}.\,dr]\,.\,e^{2\pi kiy}$$

$$-\frac{i}{2}\int_{-D}^{D}\sum_{k\geq 1}\,[2\int_0^1 F(x,r)\,.\,e^{2\pi kir}.\,dr]\,.\,e^{-2\pi k(|\tau-x|-iy)}\,.\,d\tau$$

$$-i\int_{-c/2}^{c/2}[\frac{dU_0(\tau)}{d\tau}-f(0,\tau)]\sum_{k\geq 1}g(k,x,\tau)\,.\,e^{2\pi kiy}.\,d\tau$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}\delta\,(x,\tau)\,\frac{dv_0(\tau)}{d\tau}\sum_{k\geq 1}g(k,x,\tau)\,e^{2\pi kiy}d\tau \qquad (1.15.b)$$

1.7 DISCRETISATION DES EQUATIONS

En ne gardant que la partie réelle des équations (1.15) on obtient :

$$U(x,y)=U(0,x)+I_1-\frac{1}{2}\int_{-c}^{c} G_u(x,y,\tau) - \int_{-c/2}^{c/2} [\frac{dU_0(\tau)}{d\tau}-f(0,\tau]\,.\,C_u(x,y,\tau)\,.\,d\tau$$

$$-\int_{c/2}^{c/2} \frac{dV_0(\tau)}{d\tau}\,.\,C_v(x,y,\tau)\,.\,d\tau \qquad (1.16.a)$$

$$V(x,y)=V(0,x)+I_2+\frac{1}{2}\int_{-c}^{c} G_v(x,y,\tau)\,d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dV_0(\tau)}{d\tau}\,.\,C_u(x,y,\tau)\,.\,d\tau$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2} [\frac{dU_0(\tau)}{d\tau}-f(0,\tau)]\,.\,C_v(x,y,\tau)\,.\,d\tau \qquad (1.16.b)$$

avec :

$$I_1=\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2\pi k}\,[2\int_{0}^{1} [F(-c,r)-F(c,r)]\cos(2\pi k(y+r))\,.\,dr]$$

$$I_2=\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2\pi k}\,[2\int_{0}^{1} [F(-c,r)+(F(c,r)]\sin(2\pi k(y+r))\,.\,dr]$$

$$C_u=\delta(x,\tau)\,.\,C_1(x,y,\tau)-1/2$$

$$C_v=C_2(x,y,\tau)$$

Ce qui donne:

$$U(x,y)=U_0(-c/2)+I_1-\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng} G_u(x,y,\mu_i)\,.\,\omega(i)$$

$$-\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng}\left[\frac{dU_0(\mu_i)}{d\tau}-f(0,\mu_i)\right]C_u(x,y,\mu_i)\,\omega(i)$$

$$+\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng}\frac{dV_0}{d\tau}(\mu_i)\,.\,C_v(x,y,\mu_i)\,.\,\omega(i) \qquad (1.17.a)$$

$$V(x,y)=V_0(-c/2)+I_2+\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng} G_v(x,y,\mu_i)\,.\,\omega(i)$$

$$-\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng}\left[\frac{dV_0}{d\tau}(\mu_i)\right]C_u(x,y,\mu_i)\,\omega(i)$$

$$+\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng}\left[\frac{dU_0}{d\tau}(\mu_i)-f(0,\mu_i)\right].\,C_v(x,y,\mu_i)\,.\,\omega(i) \qquad (1.17.b)$$

avec :

$$I_1=\sum_{k\geq 1}\sum_{r=1}^{Ng}\frac{1}{2\pi k}\left[F(-c,t_r)-F(c,t_r)\right].\,\omega(r)\,.\cos(2\pi k(y+t_r))$$

$$I_2=\sum_{k\geq 1}\sum_{r=1}^{Ng}\frac{1}{2\pi k}\left[F(-c,t_r)+F(c,t_r)\right].\,\omega(r)\,.\sin(2\pi k(y+t_r))$$

t_r; r =1,...Ng points de Gauss

$$G_u(x,y,\mu_1) = \hat{\delta}(x,\mu_1)\,.\,G_1(x,y,\mu_1)$$

$$G_v(x,y,\mu_1) = G_2(x,y,\mu_1)$$

$$G_1(x,y,\mu_1) = \sum_{k\geq 1}\sum_{r=1}^{Ng} F(x,t_r)\,.\,\omega(r)\,.\cos(2\pi k(y+tr))\,.\,e^{-2\pi k|\mu_1 - x|}$$

$$G_2(x,y,\mu_1) = \sum_{k\geq 1}\sum_{r=1}^{Ng} F(x,t_r)\,.\,\omega(r)\,.\sin(2\pi k(y+tr))\,.\,e^{-2\pi k|\mu_1 - x|}$$

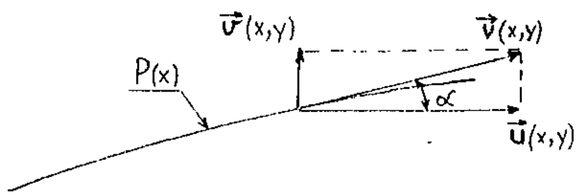
C_1, C_2, Cu et Cv étant inchangés.

I.8 Conditions à verifier sur le profil :

I.8.1 Condition de glissement en chaque point du profil:

Sur le profil, en dehors du bord d'attaque et du bord de fuite, le vecteur vitesse est tangent au profil (fig.5); ce qui se traduit par :

$$tg\alpha = P'(x) = \frac{V(x,P(x))}{U(x,P(x))} \qquad (1.18)$$



- fig 5 -

D'où :

$$P'(x)\,.\,U(x,y) - V(x,y) = 0$$

Soit; en remplaçant U(x,y) et V(x,y) par les relations (1.18); La condition de glissement s'écrit :

$$P'(x)\,.\,U_0(-c/2)-V_0(-c/2)=\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng}\left[\frac{dU_0(\mu_i)}{d\tau}-f_0(\mu_i)\right].(Cv+P'(x)\,.Cu)\,.\,\omega(i)$$

$$-\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng}\frac{dV_0(\mu_i)}{d\tau}\left[P'(x)\,.\,Cv+Cu\right].\,\omega(i)+(I_2-P'(x)\,.\,I_1)$$

$$+\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng}(G_v+P'(x)\,.\,G_u)\,.\,\omega(i) \qquad (1.19)$$

I.8.2 Conditions sur le bord d'attaque (NA) et bord de fuite (NF) :

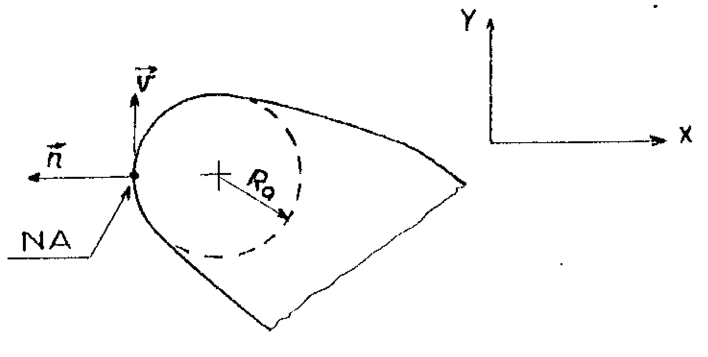
Au bord d'attaque et au bord de fuite, P'(x) tend vers l'infini donc des conditions supplémentaires doivent être imposées pour permettre des solutions finies.
La conservation du moment se traduit par la relation :

$$\frac{\partial V}{\partial N}=\frac{V}{R} \qquad (1.20)$$

V : module de la vitesse
R : rayon de courbure de la paroi
N : la normale sortante de la paroi
Vu la disposition du bord d'attaque (fig6) on a :

$$\frac{\partial V}{\partial X}=\frac{v}{R} \qquad (1.21.a)$$

$$u=0 \qquad (1.21.b)$$



-fig.6-

D'autre part le rotationnel étant nul, donc :

$$\frac{\partial V}{\partial X}=\frac{\partial U}{\partial y}$$

D'ou :

$$\frac{\partial V}{\partial X}=\frac{V}{R_A} \qquad (1.21.c)$$

La relation (1.21.c) est discrétisée selon la forme:

$$U(-c/2,y_A+\Delta y)-U(-c/2,y_A-\Delta y)=2V(-c/2,y_A)\,.\,\frac{\Delta y}{R_A} \qquad (1.22.a)$$

$$y_A=P(-c/2)$$

De même pour le bord de fuite en changeant le signe du rayon de courbure:

$$U(c/2,y_F+\Delta y)-U(c/2,y_F-\Delta y)=-2V(c/2,y_F)\,\frac{\Delta y}{R_F} \qquad (1.22.b)$$

$$y_F=P(c/2)$$

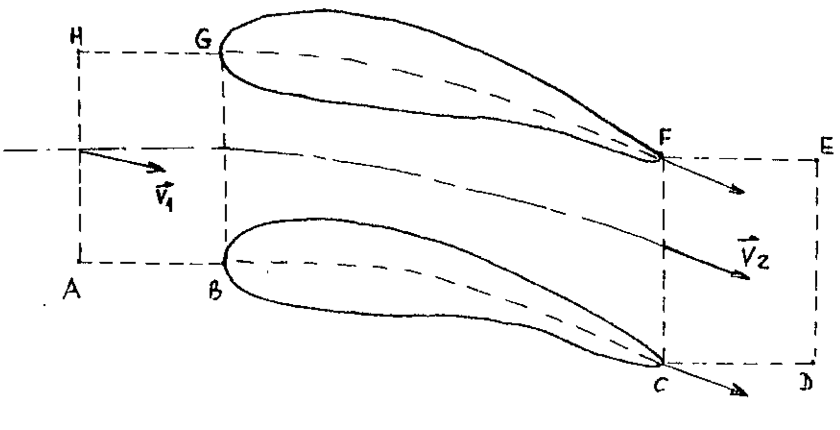
Par ailleurs , la relation (1.21.b) se traduisant sur le bord d'attaque par :

$$U_0(-c/2)=\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng} G_u(-c/2,y_A,\mu_i)\,.\,\omega(i)$$

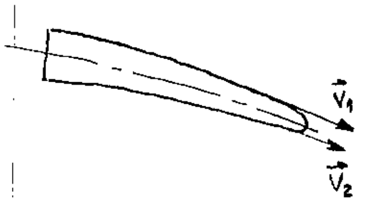
$$+\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng}\left[\frac{dU_0}{d\tau}(\mu_i)-f(0,\mu_i)\right]C_u(-c/2,y_A,\mu_i)\,\omega(i)$$

$$+\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{Ng}\frac{dV_0}{d\tau}(\mu_i)\,.\,C_v(-c/2,y_A,\mu_i)\,.\,\omega(i)-I_1(y_A) \qquad (1.23)$$

Pour le bord de fuite, la condition supplémentaire de Kutta-Joukowski se traduit par l'ennoncé suivant:
"Pour un écoulement de fluide parfait autour d'un profil dont l'intrados et l'extrados se terminent suivant une tangente commune , la ligne de courant issue du bord de fuite doit quitter ce dernier suivant cette tangente"
-fig.7- et -fig.8-



-fig7-



-fig 8-

Chapitre 2

Développement de la Fonction de Compressibilité F(x,y)

" Où l'indécis au précis se joint "
Verlaine, Jadis et Naguère

II.1 INTRODUCTION :

Nous avons mentionné au chapitre précédent que la fonction caractérisant l'effet de la compressibilité ne pouvait être , à priori, définie avec précision ,tout ce que nous pouvons dire d'elle que son effet s'étend sur l'intervalle [-C,C] et est nulle en dehors.

A l'intérieur du canal inter_aube, F(x,y) dépend de la vitesse en chaque point de calcul, ce qui nécessite la connaissance de la répartition des vitesses dans le canal inter_aube.

II-2 Développement des calculs et utilisation du modèle de Wu

La fonction F(x,y) présente dans les équations (1.17) et regroupant les termes de compressibilité doit être calculée sur tout le domaine décrit par la fig.9

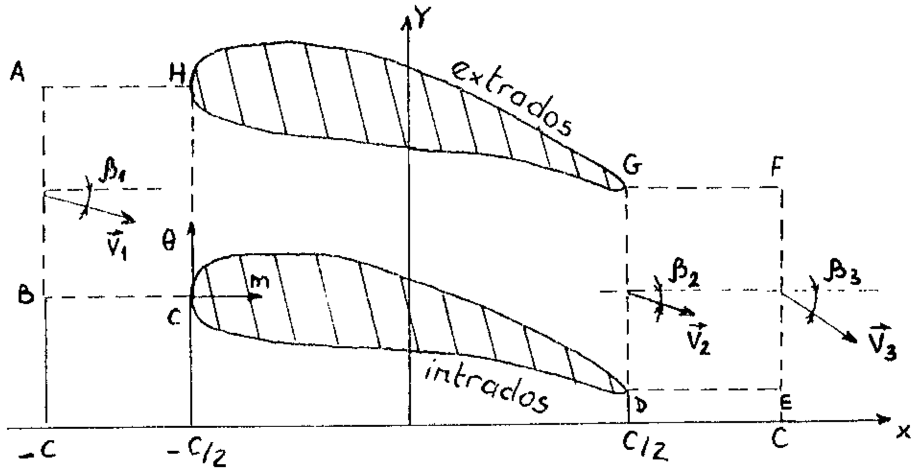
F(x,y) s'écrit :

$$F(x,y)=\frac{1}{\gamma-1}\left[U\frac{\partial}{\partial x}\left[Log\left(1-\frac{V^2}{2}\right)\right]+V\frac{\partial}{\partial y}\left[Log\left(1-\frac{V^2}{2}\right)\right]\right] \qquad (1.2.a)$$

$$V^2=\frac{U^2(x,y)+V^2(x,y)}{C_p \cdot T_0}$$

C_pT_o : Enthalpie d'arrêt

fig-9



On pose :

$$F(x,y)=\sum_{k\geq 1} f(k,x)\,.\,e^{i\omega ky}+f(0,x) \qquad (2.1)$$

avec :

$$f(0,x)=2\int_0^1 F(x,y)\,.\,dy \qquad (2.2)$$

$$f(k,x)=2\int_0^1 F(x,\tau)\,.\,e^{jk\omega\tau}d\tau \qquad (2.3)$$

La discrétisation des équations (2.1);(2.2) et (2.3) donne :

$$F(x,\mu_i)=\frac{V^2{}_i-V^2{}_{i+1}}{2(\gamma-1)}\,.\,\frac{1}{1-\frac{V^2{}_i}{2}}\,[U(x,\mu_i)\,.\,\frac{1}{\delta x}+\frac{V(x,\mu_i)}{\delta S+\delta\epsilon}] \qquad (2.4)$$

$$V^2{}_i=\frac{U^2(x,\mu i)+V^2(x,\mu i)}{C_p\,.\,T_0}$$

$$f(0,x)=\sum_{j\geq 1} F(x,\mu_j)\,.\,\omega(j) \qquad (2.5)$$

$$f(k,x)=\sum_{j\geq 1} F(x,\mu_j)\,.\,\omega(j)\,.\,e^{i2\pi k\mu_j} \qquad (2.6)$$

De par sa forme , le calcul de la fonction F(x,y) nécessite la connaissance de la répartition des composantes u et v sur le profil (extrados et intrados) ainsi que dans le canal inter_aube.

Afin d'y parvenir , nous avons opté pour le modèle de Wu. dont un programme de calcul a été développer au cours de l'année passée dans le cadre d'un projet de Fin d'Etude proposé par M[er]: M[ed]. Boudjemaa [Ref 20].

Le modèle de Wu s'avère une des tentatives les plus réussie dans le domaine des turbomachines [Ecoults en grilles d'aubes et écoulements méridiens].

La technique correspondantes consiste à considérer deux types d'écoulements le long de surfaces de courant qui , en amont de la machine, s'appuient respectivement sur des cercles centrés sur l'axe (Surfaces S1) et sur des rayons perpendiculaires à l'axe (Surfaces S2) - fig.10 -

Les équations correspondants à ces deux types d'écoulements sont évidemment couplées et des hypothèses simplificatrices doivent être effectuées.

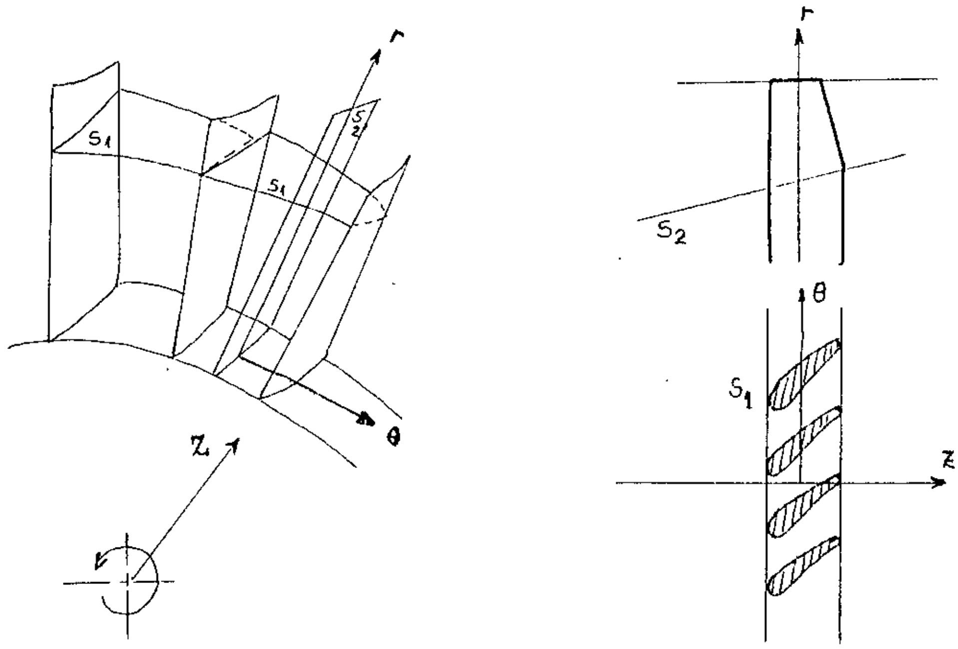


Fig.10 Principe de décomposition de l'écoulement tridimensionnel en deux Familles d'écoulements bidimentionnels

En ce qui concerne notre travail , on s'intéresse uniquement à l'analyse de l'écoulement aube à aube "Surface S1".

Le programme élaboré pour le modèle de Wu [ref 20] permet à l'aide d'un maillage rectangulaire dans tout le domaine d'écoulement de résoudre l'équation de poisson enψ:

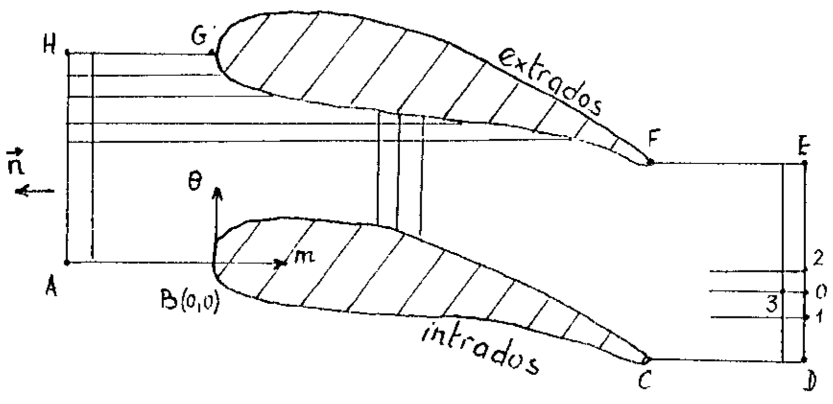
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=q(x,y) \qquad (2.7)$$

En la discrétisant à l'aide de développements en séries de Taylor ce qui permet le passage aux différences finies.(fig 11).

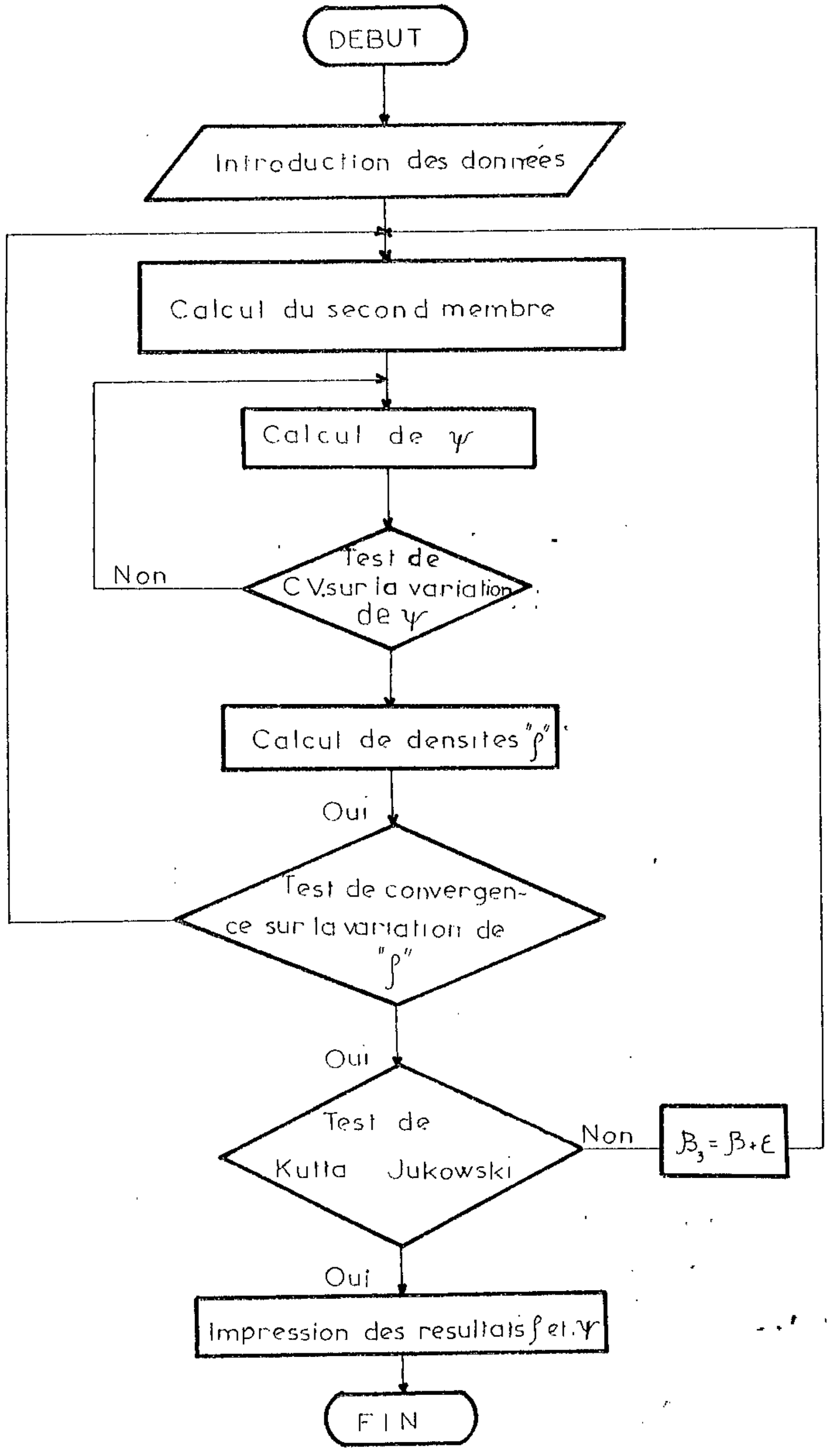
L'équation (2.7) devient ainsi ponctuelle , par conséquent il faudrait résoudre autant d'équations linéaires qu'il en existe de points dans la grille du maillage (Résolution de systèmes linéaires) , sans oublier de mentionner qu'il faut en plus tenir compte des conditions aux limites (Ecoult uniforme à l'infini amont et aval) , des conditions sur les bords ainsi que de la condition de Kutta Joukowski.

Aprés résolution et obtention des valeurs des ψ ,nous pouvons , par dérivation , tirer les valeurs des composantes des vitesses en chaque point du maillage, ce qui permet par la même de tirer les valeurs de la fonction de compressibilité F(x,y) en chaque point du canal.

Pour plus de précision , nous présentons ici l'organigramme de calcul de l'écoulement aube à aube [Ref 20].



- Fig 11 -



_ Organigramme de calcul aube à aube _

III.1 INTRODUCTION :

Nous avons noté au début, en introduction , que le but de ce travail était de rechercher la distribution du squelette d'un profil sachant connues une loi d'épaisseur de l'aube et une répartition d'une des composantes de la vitesse, ce qui correspond au mode inverse 2, cependant l'application de modéle developpé reste valable si nous voulons changer les inconnues (par exemple fixer les composantes de la vitesse et retrouver la courbure ainsi que la répartition de l'épaisseur ce qui correspond au mode inverse 1).

Au contraire, connaissant la géométrie du profil, il est possible d'obtenir et les vitesses, et les vitesses locales (méthode directe).

III.2 DEVELOPPEMENTS :

Revenons à la relation représentant la condition de glissement(1.19) avec arrangement des termes, en chaque point du profil ,cette relation s'écrit :

$$Hu(i.j)\,[\frac{dU_0(i)}{d\tau}-f_0(i)]+Hv(i,j)\,.\,\frac{dV_0}{d\tau}(i)=B(i)-H_0(i) \qquad (3.1)$$

avec:

$$\mathbf{B}(i)=\frac{2}{c}\,[P'(xi)\,(U_0(-c/2)-I_1)+I_2-V_0(-c/2)] \qquad (3.2)$$

$$I_1=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2\pi k}\sum_{r\geq 1}[F(-c,t_r)-F(c,t_r)]\,\omega(r)\,.\cos(2\pi k(y+t_r)) \qquad (3.3)$$

$$I_2=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2\pi k}\sum_{r\geq 1}[F(-c,t_r)+F(c,t_r)].\omega(r)\sin(2\pi k(y+t_r))\qquad(3.4)$$

$$H_u(i,j)=[P'(xi).Cu(i,j)+Cv(i,j)].\omega(i)\qquad(3.5)$$

$$H_v(i,j)=[P'(xi).C_v(i,j)-C_u(i,j)].\omega(i)\qquad(3.6)$$

$$H_0(i)=[G_v(i)+P'(xi).G_u(i)].\omega(i)\qquad(3.7)$$

L'application de l'équation (3.1) sur l'extrados et sur l'intrados nous donne un systéme de 2 N équations non lineaires :
N points sur l'extrados :

$$[H_{ue}].\{\frac{dU_0}{d\tau}-f_0\}+[H_{ve}].\{\frac{dV_0}{d\tau}\}=\{B_e\}-\{H_{0e}\}\qquad(3.8)$$

N points sur l'intrados :

$$[H_{ui}].\{\frac{dU_0}{d\tau}-f_0\}+[H_{vi}].\{\frac{dV_0}{d\tau}\}=\{B_i\}-\{H_{0i}\}\qquad(3.9)$$

L'application du mode inverse 2 suppose la connaissance d'une loi d'épaisseur et une répartition de V_0 pour le profil, on procéde à l'élimination du terme en U_0 du systéme:

Ce qui donne :

$$\{\frac{dU_0}{d\tau}-f_0\}=[H_{ue}]^{-1}.\{D_e\}-[H_{ve}]^{-1}.[H_{ve}].\{\frac{dV_0}{d\tau}\}\qquad(3.10)$$

avec :

$$\{D_e\}=\{\mathbf{B}_e\}-\{H_{0e}\} \tag{3.11}$$

On injecte (3.10) dans (3.9) ce qui donne un systéme non lineaire de dimension N de la forme :

$$[H_{ue}]^{-1}.\{D_e\}-[H_{ui}]^{-1}.\{D_i\}-[\,[H_{ue}]^{-1}.[H_{vc}]-[H_{ui}]^{-1}.[H_{vi}]\,].\{\frac{dV_0}{d\tau}\}=\{0\} \tag{3.11}$$

Ou sous une forme plus compacte:

$$\{E\}=\{0\} \tag{3.12}$$

III.3 TRANSFORMATION DU SYSTEME ET RESOLUTION NUMERIQUE :

III.3.1 TRANSFORMATION DU SYSTEME :

Le systéme (3.12) doit être transformer pour éviter les opérations d'inversion des matrices.

On multiplie l équation (3.11) par $[H_{ve}]$ d'où :

$$\{D_e\}-[H_{ue}].[H_{ui}]^{-1}.\{D_i\}-[\,[H_{ve}]-[H_{ue}].[H_{ui}]^{-1}].\{\frac{dV_0}{d\tau}\}=\{0\} \tag{14}$$

ou bien :

$$\{D_e\}-[H_{ve}].\{\frac{dV_0}{d\tau}\}-[H_{ue}].[H_{ui}]^{-1}.[\{D_i\}-[H_{vi}].\{\frac{dV_0}{d\tau}\}]=\{0\} \tag{3.13}$$

on pose :

$$\{X\}=\{D_e\}-[H_{ve}]\,.\,\{\frac{dV_0}{d\tau}\} \qquad (3.14)$$

$$\{Y\}=\{D_i\}-[H_{vi}]\,.\,\{\frac{dV_0}{d\tau}\} \qquad (3.15)$$

l'equation (3.13) devient :

$$\{X\}-[H_{ue}]\,.\,[H_{ui}]^{-1}\,.\,\{Y\}=\{0\} \qquad (3.16)$$

On écrit {y} en fonction de $[H_{ui}]$ tel que :

$$\{Y\}=[H_{ui}]\,.\,\{Z\} \qquad (3.17)$$

{y} et $[H_{ui}]$ étant connues, on tire {Z} par résolution du systéme (3.17).
Enfin le systéme (3.13) devient:

$$\{X\}-[H_{ue}]\,.\,\{Z\}=\{0\} \qquad (3.18)$$

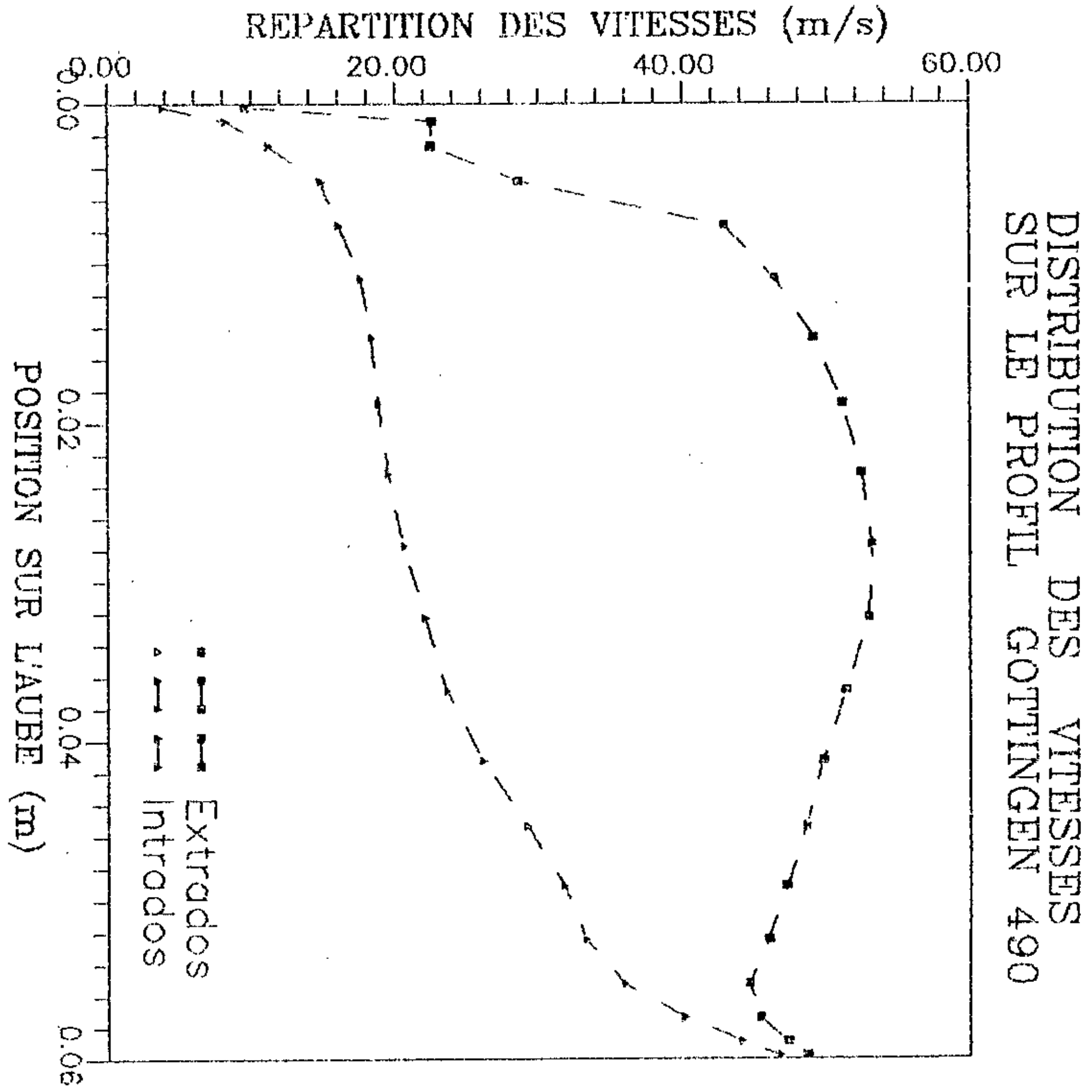
qu'il est possible de résoudre en utilisant la méthode de NEWTON-RAPHSON [Annexe C] qui permet le passage d'un systéme non lineaire à un système lineaire de la forme :

$$A^k.\Delta X^k=\mathbf{B}^k \qquad (3.19)$$

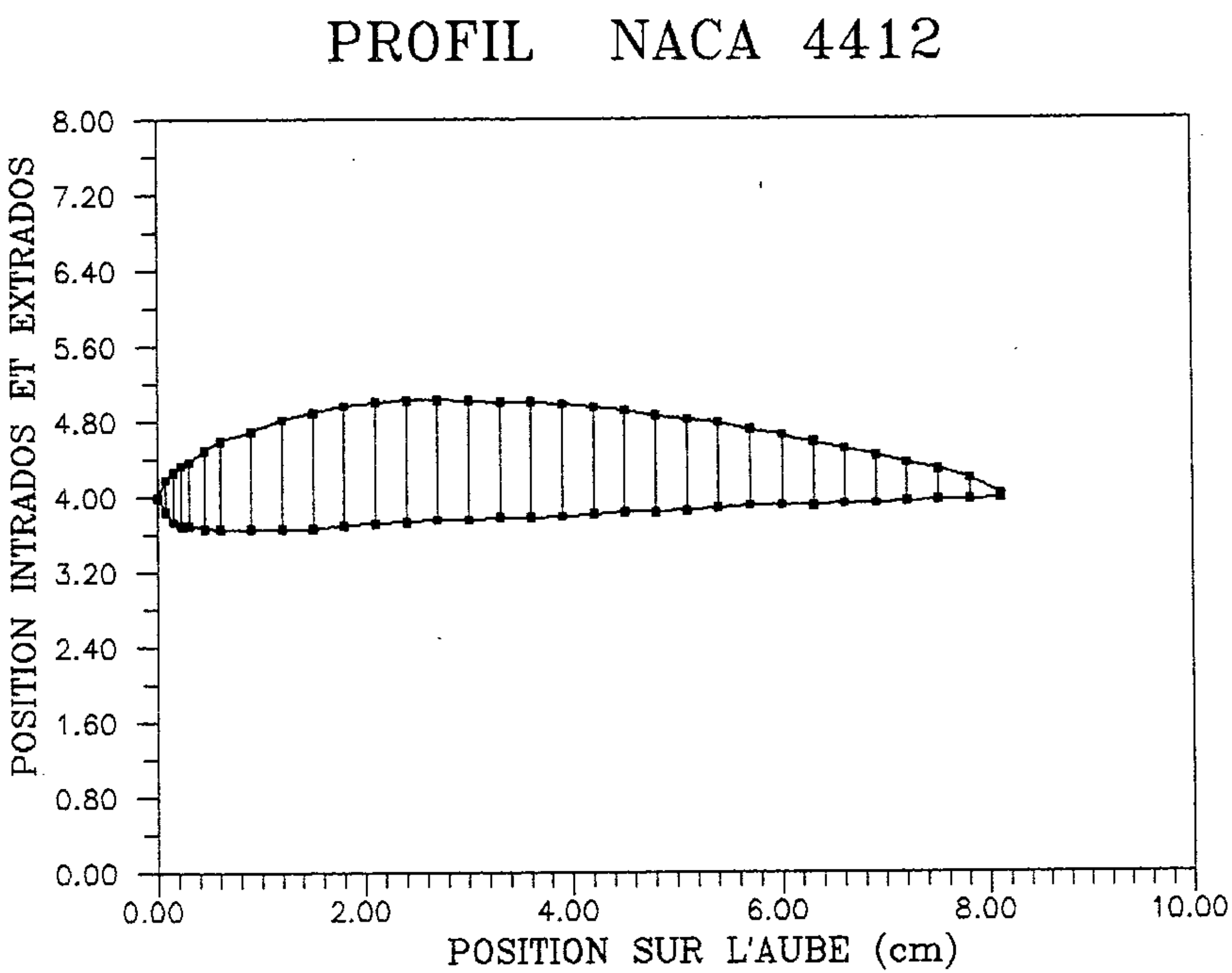
III.3.2 RESOLUTION NUMERIQUE :

Pour la resolution du systéme (3.18) le temps de calcul que néccéssite la méthode de NEWTON-RAPHSON amortie motivait son choix vu que la plus part des autres méthodes quoi que plus efficaces, convergent lentement. Notons ici que le domaine de convergence de la méthode est trés réduit ce qui nécéssite un choix judicieux de la solution initiale:

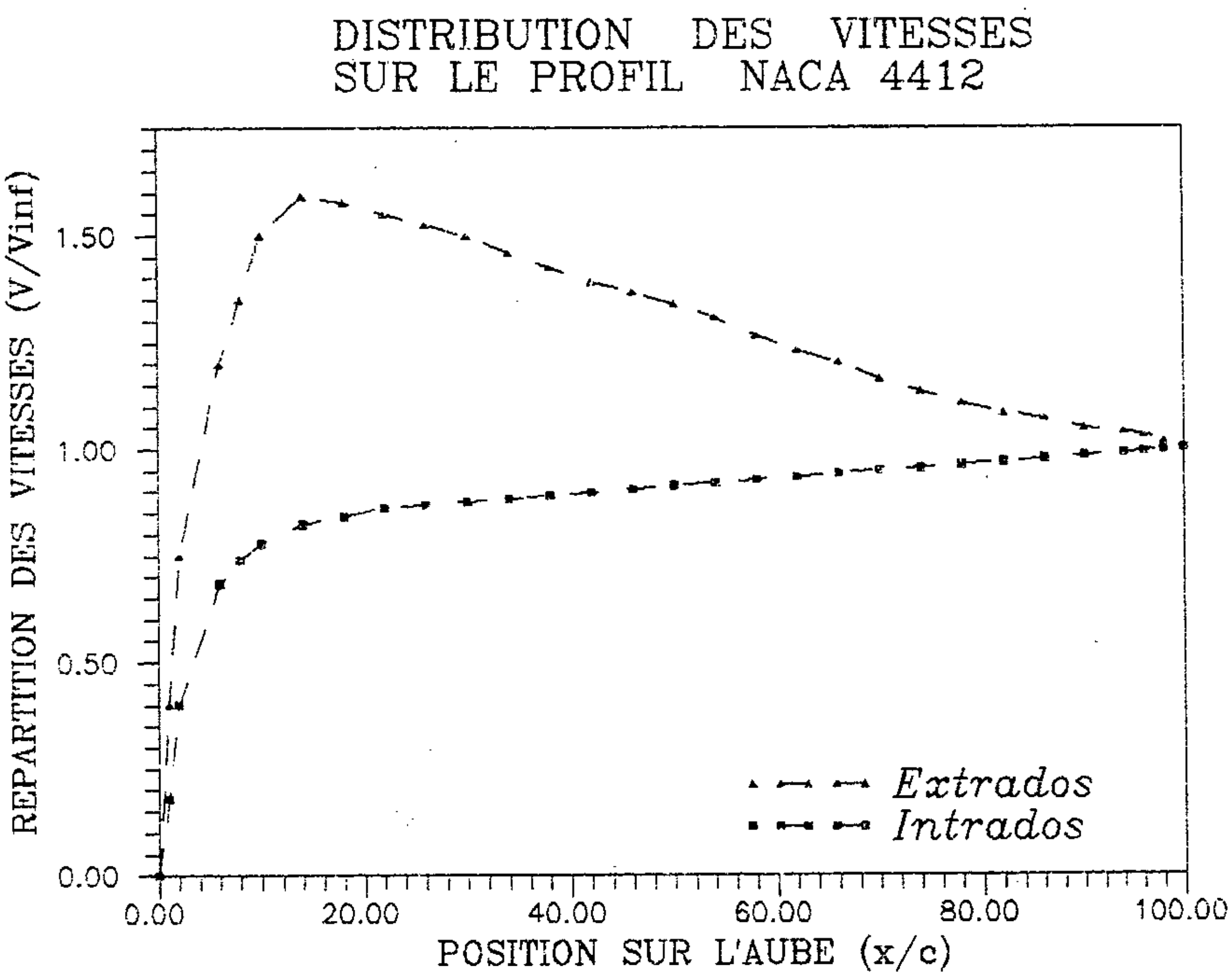
Enfin, et pour plus de détails, l'organigramme de résolution numérique et donné en fin de ce chapitre.


DISTRIBUTION DES VITESSES
SUR LE PROFIL GOTTINGEN 490
REPARTITION DES VITESSES (m/s)
0.00
20.00
40.00
60.00
0.00
0.02
0.04
0.06
POSITION SUR L'AUBE (m)
Extrados
Intrados

Graphe 2


PROFIL NACA 4412
POSITION INTRADOS ET EXTRADOS
8.00
7.20
6.40
5.60
4.80
4.00
3.20
2.40
1.60
0.80
0.00
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
POSITION SUR L'AUBE (cm)

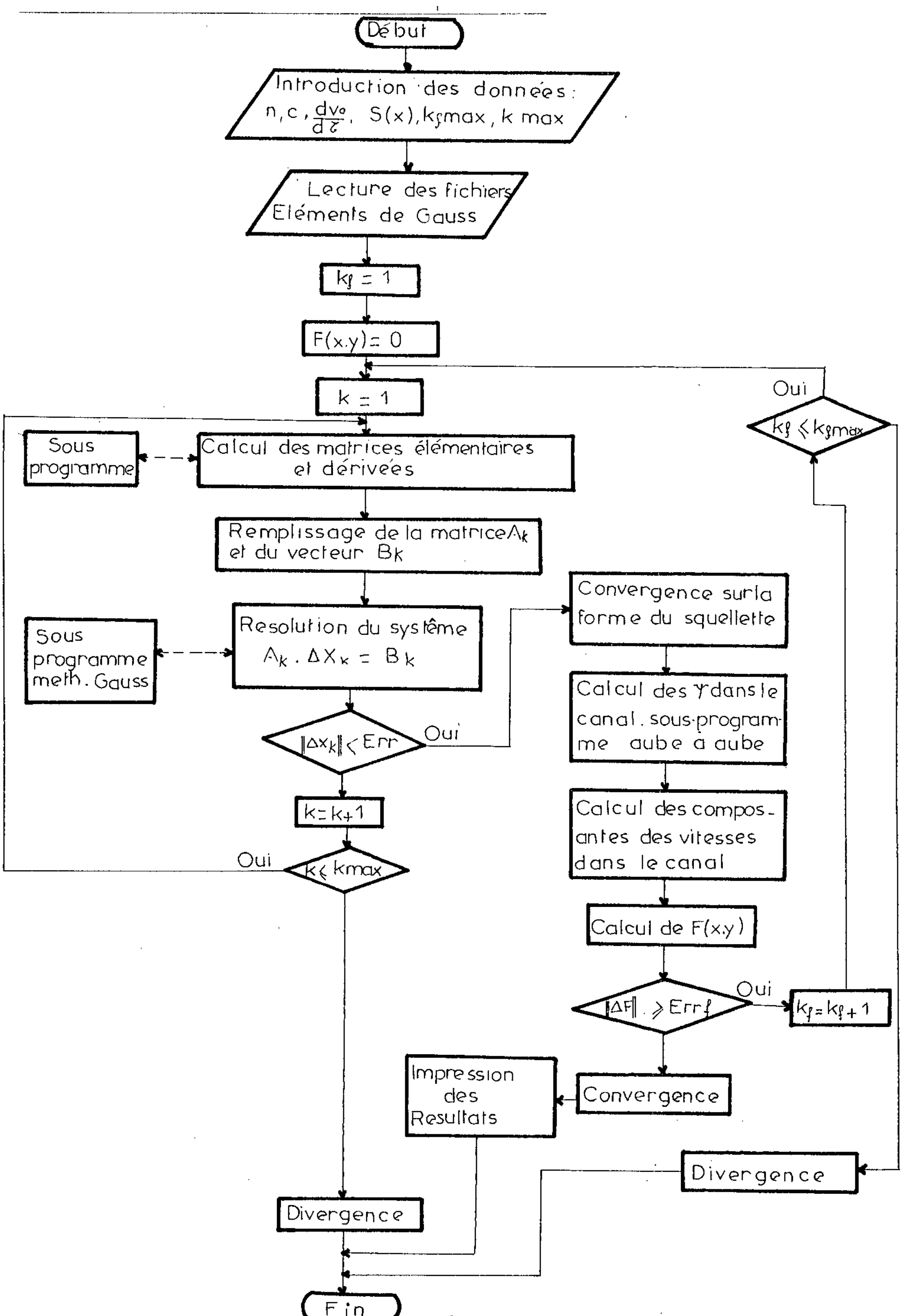
Graphe 3


DISTRIBUTION DES VITESSES
SUR LE PROFIL NACA 4412
REPARTITION DES VITESSES (V/Vinf)
1.50
1.00
0.50
0.00
0.00
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
POSITION SUR L'AUBE (x/c)
Extrados
Intrados

Graphe 4

TABLEAU 1 : Résultats pour le profil Gottingen 490
Mach à l'infini amont : 0,11.....α = 0°
Mach à l'infini aval : 0,35.....α = -58°

S*(x).(mm) sol.exacte	Calcul incompressible S/S*		Calcul compressible S/S* α = 0°
	α = 0°	α = 8°	
1,0999.10-2	1,34001	1,9785	1,407
1,1003.10-2	0,9719	0,9910	0,9506
1,1038.10-2	0,9154	0,9685	0,9052
1,1151.10-2	0,9618	0,9665	0,9233
1,1226.10-2	1,0817	0,9589	0,9635
1,0714.10-2	0,9185	0,7998	0,8925
9,5323.10-3	0,9684	-0,54177	0,8693
7,5504.10-3	1,4070	-1,4391	1,3221
5,2625.10-3	0,7882	-6,0214	0,8532
1,9949.10-3	1,104	-13,096	1,322
-2,2891.10-3	0,88398	-13,1319	0,9055
-7,1778.10-3	0,95159	2,6574	0,9213
-1,2965.10-2	1,02379	1,1319	0,9665
-1,9183.10-2	0,6390	1,8059	0,8382
-2,6291.10-2	1,1720	1,0724	0,9127
-3,1984.10-2	0,9368	1,6046	1,0530
-3,7004.10-2	0,9974	0,7485	0,8380
-4,1283.10-2	0,9738	0,9797	1,1017
-4,4190.10-2	1,5410	1,23	1,5724
-4,6053.10-2	2,1382	1,87	2,8112


Début
Introduction des données :
n, c, $\frac{dv_0}{d\tau}$, S(x), $k_f$max, k max
Lecture des fichiers
Eléments de Gauss
$k_f = 1$
F(x.y) = 0
k = 1
Sous programme
Calcul des matrices élémentaires et dérivées
Remplissage de la matrice A_k et du vecteur B_k
Sous programme meth. Gauss
Resolution du systême
$A_k . \Delta X_k = B_k$
$\|\Delta x_k\| < Err$
Oui
k = k+1
Oui
$k \leqslant kmax$
Divergence
Convergence sur la forme du squellette
Calcul des γ dans le canal. sous-programme aube à aube
Calcul des composantes des vitesses dans le canal
Calcul de F(x.y)
$\|\Delta F\| \geqslant Err_f$
Oui
$k_f = k_f + 1$
Oui
$k_f \leqslant k_f max$
Convergence
Impression des Resultats
Divergence
Fin

Chapitre 4

Conclusions

"The worst is ever nearest truth"

- Byron, Lara -

CONCLUSION

Le travail présenté dans ce mémoire est une tentative de développement d'un modèle mathématique dont l'application pour le tracé de profils d'aubages en écoulement compressible reste valable aussi bien en mode direct qu'en mode inverse.

Ayant rappelé la complexité de ces écoulements, nous avons souligné la nécessité mais également les difficultés d'en effectuer une modélisation correcte. A ce propos, ont été rappelées les principales hypothèses simplificatrices sur lesquelles se basent les modèles les plus classiques.

Un programme de calcul numérique a été élaboré et testé sur deux profils, la technique utilisée est basée sur l'usage itératif d'une méthodes de calcul inverse.
A ce propos nous signalons le manque de données précises concernant les écoulements dans les turbomachines ; cet handicape ne nous a pas permis de tester la fiabilité du modèle et son application aux différents types d'écoulements (compressibles ou incompressibles). A cela s'ajoute le manque de moyens informatiques puissants. (A titre d'indication, le lancement du programme en compressible nécessite sur micro-vax 750 un temps calcul de plus de 12 heures si on se limite à 3 itérations uniquement).

Il faut toutefois remarquer que la géométrie du profil obtenue peut ne pas correspondre à une configuration réaliste : profil trop mince ou même comportant une épaisseur négative ; mais dans ce cas on aura la preuve que la distribution de vitesse désirée est impossible à obtenir d'où l'utilité de la méthode inverse comme méthode corrective permettant de vérifier ainsi que d'optimiser les performances aérodynamiques du profil.

Réferénces Bibliographiques

Chapitre 1

[1] H. Abbott, A Von DOENHOFF Theory of wing sections induding a summary of aerofoïl data - Dover publication (N.Y)

[2] J. HORLOCK - Axial flow turbines - cd 1973 (N.Y)

[3] P. Rebuffet - Aérodynamique expérimentale - Paris: Dunod 1969

[4] A . Roshko, H.W . LIEPMANN- Elements of gasodynamics JOHN Willy and Sons. INC (1957).

[5] I. Ryhming - Dynamique des fluides - Presse Polytech Romandes, Lausanne (1985).

[6] P.A THOMPSON - Compressible fluid dynamics - Mc Graw Hill, Inc 1972.

[7] M.H.VAVRA - Aerodynamics and flow in turbomachines John Willy and sons Inc (1960).

[8] M.A.Guellati - Contribution au calcul de profils d'aubages par la méthode inverse - P.E.E Mécanique, E.N.P Juin 1991

[9] B. MAHFOUD , M.Ait TALEB - Couplage, Calcul de couche limite Méthode inverse-P.E.E Mécanique E.N.P Juillet 1992.

[10] H. MITON - Properties of a space wise periodic flow Application to flow computation design for blade cascades - I.M.F de Marseille 1986

[11] H.MITON,H.SANKALE - Méthode inverse de calcul de profils d'aubages.Ecole centrale de Lyon (Nov 1984)

[12] G. Méauzé - An inverse time marching method for the définition of Cascade -Geometry.Jal of Eng. for power, vol 104 N° 3 (Juillet 1982).

[13] G. Méauzé, R Sovrano Y Ribaud - Synthése des méthodes numériques developpées à l'ONERA, Application au calcul des écoulements dans les turbomachines. L'aéronautique et l'astronautique N° 99 (1982-2)

[14] G.Méauze - Méthode de calcul aérodynamique inverse pseudo-instationnaire. la recherche aérosp. N°1980- 1

[15] S. ABDELLAH, C.F.SMITH,M.Mc BRIDE Unified equation of motion (U.E.M) approch as applied to S1 turbomachinery probléme - Jal of fluide Eng Sep 1988

[16] D. BUISINC et P.MICHAU - Ecoulement tridimensionnel dans une roue. Calcul effectivement 3D des écoulements dans les turbomachines par la méthode S1 - S2 - Jal de mécanique théorique et appliquée N° 4 vol 6 1987.

[17] Ch.HIRCH - Développements récents des méthodes de calcul dans les turbomachines-Revue Française de mécanique N°4-1988 J.P VEUILLOT - Calcul de l'écoulement moyen dans un roue de turbomachine axiale - ONERA 1973 -

[19] J P VEUILLOT-Calcul numérique de l'écoulement transonique d'un fuide parfait dans une grille d'aubes. Recherche aérosp N° 6 (Nov 1975).

[20] N. GUEDIRI, F. GUETTAB -Calcul d'un écoulement dans une roue de turbomachine par la méthode S1-S2 P.F.E_G.mécanique, E N P (Juillet 92 .

Chapitre III

[21] B.CARNAHAN - Applied Numerical Methods J.Wiley and sons N-Y(1969)

[22] J.H.FERZIGER - Numerical Methods for Eng application J.WILLY and sons (N.Y) 1981.

[23] J.P.PELLETIER - Techniques numériques appliquées au calcul scientifique-Paris Dunod et Cie 1971.

[24] W.H.PRESS - Numérical Recipes.Combridge University press 1986

[25] R.Fletcher -Generalised inverse methods for the best least squares solution of systems of non Linear equations. Computer Journal 10,(1968)

Annexe A

Développement du Modèle
En compressible

On reprend les équations représentant les composantes d'ordre k de la vitesse qui s'écrivent :

$$U(k,x)=\frac{1}{2\pi k}[f(k,-c)-f(k,c)]-\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}\delta(x,\tau).f(k,\tau).e^{-2\pi k|\tau-x|}d\tau$$

$$-\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)[\frac{dU_0}{d\tau}.(\tau)-f_0(\tau)].g(k,x,\tau)d\tau-i\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}(\tau).g(k,x,\tau)d\tau$$

(A.1.a)

$$V(k,x)=\frac{-i}{2\pi k}[f(k,-c)+f(k,c)]-\frac{i}{2}\int_{-c}^{c}f(k,\tau).e^{-2\pi k|\tau-x|}d\tau$$

$$-i\int_{-c/2}^{c/2}[\frac{dU_0\tau}{d\tau}-f_0(\tau)].g(k,x,\tau)+\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau).\frac{dV_0(\tau)}{d\tau}.d\tau.g(k,x,\tau).d\tau$$

(A.1.b)

avec :

$$g(k,x,\tau)=E(k,\tau).\exp[-2\pi k(|\tau-x|+iS(\tau))] \qquad (A.2)$$

$$E(k,\tau)=\frac{3}{(2\pi\varepsilon k)^2}[\frac{\sin 2\pi\varepsilon k}{2\pi\varepsilon k}-\cos 2\pi\varepsilon k] \qquad (A.3)$$

Les composantes d'ordre k de la fonction F(x,y) sont définies comme suit :

$$f(k,x)=2\int_0^1 F(x,y).e^{2\pi kiy}.dy \qquad (A.4)$$

$k \geq 1$ $(w=2\pi)$

On injecte (A.4) dans (A.1.a) et (A.1b) ce qui donne :

$$U(k,x)=\frac{1}{2\pi k}\left[2\int_0^1 [F(-c,\tau)-F(c,\tau)]\,.\,e^{2\pi ki\tau}\,.\,d\tau\right]$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}\delta(x,\tau)\left[2\int_0^1 [(F(x,r)\,.\,e^{2\pi kir}\,.\,dr]\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\,.\,d\tau\right]$$

$$-\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)\left(\frac{dU_0}{d\tau}-f_0\right).\,g(k,x,\tau)\,.\,d\tau-i\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}\,.\,g(k,x,\tau)\,.\,d\tau$$

(A.5.a)

$$V(x,y)=\frac{-i}{2\pi k}\left[2\int_0^1 [F(-c,\tau)+F(c,\tau)]\,.\,e^{2\pi ki\tau}\,.\,d\tau\right]$$

$$-\frac{i}{2}\int_{-c}^{c}\delta(x,\tau)\left[2\int_0^1 F(x,r)\,.\,e^{2\pi kir}\,.\,dr\right].\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\,.\,d\tau$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)\left(\frac{dV_0}{d\tau}\right).\,g(k,x,\tau)\,.\,d\tau-i\int_{-c/2}^{c/2}\left(\frac{dU_0}{d\tau}-f_0\right).\,g(k,x,\tau)\,.\,d\tau$$

(A.5.b)

Les composantes de la vitesse s'écrivent alors :

$$U(x,y)=\sum_{k\geq 1}U(k,x)\,.\,e^{2\pi kiy}+U(0,x) \qquad \text{(A.6.a)}$$

$$V(x,y)=\sum_{k\geq 1}V(k,x)\,.\,e^{2\pi kiy}+V(0,x) \qquad \text{(A.6.b)}$$

ou bien :

$$*U(x,y)=U(0,x)+\sum_{k\geq1}\frac{1}{2\pi k}[2\int_0^1[F(-c,\tau)-F(c,\tau)].e^{2\pi ki\tau}.d\tau].e^{2\pi kiy}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}\delta(x,\tau)\sum_{k\geq1}[2\int_0^1 F(x,r).e^{2\pi kir}.dr].e^{-2\pi k(|\tau-x|-iy)}.d\tau$$

$$-\int_{-c/2}^{c/}\delta(x,\tau)(\frac{dU_0}{d\tau}-f_0).\sum_{k\geq1}E(k,\tau).e^{-2\pi k(|\tau-x|+i(S(\tau)-y))}d\tau$$

$$+i\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}\sum_{k\geq1}E(k,\tau).e^{-2\pi k(|\tau-x|+i(S(\tau)-y))}.d\tau \qquad \text{(A.7.a)}$$

$$*V(x,y)=V(0,x)-i\sum_{k\geq1}\frac{1}{2\pi k}[2\int_0^1[F(-c,\tau)+F(c,\tau)].e^{2\pi ki\tau}d\tau].e^{2\pi kiy}$$

$$-\frac{i}{2}\int_{-c}^{c}\sum_{k\geq1}[2\int_0^1 F(x,r).e^{2\pi kir}.dr].e^{-2\pi k(|\tau-x|-iy)}.d\tau$$

$$-i\int_{-c/2}^{c/2}(\frac{dV_0}{d\tau}-f_0)\sum_{k\geq1}E(k,\tau).e^{-2\pi(|\tau-x|)+i(S(\tau)-y))}.d\tau$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau).\frac{dV_0}{d\tau}\sum_{k\geq1}E(k,\tau).e^{-2\pi k(|\tau-x|+i(S(\tau)-y))}.d\tau \qquad \text{(A.7.b)}$$

Passage au réel :

$$U(x,y)=U_0(x)+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2\pi k}[2\int_0^1[F(-c,\tau)-F(c,\tau)]\cos 2\pi k(\tau+y)\,.d\tau]$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}\delta(x,\tau)\sum_{k\geq 1}[2\int_0^1 F(x,r)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}.\cos 2\pi k(r+y)\,dr]\,.d\tau$$

$$-\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)\,[\frac{dU_0}{d\tau}-f_0)\sum_{k\geq 1}E(k,\varepsilon)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\cos 2\pi k(S(\tau)-y)$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}\sum_{k\geq 1}E(k,\varepsilon)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\sin 2\pi k(S(\tau)-y) \qquad \text{(A.8.a)}$$

$$*V(x,y)=V_0(x)+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2\pi k}[2\int_0^1[F(-c,\tau)+F(c,\tau)]\sin(2\pi k)\,(\tau+y)\,d\tau]$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}\sum_{k\geq 1}[2\int_0^1 F(x,r)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\sin 2\pi k(r+y)\,dr]\,.d\tau$$

$$-\int_{-c/2}^{c/2}(\frac{DU_0}{d\tau}-f_0)\sum_{k\geq 1}E(k,\varepsilon)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\sin 2\pi k(s(\tau)-y)$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}\delta(x,\tau)\sum_{k\geq 1}E(k,\varepsilon)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\cos 2\pi k(s(\tau)-y) \qquad \text{(A.8.b)}$$

On pose :

$$I_1=\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2\pi k}[2\int_0^1 [F(-c,\tau)-F(c,\tau)]\cos 2\pi k(\tau-y)\,.d\tau] \qquad (A.9)$$

$$I_2=\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2\pi k}[2\int_0^1 [F(-c,\tau)+F(c,\tau)]\sin 2\pi k(\tau-y)\,d\tau] \qquad (A.10)$$

$$Gu(x,y,\tau)=\delta(x,\tau)\sum_{k\geq 1}[2\int_0^1 F(x,r)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\cos 2\pi k(r+y)\,dr] \qquad (A.11)$$

$$Gv(x,y,\tau)=\sum_{k\geq 1}[2\int_0^1 [F(x,r)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\sin 2\pi k(r+y)\,dr] \qquad (A.12)$$

$$Cu(x,y,\tau)=\sum_{k\geq 1} E(k,\varepsilon)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\cos 2\pi k(s(\tau)-y) \qquad (A.13)$$

$$Cv(x,y,\tau)=\sum_{k\geq 1} E(k,\varepsilon)\,.\,e^{-2\pi k|\tau-x|}\sin 2\pi k(s(\tau)-y) \qquad (A.14)$$

Alors (A.8.a) et (A.8.b) s'écrivent :

$$*U(x,y)=U_0(x)+I_1-\frac{1}{2}\int_{-c}^{c} Gu(x,y,\tau)\,d\tau-\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)\,(\frac{DU_0}{d\tau}-f_0)\,Cu(x,y,\tau)\,d\tau$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}Cv(x,y,\tau)\,d\tau \qquad (A.15.a)$$

$$*V(x,y)=V_0(x)+I_2+\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}Gv(x,y,\tau)\,d\tau-\int_{-c/2}^{c/2}(\frac{dU_0}{d\tau}-f_0)\,Cv(x,y,\tau)\,d\tau$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}\delta(x,\tau)\,Cu(x,y,\tau)\,d\tau \qquad \text{(A.15.b)}$$

Sur le profil les équations (A.15.a) et (A.15.b) s'écrivent :

$$*U_p(x)=U_0(x)+I_1-\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}Gu(x,P(x),\tau)\,d\tau-\int_{-c/2}^{c/2}\delta(x,\tau)\,(\frac{dU_0}{d\tau}-f_0)\,Cu(x,P(x),\tau)\,d\tau$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}Cv(x,P(x),\tau)\,d\tau \qquad \text{(A.16.a)}$$

$$*V_p(x)=V_0(x)+I_2+\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}Gv(x,P(x),\tau)\,d\tau-\int_{-c/2}^{c/2}(\frac{dU_0}{d\tau}-f_0)\,Cv(x,P(x),\tau)\,d\tau$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}(\frac{dV_0}{d\tau}\delta(x,\tau)\,Cu(x,P(x),\tau)\,d\tau \qquad \text{(A.16.b)}$$

où de (I.1.5) on a :

$$P(x)=S(x)+\lambda\varepsilon(x)$$

La condition de glissement en tout point du profil s'écrit :

$$\frac{V_p(x)}{U_p(x)}=P'(x)$$

P'(x) est la dérivée de P(x) par rapport à X, qu'on peut écrire :

$$V_0(x)+I_2-P'(x)\,[U_0(x)+I_1]+\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}[Gv(x,P(x),\tau)+(P'(x)\,Gu(x,P(x),\tau)]\,d\tau$$

$$=\int_{-c/2}^{c/2}(\frac{dU_0}{d\tau}-f_0)\,[Cv(x,P(x),\tau)-\delta(x,\tau)\,P'(x)\,Cu(x,P(x),\tau)]\,d\tau$$

$$+\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}\,[\delta(x,\tau)\,Cu(x,P(x),\tau)-P'(x)\,Cv(x,P(x),\tau)]\,d\tau \qquad (A.17)$$

On pose :

$$H_u(x,\tau)=Cv(x,P(x),\tau)-\delta(x,\tau)\,P'(x)\,Cu(x,P(x),\tau)$$

$$H_v(x,\tau)=\delta(x,\tau)\,Cu(x,P(x),\tau)-P'(x)\,Cv(x,P(x),\tau)$$

$$C_x=I_2-P'(x)\,I_1+\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}[Gv(x,P(x),\tau)+P'(x)\,Gu(x,P(x),\tau)]\,d\tau$$

l'équation (A,17) s'écrit dans ce cas

$$V_0(x)-P'(x)\,U_0(x)+C(x)=\int_{-c/2}^{c/2}H_u(x,\tau)\,[\frac{dU_0}{d\tau}-f_0]\,d\tau+\int_{-c/2}^{c/2}\frac{dV_0}{d\tau}H_v(x,\tau)\,d\tau \qquad (A.18)$$

Au bord d'attaque et au bord de fuite (NA et NF), la relation (1.18) ne peut être appliquée car P'(x) tend vers l'infini d'où la nécessité d'introduire des conditions supplémentaires (KUTTA - JOUKOWSKI).
Aux points (NA) et (NF), la conservation du moment se traduit par la relation :

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{-V}{R} \qquad (A.19)$$

Où V est le module de la vitesse, R le Rayon de courbure et N la normale sortante des bords; en plus la composante axiale est nulle en ce points :

$$U_p(\pm\frac{C}{2})=0 \qquad (A.20)$$

Pour un rotationnel nul, la relation (A.19) s'écrit :

$$\frac{\partial V_p}{\partial x}=\frac{\partial u_p}{\partial y}=\frac{-V_p(\pm c/2)}{R} \qquad (A.21)$$

La dérivée

$\frac{\partial U_p}{\partial y}$ est évaluée pour x =±c/2,y=S(±c/2) par

$$\frac{\partial U_p}{\partial y}=\frac{1}{2e}\left[U(x,y+e)-U(x,y-e)\right] \qquad (A.22)$$

où "e" est une fraction du pas (< 1%)

En prenant (A.15a),(A,15b),(A,16.a) et (A.16.b) en considération (A.20) et (A.21) s'écrivent :

$$\int_{-c/2}^{c/2} F_u(x,e,\tau)\,(\frac{dU_0}{d\tau}-f_0)+\int_{-c/2}^{c/2} F_v(x,e,\tau)\,\frac{dV_0}{d\tau}d\tau=V_0(x)+I_2+\frac{1}{2}\int_{-c}^{c} F_c(x,e,\tau)\,d\tau$$

(A.23)

$$\int_{-c/2}^{c/2} \delta(x,\tau)\,(\frac{dU_0}{d\tau}-f_0)\,C_u(x,P(x),\tau)+\int_{-c/2}^{c/2} \frac{dV_0}{d\tau}C_v(x,P(x),\tau)\,d\tau=U_0(x)+I_1$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-c}^{c} Gu(x,P(x),\tau)\,d\tau \qquad (A.24)$$

Pour x = -c/2 (bord d'attaque) et x = c/2 (bord de fuite) avec

$$F_c(x,e,\tau) = [G_u(x,s(x)+e,\tau) - G_u(x,s(x)-e,\tau)]\,\frac{R}{2e} + Gv(x,s(x),\tau)$$

$$F_u(x,e,\tau) = C_v(x,s(x),\tau) - [C_u(x,s(x)+e,\tau) - C_u(x,s(x)-e,\tau)]\,\delta(x,\tau)\,\frac{R}{2e}$$

$$F_v(x,e,\tau) = \frac{R}{2e}\,[C_v(x,s(x)+e,\tau) - Cv(x,s(x)-e,\tau)] - \delta(x,\tau)\,C_u(x,s(x),\tau)$$

Annexe B

Méthode du Spline Cubique

La méthode du Spline cubique est une technique d'interpolation de fonctions définies par points. Elle consiste à relier chaque intervalle, défini par deux points successifs $[X_i, X_{i+1}]$, par un polynôme de degré 3; d'où les coefficients de ce dernier sont spécifiques à l'intervalle choisi.
On commence par l'hypothèse que la dérivée seconde de la fonction à interpoler est continue et est linéaire sur $[X_i, X_{i+1}]$; ce qui se traduit par

$$f_{xx}^{i}=f_{xx}(xi)\,\frac{X_{i+1}-X}{X_{i+1}-X_i}+f_{xx}(X_i+1)\,\frac{X-X_i}{X_{i+1}-X_i} \qquad (1)$$

avec

$$f_{xx}(x_i)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|x_i$$

$$f_x(x_i)=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|x_i$$

une première intégration donne

$$f_x^i(x)=\frac{1}{2}f_{xx}(X_i)\,.\,\frac{X(2X_{i+1}-X)}{X_{i+1}-X_i}+\frac{1}{2}f_{xx}^{i}(X_{i+1})\,\frac{(X-2xi)X}{X_{i+1}-X_i} \qquad (2)$$

Une seconde intégration

$$f^i(x)=\frac{1}{6\Delta i}\,.\,f_{xx}(X_i)\,(X_{i+1}-X)^3+f_{xx}(X_{i+1})\,.\,\frac{1}{6\Delta i}\,(X-X_i)^3$$

$$+\left[\frac{Y_i}{\Delta_i}-\frac{\Delta_i}{6}\,.\,f_{xx}(X_i)\right](X_{i+1}-X)+\left[\frac{Y_{i+1}}{\Delta i}-\frac{\Delta i}{6}f_{xx}(X_{i+1})\right](X-X_i) \qquad (3)$$

avec

$$\Delta_i = X_{i+1} - Xi$$

$$Y_i = f(x_i)$$

reste à trouver $f_{xx}(x_i)$ et $f_{xx}(x_{i+1})$ $\quad i=1,\ldots,n$
Pour cela nous utilisons la continuité de $f_x(x)$ sur l'intervalle , ce qui impose :

$$f_x^i(X_{i+1}) = f_x^{i+1}(X_{i+1})$$

ou sous une forme plus développée :

$$\frac{\Delta_{i-1}}{6} f_{xx}(X_{i+1}) + \frac{1}{3}(\Delta_{i-1}+\Delta_i) f_{xx}(X_i) + \frac{\Delta_i}{6} f_{xx}(x_{i+1}) = \frac{Y_{i+1}-Y_i}{\Delta_i} - \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta_{i-1}} \quad (4)$$

L'équation (4) écrite en chaque point séparant deux intervalles successifs nous donne un système d'équations linéaire tridiagonale de (n-2) équations et n inconnues qu'il est possible de résoudre en posant deux conditions supplémentaires.
Les possibilités proposées pour résoudre le système sont :

a/ Fonction périodique : $f_{xx}(x_1) = f_{xx}(x_{n-1}))$ et $f_{xx}(x_2) = f_{xx}(x_n)$

b/ Fonction parabolique : $f_x(x_1) = f_{xx}(x_2)$ et $f_{xx}(x_{n-1}) = f_{xx}(x_n)$

c/ Fonction quelconque; on pose généralement : $f_{xx}(x_1) = f_{xx}(x_n) = 0$

Annexe C

Méthode de NEWTON-RAPHSON pour la résolution de Systèmes Non Linéaires

PRINCIPE

La méthode de Newton-Raphson est l'une des méthodes les plus rapides pour la réduction des systèmes d'équations non linéaire quand on est en possession d'un bon estime de la solution initiale.

Mathématiquement , le problème à résoudre peut être représenter pour un système tel que (c.1):

$$f^i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \quad i=1,2,\ldots\ldots n \qquad (C.1)$$

(On suppose que le nombre d'équations est égale au nombre d'inconnues) Le problème est bien entendu de trouver un ensemble de N valeurs réelles:

$$X=[X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n]^t (c.2)$$

vérifiant simultanément les n équations du système.

Supposons qu'on possède une solution initiale notée $\{x^\circ\}$; alors en effectue un développement en série de Taylor des fonctions fi au voisinage de $\{x^\circ\}$; et ne gardant que les termes linéaires du développement on obtient:

$$f^i(X_1, X_2, X_n) \simeq F^i(X_1^0, X_2^0, \ldots\ldots, X_n^0)$$

$$+(X-X_1^0)\frac{\partial f^i}{\partial X_1}(X_1^0, X_2^0, \ldots\ldots\ldots, X_n^0)+(X_2-X_2^0)\frac{\partial f^i}{\partial X_2}$$

$$(X_1^0, X_2^0, X_n^0)+\ldots+\ldots, X_n-X_n^0)\frac{\partial f^i}{\partial X_n}=f^i(X_1^0, X_2^0, \ldots\ldots, X_n^0)$$

$$+\sum_j \frac{\partial f^i}{\partial X_j}(X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0)(X_j-X_j^0) \quad j=1,\ldots\ldots n \qquad (C.3)$$

Ainsi le système (c.1) est linéaire, et on peut trouver l'estime suivant de la solution cherchée en mettant chacune des équations du système (c.3) égale à zéro.
On pose :

$$\Delta_j^1 = X_j^1 - X_j^0$$

où X_j est le nouvel estimé de la j ème composante de la racine obtenue par résolution du système linéaire (c.3)
Les termes de dérivation sont regroupés matriciellement pour former le JACOBIEN du système [J]

$$[J_{ij}^0] = [\frac{\partial f_i^0}{\partial X_j}] \quad (c.4)$$

Le système obtenu à partir de (c.3) est :

$$\sum_{j=1}^{n} J_{ij}^0 . \Delta_j^1 = -f_i^0$$

$$i=1,2,\ldots n \qquad (c.5)$$

Dont la résolution est immédiate (Méthode de Gauss par exemple).
A l'itération k on a à résoudre le système:

$$\sum_{j=1}^{n} J_{ij}^{k-1} . \Delta_j^k = -f_i(X_1^{k-1}, X_2^{k-1}, \ldots, X_n^{k-1}) \quad (c.6)$$

$$i=1,2,..n$$

et le $K^{ième}$ estimé de la racine est obtenu par la relation:

$$X_i^k = X_i^{k+1} + \alpha . \Delta_i^k \,(\alpha \le 1)$$

ou α est un facteur de relaxation permettant d'accélérer la convergence.

Arrêt des Itérations : En pratique, on arrête les Itérations par un test de convergence tel que :

$$|X_i^{k+1}-X_i^k|<\varepsilon$$

ou k > kmax

où K_{max} est le nombre maximum admissible d'itérations et l'erreur fixée à priori.

REMARQUE

La méthode de Newton - Raphson converge bien si l'on possède un bon estime initiale de la solution. Cet estime peut être fourni par la méthode du gradient par exemple, qui est lente (convergence linéaire) mais converge souvent bien.

La convergence de la méthode est limitée aux domaines de {x} où la matrice JACOBIENNE [J] est régulière. Cette méthode peut être généralisée pour qu'elle puisse fonctionner même dans les régions de {x} ou [J] est singulière [Ref. 25]