

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة الفتيات
المكتبة -
BIBLIOTHEQUE -
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ELEMENT D'UN CODE POUR LE
CALCUL D'UN ECOULEMENT DANS
UNE ROUE DE TURBOMACHINE

Proposé par :
M. BOUDJEMAA

Etudié par :
S. BOUBENDIR
N. CHIKHI

Dirigé par
M. BOUDJEMAA

PROMOTION
1992 - 1993

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ELEMENT D'UN CODE POUR LE
CALCUL D'UN ECOULEMENT DANS
UNE ROUE DE TURBOMACHINE

Proposé par :

M. BOUDJEMAA

Etudié par :

S. BOUBENDIR

N. CHIKHI

Dirigé par

M. BOUDJEMAA

PROMOTION
1992 - 1993

في هذه الدراسة تمكنا من وضع
اسس طريقة تقريبية لحساب انسياب
سائل قابل للانضغاط في آلة تربينية

RESUME

Dans cette étude on a établi tous les éléments d'un
code permettant d'approcher un écoulement réel
compressible dans une roue de turbomachine

ABSTRACT

In this work we have analysed all
elements of a code which permit the
studie of fluid through a turbomachine

DEDICACES



Je dédie ce modeste travail à
ma mère et mon père qui m'ont tout donné
et tout sacrifié afin de me voir atteindre
ce niveau

A mes chères sœurs: Kima, bitou et Fatma
A mes frères: Hocine, Allaoua, Abdelhakim
et samir

Et à tous mes amis.

Nour-eddine



DEDICACES

Je Dedie ce Modeste
travail à mes fr̄s
- Chers Parents qui m'
ont tout donné Pour
atteindre ce niveau.

À mes deux fr̄s Ahmed
et Sofiane

À mes Soeurs

À toute la famille

Et à tous mes Copains
et Copines.

Boubendir Sid Ali

REMERCIEMENTS

*Nous tenons principalement a remercier
notre promoteur Monsieur M. BOUDJEMAA
pour nous avoir donne l'occasion d'effectuer
notre projet de fin d'etude sur un sujet
aussi ardu que passionnant.*

*Nous lui sommes reconnaissant du temps
qu'il nous a accorde dans le cadre de
la realisation de cette these.*

*Nous remercions egalement
tous les enseignants qui ont contribue
de pres ou de loin a notre formation
et a cette these, en particulier*

*Mr. OUADJAOUT charge de cours a l'EN.P.
et Mr. ATTIF enseignant a U.S.T.H.B.*

*Nous voudrions associer nos remerciements
a notre cher ami DJOUABRI Azzeddine
pour son aide qui fut d'un grand secours
et d'une grande efficacite.*

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE 1 ETUDE D'UN ECOULEMENT DANS UNE ROUE DE TURBOMACHINE

I- 1- EQUATION GENERALE DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE.

I- 1-1- INTRODUCTION

I- 1-2- EQUATION DE CONTINUITE

I- 1-3- EQUATION DE MOVEMENT (NAVIER-STOCKES, EULER)

I- 1-4- RELATIONS THERMODYNAMIQUES

I- 1-5- EQUATION D'ETAT

I-2- developpement des equations principales dans un repere relatif

I-2-1- INTRODUCTION

I-2-2- EQUATION DE CONTINUITE

I-2-3- EQUATION DU MOUVEMENT

I-2-4- EQUATION D'ENERGIE

I-3- DECOMPOSITION D'UN ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL

I-3-1- INTRODUCTION

I-3-2- MODELISATION DE L'ECOULEMENT MERIDIONAL

I-3-2-1- equation de continuité

I-3-2-2- equation de mouvement

I-3-2-3- equation d'energie

I-3-2-4- conditions aux limites

I-3-3- modélisation de l'écoulement aube à aube

I-3-3-1- equation fondamentale

I-3-3-2- conditions aux limites

I-3-3-3- conditions de KUTTA-JOUKOWSKI

CHAPITRE 2: ETUDE DES PERTES

II-1- INTRODUCTION

II-2- DIFFERENTES PERTES DANS UNE ROUE

II-2-1- PERTES PAR PROFIL

II-2-2- PERTES PAR ECOULEMENT SECONDAIRE

II-2-3- PERTES PAR FUITE

II-2-4- PERTES PAR ONDE DE CHOC

II-3- RELATION ENTRE LES COEFFICIENTS DE PERTE ET, LE RENDEMENT DANS UNE TURBOMACHINE

II-4- DESCRIPTION DU MODELE DE SODERBERG

II-5- DESCRIPTION DU MODELE D'AINLEY

II-6- COMPARAISON ENTRE LES DEUX MODELES

II-7- EFFET DE L'ANGLE D'INCIDENCE

II-8- ETUDE DE LA COUCHE LIMITE AUTOUR D'UNE AUBE

II-8-1- EPAISSEUR DYNAMIQUE DE LA COUCHE LIMITE

II-8-2- EQUATION INTEGRALE DU MOUVEMENT D'UNE COUCHE LIMITE

II-9- CONDITION DE CHARGE

CHAPITRE 3 : PARTIE NUMERIQUE

III-1- INTRODUCTION

III-2- DIFFERENTS MAILLAGES UTILISES

III-2-1- MAILLAGE RECTANGULAIRE DROIT

III-2-2- MAILLAGE (OU MODELE) DE MARSH

III-2-2-1- maillage curviligne

III-2-2-2- maillage rectangulaire incline

III-3- DESCRIPTISATION DE L'EQUATION ELLIPTIQUE

III-3-1- TRANSFORMATION DU DOMAINE D'ECOULEMENT

III-3-1-1- descritisation de l'équation de LAPLACE

III-3-1-2- descritisation du second membre

III-3-1-3- descritisation de l'équation elliptique

III-3-2- INTRODUCTION DES DIFFERENTS MAILLAGES

III-3-2-1- maillage rectangulaire

III-3-2-2- modèle de MARSH

III-3-3- APPLICATION DES DIFFERENTS MAILLAGES DANS UN
ECOULEMENT MERIDIONAL

III-3-4- APPLICATION DES DIFFERENTS MAILLAGES DANS UN
ECOULEMENT AUBE A AUBE

III-3-5 CALCUL DE LA DENSITE

III-4- METHODE DE RELAXATION

III-4-1 Methode de GAUSS-SIEDEL

III-5- INTERPOLATION CUBIQUE SPLINE

III-6- DESCRIPTISATION DE L'AQUATION INTEGRALE DE
QUANTITE DE MOUVEMENT POUR UNE COUCHE LIMITE

CHAPITRE 4 : EXPERIMENTATION NUMERIQUE ET RESULTATS

CONCLUSION

ANNEXE A

ANNEXE B

ANNEXE C

ANNEXE D

INTRODUCTION

INTRODUCTION GENERALE :

Il est bien connu que l'écoulement dans une roue de turbomachine est extrêmement complexe vu l'aspect tridimensionnel et instationnaire.

Devant cette complexité, les ingénieurs chargés d'appliquer les connaissances de mécanique des fluides à l'étude de ces machines se voient contraint d'effectuer des modèles très poussés .

Le problème du calcul de l'écoulement dans une turbomachine ne peut être actuellement abordé qu'en effectuant de nombreuses hypothèses simplificatrices:

- fluide parfait
- écoulement stationnaire
- axisymétrie des surfaces de courant

Ces hypothèses seront développés plus loin .

La description de l'écoulement dans une roue de turbomachine peut être approchée de façon classique par la décomposition de l'écoulement réel en deux types d'écoulement.

- écoulement moyen
- écoulement aube à aube

Cette modélisation a été proposée par C .H .WU .

En plus de la complexité du modèle auquel, il faut lui rajouter une étude des pertes; une connaissance explicite de leurs grandeurs est essentielle dans l'approche préliminaire puis dans la fabrication des turbomachines.

Notre travail consiste à étudier et calculer l'écoulement quasitridimensionnel et les pertes occasionnées dans une roue de turbomachine, pour cela on a divisé notre travail en trois grandes parties.

- La première partie est consacrée à traiter la définition du

modèle mathématique qui régit un écoulement "sain" dans une roue de turbomachine et cela en se basant sur la méthode S_1 et S_2 proposée par WU :

— La deuxième partie englobe la définition et l'étude du modèle mathématique des différentes pertes induites par un écoulement dans une roue de turbomachine à savoir perte par profil, perte par écoulement secondaire, perte par fuite etc....

Les modèles développés sont le modèle de SODERBERG et le modèle d'AINLEY

— Notre objectif dans cette troisième partie est d'établir et d'élaborer un programme de calcul pour l'écoulement dans une roue de turbomachine, en utilisant le modèle proposé par MARSH pour un écoulement méridional, et on essayera de l'appliquer pour l'écoulement aube à aube .

Ce qui concerne les pertes un programme de calcul de couche limite est élaboré pour le calcul de l'engraissement des profils, on utilisera Le modèle étudié et développé est le modèle de SCHLICHTING.

CHAPITRE II

I. ETUDE D'UN ECOULEMENT DANS UNE ROUE DE TURBOMACHINE:

I-1- EQUATION GENERALE DE MOUVEMENT D'UN FLUIDE

I-1-1- INTRODUCTION :

En général, un écoulement de fluide passe à travers une turbomachine et un échange d'énergie est effectué entre le fluide en mouvement et un arbre en rotation par l'intermédiaire d'un ensemble d'aubage mobile.

Au cours de cet échange, l'énergie du fluide se transforme d'énergie potentielle en énergie cinétique ou inversement et également en chaleur.

Cet écoulement est régi par les équations connues de la mécanique des fluides qu'on va énumérer et développer; en vue de simplifier l'aspect tridimensionnel plusieurs modèles ont été proposés .

On se propose d'étudier et développer le modèle de C .H .WU qui consiste à diviser l'écoulement tridimensionnel en deux familles d'écoulement bidimensionnel .

II-2-1-EQUATION DE CONTINUITE :

Cette équation doit traduire le principe de conservation de la masse, tel que l'augmentation de la masse pendant un certain temps, contenu dans un volume donné, doit être égale à la somme des masses du fluide qui y entrent, diminuée de celles qui en sortent.

Soit un milieu continu sans source ni puit, considérons un parallélépipède fixe élémentaire dx, dy, dz (représenté sur la figure I-1)

$$dm = \sum_{i=1}^n M_{e_i} - \sum_{i=1}^n M_{e_i} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} . dt . dv \quad (I-1)$$

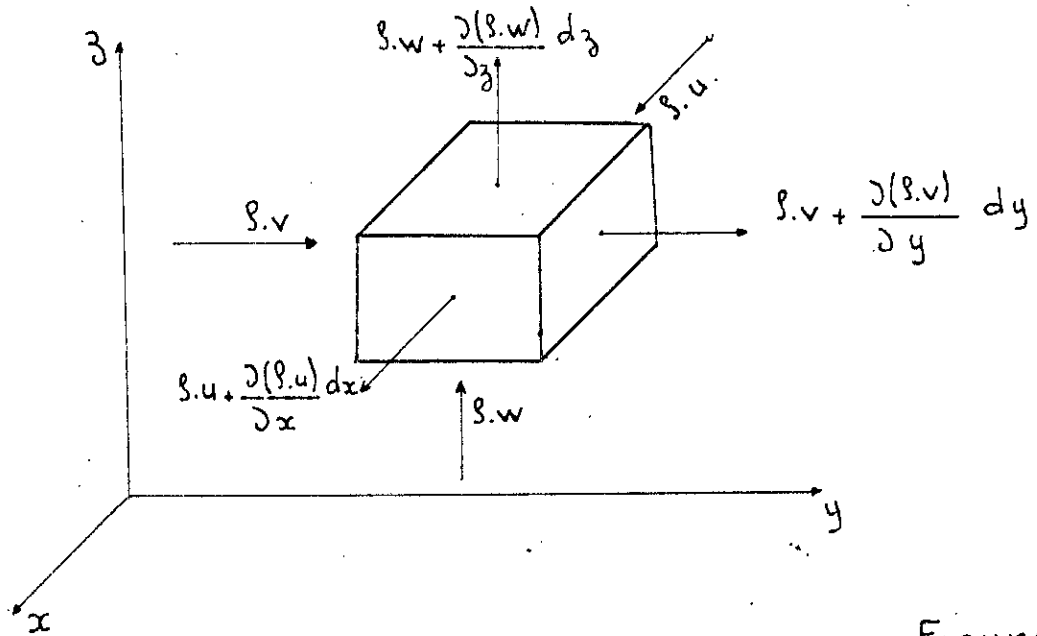


Figure I-1

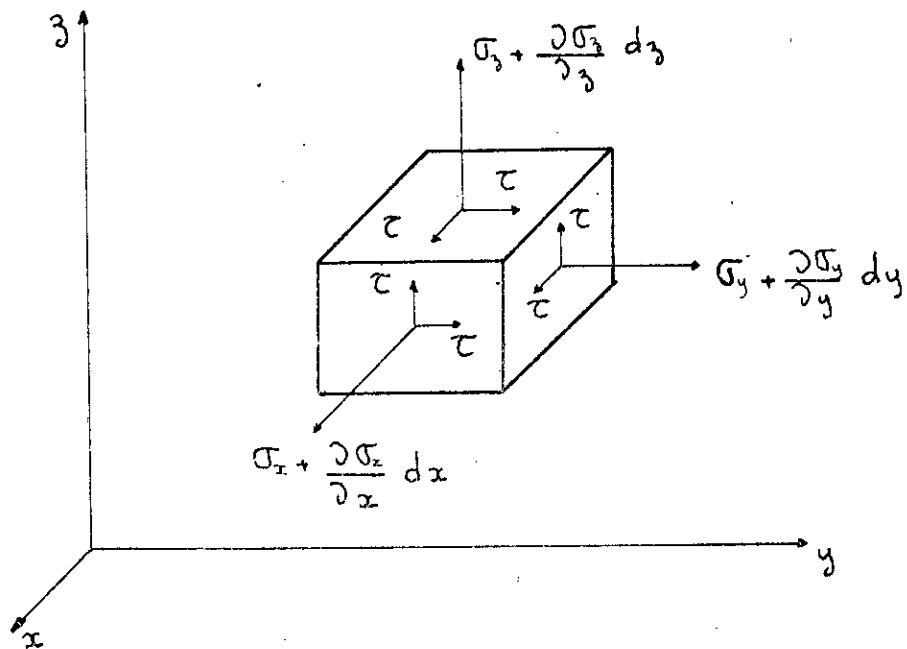


Figure I-2

en remplaçant $\sum M_{s_i}$ et $\sum M_{e_i}$ par leurs expressions on trouve :

$$\begin{aligned} & \left(\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dz \cdot dy dt - \rho \cdot u \cdot dz \cdot dy dt + \left(\rho \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx \cdot dy dt \\ & - \rho \cdot w \cdot dy \cdot dx dt + \left(\rho \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dz \cdot dx dt - \rho \cdot v \cdot dz \cdot dx dt = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \cdot dz \cdot dy \end{aligned} \quad (I-2)$$

après simplification on aura :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad (I-3)$$

qu'on peut l'écrire sous une forme vectorielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad (I-4)$$

avec $V = v(u, v, w)$

où sous une forme vectorielle la plus générale :

$$\frac{D \rho}{D t} + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (I-5)$$

avec D/Dt : la dérivée particulaire

I-1-3- EQUATIONS DE MOUVEMENT :

La connaissance des forces exercées par le fluide en mouvement est d'une importance considérable dans l'analyse et la conception des machines .

Notre but est d'établir les équations du mouvement régissant un écoulement par l'étude d'un élément fluide soumis aux différentes contraintes possibles dans le cas le plus général, en appliquant la théorie sur la mécanique des milieux continus.

On considère un élément fluide (fig I-2) soumis à une accélération $\vec{\gamma}$ et à la force de gravitation.

Projetons les contraintes sur les axes :

— suivant la direction des x :

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx \right) dy \cdot dz - \sigma_x dz \cdot dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right) dz \cdot dx - \tau_{yx} dx \cdot dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz \right) dy \cdot dx - \tau_{zx} dx \cdot dy = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz$$

(I-6)

La masse de l'élément fluide étant égale à $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, l'accélération $\vec{\gamma}$ et la force de gravitation sont données respectivement par :

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{pmatrix} ; \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} \quad (I-7)$$

L'application du second principe de NEWTON donne :

$$m \cdot \vec{\gamma} = \Sigma (\vec{F}_{ext})_i \quad (I-8)$$

Remplaçant $\vec{\gamma}$ et \vec{F}_{ext}_i par leurs expressions respectives :

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \frac{Du}{Dt} = \rho \cdot g_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \quad (I-9)$$

On procède de la même manière pour les deux autres directions (y et z) pour en fin trouver les équations du mouvement de manière très générale :

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = \rho \cdot g_x + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot g_y + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (I-10)$$

$$\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = \rho \cdot g_z + \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right)$$

On peut facilement prouver que $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$ en calculant le moment $\Sigma M_i = J \ddot{\alpha}$ avec J : moment d'inertie
 $\ddot{\alpha}$: accélération angulaire

En appliquant ce dernier résultat sur nos équations de mouvement on aura le système suivant :

$$\rho \cdot \frac{Du}{Dt} = \rho \cdot g_x + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot g_y + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (I-11)$$

$$\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = \rho \cdot g_z + \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right)$$

En ce point de l'analyse on a abouti à des équations de la mécanique pour tout les types de fluide (newtonniens ou non newtonniens).

— Position des equations de NAVIER-STOKES :

Pour un fluide newtonnien :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i = -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ \tau_{i,j} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{array} \quad (I-12)$$

En appliquant les relations (II-12) à notre système précédent (I-11) on trouve les équations de NAVIER-STOKS qui s'écrivent sous forme vectorielle:

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = -\nabla \cdot P + \mu \cdot \nabla^2 V_i + \mu \cdot \nabla (\nabla V) + \rho \cdot g_i \quad (I-13)$$

Et sous sa forme développée :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \cdot \frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \cdot \frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (I-14)$$

Les équations de NAVIER-STOKES ainsi obtenues forment un système compliqué d'équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire il n'existe à ce jour aucune méthode analytique globale qui permet de les résoudre, seul un nombre limité de cas typiques, pour des situations d'écoulement très particulières, ont été trouvés.

Les méthodes de résolution actuelle s'orientent de plus en plus vers des solutions approchées et numériques.

Les équations de NAVIER-STOCKS peuvent s'écrire sous forme vectorielle plus compacte comme :

$$\frac{DV}{Dt} = - \frac{\nabla P}{\rho} + F + g_i \quad (I-15)$$

$$\text{avec } F = \nu \cdot \left(\nabla^2 V + \frac{\nabla(\nabla \cdot V)}{3} \right) \quad \text{et } \nu = \mu/\rho$$

A ce stade de l'analyse, l'hypothèse d'un fluide non visqueux ($\mu=0$) est nécessaire, d'une part, pour détourner la difficulté des équations de NAVIER-STOCKS et d'autre part pour la suite de notre travail.

Cette hypothèse ramène les équations de NAVIER-STOCKS aux équations d'EULER qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \cdot \frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \cdot \frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (I-16)$$

Véctoriellement, elles prennent la forme :

$$\frac{D V}{D t} = - \frac{\nabla P}{\rho} + g_i \quad (I-17)$$

Ou bien encors

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \cdot \nabla \cdot v = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla(g \cdot z) \quad (I.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + g \cdot z \right) = v \cdot (\nabla \cdot v) - \frac{\nabla P}{\rho} \quad (I.19)$$

I-1-4- RELATIONS THERMODYNAMIQUES :

Soient deux particules fluides se trouvant respectivement en un point P et Q à un même instant .

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$T \cdot ds = du + P \cdot dv \quad (I.20)$$

L'enthalpie est définie comme suit :

$$h = u + p \cdot v \quad \text{d'où} \quad u = h - p \cdot v$$

en la dérivant et l'injectant dans (I-20) on aura:

$$T \cdot ds = dh - v \cdot dp \quad (I.21)$$

avec $v = 1/\rho$ l'expression (I-21) devient :

$$T \cdot ds = dh - dp/\rho \quad (I-22)$$

On suppose une fonction scalaire f quelconque définie dans un repère (x, y, z) orthonormé de vecteur unitaire $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. on peut écrire la variation de f comme:

$$df = (d\vec{r} \cdot \nabla) \cdot f = d\vec{r} \cdot (\nabla \cdot f) \quad (I.23)$$

$$\text{avec } \nabla = \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$$

En remplaçant les expressions développés vectoriellement de ds , dh et dp dans l'équation (II-22) tel que:

$$\begin{aligned} ds &= d\vec{r} \cdot \nabla s \\ dh &= d\vec{r} \cdot \nabla h \\ dp &= d\vec{r} \cdot \nabla p \end{aligned} \quad (I.24)$$

$$\text{on obtient } d\vec{r} \cdot (T \cdot \nabla s - \nabla h + \nabla p / \rho) = 0 \quad (I.25)$$

T et ρ sont des variables scalaires et les vecteurs ∇s , ∇h et ∇p représentent les vecteurs du champs scalaire s, h et p au point P à l'instant t . Ces gradients ont des valeurs définies et ne dépendent pas de la direction du vecteur $d\vec{r}$ ce qui rend la relation (I-25) indépendante

d'où:

$$\begin{aligned} T \cdot \nabla s - \nabla h + \nabla p / \rho &= 0 \\ - T \cdot \nabla s + \nabla h &= \nabla p / \rho \end{aligned} \quad (I.26)$$

En injectant (I-26) dans nos équations du mouvement obtenu

précédemment, on trouve:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = T \cdot \nabla s - \nabla h - \nabla(g \cdot z) \quad (I.27)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = T \cdot \nabla s - \nabla(h + g \cdot z)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla(h + v^2/2 + g \cdot z) = \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \vec{V}) + T \cdot \nabla s \quad (I.28)$$

avec :

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla v^2 - \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \vec{V})$$

On note par H la quantité $(h + g \cdot z + v^2/2)$ qu'on appelle enthalpie totale. L'équation de mouvement devient :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla H = \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \vec{V}) + T \cdot \nabla s \quad (I.29)$$

I.15 EQUATION D'ETAT :

Dans tous ce qui va suivre on assimilera notre fluide à un gaz parfait.

D'après le premier principe de la thermodynamique on a:

$$dh - dp/\rho = T \cdot ds \quad (I.30)$$

$$\text{avec } C_p \cdot dT = dh$$

Assumant l'hypothèse d'un écoulement adiabatique on aura:

$$P = \rho RT \text{ et } \rho^{\gamma-1} T = \text{constante}$$

$$\text{d'où l'équation (I-30): } T \cdot ds = dh - R dT - R T dp/\rho \quad (I.31)$$

En divisant par T on obtient :

$$(C_p - R) \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = ds \quad (I.32)$$

or $R = C_p - C_v$ d'où $R/C_p = 1 - 1/\gamma$ et $C_p/R = \gamma/(\gamma - 1)$ (a)

En ppliant (a) dans (I-32) et on trouve :

$$\frac{R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = ds \quad (I.33)$$

Après une intégration on obtient :

$$\frac{R}{\gamma - 1} \ln T - R \ln \rho = s + C^{te} \quad (I.34)$$

d'où

$$\frac{T^{\gamma/(\gamma-1)}}{\rho^\gamma} = \alpha e^s \quad \text{avec } \alpha = C^{te}$$

$$\beta \cdot T^{1/(\gamma-1)} \cdot e^{-(s/R)} = \rho \quad \text{or } dh = C_p \cdot dT \quad h = C_p T + C^{te}$$

et on trouve ainsi l'expression de l'équation d'état :

$$\rho = A \cdot h^{1/(\gamma-1)} \cdot e^{-(s/R)} \quad (I.35)$$

I.2) DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS PRINCIPALES DANS UN REPERE RELATIF :

I.2.1 INTRODUCTION :

Toutes les équations développées précédemment sont étudiées dans un repère absolue mais pour des raisons de simplicité il est avantageux de traiter l'étude d'un écoulement dans un repère relatif aux parties en rotation autour de l'axe de la machine .

La vitesse relative est donnée par la relation :

$$\vec{W} = \vec{V} - \vec{\omega} \cdot \vec{r} \quad (I.36)$$

où r est la distance de l'axe de la machine à un point considéré, les équations seront écrites en supposant que ce mouvement d'entraînement s'effectue à vitesse angulaire ω constante (voir fig.I-3.)

En plus de l'hypothèse d'un fluide non visqueux ($\mu=0$), on supposera que l'écoulement est stationnaire par rapport au repère relatif dans le système de coordonnées (r, z, θ) , les équations de continuité, de mouvement et d'énergie s'écrivent alors:

1.2.2 EQUATION DE CONTINUITÉ :

L'équation de continuité est donnée par :

$$\nabla (\rho \cdot \vec{W}) = 0 \quad (I.37)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot W_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot W_z) = 0 \quad (I.38)$$

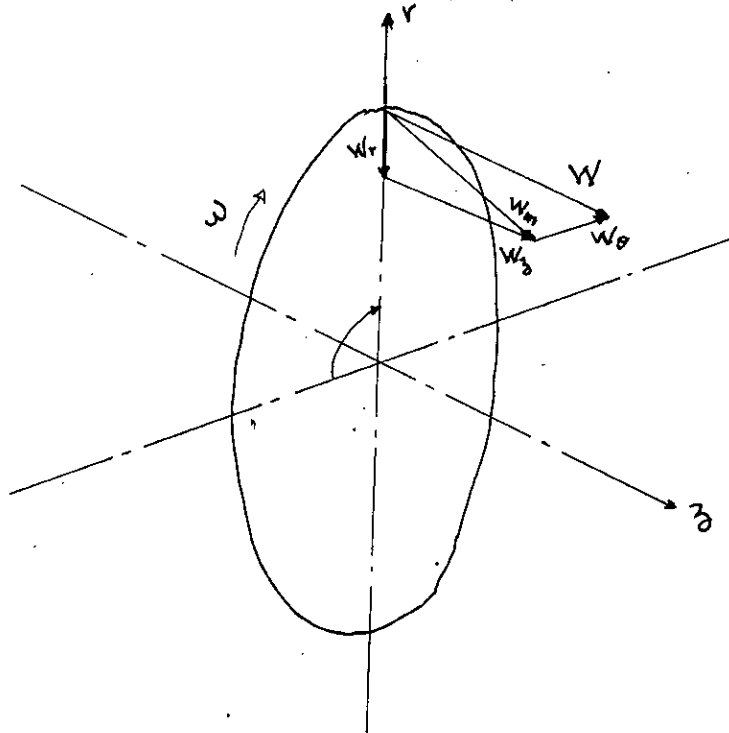


Figure I-3

1.23 EQUATION DE MOUVEMENT :

Tout écoulement stationnaire non visqueux est régi par mouvement :

l'équation de $2\omega \cdot \vec{W} - \vec{W} \cdot (\nabla \wedge \vec{W}) = -\nabla I + T \nabla s$ (I.39)

La projection de l'équation vectorielle sur les différentes axes donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{W_u}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot W_u) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + 2\omega r \right) + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{W_r}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot W_u) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + 2\omega r \right) - W_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \\ -W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \cdot \frac{\partial s}{\partial z} \end{array} \right. \quad (I.40)$$

or $W_u = V_u + \omega \cdot r$ alors on peut mettre le système (I-40) sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} -W_u \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right) + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial s}{\partial r} \quad (1) \\ \frac{W_r}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right) - W_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{T}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \quad (2) \\ -W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \cdot \frac{\partial s}{\partial z} \quad (3) \end{array} \right. \quad (I-41)$$

1.2.4 EQUATION D'ENERGIE :

Elle est donnée par: $\vec{W} \cdot \nabla \cdot I = q_0$ (I.4.2)

où q_0 est la chaleur qui reçoit le fluide par unité de mesure d'une source extérieure. Cette équation a été obtenue en multipliant scalairement par \vec{W} l'équation de mouvement d'un fluide, et ceci est donné par:

$$W_r \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial I}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} = q_0 \quad (I.4.3)$$

1.3 DECOMPOSITION DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL : (modélisation de wu)1.3.1 INTRODUCTION :

La résolution numérique du système d'équation gerant l'écoulement étudié est un problème très complexe vu le caractère tridimensionnel, c'est pourquoi on a cherché à représenter et étudier l'écoulement dans les turbomachines à l'aide d'un modèle de décomposition de l'écoulement en deux écoulements bidimensionnels. C'est ainsi qu'ont été introduites les notions d'écoulement en grilles d'aube et d'écoulement méridien.

Ces notions ont été établies et développées de façon rigoureuse par wu.

La technique consiste à considérer deux types d'écoulements le long de la surface de courant qui en amont de la machine s'appuient respectivement sur des cercles centrés sur l'axe (surface s1) et sur des rayons perpendiculaires à l'axe (surface s2) (fig I-4)

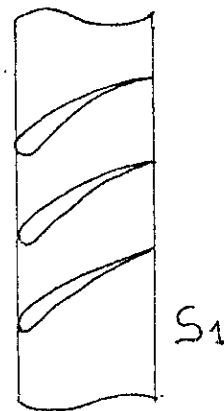
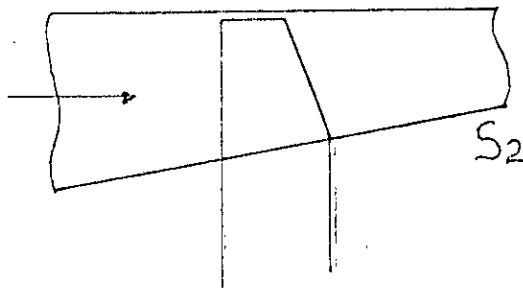
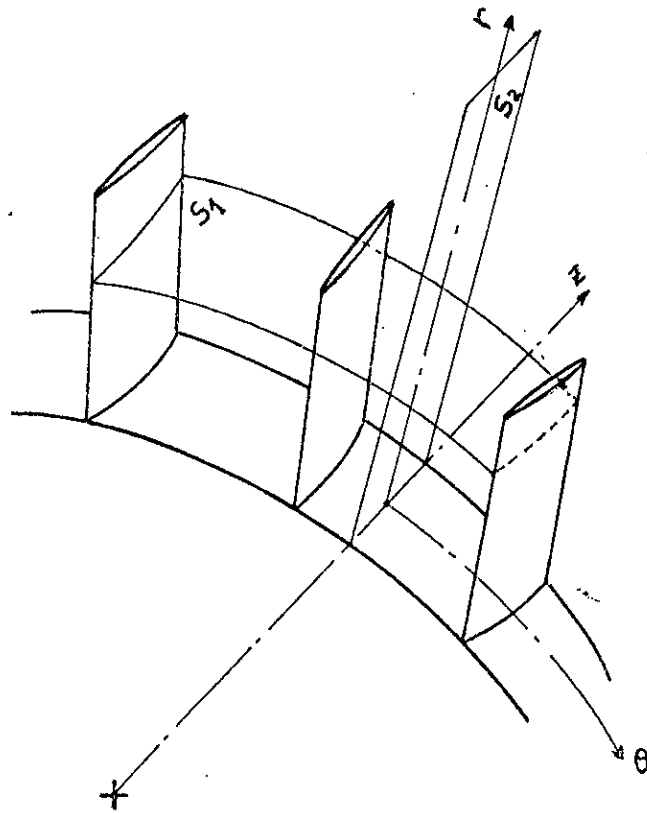


Figure. I.4

1.3.2 MODELE D' ECOULEMENT MERIDIONAL:

L'intersection des surfaces de type s_1 avec les aubages définit une grille de profils autour desquels un écoulement bidimensionnel peut être étudié .

Ces surfaces s_1 sont généralement supposées de révolution, une telle hypothèse peut être assez restrictive, mais il paraît difficile de s'en affranchir sans compliquer sérieusement le problème.

En générale les équations écrites précédemment n'ont pas des solutions simples et pour l'analyse de l'écoulement moyen, elles sont résolues seulement sur la surface moyen de courant.

Si cette surface est définie par :

$$S(r, \theta, Z) = \theta$$

et \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface alors :

$$\vec{n} \cdot \nabla S = 0$$

d'où

$$\frac{n_r}{\frac{\partial S}{\partial r}} = \frac{n_\theta}{\frac{\partial S}{\partial \theta}} = \frac{n_z}{\frac{\partial S}{\partial z}} \quad (I.44)$$

Pour simplifier les choses, on assume que la surface à une seule valeur en θ (pour θ donnée):

$$\theta = \theta(r, z) \quad (I.45)$$

Donc les deux coordonnées r et z sont suffisantes pour définir n'importe quel point de la surface, et pour retrouver la coordonnée θ on utilise l'équation (I-45).

Si $\frac{\partial \bar{q}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$

sont des dérivées partielles prises le long de la surface de courant alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{q}}{\partial r} &= \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{r \cdot n} \frac{\partial q}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} &= \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{r \cdot n} \frac{\partial q}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (I.46)$$

La dérivée spéciale $\frac{\partial \bar{q}}{\partial r}$ est la dérivation de q suivant r sur la surface de courant, sachant la valeur de z , alors que $\frac{\partial q}{\partial r}$ est la variation de q suivant r , sachant la valeur de z et θ .

Les dérivées spéciales deviennent des dérivées partielles simples que dans le cas de la symétrie axiale.

En introduisant les dérivées spéciales dans nos équations régissant l'écoulement sur la surface de courant on aura :

1.3.2.1 EQUATION DE CONTINUITÉ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot \bar{w}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot \bar{w}_z) = - \frac{\rho}{r \cdot n} (n_r \frac{\partial w}{\partial \theta} + n_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + n_z \frac{\partial w}{\partial \theta}) = \rho \cdot C(r, z) \quad (I.47)$$

1.3.2.2 EQUATION DE MOUVEMENT :

$$\begin{aligned}- \frac{w_u}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_u) \right) + w_z \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) &= - \frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial s}{\partial r} + F_r \\ \frac{w_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_u) - \frac{w_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot v_u) + F_u & \\ - w_z \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{w_u}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot v_u) &= - \frac{\partial I}{\partial z} + T \cdot \frac{\partial s}{\partial z} + F_z\end{aligned}\quad (I.48)$$

où $\vec{F} = \frac{1}{r \cdot \rho \cdot n} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$

1.3.2.3 EQUATION D'ENERGIE :

Pour un processus adiabatique l'equation d'energie prend la forme:

$$W_r \cdot \frac{\overline{\partial s}}{\partial r} + W_z \cdot \frac{\overline{\partial s}}{\partial z} = 0 \quad (I.49)$$

et
$$T \cdot (W_r \cdot \frac{\overline{\partial s}}{\partial r} + W_z \cdot \frac{\overline{\partial s}}{\partial z}) = 0 \quad (I.50)$$

Pour un fluide non visqueux, le vecteur force \vec{F} est normal à la surface moyenne de courant S , et donc il est normal à la vitesse relative \vec{W} :

$$W_r F_r + W_z F_z + W_\theta F_\theta = 0 \quad (I.51)$$

Et cela nous permet d'introduire deux angles lesquels définissent la forme locale de la surface de courant par :

$$\text{tg } \lambda = \frac{n_r}{n_\theta} = \frac{F_r}{F_\theta} \quad (I-52)$$

$$\text{tg } \mu = \frac{n_z}{n_\theta} = \frac{F_z}{F_\theta}$$

voir figure (I-5)

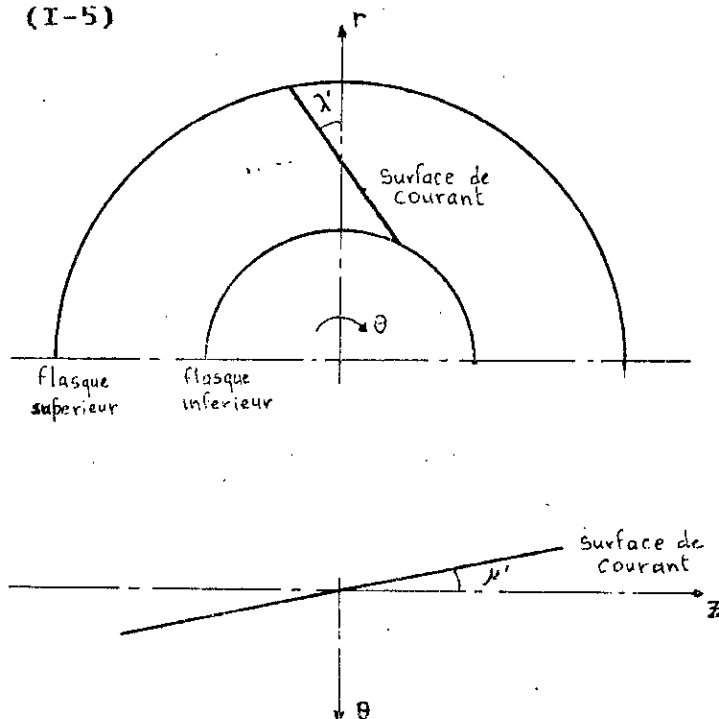


Figure I-5

Les trois composantes de la vitesse relative seront donc reliées par l'équation:

$$W_u = -W_r \cdot \text{tg } \lambda - W_z \cdot \text{tg } \mu \quad (\text{I-53})$$

C'est la condition géométrique qui permet au fluide de rester sur la surface moyenne de courant.

Afin d'obtenir une équation pour la fonction de courant, W_u introduit un facteur d'intégration B qui ramène l'équation de continuité à:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot B \cdot r \cdot W_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot r \cdot B \cdot W_z) = 0 \quad (\text{I-54})$$

Après calcul l'équation précédente (I-54) peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{W_r}{B} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{W_z}{B} \frac{\partial B}{\partial z} = -C(r, z) \quad (\text{I-55})$$

Le facteur B est proportionnel à l'épaisseur angulaire locale de la surface de courant, dans l'analyse de l'écoulement moyen, on suppose que l'épaisseur de la surface de courant moyenne soit proportionnelle à la largeur du canal entre aube. Ainsi le facteur B sera défini comme :

$$B = \frac{\text{largeur circonférentielle du canal entre aube}}{\text{pas d' aube (blade pitch)}}$$

R M Q : Dans une conduite, où il n'y a pas d'aube le facteur B sera égale à l'unité.

$$\frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial y^2} = \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial y} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) + \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial x} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial x} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) + \frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_x} \left(\frac{\overline{\partial I}}{\partial y} + T \cdot \frac{\overline{\partial S}}{\partial y} - \frac{W_u}{r} \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (r \cdot V_u) - F_y \right) \quad (\text{I-60})$$

$$\frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial y^2} = \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial y} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) + \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial x} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial x} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) + \frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_y} \left(\frac{\overline{\partial I}}{\partial x} + T \cdot \frac{\overline{\partial S}}{\partial x} - \frac{W_u}{r} \frac{\overline{\partial}}{\partial x} (r \cdot V_u) - F_x \right) \quad (\text{I-61})$$

Dans une grille d'aube, la nouvelle géométrie de surface de courant est définie par les deux angles λ et μ où :

$$\text{tg } \lambda = F_y / F_u \quad \text{et} \quad \text{tg } \mu = F_x / F_u$$

Les trois composantes de la vitesse relative sont reliées par la formule (I-53).

R M Q : on notera que

$$\frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_x} \left(\frac{\overline{\partial I}}{\partial y} + T \cdot \frac{\overline{\partial S}}{\partial y} - \frac{W_u}{r} \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (r \cdot V_u) - F_y \right) = \frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_y} \left(\frac{\overline{\partial I}}{\partial x} + T \cdot \frac{\overline{\partial S}}{\partial x} - \frac{W_u}{r} \frac{\overline{\partial}}{\partial x} (r \cdot V_u) - F_x \right)$$

Ce qui justifie la résolution d'une seule équation des équations principales de W_u pour obtenir la solution de la fonction de courant

D'une façon générale l'équation principale de W_u peut être exprimée par :

Les composantes F_r et F_z des forces agissantes sur les aubes sont nulles dans le cas d'une conduite (pas d'aube) et dans le cas d'une grille d'aube, leurs expressions sont :

$$\begin{cases} F_r = F_u \cdot \operatorname{tg} \lambda \\ F_z = F_u \cdot \operatorname{tg} \mu \end{cases} \quad (\text{I-59})$$

où F_u est donnée par la deuxième équation de mouvement (I-48).

Les deux formes de l'équation principale de Wu ont des solutions qui satisfaisent l'équation de continuité, deux des trois équations de mouvement et l'équation d'énergie, et si on rajoute l'équation de la variation d'entropie alors la solution de la fonction de ligne de courant satisfait les trois équations de mouvement.

Il sera donc possible d'utiliser l'une des deux formes de l'équation principale pour obtenir une solution qui satisfasse toutes les équations gouvernant un écoulement réversible sur la surface de courant moyenne.

L'analyse de l'écoulement est souvent réalisée dans un système de coordonnées radiales et axiales, mais pour certains problèmes il est préférable d'opérer une rotation de système d'axe d'un angle θ (voir fig I-6).

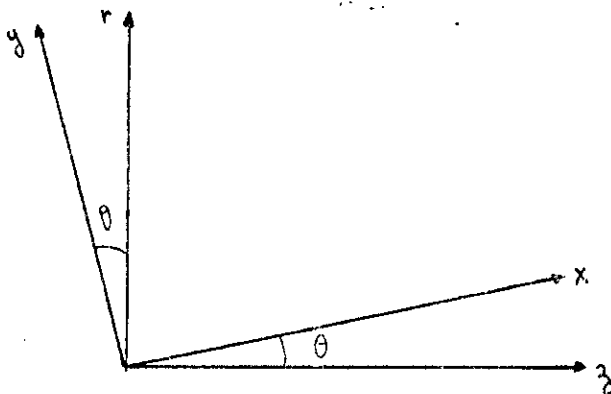


Figure I-6

Les deux formes de l'équation principale sont alors:

$$\frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial y^2} = \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial y} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) + \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial x} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial x} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) +$$

$$\frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_x} \left(\frac{\overline{\partial I}}{\partial y} + \Gamma \cdot \frac{\overline{\partial S}}{\partial y} - \frac{W_u}{r} \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (r \cdot V_u) - F_y \right)$$

(I-60)

$$\frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial y^2} = \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial y} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) + \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial x} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial x} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) +$$

$$\frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_y} \left(\frac{\overline{\partial I}}{\partial x} + \Gamma \cdot \frac{\overline{\partial S}}{\partial x} - \frac{W_u}{r} \frac{\overline{\partial}}{\partial x} (r \cdot V_u) - F_x \right)$$

(I-61)

Dans une grille d'aube, la nouvelle géométrie de surface de courant est définie par les deux angles λ et μ où :

$$\text{tg } \lambda = F_y / F_u \quad \text{et} \quad \text{tg } \mu = F_x / F_u$$

Les trois composantes de la vitesse relative sont reliées par la formule (I-53).

R M Q : on notera que

$$\frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_x} \left(\frac{\overline{\partial I}}{\partial y} + \Gamma \cdot \frac{\overline{\partial S}}{\partial y} - \frac{W_u}{r} \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (r \cdot V_u) - F_y \right) =$$

$$\frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_y} \left(\frac{\overline{\partial I}}{\partial x} + \Gamma \cdot \frac{\overline{\partial S}}{\partial x} - \frac{W_u}{r} \frac{\overline{\partial}}{\partial x} (r \cdot V_u) - F_x \right)$$

Ce qui justifie la résolution d'une seule équation des équations principales de W_u pour obtenir la solution de la fonction de courant .

D'une façon générale l'équation principale de W_u peut être exprimée par :

$$\frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial^2 \psi}}{\partial y^2} = q(x, y)$$

avec

$$q(x, y) = \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial x} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial x} (\ln(r \cdot \rho \cdot \beta)) + \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial y} \cdot \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (\ln(r \cdot \rho \cdot \beta)) + \frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_x} \left(\frac{\overline{\partial \alpha}}{\partial y} + T \cdot \frac{\overline{\partial S}}{\partial y} - \frac{W_u}{r} \frac{\overline{\partial}}{\partial y} (r \cdot V_u) - \gamma \right) \quad (I-62)$$

où α, β et γ sont données suivant les deux cas qui se présentent dans notre étude :

— En amont et en aval de la roue :

$$\begin{cases} \alpha = H \\ \beta = 1 \\ \gamma = \theta \text{ (pas d'aube) } \end{cases}$$

— Dans la roue :

$$\begin{cases} \alpha = I = H - \omega \cdot r \cdot V_u \\ \beta = B \\ \gamma = F_y = F_u \cdot \text{tg } \lambda \end{cases}$$

RECAPITULATION :

Pour l'étude de notre écoulement méridional on a émis quelques hypothèses simplificatrices :

- l'écoulement étant supposé stationnaire.
- l'écoulement d'un fluide parfait ($\mu = 0$).
- évolution isentropique, ce qui supprime la variation de l'entropie.
- écoulement axisymétrique, les dérivées spéciales deviennent des dérivées partielles ordinaires.

La prise en compte de ces hypothèses permet d'écrire l'équation principale de Wu comme :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = q(x,y)$$

avec

$$q(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\ln(r \cdot \rho \cdot B)) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\ln(r \cdot \rho \cdot B)) +$$

$$\frac{\rho \cdot r \cdot B}{W_x} \left(\frac{\partial I}{\partial y} + \Gamma \cdot \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{W_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial y} (r \cdot V_u) - F_r \right)$$

(I-63)

CONDITIONS AUX LIMITES :

La fonction de courant, solution de l'équation différentielle doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

-soit ψ_1 et ψ_2 les valeurs de la fonction de courant respectivement sur le flasque avant (carter) et le flasque arrière (moyeu) .On doit avoir:

$$\psi_2 - \psi_1 = q$$

où q est le débit massique .

De plus on assumera l'hypothèse d'un écoulement uniforme à l'infini aval et amont de la roue .

I.3.3 ECOULEMENT AUBE A AUBE :

La position d'un point sur la surface si est décrite par ses coordonnées m et θ (voir figure I-7)

On a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial m} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} \\ \vec{W} = i W_u + j W_m \\ \frac{W_m}{W_u} = \tan \beta = r \frac{d\theta}{dm} \\ W_m^2 = W_z^2 + W_r^2 \end{array} \right. \quad (I.64)$$

L'équation de continuité est alors:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot r \cdot W_u) + \frac{\partial}{r \partial r} (\rho \cdot r \cdot W_m) + \rho \cdot W_m \cdot K_n = 0 \quad (I.64.A)$$

avec K_n : courbure de la ligne méridienne PP' qui se met sous la forme

$$K_n = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial m}$$

où b représente la hauteur des aubages, qui ne dépend pas de m , et est petite devant le rayon. L'équation (I-64.A) devient:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot b \cdot W_u) + \frac{\partial}{\partial m} (\rho \cdot b \cdot W_m) = 0 \quad (I.65)$$

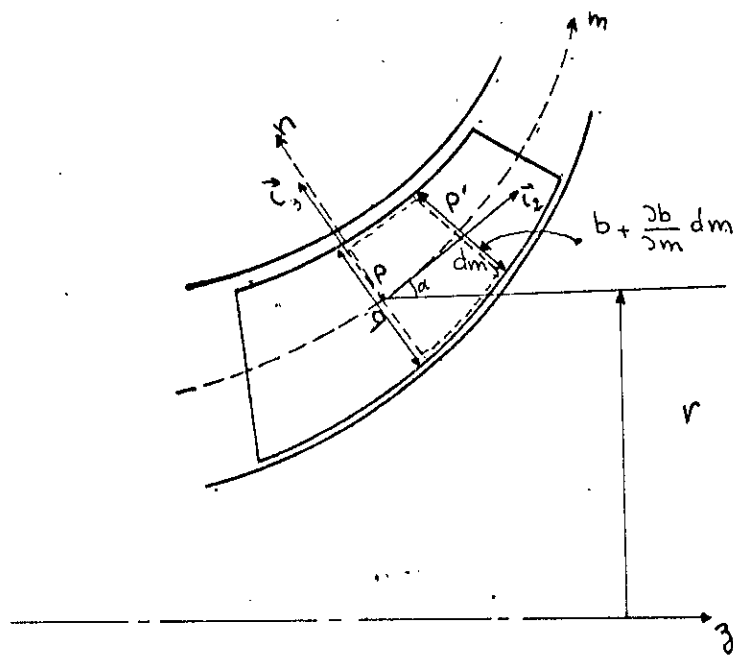
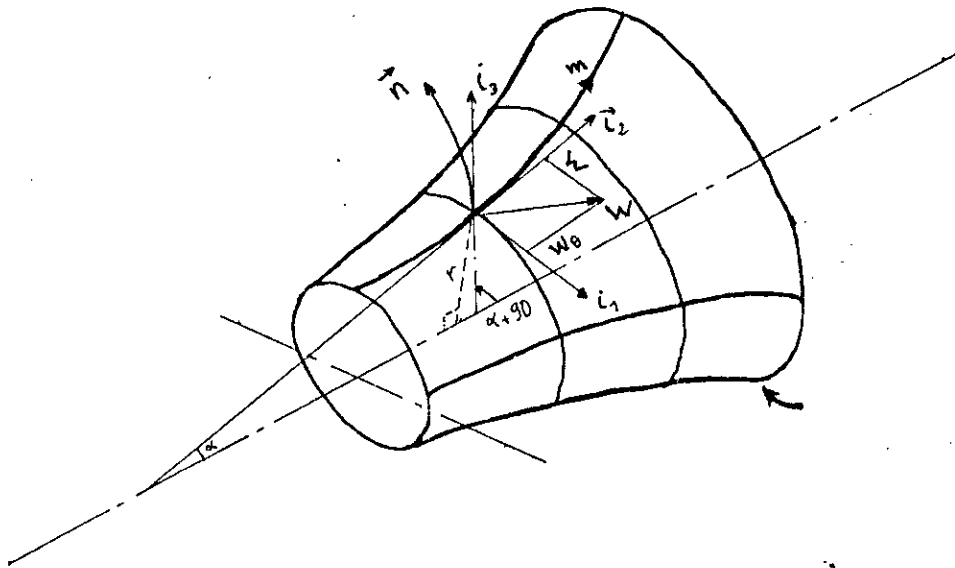


Figure I-7.

Introduisant la fonction de courant ψ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \rho \cdot B \cdot W_u \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = - r \cdot \rho \cdot B \cdot W_m \end{array} \right. \quad (I-66)$$

I.3.3.1 EQUATION FONDAMENTALE :

La vitesse W doit vérifier l'équation de mouvement simplifiée, en coordonnées (m, θ, n) avec n normale en P à la surface s_1 , celle ci s'écrit de manière générale:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot W + 2 \cdot \omega = i_1 \left(\frac{\partial W_m}{\partial n} - W_m \cdot K_m \right) + i_2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial n} (r \cdot W_u + \omega \cdot r^2) \right) \\ + i_3 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial m} (r \cdot W_u + \omega \cdot r^2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (I-67)$$

avec

$$K_m = \frac{1}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial n} \quad \text{courbure de la surface } s_1 \text{ au point } P \text{ (fig I-7)}$$

La condition imposée sur \vec{i}_1 est automatiquement vérifiée dans le cas d'un nombre d'aube infiniment grand (donc des aubes infiniment minces), la quantité $(r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)$ reste constante le long de toute normale n entre deux aubes.

Enfin, la projection sur \vec{i}_3 de la relation (I-67) s'écrit :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial m} (r \cdot W_u) \right) = 2 \cdot \omega \cdot \frac{\partial r}{\partial m} \quad (I-68)$$

En portant dans (I-66) les expressions (I-66), et comme b et r ne change pas dans la direction tangentielle θ , on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{b \cdot r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + r \cdot \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{b \cdot r} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{1}{b \cdot r} \frac{\partial r}{\partial m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2 \cdot \omega \cdot r \frac{\partial r}{\partial m} \quad (I.68)$$

Pour la suite de l'étude, on utilisera la fonction de courant adimensionnelle Y définie par:

$$Y = - \frac{\psi}{q} \quad (I.69)$$

où q désigne le débit massique traversant la roue entre deux aubes adjacentes et deux surfaces si distante de $\Delta n = 1$.

Celon (I-66) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial m} = - \frac{\rho \cdot b \cdot W_u}{q} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{r \cdot \rho \cdot b \cdot W_m}{q} \end{array} \right. \quad (I.70)$$

et avec $\frac{\partial r}{\partial m} = \sin \alpha$ (voir figure 1) l'équation (I-68) devient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} - \frac{1}{r^2 \cdot \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta^2} + \left[\frac{\sin \alpha}{r} - \frac{1}{\rho \cdot b} \frac{\partial}{\partial m} (b \cdot \rho) \right] \cdot \frac{\partial \psi}{\partial m} = \frac{2 \cdot b \cdot \rho \cdot \omega}{q} \sin \alpha \quad (I.71)$$

CONDITIONS AUX LIMITES :

La fonction de courant adimensionnelle Y , solution de l'équation différentielle (I-71) doit vérifier les conditions aux limites du domaine d'étude. Soit une surface de courant si définie par la relation autour de l'axe de la machine d'une ligne de courant meridienne. Celle ci se trouve découpée périodiquement par les aubes dans la direction périphérique en domaine élémentaire tels que le montre la fig (I.8).

Compte tenu de la définition de Y et si Y_1 et Y_2 sont les valeurs de y correspondant respectivement aux limites BC et FG du domaine élémentaire, on doit avoir:

$$Y_2 - Y_1 = \frac{\text{debit masse passant entre BC et FG}}{q} = 1$$

On posera $Y_1=0$ sur BC et $Y_2=1$ sur FG. Ces conditions sont évidemment complètement équivalentes aux conditions de tangence des vecteurs vitesses à la surface des aubes.

Loin en l'amont AH et loin en aval DE, l'écoulement est supposé uniforme la connaissance de la vitesse \vec{W} nous permet d'avoir les valeurs de la fonction de courant sur ces frontières .

Entre AB et HG et entre CD et FE, la condition de périodicité se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{HG} = Y_{AB} + 1 \\ Y_{FE} = Y_{CD} + 1 \end{array} \right.$$

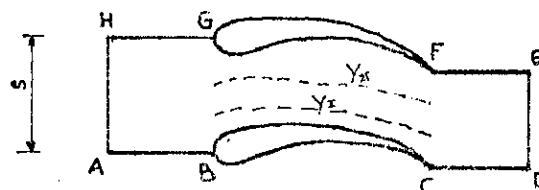


Figure I-8

CONDITION DE KUTTA - JOUKOWSKI :

En plus des conditions aux limites et des conditions de périodicité de l'écoulement, la condition de KUTTA-JOUKOWSKI doit être satisfaite. Cette dernière peut s'exprimer de la façon suivante:

Pour un écoulement parfait autour d'un profil dont l'intrados et extrados se terminent suivant une tangente commune, la ligne de courant issue du bord de fuite doit quitter ce dernier suivant cette tangente.

Vérifier la condition de KUTTA-JOUKOWSKI sous cette forme pose un problème dans le cas de profil à bord arrondis, ou en dièdre. La position du point d'arrêt n'est pas connue, une petite erreur commise sur sa détermination peut en effet engendrer une grande alteration des résultats des calculs.

Il est alors préférable de remplacer cette condition par une symétrie de la répartition des pressions ou des vitesses relatives sur l'extrados et l'intrados de profil le plus près possible du bord de fuite.

CHAPITRE III

II) ETUDE DES PERTES :

II_1) INTRODUCTION :

Toutes études rigoureuses d'un écoulement dans une roue de turbomachine doit comprendre une étude sur les pertes .

Leurs connaissances en grandeurs permettent une meilleure approche de l'écoulement réel, et par conséquent une meilleure conception des machines .

C'est dans ce but que plusieurs recherches et méthodes ont été élaboré, nous citons entre autre :

-La methode de C.R.SODERBERG qui est le premier a avoir étudié et élaboré un modèle donnant les pertes dans une machine .

-La methode de D.G.AINLEY qui a pris la relais et a amélioré les travaux du modèle de ce dernier .

Ce sont ces deux modèles qui seront développés par la suite .

On citera également les travaux de :

W.R.HOWTHORNE, O.ZWEIFEL, H.D.EMMAT, M.H.VAVRA, N.VAN LEE, k.W.TODD, etc..

II_2 DIFFERENTS PERTES EXISTANT DANS UNE ROUE :

En général, les pertes occasionnées dans une roue de turbomachine sont :

II-2-1 PERTES PAR PROFIL :

Vue le caractère géométrique et physique de la roue (aube) les pertes par profil sont générées par l'augmentation et l'accroissement de la couche limite .

II-2-2 PERTES PAR ECOULEMENT SECONDAIRE :

Tout écoulement en dehors de l'écoulement principal (sain) est un écoulement secondaire (couche limite pariétale, couche limite sur les parois, sillages, vortex , tourbillons etc....)

Elles sont responsable de 30 à 50% de la totalité des pertes par pression dans la roue .

II-2-3 PERTES PAR FUITE :

Les défauts de fabrication, la mauvaise étanchéité, etc... font qu'une petite quantité de l'écoulement s'échappe de la machine .

II-2-4 ONDES DE CHOC :

Elles ne sont occasionnées que dans le cas des écoulements supersoniques et transsoniques .

II-3 EXPRESSION DU RENDEMENT D UNE TURBOMACHINE :

Les travaux de SODERBERG ainsi qu'AINLEY ont abouti respectivement a élaboré:

- un coefficient de perte de l'enthalpie :

$$\xi = \frac{h_2 - h_{2s}}{V_2^2 / 2}$$

où : V_2 : vitesse absolue à la sortie
 h_{2s} : enthalpie isentropique
 h_2 : enthalpie statique

- un coefficient de perte de pression de stagnation: $Y = \frac{p_{1T} - p_{2T}}{p_{2T} - p_2}$

où l'indice T indique la pression totale.

Ces deux coefficients sont fonction de :

Re : nombre de REYNOLDS

i : angle d'incidence

ϵ : déflexion

s/l : rapport espace-corde

H/l : rapport hauteur-corde axiale

t/l : rapport épaisseur-corde

La figure (II-1) montre les paramètres caractérisant une aube .

b : corde axiale

l : corde

s : espace

H : envergure (hauteur)

α_1 : angle d'entrée du fluide

α_2 : angle de sortie du fluide

α_1', α_2' : angles caractérisant l'aube .

γ' : déviation

voir figures (II.1) et (II.2)

Dans le cas d'une turbine, le rendement est définie comme :

$$\eta_T = \frac{W \text{ (réel)}}{W \text{ (isentropique)}}$$

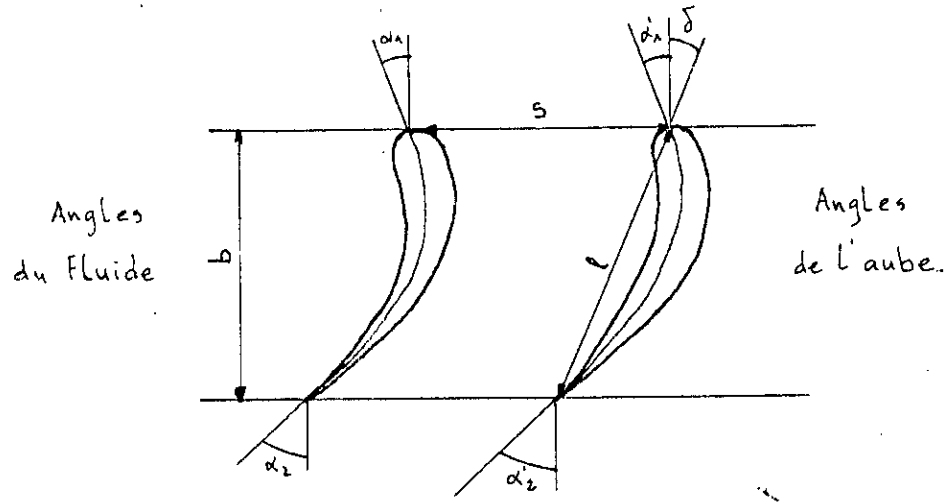


Figure II - 1

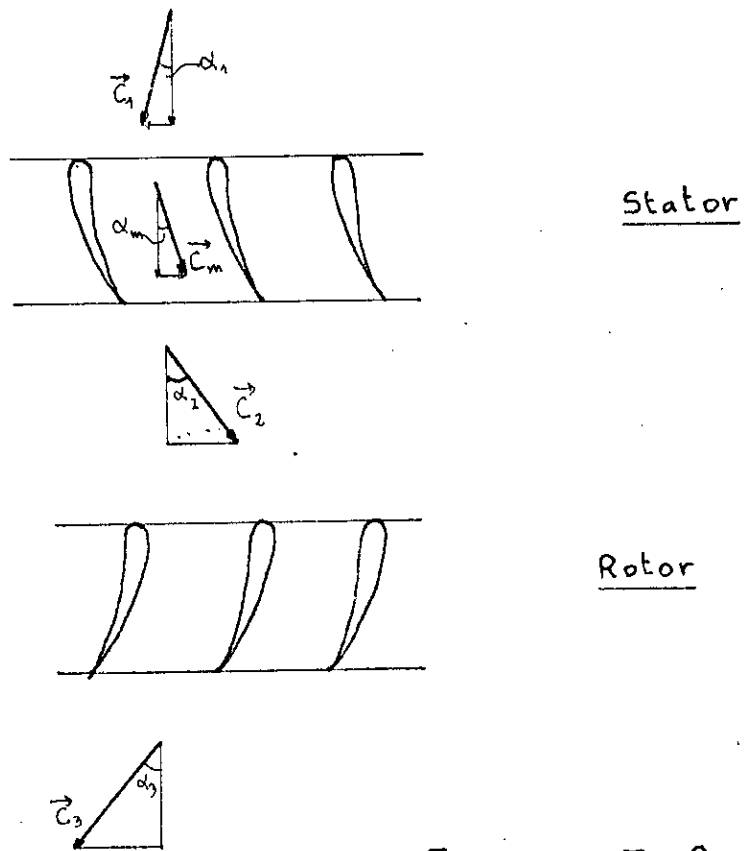


Figure II. 2.

En faisant intervenir les coefficients de pertes, l'expression du rendement prend la forme :

$$\eta_T = \frac{1}{1 + (\xi_r \cdot w_3^2 + \xi_s \cdot v^2 / 2) / 2 \cdot (h_1 - h_3)}$$

où : ξ_r : coefficient de perte dans le rotor
 ξ_s : coefficient de perte dans le stator

Pour plus d'information voir référence [7].

II-4. DESCRIPTION DU MODELE DE SODERBERG :

SODERBERG a modélisé les pertes induites dans une machine en se basant sur le facteur:

$$\xi = f(s/l, Re, H/l, t/l, \epsilon)$$

Dans le but d'obtenir un rapport optimum s/l , pour différentes directions de l'écoulement à travers l'espace inter aube, plusieurs tests ont été effectués pour aboutir à une expression analytique donnant un coefficient:

$$C_y = 2 \cdot (s/b) \cdot (\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_1) \cos^2 \alpha_2 \quad (\text{II-1})$$

qui est égal approximativement à 0.8, tel que α_1 et α_2 sont données par le triangle des vitesses.

Pour SODERBERG, la valeur de ξ est donnée en variant deux paramètres essentiels : le nombre de Re et le rapport H/b
 - Pour un $Re \leq 10^5$ et $H/b = 3:1$ on définit un coefficient de perte nominale ξ qui est fonction de la déflexion (fig II-3)

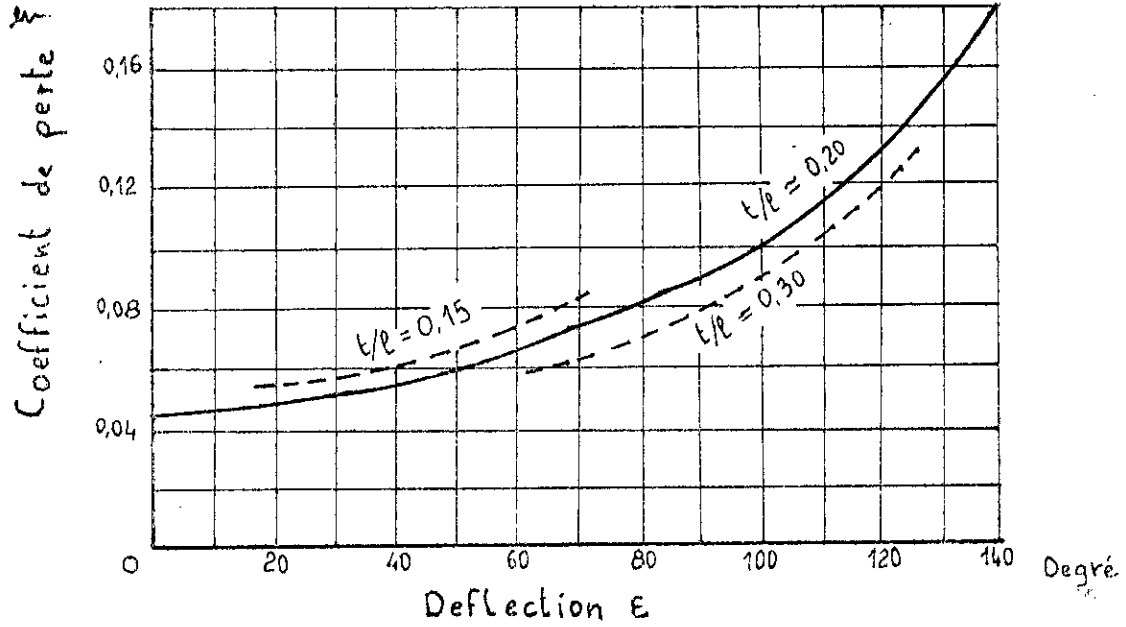
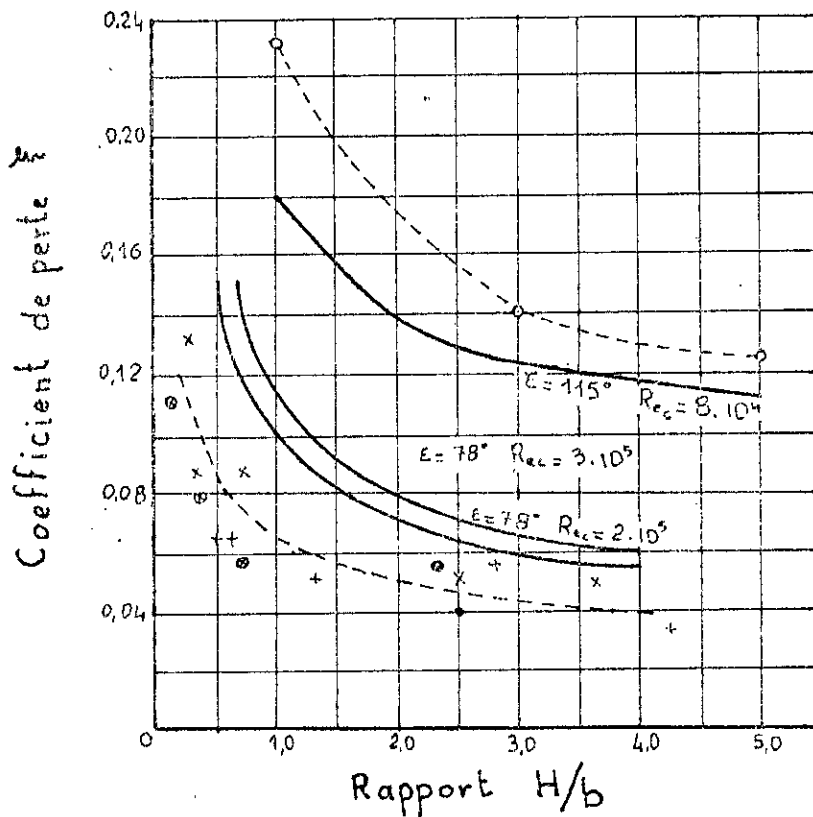


Figure II-3



Soderberg: ——— Re_c
 Scholz: o: $8 \cdot 10^5$; $\epsilon = 115^\circ$
 Kraft: \odot : $> 3 \cdot 10^5$
 +: $2 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5$ } $\epsilon = 76 - 80^\circ$
 x: $< 2 \cdot 10^5$
 \bullet : $> 3 \cdot 10^5$ } $\epsilon = 72,5^\circ$

Figure II-4

Ce coefficient est donnée avec l'hypothèse d'un angle d'incidence nul, ce qui permet d'avoir une déviation presque nulle c'est à dire qu'il y'a égalité entre l'angle de courbure et l'angle de déflexion.

- Pour un rapport $H/b > 3:1$ SODERBERG suggère un coefficient de perte sous la forme:

$$\xi'' = (1 + \xi') (0.975 + 0.075 \cdot b/H) - 1 \quad (\text{II-3})$$

- et pour un $Re > 10^5$ (Rec au col), il a proposé un autre coefficient :

$$\xi''' = \left(\frac{10^5}{Re} \right) \cdot \xi'' \quad (\text{II-4})$$

$$\xi''' = \left(\frac{10^5}{Re} \right) \left[(1 + \xi') (0.975 + 0.075 \cdot b/H) - 1 \right] \quad (\text{II-5})$$

ou $\xi' = f(\epsilon)$

Il faut faire la remarque que SODERBERG a posé son médèle sur les pertes. en regroupant toutes les pertes (pertes par profil, écoulement secondaire, pertes par fuite etc..) dans un seul coefficient qui affecte le rendement énergétique de la machine.

W.R.HOWTHORNE a repri le même modèle mais en séparant chaque perte a part et il a trouvé les relations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi_p \cdot (1 + 3.2 \cdot b/H) \\ \xi_p = 8.025 (1 + (c/90)^2) \\ \xi_c = \xi - \xi_p \end{array} \right. \quad (II_6)$$

où ξ_p : pertes par écoulement secondaire
 ξ_c : pertes par fuite
 ξ : pertes totales

H.KRAFT et N.SCHOLZ ont travaillé sur le modèle de SODERBERG, leurs travaux sont illustrés sur le figure II-4.

Il est à signaler que le modèle de SODERBERG présente quelque inconvénient, à savoir:

- limitation de l'angle de déflexion
- $\xi' = f(c)$ dépend étroitement du rapport épaisseur-corde t/l
- l'épaisseur de bord de fuite, qui est un paramètre dans la détermination des pertes, n'a pas d'effet.

Compte tenu de ces inconvénients, ce modèle fait l'objet de plusieurs critiques, mais il faut souligner que ce modèle donne la valeur du rendement énergétique à 3% près avec une large plage du nombre de REYNOLDS et du rapport H/b .

Ce type de modèle est utilisé, en général, pour une estimation rapide des performances d'une machine.

II-5) DESCRIPTION DU MODELE D'AINLEY :

AINLEY a proposé une formulation semi-empirique, pour l'étude des pertes avec l'hypothèse d'un angle d'incidence nul .

Il a proposé, pour les pertes par profil dans le cas d'une turbine, la relation suivante :

$$Y_p = (Y_{ps} + (\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^2 (Y_{pr} - Y_{ps})) (\frac{t/l}{0.2})^{(\alpha_1/\alpha_2)} \quad (II-7)$$

avec Y_{ps} : perte par profil dans le stator, donnée par le graphe (fig II-5)
 Y_{pr} : perte par profil dans le rotor, donnée par le graphe (fig II-6)

La formulation ou la corrélation d'AINLEY donne les valeurs de Y_p en fonction du rapport s/l pour les différents angles de sortie α_2 (voir fig (II-5) et (II-6)).

AINLEY propose pour le calcul des pertes par écoulement secondaire et les pertes par fuites, la relation suivante :

$$Y_s + Y_f = (\lambda + B \cdot \tau/H) \left(\frac{C_l}{s/l} \right) \cdot \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^3 \alpha_m} \quad (II-8)$$

avec: $B = 0.5$ pour les pertes par fuite radiale
 $B = 0.25$ pour les pertes par fuite axiale
 C_l : coefficient de forme donné par carter ref [7]
 λ : facteur qui est fonction de :

$$\lambda = f \left[\frac{(A_2/A_1)^2}{1 + (\text{diametre d'entrée/diametre de sortie})} \right]$$

tel que A_1 et A_2 sont les surfaces normales à l'entrée et la sortie de l'écoulement λ est donnée par les graphes (fig II-7)

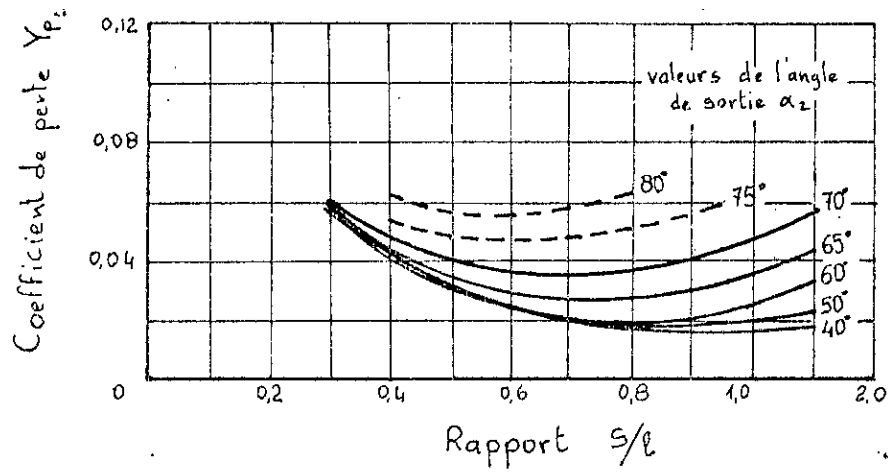


Figure II-5

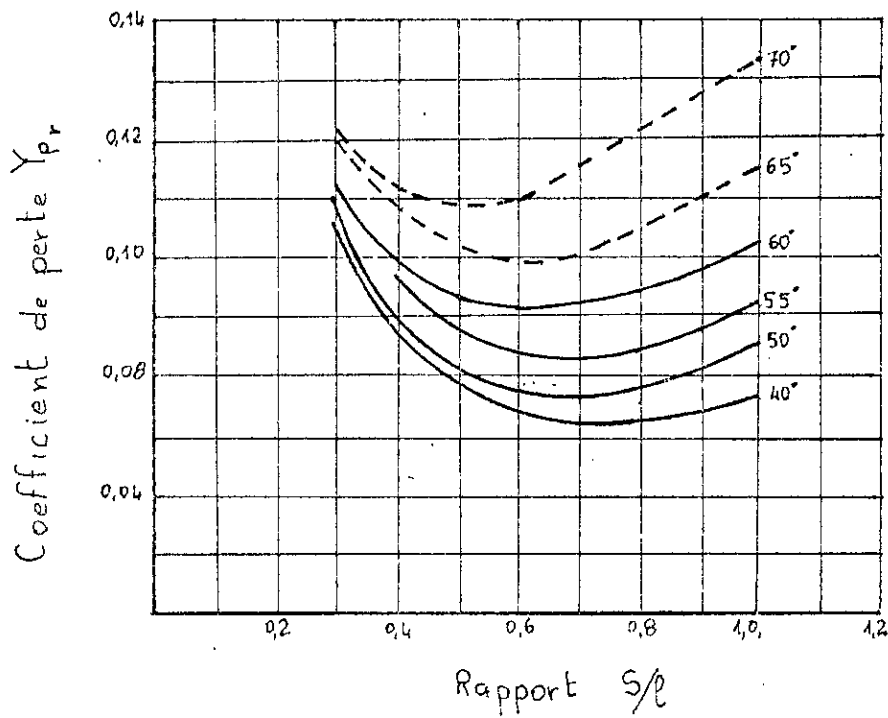


Figure II-6

II-6 COMPARAISON ENTRE LES DEUX MODELES :

Le graphe (fig II-8) donne la comparaison entre les coefficients de perte nominale de SODERBERG ξ et le coefficient de perte par profil d'AINLEY Y . Le nombre de Reynolds au col est défini comme :

$$Re_c = Re. z. (s/l). \cos \alpha z.$$

Il faut préciser que le modèle de SODERBERG est utilisé pour les grandes vitesses d'écoulement et que le modèle d'AINLEY est utilisé pour les faibles vitesses ($M < 0.6$). Des exemples numériques présentés dans la référence [7] nous permettent de dire :

- dans le cas du stator :

Le coefficient de perte ξ de SODERBERG a une grande valeur par rapport au coefficient de perte Y d'AINLEY.

Mais, les choses s'inverse dans le cas d'un fluide compressible.

- dans le cas de rotor ou la roue :

Le modèle d'AINLEY donne un large coefficient de perte Y qui est dû essentiellement aux pertes par écoulement secondaire.

SODERBERG partage équitablement les pertes entre le stator et le rotor contrairement à AINLEY qui suggère que les pertes dans le rotor sont plus grandes que dans le stator.

II-7 L'EFFET DE L' ANGLE D' INCIDENCE :

Les deux modèles exposés précédemment permettent de donner des correlations sur les pertes avec l'hypothèse d'un angle d'incidence nul.

Le graphe (II-9) présente les travaux expérimentaux d'AINLEY pour un écoulement aux différents angles d'incidence dans le but d'obtenir un coefficient de perte correspondant à un écoulement avec incidence.

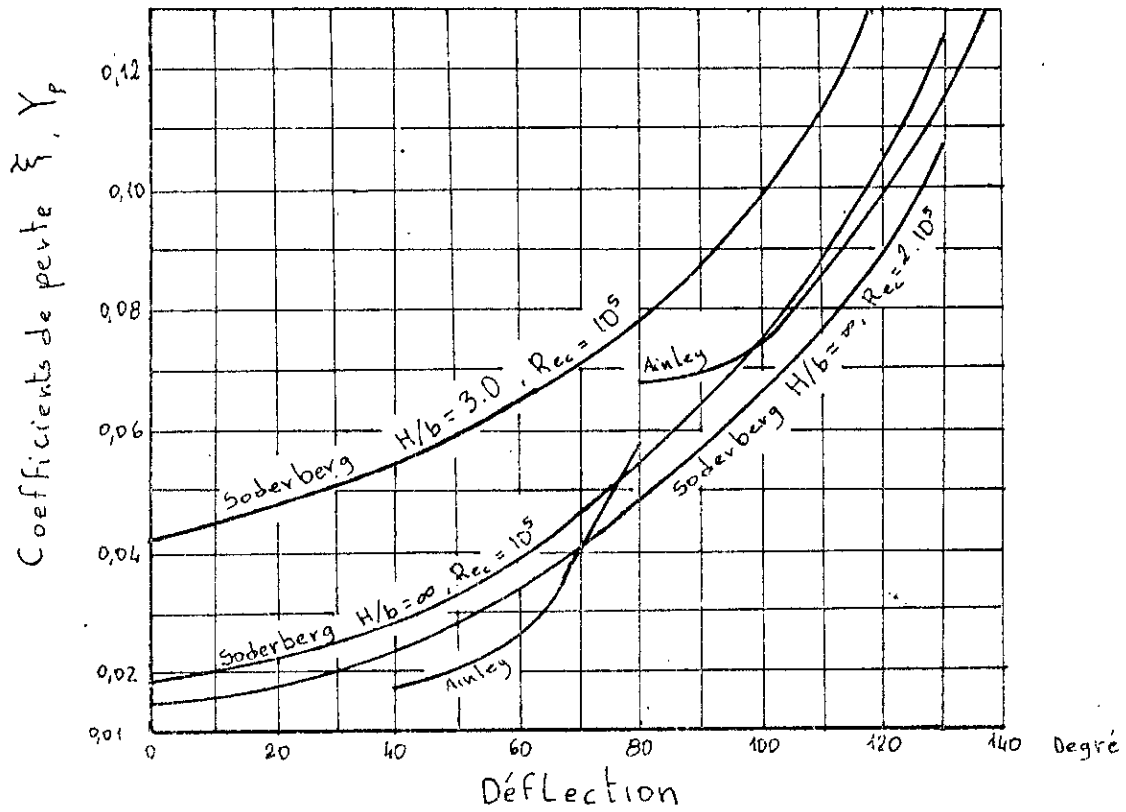


Figure II-7

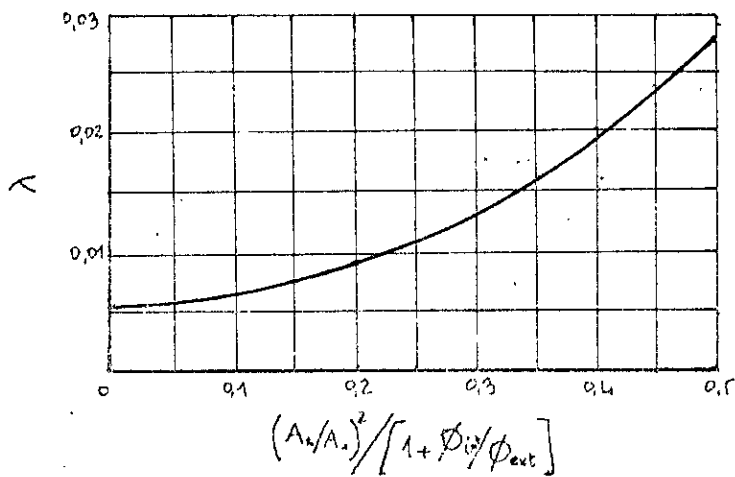


Figure II-8

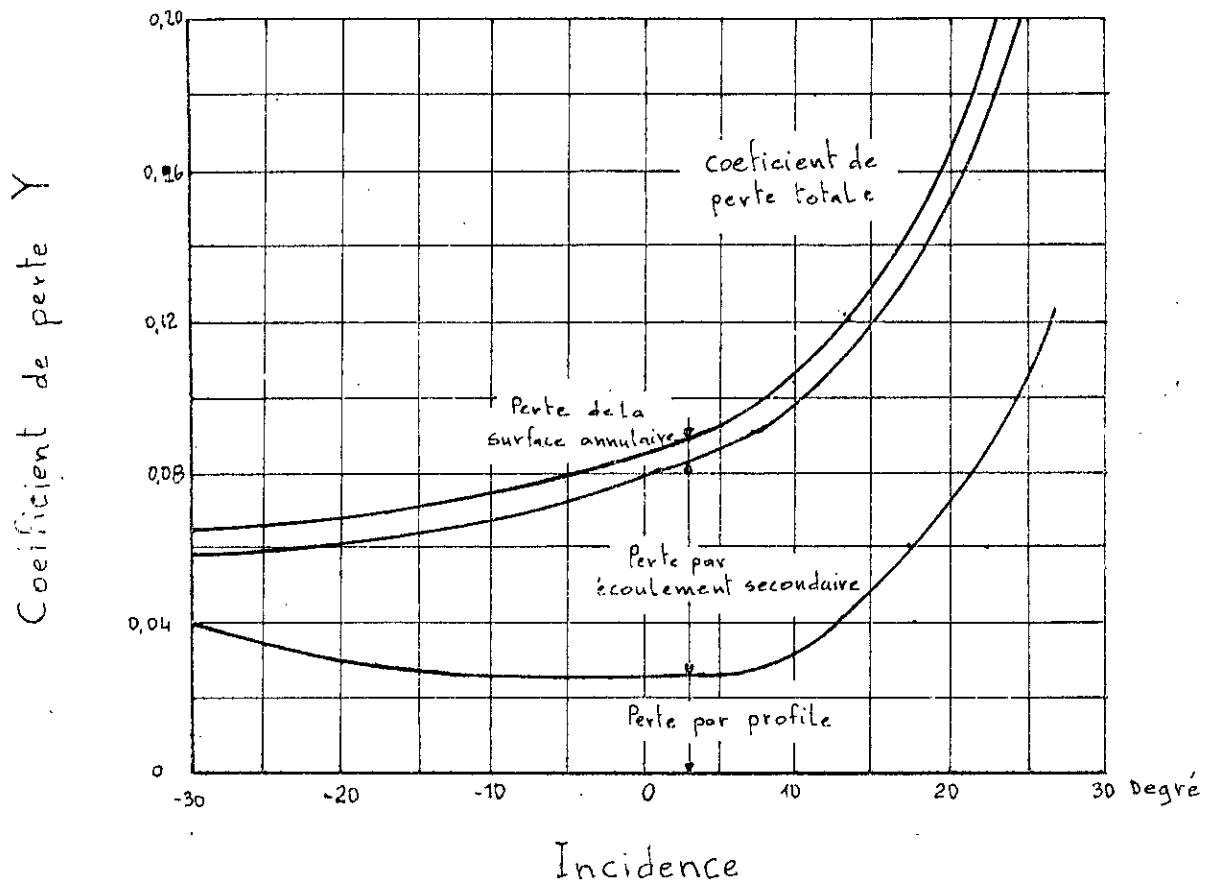


Figure II-9

II-8 ETUDE DE LA COUCHE LIMITE AUTOUR DE L' AUBE :

Dans l'article "mouvement de fluide à faible frottement" L.PRANDTL a montré que l'écoulement autour d'un solide pourrait être divisé en deux régions :

- une très fine couche au voisinage du solide (couche limite) où le frottement joue un rôle très important
- une région extérieur à cette couche où, le frottement peut être négligé.

Ainsi PRANDTL a clarifié l'essentiel de l'influence de viscosité dans les écoulements à grandes nombres de REYNOLDS et a montré que les équations de NAVIER-STOCKS pouvaient être simplifiées et conduisent à des solutions approchées .

Des recherches détaillées révèlent que, contrairement à l'écoulement potentiel, le fluide ne glisse pas sur la paroi, mais adhère à celle-ci la transition de la vitesse nulle au voisinage de la paroi à celle de pleine magnitude à une certaine distance de celle ci prend place dans une fine couche appelé : couche limite .dans cette couche le gradient de vitesse, normale à la paroi $\partial u/\partial y$, est très grand .

II-8-1 EPAISEUR DYNAMIQUE DE COUCHE LIMITE :

Les équations dynamiques de la couche limite ne seront autres que les equations de NAVIER-STOKES concernant l'écoulement laminaire tenant compte de certaines hypothèses appelleés :hypothese de couche limite et l'équation de continuité .

Les hypothèses de couches limite sont les suivantes:

- l'épaisseur de la couche limite étant très faible devant les dimensions de l'obstacle, c'est à dire que l'on néglige l'épaisseur de la couche limite devant le rayon de courbure de la surface de l' obstacle .
- on admet que la composante u est partout V
- les dérivées par rapport à x sont petites devant les dérivées par rapport à y .

Ces hypothèses conduisent aux résultats suivants:

- épaisseur de déplacement

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left[1 - \frac{u}{U} \right] dy \quad (\text{II-9})$$

$$\delta \cdot U_0 = \int_0^{\delta} (U_0 - u) dy \quad (\text{II-9.A})$$

— épaisseur de quantité de mouvement

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left[1 - \frac{u}{U} \right] dy \quad (\text{II-10})$$

$$\delta \cdot U_0^2 = \int_0^{\delta} u \cdot (U_0 - u) dy \quad (\text{II-10.A})$$

- épaisseur d'énergie cinétique

$$\delta_e = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left[1 - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] dy \quad (\text{II-11})$$

II-8-2 EQUATION INTEGRALE DE MOUVEMENT D'UNE COUCHE LIMITE :

En manipulant les equations de NAVIER-STOKES, on trouve les equations de l'écoulement laminaire permanent d'un fluide incompressible dans la couche limite qui s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot (u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (II_{12}) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (II_{13}) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (II_{14}) \end{array} \right.$$

pour plus de détaille voir annexe (2).

D'après l'équation (II-13), on peut décrire que la pression P est constante le long de la normal et par conséquent, la pression dans la couche limite est égale à la pression dans le fluide libre au frontière de la couche limite .

En assimilant le fluide libre à un fluide parfait, l'équation de BERNOULLI écrit le long de la frontière de la couche limite, donne :

$$P + \rho \cdot U_e^2 / 2 = \text{constante} \quad (II_{15})$$

où ρ et U_e sont respectivement, la masse volumique et la vitesse du fluide libre .

En dérivant l'expression (II-15) par rapport à x, on obtient :

$$\frac{dP}{dx} = -\rho \cdot U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (II_{16})$$

Ce qui nous donne le gradient de pression dans la couche limite.

En reportant l'équation (II-16) dans l'équation (II-12), le système d'équation devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\rho \cdot U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (II-17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (II-18)$$

Le système des équations (II-17) et (II-18) peut être résolu numériquement. Elle peut être calculée aussi par des méthodes approchées, qui utilise l'équation de VAN KARMAN obtenue en intégrant les deux membres de l'équation dynamique (II-17) entre 0 et H (distance de la paroi supérieure à l'épaisseur de la couche limite).

On obtient :

$$\int_0^H \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} \right) \cdot dy = \frac{\mu}{\rho} \cdot \int_0^H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \quad (II-19)$$

le second membre de cette équation s'exprime ainsi :

$$\frac{\mu}{\rho} \int_0^H \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \frac{1}{\rho} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=H} - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0} \right] \quad (II-20)$$

Le terme $\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=H}$ désigne la force de frottement par unité de surface en un point $y=H$ du fluide qui est nulle dans ce cas.

Le terme $\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0}$ désigne la force de frottement par unité de surface sur la paroi notée τ_0 .

Ainsi l'équation (II-19) devient :

$$\int_0^H \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (II-21)$$

L'équation (II-21) peut être valide aussi bien pour un écoulement laminaire que pour un écoulement turbulent, à condition que u et v désignent les moyennes des composantes respectives de vitesse .

La composante normale v peut être remplacée après intégration de l'équation (II-18) .

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy$$

par conséquent , on a :

$$\int_0^H \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy - U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (II-22)$$

Pour intégrer cette équation on doit poser les conditions aux limites sur les vitesses u et v , qui sont :

$$\begin{cases} u=0, v=0 \text{ pour } y=0 \\ u=U_e \text{ pour } y=H \end{cases}$$

En intégrant par partie les (II-22), on obtient pour le second terme :

$$\int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy \right) dy = U_e \cdot \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy - \int_0^H u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy$$

d'où

$$\int_0^H \left(2 \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_0}{\rho}$$

qui peut être simplifié en :

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial x} [u(U_e - u)] dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^H (U_e - u) dy = - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (\text{II-23})$$

En reportant les équations (II-9.a) et (II-10.b) dans l'équation (II-23) on aboutit à :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + \delta_1 \cdot U_e \cdot \frac{dU_e}{dx}$$

ou bien

$$\frac{\tau_0}{\rho} = U_e^2 \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta_1) \cdot U_e \cdot \frac{dU_e}{dx}$$

Cette équation est appelée: équation intégrale "de la quantité de mouvement" pour une couche limite incompressible et bidimensionnelle.

L'équation (II-24) s'applique aussi bien pour une couche limite laminaire que pour une couche limite turbulente .

La résolution de l'équation (II-24) est représentée dans le chapitre III, en appliquant la méthode de POHLHAUSSEN qui nous donne comme résultat :

- l'épaisseur ou l'engraissement de l'aube .
- le point de décollement de la couche limite dans le cas d'un décollement .

II-9 LES CONDITIONS DE CHARGE :

En générale, les conditions de charge délimitent, le bon fonctionnement des machines pour l'ensemble des applications actuelles, la plage d'opérations demandée, est très importante et soumise à des contraintes sévères sur le rendement et la fiabilité. ces contraintes sont de deux natures :

- l'une est liée à un blocage sonique imposé par un des éléments de la machine (saturation) pour les grands débits .
- L' autre au niveau des effets instationnaires qui peuvent provoquer des efforts mécaniques trop élevés (décrochage tournant) ou des instabilités dans l'ensemble turbomachine-circuit receptr (pompage) pour les petits débits .

-le décrochage tournant apparaît souvent aux faibles débits. Il est marqué par l'existence, dans la machine de zone à débit réduit, nul ou négatif qui peuvent affecter une partie ou la totalité de la hauteur de l'aube et se déplaçant à une vitesse angulaire de 0.2 à 0.8 fois celle de la roue .

-Le pompage est un régime instationnaire qui touche l'ensemble compresseur-circuit receptr . il est caractérisé par une oscillation axiale du débit à grande amplitude et à faible fréquence. c'est au voisinage de cette limite que l' on trouve les meilleurs rendements. c'est pourquoi, parler de la ligne de pompage pour un compresseur serait impropre, il faudrait plutôt employer le terme de ligne d'instabilité .

Les approches adoptées par les auteurs pour déterminer les décrochages ou parfois la ligne de pompage sont simples et ne tiennent, en général, compte que d'un nombre très limité de paramètres, ce qui leur confèrent un caractère qualitatif plus que quantitatif .

Le principe consiste à définir une limite de bon fonctionnement au delà de laquelle l'écoulement est censé être décollé dans la composante considérée.

Un calcul détaillé d'un modèle sur les conditions de charge d'un compresseur est donné en annexe (3).

CHAPITRE III

III. PARTIE NUMERIQUE:

III-1 INTRODUCTION :

Depuis quelques années les méthodes numériques et les approches mathématiques, permettant la détermination des écoulements dans les turbomachines, ont fait des progrès considérables et ceci grâce à l'augmentation de la puissance des moyens de calcul et aux progrès réalisés en analyse numérique, les codes de calcul constituent actuellement un outil indispensable des différents éléments d'une machine, parmi ces méthodes, on citera la méthode des différences finies, qui a été établie comme étant un outil très performant dans l'analyse des problèmes qui n'ont pas de solution analytique évidente .

Elle est utilisée souvent pour la résolution des équations différentielles complexes (et plus le problème à analyser par cette méthode est complexe, plus la vitesse et la capacité des ordinateurs utilisées augmentera).

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles du second ordre, elliptiques, a conduit à plusieurs méthodes de différences finies dont la plupart s'appliquent aux domaines rectangulaires (ou bien des structures simples), soit que le problème se pose naturellement dans un rectangle ou bien, on ramène le domaine de résolution sur un rectangle (où une structure simple) par une transformation préalable conforme ou non . L'emploi de ces méthodes se limite pratiquement aux domaines simplement connexes .

III-2 LES DIFFERENTS MAILLAGES UTILISES :

Dans le but de faire un travail de synthèse entre les différents travaux de recherche réalisés dans cet axe de recherche, on a appliqué plusieurs modèles de maillage qu'on développera en détail.

III_2_1 MAILLAGES RECTANGULAIRE DROIT :

Ce type de maillage est représenté sur la figure (III-1).

Pour le calcul des différents dérivées partielles, on a utilisé, comme structure élémentaire, des différences finies centrées. Pour cela, la fonction à calculer et développer en chaque noeuds, en série de TAYLOR poussée jusqu'à l'ordre deux (voir l'annexe 4) et on aboutira à un système linéaire en quatre équations à quatre inconnues :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta X}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta y}$$

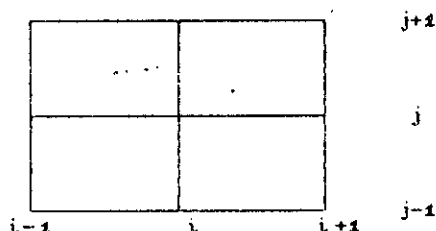
$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2 \cdot f_{i,j}}{(\Delta X)^2} \quad \text{(III-1)}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2 \cdot f_{i,j}}{(\Delta Y)^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1}}{4 \Delta y \Delta X}$$

pour le schéma défini sur la fig I-1.

fig(III-1)



L'inconvénient du modèle est qu'il n'y a pas de point de calcul directement sur le profil (sauf exception), ce qui peut affecter la précision des résultats. C'est la raison pour laquelle, qu'on a utilisé ce maillage à l'entrée et à la sortie de la roue (domaine régulier).

III 2 2 MODELE DE MARSH :

Ce maillage est utilisé pour l'étude d'un écoulement dans un domaine de forme quelconque, en faisant une transformation du domaine réel au domaine de calcul.

On a utilisé deux types de domaine (rectangulaire incliné et curviligne). La structure élémentaire pour les deux maillages a la même forme à des grandeurs près. Les deux transformations des deux structures sont représentées sur la figure (III-2), ce type de maillage est utilisé pour le calcul des différents paramètres dans la roue .

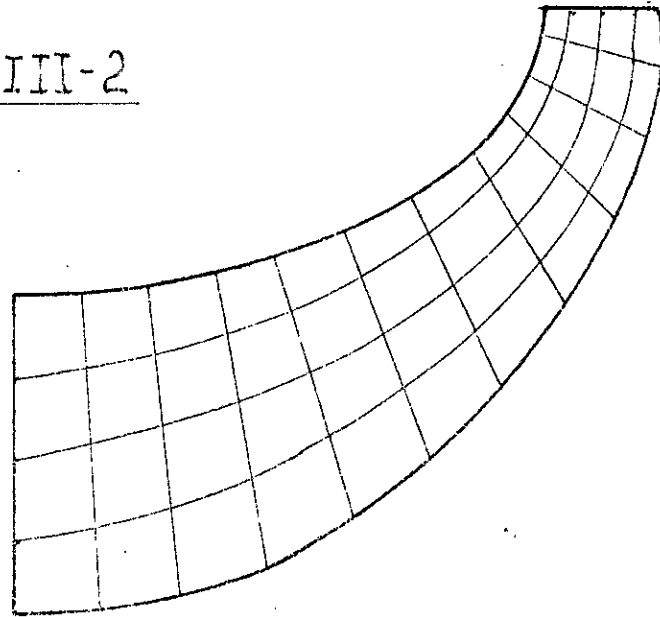
III-2-2-1 MAILLAGE CURVILIGNE :

La transformation se fait d'un domaine réel à un domaine curviligne régulier. Pour la résolution de l'équation elliptique, il faut calculer les différentes dérivées partielles et pour cela, on développe notre fonction caractéristique de l'écoulement en série de TAYLOR poussée jusqu'à l'ordre quatre, et on aboutira à un système (9x9). les dérivées sont données en fonction des paramètres des 9 noeuds de la structure élémentaire du maillage (voir fig III-2-a) .

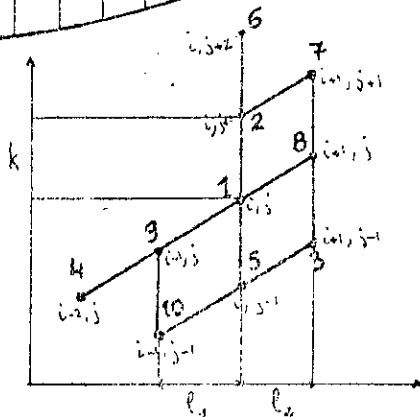
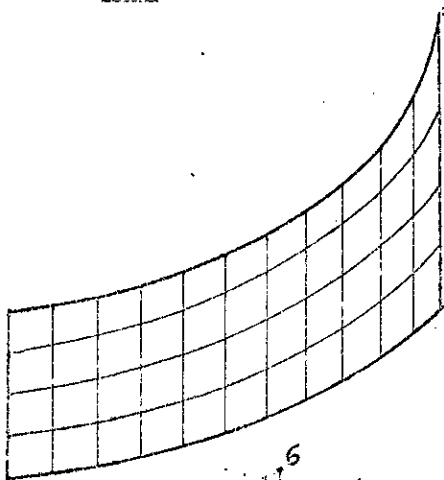
$$g = g (f_{i,j}, f_{i+1,j}, f_{i-1,j}, f_{i-2,j}, f_{i,j+1}, f_{i,j-1}, f_{i,j+2}, f_{i-1,j-1}, f_{i+1,j-1}, f_{i+1,j+1})$$

On sait, d'autre part, que pour la résolution numérique de l'équation elliptique, on doit itérer suivant $f_{i,j}$ (ligne de courant, densité), d'où on ne peut pas résoudre notre système (9x9) par les méthodes numériques classiques car on perdra l'information sur $f_{i,j}$, c'est la raison pour laquelle on a résolu ce système analytiquement, ce qui nous a permis d'écrire la relation (II-1) sous la forme:

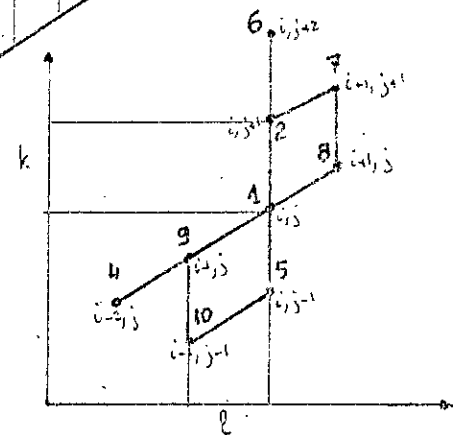
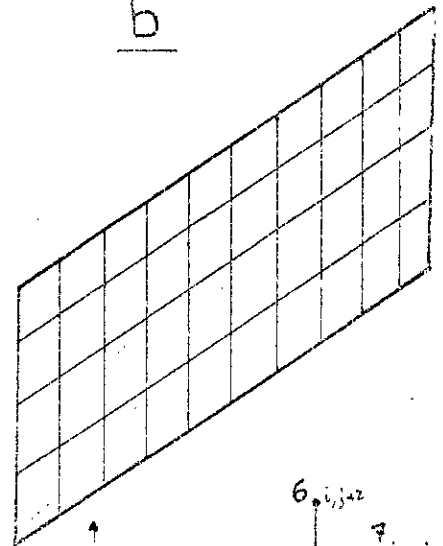
Figure III-2



a



b



$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} = K_1 \cdot f_{i,j} + K_{11}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{i,j} = K_2 \cdot f_{i,j} + K_{22}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{i,j} = K_3 \cdot f_{i,j} + K_{33}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{i,j} = K_4 \cdot f_{i,j} + K_{44}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} = K_5 \cdot f_{i,j} + K_{55}$$

(III_3)

Vous trouverez tous les détails de cette méthode analytique de résolution dans document additif.

III- 2-2-2 MAILLAGE RECTANGULAIRE INCLINE :

C'est un cas particulier de modèle de MARSH qui consiste à transformer le domaine réel en un domaine rectangulaire incliné (voir figure II-2-b). L'inclinaison des droites parallèles doit être choisie suivant le type de machine (type d'écoulement). les hypothèses de travail sont :

- le pas suivant x est le même (noté l)
- le pas suivant y est le même (noté k)
- les lignes sont parallèles (même pente)

On aboutit par la suite à un système de variables différentielles données par les expressions suivantes :

$$6k \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{i,j} = 6.f_{i,j+1} - 3.f_{i,j} - 2.f_{i,j-1} - f_{i,j+1}$$

$$6l \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} = 3.(1+\varepsilon)f_{i,j} + 2.f_{i+1,j} + f_{i-2,j} - 6.f_{i-1,j} - \varepsilon(6f_{i,j+1} - 2f_{i,j-1} - f_{i,j+2})$$

$$K^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{i,j} = f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2.f_{i,j}$$

$$l^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{i,j} = -2.f_{i,j}(1+\varepsilon+\varepsilon^2) + (f_{i,j+1} + f_{i,j-1})(\varepsilon+\varepsilon^2) - \varepsilon(f_{i-1,j-1} + f_{i+1,j+1}) + (1+\varepsilon)(f_{i+1,j} + f_{i-1,j}) \quad (\text{III.5})$$

$$2.1.k \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right]_{i,j} = (f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j-1}) - (f_{i+1,j} + f_{i-1,j}) - (1+2\varepsilon)(f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2.f_{i,j})$$

III-3- DESCRITISATION DES EQUATIONS DU MAILLAGE :

Avant d'entamer le calcul numérique, on tient à préciser qu'on n'utilisera que des différences finies lors de décritisation de nos équations dans tout le domaine d'écoulement.

III_3_1 TRANSFORMATION DU DOMAINE D'ECOULEMENT :

Le domaine d'étude est un domaine fictif où les coordonnées des noeuds sont données d'une façon arbitraire par l'utilisateur du programme.

Soit une fonction $f=f(z,r)$ avec $z=z(x,y)$ et $r=r(x,y)$

alors:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \end{cases}$$

d'où on tire :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right] \end{cases}$$

avec

$$J = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad (\text{jacobien})$$

les dérivées secondes de f sont obtenues en posant:

$$f'' = \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{et} \quad f'' = \frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{dans l'équation précédantent .}$$

III-3-1-1 TRANSFORMATION DE L'EQUATION DE LAPLACE :

Afin d'alléger l'encombrement des formules après descritisation, on gardera dans ce chapitre les notations suivantes :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_k \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_e \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{kk} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{ee} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{ke}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = r_k \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = r_e \quad , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = r_{kk} \quad , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = r_{ee} \quad , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = r_{ke}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = J_k \quad , \quad \frac{\partial J}{\partial y} = J_e$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{J} \left[r_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - r_k \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{J} \left[r_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - r_k \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] \right] \\ &= \frac{1}{J} \left[r_e \cdot r_k \cdot \frac{J_e}{J^2} - r_e^2 \cdot \frac{J_k}{J^2} + \frac{1}{J} (r_e \cdot r_{ek} - r_{ee} \cdot r_k) \right] \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &\quad + \frac{1}{J} \left[r_e \cdot r_k \cdot \frac{J_k}{J^2} - r_k^2 \cdot \frac{J_e}{J^2} + \frac{1}{J} (r_{ek} \cdot r_k - r_e \cdot r_{kk}) \right] \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &\quad + \frac{r_e^2}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{r_k^2}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{J} r_e \cdot r_k \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

De la même manière on trouve la dérivée seconde par rapport à r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= \frac{1}{J} \left[z_e \cdot z_k \cdot \frac{J_e}{J^2} - z_e^2 \cdot \frac{J_k}{J^2} + \frac{1}{J} (z_{ke} \cdot z_k - z_{ee} \cdot z_k) \right] \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &\quad + \frac{1}{J} \left[z_e \cdot z_k \cdot \frac{J_k}{J^2} - z_k^2 \cdot \frac{J_e}{J^2} + \frac{1}{J} (z_e \cdot z_{ke} - z_e \cdot z_{kk}) \right] \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &\quad + \frac{z_e^2}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{z_k^2}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{J} z_e \cdot z_k \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = a_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + a_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (\text{III}_6)$$

avec $a_5 = -2 \cdot (z_e \cdot z_k + r_e \cdot r_k) / J^2$

$$a_4 = (z_k^2 + r_k^2) / J^2$$

$$a_3 = (z_e^2 + r_e^2) / J^2$$

$$a_1 = \frac{1}{J} \left[-\frac{a_5}{2} \cdot J_e - a_3 \cdot J_k + \frac{1}{J} (r_e \cdot r_{ek} - r_{ee} r_k + z_k \cdot z_e - z_{ee} \cdot z_k) \right]$$

$$a_2 = \frac{1}{J} \left[-\frac{a_5}{2} \cdot J_k - a_4 \cdot J_e + \frac{1}{J} (r_k \cdot r_{ek} - r_{kk} r_e + z_e \cdot z_k - z_{kk} \cdot z_e) \right]$$

III.3.1.2 LA DESCRIPTISATION DU SECOND MEMBRE $q(r,z)$:

Soit: $q(r,z) = A \frac{\partial \psi}{\partial r} + B \frac{\partial \psi}{\partial z} + q_0$

Après transformation du domaine d'étude nous trouverons :

$$q(x,y) = \frac{1}{J} \left[r_e \cdot A - z_e \cdot B \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{J} \left[r_k \cdot A - z_k \cdot B \right] \frac{\partial \psi}{\partial y} + q_0$$

$$q(x,y) = t_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + t_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + q_0 \quad (\text{III}_7)$$

avec $t_1 = \frac{1}{J} \left[r_e \cdot A - z_e \cdot B \right]$

$$t_2 = -\frac{1}{J} \left[r_k \cdot A - z_k \cdot B \right]$$

III-1-3 DESCRITISATION DE L'EQUATION ELLIPTIQUE :

Dans les deux écoulements méridional et aube à aube, l'équation générale qui caractérise l'écoulement peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = A. \frac{\partial \psi}{\partial r} + B. \frac{\partial \psi}{\partial z} + q_0 \quad (III-8)$$

En injectant les deux équations (III-6) et (III-7) dans (III-8) on trouve :

$$\begin{aligned} (a_1 - t_1) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (a_2 - t_2) \frac{\partial \psi}{\partial y} + a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \\ + a_5 \frac{\partial \psi}{\partial y} = q_0 \end{aligned} \quad (III-9)$$

III-3-2-1 MAILLAGE RECTANGULAIRE :

III-3-2-1-A) DOMAINE REGULIER :

On a appliqué ce type de maillage à l'entrée et à la sortie de la roue, d'après l'équation (III-9) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = q(r, z)$$

En remplaçant par les dérivées (III-1), on aboutit à l'équation suivante donnant les variations du second membre $q(r, z)$:

$$q(r, z) = K_1 \psi_{i,j} + K_2 (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) + K_4 (\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1})$$

tel que :

$$\begin{aligned} K_2 &= (1/\Delta Z)^2 \\ K &= (1/\Delta Z)^2 \end{aligned}$$

Sous la forme générale :

$$\begin{aligned} q(r,z) &= A. \frac{\partial \psi}{\partial r} + B. \frac{\partial \psi}{\partial z} + q_0 \\ &= A \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2.\Delta r} + B \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2.\Delta z} \end{aligned}$$

et finalement on trouve :

$$q_0 = K_1 \psi_{i,j} + K_2 \psi_{i+1,j} + K_3 \psi_{i-1,j} + K_4 \psi_{i,j+1} + K_5 \psi_{i,j-1} \quad (\text{III}_{10})$$

avec les constantes $K_{i,j}$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_2 = K_2 + B/2.\Delta z \\ K_3 = K_2 - B/2.\Delta z \\ K_4 = K_4 + A/2.\Delta r \\ K_5 = K_5 - A/2.\Delta r \end{array} \right.$$

III-3-2-1- B) DOMAINE IRREGULIER :

En injectant les dérivées partielles (III-1) dans l'équation générale (III-9) on trouve :

$$\begin{aligned} a_3 \cdot \left(\frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + a_4 \cdot \left(\frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) - 2 \cdot \psi_{i,j} \left(\frac{a_3}{\Delta x^2} + \frac{a_4}{\Delta y^2} \right) \\ + (a_1 - t_1) \cdot \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2.\Delta x} \right) + (a_2 - t_2) \cdot \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2.\Delta y} \right) \\ + a_5 \cdot \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i-1,j+1}}{4.\Delta x \Delta y} \right) = q_0 \end{aligned}$$

après rearrangement on trouve :

$$\begin{aligned} K_1 \psi_{i,j} + K_2 \psi_{i,j-1} + K_3 \psi_{i,j+1} + K_4 \psi_{i+1,j} + K_5 \psi_{i-1,j} \\ + K \cdot (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i-1,j+1}) = q_0 \quad (\text{III}_{11}) \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = -2 \left[a_3 / (\Delta x)^2 + a_4 / (\Delta y)^2 \right] \\ K_2 = a_4 / (\Delta y)^2 - (a_2 - t_2) / 2 \Delta y \\ K_3 = a_4 / (\Delta y)^2 + (a_2 - t_2) / 2 \Delta y \\ K_4 = a_3 / (\Delta x)^2 - (a_1 - t_1) / 2 \Delta x \\ K_5 = a_3 / (\Delta x)^2 + (a_1 - t_1) / 2 \Delta x \\ K = - a_5 / (2 \Delta x \Delta y) \end{array} \right.$$

III-3-2-2- MODELE DE MARSH :a) maillage rectangulaire inclini :

En injectant les différentes dérivées de l'équation (III-5) dans l'équation (III-9) on trouve :

$$\begin{aligned} & C_1 \cdot \psi_{i,j} + C_2 (\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) + C_3 (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) + C_4 (\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i+1,j+1}) \\ & + C_5 (2 \cdot \psi_{i,j+1} - 2 \cdot \psi_{i,j-1} - \psi_{i,j+2}) + C_6 (2 \cdot \psi_{i+1,j} + \psi_{i-2,j} - 6 \cdot \psi_{i-1,j}) = q_0 \end{aligned} \quad \text{(III-12)}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1+\epsilon}{2 \cdot l} (a_1 - t_1) - \frac{a_2 - t_2}{2 \cdot k} - \frac{1}{l} 2(1+\epsilon+\epsilon^2) \cdot a_3 - \frac{2}{k} \cdot a_4 - \frac{1+2 \cdot \epsilon}{1 \cdot k} a_5 \\ C_2 = \frac{\epsilon+\epsilon^2}{l^2} a_3 + \frac{1}{k^2} a_4 - \frac{1+2 \cdot \epsilon}{2 \cdot l \cdot k} a_5 \\ C_3 = \frac{1+\epsilon}{l^2} a_3 - \frac{1}{2 \cdot l \cdot k} a_5 \\ C_4 = -\frac{\epsilon}{l^2} a_3 + \frac{1}{2 \cdot l \cdot k} a_5 \\ C_5 = \frac{1}{6 \cdot k} (a_2 - t_2) - \frac{\epsilon}{6 \cdot l} (a_1 - t_1) \\ C_6 = \frac{1}{6 \cdot l} (a_1 - t_1) \end{array} \right.$$

b) maillage curviligne :

En injectant les différentes dérivées (voir annexe additif) dans l'équation (III-9) on trouve :

$$C_1.\psi_{i,j} + C_2.w_{i+1,j} + C_3.\psi_{i-1,j} + C_4.\psi_{i-2,j} + C_5.\psi_{i,j-1} + C_6.\psi_{i,j+1} \\ + \psi_{i,j+2} + C_8.\psi_{i+1,j+1} + C_9.\psi_{i+1,j-1} + C_{10}.\psi_{i-1,j-1} = q_c \quad (III_{13})$$

Vue la complexité du développement de ce modèle, les constantes q sont développées et données dans l'annexe additif.

III-3-3- DESCRIPTION DE L'ÉCOULEMENT MÉRIDIENAL :

L'équation générale qui régit l'écoulement méridional est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln(\rho \cdot r \cdot B) \right] + \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\ln(\rho \cdot r \cdot B) \right] + q_0$$

Par analogie avec l'équation (III-9) on trouve :

$$A = \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln(\rho \cdot r \cdot B) \right] \\ B = \frac{\partial}{\partial z} \left[\ln(\rho \cdot r \cdot B) \right] \quad (III_{14}) \\ q_0 = \frac{\rho \cdot r \cdot b}{W_z} \left[-\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{W_u}{r} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) - F_r \right]$$

d'où :

$$A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{1}{r} \\ = \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho \cdot J} \cdot \left[z_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} - z_k \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] - \frac{1}{b \cdot J} \cdot \left[z_0 \frac{\partial b}{\partial x} - z_k \frac{\partial b}{\partial y} \right] \\ B = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial z} \quad (III_{15}) \\ = \frac{1}{\rho \cdot J} \cdot \left[r_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} - r_k \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] + \frac{1}{b \cdot J} \cdot \left[r_0 \frac{\partial b}{\partial x} - r_k \frac{\partial b}{\partial y} \right]$$

Descritisation de second membre

$$q_o = \frac{\rho \cdot r \cdot b}{W_z} \left[\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) - Fr \right] \quad (III_{16})$$

$$I = h + V^2/2 - \omega \cdot r \cdot V_u$$

$$\frac{\partial I}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (V^2/2) - \omega \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u)$$

$$\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) = \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (V^2/2) - \frac{V_u}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u)$$

$$\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) = \frac{\partial h}{\partial r} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{(W_u + \omega \cdot r)^2}{2} \quad (III_{17})$$

l'écoulement est isentropique donc:

$$\frac{T}{T_o} = \frac{h}{h_o} = \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad h_o = a^2 / (\gamma-1)$$

$$h = a^2 / (\gamma-1) \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{a^2}{\gamma_o} \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial r}$$

$$\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) = \frac{a^2}{\gamma_o} \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial r} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{(W_u + \omega \cdot r)^2}{2}$$

$$F_u = \frac{W_z}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot V_u) + \frac{W_r}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u)$$

$$= W_z \frac{\partial V_u}{\partial z} + \frac{W_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u)$$

$$F_u = W_z \frac{\partial W_u}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial z} + W_r \left(2 \cdot \omega + \frac{W_u}{r} \right) \quad (III_{19})$$

avec $Fr = \tan \alpha F_u$

$$q_o = \frac{\rho \cdot r \cdot b}{W_z} \left\{ \frac{a^2}{r \rho} \left(-\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \frac{1}{J} \left[z_o \frac{\partial \rho}{\partial x} - z_k \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] - \frac{W_r}{J} \left[z_o \frac{\partial W_r}{\partial x} - z_k \frac{\partial W_r}{\partial y} \right] \right. \\ \left. - \frac{W_z}{J} \left[z_o \frac{\partial W_z}{\partial x} - z_k \frac{\partial W_z}{\partial y} \right] - \frac{(W_u + \omega \cdot r)^2}{2} + F_r \right\} \quad (\text{III}_20)$$

$$F_u = \frac{1}{J} \frac{\partial W_u}{\partial x} \left[r_o W_z - z_o W_r \right] - \frac{1}{J} \frac{\partial W_u}{\partial y} \left[r_k W_z - z_k W_r \right] + W_r \left(2 \cdot \omega + \frac{W_u}{r} \right)$$

Pour les différentes dérivées on a qu'a les remplacer par leurs expressions pour chaque type de maillage utilisé .

III-3-4 ÉCOULEMENT AUBE A AUBE :

L 'équation générale qui gère l'écoulement aube à aube est de la forme :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial m^2} + \frac{\partial^2 Y}{r \partial \theta^2} = \frac{\partial Y}{\partial m} \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{1}{b \cdot \rho} \frac{\partial (b \cdot \rho)}{\partial m} - \frac{\sin \alpha}{r} \right] + \frac{\partial Y}{r^2 \partial \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{2 \cdot b \cdot \rho \cdot \omega}{q} \cdot \sin \alpha$$

posons $h=r \cdot \theta$ par analogie avec l'équation (III-9) on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} r=h \\ z=m \\ A = \frac{1}{\rho \cdot r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \\ B = \frac{1}{\rho \cdot b} \frac{\partial (\rho \cdot b)}{\partial m} - \frac{\sin \alpha}{r} \\ q_o = \frac{2 \cdot b \cdot \rho \cdot \omega}{q} \cdot \sin \alpha \end{array} \right. \quad (\text{III}_22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = - \frac{1}{\rho \cdot J} \cdot \left[h_o \frac{\partial \rho}{\partial x} - h_k \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] \\ B = \frac{1}{\rho \cdot J} \cdot \left[m_o \frac{\partial \rho}{\partial x} - m_k \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] + \frac{1}{b \cdot J} \cdot \left[m_o \frac{\partial \rho}{\partial x} - m_k \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] - \frac{\sin \alpha}{r} \end{array} \right. \quad (\text{III}_23)$$

Pour les différentes dérivées, on a qu'a remplacé par leurs expressions pour chaque type de maillage utilisé.

III-3-5 CALCUL DE LA DENSITE:

Le calcul de la densité du fluide, se déduit à partir de la relation de conservation de la rothapie I le long de la ligne de courant. Ce qui se traduit par :

$$I = I_0 \quad (a)$$

L'indice 0 se rapporte à l'infinie amont.

Or :

$$I = h + \frac{V^2}{2} + \omega \cdot r \cdot V \quad (b)$$

$$\text{Où } h = C_p T = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (c)$$

de plus d'après l'équation d'état :

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \quad (d)$$

En introduisant (b), (c) et (d) dans (a) on obtient après réarrangement :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2 a^2} \left[V_0^2 - V_1^2 + 2 \omega (r_0 \cdot V_{u_0} - r \cdot V_u) \right]$$

Sachant que la vitesse V a pour composantes ($\vec{W}_r, \vec{W}_u, \vec{W}_z$)
et que $V = M \cdot a$.

où M est le nombre de Mach local. L'équation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_0^2 \cdot \left[1 - \frac{W_r^2 + V_u^2 + W_z^2 + 2 \omega (r_0 \cdot V_u - r \cdot V_u)}{V_0^2} \right]$$

R.M.Q: La rothapie se conserve sur toute la surface de courant aube à aube, contrairement à la surface de courant méridonnale où, la rothapie garde une valeur constante sur chaque ligne de courant. Donc pour le calcul de la densité en un point donné sur la surface méridonnale on devra utiliser les caractéristiques du point le précédent.

III_4 METHODE DE RELAXATION :

Les méthodes de relaxation pour la résolution des équations elliptiques sont appliquées dans des domaines simplement ou multiples connexes, une technique simple et purement pratique de correction des coefficients permet de normaliser le schéma de résolution et de traiter d'une manière analogue tous les points du réseau, qu'ils soient près ou loin des frontières .

Cette méthode est basée sur la méthode de Gauss-Seidel où l'on introduit un facteur de relaxation qui accélère la convergence du processus itératif .

Notre choix se porte sur cette méthode pour trois raisons essentielles, simplicité, rapidité de convergence et occupation d'un espace mémoire très réduit comparé aux autres méthodes telle que celle de Jacobi.

La résolution des équations qui gouvernent les écoulements plans ou méridiens et que nous considérons en (III-9) fera l'objet d'une méthode semblable de reconsidération de facteur de relaxation.

III_1 LA METHODE DE GAUSS-SEIDEL :

Considérons l'exemple d'un ensemble de n équations à n inconnues

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1i} x_i + \dots + a_{1n} x_n = y_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2i} x_i + \dots + a_{2n} x_n = y_2 \\
 \vdots \\
 a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ii} x_i + \dots + a_{in} x_n = y_i \\
 \vdots \\
 a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{ni} x_i + \dots + a_{nn} x_n = y_n
 \end{array} \right. \quad (III_{24})$$

d'où, on tire le terme $a_{kk} x_k$ de chaque equation $1 < k < n$ on aura:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 = [y_1 - (a_{12} x_2 + \dots + a_{1i} x_i + \dots + a_{1n} x_n)] & \dots a \\ a_{22} x_2 = [y_2 - (a_{21} x_1 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2i} x_i + \dots + a_{2n} x_n)] & \dots b \\ \vdots \\ a_{ii} x_i = [y_i - (a_{i1} x_1 + \dots + a_{i,i-1} x_{i-1} + a_{i,i+1} x_{i+1} + \dots + a_{in} x_n)] & \dots c \\ \vdots \\ a_{nn} x_n = [y_n - (a_{n1} x_1 + \dots + a_{ni} x_i + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1})] & \dots d \end{cases}$$

on fait un ensemble de choix arbitraire, soit $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

$$a) \rightarrow x_1^1 = [y_1 - (a_{12} x_2^0 + \dots + a_{1i} x_i^0 + \dots + a_{1n} x_n^0)] / a_{11}$$

Pour accélérer la convergence du problème (avantage de la méthode de gauss seidel), nous utiliserons la nouvelle valeur (x_1^1) pour le calcul de (x_2^1) et etc.....

$$x_2^1 = [y_2 - (a_{21} x_1^1 + \dots + a_{2i} x_i^0 + \dots + a_{2n} x_n^0)] / a_{22}$$

$$x_i^1 = [y_i - (a_{i1} x_1^1 + \dots + a_{i,i-1} x_{i-1}^1 + a_{i,i+1} x_{i+1}^0 + \dots + a_{in} x_n^0)] / a_{ii}$$

d'une manière générale :

$$x_i^{(k)} = (y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)}) / a_{ii} \quad \text{avec } i=1, n$$

les itérations s'arrêtent lorsque deux valeurs successives de x sont suffisamment voisines. on peut utiliser deux criteres :

— la convergence absolue qui est définit par :

$$e_a = \left| x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)} \right| < \epsilon$$

— la convergence relative :

$$\epsilon_r = \left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right| < \epsilon$$

Pour des ensembles de grandes tailles, il n'est pas commode de faire le test sur chaque inconnues x .

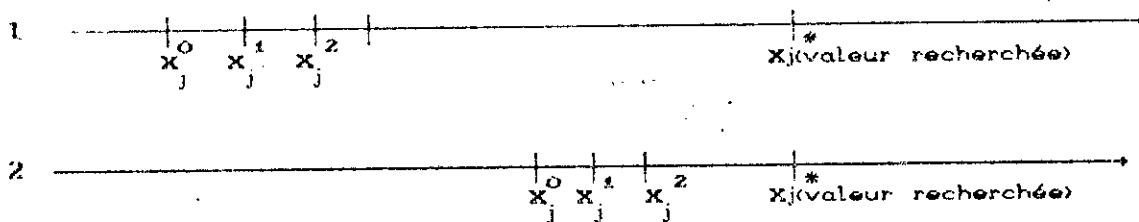
Remarque sur la convergence :

— la convergence du procédé ne dépend pas du choix des valeurs initiales mais, seulement des valeurs de coefficients a_{ii} .

— la convergence est assuré si on a pour chaque valeur de i , l'élément diagonal est supérieur où égal en module à la somme de modules des autres éléments de sa ligne.

FACTEUR DE RELAXATION :

Si le choix initiale x_j^0 n'influe pas sur la convergence où la divergence de la méthode, il influe par contre considéablement sur la rapidité de la convergence plus les valeurs initiales sont proches des valeurs réelles, et plus la convergence est rapide.



1 - x_j^0 loin de la valeur recherchée (convergence lente)

2 - x_j^0 près de la valeur recherchée (convergence rapide)

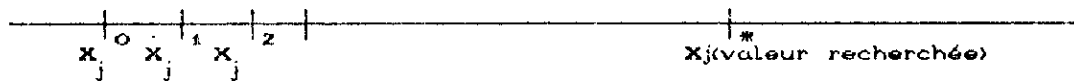
C'est pour cela qu'on essaye d'imaginer la forme des lignes de courant pour que la convergence soit plus rapide.

Partant de x_j , on obtient x_j' , au lieu de réutiliser x_j' pour l'itération suivante, on voit que la convergence serait plus rapide, si au lieu d'insérer x_j on insère:

$$x_j^{*1} = x_j^c + \lambda (x_j^1 + x_j^c) \quad (\text{III}_{29})$$

avec λ facteur de relaxation .

Une autre évolution possible est représentée sur la figure ci dessous:



D'une manière générale:

$$x_j^{*(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda (x_j^{(k+1)} + x_j^{(k)}) \quad (\text{III}_{30})$$

en pratique λ varie entre (0-2)

Le choix de λ se fait comme suit :

- $1 < \lambda < 2$ pour accélérer la convergence d'un processus itératif déjà convergent
- $0 < \lambda < 1$ pour faire converger un processus divergent .

III_5 INTERPOLATION CUBIQUE SPLINE :

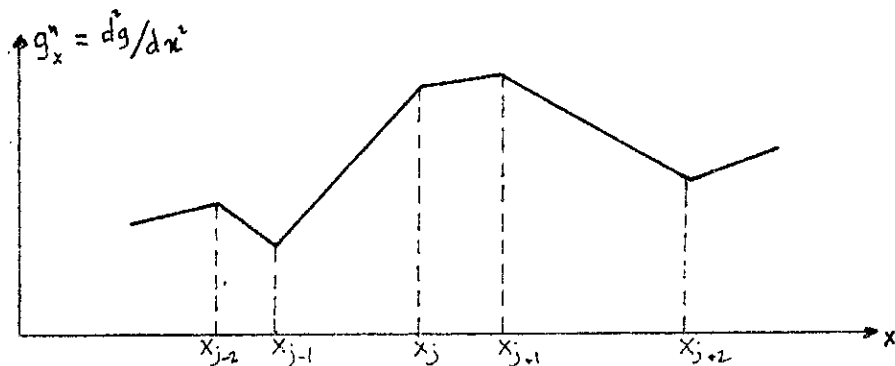
L'interpolation de LAGRANGE conduit parfois à un polynome ayant une variation beaucoup "moins douce" que $f(x)$. Une fonction d'interpolation plus douce peut être obtenue en faisant passer une règle flexible par les différents points, on obtient mathématiquement en faisant passer une cubique par chaque couple deux points x_j, x_{j+1} .

Soient x_0, x_1, \dots, x_n les $n+1$ points donnés régulièrement ou irrégulièrement espacés, on remplace $f(x)$, $g(x)$ telle que entre x_j et x_{j+1} , $g(x)$ soit assimilable à:

$$g(x) = a_0^j + a_1^j x + a_2^j x^2 + a_3^j x^3$$

Pour déterminer les quatre paramètres a_0^j, a_1^j, a_2^j et a_3^j on imposera évidemment que $g(x_j) = f(x_j)$ et $g(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$. Les deux autres paramètres sont déterminés en écrivant dg/dx et d^2g/dx^2 sont continues en x_j . C'est à dire que les cubiques entre les différents points se raccordent sans point anguleux or d^2g/dx^2 est linéaire et vaut $2_2 a_2^j + 6_3 a_3^j x$.

Par suite les conditions imposées sont représentées par la figure ci dessous:



on a donc de façon plus précise :

$$x_j < x < x_{j+1}$$

$$\frac{g''(x) - g''(x_j)}{x - x_j} = \frac{g''(x_{j+1}) - g''(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

soit

$$g''(x) = g''(x_j) + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} (g''(x_{j+1}) - g''(x_j)) \quad (\text{III}_3)$$

Cette solution assure la continuité de la dérivée seconde $g''(x)$ aux point x_j pour obtenir $g(x)$ on intègre deux fois l'équation (III-31). Si A et B sont des constantes d'intégrations, on obtient successivement en posant comme d'habitude :

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j \quad \text{et} \quad g''(x_j) = g''_j$$

$$\left[\begin{aligned} g'(x) &= (x - x_j) g''_j(x) + \frac{x - x_j}{\Delta x_j} (g''_{j+1}(x) - g''_j(x)) + A \\ g(x) &= \frac{(x - x_j)^2}{2} g''_j(x) + \frac{(x - x_j)^3}{6 \Delta x_j} (g''_{j+1}(x) - g''_j(x)) + A \cdot x + B \end{aligned} \right. \quad \text{(III-32)}$$

nous imposons maintenant à la fonction $g(x)$ de redonner $f(x)$ en x_j et x_{j+1} soit

$$\begin{aligned} g(x_j) &= f(x_j) = f_j \\ g(x_{j+1}) &= f(x_{j+1}) = f_{j+1} \end{aligned}$$

Ces deux conditions déterminent les deux constantes A et B. On obtient tous calculs faits:

$$g(x) = \frac{g''_j}{6} \left[\frac{(x - x_j)^3}{\Delta x_j} + \Delta x_j (x_{j+1} - x) \right] + \frac{g''_{j+1}}{6} \left[\frac{(x - x_j)^3}{\Delta x_j} - \Delta x_j (x - x_j) \right] + f_j \frac{(x_{j+1} - x)}{\Delta x_j} + f_{j+1} \frac{(x - x_j)}{\Delta x_j} \quad \text{(III-33)}$$

On vérifiera aisement sur (III-33) que $g(x_j)$ est égal $f(x_j)$ et $g(x_{j+1})=f(x_{j+1})$ ayant assure que $g(x_j)= f(x_j)$ et que $g''(x)$ était continue en x_j .

Il nous reste à écrire que $g(x)$ est continue en $g(x)$ ceci est nécessaire car dans l'état actuel l'équation est inutilisable puisque g''_j et g''_{j+1} ne sont pas connus.

En dérivant l'équation (III-33) on obtient toujours pour $x_j < x < x_{j+1}$

$$g(x) = \frac{g''_j}{6} \cdot \left[-\frac{3 \cdot (x - x_j)^2}{\Delta x_j} + \Delta x_j \right] + \frac{g''_{j+1}}{6} \left[\frac{3 \cdot (x - x_j)^2}{\Delta x_j} - \Delta x_j \right] + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x_j}$$

(III-34)

dans l'intervalle $x_j < x < x_{j+1}$ $g'(x)$ est obtenu en changeant

$$g'(x) = \frac{g''_{j-1}}{6} \cdot \left[-\frac{3 \cdot (x - x_j)^2}{\Delta x_{j-1}} + \Delta x_{j-1} \right] + \frac{g''_{j+1}}{6} \left[\frac{3 \cdot (x - x_{j-1})^2}{\Delta x_{j-1}} - \Delta x_{j-1} \right] + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x_{j-1}}$$

(III-35)

La continuité de $g'(x)$ est assurée en écrivant que pour $1 < j < n-1$, les $g'(x)$ données par (III-34) et (III-35) sont égaux, ce qui donne après avoir regroupé les termes en g''_{j-1} , g''_j et g''_{j+1} .

$$\frac{\Delta x_{j-1}}{\Delta x_j} \cdot g''_{j-1} + \frac{2 \cdot (x_{j+1} - x_{j-1})}{\Delta x_j} \cdot g''_j + g''_{j+1} = 6 \cdot \left[\frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x_j^2} - \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x_j - \Delta x_{j-1}} \right]$$

(III-36)

Cette relation doit être écrite pour $j=1,2,\dots,n$, on obtient donc $(n-1)$ équations linéaires entre $n+1$ inconnues, il s'en suit que deux dérivées secondes sont arbitraire. on pose généralement :

$$g''_0 = 0$$

$$g''_n = 0$$

(III-36.A)

Les équations (III-36) et (III-36.A) permettent de déterminer g'' pour $j=0,1,2,\dots,n$

Ces valeurs reportées dans (III-33) permettent d'obtenir la fonction $g(x)$, en tout point comme solution d'un système linéaire tridiagonale, obtenue en faisant $j=1$ à $j=n-1$ dans (III-36).

III-5 METHODE APPROXIMATIVE DE A.TH.VON KARMAN ET K.POHLHAUSSEN POUR DES ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS:

D'après K.POHLHAUSSEN, pour intégrer l'équation (III-24) on doit se donner par exemple la forme de la fonction u

$$\frac{u}{U_0} = a.\eta. + b.\eta^1 + c.\eta^2 + d.\eta^3$$

avec $\eta. = y/\delta(x)$ la distance addimensionnelle à partir de la paroi et $\delta(x)$ l'épaisseur de la couche limite au point considéré.

dans le but de déterminer les quatres constantes a,b,c et d nous allons poser les quatres conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y=0 & u=0 & ; \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = -U_0 \cdot \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ y=\delta & u=U_0 & ; \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & ; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad \text{(III-37)}$$

on obtient :

$$a = 2 + \frac{\Lambda}{6} ; b = -\frac{B}{2} ; c = -2 + \frac{\Lambda}{2} ; d = 1 - \frac{\Lambda}{6} \quad \text{(III-37A)}$$

et pour le profil de vitesse :

$$\frac{u}{U_0} = f(\eta) + A.G(\eta) = (2.\eta - 2.\eta^3 + \eta^4) + \frac{1}{6} \cdot \Lambda \cdot (\eta - 3.\eta^2 + 3.\eta^3 - \eta^4) \quad \text{(III-38)}$$

$$\text{où } f(\eta) = 2.\eta - 2.\eta^3 + \eta^4 = 1 - (1-\eta)^3 \cdot (1+\eta)$$

$$G(\eta) = \frac{1}{6} (\eta - 3.\eta^2 + 3.\eta^3 - \eta^4) = -\frac{1}{6} \eta \cdot (1-\eta)^3 \quad \text{(III-39)}$$

En combinant les équations (II-9-a) et (II-16-a) avec l'équation (II-37.b), on obtient :

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 \left[1 - f(\eta) - A \cdot G(\eta) \right] d\eta$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 \left[f(\eta) + A \cdot G(\eta) \right] \left[1 - f(\eta) - A \cdot G(\eta) \right] d\eta$$

en remplaçant $f(\eta)$ et $G(\eta)$ d'après (III-39) on aura :

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 3/10 - A/120, \quad \frac{\theta}{\delta} = (37/315 - A/945 - A^2/9872) \quad (\text{III}_40)$$

La force de frottement par unite de surface sur la paroi est :

$$\tau_o = \mu \cdot (\partial u / \partial y)_{y=0} = \frac{\mu \cdot U_o}{\delta} \cdot (2 + A/6) \quad (\text{III}_41)$$

Dans le but de déterminer le facteur de forme $A(x)$ et par conséquent la fonction $\delta(x)$ à partir de (III-37.b) il est nécessaire de se référer à l'équation du moment (III-24) en multipliant les deux nombres de celles ci par $\theta/\nu \cdot U_o$ on obtient :

$$\frac{U_o \cdot \theta \cdot \theta'}{\nu} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \cdot \frac{U_o \cdot \theta^2}{\nu} = \frac{\tau_o \theta}{\mu \cdot U_o} \quad (\text{III}_42)$$

En introduisant un second facteur de forme K défini par :

$$K = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_o}{dx} \quad (\text{III}_43)$$

et posons
$$z = \frac{\theta^2}{\nu} \quad (\text{III}_44)$$

donc
$$K = z \frac{dU_o}{dx} \quad (\text{III}_45)$$

Des équations (III-37.b), (III-43) et (III-40.a) on déduit :

$$K = (37/315 - A/945 - A^2/9872)^2 \cdot A \quad (\text{III}_46)$$

$$\text{d'où } \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{3/18 - A/120}{37/315 - A/945 - A^2/9872} = f_1(k) \quad (\text{III}_47)$$

$$\frac{\tau_o \theta}{\mu \cdot U_o} = (2+A/6) (37/315 - A/945 - A^2/9872) = f_2(k) \quad (\text{III}_48)$$

En combinant les équations (III-43) et (III-44) ensemble avec les équations (III-47) et (III-48) on obtient à partir de l'équation du moment (III-41) avec $\frac{\theta \cdot \theta'}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx}$ l'équation:

$$\frac{1}{2} U_o \frac{dz}{dx} \left[2 + f_1(k) \right] \cdot K = f_2(k) \quad (\text{III}_49)$$

finalment, on introduit l'abréviation :

$$2 \cdot f_2(k) - 4 \cdot K \cdot -2 \cdot K \cdot f_1(k) = F(k) \quad (\text{III}_50)$$

En substituant les expressions de K, $f_1(k)$ et $f_2(k)$ dans l'équation (III-50) on obtient:

$$F(K) = 2 \cdot (37/315 - A/945 - A^2/9872) \left[2 - 116A/315 + (2/945 + 1/120) \cdot A^2 + \frac{2 \cdot A^3}{9872} \right] \quad (\text{III}_51)$$

En substituant les expressions de K, $f_1(k)$ et $f_2(k)$ dans l'équation (III-50) on obtient:

Avec tout les abréviations et substitutions, l'équation du moment (III-49) peut être réécrite sous la forme condensé suivante :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(k)}{U_o}; K = z \cdot U_o \quad (\text{III}_52)$$

Ce qui représente une équation différentielle non linéaire du premier ordre d'inconnue $z = \theta^2/\nu$ fonction de l'abscisse curviligne x . Le fait que la fonction $f(k)$ soit complexe ne constitue pas une réelle difficulté pour la résolution de l'équation (III-52). et fonction $K(A)$ de l'équation (III-46) aussi bien que les équations $f_1(k)$, $f_2(k)$ et $f(k)$ données respectivement par les équations (III-47), (III-48) et (III-51) sont données dans la référence [13].

III- SOLUTION DE L'EQUATION :

En ce qui concerne la solution de l'équation (III-52), il est possible de faire les remarques suivantes :

le calcul commencera à partir du point d'arrêt $x=8$ ou $U_0=8$ et dU_0/dx est fini et est différent de 0, donc d'après l'équation (III-52), la valeur initiale de la pente dz/dx sera infini en ce point et de ce fait, $f(k)$ tendra à s'annuler. le zero de $f(k)$ apparait pour des valeurs de A pour lesquelles le second terme a droite et entre parenthèse de l'équation (III-51) s'annule ainsi :

$$f(k)=0 \text{ pour } k=k_0=0.0770 \text{ ou pour } A=A_0=7.052 .$$

De cette manière, la pente initiale $(dz/dx)_0$ au point d'arrêt se présente sous une forme indéterminée $(0/0)$, mais sa valeur peut être calculée par un simple passage a la limite, on obtient :

$$z_0 = \frac{K_0}{U_{00}} = \frac{0.0770}{U_{00}} \quad (dz/dx)_0 = -0.0652 \frac{U_{00}}{U_{00}^2}$$

où l'indice 0 fait référence au point d'arrêt .

Avec ces valeurs initiales, l'équation (III-52) peut facilement être intégrée, par exemple, par la méthode des isoclines .le calcul commence à partir du point d'arrêt pour lequel $A_0=7.052$ et $K_0=0.0770$. on poursuit l'intégration jusqu'a atteindre le point de décollement, correspondant à $z_0=0$, c'est à dire pour $A=-12$ où $K=-0.1567$ et $f(k)=1.7241$.

La fonction des vitesses $U_0(x)$ et leurs dérivées première dU_0/dx sont données par la solution de l'écoulement potentiel.

La procédure de calcul peut être résumé comme suit :

- 1 — la répartition de vitesse $U_0(x)$ et leurs dérivées dU_0/dx sont données en fonction de l'abscisse curviligne x .
- 2 — l'intégrale de l'équation (III-52) donne $z(x)$ et le second facteur $K(x)$. ce qui conduit au calcul de $v(x)$ d'après l'équation (III-43) .
- 3 — la variation du premier facteur de forme $A(x)$ est obtenue de l'équation (III-46) et de tableau (2.1) .
- 4 — l'épaisseur de la couche limite $\delta(x)$ est finalement obtenue à partir de l'équation (III-40.a) .

En pratique, l'intégration de l'équation (III-52) peut être effectuée par une simple quadrature, pour les valeurs positives des K . Pour cela, A.WALZ a introduit une approximation sans pertes appréciable dans la prévision. Il a trouvé que la fonction $f(k)$ peut être approximée par la loi linéaire :

$$f(k) = a - b \cdot K$$

avec : $a = 0.470$ et $b = 6$

L'approximation est particulièrement valable entre le point d'arrêt et le point de vitesse maximale. l'équation (III-52) se réduit à :

$$U_0 \frac{dz}{dx} = a - b \cdot K$$

En substituant les expressions de z et de K , on aboutit à :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{U_0 \cdot \theta^2}{\nu} \right] = a - (b-1) \cdot \frac{U_0 \cdot \theta^2}{\nu} - \frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{dx}$$

Cette équation différentielle peut être intégrée explicitement pour $U_w \theta^2 / \nu$ pour obtenir :

$$\frac{U_w \theta^2}{\nu} = \frac{a}{U_w^{b-1}} \cdot \int_0^x U_w^{b-1} dx$$

ou bien en utilisant les valeurs numériques de a et b données précédemment, on trouve :

$$\frac{U_w \theta^2}{\nu} = \frac{0.470}{U_w^2} \cdot \int_0^x U_w^5 dx \quad \text{(III-53)}$$

En ce qui concerne notre travail, on essaiera de résoudre l'équation (III-52) par la méthode de différence finie.

CHAPITRE III

IV. EXPERIMENTAION NUMERIQUE ET RESULTATS :

Dans notre projet, on a élaboré deux programmes avec le modèle de MARSCH (maillage curviligne et maillage incliné) dans le cas de l'écoulement méridional.

Ces deux programmes sont adaptables pour le cas d'un écoulement aube à aube, mais faute de temps machine on n'a pas pu les réaliser.

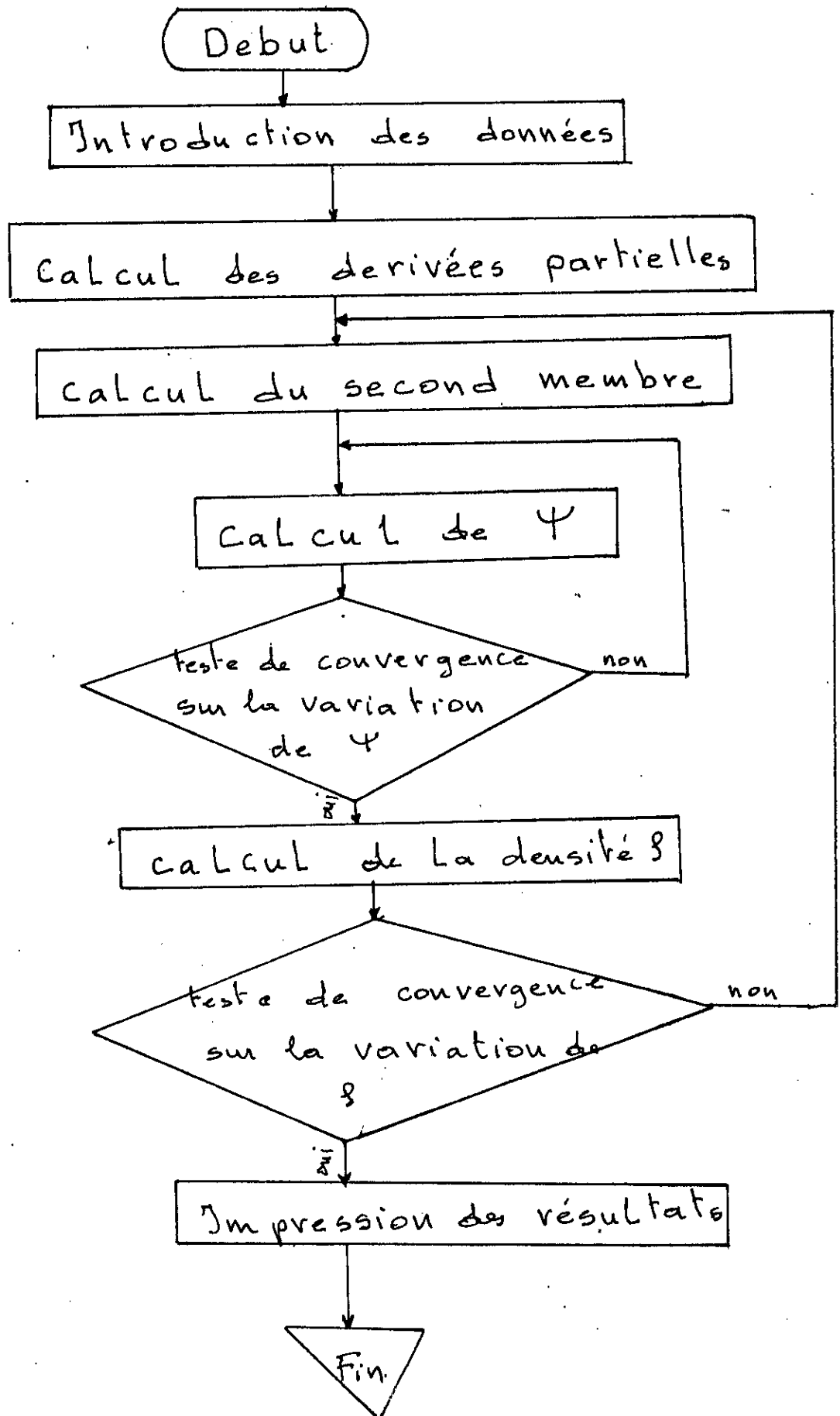
Les résultats sont données pour les cas:

Écoulement incompressible (eau)

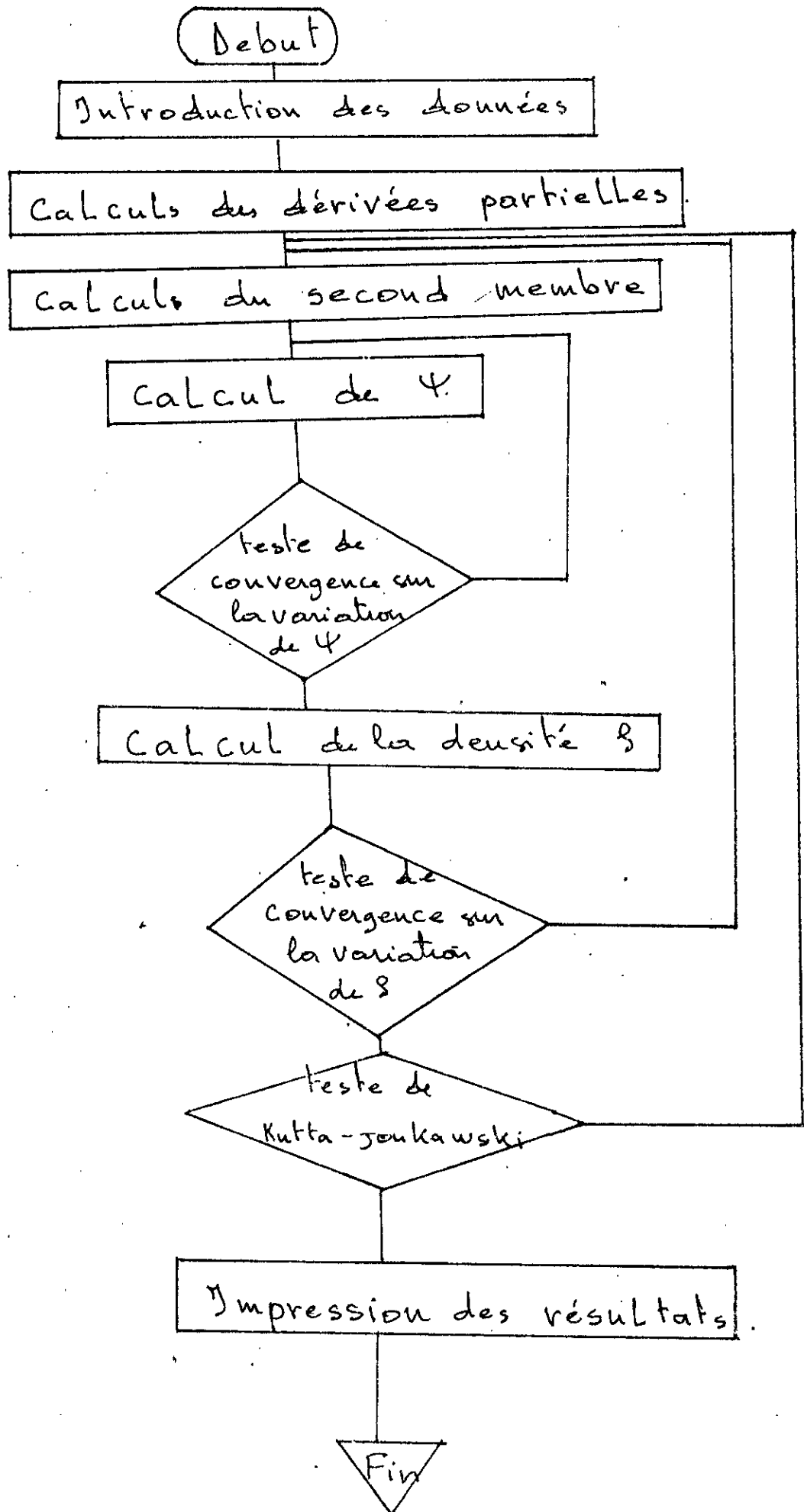
Écoulement compressible (air)

Pour les graphes de l'écoulement aube à aube on a repris les graphes des travaux antérieurs (avec maillage simple).

Organigramme 1: Calcul méridional

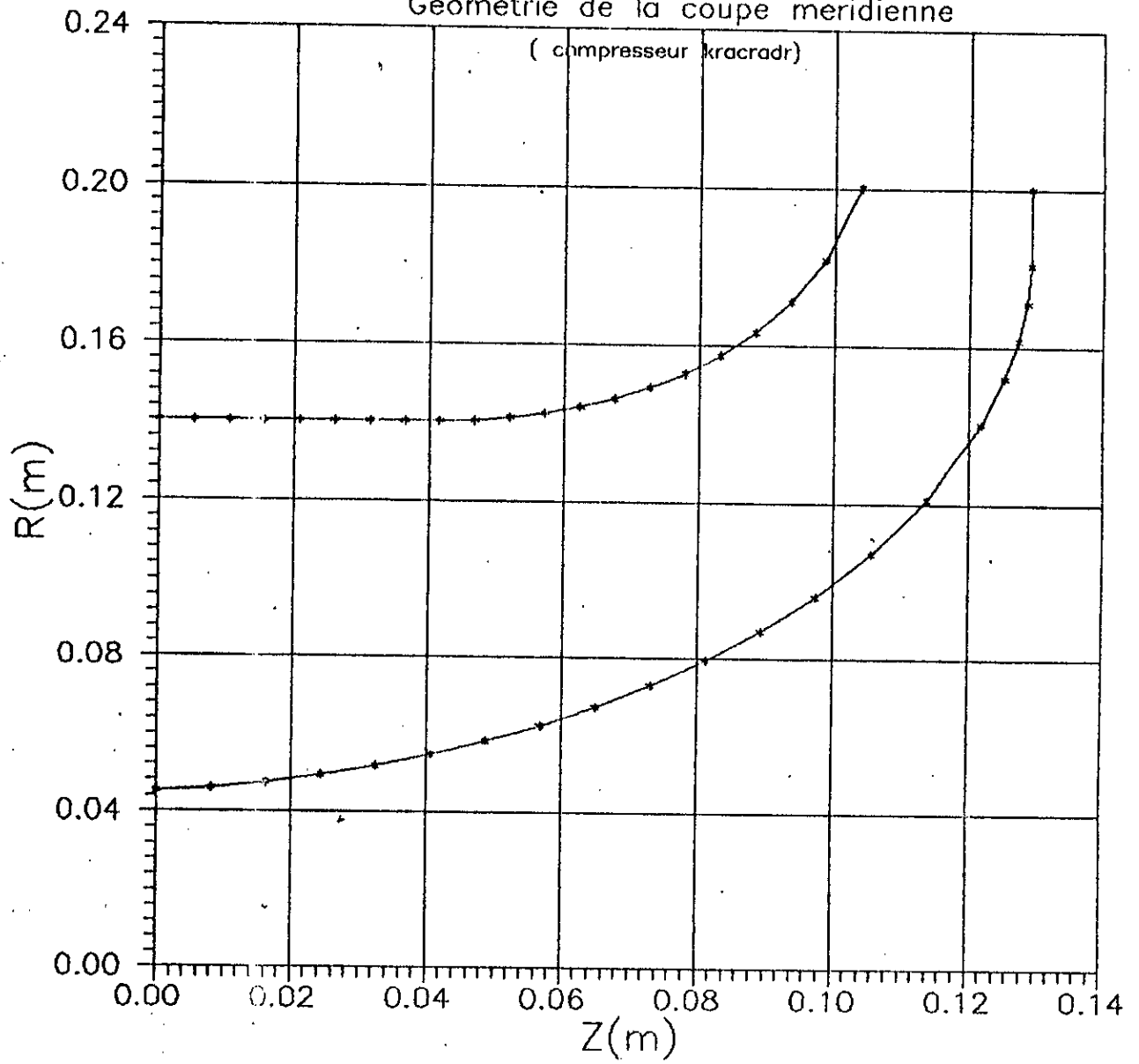


organigramme 2: Calcul aube-à-aube.

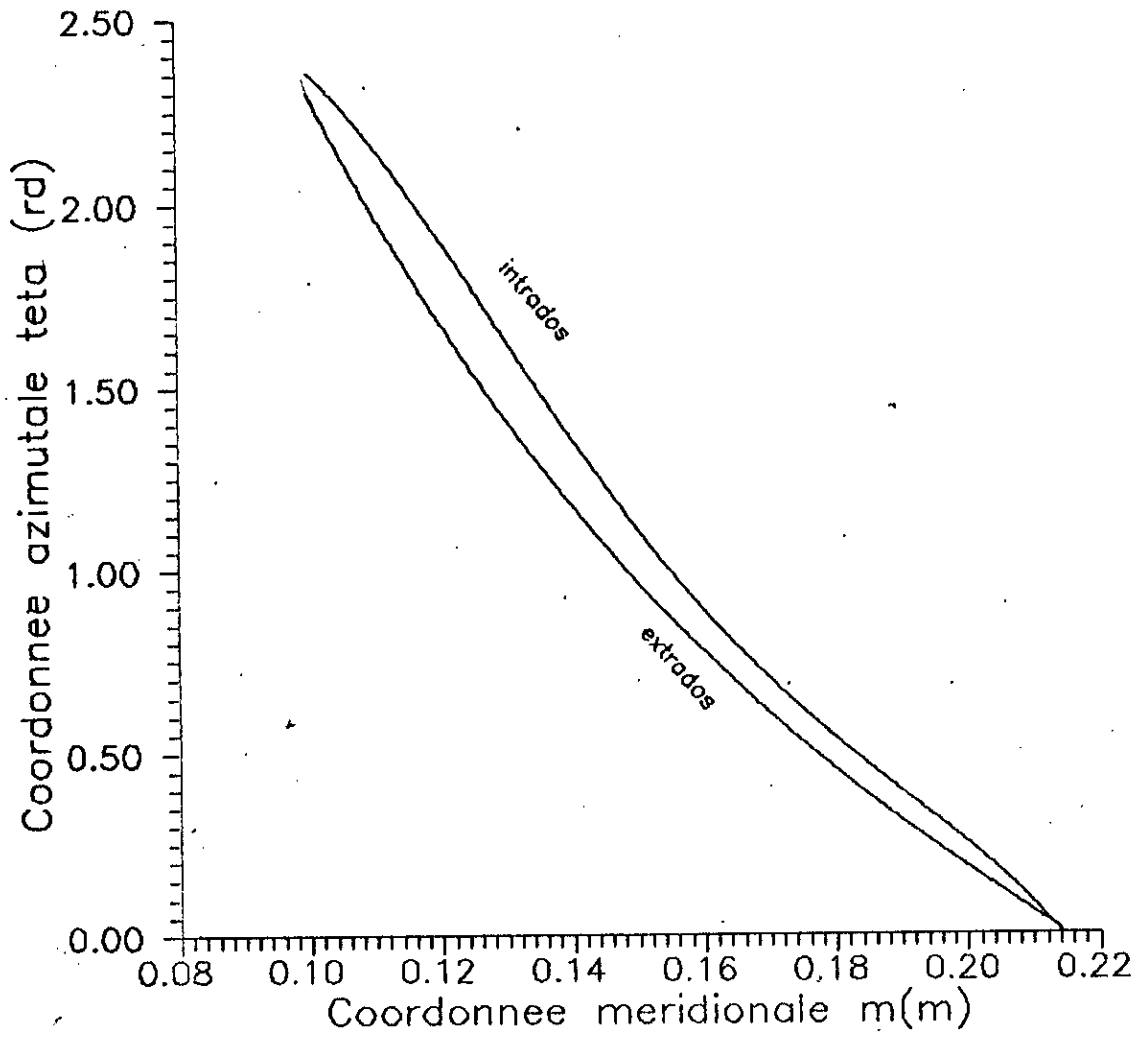


Geometrie de la coupe meridienne

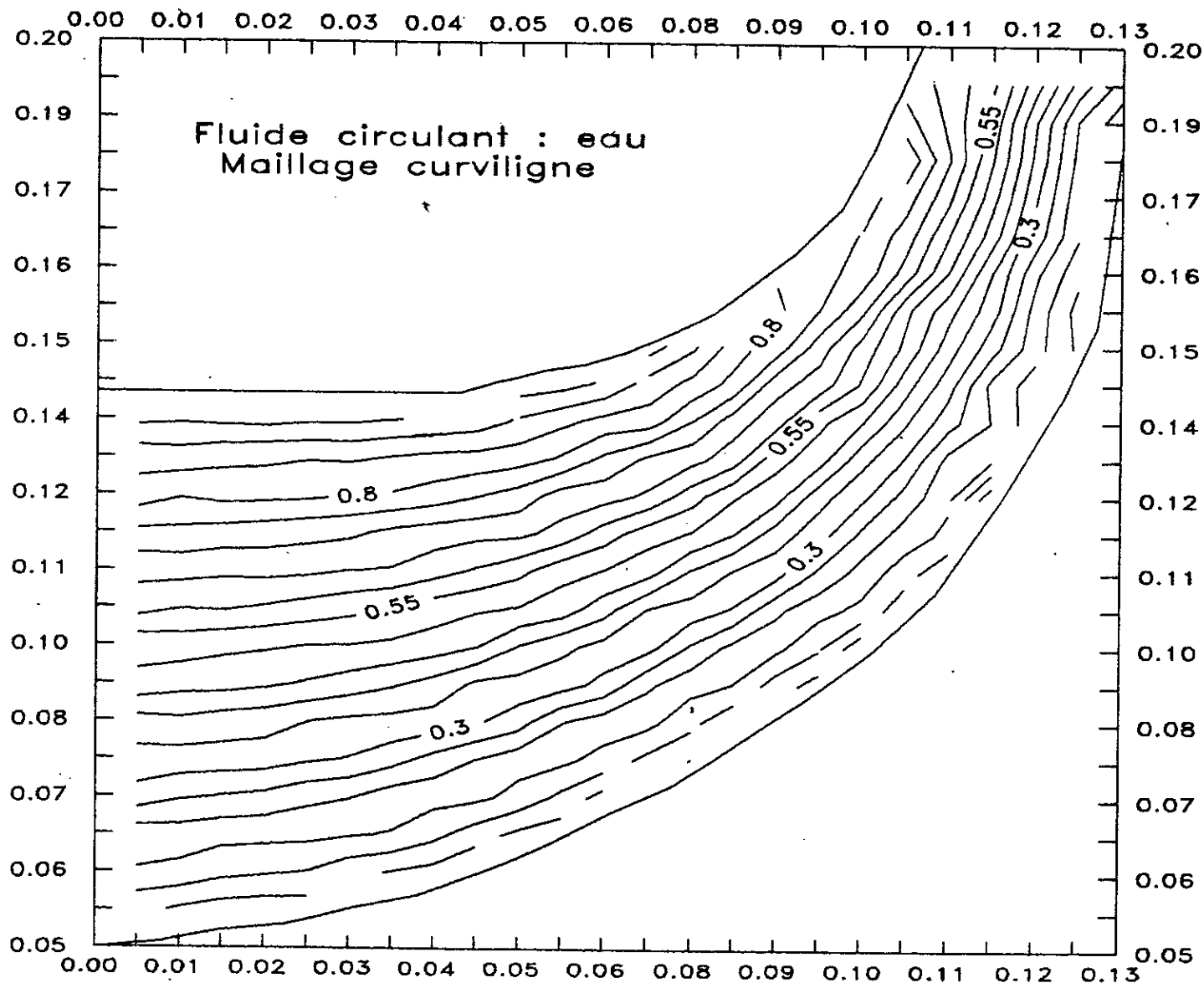
(compresseur kracadr)



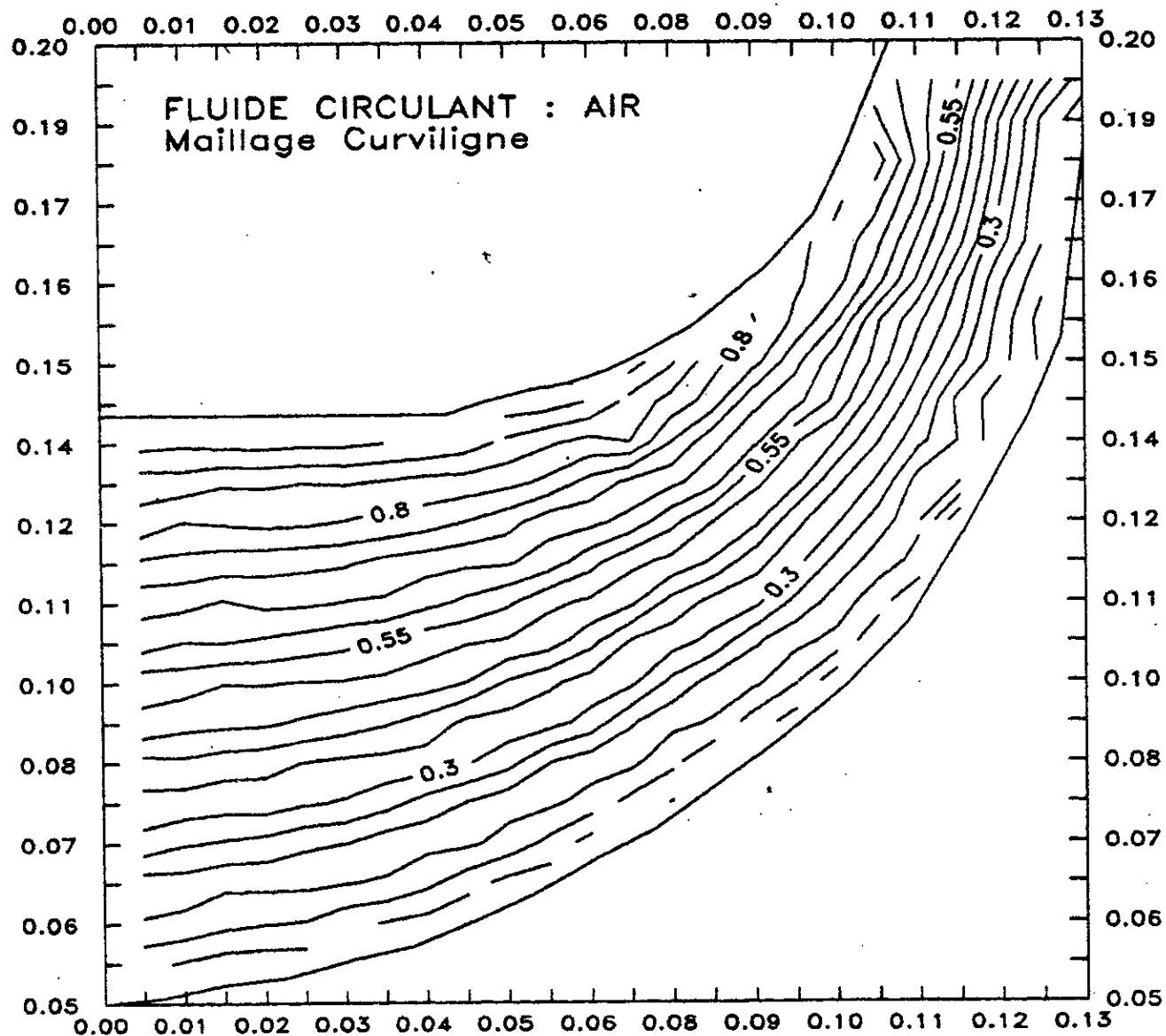
Profil d'aube utilise dans le calcul
aube a aube



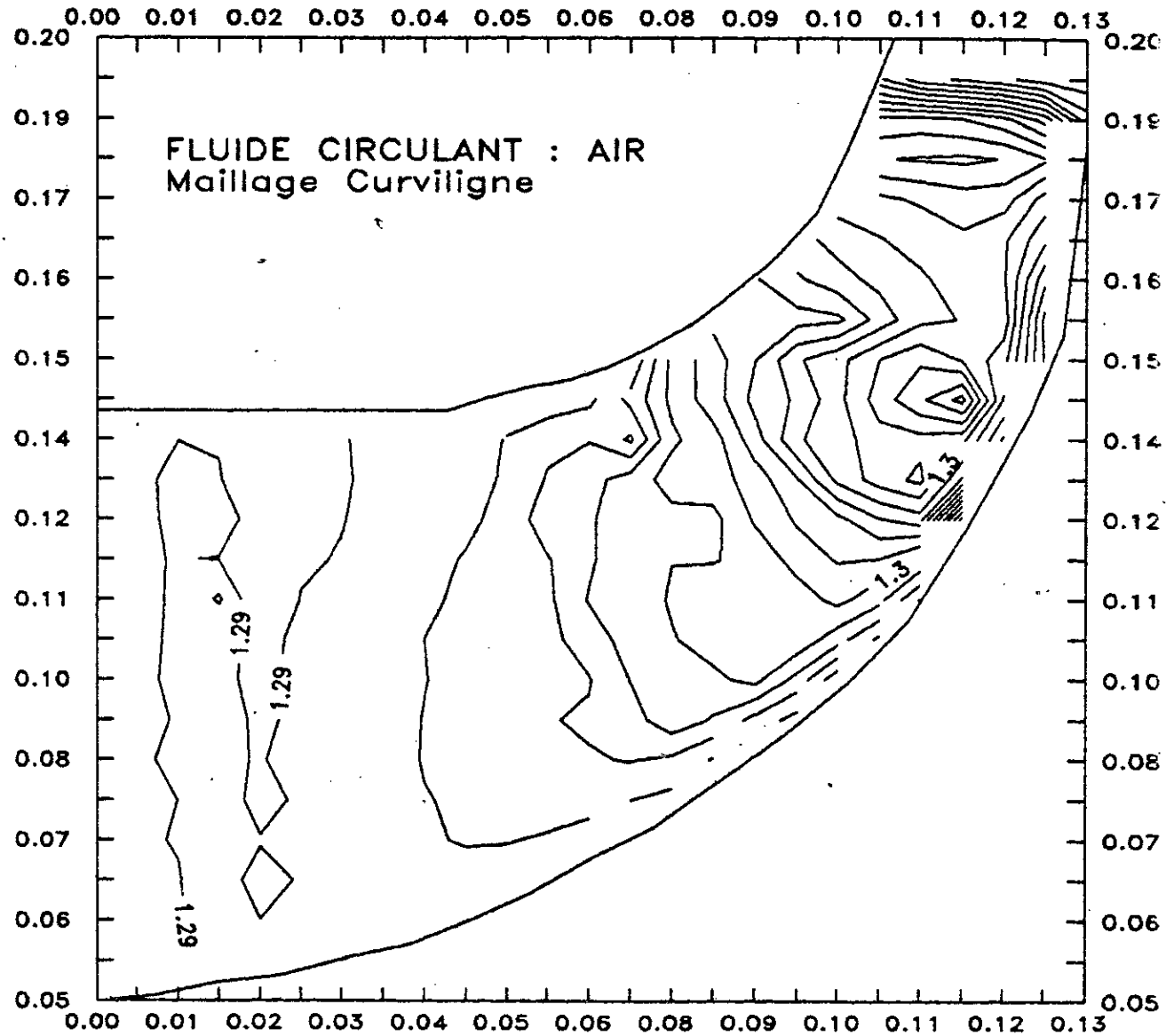
REPARTITION DES LIGNES DE COURANT



REPARTITION DES LIGNES DE COURANT



DISTRIBUTION DES DENSITES



REPARTITION DES LIGNES DE COURANT

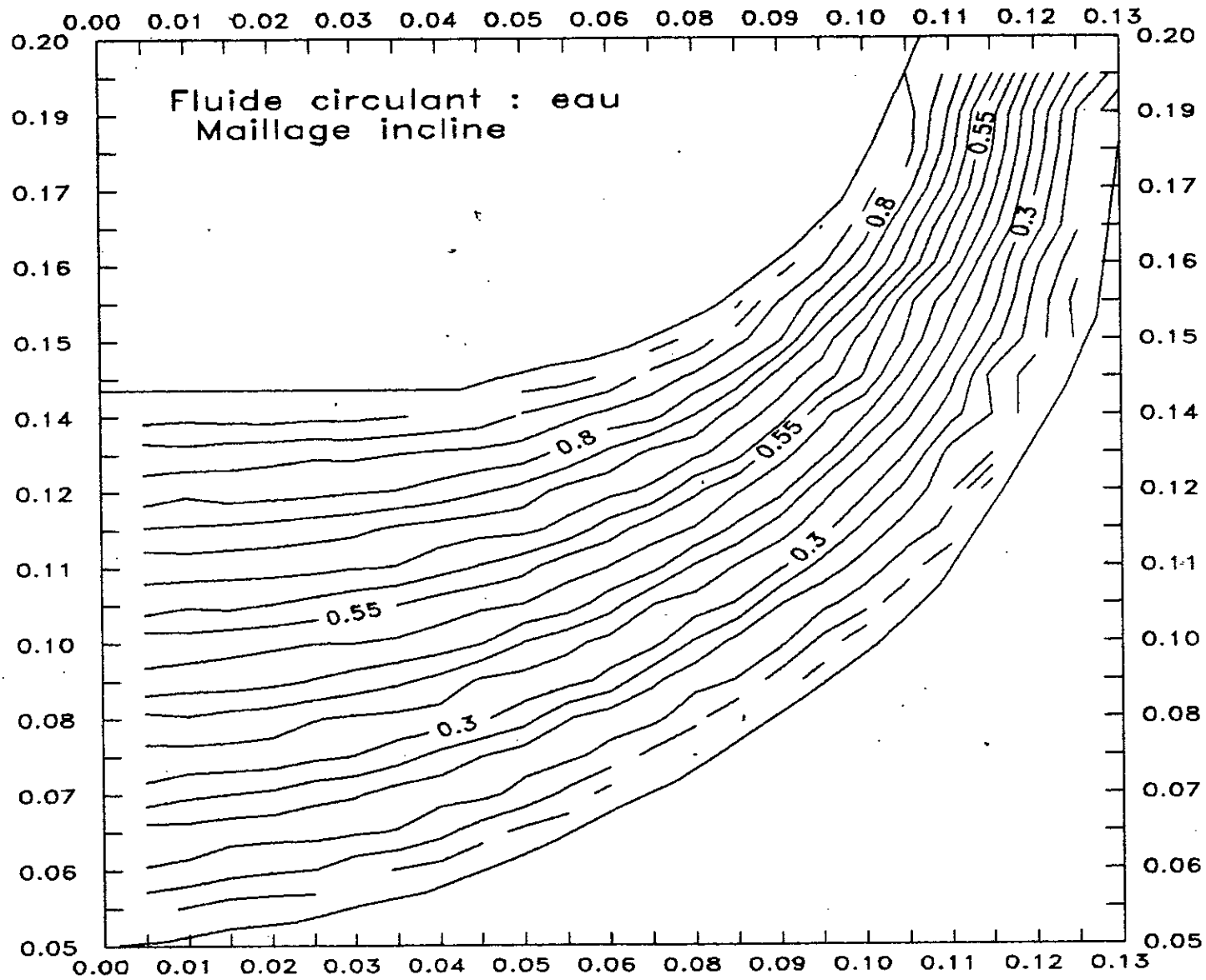


Fig. Distribution des lignes de courant sur la surface aube a aube

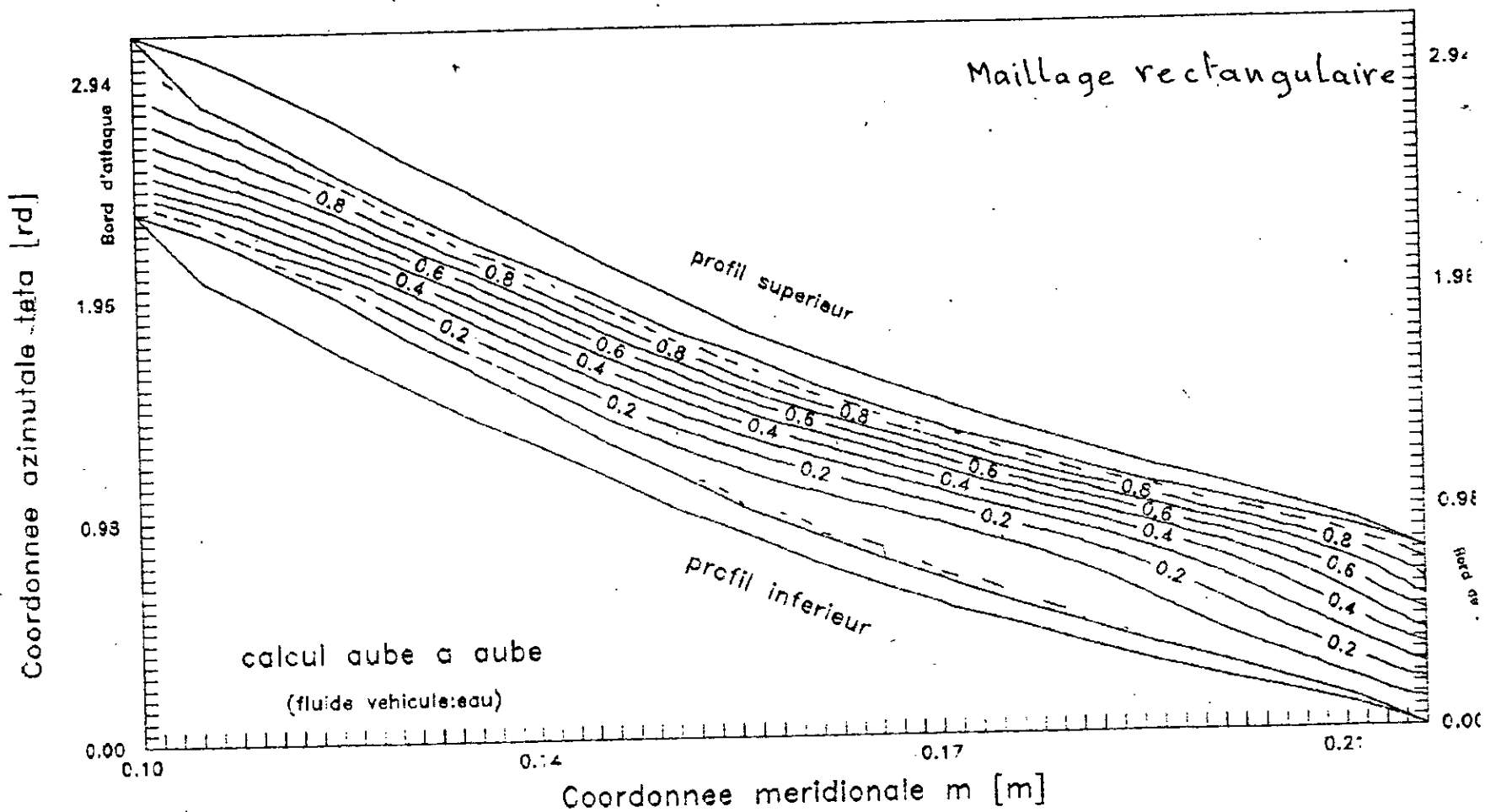


Fig. Rapport de compression dans le plan aube a aube d'une pompe centrifuge

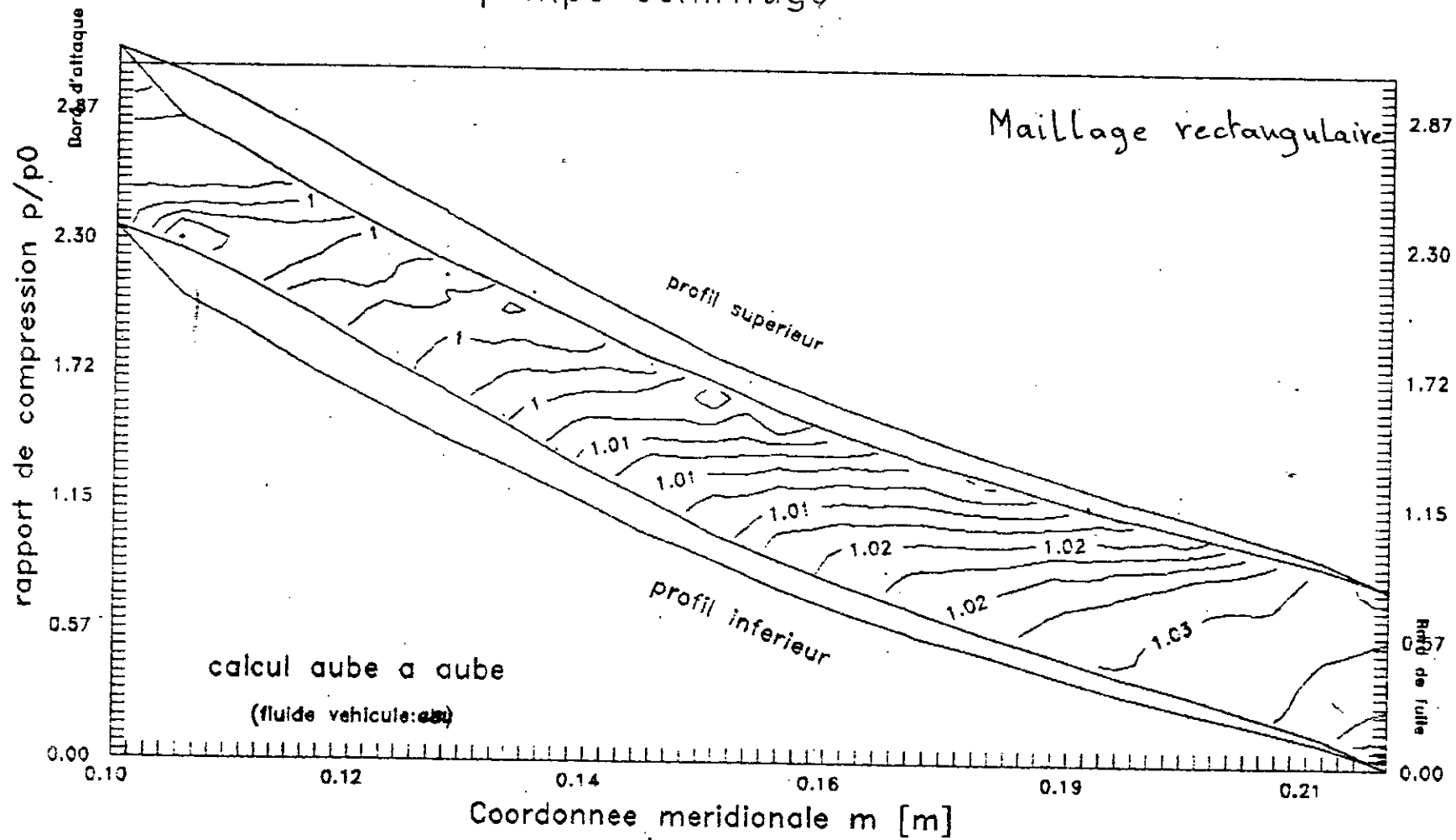


Fig. Evolution du nombre de mach relatif sur la surface aube a aube

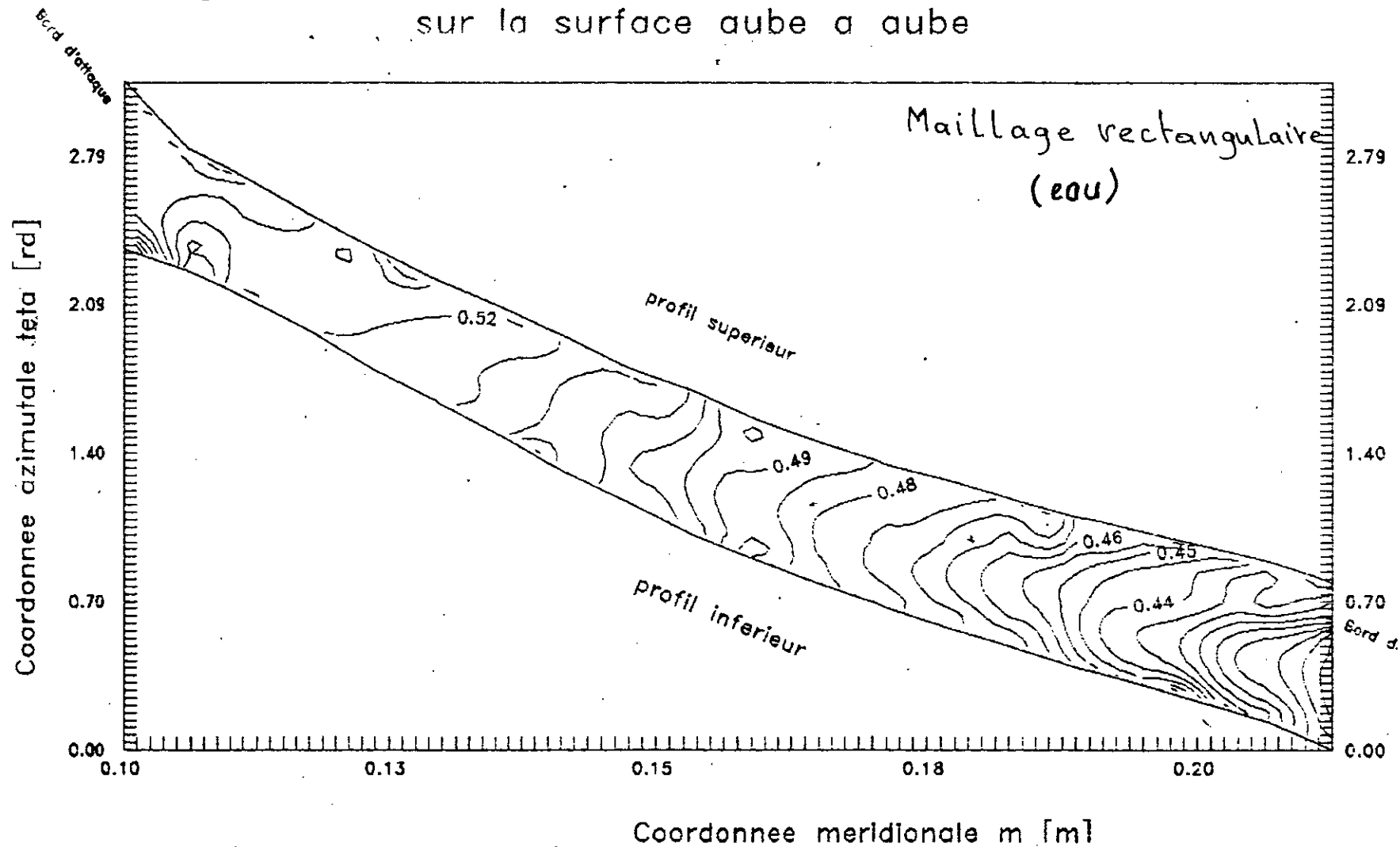


Fig Distribution des lignes de courant sur la surface aube a aube

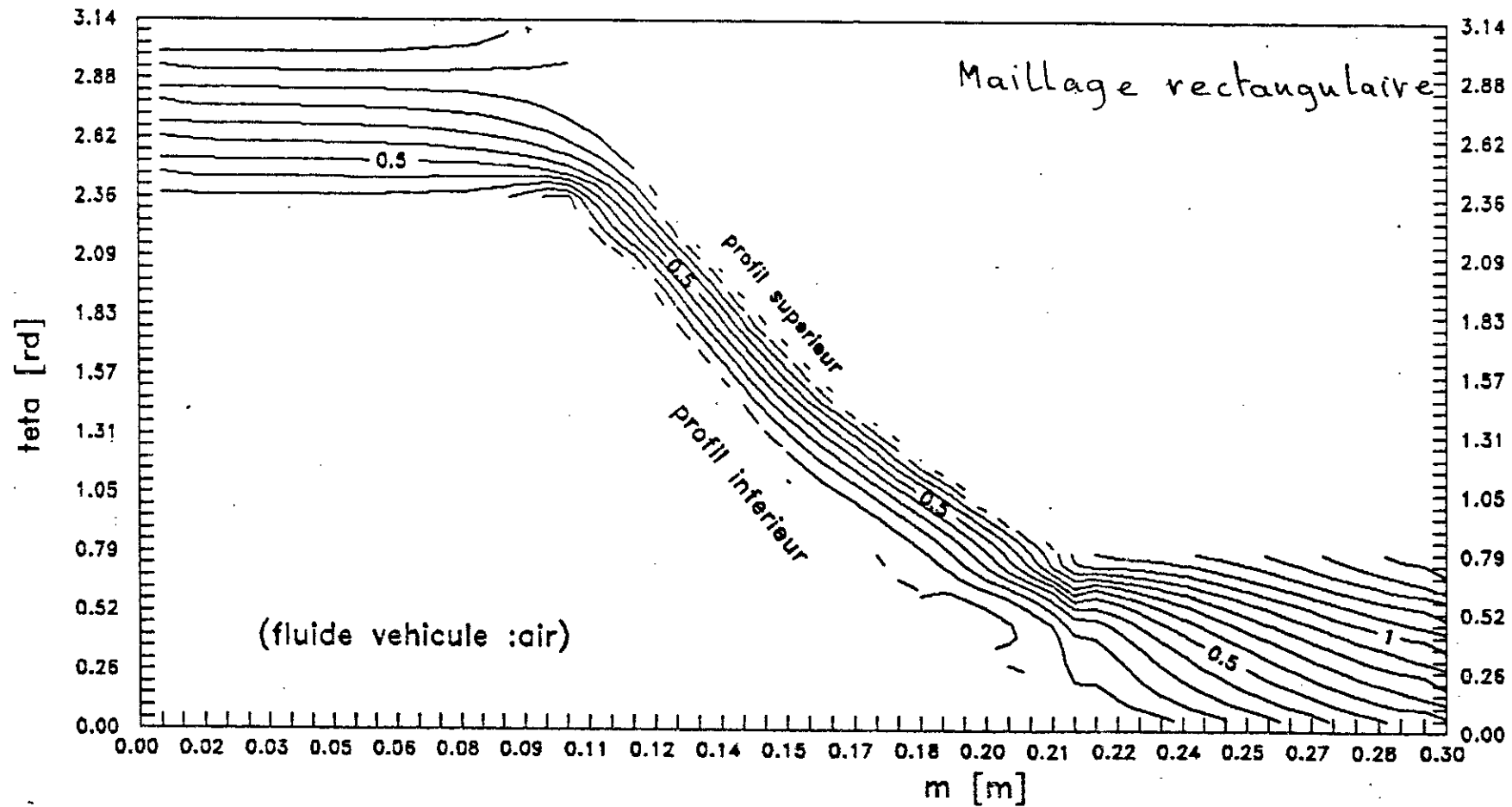


Fig.

Repartition du rapport de compression

calcul aube a aube

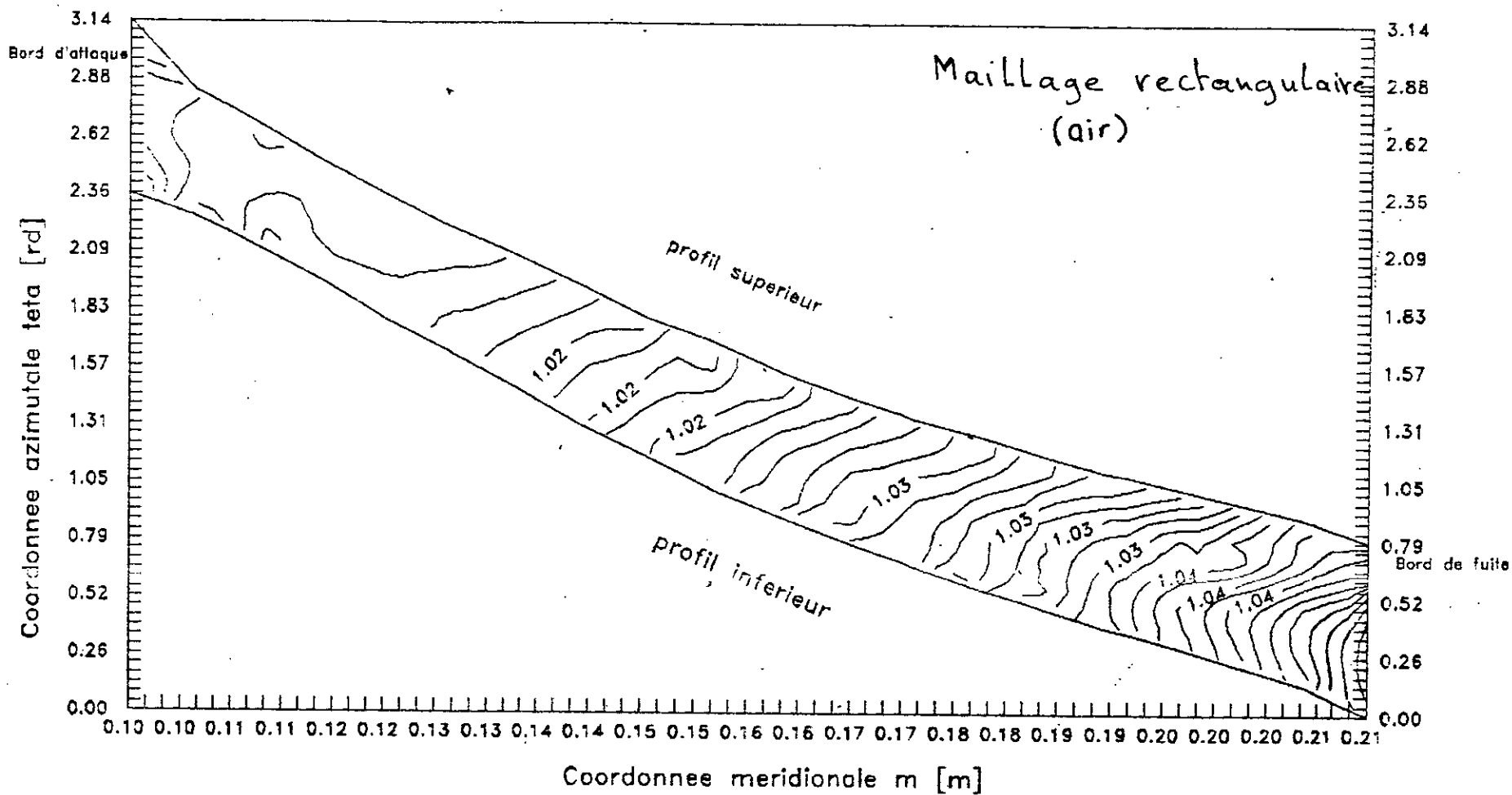
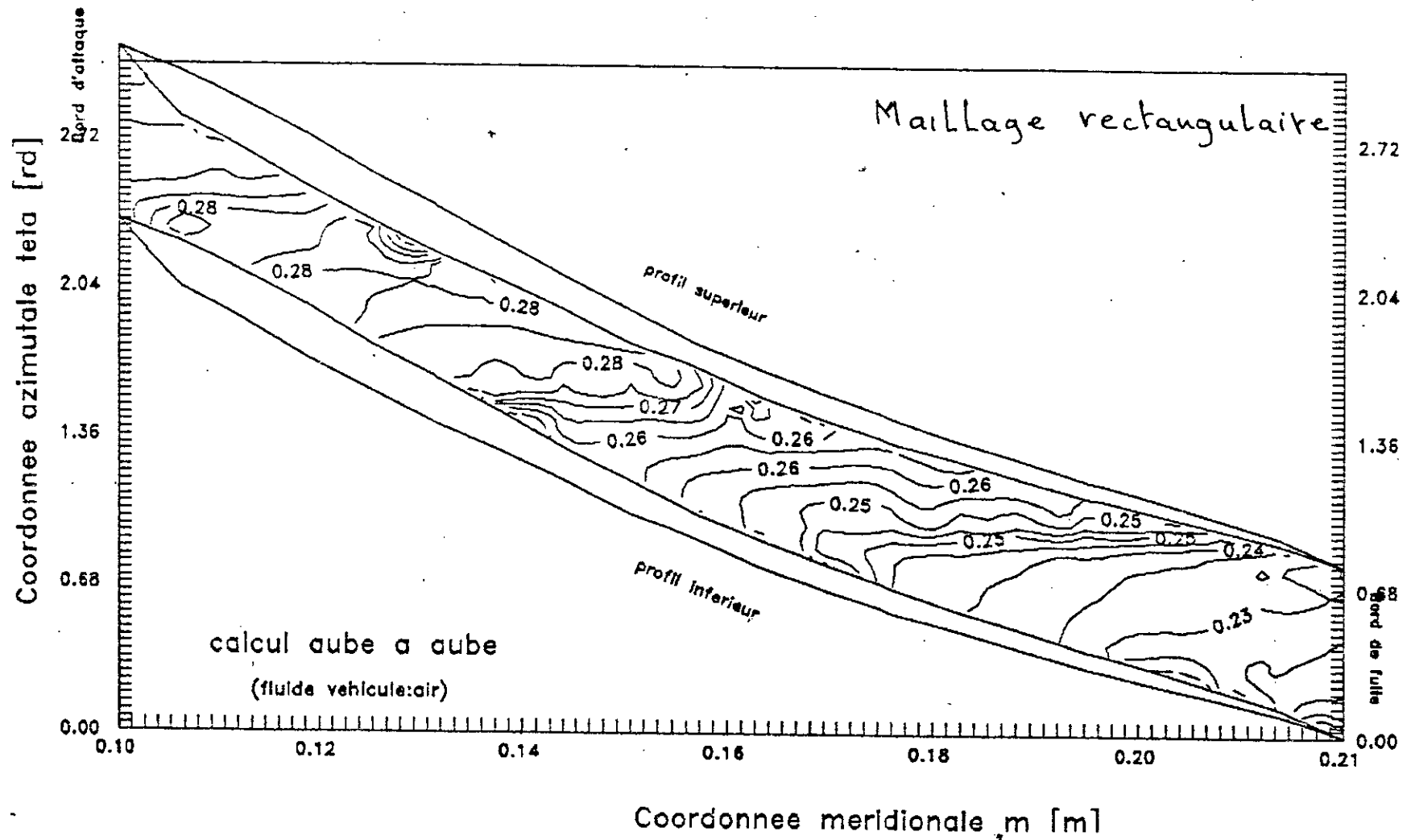
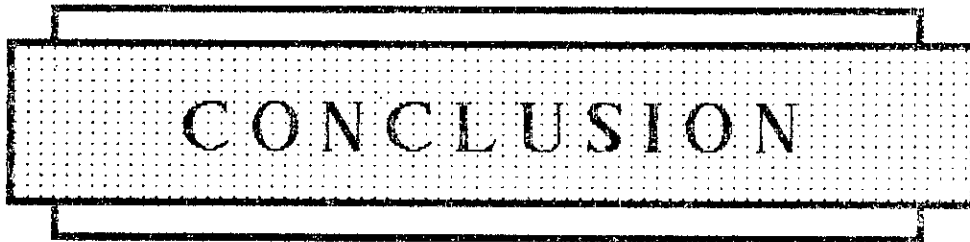


Fig. Evolution du nombre de mach relatif





CONCLUSION

CONCLUSION :

Dans ce présent travail, on a établi un code pour le calcul d'un écoulement dans une roue de turbomachine, ce calcul comprend :

- le modèle de WU calculé à partir de plusieurs maillage
- un calcul de la couche limite suivant un modèle établi par SCHLICHTING.
- une étude des différentes paramétriques des pertes .
- une étude des conditions de charge.

Au terme de ce travail on peut dire qu'on a met en evidence tous les parametres susceptibles de modeliser un écoulement dans une roue de turbomachine.

Nous proposons, pour une éventuelle finalisation de ce travail, un assemblage des différents calculs et études en un logiciel final permettant d'approcher de façon significative l'écoulement réel dans une turbomachine.

ANNEXE A

Introduction des dérivées spéciales dans l'équation de continuité

D'après l'équation (1) du chapitre 1 on a :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot W_u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot W_z) = 0 \quad (1)$$

Or la définition des dérivées spéciales permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot W_r) = \overline{\frac{\partial}{\partial r}} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot r \cdot W_r) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot W_z) = \overline{\frac{\partial}{\partial r}} (\rho \cdot W_z) + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot W_z) \quad (3)$$

en substituant (2) et (3) dans l'équation (1) on obtient :

$$\frac{1}{r} \left[\overline{\frac{\partial}{\partial r}} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot r \cdot W_r) \right] + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot W_u) \\ + \left[\overline{\frac{\partial}{\partial r}} (\rho \cdot W_z) + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot W_z) \right] = 0$$

$$\frac{1}{r} \overline{\frac{\partial}{\partial r}} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{1}{z} \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial r}} (\rho \cdot W_z) = - \frac{n_r}{r^2 \cdot n_u} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot r \cdot W_r) \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot W_u) - \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot W_z)$$

$$\text{or } \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot r \cdot W_r) = r \cdot \rho \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \theta}$$

d'où

$$\frac{1}{r} \overline{\frac{\partial}{\partial r}} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{1}{z} \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial r}} (\rho \cdot W_z) = - \frac{\rho \cdot n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \\ - \frac{\rho}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \theta} - \frac{\rho \cdot n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial W_z}{\partial \theta}$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot W_z) = - \frac{\rho}{r \cdot n_u} \left[n_r \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + n_u \cdot \frac{\partial W_u}{\partial \theta} - n_z \cdot \frac{\partial W_z}{\partial \theta} \right]$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot W_r) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot W_z) = \rho \cdot C(r, z)$$

Introduction des dérivées spéciales dans l'équation de mouvement

a)- L'équation de mouvement radial s'écrit :

$$- \frac{W_u}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right] + W_z \cdot \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] = - \frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial r} \quad (4)$$

or d'après la définition des dérivées spéciales, pour toute fonction q :

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial r} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial q}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial q}{\partial \theta}$$

Ce qui permet de décrire l'équation (4) de la manière suivante:

$$- \frac{W_u}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cdot V_u) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right] + W_z \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{n_r}{r \cdot n_u} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} \right] = \left[- \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \frac{\partial I}{\partial \theta} \right] + T \cdot \left[\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right]$$

$$\rightarrow \frac{W_u}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) \right] + W_z \cdot \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] = - \frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{n_z \cdot W_z}{r \cdot n_u} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \left[\frac{W_u}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cdot V_u) + W_z \cdot \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial I}{\partial \theta} - T \cdot \frac{\partial S}{\partial \theta} \right] \quad (5)$$

or d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$T \cdot dS = dU + P \cdot dV$$

$$\text{avec} \quad h = u + p \cdot v \Rightarrow dh = du + p \cdot dv + v \cdot dp$$

$$\text{donc} \quad du = dh - p \cdot dv - v \cdot dp$$

$$\text{d'où} \quad T \cdot dS = dh - v \cdot dp$$

→

$$T \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} - v \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

avec $v = 1/\rho$ ce qui permet d'écrire que :

$$T \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (6)$$

Maintenant on se propose de calculer $\frac{\partial I}{\partial \theta}$

La rothalpie I est définie par : $I = H - \omega r.V_u$

où H : est l'enthalpie totale

ω : est la vitesse de rotation de la roue

V_u : est la vitesse circonférentielle

avec $H = h + V^2/2$

où h : est l'enthalpie statique

V : est la vitesse absolue de la particule

donc $I = h + V^2/2 - \omega r.V_u \quad (7)$

or

$$V = \begin{cases} W_r \\ W_u + \omega r \\ W_z \end{cases}$$

d'où $V^2 = W^2 + \omega^2 r^2 + 2.W_u.\omega.r$

Après substitution de (7) dans (6) on obtient :

$$I = h + W^2/2 + \omega^2.r^2/2 + \omega.r.W_u - \omega.r.V_u$$

$$I = h + W^2/2 - \omega^2.r^2/2$$

d'où

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial W^2}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega^2.r^2)$$

avec $-\frac{\partial}{\partial \theta} (\omega^2.r^2) = 0$

et $\frac{\partial W^2}{\partial \theta} = 2.W \frac{\partial W}{\partial \theta} = 2.(W_r \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + W_u \frac{\partial W_u}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial \theta})$

et par suite

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + W_u \frac{\partial W_u}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial \theta} \quad (8)$$

la substitution de (6) et (8) dans (5) donne :

$$\frac{W_u}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) \right] + W_z \cdot \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] = - \frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{n_z \cdot W_z}{r \cdot n_u} \frac{\partial W_r}{\partial \theta}$$

$$- \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \left[\frac{W_u}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cdot V_u) + W_z \cdot \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} - W_r \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \theta} - W_u \cdot \frac{\partial W_u}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]$$

$$\frac{W_u}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) \right] + W_z \cdot \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] = - \frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$- \frac{1}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \theta} (n_r \cdot W_r + n_u \cdot W_u + n_z \cdot W_z)$$

or

$$n_r \cdot W_r + n_u \cdot W_u + n_z \cdot W_z = 0$$

vu que \vec{n} et \vec{W} sont perpendiculaires alors :

$$\frac{W_u}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) \right] + W_z \cdot \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] = - \frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (9)$$

b) - équation de mouvement circonférentiel :

On a :

$$\frac{W_u}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) \right] + W_z \cdot \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] = - \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{T}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \quad (10)$$

en procédant de la même manière qu'en (a) c'est à dire utilisant la définition de la dérivées spéciales; l'équation (10), et après rearrangement, devient:

$$- \frac{W_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) + \frac{W_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot V_u) = - \frac{1}{r \cdot n} \frac{\partial W_u}{\partial \theta} (n_r \cdot W_r + n_u \cdot W_u + n_z \cdot W_z) - \frac{1}{r \cdot \rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (11)$$

c)- equation de mouvement axial :

$$- W_r \cdot \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] + W_u \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right] = - \frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial r} \quad (12)$$

Moyennant la définition des dérivées spéciales et après substitution des dérivées partielles par rapport à r et z on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} - W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{n_r}{r \cdot n_u} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} \right] + W_u \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_u}{\partial z} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \frac{\partial W_u}{\partial \theta} \right] \\ = \left[\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \frac{\partial I}{\partial \theta} \right] + T \cdot \left[\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Après rearrangement et substitution des équations (3) et (8) dans l'équation (13) on obtient :

$$- W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial r} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] - W_u \frac{\partial W_u}{\partial z} = - \frac{\partial I}{\partial z} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{n_z \cdot \partial p}{r \cdot \rho \cdot n_u \cdot \partial \theta}$$

or

$$\frac{\partial W_u}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot V_u)$$

d'où

$$- W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial r} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] - \frac{W_u}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot V_u) = - \frac{\partial I}{\partial z} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{n_z \cdot \partial p}{r \cdot \rho \cdot n_u \cdot \partial \theta} \quad (14)$$

remarque 1 : on notera que dans tout notre travail , on manipule des dérivées spéciales comme si elles étaient des dérivées partielles ordinaire

remarque 2 on remarquera que dans chacune des équations de mouvement, le regroupement $-\frac{1}{r \cdot \rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} n_i$

ou $n_i = n_r, n_u, n_z$

chacun de ces termes représente une composante de la force F qui agit sur l'aube.

cette force peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = - \frac{1}{r \cdot \rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{n}$$

INTRODUCTION DES DERIVEES SPECIALES DANS L'EQUATION D'ENERGIE

L'équation d'énergie s'écrit :

$$W_r \cdot \frac{\delta I}{\delta r} + W_u \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} + W_z \cdot \frac{\delta I}{\delta z} = Q \quad (15)$$

$Q = 0$ pour un écoulement adiabatique.

Sachant que $\frac{\delta I}{\delta r} = \frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \frac{\delta I}{\delta \theta}$

$$\frac{\delta I}{\delta z} = \frac{\overline{\delta I}}{\delta z} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \frac{\delta I}{\delta \theta}$$

En tenant compte de la condition d'écoulement adiabatique l'équation (15) devient :

$$W_r \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta r} + \frac{n_r}{r \cdot n_u} \frac{\delta I}{\delta \theta} \right] + W_u \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} + W_z \left[\frac{\overline{\delta I}}{\delta z} + \frac{n_z}{r \cdot n_u} \frac{\delta I}{\delta \theta} \right]$$

$$\rightarrow W_r \cdot \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \cdot \frac{\delta I}{\delta z} = - W_r \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} - W_z \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta}$$

$$W_r \cdot \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \cdot \frac{\delta I}{\delta z} = - \frac{1}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\delta I}{\delta \theta} (n_r \cdot W_r + n_u \cdot W_u + n_z \cdot W_z)$$

Le vecteur vitesse relative \vec{W} étant perpendiculaire au vecteur unitaire \vec{n} donc :

$$\vec{n} \cdot \vec{W} = 0$$

D'où

$$W_r \cdot \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \cdot \frac{\delta I}{\delta z} = 0$$

ANNEXE B

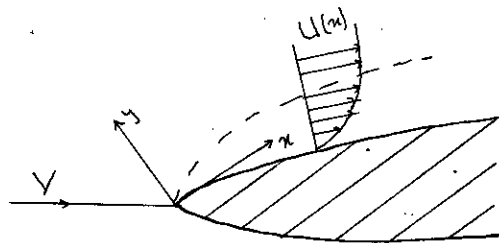
SIMPLIFICATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES POUR L'ETUDE
DE LA COUCHE LIMITE

En général, il est possible d'avancer que l'épaisseur de la couche limite décroît avec la viscosité, ou plus généralement, que celle-ci décroît quand le nombre de REYNOLDS augmente.

Il a été démontré d'après beaucoup de solutions exactes des équations de NAVIER-STOKES que l'épaisseur de la couche limite est proportionnelle à la racine carrée de la viscosité cinématique: $\delta \approx \nu^{1/2}$

Parmi les simplifications qui sont à introduire dans les équations de NAVIER-STOKES figurera celle relative à l'épaisseur de la couche limite qui est considérée comme très petite comparée à la longueur caractéristique L du corps: $\delta \ll L$.

Nous allons maintenant procéder à la discussion des simplifications des équations de NAVIER-STOKES. nous estimerons l'ordre de grandeur de chaque terme. Dans le problème bidimensionnel dans la figure ci-dessous, nous commencerons par supposer la paroi comme ayant une forme plate et coïncidant avec la direction X , la direction Y sera perpendiculaire à celle-ci.



On réécrit maintenant les équations de NAVIER-STOKES sous la forme adimensionnelle, en référant toutes les vitesses à la vitesse V de l'écoulement libre et les dimensions linéaires à la longueur caractéristique L du corps qui est choisie de telle sorte que la dérivée adimensionnelle $\partial u / \partial x$ ne dépasse pas l'unité dans la région considérée.

La pression est rendue adimensionnelle avec ρV^2 , et le temps est referé à L/V . ainsi, l'expression :

$$R = V.L.\rho / \mu = V.L / \nu$$

représente le nombre de REYNOLDS qui est considéré très grand. avec ces suppositions, et en retenant les mêmes symboles pour les quantités adimensionnelles, les équations de NAVIER-STOKES pour un écoulement plan deviennent :

$$\text{direction X : } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\text{direction Y : } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Les conditions aux limites sont :

absence de glissement entre le fluide et la paroi .

i.e : $u=v=0$ pour $y=0$, et $u=U_0$ pour y tendant vers l'infini.

Nous retenons le symbole δ pour l'épaisseur de la couche limite adimensionnelle δ/L , d'où : $\delta \ll 1$.

Nous allons maintenant estimer l'ordre de grandeur de chaque terme pour pouvoir négliger certains termes. Puisque $\partial u / \partial x$ est d'ordre 1, nous voyons d'après l'équation de continuité que $\partial v / \partial y$ est aussi d'ordre 1. Puisque à la paroi, $v=0$, alors dans la couche limite, v est d'ordre δ . Ainsi $\partial v / \partial x$ et $\partial^2 v / \partial x^2$ sont aussi d'ordre δ . Il en est donc de même pour $\partial^2 u / \partial x^2$.

Nous supposons que l'accélération instationnaire $\partial u / \partial t$ est de même ordre que le terme convectif $u \cdot \partial u / \partial x$.

Puisque la composante de la vitesse parallèle à la paroi croit de zéro au niveau de la paroi à la valeur un dans le courant libre à travers l'épaisseur δ de la couche limite, d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{\delta}{\delta} \approx 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\delta}$$

La première équation peut être simplifiée maintenant en négligeant $\partial^2 v / \partial x^2$ devant $\partial^2 v / \partial y^2$. de la seconde équation nous déduisons que $\partial P / \partial y$ est d'ordre δ .

L'accroissement de la pression à travers la couche limite, pouvant être obtenue par intégration de la seconde équation, est de l'ordre δ^2 , i.e très petit. Ainsi la pression dans la direction normale à la couche limite est pratiquement constante.

Au bord extérieur de la couche limite, la composante parallèle u devient égale à celle du flux extérieur, $u(x, t)$.

Puisque le gradient de vitesse n'est pas grand, les termes visqueux de l'équation (1) s'annulent pour des grandes valeurs de R , et par conséquent pour l'écoulement externe on aboutit à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_e \frac{dU_e}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad (4)$$

où les symboles représentent des quantités dimensionnelles.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, l'équation est simplifiée considérablement et la pression, ne dépend que de x . nous aurons alors :

$$P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 = \text{constante.}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations de NAVIER-STOKES simplifiées, connus sous le nom de "équation de PRANDTL pour la couche limite". Nous revenons aux quantités dimensionnelles et on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} y=0 & u=v=0 \\ y=\infty & u=U(x,t) \end{array} \quad (7)$$

dans le cas d'un écoulement stationnaire, le système ci dessus devient:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

ANNEXE C

CRITERES DE CHARGE POUR UN COMPRESSEUR

Les approches adoptées par les auteurs pour déterminer les décrochages, dans les différentes régions des compresseurs centrifuges ou parfois la ligne de pompage, sont généralement semblables à celles utilisées dans les compresseurs axiaux. Le principe consiste à définir une limite de bon fonctionnement au-delà de laquelle l'écoulement est censé d'être décollé dans le composant considéré.

Il existe dans la littérature un foisonnement de critère dans certains d'entre eux seront rappelés dans cette annexe. La plupart de ces critères sont simples et ne tiennent, en général, compte que d'un nombre très limité de paramètres, ce qui leurs confèrent un caractère plutôt qualitatif que quantitatif.

Il faut faire la distinction entre les décollement qui se produisent dans la partie axiale de la roue et le décollement qui se produit sur la partie radiale (jet-sillage); Parfois, si les formes méridiennes et les formes d'aubages sont mal choisies, ces décollement peuvent se regrouper en tête de pale. Parmi les critères, on peut citer:

CRITERES DE RODGERS :

Basés sur la diffusion entre l'entrée (1) et la sortie (2) de la roue

- Critère ne tenant pas compte de jet-sillage (calcul en tête de pale):

$$D = \frac{W_{1max}}{W_{2min}} = 2$$

- Critère tenant compte de jet-sillage (calcul au rayon moyen):

$$1.4 < \frac{W_1}{W_{250p}} < 1.7$$

- Critère basé sur le facteur de diffusion (calcul au rayon moyen):

$$0.5 < 1 - \frac{W_2}{W_1} + f(U_2, q, M_1) + 0.1 b \left(1 + \frac{W_2}{W_1}\right) < 0.66$$

q : coefficient de travail

- CRITERE LONGITUDINAL:

- sans tenir compte de jet-sillage:

$$DL = \frac{W_{zsep}}{W_{zmax}} = 0.9$$

- tenant compte de jet-sillage :

$$1.4 < DL = \frac{M_{t1}}{W_{zsep}} = f(M_{t1}) < 1.7$$

avec $0.5 < M_{t1} < 1.1$

PERTES PAR INCIDENCE:

La région d'entrée de la roue d'un compresseur centrifuge ressemble à celle d'un compresseur axial, aussi les calculs des pertes des profils de la même façon et basés sur la formulation proposée par RODGERS.

L'angle d'incidence nominale ou optimum i_{opt} est défini comme étant celui qui donne le minimum de pertes. pratiquement, il représente le milieu de la plage d'incidence Δi où les pertes ne dépassent pas le double du niveau minimum. L'incidence nominale est fonction de l'angle β_1 formé par la ligne moyenne de la pale avec le plan meridien à l'entrée et du nombre de mach relatif en amont de la roue mobile M_{t1} , il est donné par la corrélation suivante:

$$i_{opt} = 2 \left[27.5 - 0.4 \beta_1 - (22.5 - 0.3 \beta_1) \cdot \frac{(M_{t1} - 1)^2}{0.36} \right]$$

La plage d'incidence à la limite de laquelle les pertes sont doublées et calculées par

$$\Delta i = 5 + (12.5 - 0.1 \beta_1) \frac{(M_{i1} - 1)^2}{0.36}$$

le travail équivalent à la perte de la pression totale est donnée par :

$$\Delta H_{inc} = 0.05 (\text{coef} - 1) W_i^2$$

où : W_i est la vitesse relatif à l'entrée .

$$\text{coef} = 1 + 0.1667 \left| \frac{i - 1}{\Delta i} \right| + 0.8333 \left| \frac{i - 1}{\Delta i} \right|^2$$

Dans le cas où le nombre de Mach est supersonique, on introduit une correction supplémentaire définit par :

$$\Delta H_{inc} = 0.1 (M_{i1}^2 - 1) W_i^2$$

PERTES PAR BLOCAGE :

La présence des pales et de l'épaisseur de la couche limite entre le bord d'attaque et le col de la roue mobile diminue la section de passage et entraîne ainsi un blocage qui est pris en compte par le coefficient de blocage représenté par le produit de deux coefficients dans l'un est fonction d'angle d'incidence i et l'autre est fonction du nombre de Mach :

$$c_{blc} = c_{blc}(i) \cdot c_{blc}(M_v)$$

où : les effets d'incidence sont donnés par :

$$c_{blc}(i) = 1 - 0.009 i - 0.006 i^2$$

et les effets du nombre du Mach par :

$$c_{blc}(M_v) = 1.1 - 0.125 M_v$$

$$c_{blc}(M_v) = 0.975$$

$$0.8 < M_v < 1$$

$$M_v > 1$$

Donc on forme un systeme (8x8) qui permet de calculer les dérivées partielles premières et secondes de ψ respectivement par rapport à x et y et qui sont:

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_0 = \frac{h_4^2 \cdot \psi_3 - h_3^2 \cdot \psi_4 + (h_3^2 - h_4^2) \psi_0}{h_3 \cdot h_4 \cdot (h_3 + h_4)}$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_0 = \frac{h_1^2 \cdot \psi_2 - h_2^2 \cdot \psi_1 + (h_2^2 - h_1^2) \psi_0}{h_2 \cdot h_1 \cdot (h_2 + h_1)}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_0 = \frac{h_3 \cdot \psi_4 + h_4 \cdot \psi_3 - (h_3 + h_4) \psi_0}{h_3 \cdot h_4 \cdot (h_3 + h_4) / 2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right]_0 = \frac{h_1 \cdot \psi_2 + h_2 \cdot \psi_1 - (h_2 + h_1) \psi_0}{h_2 \cdot h_1 \cdot (h_2 + h_1) / 2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right]_0 = \frac{\psi_6 - \psi_5 - \psi_8 - \psi_7}{(h_4 + h_3) (h_1 + h_2)}$$

R M Q On peut approximer de trois manières différentes les termes premières de la fonction ψ suivants les trois cas cités ci-dessus:

a) - cas ou le noued k se trouve à l'interieur de la grille de maillage :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{l+1} - \psi_{l-1}}{2 \cdot \Delta y} + \theta(\Delta y^2)$$

difference finie centrée

b) - cas ou le noued k est situé sur la frontiere inferieur de la machine :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{l+1} - \psi_l}{\Delta y} + \theta(\Delta y^2)$$

difference finie decentrée à gauche

c) - cas ou le noued k est situé sur la frontiere superieur de la machine :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_l - \psi_{l-1}}{\Delta y} + \theta(\Delta y^2)$$

difference finie decentrée à droite

EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES

La définition classique de la dérivées d'une fonction $g(x)$ à une seul variable x est :

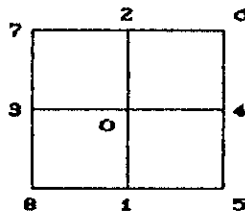
$$\frac{dg}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Dans un computer digital, la limite est remplacée par une somme de terme, qui tend à l'approcher. L'erreur commise sera négligeable lorsque le processus est continue, c'est à dire lorsque Δx est infiniment petit. Pour ce faire il faudra substituer les dérivées par les équations aux différences finies dans la formulation se base sur le développement des fonctions en series de TAYLOR.

Soit une fonction à deux variables réelles $\psi(x,y)$

Dans tout ce qui va suivre, on utilisera la notation au lieu de $\psi_k(x,y)$ où k est le numéro de noued considéré et ψ_k la valeur de la fonction de ψ en ce noued.

Soit la structure de la figure ci dessous :



les h_i étant les distances qui séparent le noued 0 des quatre noueds 1,2,3 et 4 .

Le développement limité de second ordre autour du point 0 s'écrit de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \psi_k = \psi_0 + \partial x \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_0 + \partial y \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_0 + \frac{\partial x^2}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_0 + \partial x \partial y \cdot \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right]_0 \\ + \frac{\partial y^2}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right]_0 \end{aligned}$$

où k designe le numéro de noued .

BIBLIOGRAPHIE

[1]- H.MARSH

A digital computer program for the through-flow fluid mechanics in an arbitrary turbomachine using a matrix method
National gas turbine establishment report/ N° R.282

[2]- R.ZGOULLI

Contribution à l'étude de couplage écoulement sain-couche limite dans un calcul de grille d'aubes
These de doctorat 1984

[3]- D.BUISINE et P.MICHEAU

Écoulement tridimensionnel dans une roue. calcul effectivement tridimensionnel des écoulements dans les turbomachines par la méthode S_1-S_2 .
Journal de mécanique théorique et appliquée vol 6.N° 4, 1987

[4]- R.P.DRING and H.D.JOSLYN

Through-flow modeling of axial turbomachinery
Journal of engineering for gas turbines and power vol 108/247, 1986

[5]- J.P.VRUILLOT

Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale
Office national d'études et de recherches aérospatiales 1973

[6]- H.MITON

Etude théorique et expérimentale de problèmes aérodynamiques concernant les compresseurs transsoniques.
Université d'AIX-MARSEILLE II Thèse Doctorat 1978

[7]- J.H.HORLOCK

Axial flow turbines, fluid mechanics and thermodynamics. 1973

- [8]- C.BOSMAN and H.MARSH
An improved method for calculating the in turbomachines including a consistent loss model
Journal mechanical engineering science 1974
- [9]- O.P.SHARMA and T.L.BUTLER
Prédications of endwall losses and secondary flows in axial flow turbine cascades
Journal of turbomachinery vol 109/229 1987
- [10]- Y.YAMAMOTE
Production and developpement of secondary flow and losses in two type of straingt turbine cascad a stator case
Journal of turbomachinery vol 109/188 1987
- [11]- A.YAMAMOTE
Production and developpement of secondary flow and losses in two type of straingt turbine cascad a rotor case
Journal of turbomachinery vol 110/188 1987
- [12]- D.C.WISLER
Loss reduction in axial-flow compressors through low-speed model testing
Journal of turbomachinery vol 107/354 1985
- [13]- B.MAHFOUD et M.AIT TALEB
Couplage, calcul de la couche limite, méthode inverse
Projet fin d'étude 1992
- [14]-SCHLICHTING
Bondary layer théory
- [15]- G.L.MELLOR and G.M.WOOD
An axial compressor end-wall boundary layer
Journal of turbomachinery 1973

- [16]- J.H.WAGNER, R.P.DRING and JOSLYN
Inlet boundary layer effects in an axial compressor rotor: part II
through-flow effects .
journal of engineering for gaz turbines and power vol 107/381 1985
- [17]- J.H.WAGNER, R.P.DRING and JOSLYN
Inlet boundary layer effects in an axial compressor rotor: part II
blade-to-blade effects .
journal of engineering for gaz turbines and power 1985
- [18]- BELAHCENE AIT-HADAD
Détermination théorique et numérique des performances et limites de
fonctionnement des compresseurs centrifuges
These de doctorat 1991
- [19]- G.MEAUZE, R.SOVRANO et Y.BIRAUD
Synthèse des méthodes numériques développées à l'ONERA, applicables
aux calculs des écoulements dans les turbomachines
ONERA No 99 1983
- [20]- M.FENAIN
Méthodes de relaxation pour la résolution d'équations elliptique dans
des domaines de frontières quelconques. Application aux calcul
d'écoulement subcritiques
Journal de mécanique appliquée vol 1 No 1 1977
- [21]- J.P.VEUILLLOT
Calcul numérique de l'écoulement transonique d'un fluide parfait dans
une grille d'aubes
ONERA No 6 1975