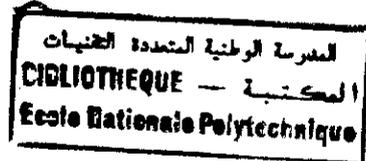


وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

MAILLAGE DES
SURFACES COMPLEXES POUR
CONTROLE SUR MACHINES A
MESURER
TRIDIMENTIONNELLES

Proposé par :

Mr BOUAZIZ . M

Etudié par :

KADID HAMID

ZITOUNE DJAMEL

Dirigé par

Mr BOUAZIZ . M

PROMOTION : JUILLET 1993

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

MAILLAGE DES
SURFACES COMPLEXES POUR
CONTROLE SUR MACHINES A
MESURER
TRIDIMENTIONNELLES

Proposé par :

Mr BOUAZIZ. M

Etudié par :

KADID HAMID

ZITOUNE DJAMEL

Dirigé par

Mr BOUAZIZ. M

PROMOTION : JUILLET 1993

REMERCIEMENTS .

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Nous tenons à remercier tous les enseignants des universités Algériennes en général et ceux de l' E . N . P en particulier pour avoir contribué à notre formation d'ingénieur surtout du département Génie . Mécanique .

Nous exprimons toute notre gratitude à :

-M^r BOUAZIZ (E . N . P -El Harrach)

-M^r BELBLIDIA (E . N . P -EL Harrach)

-M^r HASSAID (I . N . G . M - Boumerdés)

pour leur conseils et leurs sollicitudes permanentes.

Nous remercions également le personnel des différents laboratoires de l' E . N . P d'Alger pour leur aide à l'élaboration de notre P . F . E .

الملخص

لأخذ بعين الاعتبار الأهمية التي تولها الآلة القياسية الثلاثية الأبعاد في مراقبة المساحات المعقدة، فإن هذا العمل يتضمن في المرحلة الأولى عرض طريقتي تقسيم المساحات المتمثلتين في نموذجي بييزي وبيسبلين وفي المرحلة الثانية نلتحق بهاتين الطريقتين من أجل نموذج مساحة أسنان مخروطية و مستقيمة.

RESUME

Compte tenu de l'importance que revêt la machine à mesurer tridimensionnelle dans le contrôle des surfaces complexes, ce travail nous a consisté en première partie à exposer deux méthodes de maillages des surfaces complexes qui sont le modèle de BEZIER et celui de B-SPLINE, en deuxième partie à appliquer ces deux méthodes pour la modélisation de la surface d'une denture conique droite.

SUMMARY

Taking into account the importance of third dimensions measuring machine in controlling, this work consisted of in the first stage we expose two methods for mesh of complexe surfaces wich consiste in BEZIER and B-SPLINE models, the second steps consiste their in the application of this two methode for the mesh of a streight and conique teeth.

uniforme par interpolation	57
II.2.1.6.2) Construction des courbes B-spline non uniforme par interpolation	58
II.2.2) Carreaux de B-spline	60
II.2.2.1) Propriétés des carreaux de B-spline	62
II.2.2.2) Construction de carreaux de B-spline à partir des contraintes géométriques	63
CHAPITRE : III. Application à une denture conique droite (des deux méthode)	65
III.1) Données de calculs pour les deux flancs (voir annexe)	66
III.2) Cas de la méthode de Bézier	66

III.2.1) Algorithme utilisé	66.
III.2.2) Résultats obtenus	68.
III.2.2.1) cas du premier flanc de la denture	68
III.2.2.2) cas du deuxième flanc de la denture	71
III.3) Cas de la méthode de B-spline	74
III.3.1) Algorithme utilisé	74
III.3.2) Résultats obtenus	74
III.3.2.1) cas du premier flanc de la denture	75
III.3.2.2) cas du deuxième flanc de la denture	77
Conclusion et Comparaison des deux méthode des maillages.....	80

ANNEXES.

BIBLIOGRAPHIE ..

chapitre I

INTRODUCTION

I) INTRODUCTION .

I.1) EXPOSE DU PROBLEME.

Les développements importants enregistrés dans l'industrie en générale et en particulier dans le domaine de la fabrication mécanique nécessitent de plus en plus une grande sévérités dans le contrôle de la qualité des pièces afin d'augmenter leurs précision , et donc obtenir les différentes tolérance exigée par les bureaux d'études pour assurer une plus grande fiabilité dans le fonctionnement mécanique des machines; mais souvent dans l'industrie le contrôle se heurte à des surfaces des pièces à contrôler, ce qui a poussé les industriels à créer des machines de mesures complexes mais qui donnent des résultats à la hauteur des exigences .

Notre travail consiste en premier lieu à exposer deux modèles théoriques qui permettent la modélisation des surfaces complexes qui sont respectivement:

*)Modèle de Bézier.

*)Modèle de B-Spline.

Ces deux modèles mathématiques sont, à la base des logiciels, utilisés en C . A . O et C . F . A . O pour la modélisation et la génération des surfaces complexes . A partir de certains points mesurés appartenant à la surface, par un maillage paramétrique approprié , on peut déterminer par interpolation n'importe quelle autre point appartenant à la surface, donc on approche l'expression de la surface $f(x, y) = z$ (qui est difficile à trouver), par une autre expression dépendant de deux paramètres , généralement u et v telque : $P(u, v) = S$. Ces deux paramètres sont généralement de direction perpendiculaire, et peuvent être considérer comme " des distances adimensionnelles " .

En deuxième lieu nous allons appliquer ces deux modèles à la modélisation de la surface d'une denture d'un pignon conique droit dont nous avons les points de la surface palpée .

Les points mesurés sont obtenus à l'aide de la machine à mesurer tridimensionnelle M . M . T . Cette machine est assistée par ordinateur car sa gestion peut se faire par un logiciel écrit en langage H . P

(basic). Le but de ce logiciel peut se résumer en deux points importants:

1) La machine M . M . Ten réalité ne donne pas les coordonnées du point appartenant à la surface mais elle donne celui du centre du palpeur d'où il est nécessaire de faire la translation de la surface des points palpés, à la surface réelle de la pièce qui sont parallèle mais pour cela nous devons connaître l'expression de la surface soit de façon exacte donc $f(x, y) = z$ ou de façon approcher par la méthode de BEZIER ou B-SPLINE .

2) La mémorisation des coordonnées (X,Y,Z) des points mesurés relativement à un repère de préférence appartenant à la pièce et ceci pour une pièce mastère (la première pièce de la série de fabrication), permettra à la machine de faire la comparaison entre la pièce mastère et autres pièces de la série toute en respectant le même repère (X , Y , Z)

pour donner les écarts

I. 2) MACHINE A MESURER TRIDIMENTIONNELLE CM . M . T.

I. 2. 1) HISTORIQUE.

La machine à mesurer moderne à été construite en Italie à la fin de 1962 puis 1973 est apparue une machine à mesurer tridimensionnelle qui à garder sa forme jusqu'à nos jours , car déjà elle été équipé d'un palpeur universel , d'un calculateur et d'une commande numérique . Cette machine est une (ZEISS) modèle U.M.M 500 .

Depuis les M . M . T ne cessent de se développer au fûre et à mesure que leur industrie se développe, actuellement le nombre de M . M . T dans le monde est d'environ 7000 machines .

- *) Il faut plusieurs palpeurs différents .
- *) Il est difficile d'automatiser la M . M . T si on utilise ce type de palpeur .

b) palpeur à bille.

Le contact ponctuelle bille-surface permet de diversifier les surfaces à palper tout en gardant le même palpeur le plus important est de déterminer l'instant où il y a contact sans déformation ni du palpeur ni de la pièce , le contact doit être franc mais assez faible . Nous sommes en presences de deux concepts .

*)Concept du palpéage statique: dans ce cas la bille est positionner sur la pièce et la machine à mesurer s'arrête. En l'absence de frottement , l'effort au contact bille pièce est normal à la matière . Et la mesure est effectuer avec une précision de l'ordre de $0.1 \mu\text{m}$. Enfin les palpeurs statique permettent le palpéage continu.

*)Concept du palpéage dynamique: Le palpéage dynamique consiste à venir toucher la pièce avec la bille en maintenant la machine en mouvement avec une vitesse constante de l'ordre de 0.5 m/min ce qui fait que la l'accélération du mouvement est nulle ce qui provoque l'annulation de force d'inertie . Le système doit détecter le choc de la bille avec la pièce . Un palpeur dynamique (ou à déclenchement) fonctionne comme un simple interrupteur qui donne le signal nécessaire à la lecture des trois règles de contrôle des déplacements . Il est caractérisé par faible encombrement de la tête et le coût modéré du système , en revanche les mesures données sont moins précise que celles données par le palpeur statique .

Les palpeur dynamiques sont les plus utiliser sur les machines à mesurer et couramment employés sur les M . M . T de moyenne précision (incertitude globale $u \cong 0.5 \mu\text{m}$)

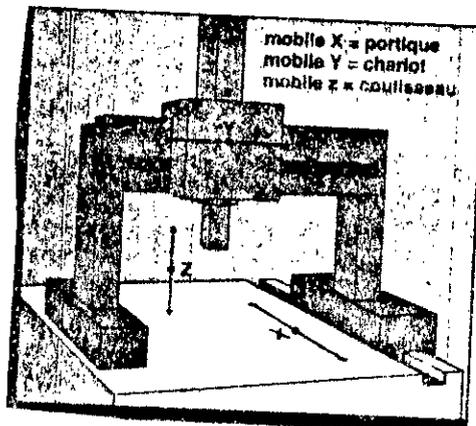
c) palpeur sans contact.

Ils sont resament apparuent et se présente sous deux formes :

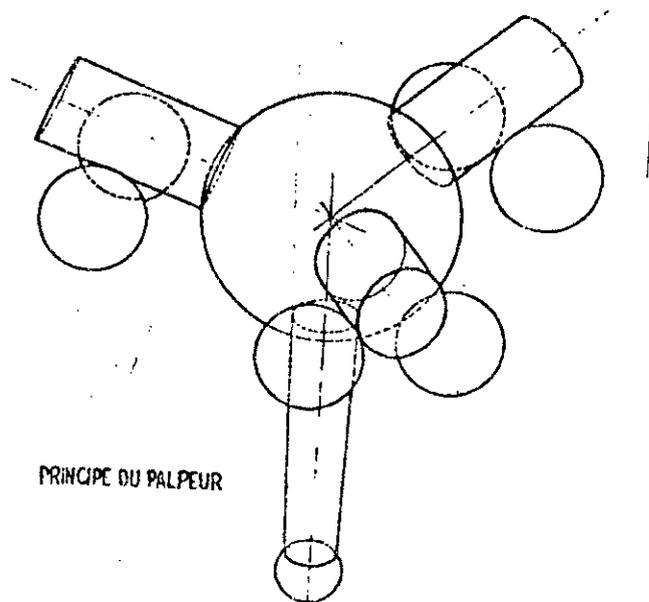
*)Le palpeur à lazer .

*)Le caméra C . C . D comme palpeur sur machine à mesurer.

Ces deux types de palpeurs sont particulièrement adaptées aux pièces planes du type circuit électronique imprimé au micro engrenage . ici les points sont saisis grâce à des techniques de recherche de contraste.



Schema de La M.M.T



chapitre II

METHODES DE MAILLAGES

II.1) MÉTHODE DE BEZIER.II.1.1) COURBE DE BEZIER.

La méthode de Bézier est bien adaptée au modelage interactif de courbes. Une courbe quelconque est approximée par plusieurs segments de courbes de Bézier, chacun étant spécifié pour une ligne polygonale. Chacune de ces lignes polygonales peut comporter un nombre de sommets différent (quatre étant le minimum), l'ordre de la courbe de Bézier étant égal au nombre de sommets moins un. Chaque segment de courbe passe par les extrémités de la ligne polygonale servant à la définir, mais pas par les autres sommets qui ne servent qu'à modèler sa forme. Connaissant les sommets de la ligne polygonale, les points de la courbe de Bézier sont tracés en calculant le centre de gravité des sommets pondérés pour un paramètre u variant de 0 à 1. Etant donné un polygone caractéristique PG_m dans un repère R d'origine O et d'axes (X,Y,Z) , la courbe de Bézier associée à ce polygone est une forme polynomiale paramétrique de degré m répondant à l'équation, (II.1.1).

$$P(u) = \sum_{i=0}^m S_i \cdot B_i^m(u) \quad , \quad u \in [0,1] \quad (II.1.1)$$

avec:

$B_i^m(u)$: sont les polynomes de Bernstein.

$$B_i^m(u) = C_i^m \cdot u^i \cdot (1-u)^{(m-i)} \quad (II.1.2)$$

$$i \in \{0,1,\dots,m\}$$

et C_i^m :sont les coefficients du binome de Newton.

$$C_i^m = \frac{m!}{(m-i)!i!}$$

Lorsque le degré m est fixe, les polynomes de Bernstein sont complètement définis. de plus si le polygone caractéristique PG_m , associé à la courbe est connu, alors:

- *)Le nombre de sommets du polygone fixe le degré m des polynomes de bernstein et donc de la courbe de Bézier,
- *)Les coordonnées des sommets du polygone caractéristique définissent

l'ensemble des coefficients de la courbe.

Le premier et le dernier point sont colloqués.

La courbe est tangente au premier segment et au dernier du polygone de contrôle.

Donc finalement, la seule donnée du polygone caractéristique (PG_m) définit complètement une courbe de Bézier puisque le paramètre u évolue systématiquement dans l'intervalle $[0,1]$ (Fig:1).

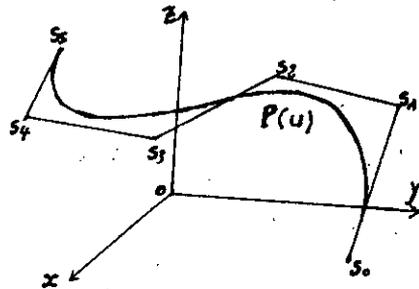


Fig:1. Courbe de Bézier de degré 5 associé au polygone caractéristique (PG_5).

II.1.1.1) PROPRIETES DES COURBES DE BEZIER.

A) REVERSIBILITE D'UNE COURBE DE BEZIER.

Une courbe de Bézier, de degré m , construite à partir d'un polygone caractéristique PG_m ne change pas de forme lors de l'inversion du polygone caractéristique (Fig:2).

$S_m, S_{m-1}, \dots, S_0.$

Soit $P'(u)$, la courbe définie à partir du polygone caractéristique ci-dessus, la propriété énoncée s'écrit :

$$P(u) = P'(1-u) \quad , \quad \forall u \in [0,1] \quad (II.1.3)$$

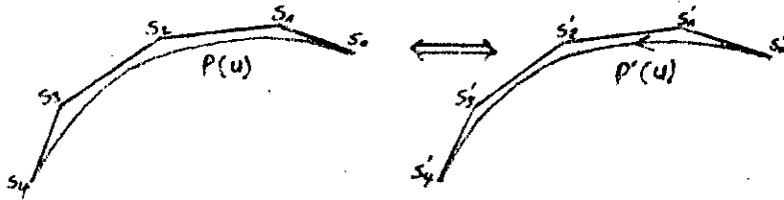


Fig:2. Invariance d'une courbe de Bézier lors de l'inversion du polygone caractéristique

Cette particularité est utile lorsque l'on souhaite :

*) Construire un carreau de bézier s'appuyant sur plusieurs courbes dont les orientations ne sont pas toutes indiquées.

Les points associés possédant la même valeur paramétrique, le résultat escompté n'est pas nécessairement celui auquel l'utilisateur s'attend.

Le changement de sens de description d'une courbe lui permet de corriger la forme du carreau sans avoir à remettre en cause le travail antérieur d'ajustement de la forme du carreau n'est pas négligeable

(Fig:3)

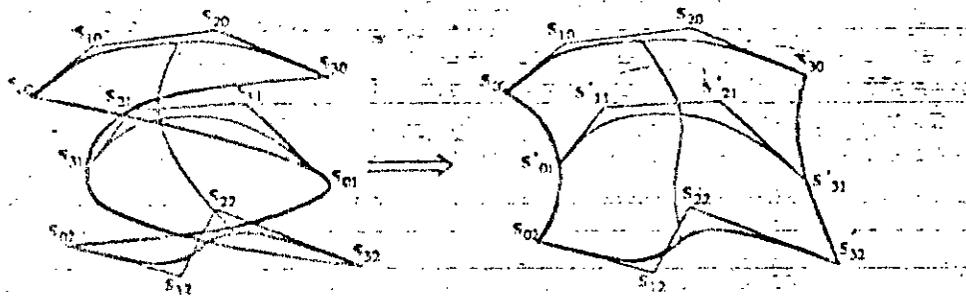


Fig:3. Utilisation de la réversibilité d'une courbe de Bézier lors de la construction d'un carreau

B) RELATION GEOMETRIQUE ENTRE POLYNOME CARACTERISTIQUE ET COURBE DE BEZIER.

Ici l'objectif est de préciser la nature des relations entre la forme du polygone caractéristique est celle de la courbe.

*) Coïncidence aux extrémités.

On se base toujours sur l'équation (1), on s'aperçoit que pour $u = 0$, le point de la courbe $P(0)$ est confondu avec le premier pôle. On montre de manière symétrique que pour $u=1$, le point $P(1)$ est confondu avec le dernier pôle de la série (Fig:4).

$$P(0) = S_0 \quad , \quad P(1) = S_m \quad , \quad (II.1.4)$$

On exploite cette particularité pour assurer la continuité de deux courbes devant se raccorder pour lesquelles le dernier pôle de la première doit être confondu avec le premier pôle de la seconde.

*) Tangence aux extrémités.

La direction de la tangente pour $u=0$ est donnée par le premier côté non nul du polygone caractéristique ainsi que pour $u = 1$, c'est ce dernier côté non nul qui donne la direction de la tangente. On exploite cette propriété lorsque l'on souhaite construire deux courbes qui se raccordent aux extrémités avec continuité des tangentes : les derniers pôles de la première courbe doivent être colinéaires aux deux premiers pôles de la deuxième courbe.

Le premier côté du PG_m est : $(S_1 - S_0)$,

Le dernier côté du PG_m est : $(S_m - S_{m-1})$

respectivement lorsque les côtés sont distincts (Fig:4)

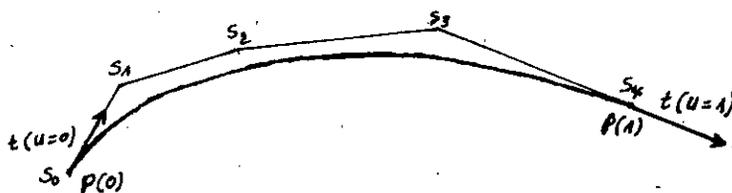


Fig:4. Relation entre les premiers et derniers côtés du polygone caractéristique et la courbe ($m=4$)

*) Rayon de courbure .

Concernant la concavité ou la courbe planes ou spatiales, la relation entre courbe et polygone caractéristique se concrétise par :

-Les sommets S_0, S_1, S_2 et S_{m-1}, S_{m-2}, S_m définissent, seuls, la courbure de la fonction $P(u)$ en $u=0$ et $u=1$ respectivement,

-La concavité d'une courbe plane est définie, par rapport au côté $(S_1 - S_0)$, du côté du sommet S_2 en $u = 0$, lorsque les trois sommets ne sont pas alignés.

La propriété est la même en $u = 1$,

Le cercle osculateur, pour une courbe spatiale, est défini à partir du plan osculateur qui s'appuie sur les sommets S_0, S_1, S_2 , sauf s'ils sont alignés, pour $u = 0$.

Au lieu de la dérivée seconde de $P(u)$, plus aucune interprétation géométrique n'est possible mais l'utilisation qui vient d'être faite montre déjà combien un polygone caractéristique permet, à lui seul, d'appréhender la forme de $P(u)$.

Remarque:

Le sommet S_1 participant à la définition du vecteur tangent, seul le sommet S_2 définit l'orientation de la normale par rapport au côté $(S_1 - S_0)$ du polygone caractéristique PG_m .

Donc Le plan osculateur à une courbe étant construit à partir des vecteurs (t, n) , ces vecteurs sont définis à l'aide des seuls sommets

S_0, S_1, S_2 (Fig:5).

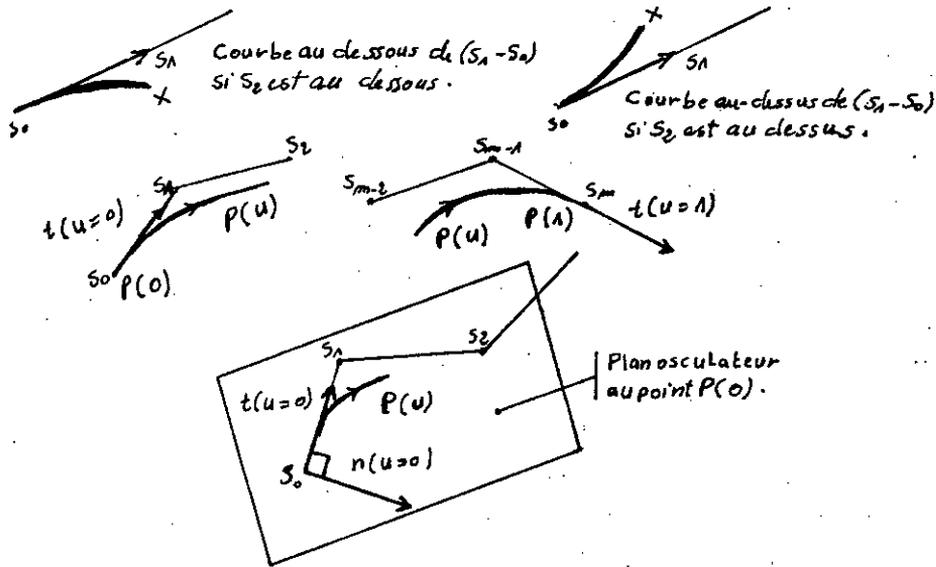


Fig:5. Relation entre les trois premiers sommets du polygone caractéristique et la courbe $P(u)$.

*) Point de singularités.

L'interprétation de ces configurations est étroitement liée à la théorie des fonctions vectorielles faisant appel aux notions points stationnaires, points de rebroussement de première ou de seconde espèce. Le principe consiste à prendre en compte les dérivées d'ordre supérieur jusqu'à la première dérivée dont la direction soit définie; c'est à dire:

$$\frac{d^r P}{du^r} \neq 0$$

Par exemple, si les deux premiers sommets S_1 et S_0 sont confondus, on obtient:

$$\frac{dP}{du}(0) = 0$$

Donc Le point $u=0$. est un point stationnaire. Si le sommet S_2 est distinct de S_1 , la direction de la tangente sera définie par la quantité $(S_2 - S_1)$, (Fig:6).

Le même raisonnement s'applique pour des grandeurs relatives à des dérivées d'ordre supérieur.

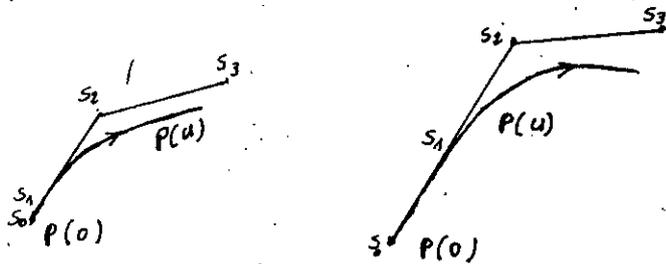


Fig:6.Illustration des situations singulière en $u = 0$.

C) RELATION DE RECURENCE.

les relations de récurrence abordées ici vont être à la base d'une partie importante des propriétés des courbes de Bézier. De plus ces relations de de récurrence sont communs aux modèles de Bézier et B-spline. Rappelons tout d'abord une propriété des coefficients du binôme de Newton, soit:

$$C_i^m = C_{i-1}^{m-1} + C_i^{m-1}, \quad i \in \{1, 2, \dots, m-1\}. \quad (\text{II.1.5}).$$

$$C_0^m = C_0^{m-1}, \quad C_m^m = C_{m-1}^{m-1}$$

*Une première relation de récurrence exprime les polynômes de degré $(m-1)$, elle s'écrit:

$$\begin{aligned} B_{im}(u) &= u \cdot B_{i-1, m-1}(u) + (1-u) \cdot B_{i, m-1}(u), \quad \forall u \in [0, 1] \\ B_{0m}(u) &= (1-u) \cdot B_{0, m-1}(u), \quad i \in \{1, 2, \dots, m-1\} \\ B_{mm}(u) &= u \cdot B_{m-1, m-1}(u) \end{aligned} \quad (\text{II.1.6}).$$

*Une seconde relation lie les dérivées des polynômes de Bernstein de degré $(m-1)$. Elle s'exprime par les équations:

$$\frac{dB_{i,m}}{du}(u) = m.(B_{i-1,m-1}(u) - B_{i,m-1}(u)) , i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$$

$$\frac{dB_{0,m}}{du}(u) = -m.B_{0,m-1}(u) , \forall u \in [0, 1] \quad (\text{II.1.7}).$$

$$\frac{dB_{m,m}}{du}(u) = m.B_{m-1,m-1}(u) .$$

D) INVARIENCE DE LA FORME D'UNE COURBE DE BEZIER.

Pour qu'une translation ne modifié pas la forme d'une courbe, les polynomes de Bernstein doivent satisfaire la condition de Cauchy:

$$\sum_{i=0}^m B_{i,m}(u) = 1 , u \in [0, 1] \quad (\text{II.1.8})$$

Soit $p(u)$ une courbe de Bézier de degré m , associée au polygone caractéristique PG_m ; $P(u)$ subit une translation définie par Δ . Après translation, $P(u)$ devient $P'(u)$:

$$P'(u) = P(u) + \Delta , u \in [0, 1]$$

$P'(u)$ est une courbe de Bézier, de degré m , admettant pour polygone caractéristique $\{S'_m, S'_1, \dots, S'_m\}$. Ce dernier se déduit du polygone PG_m par une translation de Δ , (Fig:7).

$$S'_i = S_i + \Delta , i \in \{0, 1, \dots, m\} \quad (\text{II.1.9})$$

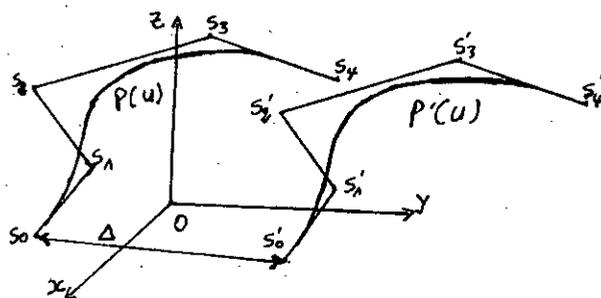


Fig:7. Construction d'une courbe de Bézier $P'(u)$ déduite par translation de $P(u)$.

La transformation de la courbe $P(u)$ soumise à une rotation d'axe (O, δ) caractérisée par une matrice $[R]$. Engendre une courbe $P'(u)$ dont le Polygone caractéristique est déduit du polygone caractéristique PG_m , associé à $P(u)$ par une rotation autour de (O, δ) . En utilisant la matrice $[R]$, cette rotation s'écrit: (Fig:8).

$$S'_i = [R].S_i \quad i \in \{0, 1, \dots, m\}$$

Des conclusions identiques sont applicables aux transformations correspondant à des symétries ou des changements d'échelle, (Fig:8). Donc, translater, faire tourner, changer d'échelle, effectuer une symétrie ou appliquer toute une combinaison de ces opérations élémentaires à une courbe de Bézier $P(u)$ est équivalent à réaliser la même transformation avec le polygone caractéristique PG_m de $P(u)$. De façon plus précise, ce principe est vrai pour toute transformation linéaire, dont la matrice de transformation homogène est de la forme:

$$[TH] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} \end{bmatrix}, \quad t_{ij} \in \mathbb{R} \quad (II.1.10)$$

alors le polygone caractéristique de la courbe transformée est obtenu par:

$$\begin{bmatrix} s'_x \\ s'_y \\ s'_z \end{bmatrix} = H \left\{ [TH] \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad i \in \{0, 1, \dots, m\}$$

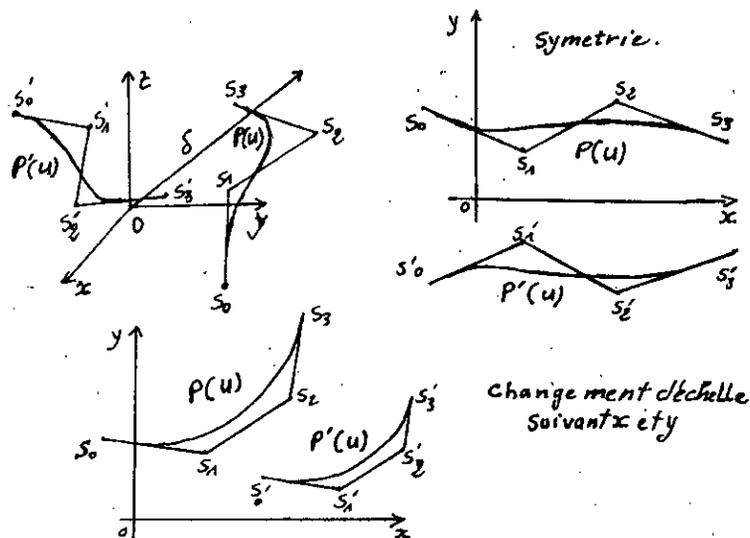


Fig.8. Autres transformations géométriques conservant la forme d'une courbe.

E) INFLUENCE DES SOMMETS DU POLYGONE CARACTERISTIQUE SUR LA FORME D'UNE COURBE DE BEZIER.

La nature et la fonction de certains objets amènent quelque fois l'utilisateur d'un système de C.F.A.O à privilégier l'aspect esthétique d'une courbe ou d'une surface par rapport à des critères de fabrication, de montage.....

A ce titre, il peut être intéressant de modifier la forme d'une courbe de Bézier, $P'(u)$, en déplaçant un ou plusieurs sommets de son polygone caractéristique PG_m (Fig:7).

Ainsi modifié, le polynôme caractéristique définit une nouvelle courbe, marquée par les propriétés suivantes, (Fig:9).

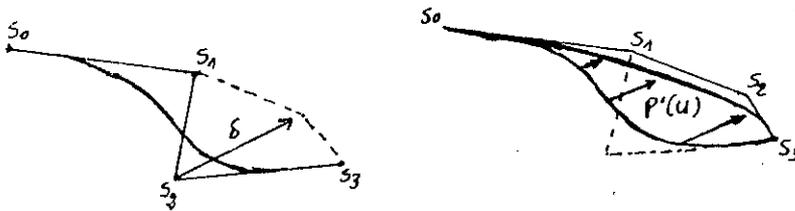


Fig:9. Influence du déplacement d'un sommet du polygone caractéristique sur la forme d'une courbe de Bézier.

*L'ensemble de la courbe $P(u)$ est affecté par le déplacement du sommet hormis les deux points extrêmes $P(0)$ et $P(1)$ lorsque le sommet déplacé n'est ni S_0 ni S_m . Si le sommet déplacé est S_m , seul $P(0)$ sera inchangé et réciproquement.

*tous les points de la courbe subissent une translation de direction δ et d'amplitude fonction du paramètre u associée au point,

*Le point de la courbe le plus sensible à la déformation correspond à l'abscisse $u = \frac{l}{m}$, si le sommet déplacé est S_l .

Ces particularités contribuent à donner à l'utilisateur quelques indications lui facilitant une tâche qui peut rapidement devenir fastidieuse si le polygone caractéristique comporte un grand nombre de sommets et si plusieurs sommets doivent être successivement déplacés.

F) POLYgone CONVEXE ASSOCIE A UNE COURBE DE BEZIER.

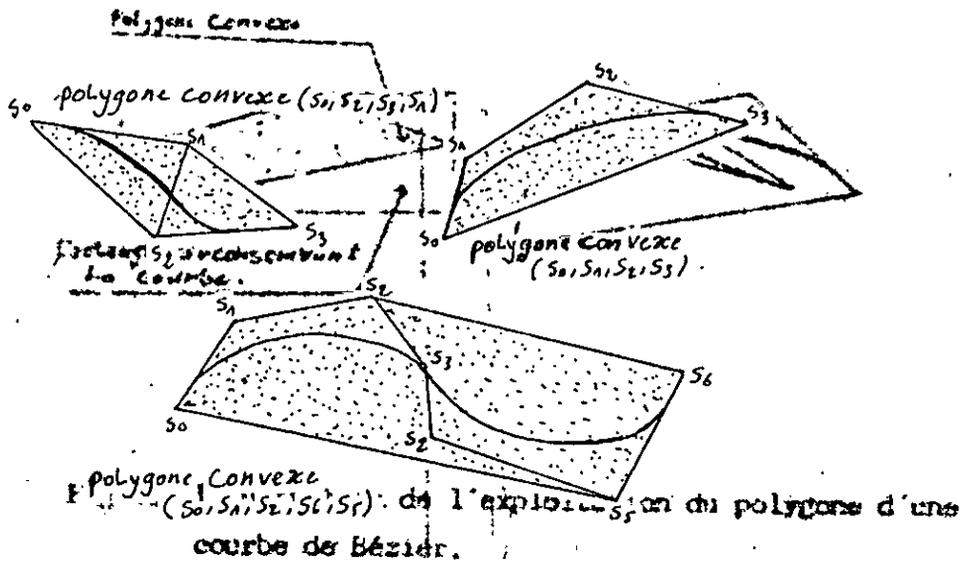
La propriété développée ici concernera les courbes planes pour plus de simplicité dans l'interprétation géométrique de ce qui suit.

A toute courbe de Bézier $P(u)$ peut être associé un polygone convexe PC_m ,

METHODES DE MAILLAGES:

constitue à partir du polygone caractéristique PG_m de $P(u)$, (Fig:10). 20

Le polygone convexe PC_m est une séquence ordonnée de "points" en nombre inférieur ou égal au nombre de sommets constituant PG_m .



ETAPES DE BEZIER.

Les carrés Fig:10. Exemples de polygones convexes associés à des courbes de Bézier à partir desquels une courbe est élaborée. Cette construction se fait en dernière étape avant la représentation complète d'une surface.

L'utilisation de cette propriété concerne la recherche d'intersection entre plusieurs courbes. Pour ce fait, on fait appel à un domaine englobant le polygone convexe mais de géométrie plus simple, puisqu'il s'agit d'un rectangle. Ce choix repose essentiellement sur un critère de performance de l'algorithme d'intersection et non sur des motifs géométriques et de la déformation de chaque courbe S_i . Le principe consiste à comparer les polygones convexes de chaque entité pour détecter une éventuelle intersection (Fig:11) d'une trajectoire S_i et son polygone caractéristique PG_m . Les directrices sont aux équations.

$$S_i(v) = \sum_{j=0}^n S_{ij} E_j(v) \quad , \quad v \in [0,1]$$

Les points S_{ij} correspondent avec les sommets S_j de PG_m un point du domaine D_i ainsi défini à partir d'une génératrice et de

(m+1) directrices, est représenté par l'expression:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^m D_i \cdot B_{im}(u)$$

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n S_{ij} \cdot B_{im}(u) \cdot B_{jn}(v) \tag{II.1.11}$$

$$u, v \in [0,1]$$

avec:

S_{ij} : les polygones

$B_{im}(u)$ et $B_{jn}(v)$: fonction de Bernstein

$$B_{im}(u) = C_i^m \cdot u^i \cdot (1-u)^{m-1}$$

$$B_{jn}(v) = C_j^n \cdot v^j \cdot (1-v)^{n-1}$$

La (Fig:12) illustre les relations entre génératrice et directrices pour un carreau bicubique. Les polynomes de Bernstein $B_{im}(u)$ et $B_{jn}(v)$ sont entièrement définis par les degrés m et n , donc les seuls sommets S_{ij} déterminent complètement un carreau de Bézier et constituent le réseau caractéristique, noté RS_{mn} , du carreau $P(u,v)$.

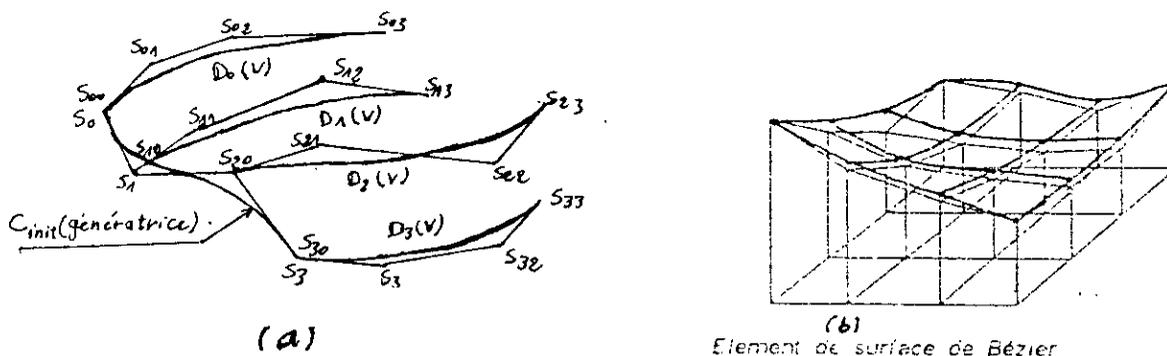


Fig:12. Construction d'un carreau de Bézier à partir de génératrices et de directrices

II.1.2.1) PROPRIETES DES CARREAUX DE BEZIER.

A) RELLATION GEOMETRIQUES ENTRE RESEAU CARACTERISTIQUE ET SURFACE.

Le réseau caractéristique RS_{mn} d'un carreau de Bézier $P(u,v)$ est en contact avec le carreau aux sommets $S_{00}, S_{m0}, S_{0m}, S_{mn}$ car l'équation (II.1.11) évaluée aux points:

$$P(0,0), P(1,0), P(0,1), P(1,1),$$

admet respectivement pour valeurs $S_{00}, S_{m0}, S_{0m}, S_{mn}$ Les polygones caractéristiques :

$$PG_{m0} : S_{00}, S_{10}, \dots, S_{m0},$$

$$PG_{mn} : S_{0n}, S_{1n}, \dots, S_{mn},$$

$$PG_{n0} : S_{00}, S_{10}, \dots, S_{0n},$$

$$PG_{nm} : S_{m0}, S_{m1}, \dots, S_{mn}$$

Définissent respectivement les courbes isoparamétriques:

$$\begin{array}{ll} v=0 & P(u,0) \\ v=1 & P(u,1) \\ u=0 & P(0,v) \\ u=1 & P(1,v) \end{array} \quad (II.1.12)$$

La (Fig:13) illustre l'ensemble des propriétés énoncées jusqu'à maintenant.

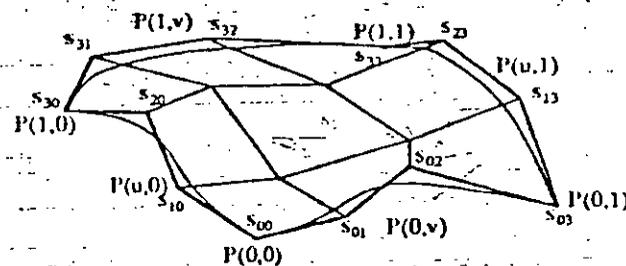


Fig:13. Relations géométriques entre carreau de Bézier et réseau caractéristique pour $m=n=3$

De façon plus générale, une courbe isoparamétrique du carreau $P(u,v)$ est construite selon les étapes:

) Le paramètre u^ , $u^* \in [0,1]$, étant fixé pour définir une courbe de type iso- u . la courbe correspondante répond à l'équation:

$$P(u^*, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n S_{ij} \cdot B_{im}(u^*) \cdot B_{jn}(v) \quad , \quad \forall v \in [0,1]$$

) Le polygone caractéristique PG_n^ de la courbe iso- u cherchée est construit à partir du réseau RS_{mn} : les sommets de PG_n^* s'expriment à partir des S_{ij} par:

$$S_j^* = \sum_{i=0}^m S_{ij} \cdot B_{jn}(v) \quad , \quad j \in \{0,1,\dots,n\}.$$

L'équation isoparamétrique s'exprime en fonction des sommets S_j^* :

$$P(u^*, v) = \sum_{j=0}^n S_j^* \cdot B_{jn}(v).$$

Les S_j^* peuvent être construits à l'aide de l'algorithme de P. de Casteljau ou d'algorithme de calcul d'un point courant.

Les polygones caractéristiques des courbes isoparamétriques $0 < u < 1$ ou $0 < v < 1$ ne coïncident donc pas avec les cotés ou sommets du réseau caractéristique RS_{mn} comme l'indiquent la seconde étape et la (Fig:14)

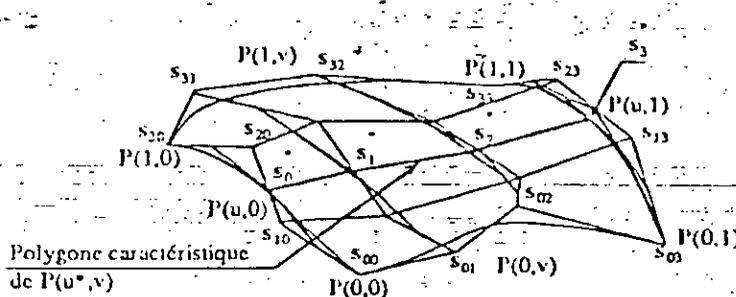


Fig:14. Construction d'une courbe isoparamérique pour $u^* = 0.5$

Les deux premières rangées de sommets S_{i0} et S_{i1} , $i \in \{0,1,\dots,m\}$ définissent la direction de la dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial v}$ en tout point de l'isoparamétrique $P(u,0)$. Cette propriété se traduit par la relation:

$$\frac{\partial P}{\partial v}(u,0) = n \cdot \sum_{i=0}^m (S_{i1} - S_{i0}) \cdot B_{im}(u) \quad , \quad u \in [0,1] \quad (\text{II.1.13})$$

directement issue de la dérivation des polynômes de Bernstein. La relation (II.1.13) s'interprète géométriquement comme une courbe de Bézier de degrés m dont le polygone caractéristique est formé de sommets $(S_{i1} - S_{i0})$. Une seconde représentation, illustrée par la (Fig:15), s'appuie sur la différence de deux courbes de Bézier:

$$P_1(u) = \sum_{i=0}^m S_{i1} \cdot B_{im}(u) \quad \text{et} \quad P_0(u) = \sum_{i=0}^m S_{i0} \cdot B_{im}(u)$$

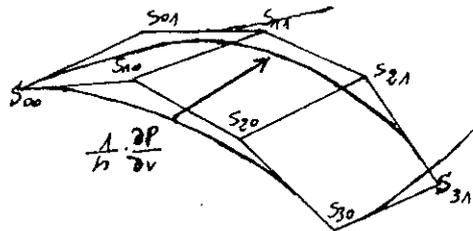


Fig:15. Représentation géométrique de la dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial v}$ en $P(u,0)$.

La dérivée mixte au coin du carreau $P(0,0)$ s'exprime uniquement en fonction des quatre sommets: $S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}$, par la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}(0,0) = m \cdot n \cdot [(S_{11} - S_{10}) - (S_{01} - S_{00})] \quad , \quad (\text{II.1.14})$$

obtenue en dérivant la relation (13) par rapport à u . L'interprétation géométrique de la relation (14) est définie par la (Fig:16). et montre que la dérivée mixte $\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}(0,0)$ s'annule lorsque les sommets $S_{00}, S_{10}, S_{01}, S_{11}$ sont coplanaires et forment un parallélogramme.

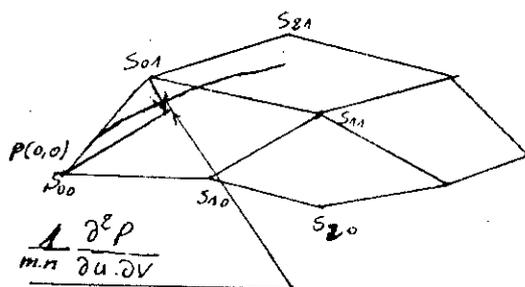


Fig:16. Représentation de dérivée mixte au point $P(0,0)$.

Par permutation des paramètres u et v et des valeurs 0 et 1, toutes propriétés relatives aux courbes isoparamétriques et aux dérivées partielles s'appliquent de manière similaire à chacune des frontières d'un carreau .

B) PARTICULARITES DE FORME ET S'INGULARITES DES CARREAUX:

L'expression (II.1.11) donnée aux carreaux de Bézier produit des carreaux à quatre côtés. Cette disposition ne permet pas toujours une construction facile de surface dont la topologie empêche un arrangement régulier de carreaux, (Fig:17).

Les irrégularités se traduisent, dans un premier temps, par un nombre de carreaux concourants en A et B pouvant atteindre 3 ou 5 mais s'écartant dans tous les cas, de 4: la disposition courante mise en évidence par la

(Fig:18). Un palliatif possible à ces situations singulières repose sur la construction de carreaux possédant 3 ou 5 côtés. Par la création de plusieurs isoparamétriques munis de sommets coïncidents sur une ou plusieurs isoparamétriques de la frontière de carreaux, il devient possible d'obtenir des carreaux admettant moins de quatre côtés. Par exemple, un réseau caractéristique de la forme:

$$S_{00}=S_{10}=\dots=S_{m0} \quad , \quad (II.1.15)$$

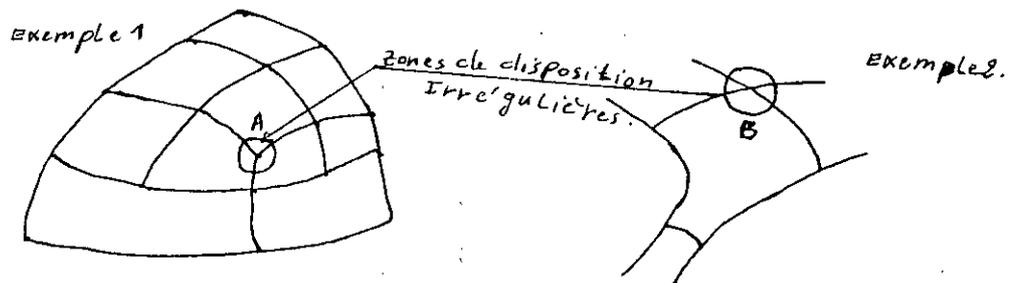


Fig:17. Dispositions irrégulières de carreaux.

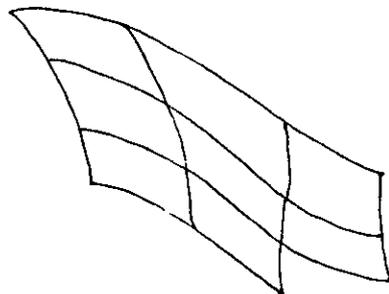


Fig:18. Agencement régulier de carreaux.

Correspond à un carreau à trois côtés , l'isoparamétrique $v=0$ étant

réduite à un point. La (Fig:19), fournit un exemple d'une telle particularité pour un carreau bicubique. Poursuivant ce processus, la construction de carreaux possédant 2 et même 3 ou 1 côtés ramenés à un point est envisageable la mais démarche inverse ne connaît pas de solution basée sur l'expression (II.1.11) de carreaux.

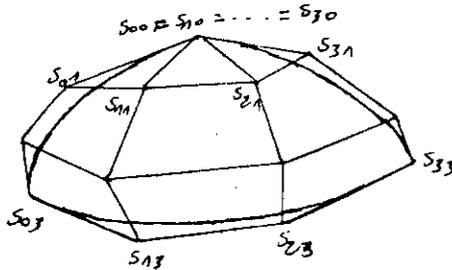


Fig:19. Exemple de carreau de Bézier à trois côtés.

La construction de carreaux ayant 5 côtés ou plus fait appel à des techniques s'écartant des principes de modélisations. Les exemples de la (Fig:17) sont maintenant convertis en décomposition conformes à la (fig:20) et montrent l'amélioration de la décomposition en carreaux vers une diminution du nombre de carreaux pour le premier exemple et la suppression du carreau à 5 côtés pour le second.

Les particularités géométriques décrites précédemment engendrent des singularités principalement traduites par l'indétermination de grandeurs telles que normale ou plan tangent.

*)Calcul de la Normale.

Le plan tangent à une surface gauche est défini par les vecteurs tangents aux isoparamétriques u et v , $\frac{\partial P}{\partial u}$ et $\frac{\partial P}{\partial v}$ qui, s'ils ne sont colinéaires, forment une base (Fig:21). Lorsque le plan tangent existe

au point considéré, le vecteur normal en ce point est défini par:

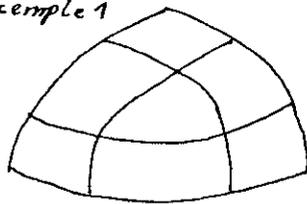
$$N = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\|} \quad (\text{II.1.16})$$

Un carreau de Bézier comportera des points ou zones singulières lorsque le plan tangent ou le vecteur normal y seront indéterminés. Etant donné la définition de ces grandeurs, les conditions suffisantes pour créer une singularité sont:

- * $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$ ou $\frac{\partial P}{\partial v} = 0$,
- * $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial v} = 0$,
- * $\frac{\partial P}{\partial u}$ colinéaire à $\frac{\partial P}{\partial v}$: $\frac{\partial P}{\partial v} = \lambda \frac{\partial P}{\partial u}$, $\lambda \neq 0$

Chacune de ces possibilités peut être illustrée par une ou plusieurs situations pouvant survenir au cours du processus de construction d'une surface.

Exemple 1



Exemple 2

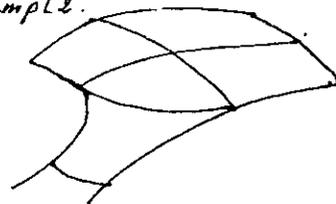


Fig:20. Décomposition à base de carreaux à 3 côtés.

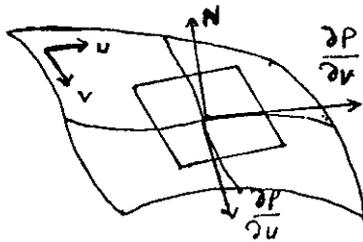


Fig:21. Plan tangent et vecteur normale à une surface gauche.

II.1.3) DETERMINATION DU RESEAU CARACTERISTIQUE D'UN CARREAU DE BEZIER APARTIR PARTIR DES CONTRAINTES GEOMETRIQUES.

les contraintes géométriques couramment employées pour la détermination du réseau caractéristique d'un carreau important le passage par, ou au voisinage, de point ou de courbe et pour certaines disposition ζ le respect de l'orientation du plan tangent le long d'une courbe.

La distinction essentielle entre les contraintes relatives à des points et celle concernant les courbes reposent sur le problème de paramétrage. Lorsqu'il s'agit de déterminer le réseau caractéristique à partir des contraintes relatives à des points, la phase de paramétrage doit être en mesure d'affecter deux paramètres (u_i, v_j) à chaque point P_{ij} , (fig:22).

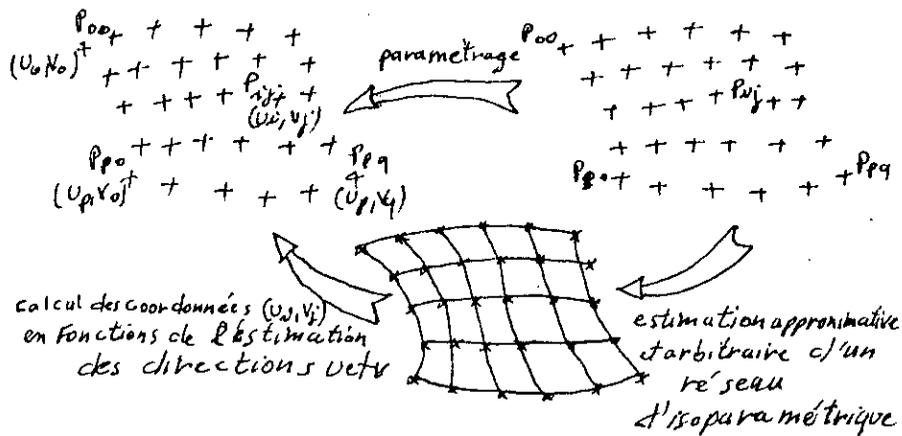


Fig:22. Paramétrage d'un réseau de points voisin d'un rectangle et équivalence avec la définition d'un réseau d'isoparamétrique

Si le réseau caractéristique est proche d'une forme rectangulaire, les directions affectées aux paramètres u et v sont aisées à définir, et ceci est équivalent à la définition, à priori, d'un réseau d'isoparamétrique passant par les points P_{ij} . lorsque l'allure du réseau ne permet pas le paramétrage à partir de deux directions, de référence les recours disponibles sont :

*) Remise en cause du réseau de points en utilisant une nouvelle méthode de digitalisation lorsque cela est techniquement possible et que cette phase est à l'origine du réseau de points, (Fig:23).

*) L'utilisation d'une technique de modélisation adaptée à des données arbitrairement réparties

Les difficultés de paramétrage d'un réseau de points expliquent en partie l'intérêt de la construction d'un réseau caractéristique à partir d'un ensemble de courbes. Cette approche convient surtout aux réseaux de courbes, planes, ou non, telles que leurs points homologues soient situés à des distances sensiblement constantes, (Fig:24).

Cette dernière méthode convient le mieux par la suite à la méthode B-spline.

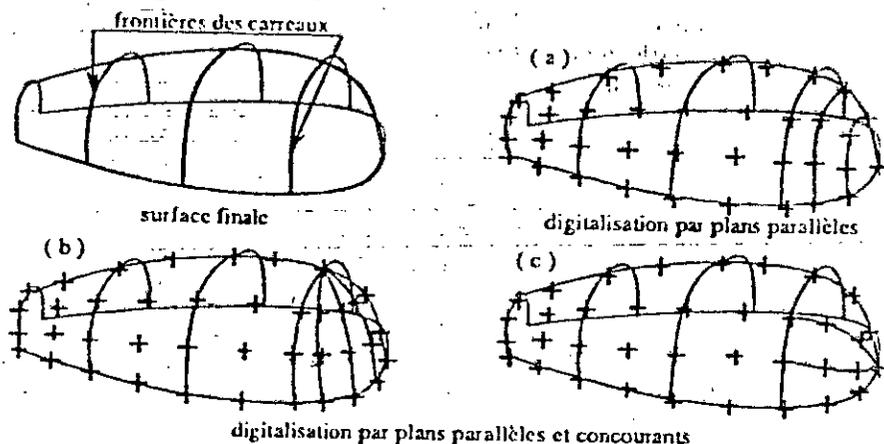


Fig:23. Divers solution de digitalisation d'une maquette.

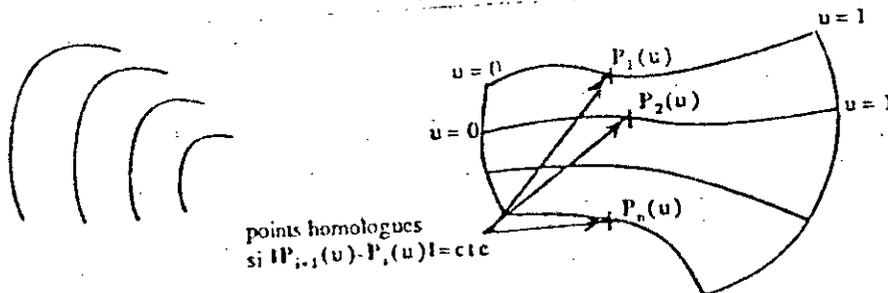


Fig:24. Réseaux de courbes avec points homologues à distance constante

II.1.3.4) CONSTRUCTION DUN RESEAU PAR INTERPOLATION.

A) Pour un réseau de points, cette technique est la généralisation du développement réalisé pour les courbes. Disposant d'un ensemble de point P_{ij} , $i \in \{0,1,\dots,p\}$, $j \in \{0,1,\dots,q\}$ et des paramètres associés aux points (u_i, v_j) , $0 \leq u_i \leq 1$, $0 \leq v_j \leq 1$; les points P_{ij} sont associés aux

points $P(u_i, v_j)$ du carreau et le réseau caractéristique est obtenu par la résolution du système linéaire :

$$P_{ij} = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q S_{kl} \cdot B_{kp}(u_i) \cdot B_{lq}(v_j). \quad (\text{II.1.17})$$

Sous forme matricielle, (17) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} S_{00} \\ S_{10} \\ \vdots \\ S_{p0} \\ S_{p1} \\ \vdots \\ S_{pq} \end{bmatrix} = [B_{pq}]^{-1} \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ \vdots \\ P_{p0} \\ P_{p1} \\ \vdots \\ P_{pq} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.18})$$

avec :

$$[B_{pq}] = \begin{bmatrix} B_{0p}(u_0) \cdot B_{0q}(v_0) & B_{1p}(u_0) \cdot B_{0q}(v_0) & B_{pp}(u_0) \cdot B_{qq}(v_0) \\ B_{0p}(u_1) \cdot B_{0q}(v_0) & B_{1p}(u_1) \cdot B_{0q}(v_0) & B_{pp}(u_1) \cdot B_{qq}(v_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{1p}(u_p) \cdot B_{0q}(v_0) & B_{1p}(u_p) \cdot B_{0q}(v_0) & B_{pp}(u_p) \cdot B_{qq}(v_0) \\ B_{0p}(u_0) \cdot B_{0q}(v_1) & B_{1p}(u_0) \cdot B_{0q}(v_1) & B_{pp}(u_0) \cdot B_{qq}(v_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{0p}(u_p) \cdot B_{0q}(v_q) & B_{1p}(u_p) \cdot B_{0q}(v_q) & B_{pp}(u_p) \cdot B_{qq}(v_q) \end{bmatrix}$$

$$[B_{pq}] \quad (\text{II.1.19})$$

La dimension du réseau de points P_{ij} fixe les degrés du carreau dans les directions u et v à p et q respectivement. Avant de s'intéresser à la détermination des sommets S_{ij} à partir d'un réseau de courbes, il convient de noter la dimension du système linéaire (II.1.18) qui est égale à $(p+1) \cdot (q+1) \times (p+1) \cdot (q+1)$ pour chaque composante des sommets S_{ij} .

B) La construction d'un réseau caractéristique à partir d'un ensemble de courbe à $P_j(u)$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ s'appuie sur les hypothèses suivantes, (Fig:25):

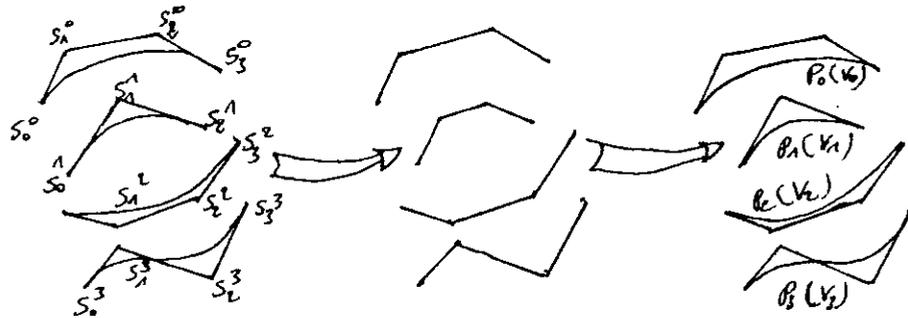


Fig:25. Hypothèses utilisées pour la construction de réseau caractéristique à partir de courbes.

- ★) toutes les courbes $P_j(u)$ possèdent des polygones caractéristiques PG_m^l comportant $(m+1)$ sommet . Si tel n'est pas le cas un processus d'accroissement du nombre de sommets devra être appliqué .
- ★) les courbes $P_j(u)$ représentent des isoparamétriques, ici $P(u, v_j)$, du carreau cherché . De ce fait, on affecte à chaque courbe un paramètre v_j , $0 \leq v_j \leq 1$. Les équations imposant le passage par les courbes P_j s'écrivent :

$$P(u, v_j) = \sum_{i=0}^m \left[\sum_{k=0}^n S_{ik} \cdot B_{kn}(v_j) \right] B_{im}(u) \quad (II.1.20)$$

$k \in \{0, 1, \dots, n\}$

pour représenter les isoparamétriques du carreau, donc :

$$P(u, v_j) = P_j(u), \quad (\text{II.1.21})$$

$$\sum_{i=0}^m \left[\sum_{k=0}^n S_{ik} \cdot B_{kn}(v_j) \right] \cdot B_{im}(u) = \sum_{i=0}^n S_i \cdot B_{im}(u), \quad (\text{II.1.22})$$

soit :

$$\sum_{k=0}^n S_{ik} \cdot B_{kn}(v_j) = S_i^j, \quad (\text{II.1.23})$$

$$i \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

On obtient ainsi $(n+1)$ systèmes d'équations linéaires, chacun étant d'ordre $(m+1)$. L'interprétation géométrique de (II.1.21), (II.1.22) et (II.1.23) s'appuie sur la définition d'un carreau de Bézier ou les courbes $P_j(u)$ sont des génératrices et les $(n+1)$ systèmes linéaires déterminent toutes les directions du carreau. Sous forme matricielle, les sommets S_{ij} du carreau sont obtenus par :

$$\begin{bmatrix} S_{i0} \\ S_{i1} \\ \vdots \\ S_{in} \end{bmatrix} = [B_n]^{-1} \begin{bmatrix} S_i^0 \\ S_i^1 \\ \vdots \\ S_i^n \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.24})$$

avec :

$$[B_n] = \begin{bmatrix} B_{0n}(v_0) & B_{1n}(v_0) & \dots & B_{nn}(v_0) \\ B_{0n}(v_1) & B_{1n}(v_1) & \dots & B_{nn}(v_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0n}(v_n) & B_{1n}(v_n) & \dots & B_{nn}(v_n) \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.25})$$

On remarquera que la matrice $[B_n]$ des systèmes linéaires (II.1.24) est indépendante du système traité ce qui accroît la performance des algorithmes de résolution des systèmes linéaires. Les degrés du carreau sont fixes par le plus élevé des courbes $P_j(u)$ pour la direction u et par le nombre de courbes n pour la direction v . L'affectation du paramètre v_j à chaque courbe peut être faite selon l'une ou l'autre des techniques par la suite, mais le critère de distance euclidienne devient moins rigoureux puisque la distance $\|P_{j+1}(u) - P_j(u)\|$ varie en fonction

de u . Il est possible de recourir à un point de référence u_r , arbitrairement fixé, ou bien, si les courbes $P_j(u)$ sont définies dans des plans parallèles. Utilisés pour construire par interpolation les courbes $P_j(u)$ sont identiques aux points P_j et affectés des mêmes coordonnées paramétriques, les deux solutions (II.1.18) de A) et (II.1.24) de B) sont équivalentes.

II.1.3.2) PARAMETRAGE DES CARREAUX DE BEZIER:

Il est évident ici de définir les valeurs des paramètres u et v , intervenant dans les équations (II.1.18) et (II.1.23), pour ramener le problème à la résolution d'un système d'équation linéaires.

En règle générale, on a recourt aux deux approches suivantes :

*)répartition uniforme des paramètres:

pour un ensemble de $(p+1)$ points suivant la direction u et $(q+1)$ points suivant la direction v , la répartition des paramètres s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = \frac{i}{p} \quad , i \in \{0, 1, \dots, p\} \\ v_j = \frac{j}{q} \quad , j \in \{0, 1, \dots, q\} \end{array} \right. \quad (\text{II.1.26})$$

produisant des valeurs sur l'intervalle u et $v \in [0, 1]$.

*)la répartition proportionnelle à la distance entre les points :
cette répartition des points P_{ij} s'expriment par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1} = u_i + \frac{\| P_{i+1, j} - P_{i, j} \|}{p-1 + \sum_{k_i=0} \| P_{k_i+1, j} - P_{k_i, j} \|} \\ \quad i \in \{1, \dots, p-1\} \\ v_{j+1} = v_j + \frac{\| P_{i, j+1} - P_{i, j} \|}{q-1 + \sum_{k_j=0} \| P_{i, k_j+1} - P_{i, k_j} \|} \\ \quad j \in \{0, 1, \dots, q-1\} \end{array} \right. \quad (\text{II.1.27})$$

produisant également des valeurs sur u et $v \in [0,1]$.

L'emploi de l'une ou de l'autre de ces techniques dépend de la répartition des points. L'équidistribution du paramètre est une solution adéquate tant que la distance : $\| P_{i+1,j} - P_{i,j} \|$ et $\| P_{i,j+1} - P_{i,j} \|$ ne fluctue pas trop sinon on préfère une répartition proportionnelle . Une répartition uniforme du paramètre telle que la distance entre les points fluctue fortement peut engendrer des oscillations parasites ou, des comportements analogues, sur une courbes soit suivant u ou soit suivant v , (fig:26) .

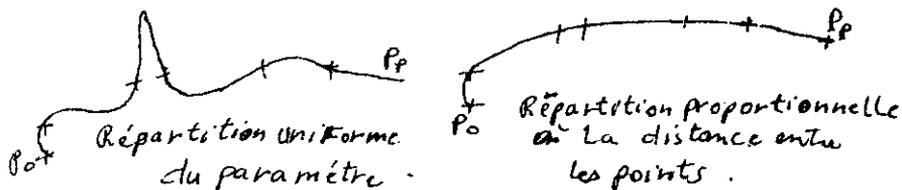


Fig:26. Influence de la technique de paramétrage .

II.1.4) CONSTRUCTION DES SURFACES PARALLELES. (CAS GENERALE) .

La construction de carreaux de raccordement à profil circulaire :

La détermination de tels carreaux peut entraîner des difficultés algorithmiques importantes selon les dispositions relatives des carreaux. la situation la seule et la plus simple qui sera détaillée par la suite de ce paragraphe , (Fig:27).

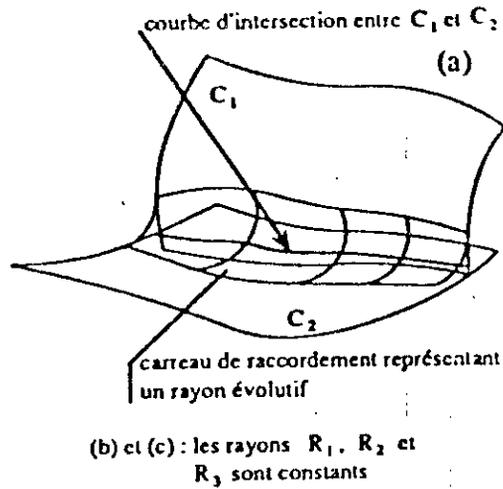


Fig:27. Exemple de situation mettant en présence des carreaux raccordement.

avant de s'intéresser à la disposition de la (Fig:27), on considère le problème de construction d'un carreau de raccordement à rayon constant entre C_1 et C_2 . La surface du carreau correspond alors à celle de l'enveloppe des positions d'une sphère, (c à d le palper) roulant sur C_1 et C_2 . Les frontières du carreau de raccordement correspondent aux courbes représentant les lieux des points de contact de la sphère de rayon R C_1 et C_2 , (Fig:28).

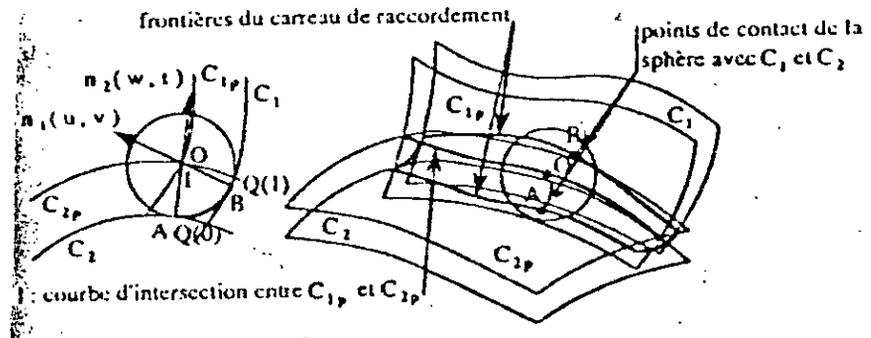


Fig:28. Surface enveloppe d'une sphère roulant sur C_1 et C_2 comme carreau de raccordement.

Le centre O de la sphère se déplace sur la courbe d'intersection I entre les carreaux C_{1p} et C_{2p} qui sont des surfaces parallèles aux carreaux C_1 et C_2 , c'est à dire :

$$\begin{aligned}
 P_{1p}(u,v) &= P_1(u,v) + R \cdot N_1(u,v) \\
 &= P_1(u,v) + R \cdot \frac{\frac{\partial P_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial P_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial v} \right\|} \quad (\text{II.1.28})
 \end{aligned}$$

$$P_2(\omega,t) = P_2(\omega,t) + R \cdot N_2(\omega,t),$$

Pour une position donnée du palper, les points de contact A et B de la sphère sur C_1 et C_2 et le centre O définissent un plan qui contient les normales $N_1(u,v)$ et $N_2(\omega,t)$ à C_1 et C_2 en A et B. Le plan AOB est perpendiculaire à la tangente à la courbe I au point considéré, (Fig:28). Dans le plan AOB, \overline{AB} est un arc de cercle.

Dans notre cas particulier la surface est une forme plane non circulaire ce qui implique que l'équation (II.1.28) se réduit à:

on a $N_2=0$ et $N_1 \neq 0$

$$\begin{aligned}
 P_1(u,v) &= P_1(u,v) + R \cdot N_1(u,v) \\
 &= P_1(u,v) + R \cdot \frac{\frac{\partial P_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial P_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial v} \right\|} \quad (\text{II.1.29})
 \end{aligned}$$

II.1.5) CALCUL DE L'ECART D'UN POINT MESURE PAR RAPPORT AU PROFIL THEORIQUE.

Le contrôle d'une surface gauche (complexe) se fait sur une M.M.T, cette surface est modéliser par un ensemble de points $P(u,v)$ et un ensemble de normale $N(u,v)$.

La mesure des points $P(u,v)$ s'effectue en les relevant à l'aide du palpeur de la M.M.T suivant la normale sortante à la matière.

La M.M.T enregistre des coordonnées du centre de la bille du palpeur et élimine l'effet du rayon du palpeur de cette bille ,au cours de la mesure.

Soit P_p le point touché par le palpeur et P_{th} le point visé (c.à.d. "sauvegarder sur M.M.T est considéré comme étalon), l'écart E suivant la normale entre les profils théoriques et réels qui qualifié le manque ou l'excès de matière , est donné par le développement du produit scalaire $\overrightarrow{P_p P_{th}} \cdot \vec{N}$ soit :

$$E = (X_{th} - X_p) \cdot N_x + (Y_{th} - Y_p) \cdot N_y + (Z_{th} - Z_p) \cdot N_z \quad , (II.1.30)$$

L'erreur tangentielle E_t a une très faible influence sur la normale, elle n'agit sur l'écart E qu'au second ordre.

Les coordonnées du point P_p (point appartenant au profil réel et à la normale \vec{N}) s'obtiennent à l'aide de la relation :

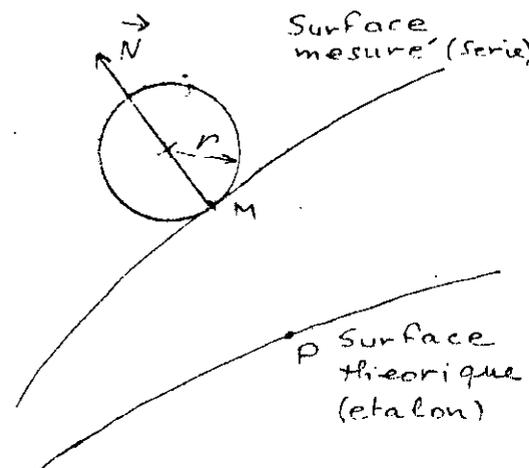
$$\overrightarrow{SP_p} = \overrightarrow{SP_{th}} + E \cdot \vec{N} \quad (II.1.31)$$

Le contrôle de la surface de la denture synthétisée par un fichier de points et normales théoriques nécessite l'utilisation d'une M . M . T équipé d'une commande numérique .

Point touché sur la surface mesurée (Serie)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + r \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - r \vec{N}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} X_p - r N_x \\ Y_p - r N_y \\ Z_p - r N_z \end{cases}$$



II.2) METHODE B-SPLINE.

II.2.1) COURBES B-SPLINE.

Après introduction des concepts de séquence nodale, de multiplicités des noeuds, l'exposé du modèle B-spline traitera succinctement des propriétés de fonctions de base B-spline puis celles des courbes. ces nouveaux concepts procurent de nouvelles propriétés et une démarche de construction sensiblement différentes du modèle de Bézier. Les nombreux travaux de recherche concernant les courbes splines sous divers formulations ou expressions, regroupent une multitude de publications.

les noms de Schoenberg, de Boor, Bohm, Riesenfeld, Barsky ont particulièrement contribué au développement de la théorie des splines dans le cadre de la modélisation géométrique pour la CFAO et la CAO. L'origine des fonctions splines se trouve dans le dessin de courbes à l'aide d'un pistolet flexible cet instrument de dessin permet d'épouser la forme d'une courbe quelconque avec un très haut degré de régularité et de précision.

On utilise généralement des fonctions splines de degrés 2 ou 3 de façon que si l'on approche une courbe sur un intervalle $[a, b]$ comportant $(n+1)$ points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$, avec leurs coordonnées respectives y_0, \dots, y_n sur chaque intervalle pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ la fonction spline cubique s'écrit :

$y = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$; donc une fonction spline prend des valeurs différentes sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de plus il faut respecter les conditions de continuités aux points x_i par valeurs inférieures et supérieures.

Les travaux de C. de Boor, de Boor et Hollig, de Ramshaw, ont permis d'approcher le modèle B-spline (en anglais basis-spline) qui se distingue par des développements mathématiques plus ou moins complexes.

II.2.1.1) NOTIONS DE NOEUDS ET D'ORDRE MULTIPLICITE.

A) NOEUDS ET SEQUENCES NODALES.

une courbe B-splines n'est autre qu'une forme paramétrique polynomiale par morceaux sur l'intervalle $[u_i, u_{i+1}]$, donc elle est construite à partir d'une succession de polynôme de degré m se raccordant entre eux à des abscisses u_i de façon telle que la continuité soit au maximum de nature C^{m-1} .

Les abscisses u_i des points de raccordement des polynômes seront appelés des Noeuds et l'ensemble des noeuds associé à une courbe B-spline sera nommé SEQUENCE NODALE

On distingue 2 types de séquence nodale

a) $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+p}$ tel que
 $u_i \leq u_{i+1} \leq u_{i+2} \leq \dots \leq u_{i+p}$ qui peut donner lieu à des situations de plusieurs noeuds $u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+k}$ correspondant à la même valeur c.a.d

$$u_j = u_{j+1} = \dots = u_{j+k}$$

b) $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+p}$ tel que

$$u_i < u_{i+1} < u_{i+2} < \dots < u_{i+p}$$

À titre d'exemple, une courbe de Bézier dont l'intervalle de définition du paramètre u est limité à l'intervalle où $u \in [0, 1]$ peut être vu comme une courbe B-spline constituée d'un seul morceau dont 0 et 1 définissent l'intervalle utile et sont des noeuds.

Enfin NOEUDS et SEQUENCES NODALES contribuent à la définition d'une courbe B-spline avec une importance égale à celle du polygone caractéristique pour les courbes de Bézier.

B) TYPES DE SEQUENCE NODALE .

il existe 3 types :

- uniforme
- non-uniforme
- périodique (qui ne sera pas traité)

B.1) séquence nodale uniforme .

formellement une séquence nodale uniforme est donnée par l'équation :

$$u_i = i-1 \quad ; \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n+k+1$$

et normalisé par :

$$u_i = \frac{i-1}{n+k+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n+k+1$$

B.2) séquence nodale non-uniforme

une séquence nodale non uniforme à des valeurs nodales réparties non uniformément et les valeurs internes peuvent posséder un degré de multiplicité plus grand ou égal à 1

dans certains cas pratiques les valeurs internes de la séquence nodale peuvent être générées proportionnellement à la longueur de la corde entre les points P_i .

Spécifiquement, une séquence nodale non uniforme est donnée par les équations suivantes :

$$u_i = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k$$

$$u_{i+k} = \left[\frac{\left[\frac{i}{n-k+1} \right] d_{i+1} + \sum_{j=1}^i d_j}{\sum_{i=1}^n d_i} \right] \cdot (n-k+2) \quad (\text{II.2.1})$$

$$\text{pour } 1 \leq i \leq n-k+1$$

$$u_i = n-k+2 \quad \text{pour } n+1 \leq i \leq n+k$$

$$\text{où } d_i = \left\| \left\| P_{i+1} - P_i \right\| \right\|$$

C) ORDRE DE MULTIPLICITES D'UN NOEUD.

L'ordre de multiplicités d'un noeud caractérise le nombre de fois qu'un noeud de valeur numérique u^* apparaît dans une même séquence nodale en d'autre terme un noeud sera dit de multiplicité k , ou d'ordre de multiplicité k , lorsque k noeuds $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k-1}$ sont égaux.

*EXEMPLE.

soit la séquence nodale suivante

$$\begin{array}{cccccccc} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{array} \longrightarrow \text{valeurs des } u_i$$

On peut définir une autre séquence nodale \overline{u}_i tel que

$$\overline{u}_0 = u_0; \overline{u}_0 = u_1; \overline{u}_0 = u_2; \overline{u}_1 = u_3; \overline{u}_2 = u_4; \overline{u}_3 = u_5; \overline{u}_4 = u_6;$$

$$\overline{u}_4 = u_7; \overline{u}_4 = u_8$$

La séquence nodale \overline{u}_i est équivalente à la séquence nodale u_i sauf que certains noeuds de u_i (u_0, u_4) se répètent 3 fois donc ils sont de multiplicité 3

II.2.1.2) COURBE B-SPLINE : EQUATION.

soit un polygone caractéristique PG_n défini dans un repère R d'origine O et d'axes X, Y, Z une courbe B-spline de degré m et de séquence nodales $u_j \in \{0, 1, \dots, (n+m+1)\}$ répond à l'équation :

$$P(u) = \sum_{i=0}^n S_i N_{im}(u) \quad n \geq m \quad (\text{II.2.2})$$

u est paramètre $u \in [u_0, u_{n+m+1}]$

l'équation (II.2.2) montre la similitude de son expression avec celle de la courbe de Bézier on note cependant les différences suivantes :

*) Le degré m des fonctions de bases $N_{im}(u)$ n'est pas imposé par le nombre de sommets (poles) du polygone caractéristique PG_n , ce n'est pas le cas pour une courbe de Bézier où le degré du polynôme de Bernstein est imposé par le nombre de sommets du polygone caractéristique PG_n .

*) Les fonctions de base $N_{im}(u)$ sont des splines de degré m définies sur l'intervalle $u \in [u_0, u_{n+m+1}]$

*) L'intervalle de définition n'est plus restreint à l'intervalle $[0,1]$ comme pour les courbes de Bézier.

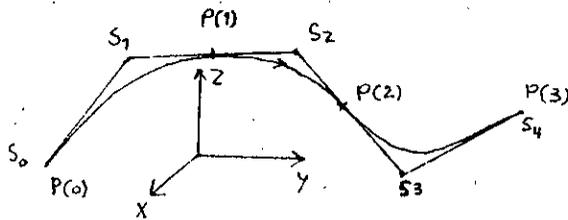


Fig:1. courbe B-Spline

II.2.1.3) PROPRIETES DES FONCTIONS DE BASES $N_{im}(u)$

A) EQUATION DES FONCTIONS DE BASE $N_{im}(u)$

Les fonctions de bases $N_{im}(u)$ sont obtenues à partir de notions purement mathématiques qu'il est nécessaire de voir et qui sont :

- Notion de fonction puissance tronquée
- Notion de différences fractionnées

A.1) Fonction puissance tronquée.

Definition : On appelle fonction puissance tronquée $t(u)$ et note:

$$t(u) = (u - u_0)_+^m \quad u \in]-\infty, +\infty[$$

une fonction tel que

$$t(u) \equiv 0 \quad \forall u \in]-\infty, u_0[$$

$$t(u) = (u - u_0)^m \quad \forall u \in]u_0, +\infty[$$

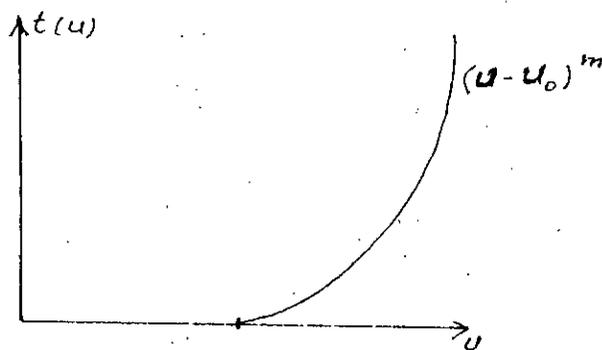


Fig:2. graphe de la fonction puissance tronquée

A.2) Différences fractionnées d'une fonction f(u).

Avant de proposer la forme générale des différences fractionnées on introduit l'expression d'une différence fractionnée d'ordre 1 d'une fonction f(u) pour les abscisses u_i et u_{i+1} et notée :

$$[u_i, u_{i+1}]f = \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i} \quad \text{avec } u_i \neq u_{i+1}$$

A l'ordre 2

$$[u_i, u_{i+1}, u_{i+2}]f = \frac{[u_{i+1}, u_{i+2}]f - [u_i, u_{i+1}]f}{u_{i+2} - u_i}$$

avec $u_i \neq u_{i+1} \neq u_{i+2}$

En généralisant à l'ordre k on obtient la différence fractionnée d'une fonction f(u) pour la séquence d'abscisses $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}$, qui s'écrit à partir des différences fractionnées d'ordre inférieur

$$[u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}]f = \frac{[u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+k}]f - [u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k-1}]f}{u_{i+k} - u_i}$$

(II.2.3)

$$u_i \neq u_{i+1} \neq u_{i+2} \neq \dots \neq u_{i+k}$$

l'équation (II.2.3) procure une façon récurrente de déterminer $[u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}]f$ en fonction des abscisses u_i, \dots, u_{i+k} et des fonctions $f(u_i), \dots, f(u_{i+k})$. on peut énoncer certaines propriétés des différences fractionnées :

P1-

$$[u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}]f = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{d u^k} \right]_{u=u_i} \quad (II.2.4)$$

avec $u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+k}$

P2-

la différence fractionnée d'ordre k d'une fonction f(u) ne change pas de valeur pour toute permutation des abscisses

u_i, \dots, u_{i+k} (c.a.d) :

$$[u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}]f = [u_{i+1}, u_i, \dots, u_{i+k}]f = [u_{i+k}, u_{i+k-1}, \dots, u_i]f$$

A.3) Fonction de base $Nim(u)$.

A partir des deux notions (fonction puissance tronquée et la différence fractionnée) précédente , les fonctions de bases

à 1 soit :

$$\sum_{i=j-m}^j N_{im}(u) = 1 \quad \forall u \in] u_j, u_{j+1} [\quad (\text{II.2.7})$$

il devient important de pouvoir mettre en point des fonctions $N_{im}(u)$ jouissant de cette propriété sur l'intervalle de définition de la courbe

C) RELATION DE RECURENCE.

L'équation (II.2.5) des fonctions de base $N_{im}(u)$ fait appel à la notion de différence fractionnée dont l'évolution récurant est numériquement difficile à obtenir les travaux de COX et DE BOOR on/ permet d'écarter ce problème en utilisant une relation de récurrence sur les fonctions de base $N_{im}(u)$; celle-ci s'énonce :

pour $m = 0$

$$N_{j0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_j \leq u < u_{j+1} \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (\text{II.2.8})$$

pour les degrés m supérieur on'a :

$$N_{im}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+m} - u_i} \cdot N_{i, m-1}(u) \quad u \leq u_{i+1} \quad (\text{II.2.9})$$

$$N_{im}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+m} - u_i} \cdot N_{i, m-1}(u) + \frac{u_{i+m+1} - u}{u_{i+m+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1, m-1}(u)$$

$$\text{pour } u_{i+1} < u < u_{i+m} \quad (\text{II.2.10})$$

$$N_{im}(u) = \frac{u_{i+m+1} - u}{u_{i+m+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1, m-1}(u)$$

$$\text{pour } u \geq u_{i+m} \quad (\text{II.2.11})$$

A partir de ces 4 relations on pourra évaluer les $(m+1)$ fonctions de base non nulles sur chaque intervalle $[u_j, u_{j+1}]$.

II.2.1.4) SEQUENCES NODALES ET FONCTIONS B-SPLINE .

Les définitions et propriétés des fonctions B-splines $N_{im}(u)$ abordées au cours des sections précédents définissent un cadre très large permettant de choisir une séquence nodale, un degré m et un ordre de multiplicité de chaque nœud les trois types de séquences nodales présentent un intérêt pour la modélisation géométrique, chacune d'entre elles conduisant à une dénomination particulier des courbes, construites à partir de ces séquences ainsi, on parle de B-splines :

- uniformes
- périodiques
- non-uniformes

A) Fonctions B-splines uniforme .

les fonctions B-splines sont dites uniformes lorsque la séquence nodale définissant l'ensemble des fonctions de base est constituée de noeuds possédant tous une multiplicité de 1 et distants les uns des autres d'une valeur constante .

pour une séquence $u_j, j \in \{0, \dots, p\}$ ces particularités s'écrivent :

$$u_j = \overline{u_j} \quad \text{et} \quad u_{j+1} - u_j = \alpha$$

et permettent la construction de $(p-m)$ fonctions de base.

Alors, les fonctions de base se déduisent les unes des autres par translation d'amplitude α .

pour des raisons de simplicités de manipulation on choisit couramment $\alpha = 1$ et des noeuds u_j à valeur entier .

le principal avantage des B-splines uniformes réside dans la possibilité de produire une forme explicite des fonctions de base $N_m(u)$:

$$N_m(u) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \cdot (-1)^{m+j+1} \cdot (i+j-u)_+^m$$

B) Fonctions B-splines periodique .

la caractéristique de la séquence nodale de ces fonctions est la nature periodique des fonctions de base .

Les noeuds ne sont pas necessairement équidistant et la periodicit  est fix e par la dimension du polygone caractéristique souhait e l'avantage des B-splines periodiques est de permettre de construire des courbes ferm es possédant une continuité élevée sur tout leur intervalle de définition.

C) Fonctions B-splines non uniformes .

la simplicité des B-splines uniforme se heurte à un manque de souplesse pour certaines manipulations géométriques du fait de l'équidistance des noeuds.

les courbes B-splines uniformes incorporent une difficulté qui apparait au moment de la détermination des sommets du polygone caractéristique d'une courbe en fonction de contraintes géométriques car certains sommets sont libres et des équations arbitraires doivent être ajoutées pour être en mesure de déterminer complètement le polygone caractéristique.

les B-splines non uniformes pour s'affranchir de ces équations complémentaires et offrir une plus grande souplesse de traitement, doivent être construites d'une séquence nodale telle que :

$$\sum_{i=0}^n N_{im}(u) = 1 \quad \forall u \in [u_0, u_{n+m+1}]$$

on fixant une multiplicité de (m+1) pour les premier et dernier noeuds de la séquence nodales, la condition précédente sera satisfaite entre u_0 et u_{n+m+1} alors n+1 fonctions de base $N_{im}(u)$ de degré m, seront construites à partir de cette séquence ; ceci se traduit par :

$$\begin{array}{c} u_0, u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m+1} \\ \overline{u_0, u_0}, \dots, \overline{u_0, u_1}, \dots, \overline{u_{r-1}, u_{r-1}}, \dots, \overline{u_r} \end{array}$$

Le nombre d'intervalles délimités par des noeuds intermédiaires $\overline{u_k}$ $k \in \{ 1, \dots, r-1 \}$ representent la quantité de polynomes Constituant une courbe au minimum, une courbe B-spline comportera un intervalle, elle sera alors représentée par une séquence nodale.

$$\underbrace{u_0, u_0, \dots, u_0}_{m+1 \text{ fois}}, \underbrace{u_1, u_1, \dots, u_1}_{m+1 \text{ fois}}$$

et (m+1) fonction de base $N_{im}(u)$ pourront être construites à partir de cette séquence. Si $u = 0$ et $u = 1$, les fonctions $N(u)$ s'écrivent :

$$N_{im}(u) = \binom{m}{i} \cdot u^i \cdot (1-u)^{m-i} \quad , u \in [0,1]$$

et correspondent exactement aux polynomes de berstein . Les polynomes de berstein sont un cas particulier de fonction B-spline non uniformes et par conséquent , les courbes B-splines non uniformes construites à partir de la séquence nodale \overline{u}_k sont des courbes de Bézier. Le modèle de B-spline représente une généralisation du modèle de Bézier.

II.2.1.5) PROPRIETES DES COURBES B-SPLINE.

A) SEQUENCE NODALE ET INVARIANCE D'UNE COURBE.

Une courbe B-spline , quelle que soit sa nature: uniforme périodique ou non uniforme, définie par un polygone caractéristique PG_n et une séquence nodale $u_i \in \{0,1,\dots,m+n+1\}$ déterminant des fonctions de base de degré m ne change pas de forme lorsque la séquence nodale est soumise à une transformation lineaire .

Soit la courbe initiale :

$$P(u) = \sum_{i=0}^n S_i \cdot N_i^m(u) \quad , \quad u \in [u_0, u_{n+m+1}]$$

La transformation lineaire s'écrit

$$u' = a \cdot u + b \quad , \quad a > 0$$

La nouvelle séquence nodale u'_i s'exprime en fonction de l'ancienne par: $u' = a \cdot u_i + b$, on obtient alors une nouvelle courbe $P'(u')$ telle que :

$$P'(u) = P'(u') = \sum_{i=0}^n S_i \cdot N_i^m(u')$$

$$u' \in [u'_0, u'_{n+m+1}] \quad \text{et} \quad u \in [u_0, u_{m+n+1}]$$

La transformation lineaire appliquée à u n'affecte ni le polygone caractéristique ni la forme de $P(u)$.

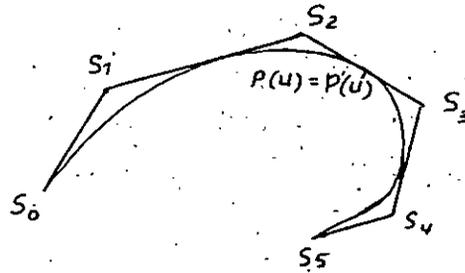


Fig.3. Invariance d'une courbe .

B) REVERSIBILITE D'UNE COURBE B-SPLINE.

Une courbe B-spline de degré m , construite à partir d'un polygone caractéristique PG_n et d'une séquence nodale $u_i, i \in \{0, 1, \dots, m+n+1\}$, ne change pas de forme lorsqu'elle est décrite à partir du polygone caractéristique :

$$S_n, S_{n-1}, \dots, S_1, S_0.$$

Si la séquence nodale est symétrique par rapport à

$$u + \frac{u_{n+m+1} + u_0}{2} \quad \text{alors:} \quad P(u) = P'(u_{n+m+1} - (u - u_0)).$$

et $P'(u)$ décrit $P(u)$ en sens inverse.

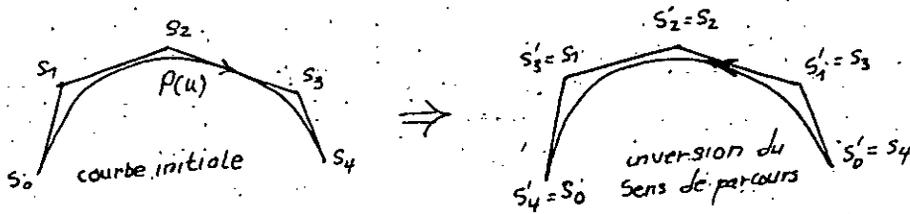


Fig.4. Réversibilité d'une courbe B-spline .

C) DERIVATION DES FONCTIONS DE BASE $N_{im}(u)$.

La particularité du modèle B-spline de ne pas exploiter des relations explicites des fonctions de bases impose la mise en place d'une

relation entre la dérivée des fonctions $N_{i,m}(u)$ et les fonctions de degrés inférieurs $N_{i,m-1}(u)$ ceci justifie une approche spécifique, plus particulièrement adaptée au B-spline non uniformes car les courbes B-spline uniformes possèdent une forme explicite simple à partir de laquelle on peut, sans difficulté, établir l'expression des dérivées. La dérivée première d'une fonction de base $N_{i,m}(u)$, construite à partir de la séquence nodale $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m+1}$, s'exprime à l'aide des relations:

$$\frac{d N_{i,m}(u)}{d u} = m \cdot \left[\frac{N_{i,m-1}(u)}{u_{i+m} - u_i} - \frac{N_{i+1,m-1}(u)}{u_{i+m+1} - u_{i+1}} \right]$$

avec $u_{i+1} < u < u_{i+2}$ (II.2.12)

$$\frac{d N_{i,m}(u)}{d u} = m \cdot \frac{N_{i,m-1}(u)}{u_{i+m} - u_i}$$

avec $u \leq u_{i+1}$ (II.2.13)

$$\frac{d N_{i,m}(u)}{d u} = -m \cdot \frac{N_{i+1,m-1}(u)}{u_{i+m+1} - u_{i+1}}$$

avec $u \geq u_{i+m}$ (II.2.14)

D) RELATION GEOMETRIQUE ENTRE POLYGONE CARACTERISTIQUE ET COURBES B-SPLINE .

Pour une courbe B-spline $P(u)$ de degré m , $(m+1)$ fonction de base $N_{i,m}(u)$ sont non nulles sur l'intervalle $u \in [u_i, u_{i+1}]$ alors :

$$P(u) = \sum_{j=i-m}^i S_j \cdot N_{j,m}(u) \quad , \quad u \in [u_i, u_{i+1}]$$

montre que la forme de la courbe sur cet intervalle ne dépend que de la position des $m+1$ sommets du polygone caractéristique PG_m :

$$S_{i-m}, S_{i-m+1}, \dots, S_i.$$

cette propriété est une caractéristique fondamentale des courbes B-splines dont la forme dépend, sur un intervalle donné, d'une partie seulement des sommets de PG_m par opposition aux courbes de Bézier où tous les sommets du polygone caractéristique interviennent sur

l'intervalle $[0,1]$.

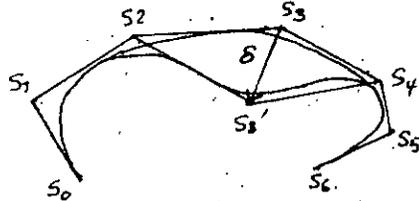


Fig:5. Déplacement d'un sommet.

E) INVARIANCE DE LA FORME D'UNE COURBE B-SPLINE.

Tous les types de séquence nodales ont été élaborés de manière à bénéficier de la propriété.

$$\sum_{i=j-m}^j N_{im} = 1 \quad , \quad \forall u \in [u_j, u_{j+1}] \quad , \quad j \in \{0, 1, \dots, m+1+n\}$$

aussi les conclusions qui suivent pourront s'appliquer à toute courbe B-Spline qu'elle que soit sa nature.

Donc l'invariance concerne ici les déplacements en translation et/ou rotation d'une courbe ou d'un carreau.

F) INFLUENCE DES SOMMETS DU POLYGONE CARACTERISTIQUE SUR LA FORME D'UNE COURBE B-SPLINE .

Le modèle B-Spline met en évidence de nouvelles possibilités pour les relations entre une courbe et son polygone caractéristique , aussi cette section s'attache à caractères autant que possible , l'influence du déplacement d'un sommet de PG_m sur la courbe $P(u)$.

Choisissant un sommet S_j , l'utilisateur lui même impose un déplacement δ dans le cadre d'une étape de recherche d'un compromis entre le critère esthétique ou dimensionnel - par exemple la

modification de la courbe est décrite par:

*) La déformation de la courbe est localisée sur l'intervalle $u \in [u_i, u_{i+1}]$.

) Le déplacement de chaque point de la courbe s'effectue dans la direction δ et atteint un maximum pour la valeur u^ telle que :

$$\frac{dN_m(u^*)}{du} = 0$$

*) Au bornes de l'intervalle concerné par la déformation, la continuité de la courbe respecte la relation (II.2.8) appliquée à la séquence nodale u_i, \dots, u_{i+m+1}

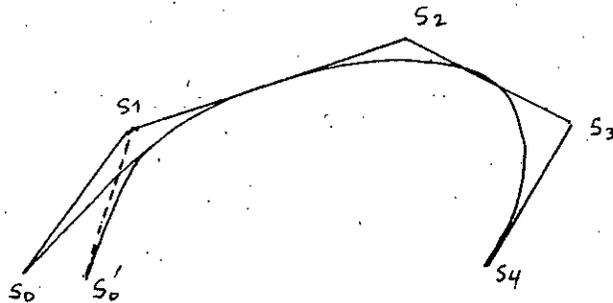


Fig:6. Influence des sommets du polygone caractéristique sur la forme de la courbe

La déformation locale subie par une courbe B-spline représente un autre atout de ce modèle pour faciliter la modification de la forme d'une courbe, comportant parfois de nombreux détails sans altérer les conditions de continuités imposées par la séquence nodale ni l'indépendance entre diverses parties de la courbe dont les fonctions mécaniques peuvent être de nature différentes.

G) COURBE FERMEE.

afin d'obtenir une B-spline fermée il suffit d'exiger que r sommets initiaux soient confondus avec r sommets finaux : ainsi $S_{-1} = S_n$, $S_{-2} = S_{n-1}$, et $S_{-r} = S_{n-r}$. En particulier pour une quadratique, il faut deux points confondus.

II.2.1.5) CONSTRUCTION DE COURBES A PARTIR DE CONTRAINTES GEOMETRIQUES .

La diversité du modèle B-spline (fonctions uniforme ou non, périodique) produit un large éventail de formulation de problèmes d'identification dont l'objectif est de déterminer le polynôme caractéristique et , éventuellement , la séquence nodale de la courbe B-Spline la plus adaptée à un ensemble de contraintes géométriques dont la nature est choisie parmi :

- *) Passer exactement par ou au voisinage d'un point .
 - *) Respecter, ou s'approcher, d'une direction donnée la suite traitera :
 - La construction de courbe B-spline uniformes par interpolation pour justifier la nécessité d'équation additionnelles .
 - La construction de courbe B-spline non uniformes par interpolation .
- Les considérations relatives aux paramétrages seront au sein de chaque section , car liées à la phase de détermination du polygone caractéristique .

II.2.1.5.1) CONSTRUCTION DE COURBE B-SPLINE UNIFORMES PAR INTERPOLATION

Soit un ensemble de $(P+1)$ points $P_i, i \in \{0, 1, \dots, p\}$ à partir desquels on souhaite construire une courbe B-spline de degré m , fixé par l'utilisateur , la séquence nodale est imposé par la nature des fonctions de base , le degré m et le nombre de points dans le cas présent , elle sera de la forme : $u_i = i$,

$i \in \{-m, -(m-1), \dots, (p-1), \dots, (P+m)\}$ afin que $(m+1)$ fonctions de bases soient non nulles pour $u \in [0, p]$.

Le principe de paramétrage est d'affecter à chaque point P_i un point de $P(u)$ telque :

$$u_i = i$$

Cette technique est donc indépendante de la distance entre deux points consécutif P_{i+1} les $(p+1)$ équations linéaires , imposant le passage par les points P_i s'écrivent :

$$\sum_{j=i-m}^{i-1} S_j \cdot N_{jm}(i) = P_i \quad , \quad i \in \{0, 1, \dots, p\}. \quad (\text{II.2.15})$$

On remarque que :

L'équation (II.2.15) produit $(p+1)$ équations alors que $(p+m)$

sommets S_j apparaissent dans le terme de gauche .

Pour obtenir une solution unique au problème posé $(m+1)$ équations indépendantes doivent être ajoutées . Parmi de nombreuses méthodes proposées on peut utiliser :

$$S_{-3} - S_{-2} = 0$$

$$S_{p-2} - S_{p-1} = 0$$

qui ajoutées à (II.2.15) constituent un système linéaire dont la solution est unique .

La matrice du système linéaire définie ainsi on pourra employer des algorithmes exploitant au mieux cette particularité .

En remplacement ou en plus des contraintes de passages des conditions d'orientation de la tangente pourraient être exprimées :

$$\frac{dP}{du}(j) = d_j \quad (\text{II.2.16})$$

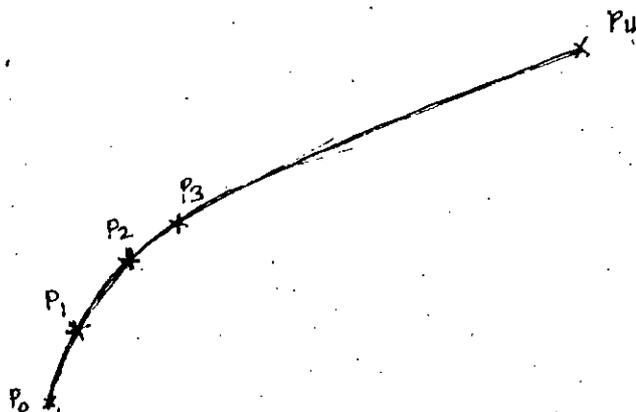


Fig:7. influence du paramétrage proportionnel à la distance entre les points

II.2.1.5.2) CONSTRUCTION DE COURBES B-SPLINE NON UNIFORME PAR INTERPOLATION .

Les travaux de HARTLRY et JUDD ont mis en évidence la sensibilité de la forme d'une courbe B-spline par rapport à la distribution des nœuds au sein de la séquence nodale . deux approches sont possibles :

*) La séquence nodale est fixée et le paramétrage de la courbe se

trouve imposé .

*) La position des noeuds est déterminée de manière à prendre en compte la distance entre les points de passage imposés à la courbe . Pour la première approche , on dispose de $(p+1)$ points P_i et l'utilisateur a fait choix d'un degré m . il doit ensuite fixer $(p-m+2)$ valeurs numériques pour définir la séquence nodale lorsque tous les noeuds intermediaires sont de multiplicités 1: u_i , $i \in \{0, \dots, (p-m+1)\}$, la séquence nodale attribuée à $P(u)$ est maintenant

$$u_0, \dots, u_1, u_2, \dots, u_{p-m}, u_{p-m+1}, \dots, u_{p-m+1}.$$

$$u_0, \dots, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+m+1}.$$

et le paramétrage de $P(u)$ est établi par la relation :

$$P_i = P(u) \quad , \quad i \in \{0, 1, \dots, p\} \quad (\text{II.2.17})$$

avec :

$$u_i = \frac{1}{m} \left[u_{i+1} + \dots + u_{i+m} \right] \quad (\text{II.2.18})$$

avec la seconde approche, la première étape consiste à déterminer les $(p-m+2)$ valeurs numériques u_i en tenant compte de la répartition des points P_i dans l'espace; avec la relation :

$$u_i - u_{i-1} = \frac{\sum_{j=i-1}^{m+i-2} \|P_{j+1} - P_j\|}{\sum_{k=1}^{p-m+1} \sum_{j=k-1}^{m+k-2} \|P_{j+1} - P_j\|} \quad i \in \{1, \dots, (p-m+1)\} \quad (\text{II.2.19})$$

ou u_0 est arbitrairement fixé .

*) Remarque :

Les formules (II.2.1) et (II.2.19) sont équivalentes.

A la suite du paramétrage de $P(u)$. les sommets S_i du polygone caractéristique PG_p de $P(u)$ sont déterminés à partir du système linéaire:

$$\sum_{j=k-m}^k S_j \cdot N_{jm}(\mu_i) = P_i \quad , \quad u_k \leq \mu_i \leq u_{k+1} \quad , \quad i \in \{0, 1, \dots, p\} \quad (II.2.20)$$

compte tenu du support local des fonctions $N_{jm}(u)$, les coefficients $N_{jm}(u)$ du système linéaire sont calculés au moyen des relations récurrentes (II.2.9), (II.2.10) et (II.2.11)

Sous forme matricielle la solution du système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_p \end{bmatrix} = [N_{mp}]^{-1} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix} \quad (II.2.21)$$

L'introduction des contraintes d'orientations de la tangente à $P(u)$ en certains points sera sous la forme d'équation:

$$\frac{dP}{du}(\mu_i) = d_i \quad , \quad i \in \{0, 1, \dots, q\}$$

$$\sum_{j=k-m}^{k-1} \left(\frac{S_{j+1} - S_j}{u_{j+m+1} - u_{j+1}} \right) \cdot N_{j+1, m-1}(\mu_i) = d_i \quad u \leq \mu_i \leq u_{k+1} \quad (II.2.22)$$

qui s'ajoutent aux équations (II.2.20), les paramètres μ_i et la séquence nodale de $P(u)$ seront déterminés sur la base de $(p+q+1)$ contraintes. Occasionnellement, les équations (II.2.20) et (II.2.22) pourront être appliquées au même point μ_i , au détriment de la répartition du paramètre.

II.2.2) CARREAUX B-SPLINE.

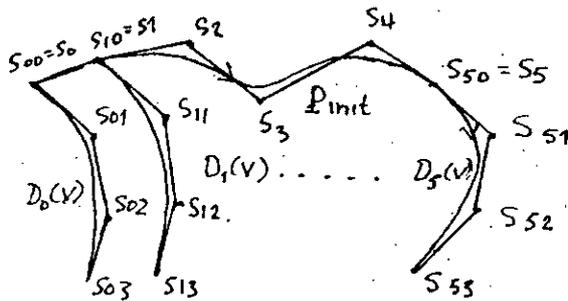


Fig:8. construction d'un carreeau B-spline non uniforme

Ce chapitre est abordé sous le même angle consacré aux carreaux de Bézier afin d'en faciliter la comparaison. Les diverses natures des fonctions de base B-spline : uniformes, périodiques ou non uniformes, seront directement employées et combinées chaque fois qu'une telle association représentera un intérêt.

En adoptant une démarche analogue à celle des carreaux de Bézier, l'équation d'un carreau B-spline représente le lieu géométrique d'une courbe d'une courbe B-spline P_{init} lorsqu'elle subit simultanément un déplacement et une déformation soit PG_n et u_i , $i \in \{0, 1, \dots, (m+n+1)\}$ le polygone caractéristique et la séquence nodale définissant la courbe B-spline non uniforme P_{init} de degré m et d'équation :

$$P_{init}(u) = \sum_{i=0}^n S_i \cdot N_{im}(u) \quad , \quad u \in [u_0, u_{m+n+1}] \quad (II.2.23)$$

Son déplacement et de la déformation sont déterminés par un réseau de directrices $D_i(v)$ imposant la trajectoire de chacun des sommets S_i de PG_n .

Les directrices $D_i(u)$ sont toutes représentées par des courbes B-spline de même degré r et de même séquence nodale v_j , $j \in \{0, 1, \dots, (t+r+1)\}$, donc :

$$D_i(v) = \sum_{j=0}^t S_{ij} \cdot N_{jr}(v) \quad , \quad v \in [v_0, v_{t+r+1}] \quad i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (II.2.24)$$

Au point $v = v_0$ chaque directrice $D_i(v)$ coïncide avec le sommet S_i de $P_{init}(u)$. L'expression du carreau B-spline non uniforme $P(u, v)$ défini par P_{init} et D_i , est représentée par (Fig: 8).

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^n D_i u(v) \cdot N_{im}(u)$$

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^t S_{ij} \cdot N_{im}(u) \cdot N_{jn}(v)$$

$$u \in [u_0, u_{n+m+1}] \quad , \quad v \in [v_0, v_{r+t+1}] \quad (\text{II.2.25})$$

Les sommets S_{ij} , $i \in \{0,1,\dots,n\}$ et $j \in \{0,1,\dots,t\}$ constituent le réseau caractéristique RS_{nt} du carreau .

II.2.2.1) PROPRIETES DES CARREAUX B-SPLINE.

A) RELATION GEOMETRIQUE ENTRE RESEAUX CARACTERISTIQUES ET SURFACES.

On considère en premier lieu, un réseau caractéristique RS_{nt} associé à des séquences nodales non uniformes u_i , $i \in \{u_0, \dots, u_{n+m+1}\}$, v_j , $j \in \{v_0, \dots, v_{r+t+1}\}$ alors l'équation (II.2.25) évaluée au point $P(u_0, v_0)$, $P(u_{n+m+1}, v_0)$, $P(u_0, v_{r+t+1})$ et $P(u_{n+m+1}, v_{r+t+1})$ montre que $P(u,v)$ coïncide, en ces points avec les sommets $S_{00}, S_{n0}, S_{0t}, S_{nt}$ de RS_{nt} indépendamment de la combinaison de séquences nodales utilisées, le comportement d'un carreau est toujours défini localement par un ensemble de $(m+1) \times (r+1)$ sommets du réseau caractéristique RS_{nt} lorsque le carreau est de degrés m et r suivant u et v respectivement .

B) PARTICULARITES DE FORME ET SINGULARITES DES CARREAUX B-SPLINES.

Il y a une diversité de formes pour les carreaux du modèle B-spline. le réseau caractéristique d'un carreau B-spline non uniforme étant nécessairement représenté par un tableau de $(n+1) \times (t+1)$ sommets le nombre de frontières sera inférieur à quatre seulement lorsqu'une ou plusieurs d'entre elles seront ramenées à un point (Fig:). elle représente un carreau B-spline non uniforme ramené à trois côtés en mettant en coïncidence tous les sommets S_{it} , $i \in \{0,1,\dots,n\}$ de son réseau.

L'emploi de carreaux ainsi dégénérés répond aux situations de modélisations de surface conique .

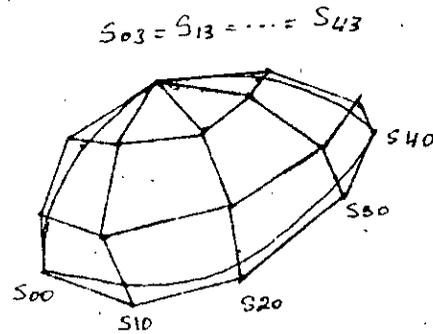


Fig.9. carreau B-spline non uniforme à trois côtés

II.2.2.2) CONSTRUCTION DE CARREAUX B-SPLINE A PARTIR DES CONTRAINTES GEOMETRIQUE.

La construction de carreaux, par interpolation, base sur un nuage de points se heurte, bien sur à la difficulté paramétrages et au problème convexe de détermination des directions u et v du carreau B-spline.

La soicifite de modèle B-spline apporte en plus, l'indétermination des dimensions des séquences nodales et de degrés selon u et v .

La technique de paramétrage pour le modèle B-spline, basée sur la relation (II.2.19), s'adapte moins bien à une distribution inégale des points P_{ij} que le modèle de Bézier. En effet, un paramétrage selon (II.2.19) détermine la séquence u_i en s'appuyant sur une seule rangée de points P_{ij} sans pouvoir tenir compte des autres points.

La construction d'un carreau par interpolation d'un réseau de courbe reprend le principe développé par les carreaux de Bézier. Cette fois cependant, la technique de paramétrage utilisée pour chaque méthode est équivalente.

Un bon fonctionnement de cette démarche est approchée dans le cas où les courbes $P_i(u)$ sont pratiquement planes et continues dans un plan parallèle. Les systèmes linéaires permettent la détermination par interpolation des courbes $P_j(u)$, du réseau caractéristique $RSnt$ du carreau $P(u,v)$ s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} S_{0j} \\ S_{1j} \\ \vdots \\ S_{nj} \end{bmatrix} = [N_{mn}]^{-1} \begin{bmatrix} S_j^0 \\ S_j^1 \\ \vdots \\ S_j^n \end{bmatrix} \quad , \quad j \in \{0, 1, \dots, t\} \quad , \quad (\text{II.2.26})$$

***) calcul des normales à la surface.**

IL est intéressant de savoir déterminer les normales à la surface, pour cela on doit d'abord déterminer la tangente $T_u(u,v)$ à la surface dans la direction du paramètre u puis celle dans la direction du paramètre v $T_v(u,v)$ puis l'on réalise le produit vectorielle entre t_u et t_v (en chaque point P_{ij}).

Et pour cela on applique la même démarche que celle étudiée pour Bézier (voir II.1.2.1.B).

chapitre III

APPLICATIONS

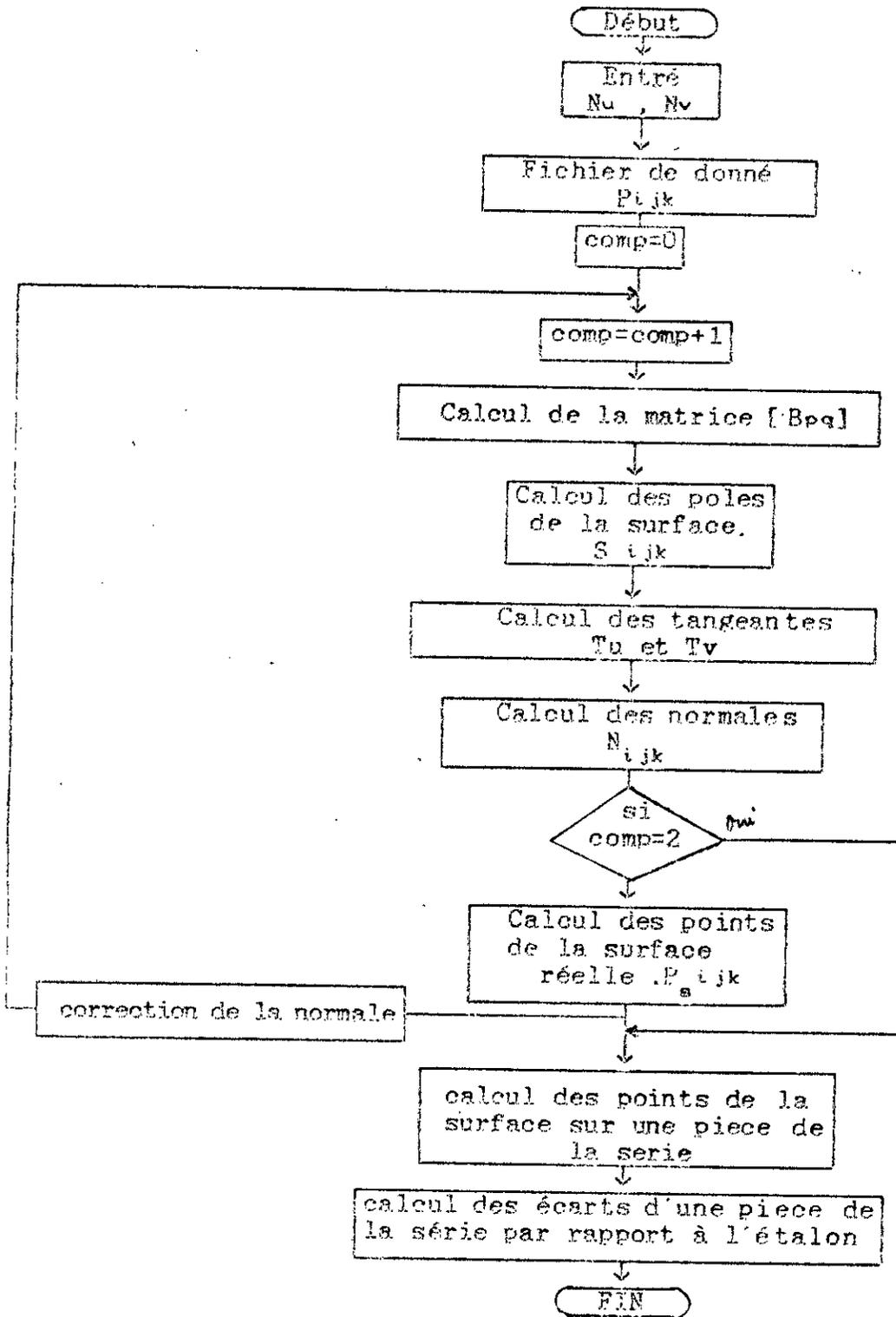
III) APPLICATION AUX DEUX METHODES.

III.1) DONNEES DE CALCULS DU 1^{er} ET 2^{me} FLANCS. (voir annexe)

III.2) CAS DE LA METHODE DE BEZIER

III.2.1) ORGANIGRAMME DE CALCUL D' UN POINT COURANT $P(u,v)$ DANS LE
CAS D'UNE SURFACE CONIQUE

* L'algorithme qui donne les points de la surface et les normales
d'une surface réelle est établie de la façon suivante:



11.2.2) RESULTATS OBTENUS.

Les résultats obtenus pour le cas de la méthode de Bézier sont les suivantes .

***** POINTS DE LA SURFACE REELLE DU FLANC 1 *****

1	45.912680	-4.709921	70.023640
2	44.716850	-6.022948	70.198830
3	43.829150	-5.422387	70.215930
4	42.785710	-4.792315	70.218380
5	41.598600	-4.155502	70.200110
6	40.313640	-3.543669	70.149460
7	38.815190	-2.939557	70.159210
8	37.279900	-2.439100	70.194290
9	49.346560	-5.393171	74.908100
10	48.060610	-6.633688	75.083290
11	47.067330	-5.950397	75.100390
12	45.901060	-5.229784	75.102840
13	44.573850	-4.499742	75.084570
14	43.132850	-3.803319	75.033920
15	41.480580	-3.120357	75.043670
16	39.805890	-2.574730	75.078750
17	52.773630	-6.084441	79.796080
18	51.402560	-7.247248	79.971270
19	50.303220	-6.481437	79.988370
20	49.002960	-5.683965	79.990820
21	47.535920	-4.863122	79.972550
22	45.949990	-4.069209	79.921900
23	44.136620	-3.327247	79.931650
24	42.322150	-2.754930	79.966730
25	56.165800	-6.805661	84.682080
26	54.736300	-7.866258	84.857260
27	53.534560	-7.014197	84.874360
28	52.101060	-6.138945	84.876820
29	50.507010	-5.210712	84.858540
30	48.761100	-4.342389	84.807890
31	46.787770	-3.544467	84.817640
32	44.842240	-2.932510	84.852720
33	59.558930	-7.525810	89.559850
34	58.055660	-8.499478	89.735040
35	56.750560	-7.563207	89.762140
36	55.210050	-6.591404	89.764600
37	53.440070	-5.610122	89.746320
38	51.562160	-4.633189	89.695670
39	49.429100	-3.786207	89.705420
40	47.357070	-3.136990	89.740500

III. 3. 2. 2) CAS DU DEUXIEME FLANC.

```

***** VALEURS DE LA NORMALE DE LA SURFACE DU FLANC 2 *****
  1  -6.117170E-01  7.235966E-01  3.197036E-01
  2   4.009181E-01 -8.953354E-01 -1.940083E-01
  3   3.836971E-01 -9.052240E-01 -1.826087E-01
  4   3.944808E-01 -8.995166E-01 -1.877624E-01
  5   4.273423E-01 -8.799530E-01 -2.075118E-01
  6   5.682947E-01 -7.658319E-01 -3.009031E-01
  7   5.627318E-01 -7.703695E-01 -2.997728E-01
  8   4.321079E-01 -8.751409E-01 -2.177410E-01
  9  -6.117170E-01  7.235966E-01  3.197036E-01
 10   4.009181E-01 -8.953354E-01 -1.940083E-01
 11   3.836971E-01 -9.052240E-01 -1.826087E-01
 12   3.944808E-01 -8.995166E-01 -1.877624E-01
 13   4.273423E-01 -8.799530E-01 -2.075118E-01
 14   5.682947E-01 -7.658319E-01 -3.009031E-01
 15   5.627318E-01 -7.703695E-01 -2.997728E-01
 16   4.321079E-01 -8.751409E-01 -2.177410E-01
 17  -6.117170E-01  7.235966E-01  3.197036E-01
 18   4.009181E-01 -8.953354E-01 -1.940083E-01
 19   3.836971E-01 -9.052240E-01 -1.826087E-01
 20   3.944808E-01 -8.995166E-01 -1.877624E-01
 21   4.273423E-01 -8.799530E-01 -2.075118E-01
 22   5.682947E-01 -7.658319E-01 -3.009031E-01
 23   5.627318E-01 -7.703695E-01 -2.997728E-01
 24   4.321079E-01 -8.751409E-01 -2.177410E-01
 25  -6.117170E-01  7.235966E-01  3.197036E-01
 26   4.009181E-01 -8.953354E-01 -1.940083E-01
 27   3.836971E-01 -9.052240E-01 -1.826087E-01
 28   3.944808E-01 -8.995166E-01 -1.877624E-01
 29   4.273423E-01 -8.799530E-01 -2.075118E-01
 30   5.682947E-01 -7.658319E-01 -3.009031E-01
 31   5.627318E-01 -7.703695E-01 -2.997728E-01
 32   4.321079E-01 -8.751409E-01 -2.177410E-01
 33  -6.117170E-01  7.235966E-01  3.197036E-01
 34   4.009181E-01 -8.953354E-01 -1.940083E-01
 35   3.836971E-01 -9.052240E-01 -1.826087E-01
 36   3.944808E-01 -8.995166E-01 -1.877624E-01
 37   4.273423E-01 -8.799530E-01 -2.075118E-01
 38   5.682947E-01 -7.658319E-01 -3.009031E-01
 39   5.627318E-01 -7.703695E-01 -2.997728E-01
 40   4.321079E-01 -8.751409E-01 -2.177410E-01

```

***** POINTS DE LA SURFACE REELLE DU FLANC 2 *****

1	38.326540	9.988514E-01	69.629950
2	38.830860	3.004499	70.141100
3	40.306020	3.627848	70.129750
4	41.648780	4.295959	70.134880
5	42.820870	4.935733	70.154530
6	43.684380	5.479013	70.247460
7	44.536870	6.070417	70.246330
8	45.395610	6.663395	70.164710
9	40.844490	1.159031	74.514410
10	41.484330	3.189539	75.025560
11	43.124060	3.889288	75.014210
12	44.643660	4.612489	75.019340
13	45.932790	5.376433	75.038990
14	46.929460	5.997623	75.131920
15	47.889630	6.669728	75.130780
16	48.838270	7.345715	75.049170
17	43.372470	1.309281	79.402390
18	44.146270	3.384789	79.913540
19	45.948090	4.143878	79.902190
20	47.619320	4.956929	79.907320
21	49.096890	5.819093	79.926970
22	50.174280	6.517573	80.019900
23	51.263480	7.249608	80.018770
24	52.297170	7.996035	79.937150
25	45.900190	1.467031	84.288380
26	46.807380	3.581899	84.799530
27	48.760630	4.414668	84.788190
28	50.592450	5.301579	84.793310
29	52.156490	6.255713	84.812970
30	53.412780	7.041583	84.905890
31	54.618740	7.846398	84.904760
32	55.727050	8.681715	84.823140
33	48.423820	1.647601	89.166160
34	49.473030	3.773839	89.677310
35	51.581050	4.674078	89.675960
36	53.553230	5.663299	89.681090
37	55.267620	6.694623	89.700740
38	56.654760	7.562213	89.793670
39	57.956180	8.461458	89.792540
40	59.153910	9.371124	89.710920

CONCLUSION

CONCLUSION:

IV) CONCLUSION ET COMPARAISON

Les deux modèles Bézier et B-Spline permettent la modélisation des surfaces complexes par approximation lorsque l'on ne connaît pas l'équation exacte de la surface .

Dans l'application que nous avons faite, sur la modélisation de la surface d'une denture d'un pignon conique droit nous avons constaté que le modèle de Bézier est plus facile à la formulation comparé au modèle B-spline . cependant le modèle B-spline présente un temps de calcul plus court que celui du modèle de Bézier, ceci est due à l'application de l'algorithme de COX de BOOR.

Quant aux résultats obtenus suivant la méthode de Bézier , on peut conclure qu'ils donnent satisfaction du fait de leurs valeurs très proches des valeurs théoriques.

par contre ceux obtenus par la méthode B-spline ils ne correspondent pas tout à fait aux valeurs escomptées.

Enfin nous suggérons pour la poursuite du sujet une application du modèle de Bézier afin d'analyser les défauts de formes des dentures (par exemple les pignons spiro-conique) dans le but de pouvoir agir en conséquence sur le réglage des machines de taillage pour améliorer la qualités géométrique de la denture.

ANNEXE

POINTS CENTRE BILLE SUR LAPIECE ETALON DU FLAN 1

Nop	X	Y	Z
1	45.81822	-5.70203	69.94806
2	45.20405	-5.19242	69.94806
3	44.34241	-4.61317	69.94806
4	43.30484	-3.96767	69.94806
5	42.09265	-3.32942	69.94806
6	40.72798	-2.66175	69.94806
7	39.24330	-2.06654	69.94806
8	37.76092	-1.60363	69.94806
9	49.35210	-6.38528	74.83252
10	48.54781	-5.80316	74.83252
11	47.58058	-5.14118	74.83252
12	46.42019	-4.42514	74.83252
13	45.06790	-3.67368	74.83252
14	43.54720	-2.92140	74.83252
15	41.90869	-2.24734	74.83252
16	40.28691	-1.73926	74.83252
17	52.77917	-7.07655	79.72050
18	51.88976	-6.41672	79.72050
19	50.81648	-5.67222	79.72050
20	49.52209	-4.87932	79.72050
21	48.02997	-4.03704	79.72050
22	46.36433	-3.18729	79.72050
23	44.56474	-2.45423	79.72050
24	42.80318	-1.91946	79.72050
25	56.17134	-7.78777	84.60649
26	55.22350	-7.03573	84.60649
27	54.04783	-6.20496	84.60649
28	52.62019	-5.33430	84.60649
29	51.00106	-4.38463	84.60649
30	49.17545	-3.46047	84.60649
31	47.21589	-2.67145	84.60649
32	45.32326	-2.09704	84.60649
33	59.56447	-8.51792	89.49427
34	58.54286	-7.66895	89.49427
35	57.26383	-6.75399	89.49427
36	55.72918	-5.78676	89.49427
37	53.93412	-4.78404	89.49427
38	51.97650	-3.75127	89.49427
39	49.85722	-2.91319	89.49427
40	47.83810	-2.30152	89.49427

POINTS CENTRE BILLE SUR LA
PIECE ETALON DU FLANC 2

Nopt	X	Y	Z
1	37.71788	1.71883	69.94806
2	39.22878	2.11364	69.94806
3	40.68780	2.72715	69.94806
4	42.04129	3.40094	69.94806
5	43.24607	4.06018	69.94806
6	44.24983	4.71701	69.94806
7	45.09679	5.30390	69.94806
8	45.82556	5.78263	69.94806
9	40.23583	1.87901	74.83252
10	41.88324	2.28868	74.83252
11	43.50584	2.88859	74.83252
12	45.03617	3.71747	74.83252
13	46.35799	4.50088	74.83252
14	47.49491	5.23562	74.83252
15	48.44955	5.90321	74.83252
16	49.26822	6.47495	74.83252
17	42.76381	2.02926	79.72050
18	44.54519	2.48383	79.72050
19	46.32887	3.24318	79.72050
20	48.01183	4.06191	79.72050
21	49.52209	4.84354	79.72050
22	50.73973	5.75557	79.72050
23	51.82340	6.48309	79.72050
24	52.72712	7.12527	79.72050
25	45.28153	2.18701	84.60649
26	47.20629	2.69104	84.60649
27	49.14241	3.51397	84.60649
28	50.98496	4.40656	84.60649
29	52.58170	5.38016	84.60649
30	53.97823	6.27958	84.60649
31	55.17866	7.07988	84.60649
32	56.15700	7.81095	84.60649
33	47.81516	2.36758	89.48427
34	49.87194	2.88298	89.48427
35	51.96283	3.77338	89.49427
36	53.94574	4.76828	89.49427
37	55.69282	5.81907	89.49427
38	57.22021	6.80021	89.49427
39	58.51610	7.69494	89.49427
40	59.58386	8.50036	89.49427

POINTS DE LA SURFACE REELLE SUR LA
PIECE ETALON DU FLANC 1

Nopt	X	Y	Z
1	45.35049	-6.46348	70.24453
2	44.85251	-5.97015	70.23260
3	43.81182	-5.41055	70.21767
4	42.80138	-4.80845	70.19880
5	41.62465	-4.17761	70.17516
6	40.30661	-3.54116	70.14579
7	38.88313	-2.98000	70.10898
8	37.48108	-2.55149	70.06324
9	48.77822	-7.14040	75.13333
10	47.99862	-6.57543	75.12088
11	47.04505	-5.93414	75.10533
12	45.91277	-5.24273	75.08570
13	44.59735	-4.52003	75.06113
14	43.12523	-3.80046	75.03053
15	41.55070	-3.16185	74.99232
16	40.01293	-2.68919	74.94471
17	52.19999	-7.82612	80.02499
18	51.32770	-7.18422	80.01214
19	50.27666	-6.46133	79.99603
20	49.01115	-5.69412	79.97560
21	47.55710	-4.88183	79.95019
22	45.94180	-3.06605	79.91868
23	44.20847	-3.36963	79.87905
24	42.53405	-2.87113	79.82967
25	55.58736	-8.54243	84.91386
26	54.65720	-7.79902	84.90095
27	53.50428	-6.99069	84.88439
28	52.10618	-6.14664	84.86325
29	50.52626	-5.22803	84.83729
30	48.75239	-4.33895	84.80475
31	46.86109	-3.58762	84.76386
32	45.05839	-3.05020	84.71305
33	58.97632	-9.25822	89.80420
34	57.97275	-8.42850	89.79106
35	56.71691	-7.53668	89.77409
36	55.20349	-6.59692	89.75252
37	53.45731	-5.62618	89.72554
38	51.55287	-4.62951	89.69243
39	49.50358	-3.83003	89.65037
40	47.57688	-3.25597	89.59829

POINTS DE LA SURFACE REELLE SUR LA
PIECE ETALON DU FLANC 2

Nopt	X	Y	Z
1	37.43734	2.66666	70.06189
2	38.85930	3.02708	70.10842
3	40.26597	3.60652	70.14489
4	41.57277	4.24907	70.17427
5	42.74206	4.88091	70.19788
6	43.71842	5.51430	70.21632
7	44.54434	6.08152	79.23112
8	45.25708	6.55399	70.24330
9	39.96105	2.82889	74.94318
10	41.52493	3.21317	74.99175
11	43.08342	3.86762	75.02977
12	44.56532	4.56381	75.06062
13	45.85003	5.31841	75.08479
14	46.95866	6.02851	75.10417
15	47.89158	6.67539	75.11963
16	48.68363	7.22998	75.13219
17	42.49410	2.98090	79.82854
18	44.18869	3.40931	79.87864
19	45.90700	4.12190	79.91808
20	47.53880	4.90668	79.94992
21	48.95736	5.75829	79.97487
22	50.19932	6.54461	79.99507
23	51.26085	7.25053	80.01136
24	52.14757	7.87480	80.02440
25	45.02622	3.14015	84.71218
26	46.85138	3.60721	84.76367
27	48.71905	4.39243	84.80421
28	50.51003	5.24995	84.83706
29	52.06740	6.19247	84.86276
30	53.43417	7.06524	84.88358
31	54.61205	7.84314	84.90045
32	55.57294	8.55560	84.91371
33	47.55363	3.32201	89.59769
34	48.51846	3.79983	89.65065
35	51.53909	4.65160	89.69222
36	53.46903	5.61043	89.72569
37	55.17593	6.62962	89.75219
38	56.67300	7.58286	89.77361
39	57.94582	8.45446	89.79078
40	58.99583	9.24068	89.80439

NORMALES DE LA SURFACE REELLE SUR LA
PIECE ETALON DU FLANC 1

Nopt	X	Y	Z
1	0.57058	0.76528	-0.29796
2	0.55431	0.78164	-0.28597
3	0.53323	0.80138	-0.27097
4	0.50598	0.82491	-0.25200
5	0.47036	0.85245	-0.22825
6	0.42349	0.88383	-0.19872
7	0.36187	0.91805	-0.16173
8	0.28124	0.95283	-0.11576
9	0.57676	0.75891	-0.30232
10	0.55999	0.77615	-0.28981
11	0.53824	0.79695	-0.27418
12	0.50996	0.82170	-0.25445
13	0.47291	0.85063	-0.22976
14	0.42409	0.88348	-0.19901
15	0.35980	0.91911	-0.16060
16	0.27536	0.95471	-0.11276
17	0.58209	0.75334	-0.30602
18	0.56488	0.77136	-0.29311
19	0.54254	0.79308	-0.27692
20	0.51350	0.81889	-0.25638
21	0.47524	0.84903	-0.23085
22	0.42465	0.88317	-0.19918
23	0.35805	0.92000	-0.15935
24	0.27048	0.95645	-0.10972
25	0.58691	0.74840	-0.30892
26	0.56915	0.76713	-0.29594
27	0.54628	0.78966	-0.27930
28	0.51659	0.81642	-0.25805
29	0.47719	0.84764	-0.23196
30	0.42518	0.88290	-0.19926
31	0.35659	0.92078	-0.15816
32	0.26620	0.95795	-0.10710
33	0.59111	0.74402	-0.31149
34	0.57298	0.76337	-0.29828
35	0.54967	0.78662	-0.28123
36	0.51929	0.81423	-0.25955
37	0.47920	0.84637	-0.23243
38	0.42575	0.88265	-0.19915
39	0.35541	0.92145	-0.15689
40	0.26253	0.95924	-0.10455

NORMALES DE LA SURFACE REELLE SUR LA
PIECE ETALON DU FLANC 2

Nopt	X	Y	Z
1	0.28195	-0.95258	-0.11440
2	0.28195	-0.91803	-0.16117
3	0.42395	-0.88379	-0.19792
4	0.47088	-0.85240	-0.22735
5	0.50654	-0.82485	-0.25107
6	0.53408	-0.80129	-0.26961
7	0.55523	-0.78153	-0.28448
8	0.57136	-0.76519	-0.29672
9	0.27616	-0.95466	-0.11122
10	0.36011	-0.91908	-0.16002
11	0.42453	-0.88344	-0.19824
12	0.47322	-0.85060	-0.22924
13	0.51051	-0.82164	-0.25354
14	0.53895	-0.79687	-0.27301
15	0.56078	-0.77606	-0.28855
16	0.57748	-0.75882	-0.30117
17	0.27107	-0.95642	-0.10858
18	0.35828	-0.91998	-0.15894
19	0.42500	-0.88314	-0.19858
20	0.47541	-0.84901	-0.23057
21	0.51394	-0.81885	-0.25565
22	0.54313	-0.79301	-0.27595
23	0.56537	-0.77130	-0.29232
24	0.58246	-0.75329	-0.30543
25	0.26665	-0.95792	-0.10622
26	0.35669	-0.92077	-0.15797
27	0.42550	-0.88287	-0.19871
28	0.47732	-0.84762	-0.23173
29	0.51688	-0.81639	-0.25756
30	0.54678	-0.78961	-0.27848
31	0.56946	-0.76709	-0.29544
32	0.58700	-0.74839	-0.30877
33	0.26284	-0.95922	-0.10394
34	0.35526	-0.92146	-0.15717
35	0.42587	-0.88264	-0.19894
36	0.47911	-0.84638	-0.23258
37	0.51949	-0.81421	-0.25822
38	0.54996	-0.78659	-0.28075
39	0.57315	-0.76334	-0.29800
40	0.59099	-0.74404	-0.31168

POINTS CENTRE BILLE SUR LA
PIECE SERIE DU FLANC 1

Nopt	X	Y	Z
1	45.82556	-5.79263	69.94806
2	45.09679	-5.30390	69.94806
3	44.24983	-4.71701	69.94806
4	43.24607	-4.06018	69.94806
5	42.04129	-3.40094	69.94806
6	40.68780	-2.72715	69.94806
7	39.22878	-2.11364	69.94806
8	37.71788	-1.71883	69.94806
9	49.26822	-6.47495	74.83252
10	48.44955	-5.80321	74.83252
11	47.49491	-5.23562	74.83252
12	46.35799	-4.50088	74.83252
13	45.03617	-3.71747	74.83252
14	43.50584	-2.98859	74.83252
15	41.88324	-2.29868	74.83252
16	40.23583	-1.87901	74.83252
17	52.72712	-7.12527	79.72050
18	51.82340	-6.48309	79.72050
19	50.73973	-5.75557	79.72050
20	49.52209	-4.94354	79.72050
21	48.01183	-4.06191	79.72050
22	46.32987	-3.24318	79.72050
23	44.54519	-2.49393	79.72050
24	42.76381	-2.02926	79.72050
25	56.15700	-7.81095	84.60649
26	55.17868	-7.07988	84.60649
27	53.97823	-6.27958	84.60649
28	52.58170	-5.38016	84.60649
29	50.98496	-4.40656	84.60649
30	49.14241	-3.51397	84.60649
31	47.20629	-2.69104	84.60649
32	45.29153	-2.18701	84.60649
33	59.58386	-8.50036	89.49427
34	58.51610	-7.69494	89.49427
35	57.22021	-6.80021	89.49427
36	55.69282	-5.81907	89.49427
37	53.94574	-4.76828	89.49427
38	51.96283	-3.77338	89.49427
39	49.87194	-2.88298	89.48427
40	47.81516	-2.36758	89.48427

POINTS CENTRE BILLE SUR LAPIECE SERIE DU FLANC 2

Nopt	X	Y	Z
1	37.76092	1.60363	69.94806
2	39.24330	2.06654	69.94806
3	40.72798	2.66175	69.94806
4	42.09265	3.32942	69.94806
5	43.30484	3.98767	69.94806
6	44.34241	4.61317	69.94806
7	45.20405	5.19242	69.94806
8	45.91822	5.70203	69.94806
9	40.28691	1.73926	74.83252
10	41.90869	2.24734	74.83252
11	43.54720	2.92140	74.83252
12	45.06790	3.67366	74.83252
13	46.42019	4.42514	74.83252
14	47.58059	5.14118	74.83252
15	48.54781	5.80316	74.83252
16	49.35210	6.38528	74.83252
17	42.80318	1.91946	79.72050
18	44.56474	2.45423	79.72050
19	46.36433	3.18729	79.72050
20	48.02997	4.03704	79.72050
21	49.52209	4.87932	79.72050
22	50.81648	5.67222	79.72050
23	51.88976	6.41672	79.72050
24	52.77917	7.07655	79.72050
25	45.32326	2.09704	84.60649
26	47.21589	2.67145	84.60649
27	49.17545	3.46047	84.60649
28	51.00106	4.38463	84.60649
29	52.62019	5.33430	84.60649
30	54.04783	6.20498	84.60649
31	55.22350	7.03573	84.60649
32	56.17134	7.79777	84.60649
33	47.83810	2.30152	89.49427
34	49.85722	2.91319	89.49427
35	51.97650	3.75127	89.49427
36	53.93412	4.78404	89.49427
37	55.72918	5.78676	89.49427
38	57.26383	6.75399	89.49427
39	58.54286	7.66895	89.48427
40	59.56447	8.51792	89.48427

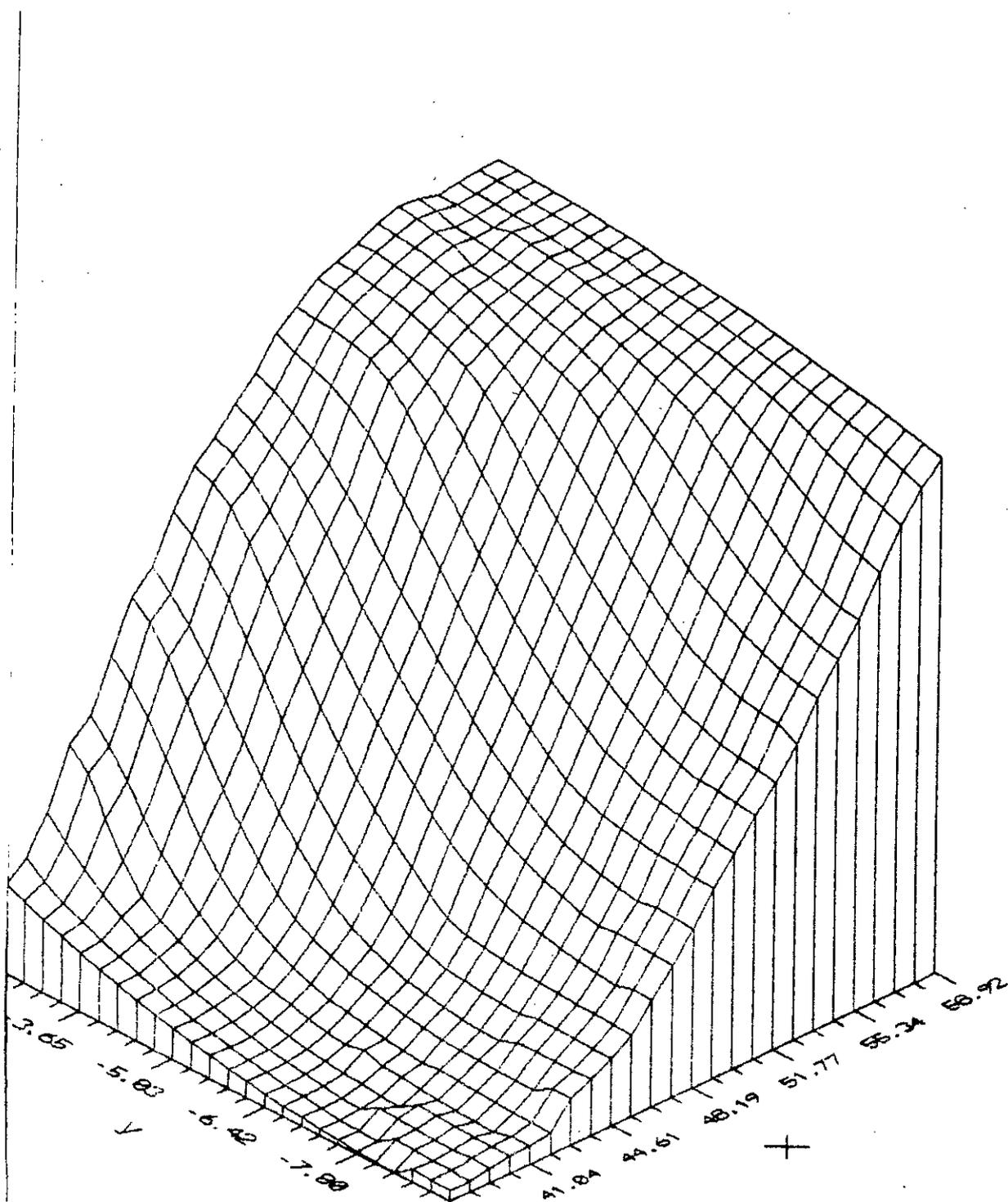


Schéma à trois dimensions obtenu par la méthode BEZIER
du flanc 1 en utilisant le logiciel surfer.

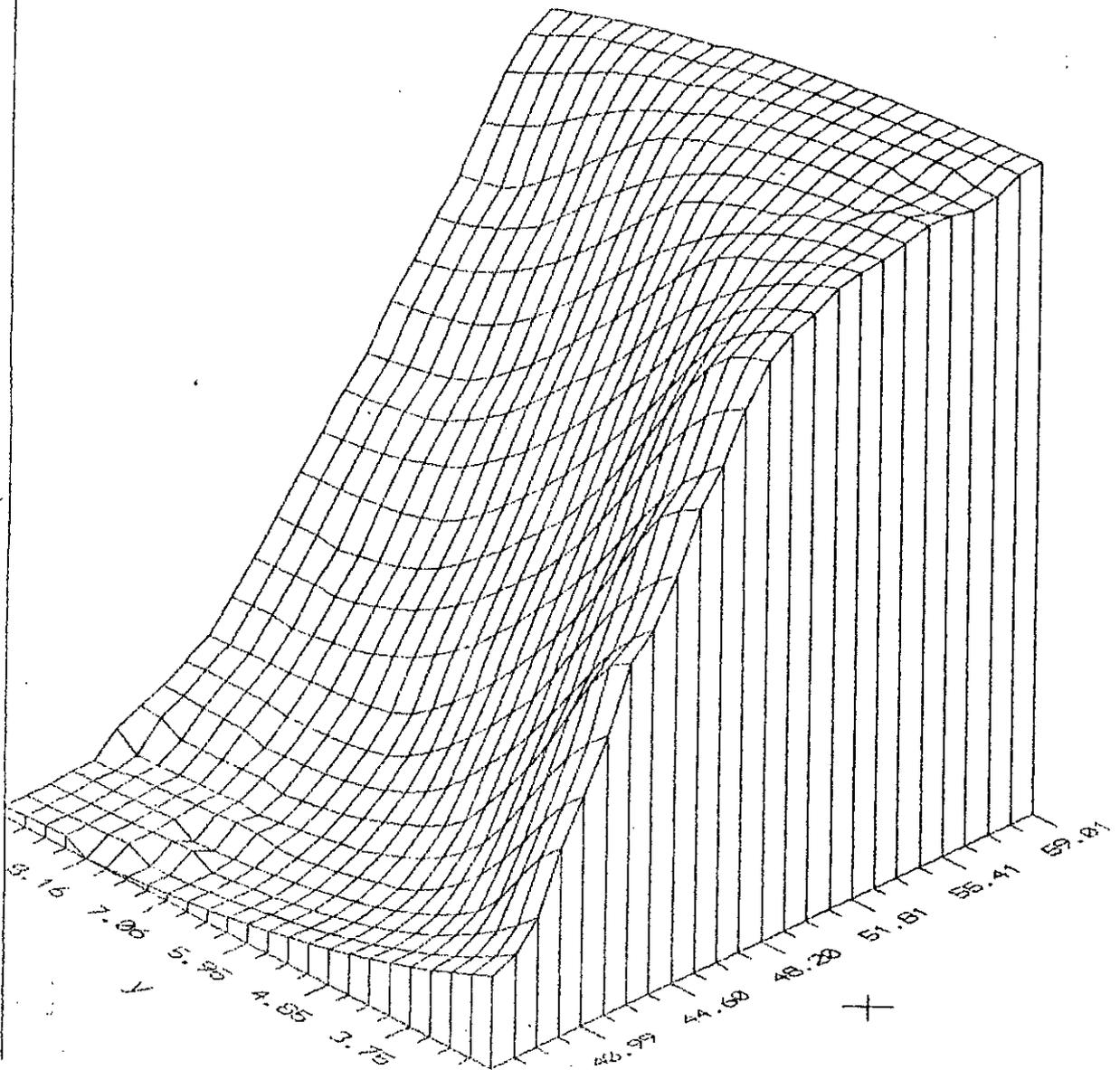


Schéma à trois dimensions obtenu par la méthode BEZIER
du flanc 2 en utilisant le logiciel surfer.

BIBLIOGRAPHIE:

- [1]. Y.Gardon : La CFAO introduction , technique et mise en oeuvre
Hermes 2) ed 1987
- [2]. P.Bézier : mathématique et CAO
volume 4 Hermes ed 1987 courbes et surfaces
- [3]. B.Barsky : mathématiques et CAO
volume 6 Hermes ed 1987 B-splines
- [4]. R.Camerero, L.Garanger : Introduction a la conception assistée par
ordinateur Ecole Polytechnique de Montreal 1980
- [5]. P.Bézier : Emploi des MOCN
Eyrolles ed 1970
- [6]. T.Coorevits, J.M.David : Le controle tridimensionnelle
Renishaw/Techno-Nathan ed 1991
- [7]. P.Cshoweizer : Infographie II . Transformation et découpage
courbe et surface Normes visibilité rendu réaliste
ed 1989
- [8]. P.Darnis , J.M.Vanthong : Graphisme et CAO
ed 1989
- [9]. M.Couillerot : Les surfaces gauches ou la mathématisation des
formes
Centre de conférence international de Cluny 1988
- [10]. S.B.Salah : Thèse de doctorat
E N S A M 1990
- [11]. Contrôle dimensionnelle des pompes centrifuges :
P F E . 1988/1989 - ENSAM - LILLE .