

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

11/93

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

PREDICTION DES INSTABILITES DANS LES
COMPRESSEURS AXIAUX
PAR ANALOGIE AVEC LES SYSTEMES ASSERVIS

Proposé par :

M. BOUDJEMAA

Etudié par :

CHAOUCHI MOHAMED

BELAID ZOUBIR

Dirigé par

M. BOUDJEMAA

PROMOTION : JUILLET 1993

E.N.P. 10, Avenue Hacem Baçi El-Harrach - ALGER.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

PREDICTION DES INSTABILITES DANS LES
COMPRESSEURS AXIAUX
PAR ANALOGIE AVEC LES SYSTEMES ASSERVIS

Proposé par :

M. BOUDJEMAA

Etudié par :

CHAOUCHI MOHAMED

BELAID ZOUBIR

Dirigé par :

M. BOUDJEMAA

PROMOTION : JUILLET 1993

DEDICACES

A la mémoire de ma grande-mère
A mes parents
A toute la famille
A tous mes amis

Je dédie ce modeste travail

CHAOUCHI MOHAMED.

A tous ceux qui me sont très chers, je dédie cet
humble travail:

A ma mère, a mon père, qui ont toujours su me
soutenir,
à ma grande soeur,
à toute la famille,
et à tous les amis.

BELAID ZOUBIR .

REMERCIEMENTS

Nous tenons à adresser notre sincère et profonde reconnaissance à Monsieur BOUDJEMAA pour ses conseils et son suivi durant toute la période de notre projet de fin d'étude.

Nous exprimons également notre gratitude à tous les enseignants de l'ENP qui ont contribué à notre formation et particulièrement ceux du département de génie mécanique.

ملخص

يكون هذا العمل دراسة عامة للاستقرارية
(الضخ،....) ضمن مضغط محوري ويهدف
إلى سرد طريقة تسمح بإكتشاف تغيير
في نظام الإذسياب، انطلاقاً من مميزات الحالة
المليعة للإذسياب بالإضافة إلى تعيين
النظام الإذسيابي اللا مستقر الناتج عن هذا
التحيز.

إن تجريب هذه الفكرة في حالة المنظومات
المسفرة يكون نظرة جديدة في ميدان
ميكانيك المرايح.

ABSTRACT:

This present work, is the general instability's study (rotating stall, surg.....) in axial compressor. Its object is to expose a method which allow to detect a changement of regime's flow starting from a characteristics in safe flow and to determine an instationnary's regime resulting from this changement. The transposition to the case of the "systeme asservi" constitute a new vision in the MDF.

Resume:

Le présent travail qui constitue une étude générale des instabilités (décrochage tournant, pompag.....) dans un compresseur axial, et a pour objectif d'exposer une méthode, permettant de détecter un changement de régime d'écoulement à partir des caractéristiques en écoulement sain, et de déterminer le régime instationnaire consecutif à ce changement.

La transposition au cas d'un système asservi constitue une nouvelle vision dans le domaine de la MDF.

TABLE DES MATIERS

TABLES DES MATIERES

LISTE DES SYMBOLES

SOMMAIRE

<u>CHAPITRE 1-</u>	<u>INTRODUCTION GENERALE</u>	9
1-1	PRESENTATION DU PROBLEME PHYSIQUE	9
1-2	REVUE DE LITTERATURE	11
1-2-1	DISTORSION D'ENTREE D'AIR	12
1-2-2	DECROCHAGE TOURNANT	14
1-2-3	POMPAGE	15
<u>CHAPITRE 2-</u>	<u>MODELISATION DES ECOULEMENTS DANS</u>	
	<u>UN COMPRESSEUR</u>	19
2-1	SCHEMATISATION DU COMPRESSEUR	19
2-2	EVOLUTION DES PERTURBATIONS DANS UN ECOULEMENT	
	CYLINDRIQUE STATIONNAIRE	22
2-2-1	HYPOTHESES DE CALCULS	22
2-2-2	EQUATION DE BASE	23
2-2-3	LINEARISATION	23
2-2-4	DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURRIER	24
2-2-5	TRANSFORMATION DE LAPLACE	26
2-2-6	RESOLUTION DU SYSTEME	27
2-2-7	MODELISATION SOUS FORME MATRICIELLE	29
2-3	ECOULEMENTS A LA TRAVERSEE DES GRILLES D'AUBES	31
2-3-1	CONSERVATION DES DEBITS	31
2-3-2	LIAISON AZIMUTHALE	32
2-3-3	TRANSFERT AXIAL	34
	2-3-3-1 PERTES GLOBALES DANS LES GRILLES	34
	2-3-3-2 ETUDE INSTATIONNAIRE DANS UN CANAL INTERAUBE	36
2-3-4	FONCTION DE RETARD	38
2-3-5	DEPHASAGE DU AU CALAGE	38
2-3-6	MATRICE DE TRANSFERT DES GRILLES D'AUBES	39

CHAPITRE 3-	RESOLUTION DU SYSTEME POUR UN COMPRESSEUR	41
3-1	ECOULEMENT A L'AMONT DU COMPRESSEUR	42
3-2	ECOULEMENT A L'AVANT DU COMPRESSEUR	43
3-3	CHOIX ET POSITION DE LA DISTORSION	43
3-4	RESOLUTION DU SYSTEME	46
3-5	SIMPLIFICATION DANS LE CAS D'UN COMPRESSEUR MULTITETAGE	
	COMPACT	49
3-5-1	INTERPRET ET CONSEQUENCE DE CETTE SIMPLIFICATION	49
3-5-2	CALCUL DE LA FONCTION $b_n^{c-\alpha}$	50
3-5-3	ANALYSE FORMELLE (COMPRESSEUR COMPACT)	52
3-6	DEFINITION DES PARAMETRES CARACTERISTIQUES DE L'ETUDE	
	STATIONNAIRE (CAS GENERAL)	54
3-6-1	REPARTITION SUIVANT LA CIRCONFERENCE	54
3-6-2	EVOLUTION A TRAVERS LES ETAGES	54
3-7	ETUDE INSTATIONNAIRE - THEORIE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE	55
3-7-1	ANALOGIE AVEC UN SYSTEME ASSERVI LINEAIRE	55
	3-7-1-1 SCHEMA D'UN ASSERVISSEMENT	55
	3-7-1-2 TRANSPOSITION AU D'UN COMPRESSEUR	56
	3-7-1-3 LIMITES ET DIFFICULTES INHERENTES	
	A LA TRANSPOSITION	58
3-7-2	THEORIE MODIFIEE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE	59
	3-7-2-1 CRITERE DE STABILITE	60
	3-7-2-2 REPONSE EN FREQUENCE	63
	3-7-2-3 PULSATION DE RESONANCE ω_R	65
	3-7-2-4 COEFFICIENTS DE SURTENSION Q	65
	3-7-2-5 PULSATION DE COUPURE	67
	3-7-2-6 TEMPS DU TRANSITOIRE	68
	3-7-2-7 BANDE PASSANTE	68
	3-7-2-8 INTERPRETATION GRAPHIQUE DES COURBES DANS	
	LE PLAN DE NYQUIST	69
3-8	SYNTHESE	71
CHAPITRE 4	ANALYSE DES RESULTATS	74
4-1	RESULTATS ET INTERPRETATIONS	74

4-1-1 COMPRESSEUR NACA	75
4-1-1-1 APPARITION DU DECROCHAGE	75
4-1-2 COMPRESSEUR C1	75
4-1-3 COMPRESSEUR CM5	75
4-2 ETUDE PARAMETRIQUE	75
4-2-1 PARAMETRES GEOMETRIQUES	76
4-2-1-1 CORDE	76
4-2-1-2 DISTANCE INTERGRILLE	76
4-2-1-2-1 INFLUENCE SUR LA STABILITE TEMPORELLE	77
4-2-1-2-2 INFLUENCE SUR L'ORGANISATION D'UN REGIME OSCILLATOIRE	77
4-2-2 PARAMETRES AERODYNAMIQUES	79
4-2-2-1 STABILITE TEMPORELLE	79
4-2-2-2 PULSATION DE RESONANCE	80
4-2-2-3 NOMBRE DE CELLULES DECROCHES	81
4-2-3 SYNTHESE	81

FIGURES

CONCLUSION

REFERENCES

ANNEXE A

ANNEXE B

ANNEXE C

LISTE DES SYMBOLES

a_n	: constante d'intégration
A	: vitesse du son
$[A]$: matrice AVAM
b_n	: constante d'intégration
$[B]$: matrice produit des AVAM
c_n	: coefficient d'intégration
c	: corde
C	: vecteurs des coefficients d'intégration
d	: distance intègrille
D	: vecteur distorsion
$[E]$: matrice ecpert
$[EP]$: matrice de transfert de transfert de l'écoulement intègrille
f_c	: fréquence de coupure
f_r	: fréquence de résonance
g_n	: coefficients de la série de FOURRIER
G_n	: fonction de transfert globale du compresseur
i	: incidence
i	: imaginaire
k	: nombre d'étages
k_e, k_z, k_p	: coefficients statiques (compresseur compact)
l	: longueur du créneau de la distorsion
$[M]$: matrice de transfert globale du compresseur
M_r	: nombre de mach relatif
n	: numéro de l'harmonique
p	: profondeur du créneau
p	: pression statique
P_o	: pression totale
P_{o_r}	: pression totale relative
$[P]$: matrice pertec
Q	: coefficient de surtension
r	: rayon

S	:opérateur de LAPLACE
S	:surface d'un canal intèraube
t	:temps
T	:température totale
T_R	:temps relatif
T_{tr}	:temps du transitoire
u	:vitesse circonférentielle du compresseur
v	:image par LAPLACE des perturbations de vitesses absolues rapportées à l'écoulement moyen
V	:vitesse absolue.
W	:vitesse relative
z	:distance axiale
Z	:vecteurs perturbations des débits et pression.
α_j	:coeffiients d'amortissement temporel
β	:angle relatif d'écoulement.
δP	:distorsion de pression introduite
Δn	:dénominateur des fonctions G_n^C et G_n^S
ψ	:fonction de courant
γ_c	:angle de calage
ξ	:vorticité
ξ_k	:plan de l'écoulement
ν	:nombre d'aubes
ω_c	:pulsation de coupure
ω_r	:pulsation de résonance
Ω	:vitesse angulaire du compresseur
$\bar{\omega}$:coefficient de pertes
ρ	:masse volumique
θ_γ	:déphasage dû au calage
θ_τ	:déphasage dû au retard
θ_o	:déphasage total
τ	:retard

INDICES SUPERIEURS:

- : valeur de l'écoulement moyen
- ' : valeur de l'écoulement perturbé
- ~ : image par LAPLACE des perturbations x'
- c : coefficients du cosinus de la décomposition en série de FOURRIER
- s : coefficient du sinus de la décomposition en série de FOURRIER

INDICES INFERIEURS:

- e : plan d'entrée
- k : numéro du plan de l'écoulement
- n : numéro de l'harmonique
- P : perturbation de la grandeur considérée
- r : direction radiale
- s : plan de sortie
- z : direction

rille dans un compresseur. D'autre part, une analyse de l'écoulement à travers les grilles d'aubes est effectuée. le système est résolu, pour chaque écoulement par une décomposition en série de FOURRIER suivant la circonférence et par la transformée de LAPLACE pour les variables temporelles.

Le chapitre 3 présente la méthode de résolution du système, résolution obtenue par couplage sous forme matricielle des fonctions de transfert représentatives de chaque type d'écoulement.

Partant de l'analogie existante entre la réponse d'un système asservi et celle d'un compresseur, il est proposée une théorie originale de la transformée de LAPLACE, reconsidérée et transposée à notre problème. un critère de stabilité est défini par l'application du théorème des résidus et du théorème de CAUCHY.

Au chapitre 4, une étude paramétrique est entreprise; celle-ci est facilitée par l'analyse des images par la transformée de LAPLACE dans le plan de Nyquist. une telle approche, permet non seulement de définir l'état correspondant au point de fonctionnement considéré, mais aussi de connaître la possibilité pour l'écoulement d'évoluer suivant certaines directions.

La déformation progressive des courbes sous l'influence de paramètres telles que cordes, distances intergrilles, permet de saisir les contraintes qui maintiennent l'écoulement dans une configuration donnée. cependant, il existe des valeurs privilégiées de ces paramètres favorisant l'apparition du décrochage tournant.

Enfin, il semblerait que l'écoulement, ainsi que les instabilités observées soient trop complexes pour que l'on puisse tirer des lois simples sans pour autant limiter leur validité à un type de machine donné. La méthode mise au point permet une analyse relativement rapide de pratiquement n'importe quel type de compresseur axial à condition que l'écoulement de base soit connu avec une précision suffisante.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

Dans le cadre très restreint par la spécificité du problème, le présent travail tente de montrer comment l'extension de la transposition à une échelle pluridisciplinaire pourrait se révéler profitable. un processus d'échange a ainsi été entrepris entre la théorie des asservissements et la mécanique des fluides et a permis de donner une vision globale du problème.

Il semble indispensable de toujours situer une étude dans un contexte générale : seule une vision globale peut conduire à une solution générale.

1-1 PRESENTATION DU PROBLEME:

Il est classique de représenter la carte des performances d'un compresseur axial dans le plan rapport de pression -débit. Pour l'ensemble des applications actuelles, la plage d'opération demandée est importante et doit se plier à des contraintes de rendements acceptables et de fiabilité. ces contraintes sont directement liées au niveau des effets instationnaires parasites, ceux-ci pouvant provoquer des efforts mécaniques trop élevés ou des instabilités de l'écoulement dans l'ensemble turbomachine-circuit récepteur. Sur chaque courbe caractéristique à vitesse de rotation constante, il existe un point rapport de pression-débit au delà duquel apparaît un régime localement ou globalement instationnaire (voir fig 1-1).

Ces régimes peuvent être essentiellement de deux types: décrochage tourant ou pompage.

le régime de décrochage tourant apparaît généralement aux faibles vitesses de rotation, il est marqué par l'existence dans la machine de zones à débit réduit, nuls ou négatifs dans un ou plusieurs étages. Ces zones se répartissent autour de la

circonférence en cellules de nombre ,d'étendue,variables et tournent à vitesse angulaire constante.elles peuvent affecter une partie ou la totalité de la hauteur des aubes.leur nombre peut varier de un à huit et plus,la vitesse angulaire de 0.2 à 0.8 fois celle de la roue.ces configuration sont fonction du dessin de la machine,de sa vitesse de rotation et du débit.on distingue deux types de décollement tournant:le décollement faible qui perturbe peu les caractéristiques des étages concernés et le décollement fort qui modifie profondément le couple rapport de pression-débit du ou des étages touchés et affecte la forme de la courbe de performance globale.Le premier peut entraîner la rupture des aubages par fatigue ,le second occasionne des contraintes suffisantes pour provoquer la destruction instantanée des aubages.

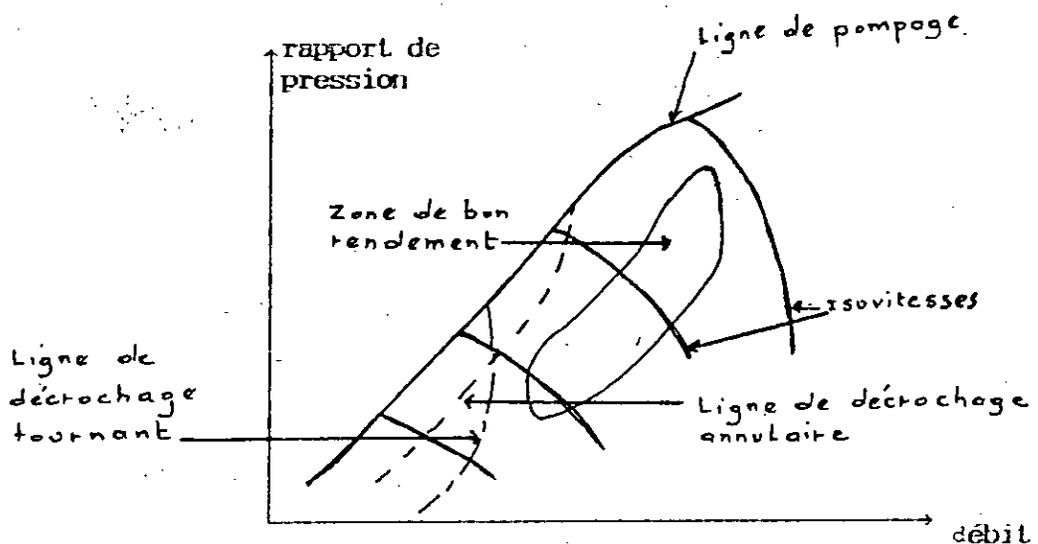


fig 1-1 exemple type de carte de performance d'un compresseur axial

Le pompage est un régime instationnaire qui affecte l'ensemble compresseur -circuit.Il est caractérisé par une oscillation axiale du débit à faible fréquence et avec des amplitudes considérables. La naissance d'un tel phénomène dépend non

seulement du compresseur mais aussi de son environnement. Ce régime inacceptable en raison des grands dangers qu'il présente, oblige les constructeurs à prévoir "une marge au pompage", i-e une limite du domaine de fonctionnement qui exclut l'ensemble de ces instabilités. Le problème est d'autant plus critique que la zone de bon rendement (voir fig 1-1) voisine avec cette limite de pompage. Prendre une marge de sécurité importante, c'est donc exclure du domaine de fonctionnement une partie de la zone de bon rendement. Le choix de la marge doit tenir compte de la précision de la méthode.

Les conditions d'entrée réelles du compresseur s'écartent de celles théoriquement admises; les non uniformités de l'écoulement peuvent être d'origine différentes (ingestion de gaz chauds, fortes turbulences à l'entrée) créant des distorsions de pression totale ou de température, stationnaire ou non. L'expérience montre qu'une distorsion circoférentielle de pression totale est plus pénalisante :

Enfin d'autres phénomènes peuvent apparaître:

* décrochage annulaire: cellule à débit réduit occupant toute la circoférence, mais une partie seulement de la hauteur d'aube.

*flottement: vibration des aubes qui entraînent leur destruction, provoquée par un coefficient d'amortissement nul ou négatif, et conduisant à une variation brutale d'échange d'énergie et souvent en présence d'une concordance entre la fréquence propre des aubes et la fréquence de l'écoulement les entourant.

L'enveloppe de ces problèmes constitue la stabilité du compresseur. Ces instabilités peuvent se définir par des amplifications, ou par des fréquences de résonance. La complexité de l'agencement des divers écoulements explique la variété des configurations d'instabilités observées.

1-2 REVUE DE LITTÉRATURE:

Les méthodes d'études existantes se répartissent en deux catégories: méthodes statistico-expérimentales et méthodes mathématico-empiriques.

La première approche est développée par l'industrie de pointe; le principe est de synthétiser un ensemble de cas d'études sur de nombreux compresseurs et d'en déduire des lois générales, souvent d'utilisation très simples. cependant, cette étude reste limitée à un certain type de machine, de plus son coût est très élevé; néanmoins on peut remarquer que dans certains cas, ce sont les seules méthodes dont on puisse disposer.

Les méthodes mathématico-empiriques concernent le domaine de la recherche, un modèle mathématique est construit schématisant le comportement du compresseur et dans lequel sont incluses des corrélations expérimentales. Cette démarche se heurte à la nécessité d'utiliser des hypothèses qui conduisent à des schématisations parfois trop sommaires, et au manque d'informations sur les corrélations empiriques.

Notre objectif est d'établir une méthode ayant une cohérence d'un point de vue recherche et d'un point de vue industrie (modèle utilisable sur toute turbomachine)

Il est donc présenté une revue des méthodes actuelles traitant successivement les problèmes de distorsions d'entrée d'air, de décrochage tournant et de pompage sans plus détailler les approches.

1-2-1 DISTORSION D'ENTREE D'AIR:

Les modèles d'études sont nombreux et variés. la configuration adoptée est généralement celle de la distorsion circonférentielle de pression totale. pression totale, car on montre par une modélisation et des essais que l'étude d'une distorsion de température pouvait être ramenée à l'étude d'une distorsion de pression totale. enfin, distorsion circonférentielle car l'effet d'une distorsion radiale a des effets secondaires.

la méthode des compresseurs parallèles est sûrement la plus utilisée. elle a été développée par PEARSON. le principe est le suivant:

La distorsion est supposée stationnaire ce qui est vérifié si sa période de fluctuation est supérieur au temps de la traversée de la machine par l'écoulement. la distorsion représentée par un créneau de pression totale suivant la direction azimuthale, le

compresseur peut être scindé en secteurs travaillant à des pressions différentes.

ADAMCZYK, suivant une autre démarche, analyse l'évolution d'une distorsion dans une roue isolée en considérant l'écoulement bidimensionnel, incompressible stationnaire. Une étude non linéaire dans un canal interaube lui permet d'établir une relation entre les pressions statiques entrée-sortie basées sur la théorie de TAKATA et NAGANO. L'intérêt de l'étude est de présenter en même temps que le champ de pression statique à l'aval de chaque roue, les conditions d'apparition du décrochage tournant par le calcul instationnaire de l'écoulement.

MOKELKE développe une méthode linéaire détaillée pour compresseurs multiétagés en supposant l'écoulement bidimensionnel compressible stationnaire. L'étude de l'écoulement des espaces intergrilles est traitée à l'aide des équations linéarisées d'EULER et de la continuité et la résolution est obtenue par décomposition en série de FOURRIER suivant la direction azimutale. Pour les espaces aubés, il utilise la méthode des disques équivalents et détermine des fonctions de transfert dépendant des nombres de Mach entrée et sortie, des angles absolus α_e et α_s , du coefficient

de pertes $\bar{\omega}$, de sa dérivée $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \text{tg} \alpha_e}$ et de la dérivée

$\frac{\partial \text{tg} \beta_s}{\partial \text{tg} \beta_e}$. L'étude conduit à une forme de résolution matricielle; à chaque écoulement correspond une matrice de transfert donnant des grandeurs aérodynamiques de sortie en fonction de celles de l'entrée (V_z, V_θ, P, T).

J. FABRI aborde l'étude d'une distorsion d'entrée d'air stationnaire ou instationnaire par une théorie linéaire en faisant l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel incompressible instationnaire. La linéarité des équations permet d'utiliser la décomposition en série de FOURRIER suivant la circonférence et d'utiliser la transformée de LAPLACE pour les termes instationnaires. Nous ne développons pas ici les équations, notre

modèle étant construit suivant la même démarche, nous les détaillerons dans le chapitre suivant.

FABRI fait apparaître la possibilité d'amplification au cours du temps de la perturbation et en déduit un critère de stabilité pour des cas simples; la méthode est étendue aux compresseurs multiétagés compact (sans distances intergrilles).

1-2-2 DECROCHAGE TOURNANT :

Le phénomène ayant une configuration instationnaire, cet aspect domine la conception de l'ensemble des modèles.

TAKATA et NAGANO ont présenté une méthode non linéaire menant un étude non plus seulement qualitative mais aussi quantitative.

Ils sont partis du principe que le phénomène tournant était lié à l'instabilité générale de l'écoulement, i-e à sa potentialité d'amplifier une perturbation locale. L'écoulement moyen non perturbé est supposé connu (stationnaire, axisymétrique). Une perturbation est superposée à cet écoulement et son évolution est étudiée en supposant les surfaces de courants cylindriques. Les principales équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \xi_p}{\partial t} + (V_z + V_z) \frac{\partial \xi_p}{\partial z} - (V_e - V_e) \frac{\partial \xi_p}{r \partial \theta} = 0 \quad (1-1)$$

$$\nabla \psi = -\xi_p \quad (1-2)$$

avec ψ_p : une fonction de courant de l'écoulement perturbé.

ξ_p : la vorticité de l'écoulement perturbé.

Cette méthode peut prédire, pour un compresseur monoétage, le nombre de cellules ainsi que la vitesse de rotation du petit décrochage tournant.

ORNER, reprenant l'étude de TAKATA et NAGANO, la

compresseur-circuit récepteur. Un même compresseur placé dans deux circuits d'essais n'aura pas les mêmes limites de pompage et pourra dans certains cas évoluer jusqu'à débit nul sans pomper. C'est pourquoi, parler de ligne de pompage pour un compresseur est impropre, il faudra employer le terme de ligne d'instabilité du compresseur.

La prise en compte du circuit environnant le compresseur pose un problème de modélisation; en effet, l'aspect très différent des divers composants (géométrie) nécessite une schématisation souvent excessive.

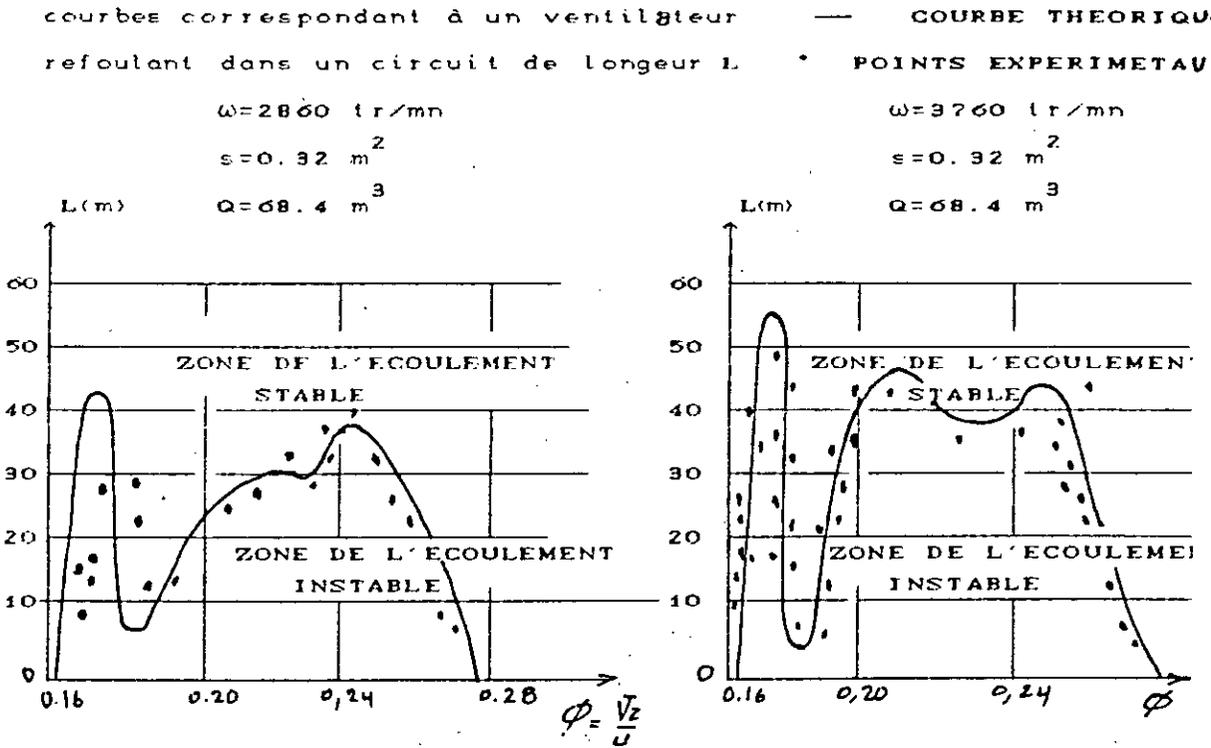
MITTON, présente une étude du pompage d'un circuit de ventilation, composé de ventilateurs placés en série ou en parallèle reliés par des conduits qui débouchent dans des volumes de capacité suffisamment grande pour pouvoir négliger la vitesse de l'écoulement; le fluide est supposé incompressible.

La modélisation consiste à exprimer Z , le vecteur perturbation des débits et différence de pression par la relation matricielle:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = [M].Z \quad (1-3)$$

La connaissance des valeurs propres de $[M]$ évite l'intégration du système et par une étude de leur partie réelle (positive ou négative) on peut déterminer si le système est stable. Le modèle met bien en relief, l'impact du circuit récepteur notamment par l'effet de sa longueur (voir fig 1-3)

Fig 1-3



GREITZER, utilisant le même schéma simplificateur, représente le compresseur par un disque d'action, prolongé par un conduit de longueur équivalente au compresseur et débouchant dans un grand réservoir où la vitesse est supposée négligeable.

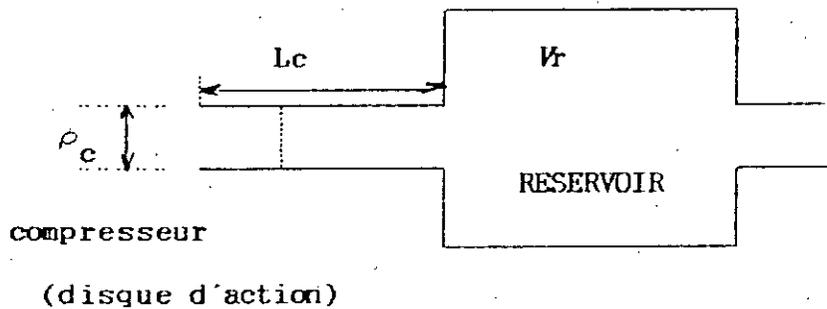


fig 1-4

Suivant une théorie linéaire, un critère de stabilité apparaît dépendant notamment du réservoir V_r mais qui, dans tous les cas, définit la stabilité du circuit dans la zone correspondant au maximum de la caractéristique du compresseur. il en déduit que les phénomènes mis en jeu sont essentiellement non linéaires et construit un modèle suivant cette hypothèse. il met en évidence

un coefficient B défini par :

$$B = \frac{U}{2 A} \sqrt{V_T / (\rho_c \cdot Lc)} \quad (1-4)$$

A étant la vitesse du son.

Des essais confirment l'influence de ce coefficient ,permettant par un étalonnage judicieux,de savoir si on opère en décrochage tournant (valeurs moyennes de B) ou en pompage(fortes valeurs de B)

1-3 conclusion:

L'objectif de notre travail est de reproduire par un modèle mathématique les conditions d'apparitions des phénomènes instationnaires parasites et d'essayer d'en analyser les causes;la difficulté réside dans le choix du modèle;en effet, tout modèle nécessite des simplifications .Le choix des hypothèses est d'autant plus délicat que la nature du phénomène est méconnue.De nombreuses approches ,très différentes,ont néanmoins aidé à faire ressortir certaines idées essentielles qui ont orienté le présent travail.

Suite à cette formulation mathématique d'une rigueur vraisemblante,elaborée à l'I M M F,nous poursuivons l'étude en essayant de reproduire la même démarche ,mais cette fois-ci numérique ,par laquelle on dressera un organigramme et un programme en langage fortran ,susceptible d'aboutir et de fournir les resultats graphiques par l'intermédiaire désqueles une analyse des phénomènes instationnaires sus-cités peut être effectuée.

CHAPITRE 2

MODELISATION DES
ECOULEMENTS
DANS UN
COMPRESSEUR

CHAPITRE II

MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT DANS UN COMPRESSEUR

L'idée de base consiste à admettre que, dans le domaine de validité d'une méthode linéaire, amplification d'une distorsion et décrochage tournant présentent une caractéristique: le point de transition est défini par un écoulement localement ou globalement instable. Si une telle théorie ne peut rendre compte de l'ensemble des phénomènes, il est néanmoins possible d'étudier la réponse du système à la schématisation de ces phénomènes et d'en déduire la probabilité d'apparition d'un certain type d'écoulement.

En présence de phénomènes complexes, toute théorie, toute expérimentation, aussi fines soient-elles, définissent un état qui ne peut, au mieux, que tendre vers l'état réel. Il a été établie une théorie qui, si elle ne définit pas complètement l'écoulement réel, permet de mettre en évidence les conditions qui engendrent le phénomène étudié.

2-1- SCHEMATISATION DU COMPRESSEUR:

La géométrie très complexe d'un compresseur axial ne permet généralement pas une modélisation mathématique très rigoureuse. Il est donc nécessaire d'établir une succession d'hypothèses jusqu'à ce qu'apparaisse une modélisation susceptible de conduire à une résolution. Le modèle sera d'autant plus performant que le nombre d'hypothèses sera réduit et que le schéma mathématique sera le plus simple.

Soit la figure ci-après représentant la coupe méridienne d'un compresseur type:

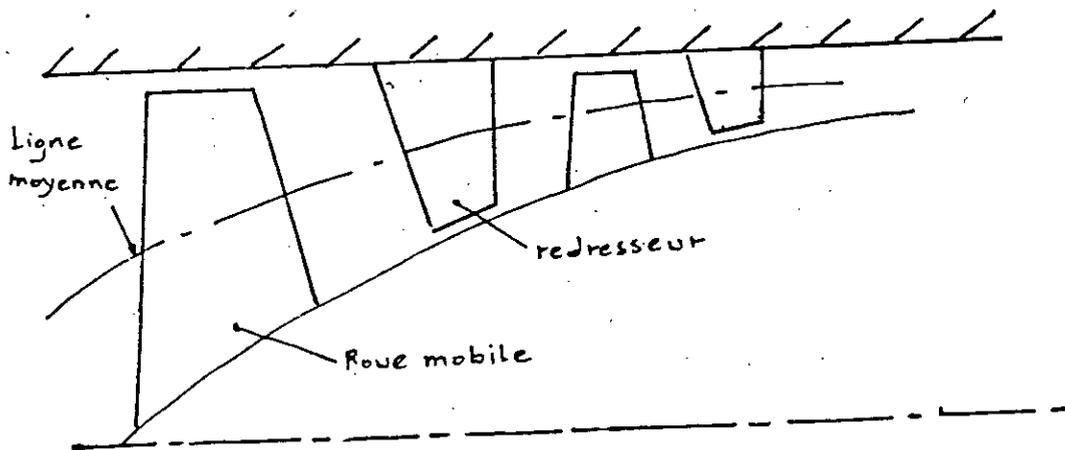


Fig.2-1

Une simple observation permet déjà de distinguer une différence de complexité évidente entre les volumes incluant les aubes et ceux entre les grilles d'aubes.

Les espaces aubés et non aubés feront donc l'objet d'une étude distincte. On déterminera pour chaque espace des lois de variations représentées sous forme matricielle fournissant les grandeurs aérodynamiques de sortie en fonction de l'entrée. Le couplage des différents composants permettra une reconstitution globale de l'écoulement dans le compresseur. Pour les espaces non aubés, nous ferons d'emblée l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel. L'écoulement, dans le compresseur, est alors schématisé suivant la figure ci-dessous:

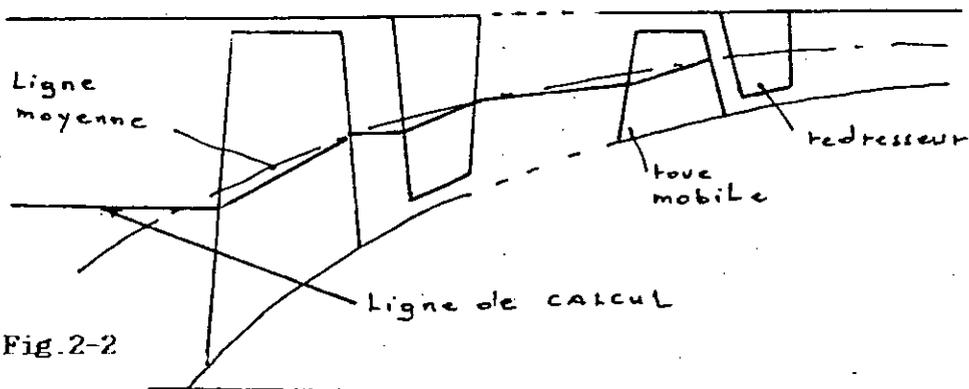
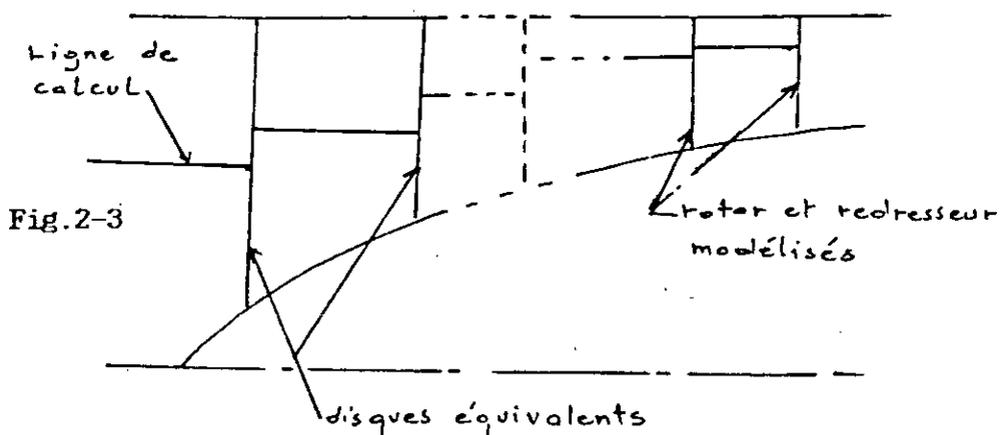


Fig.2-2

Pour les espace non aubés, nous utiliserons la méthode des

disques équivalents. Le principe est de modéliser une roue mobile ou un redresseur par une surface d'épaisseur infiniment mince et de considérer que le pas des aubes tend vers zéro. Au passage de cette surface, se produisent des discontinuités des grandeurs aérodynamiques et thermodynamiques. Le compresseur prend dans ces conditions l'allure suivante:



On suppose connu, dans tout le compresseur, l'écoulement moyen. Celui-ci étant axisymétrique stationnaire

On superpose dans un plan quelconque une distorsion circonférentielle de pression totale stationnaire ou non à l'instant $t=0$. Cette distorsion va évoluer suivant trois directions:

-1- la direction axiale; à la traversée des différents éléments, elle va s'amplifier ou s'amortir pouvant considérablement perturber certains étages.

-2- la direction circonférentielle: à la traversée des étages, l'allure de la distorsion va se déformer suivant la circonférence et donner lieu à une configuration différente.

-3- la direction temporelle; l'étude de l'établissement de la distorsion déterminera la réponse instationnaire du compresseur, on pourra envoyer un échelon, c'est-à-dire une distorsion nulle jusqu'à l'instant $t=0^-$ et égale à une constante à partir de l'instant $t=0^+$. Une étude en fréquence sera menée parallèlement.

2-2-EVOLUTION DES PERTURBATIONS DANS UN ECOULEMENT CYLINDRIQUE STATIONNAIRE

Ce paragraphe a pour objet l'étude du transfert des perturbations à travers un écoulement cylindrique incompressible et stationnaire, le domaine d'application de cette étude est très large et dépasse notamment le cadre des turbomachines.

Elle permet de disposer d'un modèle de propagation des perturbation à la traversée des espaces intergrilles.

Si l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement peut paraître ici limitative, en réalité l'utilisation simultanée de cette méthode avec celle des disques équivalents permet d'attribuer une masse volumique à chaque région d'écoulement.

2-2-1-HYPOTHESE DE CALCUL:

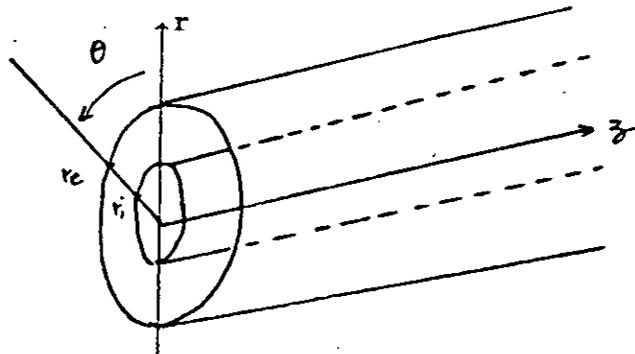
Pour l'écoulement moyen

- fluide non visqueux
- écoulement monodimensionnel
- écoulement stationnaire
- écoulement incompressible

écoulement perturbé

- fluide non visqueux
- écoulement bidimensionnel
- écoulement instationnaire
- écoulement incompressible
- équations linéarisées

Si R_e/R_1 est voisin de 1, l'abandon de la condition d'équilibre radial permet de mener l'étude au rayon moyen. dans le cas contraire, il est possible d'étudier chaque surface de courant en les supposant cylindriques. Dans chaque configuration, les équations sont identiques.



2-2-2-EQUATION DE BASE:

Soit l'équation d'Euler sous sa forme vectorielle:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\text{Rot } \vec{V}) \times \vec{V} + \frac{1}{2} \text{ Grad } V^2 = -\frac{1}{\rho} \text{ Grad } P$$

Et l'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div } \rho \cdot \vec{V} = 0$

En tenant compte des hypothèses d'incompressibilité et d'écoulement cylindrique les équations se mettent sous la forme:

suivant la direction azimutale:

$$\frac{\partial V_{\theta}}{\partial t} - \frac{V_z}{r} \left[\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r V_{\theta})}{\partial z} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{r \partial \theta} = 0$$

suivant la direction axiale:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{V_{\theta}}{r} \left[\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r V_{\theta})}{\partial z} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{r \partial z} = 0$$

l'équation de continuité devient:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_z) = 0$$

2-2-3-LINEARISATION:

Linéariser des équations, c'est restreindre le domaine d'investigation de la méthode. Admettre la validité d'une telle étude, c'est supposer que les effets secondaires engendrés par le phénomène étudié ne deviennent pas prépondérants.

Les grandeurs aérodynamiques caractéristiques de l'écoulement (V_θ, V_z, P_o) peuvent s'exprimer:

$$V_z = \bar{V}_z + V'_z \quad (2-4a)$$

$$V_\theta = \bar{V}_\theta + V'_\theta \quad (2-4b)$$

$$P_o = \bar{P}_o + P'_o \quad (2-4c)$$

La valeur surlignée \bar{X} est représentative de l'écoulement moyen non déformé stationnaire.

X' caractérise les perturbations, celles-ci étant petites devant celles de l'écoulement de base et dépendent de θ, z et t .

Limitées au premier ordre, les équations deviennent:

$$\frac{\partial V'_\theta}{\partial t} - \frac{\bar{V}_z}{r} \cdot \frac{\partial V'_z}{\partial \theta} + \bar{V}_z \cdot \frac{\partial V'_\theta}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'_o}{r \partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V'_z}{\partial t} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V'_z}{\partial \theta} - \bar{V}_\theta \cdot \frac{\partial V'_\theta}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'_o}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial V'_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial V'_z}{\partial z} = 0$$

2-2-4-DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER:

La décomposition en série de Fourier est applicable dans le cas de fonctions périodiques et intégrables dans l'intervalle considéré. C'est le cas de fonctions présentant un nombre fini de points de discontinuité de première espèce.

L'étude d'une distorsion en forme de créneau suivant la circonférence, donc ayant des discontinuités de première espèce, est compatible avec une décomposition en série de Fourier suivant θ .

$$V_z(z, \theta, t) = \bar{V}_z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[V_{z,n}^c(z, t) \cdot \cos n\theta + V_{z,n}^s(z, t) \cdot \sin n\theta \right]$$

$$V_\theta(z, \theta, t) = \bar{V}_\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left[V_{\theta,n}^c(z, t) \cdot \cos n\theta + V_{\theta,n}^s(z, t) \cdot \sin n\theta \right]$$

$$P_o(z, \theta, t) = \bar{P}_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_{o,n}^c(z, t) \cdot \cos n\theta + P_{o,n}^s(z, t) \cdot \sin n\theta \right]$$

ou

$$V_z(z, \theta, t) = \bar{V}_z + \text{PARTIE REELLE} \left[\sum_{n=1}^{\infty} V_{z,n}^c(z, t) e^{in\theta} \right]$$

$$V_\theta(z, \theta, t) = \bar{V}_\theta + \text{PARTIE REELLE} \left[\sum_{n=1}^{\infty} V_{\theta,n}^c(z, t) e^{in\theta} \right]$$

$$P_o(z, \theta, t) = \bar{P}_o + \text{PARTIE REELLE} \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_{o,n}^c(z, t) e^{in\theta} \right]$$

avec $(V_{z,n}^c, V_{\theta,n}^c, P_{o,n}^c) \in \mathbb{C}^3$

Pour la résolution du système, nous utiliserons la forme complexe qui donne un aspect condensé des expressions. par contre dans l'optique d'une résolution numérique, la forme classique de la série de Fourier sera nécessaire. Une simple transformation permet de passer d'une expression à l'autre.

Les valeurs surlignées ont des dérivées par rapport à z , θ et t nulles; les trois équations définissent un système de $3n$ équations dans le cas d'une série complexe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial v'_{z,n}}{\partial t} + i \frac{n}{r} \bar{v}_{\theta} \cdot v'_{z,n} - \bar{v}_{\theta} \frac{\partial v'_{\theta,n}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_{o,n}}{\partial z} = 0 \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial v'_{\theta,n}}{\partial t} - i \frac{n}{r} \bar{v}_z \cdot v'_{z,n} + \bar{v}_z \frac{\partial v'_{\theta,n}}{\partial z} + i \frac{n}{\rho r} p'_{o,n} = 0 \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial v'_{z,n}}{\partial z} + i \frac{n}{r} v'_{\theta,n} = 0 \right]$$

2-2-5-TRANSFORMATION DE LAPLACE (Réponse en temps):

Pour la résolution du système, nous travaillerons sur la transformée de LAPLACE:

$$X(z,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} X'_n(z,t) dt \quad (2-9)$$

Dans l'intervalle d'étude $t \in [0, \infty]$, les transformées de LAPLACE sont définies pour toute fonction présentant des discontinuités de première espèce pour un nombre fini de points. On pourra envoyer comme perturbation indifféremment une fonction de Dirac ou un échelon (Fig.2-5)

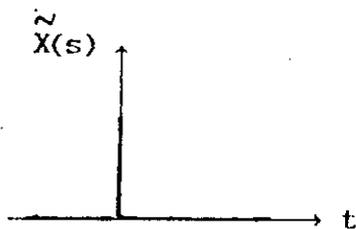


Fig.2-5a fonction Dirac

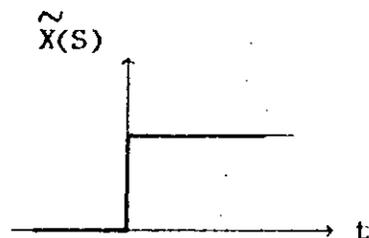


Fig.2-5b fonction échelon

On supposera, dans tout les cas, les perturbations nulles à l'instant initial.

$$\forall z \quad \begin{aligned} v'_{z,n}(z,0) &= 0 \\ v'_{\theta,n}(z,0) &= 0 \\ p'_{o,n}(z,0) &= 0 \end{aligned}$$

Pour un harmonique n , le système devient:

$$s \tilde{V}_{z,n} + i \frac{n}{r} \bar{V}_\theta \tilde{V}_{z,n} - \bar{V}_\theta \frac{\partial \tilde{V}_{\theta,n}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{o,n}}{\partial z} = 0$$

$$s \tilde{V}_{\theta,n} - i \frac{n}{r} \bar{V}_z \tilde{V}_{z,n} + \bar{V}_z \frac{\partial \tilde{V}_{\theta,n}}{\partial z} + \frac{in}{r\rho} P_{o,n} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_{z,n}}{\partial z} + \frac{in}{r} \tilde{V}_{\theta,n} = 0$$

2-2-6-RESOLUTION DU SYSTEME:

Ce système peut se mettre sous la forme d'un système différentiel linéaire:

$$\frac{\partial \tilde{V}_{z,n}}{\partial z} = -i \frac{n}{r} \tilde{V}_{\theta,n}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_{z,n}}{\partial z} = +i \frac{n}{r} \tilde{V}_{\theta,n} - \frac{s}{\bar{V}_z} \tilde{V}_{\theta,n} - i \frac{n}{\rho r \bar{V}_z} P_{o,n}$$

$$\frac{\partial P_{o,n}}{\partial z} = -\rho s \tilde{V}_{z,n} - \rho \frac{\bar{V}_\theta}{\bar{V}_z} s \tilde{V}_{\theta,n} - i \frac{n}{r} \frac{\bar{V}_\theta}{\bar{V}_z} P_{o,n}$$

La résolution des équations se fera en calculant les valeurs propres du système. L'équation caractéristique est du troisième degré:

$$\lambda^3 + \frac{s+i \frac{n}{r} \bar{V}_\theta}{\bar{V}_z} \lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \lambda - \frac{n^2}{r^2 \bar{V}_z} (s+i \frac{n}{r} \bar{V}_\theta) = 0$$

Les valeurs propres s'en déduisent:

$$\lambda_1 = - \frac{s+i \frac{n}{r} \bar{V}_\theta}{\bar{V}_z} \quad \lambda_2 = \frac{n}{r} \quad \lambda_3 = -\lambda_2$$

Soient les expressions des perturbations:

$$\tilde{V}_{z,n}^2 = a_n e^{\lambda_1 z} + b_n e^{\lambda_2 z} + c_n e^{-\lambda_2 z} \quad (2-10a)$$

$$\tilde{V}_{\theta,n}^2 = \left(\frac{\bar{V}_\theta}{\bar{V}_z} - i \frac{sr}{n \bar{V}_z} \right) a_n e^{\lambda_1 z} + i b_n e^{\lambda_2 z} - i c_n e^{-\lambda_2 z} \quad (2-10b)$$

$$P_{\theta,n}^2 = \frac{\rho}{\bar{V}_z} \left(\bar{V}^2 - i \frac{sr}{n} \bar{V}_\theta \right) a_n e^{\lambda_1 z} - \frac{sr\rho}{n} b_n e^{\lambda_2 z} + \frac{sr}{n} c_n e^{-\lambda_2 z} \quad (2-10c)$$

a_n , b_n et c_n étant des constantes d'intégration. On peut présenter les solutions sous forme matricielle en prenant les valeurs réduites:

$$v_{z,n} = \frac{\tilde{V}_{z,n}^2}{\bar{V}_z} \quad v_{\theta,n} = \frac{\tilde{V}_{\theta,n}^2}{\bar{V}_\theta} \quad p_{o,n} = \frac{\tilde{P}_{o,n}^2}{\rho \bar{V}^2} \quad (2-11)$$

$$\begin{bmatrix} v_{z,n} \\ v_{\theta,n} \\ p_{o,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 z} & e^{n/r z} & e^{-n/r z} \\ i \frac{r}{n} \lambda_1 e^{\lambda_1 z} & i e^{n/r z} & -i e^{-n/r z} \\ \left(1 - i \frac{sr}{n} \frac{\bar{V}_\theta}{\bar{V}^2}\right) e^{\lambda_1 z} & -\frac{sr}{n} \frac{\bar{V}_z}{\bar{V}^2} e^{n/r z} & \frac{sr}{n} \frac{\bar{V}_z}{\bar{V}^2} e^{-n/r z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

On appellera ECPERT la matrice de l'écoulement perturbé. En utilisant la transformation permettant le passage d'une série complexe à une série réelle, la matrice ECPERT (6x6) s'écrira:

$$\begin{aligned} \text{Avec :} \quad p &= \frac{n}{r} \bar{V}_z \\ q &= \frac{n}{r} \bar{V}_\theta \\ \alpha &= \frac{n}{r} \frac{q}{p} z \\ \gamma &= -\frac{sr}{\bar{V}_z} z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 \cos \alpha \cdot e^{\gamma} & -\sin \alpha \cdot e^{\gamma} & e^{\lambda_2 z} \\
 \sin \alpha \cdot e^{\gamma} & \cos \alpha \cdot e^{\gamma} & 0 \\
 \left(\frac{q}{p} \cos \alpha - \frac{s}{p} \sin \alpha\right) e^{\gamma} & -\left(\frac{q}{p} \sin \alpha + \frac{s}{p} \cos \alpha\right) e^{\gamma} & 0 \\
 \left(\frac{q}{p} \sin \alpha + \frac{s}{p} \cos \alpha\right) e^{\gamma} & \left(\frac{q}{p} \cos \alpha - \frac{s}{p} \sin \alpha\right) e^{\gamma} & -e^{\lambda_2 z} \\
 \left(\cos \alpha - \frac{sp}{p^2+q^2} \sin \alpha\right) e^{\gamma} & \left(\sin \alpha + \frac{sq}{p^2+q^2} \cos \alpha\right) e^{\gamma} & -\frac{sp}{p^2+q^2} e^{\lambda_2 z} \\
 -\left(\sin \alpha + \frac{sp}{p^2+q^2} \cos \alpha\right) e^{\gamma} & \left(\cos \alpha - \frac{sq}{p^2+q^2} \sin \alpha\right) e^{\gamma} & 0 \\
 0 & 0 & -e^{-\lambda_2 z} \\
 e^{\lambda_2 z} & 0 & e^{-\lambda_2 z} \\
 e^{\lambda_2 z} & 0 & -e^{-\lambda_2 z} \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{sp}{p^2+q^2} e^{\lambda_2 z} & \frac{sp}{p^2+q^2} e^{-\lambda_2 z} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{sp}{p^2+q^2} e^{-\lambda_2 z}
 \end{bmatrix}$$

2-2-7-MODELISATION SOUS FORME MATRICIELLE:

Les expressions des perturbations en fonction des coefficients s'expriment globalement sous la forme:

$$\begin{bmatrix} v_{z,n}^c \\ v_{z,n}^s \\ v_{\theta,n}^c \\ v_{\theta,n}^s \\ p_{o,n}^c \\ p_{o,n}^s \end{bmatrix} = \text{[ECPERT]} \begin{bmatrix} a_n^c \\ a_n^s \\ b_n^c \\ b_n^s \\ c_n^c \\ c_n^s \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad D = \text{[ECPERT]} C \quad (2-12)$$

En appelant D le vecteur distorsion et C le vecteur des coefficients d'intégration.

Pour obtenir l'expression de l'évolution des perturbations entre deux points z_1 et z_2 , il est nécessaire d'exprimer la matrice inverse $ECPERT^{-1} = PERTEC$; on obtient :

$$D(z_2) = ECPERT(z_2) \times PERTEC(z_1) \cdot D(z_1)$$

avec pour $PERTEC(z) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{i \operatorname{sp} - \lambda_1 z}{\Delta_1 \Delta_2} e^{-\lambda_1 z} & -\frac{p^2 + q^2}{\Delta_1 \Delta_2} e^{-\lambda_1 z} \\ \frac{1}{2} e^{-\lambda_2 z} & -i \frac{-\lambda_2 z}{2\Delta_1} (p+iq) e^{-\lambda_2 z} & -\frac{p^2 + q^2}{2p\Delta_1} e^{-\lambda_2 z} \\ \frac{1}{2} e^{\lambda_2 z} & -i \frac{\lambda_2 z}{2\Delta_2} (p-iq) e^{\lambda_2 z} & \frac{p^2 + q^2}{2p\Delta_2} e^{\lambda_2 z} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

Si l'origine est prise en z_1 (ce qui est toujours possible par une translation d'axes), la matrice $PERTEC$ de la série réelle devient :

$$\begin{bmatrix} a_n^c \\ a_n^e \\ b_n^c \\ b_n^e \\ c_n^c \\ c_n^e \end{bmatrix} = \frac{2}{p_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_{31} & -p_{32} & p_{51} & -p_{52} \\ 0 & 0 & p_{32} & p_{31} & p_{52} & p_{51} \\ p_1 & 0 & p_{33} & -p_{34} & p_{53} & -p_{54} \\ 0 & p_1 & p_{34} & p_{33} & p_{54} & p_{53} \\ p_1 & 0 & p_{35} & -p_{36} & p_{55} & -p_{56} \\ 0 & p_1 & p_{36} & p_{35} & p_{56} & p_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{z,n}^c \\ v_{z,n}^e \\ v_{\theta,n}^c \\ v_{\theta,n}^e \\ p_{o,n}^c \\ p_{o,n}^e \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

avec : $p_1 = \frac{1}{2} (\delta^2 + 2q^2 s^2)$

$$p_{31} = 2 p q s^2$$

$$p_{32} = -p s \delta$$

$$p_{33} = \frac{qs}{2} (\eta - 2ps)$$

$$p_{34} = \frac{1}{2} (\delta(sp-A) + 2q^2 s^2)$$

$$p_{35} = -\frac{qs}{2} (\eta + 2qs)$$

$$p_{36} = \frac{1}{2} (\delta(sp+A) - 2q^2 s^2)$$

$$p_{51} = -A\delta$$

$$p_{52} = -2q As$$

$$p_{53} = -\frac{A}{2q} (\delta(s-p) + 2q^2 s)$$

$$p_{54} = -\frac{qA}{2p} (\eta - 2ps)$$

$$p_{55} = \frac{A}{2p} (\delta(s+p) + 2q^2 s)$$

$$p_{56} = \frac{qA}{2p} (\eta + 2ps)$$

et $A = p^2 + q^2$

$$\delta = s^2 - A$$

$$\eta = s^2 + A$$

$$\Delta_1 = (s + iq + p)$$

$$\Delta_2 = (s + iq - p)$$

Le couplage des matrices $ECPERT(z_2) \times PERTEC(z_1)$ permet d'établir une matrice de transfert $\begin{bmatrix} EP \end{bmatrix}$ caractéristique de l'évolution des perturbations dans un conduit cylindrique de distance $d = z_2 - z_1$.

Dans les compresseur axiaux, on peut généralement représenter les écoulements amont, aval et intergrilles par ce type de modélisation.

2-3-ÉCOULEMENT A LA TRAVERSEE DES GRILLES D'AUBES:

Les hypothèses seront:

-Écoulement bidimensionnel

-Viscosité prise en compte par un coefficient de perte $\bar{\omega}$.

-Modèle des disques équivalents, c'est-à-dire changement des grandeurs aérodynamiques moyennes.

Cette modélisation suppose que la largeur de la perturbation circonférentielle est grande devant le pas.

2-3-1-CONSERVATION DES DEBITS:

Soit ν le nombre d'aubes.

On peut étudier le débit localement à travers un canal inter-aubes, dans ce cas :

$$\rho_e V_{z_e} S_e = \rho_s V_{z_s} S_s$$

on peut prendre aussi le débit globalement :

$$\rho_e \bar{V}_{z_e} v S_e = \rho_s \bar{V}_{z_s} v S_s$$

En effet la valeur moyenne suivant la circonférence des perturbations est nulle par définition.

On divisant membre à membre les deux expressions, on obtient la conservation de la vitesse axiale réduite :

$$v_{z_e} = v_{z_s}$$

ce qui conduit à la même égalité entre les transformées de LAPLACE des coefficients de la série de Fourier

$$v_{z_e, n} = v_{z_s, n} \quad (2-16)$$

2-3-2-LIAISON AZIMUTALE:

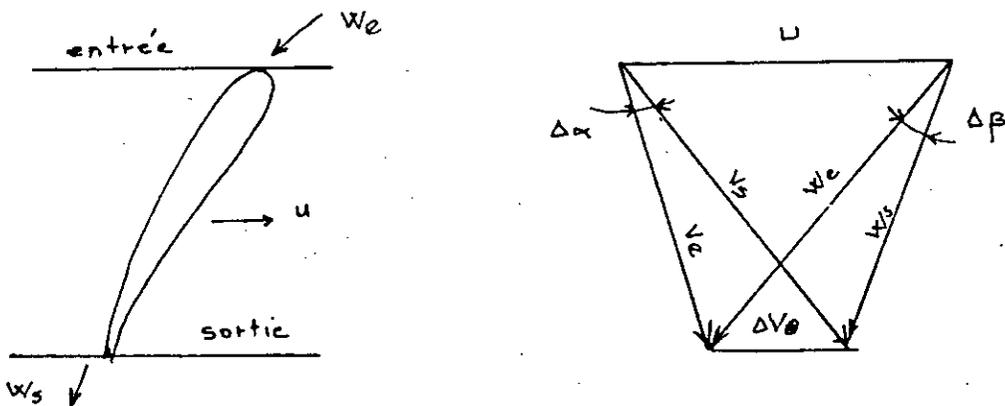


Fig.2-6 Tringles des vitesses

La présence d'aubage détruit l'équilibre circonférentiel et l'équation d'Euler suivant θ n'est plus applicable. les aubes provoquent une déviation de l'écoulement que l'on caractérise par les angles relatifs β (angle entre les vitesses axiales et tangentielle). On admet que l'angle de sortie est fonction de

l'angle d'entrée : $\beta_s = f(\beta_e)$ ou $\text{tg } \beta_s = f(\text{tg } \beta_e)$. On peut écrire :

$$\text{tg } \beta_e = \frac{V_{\theta_e} - U_e}{V_{z_e}} = \frac{\bar{V}_{\theta_e} + V'_{\theta_e} - U_e}{\bar{V}_{z_e} + V'_{z_e}} \quad \text{tg } \beta_s = \frac{\bar{V}_{\theta_s} + V'_{\theta_s} - U_s}{\bar{V}_{z_s} + V'_{z_s}}$$

ce qui peut s'exprimer :

$$\text{tg } \beta_s = \left(\text{tg } \bar{\beta}_e + \frac{V'_{\theta_e}}{\bar{V}_{\theta_e}} \right) \left(1 - \frac{V'_{z_e}}{\bar{V}_{z_e}} \right) = \text{tg } \bar{\beta}_s + \frac{V'_{\theta_e}}{\bar{V}_{\theta_e}} - \text{tg } \bar{\beta}_e \cdot \frac{V'_{z_e}}{\bar{V}_{z_e}}$$

on effectue un développement limité au premier ordre de $\text{tg } \beta_s = f(\text{tg } \beta_e)$:

$$\text{tg } \beta_s = f(\text{tg } \bar{\beta}_e) + \frac{\partial f(\text{tg } \beta_e)}{\partial \text{tg } \beta_e} (\text{tg } \beta_e - \text{tg } \bar{\beta}_e)$$

$$\frac{V'_{\theta_s}}{\bar{V}_{\theta_s}} - \text{tg } \bar{\beta}_s \cdot \frac{V'_{z_s}}{\bar{V}_{z_s}} = \frac{\partial \text{tg } \beta_e}{\partial \text{tg } \beta_e} \left(\frac{V'_{\theta_e}}{\bar{V}_{\theta_e}} - \text{tg } \bar{\beta}_e \cdot \frac{V'_{z_e}}{\bar{V}_{z_e}} \right)$$

Finalement, en prenant les transformées de LAPLACE des coefficients de Fourier et en tenant compte de (2-16), on détermine le transfert de la perturbation de la vitesse circumférentielle :

$$v_{\theta_{e,n}} = \left[\frac{\bar{v}_{\theta_e} - U_e}{\bar{v}_{z_e}} - \frac{\partial \text{tg } \beta_s}{\partial \text{tg } \beta_e} \left(\frac{\bar{v}_{\theta_e} - U_e}{\bar{v}_{z_e}} \right) \right] \cdot v_{z_{e,n}} + \frac{\partial \text{tg } \beta_s}{\partial \text{tg } \beta_e} v_{\theta_{e,n}}$$

ou si on prend la dérivée des angles plutôt que des tangentes en remarquant que :

$$\frac{\partial \beta_s}{\partial \beta_e} = \frac{\bar{W}_e^{-2} \cdot \bar{v}_{z_s}^2}{\bar{W}_s^{-2} \cdot \bar{v}_{z_e}^2} \frac{\partial \text{tg } \beta_s}{\partial \text{tg } \beta_e}, \quad \text{le transfert de la}$$

vitesse circumférentielle deviendra :

$$v_{\theta_{e,n}} = \left[\frac{\overline{v_{\theta_e}} - U_e}{\overline{v_{z_e}}} - \overline{v_{\theta_e}} - U_e \cdot \frac{\overline{W_e^2} \cdot \overline{v_{z_e}^2}}{\overline{W_e^2} \cdot \overline{v_{z_e}^2}} \frac{\partial \beta_e}{\partial \beta_e} \right] \cdot v_{z_{e,n}} + \frac{\overline{W_e^2} \cdot \overline{v_{z_e}^2}}{\overline{W_e^2} \cdot \overline{v_{z_e}^2}} \frac{\partial \beta_e}{\partial \beta_e} v_{\theta_{e,n}} \quad (2-17)$$

le coefficient $\frac{\partial \beta_e}{\partial \beta}$ est déterminé expérimentalement .

NB: pour un redresseur, le repère relatif est confondu avec le repère fixe, il suffit de prendre les même relations avec $U=0$

2-3-3-TRANSEERT AXIAL:

La viscosité de l'écoulement ne permet pas d'utiliser l'équation d'Euler du § 2-2-1. On utilisera une équation faisant intervenir les pertes stationnaires (par l'intermédiaire du coefficient de perte $\bar{\omega}$) et les pertes dues à l'instationnarité (caractérisant l'accélération des particules dans un canal interaubes)

2-3-3-1 PERTES GLOBALES DANS LES GRILLES:

On considère que les pertes sont fonction des conditions d'entrée.

On définit le coefficient de perte $\bar{\omega}$ par :

$$\bar{\omega} = \frac{P_{r_e} - P_{r_s}}{\frac{1}{2} \rho_e W_e^2} = \frac{\Delta P_r}{\frac{1}{2} \rho_e W_e^2} \quad (2-18)$$

et $\bar{\omega}$ est fonction que de l'incidence d'entrée i_e et du mach relatif d'entrée M_r . or i_e et M_r dépendent des vitesses circonférentielle et e axiale de l'entrée.

En linéarisant, on obtient :

$$P'_{r_e} - P'_{r_s} = \frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{z_e}} \cdot V'_{z_e} + \frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{\theta_e}} \cdot V'_{\theta_e}$$

Soit d'après les hypothèses :

$$\frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{z_e}} = \frac{1}{2} \rho_e W_e^2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \beta_e} \cdot \frac{\partial \beta_e}{\partial V_{z_e}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial M_{r_e}} \cdot \frac{\partial M_{r_e}}{\partial V_{z_e}} \right) + \rho_e \bar{w} V_{z_e}$$

$$\frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{\theta_e}} = \frac{1}{2} \rho_e W_e^2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \beta_e} \cdot \frac{\partial \beta_e}{\partial V_{\theta_e}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial M_{r_e}} \cdot \frac{\partial M_{r_e}}{\partial V_{\theta_e}} \right) + \rho_e \bar{w} (V_{\theta_e} - U_e)$$

Avec

$$\frac{\partial \beta_e}{\partial V_{z_e}} = - \frac{\bar{V}_{\theta_e} - U_e}{\bar{W}_e^2}$$

$$\frac{\partial M_{r_e}}{\partial V_{z_e}} = \frac{\bar{V}_{z_e}}{A_e \bar{W}_e}$$

$$\frac{\partial \beta_e}{\partial V_{\theta_e}} = \frac{\bar{V}_{z_e}}{\bar{W}_e^2}$$

$$\frac{\partial M_{r_e}}{\partial V_{\theta_e}} = \frac{\bar{V}_{\theta_e} - U_e}{A_e \bar{W}_e}$$

Les conventions de signes

$$\partial \beta_e = - \partial i \quad \text{pour une roue mobile.}$$

$$\partial \beta_e = \partial i \quad \text{pour un redresseur}$$

Les termes \bar{w} , $\frac{\partial \bar{w}}{\partial i}$ et $\frac{\partial \bar{w}}{\partial M_{r_e}}$ sont déterminés soit expérimentalement soit à l'aide d'un programme de calcul de l'écoulement moyen.

On peut exprimer la variation de pression dans le

repère absolue: $P_r = P_0 + \frac{1}{2} \rho (W^2 - V^2)$

soit pour les petites perturbations:

$$P' = P'_r + \rho \cdot U \cdot V'_\theta$$

En fin,

(2-20)

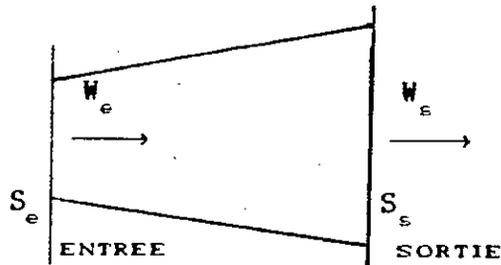
$$P_{0s,n} = \frac{\rho_e \bar{V}_e^2}{\rho_s \bar{V}_s^2} \cdot P_{0e,n} - \frac{\rho_e \cdot r_e \Omega \bar{V}_{z_e}}{\rho_s \bar{V}_s^2} + \frac{r_s \Omega V_{z_s}}{\bar{V}_s^2} \bar{V}_{\theta_s,n}$$

$$- \frac{\bar{V}_{z_e}}{\rho_s \bar{V}_s^2} \cdot \frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{\theta_e}} \cdot V_{\theta_e,n} - \frac{\bar{V}_{z_e}}{\rho_s \bar{V}_s^2} \cdot \frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{z_e}} \cdot V_{z_e,n}$$

2-3-3-2 ETUDE INSTATIONNAIRE DANS UN CANAL INTERAUBES:

On peut schématiser le canal par un diffuseur; dans le repère relatif lié au grilles (mobile dans le cas d'un rotor), l'équation de mouvement s'écrit:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{or}}{\partial z}$$



il y'a conservation du débit:

$$W(z) S(z) = W_e S_e$$

la section varie linéairement:

$$S(z) = S_e + \frac{S_s - S_e}{c} z$$

L'intégration suivant la longueur du canal donne la variation de pression

$$P_{o,r,s} - P_{o,r,e} = \frac{\partial(P_m v_e)}{\partial t} \cdot S_e \cdot c \int_0^c \frac{dz}{c S_e + (S_s - S_e) z}$$

$$\text{Avec } \rho_m = \frac{\rho_e + \rho_s}{2}$$

en négligeant le terme $\frac{\partial S_m}{\partial t}$

$$P_{o,r,s} - P_{o,r,e} = -\rho_m \frac{S_e c}{S_s - S_e} \ln\left(\frac{S_s}{S_e}\right) \frac{\partial W_e}{\partial t}$$

L'expression de $\frac{\partial W_e}{\partial t}$ utilisé est dans le repère relatif:

$$\left. \frac{\partial W_e}{\partial t} \right|_{\text{relatif}} = \left. \frac{\partial W_e}{\partial \theta} \right|_{\text{abs}} \cdot \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{\text{rel}} + \left. \frac{\partial W_e}{\partial t} \right|_{\text{abs}}$$

Soit :

$$\left. \frac{\partial W_e}{\partial t} \right|_{\text{rel.}} = \frac{1}{W_e} \left[V_{z_e} \cdot \left(\frac{\partial V_{z_e}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial V_{z_e}}{\partial \theta} \right) + (V_{\theta_e} - U_e) \cdot \left(\frac{\partial V_{\theta_e}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial V_{\theta_e}}{\partial \theta} \right) \right]$$

Par décomposition en série de Fourier et transformation de Laplace, on obtient :

$$\left. \frac{\partial W_e}{\partial t} \right|_{\text{rel.}} = \sum_{n=1}^{\infty} (s + in\Omega) \cdot \frac{\bar{V}_{z_e}^2}{W_e} \left(V_{z_{e,n}} + \frac{\bar{V}_{\theta_e} - U_e}{\bar{V}_{z_e}} \cdot V_{\theta_{e,n}} \right) e^{in\theta}$$

D'après l'équation de conservation des débits :

$$\frac{S_e}{S_s} = \frac{\bar{W}_s}{\bar{W}_e}$$

La variation de perturbation dans un canal s'écrit :

$$P_{s,n} - P_{e,n} = - \frac{P_m (s + in\Omega) \cdot c}{\bar{W}_e - \bar{W}_s} \ln \left(\frac{\bar{W}_e}{\bar{W}_s} \right) \cdot \left(V_{z_{e,n}} + \frac{\bar{V}_{\theta_e} - U_e}{\bar{V}_{z_e}} V_{\theta_{e,n}} \right) \quad (2-21)$$

On pose

$$STA = \frac{c f_m}{\bar{W}_e - \bar{W}_s} \ln \left(\frac{\bar{W}_e}{\bar{W}_s} \right) \quad STC = \frac{\bar{V}_{\theta_e} - U_e}{\bar{V}_{z_e}} \cdot STA$$

La linéarité des équations permet la sommation des pertes, nous pouvons associer les eq. (2-20) et (2-21) et en utilisant (2-16) et (2-17)

L'expression globale devient

$$P_{s,n} = \frac{U_s (\bar{V}_{\theta_s} - U_s)}{\bar{V}_s^2} - \frac{\bar{V}_{z_s}}{\bar{V}_{z_e}} \cdot \frac{U_s (\bar{V}_{\theta_e} - U_e)}{\bar{V}_s^2} \cdot \frac{\partial t_g \beta_s}{\partial t_g \beta_e} - \frac{\bar{V}_{m_e}}{\rho_s \bar{V}_s^2} \cdot \frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{z_e}} - (s + in\Omega) STA \left[V_{z_{e,n}} + \left[- \frac{P_e U_e \bar{V}_{z_e}}{\rho_s \bar{V}_s^2} + \frac{U_s \bar{V}_{z_s}}{\bar{V}_s^2} \cdot \frac{\partial t_g \beta_s}{\partial t_g \beta_e} - \frac{\bar{V}_{z_e}}{\rho_s \bar{V}_s^2} \cdot \frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{\theta_e}} - STC \cdot (s + in\Omega) \right] V_{\theta_{e,n}} + \frac{P_e \bar{V}_e^2}{\rho_s \bar{V}_s^2} P_{e,n} \right] \quad (2-22)$$

2-3-4 FONCTION DE RETARD:

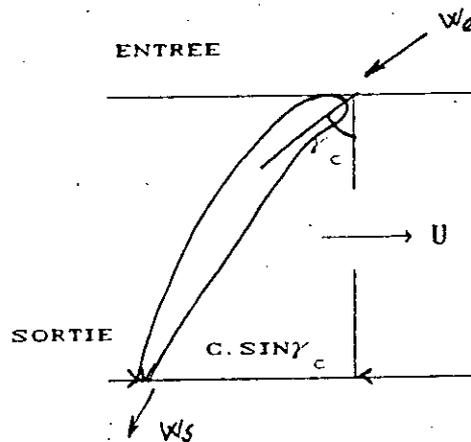
Le fait diassimiler les grilles d'aubes à des surfaces de discontinuité ne permet pas de tenir compte du retard provoqué par la distance séparant entrée sortie. On peut l'introduire par l'intermédiaire d'un retard pur (intervenant dans tous les termes du transfert) caractérisé par le rapport entre la distance et la vitesse moyenne de traversée:

$$\tau = \frac{2 \sqrt{c^2 + (r_s - r_e)^2}}{\bar{W}_e + \bar{W}_s} \quad (2-23)$$

la transformée de LAPLACE de ce retard s'écrit : e^{-T_s} . La matrice de transfert d'une grille sera donc multipliée par le terme e^{-T_s} .

2-3-5 DEPHASAGE DÙ AU CALAGE:

Fig. 2-8
Déphasage dû au calage
des aubes



Le calage des aubes introduit suivant θ un déphasage θ_{γ_c} entre l'entrée et la sortie.

$$\theta_{\gamma_c} = \frac{c}{r} \sin \gamma_c \quad \text{pour une roue mobile}$$

$$\theta_{\gamma_c} = - \frac{c}{r} \sin \gamma_c \quad \text{pour un redresseur car } \gamma_c \text{ est pri toujours positif}$$

Le déphasage dû au calage est caractérisé par une rotation de la matrice de transfert. Dans le plan complexe, la rotation est caractérisé par un nombre complexe de module 1 est d'argument θ_{γ_c} soit donc $\exp(in\theta_{\gamma_c})$.

De plus la rotation de la roue mobile (vitesse de rotation) rapportée au temps de traversée moyen du canal interaube introduit un déphasage d'un angle θ_T tel que :

$$\theta_T = \Omega \tau$$

La relation de la matrice de transfert sera caractérisée globalement par le terme :

$$\exp \left[i \left(\frac{c}{r} \sin \gamma_c + \frac{2\Omega \sqrt{c^2 + (r_s - r_e)^2}}{\bar{W}_e + \bar{W}_s} \right) \right]$$

Finalement, en tenant compte du retard, l'expression globale sera :

$$e^{i(\theta_{\gamma_c} + \Omega\tau) - \tau.s} \quad (2-24)$$

2-3-6 MATRICE DE TRANSFERT DES GRILLES D'AUBES:

La méthode des disque équivalents nous a permis de déterminer des relations entre les grandeurs aérodynamiques perturbées d'entrée et de sortie. Ces relations (2-16), (2-17), (2-22) et (2-23) peuvent être représentées par une matrice de transfert entre l'amont et l'aval, soit AVAM cette matrice.

Cette matrice prend la forme :

$$e^{i\theta_{\gamma_c} - \tau.s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ VCA & VCC & 0 \\ PA - (s + i\Omega) \cdot STA & PC - (s + i\Omega) \cdot STC & PP \end{pmatrix} \quad (2-25)$$

Avec

$$VCA = \frac{\bar{V}_{\theta_s} - U_s}{\bar{V}_{z_s}} - \frac{\partial \text{tg} \beta_s}{\partial \text{tg} \beta_e} \cdot \frac{\bar{V}_{\theta_e} - U_e}{\bar{V}_{z_e}}$$

$$VCC = \frac{\partial \text{tg} \beta_s}{\partial \text{tg} \beta_e}$$

$$STA = \frac{\rho_e + \rho_s}{2} \cdot \frac{\bar{W}_s}{\bar{W}_e} \cdot \frac{c}{\bar{W}_e - \bar{W}_s} \ln \left(\frac{\bar{W}_e}{\bar{W}_s} \right) \cdot \frac{\bar{V}_{z_e}^2}{\bar{V}_s^2}$$

$$STC = \frac{\bar{V}_{\theta_e} - U_e}{\bar{V}_{z_e}} \cdot STA$$

$$PA = \frac{1}{\bar{V}_s^2} \left[U_s \cdot (\bar{V}_{\theta_s} - U_s) - \frac{\bar{V}_{z_s}}{\bar{V}_{z_e}} \cdot U_s (\bar{V}_{\theta_e} - U_e) \cdot \left(\frac{\partial \text{tg} \beta_s}{\partial \text{tg} \beta_e} - \frac{\bar{V}_{z_e}}{\rho_s} \cdot \frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{z_e}} \right) \right]$$

$$P_C = \frac{1}{\bar{V}_S^2} \left[-\frac{P_S}{P_C} \cdot U_C \cdot \bar{V}_{Z_C} + U_S \cdot \bar{V}_{Z_S} \cdot \frac{\partial \lg P_S}{\partial \lg P_C} - \frac{\bar{V}_{Z_C}}{P_S} \cdot \frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{\theta_C}} \right]$$

$$P_P = \frac{P_C \bar{V}_C^2}{P_S \bar{V}_S^2}$$

$\frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{Z_C}}$ et $\frac{\partial \Delta P_r}{\partial V_{\theta_C}}$ étant définis par (2-19)

$$\theta_0 = \theta_{\gamma_C} + \theta_Z$$

Si on considère le transfert des transformées de Laplace des coefficients non complexes de la série de Fourier, La matrice AVAM (6x6) devient :

$\cos n\theta_0$	$-\sin n\theta_0$	0
$\sin n\theta_0$	$\cos n\theta_0$	0
$VCA \sin n\theta_0$	$-VCA \sin n\theta_0$	$VCC \cos n\theta_0$
$VCA \cos n\theta_0$	$VCA \cos n\theta_0$	$VCC \sin n\theta_0$
$-(PA+S.STA) \cos n\theta_0$ $+ n \Omega STA \sin n\theta_0$	$(PA-S.STA) \sin n\theta_0$ $- n \Omega STA \cos n\theta_0$	$(PC-S.STC) \cos n\theta_0$ $+ n \Omega STC \cdot \sin n\theta_0$
$-(PA-S.STA) \sin n\theta_0$ $- n \Omega STA \cos n\theta_0$	$(PA-S.STA) \cos n\theta_0$ $+ n \Omega STA \sin n\theta_0$	$-(PC-S.STC) \sin n\theta_0$ $+ n \Omega STC \cos n\theta_0$
0	0	
0	0	
$-VCC \sin n\theta_0$	0	
$VCC \cos n\theta_0$	0	
$(PC-S.STC) \sin n\theta_0$ $- n \Omega STC \cos n\theta_0$	$PP \cos n\theta_0$	$-PP \sin n\theta_0$
$(PC-S.STC) \cos n\theta_0$ $+ n \Omega STC \sin n\theta_0$	$PP \sin n\theta_0$	$PP \cos n\theta_0$

- 25
0

CHAPITRE 3

RESOLUTION DU SYSTEME POUR UN COMPRESSEUR MULTIETAGE

CHAPITRE III

RÉSOLUTION DU SYSTÈME DANS LE CAS D'UN COMPRESSEUR MULTITÉTAGE

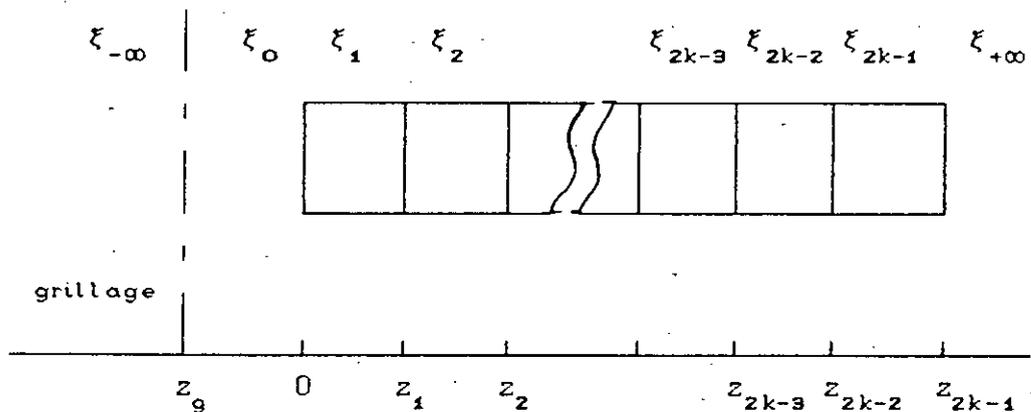


Fig.3-1

k : Nombre d'étages

L'écoulement dans le compresseur est divisé en $2k+2$ plans:

- $\xi_{-\infty}$: écoulement infini amont
- ξ_0 : écoulement amont après perturbation
- ξ_{2k-1} : écoulement intergrile
- $\xi_{+\infty}$: écoulement infini aval

Les deux types d'écoulement susceptibles d'être rencontrés dans les compresseur ont été modélisés dans le précédent chapitre, et la formulation présentée ici fournit un aspect suffisamment général pour être appliquée à l'ensemble des machines mono ou multiétagés avec ou sans préistributeur.

la résolution du système est explicitée pour un compresseur

comportant k étages .

L'écoulement hors grilles est défini par les matrices ECPERT (2.11) et PERTEC (2.13) , L'écoulement à travers les grilles par la matrice AVAM (2.25) .

Les trois matrices de transfert permettent d'exprimer des relations entre les vecteurs C (2.12) représentant les coefficients d'intégration a_n , b_n et c_n (définis par 2.10)

$$C_k = [P \cdot AVAM \cdot E] C_{k-1}$$

Cependant on peut relier les vecteurs C entre le plan k et le plan infini amont par une suite de produits matriciels :

$$C_k = \prod_{j=1}^k [P \cdot AVAM \cdot E]_{k+1-j} \cdot C_{-\infty} \quad (3.1)$$

Pour chaque harmonique n , on obtient ainsi trois équations liant l'écoulement infini amont et l'écoulement du plan k . La connaissance du vecteur $C_{-\infty}$ déterminera l'ensemble des écoulements à travers le compresseur .

3-1-ÉCOULEMENT A L'AMONT DU COMPRESSEUR :

On suppose que l'écoulement à l'amont du compresseur suit les mêmes hypothèses que celles présentées dans le § 2-2 . Le transfert des distorsions est donc régi par les matrices $[E]$, $[P]$ et $[EP]$, néanmoins des simplifications s'introduisent par le biais des conditions physiques à l'infini amont :

Quel que soit le temps t , les perturbations sont nulles à l'infini amont:

$$V_{z,n}(-\infty) = 0 \quad V_{\theta,n}(-\infty) = 0 \quad P_{o,n}(-\infty) = 0$$

Ce qui impose certains conditions de nullité pour certains coefficients (des exponentielles devenant infinies) :

$$a_n^{c-\infty} = a_n^{s-\infty} = 0 \quad c_n^{c-\infty} = c_n^{s-\infty} = 0$$

Par suite la détermination des 2n coefficients $b_n^{c-\infty}$ et $b_n^{s-\infty}$ -

définit complètement l'écoulement et conduit aux expressions complexes pour $z \in [-\infty, z_g]$

$$V_{z,n} = b_n^{-\infty} \cdot \exp\left(\frac{n \cdot z}{r}\right) \quad (3-2a)$$

$$V_{\theta,n} = i \cdot b_n^{-\infty} \cdot \exp\left(\frac{n \cdot z}{r}\right) \quad (3-2b)$$

$$P_{o,n} = - \frac{s \cdot r \cdot \bar{V} z}{n \cdot \bar{V}_{-\infty}^2} \cdot b_n^{-\infty} \cdot \exp\left(\frac{n \cdot z}{r}\right) \quad (3-2c)$$

3-2- ÉCOULEMENT A L'AVANT DU COMPRESSEUR :

On utilise dans ce cas la même modélisation. Une condition physique de sortie, plus réaliste, est d'imposer aux perturbations une valeur finie ce qui permet d'introduire la simplification suivante : $b_n^{+\infty} = 0$

Les expressions des perturbations peuvent s'exprimer dans ce plan (pour $z \in [z_{2k-1}, +\infty]$) :

$$V_{z,n} = a_n^{+\infty} \exp(\lambda_1 z) + c_n^{+\infty} \exp\left(-\frac{n \cdot z}{r}\right) \quad (3-3a)$$

$$V_{\theta,n} = - \frac{i \cdot s \cdot r}{n \cdot \bar{V}_{z+\infty}} \left[a_n^{+\infty} \exp(\lambda_1 z) - i c_n^{+\infty} \exp\left(-\frac{n \cdot z}{r}\right) \right] \quad (3-3b)$$

$$P_{o,n} = a_n^{+\infty} \exp(\lambda_1 z) + c_n^{+\infty} \frac{s \cdot r}{n \cdot \bar{V}_{z+\infty}^2} \exp\left(-\frac{n \cdot z}{r}\right) \quad (3-3c)$$

3-3- CHOIX ET POSITION DE LA DISTORSION :

Au § 3-4 par la forme de résolution matricielle il sera mis en évidence l'indépendance de la position de la distorsion vis-à-vis de la stabilité temporelle.

La présente étude ne tient compte que d'une distorsion de pression totale placée à une distance z_g de l'entrée du compresseur, simulant l'introduction instantanée d'un grillage dans l'écoulement amont. Cependant, le traitement d'une perturbation de vitesse axiale à la sortie du compresseur et une perturbation de pression totale dans le compresseur reste toujours possible.

Soit δP_o cette distorsion ; en prenant un échelon en temps et un créneau suivant la circonférence (voir Fig 3-2 a , b et c) , la décomposition en serie de Fourier puis la transformée de Laplace donnent :

$$\delta P_o = \frac{1}{S} \sum_{n=1}^{\infty} (\delta P_n^c \cos(n \theta) + \delta P_n^s \sin(n \theta)) \quad (3-4)$$

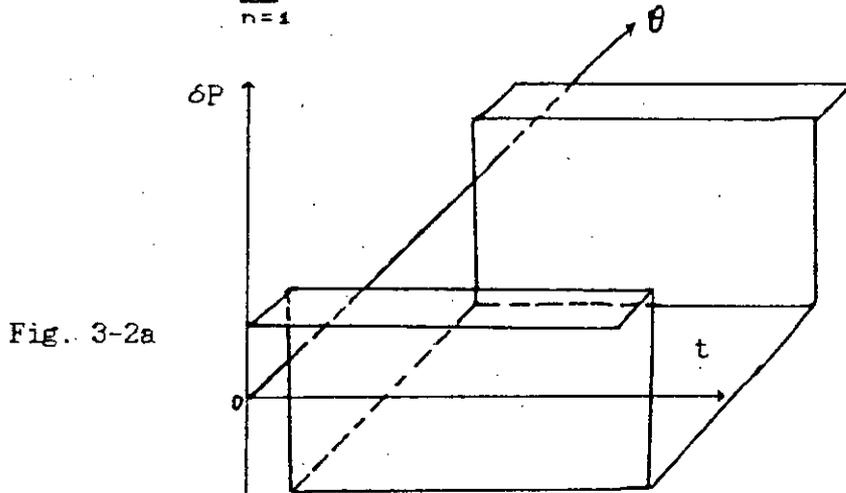


Fig. 3-2a

profondeur $p = u - v$

ou en projection:

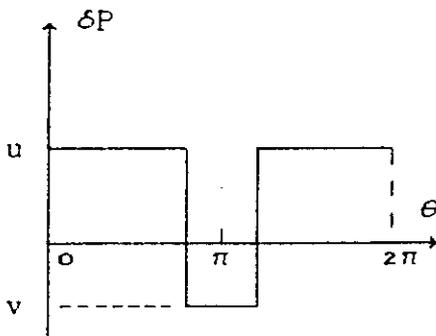


Fig.3-2b

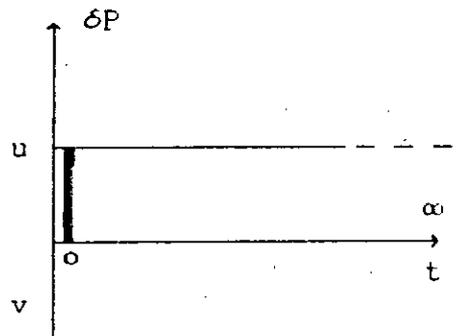


Fig.3-2c

Les expressions δP_n^c et δP_n^s sont déterminées comme suit :

$$\delta P_n^c = \frac{2 \cdot u}{\pi} \int_0^{\pi-l/2} \cos(n \theta) d\theta + \frac{2 \cdot v}{\pi} \int_{\pi-l/2}^{\pi} \cos(n \theta) d\theta$$

$$dP_n^s = 0$$

En effet la fonction étant paire , les coefficients correspondants au sinus sont nuls . La transformée de LAPLACE donnera pour le coefficient du sinus :

$$\Delta P_n^c = (-1)^{n+1} \frac{2.p}{s n \pi} \sin\left(\frac{n l}{2}\right) \quad \text{avec } n > 1 \quad (3-5)$$

La parité de la distorsion n'apportant pas de restriction particulière , on prendra δP_n^s toujours nul .

Le choix d'un échelon dans le temps ne permet pas à priori d'étudier la réponse du compresseur à une distorsion ayant une vitesse de rotation , par exemple , une perturbation liée au repère mobile s'exprime sous forme complexe :

$$\delta P_o = \sum_{n=1}^{\infty} \exp[i.n(\theta - \Omega t)] \delta P_n$$

dont la transformée de LAPLACE est: $\delta P_o = \sum_{n=1}^{\infty} \delta P_n \frac{\exp(i n \theta)}{s + i n \omega}$

Cette expression est représentative de toute perturbation tournant à la vitesse Ω (pas forcément la vitesse de rotation du compresseur)

Finalement , au point z_g , le transfert des perturbations au

travers du grillage d'épaisseur nulle , s'écrira :

$$\begin{bmatrix} v_{z,n}^c \\ v_{z,n}^s \\ v_{q,n}^c \\ v_{q,n}^s \\ p_{o,n}^c \\ p_{o,n}^s \end{bmatrix}_{z_g^+} = \begin{bmatrix} v_{z,n}^c \\ v_{z,n}^s \\ v_{q,n}^c \\ v_{q,n}^s \\ p_{o,n}^c \\ p_{o,n}^s \end{bmatrix}_{z_g^-} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ dP_n^c / s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

3-4 RESOLUTION DU SYSTEME

Les précédents paragraphes ont explicité les expressions nécessaires à la résolution du système. Le développement de (3-1) en un produit en chaîne des matrices de chaque écoulement permet de lier l'écoulement infini amont à celui aval . Le système est alors de $3n$ équations à $3n$ inconnues $(a_n^{+\infty}, c_n^{+\infty}, b_n^{+\infty})$:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ 0 \\ c_n \end{bmatrix} = [P_{+\infty}] \cdot [A_{2k}] \cdot [EP_{2k}] \dots [A_1] [EP_9] \left[[E_{-\infty}] \begin{bmatrix} 0 \\ b_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta P / s \\ 0 \end{bmatrix} \right] \quad (3-7)$$

En considérant la matrice produit $[M]$ telle que :

$$[M] = [P_{+\infty}] [A_{2k}] \dots [EP_9] \quad (3-8)$$

alors les relations entre les coefficients de Fourier en sinus et cosinus s'expriment (en explicitant $[E_{-\infty}]$ et à l'aide de 2-8) :

$$\begin{bmatrix} a_c \\ a_s \\ 0 \\ 0 \\ c_c \\ c_s \end{bmatrix}_{+\infty} = [M] \begin{bmatrix} b_n^c \\ b_n^s \\ b_n^s \\ -b_n^c \\ \frac{s.r.\bar{V}_z^{-\infty}}{n.\bar{V}_{-\infty}^2} b_n^c \\ \frac{s.r.\bar{V}_z^{-\infty}}{n.\bar{V}_{-\infty}^2} b_n^s \end{bmatrix}_{-\infty} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta P/s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

En posant :

$$KC = M31 - M34 - \frac{s.r.\bar{V}_z^{-\infty}}{n.\bar{V}_{-\infty}^2} . M35$$

$$KS = M32 + M33 - \frac{s.r.\bar{V}_z^{-\infty}}{n.\bar{V}_{-\infty}^2} . M36$$

$$LC = M41 - M44 - \frac{s.r.\bar{V}_z^{-\infty}}{n.\bar{V}_{-\infty}^2} . M45$$

$$LS = M42 + M43 - \frac{s.r.\bar{V}_z^{-\infty}}{n.\bar{V}_{-\infty}^2} . M46$$

On déduit de (3 9):

$$KC b_n^{c-\infty} + KS b_n^{s-\infty} = -M35 \frac{\delta P_n^c}{S}$$

$$LC b_n^{c-\infty} + LS b_n^{s-\infty} = -M45 \frac{\delta P_n^c}{S}$$

Soit:

$$b_n^{c-\infty} = (M35.LS - M45.KS) \frac{\delta P_n^c}{S.\Delta n} \quad (3-10a)$$

$$b_n^{s-\infty} = (M45.KC - M35.LC) \frac{\delta P_n^c}{S.\Delta n} \quad (3-10b)$$

avec

$$\Delta n = LC.KS - KC.LS \quad (3-11)$$

La connaissance des coefficients $b_n^{c-\infty}$ $b_n^{s-\infty}$ définit l'écoulement

dans le plan infini amont (par l'éq.3-2) et par conséquent la totalité de l'écoulement dans le compresseur (à l'aide de (3-1)). une recombinaison plan par plan permet de reconstituer l'ensemble des perturbation à travers les étages :

$$\begin{bmatrix} V_{z,n}^c \\ V_{z,n}^s \\ V_{\theta,n}^c \\ V_{\theta,n}^s \\ P_{o,n}^c \\ P_{o,n}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n^c \\ b_n^s \\ \varepsilon \\ b_n \\ -b_n^c \\ \frac{-s.r.\bar{V}_z}{n.\bar{V}^2} b_n^c \\ \frac{-s.r.\bar{V}_z}{n.\bar{V}^2} b_n^s \\ n.V^{-2} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

$$\begin{bmatrix} V_{z,n}^c \\ V_{z,n}^s \\ V_{\theta,n}^c \\ V_{\theta,n}^s \\ P_{o,n}^c \\ P_{o,n}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EP \\ g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{z,n}^c \\ V_{z,n}^s \\ V_{\theta,n}^c \\ V_{\theta,n}^s \\ P_{o,n}^c \\ P_{o,n}^s \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

ENTREE
COMPRESSEUR

et ainsi de suite pour chaque plan; la recombinaison en série de Fourier s'effectue par le produit matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} V_z \\ V_\theta \\ P_o \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} V_{z,n} & V_{z,n} \\ V_{\theta,n} & V_{\theta,n} \\ P_{o,n} & P_o \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

Cette formulation a été obtenue en plaçant la distorsion de pression totale à une distance Z_g à l'amont du compresseur. En admettant par exemple que la perturbation soit placée à la sortie du premier transfert (pré-distributeur ou rotor), l'éq.(3-7)

deviendra :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ c_n \end{pmatrix} = [P_{+\infty}] [A_{2k}] [EP_{2k}] \dots [EP_1] \left[[A_1] [EP_g] [E_{-\infty}] \begin{pmatrix} 0 \\ b_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta P/s \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

La résolution est identique, les coefficients KC,KS,LC ET LS (donc Δn), ne changent pas, il suffit de substituer dans les relations (3-10 a et b), les coefficients M_{ij} par N_{ij} , $[N]$ étant la nouvelle matrice définie par:

$$[N] = [P_{+\infty}] \cdot [A_{2k}] \dots [EP_1]$$

La stabilité temporelle étant définie par l'expression de Δn (§3-6), on constate que la stabilité du système est indépendante de la position de la distorsion.

3-5-SIMPLIFICATION DANS LE CAS D'UN COMPRESSEUR

MULTIETAGE COMPACT

3-5-1-INTRRET ET CONSEQUANCE DE CETTE SIMPLIFICATION:

Si les distances intergrilles sont très faibles par rapport au rayon moyen, on peut négliger les espaces correspondants ce qui permet une résolution analytique du problème dont l'étude est classique et a déjà été développée par J.FABRI(7) et en référence(23).

L'influence d'une telle simplification est directe sur la matrice $[EP]$ (définie par (2-15)) qui caractérise le transfert des perturbation dans les écoulements intrgrilles.

Le terme $\frac{d}{r} n$ (avec d:distance intergrilles

r:rayon moyen, n:l'harmonie) est le paramètre géométrique essentiel de cette matrice. Contrairement à l'habitude, la distance d n'est pas réduite à la corde mais au rayon. Il importe donc qu'une simplification de d se justifie non par sa faible valeur par rapport à la corde mais par rapport au rayon.

En faisant $\frac{d}{r} n=0$, on vérifie bien que $[EP]$ devient la matrice identité. Ce terme n'intervient que sous forme exponentielle; donc si le rapport distance intergrille-rayon est

par exemple de 1%, l'erreur commise sur l'exponentielle sera du même ordre pour le premier harmonique mais déjà de 10% pour le deuxième. Cette remarque montre que l'étude ne se justifie que si l'influence des forts harmoniques peut être négligé.

3-5-2-CALCUL DE LA FONCTION $b_n^{-\infty}$:

L'expression du produit matriciel qui relie les écoulements infinis amont et aval est la même que la relation (3-7) mais avec des matrices $[EP]$ égales à la matrice identité, soit:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{+\infty} \\ \prod_{j=1}^{2k} AVAM_{2k-j} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} E_{-\infty} \\ b_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta P/s \end{bmatrix} \right] \quad (3-15)$$

Si les A_{ij} correspondent aux coefficients d'une matrice AVAM, celle-ci peut s'écrire (Eq.2-25):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A_{z1} & A_{z2} & 0 \\ A_{z1+sA_{z1}} & A_{z2+sA_{z2}} & A_{z3} \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

On remarque que le produit matriciel de deux matrices AVAM conserve la forme d'une matrice AVAM par suite si on appelle B_{ij} les coefficient de ce produit, alors on pourra exprimer cette matrice sous la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ B_{z1} & B_{z2} & 0 \\ B_{z1+sB_{z1}} & B_{z2+sB_{z2}} & B_{z3} \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

En gardant les notations (3-16) et en explicitant $[P_{+\infty}]$, l'équation (3-15) permet d'exprimer la fonction $b_n^{-\infty}$:

$$b_n^{-\infty} = \frac{B_{z3}}{\frac{r}{n} \left[\bar{V}_{z+\infty}^{-1} + B_{z3} \bar{V}_{z-\infty}^{-1} \right] - B_{z1} - iB_{z2}} \frac{\delta P_n \setminus S}{S + \frac{1 - B_{z1} - iB_{z2}}{\frac{r}{n} \left[\bar{V}_{z+\infty}^{-1} + B_{z3} \bar{V}_{z-\infty}^{-1} \right] - B_{z1} - iB_{z2}}}$$

Si on pose:

$$\alpha + i\omega = \frac{1 - B_{31} - iB_{32}}{\frac{r}{n} \left[\bar{V}_{z+\infty}^{-1} + B_{33} \bar{V}_{z-\infty}^{-1} \right] - B_{31} - iB_{32}} \quad (3-18)$$

Alors $b_n^{-\infty}$ peut s'écrire:

$$b_n^{-\infty} = \frac{K}{S[S - (\alpha + i\omega)]}$$

Or l'original par la transformée de LAPLACE de la forme

$$\frac{\alpha + i\omega}{S[S - (\alpha + i\omega)]}$$

est de la forme $\exp(\alpha + i\omega)t$; il est possible

il est donc possible d'exprimer les perturbations en fonction du temps dans un plan k quelconque:

$$V_z^{(k)} = \text{PARTIE REELLE} \left[\sum_{n=1}^{\infty} K_z \left(1 - \exp(\alpha + i\omega)t \cdot \delta P_n \cdot \exp(in\theta) \right) \right] \quad (3-19a)$$

$$V_\theta^{(k)} = \text{PARTIE REELLE} \left[\sum_{n=1}^{\infty} K_\theta \left(1 - \exp(\alpha + i\omega)t \cdot \delta P_n \cdot \exp(in\theta) \right) \right] \quad (3-19b)$$

$$P_o^{(k)} = \text{PARTIE REELLE} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[K_P - \left[K_P + \frac{(\alpha + i\omega) \cdot \left[\frac{r}{n} \bar{V}_z^{-\infty} B_{33} - B_{31} - B_{32} \right]}{K_z} \right] \cdot \exp(\alpha + i\omega)t \cdot \delta P_n \cdot \exp(in\theta) \right] \right] \quad (3-19c)$$

avec:

$$K_z = \frac{B_{33} \exp(in\theta)}{1 - B_{33} - iB_{32}} \quad (3-20)$$

$$K_\theta = \begin{pmatrix} {}^{(k)} & {}^{(k)} \\ B_{21} + i & B_{22} \end{pmatrix} K_z \quad (3-21)$$

$$K_P = \begin{pmatrix} {}^{(k)} & {}^{(k)} \\ B_{31} + i & B_{32} \end{pmatrix} K_z \quad (3-22)$$

3-5-3-ANALYSE FORMELLE (COMPRESSEUR COMPACT) :

Les problèmes d'instabilités rencontrés dans un compresseur axial sont de plusieurs types: décrochage tournant faible ou fort, pompage, distorsion d'entrée d'air stationnaire ou instationnaire. L'étude de ces phénomènes doit être menée suivant 3 directions:

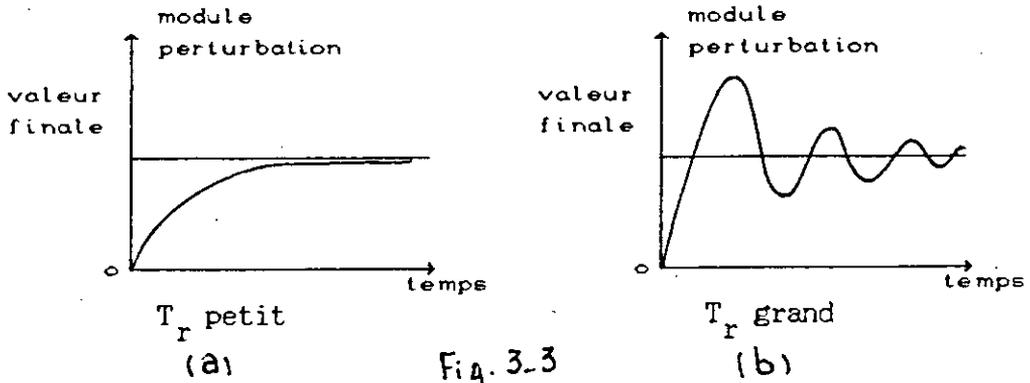
L'évolution au cours de temps (pour les phénomènes instationnaires), la répartition suivant la circonférence, la propagation suivant l'axe machine. Le principe de l'étude le long de ces deux dernières directions est identique dans le compresseur compact ou dans le cas général; il sera l'objet du prochain paragraphe.

On présente ici l'analyse de la réponse instationnaire d'un compresseur compact, effectuée par l'examen de l'expression $(\alpha + i\omega)$.

Pour chaque harmonique n , α représente un terme d'amortissement en fonction du temps, ω la pulsation du système. Deux cas sont à étudier: $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$.

si α est négatif, l'exponentielle $\exp(\alpha t)$ tend vers 0 à partir de l'instant initial. Le système est stable et après ce régime transitoire, les perturbations sont établies dans tout le compresseur. La durée de ce régime dépend de α : plus son module est grand, plus le temps de transition est constant. D'autre part, la forme du transitoire dépend essentiellement du rapport α/ω inversement proportionnel au temps relatif T_r , rapport entre le

temps du transitoire (temps au bout duquel l'exponentielle $\exp(\alpha t)$ peut être considérée comme nulle) et la période des pulsation ($\frac{2\pi}{\omega}$). Plus T_r sera grand et plus le système aura tendance à osciller (Fig. 3-3a et b; celle-ci sont équivalentes aux Fig. 3-11b et 3-12b).



si α est positif (le cas $\alpha=0$ n'a d'existence que mathématique), l'exponentielle est croissante avec le temps. Le système est considéré comme instable et la limite de validité de la méthode est atteinte. En effet, dans la réalité, des termes non linéaires vont apparaître, limitant à une valeur finie l'expression $\exp(\alpha t)$. La discussion du cas $\alpha > 0$ est importante même dans le cadre d'une théorie linéaire car elle permet de prévoir, dans une certaine mesure, le comportement du système.

L'expression $(1 - \exp(\alpha + i\omega)t)$ (pour V_z et V_θ) montre que si $\alpha < 0$, l'expression stationnaire est prédominante. Par contre, si $\alpha > 0$, le terme $\exp(i\omega t)$ joue un rôle essentiel: le système aura tendance à osciller avec une pulsation ω . De plus si la vitesse angulaire associée à ω est voisine de la vitesse de rotation (0.1 et 0.8), l'écoulement entrera en régime *DECROCHAGE TOURNANT*.

On peut remarquer qu'à ce stade, pour un harmonique n , une oscillation circonférentielle (décrochage tournant) ou axial (pompage) se traduit en un pt. (θ, z) de façon analogue. C'est pourquoi, avec la même modélisation, mais en tenant compte du circuit récepteur, il sera possible d'étudier le pompage, les fréquences de résonance dans ce dernier cas étant beaucoup plus faibles; un critère précis permettant de distinguer les deux phénomènes restant

cependant à établir.

3-6-DEFINITIONS DES PARAMETRES CARACTARISTIQUES DE L'ETUDE STATIONNAIRE (CAS GENERAL)

Que le compresseur soit considéré comme compact ou non, l'écoulement est analysé suivant trois directions: temporelle (*étude instationnaire*), azimutale et axial.

Pour effectuer l'étude complète suivant chaque axe t , θ et z , on se placera sur les autres en des points privilégiés révélateur du comportement général du compresseur. Ainsi en régime établi, l'étude de l'écoulement dans le plan physique (θ, z) sera effectuée pour un temps infini

3-6-1-REPARTION SUIVANT LA CIRCONFERENCE :

La déformation éventuelle de la perturbation (*en forme de créneau*) est étudiée graphiquement. La moyenne quadratique des perturbations peut être calculée, cette grandeur caractérisant l'intensité globale de la perturbation.

3-6-2-EVOLUTION A TRAVERS LES ETAGES:

La recombinaison matricielle des différents écoulements à partir des expressions de $b_n^{c-\infty}$ et $b_n^{s-\infty}$ permet d'étudier les perturbations de la vitesse circonférentielle, de la vitesse axiale et de la pression totale à l'entrée et à la sortie de chaque rangée d'aubes. Les perturbations suivant l'axe machine sont caractérisées à la fois par leur moyenne quadratique et leurs valeurs maximales suivant la direction circonférentielle. Cette étude intéresse particulièrement la réponse du compresseur à une distorsion circonférentielle stationnaire due à une entrée d'air. Par une étude le long de chaque isovitesse de rotation, on peut déterminer le point de fonctionnement à partir duquel se produit une amplification spatiale de la distorsion.

On peut ainsi tracer, dans le champs des caractéristiques, une

ligne représentant la limite d'amplification spatiale du compresseur. Cette ligne dépend de la forme de la perturbation introduite mais pas de son amplitude (*par définition de toute théorie linéaire*). L'écart entre la ligne de pompage et cette ligne d'amplification spatiale détermine la marge nécessaire pour maintenir un écoulement sain dans tout le compresseur en présence d'une distorsion d'entrée d'air du type de celle introduite.

3-7-ETUDE INSTATIONNAIRE -THEORIE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE :

La suppression des espaces intergrilles permet une résolution analytique du système, on est amené ainsi à l'étude du compresseur compact (§ 3-5). Les paramètres d'étude (α, ω) sont alors classiques. L'extension de la méthode à un compresseur de forme géométrique quelconque, exige une résolution numérique. Les critères utilisés (définis dans les paragraphes qui suivent) sont moins explicites pour leur donner un sens physique plus précis, on se référera aux expressions correspondantes obtenues lors de l'étude du compresseur compact.

Les fonctions $b_n^{c-\infty}$ et $b_n^{s-\infty}$ (3-10) sont des fonctions non analytiques de l'opérateur de LAPLACE s , il n'est donc plus possible d'obtenir leurs originaux (*fonction du temps*). En réalité cette impossibilité va se révéler très intéressante car elle va permettre de généraliser la méthode.

3-7-1-ANALOGIE AVEC UN SYSTEME ASSERVI LINEAIRE

La théorie des asservissements linéaires utilise la transformée de LAPLACE et se trouve ainsi confrontée au problème du passage des images aux originaux. Elle a étudiée la transformée et en a déduit une méthode d'analyse qui permet de travailler exclusivement sur les images à partir du tracer de ces fonctions, il devient possible de définir complètement le système. L'étude instationnaire proposée ici a été bâtie autour de cette théorie.

3-7-1-1-SCHEMA D'UN ASSERVISSEMENT:

DEFINITION D'ASSERVISSEMENT:

On appelle asservissement un système possédant les deux propriétés suivantes:

- 1-c'est un système de commande avec amplification de puissance
- 2-c'est un système à retour

La commande avec amplification de puissance est représenté par une fonction de transfert (appelée ici $F(s)$), image par la transformée de LAPLACE.

le retour est constitué d'une boucle retranchant la sortie à l'entrée. Le système peut être schématisé comme suit:

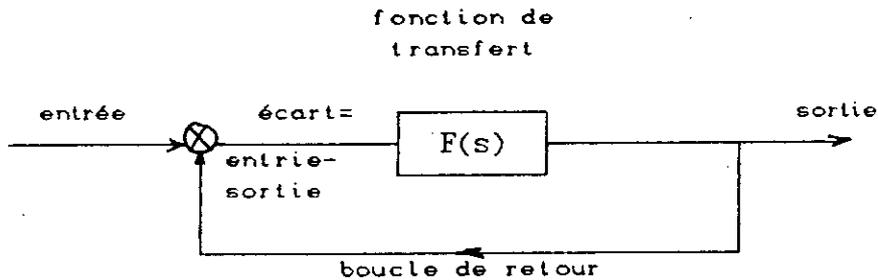


Fig.3-4 schéma d'un système asservi

On peut écrire la relation:

ou $sortie = F(s) \times \text{écart}$ (3-23a)

$sortie = F(s) \times (entrée - sortie)$ (3-23b)

ou encore $sortie = \frac{F(s)}{1+F(s)}$ (3-23c)

La fonction $F(s)$ définit donc le système asservi

3-7-1-2-TRANSPOSITION AU CAS D'UN COMPRESSEUR

A priori, le fonctionnement d'un compresseur ne répond pas à la définition d'un asservissement. En effet:

ce n'est pas un système de commande

il n'y a pas de système de retour explicite (ce système existe néanmoins implicitement par le biais des conditions de raccordement entre les écoulements infinis aval et amont qui définissent les fonctions $b_n^{c-\infty}$ et $b_n^{s-\infty}$ (relation 3-10a et b). notre formulation ne peut cependant le faire apparaître comme un asservissement).

La seule similitude réside dans l'utilisation de la transformée de Laplace. Il importe donc, avant tout, d'adapter les deux définitions.

La fonction $F(s)$ représente une "boîte noire" à l'intérieur de laquelle il existe un certain nombre de sous-fonctions avec éventuellement boucle de retour. Autrement dit, la fonction $F(s)$ peut être équivalente à une composition de systèmes asservis annexes. suivant le même principe, la fonction $F(s)$ avec sa boucle de retour peut être considérée comme le simple maillon d'une chaîne plus complexe. le système de la figure 3-4 peut alors être englobé dans une nouvelle "boîte noire" caractérisée par la fonction $G(s)$ telle que:

$$G(s) = \frac{F(s)}{F(s) + 1} \quad 3-24$$

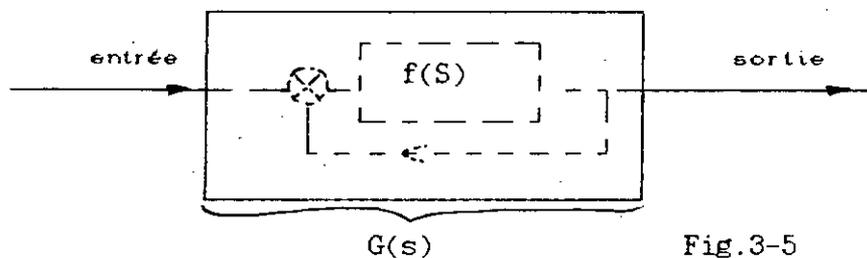


Fig.3-5

Ainsi, il est possible de schématiser un système asservi en boucle fermée (avec boucle de retour) par un système asservien boucle fermée (sans boucle de retour). Cette transposition permet de s'affranchir de la seconde propriété définissant un système asservi.

La première partie de cette définition stipule que le système doit comporter une commande avec amplification de puissance, or dans un compresseur il y a apport d'énergie donc amplification de

la puissance interne de l'écoulement, la distorsion introduite pouvant être considérée comme une commande vis-à-vis d'éventuelle variations de cette puissance. Les relations 3-10a et b peuvent s'écrire dans ces conditions sous la forme :

$$b_n^{c-\infty} = G_n^c(s) \frac{\delta P_n^c}{S} \quad \text{avec} \quad G_n^c(s) = \frac{M35.LS - M45.KS}{\Delta n} \quad 3-25a$$

$$b_n^{s-\infty} = G_n^s(s) \frac{\delta P_n^c}{S} \quad G_n^s(s) = \frac{M45.KC - M35.LC}{\Delta n} \quad 3-25b$$

Pour chaque harmonique n , la distorsion $\delta P_n^c/s$ représente l'entrée, les fonctions $b_n^{c-\infty}$ et $b_n^{s-\infty}$ la sortie, les fonctions $G_n^c(s)$ et $G_n^s(s)$ les fonctions de transfert (F T) du compresseur; cela se schématise ainsi :

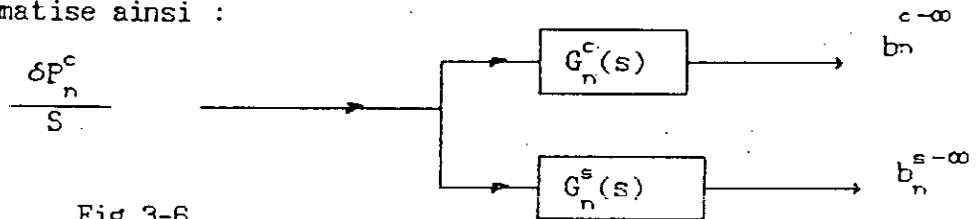


Fig.3-6

3-7-1-3 LIMITES ET DIFFICULTES INHERENTES A LA TRANSPOSITION

L'analogie établie au paragraphe précédant est bien sûr arbitraire, les deux modèles présentent moins de similitude que de divergence. Le but d'un asservissement est d'obtenir une sortie qui suive aussi fidèlement que possible l'entrée (commande transmise sans être déformée). En réalité l'inertie du système fait qu'il existe toujours un écart entre les deux. L'objectif est de minimiser cet écart d'où l'existence de la boucle de retour.

Dans notre problème, la commande est représentée par la perturbation que le système devra filtré au maximum. Ainsi les fonctions sont, en quelque sorte, opposées dans les deux cas.

la théorie des asservissements consiste à étudier la fonction $G(s)$ (eq. 3-21) à partir de la fonction $F(s)$. Certaines propriétés (la stabilité par exemple) de $F(s)$ sont supposées connues la transposition de cette théorie à notre problème ne

permet pas de faire apparaître les deux fonctions types $F(s)$ $G(s)$, c'est pourquoi le système doit être étudié uniquement à partir des fonctions G_n^c et G_n^s .

Pour surmonter ces difficultés, il a fallu revenir aux définitions mathématiques originales et modifier en conséquence la théorie des asservissements linéaires.

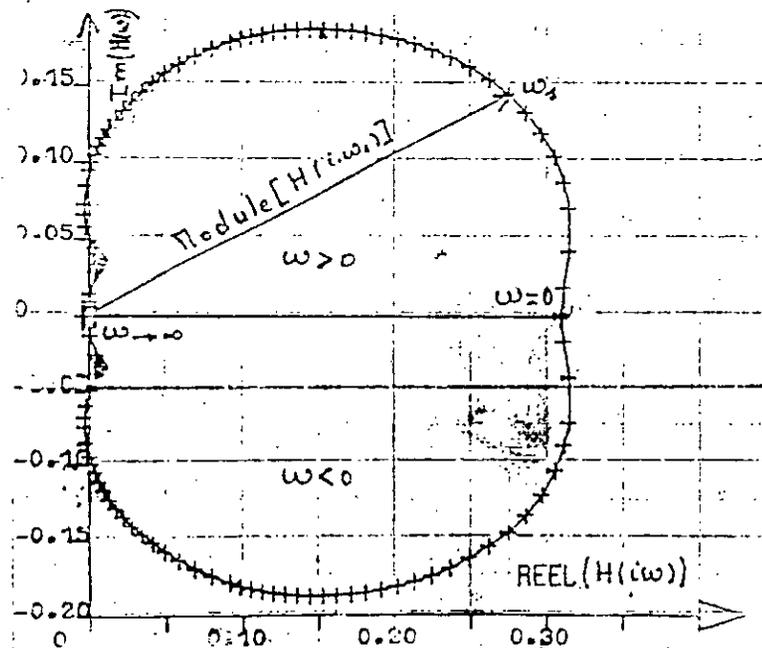
3-7-2-THEORIE MODIFIEE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Soit une images quelconque $H(s)$ de la transformée de LAPLACE. A l'opérateur s est substitué l'imaginaire pur $i\omega$. La transformée $H(i\omega)$ peut s'écrire:

$$H(i\omega) = H^R(i\omega) + i H^I(i\omega)$$

Cette substitution revient à remplacer la transformée de LAPLACE par celle de FOURIER (aux conditions aux limites près). Il est possible donc de représenter la partie imaginaire H^I en fonction de la partie réelle H^R dans un plan appelé plan de Nyquist chaque valeur de ω détermine un point de la courbe $(H^R(i\omega), H^I(i\omega))$ voir Fig. 3-7.

Fig.3-7



A ω est associée une fréquence, le module de $H(i\omega)$ représentant la valeur correspondante de la fonction $H(i\omega)$. Aux hautes fréquences,

elle tend généralement vers 0, la fréquence nulle définissant, d'autre part, l'état stationnaire (Fig 3-7).

L'étude des images de la transformée de LAPLACE dans le plan de Nyquist permettra une étude complète de la réponse instationnaire du système. Cette représentation nécessite la connaissance des fonctions H sous forme complexe, c'est pourquoi il n'est pas possible d'utiliser la forme classique de la série de FOURIER :

$$X = \text{Partie réelle} \left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \exp(in\theta) \right]$$

Enfin, les conditions d'existence d'un original $h(t)$ pour une fonction $H(s)$ donnée sont liées à la convergence de l'intégrale $\int_0^{\infty} \exp(-st) h(t) dt$; or $h(t)$ n'est pas connue. Néanmoins les propriétés de $H(s)$ indiquent l'existence d'originaux de la forme $\exp(at)$ avec $a > 0$, correspondant ainsi à des intégrales divergentes (voir § suivant). Il est donc possible d'étudier, à posteriori, l'existence des fonctions.

Les deux paragraphes suivants vont permettre de déterminer d'une part un critère de stabilité obtenu à partir des fonctions $G_n^c(s)$ et $G_n^s(s)$ et d'autre part des critères d'analyse de la réponse en fréquence. L'étude de ces dernières s'effectuera directement sur les fonctions G_n^c et G_n^s et des images des perturbations V_θ, V_z et P_o dans le plan de Nyquist.

3-7-2-1-CRITERE DE STABILITE

Les fonctions G_n^c et G_n^s peuvent, dans tous les cas, s'écrire sous la forme:

$$G_n^c(s) = \frac{H_n^c(s)}{\prod_{j=1}^m [s - (\alpha_j + i\omega_j)]} \quad (3-25a)$$

$$G_n^s(s) = \frac{H_n^s(s)}{\prod_{j=1}^n [s - (\alpha_j + i\omega_j)]} \quad (3-25b)$$

$$\text{avec } \Delta_n = \prod_{j=1}^m [s - (\alpha_j + i\omega_j)]$$

L'originale correspondant s'écrit (voir l'étude du compresseur compact § 3-5):

$$g_n^c(t) = \sum_{j=1}^m f_{i_j}(t) e^{(\alpha_j + i\omega_j)t} \quad (3-25c)$$

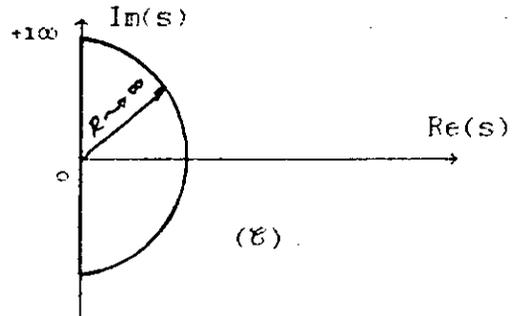
de même pour $g_n^s(t)$

Les termes ω_j représentent les pulsations, α_j les coefficients d'amortissements. Comme l'a montré l'étude sur les compresseurs compacts, une condition nécessaire et suffisante pour que l'écoulement soit stable est que les coefficients α_j soient négatifs: Cette propriété constitue un critère de stabilité de l'écoulement, les α_j étant définis par les termes Δ_n (d'après 3-25c), un critère graphique peut être déduit du tracé des courbes correspondants aux Δ_n . Ce critère appliqué à chaque harmonique est dérivée du théorème des résidus et du théorème de Cauchy; on en rappelle ici le principe:

Appelant plan de LAPLACE, le plan dans le quel sont représentées la partie réelle et la partie imaginaire des racines de Δ_n ; tous les couples (α_j, ω_j) représentent ainsi un point de ce plan. Dans ce plan de LAPLACE, on définit une courbe fermée (8) constituée par l'axe des imaginaires purs de $-i\infty$ à $+i\infty$ et par le demi-cercle de rayon infini buclant dans ce demi plan des zéros de Δ_n à partie réelle positive (Fig 3-8). Cette courbe s'appelle contour de Nyquist et englobe tout α_j positive.

Si l'opérateur S suit dans le plan de LAPLACE le contour de Nyquist dans le sens des aiguilles d'une montre, la variation de phase de la fonction Δ_n représentée dans le plan de Nyquist est égale $-2\pi Z$; Z étant le nombre de zéro de $\Delta_n(S)$ situés à l'intérieur du contour (\mathcal{C}).

Fig.3-8
contour de Nyquist

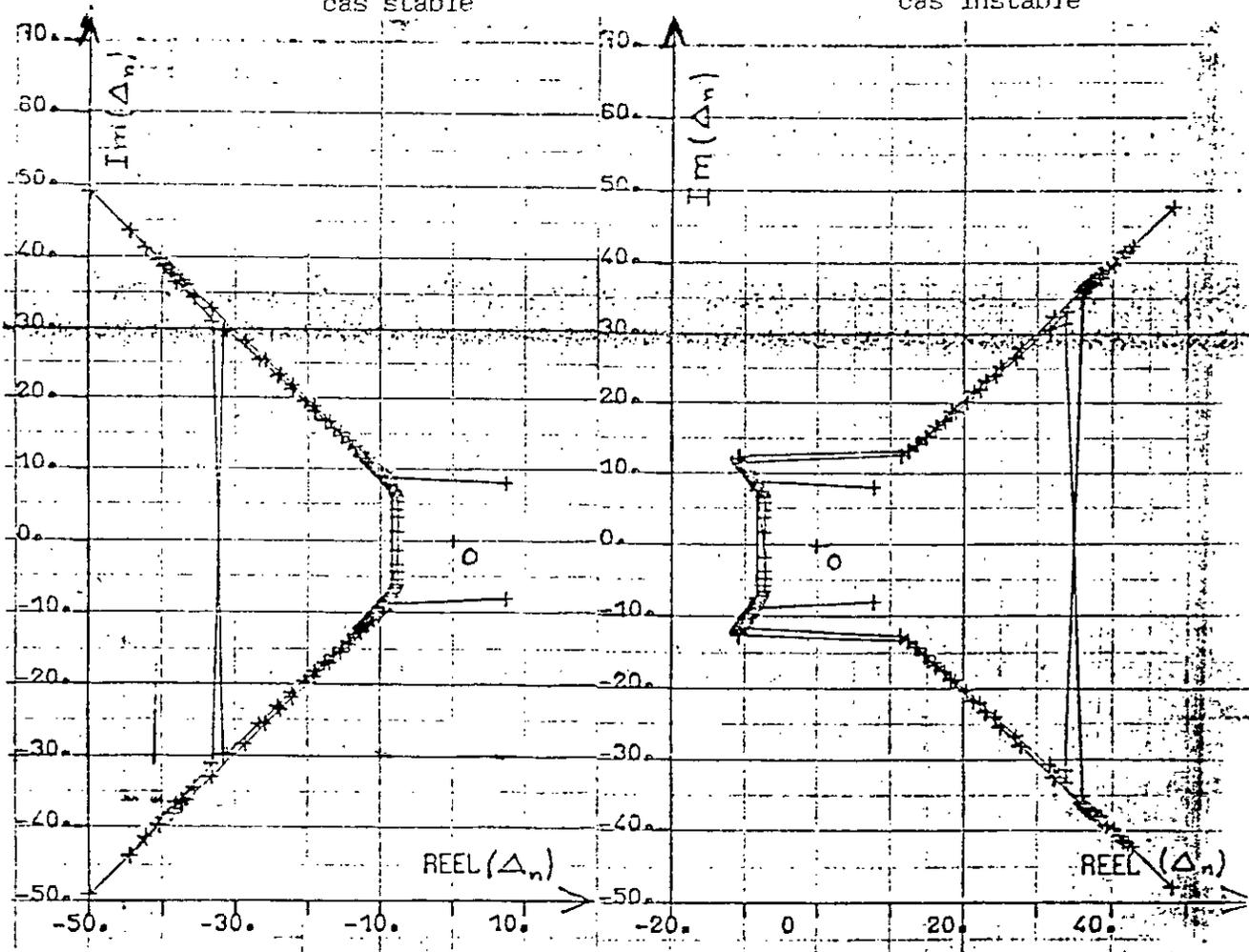


Le critère de stabilité peut donc s'énoncer ainsi:

Pour chaque harmonique n , le nombre de solutions instables est égal au nombre de tours effectués autour de l'origine par les courbes représentatives de Δ_n dans le plan de LAPLACE quand $S=j\omega$ varie entre $-\infty$ et $+\infty$ (voir fig 3-9 présentant un cas stable et un cas instable)

Fig.3-9-a variation de phase
nulle
cas stable

Fig.3-9-b variation de phase
de $+4\pi$
cas instable



Ce critère de stabilité permet de déterminer les α_j positifs (divergence au cours du temps) de la même façon que dans le cas du compresseur compact, et permet d'en déduire les mêmes conclusions: Il détermine le point de transition entre un écoulement sain et un écoulement pouvant évoluer vers le régime de décrochage tournant, le pompage ou un régime caractérisé par un niveau de turbulence très élevé. Juste au point de transition (un seul α_j positif) la méthode n'est plus valable d'un point de vue théorique (divergence au cours du temps); néanmoins l'analyse en fréquence indique vers quel mode évoluera le système. Le principe de cette étude fait l'objet des paragraphes suivants.

3-7-2-2-REPONSE EN FREQUENCE:

L'étude de la réponse en fréquence doit être suffisamment générale pour permettre d'aborder les problèmes de décrochage tournant (oscillations circonférentielles), de réponses à des distorsions d'entrée d'air instationnaire quelconque (problèmes de filtrages) et de pompage (oscillations axiales).

Rappelons que si le modèle présenté ici ne schématise pas complètement le circuit récepteur, il a été conçu de façon à l'intégrer facilement en vue d'une d'effectuer une étude sur le pompage; une première approche a été déjà effectuée, mais que nous n'abordons pas ici.

L'étude instationnaire doit être menée en un ou plusieurs points de l'espace. Suivant la circonférence, on étudie le point où l'amplitude de la perturbation est maximum en régime établi. Suivant l'axe machine, l'analyse instationnaire est effectuée à l'amont de chaque rotor. Plutôt que d'étudier la réponse successivement à des distorsions type Dirac ou en échelon (Fig.3-2) ou tournant à différentes vitesses angulaires, on étudie d'une part les fonctions G_n^C et G_n^S pour chaque harmonique (relations 3-25a et b) et d'autre part les images des perturbations $V_\theta(S)$, $V_z(S)$ et $P_o(S)$ rapportées à la perturbations introduite δP_o . Il n'y a pas d'incompatibilité dimensionnelle puisque les grandeurs V_θ , V_z et P_o sont déjà rapportées à celle caractérisant l'écoulement moyen (un module égale à 1 signifiant que la perturbation reproduit fidèlement la distorsi-

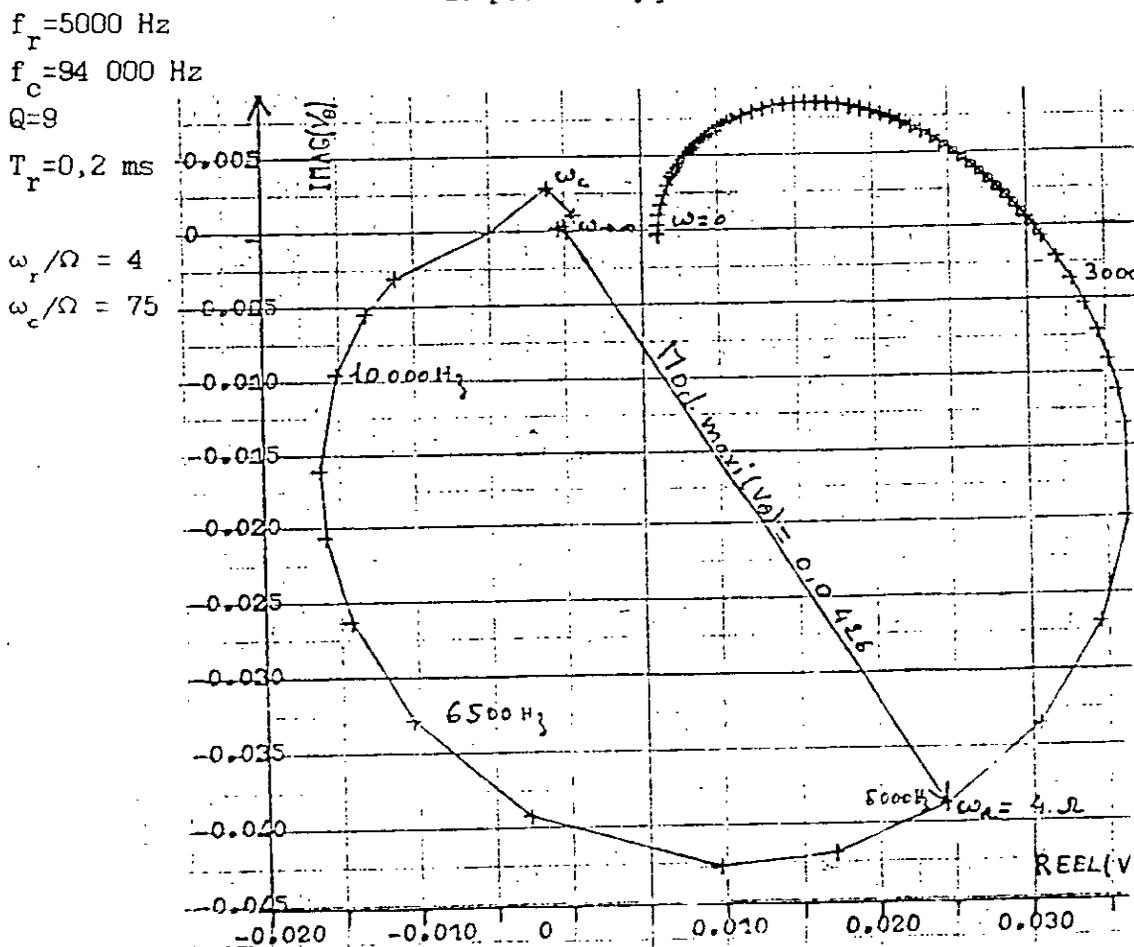
on introduite).

L'annexe B présente une modélisation du compresseur avec ses sorties en vue d'une étude instationnaire mettant en évidence l'analogie avec les circuits des systèmes asservis.

Suivant un principe analogue à celui exposé au § 3-7-2, à l'opérateur S s'est substitué l'imaginaire pur $i\omega$ et les fonctions $G_n^c(i\omega)$, $G_n^s(i\omega)$, $V_\theta(i\omega)$, $V_z(i\omega)$ et $P_o(i\omega)$ sont tracées dans le plan de Nyquist gradué en ω . La figure 3-7 présente un exemple de ce tracé. Pour une pulsation quelconque ω_1 correspond une amplitude de la fonction F représentée par le module du vecteur joignant l'origine au point $(\text{Re}(F(i\omega_1)), \text{Im}(i\omega_1))$.

Dans le cas d'écoulement très peu perturbé les courbes ont des formes géométriques purs (Fig.3-10) (par opposition aux courbes "très tourmentées" qui correspondent plutôt aux α_j positifs (Fig.3-14) et il est alors possible de définir un certains nombres de paramètres d'études caractéristiques du système. Ces paramètres sont d'autant plus intéressants qu'une interprétation "visuelle" de ces n'est pas évidente, rendant difficile l'évaluation quantitative de chacun de ces critères (définis ci-après)

Fig.3-10 évolution de la vitesse circumférentielle dans le plan de Nyquist



Enfin cette étude permet non seulement d'analyser la réponse en fréquence mais aussi d'étudier l'établissement des perturbations au cours du temps.

Les deux premiers paramètres (fréquence de résonance et coefficient de surtension) peuvent être utilisés quelle que soit la forme des courbes.

3-7-2-3 PULSATION DE RESONANCE ω_R :

La pulsation de résonance ω_R (ou fréquence de résonance $f_R = \omega_R / 2\pi$) est définie par la pulsation donnant le module maximum de la fonction étudiée.

Ces pulsations sont à rapprocher de la pulsation w obtenue lors de l'étude du compresseur compact, et définie par $(\alpha + i\omega)$ d'après l'équation (3-19). Il faut noter que la valeur du module correspondant à ω_R est aussi importante que la fréquence de résonance elle-même. Un module de 1 signifie que le système restitue fidèlement la perturbation introduite et définit le seuil entre un amortissement ou une amplification spatiale.

Pour un point de fonctionnement stable (α_j est négatif), la fréquence de résonance intéresse l'étude de la réponse du compresseur à des distorsions instationnaires et leur effet sur les performances. C'est le cas de la figure 3-10 où on remarque une fréquence de résonance de 5000Hz mais pour un module très faible (0.0426). Donc, même pour la fréquence de résonance il y'a fort amortissement.

Le cas α_j positif est intéressant dans le cas d'une étude d'un éventuel régime oscillatoire : Pour une harmonique n , l'existence d'une pulsation de résonance ω_R comprise dans le domaine $[0,1 n \Omega ; 0,8 n \Omega]$ (voir § 3-5-3) est une condition nécessaire (mais pas suffisante) de décrochage tournant. Cette analyse sera effectuée sur les fonctions de transfert du compresseur G_n^C et G_n^S donc indépendamment de la perturbation introduite.

3-7-2-4 COEFFICIENTS DE SURTENSION Q :

Ces coefficients sont définis par les grandeurs $V_\theta(i\omega)$, $V_z(i\omega)$ et $P_o(i\omega)$ par les relations suivantes :

$$Q_{\theta} = \frac{\text{module } [V_{\theta}(i\omega)]}{\text{module } [V_{\theta}(i\omega = 0)]} \quad (3-27a)$$

$$Q_z = \frac{\text{module } [V_z(i\omega)]}{\text{module } [V_z(i\omega = 0)]} \quad (3-27b)$$

$$Q_p = \frac{\text{module } [P_o(i\omega)]}{\text{module } [P_p(i\omega = 0)]} \quad (3-27c)$$

L'existence d'une pulsation de résonance, donc d'une amplification (par rapport au cas stationnaire) de la fonction étudiée pour une certaine valeur de ω , ne signifie pas nécessairement que cette amplification soit importante; ces coefficients nous renseignent sur ce point, ils indiquent le rapport des modules entre le cas stationnaire et le cas correspondant à ω_R .

Sur l'exemple de la figure 3-10, le module de V_{θ} dans le cas stationnaire est de 0.0047. Pour la fréquence de résonance (5000Hz), ce module atteint 0.043. Le compresseur ayant donc un coefficient de surtension de 9 amplifiera 9 fois plus une perturbation ayant une fréquence f_R DE 5000Hz qu'une perturbation stationnaire.

Ces coefficients de surtension permettent de plus la caractérisation du régime transitoire; en effet, les fréquences du transitoire sont d'autant moins amorties que ces coefficients de surtension sont grands. Ces coefficients mettent en relief l'éventualité de "pics" dans le transitoire (fig 3-12a et b) pouvant traduire la possibilité de l'évolution radicale de l'écoulement. Ces coefficients sont d'ailleurs à rapprocher du temps relatif défini dans l'étude du compresseur compact; à priori la réponse du système présenté fig 3-10 se rapprochera de celles proposées sur fig 3-11b ou 3-12a.

Les paramètres précédemment cités (ω_R et Q) sont valables quelque soit la réponse du système; ils peuvent être analysés même

quand un α_j devient positif et indiquent alors la naissance éventuelle d'un régime oscillatoire .

Les critères qui suivent ne peuvent être étudiés que pour des courbes "pures" stables (α_j négatif) et intéressent la réponse du système à des distorsions instationnaires .

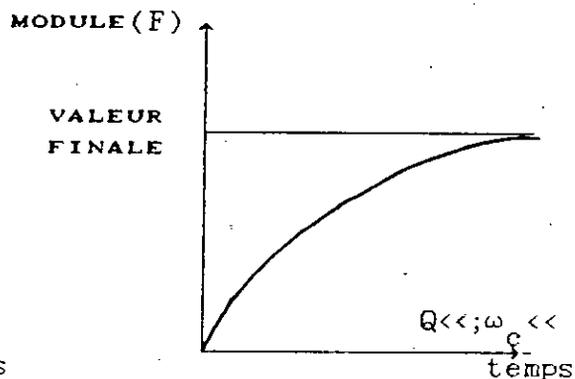
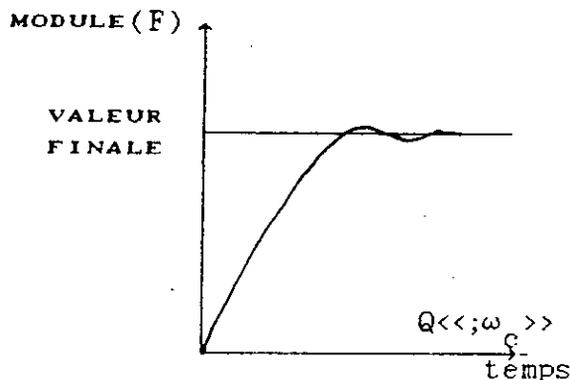
3-7-2-5 PULSATION DE COUPURE ω_c :

C'est la pulsation pour laquelle le module de la fonction vaut la moitié du module à fréquence nulle, soit:

$$\omega_c(V_\theta) \text{ telle que } \frac{\text{MODULE} [V_\theta(i\omega_c)]}{\text{MODULE} [V_\theta(0)]} = 0,5 \quad (3-28a)$$

$$\omega_c(V_z) \text{ telle que } \frac{\text{MODULE} [V_z(i\omega_c)]}{\text{MODULE} [V_z(0)]} = 0,5 \quad (3-28b)$$

Cette pulsation a l'avantage d'être explicite même en l'absence de fréquence de résonance, elle indique la rapidité de la réponse du système (Fig.3-11a et b)



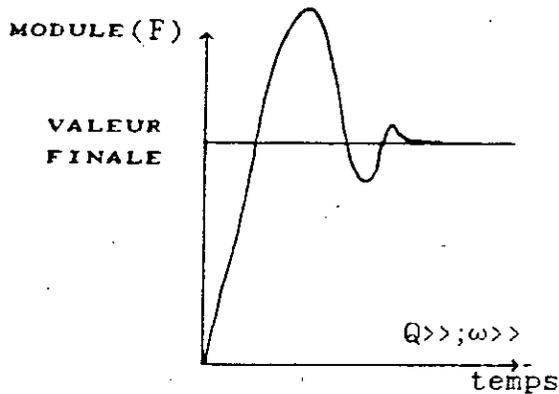


Fig. 3-12a

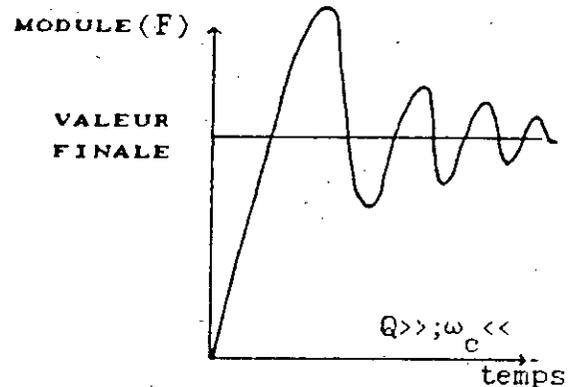


Fig. 3-12b

L'examen de Q et de ω_c permet de définir le type de réponse du compresseur. les figures 3-11 et 3-12 schématisent les 4 réponses types, la réponse 3-11b étant sûrement la plus favorable. L'exemple de la figure 3-10 correspond à des valeurs de Q et de ω_c élevées, la réponse se rapprochera du cas présenté Fig.3-12a.

3-7-2-6-TEMPS DU TRANSITOIRE

Il peut être représenté grossièrement par la relation:

$$T_{tr} = \pi / \omega_c \quad (3-29)$$

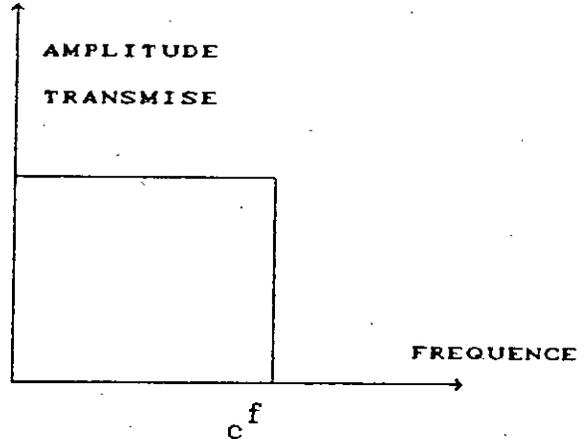
Cette expression donne cependant l'ordre de grandeur du temps du transitoire et est intéressante à titre de comparaison pour un système donné; par exemple (Fig.3-10), la valeur de 0,2 ms représente un temps d'établissement très court comparé au temps de traversé du compresseur par la perturbation (5 millisecondes dans ce cas).

3-7-2-7-BANDE PASSANTE

Par définition, la bande passante représente le domaine de fréquence compris entre zéro et la fréquence de coupure f_c . Ce paramètre est particulièrement intéressant dans une étude des distorsions d'entrée d'air instationnaires. Le compresseur est alors assimilé à un filtre passe-bas. Un filtre passe-bas idéal laisse passer intégralement les fréquences jusqu'à sa fréquence de coupure et "étouffe" complètement les fréquences

supérieurs (voir Fig. 3-13).

Fig.3-13



La bande passante délimite donc le domaine de fréquence susceptibles d'être transmises par le système. Un compresseur idéal du point de vue réponse instationnaire aurait donc une bande passante ne comprenant que la fréquence nulle. De façon plus concrète, on peut dire qu'un compresseur ayant une bande passante

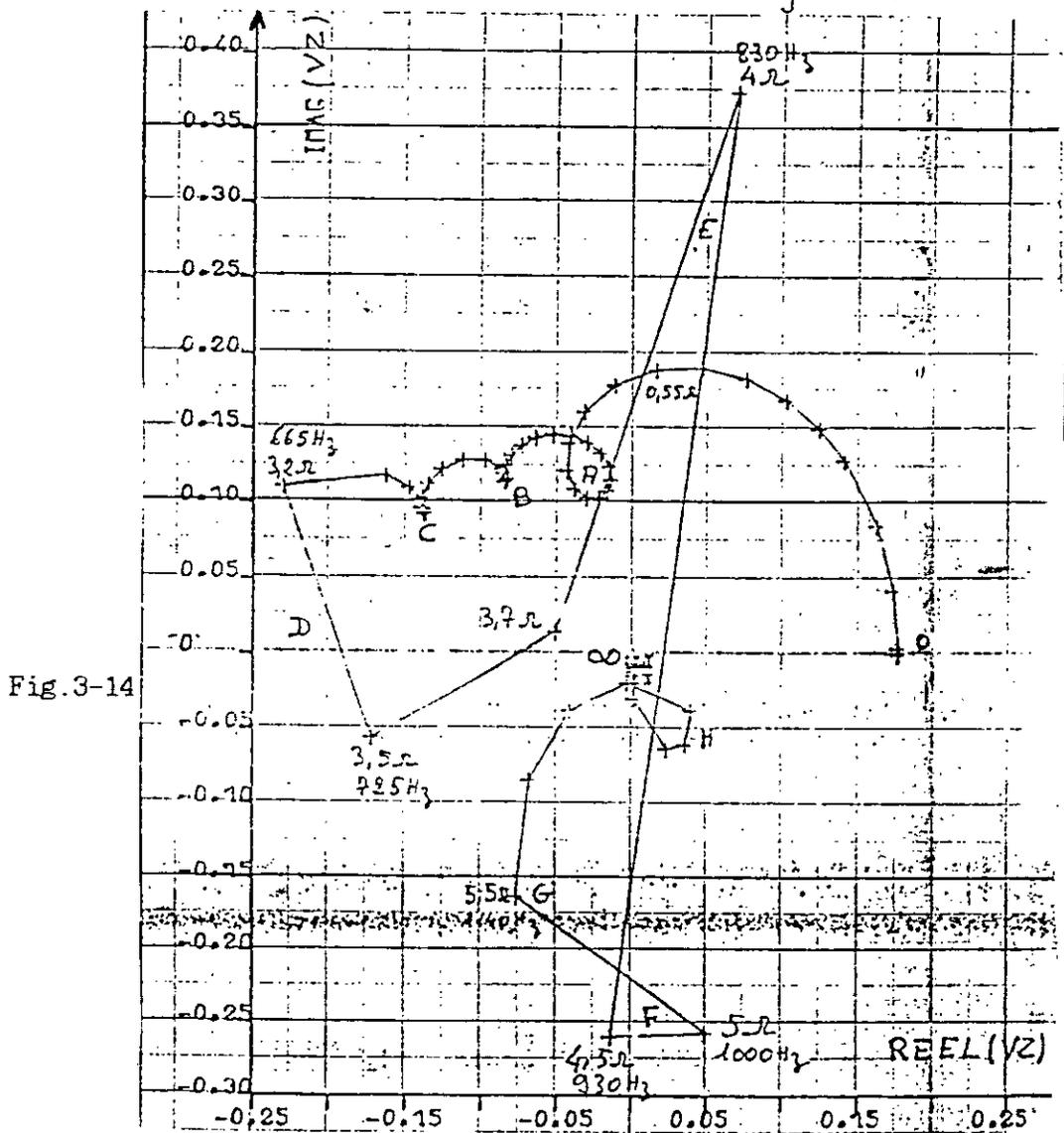
de $[0; 0,1 \Omega/2\pi]$ est indifférent au décollement tournant (au point de fonctionnement considéré) et qu'il filtera toutes les perturbations ayant une pulsation supérieur à $0,1.\Omega$.

3-7-2-8-INTERPRETATION GRAPHIQUE DES COURBES DANS LE PLAN DE NYQUIST:

Les critères mentionnés ci-dessous ont une limite d'utilisation; les termes ω_c , T_{tr} et bande passante n'ont, en effet, de signification pratique que pour des courbes qui, dans le plan de Nyquist, présente une forme géométrique relativement "pur" (Fig. 3-10). Lorsque l'allure des courbes devient plus complexe (succession de boucles, voir Fig. 3-14), ces critères sont multiples (il existe alors plusieurs fréquences de coupure) et de ce fait leur interprétation devient pratiquement impossible. Dans ce cas seul l'aspect général de la courbe peut renseigner sur l'évolution du système. Cette limitation n'est cependant pas gênante, les paramètre définis plus haut ayant été introduits pour étudier la réponse du compresseur loins des zones d'instabilités). Ce paragraphe concerne donc la détermination

d'un éventuel régime oscillatoire (α_j positif ou très faiblement négatif).

L'exemple présenté Fig.3-14 donne une idée des courbes pouvant être obtenues dans le plan de Nyquist. L'existence d'une succession de boucles caractérise un système très instable. L'étude des dominateurs Δ_n montre effectivement la présence de 6 instabilités, ie 6 harmoniques pour lesquels les coefficients α_j sont positifs.



Dans ce cas précis, le système diverge et les indications obtenues ne sont qu'approximatives. On peut en déduire cependant certaines informations concernant le mode de fonctionnement probable du compresseur par rapport au cas stationnaire ($\omega = 0$), on note la possibilité d'amplification spatiale (coefficients de surtension

élevés) pour de nombreuse fréquence (665,725,830,930,1000 Hz) mais pour lesquelles les modules restent faibles (inférieur à 1) L'étude du circuit récepteur permettrait d'indiquer soit l'apparition du pompage, soit un niveau général de turbulence considérablement accru, rendant le compresseur impropre à un fonctionnement correct.

Dans aucun cas le décrochage tournant ne pourra apparaitre, l'amplification spatiale dans son domaine de fréquence étant trop faible (module de 0,38 pour 830Hz). Si ce module atteignant 2 ou 3 pour cette même fréquence, l'allure de la courbe étant par ailleurs inchangé, un examen des courbes G_n^c et G_n^s serait nécessaire.

En effet, à chaque boucle (repérées par les lettres A,B,.....J) correspond l'amplification d'une harmonique. La distance relative par rapport à l'origine des boucles représente l'importance relative des harmoniques les unes par rapport aux autres. Le tracé des fonctions G_n^c et G_n^s confirmerait que dans ce cas c'est la cinquième harmonique qui présente un module maximum pour une pulsation de $\frac{4}{5} \Omega = 0,8\Omega$. Le décrochage tournant serait ainsi configuré par cinq cellules décrochées tournant à 0,8 fois la vitesse de rotation du compresseur.

3-8-SYTHESE:

A l'aide de ces critères, chaque type d'instabilité peut être défini.

On présente ici, de façon synthétique, les conditions d'existence de chaque régime. Deux cas doivent être distingués: α_j positif ou négatif.

- α_j positif, indique la présence d'une instabilité temporelle, ie d'un régime instable. Suivant les autres paramètres (fréquence de résonance, coefficient de surtension, modules des perturbations),

l'écoulement peut évoluer en décrochage tournant, en pompage, ou présente un niveau de turbulence élevé.

- α_j est négatif, la perturbation prend une valeur finie en régime établi: l'analyse porte sur la réponse du système à des distorsions stationnaires ou non.

$$\alpha_j > 0$$

DECROCHAGE TOURNANT

- ω_r : pour une fonction G_n^c ou G_n^s , l'existence d'une pulsation de résonance comprise dans le domaine $[0,1 n\Omega ; 0,8 n\Omega]$ est nécessaire
- Q grand (> 3)
- module des perturbation grand (> 2) pour ω_r .
- n : l'harmonique présentant à la pulsation ω_r le module le plus grand déterminera le nombre de cellules.

POMPAGE (ETUDE AVEC LE CIRCUIT RECEPTEUR)

- ω_r de faible valeur et identique pour tous les harmoniques.
- forte amplification dans les étages pour la fréquence de résonance.

NIVEAU DE TURBULENCE

- l'absence de fréquence de résonance exclut la possibilité d'apparition d'un régime oscillatoire organisé.
- l'apparition d'une ou plusieurs instabilités ($\alpha_j > 0$) signale la désorganisation du régime: le niveau de turbulence sera alors considérablement accru.

$$\alpha_j < 0$$

AMPLIFICATION DES DISTORSIONS D'ENTREE

D'AIR INSTATIONNAIRE

- Q grand (> 3)
- ω_c grand

- large bande passante (plus elle sera étendue, plus le compresseur sera sensible aux fréquences élevées)
- module des perturbations important à la fréquence ω_r .

AMPLIFICATION DES DISTORSIONS D'ENTREE

D'AIR STATIONNAIRE

- amplification à la traversée des étages
- augmentation de la moyenne quadratique
- modification éventuelle de la distorsion suivant la circonférence



CHAPITRE 4

ANALYSE DES RESULTATS

CHAPITRE IV

ANALYSE DES RESULTATS

Ce chapitre présente une étude paramétrique qui tente de dégager les paramètres essentielles responsables des instabilités. La méthode a été appliquée à 4 compresseurs : un compresseur NACA TN 3518 , constituée d'une roue isolée, deux compresseurs monoétage C1 et C2, un compresseur cinq étages; les caractéristiques géométriques et aérodynamiques de ces compresseurs sont données en annexe C.

A défaut des résultats non cohérents que nous avons obtenus par notre programme de calcul, en raison du manque de données précises concernant les écoulements dans les 4 machines, nous citerons :

l'écoulement moyen, que nous avons essayé d'approcher le plus possible par le calcul classique de compresseur; nous jugeons que ce calcul n'est pas très précis, et nous avons souhaité que cette étude serait entreprise numériquement par discrétisation des équation différentielles, qui constitue en elle même un P F E; de plus le manque de données aérodynamiques concernant les 3 derniers compresseurs , nous a obligé à faire un choix arbitraire des valeurs. Ceci dit , nous essayons d'exposer ici les différents résultats que nous aurions pu obtenir tout en apportant les interprétations nécessaires pour mettre en évidence la présence ou non d'instabilités qui altèrent au bon fonctionnement des machines.

4-1 RESULTATS ET INTERPRETATIONS:

4-1-1 COMPRESSEUR NACA:

Les données aérodynamiques (fig 4-1a,b,c) sont obtenues de façon approximative pour les faibles débits. les

coefficients $\frac{\partial \bar{w}}{\partial i}$, $\frac{\partial \beta_e}{\partial \beta_e}$ sont obtenus par la mesure des pentes des courbes des figures précédentes. De plus le nombre de mach et la masse volumique ne sont pas connus de façon précise.

4-1-1-1 APPARITION DU DECROCHAGE TOURNANT:

La comparaison des figures 4-2 (en décrochage) et 4-3 (à la limite du décrochage) montre comment est représentée l'apparition du décrochage tournant dans le plan de NYQUIST. le premier cas ($\phi = 0.766$) préfigure déjà bien l'évolution du système : modules plus grand que 1 pour une fréquence de resonance comprise dans le domaine $[0 - 1.1n\Omega, 0.8n\Omega]$, coefficients de surtension importants ($Q=2.06$), temps du transitoire élevé, par comparaison à celui de la traversée de la machine par l'écoulement, donc faible amortissement. la réponse est dans ce cas du type de celle représentée fig 3-12b.

4-1-2 COMPRESSEUR MONOETAGE C1:

La courbe caractéristique du compresseur (fig 4-4) est fournie par le constructeur. la présente methode permet de determiner les differents points d'instabilites. on obtiendra alors 2 courbes distinctes mais voisines l'une de l'autre; la similitude entre ces deux courbes limites est surprenante dans la mesure où l'une indique la naissance du pompage dans tout le circuit, et l'autre l'apparition d'un écoulement instable dans la machine.

4-1-3 COMPRESSEUR CM5:

Les instabilites dans compresseur multietages sont très sensibles à l'agencement de l'écoulement à l'interieur de la machine. Tant que les données de l'écoulement moyen non perturbé ne seront pas connues de façon précise, il ne sera pas possible de connaître les limites d'instabilites des multietages.

Il est présenté (fig 4-5), à titre indicatif, le champ du compresseur CM5, avec les caracteristiques experimentales, ainsi que le point d'instabilite au regime nominal.

4-2 ETUDE PARAMETRIQUE:

Les instabilites sont sensibles aux caracteristiques géométriques et aérodynamiques. l'objectif de ce paragraphe est d'analyser les influences respectives de chaque paramètre et d'en déduire des interpretations quant à la naissance des phenomenes.

4-2-1 PARAMETRES GEOMETRIQUES:

4-2-1-1 CORDE:

La methode des disques equivallents consiste à remplacer les grilles d'aubes par des surfaces infiniment minces A priori l'influence de la corde est négligée .en réalité ,l'étude de l'écoulement dans un canal ,défini par deux aubes consecutives ,reintroduit son effet.

L'effet résultant d'accélération des particules a tendance à stabiliser le système,reculant le point de déclenchement de l'instabilité (α_1 positif).

On vérifie q'une augmentation de la corde favirise la stabilite du système (fig 4-6) et atténue les perturbations stationnaires (fig 4-7).

L'étude sur le compresseur NACA a permis d'observer un effet remarquable sur le décrochage tournant .il semblerait que la corde joue un rôle sur la présence de ce phénomène par l'existence ou non d'une fréquence .il existe dans ce cas une valeur privilégiée ,pour laquelle les coefficients de surtensions sont élevés ,de même que les modules des perturbations correspondants aux fréquence de resonance (fig4-8 et 4-9).En s'éloignant de cette valeur en l'augmentant ou en la diminuant ,on atténue les risques de décrochage .par contre ,une diminution de la corde accroît les risques d'instabilités temporelles(α_1 positif) et inversement pour une augmentation.

4-2-1-2 DISTANCE INTERGRILLES:

4-2-1-2-1 INFLUENCE SUR LA STABILITE TEMPORELLE:

La courbe de la figure 4-10,représente pour un point de fonctionnement du compresseur C2,l'évolution du nombre d'instabilité (α_1 positifs) en fonction de la distance séparant le rotor du stator .Cette courbe montre que les espaces intergrilles se comportent comme des amortisseurs temporels .un accroissement de leurs volumes tend à reculer le point d'apparition d'un régime instable.Cet effet ,déjà mis en évidence par l'influence de la corde ,prouve que l'apparition d'un regime instable peut être évité par un accroissement des espaces intergrilles.

4-2-1-2-2 INFLUENCE SUR L'ORGANISATION D'UN RÉGIME
OSCILLATOIRE:

Les problèmes d'oscillation sont liés à des problèmes de résonance. Ces derniers dépendent surtout des dimensions du circuit. il est donc logique que les espaces intergrilles jouent un rôle important dans l'organisation d'un régime oscillatoire.

Pour les trois compresseurs présentant des espaces intergrilles, la variation de leur distances modifie profondément la forme des courbes dans le plan de 'NYQUIST' et ce quel que soit le point de fonctionnement. Les fig 4-11 A et B décrivent la réponse du compresseur CM5 avec (distance moyenne 5mm) ou sans espaces intergrilles. Loin du pompage (fig 4-11 b) la comparaison des deux courbes indique comment la présence de volumes entre les grilles d'aubes peut générer une boucle, pouvant être à l'origine d'une fréquence de résonance et par conséquent du pompage ou du décrochage. près de la ligne de pompage (fig 4-11a) l'écart est beaucoup plus net, la forme des 2 courbes est totalement différente, la présence des espaces intergrilles étant, dans ce cas, beaucoup plus pénalisante. les fig 4-12 (pour v_z) et 4-13 (pour v_θ) représentent la réponse dans le plan de nyquist du compresseur C2. elles illustrent comment l'accroissement progressif de la distance intergrille conduit à générer ou à amplifier certaines boucles au détriment des autres. pour une très faible distance, les courbes des fig 4-12a et 4-13a font apparaître 8 boucles (A, B, ... H) correspondant chacun à l'amplification d'une harmonique. dans ce cas les 5ème et 6ème sont les plus fortement amplifiées, le module maximum restant faible (inférieur à 1).

une distance intergrille un peu plus importante (fig 4-12b et 4-13b) favorise le 4ème harmonique tout en amplifiant les 3 premiers. pour le point de fonctionnement considéré, à une distance de 0.03m (fig 4-12c et 4-13c) correspond une amplification pratiquement équivalente des 2ème, 3ème et 4ème harmonique. ce fait indique comment, pour certains compresseur, une très légère modification du point de fonctionnement peut entraîner un brusque changement du nombre des cellules décrochées, plusieurs harmoniques pouvant être amplifiées parallèlement. pour les grandes distances les modules deviennent plus importants. une analyse des différents critères

(f_r , Q , bande passante) a été effectuée sur le compresseur C2. La fig 4-14 montre, pour les faibles distances intergrille l'existence de fréquence de résonance très différentes pour les perturbations. Pour les distances plus importantes, ces fréquences convergent vers une valeur unique. Cette valeur décroît avec la distance intergrille. Cette évolution simultanée des 2 critères conduit à l'organisation probable d'un régime de décrochage tournant à partir d'une certaine distance (0.05m); en effet l'augmentation de l'espace intergrille fait converger les fréquences de résonance dans le domaine $[0.1n\Omega, 0.8n\Omega]$ ET accroît les coefficients de surtension, deux conditions nécessaires à l'obtention du décrochage tournant. En conclusion les faibles distances intergrilles favorisent l'apparition d'un régime instable et les grandes distances tendent à organiser les instabilités en décrochage tournant. (fig 4-15 et 4-16)

4-2-1-2-3 REPONSES AUX DISTORSIONS INSTATIONNAIRES

OU STATIONNAIRES:

Les résultats des courbes précédemment décrites indiquent que les grandes distances intergrilles favorisent l'amplification des distorsions instationnaires (Q élevés, modules importants). Par contre elles provoquent aussi un rétrécissement de la bande passante.

Une étude comparative a été menée pour des valeurs de la distance séparant le rotor du stator du dernier étage. Les distorsions sont plus atténuées par les grandes distances intergrilles.

Les fig 4-17 décrivent l'évolution des perturbations dans le dernier étage pour un point de fonctionnement éloigné du pompage. Les perturbations de la pression totale et de la vitesse circonférentielle sont peu différentes à l'entrée du rotor (4-17 a et b - amont roue 5). Par contre l'amplitude de la perturbation de la vitesse axiale est plus élevée pour la petite distance et le restera jusqu'à la sortie du compresseur (fig 4-17 g et h). A la sortie de la roue (fig 4-17 c et d - aval roue 5) la perturbation de pression totale est plus amortie par la grande distance, l'écart ne variant pratiquement plus par la suite. On voit sur ces courbes que les espaces intergrilles ont une influence sur la forme des perturbations suivant la circonférence (θ). La forme du créneau est modifiée.

l'évolution de la moyenne quadratique des perturbations de v_e à travers tous les étages, montre que les perturbations sont plus fortes dans le cas de la petite distance intergrille et dans tout le compresseur.

Cette analyse montre que, dans certaines configurations, l'accroissement d'une distance intergrille peut avoir l'effet inverse de celui habituellement observé. ce fait que ces résultats de cette étude limitative ne sont pas des règles absolues, vue la diversité des types de compresseurs qui conduit à des réponses très différentes. en résumé les grandeurs géométriques peuvent être responsables de l'organisation d'un régime oscillatoire, mais inversement elles peuvent en repousser le point de déclenchement. il peut être judicieux de jouer sur le couple corde-distance intergrille soit pour repousser le point d'instabilité soit pour supprimer la possibilité d'apparition du décrochage.

4-2-2 PARAMETRES AERODYNAMIQUES:

Les principaux éléments représentatifs de l'écoulement à travers les grilles d'aubes s'expriment sous forme variationnelle:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial i}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial M}, \frac{\partial \beta_s}{\partial \beta_e}$$

pour un point de fonctionnement donné, ils indiquent d'une part les propriétés des profils d'aubages, et d'autre part la position du point de fonctionnement sur l'isovitesse. faire varier ces coefficients revient à évaluer la réaction du compresseur en fonction des 2 caractéristiques pré-citées. les influences des paramètres respectifs sont illustrées par des courbes à partir du compresseur NACA et restent valables sur les autres.

4-2-2-1- STABILITE TEMPORELLE:

L'étude de la stabilité temporelle permet de déterminer le point d'apparition soit du décrochage tournant soit du pompage soit d'un niveau de turbulence. ce paramètre est essentiel puisqu'il détermine le domaine de fonctionnement sain du compresseur trois coefficients $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial i}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial M}, \frac{\partial \beta_s}{\partial \beta_e}$ influencent la stabilité du système.

le coefficient $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial i}$ est l'élément majeur qui conditionne

L'apparition du régime instable (fig 4-18) sa valeur élevée (5 à 10 rds⁻¹) comparativement aux autres coefficients (0.5 à 2) explique la prédominance de ce terme pour chaque compresseur et pour chaque isovitesse, une valeur limite élevée est nécessaire pour que le système devienne instable.

L'accroissement de coefficient $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial M}$ stabilise l'écoulement

. l'évolution présentée dans le cas du compresseur NACA (fig 4-19) montre que pour une valeur négative de ce coefficient conduit à la destabilisation de l'écoulement.

le coefficient $\frac{\partial \beta_s}{\partial \beta_e}$ peut déplacer le point d'instabilité

. la fig 4-20 montre qu'une augmentation de ce coefficient stabilise le système.

Enfin, un coefficient de pertes $\bar{\omega}$ élevé tend à stabiliser le système. son influence reste cependant très faible.

4-2-2 PULSATION DE RESONANCE:

Cette pulsation peut correspondre soit à la pulsation caractéristique du pompage soit à la vitesse de rotation des cellules en décrochage. l'existence d'une telle pulsation dans le domaine caractéristique des 2 régimes détermine l'apparition de l'un d'eux quand α_j devient positif et si les modules sont importants à ω_r .

la présence de cette pulsation est fortement influencée par l'ensemble des coefficients aérodynamiques on donne pour un point de fonctionnement, l'évolution des modules maximum des harmoniques correspondants aux fonctions G_n pour

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial i} \text{ (fig 4-21) }, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial M} \text{ (fig 4-23) }, \frac{\partial \beta_s}{\partial \beta_e} \text{ (fig 4-22)}$$

et $\bar{\omega}$ (fig 4-23) cette étude montre que l'organisation en décrochage tournant n'est pas liée directement au décollement de la couche limite

(correspondant à $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial i}$, $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial M}$, $\frac{\partial \beta_s}{\partial \beta_e}$) mais dépend de l'agencement

général de l'écoulement, notamment de $\frac{\partial \beta_s}{\partial \beta_e}$

4-2-2-3 NOMBRES DE CELLULES DECROCHEES:

Le nombre de cellules en régime de décrochage tournant est déterminé par l'harmonique qui présente l'amplification maximum.

la fig 4-25 montre qu'à partir du point d'apparition du décrochage

tournant, le nombre de cellules croît linéairement avec $\frac{\partial \omega}{\partial i}$.
l'augmentation de $\frac{\partial \omega}{\partial \mu H}$ tend à restreindre le nombre de cellules
(fig 4-26) de même pour $\frac{\partial \beta S}{\partial \beta e}$ (FIG 4-27).

4-2-3 SYNTHESE:

L'effet de chaque coefficient sur l'organisation d'un régime dépend de l'ensemble des éléments représentatifs de l'écoulement. chaque coefficient est un catalyseur nécessaire à l'obtention d'un régime oscillatoire. chacun donne une condition nécessaire mais non suffisante d'apparition d'un tel régime. c'est en sens que l'étude paramétrique doit être considérée. les variations indépendantes de chaque paramètre sont présentes pour des points de fonctionnement où tous les éléments nécessaires à un changement de régime sont déjà réunis. ce choix a permis de mettre en relief l'influence séparée des différents paramètres.

CONCLUSION GENERALE:

La présente étude constitue une approche des instabilités de fonctionnement des compresseurs, approche qui est susceptible d'être améliorée.

L'assimilation du compresseur à un système asservi en boucle ouverte constitue une vision nouvelle du problème. Le tracé des images par la transformée de LAPLACE décrit l'état du système au point considéré et son évolution la plus probable. L'écoulement dans la machine ne subit aucune modification tant que les conditions nécessaires à l'organisation d'un régime oscillatoire ne sont pas réunis.

Cette étude a pu mettre en évidence plusieurs éléments essentiels :

*le déclenchement d'un régime oscillatoire dépend des facteurs

aérodynamiques surtout de coefficients $\frac{\partial \omega}{\partial i}$.

*à partir du point de déclenchement de l'instabilité, l'apparition d'un régime oscillatoire dépend des facteurs géométriques locaux pour le décrochage (corde,....) ou globaux pour le pompage (géométrie du circuit récepteur).

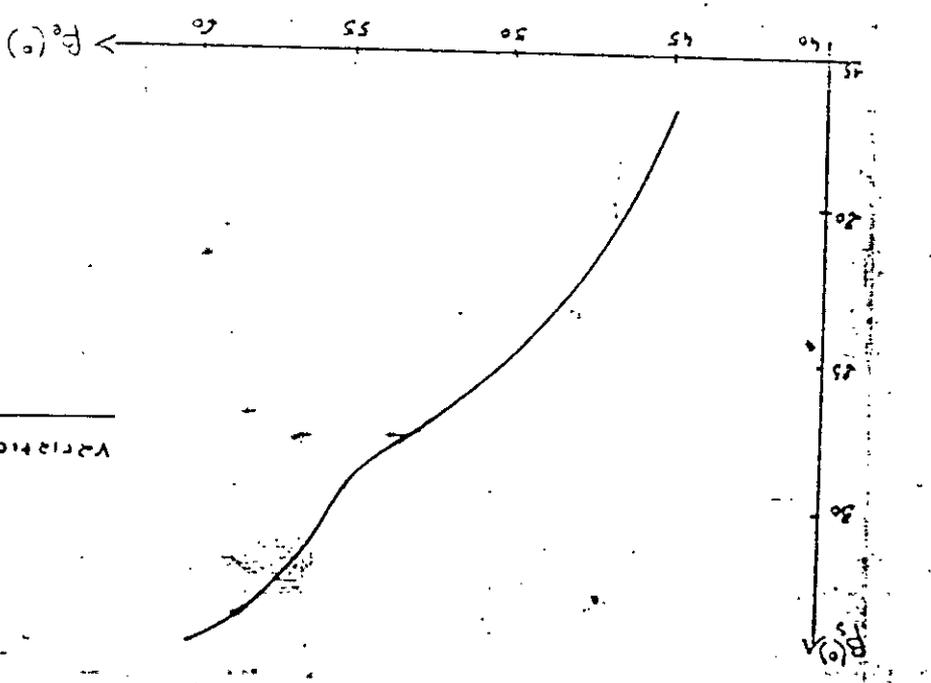
Le grand nombre de critères utilisés présente un handicap pour l'interprétation des graphes, néanmoins ce fait traduit le vaste domaine des instabilités.

Enfin, nous estimons que la mise en oeuvre numérique de la présente méthode est très abordable, cependant les besoins des données plus ou moins précises de l'écoulement moyen dans les turbomachines, ainsi que les données aérodynamiques se sont fait sentir, et par là, elles ont constitué une véritable source de discordance dans les résultats numérique même si, l'approche par le calcul classique des compresseurs a été entreprise minutieusement. cela d'une part, et d'autre part, la lourdeur de la théorie et l'incapacité de vérifications de l'exactitude de certaines expressions mathématiques rend la tâche un peu difficile dans la

mesure ou le doute sur leurs validite y est toujours présent. de plus la formulation étant claire, des details, clés de la programmation ont été négligés.

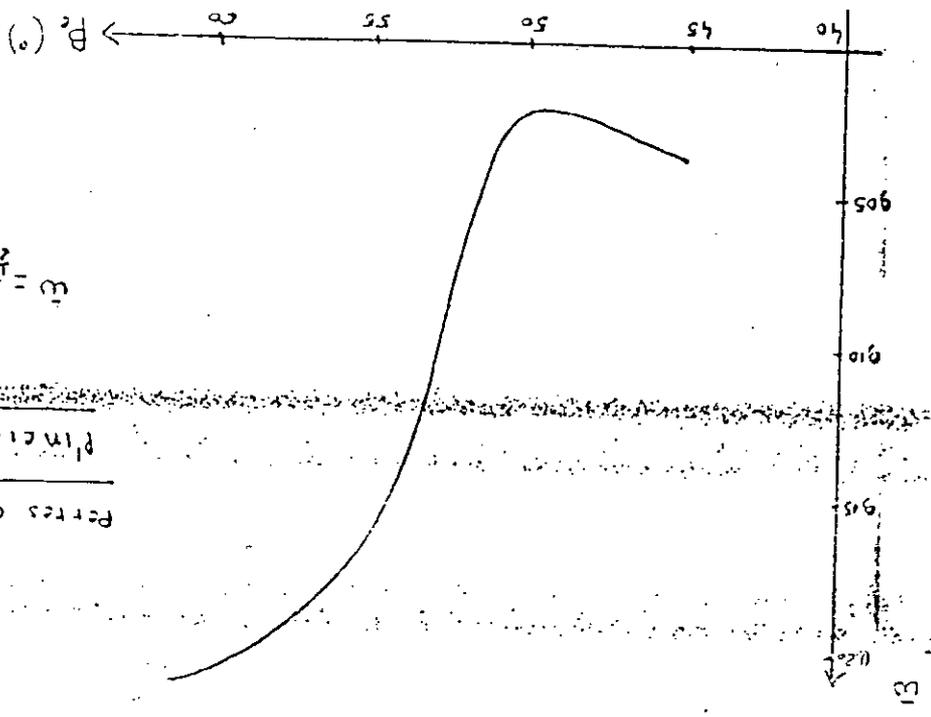
A la fin, nous sommes très reconnaissant de la puissance mathématique et de la physique de la présente méthode, et de son extension à la notion des systèmes asservis, constituant par là un edifice monumental dans le concept des turbomachines.

FIGURES



Variations angulaires

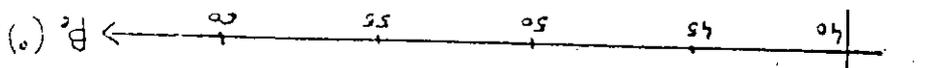
H



Perles en fonction de l'incidence

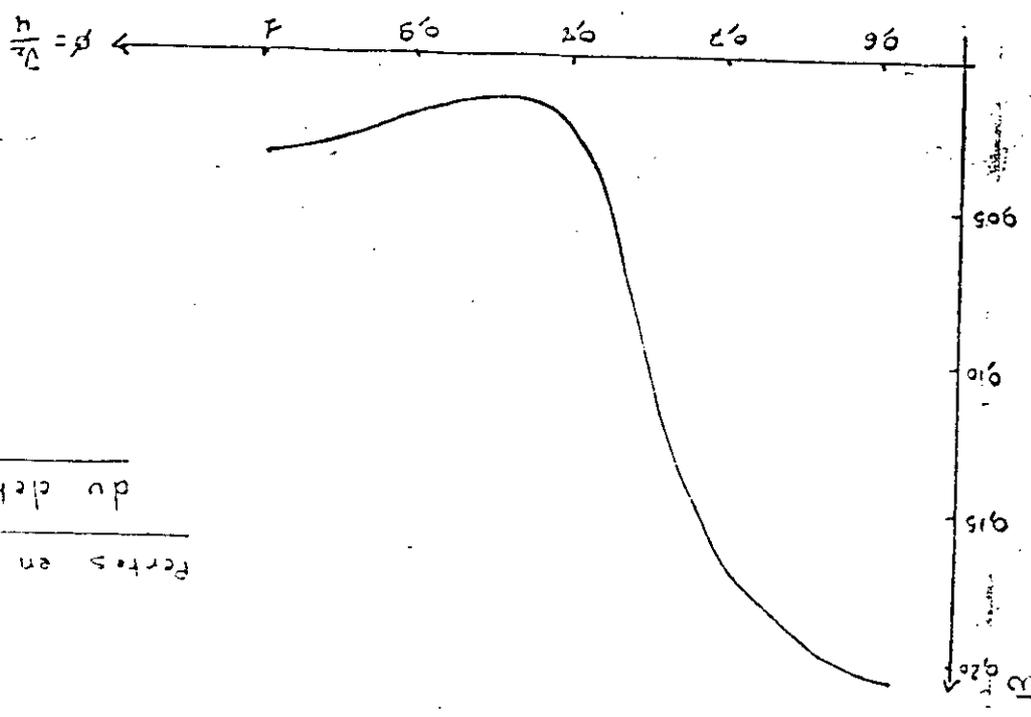
B

$$\omega = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$



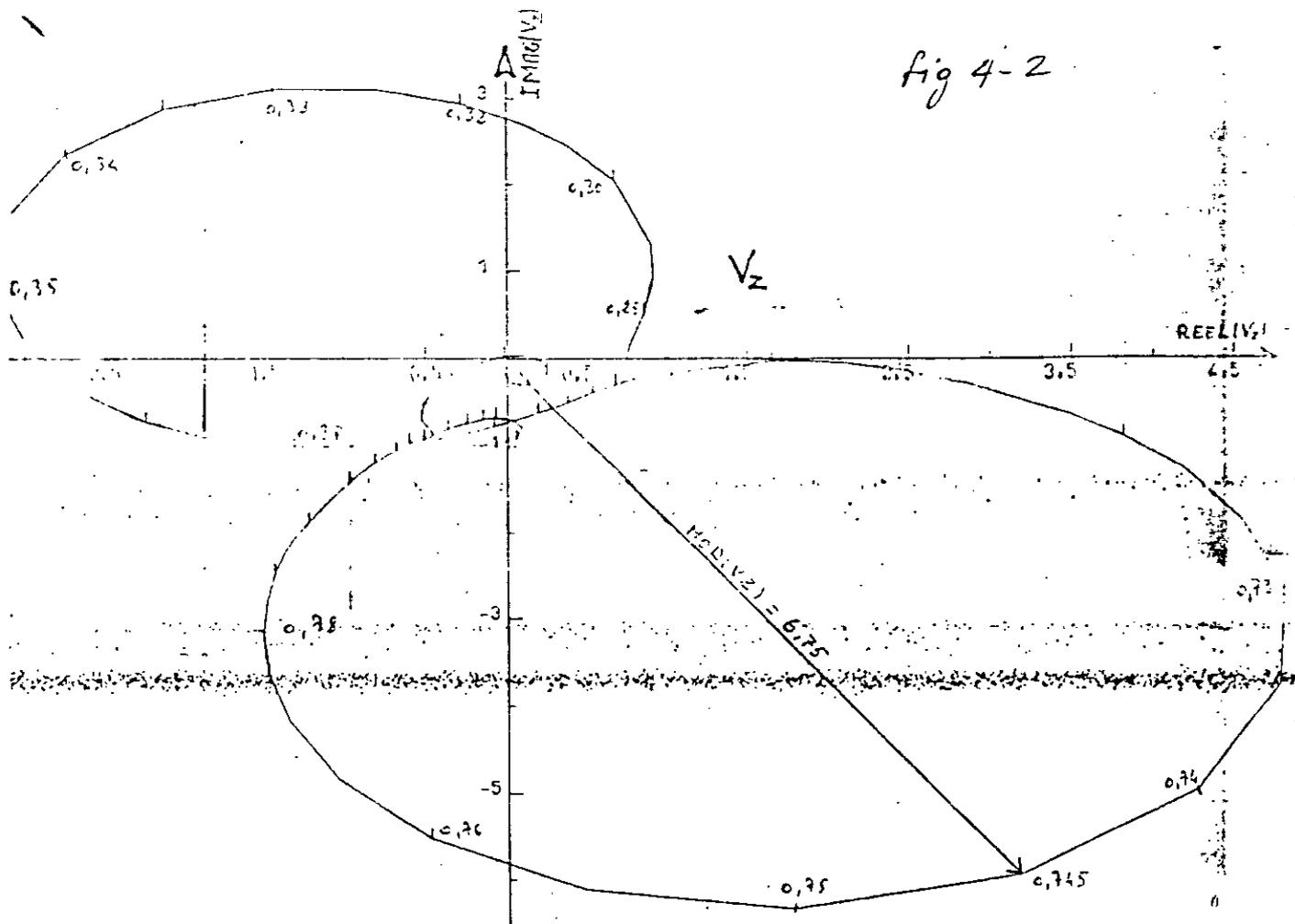
Perles en fonction du débit

C



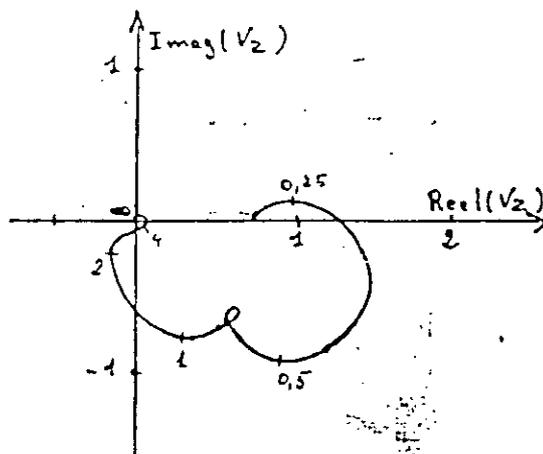
$$\frac{h}{\sqrt{L}} = \beta \leftarrow$$

fig 4-2



REPONSE EN FREQUENCE
 $\phi = 0,766$ - Cas INSTABLE

fig. 4-3



$\omega_{coupure} = 2,2$
 $Q = 2,06$
 $T_{transitoire} = 0,025$

REPONSE EN FREQUENCE
 $\phi = 0,786$ - Cas STABLE.

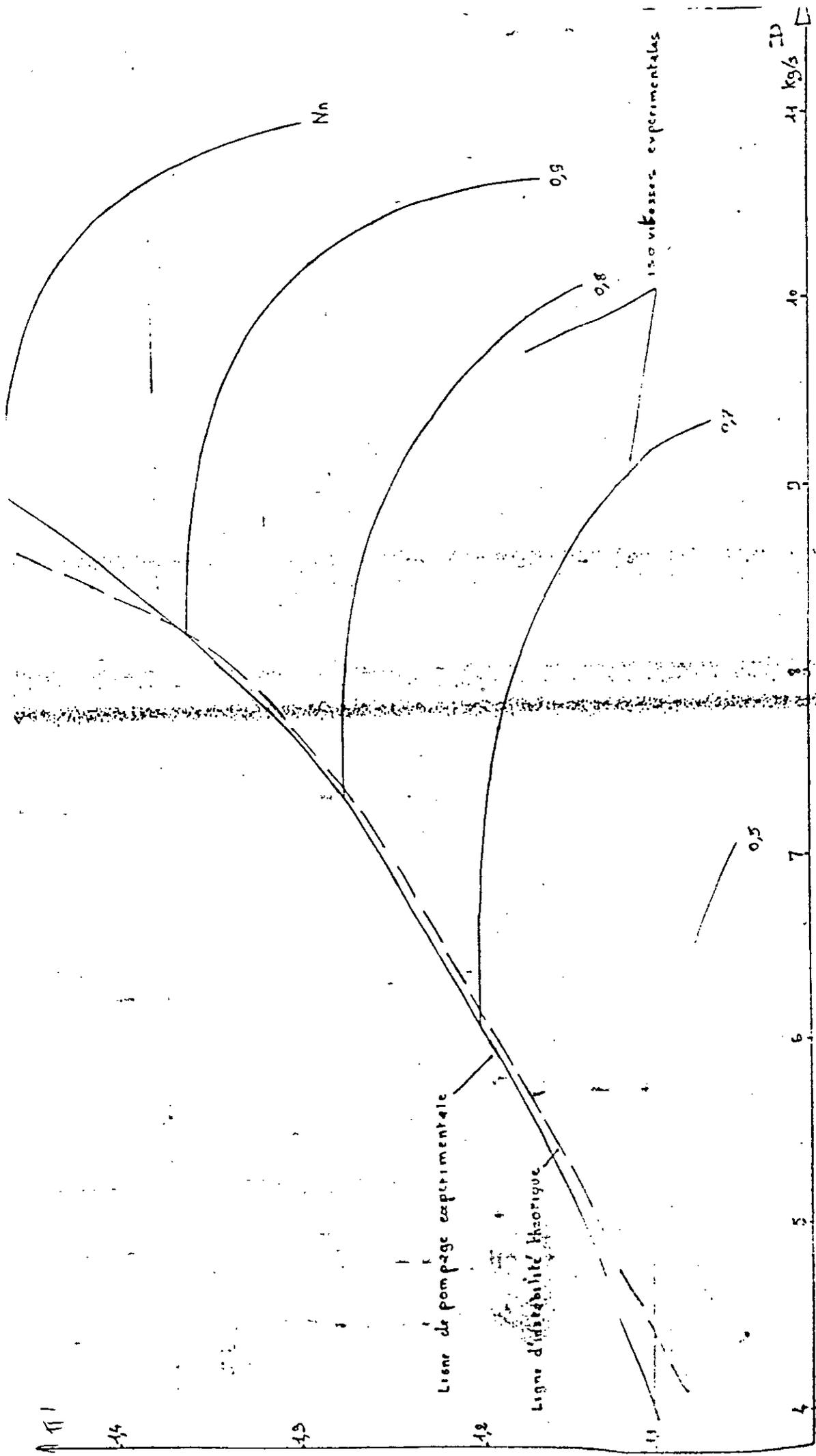


Fig-4-4 ~~CHAMP~~ - CHAMP DES CARACTERISTIQUES

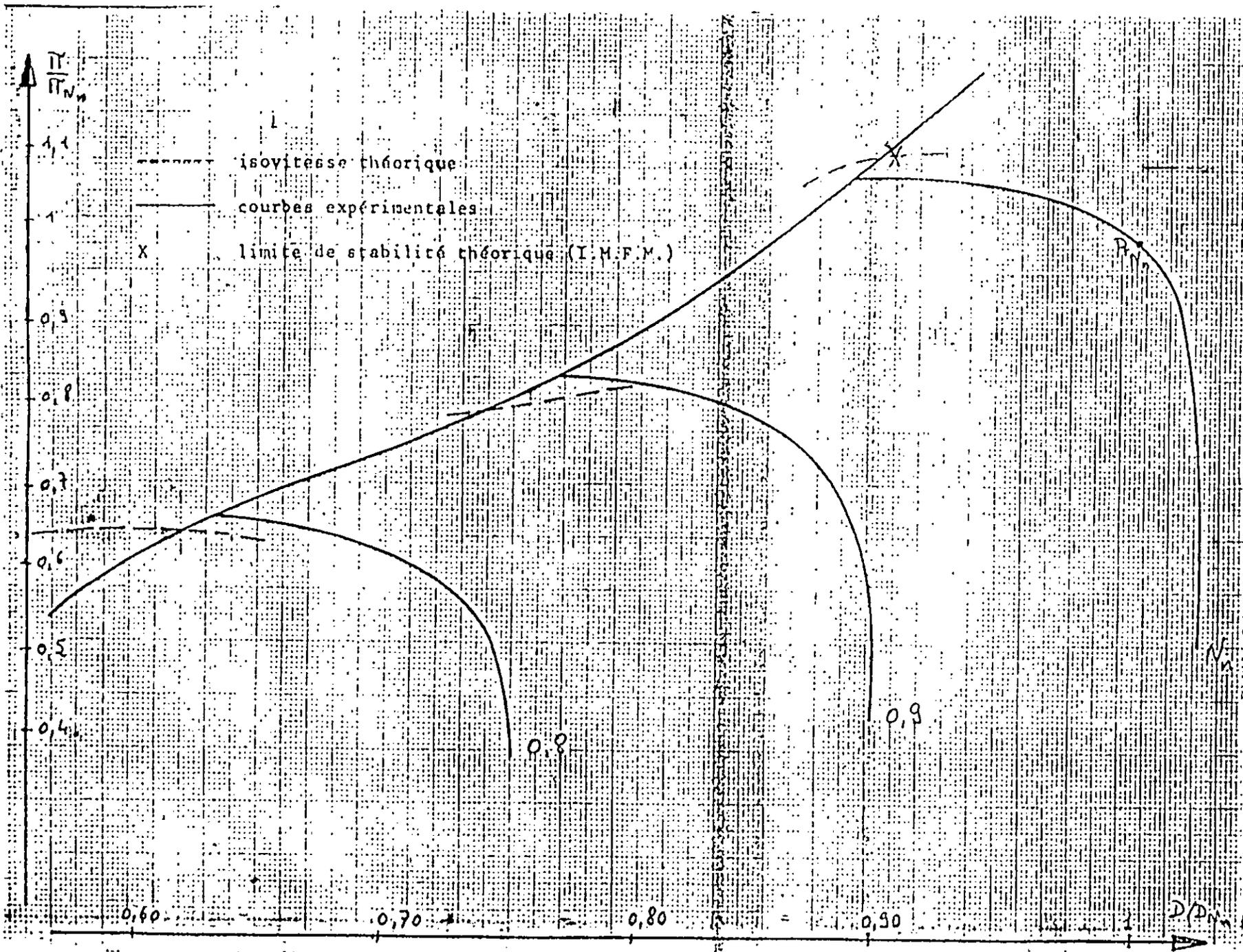
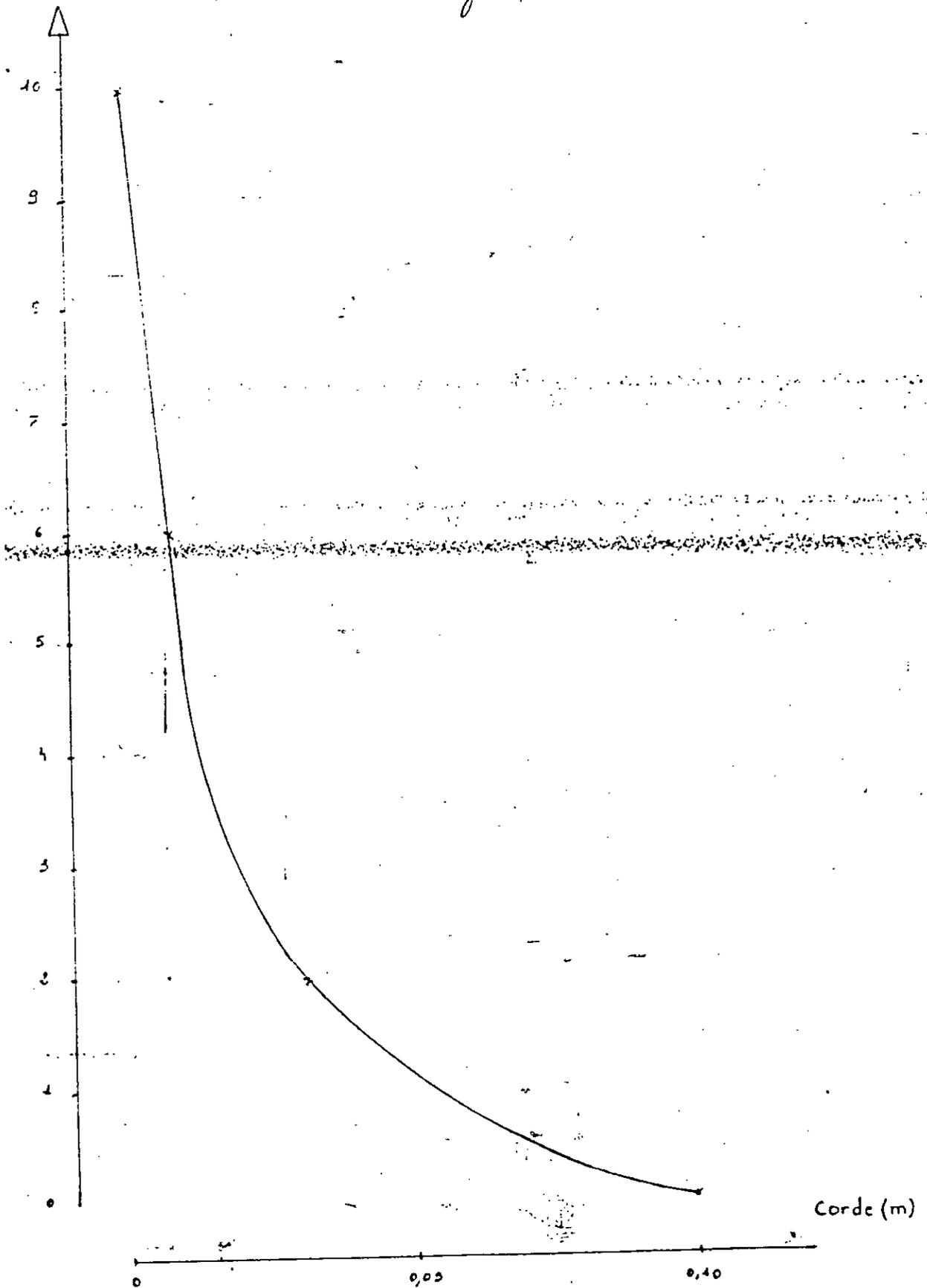


Fig-4-5 CM5 - CHAMP DES CARACTERISTIQUES

NACA.

fig. 4-6

nbre d'instabilités



EVOLUTION DE LA STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT
EN FONCTION DE LA CORDE.

NACA

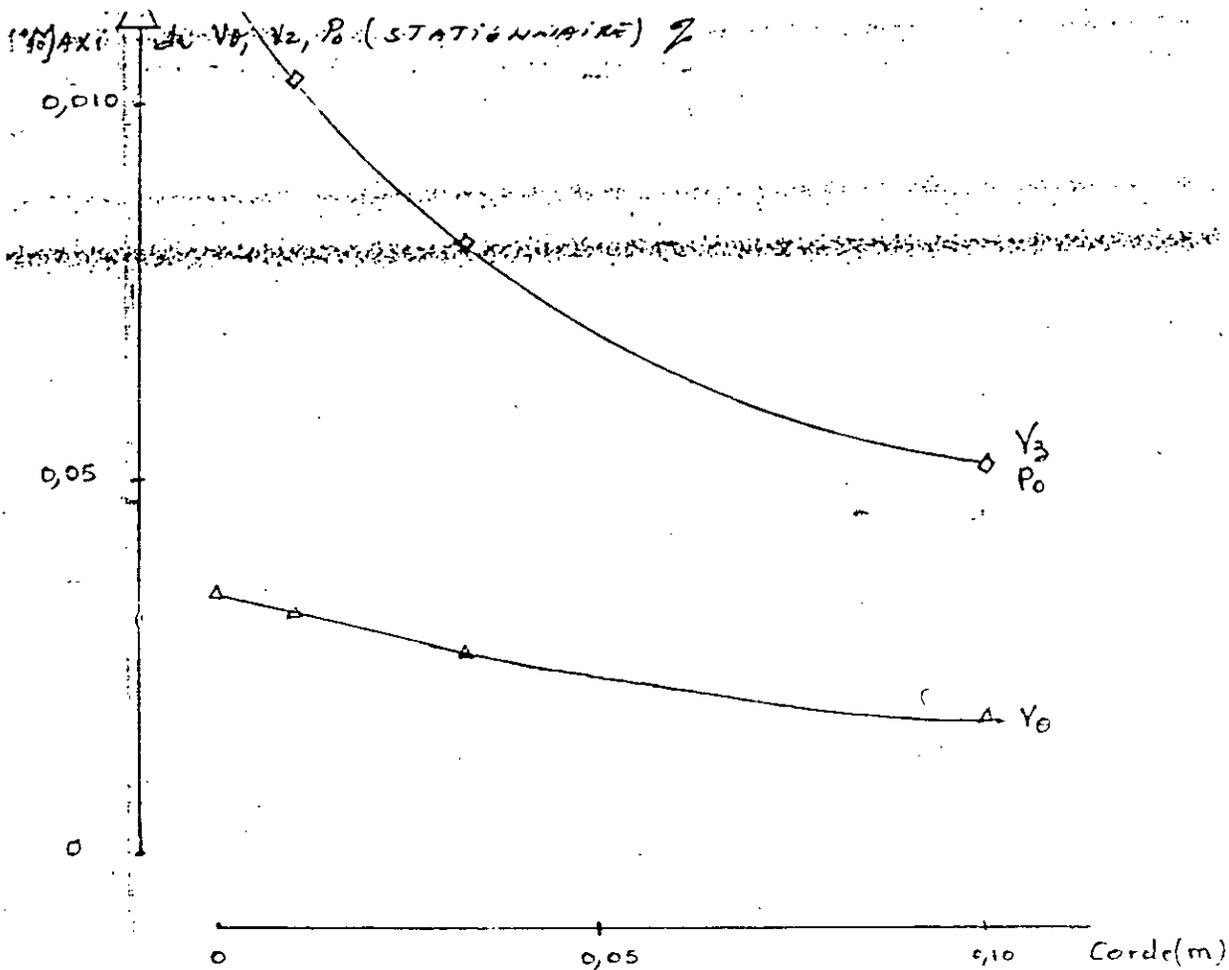


Fig-4-7 EVOLUTION DES PERTURBATIONS EN FONCTION DE LA CORDE.

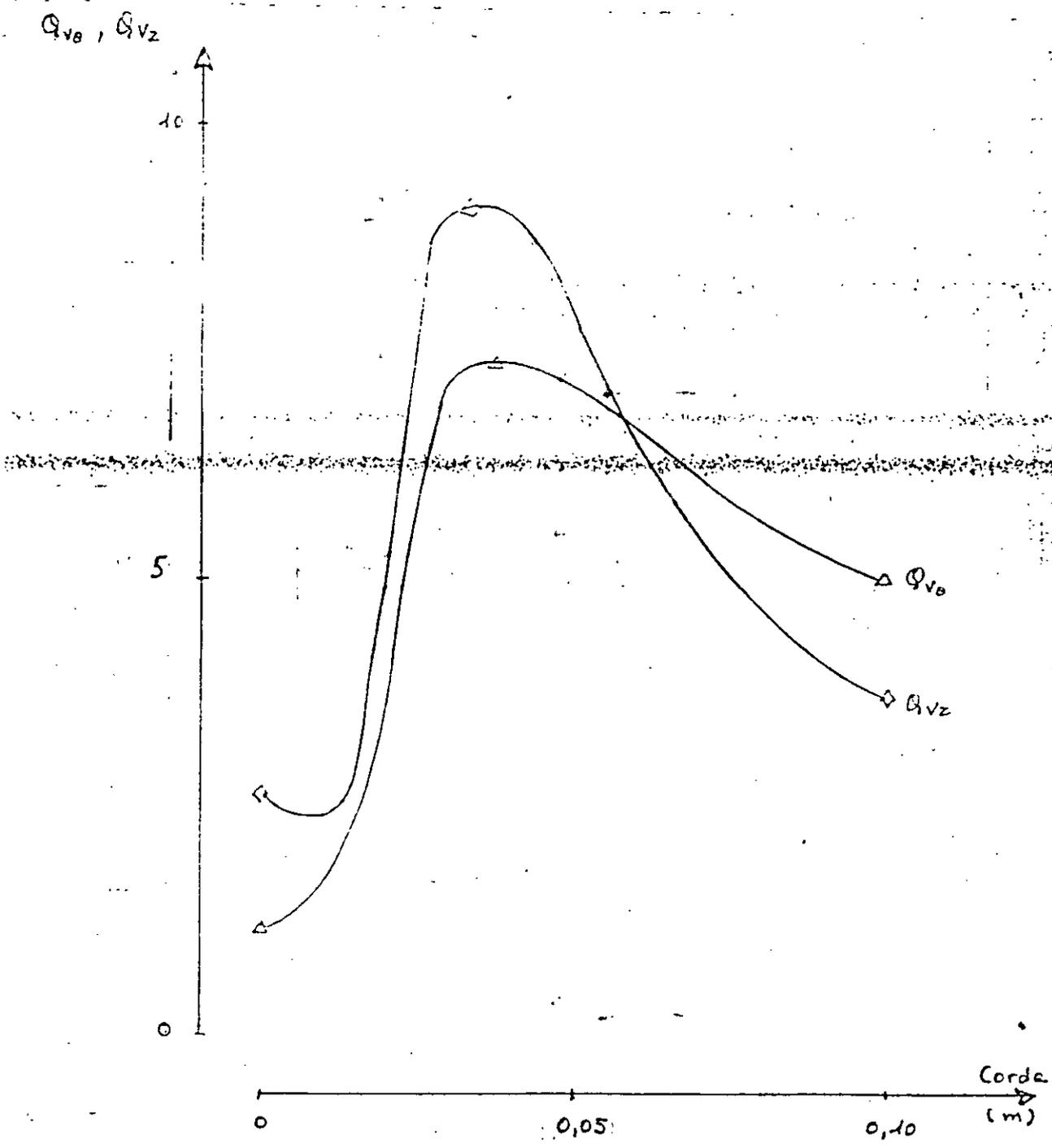


fig-4-8 EVOLUTION DES COEFFICIENTS DE SURTENSION EN FONCTION DE LA CORDE.

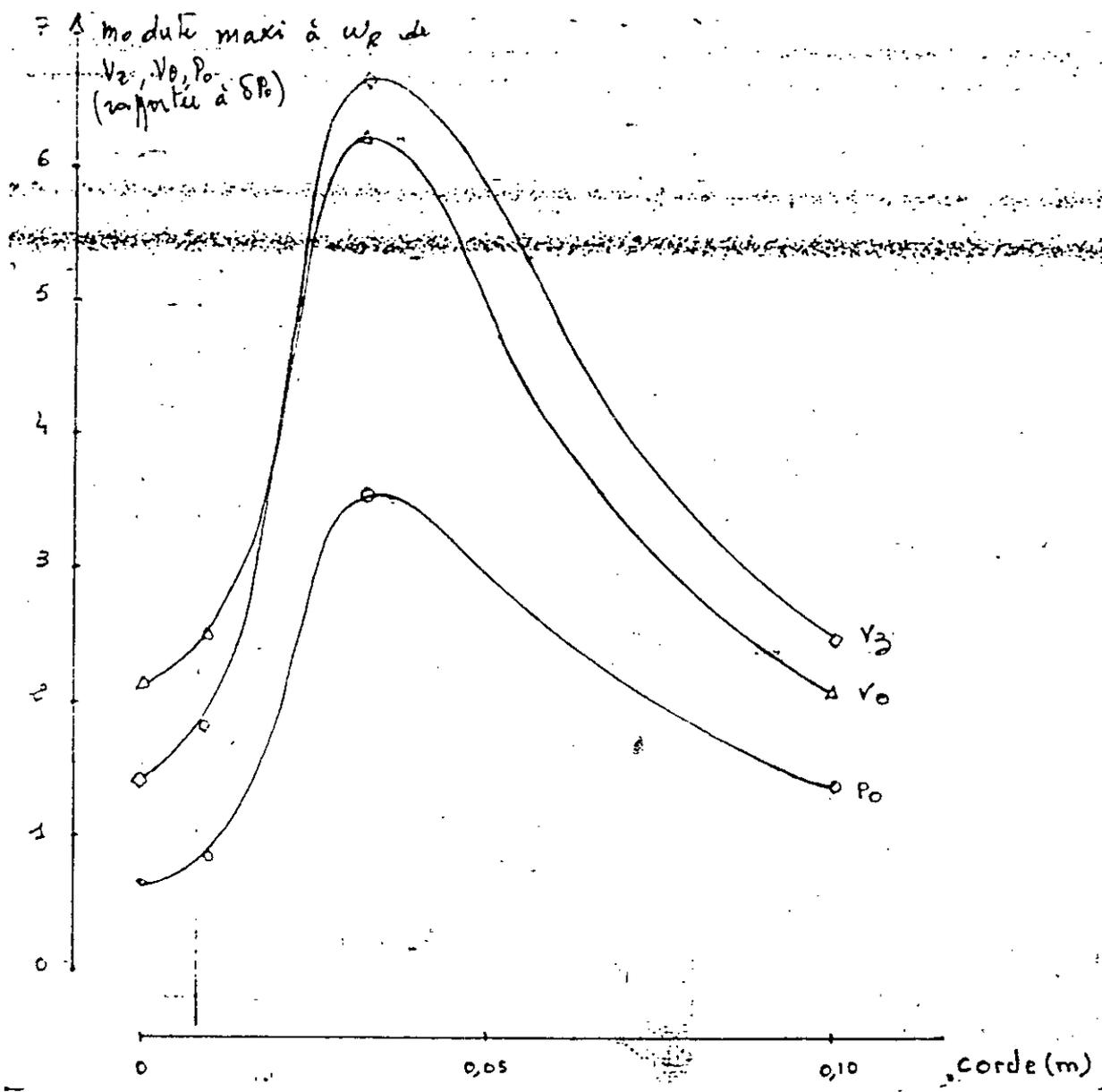


Fig. 4-9 AMPLITUDE DES PERTURBATIONS à w_R
 EN FONCTION DE LA CORDE.

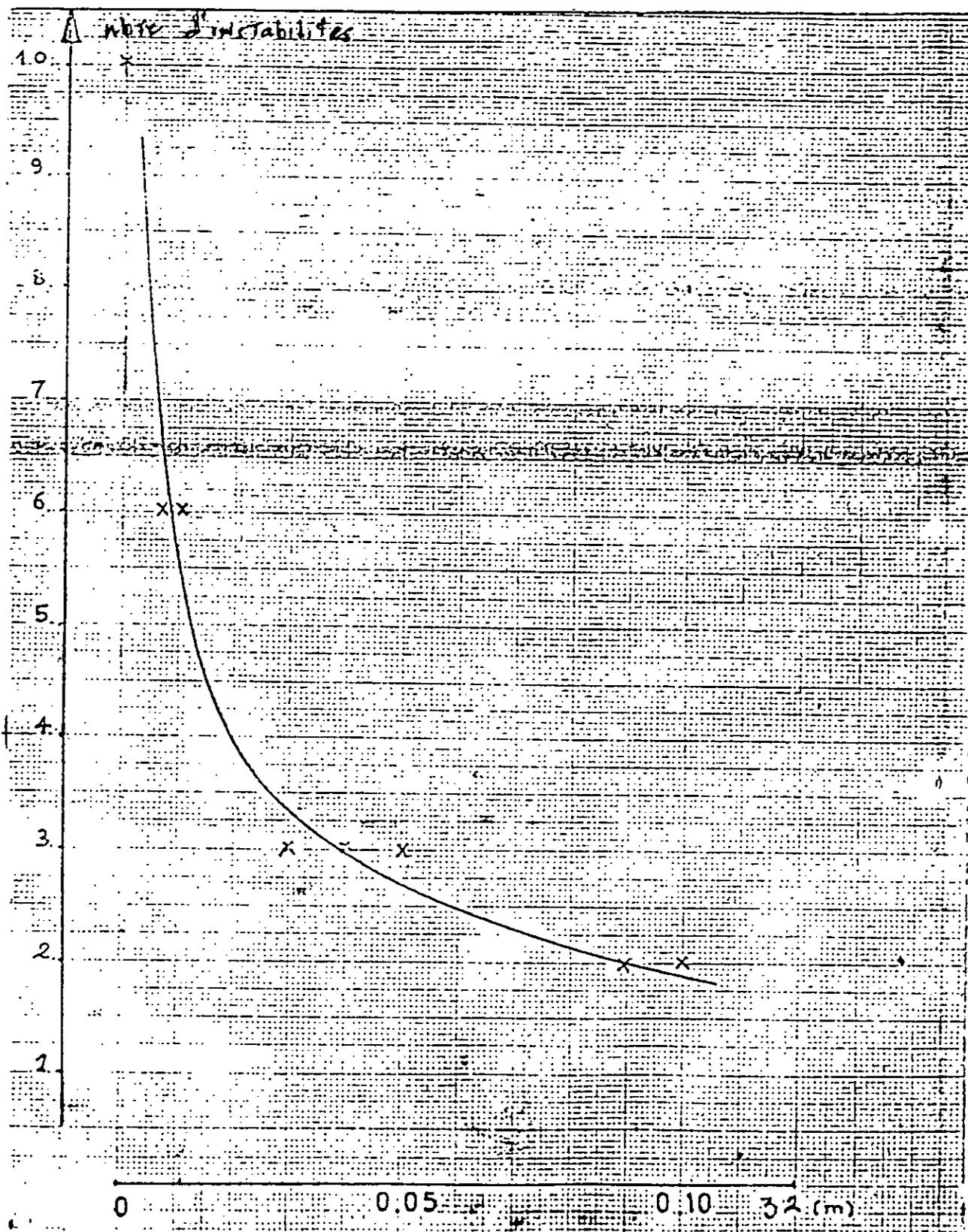


fig-4-10 NBRE d'INSTABILITÉS EN FONCTION DE LA DISTANCE INTER GRILLE.

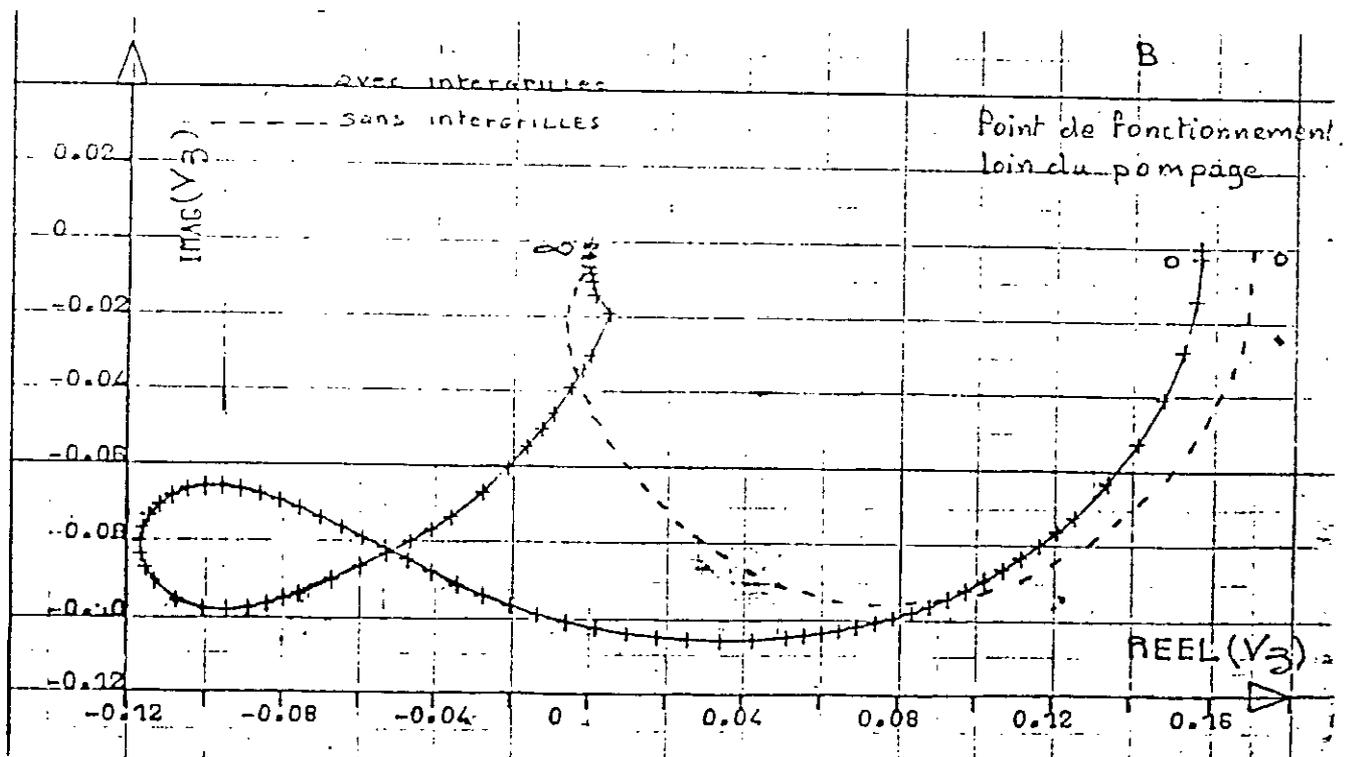
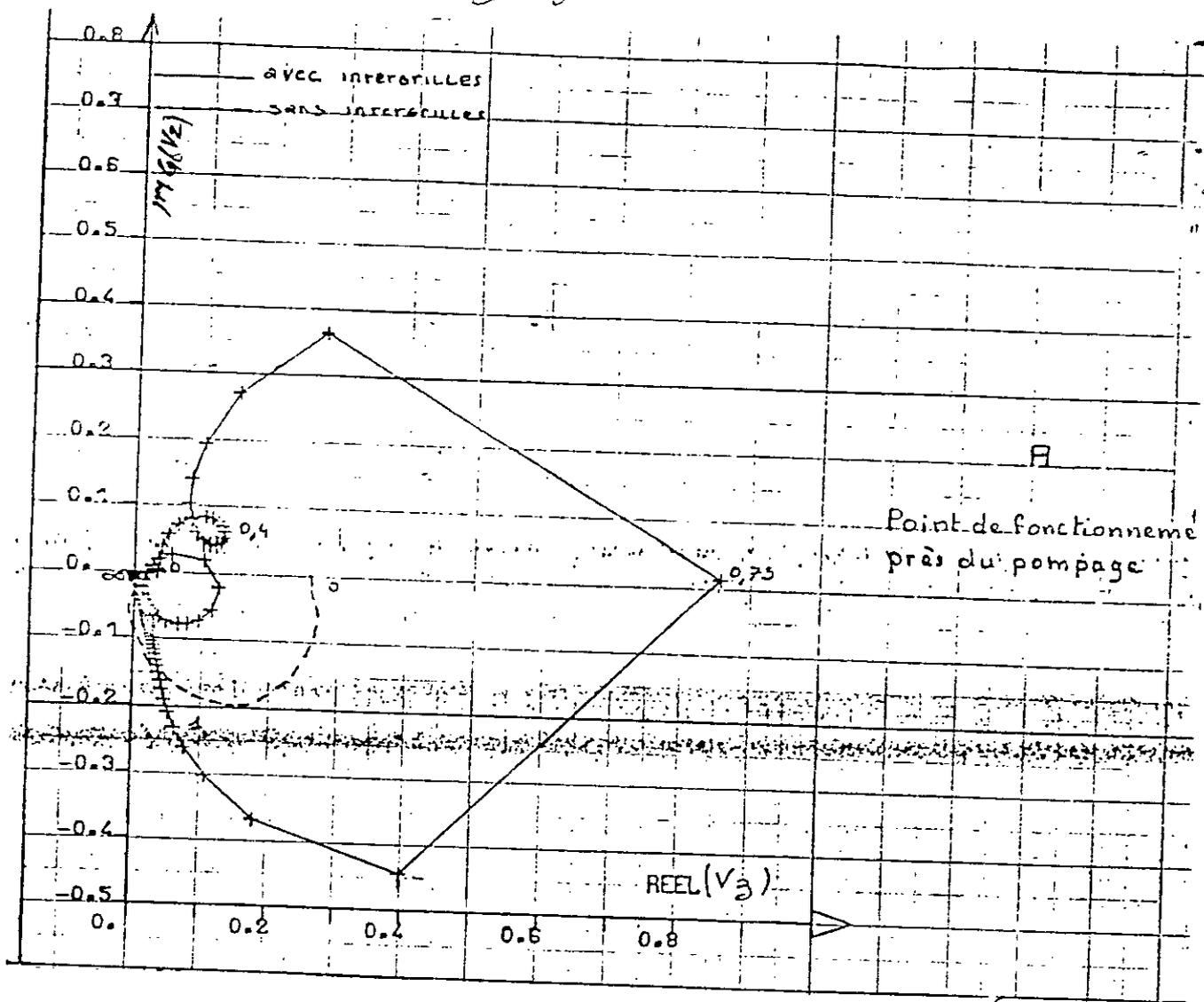
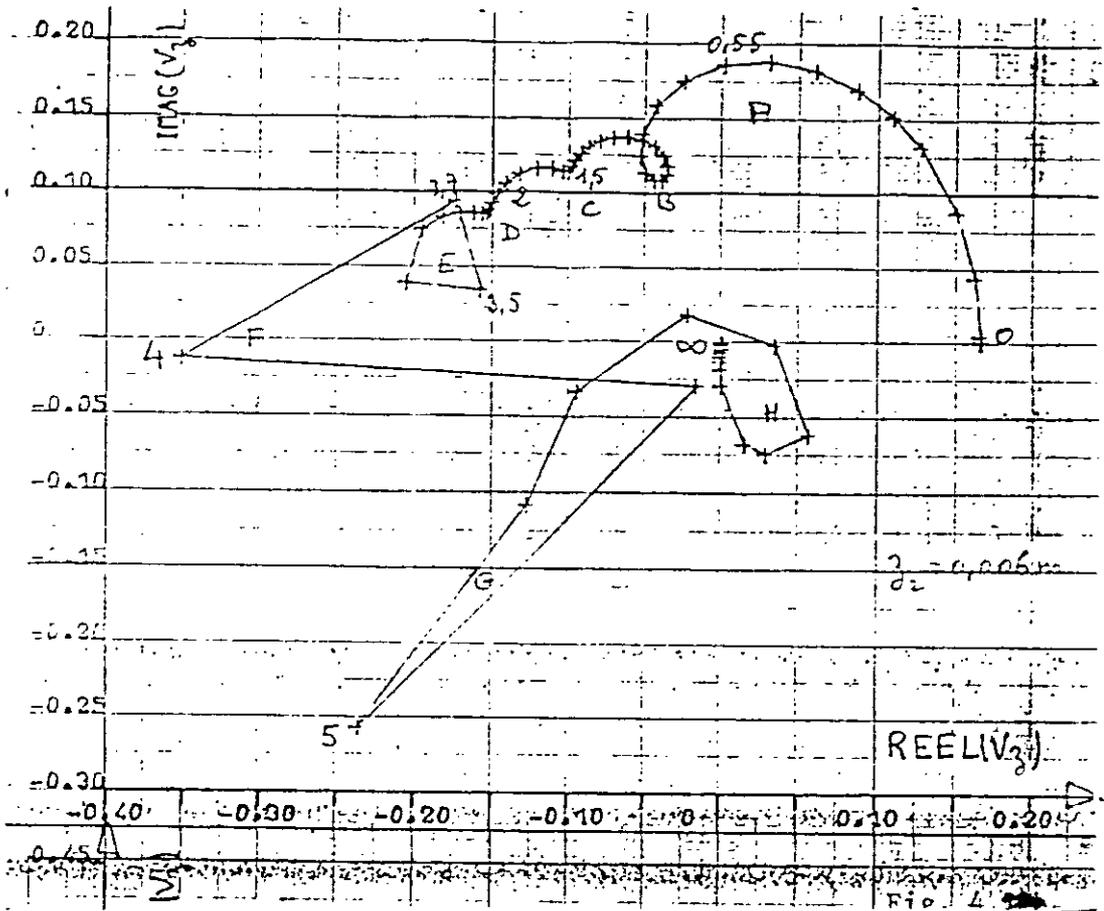
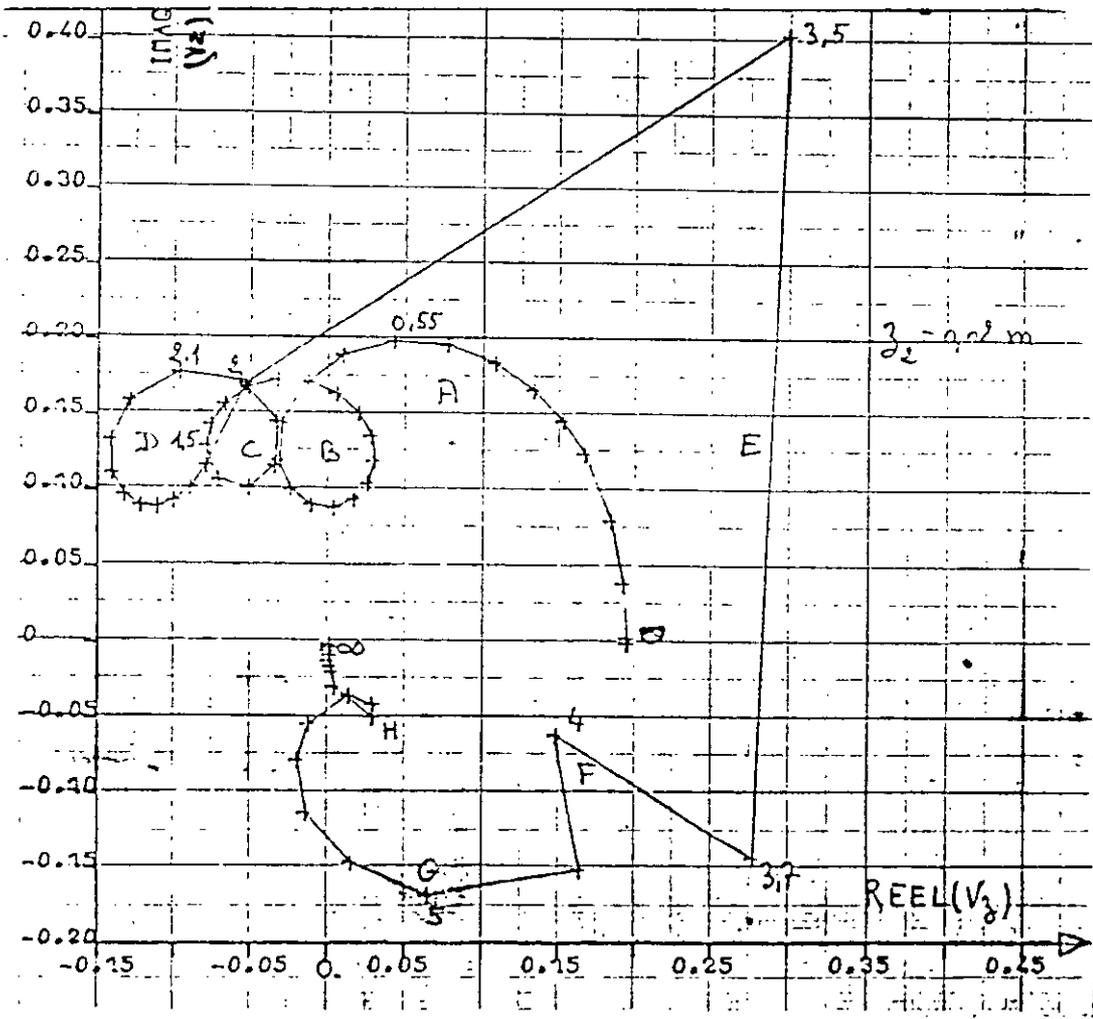


fig 4-11. REPONSES FM FONCTION DES ESPACES INTERGRILLES.

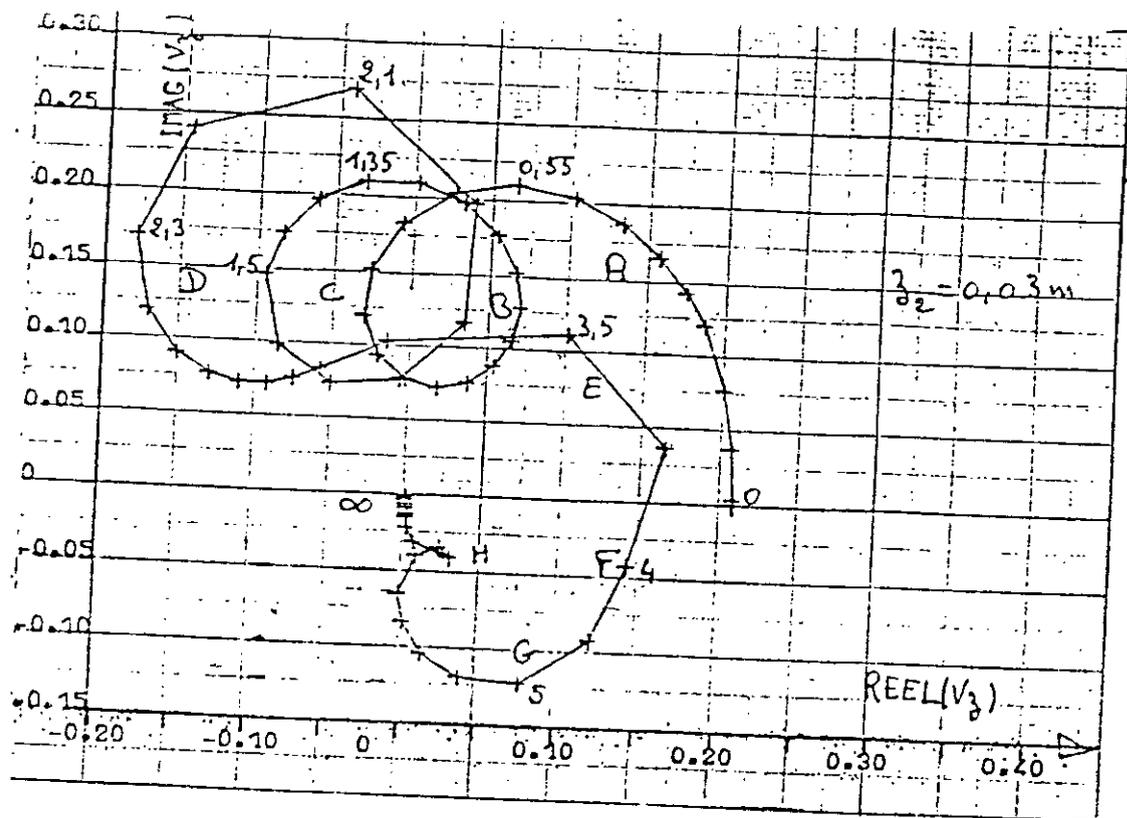


(A)

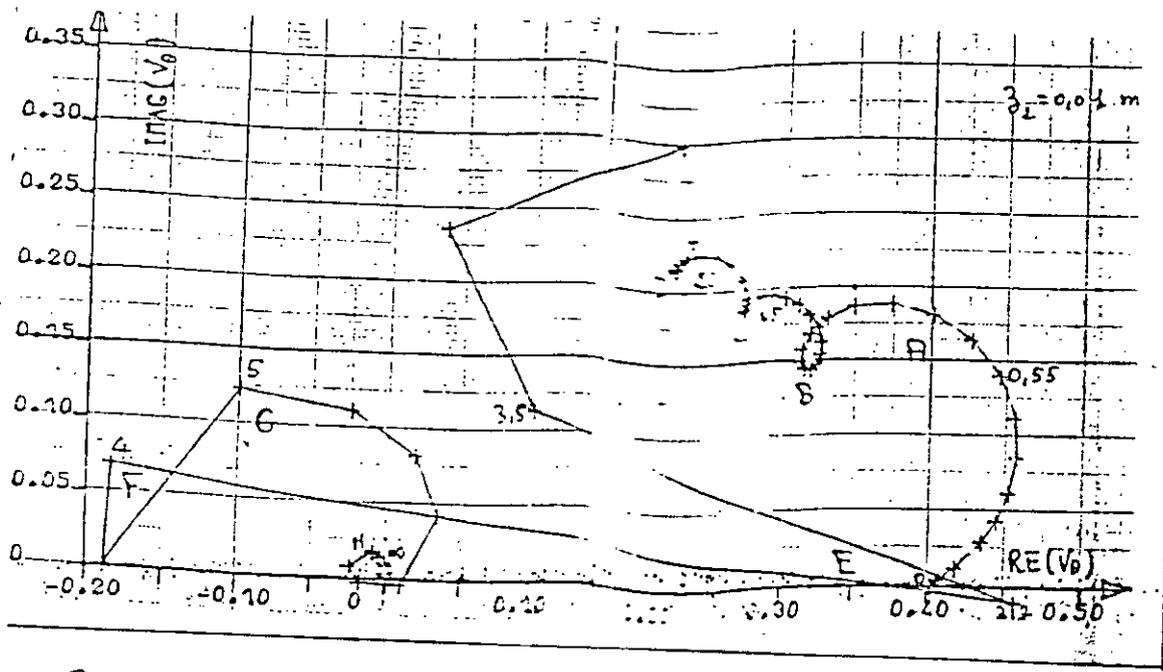


(B)

Fig-4-12 RE PONSE pour différentes distances INTERGRILLES.

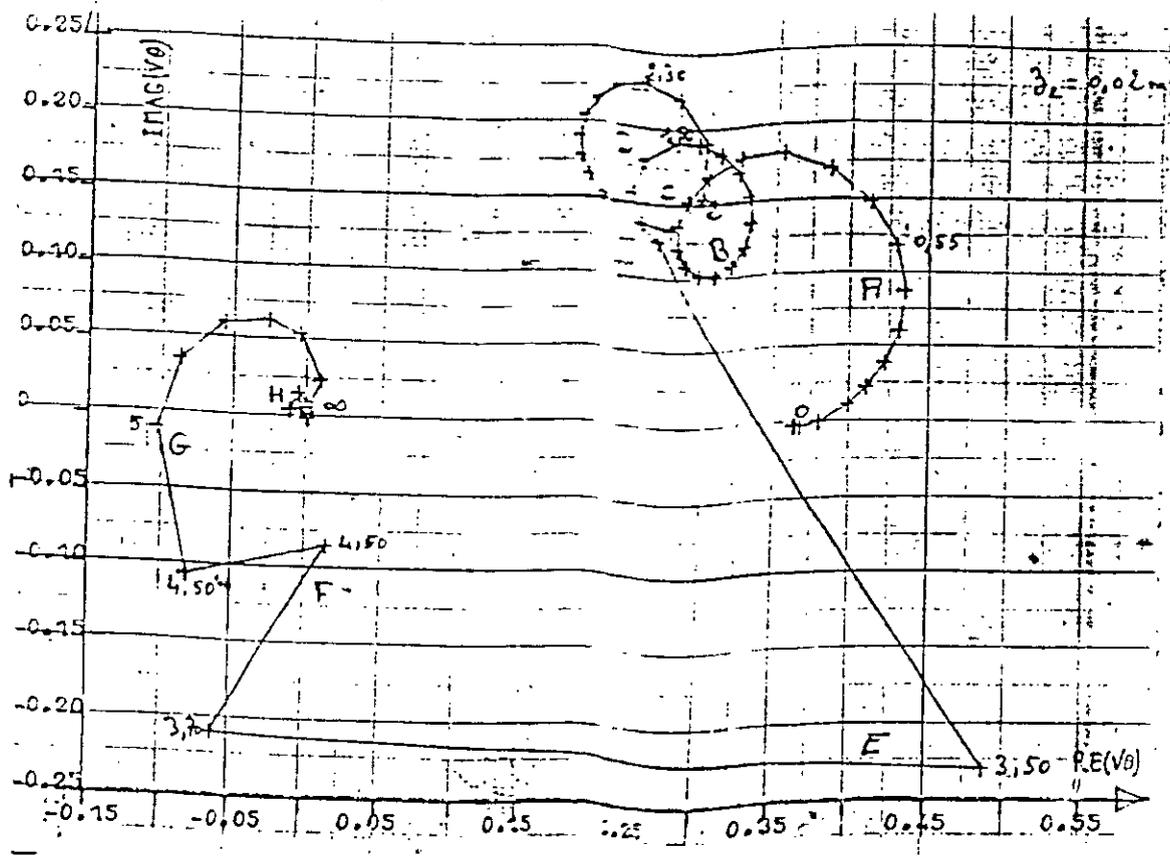


(c)

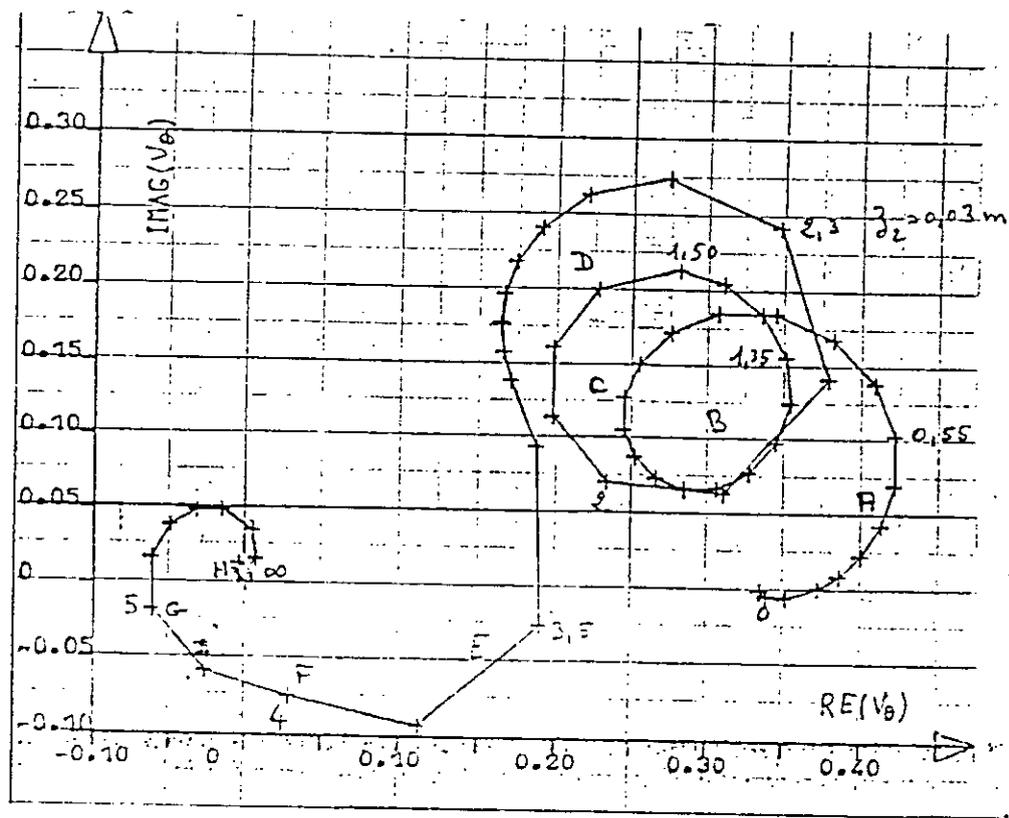


(a)

Fig 4-13 REPONSE pour differentes distances interguilles.



(b)



(c)

C2

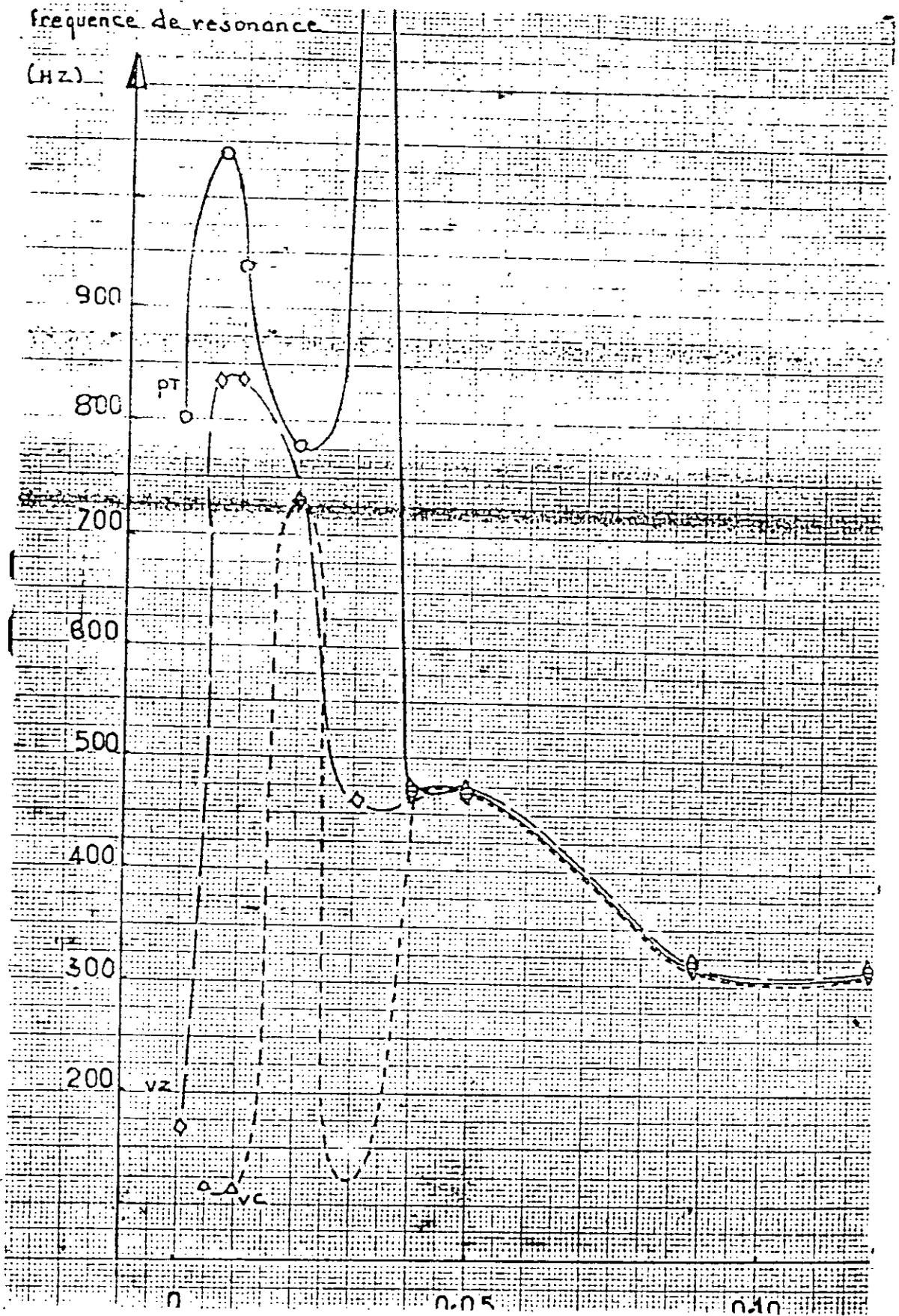


Fig - 4-14. $f_R = f(\text{Distance interjaille})$

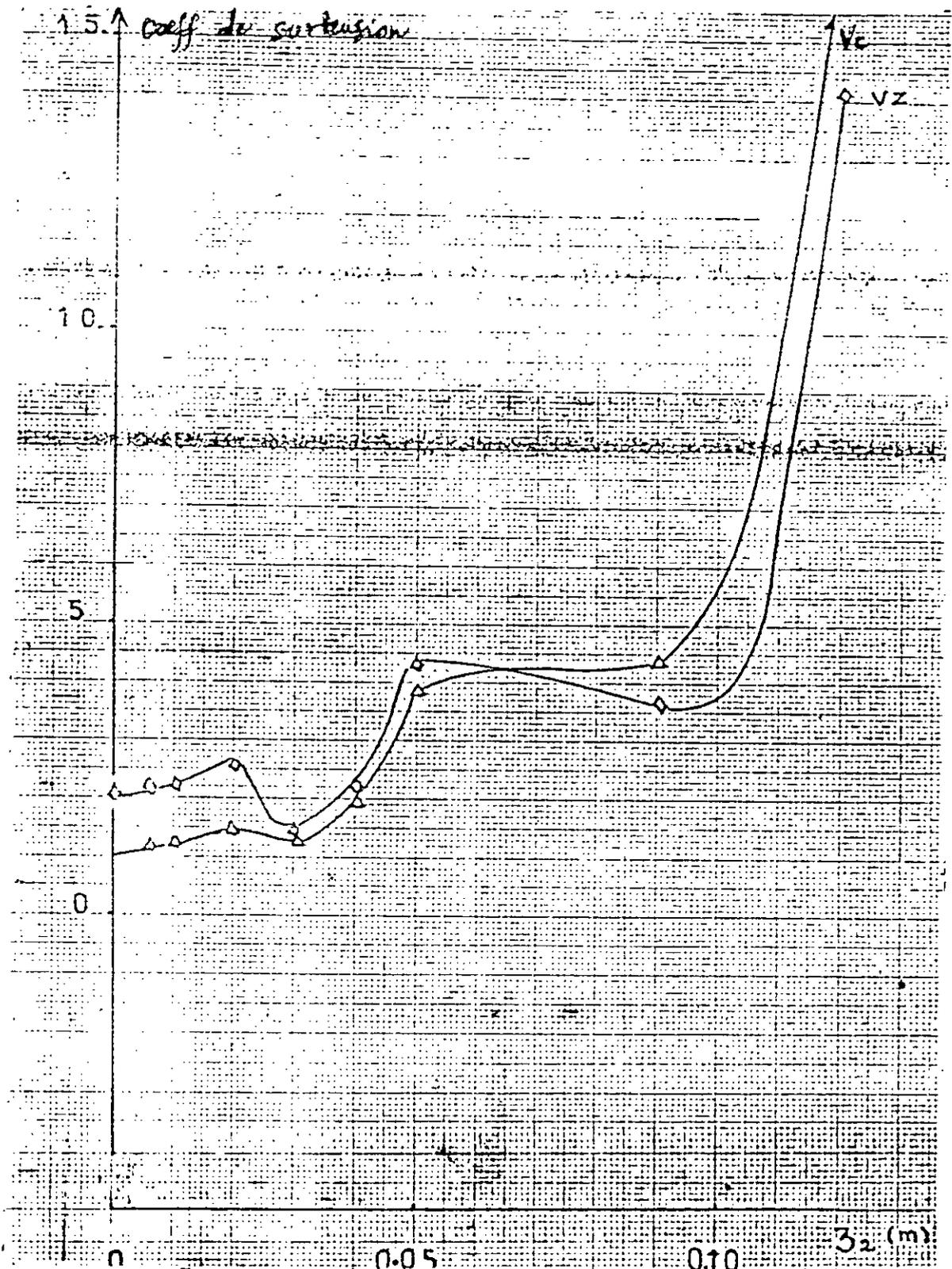


Fig 4-15 $Q = f(\text{Distance inter grille})$.

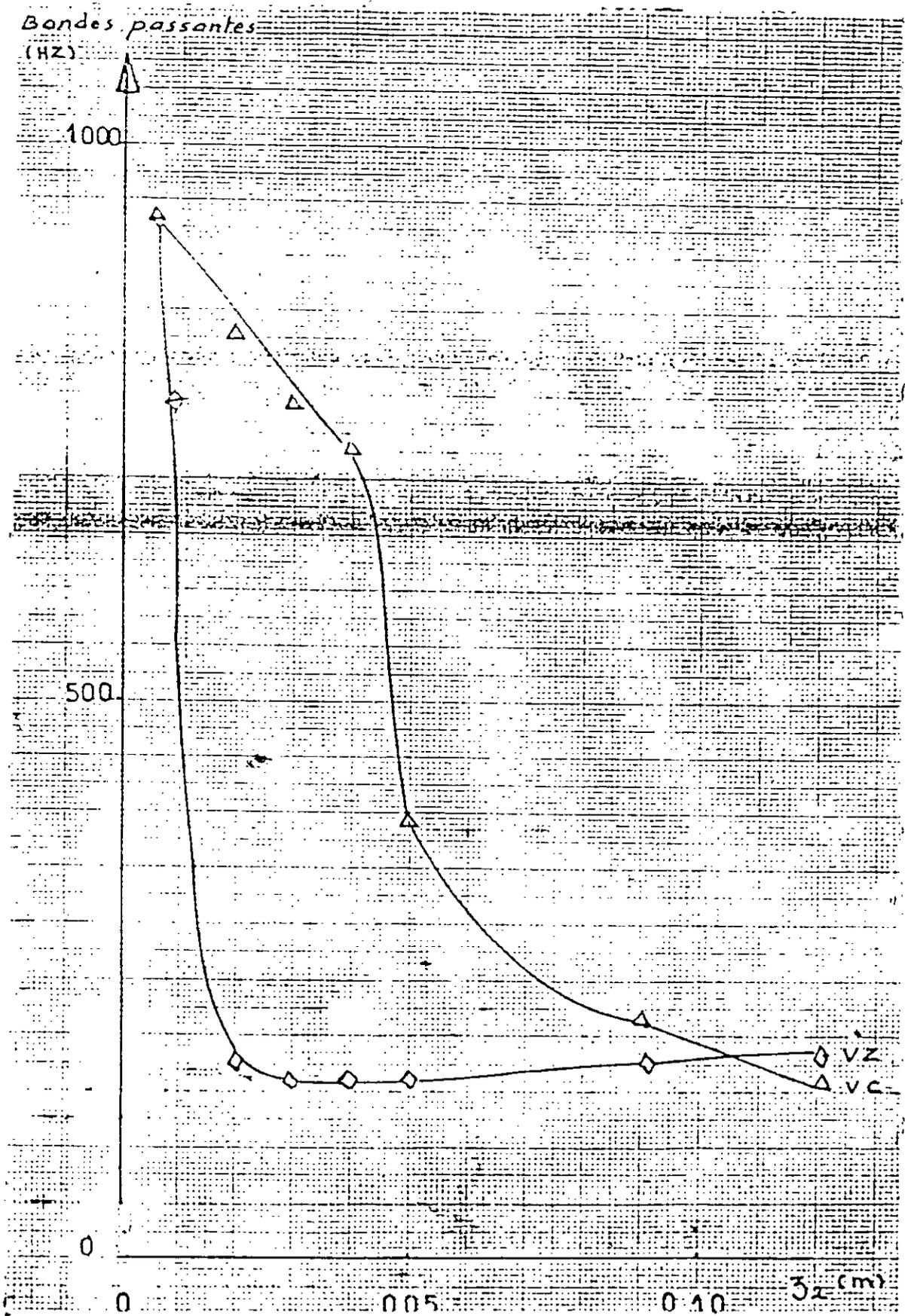
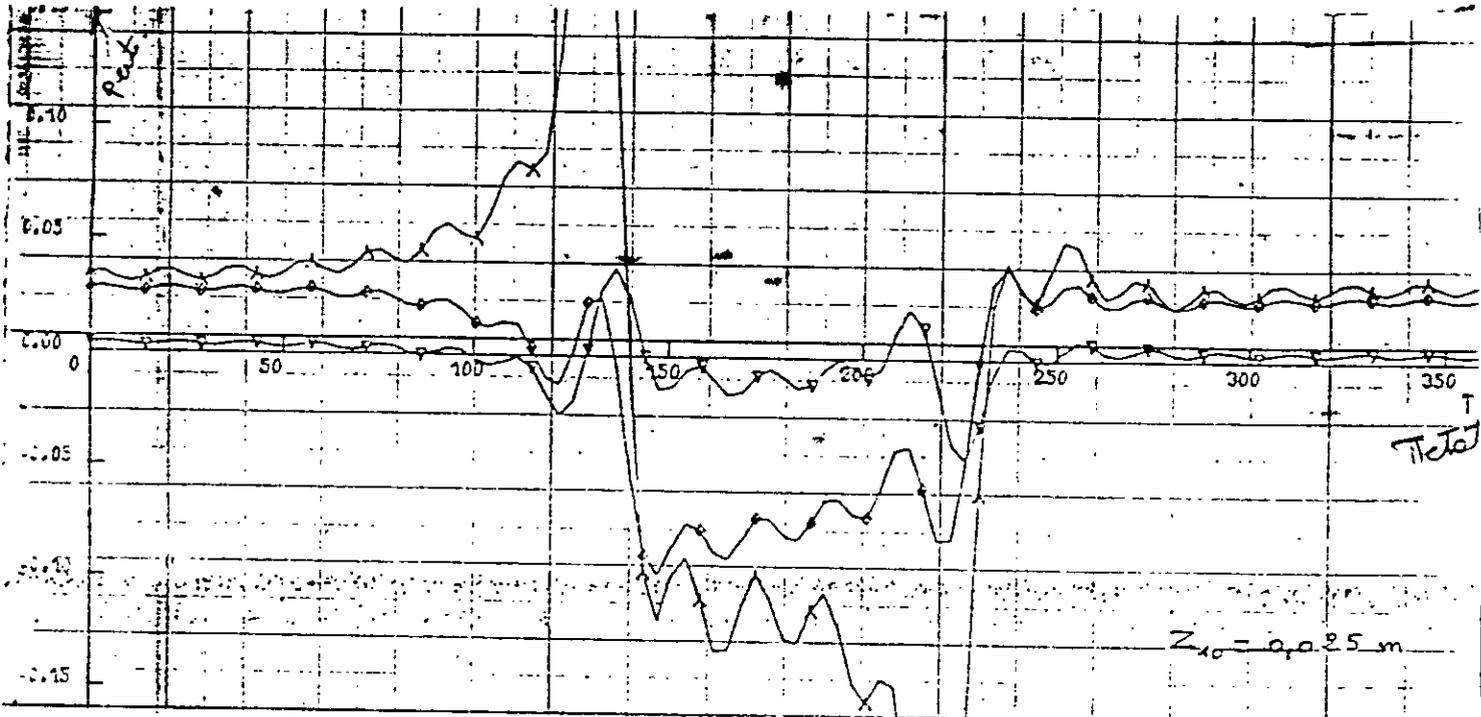


fig-4-16 Bande passante en fonction de la distance interguitte.

C MG

(a)



△ - V_c
△ - P_c
○ - V_z

(b)

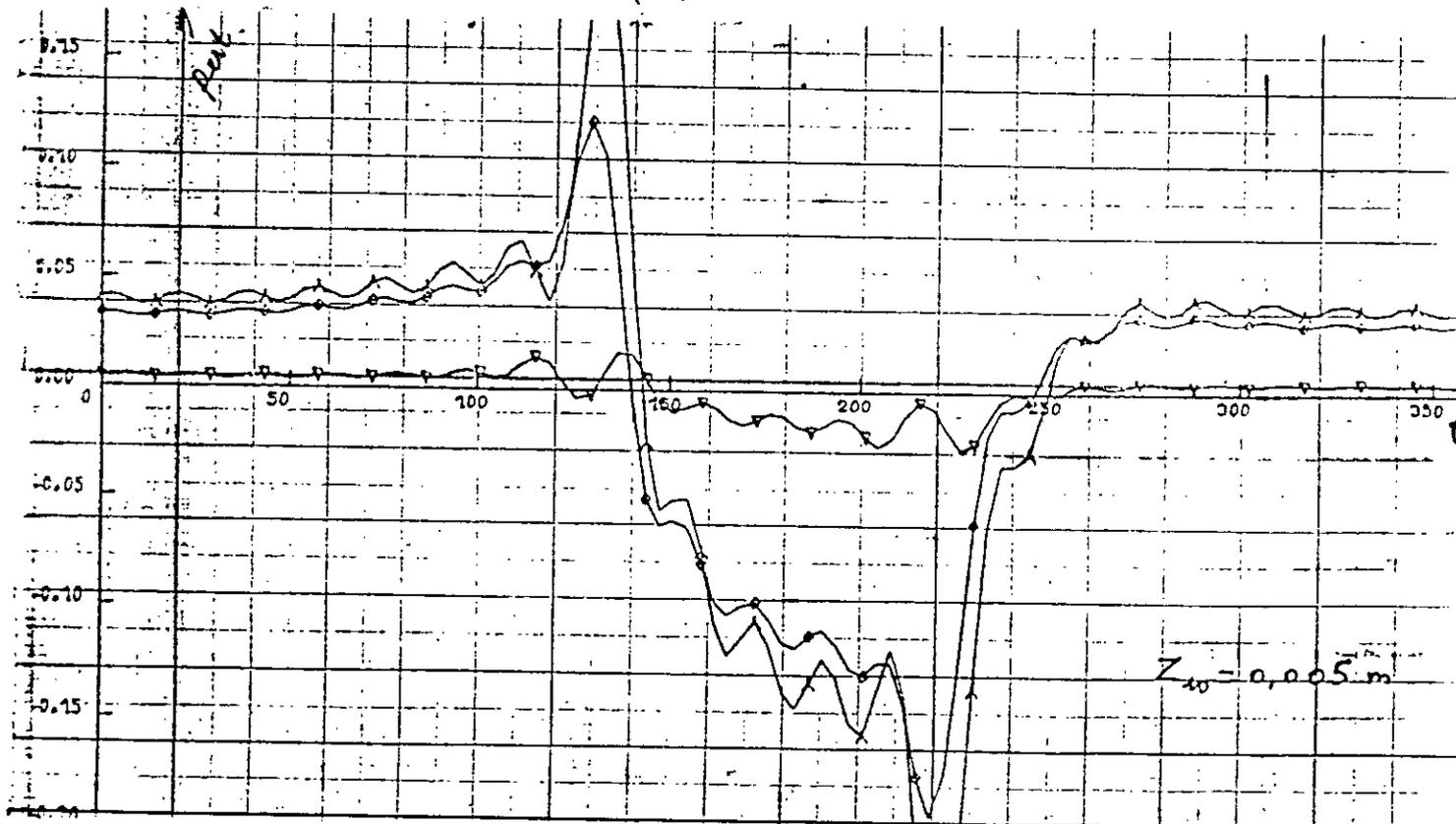
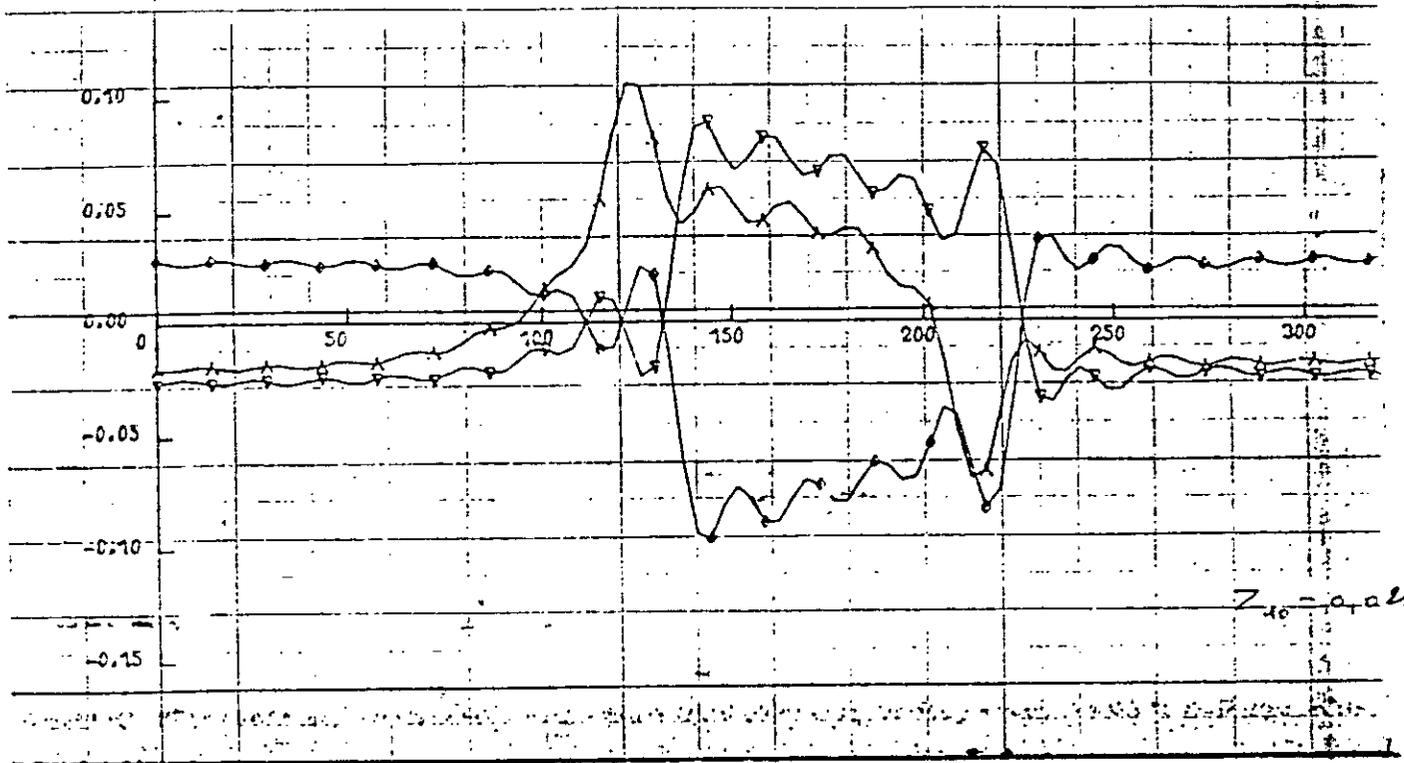


fig-4-17 EVOLUTION DES PERTURBATIONS DU Deuxième étage. par 2 distances interguilles.
- Amont Roue



AVAL Rme 5

(a)

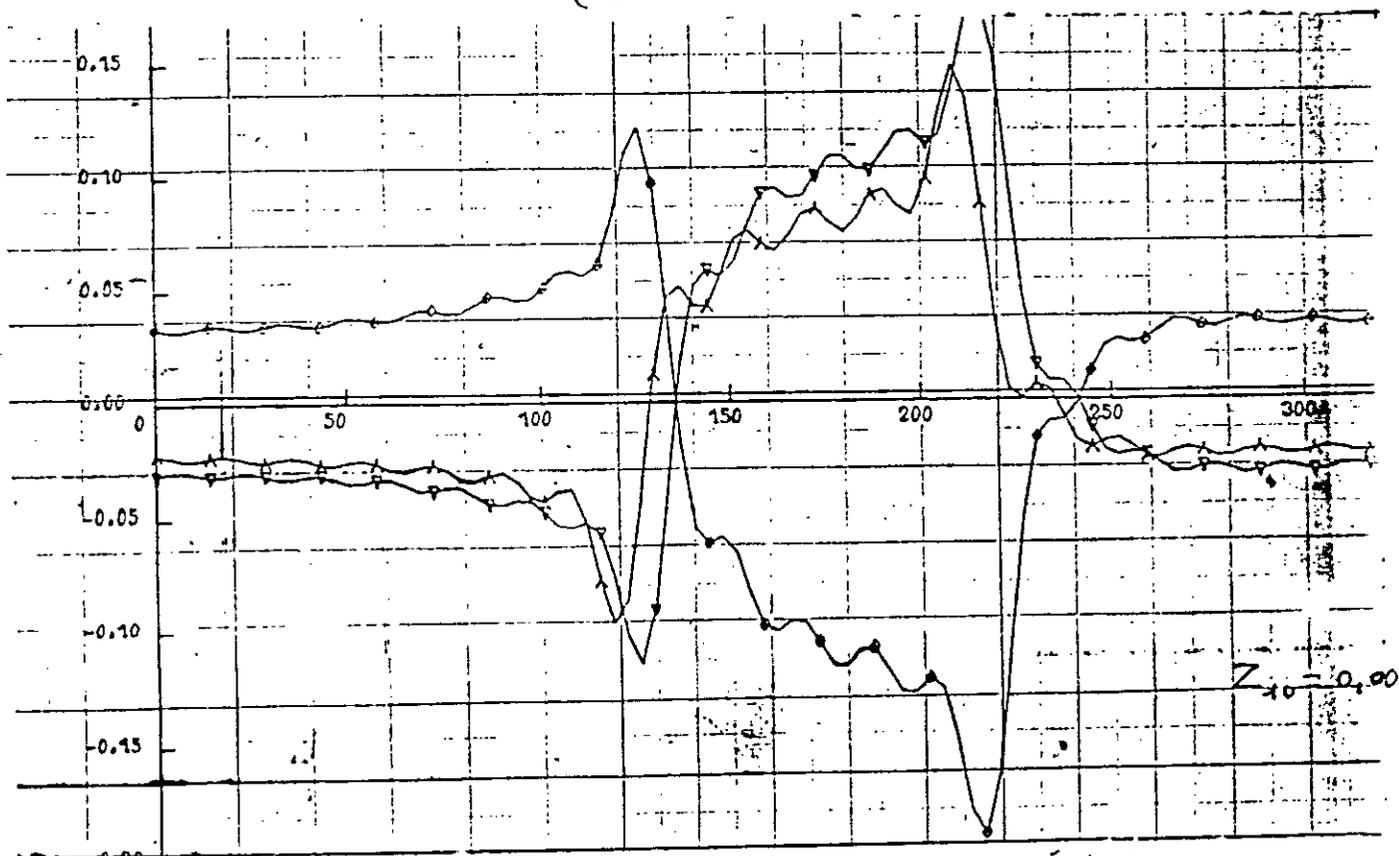
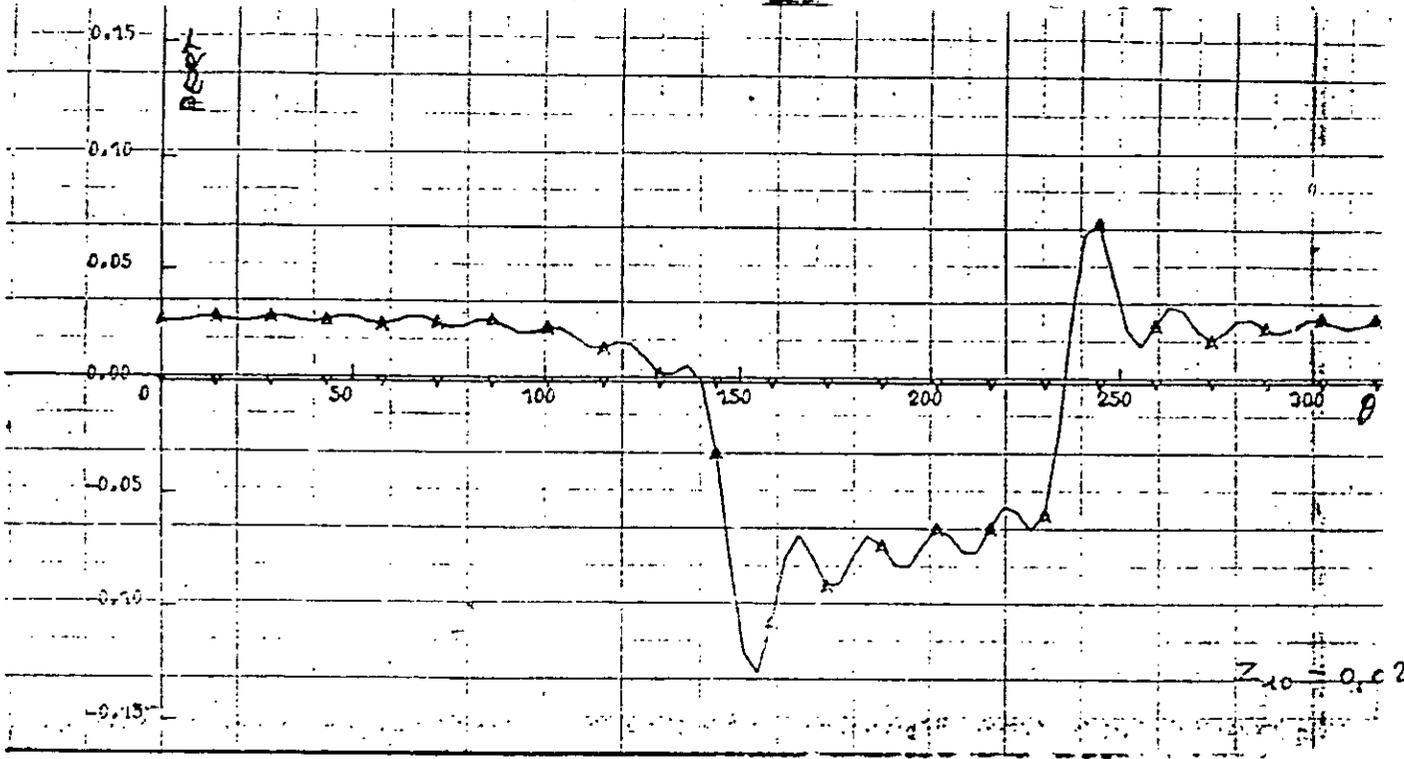
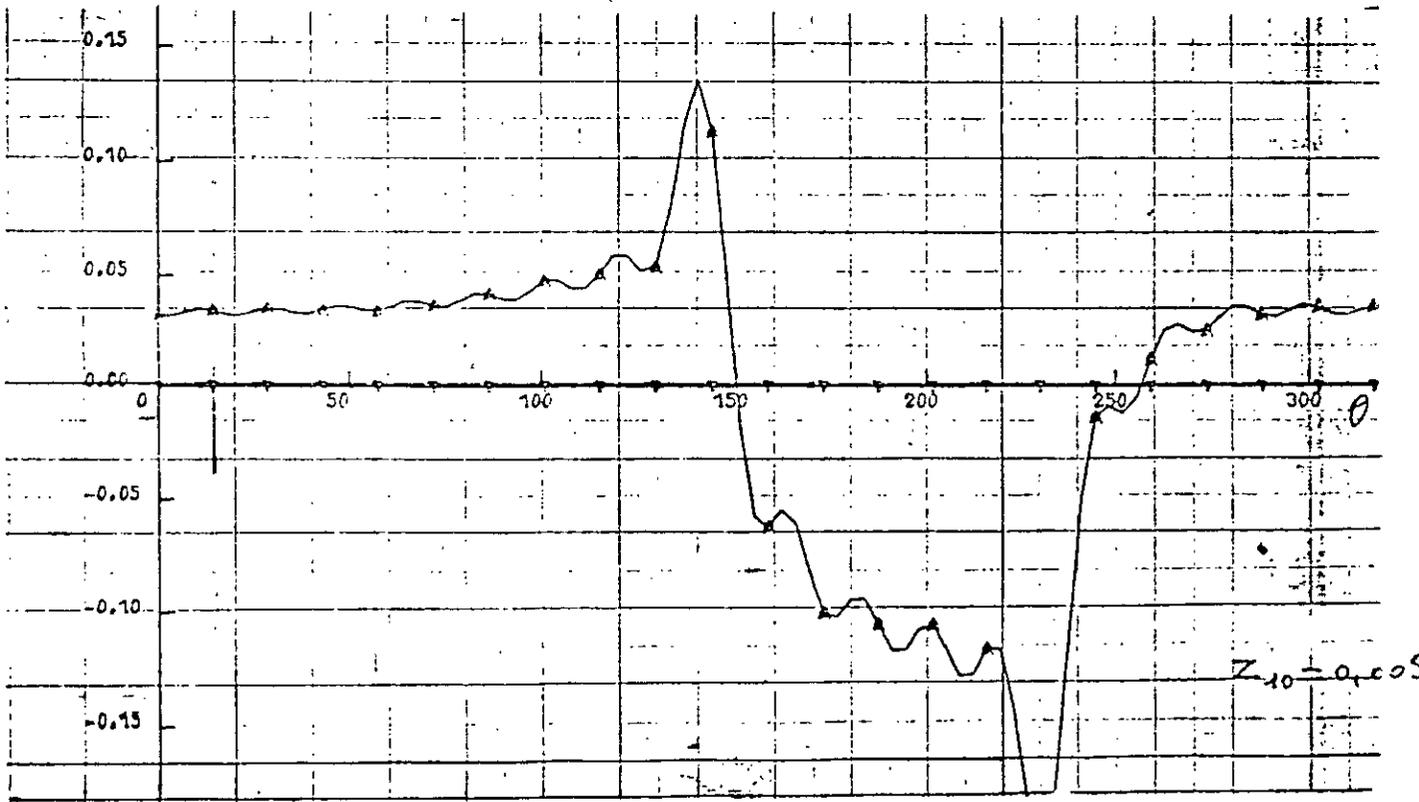


Fig: 4-17. Perturbations dernière étape
 pour 2 systèmes interférés.
 Amplitudes redressées 5.

(6)



(f)



Amount reduced

MACA.

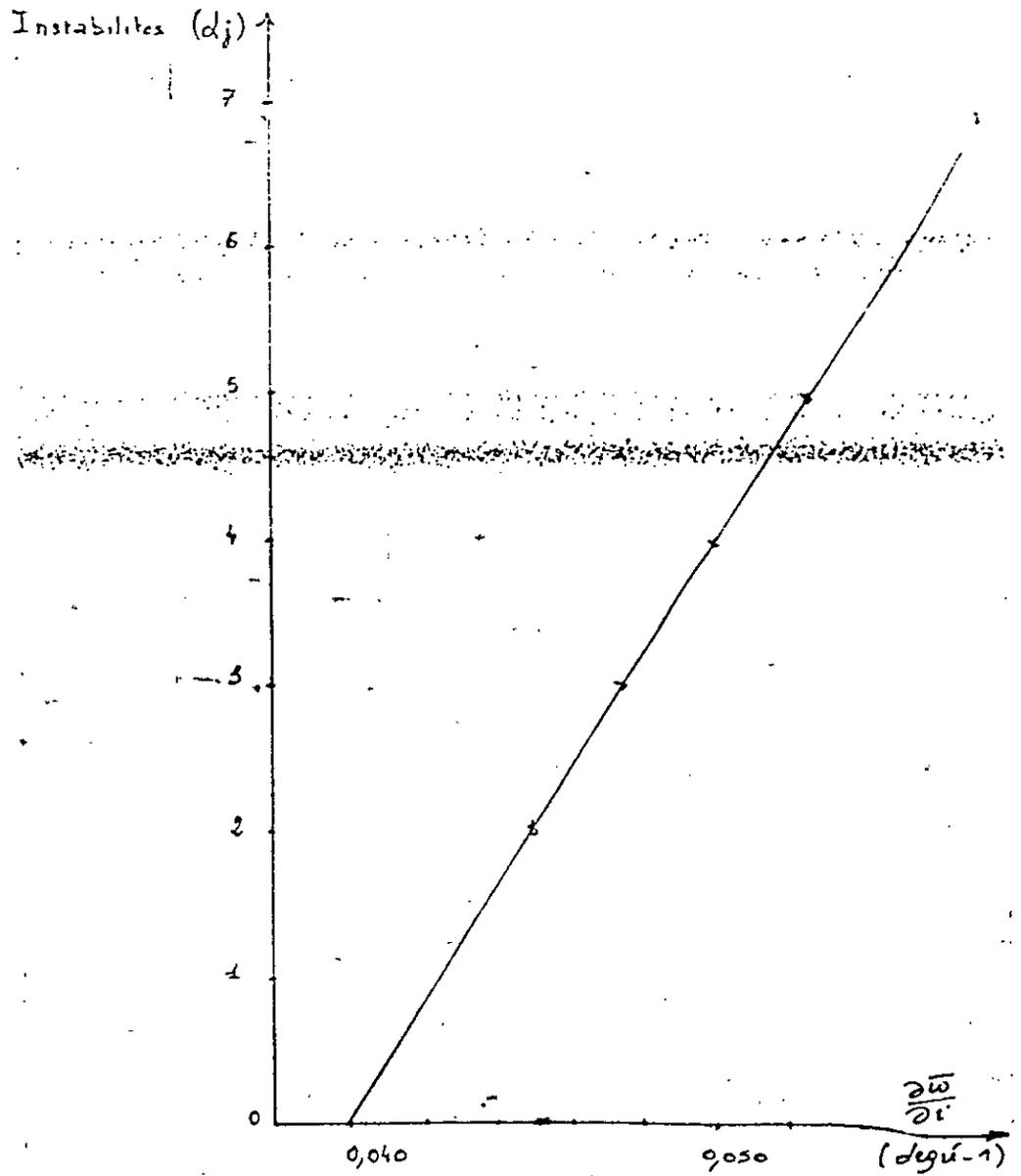


Fig: 4-18 - Evolution du nombre d'instabilités en fonction de $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$.

MACA

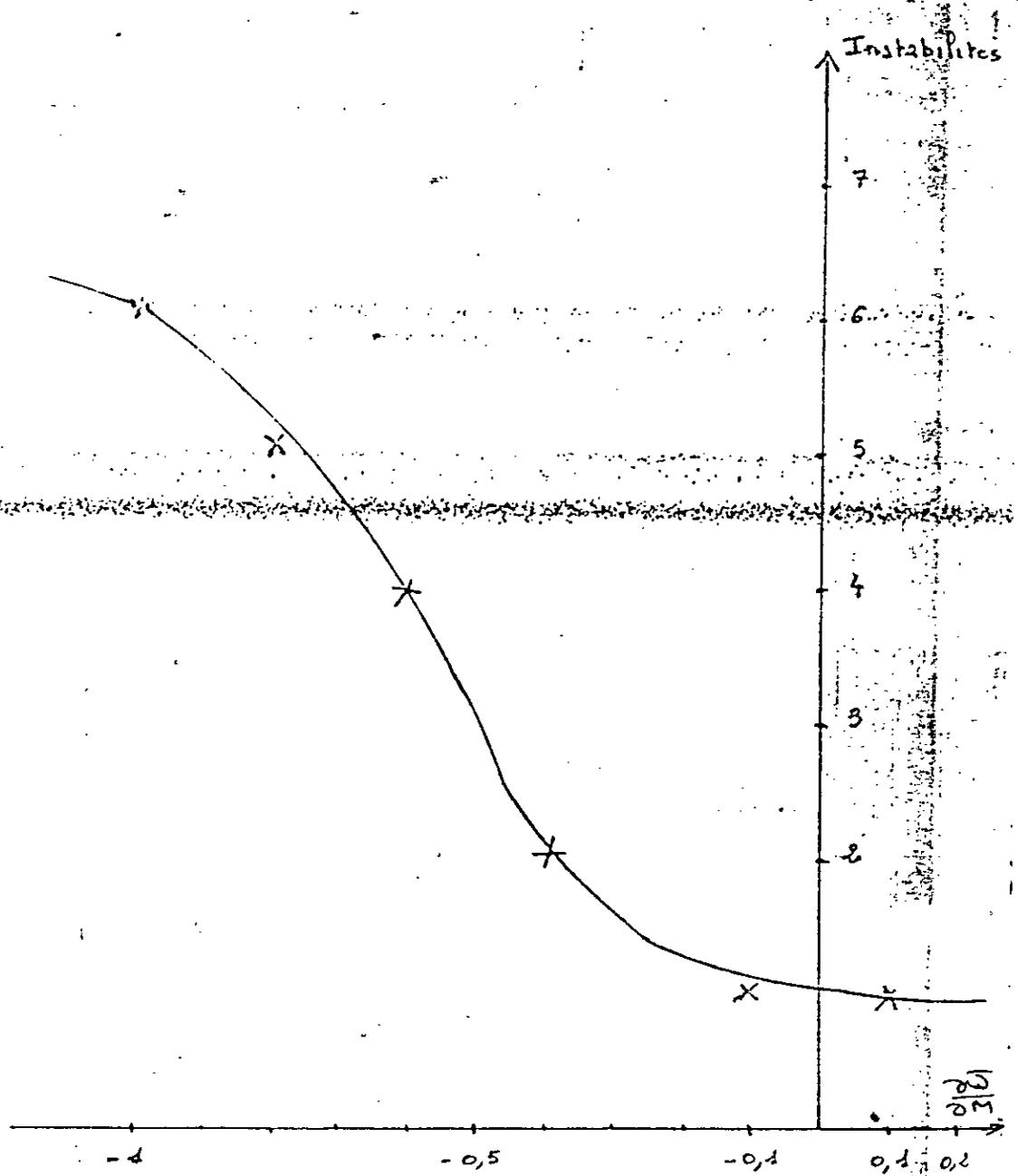


fig 4.19 Evolution du nbre d'instabilités en fonction de $\frac{dW}{dM}$.

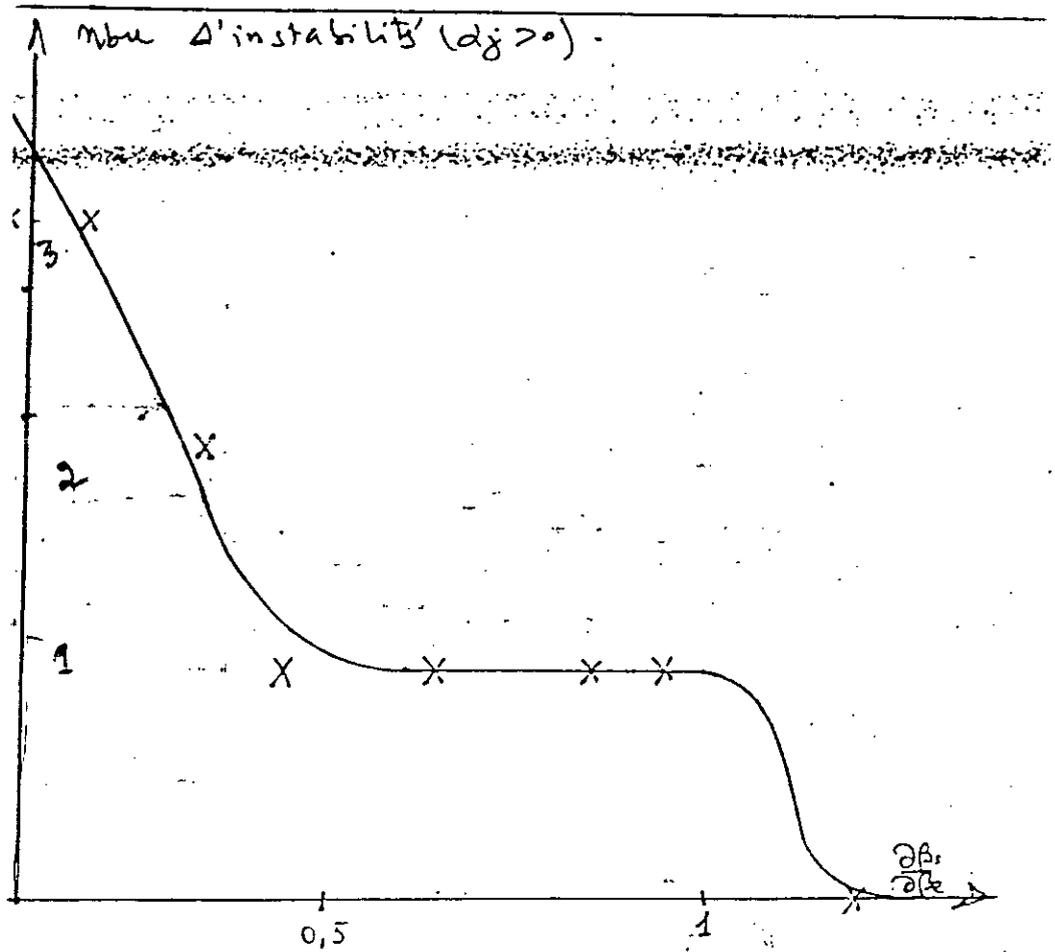


fig: A-20 - INSTABILITÉS ENI FONCTION DE $\frac{\partial \beta_s}{\partial \beta_e}$.

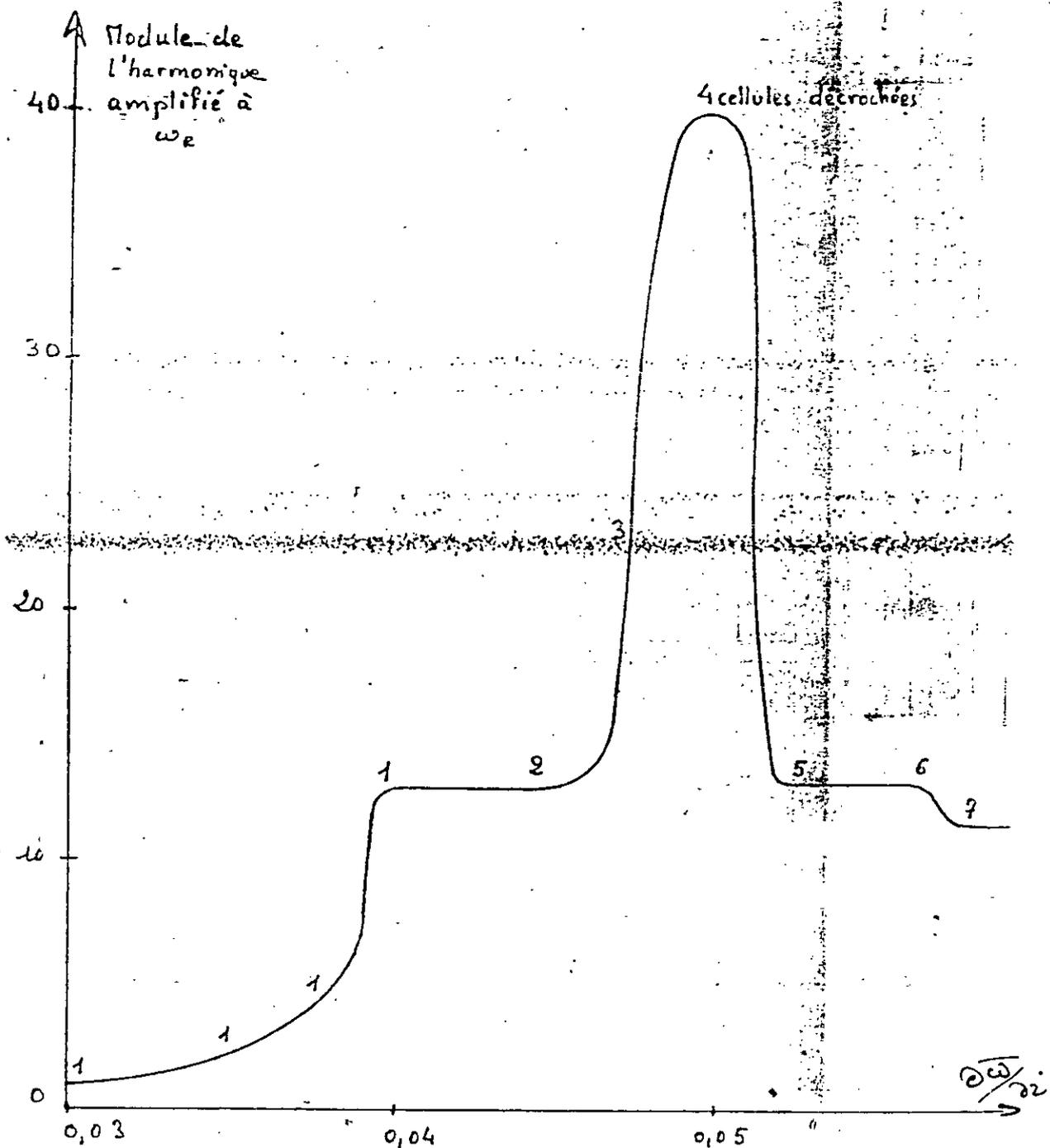


fig:4-21- Amplification maximum de cellules décrochées en fonction de $\frac{d\omega}{dt}$.

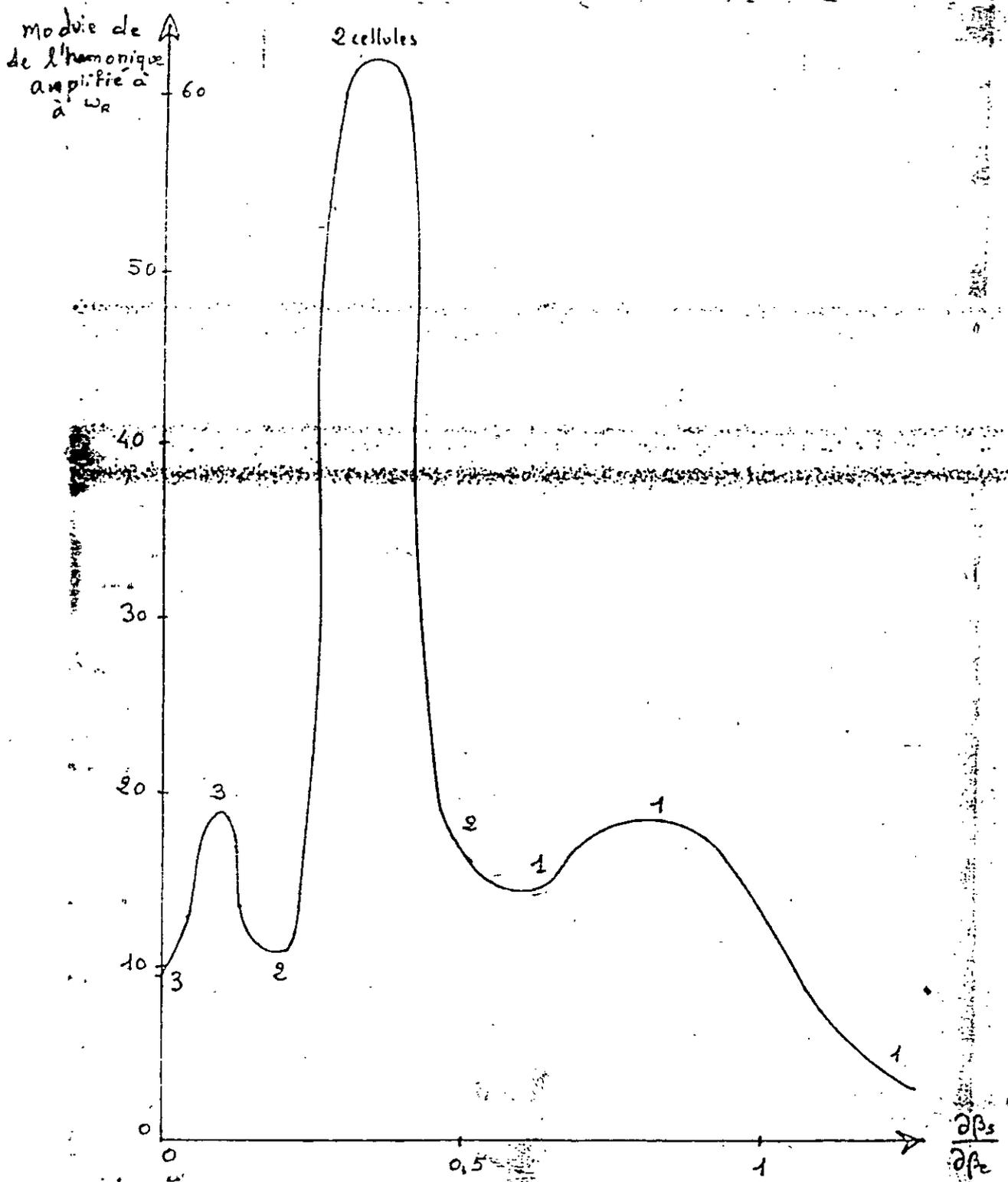


fig: 4-22 - Amplification des cellules en fonction de $\frac{\partial p_s}{\partial p_e}$.

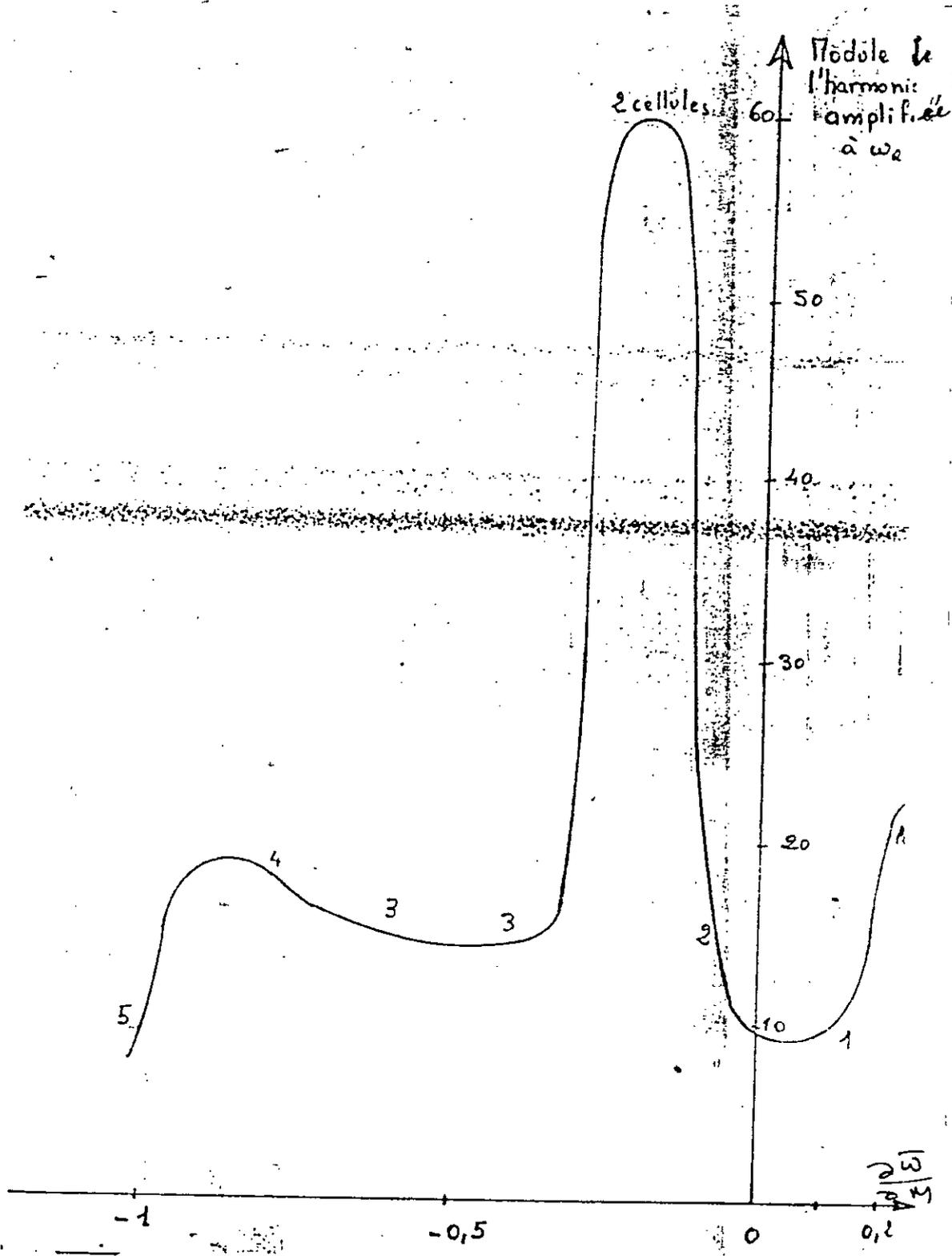


fig 4.23 Amplification de 2 cellules en fonction de $\frac{\partial \bar{W}}{\partial M}$.

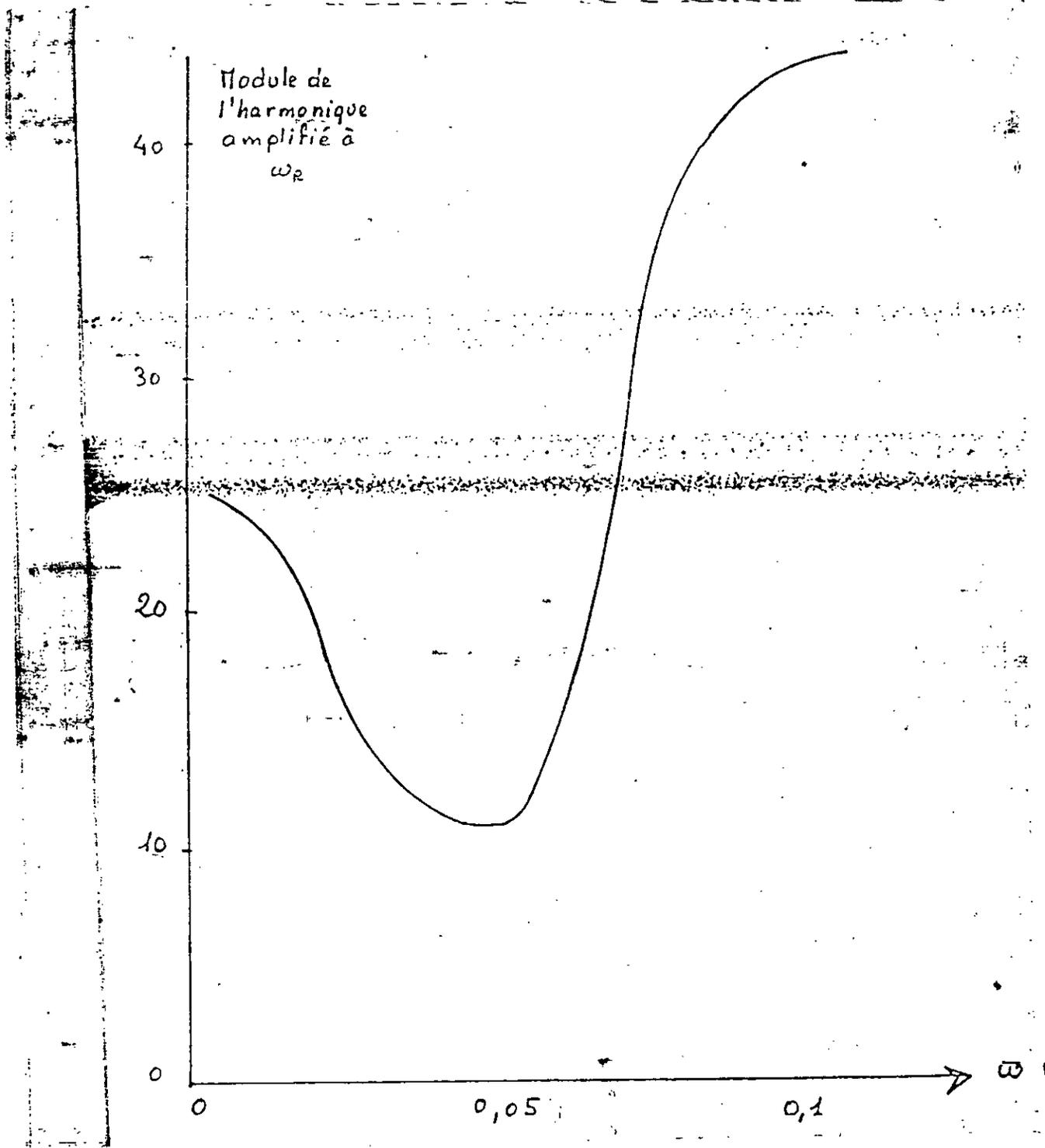


fig 4.24 Amplification des cellules en fonction de ω .

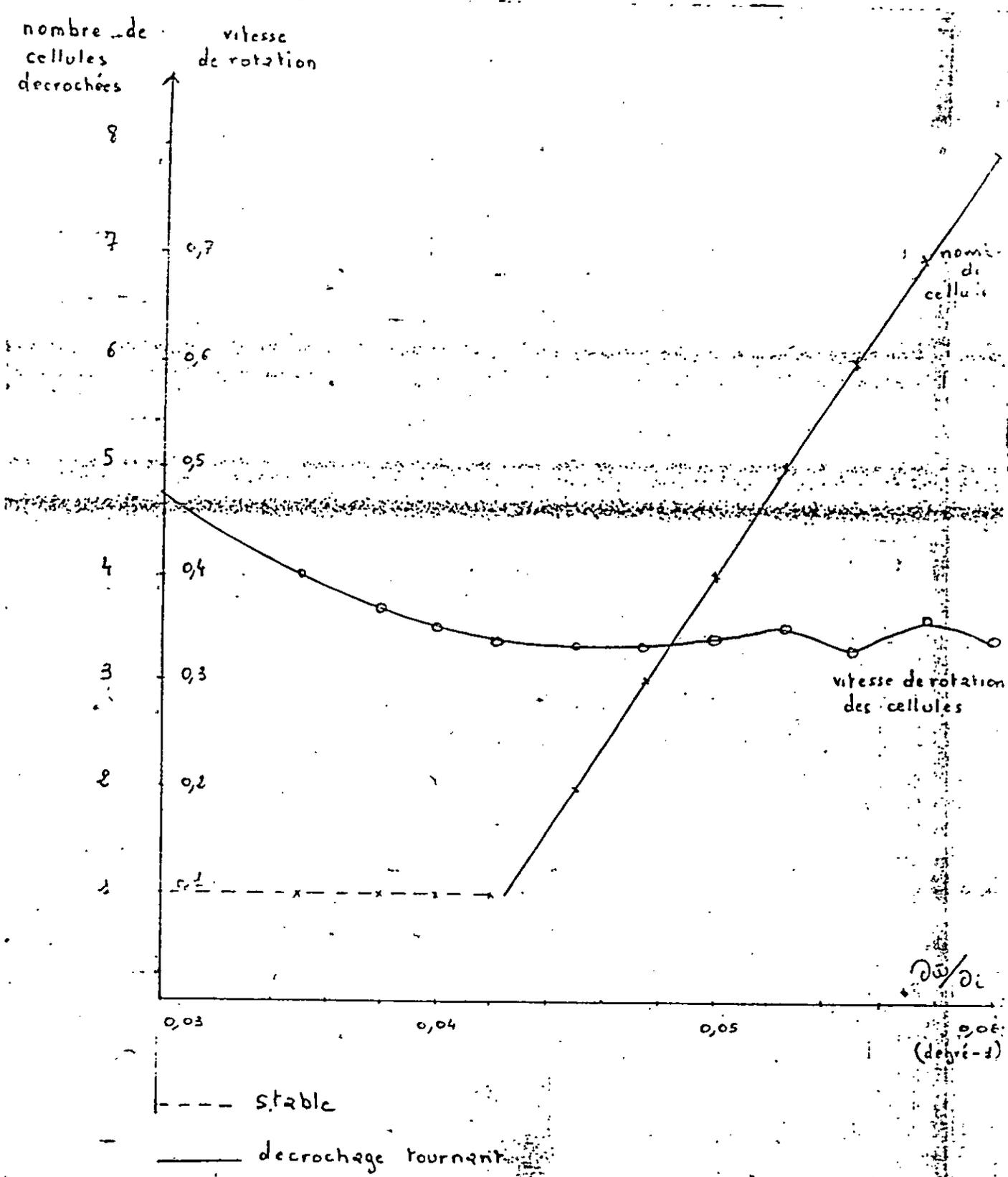


fig. 9.25 - ÉVOLUTION DU NOMBRE DE CELLULES ET DE LEUR VITESSE DE ROTATION EN FONCTION DE $\frac{d\bar{\omega}}{\omega_c}$.

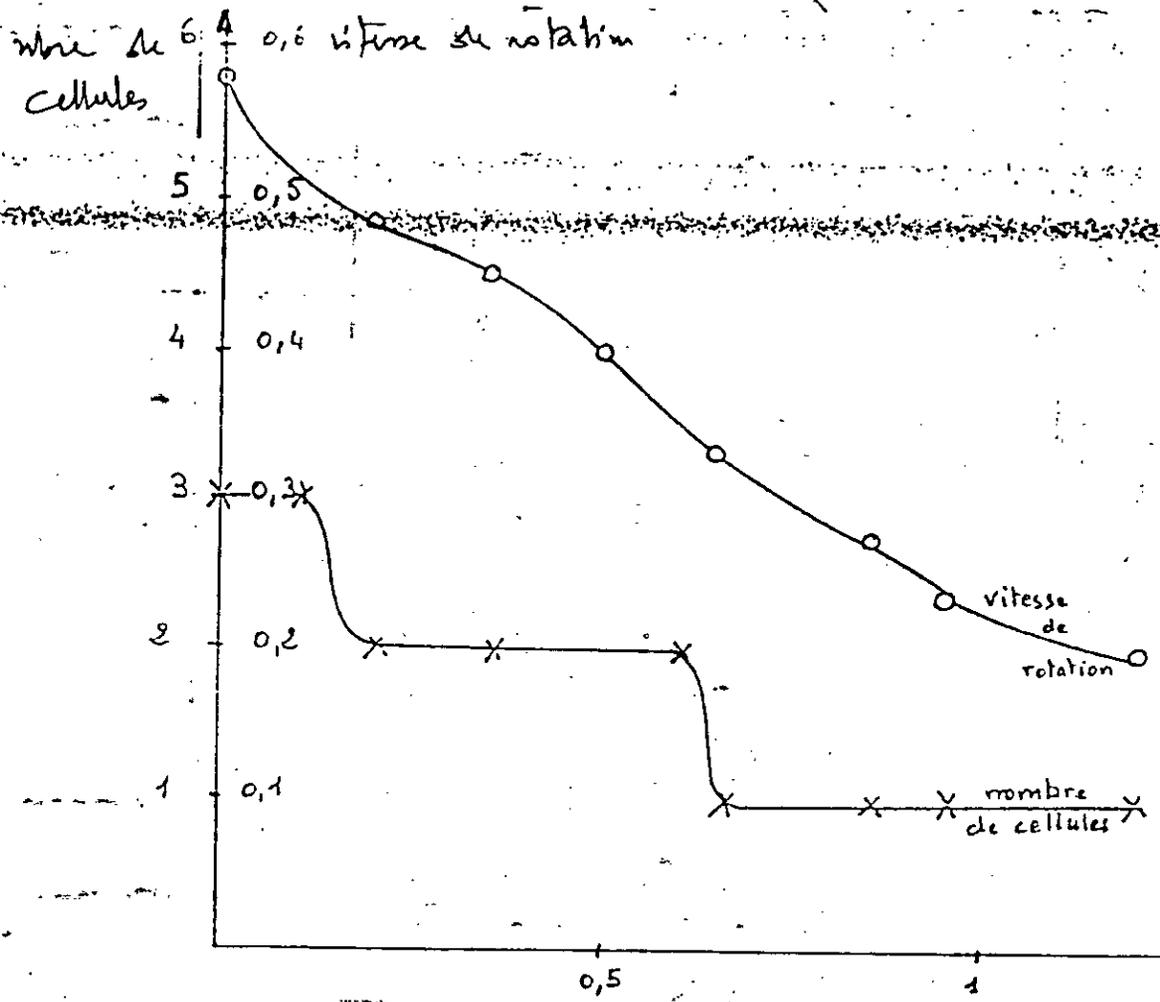


fig: 4.27 - évolution du nombre de cellules et de leur vitesse de rotation en fonction de $\frac{d\beta_s}{d\beta_e}$.

ANNEXES

ANNEXE A

CRITERE DE STABILITE

Soit $f(s)$ une fonction méromorphe (possédant un nombre fini de pôles) dans un domaine D limité par une courbe fermée Γ . Si on suppose que $f(s)$ ne possède pas de zéros dans D , nous pouvons expliciter les pôles de $f(s)$:

$$f(s) = \frac{h(s)}{(s-a_1)^{n_1} (s-a_2)^{n_2} \dots (s-a_p)^{n_p}}$$

$h(s)$ étant une fonction holomorphe et non nulle dans D , pour isoler chacun des pôles, on peut écrire:

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = -\sum_{k=1}^p \frac{n_k}{s-a_k} + \frac{h'(s)}{h(s)}$$

étudions $g_k(s) = \frac{1}{s-a_k}$

$g_k(s)$ est développable en série de LAURENT:

$$g_k(s) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q (s-a_k)^q \quad \text{avec :} \quad \begin{array}{l} c_q = 0 \text{ pour } q \neq -1 \\ c_q = 1 \text{ pour } q = -1 \end{array}$$

or par définition des résidus, si Γ est une courbe fermée décrite dans le sens trigonométrique et si $g_k(s)$ a pour seul pôle a_k , alors:

$$\text{residus de } g_k(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} g_k(s) ds = c_{-1} = +1$$

par consequent :

$$\int_{\Gamma} \frac{ds}{(s-a_k)} = 2i\pi$$

$\frac{h'(s)}{h(s)}$ étant une fonction holomorphe dans Γ , l'application du théorème de Cauchy généralisé conduit à :

$$\int_{\Gamma} \frac{h'(s)}{h(s)} ds = 0, \text{ il en résulte que :}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = -2i\pi \sum_{k=1}^p n_k$$

le nombre de pôles de $f(s)$ compris dans le contour Γ est égal à l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds$$

Traduisons géométriquement cette intégrale :

posons $f(s) = r e^{i\theta}$

$$\text{or } \frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{d(\ln(f(s)))}{ds} = \frac{d(\ln(r) + i\theta)}{ds}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} d(\ln(r)) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\theta$$

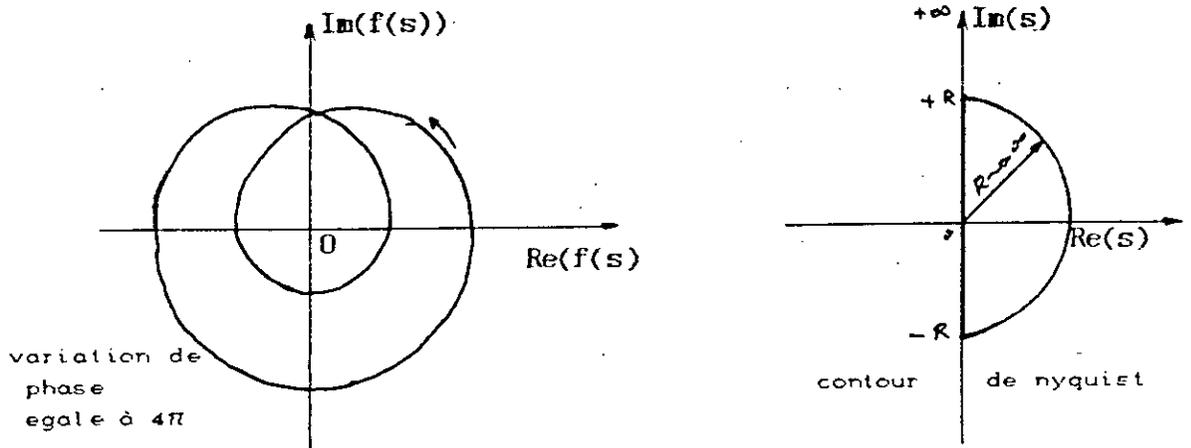
Quand s parcourt complètement le contour Γ , le rayon final est égal au rayon initial et l'intégrale du rayon est nulle, par contre la variation de phase est égale à un multiple entier de 2π .

L'intégrale représente le nombre de tours autour de l'origine. Donc le nombre de pôles de $f(s)$ dans Γ est égal au nombre de tours de $f(s)$ quand s parcourt Γ :

$$P = \sum_{k=1}^p n_k = - \int_{\Gamma} d\theta$$

Dans le cas de notre problème, nous cherchons les pôles à partie réelle positive de la fonction b_{∞} .

on prendra pour Γ le contour de NYQUIST déjà décrit dans le chapitre 3

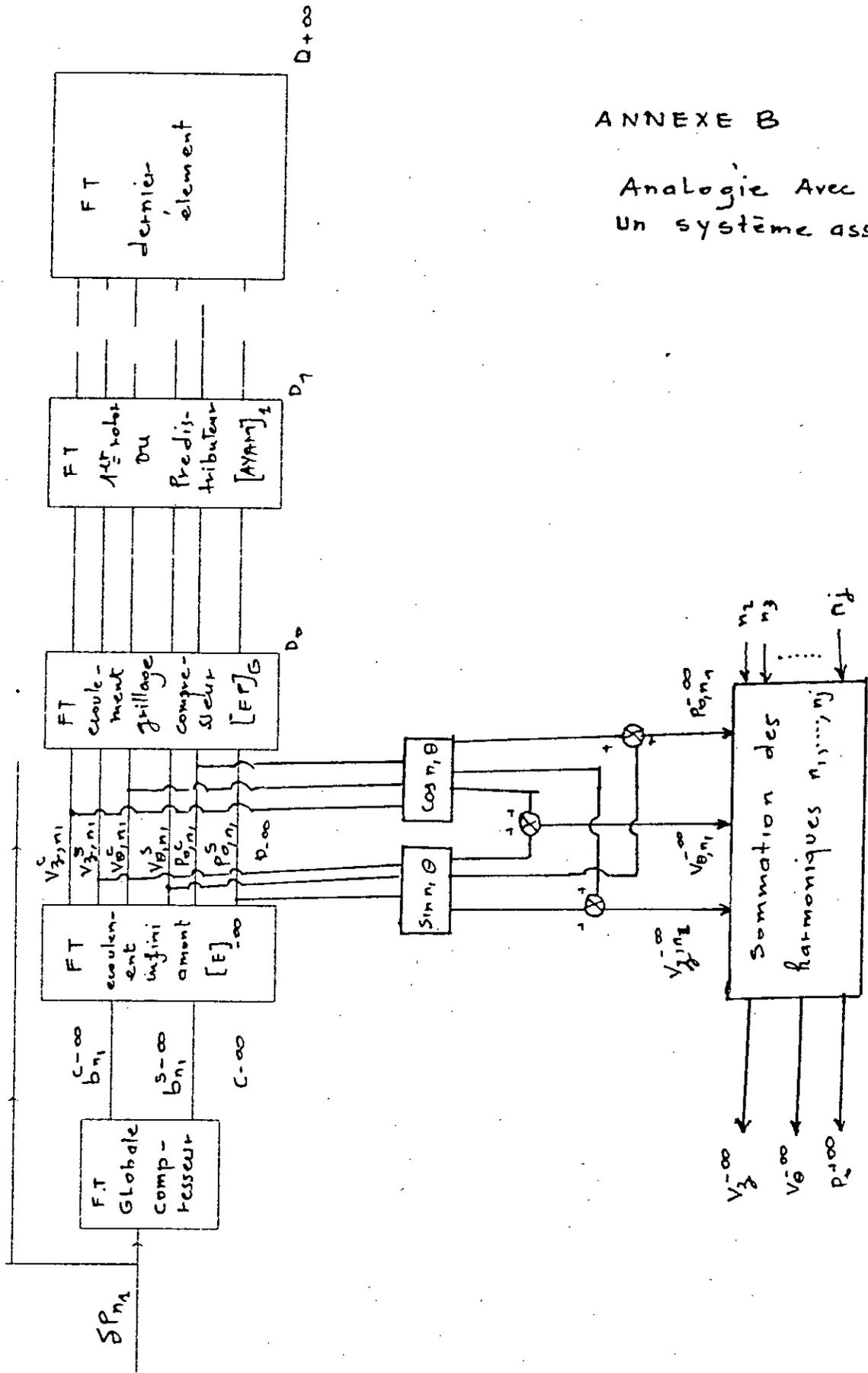


le critère devient:

Le système est stable si en décrivant le contour de nyquist dans le sens trigonométrique, la courbe caractéristique du dénominateur de la fonction de transfert présente une variation de phase supérieure à -2π .

ANNEXE B

Analogie Avec
Un système asservi



ANNEXE CNACA TN 35 18

TYPE NACA 65(12)-10

calage 28.5°

rayon moyen : 0.355

régime 8000 tr/mn

compresseur C1

point nominal

débit=10.54 kg/s

mach débitant d'entrée:0.46

régime:10 800 tr/mn

distance intergrille:0.012

	calage (degre)	corde(m)	rayon(m)
rotor	42	0.034	0.211
stator	19	0.024	0.215

compresseur C2

point nominal

débit=5.97 kg/s

mach débitant d'entrée:0.13

régime:3000 tr/mn

distance intergrille:0.050

	calage (degre)	corde(m)	rayon(m)
rotor	45	0.060	0.212
stator	75	0.058	0.212

COMPRESSEUR CM5

regime:13 000 tr/mn

mach débitant d'entrée:0.485

	calage(°)	distance intergrille(m)	corde(m)	rayon(m)
rotor	48	0.0060	0.0350	0.183
stator	70	0.0055	0.0218	0.188
rotor	46	0.0070	0.0284	0.190
stator	71	0.0060	0.0215	0.193
rotor	44.5	0.0070	0.0262	0.196
stator	74	0.0060	0.0174	0.197
rotor	39	0.0055	0.0244	0.197
stator	74	0.0050	0.0174	0.198
rotor	35	0.0250	0.0244	0.199
stator	74		0.0546	0.199

BIBLIOGRAPHIE