

وزارة التعليم و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Alex

DEPARTEMENT :  
MECANIQUE



# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

APPLICATION DE L'ANALYSE  
CEPSTRALE AU DIAGNOSTIC  
DU MOTEUR

Proposé Par :

Etudié par :

Dirigé par :

W. KUROWSKI

S. AMARA

W. KUROWSKI

PROMOTION :

JANVIER 1987

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

APPLICATION DE L'ANALYSE  
CEPSTRALE AU DIAGNOSTIC  
DU MOTEUR

Proposé Par :  
W. KUROWSKI

Etudié par :  
S. AMARA

Dirigé par :  
W. KUROWSKI

PROMOTION : JANVIER 1987

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

وزارة التعليم العالبي

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

DEPARTEMENT DE MECANIQUE

فرع الهندسة الميكانيكية

PROMOTEUR : KUROWSKI WALDEMAR

الموجه ولدمار كيروفسكي

ELEVE INGENIEUR : AMARA SALAH

الطالب المهندس عمارة صالح

الموضوع التحليل الفيطي (انعكاس كلمة طيقي) على تشخيص حالة المحرك  
المشخص ان التحليل الفيطي يعتبر من التقنيات الحديثة التي تسمح باكتشاف  
الدوريات الموزعة ضمن الطيف  
يشتمل هذا المشروع في اعداد طريقة معلوماتية لحساب الفيط بالاضافة الى  
طريقة (ZOOM-FFT) للمعالجة الجزئية للاشارات

Sujet : Application de l'analyse cepstrale au diagnostic du moteur.

Résumé : L'analyse cepstrale est une technique récente qui permet de  
découvrir les périodicités réparties dans le spectre des vi-  
brations. Ce projet consiste à établir la procédure informa-  
tique de calcul du cepstre ainsi que la procédure ZOOM-FFT  
pour le traitement partiel du signal.

Subject : Cepstrum analysis for motor diagnosis.

Abstract : Cepstrum analysis is a recent technique used for spectral  
periodicity detection.

This work consists in the establishment of a cepstrum  
computation procedure and ZOOM-FFT analysis for partial  
signal process.

## REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur. W. KUROWSKI,  
professeur à l'école nationale polytechnique d'Alger,  
pour l'aide précieuse dont il m'a fait bénéficier  
pour l'exécution de ce travail.

Je tiens également à témoigner ma profonde  
reconnaissance à l'ensemble des enseignants  
qui m'ont transmis leur savoir.

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE I :	INTRODUCTION	1
I.	ENTRETIEN DES MACHINES	1
II.	ENTRETIEN PREVENTIF ET ENTRETIEN PREDICTIF	1
III.	DIAGNOSTIC DES MACHINES	2
IV.	CHOIX DES VIBRATIONS POUR L'ENTRETIEN	3
CHAPITRE II :	LES SIGNAUX VIBROACOUSTIQUES, LEUR TRAITEMENT, LEURS SPECTRES.	5
I.	LES SIGNAUX VIBROACOUSTIQUES	5
II.	TRAITEMENT DES SIGNAUX VIBROACOUSTIQUES.	7
III.	ECHANTILLONNAGE	13
IV.	TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRETE.	22
V.	TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE	26
VI.	DISTORSIONS DES SPECTRES.	29
VII.	SPECTRES DES SIGNAUX VIBROACOUSTIQUES.	31
VIII.	DIFFICULTES D'INTERPRETATION DES SPECTRES	33
CHAPITRE III :	BUT DE L'ETUDE.	34

CHAPITRE IV : ANALYSE CEPSTRALE.	34
I. INTRODUCTION.	34
II. DEFINITIONS DU CEPSTRE.	35
III. INTERPETATION PHYSIQUE DU CEPSTRE	37
IV. TERMINOLOGIE RELATIVE A L'ANALYSE CEPSTRALE	38
V. CHOIX DE LA DEFINITION DU CEPSTRE	39
VI. PROPRIETES DE L'ANALYSE CEPSTRALE	42
VII. ECHELLE DES QUEFRENCES	43
VIII. DISTORSIONS DU CEPSTRE.	46
IX. DETERMINATION DU CEPSTRE D'UN SIGNAL	48
X. PROGRAMME.	50
CHAPITRE V : PROCEDURE ZOOM-FFT.	55
I. INTRODUCTION	55
II. PRINCIPE D'INCERTITUDE	57
III. REALISATION DU ZOOM	62
CHAPITRE VI : PROGRAMMATION ET ESSAIS	74
CHAPITRE VII : CONCLUSION	79
ANNEXE 1 : Programme d'essai du cepstre.	
ANNEXE 2 : Programme général.	

# CHAPITRE I INTRODUCTION

## I - ENTRETIEN DES MACHINES.

La maintenance des machines est l'ensemble des vérifications et techniques d'entretien qui permettent une utilisation optimale des installations industrielles.

En effet, dans le milieu industriel, on élabore des techniques récentes pour déterminer l'état actuel et prévoir l'avenir d'une machine afin d'éviter les pannes intempestives. [5]

## II - ENTRETIEN PREVENTIF ET ENTETIEN PREDICTIF

La plus ancienne forme d'entretient est l'antretien curatif qui consiste à réparer la machine une fois que la panne se déclare.

L'entretien préventif est le plus utilisé jusqu'à présent, il consiste en des arrêts réguliers avec démontage de la machine et contrôle voire remplacement systematique d'organes. La fréquence de ces opérations est fixée par le constructeur et basée sur l'expérience. [5]

L'inconvénient d'un tel procédé est le risque élevé d'un démontage inutile occasionnant une perte de temps et de production.

L'entretien prédictif [5] est plus évolué et plus rationnel, il permet d'éviter les inconvénients de la méthode précédente. Il consiste à déterminer d'une part, quel organe défaillant devra être remplacé et d'autre part la date approximative à laquelle l'intervention s'impose. Pour cela il faut accéder à une bonne compréhension du fonctionnement de la machine considérée.

### III DIAGNOSTIC DES MACHINES.

Afin de pouvoir prévoir le comportement avenir d'une machine il faut d'abord prendre bonne connaissance de son état technique actuel. L'évaluation de cet état constitue ce qu'on appelle un "Diagnostic de la machine". Ce diagnostic nous renseigne sur l'état et l'existence éventuelle d'organes défectueux ou dysfonctionnement pouvant, à l'avenir, occasionner une panne de la machine.



#### IV CHOIX DES VIBRATIONS POUR L'ENTRETIEN

Une défaillance technique d'une machine peut se manifester par le biais de plusieurs signaux : la chaleur dégagée, la pression d'huile, la puissance absorbée ou fournie, bruits suspects, vibrations intenses et anormales ... etc... [14].

Les signaux tels que la chaleur, la pression d'huile ou la puissance sont pauvres en renseignements et ne peuvent donc être exploités de manière efficace à l'établissement du diagnostic complet. Par contre, les bruits et vibrations qu'on englobe sous le nom de "signaux vibroacoustiques" [6] sont les plus riches en informations sur l'état de la machine, ce qui leur confère une importance primordiale lors de la recherche du diagnostic d'une machine tournante [5, 6, 14].

Les machines de toutes sortes sont constituées d'organes et de couples cinématiques ordonnés en chaînes cinématiques transmettant le mouvement ou la puissance. L'état technique de la machine dépend essentiellement de l'état de ces chaînes

et couples cinématiques.

Le processus vibroacoustique existe pour toutes machines même si celles-ci sont encore en bon état. Il accompagne le fonctionnement de la machine. Les organes et les couples d'organes en mouvement constituent des sources vibratoires. Les vibrations localisées se transmettent aux autres organes et se combinent entre elles. Avec l'augmentation de l'usure le phénomène s'aggrave car il naît des sources supplémentaires et l'intensité et le caractère des vibrations varient.

## CHAPITRE II

LES SIGNAUX VIBROACOUSTIQUES,  
LEUR TRAITEMENT, LEURS SPECTRES

## I. LES SIGNAUX VIBROACOUSTIQUES

Les phénomènes physiques sont habituellement mesurés par des enregistrements de leurs magnitudes en fonction du temps. La magnitude de l'enregistrement peut représenter une grandeur physique quelconque qui est prise pour signal: déplacement, vitesse, accélération, pression, etc...

L'échelle temporelle peut être liée à une autre grandeur physique ou variable indépendante: temps, position spatiale ou angulaire, etc... [13].

Plusieurs phénomènes physiques ne sont pas déterministiques. La plupart des cas réels observés sur des machines et des mécanismes sont traités comme des phénomènes stochastiques donnant lieu à des signaux dits stochastiques [13].

## 1. Signaux stochastiques stationnaires.

Considérons un ensemble d'enregistrements du même phénomène stochastique:

$$\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \quad (\text{II.1})$$

Le signal  $\{x(t)\}$  est dit stationnaire si la valeur moyenne des valeurs des fonctions  $x_i(t)$  est la même pour tout instant  $t_1$  [13]

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1) \quad (\text{II.2})$$

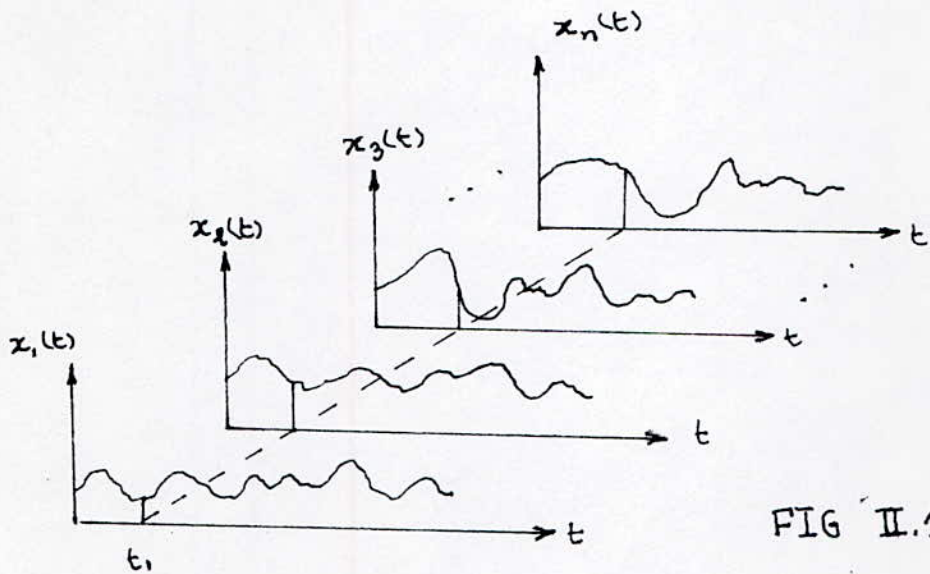


FIG II.1

### 1-1- Signaux ergodiques

Un signal stationnaire est dit ergodique [13] si la valeur moyenne  $\mu_x(t_1)$  est égale à la moyenne de n'importe quel signal  $x_i(t)$  pris arbitrairement de l'ensemble  $\{x(t)\}$ .

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt \quad (\text{II.3})$$

## 2 - Caractère des signaux vibroacoustiques.

La description d'un phénomène quelconque de manière stochastique est souvent plus complète que celle faite de manière déterministique [13]. En particulier, les signaux vibroacoustiques émis par une machine en marche sont présentés comme stationnaires et ergodiques [6].

## II - TRAITEMENT DES SIGNAUX VIBROACOUSTIQUES.

Les signaux vibroacoustiques contiennent des informations relatives à l'état technique de la machine qui les génère. En faisant l'enregistrement d'un signal vibratoire, on recueille ces informations sous forme codée. Il est donc nécessaire de traiter les signaux pour rendre lisibles les informations qui y sont contenues.

### 1 - Les deux domaines du signal.

Lorsqu'on considère un signal quelconque, il est indispensable d'avoir à l'esprit deux représentations possibles de ce signal :

- une représentation temporelle de la forme  $y = f(t)$  dans laquelle la variable indépendante est

le temps.

- une representation frequentielle de la forme  $Y = F(\omega)$  où la variable independante est la fréquence. Cette representation correspond bien au mode de fonctionnement des machines qui est habituellement cyclique.

Ces deux representations sont reliées entre elles par la transformation de FOURIER. [1]

## 2- La transformation de Fourier

### 2.1 Théorème de Fourier.

Toute fonction  $f(t)$  satisfaisant les conditions de Dirichlet peut être décomposée en une somme d'un nombre infini de fonctions sinusoidales [2, 3, 14]. La somme est appelée "Serie de Fourier".

### 2.2 Conditions de Dirichlet

Pour qu'une fonction  $f(t)$  soit décomposable en serie de Fourier il faut que : [1, 2, 3]

1-  $f(t)$  soit périodique. Si  $f(t)$  n'est pas periodique mais définie sur un intervalle de longueur finie, la serie

de Fourier converge vers  $f(t)$  dans cet intervalle, et représente une répétition de  $f(t)$  à l'extérieur de cet intervalle.

2-  $f(t)$  doit au moins être continue par morceaux avec un nombre fini de discontinuités.

3-  $f(t)$  doit avoir un nombre fini d'extrema.

4- l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  converge.

Remarque: Presque toutes les fonctions connues dans le domaine de la physique satisfont les conditions de Dirichlet [3].

## 2-3 Transformation de Fourier.

L'analyse de Fourier peut être appliquée à des fonctions qui ne sont pas nécessairement périodiques. C'est le cas des fonctions stochastiques représentant des phénomènes réels. On assimile ce genre de fonctions à des fonctions de période infinie. [2, 3, 14]

### 2-3-1 La transformée de Fourier directe.

On définit la transformée de Fourier  $F(\omega)$  d'une fonction  $f(t)$  supposée de période infinie et satisfaisant les conditions de Dirichlet par la relation suivante: [2, 3, 14]

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (\text{II}, 4)$$

Dans notre cas  $f(t)$  est une fonction temporelle (signal) et la variable  $\nu$  homogène à l'inverse d'un temps représente la fréquence.

$F(\nu)$  s'appelle le "spectre de fréquences" du signal  $f(t)$ .

Les fonctions  $f(t)$  et  $F(\nu)$  sont appelées couple de Fourier, elles sont équivalentes et notées :  $f(t) \longleftrightarrow F(\nu)$ .

### 2.3.2 La transformée inverse de Fourier.

La transformée inverse de Fourier est la fonction  $f(t)$  reconstituée à partir de son spectre  $F(\nu)$ .  
La transformation inverse est définie par : [2, 3, 4, 14]

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu. \quad (\text{II}, 5)$$



## 2.4. Interprétation physique de la transformation de Fourier.

D'après l'équation (II.5),  $F(\nu)$  représente la somme des valeurs du produit  $f(t) \cdot e^{-j2\pi\nu t}$  sur le domaine de définition de  $f$ . En vertu des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, le facteur  $e^{-j2\pi\nu t}$  joue le rôle d'opérateur qui extrait du signal  $f(t)$  la composante sinusoïdale ayant la fréquence  $\nu$ .

Le spectre  $F(\nu)$  est donc l'ensemble des composantes sinusoïdales de  $f(t)$ . [3]

## 2.5 Propriétés de la transformation de Fourier.

### 2.5.1 Linéarité [2,3]

La transformation de Fourier est une opération linéaire.

$$f(t) \longleftrightarrow F(\nu)$$

$$g(t) \longleftrightarrow G(\nu)$$

$$\text{alors : } a f(t) + b g(t) \longleftrightarrow a F(\nu) + b G(\nu)$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2$$

### 2.5.2 Propriété de parité. [2,3]

Les fonctions  $f(t)$  et  $F(\omega)$  peuvent être réelles ou complexes, paires ou impaires. Il existe une correspondance de leurs propriétés

$f(t)$	$F(\omega)$
Reelle paire	Reelle paire
Reelle impaire	Imaginaire impaire
Imaginaire paire	Imaginaire paire
Imaginaire Impaire	Reelle impaire

### III ECHANTILLONNAGE DES SIGNAUX VIBROACOUSTIQUES

#### 1. Principe

Afin de pouvoir traiter les signaux de manière rapide grâce à l'utilisation de calculateurs numériques, il faut procéder à un échantillonnage de ces signaux pour les présenter sous forme de data.

L'échantillonnage consiste à observer les signaux non pas sous forme continue tels qu'ils sont enregistrés, mais à certains instants seulement. En général ces observations sont périodiques [1]

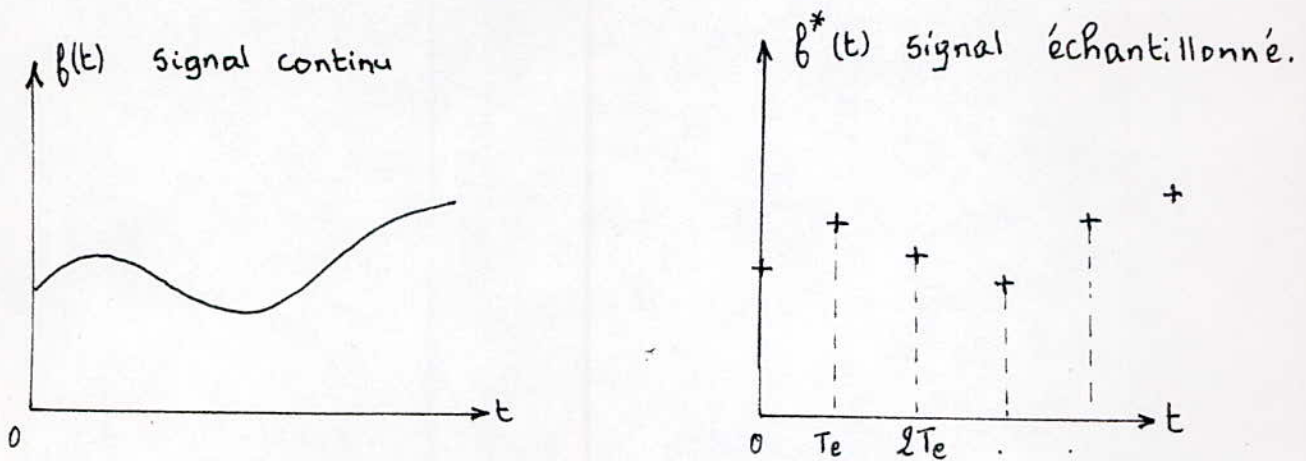


FIG II.2

Le signal échantillonné est une suite numérique :  $f(0), f(T_e), f(2T_e), \dots$

$T_e$  est le pas d'échantillonnage [1].

## 2. Impulsion de Dirac

L'échantillonnage d'un signal peut-être représenté de plusieurs manières. On utilisera les propriétés de l'impulsion de Dirac [1].

### 2.1. Définition [4]

Dans le domaine temporel, l'impulsion de Dirac  $\delta(t-t_0)$  est une distribution qui assigne à une fonction test  $\varphi(t)$  la valeur numérique  $\varphi(t_0)$  selon la relation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t-t_0) dt = \varphi(t_0) \quad \forall t_0, \forall \varphi \quad (\text{II } 6)$$

Cette relation met en évidence l'échantillonnage de  $\varphi(t)$  effectué à l'instant  $t_0$  par l'impulsion de Dirac  $\delta(t-t_0)$  [4].

## 3. Peigne de DIRAC

### 3.1 Définition

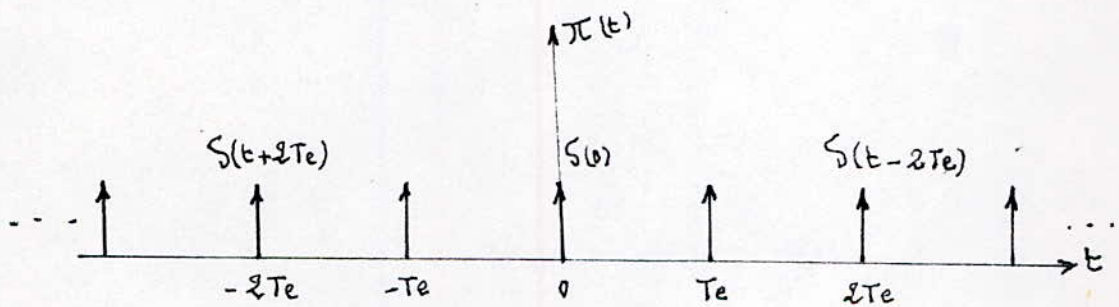
Dans le domaine temporel, un peigne de Dirac est une suite périodique illimitée d'impulsions de Dirac

de même intensité, dans le cas où celle-ci est l'unité le peigne est dit unitaire et noté  $\pi(t)$  [1,2,4].

### 3.2. Représentation

Soit  $T_e$  la période de répétition des impulsions, nous représenterons les peignes unitaires centrés par la relation :

$$\pi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) \quad (\text{II.7})$$



FIG

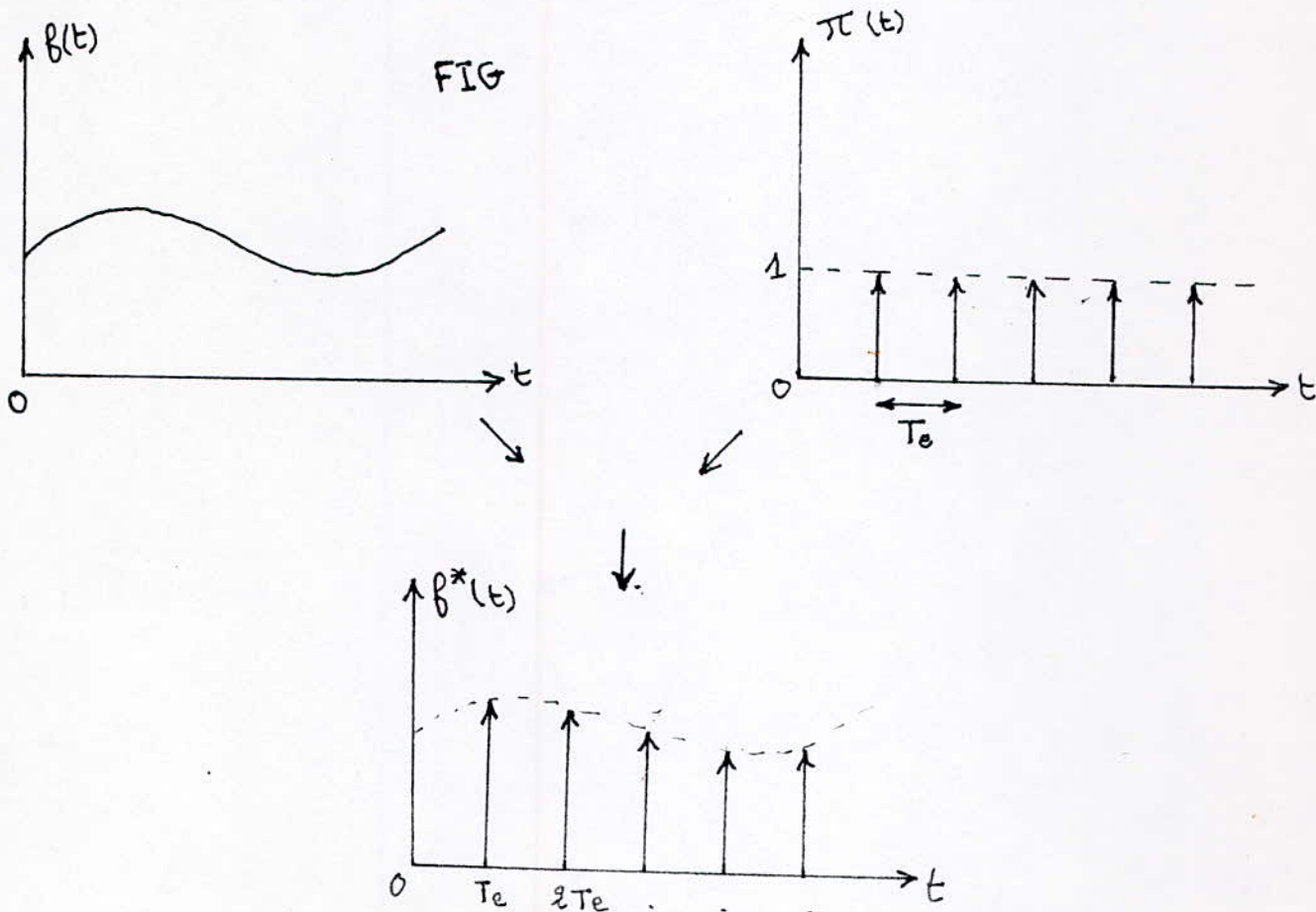
Dans le domaine fréquentiel, un peigne de Dirac unitaire et centré est défini par une relation analogue :

$$\pi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \quad (\text{II.8})$$

où  $\omega_0$  désigne la période fréquentielle des impulsions.

## 4. Echantillonnage

L'échantillonnage d'un signal continu  $f(t)$  se fait par multiplication de ce signal par un peigne de Dirac unitaire et de période égale au <sup>pas</sup> d'échantillonnage voulu. Nous obtenons des impulsions de Dirac dont les intensités sont les valeurs prises par le signal aux instants  $kT_e$ .



Le pas d'échantillonnage du signal est égal à la période du peigne de Dirac.

## 5- Convolution de deux signaux.

### 5.1. Integrale de convolution.

Soient deux fonctions  $x(t)$  et  $h(t)$ . La convolution  $y(t)$  de ces deux fonctions est définie par l'integrale [1,2,4]

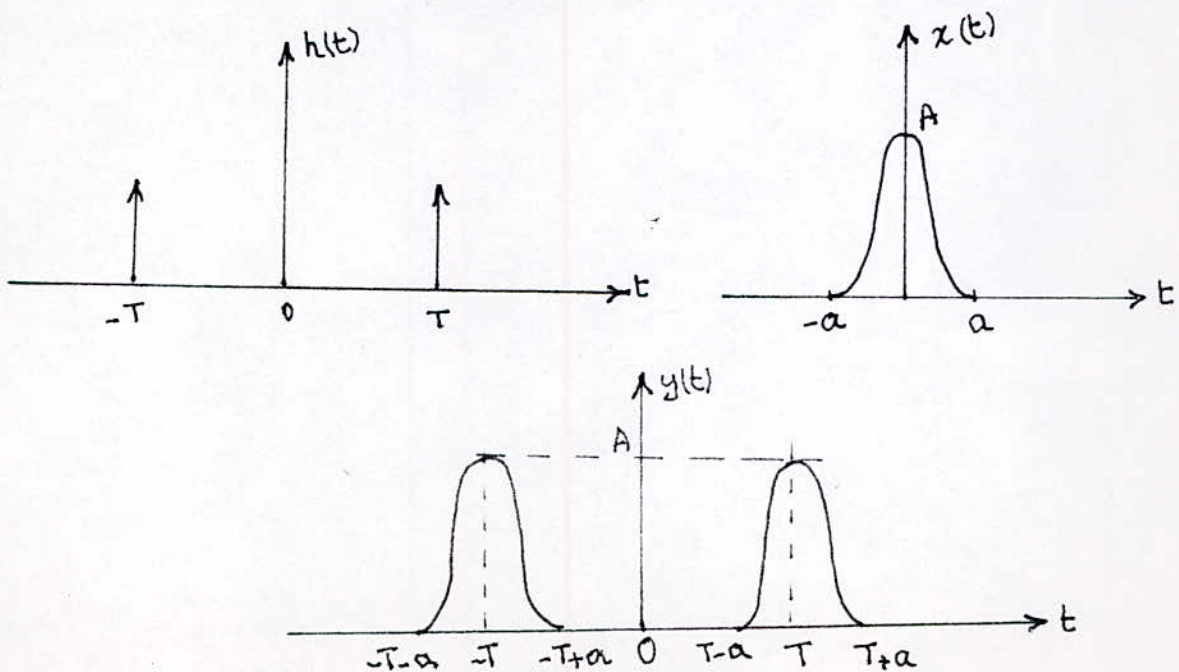
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (\text{II.9})$$

et notée :  $y(t) = x(t) * h(t)$  (II.10)

### 5.2. Convolution d'un signal avec une impulsion de Dirac

Prenons  $h(t) = \delta(t-T) + \delta(t+T)$

et  $x(t)$  un signal quelconque.



FIG

L'opération de convolution reproduit le signal  $x(t)$  aux positions occupées par les impulsions de Dirac.

### 5.3. Théorème de convolution.

Soient deux couples de Fourier  $x(t) \leftrightarrow X(\nu)$   
et  $h(t) \leftrightarrow H(\nu)$ .

La transformée de Fourier de la convolution  $x(t) * h(t)$  est le produit des transformées  $X(\nu)$  et  $H(\nu)$  dans le domaine fréquentiel [1, 2, 4, 9].

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(\nu) \cdot H(\nu) \quad (\text{II.11})$$

Ce théorème admet une réciproque :

$$x(t) \cdot h(t) \leftrightarrow X(\nu) * H(\nu). \quad (\text{II.12})$$

Remarque : si  $h(t) = \pi_T(t)$  peigne de Dirac de période  $T$  ; on a :

$$x(t) \cdot \pi_T(t) \leftrightarrow X(\nu) * \frac{1}{T} \pi_{1/T}(\nu) \quad (\text{II.13})$$

$\pi_{1/T}(\nu)$  est le peigne transformé du peigne unitaire  $\pi_T(t)$  [1, 2, 4].



Faire un échantillonnage d'un signal dans le domaine temporel à un pas d'échantillonnage  $T$ , correspond dans le domaine des fréquences à faire une périodisation de sa transformée de Fourier à une période  $\frac{1}{T}$ .  
L'amplitude du spectre (transformée du signal) est réduite d'un facteur  $T$ .

## 6 - Théorème de SHANON - Repliement des spectres.

L'échantillonnage idéal d'un signal est effectué avec un pas  $T_e$  tel qu'on ne perde aucune information contenue dans le signal [1, 4, 9, 10].

### 6.1. Énoncé du théorème [1, 2, 4, 14]

Pour que la répétition périodique du spectre ne déforme par le motif répété, il faut et il suffit que la fréquence de répétition,  $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ , soit supérieure ou égale à  $2\nu_c$ .

$\nu_c$  est la fréquence maximale pouvant être lue sur le spectre c'est à dire la composante harmonique à la plus grande fréquence contenue dans le signal temporel.

$$\frac{1}{T_e} \geq 2\nu_c \quad (\text{II.14})$$

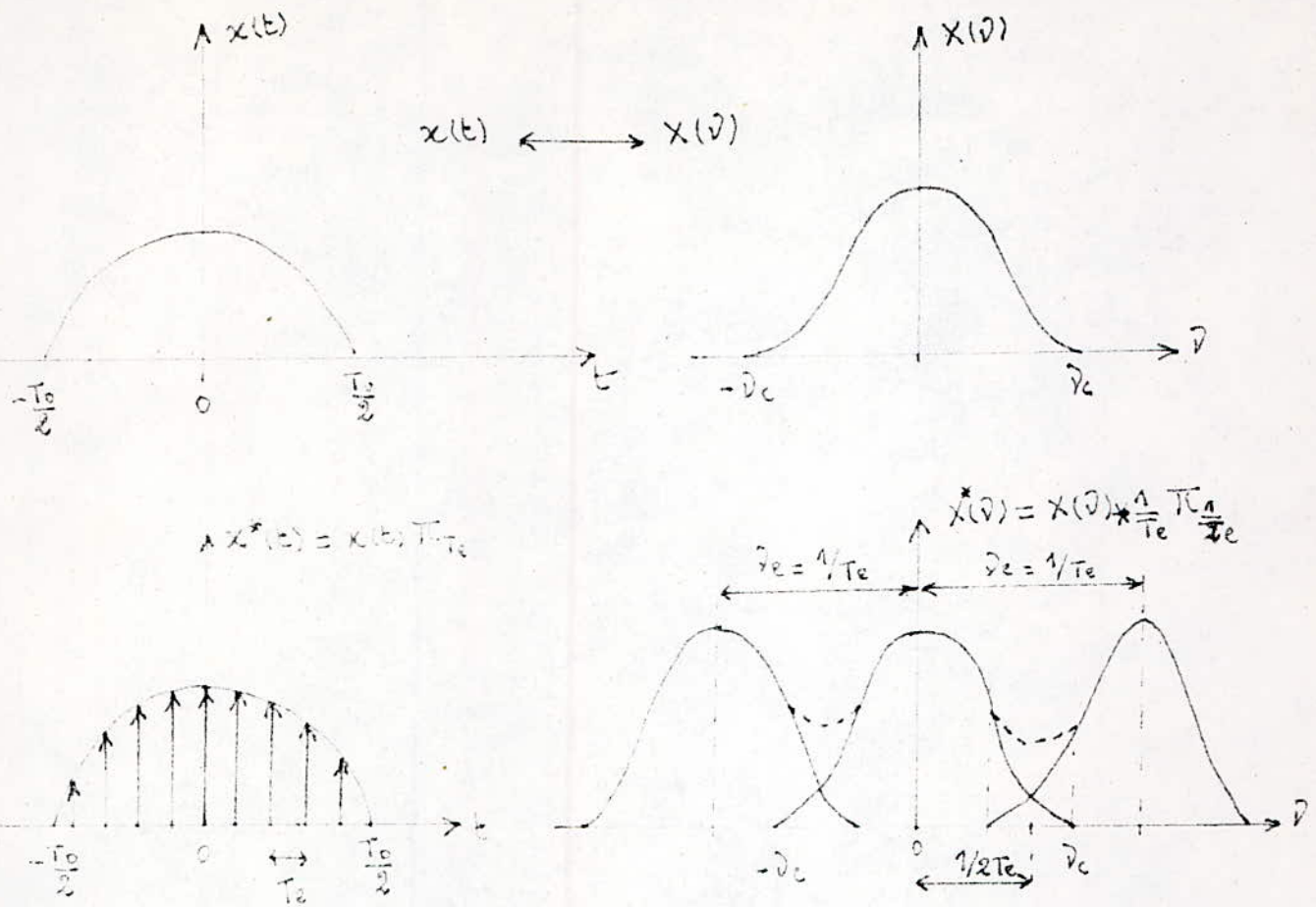


FIG II.6

La Fig montre le chevauchement du spectre périodisé quand la fréquence  $\nu_c$  est supérieure à  $1/2T_e$ .

Ce chevauchement a lieu symétriquement autour de la fréquence  $\frac{1}{2T_e}$  appelée fréquence de Nyquist. Ce chevauchement est aussi appelé "repliement du spectre" autour de la fréquence de Nyquist et en littérature anglaise "ALIASING" [2, 3, 10]

La référence bibliographique [3] explique plus en détail ce phénomène.

## 7 - Fenêtres de Pondération.

Les signaux vibroacoustiques ont un caractère stochastique donc de durée infinie et non périodiques... Or, en pratique, on ne peut enregistrer ni traiter un signal infiniment long vu la capacité limitée calculateurs. Pour cela on limite la durée du signal à un intervalle de temps de durée finie  $T_0$ . Ceci s'obtient en multipliant le signal par une fonction de pondération.

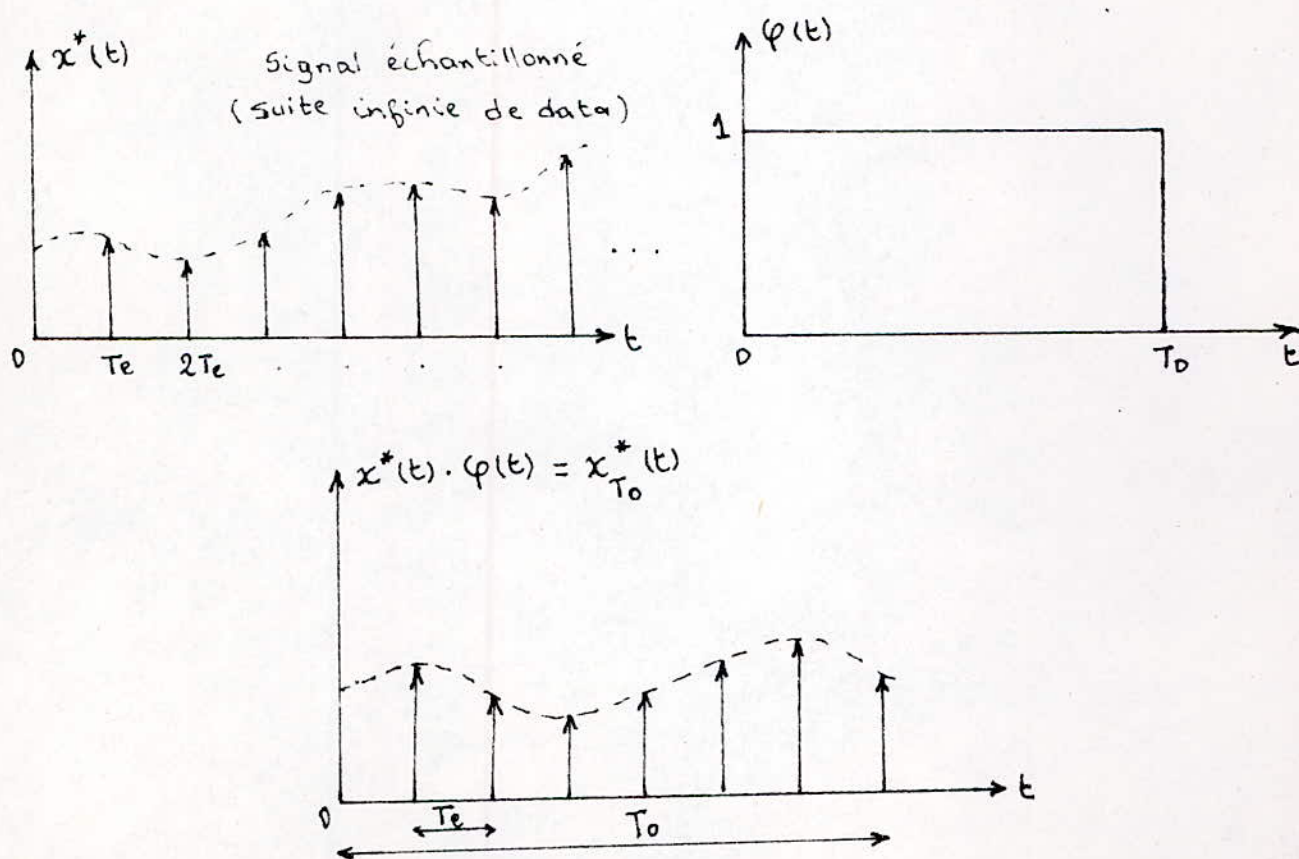


FIG II.7

On obtient ainsi un signal échantillonné à un pas  $T_e$  et dont la durée temporelle est  $T_0$ .

Le nombre d'échantillons est :  $N = T_0/T_e$

La suite de data définissant le signal est :  $x(0), x(T_e), x(2T_e), \dots, x((N-1)T_e)$ .

Connaissant le pas d'échantillonnage, on peut aussi bien noter le signal sous la forme  $x(k)$  ;  $k = 0, \dots, N-1$ .

#### IV TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRETE (D.F.T)

La transformation discrète de Fourier permet de trouver le spectre d'un signal temporel discret et fini.

##### 1- Relation fondamentale. [1, 2, 4, 9, 10]

On considère la suite temporelle  $x(kT_e)$  obtenue par échantillonnage et limitation de durée d'un signal analogique  $x(t)$ .

La transformée de Fourier est définie de manière discrète par l'équation suivante :

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \exp(-j2\pi\nu kT_e) \quad (\text{II.15})$$

Le spectre obtenu est discret donc la fréquence  $\nu$  est une variable discrète qui ne prend que les valeurs :

$$\nu = n \nu_0 = \frac{n}{T_0} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{II.16})$$

Cette discretisation du spectre est due au fait que le signal  $x(kT_e)$  de durée  $T_0$  est considéré comme une période d'un signal périodique de période  $T_0$ . En vertu du théorème de convolution, la périodisation du signal à la période  $T_0$  crée un échantillonnage de son spectre au pas  $\nu_0 = 1/T_0$ .

$$\text{on a donc : } 2\pi \nu k T_e = 2\pi n \nu_0 k T_e = 2\pi \frac{n}{T_0} k T_e = 2\pi n k \frac{T_e}{T_0} \quad (\text{II.17})$$

$$2\pi \nu k T_e = 2\pi n k / N \quad (\text{II.18})$$

On définit la DFT par la relation : 
$$X(n \nu_0) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k T_e) \exp(-j 2\pi n k / N)$$
  
 $k = 0, \dots, N-1. \quad (\text{II.19})$

## 2- Propriétés :

La DFT possède les mêmes propriétés de linéarité et de parité que la transformation de Fourier continue [1,2,4]. Les spectres obtenus peuvent également être réels ou complexes.

## 3- Relation de définition de la DFT inverse. (IDFT)

On définit la transformée discrète de Fourier inverse par la relation :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp(2\pi j n k / N) \quad (\text{II.20})$$

$$k = 0, \dots, N-1$$

L'établissement et la démonstration de la relation sont donnés en détail dans les références bibliographiques [1, 2, 4, 9, 14].

#### 4. Propriété fondamentale de la DFT.

Nous avons vu (IV.1) que pour transformer un signal par la DFT on le considère comme périodique et de période  $T_0$ .  $T_0$  est la durée d'enregistrement du signal stochastique.

La DFT permet à partir d'une période  $T_0$  du signal de trouver une période de son spectre dite période spectrale.

Le nombre d'échantillons de la période du signal est égal au nombre d'échantillons de la période spectrale.

Soit  $N$  le nombre d'échantillons constituant une période ;

on a :

$$X(i) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j 2\pi i k / N) \quad (\text{II.21})$$

et

$$X(N-i) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j 2\pi k \frac{N-i}{N}) \quad (\text{II.22})$$

On peut démontrer que  $X(i)$  et  $X(N-i)$  sont des complexes conjugués donc de modules égaux [1, 2, 4, 8].

Conséquence : Lorsqu'on détermine le spectre d'un signal de  $N$  échantillons, il suffit de considérer les raies spectrales  $X(0), \dots, X(N/2)$  ; Les autres sont déduites par symétrie.

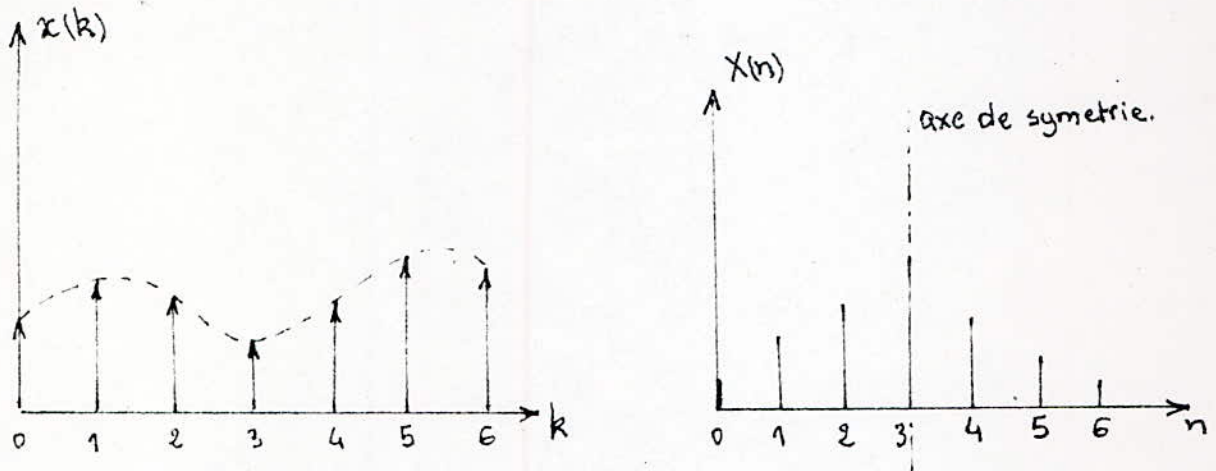


FIG II-8

Cette symétrie vient du fait que le signal  $x(k)$  est considéré lors des calculs de la DFT comme une période d'une fonction réelle et paire [7, 8]. Puisque la transformée d'une fonction réelle et paire est aussi réelle et paire, on retrouve les raies correspondant aux fréquences négatives affectées des indices  $\frac{N}{2}$  à  $N$  [7]

## V LA TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE (FFT)

L'emploi de la DFT comporte une sévère limitation: le calcul des  $N$  échantillons d'une période spectrale exige un nombre d'opérations de l'ordre de  $N^2$ . Si  $N$  est élevé le temps du calcul devient beaucoup trop long et il faut mettre en œuvre des calculateurs à grand espace mémoire [2.4]

La méthode FFT (Fast - Fourier - Transform) permet, par une organisation méthodique des calculs, de diminuer considérablement le temps de calcul.

On trouvera dans les références bibliographiques [2.4.14] tous le développement mathématique nécessaires à la compréhension des algorithmes de cette procédure. Dans le cadre de cette étude, nous utiliserons l'algorithme de Cooley-Tukey qui est le plus utilisé pour la procédure FFT.



## VI DISTORSIONS DES SPECTRES

Les spectres déterminés par DFT sont entachés d'erreurs qui modifient les informations qui y sont contenues. Il existe deux types de distorsions :

### 1- Phénomène de repliement des spectres (ALIASING)

Le théorème de Shannon impose que la cadence d'échantillonnage ( $f_e = 1/T_e$ ) d'un signal doit être au moins égale au double de la fréquence maximale qu'on envisage de distinguer dans ce signal.

En pratique, nous avons à transformer un signal vibro-acoustique qui est susceptible de contenir de composantes harmoniques supérieures à la fréquence maximale (fréquence de NYQUIST  $f_N = \frac{f_e}{2}$ ) et peuvent aller jusqu'à l'infini. Les fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist se réfléchissent autour de celle-ci et introduisent des raies parasites dans le spectre.

Afin d'éviter ce phénomène, il faut filtrer le signal à l'aide d'un filtre passe-bas qui coupe à la fréquence de Nyquist, de façon à éliminer les hautes fréquences. On obtient ainsi un spectre allant de 0 à la fréquence de Nyquist [1, 2, 4, 8, 10]

La perte des informations portées par les hautes fréquences est sans grande importance vu que l'énergie des vibrations est d'autant plus faible que leurs fréquences sont élevées.

## 2- Fenêtres de troncature

L'emploi des fenêtres de troncature consiste à appliquer une pondération à la série de data. Il sert à limiter les distorsions au niveau du spectre qui résultent du temps fini d'observations du signal. Les modèles les plus utilisés sont les fenêtres de Hanning et de Hamming [4].

Elles sont définies par la relation :

$$w(t) = \alpha + (1-\alpha) \cos 2\pi t/\theta \quad (\text{II.23})$$

$$t \in [-\theta/2, +\theta/2]$$

$\alpha = 0,50$  : fenêtre de Hanning.

$\alpha = 0,54$  : fenêtre de Hamming.

Un choix judicieux de la fenêtre permet de diminuer le niveau des distorsions.

## VIII SPECTRES DES SIGNAUX VIBROACOUSTIQUES

L'analyse spectrale d'un phénomène vibroacoustique permet de recueillir dans un spectre de fréquences les informations contenues dans l'enregistrement temporel. Par un traitement numérique du signal, elle conduit à un spectre discret ou spectre de raies où chaque raie représente une composante sinusoïdale contenue dans le signal.

### 1 Résolution spectrale.

On entend par "résolution" ou "pouvoir séparateur" d'une technique d'analyse spectrale l'aptitude qu'a cette technique de distinguer deux raies spectrales voisines [10].

Soit un signal  $x(t)$  de durée  $T_0$  et échantillonné avec un pas  $T_e$ . Cet échantillonnage approxime le signal vibroacoustique continu par une suite de data  $x(kT_e)$  ;  $k=0, \dots, N-1$  comportent  $N$  échantillons avec  $N = \frac{T_0}{T_e}$ .

Après transformation rapide de Fourier (FFT) le spectre comporte des raies correspondant aux fréquences suivantes:

$$\nu_{\min} = \frac{1}{T_0} ; \nu_2 = \frac{2}{T_0} , \dots , \nu_{\max} = \frac{N}{2T_0} = \frac{N}{2T_0} . \quad (\text{II.24})$$

Les raies spectrales sont séparées par un intervalle constant  $\frac{1}{T_0}$  qui est la résolution spectrale  $\Delta \nu = \nu_0$

$$\Delta \nu = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{NT_e} = \frac{\nu_e}{N} = \nu_0 \quad (\text{II-25})$$

$\nu_e$  est la cadence d'échantillonnage du signal.

Afin de pouvoir distinguer lors de l'analyse spectrale deux fréquences proches il faut minimiser la quantité  $\Delta \nu$  c'est à dire améliorer la résolution du spectre [8].

## 2 - Spectre de puissance et spectre d'amplitude.

Le signal temporel est défini par une suite de data  $x(kT_e)$  à valeurs réelles. Sa transformée de Fourier est généralement une suite de data à valeurs complexes  $X(n\nu_0)$ .

On appelle "spectre d'amplitude" le spectre constitué de la suite des modules  $|X(n\nu_0)|$ .

Le "spectre de puissance" ou "Densité spectrale de puissance" est la suite des carrés des modules  $|X(n\nu_0)|^2$

## VIII LES DIFFICULTES D'INTERPRETATION DES SPECTRES.

L'interprétation d'un phénomène vibratoire contient en fait, seule, les données provenant des sources vibratoires au sein de la machine.

Les phénomènes d'interaction entre les organes de la machine se traduisent par une modulation en fréquence ou en amplitude des courbes générales. Les deux modes de modulation existent globalement ensemble, la modulation d'amplitude est liée aux propriétés "élastiques" du système et la modulation de fréquence est due à l'élasticité locale du système [7].

Ces deux phénomènes, ainsi que les phénomènes de réflexion d'onde et rétrodiffraction, se matérialisent sous forme de familles de raies uniformément réparties dans le spectre [7, 12].

L'identification des familles de raies ainsi que leurs cadences de répétition respectives donnent l'information de base servant à identifier la source de la vibration lors de l'établissement du diagnostic [7].

D'autre part, le chemin suivi par l'onde vibratoire introduit un bruit de fond aléatoire [7] qui apparaît sur le spectre combiné aux raies correspondant aux différentes fréquences. Ces raies peuvent être groupées suivant des plages assez étroites de fréquence.

Des méthodes récentes permettent de pallier à ces problèmes. Elles consistent à étudier plus en détail les parties intéressantes du spectre en améliorant la résolution, en limitant l'influence des bruits de fond et en mettant en évidence les périodicités cachées du spectre.

Ces méthodes mentionnées portent les noms de "CEPSTRE" ou "ANALYSE CEPSTRALE" (CEPSTRUM ANALYSIS) et "Zoom FFT", quelquefois appelée "Loupe spectrale".

## CHAPITRE III BUT DE L'ETUDE.

Le but de cette étude est de faire l'exposé des méthodes Zoom-FFT et l'Analyse Cepstrale ainsi que la programmation des deux procédures.

Il s'agit de montrer les avantages apportés par les deux méthodes, leur utilisations et leur contribution à l'établissement du diagnostic d'une machine tournante.

# CHAPITRE IV ANALYSE CEPSTRALE.

## I. INTRODUCTION

Les techniques cepstrales (cepstrum technics) sont utilisées pour l'analyse des signaux vibroacoustiques contenant des échos ou réverbérations d'une onde fondamentale dont la structure est à priori connue. Le cepstre de puissance (Power cepstrum) est généralement utilisé pour déterminer le temps d'arrivée de l'onde fondamentale et de ses échos avec indication de leurs amplitudes relatives. [12]

Les domaines d'application de l'analyse cepstrale englobent : le radar, le sonar, en sismologie et hydroacoustique où l'on s'intéresse au temps d'arrivée de l'écho ; en analyse de la parole pour déterminer la fréquence fondamentale d'un speaker et l'enveloppe qui la module [12][11]. L'analyse cepstrale est aussi appliquée en mécanique pour l'étude des signaux vibroacoustiques émanant des machines tournantes où elle sert à identifier les familles d'harmoniques étalées dans le spectre.



L'écart fréquentiel des harmoniques renferme de précieuses informations sur l'origine de la vibration [7].

## II DEFINITIONS DU CEPSTRE.

Le cepstre est défini de plusieurs manières, mais toutes le considèrent comme le résultat d'une deuxième analyse spectrale appliquée au spectre [7].

### 1. Définition 1

Le cepstre a été défini à l'origine par Bogert et al en 1963 comme étant "le spectre de puissance du logarithme du spectre de puissance d'un signal" [3, 7, 12].

$$C(\tau) = \left| \mathcal{F} \{ \log F_{xx}(f) \} \right|^2 \quad (\text{III-1})$$

où  $F_{xx}(f)$  est le spectre de puissance du signal  $f_x(t)$ .

$$F_{xx}(f) = \left| \mathcal{F}(f_x(t)) \right|^2 \quad (\text{III-2})$$

$\mathcal{F}$  représente la transformation de Fourier. Défini ainsi, le cepstre est appelé "Cepstre de puissance". (Power Cepstrum).

## 2- Définition 2.

Une deuxième définition considère le cepstre comme étant " La transformée de Fourier inverse du logarithme du spectre de puissance " [7].

$$C(z) = \mathcal{F}^{-1} \{ \text{Log } F_{xx}(f) \} \quad (\text{III.3})$$

## 3- Définition 3

Le cepstre complexe (complex cepstrum) a été défini par Oppenheim (1965) comme " La transformée en  $z$  inverse du logarithme complexe de la transformée en  $z$  du signal " [12].

$$\hat{x}(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \text{Log}(X(z)) z^{n-1} dz \quad (\text{III.4})$$

où  $\hat{x}(0) = \log |x(0)|$  et  $X(z)$  est la transformée en  $z$  de la suite  $x(nT)$  définissant le signal. Le contour d'intégration  $C$  est à l'intérieur d'un domaine où la fonction  $\text{Log}(X(z))$  est analytique.

Si le contour  $C$  est le cercle de centre l'origine et de rayon 1, la transformée en  $z$  est identique à la transformée de Fourier [1, 9, 12].

## 4 - Définition 4.

On peut également définir le cepstre comme "Le spectre d'amplitude du logarithme du spectre de puissance" [7].

$$C(z) = \mathcal{F} \{ \text{Log } F_{xx}(f) \} \quad (\text{III-5})$$

Compte tenu des propriétés de parité de la transformation de Fourier [2, 3, 4, 7] pour une fonction réelle paire, les cepstres obtenus avec la transformation directe ou inverse de Fourier sont identiques.

Cette 4<sup>e</sup> définition s'avère, dans le cas d'une fonction  $f(t)$  réelle paire, identique à la définition 2.

### III INTERPRETATION PHYSIQUE DU CEPSTRE

Nous avons vu que la transformation de Fourier d'un signal vibroacoustique permet d'obtenir un spectre sur lequel sont visibles les composantes sinusoïdales à différentes fréquences et amplitudes. Par analogie, on peut dire que le cepstre permet de mettre en évidence la structure périodique du spectre quand elle existe.

En effet, la 2<sup>e</sup> transformation de Fourier met en évidence l'existence dans le spectre des familles de raies spectrales séparées par un intervalle de fréquence constant. Une raie dans le cepstre représentera une moyenne de cet intervalle sur tout le spectre [7].

#### IV TERMINOLOGIE RELATIVE A L'ANALYSE CEPSTRALE.

L'analyse cepstrale constitue une extension de l'analyse spectrale, ceci a introduit une extension terminologique. L'appellation "Cepstre" est obtenue en inversant les syllabes du mot "spectre" [3].

Notons que la variable indépendante  $Z$  dans les équations de définition du cepstre a la dimension d'un temps.  $Z$  est appelée "quefrency" ou de "fréquence" [7].

Afin d'éviter les confusions, Bogert et al (1963) ont introduit la règle d'inversion des syllabes suivante [2]:

Frequency	→ quefrequency	filtering	→ liftering
Spectrum	→ Cepstrum	harmonique	→ rahmonic
Phase	→ Saphe	period	→ répiod.
amplitude	→ Gamnitude		

En langue française les mots les plus fréquents sont "Cepstre" et "quefrencé".

## V CHOIX DE LA DEFINITION DU CEPSTRE.

D'après la bibliographie utilisée, il n'existe pas de critère établi quant au choix de l'une ou l'autre des différentes définitions du cepstre. Le choix du cepstre dépend du domaine de l'analyse et des contraintes relatives à cette analyse.

Le cepstre de puissance (Déf 1) est utilisé pour l'étude des phénomènes d'échos et pour détecter les périodicités dans le spectre. Ses domaines d'application sont le radar, sonar, électro-encéphalo-gramme (EEG) [12] et en mécanique pour le diagnostic des machines [7].

Le cepstre complexe (Déf 3) permet de garder les informations portées par la phase des vibrations combinées dans le signal vibroacoustique [12]

Dans notre étude nous utiliserons le cepstre tel qu'il a été défini par la relation 1

$$C(\gamma) = \left| \mathcal{F} \left\{ \log [F_{xx}(b)] \right\} \right|^2 \quad (\text{III-6})$$

$F_{xx}(f)$  est le spectre de puissance ou densité spectrale de puissance du signal  $f(t)$ . L'opérateur  $\mathcal{F}$  désigne la transformée de Fourier de la fonction entre accolades.

L'avantage d'un tel choix réside dans les propriétés de la fonction logarithme [3]:

1 - Considérons le cas normal où le spectre de puissance d'un signal vibroacoustique en un point d'enregistrement  $Y$  est le produit du spectre de puissance de la source vibratoire  $X$  et du carré de l'amplitude de la fonction de transfert du support qui transmet la vibration :

$$F_{YY}(f) = F_{XX}(f) \cdot |H_{XY}(f)|^2. \quad (\text{III.7})$$

En prenant le logarithme on a:

$$\text{Log } F_{YY}(f) = \text{Log } F_{XX}(f) + 2 \log |H_{XY}(f)|$$

La transformation de Fourier étant linéaire on a: [III.8]

$$\mathcal{F} \{ \log F_{YY}(f) \} = \mathcal{F} \{ \text{Log } F_{XX}(f) \} + 2 \mathcal{F} \{ \log |H_{XY}(f)| \}$$

L'équation ci-dessus montre que l'effet de la source et celui du chemin suivi par la vibration sont séparés grâce à la fonction logarithme, alors qu'ils étaient combinés par multiplication dans le spectre (ég: III.7)

La fonction logarithme sert à transformer cette multiplication en addition. Ces deux effets sont additionnés dans le cepstre, et puisqu'ils sont souvent de queffrences différentes, ils seront séparés dans le graphe du cepstre [7]. Le cepstre est pratiquement independant du point d'enregistrement.

2- L'emploi de la fonction logarithme conduit à un cepstre ayant une échelle logarithmique en ordonnée, ceci réduit la représentation du bruit parasite et des distorsions [7].

## VI PROPRIETES DE L'ANALYSE CEPSTRALE

Le cepstre, résultat de l'application de la transformation de Fourier au spectre logarithmique, permet de montrer l'existence éventuelle des périodicités dans le spectre.

Ces périodicités sont causées par la modulation de fréquence et d'amplitude entre deux vibrations provenant de deux sources différentes qui interagissent entre elles de façon qu'une modulation ait lieu [7]. De plus les phénomènes d'échos apparaissent comme une famille de pics répartie dans le spectre [12].

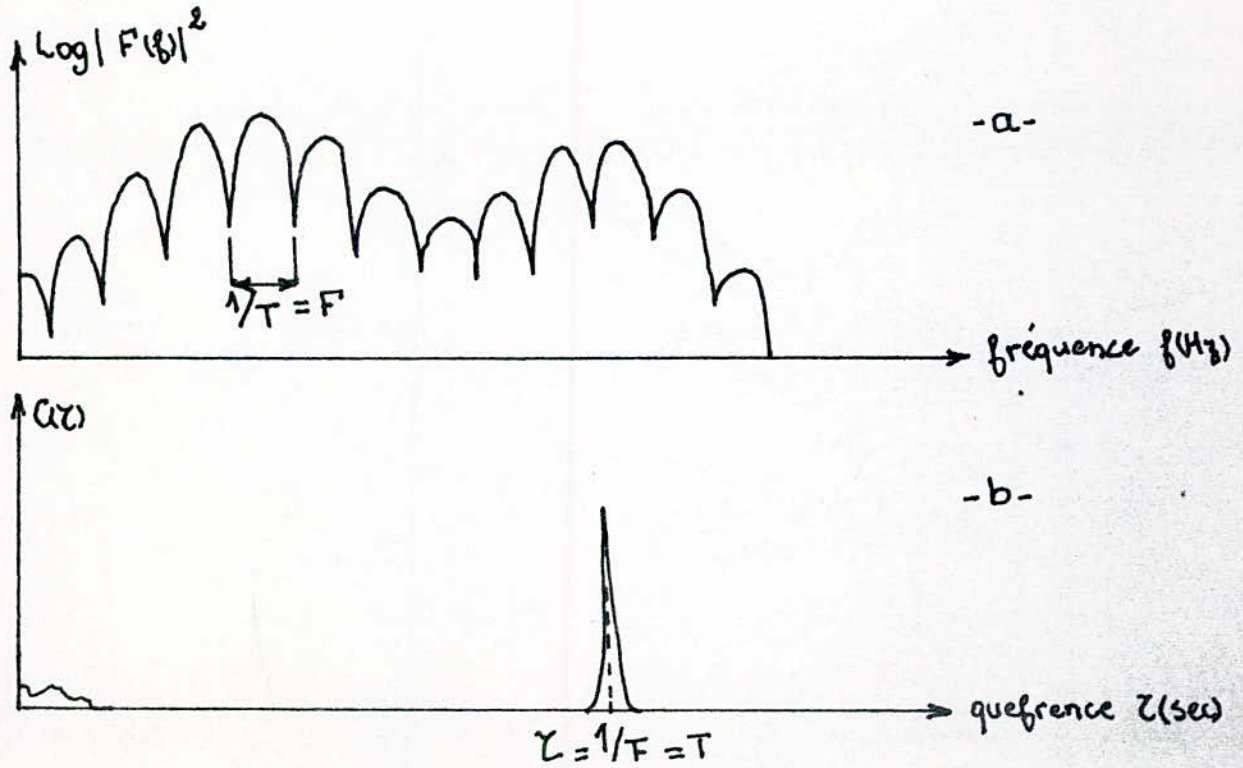


FIG IV.1



La figure IV.1-a montre un spectre logarithmique de puissance présentant un motif périodique de longueur en fréquence  $F = 1/T$ .

Le cepstre (Fig IV.1-b-) obtenu à partir d'un tel spectre matérialise l'existence de la périodicité par un pic aigu à la quefreuce  $\tau = 1/F = T$  [10].

Notons que pour cet exemple la périodicité est directement visible sur le spectre logarithmique, le cepstre n'en apporte que la confirmation et permet de la quantifier. Souvent, le motif périodique ne peut-être identifié sur le spectre, mais l'utilisation du cepstre indique son existence et permet de connaître sa longueur fréquentielle.

## VII ECHELLE DES QUEFRENCES.

On considère un signal temporel de durée  $T_0$ , échantillonné à un pas  $T_e$ . Son spectre  $X(n)$  comporte un nombre d'échantillons  $N$  (raies spectrales) avec:

$$N = T_0/T_e. \quad (\text{III.9})$$

Nous savons d'après les propriétés de la DFT que les raies d'indice 1 à  $\frac{N}{2}$  sont symétriques des raies d'indices

$\frac{N}{2}$  à  $N$  (chapitre II, paragraphe IV.4) appelées fréquences négatives [1, 2].

$$\nu_1 = \frac{1}{T_0}, \nu_2 = \frac{2}{T_0}, \dots, \nu_{\frac{N}{2}} = \frac{N}{2T_0}, \dots, \nu_N = \frac{N}{T_0} \quad (\text{III.10})$$

Le spectre s'étend de la fréquence minimale  $\nu_1 = \frac{1}{T_0}$  à la fréquence maximale  $\nu_N = \frac{N}{T_0}$ .

$$\nu_{N/2} = \frac{N}{2T_0} = \frac{1}{2T_e} : \text{fréquence de NYQUIST.}$$

$$\nu_N = \frac{N}{T_0} = \frac{1}{T_e} \text{ fréquence d'échantillonnage.}$$

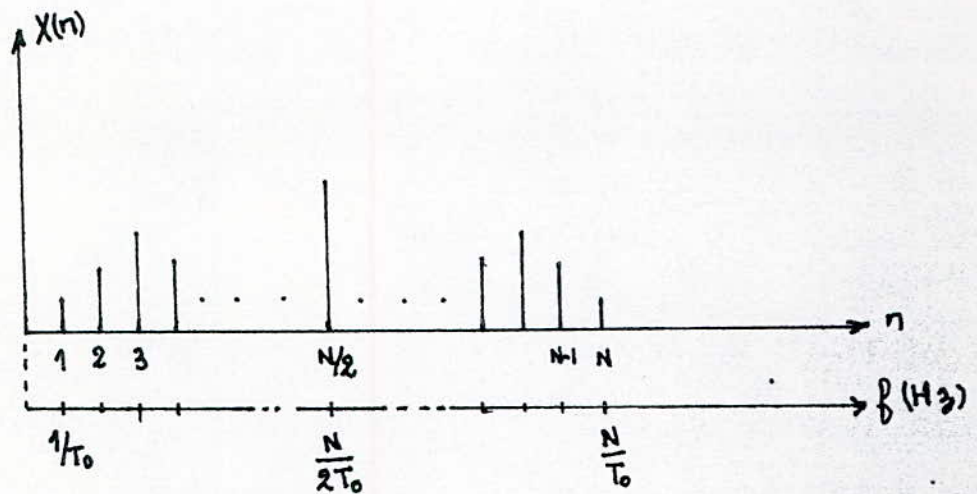


FIG IV.2

Le calcul du cepstre considère le spectre  $X(n)$  comme signal et le transforme par FFT. On considère les  $N$  raies du spectre pour obtenir un cepstre également composé de  $N$  raies.

Lors du calcul, le spectre à  $N$  raies (Two sides spectrum) est considéré comme une fonction réelle et paire [7]. Le cepstre obtenu est aussi une fonction réelle paire dont les raies cepstrales d'indice  $N/2$  à  $N$  représentent les queffrences négatives [7]. La partie imaginaire des échantillons du cepstre est nulle, donc les informations relatives à la phase sont perdues [7].

On considère uniquement les raies spectrales d'indice 1 à  $N/2$ , les autres étant leurs symétriques. Les queffrences correspondantes sont :

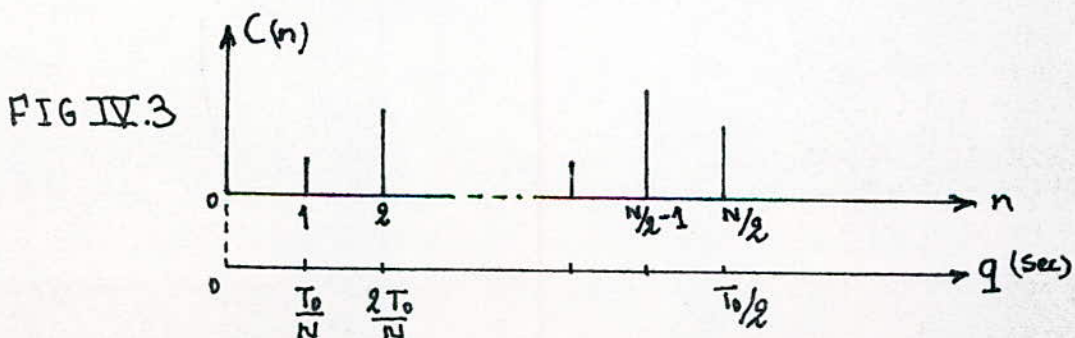
$$q_1 = \frac{1}{2\Delta n}, q_2 = \frac{2}{2\Delta n}, \dots, q_{N/2} = \frac{N}{2\Delta n}$$

$$\text{ou } q_i = \frac{i}{\Delta n} \quad i = 1, \dots, N/2.$$

$$\text{or } q_{N/2} = \frac{N}{2\Delta n} = \frac{N}{2(1/2T_e)} = \frac{N}{2(1/2T_0)} = \frac{N}{4\Delta n/2}$$

$$\text{en remplaçant } \Delta n \text{ par } \frac{N}{2T_0} \text{ on a : } q_i = \frac{iT_0}{N} \quad i=1 \dots N/2.$$

$$q_{N/2} = T_0/2 \quad (\text{III.11})$$



## VIII DISTORSIONS DU CEPSTRE

### 1. Repliement du cepstre (Aliasing)

Le phénomène de repliement est toujours présent dans le cepstre [12]. Il est dû à l'existence dans le cepstre des harmoniques secondaires dont la fréquence peut généralement dépasser la fréquence maximale  $\frac{T_0}{2} = q_{max}$ ,  $T_0$  étant la durée du signal temporel.

Pour éviter le phénomène de repliement, on doit prendre une durée de signal aussi longue que possible pour que l'amplitude des harmoniques au-dessus de  $q_{max}$  ait diminué au point que son repliement soit négligeable [12].

On voit ici un des avantages de l'utilisation de la procédure Zoom-FFT (exposée au chapitre V) qui a la propriété de rallonger considérablement la durée du signal et de ce fait réduit les distorsions introduites par repliement du cepstre.

La durée du signal peut être augmentée d'une autre manière. Il s'agit de compléter la suite de données constituant le signal avec des échantillons nuls [12].

En effet, pour un pas d'échantillonnage donné  $T_e$ , la durée  $T_0$  du signal est:

$$T_0 = N T_e \quad (\text{III-12})$$

$T_0$  augmente proportionnellement à  $N$  qui est le nombre d'échantillons du signal.

## 2. Fenêtres de troncature

Le type de fenêtre à utiliser dépend principalement du signal analysé [12]. On utilise généralement les fenêtres rectangulaire, exponentielle, de Hanning ou de Hamming [12]. Ces deux dernières sont particulièrement recommandées pour l'analyse cepstrale de la parole ou le phénomène de repliement est négligeable [11, 12]. La fenêtre exponentielle définie pour :

$$\varphi(kT_e) = \begin{cases} \alpha^{kT_e} & 0 \leq k \leq N-1 \quad 0 < \alpha < 1 \\ 0 & \text{ailleurs : (III.13)} \end{cases}$$

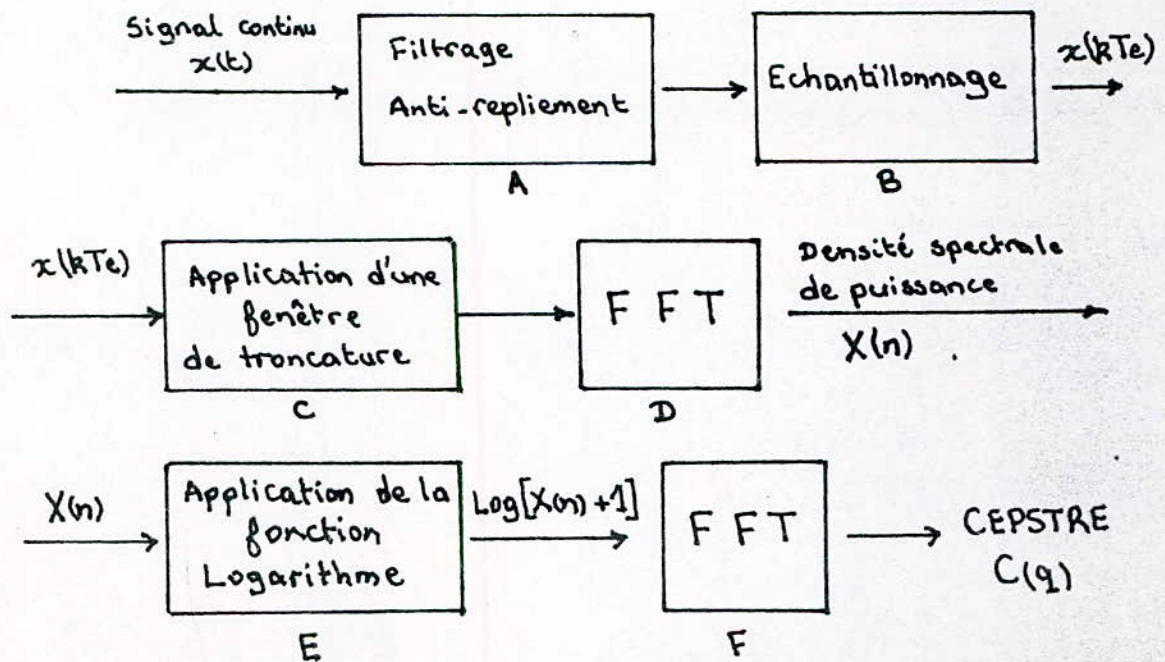
est généralement utilisée pour réduire le repliement causé par les trains d'impulsions dues à la présence d'échos dans le signal [12]

Le paramètre de l'exponentielle " $\alpha$ " est choisi aussi proche de l'unité que la réduction de distorsion voulue est grande [12]

$$\alpha = 0,96 \div 0,99 \quad [12]. \quad (\text{III-14})$$

### IX DETERMINATION DU CEPSTRE D'UN SIGNAL.

Afin de déterminer le cepstre d'un signal vibro-acoustique nous devons suivre la procédure représentée par le schéma suivant :



Les étapes A, B, C et D représentent la procédure classique de détermination numérique de la densité spectrale de puissance du processus vibroacoustique.

La case E montre l'application de la fonction logarithme aux échantillons de la densité spectrale de puissance. Les valeurs des échantillons sont augmentées d'une unité pour éviter les valeurs nulles.

Les échantillons ainsi transformés sont considéré comme nouveau signal et transformés par FFT (case F), ce qui détermine le cepstre de puissance.

#### Remarques :

1. Le cepstre, calculé à partir de l'ensemble des échantillons de la densité spectrale qui est une fonction réelle paire, est aussi réel et pair donc il suffit de ne considérer que la moitié de ses échantillons ( $0, \dots, N/2$ ) et éventuellement extraire leurs racines carrées pour avoir le cepstre d'amplitude.

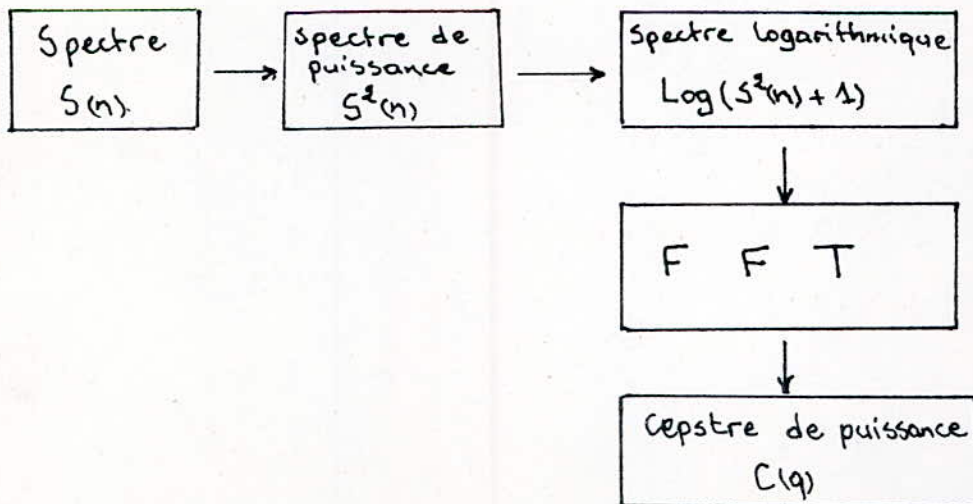
2. Souvent, on ne détermine pas le cepstre de toute l'étendue de la densité spectrale de puissance, mais seulement des parties intéressantes de celle-ci. C'est

La méthode utilisée dans la référence [7] pour le diagnostic des boîtes de vitesses et des mécanismes à engrenages en général. Cette méthode nécessite l'emploi de la procédure Zoom-FFT et dans ce cas les étapes A, B, C et D sont légèrement modifiées.

## X PROGRAMME

Afin de montrer les propriétés essentielles de l'analyse cepstrale, nous avons établi un programme de calcul du cepstre d'un spectre simulé numériquement par une suite de data présentant des périodicités.

Le programme se déroule suivant le schéma suivant



Le programme figure en annexe.



Les figures IV,2 et IV,3 montrent les résultats obtenus avec le programme.

Lors du 1<sup>er</sup> essai (Fig IV.2) nous avons considéré un spectre de  $N=256$  échantillons et une fréquence maximale  $\omega_m=128\text{Hz}$ , obtenu par échantillonnage d'une sinusoïde de fréquence  $\nu_s=80\text{Hz}$ .

Le spectre est constitué de 40 périodes de la sinusoïde, et puisque les data sont élevés au carré dans le spectre logarithmique, ce dernier sera formé de 80 motifs identiques ayant chacun une étendue en fréquence  $F$ .

$$F = \frac{128}{80} = 1,6 \text{ Hz.}$$

La quefreuce maximale du cepstre est  $q_{\max} = \frac{2N}{\omega_m}$  (Voir échelle des quefrences). Le cepstre presente un pic à la quefreuce  $q = 0,62 \text{ sec}$ .

on a:  $q = 0,62 \text{ sec}$  d'où  $\frac{1}{q} = 1,613 \text{ Hz} = F$

Ceci prouve l'existence dans le spectre du motif périodique de longueur en fréquence  $1,6 \text{ Hz}$ .

Le 2<sup>e</sup> essai est représenté sur la figure IV.3. Le spectre est constitué de 3 sinusoides de fréquences respectives 20,80 et 500 Hz et la fréquence maximale du spectre est choisie  $\nu_m = 2560$  Hz.

Il existe dans le spectre 3 types de motifs périodiques dont les étendues en fréquence sont 640, 160 et 25,6 Hz. Le cepstre montre l'existence de ces 3 périodicités par 3 pics de quefrances  $q_1 = 1,55$ ,  $q_2 = 6,25$  et  $q_3 = 39$  msec.

En prenant les inverses des quefrances  $q_1, q_2$  et  $q_3$  on retrouve les étendues en frequences des 3 motifs periodiques.

$$F'_1 = \frac{1}{q_1} = 645,16 \text{ Hz} ; F'_2 = \frac{1}{q_2} = 160 \text{ Hz} ; F'_3 = \frac{1}{q_3} = 25,6 \text{ Hz}$$

On voit bien que les frequences  $F'_1, F'_2$  et  $F'_3$  sont bien les étendues fréquentielles des motifs periodiques du spectre.

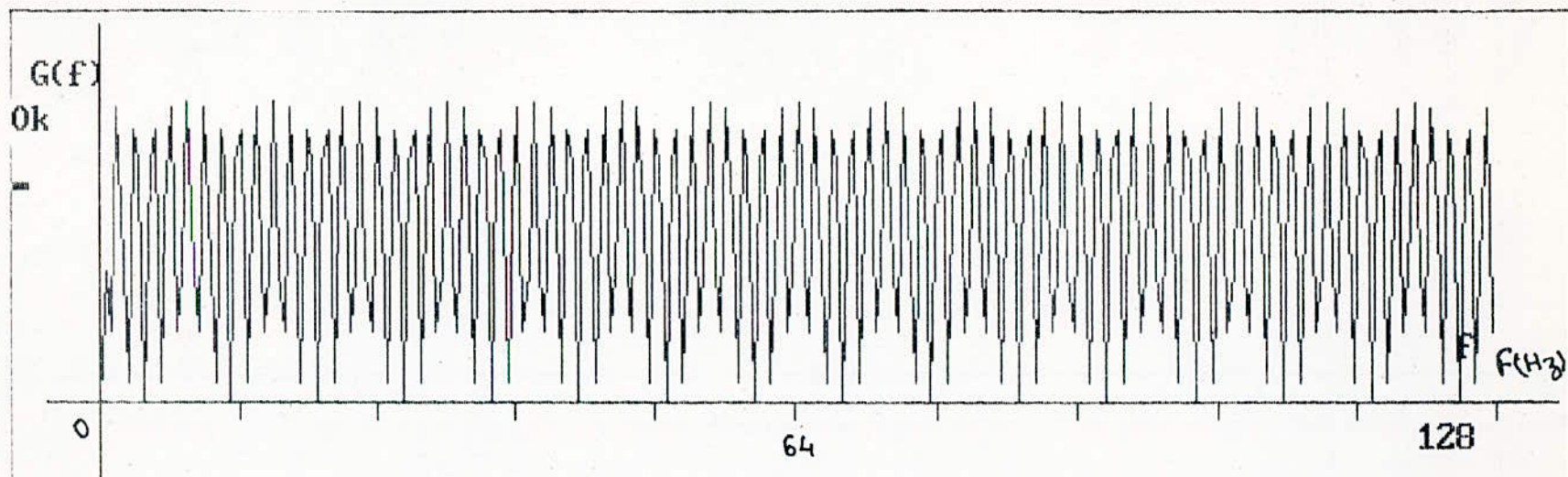


FIG 1 : SPECTRE LOGARITHMIQUE DE PUISSANCE

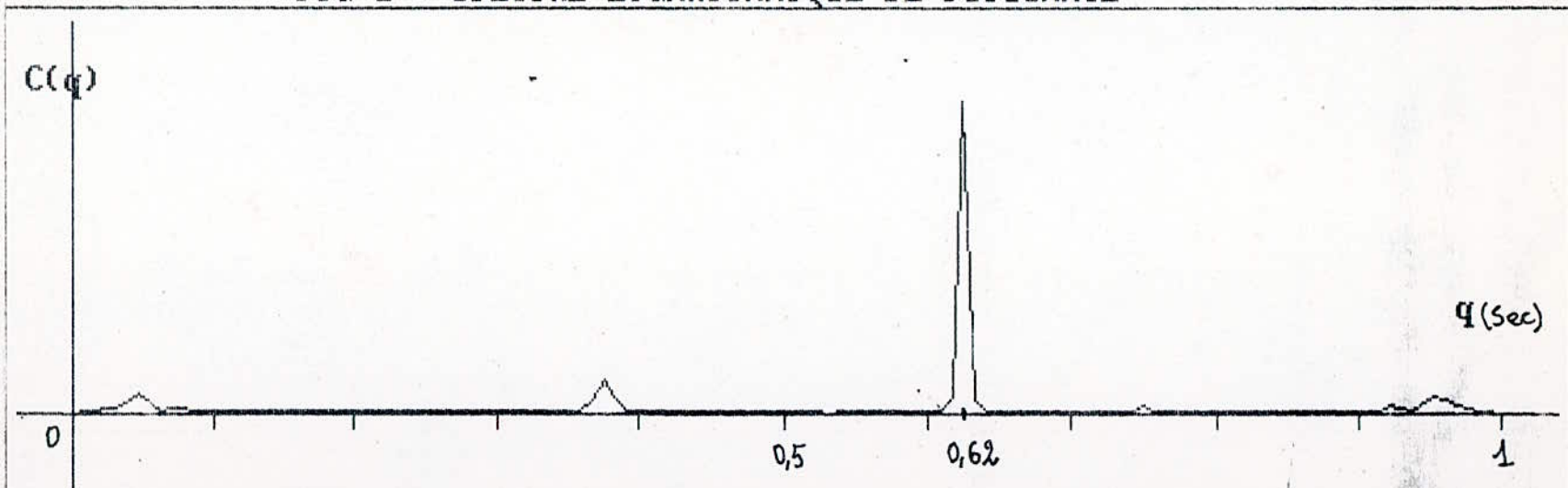


FIG 2

CEPSTRE DE PUISSANCE  $C(q)$

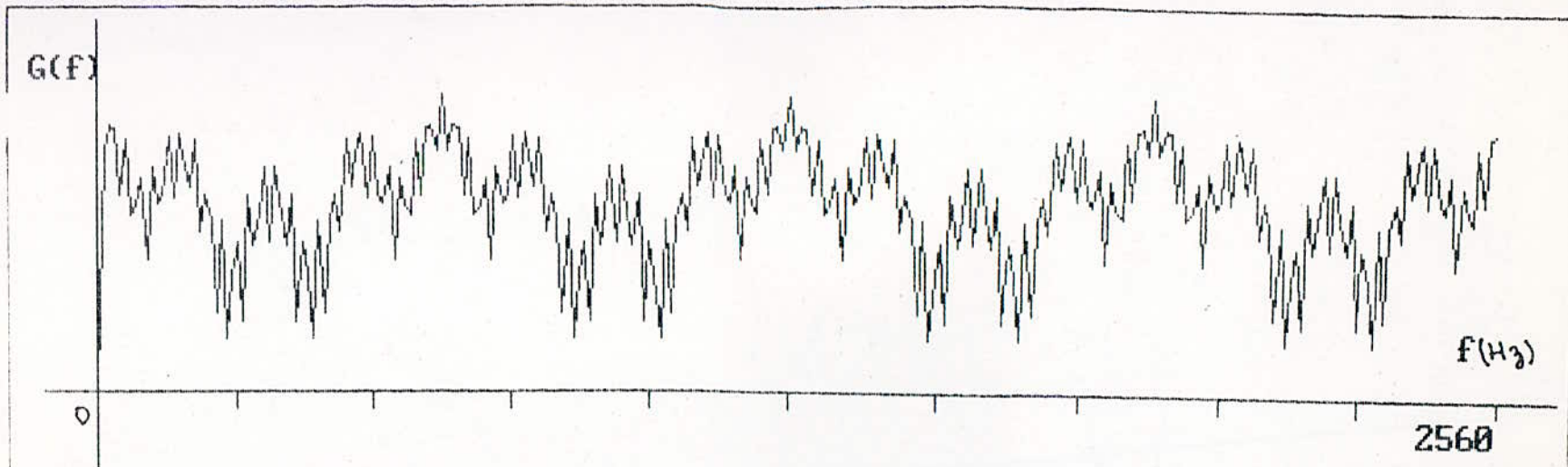


FIG 1 : SPECTRE LOGARITHMIQUE DE PUISSANCE

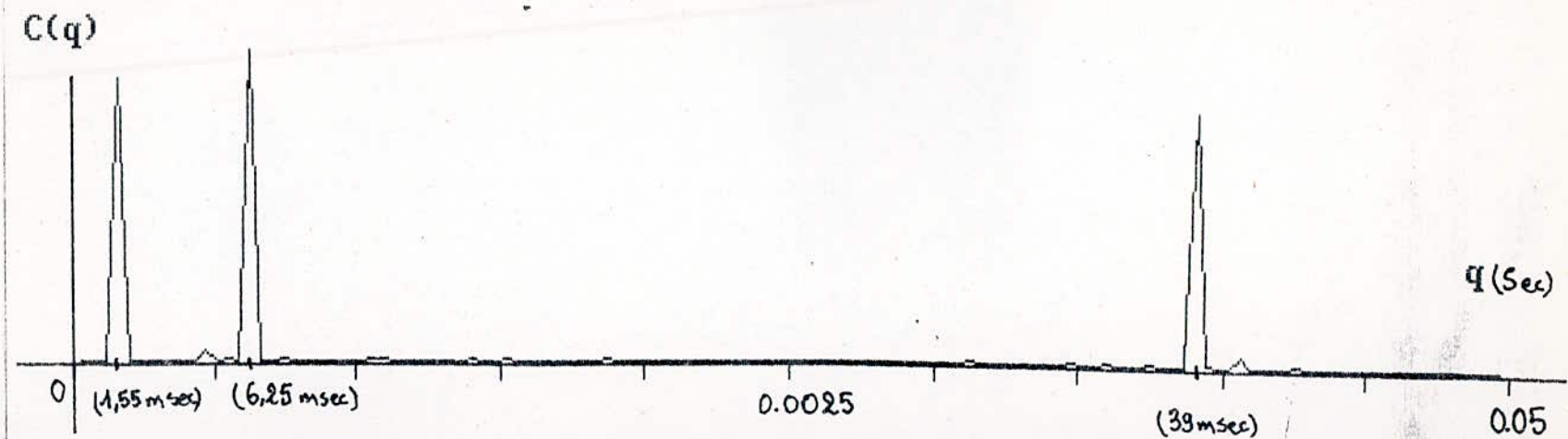


FIG 2

CEPSTRE DE PUISSANCE  $C(q)$

# CHAPITRE V PROCEDURE ZOOM-FFT

## I. INTRODUCTION

Lorsqu'on analyse un signal avec les techniques FFT habituelles, on obtient un spectre allant de façon discrète d'une fréquence minimale à une fréquence maximale données. Ces limites sont imposées par les moyens de l'analyse, elles dépendent de la durée du signal et du nombre d'échantillons considérés [8]

Considérons la densité spectrale de puissance  $S(\omega)$  d'un signal réel et pair  $x(kT_e)$  de durée  $T_0$ , filtré à la fréquence  $\omega_N$  par un filtre antirepliement et échantillonné avec un pas  $T_e$ .

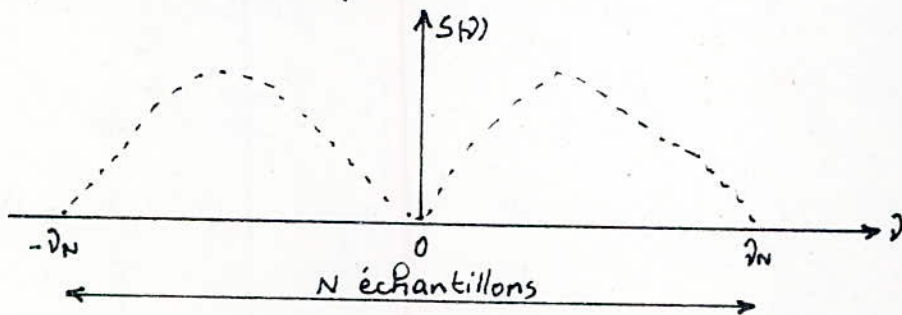


FIG V.1

Le graphe du spectre  $S(\nu)$  s'étend de la fréquence  $-\nu_N$  à la fréquence  $\nu_N$  qui est la fréquence de Nyquist [6]  
 $S(\nu)$  est donc échantillonné avec un pas  $\Delta\nu$  tel que :

$$\Delta\nu = \frac{2\nu_N}{N} = \frac{2(1/2T_e)}{N} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T_0} \quad (\text{V.1})$$

$\Delta\nu$  est la résolution spectrale [1,8,10]

Pour un phénomène vibroacoustique ayant des fréquences de résonances proches, il faut que la résolution spectrale  $\Delta\nu$  soit inférieure ou à la limite égale à l'intervalle de fréquence séparant les raies spectrales les plus proches [10]

D'après l'équation (V.1), on peut améliorer la résolution par deux méthodes :

- 1- Augmenter le nombre d'échantillons  $N$ .
- 2- Diminuer la fréquence de Nyquist  $\nu_N$  en augmentant le pas d'échantillonnage  $T_e$ .

Dans les deux cas la durée du signal  $T_0$  est augmentée.  
 Ces deux méthodes présentent chacune des inconvénients :  
 la première requiert des moyens de calcul puissants et

un plus long temps de calcul, la deuxième fait perdre les informations portées par les hautes fréquences [8].

La procédure ZOOM-FFT permet d'augmenter la résolution en évitant les inconvénients cités, mais elle ne traite qu'une partie du spectre à la fois.

## II PRINCIPE D'INCERTITUDE

D'après la relation (V.1) on voit que la résolution est améliorée quand la durée du signal  $T_0$  est augmentée. Cette proportionnalité inverse est une conséquence du principe d'incertitude de HEISENBERG appliquée au domaine du traitement du signal.

Le principe d'incertitude se traduit dans ce domaine par l'équation suivante: [8,10]

$$\Delta \omega T_0 \geq 1 \quad (\text{V.2})$$

Cette équation exprime le fait que pour améliorer la résolution du spectre, il faut observer le signal pendant un temps long. C'est l'idée de base sur laquelle est basée la procédure ZOOM-FFT.

En effet la procédure Zoom-FFT permet d'améliorer la résolution en considérant une durée plus longue artificiellement du signal.

Les figures V.2 et V.3 montrent l'effet de l'augmentation de la durée du signal sur la résolution spectrale.

Le signal temporel considéré est une somme de 3 sinusoïdes de fréquence 500, 600, et 610 Hz, la cadence d'échantillonnage est  $f_e = 2000$  Hz dans les deux cas.

Le nombre d'échantillons dans le 1<sup>er</sup> cas (Fig V.2) est  $N_1 = 128$ , la durée du signal est :  $T_{01} = \frac{N_1}{f_e}$

$$T_{01} = \frac{128}{2000} = 64 \text{ msec}$$

Dans le 2<sup>nd</sup> cas (fig V.3),  $N_2 = 1024$  d'où

$$T_{02} = \frac{1024}{2000} = 512 \text{ msec}$$

La résolution dans le 1<sup>er</sup> cas est  $\Delta f_{01} = \frac{1}{T_{01}} = 15,63 \text{ Hz}$   
 et dans le 2<sup>e</sup> cas :  $\Delta f_{02} = \frac{1}{T_{02}} = 1,95 \text{ Hz}$ .



La densité spectrale (Fig V.2) présente 2 pics distincts, le premier correspond à la fréquence 500 Hz et le 2<sup>e</sup> regroupe les raies de fréquence 600 et 610 Hz. Le spectre ne sépare pas les raies distantes de moins de 15,63 Hz.

Le spectre de la figure V.2 présente 3 pics correspondant respectivement aux fréquences 500, 600 et 610 Hz. Les deux dernières sont nettement séparés du fait de la résolution plus fine ( $\Delta \omega = 1,95 \text{ Hz}$ ) du spectre.

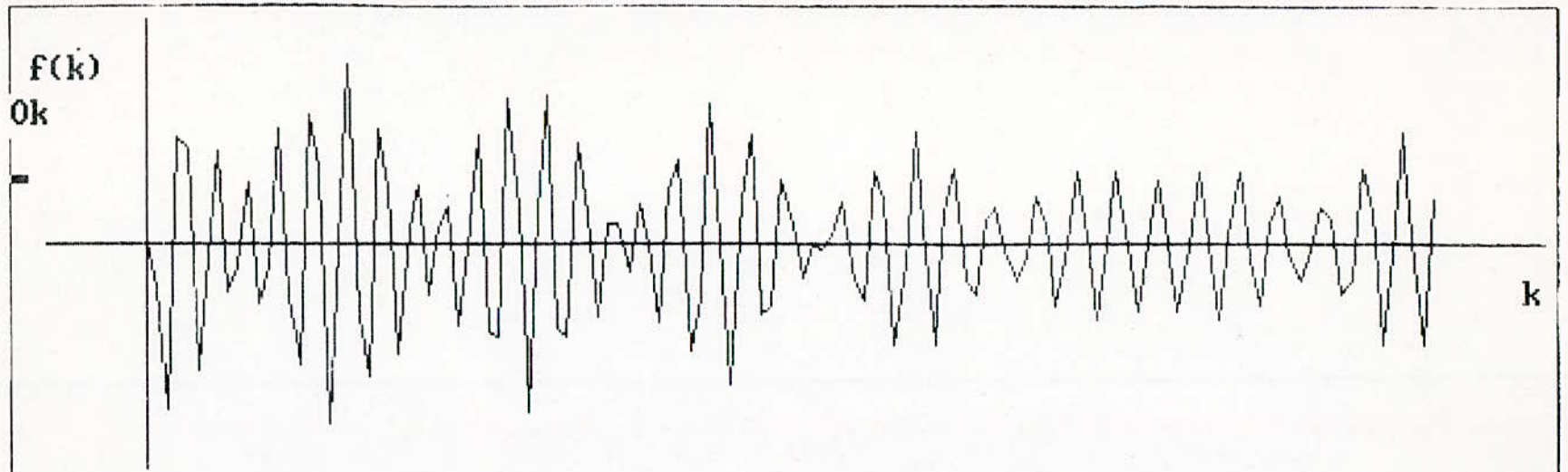
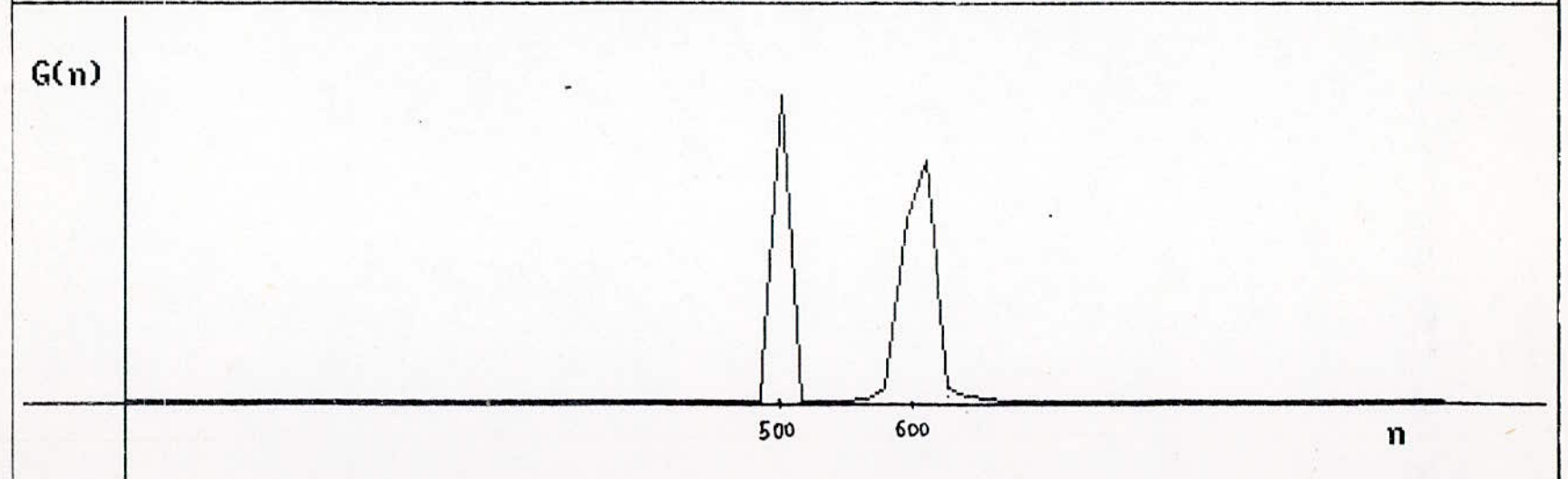


FIG 1 : SIGNAL D'ENTREE  $f(k)$



FIG(2) DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE  $G(n)$

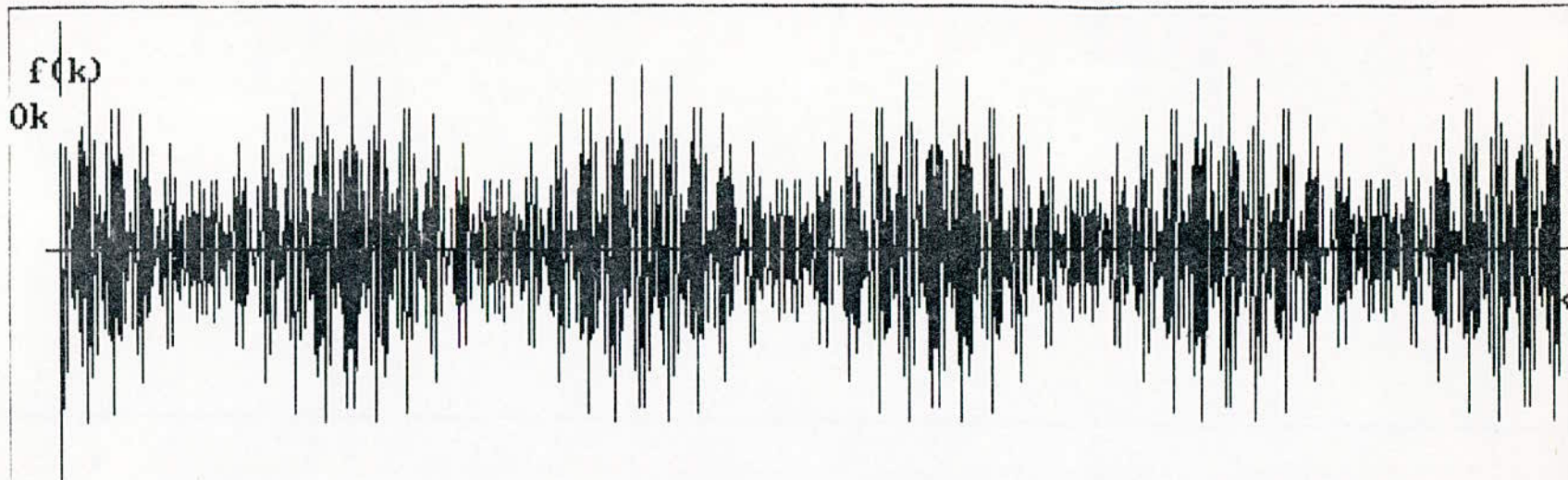
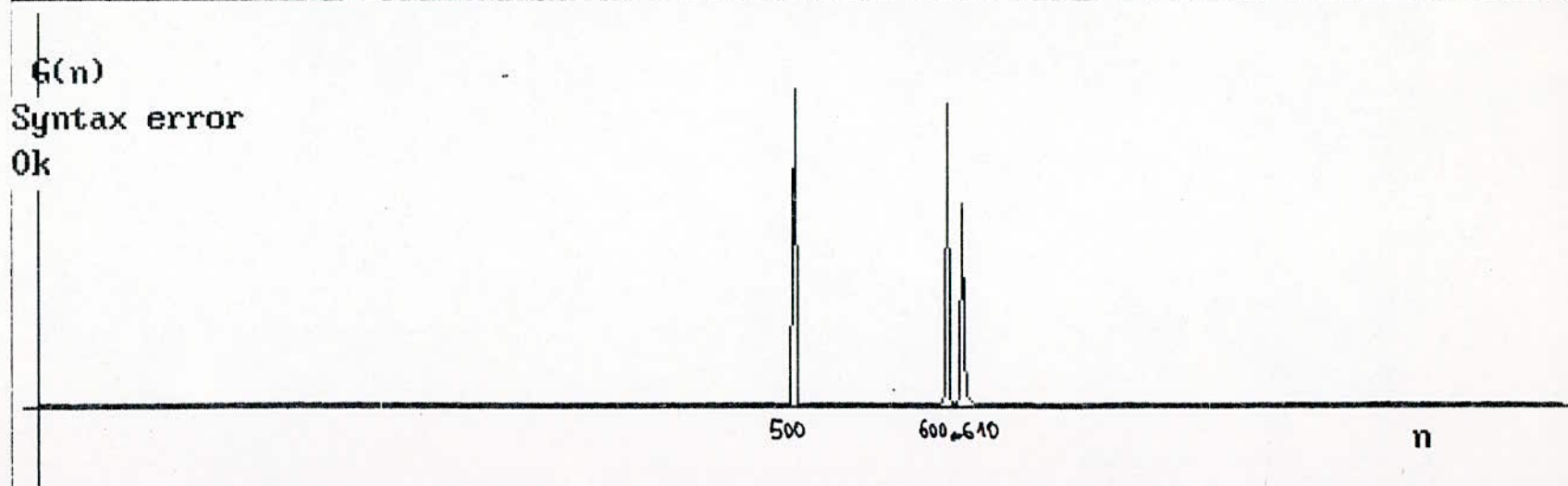


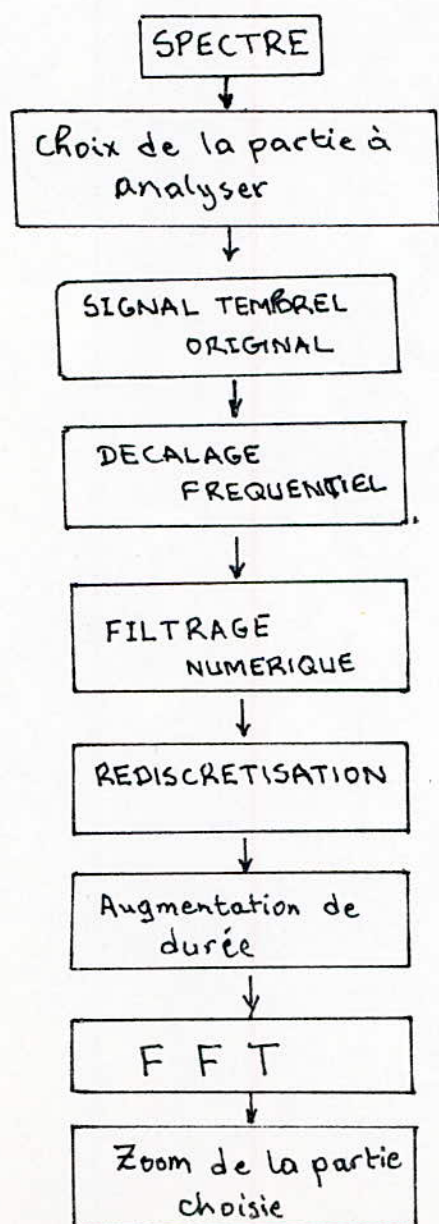
FIG 1 : SIGNAL D'ENTREE  $f(k)$



FIG(2) DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE  $G(n)$

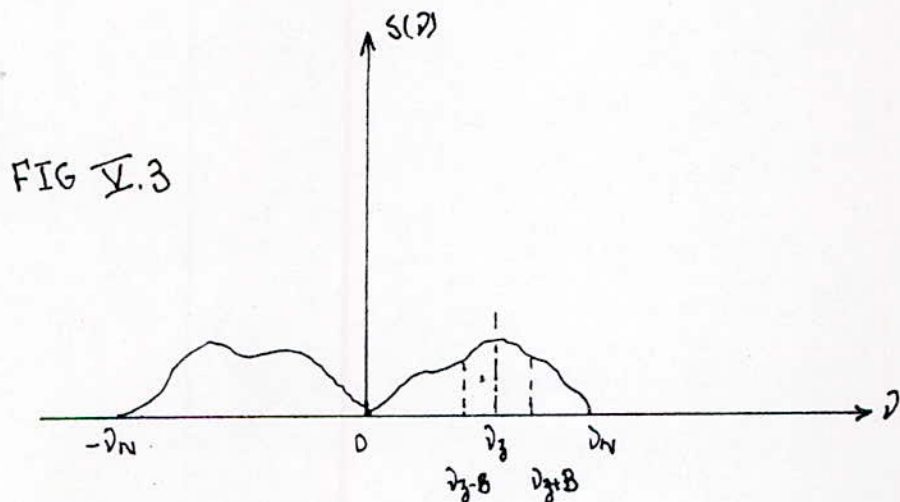
### III REALISATION DU ZOOM

La procédure Zoom-FFT est appliquée à un signal dont le spectre est déjà tracé et ceci afin de pouvoir la partie du spectre sur laquelle on veut améliorer la résolution. Le schéma de procédure est le suivant [8]:



## 1- Choix de la partie à explorer.

Lors de l'analyse spectrale d'un signal vibroacoustique, le spectre présente souvent des raies groupées dans une fraction de l'étendue fréquentielle du spectre. Il est alors nécessaire d'augmenter la résolution sur cette partie du spectre. Ce gain de résolution est obtenu en appliquant l'effet zoom sur cette partie du spectre.



Considérons la densité spectrale de puissance représentée sur la figure V.3 avec une résolution  $\nu_0$ . On veut appliquer l'effet zoom autour de la fréquence  $\nu_z$  avec une résolution  $\nu_{0z}$ . La partie ainsi choisie est définie par la fréquence centrale  $\nu_z$  et la demi-largeur de l'intervalle  $B$ .

Le but de la procédure est de construire un signal contenant exactement les mêmes informations que celle contenues dans la bande  $[\nu_z - B, \nu_z + B]$  du signal original et qui les restitue dans un spectre partiel de résolution améliorée  $\nu_z$ ...

## 2- Décalage fréquentiel du spectre.

Nous savons que le principe de la procédure zoom-FFT est d'augmenter la durée du signal temporel. Ceci est réalisé en réduisant la cadence d'échantillonnage car elle est liée à la durée du signal par la relation:

$$T_0 = \frac{N}{\nu_e}$$

Afin que le théorème de Shannon soit toujours vérifié, on procède à un changement d'origine du spectre de façon que la fréquence  $\nu_z$  soit considérée comme nulle.

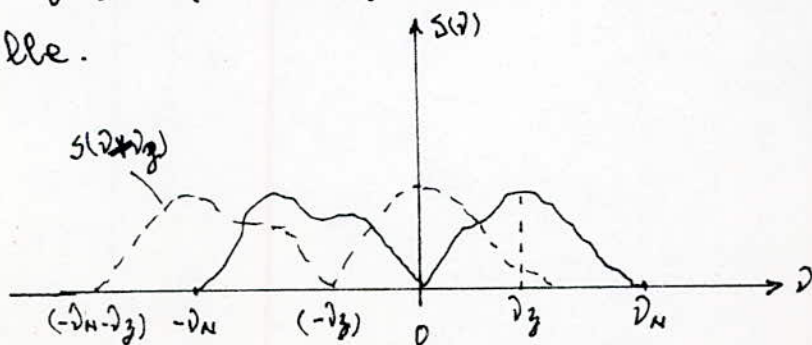


FIG V.4

Le spectre décalé  $S(\nu + \nu_z)$  n'est pas le spectre du signal original mais d'un signal  $x_m(t)$  obtenu par modulation du signal original  $x(t)$ .

$$x_m(t) = x(t) e^{-j2\pi\nu_z t}$$

En effet en appliquant la DFT inverse au spectre  $S(\nu + \nu_z)$  en posant  $u = \nu + \nu_z$  on a:

$$\begin{aligned} x_m(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) e^{j2\pi u t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) e^{j2\pi(u - \nu_z)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) e^{j2\pi u t} \cdot e^{-j2\pi\nu_z t} dt \\ &= e^{-j2\pi\nu_z t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} S(u) e^{j2\pi u t} dt}_{x(t)} \\ &= e^{-j2\pi\nu_z t} x(t) \end{aligned}$$

NB: Le calcul est fait dans le cas continu pour simplifier. Dans le cas discret on multiplie les échantillons  $x(kT_e)$  du signal par  $e^{-j2\pi\nu_z kT_e}$ .

Le signal  $x_m(kT_e)$  est alors défini par :

$$x_m(kT_e) = e^{-j2\pi\nu_0 kT_e} x(kT_e).$$

La suite  $x(kT_e)$  est souvent réelle et on a :

$$\operatorname{Re}(x_m(kT_e)) = x(kT_e) \cdot \cos(2\pi\nu_0 kT_e) ; k=1, \dots, N$$

$$\operatorname{Im}(x_m(kT_e)) = x(kT_e) \cdot \sin(-2\pi\nu_0 kT_e) ; k=1, \dots, N$$

### 3. Filtrage.

Afin de délimiter la partie choisie du spectre on filtre le signal modulé  $x_m(kT_e)$  à l'aide d'un filtre numérique passe-bas, dont la fréquence de coupure est  $B$  ; la demi longueur de la partie zoomée.

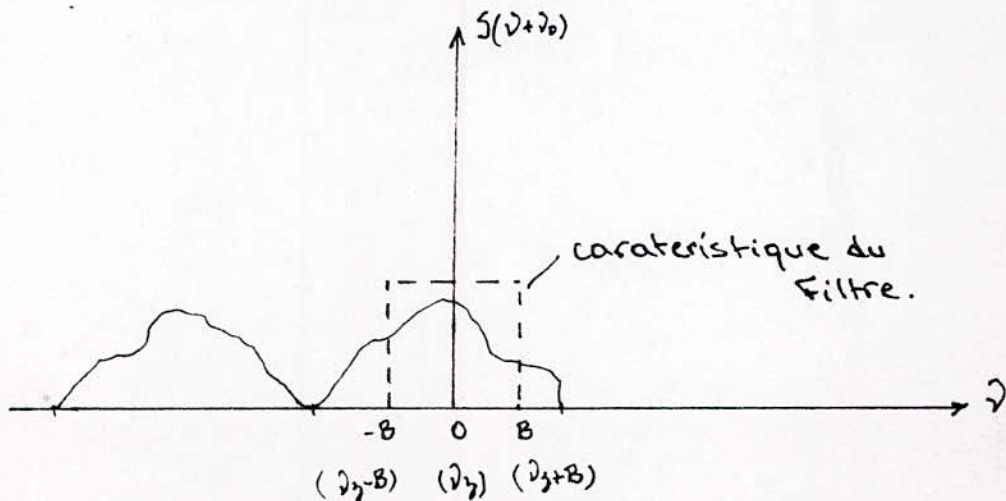


FIG V.5



Le filtrage est obtenu par multiplication du spectre  $S(\nu + \nu_0)$  par une fonction de fenêtre rectangulaire  $H(\nu)$  définie par :

$$H(\nu) = \begin{cases} 1 & -B \leq \nu \leq B \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans le cas discret :

$$H(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{NB}{2\nu_N} \leq n \leq \frac{NB}{2\nu_N} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

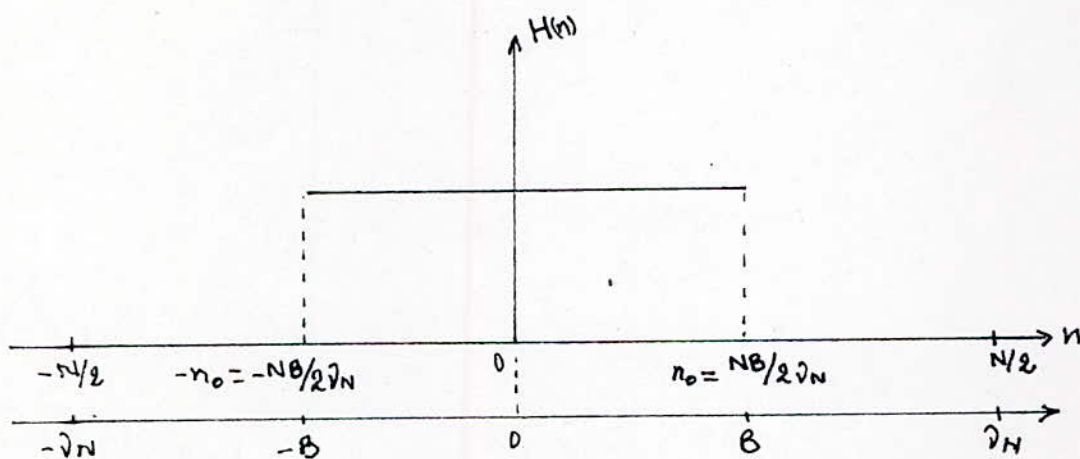


FIG V.6

$B$  est la fréquence de coupure du filtre et  $\nu_N$  la fréquence de Nyquist du signal original  $x(t)$ .

La distance fréquentielle entre 2 points du spectre est  $\frac{\nu_N}{N/2} = \frac{2\nu_N}{N}$ . La raie correspondant à la fréquence  $B$

est donnée par :  $B = n_0 \frac{2\Delta_N}{N}$

son indice  $n_0$  est :  $n_0 = \frac{NB}{2\Delta_N}$

Dans le domaine temporel le signal  $x_m(kT_e)$  est filtré par convolution avec la suite  $h(l)$  obtenue par IDFT de la suite  $H(n)$ .

En considérant le même nombre d'échantillons pour la suite  $H(n)$  et le spectre, la condition de non-repliement pour le filtre s'écrit :  $n_0 \leq N/2$ .

ou en termes de fréquence :  $B \leq \Delta_N$ .

Le signal filtré  $y(kT_e)$  est alors défini par :

$$y(kT_e) = \sum_{l=0}^{N-1} h(l) x_m((k-l)T_e) \quad k=0, \dots, N-1.$$

Le spectre du signal  $y(kT_e)$  est borné entre les raies d'indices  $-n_0$  à  $n_0$  soit entre les fréquences  $-B$  et  $B$ .

## 4. Rediscrétisation

Le signal  $y(kT_e)$  est échantillonné à un pas  $T_e$  et ne contient pas de fréquences supérieures à  $B$ . On peut ici réduire la cadence d'échantillonnage en augmentant le pas  $T_e$  tel que :

$$B = \frac{1}{2T_e'} \quad T_e' > T_e.$$

$$\text{or} \quad \nu_N = \frac{1}{2T_e} \Rightarrow \frac{T_e'}{T_e} = \frac{\nu_N}{B}$$

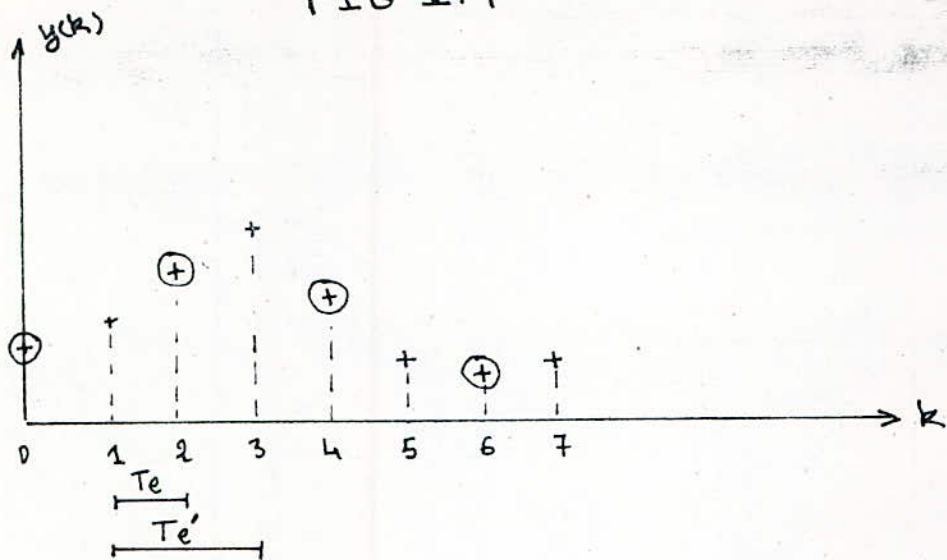
$$\text{Posons} \quad M = \frac{\nu_N}{B} \quad \text{d'où} \quad \frac{T_e'}{T_e} = M.$$

$M$  est appelé "facteur de ZOOM" (ZOOM-factor) [8], son interprétation sera formulée ultérieurement.

La rediscrétisation à prendre 1 échantillon du signal  $y(kT_e)$  parmi  $M$  [8].

Par exemple pour  $N=8$  et  $M=2$  on prend uniquement 4 échantillons du signal  $y(kT_e)$

FIG V.7



Les échantillons à conserver sont  $y(0)$ ,  $y(2Te)$ ,  $y(4Te)$ ,  $y(6Te)$ . Les autres sont ignorés.

On obtient ainsi un signal de 4 échantillons et échantillonné à un pas  $2Te = Te'$ .

Dans le cas général on garde  $N/M$  échantillons

$$y(k'Te') = y(kMTe) \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, N-1 \\ k' = 0, 1, \dots, \frac{N}{M}-1 \end{array}$$

Puisque le nombre d'échantillons  $N$  du signal original est une puissance entière de 2, nous avons intérêt à choisir  $M$  également comme une puissance entière de 2 pour faciliter la programmation.

$$M = 2, 4, 8, \dots$$

### 5 - Augmentation de la durée du signal.

Le signal  $y(kT_e)$  a une durée  $T_0$  égale à la durée du signal  $x(kT_e)$

$$T_0 = NT_e = \frac{N}{M} (T_e \cdot M) = \frac{N}{M} (T_e')$$

On peut augmenter la durée du signal  $y(kT_e')$  jusqu'à la valeur  $MT_0$  en juxtaposant  $M$  suites identiques  $y(kT_e')$ . On obtient ainsi un signal  $z(kT_e')$  comportant  $N$  échantillons et de durée  $MT_0$ .

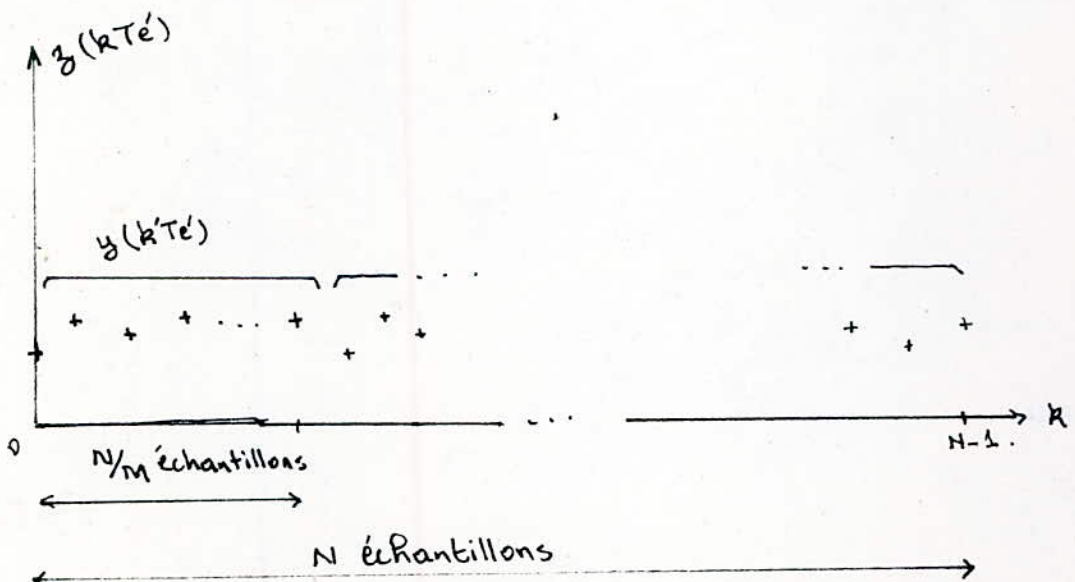


FIG V.8

## B. Calcul du spectre du signal $z(kT_e')$

Le spectre du signal  $z(kT_e')$  s'étend dans l'intervalle de fréquence  $[-B, B]$  et contient  $N$  raies

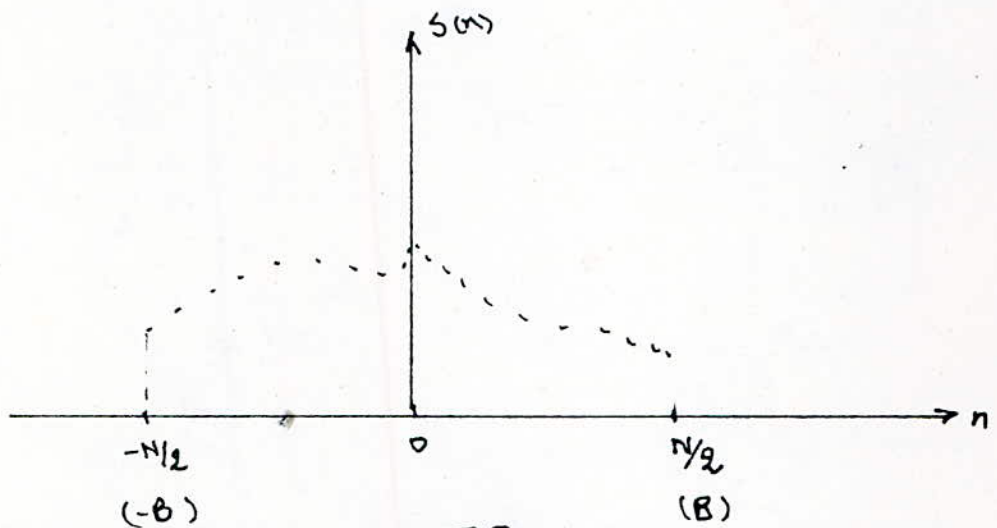


FIG V.9

La résolution de ce spectre est :  $\nu_{0z} = \frac{2B}{N}$

$$\text{avec } B = \frac{1}{2T_e'} = \frac{1}{MT_e}$$

$$\nu_{0z} = \frac{2\left(\frac{1}{MT_e}\right)}{N} = \frac{1}{NMT_e} = \frac{1}{MT_0} = \frac{\nu_0}{M}$$

En comparant les résolutions  $\nu_0$  et  $\nu_{0z}$  respectives du spectre original et de la partie zoomée on voit

que la résolution a été améliorée d'un facteur  $M$  qui est le facteur de Zoom.

Par exemple, pour un spectre obtenu à partir d'un signal de  $N=128$  échantillons et échantillonné à la cadence  $f_e = 1280 \text{ Hz}$ , soit une durée  $T_0 = 0,1 \text{ sec}$ , le spectre a une résolution  $\nu_0$ :

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ Hz}$$

On peut appliquer l'effet zoom sur une partie de ce spectre avec un facteur de zoom  $M=4$  et obtenir un spectre partiel de résolution  $\nu_z$ :

$$\nu_z = \frac{\nu_0}{M} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ Hz}.$$

L'étendue de la partie zoomée sera (d'après la relation  $M = \frac{\nu_N}{B}$ )

$$\left[ \nu_z - \frac{\nu_N}{M}, \nu_z + \frac{\nu_N}{M} \right]$$

où  $\nu_N$  est la fréquence de Nyquist du spectre original et  $\nu_z$  la fréquence centrale de la partie choisie.

## CHAPITRE VI PROGRAMMATION ET ESSAI

Nous avons établi un programme permettant de réaliser une analyse spectrale et cepstrale d'un signal vibroacoustique simulé.

La procédure Zoom-FFT a été introduite en sous-programme pour être utilisée sur plusieurs parties du spectre choisies par l'utilisateur du programme. On peut également tracer le cepstre de chacune des parties choisies.

Ce programme est une version complétée du programme d'analyse spectrale par FFT, conçu suivant l'algorithme de Cooley-Tukey, donné dans la référence bibliographique [14]. Le listing du programme figure en annexe.

### ESSAI DU PROGRAMME.

L'essai du programme a été réalisé sur un signal simulé par une somme de 2 sinusoides de fréquence 50 et 51 Hz. Le nombre d'échantillons  $N=256$  et la cadence d'échantillonnage  $f_e = 256 \text{ Hz}$ .



La figure VI.1 montre le signal vibroacoustique ainsi simulé (signal d'entrée).

La densité spectrale de puissance de ce signal est affichée en figure VI.1 (FIG 2). Remarquons que les pics correspondant aux fréquences 50 et 51 Hz ne sont pas distinguables sur ce spectre du fait de la mauvaise résolution :

$$\Delta\nu_0 = \frac{\Delta\nu_e}{N} = \frac{256}{256} = 1 \text{ Hz.}$$

La figure VI.2 (Fig 1) montre le spectre calculé à l'aide de la procédure Zoom-FFT appliquée autour de la fréquence  $\nu_3 = 50 \text{ Hz}$  avec un facteur de zoom  $M = 16$ .

L'étendue fréquentielle de ce spectre est  $[\nu_3 - \frac{\Delta\nu_e}{2M}, \nu_3 + \frac{\Delta\nu_e}{2M}]$  (d'après Ch V) soit dans ce cas  $[42, 58] \text{ Hz}$ . La résolution est :

$$\Delta\nu_3 = \frac{\Delta\nu_0}{M} = \frac{1}{16} \text{ Hz.}$$

Les pics correspondant aux fréquences 50 et 51 Hz sont bien séparés à l'aide du zoom mais on remarque que la procédure zoom-FFT a introduit des distorsions d'un niveau non négligeable ce qui peut introduire des erreurs d'interprétation. Ces distorsions se retrouvent également dans le cepstre de la partie choisie  $[42-58] \text{ Hz}$  visible sur la

figure VI.2 (FIG 2).

Les distorsions proviennent du filtrage numérique et du décalage spectral utilisé dans le sous-programme Zoom-FFT.

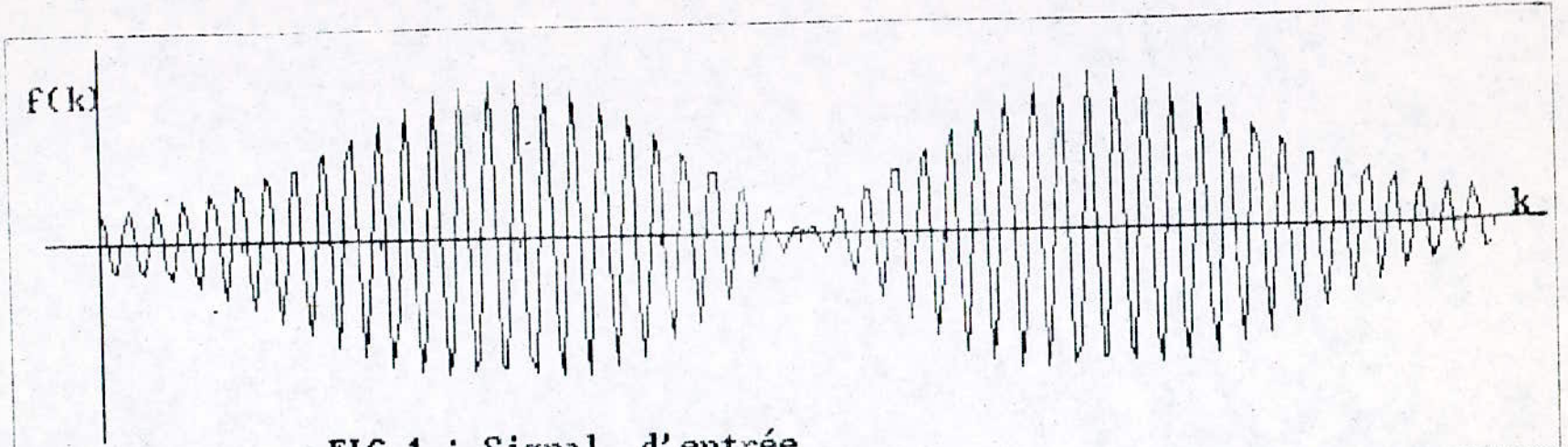


FIG 1 : Signal d'entrée

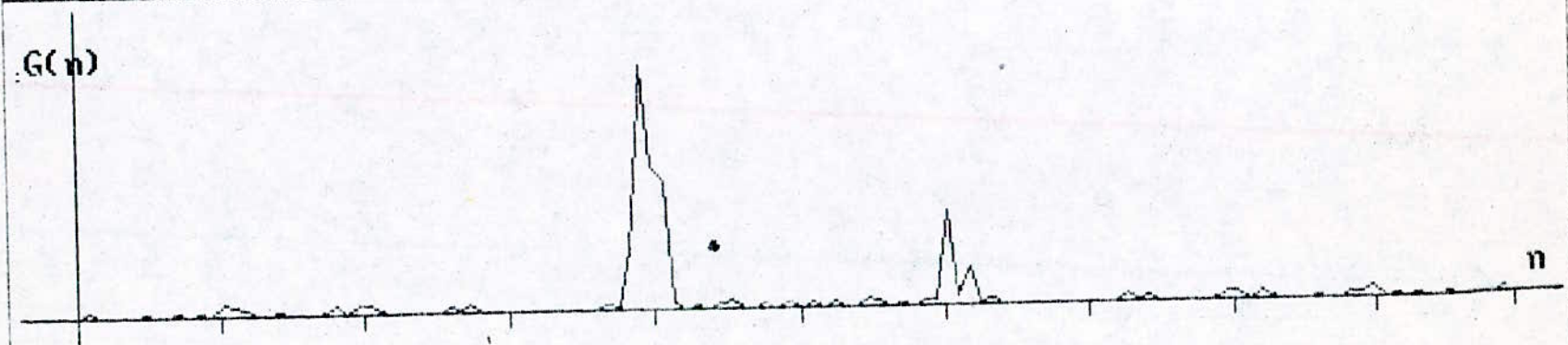
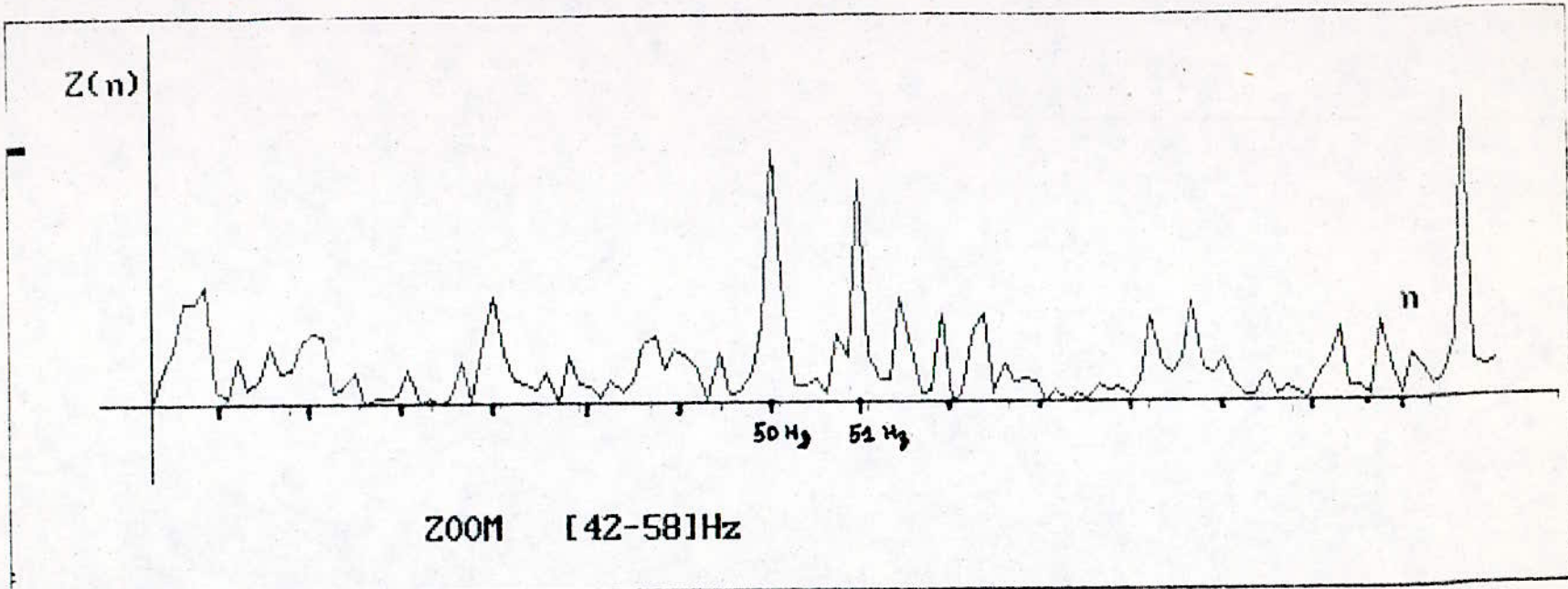
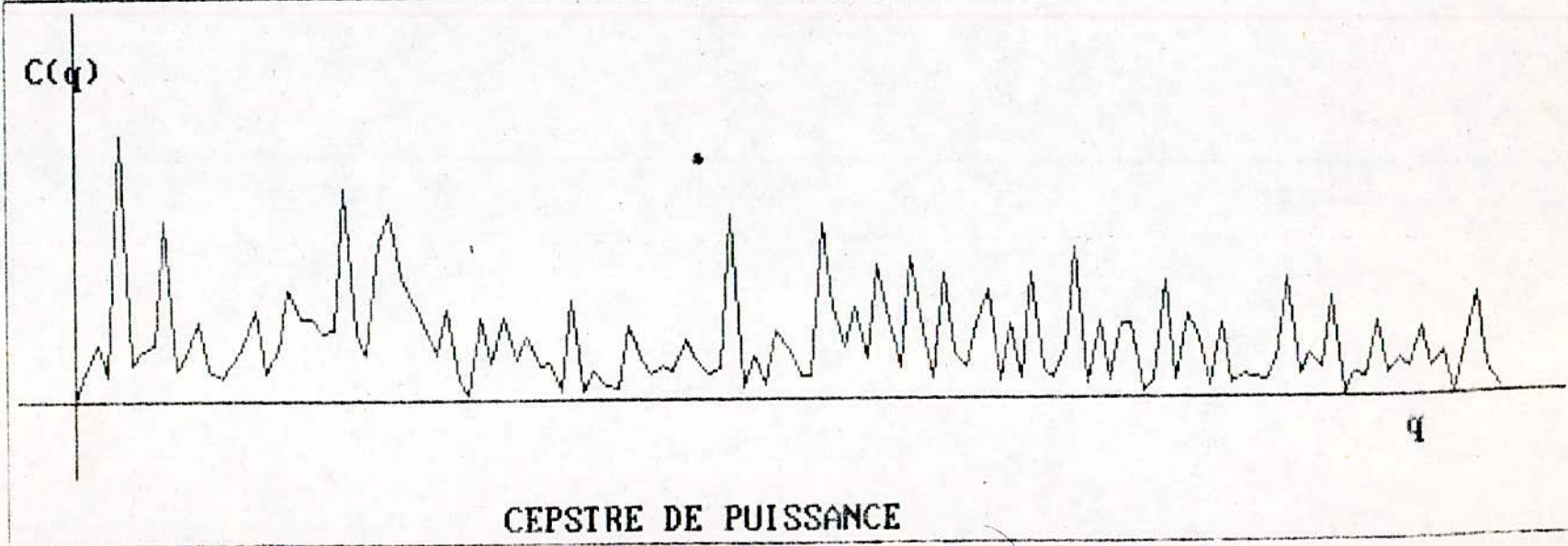


FIG 2 : Densite spectrale de puissance

FIG VI.1



ZOOM [42-58]Hz



CEPSTRE DE PUISSANCE

Cette étude a permis d'établir deux procédures complémentaires à l'analyse spectrale qui sont :

L'ANALYSE CEPSTRALE et ZOOM-FFT.

Les essais indiquent d'une part que le programme de calcul du cepstre est opérationnel, et d'autre part que la procédure Zoom-FFT peut encore être améliorée par l'utilisation d'un filtre numérique plus efficace.

Nous souhaitons vivement que cette étude soit mise en application dans un proche avenir au traitement de signaux vibroacoustiques réels enregistrés sur différents types de machines.

# ANNEXE 1

```
10 '*****
*
11 '***** PROGRAMME D'ESSAI : CEPSTRE *****
*
12 '*****
*
13 '*** SIMULATION D'UN SPECTRE PERIODIQUE ET CALCUL DE SON CEPSTRE *****
*
14 '*****
*
15 CLS
16 INPUT "DONNER LA VALEUR DE N: N=",N
17 INPUT "FREQUENCE D'ECHANTILLONAGE: FS=",FS
18 PI=3.14159
19 T1=1/FS
20 R=(LOG(N))/(LOG(2)):N=2^R
21 INPUT "NOMBRE DE SINUSOIDES DANS LE SIGNAL K=",K
22 DIM F(K),XR(N),XI(N),G(N)
23 FOR I=1 TO K
24 PRINT "F("I")=": INPUT F(I)
25 NEXT I
26 FOR I=1 TO N
27 S=0
28 FOR II=1 TO K
29 S=S+(COS(2*PI*F(II)*I*T1))^2
30 NEXT II
31 XR(I)=LOG((S)+1)
32 XI(I)=0
33 NEXT I
34 FM=ABS(1)
35 FOR I=1 TO N
36 IF FM < ABS (XR(I)) THEN FM = ABS(XR(I))
37 NEXT I
38 GOSUB 108
39 FOR I=0 TO N-2
40 LINE (I,XR(I))-(I+1,XR(I+1))
41 NEXT I
42 FOR I=0 TO N-1 STEP (N-1)/10
43 LINE(I,0)-(I,-FM/20)
44 NEXT I
45 LOCATE 10,72:PRINT FS
46 FOR I=N TO 1 STEP -1
47 XR(I)=XR(I-1)
48 XI(I)=XI(I-1)
49 NEXT I
50 GOSUB 75
```

```

51 NUI=R-1
52 FOR I=1 TO R
53 REP=2^I
54 ARG=2*PI/REP
55 DISP=REP/2
56 FOR J=1 TO DISP
57 TWF=(J-1)*ARG
58 C=COS(TWF)
59 S=SIN(TWF)
60 FOR K=J TO N STEP REP
61 J2=K+DISP
62 T3=C*XR(J2)+S*XI(J2)
63 T2=-S*XR(J2)+C*XI(J2)
64 XR(J2)=XR(K)-T3
65 XI(J2)=XI(K)-T2
66 XR(K)=XR(K)+T3
67 XI(K)=XI(K)+T2
68 NEXT K
69 NEXT J
70 NEXT I
71 FOR I=N TO 1 STEP -1
72 G(I-1)=(XR(I)*XR(I)+XI(I)*XI(I))*2*T1/N
73 NEXT I
74 GOTO 94
75 ND2=N/2
76 NM1=N-1
77 J=1
78 FOR I=1 TO NM1
79 IF I >= J THEN 86
80 T4=XR(J)
81 XR(J)=XR(I)
82 XR(I)=T4
83 T5=XI(J)
84 XI(J)=XI(I)
85 XI(I)=T5
86 K=ND2
87 IF K=J THEN 91
88 J=J-K
89 K=K/2
90 GOTO 87
91 J=J+K
92 NEXT I
93 RETURN
94 B=ABS(G(0))
95 FOR I=0 TO N-1
96 IF B >= ABS(G(I)) THEN 98
97 B=ABS(G(I))
98 NEXT I
99 GOSUB 125
100 FOR I=0 TO N/2-1

```

```

101 LINE (I.G(I))-(I+1.G(I+1))
102 NEXT I
103 FOR I=0 TO (N/2+1) STEP (N/2 )/10
104 LINE(I.0)-(I.-B/20)
105 NEXT I
106 Q=N/(2*F5)
107 LOCATE 2.2 :END
108 CLS
109 KEY OFF
110 SCREEN 3
111 LINE (0.0)-(639.399).1.B
112 LOCATE 2.2:PRINT "G(f)"
113 LOCATE 15.2:PRINT "C(a)"
114 LOCATE 8.75:PRINT "f"
115 LOCATE 20.75:PRINT "a"
116 LOCATE 13.16 :PRINT "FIG 1 : SPECTRE LOGARITHMIQUE DE PUISSANCE"
117 LOCATE 25.15:PRINT "FIG 2      CEPSTRE DE PUISSANCE C(a)"
118 LINE (0.0)-(639.399).1.B
119 LINE (1.205)-(638.205)
120 VIEW (15.5)-(634.1e5)
121 WINDOW (-10.-.25*FM)-(N+10.1.25*FM)
122 LINE (-10.0)-(N+10.0)
123 LINE (0.-.25*FM)-(0.1.25*FM)
124 RETURN
125 VIEW (5.210)-(634.375)
126 WINDOW (-5.-.25*B)-(N/2+5.1.25*B)
127 LINE (-5.0)-(N/2+5.0)
128 LINE (0.-.25*B)-(0.1.25*B)
129 RETURN

```



## ANNEXE 2

```

1 CLS 0
2 '***** SIMULATION DU SIGNAL *****
3 SCREEN 3
4 KEY OFF
5 INPUT "NOMBRE D'ECHANTILLONS DU SIGNAL : N=";N
6 INPUT "FREQUENCE D'ECHANTILLONNAGE : FS=";FS
7     PI=6.28318307179586#2 :NF=N+1
8 NC=N+(NF-1)/2 : T1=1/FS : DIM XR(NC),XI(NC),G(N),YR(N),VI(N)
9 DIM XRF(N+NF),XIF(N+NF),H(NF),C(N)
10 DIM Z(N),RR(N),RI(N),P1(NF+10),P2(NF+10),P3(NF+10),P4(NF+10)
11 R=(LOG(N))/(LOG(2)):N=2^R
12 INPUT "NOMBRE DE SINUSOIDES DANS LE SIGNAL K=";K
13 FOR I=1 TO K
14 PRINT "F("I")=":INPUT F(I)
15 NEXT I
16 FOR I=1 TO N
17 S=0
18 FOR II=1 TO K
19 S=S+COS(2*PI*F(II)*I*T1)
20 NEXT II
21 XR(I)=S
22 XI(I)=0
23 NEXT I
24 CLS :*****FENETRE DE TRONCATURE *****
25 PRINT "QUEL FENETRE VOULEZ-VOUS UTILISER ? "
26 LOCATE 10,5:PRINT "RECTANGULAIRE .....A"
27 LOCATE 11,5:PRINT "HAMMING .....B"
28 LOCATE 12,5:PRINT "HANNING .....C"
29 LOCATE 13,5:PRINT "EXPONENTIELLE .....D"
30 LOCATE 16,6:INPUT "VOTRE CHOIX EST:";C$
31 IF C$=" " THEN 31
32 IF C$="A" THEN 36
33 IF C$="B" THEN 263
34 IF C$="C" THEN 269
35 IF C$="D" THEN 275 ELSE 24
36 '
37 '
38 '
39 '***** CALCUL DU SPECTRE +AFFICHAGE (SIGNAL etSPECTRE) *****
40 FM=ABS(XR(0))
41 FOR I=1 TO N
42 IF FM < ABS (XR(I)) THEN FM = ABS(XR(I))
43 NEXT I
44 GOSUB 112
45 FOR I=0 TO N-2
46 LINE (I,XR(I))-(I+1,XR(I+1))
47 NEXT I
48 FOR I=0 TO N-1 STEP (N-1)/10
49 LINE(I,0)-(I,-FM/20)
50 NEXT I

```

```

51 FOR I=N TO 1 STEP -1
52 XR(I)=XR(I-1)
53 XI(I)=XI(I-1)
54 NEXT I
55 GOSUB 80
56 NU1=R-1
57 FOR I=1 TO R
58 REP=2^I
59 ARG=2*PI/REP
60 DISP=REP/2
61 FOR J=1 TO DISP
62 TWF=(J-1)*ARG
63 C=COS(TWF)
64 S=SIN(TWF)
65 FOR K=J TO N STEP REP
66 J2=K+DISP
67 T3=C*XR(J2)+S*XI(J2)
68 T2=-S*XR(J2)+C*XI(J2)
69 XR(J2)=XR(K)-T3
70 XI(J2)=XI(K)-T2
71 XR(K)=XR(K)+T3
72 XI(K)=XI(K)+T2
73 NEXT K
74 NEXT J
75 NEXT I
76 FOR I=N TO 1 STEP -1
77 G(I-1)=(XR(I)*XR(I)+XI(I)*XI(I))*2*T1/M
78 NEXT I
79 GOTO 99
80 ND2=N/2
81 NM1=N-1
82 J=1
83 FOR I=1 TO NM1
84 IF I >= J THEN 91
85 T4=XR(J)
86 XR(J)=XR(I)
87 XR(I)=T4
88 T5=XI(J)
89 XI(J)=XI(I)
90 XI(I)=T5
91 K=ND2
92 IF K=J THEN 96
93 J=J-K
94 K=K/2
95 GOTO 92
96 J=J+K
97 NEXT I
98 RETURN
99 B=ABS(G(0))
100 FOR I=0 TO N-1

```

```

101 IF B >= ABS(G(I)) THEN 103
102 B=ABS(G(I))
103 NEXT I
104 GOSUB 129
105 FOR I=0 TO N/2-1
106 LINE (I,G(I))-(I+1,G(I+1))
107 NEXT I
108 FOR I=0 TO (N/2+1) STEP (N/2 )/10
109 LINE(I,0)-(I,-B/20)
110 NEXT I
111 LOCATE 19,2 :GOTO 134
112 CLS
113 KEY OFF
114 SCREEN 3
115 LINE (0,0)-(639,310),1,B
116 LOCATE 2,2:PRINT "f(k)"
117 LOCATE 12,2:PRINT "G(n)"
118 LOCATE 5,78:PRINT "k"
119 LOCATE 17,78:PRINT "n"
120 LOCATE 10,17:PRINT "FIG 1 : Signal d'entrée "
121 LOCATE 19,15:PRINT "FIG 2 :Densite spectrale de puissance "
122 LINE (0,0)-(639,310),1,B
123 LINE (1,160)-(638,160)
124 VIEW (15,5)-(634,145)
125 WINDOW (-10,-1.25*FM)-(N+10,1.25*FM)
126 LINE (-10,0)-(N+10,0)
127 LINE (0,-1.25*FM)-(0,1.25*FM)
128 RETURN
129 VIEW (5,165)-(634,295)
130 WINDOW (-5,-.25*B)-(N/2+5,1.25*B)
131 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
132 LINE (0,-.25*B)-(0,1.25*B)
133 RETURN
134 LOCATE 22,2:INPUT "VOULEZ-VOUS UTILISER LE ZOOM";D$
135 IF D$=" " THEN 135
136 IF D$="N" THEN 140
137 IF D$="0" THEN 138 ELSE 134
138 CLS 0 :GOSUB 230
139 GOTO 134
140 LOCATE 22,2:PRINT "VOULEZ-VOUS TRACER LE CEPSTRE ?"
141 LOCATE 23,2:INPUT "REPONDEZ PAR OUI(O)/NON(N)";F$
142 IF F$=" " THEN 142
143 IF F$="N" THEN END
144 IF F$="0" THEN 145 ELSE 140
145 SCREEN 1:SCREEN 3
146 CLS:LOCATE 10,6:PRINT "CEPSTRE DE LA DENSITE SPECTRALE .... 1"
147 LOCATE 11,6:PRINT "CEPSTRE DE LA PARTIE ZOOM ..... 2"
148 LOCATE 12,6:PRINT " SORTIE DU PROGRAMME ...3"
149 LOCATE 17,6:INPUT "VOTRE CHOIX EST :";G$
150 IF G$=" " THEN 150

```

```

151 IF G#="3" THEN LOCATE 22,2:END
152 IF G#="1" THEN 154
153 IF G#="2" THEN 160 ELSE 145
154 FOR I=0 TO N-1
155 XR(I)=LOG(G(I)+1)
156 XI(I)=0
157 NEXT I
158 PP=1
159 GOTO 373
160 FOR I=0 TO N-1
161 XR(I)=LOG(Z(I)+1)
162 XI(I)=0
163 G(I)=Z(I)
164 NEXT I
165 PP=2
166 GOTO 373
167 ' *****
168 ' ***** SUBROUTINE FILTRE *****
169 ' *****
170 CLS :LOCATE 12,20:PRINT "CALCULS EN COURS"
171 PI=6.28318307179586# / 2 : DET=.01
172 FG =N*FC /FS
173 GOTO 198
174 FOR K=(NF-1)/2 TO NF-1
175 H(K)=H(K-(NF-1)/2)
176 NEXT K
177 FOR K=0 TO (NF-1)/2-1
178 H(K)=H(NF-1-K)
179 NEXT K
180 GOTO 216
181 FOR K=0 TO (NF-1)/2
182 H(K)=1/NF
183 FOR I=1 TO (NF-1)/2
184 IF I<FG -1 THEN G = 1:GOTO 188
185 IF I<FG THEN G =R1:GOTO 188
186 IF I<FG +1 THEN G =R2:GOTO 188
187 G =0
188 ' *****
189 ' ***** CALCUL DES H(K) *****
190 ' *****
191 X=2*G*CO5(2*PI*K*I/NF)
192 H(K)=H(K)+X/NF
193 NEXT I
194 'PRINT USING "H(##),K;
195 'PRINT USING ")=+#.#####";H(K)
196 NEXT K
197 GOTO 174
198 IB=INT(FG)
199 F1=(2*IB-1)/(2*NF):F2=(2*IB+3)/(2*NF)
200 FOR J=0 TO IB+1

```

```

201 P1(J)=SIN (NF*PI*(F1-J/NF))/(NF*SIN (PI*(F1-J/NF)))
202 P2(J)=SIN (NF*PI*(F1+J/NF))/(NF*SIN (PI*(F1+J/NF)))
203 P3(J)=SIN (NF*PI*(F2-J/NF))/(NF*SIN (PI*(F2-J/NF)))
204 P4(J)=SIN (NF*PI*(F2+J/NF))/(NF*SIN (PI*(F2+J/NF)))
205 NEXT J
206 A1=F1(0):A2=P3(0)
207 FOR J=1 TO IB-1
208 A1=A1 +P1(J)+P2(J) :A2=A2+P3(J)+P4(J)
209 NEXT J
210 B1=F1(IB)+P2(IB) :B2=P3(IB)+P4 (IB)
211 C1=P1 (IB+1)+P2 (IB+1) :C2=P3 (IB+1)+P4 (IB+1)
212 D=B1*C2-B2*C1 :D1=C2*(1+DET -A1)+C1*( DET+A2)
213           D2=B1*( -DET -A2)-B2*(1+DET-A1)
214 R1=D1/D :R2=D2/D
215 GOTO 181
216 FOR I=(NF-1)/2 TO NC
217 S=0 :Q=0
218 FOR K=0 TO NF-1
219 IF I<K THEN 223
220 S=S+H(K)*XRF (I-K)
221 Q=Q+H(K)*XIF (I-K)
222 GOTO 225
223 S=S+H(K)*XRF (I-K+(N-1))
224 Q=Q+H(K)*XIF (I-K+(N-1))
225 NEXT K
226 XRF (I-(NF-1)/2)=S
227 XIF (I-(NF-1)/2)=Q
228 NEXT I
229 RETURN
230 '*****
231 '***** ZOOM FFT *****
232 '*****
233 CLS
234 INPUT "DONNER LA FRQUENCE CENTRALE FZ=" ;FZ
235 MMIN=N/(NF-1)
236 PRINT "CHOISIR LE FACTEUR DE ZOOM (M)="MMIN" : INPUT "M=" ;M
237 FZ=FZ-(F5/(2*M))
238 '***multiplication par l'EXPONENTIELLE *****
239 FOR I=0 TO N-1
240 XRF (I+1)=XR (I)*COS(-2*PI*FZ*I*T1)
241 XIF (I+1)=XI (I)*SIN(-2*PI*FZ*I*T1)
242 NEXT I
243 FC=F5/M
244 GOSUB 167 :'FILTRAGE
245 'Rediscretisation
246 D=INT(N/M)
247 FOR K=1 TO D
248 IND=K*M
249 RR(K)=XRF (IND) :RI(K)=XIF (IND) :PRINT IND;
250 NEXT K

```

```

251 'Augmentation de durée du signal ****
252 I=1
253 FOR J=1 TO M
254 FOR K=1 TO D
255 YR(I)=RR(K) :YI(I)=RI(I) :I=I+1
256 NEXT K
257 NEXT J
258 GOSUB 281
259 RETURN
260 '
261 '
262 '***** SUBROUTINE FENETRES *****
263 '*** FENETRE DE HANNING ***
264 FOR I=0 TO N-1
265 XR(I)=XR(I)*( .54+.46*COS(PI*(2*I-N)/N))
266 XI(I)=XI(I)*( .54+.46*COS(PI*(2*I-N)/N))
267 NEXT I
268 GOTO 36
269 '*** FENETRE DE HANNING ***
270 FOR I=0 TO N-1
271 XR(I)=XR(I)*( .5+.5*COS(PI*(2*I-N)/N))
272 XI(I)=XI(I)*( .5+.5*COS(PI*(2*I-N)/N))
273 NEXT I
274 GOTO 36
275 '*** FENETRE EXPONENTIELLE ***
276 FOR I=0 TO N-1
277 XR(I)=XR(I)*EXP(I*T1*LOG(.99))
278 XI(I)=XI(I)*EXP(I*T1*LOG(.99))
279 NEXT I
280 GOTO 36
281 '*****
282 '***** PROCEDURE FFT *****
283 '*****
284 B=ABS(G(0))
285 FOR I=0 TO N-1
286 IF B<ABS(G(I)) THEN B=G(I)
287 NEXT I
288 CLS 2
289 GOSUB 346
290 FOR I=0 TO N/2-1
291 LINE(I,G(I))-(I+1,G(I+1))
292 NEXT I
293 GOSUB 318
294 NU1=R-1
295 FOR I=1 TO R
296 REP=2^I
297 ARG=2*PI/REP
298 DISP=REP/2
299 FOR J=1 TO DISP
300 TWF=(J-1)*ARG

```

```

301 C=COS(TWF)
302 S=SIN(TWF)
303 FOR K=J TO N STEP REP
304 J2=K+DISP
305 T3=C*YR(J2)+S*YI(J2)
306 T2=-S*YR(J2)+C*YI(J2)
307 YR(J2)=YR(K)-T3
308 YI(J2)=YI(K)-T2
309 YR(K)=YR(K)+T3
310 YI(K)=YI(K)+T2
311 NEXT K
312 NEXT J
313 NEXT I
314 FOR I=N TO 1 STEP -1
315 Z(I-1)=(YR(I)*YR(I)+YI(I)*YI(I))*2*T1*M/N
316 NEXT I
317 GOTO 341
318 ND2=N/2
319 NM1=N-1
320 J=1
321 FOR I=1 TO NM1
322 IF I >= J THEN 329
323 T4=YR(J)
324 YR(J)=YR(I)
325 YR(I)=T4
326 T5=YI(J)
327 YI(J)=YI(I)
328 YI(I)=T5
329 K=ND2
330 IF K=J THEN 334
331 J=J-K
332 K=K/2
333 GOTO 330
334 J=J+K
335 NEXT I
336 RETURN
337 C=ABS(Z(0))
338 FOR I=0 TO N-1
339 IF C<ABS(Z(I)) THEN C=ABS(Z(I))
340 NEXT I
341 GOSUB 363
342 FOR I= 0 TO N/2-1
343 LINE (I,Z(I))-(I+1,Z(I+1))
344 NEXT I
345 RETURN 'RETOUR AU ZOOM *****
346 CLS 0
347 KEY OFF
348 SCREEN 0:SCREEN 3
349 LINE (0,0)-(639,299),1,B
350 LOCATE 2,2:PRINT "G(n)"

```

```

351 LOCATE 12,2:PRINT "Z(n)"
352 LOCATE 7,72:PRINT "n"
353 LOCATE 17,72:PRINT "n"
354 LOCATE 9,16 :PRINT " Densite spectrale de puissance "
355 LOCATE 18,22:PRINT "      Zoom"
356 LINE (0,0)-(639,299),1,B
357 LINE (1,155)-(638,155)
358 VIEW(15,5)-(634,145)
359 WINDOW (-10,-.25*B)-(N/2+5,1.25*B)
360 LINE (-10,0)-(N+10,0)
361 LINE (0,-1.25*B)-(0,1.25*B)
362 RETURN
363 VIEW (5,165)-(634,295)
364 WINDOW (-5,-2.5*B)-(N/2+5,12.5*B)
365 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
366 LINE ( 0,-.25*B)-(0,1.25*B)
367 RETURN
368 '*****
369 '*****
370 '***** CALCUL DU CEPSTRE *****
371 '*****
372 '*****
373 FM=ABS(XR(0))
374 FOR I=0 TO N-1
375 IF FM < ABS(XR(I)) THEN FM=ABS(XR(I))
376 NEXT I
377 GOSUB 441
378 FOR I=0 TO N/2-1
379 LINE (I,XR(I))-(I+1,XR(I+1))
380 NEXT I
381 FOR I=N TO 1 STEP -1
382 XR(I)=XR(I-1)
383 XI(I)=XI(I-1)
384 NEXT I
385 GOSUB 410
386 NU1=R-1
387 FOR I=1 TO R
388 REP=2^I
389 ARG=2*PI/REP
390 DISP=REP/2
391 FOR J=1 TO DISP
392 TWF=(J-1)*ARG
393 C=COS(TWF)
394 S=SIN(TWF)
395 FOR K=J TO N STEP REP
396 J2=K+DISP
397 T3=C*XR(J2)+S*XI(J2)
398 T2=-S*XR(J2)+C*XI(J2)
399 XR(J2)=XR(K)-T3
400 XI(J2)=XI(K)-T2

```



```

401 XR(K)=XR(K)+T3
402 XI(K)=XI(K)+T2
403 NEXT K
404 NEXT J
405 NEXT I
406 FOR I=N TO 1 STEP -1
407 G(I-1)=(XR(I)*XR(I)+XI(I)*XI(I))*2*T1/N
408 NEXT I
409 GOTO 429
410 ND2=N/2
411 NM1=N-1
412 J=1
413 FOR I=1 TO NM1
414 IF I = J THEN 421
415 T4=XR(J)
416 XR(J)=XR(I)
417 XR(I)=T4
418 T5=XI(J)
419 XI(J)=XI(I)
420 XI(I)=T5
421 K=ND2
422 IF K=J THEN 426
423 J=J-K
424 K=K/2
425 GOTO 422
426 J=J+K
427 NEXT I
428 RETURN
429 B=ABS(G(0))
430 FOR I=0 TO N-1
431 IF B >= ABS(G(I)) THEN 433
432 B=ABS(G(I))
433 NEXT I
434 GOSUB 457
435 FOR I=0 TO N/2-1
436 LINE (I,G(I))-(I+1,G(I+1))
437 NEXT I
438 IF PP=1 THEN LOCATE 12,24:PRINT "SPECRE LOGARITHMIQUE "
439 IF PP=2 THEN LOCATE 12,22:PRINT "Spectre logarithmique du ZOOM"
440 LOCATE 2,2:END
441 CLS
442 KEY OFF
443 SCREEN 3
444 LINE (0,0)-(639,399),1,B
445 IF PP=1 THEN LOCATE 2,4:PRINT "G(n)" ELSE LOCATE 2,4:PRINT "Z(n)"
446 LOCATE 15,2:PRINT "C(q)"
447 LOCATE 7,72:PRINT "n"
448 LOCATE 23,72:PRINT "q"
449 LOCATE 25,15:PRINT " "
450 LINE (0,0)-(639,399),1,B

```

CEPSTRE DE PUISSANCE

450 LINE (0,0)-(639,399),1,B  
451 LINE (1,205)-(638,205)  
452 VIEW (15,5)-(634,165)  
453 WINDOW (-10,-.25\*FM)-(N/2+5,1.25\*FM)  
454 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)  
455 LINE (0,-.25\*FM)-(0,1.25\*FM)  
456 RETURN  
457 VIEW (5,210)-(634,375)  
458 WINDOW (-5,-.25\*B)-(N/2+5,1.25\*B)  
459 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)  
460 LINE (0,-.25\*B)-(0,1.25\*B)  
461 RETURN

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 - J. MAX  
Méthodes et techniques de transformation du signal.  
Edition MASSON 4<sup>e</sup> Ed 1985.
  
- 2 - E. O. BRIGHAM  
The fast Fourier transform.  
Edition Printice-Hall 1974
  
- 3 - M. BÅTH  
Spectral analysis in geophysics.  
ELSEVIER Scientific publishing.  
N.Y - 1974.
  
- 4 - J. LIFERMANN  
Les methodes rapides de transformation du signal:  
FOURIER, WALSH, HADAMAR, HARR.
  
- 5 - ENCYCLOPEDIE QUILLET DES SCIENCES UNIVERSELLES  
Vol 5 1983.

6 - W. KUROWSKI

Problemes choisis des diagnostics des machines.

ALGER 1984.

7 - R.B. RANDALL , B.TECH , B.A

Cepstrum analysis and gear-box fault diagnosis.

Revue BRUËL et KJAER 233-80 Application Notes

8 - N. THRANE , Ph.D.

Zoom - FFT

Technical Review BRUËL et KJAER No 2 - 1980

9 - M. KUNT

Traitement numérique des signaux

Edition DUNOD 3<sup>e</sup> Ed 1981

10 - F. DE COULON

Traité d'Electricité vol VI Théorie et traitement des signaux.

Edition GEOGI

11 - A.M. NOLL

Cepstrum pitch determination

The journal of acoustical society of America.

Vol 41 1967.

12 - CHILDERS, SKINNER, KEMERAIT

The cepstrum a guide to processing

IEEE Vol 65 n°10 OCT 1977.

13 - J.S. BENDAT, A.G. PIERSON.

Engineering applications of correlation and  
spectral analysis.

Ed J. Wiley & Sons, Inc 1980.

14 - Projet de fin d'études : Diagnostic d'une machine  
tournante par la méthode de mesure du spectre de  
vibrations BOUBNIDER Juin 1986

15 - M. BELLANGER

Traitement numérique du signal. Théorie et pratique.

Édition MASSON 1984.

