

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Génie Mécanique

المركز الوطنية المتعدد التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Rupture des matériaux
composites stratifiés

Proposé par : S Rechak

Etudié par : K Meftah
M Ziane

Dirigé par S Rechak

PROMOTION Juillet 1993

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Rupture des matériaux
composites stratifiés

Proposé par : S Rechak

Etudié par : K Meftah
M Ziane

Dirigé par S Rechak

PROMOTION Juillet 1993

بسم الله الرحمن الرحيم

“ قل إن صلاتي ونسكي ومحياي ومماتي

لله رب العالمين لا شريك له ، وبذلك

أمرت وأنا أول المسلمين “

سورة الأنعام الآية (١٦٢ ، ١٦٣)

ملخص :

انجاز برنامج معلوماتي يسمح بتقدير شروخ المعادن
المركبة باستعمال معايير الانشقاق المرئية
محاكاة عددية بطريقة المعادلات التكاملية لدلا مينا ج المعادن
المركبة في النموذج ١

Sujet :

Conception d'un logiciel permettant la
prévision de la rupture d'un matériau
composite stratifié en utilisant les critères
de rupture macroscopiques.

Simulation numérique par équations
intégrales du délaminage d'un stratifié à
zero degré en mode 1

Subject :

The development of computer program
in order to anticipate the failure of
composite material using the macroscopic
criteria.

An attempt is made to simulate mode 1 in
laminated composite using boundary
integral equation.

REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement notre promoteur MR SAID RECHAK pour son suivi et ses orientations .

On tient également à exprimer notre gratitude envers MR KAMEL AZIZI pour son aide continue , ainsi que MR K.AZQUAQUI pour ses conseils qui nous ont toujours été prodigués pour la rédaction de ce livre , sans oublier notre enseignant MR F.BELBLIDIA pour son aide et ses encouragements

Que messieurs les membres du jury trouvent ici nos sincères remerciements pour avoir accepté d'évaluer ce travail

On remercie enfin H.ABBA l'amie , et tous qui ont participé de près ou de loin pour l'elaboration de ce modeste travail .

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

Chapitre 1 - PRESENTATION DES MATERIAUX COMPOSITES

1.1 - Les fibres

1.2 - La matrice

Chapitre 2 - THEORIE DU PLI

2.1 - Etude macroscopique du pli

2.1.1 - Relation contraintes déformations

2.1.1.1 - Matériau orthotrope

2.2 - Etude microscopique du pli

2.2.1 - Isotropie - anisotropie

2.2.2 Caractéristiques du mélange renfort matrice

2.2.2.1 - Détermination de E_1

2.2.2.2 - Détermination de E_2

2.2.2.3 - Détermination de ν_{12}

2.2.2.4 - Détermination de G_{12}

Chapitre 3 - THEORIE ELASTIQUE DU STRATIFIE

3.1 - Relations contraintes déformations

3.2 - Equations fondamentales d'un stratifié

3.3 - Influence de la température

Chapitre 4 - CRITERES DE RUPTURE

APPROCHE MACROSCOPIQUE

4.1 - Introduction

4.1.1 - Principes généraux

4.2 - Critères de la contrainte maximale

4.3 - Critère de la déformation maximale

4.4 - Critère de TSAI-HILL

4.4.1 - Tenseur et matrice de fragilité

4.4.2 - Influence de la pression de confinement

4.4.3 - Détermination des coefficients fixant
le critère

4.4.3.1 - Détermination de F, G, H

4.4.3.2 - Détermination de L, M, N

4.4.4 - Critère de TSAI-HILL en contraintes
planes

4.5 - Critère de TSAI-WU

4.6 - Exemples

Chapitre 5 - MECANIQUE LINEAIRE DE LA RUPTURE

5.1 - Matériau homogène élastique isotrope

5.1.1 - Généralités sur la rupture

5.1.2 - Champ de contraintes et de déplacements
au voisinage de l'extrémité d'une fissure

5.2 - Approche globale

5.2.1 - formulation (théorie de GRIFFITH)

5.2.2 - Formulation intégrale

5.2.3 - Généralisation par le MAITRE-CHABOCHE

5.3 - Matériau élastique anisotrope

5.3.1 - Généralités sur les ruptures

5.3.2 - Condition d'application de la M.L.E.R

5.3.3 - Champ de contraintes et de déplacements
au voisinage du front de fissure

Chapitre 6 - PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET SON APPLICATION A LA M.L.E.R

6.1 - Introduction

6.2 - Discrétisation d'une structure

6.2.1 - Fonctions de déplacements

6.2.2 - Relations contraintes déplacements

6.2.3 - Dérivation de la matrice de rigidité

6.3 - Organisation de programme éléments finis
appliqué à la M.L.E.R

6.3.1 - Maillage

6.4 - Techniques de stockage

6.4.1 - Rangement des matrices creuses

6.4.2 - Rangement plein

6.5 - Méthode de résolution

6.6 - Caractéristiques mécaniques et géométriques
de l'éprouvette

Chapitre 7 - METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES METHODE INDIRECTE

7.1 - Introduction

7.2 - Méthode des contraintes fictives

- 7.2.1 - Problème de Kelvin pour un état de déformation plane
- 7.2.2 - Vecteur traction constant suivant un segment droit
- 7.2.3 - Procédure numérique
- 7.3 - Méthode des discontinuités des déplacements

CONCLUSION

ANNEXES

REFERENCES

" On modéfie à volonté leur composition et leur architecture interne pour leur conférer des propriétés que ne possède aucun matériau homogène . "

Avec quels extraordinaires matériaux pourrait on construire un aéronef , puis d'atterrir comme un avion conventionnel après avoir résisté à l'érosion thermique lors de sa rentrée dans l'atmosphère l'engin aurait nécessairement une structure constitué d'un matériau à la fois léger , rigide et solide , capable de résister à des températures très élevées : ce seraient les matériaux composites .

POUR QUOI LES MATERIAUX COMPOSITES ?

Les composites s'imposent dans tous les secteurs où les progrès technologiques nécessitent de combiner des propriétés que ne possède individuellement aucun matériau . En répartissant fibres dans une matrice , on obtient des propriétés qu'elles n'ont indépendement ni l'un , ni l'autre. Notre travail comporte sept chapitres :

Dans le premier chapitre , une présentation des matériaux composites a été effectuée .

Le chapitre deux a été consacré à l'étude macroscopique et microscopique du pli

Dans le chapitre trois on a exposé la théorie élastique du stratifié et on a déterminé les équations fondamentales .

Le chapitre quatre a été consacré à l'étude des critères macroscopiques de rupture .

Dans le chapitre cinq , un bref aperçu est donné sur la validité de l'application de la M.L.E.R pour les matériaux composites . Des généralités sur la M.L.E.R et les équations de contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure ont été également abordées .

Le chapitre six a été consacré pour une présentation de la méthode des éléments finis et son application pour la M.L.E.R

En fin , le chapitre sept consiste à une tentative de l'application de la méthode des équations intégrales à la M.L.E.R .

CHAPITRE 1

PRESENTATION DES MATERIAUX COMPOSITES

1.1- Les fibres :

Dans la tranche médiane du tableau périodique , on trouve des matériaux tels que (carbone , al , si ,....etc) qui forment des composés où les liaisons sont fortes et stables . Parmi ces composés (oxyde d'aluminium ,carbure de siliciumetc) sont durs , rigides et résistants à la chaleur ou à la corrosion , de faible densité et abondants à la surface . Mais ces substances s'ouvrent d'un défaut majeur : elles sont cassantes .

Une petite fissure ou un défaut interne suffit à amorcer une rupture fatale . Ces matériaux n'atteignent rarement leur solidité théorique .

Lorsqu'on fabrique un tel matériau sous formes de fibres fines , on augmente considérablement sa résistance utile . cela est dû à des raisons statiques .

" la probabilité qu'un échantillon contienne un défaut susceptible de l'amener à la rupture augmente avec sa taille "

Les fibres ont pour tâche essentielle de supporter les sollicitations appliquées sur la structure composite .On rencontre dans le domaine industriel , les fibres de verre , de bore , de kevlarect . Ils ont un diamètre de 5-15 μm

1.2 - La matrice :

La matrice remplit un rôle complexe vis à vis de la structure composite .

- Elle a comme fonction essentielle de transmettre aux éléments de renfort (fibres) les efforts qui s'exercent sur la structure .

- Elle maintient les distances et les orientations des fibres, ce qui participe à la cohésion et à la rigidité de la structure finale .

- Elle doit assurer une excellente qualité de l'adhérence à l'interface fibres-matrice .

-Enfin , elle a comme fonction aussi , la protection contre l'attaque des produits chimiques , l'humidité et les chocs mécaniques . Ces derniers étant mal supportés par les fibres. Les matrices peuvent être :

- Matrices résineuses (résine thermoplastiques , résines thermodurcissables) .
- Matrices minérales (carbure de silicium ,carbone) .
- Matrices métalliques (alliages d'aluminium , entéctique orienté) .

1.3 - Caractéristiques des pièces en matériaux composites :

- Gain de masse : ceci implique une économie de carburant ou accroissement de charge utile , ou rayon d'action accrue , ce sont les meilleurs performances .
- Absence de corrosion .
- l'orientation des fibres permet d'optimiser le comportement mécanique dans une direction déterminée .
- Le matériau est élastique jusqu'à la rupture .
- le coefficient de dilatation n'est pas le même que celui des matériaux isotropes .
- Les formes complexes sont aisément réalisables par moulage .
- la tenue en fatigue est excellente .

CHAPITRE 2

THEORIE DU PLI

2.1 - Etude macroscopique du pli

2.1.1 - Relation contraintes deformations

loi de hooke générale : pour les matériaux dits élastiques , linéaires , les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations, ces relations se traduisent sous la forme générale :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

où les composantes c_{ijkl} font intervenir les caractéristiques physiques du matériau .

Les tenseurs $[\sigma]$ et $[\varepsilon]$ étant symétriques , nous avons :

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad \text{et} \quad c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad (2.2)$$

Nous écrivons ainsi :

$$\sigma_i = c_{ij} \varepsilon_j \quad (2.3)$$

où c_{ij} désigne une matrice 6×6 , σ et ε sont les contraintes et les déformations

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} : \text{déformation suivant l'axe des OX .}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} : \text{déformation suivant l'axe des OY .}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} : \text{déformation suivant l'axe des OZ}$$

$$\gamma_{12} : \text{distorsion dans le plan XY .}$$

$$\gamma_{13} : \text{distorsion dans le plan XZ .}$$

$$\gamma_{23} : \text{distorsion dans le plan YZ .}$$

$$\text{Avec } \gamma_{12} = 2 \varepsilon_{12} , \gamma_{13} = 2 \varepsilon_{13} , \gamma_{23} = 2 \varepsilon_{23} .$$

L'énergie de déformation est :

$$dw = \sigma_i d\varepsilon_i = c_{ij} \varepsilon_j d\varepsilon_i \quad \text{après intégration on obtient}$$

$$w = 1/2 c_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j = 1/2 c_{ij} \varepsilon_j \varepsilon_i$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = c_{ij} = c_{ji} \quad (2.4)$$

Il en découle la symétrie de la matrice c_{ij} qui n'a donc que vingt et une composantes dans le cas le plus général d'anisotropie

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ \text{symétrique} & & & c_{2323} & c_{2313} & c_{1312} \\ & & & & c_{1313} & c_{1312} \\ & & & & & c_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{11} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

2.1.1.1 - Matériau orthotrope :

Un matériau orthotrope possède deux plans orthogonaux de symétrie élastique . La matrice c_{ij} est alors définie en fonction de neuf caractéristiques mécaniques indépendantes Dans les axes d'orthotropie :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & & 0 & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & & & \\ & & & c_{44} & & \\ & & & & c_{55} & \\ & 0 & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{11} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

(2.5)

2.1.2 - Constantes élastiques d'un pli dans une direction quelconque

Les relations déformations décrites précédemment ne sont valables que dans le plan d'orthotropie (\vec{R}_{12}) . Dans le repère (\vec{R}_{xy}) les constantes sont liées aux déformations par la relation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -m \cdot n & m \cdot n & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

[T] étant la matrice de passage de \vec{R}_{12} à \vec{R}_{xy} .
de la même façon les déformations sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

sachant que :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Introductions à ce stade une matrice [R] appelée matrice Reuter .

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [R][T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= [R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R][T]^{-1}[R]^{-1}[S][T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{S}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

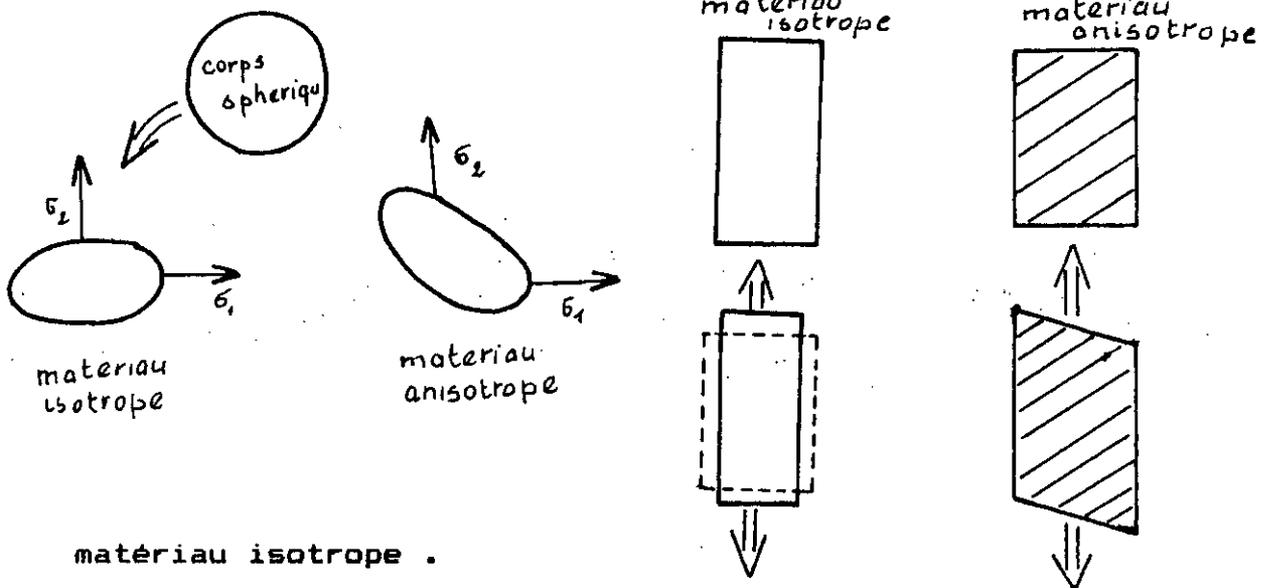
2.2 - Etude microscopique

2.2.1 - Isotropie - anisotropie .

Un corps élastique soumis à des contraintes se déforme de façon réversible .

En chaque endroit à l'intérieur du corps , on peut isoler des facettes sur lesquelles ne s'exercent que des contraintes normales .

les normales à ces facettes sont appelées directions principales .



matériau isotrope .

Les déformations sont liées aux contraintes par la loi de HOOKE .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

avec : $\sigma = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Un matériau élastique et isotrope est caractérisé par deux coefficients indépendants E , ν .

matériau anisotrope

Les déformations sont liées aux contraintes par la loi:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Un matériau composite est donc caractérisé par quatre constantes indépendantes :

- Deux modules de YOUNG E_{11} , E_{22} .
- Un coefficient de poisson ν_{12} ou ν_{21} .

avec : $\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}$ d'où $\nu_{12} = \frac{E_{11}}{E_{22}} \nu_{21}$

- Un module de cisaillement G_{12}

2.2.2 - Caractéristiques du mélange renfort matrice

On note par v_f , v_m , M_f , M_m les rapports suivants :

$$M_f = \frac{\text{masse du renfort}}{\text{masse totale}}$$

$$v_f = \frac{\text{volume du renfort}}{\text{volume total}}$$

$$M_m = \frac{\text{masse de matrice}}{\text{masse totale}}$$

$$v_m = \frac{\text{volume de matrice}}{\text{volume total}}$$

d'où $v_m = 1 - v_f$, $M_m = 1 - M_f$.

La masse volumique du matériau composite est :

$$\rho = \rho_f v_f + \rho_m v_m$$

2.2.2.1 - Détermination du module de young longitudinal

hypothèse :

Une déformation longitudinale ϵ_{11} est identique pour la matrice et la fibre .

Les sections droites de l'élément sont supposées planes au cours de la déformation .

Une liberté suivant z sur l'interface entre les deux matériaux autorisent des valeurs distinctes $\epsilon_{z1m} \neq \epsilon_{zf}$ l'effort appliqué est suivant l'axe X (fig-2.1)

$$(\sigma_{11})_{m+f} = \frac{F}{S} = \frac{F_f + F_m}{S} = \frac{F_f}{e_f \times l} \frac{e_f}{e_f + e_m} + \frac{F_m}{e_m \times l} \frac{e_m}{e_f + e_m}$$

$$(\sigma_{11})_{m+f} = (\sigma_{11})_f v_f + (\sigma_{11})_m v_m$$

En exprimant σ en fonction de ϵ et E l'équation précédente devient :

$$E_{11} \epsilon_{11} = E_f \epsilon_{11} v_f + E_m \epsilon_{11} v_m .$$

enfin :
$$E_{11} = E_f v_f + E_m v_m . \quad (2.12)$$

2.2.2.2 - Détermination du module de young transversal

On suppose que les composantes du matériau subissent les même contraintes σ (fig-2.2)

$$\epsilon_{22} = (\epsilon_{22})_f v_f + (\epsilon_{22})_m v_m$$

$$\frac{\sigma_{22}}{E_{22}} = \frac{\sigma_{22}}{E_f} v_f + \frac{\sigma_{22}}{E_m} v_m$$

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m}$$

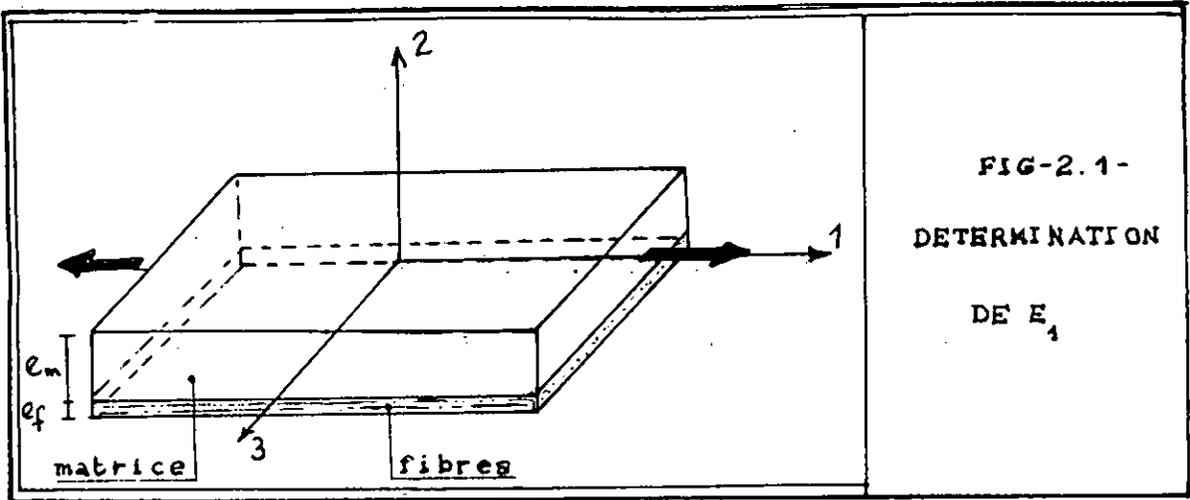


FIG-2.1-
DETERMINATION
DE E_1

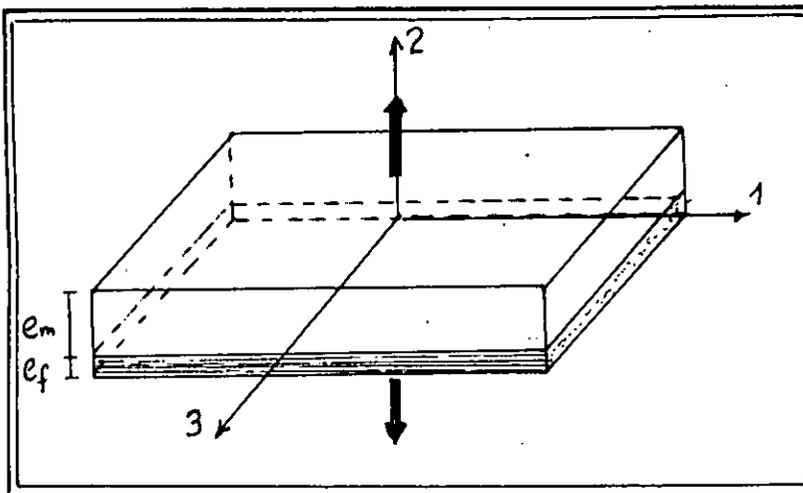


FIG-2.2 -
DETERMINATION
DE E_2

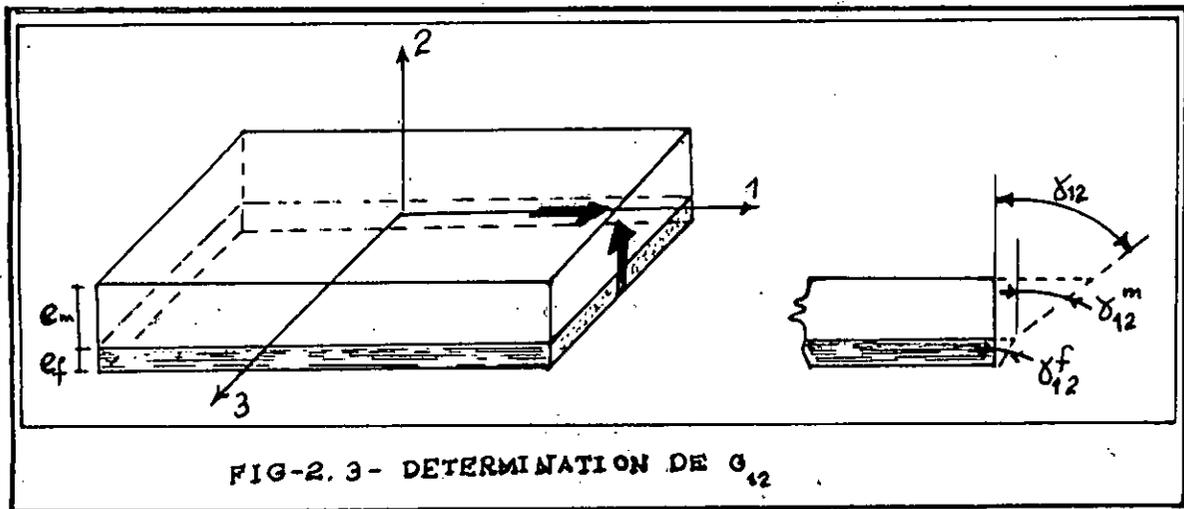


FIG-2.3- DETERMINATION DE G_{12}

CHAPITRE 3

THEORIE ELASTIQUE DU STRATIFIE

On appelle stratifié ce qui résulte de la superposition de plusieurs couches unidirectionnelles (ou plis) ou de tissu avec des orientations propres à chaque pli.

La direction dite à 0° correspond à la direction de l'effort ou à l'axe des abscisses du repère choisi .

On suppose qu'on est en présence de :

- contraintes planes (épaisseur faible) .
- plaque constituée par l'empilement de couches orthotropes .
- couches parfaitement " soudées " l'une par rapport à l'autre (ni glissement , ni séparation) .

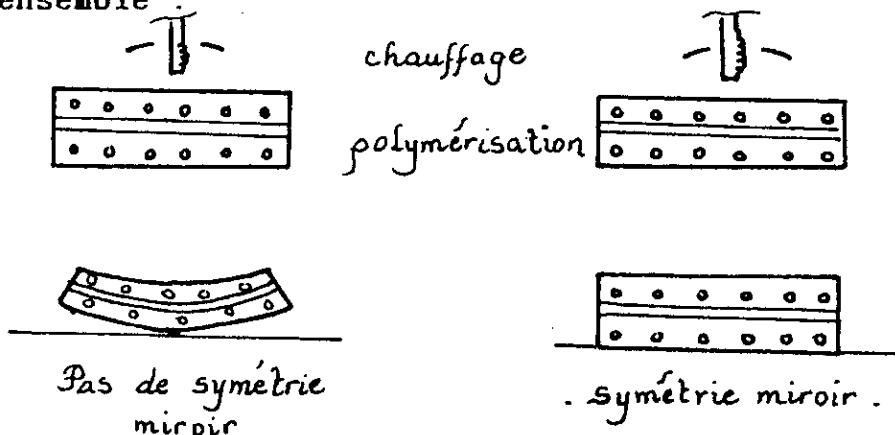
Plan moyen : c'est par définition le plan qui sépare en deux nombres égaux les plis . Il a pour cote 0 . (fig-3.1)

Exemple de notation d'un stratifié : $[0_3 / 90_2 / \pm 45]_s$

(s pour la symétrie)

Pour quoi la symétrie miroir ?

La symétrie miroir est réalisée , elle entraîne des contraintes thermiques et empêche la déformation de l'ensemble



3.1 - Relation contraintes - déformations :

Les équations données en (2.8) vont être écrites sous une autre forme . ceci en considérant la numérotation des

plis dans le cas d'un stratifié .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \text{sym} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} \\ & & \overline{Q}_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (3.1)$$

On considère dans ce qui suit un stratifié d'épaisseur h (considéré comme plaque mince utilisant les hypothèses de kirchoff pour les "plaques " ou les hypothèses de kirchoff-love pour les coques " $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \varepsilon_z = 0$) constitué par l'empilement de n plis parfaitement soudés l'un à l'autre .

Hypothèse : on suppose qu'une ligne perpendiculaire au plan moyen avant déformation (fig-3.2-a) demeure perpendiculaire à la surface moyenne , transformée du plan moyen dans la configuration fléchie (fig-3.2-b)

On rappelle que le plan moyen est par définition le plan qui sépare en deux nombres égaux les plis situés de part et d'autre de ce plan et a pour côte $z = 0$ par convention (fig-3.4-)

Le champ des déplacements est représenté par : u_0 , v_0 les composantes du déplacement dans le plan moyen et w_0 le déplacement dans la direction z .

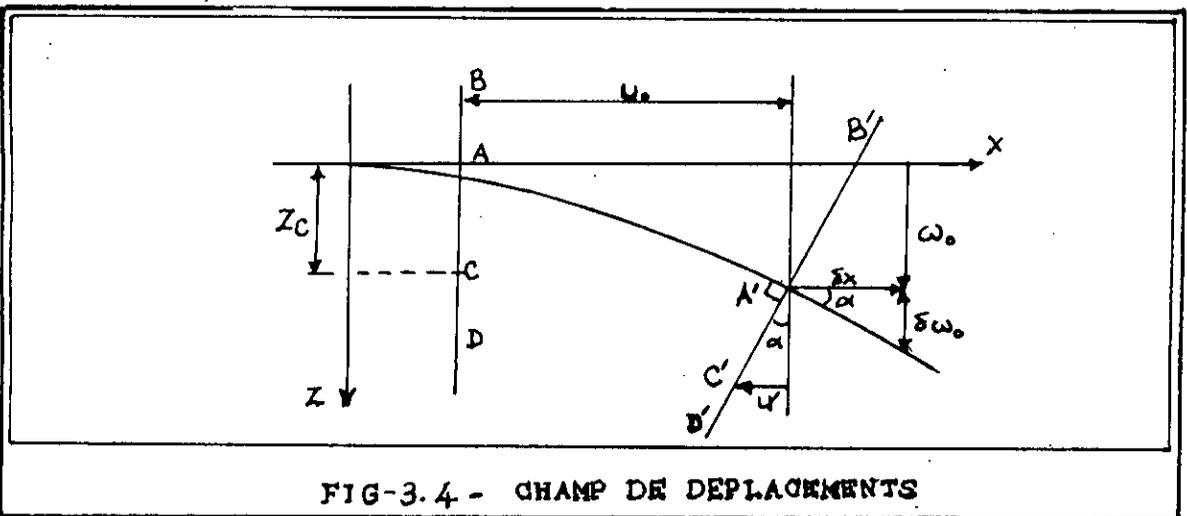
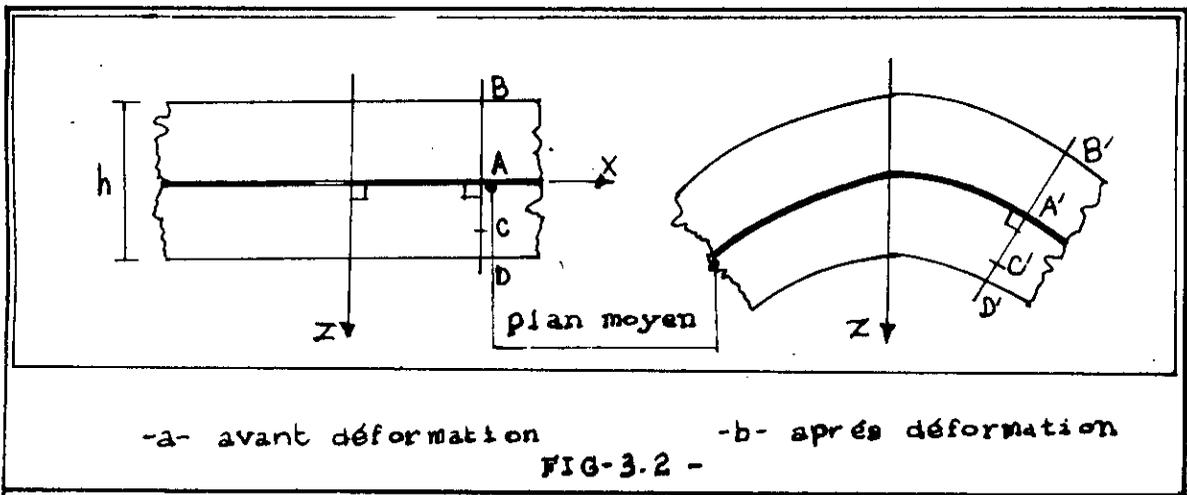
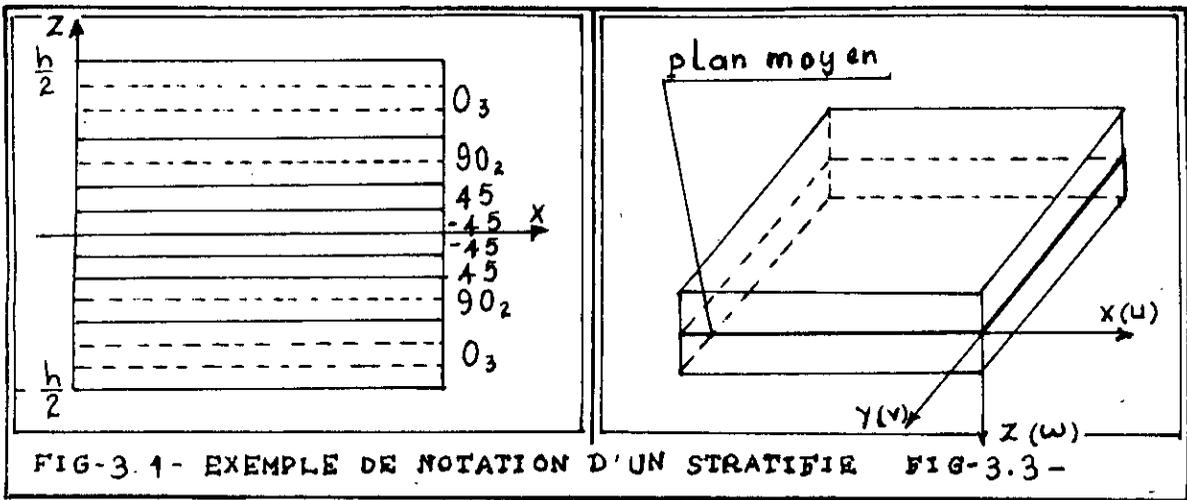
Ecrivons les équations du champ de déplacements pour un point c quelconque du stratifié après déformation . (fig-3.4-)

$$u_c = u_0 - u' \quad (3.2)$$

avec : $u' = z_c \alpha$ ($\sin(\alpha) \simeq \alpha = \frac{u'}{z_c}$)

or : $\text{tg}(\alpha) \simeq \alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x}$

De la même façon , on peut avoir v_c ; et ainsi le champ des déplacements de tout point de côte z dans le stratifié



s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w = w_0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

On déduit de (3.3) les déformations non nulles correspondantes . ceci pour les petites déformations (linéaires élastiques)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2 z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Les relations déformations-déplacements ci-dessus peuvent être écrites en fonction des déformations du plan moyen (ε_x^0 , ε_y^0 , γ_{xy}^0) et des courbures du plan moyen (k_x , k_y , k_{xy}) définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ k_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Ce qui nous donne en définitif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\}_k = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

On a enfin les relations contraintes - déformations qui peuvent ainsi s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\}_k = \left[\begin{array}{ccc} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \text{sym} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} \\ & & \overline{Q}_{33} \end{array} \right]_k \left[\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{array} \right\} \right] \quad (3.8)$$

3.2 - Equations fondamentales d'un stratifié :

On considère un stratifié soumis à des sollicitations notées

N_x , N_y , et N_{xy} , telle que : (fig-3.5-).

N_x : Effort résultant dans la direction x par unité de largeur (suivant la direction y).

$$\frac{F_x}{l} = N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (3.9)$$

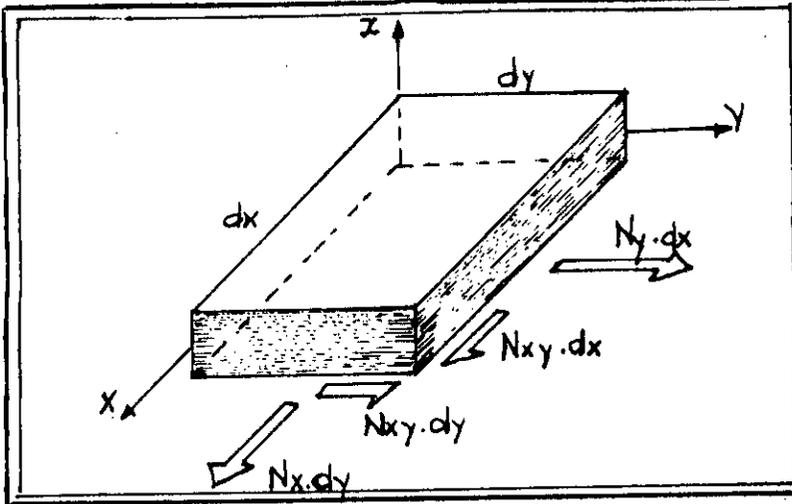
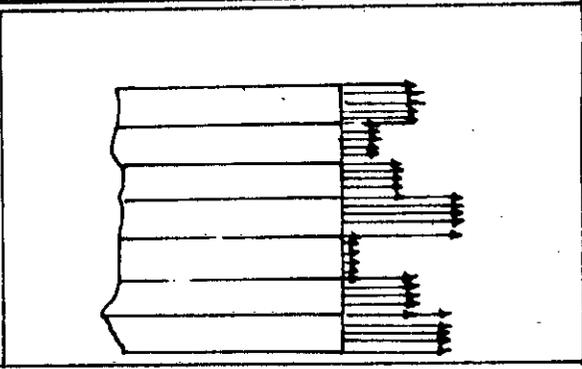
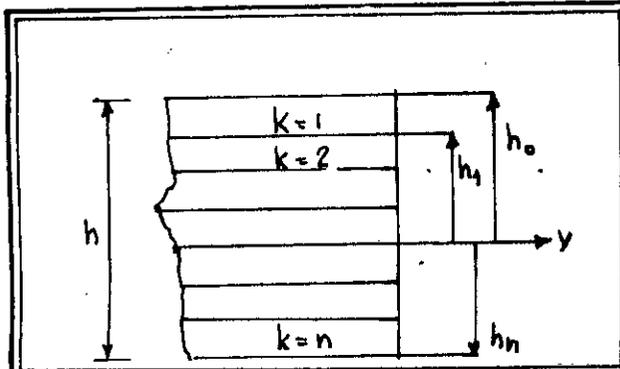


FIG-3.5 -
LES EFFORTS
RESULTANTS



-a- -b- état de contrainte
par couche
FIG-3.6 -

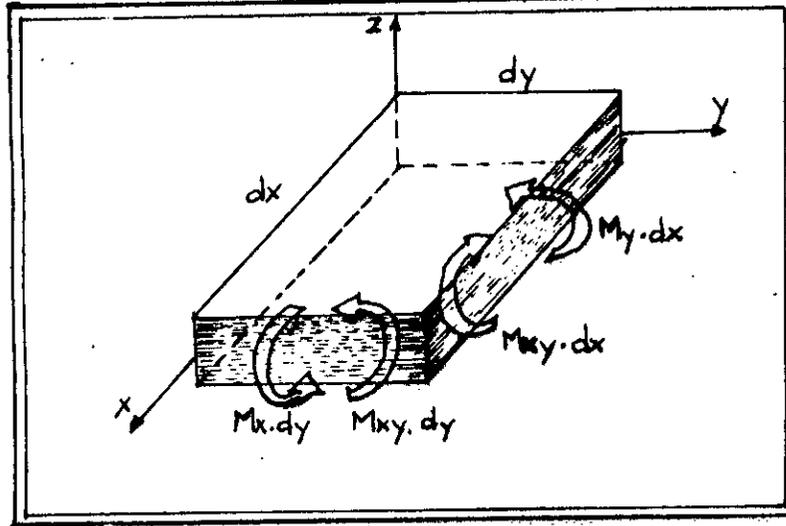


FIG-3.7 -
LES MOMENTS
RESULTANTS

N_y : Effort résultant dans la direction y par unité de largeur (suivant la direction x) .

$$\frac{F_y}{l} = N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \, dz \quad (3.10)$$

N_{xy} : Effort résultant de cisaillement dans le plan (x,y) par unité de largeur .

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} \, dz \quad (3.11)$$

Notre stratifié étant également soumis à des moments notés M_x , M_y , M_{xy} (fig-3.7) tels que :

M_x : Moment fléchissant d'axe y dû aux contraintes σ_x par unité de largeur (suivant la direction y) .

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \, z \, dz \quad (3.12)$$

M_y : Moment fléchissant d'axe x dû aux contraintes σ_y par unité de largeur (suivant la direction x) .

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \, z \, dz \quad (3.13)$$

M_{xy} (ou M_{yx}) : Moment de torsion d'axe x (ou y) dû aux contraintes τ_{xy} par unité de largeur (suivant la direction y (ou x)) .

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \, z \, dz \quad (3.14)$$

Etant donné que pour chaque pli d'épaisseur ($h_k - h_{k-1}$) (fig-3.6-a) on a les mêmes contraintes et d'autant plus que

Les contraintes sont discontinues le long de l'axe z (fig-3.6-b) il vient :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{n^{\text{ième pli}}} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.15)$$

En faisant intervenir l'expression des contraintes exprimée en (3.8) , il est évident d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n^{\text{ième pli}}} [\bar{Q}]_k \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \quad (3.16)$$

Car : * $[\bar{Q}]_k$ dépend du numéro du pli uniquement , non de la côte z .

* $[\varepsilon^0]$ et $[k]$ sont des caractéristiques du stratifié donc indépendant de z .

d'où l'équation finale des efforts résultants :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n^{\text{ième pli}}} (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^{\text{ième pli}}} (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

En procédant de la même façon pour les moments , on a :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{\text{pli}}^{\text{ième pli}} h_k \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (3.18)$$

Ainsi l'équation finale des moments résultants devient :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

avec :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{\text{pli}}^{\text{ième pli}} (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

On peut écrire les efforts et les moments résultants sous une forme condensée, obtenue en combinant les équations (3.17) et (3.19), pour enfin avoir les équations fondamentales d'un stratifié :

$$\begin{Bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \dots \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Pour obtenir l'autre forme désirée des équations fondamentales d'un stratifié, les équations de [N] et de [M] sont considérées séparément.

De l'équation (3.17) on tire [ε^o] qu'on injecte dans l'équation (3.19), ce qui nous donne les courbures [k] :

$$[k] = [D^{*-1}] [M] - [D^{*-1}] [C^{*-1}] [N] \quad (3.21)$$

En substituant dans l'équation de [ε^o], on a :

$$[\varepsilon^o] = ([A^*] - [B^*] [D^{*-1}] [C^{*-1}]) [N] + [B^*] [D^{*-1}] [M] \quad (3.22)$$

d'où en combinant les équations (3.21) et (3.22) sous la forme condensée :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \vdots \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \frac{A'}{\text{---}} \text{---} \vdots \text{---} \frac{B'}{\text{---}} \text{---} \\ B' \quad \quad \quad D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ \vdots \\ M \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

avec :

$$\begin{aligned} [A'] &= [A^*] - [B^*] [D^{*-1}] [C^{*-1}] \\ [B'] &= [B^*] [C^{*-1}] \\ [C'] &= - [D^{*-1}] [C^{*-1}] \\ [D'] &= [D^{*-1}] \end{aligned}$$

sachant que :

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A^{-1}] \\ [B^*] &= - [A^{-1}] [B] \\ [C^*] &= [B] [A^{-1}] \\ [D^*] &= [D] - [B] [A^{-1}] [B] \end{aligned}$$

3.3-Influence de la température :

Si l'effet de température est important, alors la déformation totale est la somme de la déformation due au chargement appliqué et de la déformation due à la différence de température.

$$\varepsilon_i = s_{ij} \sigma_j + \alpha_i \Delta t \quad (3.24)$$

α_i : coefficient de dilatation .
en inversant l'équation précédente

$$\sigma_i = c_{ij} (\varepsilon_j - \alpha_j \Delta t) \quad (3.25)$$

dans le repère d'orthotropie l'équation précédente s'écrit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = (Q) \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta t \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta t \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Notons que les coefficients de dilatation n'affectent pas le cisaillement .

Dans le repère (x , y) l'équation (3.26) devient :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k = (\overline{Q})_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta t \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta t \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta t \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

donc l'expression des efforts devient :

$$[N] = [A] \{ \varepsilon^0 \} + [B] \{ K \} - \{ N^t \} \quad (3.28)$$

les matrices A et B sont déjà définies et $\{ N^t \}$ sont les forces thermiques .

$$\{ N^t \} = \int (\overline{Q})_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \Delta t dz \quad (3.29)$$

d'une façon similaire les moments sont donnés par :

$$[M] = [B] \{ \varepsilon^0 \} + [D] \{ K \} - \{ M^l \} \quad (3.30)$$

$$\{ N^l \} = \int (\bar{Q})_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \Delta t \, dz \quad (3.31)$$

On peut donc arranger les moments et les efforts résultants comme suit :

$$[\bar{N}] = [N + N^l] = [A] \{ \varepsilon^0 \} + [B] \{ K \} \quad (3.32)$$

$$[\bar{M}] = [M + M^l] = [B] \{ \varepsilon^0 \} + [D] \{ K \} \quad (3.33)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \vdots \\ K \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \vdots \\ K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & \vdots & B' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B' & \vdots & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \vdots \\ \bar{M} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

CHAPITRE 4

CRITERES DE RUPTURE APPROCHE MACROSCOPIQUE

4.1-Introduction

L'étude de la résistance à la rupture des matériaux composites est d'une complexité bien plus grande que l'analyse des propriétés d'élasticité . En effet , lors d'un chargement mécanique ou thermique , des microfissures apparaissent dans la matrice , des fibres se rompent , des décohésions se créent aux interfaces des renforts et de la matrice , des plastifications apparaissent sans entraîner la ruine de la pièce . Les processus de rupture des composites sont d'une grande diversité et ne peuvent être décrit que si l'on connaît :

- le critère de rupture de chaque phase .
- l'état de contraintes et de déformations en tout point dans le matériau .
- les phénomènes de propagation des fissures .
- la nature de l'interface entre la matrice et le renfort .

Jusqu'à présent ces renseignements ne sont connus que partiellement et l'obtention par l'analyse d'une contrainte limite au delà de laquelle il y a ruine du matériau est quasi impossible , car pour les matériaux composites on généralise la notion de contrainte ultime par la notion de surface limite appelée aussi enveloppe de rupture , cette surface contient une infinité de contraintes ultimes .

Deux voies , qui permettent de traiter partiellement le problème de la rupture des composites semblent actuellement se dégager .

La première se situe dans une approche macroscopique et globale du problème qui consiste à rechercher soit une loi

soit un critère permettant de situer l'état de contraintes du matériau vis-à-vis de ses résistances ultimes , c'est cette voie qu'on abordera par la suite .La seconde voie consiste à prendre en compte les caractéristiques de résistance de divers composants du matériau .

Deux modèles simplifiés permettent alors d'estimer les caractéristiques de résistance du composite en fonction de celles de ses constituants et d'aboutir à un certain type de critères appelés critères phénoménologiques , c'est l'approche microscopique de la rupture .

Un critère de rupture est une expression mathématique reliant les contraintes régnant dans le matériau aux contraintes ultimes pouvant être supportées par ce dernier .Lorsque le critère n'est pas satisfait , il y a ruine local du matériau

4.1.1-Principes généraux

Un critère de résistance ou de rupture est caractérisé par la connaissance d'une fonction scalaire ϕ dépendant du tenseur de contraintes $[\sigma_{ij}]$. Il n'y a pas rupture du matériau tant que les contraintes régnant dans ce dernier ne dépassent pas les contraintes ultimes ,c'est a dire tant que l'inégalité suivante est satisfaite: $\phi(\sigma_{i,j}) < 1$
Lorsque l'inégalité est atteinte c'est à dire $\phi[\sigma_{ij}] = 1$ nous obtenons l'enveloppe de rupture ou la surface limite , cest une surface de R^6

Une telle approche de la rupture ne fait pas appel aux mécanismes intimes et évolutifs de la rupture ,elle ne tient compte ni de l'endommagement occasionné par un chargement , ni de la dégradation de certains renforts ,ni de la fatigue subit par le matériau lors de chargement répété . Notons que deux difficultés sont inhérentes à cette approche ; la première réside dans le choix de la fonction ϕ , la seconde dans la détermination des paramètres liés à la fonction ϕ , ces derniers ne peuvent être fixés que par des essais.

Le nombre d'essai croit avec le nombre de paramètres. Ajoutons qu' expérimentalement chaque paramètre doit être le résultat de plusieurs essais pour être acceptable .

4.2-Critère de la contrainte maximale

Cette approche consiste à étendre les connaissances acquises dans le domaine des matériaux isotropes . Elle s'applique essentiellement aux matériaux fibreux à fibres unidirectionnelles , la fibre étant la source principale de résistance . Dans ce critère , les contraintes dans le repère principal du matériau doivent être encadrées par des limites données pour que la résistance du matériau soit assurée , c'est à dire :

$$\begin{array}{ll} - X' < \sigma_{11} < X & \text{tenue selon la direction 1} \\ - Y' < \sigma_{22} < Y & \text{tenue selon la direction 2} \\ - S < \sigma_{12} < S & \text{tenue selon la direction 1.2} \end{array}$$

(4.1)

avec :

X : est la limite de traction dans le sens des fibres , selon l'axe 1 .

X' : est la limite de compression dans le sens des fibres , selon l'axe 1

Y : est la limite de traction dans le sens perpendiculaire aux fibres , selon l'axe 2

Y' : est la limite de compression dans le sens perpendiculaire aux fibres , selon l'axe 2

S : est la limite de cisaillement dans le plan (1.2)

Toutes ses valeurs sont mesurées expérimentalement .

Notons que dans ce critère , il n'y a pas d'interaction entre σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} .

4.3-Critère de la déformation maximale

Le critère de la déformation maximale s'exprime de

façon similaire à celui de la contrainte maximale , mais ces deux critères ne sont pas équivalents, dans ce cas se sont les déformations qui sont limitées au lieu des contraintes . Ce critère est aussi une extrapolation des critères classiques aux matériaux anisotropes .

Les déformations mesurées selon les axes 1,2 du repère d'orthotropie sont : ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_{12} selon le plan (1,2) .

On dit que le matériau est en état de résistance si et seulement si ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_{12} sont tels que :

$$\begin{aligned} - X'_e < \epsilon_{11} < X_e \\ - Y'_e < \epsilon_{22} < Y_e \\ - S_e < \epsilon_{12} < S_e \end{aligned} \quad (4.2)$$

avec :

X_e : est la limite de déformation dans le sens des fibres en traction .

X'_e : est la limite de déformation dans le sens des fibres en compression

Y_e : est la limite de déformation dans le sens perpendiculaire aux fibres en traction (selon l'axe 2) .

Y'_e : est la limite de déformation dans le sens perpendiculaire aux fibres en compression (selon l'axe 2) .

S_e : est la limite de déformation par cisaillement dans le plan (1,2) .

Ces valeurs sont mesurées expérimentalement .

On peut relier les déformations admissibles $X_e, X'_e, Y_e, Y'_e, S_e$ aux contraintes maximales admissibles X, X', Y, Y', S

On considère pour cela une éprouvette de matériau renforcé unidirectionnellement qu'on soumet à des contraintes élémentaires

On sait que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_{11}} (\sigma_{11} - \nu_{12} \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_{11}} (\sigma_{22} - \nu_{21} \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12} \end{aligned} \quad (4.3)$$

lorsqu'un essai de traction est pratiqué selon l'axe 1 des fibres, on a : $\sigma_{11} \neq 0$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{12} = 0$ il vient :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}$$

la rupture a lieu lorsque $\sigma_1 = x$, elle provoque ainsi la déformation maximale en traction x'_e , soit : $x'_e = \frac{x}{E_{11}}$

De même en compression, on a : $-x'_e = \frac{-x}{E_{11}}$

$$x'_e = \frac{x}{E_{22}}$$

On obtient aussi suite à un essai de traction selon l'axe

$$2: \quad Y = Y'_e E_{22}$$

Et un essai de compression selon l'axe 2, on a : $Y' = Y'_e E_{22}$

Un essai de cisaillement dans le plan (1.2) nous fournit :

$$s = s'_e G_{12}$$

On a finalement :

$$\begin{aligned} x' &= x'_e E_{11} \\ Y' &= Y'_e E_{22} \\ s &= s'_e G_{12} \\ x &= x'_e E_{11} \\ Y &= Y'_e E_{22} \end{aligned} \quad (4.4)$$

On peut écrire enfin :

$$\begin{aligned} -x'_e &< \frac{1}{E_{11}} (\sigma_{11} - \nu_{12} \sigma_{22}) < x'_e \\ -Y'_e &< \frac{1}{E_{22}} (\sigma_{22} - \nu_{12} \sigma_{22}) < Y'_e \end{aligned}$$

$$-S_{\epsilon} < \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} < S_{\epsilon}$$

De plus d'après la formule (4.4) on a :

$$\frac{-X'}{E_{11}} < \frac{1}{E_{11}} (\sigma_{11} - \nu_{12} \sigma_{22}) < \frac{X}{E_{11}}$$

$$\frac{-Y'}{E_{22}} < \frac{1}{E_{22}} (\sigma_{22} - \nu_{12} \sigma_{11}) < \frac{Y}{E_{22}}$$

$$\frac{-S}{G_{12}} < \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} < \frac{S}{G_{12}}$$

Soit finalement :

$$-X' < (\sigma_{11} - \nu_{12} \sigma_{22}) < X$$

$$-Y' < (\sigma_{22} - \nu_{12} \sigma_{11}) < Y \quad (4.5)$$

$$-S < \sigma_{12} < S$$

La différence apparait ainsi entre le critère de la contrainte maximale et le critère de la déformation maximale

4.4-Critere de Tsai-Hill

4.4.1-Tenseur et matrice de fragilité :

Les critères de la contrainte maximale et de la déformation maximale ne montrent aucune interaction entre σ_{11} , σ_{22} , et σ_{12} .

la tenue dans une direction donnée est liée à la contrainte existant dans cette direction, mais ne dépend pas des contraintes appliquées dans les autres directions. Le critère de Tsai-Hill introduit une relation entre les contraintes appliquées.

Dans le cas général, un champ de contraintes régnant dans le matériau est caractérisé par : σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$.

La fonction ϕ proposée par Tsai-Hill est une expression quadratique des composantes du tenseur de contraintes soit :

$$\phi(\sigma_{ij}) = f_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (\text{sommation sur } i, j, k, l)$$

(4.6)

On dit que le matériau est en état de résistance si l'inégalité $\phi(\sigma_{ij}) < 1$ est vérifiée. La rupture a lieu dans le cas où l'inégalité est atteinte ou dépassée, c'est à dire $\phi(\sigma_{ij}) \geq 1$. Dans l'expression précédente de ϕ , les 81 coefficients f_{ijkl} sont les composantes d'un tenseur appelé tenseur de fragilité. Comme pour les rigidités et les souplesses, les fragilités sont des caractéristiques des propriétés de résistance et d'anisotropie du matériau. On peut écrire $\phi(\sigma_{ij})$ sous la forme suivante :

$$\phi(\sigma_{ij}) = [\sigma_{ij}] \begin{bmatrix} f_{ijkl} & 6 \times 3 \\ \dots & \dots \\ 3 \times 6 & 3 \times 3 \end{bmatrix} [\sigma_{ij}]^t$$

avec : $[\sigma_{ij}] = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12} \ \sigma_{32} \ \sigma_{13} \ \sigma_{21}]$.

comme le tenseur de souplesse, le tenseur de fragilité possède les propriétés de symétrie classiques, à savoir :

$$f_{ijkl} = f_{jikl}$$

$$f_{ijkl} = f_{ijlk}$$

$$f_{ijkl} = f_{klij}$$

Il reste comme en élasticité 21 coefficients caractérisant le tenseur de fragilité. On introduit une notation relative aux f_{ijkl} , ce qui permet d'introduire une matrice de fragilité $[F_{ij}]$ de 36 coefficients et le vecteur colonne des contraintes :

$$[\sigma_{ij}] = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12} \ \sigma_{32} \ \sigma_{13} \ \sigma_{21}]$$

La fonction ϕ de HILL s'écrit :

$$\phi(\sigma_{ij}) = [\sigma_{ij}] [F_{ij}] [\sigma_{ij}]^t \quad (4.7)$$

Lorsque le matériau étudié est orthotrope et que les axes 1 , 2 , 3 sont les axes d'orthotropie , la matrice [F_{ij}] prend la forme simplifiée suivante .

$$\left[\begin{array}{cccccc} F_{11} & F_{12} & F_{13} & & & \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & & 0 & \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & & & \\ & & & F_{44} & & \\ & & & & F_{55} & \\ & & 0 & & & F_{66} \end{array} \right] \quad (4.8)$$

et le nombre de constantes F_{ij} caractérisant la fonction ϕ se réduit à neuf .

4.4.2- Influence de la pression de confinement .

On admet qu'une pression de confinement en pression hydrostatique quelque soit sa valeur n'influe pas sur la résistance du matériau à la rupture ,c'est à dire que la fonction ϕ doit vérifier la propriété suivante :

$$\phi (\sigma_{ij} + p \delta_{ij}) = \phi (\sigma_{ij})$$

cela implique les relations suivantes entre les composantes du tenseur de fragilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ijkl} \delta_{kl} = 0 \\ f_{ijkl} \delta_{kl} \delta_{ij} = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec } \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{array}$$

or , la seconde relation implique la première et la neutralité de la pression de confinement vis-à-vis de la résistance à la rupture du matériau se traduit par :

$$f_{ijkl} \delta_{kl} = 0 \quad \text{avec } \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{array}$$

ou sur la matrice de fragilité par les six relations suivantes :

$$F_{1j} + F_{2j} + F_{3j} = 0 \quad \text{avec } j = 1, 2, 3$$

on voit ici apparaître des simplifications supplémentaires dans la matrice de fragilité .Dans le cas particulier d'une matrice orthotrope , compte tenu de la forme de la matrice de fragilité (formule 4.7)

on a :

$$F_{1j} = F_{2j} = F_{3j} = 0 \quad \forall j = 4, 5, 6$$

on obtient immédiatement

$$F_{1j} + F_{2j} + F_{3j} = 0 \quad \text{uniquement pour } j = 1, 2, 3$$

En éliminant F_{11} , F_{22} , F_{33} , on obtient une nouvelle expression de la matrice de fragilité .

$$\begin{bmatrix} (F_{12}+F_{13}) & F_{12} & F_{13} & & & \\ & -(F_{12}+F_{23}) & & & 0 & \\ & & -(F_{31}+F_{32}) & & & \\ & \text{SYM} & & F_{44} & & \\ & & & & F_{55} & \\ & & & & & F_{66} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

la matrice de fragilité d'un matériau orthotrope ne dépend que de six coefficients indépendants .

4.4.3-Détermination des coefficients fixant le critère

La fonction ϕ du critère de TSAI-HILL s'écrit :

$$\phi(\sigma_{ij}) = [\sigma_{ij}] [F_{ij}] [\sigma_{ij}]^t \quad (4.10)$$

avec la matrice $[F_{ij}]$ obtenue (4.9)

En général, on introduit de nouvelles variables F, G, H définies ainsi :

$$\begin{aligned} L &= F_{44} & M &= F_{55} & N &= F_{66} \\ F &= -F_{23} & G &= -F_{13} & H &= -F_{12} \end{aligned}$$

il vient :

$$F_{11} = G + H \quad F_{22} = F + H \quad F_{33} = F + G$$

et la fonction ϕ caractéristique du critère s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi(\sigma_{ij}) &= (G + H) \sigma_{11}^2 + (F + H) \sigma_{22}^2 + (F + G) \sigma_{33}^2 \\ &\quad - 2H \sigma_{11} \sigma_{22} - 2G \sigma_{11} \sigma_{33} - 2F \sigma_{22} \sigma_{33} \\ &\quad + L \sigma_{23}^2 + M \sigma_{13}^2 + N \sigma_{12}^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.4.3.1-Détermination des fragilités F, G, H

On réalise un essai de traction dans la direction 1 sur une éprouvette tridimensionnelle d'un matériau orthotrope. Le champ de contraintes à l'intérieur de l'éprouvette est caractérisé par σ_{11} , les autres sont nulles. σ_{11} augmente de zéro à la valeur de rupture X par traction dans le sens des fibres. lorsque $\sigma_{11} = X$, la rupture a lieu c'est à dire d'après la formule (4.11), on a :

$$(G + H) X^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad G + H = \frac{1}{X^2}$$

de même un essai de traction dans la direction 2, fait passer la contrainte σ_{22} régnant dans le matériau de 0 à Y limite d'élasticité dans le sens 2, on a :

$$(F + H) Y^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad (G + H) = \frac{1}{Y^2}$$

un essai de traction selon l'axe 3 nous permet de déterminer

la valeur de (F + G) , on a :

$$(F + G) = \frac{1}{Z^2}$$

4.4.3.2-Détermination des coefficients L , M , N

Les variables L , M , N font intervenir les contraintes

Des essais de cisaillement permettront de les déterminer .
L'éprouvette précédente est soumise à un essai de cisaillement dans le plan 1 ,2 seul σ_{12} agit sur l'éprouvette , la rupture a lieu lorsqu'on atteint la valeur S , limite de cisaillement dans le plan 1 ,2 .

on a d'après la formule (4.11)

$$N S^2 = 1 \longrightarrow N = \frac{1}{S^2}$$

de même un essai de cisaillement dans le plan 1 ,3 détermine la valeur de M on a :

$$M = \frac{1}{S^2}$$

à partir d'un essai de cisaillement dans le plan 2 ,3 on obtient la valeur de L

$$L = \frac{1}{Q^2}$$

Les six essais précédents ont permis de déterminer les coefficients fixant le critère de TSAI-HILL . Pour un matériau orthotrope les fragilités F , G , H , L , M , N sont liées aux tensions de résistance :

$$\begin{array}{lll} G + H = \frac{1}{X^2} & 2 H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} & N = \frac{1}{S^2} \\ F + H = \frac{1}{Y^2} & 2 G = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} & M = \frac{1}{R^2} \\ F + G = \frac{1}{Z^2} & 2 F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} & L = \frac{1}{Q^2} \end{array}$$

(4.12)

Avec X ,Y ,Z sont les contraintes de résistance ultimes en

traction respectivement suivant les axes 1 ,2 et 3 .

Q , R , et S sont les contraintes de résistance ultimes en cisaillement respectivement dans les plans (2,3),(1,3) et (1,2) .

4.4.4-Critère de Tsai-Hill en contraintes planes

Dans le cas de matériaux de faible épaisseur , c'est à dire plaques ou coques , l'état de contraintes est plan et le critère de rupture prend la forme simplifiée suivante :

$$\phi (\sigma_{ij}) = F_{11} \sigma_{11}^2 + F_{22} \sigma_{22}^2 + 2 F_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + F_{\infty\infty} \sigma_{12}^2 < 1 \quad (4.13)$$

Comme précédemment , les fragilités F_{11} , F_{22} , et $F_{\infty\infty}$ sont reliées aux contraintes ultimes en traction X , Y et en cisaillement S par les relations :

$$F_{11} = \frac{1}{X^2} \quad , \quad F_{22} = \frac{1}{Y^2} \quad , \quad F_{\infty\infty} = \frac{1}{S^2} \quad (4.14)$$

La fragilité de couplage F_{12} ne peut être mise en évidence que par des essais biaxiaux et des essais hors axes , pour palier à la difficulté de tels essais , certains auteurs préconisent le calcul de F_{12} , moyennant certaines hypothèses à savoir , le critère de Tsai-Hill est surtout utilisé pour des composites à fibres uni-directionnelles . lorsque l'axe 1 est l'axe des fibres TSAI suppose que le point $\sigma_{11} = \sigma_{22} = Y$, $\sigma_{12} = 0$ est sur la surface de rupture Il y a donc ruine du matériau lorsque les contraintes normales σ_{11} et σ_{22} atteignent la tension ultime transversale Y .

on obtient d'après (4.13) :

$$F_{11} Y^2 + F_{22} Y^2 + 2 F_{12} Y^2 = 1$$

il vient :

$$F_{12} = - \frac{1}{X^2} \quad (4.15)$$

la fonction ϕ prend la forme suivante :

$$\phi(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{11}^2}{X^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} < 1$$

(4.16)

4.5-Critère de tsai-WU

L'une des méthodes d'augmenter la corrélation entre la théorie et l'expérimental est d'augmenter le nombre de termes dans l'équation de prédiction .

TSAI et WU ont proposé l'expression suivante :

$$+ F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = 1, 6 \quad (4.17)$$

$$\text{où } \sigma_4 = \tau_{23}, \quad \sigma_5 = \tau_{13}, \quad \sigma_6 = \tau_{12} .$$

Dans le cas des contraintes planes , l'expression se réduit à

$$F_{11} \sigma_{11} + F_{22} \sigma_{22} + F_{66} \sigma_{66} + F_{11} \sigma_{11}^2 + F_{22} \sigma_{22}^2 + F_{66} \sigma_{66}^2 + F_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} = 1$$

En utilisant des tests uniaxiaux de traction et de compression sur les 2 axes , on obtient les différents termes existants dans l'expression .

$$F_{11} = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c},$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_c X_t},$$

$$F_{22} = -\frac{1}{Y_c Y_t}$$

$$F_{66} = 0$$

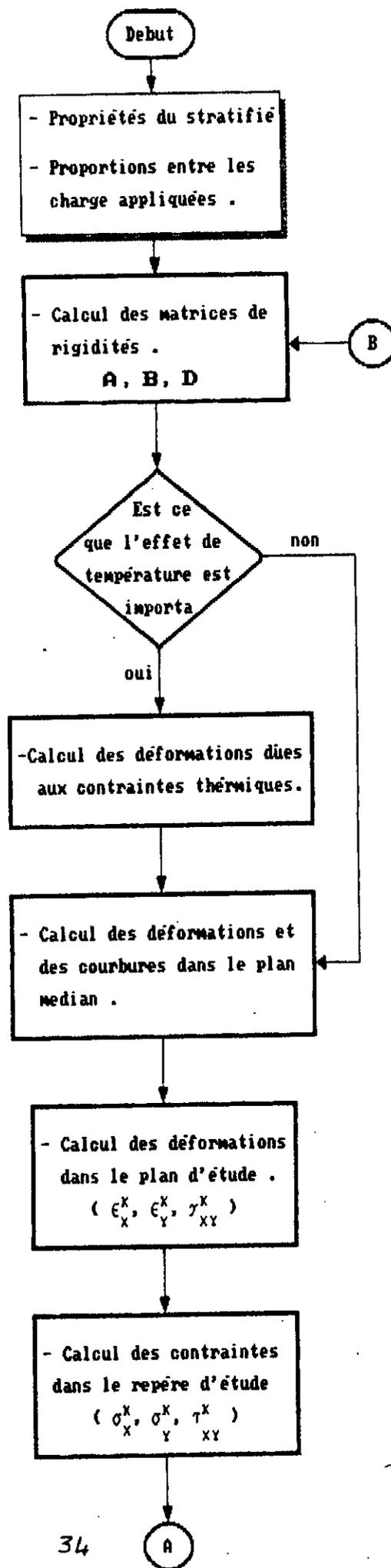
$$F_{66} = \frac{1}{S^2} \quad (4.18)$$

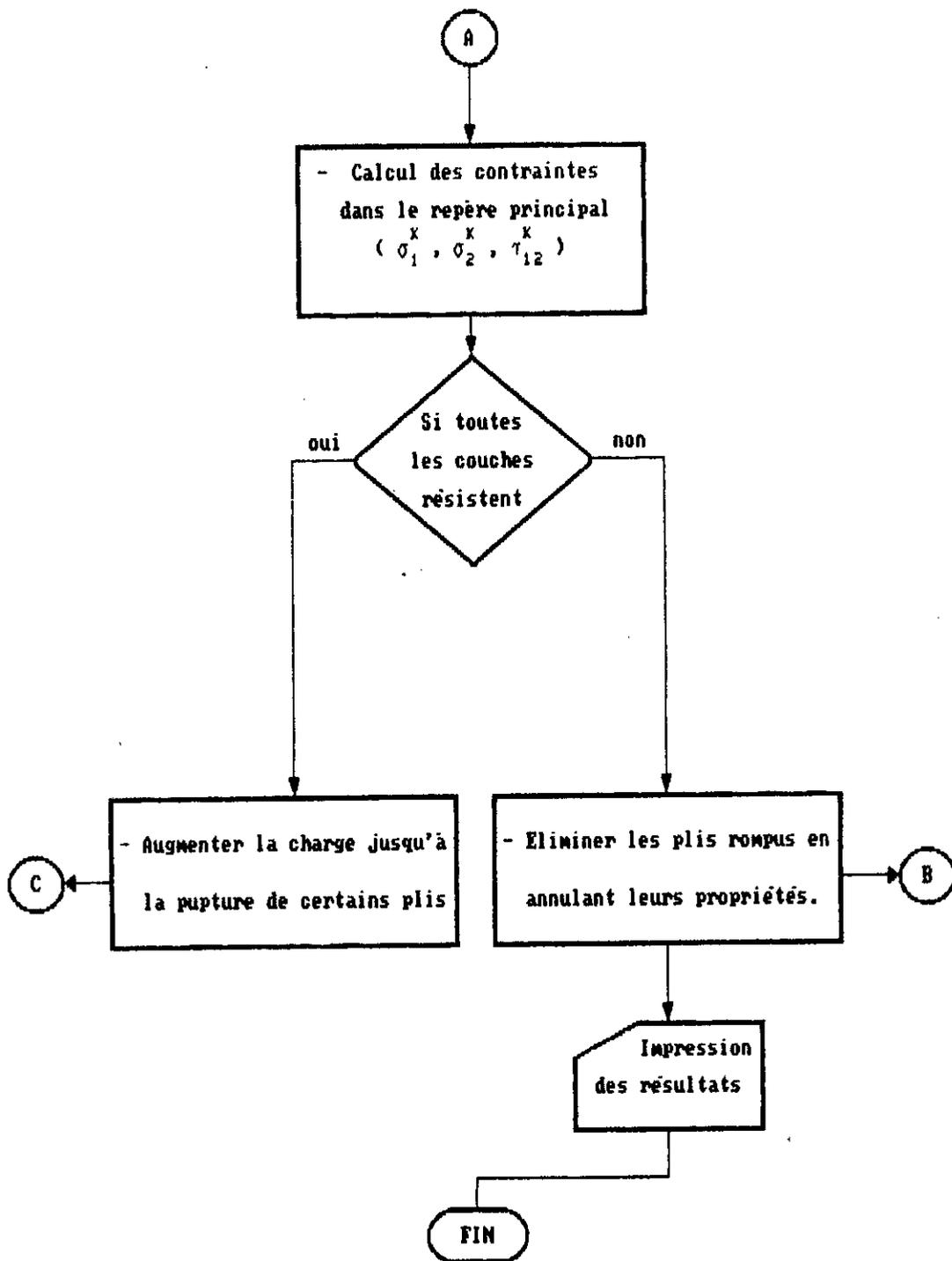
pour déterminer F_{12} il faut appliquer un test biaxial

$$(\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma)$$

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left[\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right] \sigma + \left[\frac{1}{X_c X_t} + \frac{1}{Y_c Y_t} \right] \sigma^2 \right]$$

(4.19)





EXEMPLES

On a considéré le cas du matériau composite (carbone / epoxyde) dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

$$E_{11} = 134 \text{ e}09 \text{ Pa}$$

$$E_{22} = 7 \text{ e}09 \text{ Pa}$$

$$G_{12} = 42 \text{ e}08 \text{ Pa}$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

$$\alpha_1 = - 0.12 \text{ e-}06$$

$$\alpha_2 = 3.4 \text{ e-}06$$

Exemple 1

1.1 -Essai de traction .

Soumettons jusqu'à la rupture un pli d'orientation quelconque à un effort de traction N_x . Les résultats de l'essai sont donnés par les fig.1-3.a et fig.1-3.b on remarque qu' au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'orientation 0° , la charge de rupture diminue considérablement ; les plis à 0° sont très résistants car la majorité de la charge est supportée par les fibres , ces derniers sont très rigides . Pour les plis à 90° , la majorité de la charge est supportée par la matrice , celle ci est beaucoup moins rigide .

1.2 -Essai de cisaillement

On applique dans ce cas une charge de cisaillement N_{xy} . Les résultats sont donnés par la fig.1-1 . Les plis à 45° se rompent les premiers , au fur et à mesure qu'en s'éloigne de 45° , la charge de rupture augmente .

1.3 -Essai de flexion

On applique dans ce cas un moment de flexion M_x .

Les résultats de l'essai sont donnés par les fig.1-4.a et fig.1-4.b . On a les même remarques que l'exemple 1 l'effet du moment M_x est le même que celui de la charge N_x .

1.4 -Essai de torsion

Appliquons maintenant un moment de torsion M_{xy} .
Les résultats sont donnés par la fig.1-2 .
On remarque que dans ce cas aussi , l'effet du moment de torsion M_{xy} est le même que celui de l'effort de cisaillement N_{xy} .

Exemple 2

Essai de traction en tenant compte de l'effet de température

On refait le même essai de l'exemple 1.1 , mais cette fois en introduisant les coefficients de dilatation ($\Delta t = 20^\circ c$)
On remarque dans ce cas la charge de rupture appliquée diminue car les contraintes thermiques viennent s'ajouter .

EXEMPLE 3

On refait les quatre expériences de l'exemple 1 ,mais cete fois ci au stratifié suivant

$$[0_2 / 45_2 / -45_2 / 60 / 90_2]_9$$

Hauteur du stratifié $H = 0.012$ mm

Pour le cas d'un stratifié symétrique soumis à un seul type de sollicitation , on peut prévoir le numéro des plis qui se rompent les premiers et on peut même calculer la charge de rupture du stratifié en utilisant les résultats de l'exemple 1 celle ci est égale à :

$$F = n N$$

n : nombre des plis qui se rompent les derniers .

N : l'intensité de la charge qui cause la rupture d'un de ces plis .

cette prévision devient très difficile si le stratifié n'est pas symétrique (exemple 4) et encore pire si le stratifié

est soumis à plusieurs types de sollicitations
(exemple 5)

EXEMPLE 4

Essai de traction sur un stratifié non symétrique .

$[0 / 30 / -30 / 45 / -45 / 60 / -60 / 90_2]$

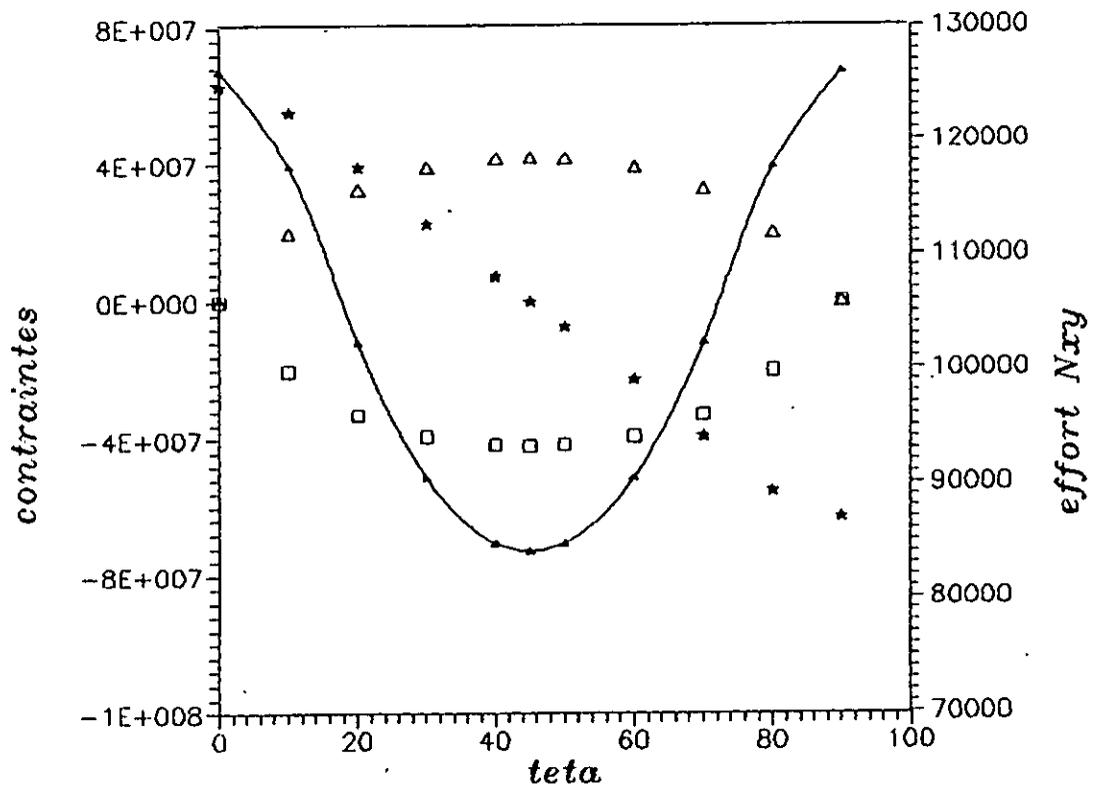
Hauteur du stratifié $H = 0.1$ mm

EXEMPLE 5

Stratifié symétrique soumis aux différents types de sollicitation et en tenant compte de l'effet de température

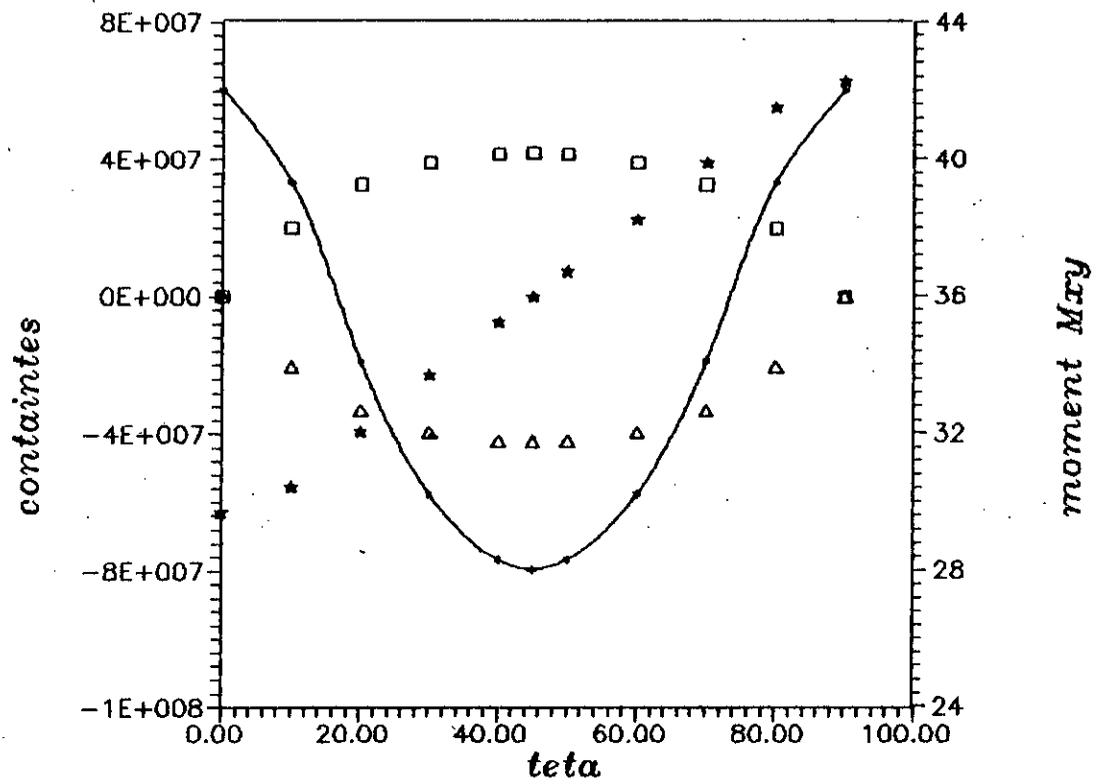
$[0_3 / 30 / -30 / 45_2 / -45_2 / 60 / 90_2]$

Hauteur du stratifié $H = 0.024$ mm



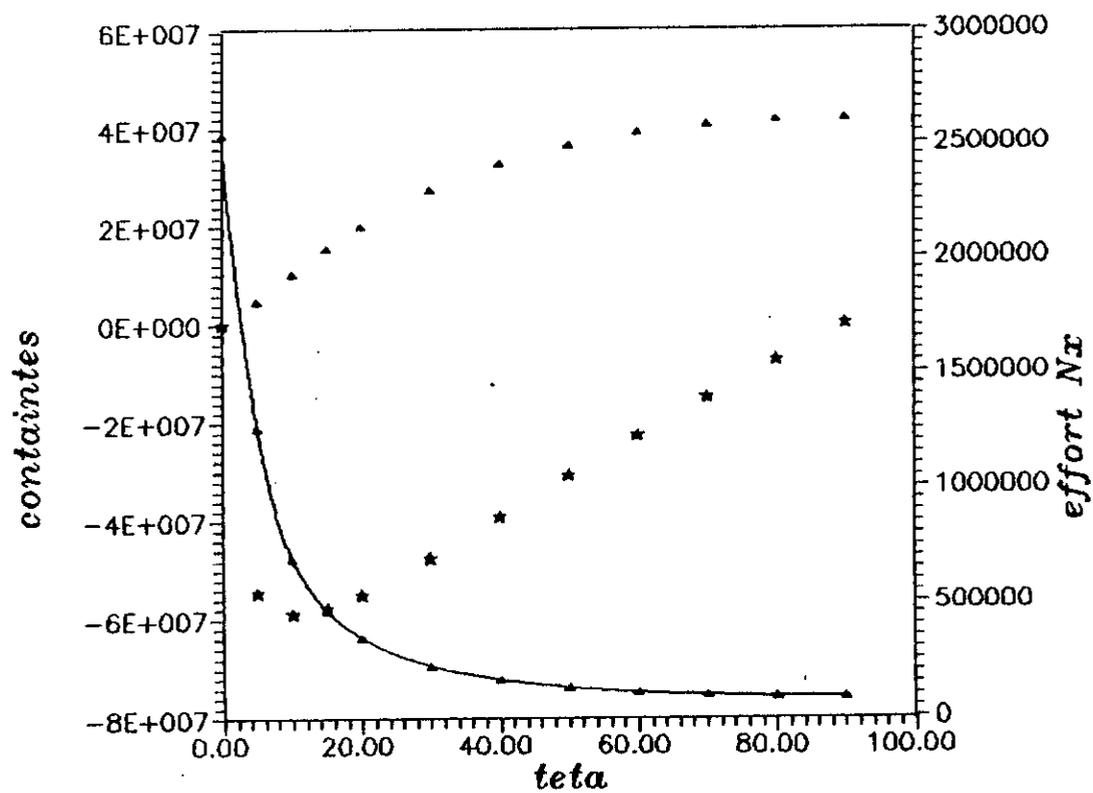
$\Delta\Delta\Delta\Delta$ contraintes longitudinales
 $\square\square\square\square$ contraintes transversales
 $*****$ contraintes de cisaillement
..... effort de cisaillement applique

fig. 1-1



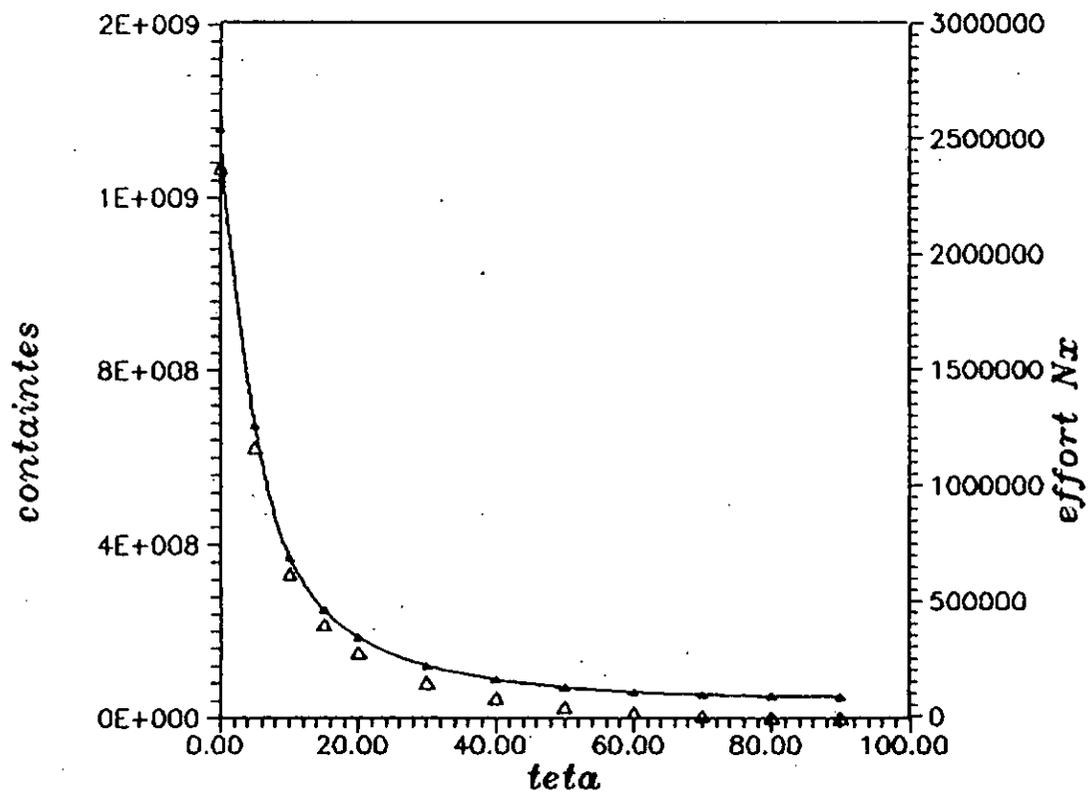
▲▲▲▲▲ contraintes longitudinales
 □□□□□ contraintes transversales
 ★★★★★ contraintes de cisaillement
 moment de torsion M_{xy}

fig. 1-2



▲▲▲▲▲ contraintes transversales
 ★★★★★ contraintes de cisaillement
 ××××× effort de traction applique selon X

fig. 1-3.a



▲▲▲▲▲ contraintes longitudinales
 --*-* effort de traction applique selon X

fig. 1-3.b

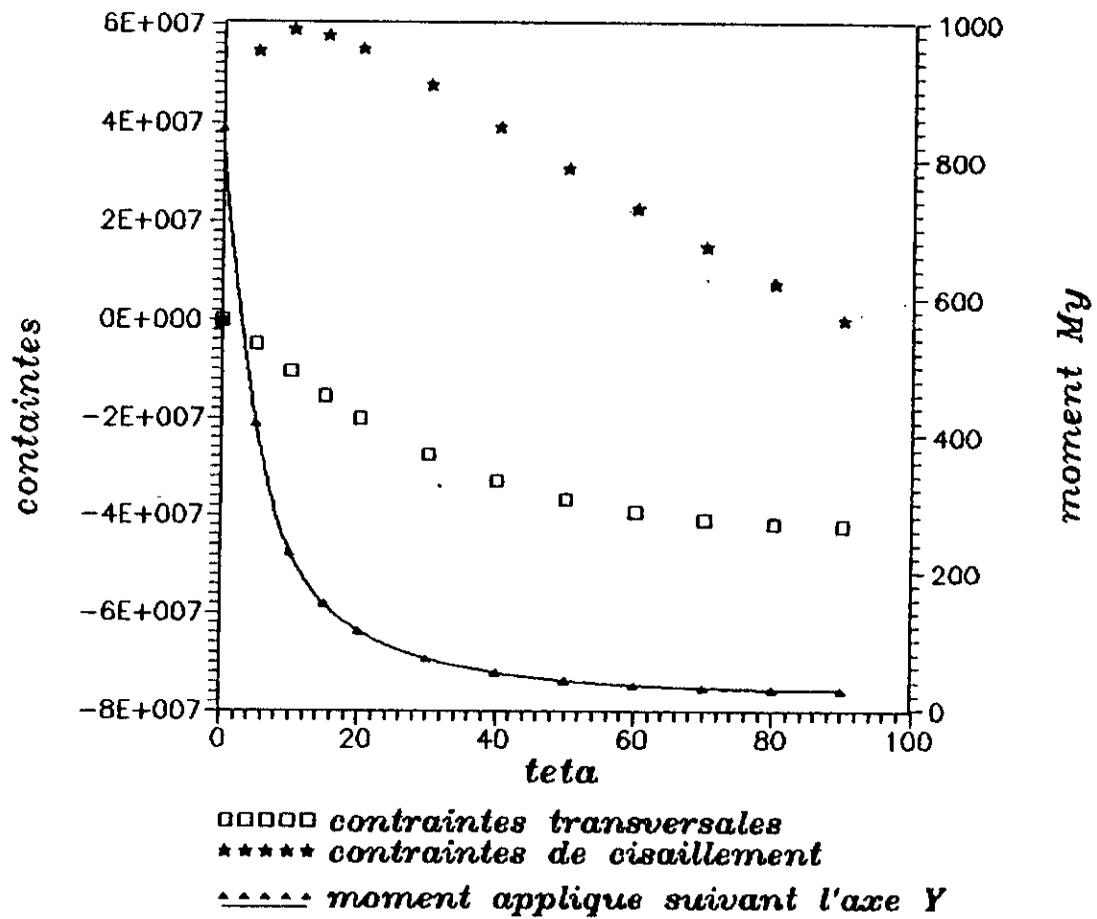
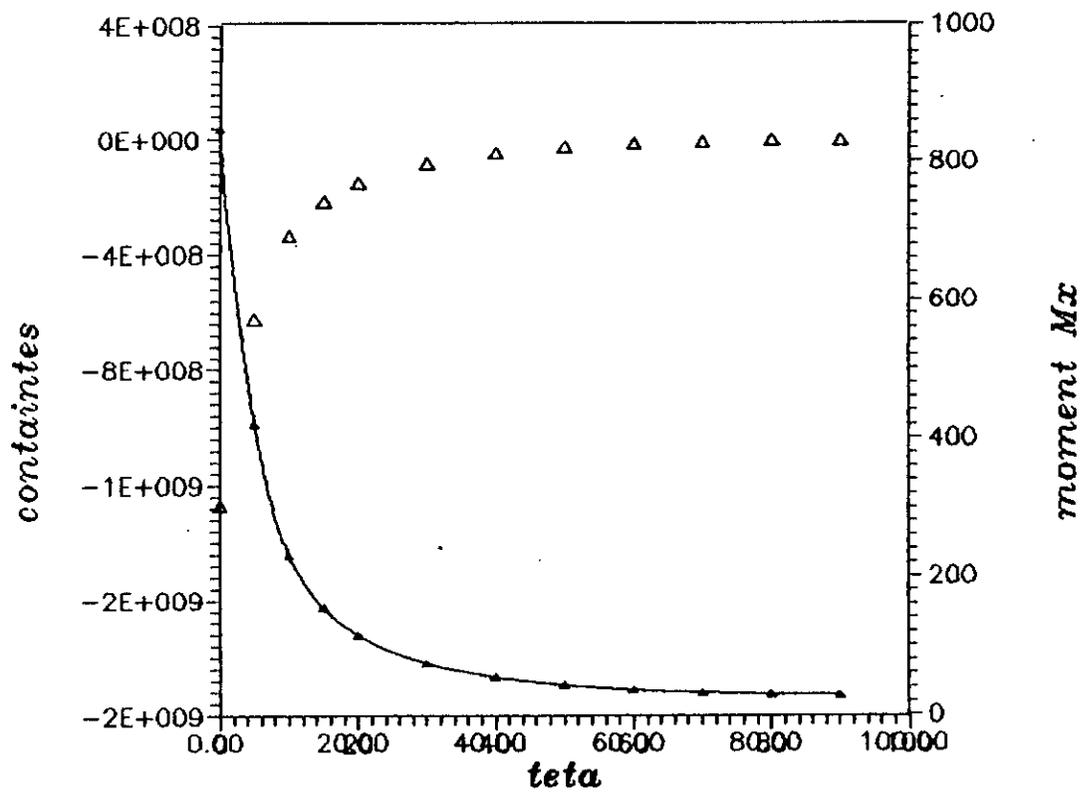


fig. 1-4.a



△△△△△ contraintes longitudinales

..... moment applique suivant l'axe Y

fig. 1-4.b

Résultats de l'exemple 3:

```

*****
*Application d'un effort de traction Nx*
*****
*****
echec du pli no      6
*****
teta:  90.000
la charge:          750000.0000
deformations dans le plan median:
    -.0002                .0006                -.0001
la courbure
    .0000                .0000                .0000
les deformations dans le repere (x,y):
    -.0002                .0006                -.0001
les contraintes dans le plan (x,y):

contraintes dans le repere principal:
    -17770469.8227        42330723.8976                431377.3787
*****
echec du pli no      7
*****
teta:  90.000
la charge:          750000.0000
deformations dans le plan median:
    -.0002                .0006                -.0001
la courbure
    .0000                .0000                .0000
les deformations dans le repere (x,y):
    -.0002                .0006                -.0001
les contraintes dans le plan (x,y):
    42330723.8976        -17770469.8227                -431377.3787
contraintes dans le repere principal:
    -17770469.8227        42330723.8976                431377.3787
*****
echec du pli no      3
*****
teta:  45.000
la charge:          940000.0000
deformations dans le plan median:
    -.0001                .0008                -.0002
la courbure
    .0000                .0000                .0000
les deformations dans le repere (x,y):
    -.0001                .0008                -.0002
les contraintes dans le plan (x,y):
    73140634.2870        -11689997.9308                -749043.9157
contraintes dans le repere principal:
    29976274.2624        31474362.0938                -42415316.1089
*****
echec du pli no      4
*****
teta:  45.000
la charge:          940000.0000
deformations dans le plan median:
    -.0001                .0008                -.0002
la courbure
    .0000                .0000                .0000
les deformations dans le repere (x,y):
    -.0001                .0008                -.0002

```

```

les contraintes dans le plan (x,y):
  73140634.2870          -11689997.9308          -749043.9157
contraintes dans le repere principal:
  29976274.2624          31474362.0938          -42415316.1089
*****
echec du pli no          9
*****
teta: 45.000
la charge: 940000.0000
deformations dans le plan median:
  -.0001          .0008          -.0002
la courbure
  .0000          .0000          .0000
les deformations dans le repere (x,y):
  -.0001          .0008          -.0002
les contraintes dans le plan (x,y):
  73140634.2870          -11689997.9308          -749043.9157
contraintes dans le repere principal:
  29976274.2624          31474362.0938          -42415316.1089
*****
echec du pli no          10
*****
teta: 45.000
la charge: 940000.0000
deformations dans le plan median:
  -.0001          .0008          -.0002
la courbure
  .0000          .0000          .0000
les deformations dans le repere (x,y):
  -.0001          .0008          -.0002
les contraintes dans le plan (x,y):
  73140634.2870          -11689997.9308          -749043.9157
contraintes dans le repere principal:
  29976274.2624          31474362.0938          -42415316.1089
*****
echec du pli no          5
*****
teta: -45.000
la charge: 940000.0000
deformations dans le plan median:
  -.0001          .0014          .0009
la courbure
  .0000          .0000          .0000
les deformations dans le repere (x,y):
  -.0001          .0014          .0009
les contraintes dans le plan (x,y):
  149117011.8190          -4206839.8938          3917780.5853
contraintes dans le repere principal:
  68537305.3773          76372866.5479          76661925.8564
*****
*echec du pli no          8*
*****
teta: -45.000
la charge: 940000.0000
deformations dans le plan median:
  -.0001          .0014          .0009
la courbure
  .0000          .0000          .0000
les deformations dans le repere (x,y):
  -.0001          .0014          .0009

```

```

les contraintes dans le plan (x,y):
149117011.8190 -4206839.8938 3917780.5853
contraintes dans le repere principal:
68537305.3773 76372866.5479 76661925.8564
*****
echec du pli no 1
*****
teta: .000
la charge: 5090000.0000
deformations dans le plan median:
-.0007 .0113 .0000
la courbure .0000 .0000 .0000
les deformations dans le repere (x,y):
-.0007 .0113 .0000
les contraintes dans le plan (x,y):
1272500000.0000 .0000 .0000
contraintes dans le repere principal:
1272500000.0000 .0000 .0000
*****
echec du pli no 2
*****
teta: .000
la charge: 5090000.0000
deformations dans le plan median:
-.0007 .0113 .0000
la courbure .0000 .0000 .0000
les deformations dans le repere (x,y):
-.0007 .0113 .0000
les contraintes dans le plan (x,y):
1272500000.0000 .0000 .0000
contraintes dans le repere principal:
1272500000.0000 .0000 .0000
*****
echec du pli no 11
*****
teta: .000
la charge: 5090000.0000
deformations dans le plan median:
-.0007 .0113 .0000
la courbure .0000 .0000 .0000
les deformations dans le repere (x,y):
-.0007 .0113 .0000
les contraintes dans le plan (x,y):
1272500000.0000 .0000 .0000
contraintes dans le repere principal:
1272500000.0000 .0000 .0000
*****
echec du pli no 12
*****
teta: .000
la charge: 5090000.0000
deformations dans le plan median:
-.0007 .0113 .0000
la courbure .0000 .0000 .0000
les deformations dans le repere (x,y):
-.0007 .0113 .0000

```

```
les contraintes dans le plan (x,y): .0000
1272500000.0000 .0000
contraintes dans le repere principal: .0000
1272500000.0000 .0000
*****
echec total du stratifie!
*****
la charge maximale Nx= 5090000.0000000000000000
```



```

-.0322 .2868 -.0741
les deformations dans le repere (x,y):
-.0001 .0009 -.0002
les contraintes dans le plan (x,y):
90290288.8614 -5568588.0725 -934144.9130
contraintes dans le repere principal:
41426705.4814 43294995.3075 -47929438.4670
*****
echec du pli no 5
*****
teta: -45.000
la charge: 2695.0000
deformations dans le plan median:
.0000 .0000 .0000
la courbure
-.0518 .5700 .2404
les deformations dans le repere (x,y):
.0001 -.0011 -.0005
les contraintes dans le plan (x,y):
-122955956.2329 4419515.5268 -2019024.3985
contraintes dans le repere principal:
-57249195.9545 -61287244.7516 -63687735.8799
*****
echec du pli no 6
*****
teta: 90.000
la charge: 2695.0000
deformations dans le plan median:
.0000 .0000 .0000
la courbure
-.0518 .5700 .2404
les deformations dans le repere (x,y):
.0001 -.0006 -.0002
les contraintes dans le plan (x,y):
-61477978.1165 2209757.7634 -1009512.1993
contraintes dans le repere principal:
2209757.7634 -61477978.1165 1009512.1993
*****
echec du pli no 7
*****
teta: 90.000
la charge: 2695.0000
deformations dans le plan median:
.0000 .0000 .0000
la courbure
-.0518 .5700 .2404
les deformations dans le repere (x,y):
-.0001 .0006 .0002
les contraintes dans le plan (x,y):
61477978.1165 -2209757.7634 1009512.1993
contraintes dans le repere principal:
-2209757.7634 61477978.1165 -1009512.1993
*****
echec du pli no 8
*****
teta: -45.000
la charge: 2695.0000
deformations dans le plan median:
.0000 .0000 .0000
la courbure

```

```

-0518
.5700
les deformations dans le repere (x,y):
-.001
les contraintes dans le plan (x,y):
-4419515.5268
122955956.2329
contraintes dans le repere principal:
57249195.9545
61287244.7516
63687735.8799
echec du pil no 1
*****
teta: .000
la charge: 3390.0000
deformations dans le plan median:
.0000
la courbure
-3314
5.6657
les deformations dans le repere (x,y):
.0007
-.0113
les contraintes dans le plan (x,y):
-127125000.0000
-127125000.0000
contraintes dans le repere principal:
-127125000.0000
*****
echec du pil no 12
*****
teta: .000
la charge: 3390.0000
deformations dans le plan median:
.0000
la courbure
-3314
5.6657
les deformations dans le repere (x,y):
.0007
-.0113
les contraintes dans le plan (x,y):
-127125000.0000
-127125000.0000
contraintes dans le repere principal:
127125000.0000
127125000.0000
echec du pil no 2
*****
teta: .000
la charge: 3390.0000
deformations dans le plan median:
.0000
la courbure
-2.6515
45.3257
les deformations dans le repere (x,y):
.0027
-.0453
les contraintes dans le plan (x,y):
-508500000.0000
-508500000.0000
contraintes dans le repere principal:
-508500000.0000
*****
echec du pil no 11
*****
teta: .000
la charge: 3390.0000
deformations dans le plan median:
.0000
la courbure
.0000

```

-2.6515	45.3257	.0000
les deformations dans le repere (x,y):		
-.0027	.0453	.0000
les contraintes dans le plan (x,y):		
5085000000.0000	.0000	.0000
contraintes dans le repere principal:		
5085000000.0000	.0000	.0000

echec total du stratifie!

le momenta maximal Mx= 3390.0000000000000000 *

CHAPITRE 5

MECANIQUE LINEAIRE ELASTIQUE DE LA RUPTURE (M.L.E.R)

les concepts de base de la M.L.E.R ont été formulés pour les ruptures brutales classées selon deux types ; les ruptures fragiles et les ruptures semi fragiles (ou ductiles : ruptures avec faible déformation plastique). A l'origine de chaque rupture brutale se trouve un défaut , un vide ou une fissure . Il apparait donc que les calculs habituels de la mécanique des milieux continus ne peuvent prévoir la rupture puisqu'ils supposent l'absence de tout défaut . Ainsi , le but essentiel de la M.L.E.R c'est de caractériser la résistance d'un matériau à la rupture à partir d'un défaut.

On va examiner dans ce qui suit l'application de la M.L.E.R pour les cas des matériaux isotropes et anisotropes .

5.1 - Matériau homogène élastique isotrope :

5.1.1 - Généralités sur les ruptures:

A l'échelle macroscopique , les surfaces de rupture sont loin d'avoir des formes simples , on peut cependant considérer deux modes principaux de rupture : la rupture plate et la rupture inclinée . le premier cas de rupture se retrouve généralement dans des ruptures se produisant avec une faible déformation plastique (rupture fragile) . Quand le plan de rupture est incliné , la rupture s'accompagne d'une forte déformation plastique . Dans la plus part des cas la rupture est une combinaison des deux types élémentaires précédents .

On montre que l'état le plus général de propagation d'une fissure peut être ramené à la superposition de trois modes simples :

- mode I ou mode par ouverture (fig- 5.1)
les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement

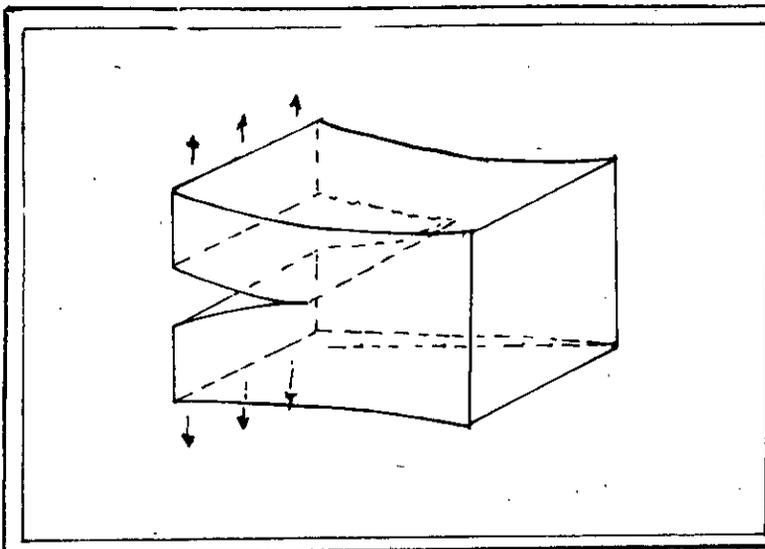


FIG-5.1-
 MODE PAR OUVERTURE
 (MODE I)

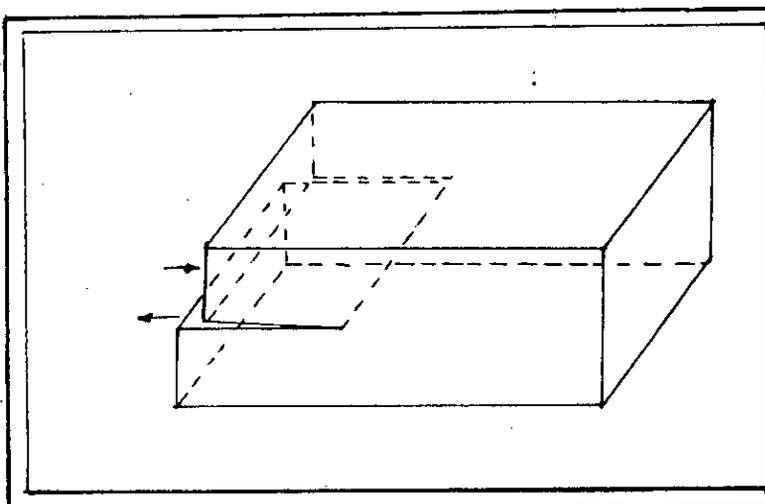


FIG-5.2-
 GLISSEMENT DROIT
 (MODE II)

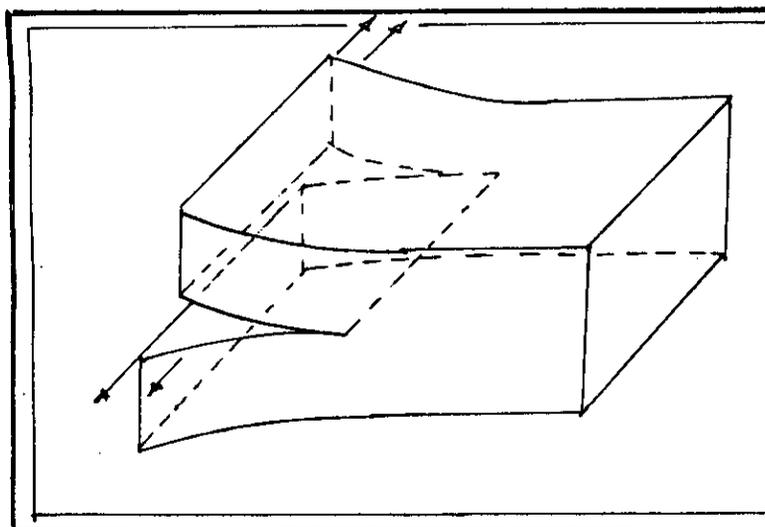


FIG-5.3-
 GLISSEMENT VIS
 (MODE III)

l'une par rapport à l'autre .

- mode II ou mode par glissement droit (fig-5.2)
 les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan
 perpendiculairement au front de fissure .

- mode III ou mode par glissement vis (fig-5.3)
 les surfaces de la fissure se déplacent dans le même
 plan , parallèlement au front de fissure .

Il est à signaler que les ruptures dangereuses sont
 généralement des ruptures de mode I . C'est la
 raison pour laquelle la plupart des études de la mécanique
 de la rupture ont porté sur ce mode .

On s'intéressera dans ce qui suit uniquement au cas du mode
 I.

5.1.2 -Champ de contraintes et de déplacements au
 voisinage de l'extrémité d'une fissure .

La présence d'une fissure dans une structure
 perturbe énormément le champ de contraintes . Pour rendre le
 problème plus simple , la structure est supposée être
 élastique linéaire isotrope , et le problème est plan .
 En se basant sur la théorie de l'élasticité , G.R.IRWIN
 (1956) a pu établir les équations de contraintes et de
 déplacements au voisinage du front de fissure pour un point
 de coordonnées polaires r et θ (fig-5.4)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2) [k - 1 + 2 \sin^2(\theta/2)] \\ \sin(\theta/2) [k - 1 - 2 \cos^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Avec :

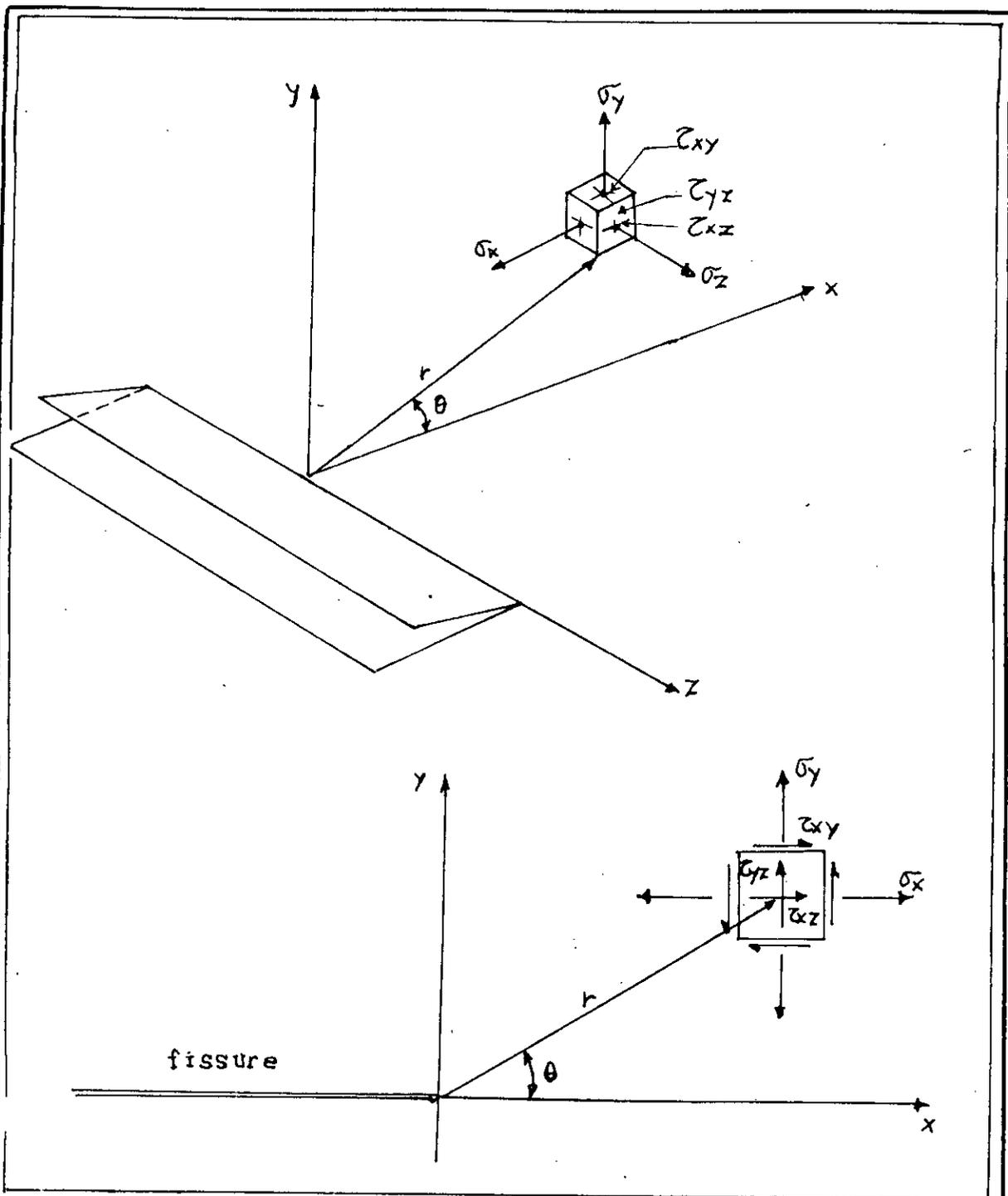


FIG-5.4- CONTRAINTE AU VOISINAGE DE L'EXTREMI TE
D'UNE FISSURE

μ - Module de cisaiement ;

$\kappa = 3 - 4\nu$: déformation plane ($\epsilon_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$)

$\kappa = \frac{3 - 4\nu}{1 + \nu}$: contrainte plane ($\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$)

les contraintes varient proportionnellement à $\left[\frac{1}{r} \right]^{(1/2)}$

et tendent vers l'infini à l'extrémité de la fissure, quand r devient petit. la distribution de la contrainte σ_y est illustrée dans la (fig-5.5) pour $\theta = 0$.

pour de grandes valeurs de r la contrainte σ_y tend vers zéro, alors qu'elle doit tendre vers la valeur de la contrainte extérieure σ (contrainte appliquée à l'infini sur la structure). Apparemment les équations (5.1) sont valables uniquement dans une zone limitée autour de la tête de fissure. Les formules ci-dessus (5.1) et (5.2) sont toutes de la même forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \\ u_i = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \\ u_i = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta) \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Elles montrent que les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure ont toujours la même forme quelles que soient la géométrie de la pièce et la façon dont elle est chargée. cette analyse a permis à G.R.IRWIN de mettre en évidence un facteur indépendant des coordonnées polaires r et θ , faisant la synthèse de la géométrie et du chargement, qu'il appela : facteur d'intensité de contrainte, facteur unique : K . Ce facteur K qui traduit en fait, l'état de contrainte au voisinage du fond de fissure admet une valeur critique notée K_c , pour laquelle l'amorçage de la fissure survient (fig-5.6)

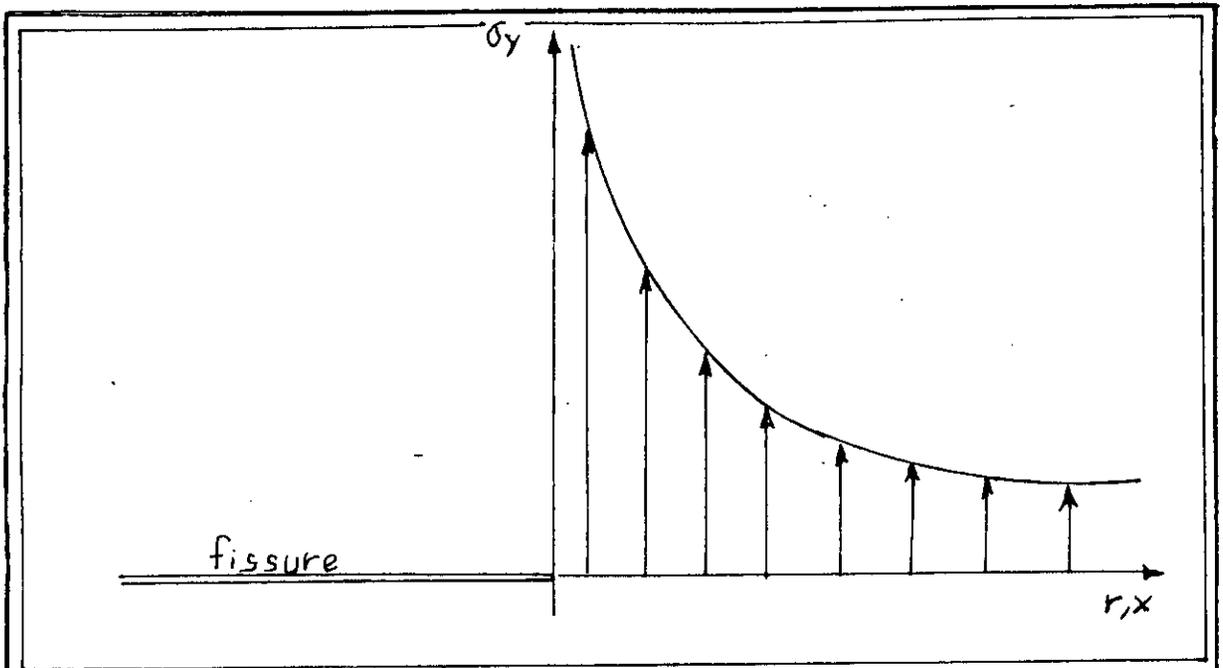


FIG-5.5- LA CONTRAINTE σ_y AU VOUSINAGE DE LA TÊTE DE FISSURE

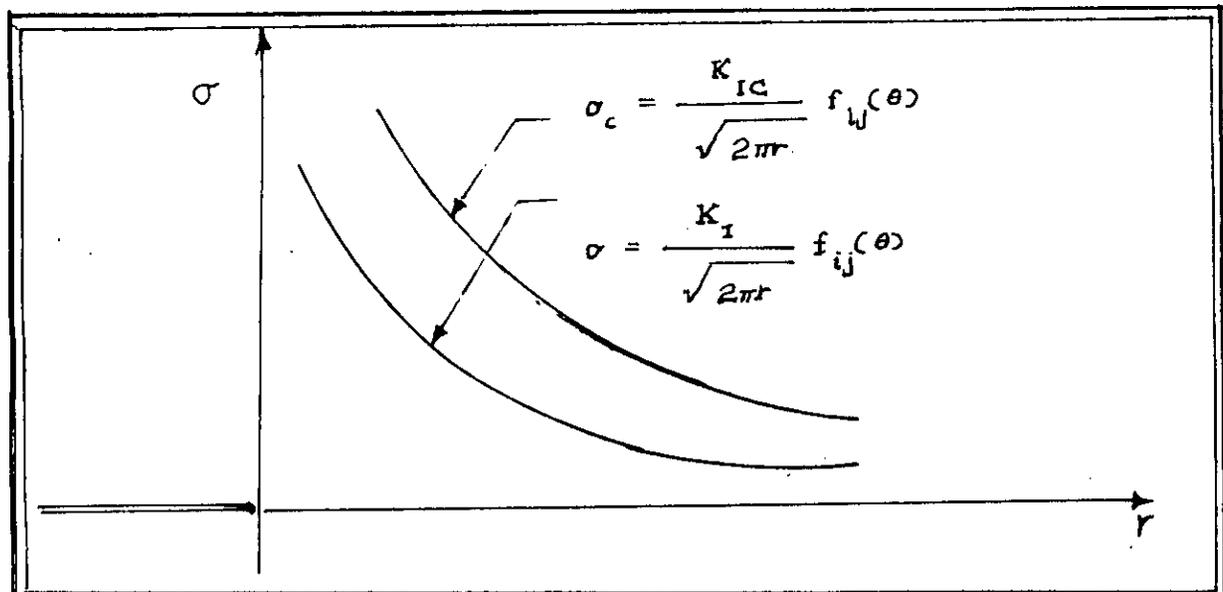


FIG-5.6- DISTRIBUTION NORMALE ET CRITIQUE DES CONTRAINTES A FOND DE FISSURE

5.2- Approche globale :

Formulée par GRIFFITH (en 1920) pour les matériaux fragiles et généralisée par LEMAITRE et CHABOCHE (thermodynamique des solides) en 1970 consiste à calculer le taux de l'énergie restituée " G " au cours d'une fissuration fictive de longueur dl , et il n'y aurait rupture que si $G \geq G_c$ où G_c est la valeur critique caractéristique du matériau . C'est ainsi qu'est formulé le 1^{er} critère de rupture .

5.2.1-Formulation (théorie de GRIFFITH)

Basée sur le principe de conservation de l'énergie totale , soit un solide élastique :

$$W_{\text{tot}} = W_{\text{élast}} + W_A + W_{\text{cin}} + W_{\text{ext}} \quad (5.5)$$

$W_{\text{élast}}$: énergie élastique .

W_{ext} : travail des forces extérieures

W_A : énergie dissipée pour séparer 2 surfaces

$$W_A = 2 \gamma S$$

γ : tension superficielle

principe de conservation de l'énergie totale :

$$dW_{\text{tot}} = dW_{\text{élast}} + dW_{\text{ext}} + dW_A + dW_{\text{cin}} = 0 \quad (5.6)$$

$$dW_{\text{cin}} = - (\partial W_{\text{élast}} + \partial W_{\text{ext}} + \partial W_A)$$

la propagation n'est possible que si $W_{\text{cin}} = 0$

$$dW_{\text{élast}} + dW_{\text{ext}} + dW_A = 0 \quad (5.7)$$

$$W_A = 2 \gamma S$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(W_{\text{élast}} + W_{\text{ext}} \right) + 2 \gamma = 0$$

On définit le taux de l'énergie restituée au cours d'une propagation dS par :

$$G = - \frac{\partial}{\partial S} \left(W_{\text{élast}} + W_{\text{ext}} \right) \quad (5.8)$$

$$- G + 2 \gamma = 0$$

$$\text{soit : } G = 2 \gamma \quad (5.9)$$

$$G < 2 \gamma \quad \text{pas de propagation (} W_{\text{cin}} = 0 \text{)}$$

$$G = 2 \gamma \quad \text{début de propagation stable .}$$

$$G > 2 \gamma \quad \text{propagation instable .}$$

5.2.2-Formulation intégrale :

Consiste à écrire le taux de restitution d'énergie en fonction du champ de contraintes et de déplacements sur les frontières du domaine fissuré .

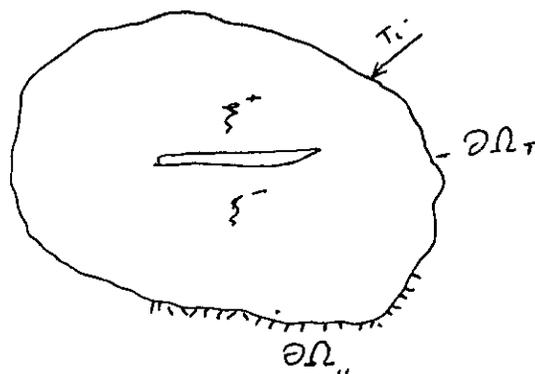
Milieu plan :

On considère un domaine Ω présentant une discontinuité de taille a : $\partial\Omega$ frontière du domaine extérieur .

$\xi^+ \cup \xi^-$ frontière de la fissure

$\partial\Omega_T$ = frontière du domaine à contrainte imposée

$\partial\Omega_u$ = frontière du domaine à déplacement imposé



On a :

$$G = - \frac{\partial}{\partial S} \left(W_{\text{élast}} + W_{\text{ext}} \right)$$

pour un solide élastique linéaire

$$W_{\text{élast}} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (5.10)$$

$$W_{\text{ext}} = - \int_{\partial\Omega_T \cup \xi^+ \cup \xi^-} T_i \frac{dU_i}{dA} d\xi \quad (5.11)$$

le théorème de GREEN-STOKS permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale curviligne .

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_T \cup \xi^+ \cup \xi^-} \left[T_i \frac{dU_i}{dA} + U_i \frac{dT_i}{dA} \right] d\Gamma \quad (5.12)$$

l'équation (5.8) devient :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_T \cup \xi^+ \cup \xi^-} \left[T_i \frac{dU_i}{dA} - U_i \frac{dT_i}{dA} \right] d\Gamma \quad (5.13)$$

5.2.3- Généralisation par le MAITRE-CHABOCHE

La formulation de la théorie de GRIFFITH en matériau fragile constituant un grand handicap d'utilisation du critère G_c en mécanique de la rupture et la théorie de fissuration , après sa généralisation par LE MAITRE-CHABOCHE en 1970 , cette théorie est rendue d'une large utilisation à cause de son adaptation aux techniques de simulation numérique

Formulation :

F : champ de force appliqué à une structure

$$F_q = K U_q \quad k : \text{rigidité de la structure} \quad (5.14)$$

On définit un potentiel thermodynamique ψ de la structure en tenant compte de toute les énergies du corps pour différentes lois de comportement , comme les comportements élastique et plastique sont prépondérants dans les structures discontinues .

$$\psi = \psi_{elas} + \psi_{plas}$$

avec $\psi_{plas} = f (U , T , A , h)$

U : déplacement significatif des travaux extérieurs

$$\psi_p = f (T , h_s , h_p) \quad (5.15)$$

L'exploitation de ce potentiel est comme suit :

$$F_q = \frac{\partial \psi_e}{\partial u_q} \quad S = - \frac{\partial \psi}{\partial T}$$

$$G = - \frac{\partial \psi}{\partial A} \quad H_s = \frac{\partial \psi}{\partial h_s}$$

D'autre part :

$$F = K q$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ q \right\}^T \left[K (T , A , h_s) \right] \left\{ q \right\} + \psi_p \quad (5.16)$$

L'énergie interne est négligée :

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ q \right\}^T \left[K \right] \left\{ q \right\} + \psi_p \quad (5.17)$$

Le taux de restitution d'énergie est :

$$G = - \frac{\partial \psi}{\partial A} = - \frac{1}{2} \left\{ q \right\}^T \left[\frac{\partial k}{\partial A} \right] \left\{ q \right\} \quad (5.18)$$

Or :

$$\left\{ q \right\} = \left[K \right]^{-1} \left\{ F \right\} \quad ; \quad \left\{ q \right\}^T = \left\{ F \right\}^T \left[K \right]^{-1}$$

$$G = - \frac{1}{2} \left\{ F \right\}^T \left[K \right]^{-1} \left[\frac{\partial k}{\partial A} \right] \left[K \right]^{-1} \left\{ F \right\} \quad (5.19)$$

Cette forme sera simplifiée pour 2 cas de conditions aux limites :

a) En effort imposé : $\longrightarrow dF = 0$

$$\longrightarrow d \left(\left[K \right] \left\{ q \right\} \right) = 0 \longrightarrow \partial \left[K \right] \left\{ q \right\} + \left[K \right] \left\{ \partial q \right\}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \left[K \right]}{\partial A} \left\{ q \right\} \partial A + \left[K \right] \frac{\partial \left\{ q \right\}}{\partial A} \partial A = 0$$

$$\longrightarrow = \frac{\partial \left[K \right]}{\partial A} = - \left[K \right] \frac{\partial \left\{ q \right\}}{\partial A} \left\{ q \right\}^{-1} = 0$$

$$G = - \frac{1}{2} \left\{ F \right\}^T \left[K \right]^{-1} \left[\frac{\partial k}{\partial A} \right] \left[K \right]^{-1} \left\{ F \right\}$$

$$G = - \frac{1}{2} \left\{ F \right\}^T \frac{\partial q}{\partial A} \quad (5.20)$$

b) En déplacement imposé :

Par le même raisonnement on obtient :

$$G = - \frac{1}{2} \left\{ q \right\}^T \left[\frac{\partial F}{\partial A} \right]_q \quad (5.21)$$

lorsque les deux cas sont présents :

$$G = \frac{1}{2} \left[\left\{ F \right\}^T \left[\frac{\partial q}{\partial A} \right]_F - \left\{ q \right\}^T \left[\frac{\partial F}{\partial A} \right]_q \right] \quad (5.22)$$

Où F et q signifient : le champ de forces et de déplacements sur tout le domaine autrement dit :

$$\left\{ F \right\}^T \left[\frac{\partial q}{\partial A} \right] = \int_{\partial \Omega_f} \overrightarrow{F} \frac{\overrightarrow{\partial q}}{\partial A} d\xi$$

$$\left\{ q \right\}^T \left[\frac{\partial F}{\partial A} \right]_q = \int_{\partial \Omega_q} \overrightarrow{U} \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial A} dA$$

$$G = \frac{1}{2} \left[\int_{\partial \Omega_f} \overrightarrow{F} \frac{\partial U}{\partial A} dS - \int_{\partial \Omega_u} \overrightarrow{U} \frac{\partial F}{\partial A} dS \right]$$

5.3- Matériau homogène élastique anisotrope (composite) :

5.3.1- Généralités sur les ruptures :

le comportement mécanique des matériaux composites à haute performance est au plan macroscopique , linéaire quasi élastique , toutefois la rupture de ceux -ci est précédée par un endommagement microscopique au développement lent .

Cet endommagement microscopique qui prend naissance par des microfissures , rend ainsi l'aspect de la zone endommagée au fond de fissure des plus complexes en comparaison avec les matériaux isotropes qui en général présentent une zone plastique en fond de fissure.

la diversité des modes de ruptures , présente lors de la rupture des matériaux composites , rend l'étude de ceux-ci encore plus difficile :

respectées dans le cas des matériaux orthotropes . la validité de l'application de la M.L.E.R est ainsi acquise .

5.2.3-Champ de contrainte et déplacement au voisinage du front de fissure

Les équations générales relatives à un champ de contraintes au voisinage d'une fissure , pour le cas des matériaux anisotropes , sont mises en évidence en utilisant une approche par les variables complexes .

Il a été montré que les problèmes bidirectionnels élastiques anisotropes peuvent être convenablement formulés au moyen de fonctions analytiques $\phi_j (z_j)$ de la variable complexe

$$z_j = x_j + y_j \quad (j = 1 , 2)$$

la variable complexe z ne doit pas être confondue avec l'axe des coordonnées z .

La solution de ce type de problème requière la détermination de deux fonctions $\phi_1 (z_1)$ et $\phi_2 (z_2)$ qui satisfont les conditions aux limites au voisinage de la région renfermant la fissure considérée . Ainsi les contraintes et déplacements dans une petite région entourant la fissure (fig-5.4) peut être écrite en mode I , comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

on pose :

$$\beta_1 = \left[\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)}} \right]$$

$$\beta_2 = \left[\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)}} \right]$$

$$\beta_3 = \left[\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)}} \right]$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \beta_1 \right] \\ \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \beta_2 \right] \\ \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \beta_3 \right] \end{Bmatrix}$$

Re : désigne la partie réelle du complexe entre crochets .

et

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = K_I \sqrt{2r} \begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

où :

$$\beta_4 = \mu_1 P_2 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)} - \mu_2 P_1 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)}$$

$$\beta_5 = \mu_1 q_2 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)}$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \beta_4 \right] \\ \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \beta_5 \right] \end{Bmatrix}$$

où μ_1 et μ_2 sont des variables complexes .

avec :

$$p_j = S_{11} \sigma_j^2 + S_{12} - S_{13} \mu_j$$

$$q_j = S_{12} \mu_j + \frac{S_{22}}{\mu_j} - S_{23}$$

les équations (5.23) et (5.24) se présentent sous la même forme , soit :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} f_{ij}(\theta, S_{im}) \quad (5.25)$$

$$u_i = K_I \sqrt{2r} g_i(\theta, S_{im}) \quad (5.26)$$

P.C.Paris et G.C.Sih montrent que le facteur d'intensité de contrainte du matériau anisotrope est équivalent à celui des matériaux isotropes si la fissure se propage dans son plan en respectant une direction principale de symétrie élastique (plan d'orthotropie) comme le montre les équations (5.23). Ainsi, le facteur d'intensité de contrainte en mode I s'exprime :

$$K_I = Y \sigma \sqrt{a}$$

T.H.H.Plan précise que le facteur géométrique Y est une fonction du rapport $\frac{a}{w}$ des éléments de la matrice souplesse S_{ij} et de la géométrie α de l'éprouvette.

$$K_I = Y\left(\frac{a}{w}, S_{ij}, \alpha\right) \sigma \sqrt{a} \quad (5.27)$$

Ce qui nous suggère par la suite que pour chaque géométrie d'éprouvette, il nous faut un coefficient de forme Y, par suite donc un facteur d'intensité de contrainte. De ce fait, il nous est impossible ou plutôt délicat de travailler avec le K_I en composite.

Pour les matériaux composites, l'approche mécanique K_I est beaucoup plus délicate que l'approche énergétique G_I . On précise que dans le cas le plus général d'anisotropie, G_{Ic} et K_{Ic} (tenacité) sont reliés par la relation suivante :

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E^*} \quad (5.28)$$

E^* représente le module effectif.

E^* a pour expression dans le cas particulier d'orthotropie, selon G.C.Sih, P.C.Paris et G.R.Irwin :

$$E^* = \left[\frac{X_{11} X_{22}}{2} \right]^2 \left[\left[\frac{X_{22}}{X_{11}} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{2 X_{12} + X_{33}}{2 X_{11}} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.29)$$

en déformation plane : $X_{ij} = S_{ij} - S_{i3} \frac{i3 S}{S_{33}}$ (5.30)

en contrainte plane : $X_{ij} = S_{ij}$ (5.31)

CHAPITRE 6

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET SON APPLICATION A LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

6.1 - Introduction

Le concept de base de la méthode des éléments finis consiste dans le fait que la structure peut être considérée comme un assemblage d'éléments indépendants .

L'idée nouvelle de la méthode des éléments finis est l'utilisation d'éléments de dimensions 2 et 3 pour la modélisation du continu , cette subdivision peut être obtenue de la manière suivante :

-Le milieu continu est divisé par des lignes , ou des surfaces imaginaires en un certain nombre d'éléments finis .

-les éléments sont supposés reliés entre eux en un certain nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières , les déplacements de ces noeuds seront les inconnus de base du problème .

-On choisit une (ou des) fonction permettant de définir de manière unique le champ de déplacements de ces noeuds .

-Les fonctions de déplacements définissent l'état de déformations à l'intérieur d'un élément en fonction des déplacements nodaux , ces déformations définissent l'état de contraintes en tout point de l'élément et par conséquent sur ses frontières .

-On détermine un système de forces concentrées aux noeuds qui équilibre les contraintes s'exerçant aux frontières , il en résulte une relation de rigidité .

6.2 - Discrétisation d'une structure .

Il y a un grand nombre d'éléments finis , chacun ayant ses avantages particuliers . Dans ce présent travail , nous opterons pour un élément fini triangulaire linéaire à trois noeuds et six degrés de liberté .

La subdivision initiale en éléments finis de la structure étudiée a des caractéristiques suivantes .

-La nature de la modélisation par éléments finis a pour conséquence qu'en général la précision de la solution augmente avec le nombre d'éléments considérés .

-On peut utiliser une subdivision graduelle en éléments pour permettre une étude plus détaillée des régions où on apprécie une grande concentration de contraintes .

Dans le cas de charges concentrées , le maillage doit être choisi de façon que les noeuds se trouvent aux points d'application des charges .

La figure ci-dessous montre un élément triangulaire à six d . d . l ; chaque noeud possède deux déplacements , u et v suivant les directions X et Y respectivement .

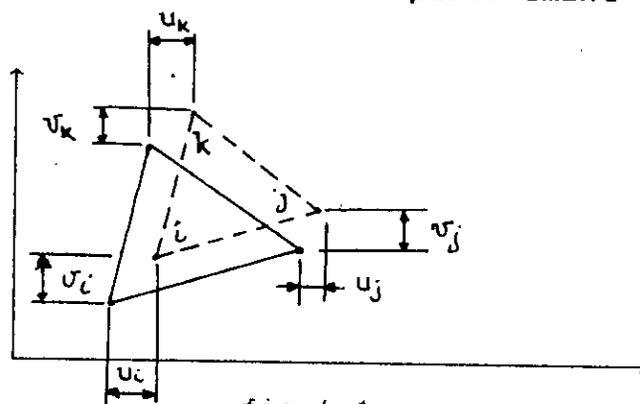


fig-6.1-

6.2.1 - Fonctions de déplacements

Les fonctions d'interpolation pour les déplacements u et v peuvent être données par les relations suivantes

$$u(x,y) = u_i + c_1 x + c_2 y$$

$$v(x,y) = v_i + c_3 x + c_4 y$$

(6.1)

En se référant à la figure

au noeud j

$$\begin{cases} x = a_i \\ y = b_j \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_i = u_i + c_1 a_j + c_2 b_j \\ v_j = v_i + c_3 a_j + c_4 b_j \end{cases}$$

au noeud k

$$\begin{cases} x = a_k \\ y = b_k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_k = u_i + c_1 a_k + c_2 b_k \\ v_k = v_i + c_3 a_k + c_4 b_k \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j & 0 \\ a_k - a_j & 0 & -a_k & 0 & a_j & 0 \\ 0 & b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j \\ 0 & a_k - a_j & 0 & -a_k & 0 & a_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

Où Δ est la surface du triangle considéré (6.2)

$$\Delta = a_j b_k - b_j a_k$$

et

$$a_j = x_j - x_i$$

$$b_j = y_j - y_i$$

$$a_k = x_k - x_i$$

$$b_k = y_k - y_i$$

6.2.2 - Relations contraintes-déplacements

Les déformations sont liés aux déplacements nodaux par

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j & 0 \\ 0 & b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j \\ a_k - a_j & b_j - b_k & -a_k & b_k & a_j & -b_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

ou :

$$(\varepsilon) = [1] (q) \quad (6.3)$$

Comme il a été déjà vu :

$$(\sigma) = [c] [l] (q)$$

dans le repère d'orthotropie C est donnée par l'expression suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

6.2.3 - Dérivation de la matrice de rigidité :

Elle s'obtient par la minimisation de l'énergie potentielle totale . Pour l'élément, triangulaire elle est donnée par la formule suivante :

$$[K] = h \iint [L]^t [C] [L] dy dx$$

Mais on remarque que les matrices (L) et (C) sont indépendantes des variables x et y , ce qui implique la facilité de l'intégration selon un contour triangulaire .

$$[K] = h [L]^t [C] [L] \Delta \quad (6.4)$$

le calcul de la matrice de rigidité d'un élément triangulaire est donc facile à calculer et cela en utilisant un petit programme de produit matriciel....

6.3 - Organisation de programme éléments finis appliqué à la mécanique de la rupture.

Le calcul par éléments finis est de plus en plus utilisé dans le domaine des matériaux composites , pour lesquels les lois de comportement sont généralement anisotropes .Ce calcul permet le dimensionnement des pièces de géométrie compliquée , soumises à des sollicitations quelconques .

Ce calcul est avant tout applicable pour l'étude du comportement élastique des pièces . Son extension à la mécanique de la rupture apporte une aide à la compréhension des mécanismes de rupture dans les essais du délaminage sur des éprouvettes types . Cependant cette dernière utilisation reste tributaire des grandeurs limites (de rupture) expérimentales ,qui ne peuvent être obtenues que par des essais .

Le calcul par éléments finis en fissuration utilise la théorie de la mécanique des milieux continus (solides élastiques) et celle de la mécanique de la rupture . Le calcul du taux de restitution d'énergie G_I est effectué par avancée virtuelle en tête de fissure .

6.3.1 - Maillage

Vu que notre éprouvette présente une parfaite symétrie de géométrie et de chargement , la moitié uniquement de l'éprouvette sera maillée à condition de tenir compte des conditions aux limites appropriées qui résultent de cette restriction .L'élément triangulaire à trois noeuds est l'élément le plus simple qu'on puisse concevoir pour l'élasticité plane car il permet de définir correctement les états de déformation constante .

Les zones de fort gradient de contraintes se trouvent sous les sollicitations et au fond de l'entaille .C'est pourquoi on a raffiné le maillage dans ces zones .(fig .6.2)

6.4 - Techniques de stockage

La matrice globale K est construite par assemblage des matrices caractéristiques des différents éléments K^e , F^e préalablement calculées .Elle possède un très grand nombre de coefficients nuls .

Pour résoudre un tel système par la méthode d'élimination , il convient de mettre en oeuvre des techniques particulières pour éviter aussi bien de stocker des termes nuls , que d'effectuer des opérations dont l'un

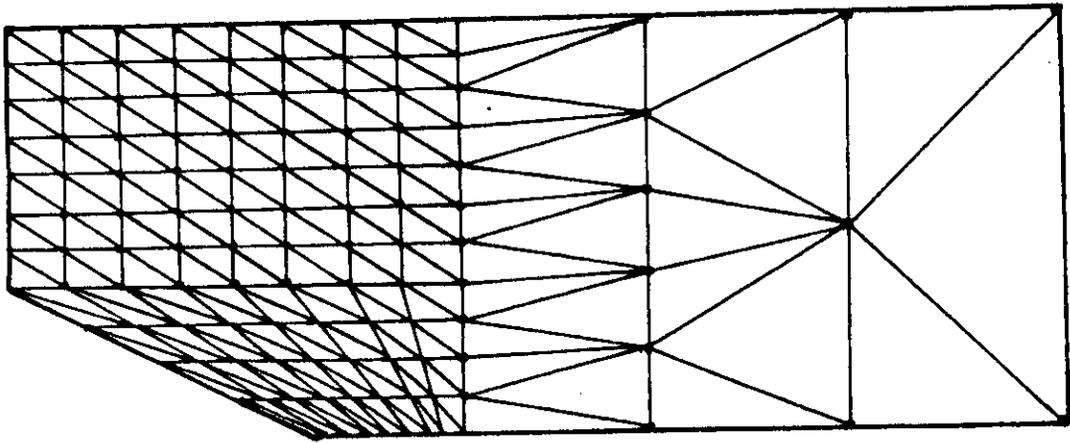


FIG-6.2

des opérandes est nul

6.4.1 - Rangement des matrices creuses .

Lorsqu'on considère K comme une matrice pleine , en ne tenant pas compte de la nulité de certains coefficients , le rangement des coefficients est très simple . Par contre pour tenir compte de la nulité des coefficients de K ,il faut utiliser un rangement bien choisi .Il y a plusieurs méthodes de rangement possibles .Certains ne stockent aucun zéro ,au prix d'un algorithme compliqué , donc d'un coût en temps de calcul et en place mémoire élevé pour représenter la structure de K .

La place qu'occupe en mémoire , une méthode de rangement comprend :

-la place nécessaire au stockage des valeurs des coefficients des matrices , qui sont des nombres réels .

-La place nécessaire au stockage des indices de ligne et de colonne de chaque coefficient .

-L'information nécessaire pour aller rechercher les uns après les autres , tous les coefficients d'une même ligne ou d'une même colonne .

6.4.2 - Rangement plein

Tous les coefficients de la partie triangulaire supérieure de K (y compris les coefficients nuls) sont rangés les uns après les autres , par exemple ligne par ligne dans des tableaux dont la position des éléments est repérée par un seul indice .Ainsi le coefficient K (i , j) est rangé dans ATAB (k) où $k = \frac{(i-1)(2N-i)}{2} + j$, comme on le voit sur la figure ci-dessous .

6.6 - Caractéristiques mécaniques et géométriques de l'éprouvette.

Dans notre cas on considère la configuration (0/0). L'éprouvette étudiée est représentée sur la fig-6.3-. Elle est sollicitée en mode I

Les dimensions géométriques indiquées sur la figure sont :

$$2t = 6.7 \text{ mm}$$

$$\delta = 2.48 \text{ mm}$$

$$B = 20.06 \text{ mm}$$

$$L = 140 \text{ mm}$$

$$a = 50.83 \text{ mm}$$

Les caractéristiques mécaniques de l'éprouvette sont résumées dans le tableau suivant.:

	E1 (GPA)	E2 (GPA)	G12 (GPA)	ν_{12}
(0/0)	128.68	8.99	3.77	0.22

La formule (5.13) donnant le taux de restitution d'énergie G_c se réduit à :

$$G_c = \frac{1}{2} \frac{P_c (U_2 - U_1)}{B \Delta a} \quad (6.5)$$

Où :

P_c : charge critique appliquée .

$$P_c = 129.5 \text{ N}$$

B : largeur de l'éprouvette .

U_1 : déplacement du noeud chargé pour une longueur initiale du défaut .

U_2 : déplacement du noeud chargé après avoir incrémenté la fissure

Δa : incrément de la fissure .

La valeur de G_c évalué par la méthode des éléments finis en utilisant un maillage spécial est 260 j/M^2 alors qu'un

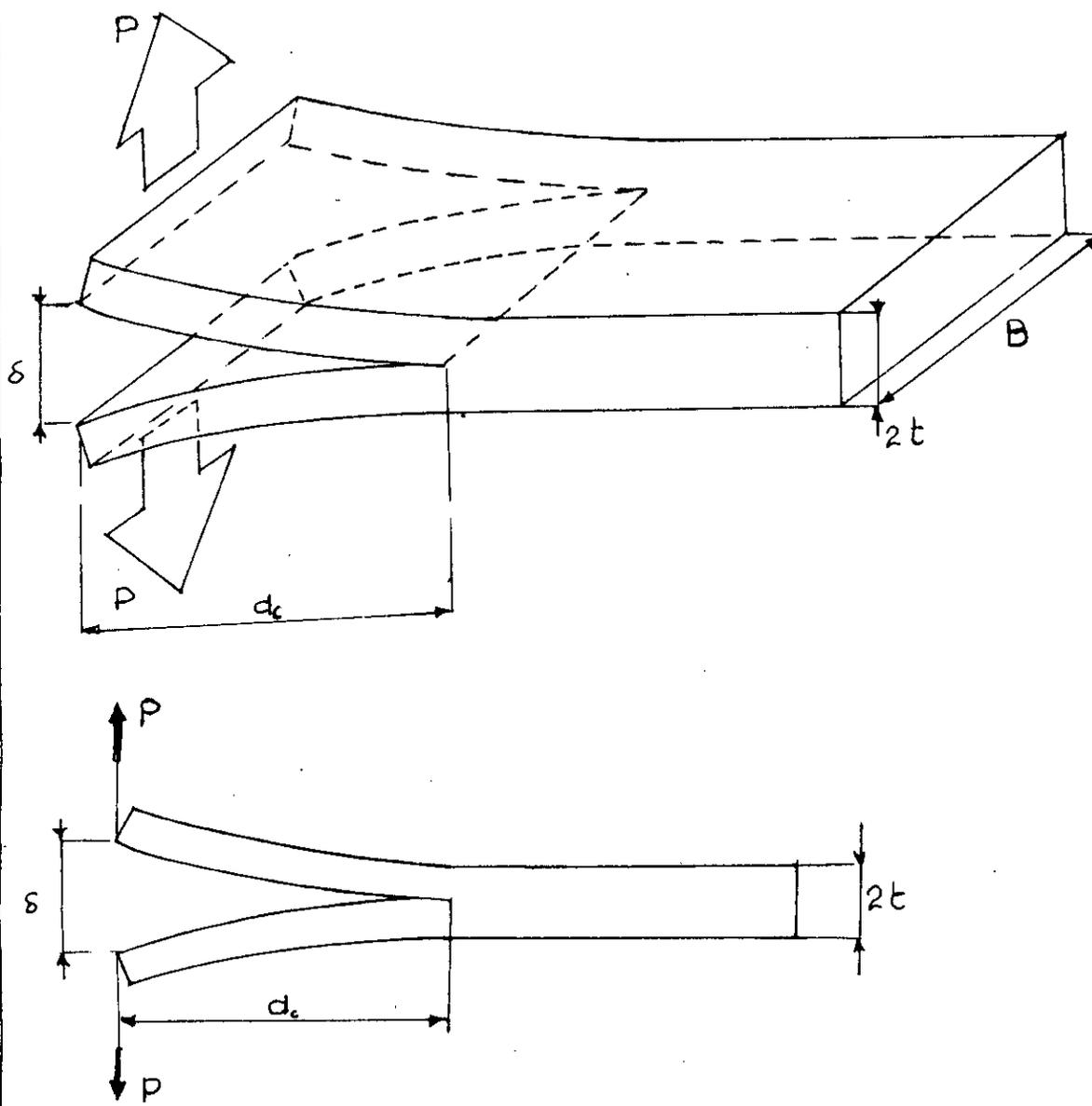
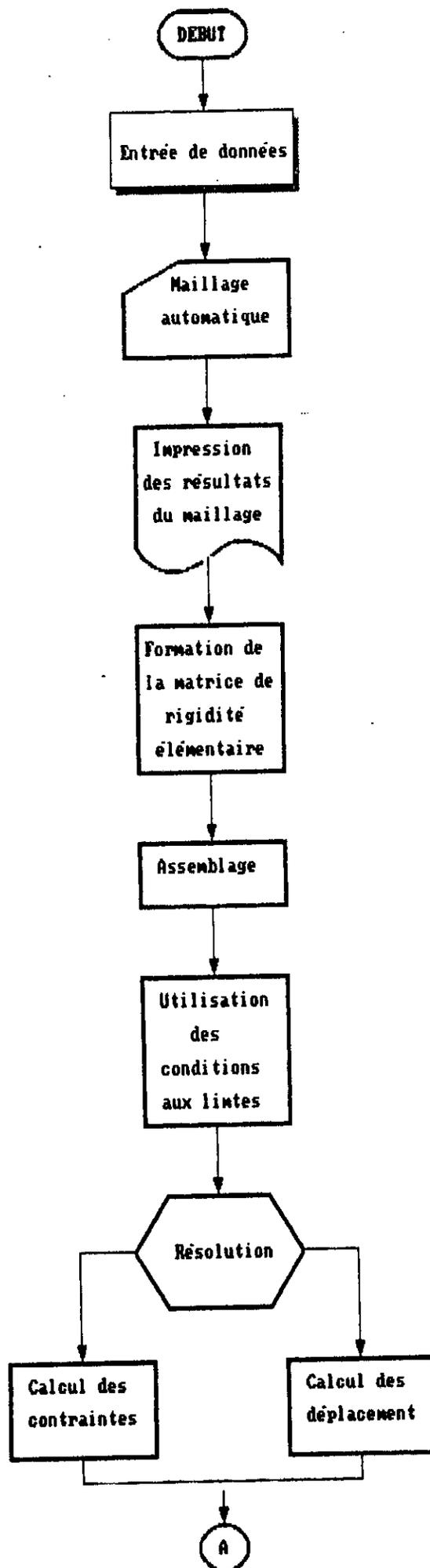


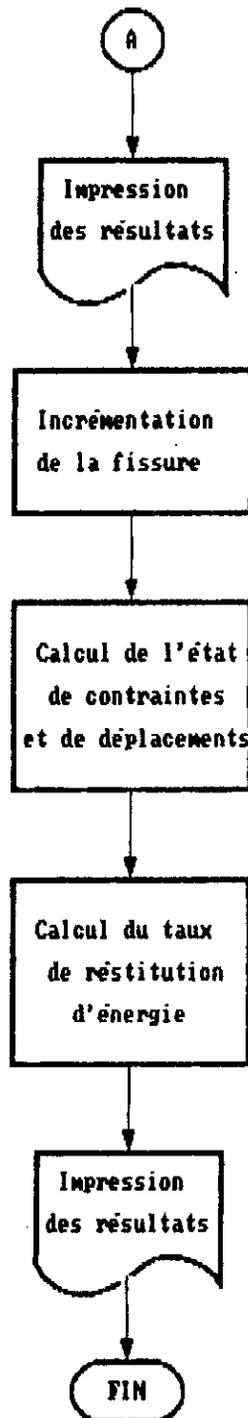
FIG-6.3- DOUBLE POUTRE ENCASTREE

maillage simple a donné un résultat beaucoup plus faible .
 Les résultats expérimentaux trouvés par K.AZOUADUI [3] sont :

Méthodes	G_{Ic} (J/M ²)
RIPLING , MOSTOVOY et PATRICK	424.46
GILLIS et GILMAN	427.47
GROSS et STRAWLEY	426.56
KANNINEN	448.80
BERRY	464.32

La différence entre la valeur expérimentale et numérique est considérable . une partie de l'erreur est due , d'une part au type d'élément choisi et d'autre au part au maillage limité .





CHAPITRE 7
METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES
METHODE INDIRECTE

7.1 - Introduction

Malgré sa souplesse et son immense champ d'application la méthode des éléments finis peuvent présenter un certain nombre d'inconvénients quand elle est mise en oeuvre au travers de développements polynomiaux définis localement en tout point du domaine étudié . En particulier des difficultés surgissent dans deux situations bien définies :

- a- quand le domaine devient infini , et
- b- quand apparaissent des singularités en des points où certains dérivées deviennent infinies .

La méthode des éléments finis ne s'applique pas telle qu'elle dans le premier cas . Quant au second cas , la solution est très grossièrement approchée par des développements polynomiaux : en effet les théorèmes de convergence ne s'appliquent plus puisque le développement de Taylor ne converge pas au voisinage de telles singularités . De nombreuses possibilités permettant d'éviter les domaines infinis et les singularités par aménagement ou par simple modification du problème . La technique la plus puissante est celle désignée sous le vocable de 'résolution aux frontières'. Cette dernière approche consiste à imaginer un domaine réel Ω prolongé tout autour $\partial\Omega$, par un domaine fictif infini , et de chercher une distribution de sources \vec{s} sur la frontière qui peut ne pas coïncider avec $\partial\Omega$, dont l'action soit telle que les conditions aux limites physiques du problème soient exactement vérifiées . Ces sources sont des inconnues indirectes (d'où le nom de la méthode) du problème , les inconnues physiques en sont déduites après coup.

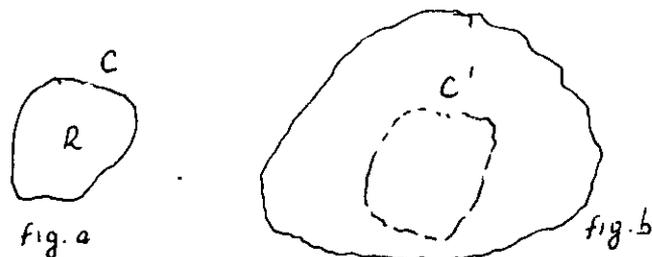
En absence des forces volumiques , on obtient pour une telle répartition :

$$\bar{u}(p) = \int_{\partial\Omega} u(M, P) \vec{s}'(M) d\Gamma(M) \quad (7.1)$$

$$\overline{\sigma(p)} = \int_{\partial\Omega} T(M, P, \vec{n}') \cdot \vec{s}'(M) d\Gamma(M) \quad (7.2)$$

En utilisant les conditions aux limites sur le contour $\partial\Omega$, on pourra résoudre l'équation intégrale pour une répartition de sources donnée. Malgré la souplesse de cette méthode, il reste la difficulté du choix de la distribution optimale. Ces sources peuvent être des forces concentrées, des discontinuités des déplacements.

7.2 - Méthode des contraintes fictives .



La fig.a représente la région R limitée par le contour C du problème à résoudre .

La fig.b représente une région infinie et C' est la trace du contour C dans cette région .

Si applique un chargement concentré en un point M dans la région infinie ,les déplacements et les contraintes en chaque point de la région infinie sont donnés par la solution analytique du problème de Kelvin .

La méthode des contraintes fictives consiste à trouver des contraintes qui produisent les mêmes conditions sur C' dans le milieu infini que ceux prescrites sur C ; et puisque la solution du problème est unique ,alors le problème de fig.a sera résolu en résolvant celui de la fig.b .

Pour une fissure à deux surfaces dont l'une coïncide avec l'autre ,la méthode des contraintes fictives ne tient pas pour ce genre de problème car les effets des contraintes fictives le long d'une surface de la fissure ne se distinguent pas de ceux sur l'autre surface .

Cependant la fissure qu'on étudie est très grande (fig.), la distance entre ses deux lèvres est assez importante pour qu'on puisse utiliser cette méthode pour la résolution

de ces types des problèmes

7.2.1 - Problème de Kelvin pour un état de déformation plane

Le problème de Kelvin pour un état de déformation plane est illustré dans la (fig.7.2)

La force $F_1 = (F_x, F_y)$ représente une force linéaire concentrée appliquée le long de l'axe Z dans un solide élastique infini.

Les composantes F_x et F_y ont des dimensions force / longueur. Les solutions analytiques du problème sont données par les expressions suivantes :

$$u_x = \frac{q_1 q_2}{2 \pi c_{\infty} (q_1 - q_2)} F_x \left[\frac{\gamma_1}{q_1} \ln (x^2 + y^2)^{1/2} - \frac{\gamma_2}{q_2} \ln (x^2 + y^2)^{1/2} \right] - \frac{1}{2 \pi c_{\infty} (q_1 - q_2)} F_y \left[\arctan \frac{y_1}{x_1} - \arctan \frac{y_2}{x_2} \right]$$

$$u_y = -\frac{q_1 q_2}{2 \pi c_{\infty} (q_1 - q_2)} F_x \left[\arctan \frac{y_1}{x} - \arctan \frac{y_2}{x} \right] + \frac{-1}{2 \pi c_{\infty} (q_1 - q_2)} F_y \left[\frac{\gamma_1}{q_1} \ln (x^2 + y^2)^{1/2} - \frac{\gamma_2}{q_2} \ln (x^2 + y^2)^{1/2} \right]$$

(7.3)

Et

$$\sigma_{xx} = \frac{q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} F_x \left[\frac{(q_1 + 1)}{\gamma_1 q_1} \frac{x}{x^2 + y_1^2} - \frac{(q_2 + 1)}{\gamma_2 q_2} \frac{x}{x^2 + y_2^2} \right] + \frac{1}{2\pi (q_1 - q_2)} F_y \left[\frac{(q_1 + 1)}{\gamma_1^2} \frac{y_1}{x^2 + y_1^2} - \frac{(q_2 + 1)}{\gamma_2^2} \frac{y_2}{x^2 + y_2^2} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{-q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} F_x \left[\frac{(q_1 + 1)}{q_1} \frac{\gamma_1 x}{x^2 + y_1^2} - \frac{(q_2 + 1)}{q_2} \frac{\gamma_2 x}{x^2 + y_2^2} \right] - \frac{1}{2\pi (q_1 - q_2)} F_y \left[(1 + q_1) \frac{y_1}{x^2 + y_1^2} - (1 + q_2) \frac{y_2}{x^2 + y_2^2} \right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} F_x \left[\frac{(q_1 + 1)}{q_1} \frac{y_1}{x^2 + y_1^2} - \frac{(q_2 + 1)}{q_2} \frac{y_2}{x^2 + y_2^2} \right] - \frac{1}{2\pi (q_1 - q_2)} F_y \left[\frac{(q_1 + 1)}{\gamma_1} \frac{x}{x^2 + y_1^2} - \frac{(q_2 + 1)}{\gamma_2} \frac{x}{x^2 + y_2^2} \right] \quad (7.4)$$

Où F_x et F_y sont les composantes de la force concentrée et y_1 et y_2 sont définis par :

$$y_1 = \frac{y}{\gamma_1} \quad y_2 = \frac{y}{\gamma_2}$$

Les paramètres γ_1^2 et γ_2^2 sont les solutions de l'équation :

$$c_{11} c_{66} \gamma^4 + \left[c_{12} (c_{12} + 2c_{66}) - c_{11} c_{22} \right] \gamma^2 + c_{22} c_{66} = 0$$

Les constantes q_1 et q_2 sont données par les expressions :

$$q_1 = \frac{(c_{11} \gamma_1^2 - c_{66})}{c_{12} + c_{66}} \quad q_2 = \frac{(c_{11} \gamma_2^2 - c_{66})}{c_{12} + c_{66}} \quad (7.5)$$

7.2.2 - Vecteur traction constant suivant un segment droit .

En intégrant la solution du problème de Kelvin et après changement de repère

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \beta - y \sin \beta \\ \bar{y} &= x \sin \beta + y \cos \beta \end{aligned} \quad (7.6)$$

De même pour le chargement :

$$\begin{aligned} P_{\bar{x}} &= P_x \cos \beta - P_y \sin \beta \\ P_{\bar{y}} &= P_x \sin \beta + P_y \cos \beta \end{aligned} \quad (7.7)$$

Les déplacements deviennent :

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{q_1 q_2}{2 \pi c_{66} (q_1 - q_2)} P_x \left[\frac{\gamma_1}{q_1} I_1(x, y, \gamma_1) - \frac{\gamma_2}{q_2} I_1(x, y, \gamma_2) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2 \pi c_{66} (q_1 - q_2)} P_y \left[I_2(x, y, \gamma_1) - I_2(x, y, \gamma_2) \right] \\ u_{\bar{y}\bar{y}} &= - \frac{q_1 q_2}{2 \pi c_{66} (q_1 - q_2)} P_x \left[I_2(x, y, \gamma_1) - I_2(x, y, \gamma_2) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2 \pi c_{66} (q_1 - q_2)} P_y \left[\frac{\gamma_1}{q_1} I_1(x, y, \gamma_1) - \frac{\gamma_2}{q_2} I_1(x, y, \gamma_2) \right] \end{aligned}$$

Et les contraintes sont : (7.8)

$$\sigma_{xx} = \frac{q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} P_x \left[\frac{q_1 + 1}{q_1 \gamma_1} I_3(x, y, \gamma_1) - \frac{q_2 + 1}{q_2 \gamma_2} I_3(x, y, \gamma_2) \right] - \frac{1}{2\pi (q_1 - q_2)} P_y \left[\frac{q_1 + 1}{\gamma_1^2} I_4(x, y, \gamma_1) - \frac{q_2 + 1}{\gamma_2^2} I_4(x, y, \gamma_2) \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{-q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} P_x \left[\frac{\gamma_1 (q_1 + 1)}{q_1} I_3(x, y, \gamma_1) - \frac{(q_2 + 1) \gamma_2}{q_2 \gamma_2} I_3(x, y, \gamma_2) \right] - \frac{1}{2\pi (q_1 - q_2)} P_y \left[(q_1 + 1) I_4(x, y, \gamma_1) - (q_2 + 1) I_4(x, y, \gamma_2) \right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} P_x \left[\frac{q_1 + 1}{q_1} I_4(x, y, \gamma_1) - \frac{q_2 + 1}{q_2} I_4(x, y, \gamma_2) \right] - \frac{1}{2\pi (q_1 - q_2)} P_y \left[\frac{q_1 + 1}{\gamma_1} I_3(x, y, \gamma_1) - \frac{q_2 + 1}{\gamma_2} I_3(x, y, \gamma_2) \right]$$

(7.9)

А и с :

$$I_1(x, y, \gamma_i) = \frac{y}{\gamma_i A_i} \left[\Phi_1(\gamma_i) - \Phi_2(\gamma_i) \right] - \left[x - a + \frac{B_i y}{2A_i} \right] \ln r_1(\gamma_i) + \left[x + a + \frac{B_i y}{2A_i} \right] \ln r_2(\gamma_i)$$

$$I_2(x, y, \gamma_i) = \left[x - a + \frac{B_i y}{2A_i} \right] \Phi_1(\gamma_i) - \left[x + a + \frac{B_i y}{2A_i} \right] \Phi_2(\gamma_i) - \frac{y}{\gamma_i A_i} \ln \frac{r_1(\gamma_i)}{r_2(\gamma_i)}$$

$$I_3(x, y, \gamma_i) = \frac{-\cos \beta}{A_i} \ln \frac{r_1(\gamma_i)}{r_2(\gamma_i)} - \frac{\sin \beta}{\gamma_i A_i} \left[\Phi_1(\gamma_i) - \Phi_2(\gamma_i) \right]$$

$$I_4(x, y, \gamma_i) = \frac{-\sin \beta}{\gamma_i A_i} \ln \frac{r_1(\gamma_i)}{r_2(\gamma_i)} - \frac{\cos \beta}{A_i} \left[\Phi_1(\gamma_i) - \Phi_2(\gamma_i) \right]$$

(7.10)

$$r_1(\gamma_i) = \left[A_i (x-a)^2 + B_i (x-a) y + C_i^2 y^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2(\gamma_i) = \left[A_i (x-a)^2 + B_i (x-a) y + C_i^2 y^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.11)$$

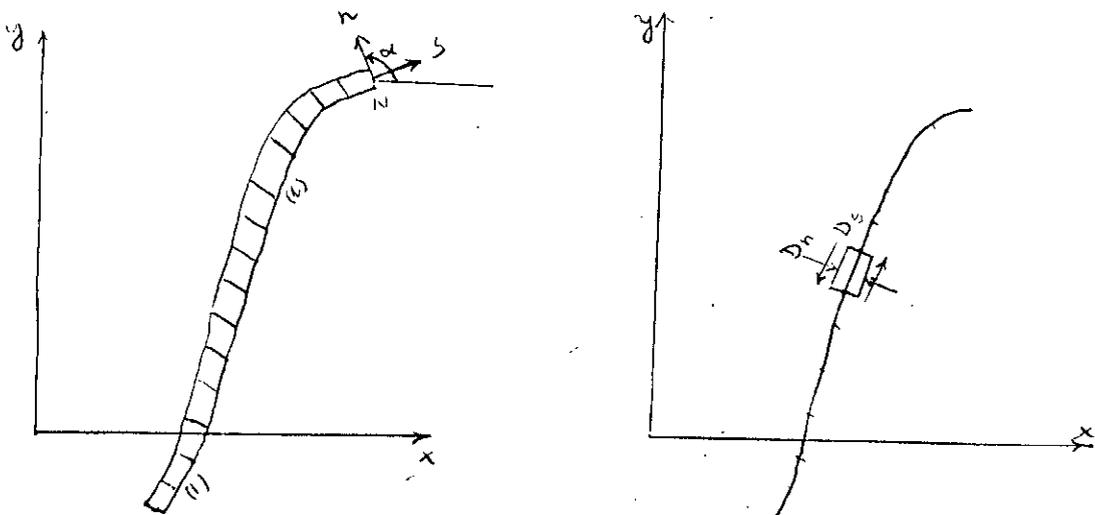
$$\phi_1(\gamma_1) = \arctan \frac{\frac{y}{\gamma_i A_i}}{x-a + \frac{B_i y}{2A_i}}, \quad \phi_2(\gamma_1) = \arctan \frac{\frac{y}{\gamma_i A_i}}{x-a + \frac{B_i y}{2A_i}}$$

$$(7.12)$$

7.2.3 - Procédure numérique

La solution singulière singulière trouvée est relative à une discontinuité de contrainte constante sur un segment fini dans un milieu infini .Elle est généralisée par un procédure numérique pour construire une méthode des éléments de frontière et résoudre des problèmes complexes .

L'idée est de discrétiser une discontinuité de courbure quelconque en N éléments aussi petit que l'on veut (courbure négligeable) et analyser un élément j dans un repère locale . L'effet d'une discontinuité de déplacement d'un point quelconque de la frontière du domaine peut être écrit d'après l'équation (7.8) et (7.9)



$$\begin{cases} \sigma_s^i = A_{ss}^{ij} P_s^i + A_{sn}^{ij} P_n^j \\ \sigma_n^i = A_{ns}^{ij} P_s^i + A_{nn}^{ij} P_n^j \end{cases} \quad i = 1, n \quad (7.13)$$

les A_{ss}^{ij} ; A_{sn}^{ij} ; A_{ns}^{ij} ; A_{nn}^{ij} coefficients d'influences .

L'influence des N éléments sur le $i^{\text{ème}}$ élément et obtenue par superposition :

$$\begin{cases} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} P_n^j \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} P_n^j \end{cases} \quad i = 1, n \quad (7.14)$$

Quand aux déplacements :

$$\begin{cases} U_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} P_n^j \\ U_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} P_n^j \end{cases} \quad i = 1, n \quad (7.15)$$

Avec B_{ss}^{ij} , B_{sn}^{ij} , B_{ns}^{ij} , B_{nn}^{ij} sont les coefficients d'influences .

Résolution :

Une fois les système (7.14) et (7.15) formulés on calcule :

Les discontinuités selon les conditions aux limites sur les déplacements et les contraintes on résoud le système :

$$[\sigma] = [A] \{P\}$$

Ou :

$$[U] = [B] \{P\}$$

Puis on calcule par le même système le champ de contrainte et de déplacement en'importe quel point en reformulant les matrices [A] et [B]

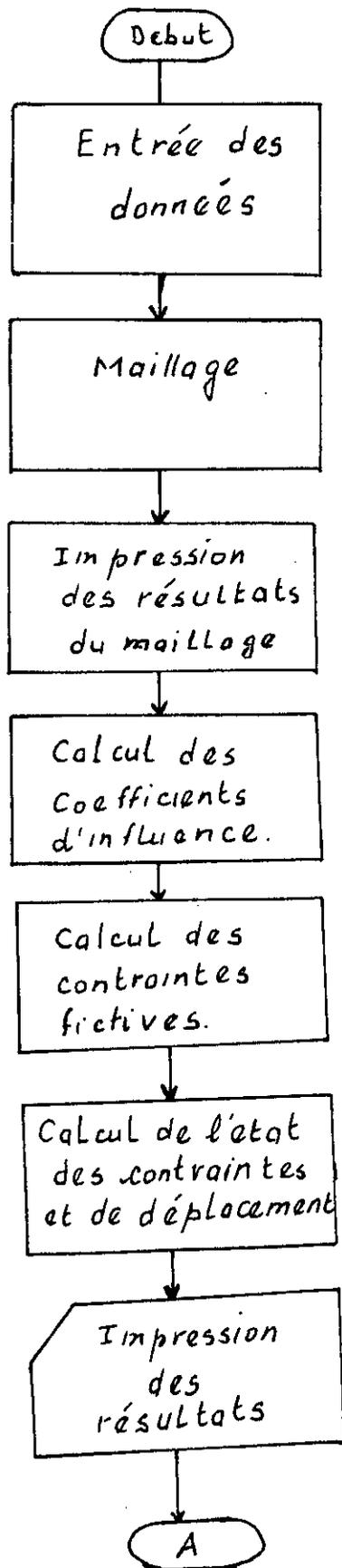
METHODE DES DISCONTINUITES DES DEPLACEMENTS

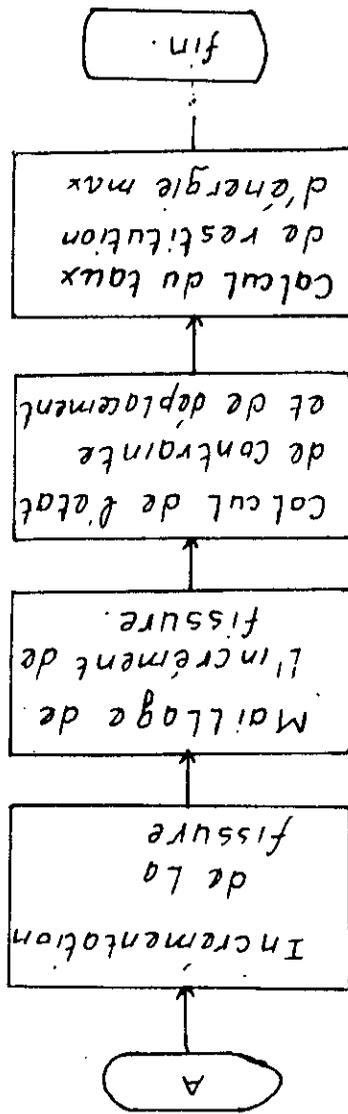
La méthode des discontinuités des déplacements est faite surtout pour les problèmes de fissuration . Elle est basée sur la solution analytique du problème d'une discontinuité de déplacement dans un corps élastique infini. Physiquement , on imagine une discontinuité de déplacement comme une fissure qui oppose deux surfaces qui ont un déplacement relative entre eux .

Le procédure numérique est identique à celle de la méthode des contraintes fictives , la différence est que dans le premier cas les inconnues du problème sont les discontinuités des déplacements , alors que dans le second cas se sont les discontinuités des contraintes .

Bien que cette méthode s'adapte mieux à notre cas , mais malheureusement on ne dispose pas de la solution analytique pour un matériau anisotrope . On est donc obligé de déterminer les relations d'équivalence pour passer d'un matériau anisotrope à un matériau isotrope , c'est à dire trouver un module de Young et un coefficient de poisson équivalents .

Comme le taux de restitution d'énergie dépend uniquement du déplacement du noeud chargé , l'idée était de trouver un E_{eq} qui donnerait le même déplacement que si l'on tient compte de l'effet d'anisotropie . On se sert dans ce cas de la méthode des éléments finis . Si on prend $E_{eq} = E_2$ alors le déplacement du noeud chargé est neuf plus grand que celui du déplacement exact . Cette approche est sans doute exagérée .





Annexe :1

Procédure de calcul .

Dans le cas le plus général le stratifié est soumis aux sollicitations déjà définies N_x , N_y , N_{xy} , M_x , M_y , M_{xy} .
Donc pour que notre solution soit générale aussi, on a utilisé la technique suivante :

- On suppose une charge fictive F
- On exprime les six sollicitations en fonction de F en utilisant les rapports de proportion R1, R2, R3, R4, R5, R6

$$N_x = R1 F$$

$$N_y = R2 F$$

$$N_{xy} = R3 F$$

$$M_x = R4 F$$

$$M_y = R5 F$$

$$M_{xy} = R6 F$$

Donc si le stratifié est soumis à une traction pure suivant X on donne une valeur au rapport R1 et on annule tous les autres rapports .

De même , si le stratifié est soumis à un moment M_x uniquement , on donne une valeur à R4 et on annule tous les autres .

Les six rapports peuvent exister simultanément .

Le vecteur charge et le vecteur moment s'écrivent :

$$\{ N \} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{Bmatrix} F$$

$$\{ M \} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R4 \\ R5 \\ R6 \end{Bmatrix} F$$

Les déformations et les courbures deviennent :

$$\{ \varepsilon^o \} = [A^{''}] F$$

$$\{ K \} = [B^{''}] F$$

avec :

$$[A^{''}] = [A'] \begin{Bmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{Bmatrix} + [B'] \begin{Bmatrix} R4 \\ R5 \\ R6 \end{Bmatrix}$$

$$[B^{''}] = [B'] \begin{Bmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{Bmatrix} + [D'] \begin{Bmatrix} R4 \\ R5 \\ R6 \end{Bmatrix}$$

Si on tient compte de l'effet de température alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A' & \vdots & B' \\ \dots & \dots & \dots \\ B' & \vdots & D' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N + N^t \\ M + M^t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \text{ le vecteur chargement appliqué}$$

$$\begin{Bmatrix} N^t \\ M^t \end{Bmatrix} \text{ le vecteur chargement dû à la différence de température .}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A' & \vdots & B' \\ \dots & \dots & \dots \\ B' & \vdots & D' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A' & \vdots & B' \\ \dots & \dots & \dots \\ B' & \vdots & D' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N^t \\ M^t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{Bmatrix}_{\text{tot}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{Bmatrix}_{\text{ca}} + \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{Bmatrix}_{\text{temp}}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{Bmatrix}_{\text{ca}} \text{ vecteur déformation dû au chargement appliqué}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{Bmatrix}_{\text{temp}} \text{ le vecteur déformation dû à la différence de température}$$

CONCLUSION

Après avoir initié et approfondi nos connaissances sur les matériaux composites et leurs comportements dans le domaine élastique et de la rupture, nous avons pu élaborer un logiciel permettant de faire cette analyse (élasticité et rupture).

C'est un moyen de calcul performant pour l'obtention des caractéristiques mécaniques d'un stratifié à savoir :

- calcul des contraintes et déformations dans chaque pli
- rupture de la première couche en fonction du chargement

L'application de la méthode des éléments finis pour le calcul du taux de restitution d'énergie a donné un résultat dont l'erreur est assez importante. Cependant on a remarqué une amélioration des résultats en raffinant le maillage au voisinage de la fissure et au point d'application de la charge.

A la fin de ce projet de fin d'étude, nous avons acquis une bonne connaissance sur les matériaux composites de point de vue comportement mécanique (élasticité, rupture).

REFERENCES

- [1]- R.M. JONES
" Mechanics of composite materials "
- [2]- S.W. TSAI et H.T HANN
" Introduction to composite materials "
technic publishing Co , Inc 1980
- [3]- K. AZOUAOU
"Etude du délaminage des matériaux composites stratifiés carbone / époxy en mode I pour différentes configuration d'éprouvettes .
Thèse de magister 1991 .
- [4]- D. GAY
" Matériaux composites "
Edition Hermes 1987 .
- [5]- S.L CROUCH et A.M STARFIELD
" Bondary element methode in geomechanics "
1978
- [6]- O.C ZIENKIEWICZ
" La methode des éléments finis "
Edition McGraw-HILL 1979
- [7]- G.DHAT et G.TOUZOT
" Une présentation de la méthode des éléments finis ."
2^{ème} edition 1984 .
- [8]- LASCAUX
" Methodes numériques à l'art de l'ingénieur . "

[9]- J.F IMBERT

" Analyse des structures par éléments finis . "
2^{ème} édition 1979 .

[10]- N.MAKHLOUFI et A.AINAQUI

" Simulation par équations intégrales de la
fissuration par fatigue . "
Projet de fin d'étude 1992