



THESE

présentée
en vue de l'obtention du titre de

Docteur d'Etat

en

AUTOMATIQUE

par

Malik LOUDINI

Magister en Automatique de l'E.N.P

Intitulé :

**Contribution à la Modélisation et à la Commande Intelligente
d'un Bras de Robot Manipulateur Flexible**

Soutenue publiquement le Mercredi 24 Octobre 2007 devant le jury composé de:

F. BOUDJEMA	Professeur à l'E.N.P	Président
D. BOUKHETALA	Maître de conférences à l'E.N.P	Rapporteur
M. TADJINE	Professeur à l'E.N.P	Rapporteur
H. DRIAS	Professeur à l'I.N.I	Examinatrice
M. S. BOUCHERIT	Professeur à l'E.N.P	Examineur
C. LARBES	Maître de conférences à l'E.N.P	Examineur
H. SAARI	Maître de conférences à l'I.S.M.A.L	Invité

*A mes Inestimables Parents (Baba & Yemma) qui ont Tout Sacrifié pour que je puisse Réussir
Avec toute mon Affection et toute ma Reconnaissance*

*A ma Très Chère Femme Nacéra qui a tant enduré avec moi et m'a soutenu jusqu'au bout
A mes Adorables Petits Anges Mohamed, Abderracuf et Yacine*

A ma Très Chère Sœur Nora & mon Très Cher Frère Ridha

A la mémoire de mes très chers Grands-Parents

A ma très chère Belle-Mère Tassaâdit

A la mémoire de mon cher Beau-Père Kaci

A mes très chères Belles-Sœurs Ounissa et Dehbia

A mes chers Beaux-Frères Omar, Mohamed, Makhlof, Nacer, Djamel, Samir et Kamel

A toute la Famille Loudini

A la Famille Laroussi de Annaba

Remerciements

Tout d'abord, je ne saurais débiter ces remerciements, sans m'adresser à mes Directeurs de thèse, en l'occurrence Messieurs **D. Boukhetala**, Maître de Conférences au Département de Génie Électrique et Directeur du Laboratoire de Commande des Processus de l'ENP, et **M. Tadjine**, Professeur au Département de Génie Électrique de l'ENP qui ont bien voulu prendre en charge la direction scientifique de mon travail. Leurs conseils judicieux et leurs encouragements m'ont beaucoup aidé pour l'aboutissement de ces travaux. Qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude.

Monsieur **M. S. Boucherit**, Professeur au Département de Génie Électrique de l'ENP me fait le grand honneur de présider le jury d'examen de ma thèse. Je l'en remercie profondément, mais, aussi pour sa disponibilité, ses conseils précieux émanant de sa longue expérience, ses encouragements et pour toute la bienveillance qu'il a eue à mon égard.

Je tiens à exprimer mes chaleureux remerciements et toute ma gratitude à Madame **H. Drias**, Professeur et Directrice Générale de l'Institut National de Formation en Informatique, pour l'intérêt qu'elle a témoigné à l'égard de mon travail et pour l'honneur qu'elle m'a fait, en acceptant de faire partie du jury d'examen.

J'adresse l'expression sincère de mes vifs remerciements à Monsieur **F. Boudjema**, Professeur au Département de Génie Électrique de l'ENP, pour son intérêt et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ces travaux.

Je suis très reconnaissant à Monsieur **C. Larbes**, Maître de Conférences au Département d'Électronique de l'ENP, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de faire partie de l'honorable jury d'examen.

Tous mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur **H. Saari**, Maître de Conférences à l'Institut des Sciences de la Mer et de l'Aménagement du Littoral, qui a bien voulu participer au jury d'examen.

Enfin, que mes amis et mes collègues trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance pour leur sympathie, leur disponibilité et leur soutien. Je tiens, particulièrement à citer Mme M. Hadj Moussa, Messieurs D. Zegour, W. Hidouci, A. Bala, N. Medjaoui, M. Mosteghanemi, A. Dib et H. Haddadou, Mme S. Aït Daoud, Mme T. Tebibel et Melle N. Bessah.

Table des Matières

Table des Matières	i
Résumés	iv
Symboles & Abréviations	v
Introduction Générale	1
I. Généralités sur la Modélisation et la Commande des Bras de Robots Manipulateurs à Liaisons Flexibles	4
I.1 Méthodes de Modélisation Mathématique des Bras de Robots Manipulateurs Flexibles	4
I.1.1 Méthode des masses concentrées	5
I.1.2 Méthode des éléments finis	5
I.1.3 Méthode des bond-graphs	6
I.1.4 Approche modale	6
I.1.5 Autres approches	6
I.1.6 Exemples illustratifs	7
I.2 Méthodes de Commande des Bras de Robots Manipulateurs Flexibles	9
I.3 Conclusion	10
II. Présentation Physique des Bras de Robots Manipulateurs à Liaisons Flexibles à Modéliser	11
II.1 Bref Historique de la Théorie des Poutres	11
II.2 Présentation de la Structure Physique du Bras de Robot Manipulateur Flexible	12
II.3 Caractérisation Cinématique du Bras de Robot Manipulateur Flexible	13
II.3.1 Bras encasté-chargé	14
II.3.2 Bras articulé-chargé	16
III. Approches de Modélisation d'un Bras de Robot Manipulateur à Liaison Flexible en Poutre d'Euler Bernoulli	17
III.1 Modélisation Mathématique en Poutre d'Euler-Bernoulli	17
III.1.1 Modèle 1 : Poutre d'Euler-Bernoulli encastée-chargée avec amortissements interne de Kelvin-Voigt et externe de l'air	17
III.1.1.1 Etablissement et résolution de l'équation du mouvement	17
III.1.1.2 Elaboration du modèle dynamique	23
III.1.1.3 Simulation de la commande en boucle ouverte	28

III.1.2	Modèle 2 : Poutre d'Euler-Bernoulli articulée-chargée avec amortissements interne de Kelvin-Voigt et externe de l'air	29
III.1.2.1	<i>Simulation de la commande en boucle ouverte</i>	33
III.2	Conclusion.....	34
IV.	Approches de Modélisation d'un Bras de Robot Manipulateur à Liaison Flexible en Poutre de Timoshenko	35
IV.1	Modélisation Mathématique en Poutre de Timoshenko.....	35
IV.1.1	Modèle 1 : Poutre de Timoshenko encastree-chargée avec amortissements interne de Kelvin-Voigt et externe de l'air	35
IV.1.1.1	<i>Etablissement et résolution de l'équation du mouvement</i>	35
IV.1.1.2	<i>Elaboration du modèle dynamique</i>	43
IV.1.1.3	<i>Simulation de la commande en boucle ouverte</i>	44
IV.1.2	Modèle 2 : Poutre de Timoshenko articulée-chargée avec amortissements interne de Kelvin-Voigt et externe de l'air	45
IV.1.2.1	<i>Simulation de la commande en boucle ouverte</i>	48
IV.2	Conclusion.....	49
V.	Logique Floue/Commande Floue & Algorithmes Génétiques	50
V.1	Logique Floue - Commande Floue	50
V.1.1	Introduction.....	50
V.1.2	Logique floue : Principes de base et définitions.....	51
V.1.2.1	<i>Sous-ensembles flous et terminologie</i>	51
V.1.2.2	<i>Opérations sur les sous-ensembles flous</i>	54
V.1.2.3	<i>Logique floue et raisonnement approximatif</i>	56
V.1.3	Commande floue.....	58
V.1.3.1	<i>Description générale d'un contrôleur flou</i>	59
V.2	Algorithmes Génétiques.....	65
V.2.1	Introduction.....	65
V.2.2	Fondements, définitions et principes de base.....	67
V.2.2.1	<i>La représentation chromosomique – Codage des données</i>	67
V.2.2.2	<i>Génération de la population initiale</i>	68
V.2.2.3	<i>La fonction d'évaluation</i>	68
V.2.2.4	<i>Elitisme</i>	69
V.2.2.5	<i>Les opérateurs génétiques</i>	69
V.3	Conclusion	74
VI.	Application de Contrôleurs Intelligents à la Commande du Bras de Robot Manipulateur à Liaison Flexible	75
VI.1	Conception et Application d'un Contrôleur Flou Type Mamdani à la Commande du Bras de Robot Flexible	75

VI.1.1	Description du schéma de commande floue typique.....	75
VI.1.2	Algorithme de commande floue	76
VI.1.2.1	<i>Loi de commande</i>	76
VI.1.2.2	<i>Implémentation</i>	77
VI.1.3	Application du contrôleur flou type Mamdani à la commande en position du bras de robot manipulateur flexible	77
VI.1.3.1	<i>Hypothèses pour la conception du contrôleur flou adopté</i>	78
VI.1.3.2	<i>Fonctions d'appartenance</i>	78
VI.1.3.3	<i>Table de décision</i>	79
VI.1.3.4	<i>Méthode d'inférence</i>	79
VI.1.3.5	<i>Méthode de défuzzification</i>	79
VI.1.3.6	<i>Résultats de la simulation de la commande en position du bras de robot manipulateur flexible par le contrôleur flou adopté</i>	80
VI.2	Conception et Application d'un Contrôleur Flou Type Mamdani Optimisé par Algorithmes Génétiques à la Commande du Bras de Robot Flexible	80
VI.2.1	Hypothèses et contraintes de conception	81
VI.2.2	Génération des règles de décision (Table de décision).....	81
VI.2.2.1	<i>Principe de la méthode</i>	81
VI.2.2.2	<i>Paramètre d'espacement</i>	82
VI.2.3	Génération des fonctions d'appartenance.....	86
VI.2.3.1	<i>Définition des fonctions d'appartenance</i>	86
VI.2.3.2	<i>Paramètre d'espacement</i>	87
VI.2.3.3	<i>Paramètre de forme</i>	88
VI.2.4	Codage des paramètres (gènes)	90
VI.2.5	Fonction d'évaluation (fitness)	92
VI.2.6	Résultats de l'optimisation du contrôleur flou par algorithmes génétiques et de son application à la commande du bras manipulateur flexible.....	93
VI.2.6.1	<i>Résultats de l'optimisation du contrôleur flou par algorithmes génétiques</i>	93
VI.2.6.2	<i>Résultats de simulation de l'application du contrôleur flou optimisé par algorithmes génétiques à la commande du bras manipulateur flexible</i>	96
VI.3	Conclusion.....	100
	Conclusion Générale	101
	Références Bibliographiques	103
	Annexe A	121
	Annexe B	126
	Annexe C	133
	Annexe D	134

ملخص - Résumé - Abstract

ملخص – تتعلق الأعمال المقدمة في هذه الأطروحة، أساساً، باقتراح بعض المقاربات لنمذجة رياضية دقيقة و كاملة لذراع روبوت مستوي الحركة ذي وصلة مرنة تتركز على نظريات روافد اولير- برنولي و تيموشينكو مع أخذ بعين الاعتبار التأثيرات التخامدية المتمثلة في التخامدين اللزج الإلاستيكي البنيوي الداخلي (تخامد كلفين-فويغت) واللزج الخارجي للهواء. يتم التحصل على النماذج الديناميكية المطورة بإشراك صياغة لاغرانج و طريقة الأنماط المفترضة. تم تطبيق خطتين للتحكم الذكي في هذا النظام المعقد : متحكم غامض صنف مامداني، ثم يتم تحسين هذا المتحكم بواسطة الخوارزميات الوراثية. تبين محاكاة عددية إجابات النظام المتحكم فيه للهياكل التحكمية المقترحة و التي سنناقشها من خلال الأدعاءات المنجزة.

الكلمات الدليّة: روبوت مرن - نمذجة - نظرية روافد اولير- برنولي - نظرية روافد تيموشينكو- تحكم غامض - الخوارزميات الوراثية.

Résumé – Les travaux présentés dans cette thèse portent, essentiellement, sur la proposition de quelques approches de modélisation mathématique fine et complète d'un bras de robot planaire à liaison flexible basées sur les théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko avec prise en compte des effets d'amortissement structural viscoélastique interne (amortissement de Kelvin-Voigt) et visqueux externe de l'air. Les modèles dynamiques développés sont établis par l'association du formalisme énergétique lagrangien et la méthode des modes supposés. Deux schémas de commande intelligente ont été appliqués à ce système complexe : un contrôleur flou de type Mamdani, puis, ce même contrôleur est optimisé par algorithmes génétiques. Une simulation numérique montre les réponses du système commandé aux structures de commande proposées que nous discutons à travers les performances réalisées.

Mots clés : Robot flexible – Modélisation – Théorie des poutres d'Euler-Bernoulli – Théorie des poutres de Timoshenko –Commande floue – Algorithmes génétiques

Abstract – The work presented in this thesis deals, essentially, with the proposition of some fine and comprehensive mathematical modelling approaches of a planar flexible link robot arm based on the Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories with taking into account the effects of the internal structural viscoelastic damping (Kelvin-Voigt damping) and the external viscous air damping. The developed dynamic models are established by the association of the Lagrangian energetic formalism and the assumed modes method. Two control schemes have been applied to this complex system: a Mamdani type fuzzy controller, then, this controller is optimized by genetic algorithms. A digital simulation illustrates the responses of the controlled system to the proposed control structures which we discuss through the realized performances.

Key words : Flexible robot – Modelling – Euler-Bernoulli beam theory – Timoshenko beam theory – Fuzzy control – Genetic algorithms.

Symboles & Abréviations

SYMBOLES LATINS

A	:	Aire de la section droite de la liaison du bras de robot
A_D	:	Coefficient de l'amortissement externe visqueux de l'air
B	:	Matrice masse ou d'inertie
dm	:	Masse d'un élément infinitésimal de la poutre
dx	:	Longueur d'un élément infinitésimal de la poutre
D	:	Energie dissipative
e	:	Erreur
Δe	:	Variation de l'erreur
E	:	Module d'élasticité de Young
$E(Pf)$:	Partie entière du paramètre de forme des fonctions d'appartenance
F	:	Vecteur des forces généralisées
$F(Pf)$:	Partie fractionnaire du paramètre de forme des fonctions d'appartenance
G	:	Module de cisaillement
G_e	:	Gain du contrôleur flou relatif à l'erreur
$G_{\Delta e}$:	Gain du contrôleur flou relatif à la variation de l'erreur
$G_{\Delta u}$:	Gain du contrôleur flou relatif à la variation de la commande
H	:	Matrice d'amortissement visqueux
I	:	Moment d'inertie de la liaison du bras de robot
J_h	:	Inertie totale de l'ensemble moyeu ("hub") + rotor de l'actionneur
J_p	:	Inertie nominale de la charge
k	:	Facteur de correction du cisaillement
K	:	Matrice de raideur ou de rigidité
K_D	:	Coefficient d'amortissement structurel interne de Kelvin-Voigt
ℓ	:	Longueur de la liaison du bras de robot
L	:	Lagrangien
M	:	Moment fléchissant
M_p	:	Masse nominale de la charge
n	:	Nombre de modes vibratoires
N	:	Matrice des effets de Coriolis et centrifuges
Pf	:	Paramètre de forme
PfM	:	Paramètre de forme de la fonction d'appartenance du milieu
PfE	:	Paramètre de forme de la fonction d'appartenance de l'extrémité
PfI	:	Paramètre de forme des fonctions d'appartenance intermédiaires entre le milieu et l'extrémité
Ps	:	Paramètre d'espacement

PsF	:	Paramètre d'espacement des fonctions d'appartenance
PsG	:	Paramètre d'espacement des coordonnées sur la grille de Park
q	:	Vecteur des coordonnées généralisées
r	:	Vecteur entre l'origine (base du bras) et un point de la liaison en flexion
t	:	Temps
T	:	Energie cinétique
T_h	:	Energie cinétique du moyeu ("hub")
T_ℓ	:	Energie cinétique de la liaison du bras de robot
T_p	:	Energie cinétique de la charge
u	:	Commande
Δu	:	Variation de la commande
U	:	Energie potentielle
V	:	Effort tranchant
$w(x,t)$:	Déflexion de la liaison du bras de robot
$W(x)$:	Fonction propre de forme modale ou fonction admissible
x	:	Position (abscisse) le long de la liaison du bras de robot
X_0	:	Axe des abscisses du repère inertiel de référence
X_a	:	Axe des abscisses du repère de référence tournant en rotation avec la poutre articulée
X_e	:	Axe des abscisses du repère de référence tournant en rotation avec la poutre encadrée
Y_0	:	Axe des ordonnées du repère inertiel de référence
Y_a	:	Axe des ordonnées du repère de référence tournant en rotation avec la poutre articulée
Y_e	:	Axe des ordonnées du repère de référence tournant en rotation avec la poutre encadrée

SYMBOLES GRECS

$\alpha(x,t)$:	Position angulaire d'un point de la liaison en flexion (variable de sortie du système à commander)
β_i	:	$i^{\text{ème}}$ solution de l'équation caractéristique fréquentielle
$\chi(t)$:	Position angulaire de l'articulation tangente à la base de la liaison pour le cas du bras articulé
$\delta(t)$:	Coordonnée généralisée modale ou amplitude modale temporelle ou variable flexible
$\gamma(x,t)$:	Pente de la courbe de flexion
λ	:	Valeur propre
$\theta(t)$:	Variable rigide de rotation de la liaison du bras de robot (mode rigide)
ρ	:	Densité massique linéaire uniforme de la liaison du bras de robot
$\sigma(x,t)$:	Angle de cisaillement
τ	:	Couple moteur entraînant en rotation le bras de robot
ω_n (ω)	:	Pulsation naturelle non amortie

ABREVIATIONS

AG	:	Algorithme Génétique
AGs	:	Algorithmes Génétiques
CF	:	Contrôleur Flou
CFs	:	Contrôleurs Flous
C-I	:	Conditions Initiales
C-L	:	Conditions aux Limites
E-B	:	Euler-Bernoulli
EDO	:	Equation Différentielle Ordinaire
EDP	:	Equation aux Dérivées Partielles
FA	:	Fonction d'Appartenance
FAs	:	Fonctions d'Appartenance
P-T	:	Poutre de Timoshenko
SEF	:	Sous-Ensemble Flou
SEFs	:	Sous-Ensembles Flous

Introduction Générale

Depuis les temps les plus reculés, l'homme a toujours eu l'ambition de transcender sa faiblesse physique tel l'adage "Donnez-moi un levier je soulèverai le monde" en essayant de reproduire par des dispositifs artificiels des actions humaines ou animales. Des statues articulées ont vu le jour sous les cieux des civilisations Egyptienne, Grecque et Romaine. Les romains furent les ancêtres des jeux de marionnettes, des jouets mécaniques, des automates et des robots.

Le terme robot provenant de la langue tchèque et signifiant "travail forcé", fut introduit, sous son acception moderne, par Karel KAPEK vers 1921.

Le concept de robot industriel fut breveté en 1954 par G. C. Devol (BREVET US No. 2988237). Ce brevet décrit la réalisation d'un bras mécanique asservi capable d'effectuer des tâches de caractère industriel. Le premier modèle du genre fut mis en oeuvre en 1961 par Unimation Inc. aux Etats-Unis.

D'après la définition donnée par l'Association Française de Normalisation (AFNOR) faisant suite à celle donnée pour la première fois aux Etats-Unis en 1979 par le "Robot Institute of America", un robot est un : "Manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent, à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables programmés pour l'exécution d'une variété de tâches. Il a souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet. Son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances. Ces machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modification permanente du matériel" [SCI 96, LOU 97, KHA 99].

Les robots conventionnels à liaisons rigides sont largement utilisés dans diverses industries. Leur capacité de charge est de l'ordre de cinq à dix pourcent de leur propre poids. Cette restriction est due à des exigences de rigidité. D'autres inconvénients peuvent être mis à l'actif de ces lourds robots tels que la haute consommation d'énergie motrice et la relativement faible rapidité de vitesse d'exécution des tâches. Tous ces problèmes ont poussé les concepteurs du domaine à envisager des structures robotiques plus légères à membrures plus souples. Dès lors, les bras de robots manipulateurs flexibles ont de plus en plus suscité un fervent intérêt de la part de la communauté scientifique et industrielle dans le domaine de la robotique avec des applications allant de la micro-chirurgie jusqu'à l'industrie aérospatiale [BEN 02, BEN 04, DWI 06]. En effet, de telles structures robotiques à segments souples conçus à base de matériaux légers offrent de multiples avantages par rapport à leurs prédécesseurs rigides tels que :

- Réduction de la puissance consommée : un robot flexible, ayant une inertie plus réduite, nécessite moins d'énergie pour produire les mêmes accélérations tout en manipulant la même charge qu'un robot rigide équivalent.
- Utilisation de petits actionneurs moins encombrants, moins coûteux et consommant moins d'énergie
- Haute manoeuvrabilité dans les tâches à effectuer.
- Rapport élevé entre charge manipulée et masse propre du robot flexible

- Les opérations industrielles effectuées sont plus sûres : en effet dans le cas d'une collision, la flexibilité des membrures d'un robot souple permet de réduire les dommages causés au robot et à l'environnement.
- Opérations plus rapides : de grandes accélérations peuvent être obtenues en utilisant les robots manipulateurs flexibles. La rapidité des opérations est nécessaire dans plusieurs applications modernes des robots, par exemple les tests des puces et des contacts dans les circuits imprimés en raison de nombre d'opérations requises.
- Réduction du coût de transport des robots et spécifiquement ceux spatiaux : les robots destinés à la construction et à la maintenance d'une station spatiale devront être transportés et mis en orbite.

La modélisation de tels robots manipulateurs en vue de leur commande s'avère, en contre partie, un défi formidable pour les chercheurs du domaine au vu des difficultés engendrées par le caractère dynamique complexe non linéaire à paramètres distribués des modèles à établir. On est aussi confronté aux problèmes de modélisation dus à la variation sensible de la dynamique en fonction des charges transportées et de la configuration du robot, à la présence de plusieurs modes vibratoires peu amortis, à l'interaction entre dynamiques rigide et flexible et aux couplages forts complexes entre les mouvements pour les robots à plusieurs degrés de liberté.

Pour ce qui est de la commande, un des problèmes clefs inhérents à de tels processus est celui de la non-collocalisation de l'actionneur et du capteur maillons capitaux de tout schéma d'asservissement. De plus, la suppression des vibrations résiduelles lors des mouvements à dynamique rapide constitue une tâche des plus contraignantes à mettre à l'actif de la complexité des problèmes de commande à résoudre [FRA 91, DWI 06].

Les travaux présentés dans cette thèse ont comme objectif principal la proposition de nouvelles approches de modélisation mathématique fine et complète des bras de robots manipulateurs à liaisons flexibles en vue de leur commande. Ces approches sont essentiellement basées sur les théories, les plus en vogue, des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko dans le domaine de l'élasticité et des vibrations des structures [MEI 97, TIM 74]. Les phénomènes complexes d'amortissements viscoélastique structural interne (amortissement de Kelvin-Voigt) et externe de l'environnement d'évolution (air) [BAN 91, BAN 96], très souvent négligés, sont pris en compte ainsi que les effets d'interaction structure-charge souvent ignorés. Les modèles dynamiques développés sont établis en associant le formalisme énergétique Lagrangien avec la méthode des modes supposés [MEI 97]. A noter que la logique dans laquelle s'inscrivent ces approches allie finesse, complétude mais aussi un soucis de nécessité d'obtention de modèles assez simples pour garantir des aptitudes à d'éventuelles commandes en temps réelle. Différents tests, par simulation numérique, permettront de mettre en évidence et d'examiner le comportement dynamique vibratoire, en boucle ouverte, du système robot manipulateur à liaison flexible sous différentes configurations représentant les modèles mathématiques développés.

Des schémas de commande intelligente, incluant la logique floue et les algorithmes génétiques, sont proposés pour être mis en œuvre à l'épreuve de la commande de tels systèmes robotiques complexes à paramètres distribués et à dynamique typiquement vibratoire.

Les divers travaux effectués font l'objet de six chapitres, succinctement présentés ci-après :

Le premier chapitre présente quelques généralités sur les principales méthodes de modélisation et de commande des bras de robots flexibles. Une bibliographie consistante, brassant une grande partie des travaux relatifs à ces différentes méthodes, est donnée.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons deux configurations physiques différentes des bras manipulateurs flexibles à modéliser ainsi que leur caractérisations cinématiques.

Le troisième chapitre traite de la modélisation dans le cadre de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Deux modèles dynamiques, incluant les effets d'amortissement de Kelvin-Voigt et de l'air, sont développés. Le premier concerne le cas bras encasté-chargé et le deuxième celui d'un bras articulé-chargé. Les résultats de simulation du comportement en boucle ouverte des deux systèmes modélisés sont présentés et discutés.

La même démarche que celle du chapitre trois fera l'objet du quatrième chapitre, mais, en utilisant la théorie des poutres de Timoshenko. Une étude par simulation analogue est aussi réalisée et ses résultats présentés et discutés également.

Dans le cinquième chapitre, les notions de base de sous-ensembles flous et de logique floue ainsi qu'un ensemble de méthodologies concernant la commande floue seront passées en revue. Nous exposerons, également, les principes de base des algorithmes génétiques, en explicitant les notions essentielles inspirées de la théorie de l'évolution qui interviennent dans ces algorithmes d'optimisation stochastique.

Le sixième chapitre est consacré à la proposition et la synthèse de deux schémas de commande intelligente incluant la logique floue et les algorithmes génétiques.

Les détails de la conception d'un premier contrôleur flou classique, de type Mamdani, sont présentés. Ce contrôleur est, ensuite, mis en œuvre pour la commande en position du bras de robot flexible. Les résultats de cette application sont montrés et commentés.

Ce même contrôleur, souffrant de subjectivité dans sa conception est, ensuite, optimisé, au niveau de plusieurs de ses composantes (paramètres) de base, par une métaheuristique évolutive à savoir la méthode des algorithmes génétiques. Les détails de cette nouvelle conception mettant, notamment, en évidence deux propositions d'extension et d'amélioration de la méthode de Park [PAR 95] sont exposés.

Divers tests sont effectués pour exhiber les capacités de ce deuxième schéma de commande intelligente. Les performances réalisées sont analysées à travers les résultats obtenus par simulation numérique.

Enfin, une conclusion générale couronnant les travaux réalisés et présentés dans le cadre de cette thèse de Doctorat d'État est donnée. Elle inclura, aussi, divers axes de perspectives envisagées.

CHAPITRE I

Généralités sur la Modélisation et la Commande des Bras de Robots Manipulateurs Flexibles

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous passerons en revue quelques généralités sur les bras manipulateurs de robots flexibles résumant la recherche bibliographique réalisée. Nous commencerons par la présentation de différentes techniques de modélisation de tels systèmes, puis, nous aborderons, succinctement, différentes approches de leur commande.

I.1 METHODES DE MODELISATION MATHEMATIQUE DES BRAS DE ROBOTS MANIPULATEURS FLEXIBLES

La modélisation est une étape essentielle pour la conception, l'identification et la commande d'un système en général et les bras robotiques en particulier. Pour ce qui est de la modélisation d'un bras robotique à liaisons flexible, il est illusoire de rechercher un modèle parfait qui, même s'il existerait, nécessiterait un nombre assez important de paramètres ne pouvant être exploités en commande. C'est pourquoi, certains d'entre eux sont négligés afin de ramener le modèle à un système linéaire simplifié et exploitable.

Avant de pouvoir parler de modélisation, il est important de comprendre que notre bras est perçu comme étant une poutre ou une barre; afin de pouvoir faire l'étude du système dans un environnement précis.

Mais, le choix entre une poutre et une barre relève de la connaissance de la flexibilité locale ou globale. Un mode flexible est dit local, lorsque les déflexions sont observées uniquement en un nombre de points de la liaison. Tandis que dans le mode flexible global, la déflexion est observée tout au long de la liaison.

Les deux choix donnent des résultats quasi identiques à basses fréquences, après simulation. Mais, le plus adapté est celui des poutres, qui permet de garantir qu'aucun mode flexible, global ou local, n'a été écarté du modèle. Dans cette catégorie de choix, deux grandes approches se distinguent, celle d'Euler–Bernoulli [MEI 97] et celle de Timoshenko [TIM 74].

Généralement, les méthodes de modélisation des robots flexibles sont une combinaison des méthodes de modélisation des robots rigides et des méthodes d'analyse des structures flexibles. Toutes ces méthodes de modélisation utilisent un premier jeu de coordonnées relatives à la description rigide de la structure. Ce sont des mouvements supposés connus et, en général de grandes amplitudes (structures robotiques spatiales). Le deuxième type de mouvements est constitué de petits déplacements élastiques en général de faibles amplitudes (structures robotiques industrielles) [MIT 92, LOU 97, BEN 02, BEN 04a, DWI 06].

Du point de vue structurel, le classement général des robots flexibles peut être établi comme suit :

- liaisons rigides et articulations flexibles
- liaisons flexibles et articulations rigides
- liaisons et articulations flexibles.

Remarque: Dans la littérature, nous avons rencontré les trois qualificatifs (mots) “flexible”, “souple” et “élastique” qui sont étymologiquement équivalents pour notre application. Cependant, le plus fréquemment utilisé est “flexible”.

Au niveau méthodologique, on distingue deux grandes approches différentes :

- ◆ La première concerne les systèmes linéaires et est basée sur le principe de superposition. En superposant les déformations élastiques connues, au mouvement en corps rigides, on obtient le mouvement final qui est donc un modèle découplé.
- ◆ La deuxième tient compte, directement, du couplage entre les mouvements en corps rigides et les déformations, ce qui ne fait pas, obligatoirement, aboutir à un système linéaire.

Nous présentons, ci-après, d'autres méthodes ne relevant pas des deux classes précédentes.

I.1.1 Méthode des Masses Concentrées [REN 80, VUK 82]

La modélisation par la méthode des masses concentrées est très utile pour les systèmes dans lesquelles une grande partie de la masse est effectivement concentrée à certains emplacements. Dans le cas d'un bras robotique, ses liaisons étant considérées comme des poutres, il est possible de concentrer la masse de la poutre en un nombre fini, restreint de points appelés nœuds. Une simplification importante est introduite car les forces d'inertie n'existent qu'en ces points.

Dans ce cas, il est suffisant d'exprimer les déplacements et les accélérations aux nœuds de la structure. Le nombre de composantes du déplacement nécessaire pour décrire complètement le champ de forces d'inertie est appelé *nombre de degrés de liberté dynamiques* du système.

I.1.2 Méthode des Éléments Finis [SUN 83, GER 84, NAG 90, GE 98a, CHU 02]

La première étape, dans cette méthode de modélisation, est la discrétisation ; c'est-à-dire qu'on divise la structure en un nombre fini de morceaux élémentaires de forme géométrique simple, appelés “éléments finis”.

Une fois ce maillage réalisé, on se donne, à l'intérieur de chaque élément, un champ de déplacement approché, relié aux déplacements aux nœuds par des fonctions d'interpolation.

Les avantages de la procédure résident dans le fait que:

- un nombre arbitraire de nœuds peut être introduit,
- les calculs sont grandement simplifiés, en choisissant des fonctions d'interpolation identiques pour tous les éléments,
- les équations dynamiques du système sont fortement découplées, car le déplacement d'un nœud n'affecte que les nœuds voisins.

La méthode des éléments finis [ZIE 89] est, de loin, la méthode la plus puissante pour la résolution des problèmes dynamiques, en permettant d'exprimer les déplacements d'une structure quelconque, à l'aide d'un ensemble fini de coordonnées. Mais, malheureusement, celle-ci présente un sérieux inconvénient, à savoir, sa complexité d'implémentation et une utilisation fort coûteuse en temps de calcul.

I.1.3 Méthode des Bond-Graphs [MAR77, YAZ 88, SAM 90]

L'outil de modélisation bond-graph a été défini par Henry Paynter en 1961. C'est un langage de type réseau permettant de représenter graphiquement les systèmes physiques. Un bond-graph, littéralement "graphique à liens", montre explicitement les transferts énergétiques entre les différentes parties du système. La représentation graphique se fait à l'aide de demi flèches dans le sens des transferts d'énergie ou de puissance.

Cette méthode, étant aussi avantageuse que la précédente, présente tout de même les mêmes inconvénients.

I.1.4 Approche Modale [CAN 84, HAS 87, BAR 88, DEL 91b, ZHA 00, KAR 01, MAR 02, MAR 03]

L'approche la plus privilégiée est sans doute l'approche modale, qui conduit notamment à une représentation d'état du système et permet ainsi l'utilisation directe des outils classiques de l'automatique. Elle repose sur l'hypothèse que le système est peu dissipatif, ce qui est généralement vrai pour la plupart des matériaux utilisés en construction mécanique.

L'analyse modale est une approche de discrétisation des systèmes à paramètres distribués. Les déformations de la structure flexible sont décomposées en une somme finie de fonctions spatiales admissibles vérifiant des conditions aux limites de type géométrique dont les amplitudes sont des coordonnées généralisées temporelles.

De plus, la décomposition modale implique une diminution du temps de calcul nécessaire à la résolution des équations du mouvement.

Pour plus de références bibliographiques, concernant les quatre catégories d'approches relatives, ci-dessus, une large liste en est donnée dans [DWI 06].

I.1.5 Autres Approches

Dans ce qui suit, nous donnons une liste d'approches, ne relevant pas de celles passées en revue dans les paragraphes précédents, rencontrées dans la littérature :

- Analyse harmonique [IMA 81]
- Approche fréquentielle [BOO 83]
- Méthode de construction des graphes adjoints [SMI 73, TOU 84]
- Approche utilisant le principe de moindre courbure [LOS 85]
- Méthode par programmation symbolique [CET 86, CET 87]
- Méthode de la perturbation singulière [SIC 88, FRA 91]
- Approche utilisant l'algèbre de Lie [GUA 89]
- Approche utilisant le vecteur de rotation fini et les quaternions [GER 87, LOS 91]
- Modélisation par réseaux de neurones [TAL 00]
- Méthode de modélisation pseudo-rigide [DAD 01, EDW 01, KIM 04].
- Technique de modélisation par masse ponctuelle ("Point Mass Modeling Technique") [RID 06].

Bien qu'une variété d'approches de modélisation ait été citée ci-dessus, celle-ci ne permet que la représentation de vibrations sous forme d'une fonction mathématique. Afin d'aboutir à un modèle mathématique régissant tout le système, il faut appliquer l'un des deux formalismes suivants à savoir :

- ◆ Le formalisme *Lagrangien*
- ◆ Le formalisme *Hamiltonien*

Ces deux formalismes aboutissent à un système d'équations différentielles régissant le système physique dynamique modélisé moyennant une étude énergétique détaillée (énergies cinétique, potentielle, dissipative, ...). A noter qu'à travers notre recherche bibliographique, nous avons constaté que le formalisme Lagrangien est le plus souvent adopté en association avec l'une ou l'autre parmi les approches précitées.

I.1.6 Exemples Illustratifs

Dans ce qui suit, nous passerons en revue des exemples illustratifs de quelques méthodes utilisées parmi tant d'autres.

I.1.6.1 Méthode de Book [BOO 84]

En 1984, BOOK exposa un travail remarquable. Il est dédié à la modélisation des robots à liaisons flexibles ne comportant que des articulations rotoïdes avec mouvements tridimensionnels. La position d'un point est exprimée en fonction des rotations des articulations et des modes élastiques. Tenant compte des influences mutuelles entre les mouvements rigides et les déformations de flexion, cette méthode s'avère être de type dynamique couplé ce qui est très efficace pour la commande des robots manipulateurs.

I.1.6.2 Méthode de Geradin, Robert et Bernardin [GER 84]

En 1984 et en 1986, ils présentent une méthode de modélisation concernant des robots ayant uniquement des articulations rotoïdes avec mouvement en trois dimensions tout en considérant les liaisons du robot comme étant des éléments de poutres tridimensionnelles. Ils utilisent la méthode des éléments finis pour interpoler la position déformée des points intermédiaires à partir des positions déformées des nœuds. Ils aboutissent à un modèle dynamique, du formalisme de Lagrange, couplé entre les mouvements rigides et les déformations élastiques. Cette méthode aboutissant à un modèle dynamique couplé, tout comme celle de BOOK, a l'avantage de formuler l'équation de mouvement sous forme d'équations différentielles très utile pour la commande.

I.1.6.3 Méthode de Nagathan et Soni [NAG 87]

En 1987, Nagathan et Soni présentent une méthode non linéaire basée sur le formalisme de Newton - Euler et la méthode des éléments finis afin d'obtenir les équations d'un robot à liaisons flexibles. Les liaisons sont considérées comme des poutres tridimensionnelles de Timoshenko. Les équations dynamiques du système entier sont obtenues après assemblage des équations des différentes liaisons. La forme générale est la suivante :

$$M(q).\ddot{q} + C(q, \dot{q}).\dot{q} + K(q, \dot{q}, \ddot{q}) = Q(q, \dot{q}, \ddot{q})$$

avec :

M : Matrice d'inertie (symétrique),

C : Matrice des forces gyroscopiques et centrifuges,

K : Matrice de rigidité,

Q : Vecteurs des forces généralisées dues aux forces extérieures, d'accélération, de gravitation ...,

q : Vecteur des variables généralisées élastiques.

L'équation obtenue ci-dessus est résolue par une procédure itérative de résolution d'équations différentielles non linéaires.

L'avantage de cette méthode est qu'elle peut être facilement étendue à des robots en mouvement tridimensionnel avec liaisons prismatiques.

I.1.6.4 Méthode de De Luca, Lucibello et Ulivi [DEL 89b]

Deluca, Lucibello et Ulivi présentent, en 1989, une approche assez originale consistant à discrétiser l'énergie potentielle de la structure déformable du robot, pour un système de solides rigides avec des masses concentrées reliées par des ressorts.

En utilisant le formalisme de Lagrange, les équations dynamiques sont obtenues sous la forme :

$$M(q)*\ddot{q} + C(q, \dot{q})*\dot{q} + e(q) = G(q)*Q$$

avec :

$q \in R^n$: Vecteur des coordonnées généralisées.

n : Nombre de liaisons du robot.

$Q \in R^m$: Vecteur des forces généralisées extérieures appliquées au système.

m : Nombre de forces généralisées extérieures appliquées au système.

M : Matrice d'inertie (symétrique) définie positive pour chaque q .

e : Vecteur des forces de gravitation et d'élasticité.

C : Vecteur des forces gyroscopiques de Coriolis et des forces centrifuges.

G : Matrice de dimension $n \times m$ définissant la manière dont les forces généralisées, représentées par Q , agissent sur les coordonnées généralisées q .

L'inconvénient de cette méthode est qu'en augmentant la précision, la complexité de l'équation est accrue.

Notre travail se basant essentiellement sur une étude en simulation, il est opportun de rappeler les quatre principales catégories de problèmes de simulation [MIT 92, LOU 97] :

* *Problème statique*: Pour lequel on fait appel à la théorie de l'élasticité. Les forces inertielles sont calculées à partir du mouvement rigide; on calcule ensuite les déformées statiques de la structure soumise aux forces inertielles. La modélisation statique donne une idée sur la flexibilité de la structure en fonction des forces auxquelles elle est soumise, mais, elle ne donne aucune information sur le comportement dynamique réel du système.

- * *Problème aux valeurs propres du système linéarisé*: On considère le robot dans une position définie et on détermine les fréquences propres et les modes propres des oscillations de faible amplitude autour de cette position.
- * *Problème dynamique découplé*: On suppose que le mouvement du robot en corps rigides est connu et on évalue ensuite, les déformations élastiques des liaisons du robot en fonction du temps. Cette approche suppose que les mouvements rigides influencent les mouvements élastiques, mais que ces derniers n'influencent pas sur les premiers.
- * *Problème dynamique couplé*: Pour lequel un repère est associé à chaque liaison du robot. Le vecteur de variables généralisées comprend, à la fois, les termes décrivant le mouvement rigide du repère associé et les termes décrivant les déformations élastiques de la liaison considérée par rapport à ce repère [BOO 84]. La description des déformations élastiques est présentée comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions de forme, dites aussi fonctions d'interpolation. A cette fin, peuvent être appliquées principalement: l'*approche modale* adoptée dans le cadre de notre travail ou la méthode des *éléments finis* [ZIE 89].

I.2 METHODES DE COMMANDE DES BRAS DE ROBOTS MANIPULATEURS FLEXIBLES

Les problèmes de commande des robots manipulateurs flexibles peuvent être classés selon quatre objectifs principaux dans un ordre de difficulté croissante [BEN 04a]:

- ◆ Régulation en position de l'extrémité manipulatrice
- ◆ Mouvement de l'extrémité manipulatrice de point de repos à point de repos ("rest to rest") en un temps fixé
- ◆ Poursuite de trajectoire dans l'espace articulaire (poursuite d'une trajectoire angulaire désirée)
- ◆ Poursuite de trajectoire dans l'espace opérationnel (poursuite de trajectoire de l'extrémité manipulatrice).

Pour réaliser ces différents objectifs, plusieurs techniques relevant du domaine de la commande des systèmes ont été utilisés et adaptées aux robots flexibles. Nous présentons, ci-après, les références rencontrées, dans la littérature spécialisée, tout au long des années de notre travail de thèse :

- **Linéarisation entrée/sortie par retour d'état statique** [SIN 86, DEL 88a, DEL 88b, DEL 89, DEL 91a, CHE 91]
- **Régulation proportionnelle-dérivée (PD)** [SCH 85, WAN 89, DEL 93a, LAV 93, BER 98]
- **Commande adaptative** [YUH 87, SAS 88, SAS 89, DEL 93b, YAN 95, YAN 97a, BAI 98]
- **Redéfinition de la sortie** [POT 91, WAN 91, WAN 92, DAM 95, DAM 96a, DAM 96b, TAL 99, YAN 99, CHR 00, YAN 00]
- **Perturbations singulières** [SIC 88, AOU 93, SUB 03]
- **Commande par modes de glissement** [CHE 89, QIA 92, CHE 95, CHO 95, GOK 98, MOA 98, CAO 00, XU 00, ZHA 04]
- **Inversion stable dans le domaine fréquentiel** [BAY 87a, BAY 87b, BAY 88a, BAY 88b, SER 89]
- **Inversion stable dans le domaine temporel** [BAY 89, KWO 94, ZHA 98, BEN 00a, BEN 01]

- **Commande par méthodes basées sur la théorie de Lyapunov** [YON 89, TSO 03]
- **Schémas algébriques** [AOU 97, BEN 00b]
- **Placement de pôles** [BOO 83, CHA 87, GEN 95, GEN 97]
- **Planification de trajectoires optimales** [CHA 95, YAN 97b, MOH 98, BEN 02b, BEN 04b]
- **Commande optimale** [TRU 79, SCH 85, LEE 88, LEE 90c, MOR 98]
- **Commande robuste** [SIN 85, BAN 95, GHA 95, TRA 95, YAZ 97, DAA 98, RYU 99, SUT 99, CHA 06, KAR 06]
- **Façonnement de l'entrée de commande ("Input Shaping")** [SIN 90, HIL 91, MEC 94, CHA 95, ZUO 95, JAL 01, RHI 01, MOH 02, ROM 02, MOH 04, MOH 05, SHA 05, ZAI 06]
- **Linéarisation entrée-état par retour d'état dynamique** [DEL 01a, DEL 01b]
- **Approche par ondes mécaniques** [MON 97, OCO 98, OCO 07]
- **Commande floue** [ARC 93, LIN 93, LEE 94, LIU 94, MOU 94, MER 95, MOU 95, YOO 96, LEE 98, TRA 98, KUB 99, SID 99, VUK 99, HUA 00, SID 00, SID 01, TOK 01, TRA 01, LIN 02, LI 03, GRE 05, SHI 05, SHI 06]
- **Commande neuronale** [YES 94, SUN 96, ARC 97, GE 97, TAL 97, GUT 98, SON 98, TAL 98, ISO 99, WED 00, LIC 01, DEN 02, MAE 02, YUA 03, TIA 04]
- **Commande neuro-floue** [SID 01, CAS 02, DEN 02, FUC 04, WAI 04, MAT 05, TIA 05]
- **Commande floue optimisée par algorithmes génétiques** [SHI 00, ALA 06, NGU 07]
- **Commande par réseaux de neurones et algorithmes génétiques** [JAI 94, SHA 00]
- **Commande neuro-floue optimisée par algorithmes génétiques** [SID 02, HOS 04]
- **Commande par l'utilisation de matériaux piézoélectriques** [SUN 98, CHO 99, SUN 99, GE 00, KIM 01, SUN 04]
- **Commande par l'utilisation de matériaux piézocéramiques** [MAX 03]
- **Commande active de vibration** [SHA 95, MAT 05, BAN 06, BAN 07, HAS 07, JNI 07]
- **Commande référencée vision** [BAS 06, JIA 06, JIA 07]

I.3 CONCLUSION

Dans ce chapitre introductif, nous avons présenté une synthèse générale des différentes techniques de modélisation et de commande des bras de robots manipulateurs à liaisons flexibles, rencontrées dans la bibliographie étudiée.

Il en ressort que les différentes approches de modélisation sont, en général, une combinaison de celles habituellement utilisées pour les robots rigides et de techniques d'analyse de structures flexibles, telles que la méthode d'analyse modale ou celle des éléments finis; les liaisons étant modélisées, sur la base de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli ou celle des poutres de Timoshenko.

Pour ce qui est de la majorité des méthodes de commande, elles sont nécessairement conditionnées par la disponibilité de modèles complets et précis. Ceci complique la tâche de synthèse de ces méthodes et affecte la réelle prise en charge des problèmes de commande précise et robuste de tels systèmes complexes.

CHAPITRE II

Présentation Physique des Bras de Robots Manipulateurs à liaisons Flexibles à Modéliser

Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons d'abord, dans le premier paragraphe, un bref résumé historique des origines de la théorie des poutres. Le bras de robot flexible, centre d'intérêt de notre étude, sera présenté dans le deuxième paragraphe, en tant que structure physique avec ses principales composantes et caractéristiques, selon deux configurations différentes. Enfin, en prévision de l'étude énergétique conduisant à la modélisation dynamique du bras robotique, la caractérisation cinématique du mouvement de la structure flexible sera abordée dans le troisième paragraphe.

II.1 BREF HISTORIQUE DE LA THEORIE DES POUTRES

Selon [LOV 44], le premier à considérer le problème élastique des poutres "minces" fut Jacob Bernoulli (1654-1705) en 1705 où il a supposé que le moment résistant de la déflexion est le résultat de l'élongation et de la contraction des filaments de la poutre. Ses résultats reposent sur le fait que le moment fléchissant est proportionnel à la courbure après déflexion. Suivant une suggestion, faite par Daniel Bernoulli (1700-1782) en 1742, stipulant que l'équation différentielle décrivant la déflexion d'une poutre peut être obtenue en minimisant le travail dû au moment fléchissant, Euler put, en 1744, obtenir une telle équation et classifier plusieurs cas. Les détails des travaux des Bernoulli et d'Euler peuvent être trouvés dans [CAN 81].

A la différence d'Euler qui, dans sa théorie, supposa qu'une poutre consiste en une ligne de particules résistant à la flexion, Coulomb, en 1776, a été le premier à appliquer les équations d'équilibre des forces et des moments à une section finie pour obtenir une équation différentielle plus précise. Il fût aussi le premier à considérer que les poutres sont aussi résistantes à l'effet de torsion. Cependant, ses travaux n'étaient basés sur aucune théorie d'élasticité.

Une plus robuste théorie traitant de la torsion des barres prismatiques fût présentée par Saint-Venant en 1855 et en 1856. Saint-Venant supposa que l'extension et la contraction des filaments d'une poutre sont proportionnelles à leur distance normale par rapport à leur axe centroïdal. De plus, comme simplification, Saint-Venant suggéra que l'effet de remplacer des charges extrêmes distribuées par un système résultant de charge statiquement équivalent en un point relativement éloigné de la limite extrême est négligeable [SHA 85]. Ceci devint connu sous le nom de *principe de Saint-Venant de l'équivalence élastique des systèmes de charges statiquement équipollents* [LOV 44].

En 1859, Kirchhoff obtint une mesure approximative de la déformation dans un élément de poutre et put, ainsi, déterminer une expression de l'énergie potentielle dans cet élément. En variant, cette énergie, il parvint à établir des équations d'équilibre et de vibration. De plus, il montra que les équations d'une poutre mince, soumise à seulement des forces à l'extrémité, ont la même forme que celles d'un corps rigide oscillant autour d'un point fixe. Ce formalisme est connu par l'analogie cinétique de Kirchhoff [SOU 41].

Dans son ouvrage *The Theory of Sound*, publié pour la première fois en 1877, Rayleigh [RAY 45] inclut l'effet d'inertie de rotation dans les équations décrivant les vibrations transversales des poutres [HAN 99] et montra qu'à de hautes fréquences d'oscillation, de telles corrections apportées aux fréquences naturelles sont importantes.

L'effet de déformation, par cisaillement, sur les vibrations des poutres fut introduit par Timoshenko [TIM 21, TIM 22]. Comme exemple, il considéra les vibrations libres d'une poutre simplement supportée (posée) et montra que la correction due au cisaillement est quatre fois plus importante que celle due à l'inertie de rotation. De plus, il montra que les équations d'Euler-Bernoulli et celles de Rayleigh sont des cas particuliers de son résultat.

Un résumé des différents effets tenus en compte dans chacune des théories des poutres est donné dans le tableau 2.1 suivant :

Modèle de Poutre	Moment Fléchissant	Déplacement Latéral	Déformation de Cisaillement	Inertie de Rotation
Euler-Bernoulli	✓	✓	×	×
Rayleigh	✓	✓	×	✓
Cisaillement	✓	✓	✓	×
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

Tableau 2.1 Différents effets dans chacune des théories des poutres

II.2 PRESENTATION DE LA STRUCTURE PHYSIQUE DU BRAS DE ROBOT MANIPULATEUR FLEXIBLE

Considérons le bras manipulateur de robot à une seule liaison flexible montré sur la figure 2.1. Pouvant se mouvoir uniquement dans le plan horizontal (autour de l'axe Z_0), donc ayant un seul degré de liberté, il est lié à sa base par encastrement (cas du référentiel $X_e - Y_e$) ou par une liaison type rotule (cas du référentiel $X_a - Y_a$) par une articulation rigide à l'arbre d'un moteur entraîné par un couple moteur idéal et porte une charge à inertie à son extrémité.

Paramètres caractéristiques :

ℓ : Longueur du bras	M_p : Masse de la charge
E : Module d'élasticité (module de Young)	J_p : Moment d'inertie de la charge
I : Inertie de section	τ : Couple moteur.
ρ : Masse linéique (densité) du bras	
J_h : Moment d'inertie de l'ensemble articulation-moteur	

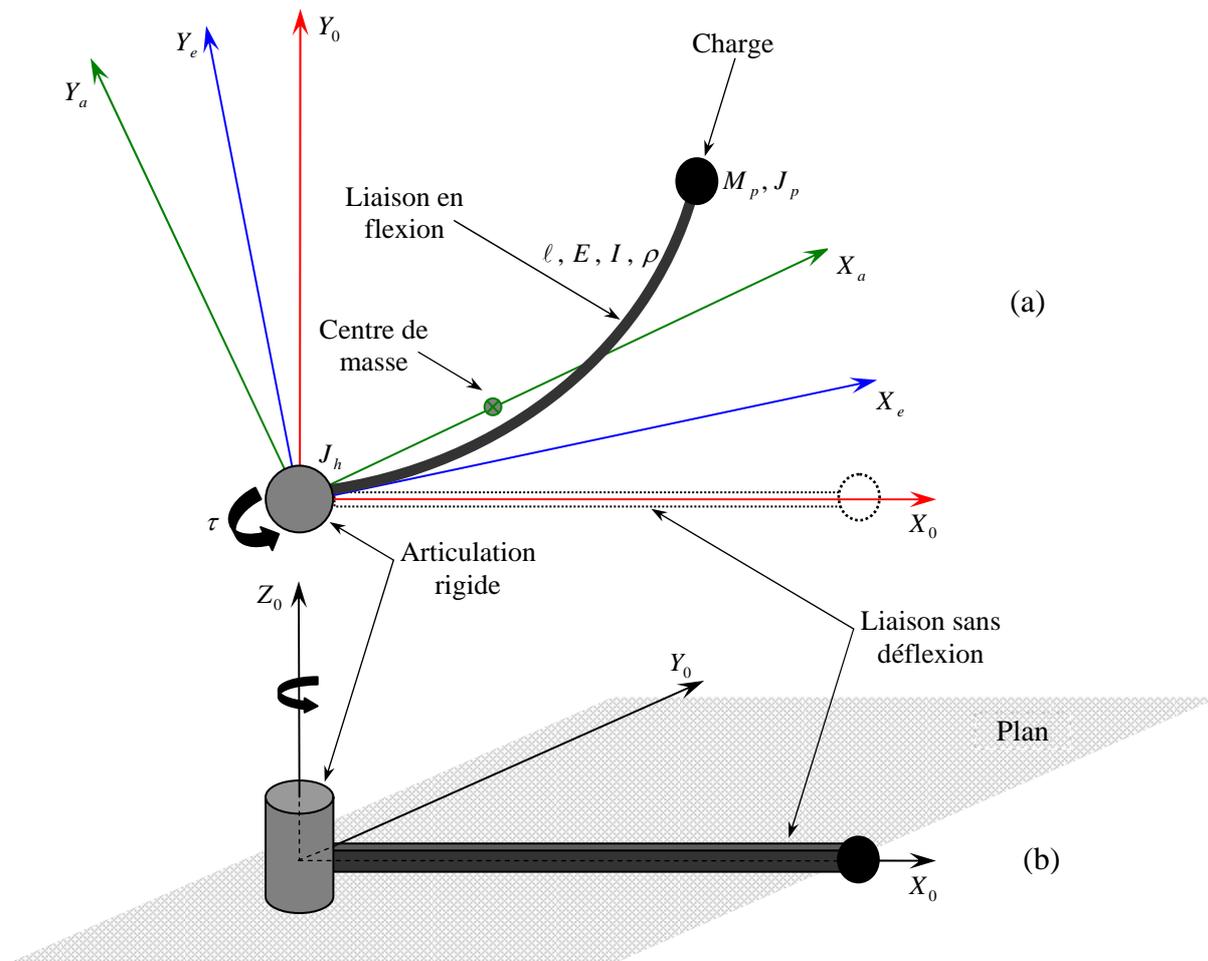


Figure 2.1 Configuration physique du bras manipulateur planaire à une liaison flexible
 (a) vue de dessus : bras en flexion (avec déflexion) - (b) vue de face : bras sans déflexion

II.3 CARACTERISATION CINEMATIQUE DU BRAS DE ROBOT MANIPULATEUR FLEXIBLE

La caractérisation cinématique du bras manipulateur de robot flexible objet de notre étude est appliquée à deux configurations différentes dépendant de la nature de l'assemblage (liaison) bras-arbre de l'actionneur commandant le mouvement de rotation du bras de robot.

Ces deux configurations générales des robots flexibles [BEL 90, FRA 91] sont :

- Bras encastré ("clamped") – chargé (figure 2.2)
- Bras articulé ("pinned")–chargé (figure 2.3)

Les deux configurations peuvent être distinguées par les effets suivants :

- Si aucun couple moteur n'est appliqué à la base du bras flexible sachant que les conditions initiales sont non nulles, le repère $X_e - Y_e$ relatif au cas encastré aura une évolution vibratoire alors que pour le cas articulé, le repère correspondant $X_a - Y_a$ restera fixe par rapport au repère inertiel de référence $X_0 - Y_0$ [BEL 90].

- Types des actionneurs à employer : à haut rapport de réduction (“high gear”) pour le cas d’encastrement et à entraînement direct (“direct drive”) pour celui d’articulation [KRI 88, SOO 96, SOO 98].

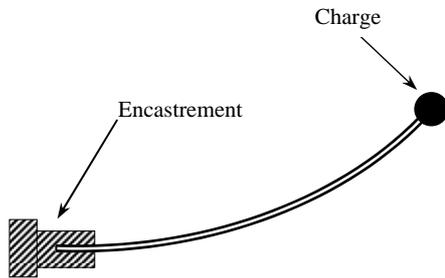


Figure 2.2 Poutre encastree-chargee

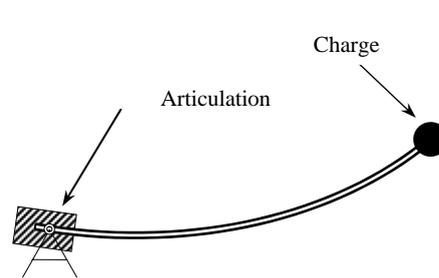


Figure 2.3 Poutre articulee-chargee

II.3.1 Bras Encastree-Charge

Le repere necessaire pour l’elaboration des equations cinematiques du bras flexible en configuration encastree-chargee est montre sur la figure 2. 4.

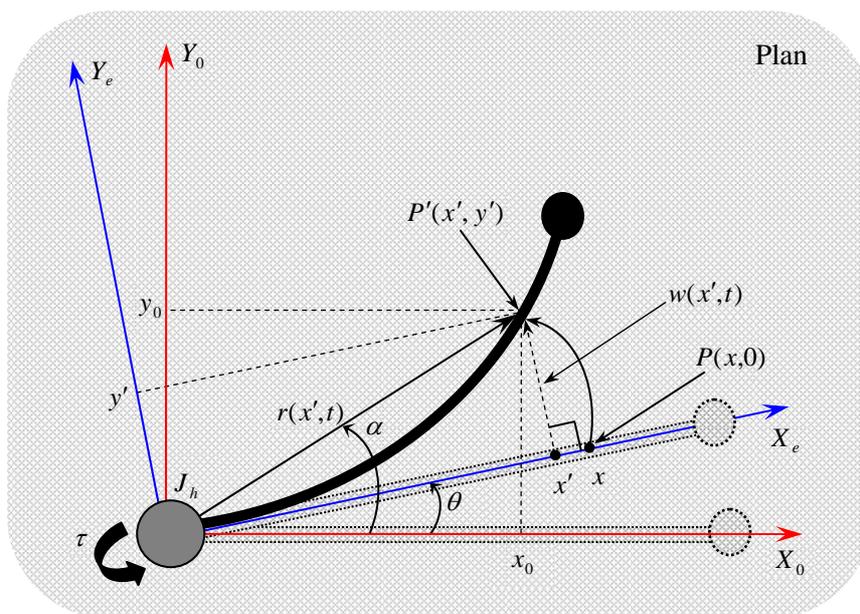


Figure 2.4 Configuration du bras manipulateur a une liaison flexible encastree-chargee

Cette figure donnant une vue de dessus de notre systeme robotique, l’axe de rotation de l’articulation est perpendiculaire au plan. La hauteur de la section de la poutre (bras ou liaison) etant plus importante que sa base (epaisseur), par consequent, les deflexions sont contraintes de ne se produire que dans le plan (robot flexible planaire). Celles dues a la gravite sont supposees negligeables.

Le repere inertiel de reference est indique par le repere $X_0 - Y_0$. Celui indique par $X_e - Y_e$ est un repere de reference tournant en rotation avec la poutre. A noter que l’axe X_e est en permanente tangence avec la base de la liaison flexible constituant le bras de robot [BEL 90].

Les differentes variables descriptives, utilisees dans la figure 2.4, ont les interpretations suivantes :

- x : coordonnée (abscisse) axiale de la liaison dans le repère $X_e - Y_e$
- x' : coordonnée (abscisse) sur l'axe X_e d'un point de la liaison en flexion correspondant au même point de la liaison non fléchie d'abscisse x
- $P(x,0)$: coordonnées d'un point de la liaison non fléchie
- $P'(x', y')$: coordonnées d'un point de la liaison fléchie
- $w(x', t)$: déformation élastique (déflexion) par rapport à l'axe X_e d'un point x' le long de la liaison
- $r(x', t)$: vecteur entre l'origine et le point en déflexion P'
- $\alpha(x', t)$: angle généré par le vecteur r dans le repère inertiel $X_0 - Y_0$
- $\theta(t)$: position angulaire fonction du temps de l'axe rotatif X_e

La déflexion $w(x', t)$ peut être écrite comme suit :

$$w(x', t) \stackrel{\Delta}{=} y' \quad (2.1)$$

La position angulaire $\alpha(x', t)$ du point P' par rapport au repère inertiel $X_0 - Y_0$ peut être donnée par :

$$\alpha(x', t) \stackrel{\Delta}{=} \theta(t) + \arctan \left[\frac{w(x', t)}{x'} \right] \quad (2.2)$$

En supposant qu'en un point x' , la déformation élastique $w(x', t)$ est petite, alors l'approximation suivante peut être considérée :

$$x' \approx x \Rightarrow y' \approx w(x, t) \quad (2.3)$$

L'application de (2.3) à (2.2) donne :

$$\alpha(x', t) \approx \theta(t) + \arctan \left[\frac{w(x, t)}{x} \right] = \alpha(x, t) \quad (2.4)$$

Les déflexions étant supposées assez petites, il peut être montré que [GHA 94]:

$$\arctan \left[\frac{w(x, t)}{x} \right] \approx \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \approx \frac{w(x, t)}{x} \quad (2.5)$$

Le remplacement de (2.5) dans (2.4) donne :

$$\alpha(x, t) = \theta(t) + \frac{w(x, t)}{x} \quad (2.6)$$

Considérons le vecteur $r(x, t)$ correspondant au point P' de la liaison en flexion. Dans le repère inertiel $X_0 - Y_0$, $r(x, t)$ a les coordonnées suivantes :

$$r(x, t) = \begin{bmatrix} x \cos(\alpha(x, t)) \\ x \sin(\alpha(x, t)) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Définissons $R(x, t)$ comme étant la longueur de l'arc généré par le point P' de la liaison en flexion :

$$R(x, t) = x\alpha(x, t) = x.\theta(t) + w(x, t) \quad (2.8)$$

Ceci constitue la position de n'importe quel point de la poutre. La position de l'extrémité finale de la poutre (de la liaison de longueur ℓ constituant le bras flexible) peut, par conséquent, s'écrire :

$$R(\ell, t) = \ell\alpha(\ell, t) = \ell.\theta(t) + w(\ell, t) \quad R(x, t) = x\alpha(x, t) = x.\theta(t) + w(x, t) \quad (2.9)$$

II.3.2 Bras Articulé-Chargé

Le repérage nécessaire pour l'élaboration des équations cinématiques du bras flexible en configuration articulé-chargé est montré sur la figure 2.5.

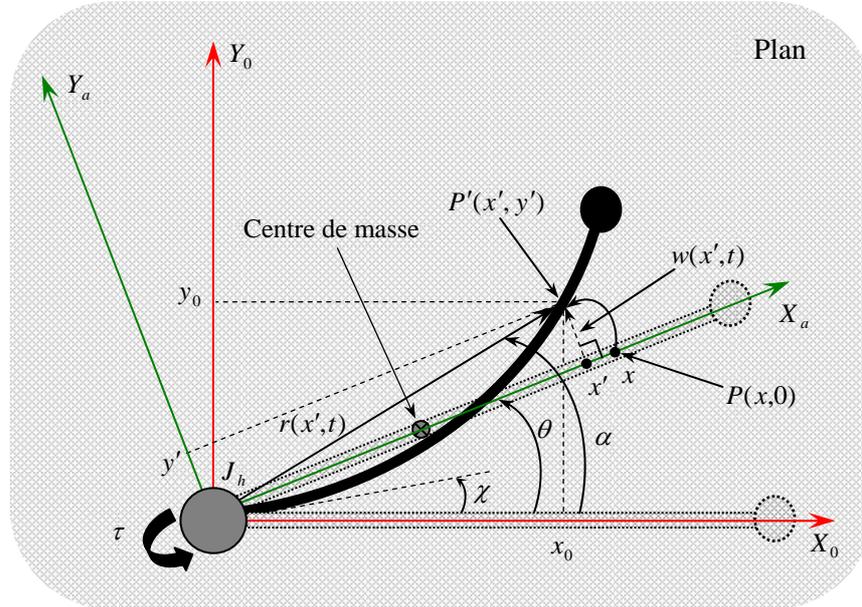


Figure 2.5 Configuration du bras manipulateur à une liaison flexible articulé-chargé

On peut constater que, pour cette autre configuration, l'axe X_a est en permanente coïncidence avec le centre de masse du bras de robot [BEL 90].

A noter aussi que les mêmes variables descriptives utilisées dans le cas précédent sont reprises sur la figure 2.5 avec les mêmes interprétations à l'exception de ces deux positions angulaires :

- $\chi(t)$: position angulaire fonction du temps de l'articulation (tangente à la base de la liaison)
- $\theta(t)$: position angulaire fonction du temps de l'axe rotatif X_a (du centre de masse).

A partir de la géométrie de la liaison dans la figure 2.5, la position angulaire de l'articulation $\chi(t)$ peut être exprimée par :

$$\chi(t) = \theta(t) + \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \arctan \left[\frac{w(x,t)}{x} \right] \right\} \quad (2.10)$$

Avec la supposition des petites déflexions, l'expression de $\chi(t)$ peut être simplifiée en utilisant (2.5) pour donner :

$$\chi(t) = \theta(t) + \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (2.11)$$

Remarque : Pour le cas encastéré-chargé les angles $\chi(t)$ et $\theta(t)$ ne font qu'un, ce qui donne :

$$\chi(t) = \theta(t) \text{ avec } \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (2.12)$$

CHAPITRE III

Approches de Modélisation Mathématique d'un Bras de Robot Manipulateur à liaison Flexible en Poutre d'Euler-Bernoulli

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le développement détaillé de modèles mathématiques du bras de robot flexible, objet de notre étude, en se basant sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Le premier modèle dynamique concerne le cas encastéré-chargé, alors que le deuxième sera développé pour le cas articulé-chargé. Le comportement en boucle ouverte des deux systèmes est illustré par différentes réponses, obtenues par simulation numérique des deux modèles dynamiques établis.

III.1 MODELISATION MATHÉMATIQUE EN POUTRE D'EULER-BERNOULLI

La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (E-B) [MEI 97] nommée, parfois, théorie classique des poutres est la théorie la plus communément utilisée des théories des poutres vu sa simplicité et vu qu'elle donne lieu à des résultats approximatifs raisonnables dans plusieurs domaines d'engineering [HAN 99].

Dans cette théorie, les phénomènes structurels d'inertie de rotation et d'effort tranchant (cisaillement) sont négligés.

III.1.1 Modèle 1 : Poutre d'Euler-Bernoulli Encastérée-Chargée avec Amortissements Interne de Kelvin-Voigt et Externe de l'Air

III.1.1.1 Etablissement et résolution de l'équation de mouvement

L'équation de mouvement du bras de robot à une liaison déformable, considérée comme une poutre d'E-B, peut être établie sur la base de l'équilibre des moments et celui des forces agissant sur un élément infinitésimal de la poutre de masse dm et de longueur dx , représenté sur la figure 3.1.

En considérant la loi "solide linéaire standard" de Zener [ZEN 48], avec la relation contrainte-déformation ("stress-strain")

$$v + C_D \frac{\partial v}{\partial t} = E\varepsilon + K_D \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.1)$$

avec :

C_D : constante de visco-élasticité du matériau de la poutre

K_D : coefficient d'amortissement de Kelvin-Voigt.

et en supposant des variations linéaires de contrainte et de déformation à travers le corps de la poutre, le moment total obtenu par intégration du moment du premier ordre de la contrainte à travers la section de la poutre est donné par [BAK 67]:

$$M(x, t) = \left(1 + C_D \frac{\partial}{\partial t}\right) M_0 = I \left(E + K_D \frac{\partial}{\partial t}\right) w_{xx}(x, t) \quad (3.2)$$

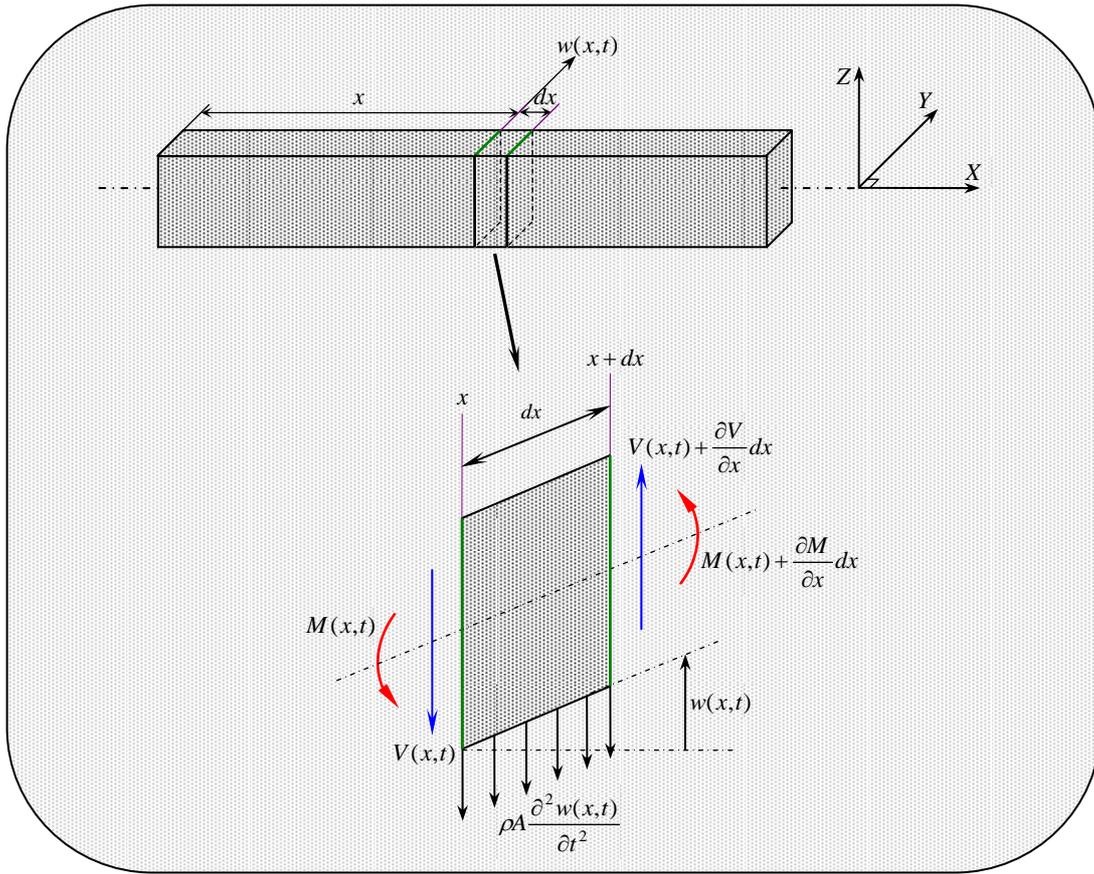


Figure 3.1 Cinématique de déformation d'un élément de poutre d'Euler-Bernoulli en flexion

Le moment interne total (flexion et amortissement visqueux structurel interne de Kelvin-Voigt) M s'écrit alors [BAN 91, BAN 96] :

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + K_D I \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \quad (3.3)$$

L'équation de mouvement du bras de robot, à une liaison déformable, peut être établie en considérant l'équilibre des moments et celui des forces, au sein d'un élément infinitésimal de poutre de masse dm et de longueur dx .

En supposant que la déformation de l'élément dx considéré est assez petite de sorte que la déformation par cisaillement soit négligeable devant $w(x,t)$ (i.e. : absence de flexion sur les cotés de l'élément dx), le bilan exprimant l'équilibre des forces agissantes est donné par :

$$\left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] - V(x,t) - A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (3.4)$$

où les termes $A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx$, $\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} dx$ représentent, respectivement, la force de résistance de l'air et la force d'inertie transversale distribuées sur l'élément de longueur dx .

La simplification de (3.4) donne lieu à la relation

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} - A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

La relation équilibre des moments agissants sur l'élément dx autour de l'axe Z s'écrit :

$$\left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] - M(x,t) + \left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] dx = 0 \quad (3.6)$$

dx étant infinitésimal, $(dx)^2$ est négligeable, ce qui donne lieu à l'expression simplifiée suivante, exprimant la relation entre la variation spatiale du moment fléchissant et la force de cisaillement :

$$V(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (3.7)$$

En remplaçant (3.3) dans (3.7), on obtient

$$V(x,t) = -EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} - K_D I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^3 \partial t} \quad (3.8)$$

Enfin, le remplacement de (3.8) dans (3.5) permet d'établir l'équation du mouvement amorti d'une poutre d'E-B:

$$K_D I \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) est l'équation aux dérivées partielles (EDP) du cinquième ordre homogène et linéaire de la poutre d'E-B avec les effets d'amortissement interne et externe [LOU 06] exprimant la déflexion $w(x,t)$.

En vue de sa résolution, cette EDP est affectée des conditions initiales et aux limites suivantes :

Conditions initiales: $w(x,0) = w_0, \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{w}_0 \quad (3.10)$

Conditions aux limites (C-L): [BEL 90]

- Extrémité encastree:

$$\begin{cases} w(0,t) = 0 & \text{(aucun mouvement " aucune déflexion")} \\ \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 & \text{(aucune vitesse)} \end{cases} \quad (3.11)$$

- Extrémité libre chargée:

$$\begin{cases} \left. EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=\ell} = -J_p \left. \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right|_{x=\ell} & \text{(équilibre des moments)} \\ \left. EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=\ell} = M_p \left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \right|_{x=\ell} & \text{(équilibre des forces de cisaillement)} \end{cases} \quad (3.12)$$

A noter que l'EDP classique d'E-B est retrouvée si les termes relatifs aux effets d'amortissement sont supprimés:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.13)$$

Pour résoudre l'EDP aux termes à dérivées mixtes (3.9), nous avons opté pour la méthode la plus utilisée dans un tel contexte de système à paramètres distribués: la *méthode des Modes Supposés* ("Assumed Modes Method") [MEI 97], qui consiste en une séparation spatio-temporelle de la variable caractéristique de l'EDP, à savoir $w(x,t)$. En effet, elle prend la forme séparée suivante, formée par le produit d'une fonction spatiale dite *fonction propre de forme modale* ou *fonction admissible* $W(x)$, devant vérifier les C-L, et d'une fonction temporelle dite *coordonnée généralisée modale* $\delta(t)$:

$$w(x, t) = W(x)\delta(t) \quad (3.14)$$

En remplaçant la forme proposée de séparation dans l'EDP (3.9), on établit:

$$K_D I \frac{d^4 W(x)}{dx^4} \frac{d\delta(t)}{dt} + EI \frac{d^4 W(x)}{dx^4} \delta(t) + \rho A W(x) \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} + A_D W(x) \frac{d\delta(t)}{dt} = 0 \quad (3.15)$$

qu'on récrit, ci-après, avec une notation plus simple :

$$K_D I W^{iv}(x) \dot{\delta}(t) + EI W^{iv}(x) \delta(t) + \rho A W(x) \ddot{\delta}(t) + A_D W(x) \dot{\delta}(t) = 0 \quad (3.16)$$

En opérant une séparation des fonctions temporelles de celles spatiales, on obtient le rapport :

$$\frac{\ddot{\delta}(t) + \frac{A_D}{\rho A} \dot{\delta}(t)}{\frac{K_D}{E} \dot{\delta}(t) + \delta(t)} = - \frac{EI W^{iv}(x)}{\rho A W(x)} \quad (3.17)$$

On peut voir que la partie gauche de cette équation ne dépend que du temps t alors que celle de droite ne dépend que de x . Puisque x et t sont indépendantes, alors les deux parties de part et d'autre de cette égalité doivent être constantes. Soit λ cette constante, on a alors :

$$\frac{\ddot{\delta}(t) + \frac{A_D}{\rho A} \dot{\delta}(t)}{\frac{K_D}{E} \dot{\delta}(t) + \delta(t)} = - \frac{EI W^{iv}(x)}{\rho A W(x)} = -\lambda \quad (3.18)$$

La solution temporelle va permettre de mettre en évidence la relation importante entre la fréquence naturelle du système non amorti ω_n ou, tout simplement, ω et la dorénavant valeur propre λ .

L'équation différentielle relative à la solution temporelle et sa résolution sont présentées dans ce qui suit.

De (3.18), on a

$$\ddot{\delta}(t) + \left(\frac{A_D}{\rho A} + \frac{\lambda K_D}{E} \right) \dot{\delta}(t) + \lambda \delta(t) = 0 \quad (3.19)$$

L'équation (3.19) a la forme générale d'une équation différentielle ordinaire du second ordre caractérisant un système linéaire élastique avec amortissement:

$$\ddot{\delta}(t) + 2\xi\omega_n \dot{\delta}(t) + \omega_n^2 \delta(t) = 0 \quad (3.20)$$

En considérant le cas sous-amorti avec les conditions initiales, $\delta(0)$ et $\dot{\delta}(0)$, sa solution est donnée par

$$\delta(t) = \kappa e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi) \quad (3.21)$$

avec $\omega_n^2 = \lambda$; $\xi = \frac{EA_D + \lambda\rho AK_D}{2\rho AE\sqrt{\lambda}}$; $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$; $\kappa = \left\{ \left[\frac{\dot{\delta}(0) + \delta(0)\xi\omega_n}{\omega_d} \right]^2 + [\delta(0)]^2 \right\}^{1/2}$;

$$\psi = \arctan \left[\frac{\dot{\delta}(0) + \delta(0)\xi\omega_n}{\omega_d \delta(0)} \right].$$

La fréquence naturelle ω_n ou, plus simplement, ω va pouvoir être déterminée suite à la résolution de l'équation différentielle spatiale du quatrième ordre suivante émanant de (3.18) :

$$W^{iv}(x) - \beta^4 W(x) = 0 \quad (3.22)$$

avec
$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\lambda\rho A}{EI}} = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho A}{EI}} \quad (3.23)$$

La solution générale de l'équation (3.22) est de la forme :

$$W(x) = S_1 e^{\beta x} + S_2 e^{-\beta x} + S_3 e^{j\beta x} + S_4 e^{-j\beta x} \quad (3.24)$$

pouvant être exprimée, de manière équivalente, par :

$$W(x) = A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x) + A_3 \sinh(\beta x) + A_4 \cosh(\beta x) \quad (3.25)$$

Pour la détermination des quatre constantes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , nous faisons appel aux C-L données précédemment dans (3.11) et (3.12). Les expressions de ces dernières doivent, au préalable, être réécrites sur la base de la forme séparée donnée par (3.14), comme suit :

- Extrémité encastree:

$$\begin{cases} W(0) = 0 \\ W'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

- Extrémité libre chargée:

Après reformulation de la relation (3.18), dans le sens d'établir la relation suivante spécifique au système non amorti (à exploiter pour les C-L à l'extrémité libre chargée)

$$\left[\begin{array}{l} \ddot{\delta}(t) + \frac{A_D}{\rho A} \dot{\delta}(t) \\ \frac{K_D}{E} \dot{\delta}(t) + \delta(t) \end{array} \right]_{\text{système non amorti}} = \frac{\ddot{\delta}(t)}{\delta(t)} = -\frac{EI}{\rho A} \frac{W^{iv}(x)}{W(x)} = -\lambda = -\omega^2 \quad (3.27)$$

nous pouvons, à présent, réécrire les deux autres C-L :

$$\begin{cases} EIW''(\ell) = J_p \omega^2 W'(\ell) \\ EIW'''(\ell) = -M_p \omega^2 W(\ell) \end{cases} \quad (3.28)$$

avec, notamment, la relation importante $\omega^2 = \frac{EI}{\rho A} \beta^4$ déduite de (3.23) à utiliser plus loin.

L'application des deux C-L de (3.26) permet d'aboutir aux égalités :

$$A_3 = -A_1, \quad A_4 = -A_2 \quad (3.29)$$

ce qui conduit à écrire $W(x)$ sous la forme:

$$W(x) = A_1 [\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)] + A_2 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] \quad (3.30)$$

Pour déterminer les deux constantes restantes, on fait appel aux deux autres C-L données en (3.28). Les détails de la procédure d'application de ces dernières C-L sont présentés dans l'annexe A.

Les résultats auxquels on aboutit sont :

$$\begin{aligned} & A_1 \{ J_p \omega^2 \beta [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] + EI \beta^2 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \} + \\ & A_2 \{ EI \beta^2 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - J_p \omega^2 \beta [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

et

$$\begin{aligned} & A_1 \{ EI \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - M_p \omega^2 [\sin(\beta \ell) - \sinh(\beta \ell)] \} + \\ & A_2 \{ EI \beta^3 [\sinh(\beta \ell) - \sin(\beta \ell)] - M_p \omega^2 [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] \} = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

ce qui permet d'établir, après utilisation de la relation $\omega^2 = \frac{EI}{\rho A} \beta^4$, les deux expressions suivantes

exprimant le coefficient A_2 en fonction du coefficient A_1 :

$$A_2 = A_1 \left\{ \frac{\frac{J_p}{\rho A \ell^3} (\beta \ell)^3 [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] + [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)]}{\frac{J_p}{\rho A \ell^3} (\beta \ell)^3 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] - [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)]} \right\} \quad (3.33)$$

$$A_2 = A_1 \left\{ \frac{[\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - \frac{M_p}{\rho A \ell} \beta \ell [\sin(\beta \ell) - \sinh(\beta \ell)]}{[\sin(\beta \ell) - \sinh(\beta \ell)] + \frac{M_p}{\rho A \ell} \beta \ell [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)]} \right\} \quad (3.34)$$

Les équations (3.31) et (3.32) peuvent être rassemblées en une seule formulation matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} J_p \omega^2 \beta [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] + & EI \beta^2 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - \\ EI \beta^2 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] & J_p \omega^2 \beta [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \\ EI \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - & EI \beta^3 [\sinh(\beta \ell) - \sin(\beta \ell)] - \\ M_p \omega^2 [\sin(\beta \ell) - \sinh(\beta \ell)] & M_p \omega^2 [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

soit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_{E_{11}} & Q_{E_{12}} \\ Q_{E_{21}} & Q_{E_{22}} \end{bmatrix}}_{Q_E(\beta \ell)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Les solutions non triviales de cette équation peuvent être obtenues en égalisant à zéro le déterminant de la matrice $Q_E(\beta \ell)$:

$$\begin{vmatrix} J_p \omega^2 \beta [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] + & EI \beta^2 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - \\ EI \beta^2 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] & J_p \omega^2 \beta [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \\ EI \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - & EI \beta^3 [\sinh(\beta \ell) - \sin(\beta \ell)] - \\ M_p \omega^2 [\sin(\beta \ell) - \sinh(\beta \ell)] & M_p \omega^2 [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] \end{vmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

L'équation (3.37) donne lieu à l'équation caractéristique fréquentielle transcendante suivante :

$$1 + \cos(\beta \ell) \cosh(\beta \ell) - \frac{M_p}{\rho A \ell} \beta \ell [\sin(\beta \ell) \cosh(\beta \ell) - \cos(\beta \ell) \sinh(\beta \ell)] - \frac{J_p}{\rho A \ell^3} (\beta \ell)^3 [\cos(\beta \ell) \sinh(\beta \ell) + \sin(\beta \ell) \cosh(\beta \ell)] + \frac{M_p J_p}{\rho^2 A^2 \ell^4} (\beta \ell)^4 [1 - \cos(\beta \ell) \cosh(\beta \ell)] = 0 \quad (3.38)$$

Si $M_p = J_p = 0$ (système encastré-libre ou non chargé), cette équation caractéristique se réduit à :

$$1 + \cos(\beta \ell) \cosh(\beta \ell) = 0 \quad (3.39)$$

Notre système étant une poutre continue, le nombre de solutions $(\beta \ell)_i$ ou $\beta_i \ell$ de l'équation (3.38) est infini et, par conséquent, le nombre de modes flexibles vibratoires l'est aussi. Les pulsations naturelles correspondantes sont données par :

$$\omega_{n_i} = \omega_i = \frac{(\beta_i \ell)^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

On peut considérer que la solution $\beta_0 \ell = 0$ correspond au mode rigide pour lequel on a évidemment $\omega_0 = 0$.

La solution temporelle donnant l'expression des coordonnées généralisées modales donnée par l'équation (3.21) s'exprime alors par :

$$\delta_i(t) = \kappa_i e^{-\xi_i \omega_{n_i} t} \cos(\omega_{d_i} t - \psi_i) \quad (3.41)$$

En optant pour la relation donnée par l'équation (3.34), on peut écrire :

$$A_{2_i} = A_{1_i} \left\{ \frac{\left[\cos(\beta_i \ell) + \cosh(\beta_i \ell) \right] - \frac{M_p}{\rho A \ell} \beta_i \ell [\sin(\beta_i \ell) - \sinh(\beta_i \ell)]}{\left[\sin(\beta_i \ell) - \sinh(\beta_i \ell) \right] + \frac{M_p}{\rho A \ell} \beta_i \ell [\cos(\beta_i \ell) - \cosh(\beta_i \ell)]} \right\} = A_{1_i} \sigma_i \quad (3.42)$$

ce qui conduit à la forme suivante des fonctions de forme modales:

$$W_i(x) = A_{1_i} [\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x)] + A_{1_i} \sigma_i [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] \quad (3.43)$$

qu'on se propose de réécrire sous la forme :

$$W_i(x) = \Omega_i \{ \sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x) + \sigma_i [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] \} \quad (3.44)$$

L'expression de la solution de l'équation générale du mouvement (3.9) est, par conséquent, simplement la combinaison linéaire de (3.41) et (3.44) :

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \delta_i(t) \quad (3.45)$$

Les coefficients Ω_i sont des constantes de normalisation choisies telles que $\int_0^{\ell} [W_i(x)]^2 dx = \ell$ [THE 95].

Elles sont, par conséquent, données par :

$$\Omega_i = \left\{ \frac{\ell}{\int_0^{\ell} \{ \sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x) + \sigma_i [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] \}^2 dx} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

Le déplacement transversal de la liaison flexible obtenu, comme solution à l'équation (3.9) du mouvement amorti d'une poutre d'E-B est finalement exprimée par :

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \Omega_i e^{-\xi_i \omega_{n_i} t} \cos(\omega_{d_i} t - \psi_i) [(\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x)) + \sigma_i (\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x))] \quad (3.47)$$

III.1.1.2 Elaboration du modèle dynamique

Pour l'élaboration du modèle mathématique dynamique du système robotique considéré, le formalisme Lagrangien est adopté. Cette approche énergétique conduit à l'obtention d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires descriptives du comportement dynamique.

Un système dynamique complètement localisé par n coordonnées généralisées q_i doit satisfaire n équations différentielles de la forme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.48)$$

où L est le Lagrangien défini par

$$L = T - U \quad (3.49)$$

T représente l'énergie cinétique du système modélisé, U son énergie potentielle et D la fonction de dissipation de Rayleigh permettant la prise en compte des effets dissipatifs d'énergie. F_i est la force externe généralisée agissant sur la coordonnée généralisée correspondante q_i .

Théoriquement, il y a une infinité d'équations différentielles ordinaires, mais pour des considérations pratiques telles que le fait que l'énergie motrice soit finie (non illimitée) et le fait que les actionneurs et les capteurs soient à bande passante fréquentielle limitée, il est plus raisonnable de se limiter à un nombre fini n [CAN 84, KAN 85, Qi 92, FRA 91].

L'énergie cinétique totale du robot manipulateur chargé est la somme des contributions des énergies cinétiques respectives de l'encastrement (assemblage base du bras robotique-actionneur) T_h , de la liaison flexible T_ℓ et de la charge T_p :

$$T = T_h + T_\ell + T_p \quad (3.50)$$

avec

$$T_h = \frac{1}{2} J_h \dot{\theta}^2(t) \quad (3.51)$$

$$T_\ell = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A [x^2 + w^2(x,t)] \dot{\theta}^2(t) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A 2x \dot{\theta}(t) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx \quad (3.52)$$

$$T_p = \frac{1}{2} M_p \left\{ [x^2 + w^2(x,t)]_{x=\ell} \dot{\theta}^2(t) + \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]_{x=\ell}^2 + 2\dot{\theta}(t)x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=\ell} \right\} + \frac{1}{2} J_p \left\{ \dot{\theta}(t) + \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} \right]_{x=\ell} \right\}^2 \quad (3.53)$$

Notre bras de robot étant planaire, c'est à dire, ne pouvant se mouvoir que dans le plan horizontal, les forces de gravité tendant à le fléchir dans le sens vertical sont, par conséquent, ignorées. L'énergie potentielle ne traduit, ainsi, que l'énergie élastique de flexion horizontale emmagasinée dans la poutre :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (3.54)$$

L'énergie dissipée due aux effets amortissants est exprimée par :

$$D = \frac{1}{2} \int_0^\ell A_D \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell K_D I \left[\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right]^2 dx \quad (3.55)$$

Se basant sur plusieurs travaux théoriques et expérimentaux, notamment ceux de [HAS 87], qui ont prouvé que les deux premiers modes vibratoires sont suffisants pour établir un modèle à dimension finie précis, nous avons retenus les deux premiers modes vibratoires dominants. $w(x,t)$ peut, alors, être exprimée par:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^2 W_i(x) \delta_i(t) = W_1(x) \delta_1(t) + W_2(x) \delta_2(t) \quad (3.56)$$

Considérant cette troncation, nous définissons

$$R_i = \int_0^\ell x W_i(x) dx ; S_i = \int_0^\ell W_i^2(x) dx ; Z_i = \int_0^\ell W_i''^2(x) dx \quad (3.57)$$

et nous adoptons, par propriété d'orthogonalité des fonctions modales de forme [TIM 74], les égalités suivantes:

$$\int_0^{\ell} W_1(x)W_2(x)dx = \int_0^{\ell} W_1''(x)W_2''(x)dx = 0 \quad (3.58)$$

En tenant compte des équations (3.50-3.55), nous établissons les expressions des différentes énergies comme suit (les détails des calculs sont développés dans l'annexe B) :

$$\begin{aligned} T_\ell &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^{\ell} [x^2 + w^2(x,t)] \dot{\theta}^2(t) dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^{\ell} \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \rho A \int_0^{\ell} x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \dot{\theta}(t) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{1}{3} \ell^3 \right) \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \rho A [S_1 \delta_1^2(t) + S_2 \delta_2^2(t)] \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \rho A [S_1 \dot{\delta}_1^2(t) + S_2 \dot{\delta}_2^2(t)] + \rho A [R_1 \dot{\delta}_1(t) + R_2 \dot{\delta}_2(t)] \dot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} (M_p \ell^2 + J_p) \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} M_p W_1^2(\ell) \delta_1^2(t) \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} M_p W_2^2(\ell) \delta_2^2(t) \dot{\theta}^2(t) \\ &\quad + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) + \left[\frac{1}{2} M_p W_1^2(\ell) + \frac{1}{2} J_p W_1'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_1^2(t) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} M_p W_2^2(\ell) + \frac{1}{2} J_p W_2'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_2^2(t) + [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) \\ &\quad + [M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + [M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell)] \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} T &= T_h + T_\ell + T_p \\ &= \frac{1}{2} \left[J_h + \frac{1}{3} \rho A \ell^3 + M_p \ell^2 + J_p \right] \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} [M_p W_1^2(\ell) + \rho A S_1] \delta_1^2(t) \dot{\theta}^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} [M_p W_2^2(\ell) + \rho A S_2] \delta_2^2(t) \dot{\theta}^2(t) + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} \rho A S_1 + \frac{1}{2} M_p W_1^2(\ell) + \frac{1}{2} J_p W_1'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_1^2(t) + \left[\frac{1}{2} \rho A S_2 + \frac{1}{2} M_p W_2^2(\ell) + \frac{1}{2} J_p W_2'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_2^2(t) \\ &\quad + [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) + [M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell) + \rho A R_1] \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) \\ &\quad + [M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell) + \rho A R_2] \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$U = \frac{1}{2} EI [\delta_1^2(t) Z_1 + \delta_2^2(t) Z_2] \quad (3.62)$$

$$D = \frac{1}{2} (A_D S_1 + K_D I Z_1) \dot{\delta}_1^2(t) + \frac{1}{2} (A_D S_2 + K_D I Z_2) \dot{\delta}_2^2(t) \quad (3.63)$$

Le Lagrangien est alors exprimé par :

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} \left[J_h + \frac{1}{3} \rho A \ell^3 + M_p \ell^2 + J_p \right] \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} [M_p W_1^2(\ell) + \rho A S_1] \delta_1^2(t) \dot{\theta}^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} [M_p W_2^2(\ell) + \rho A S_2] \delta_2^2(t) \dot{\theta}^2(t) + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} \rho A S_1 + \frac{1}{2} M_p W_1^2(\ell) + \frac{1}{2} J_p W_1'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_1^2(t) + \left[\frac{1}{2} \rho A S_2 + \frac{1}{2} M_p W_2^2(\ell) + \frac{1}{2} J_p W_2'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_2^2(t) \\ &\quad + [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) + [M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell) + \rho A R_1] \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) \\ &\quad + [M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell) + \rho A R_2] \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) - \frac{1}{2} E I Z_1 \delta_1^2(t) - \frac{1}{2} E I Z_2 \delta_2^2(t) \end{aligned} \quad (3.64)$$

L'application de (3.48) donne lieu aux résultats suivants (les détails des calculs sont développés dans l'annexe B):

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \\
 & \left\{ \begin{aligned} & J_h + \frac{1}{3} \rho A \ell^3 + M_p \ell^2 + J_p + [M_p W_1^2(\ell) + \rho A S_1] \delta_1^2(t) + \dots \\ & \dots [M_p W_2^2(\ell) + \rho A S_2] \delta_2^2(t) + 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \end{aligned} \right\} \ddot{\theta}(t) + \\
 & \left[\underbrace{\rho A R_1 + M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell)}_{B_{12}} \right] \ddot{\delta}_1(t) + \left[\underbrace{\rho A R_2 + M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell)}_{B_{13}} \right] \ddot{\delta}_2(t) + \\
 & 2[\rho A S_1 + M_p W_1^2(\ell)] \delta_1(t) \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + 2[\rho A S_2 + M_p W_2^2(\ell)] \delta_2(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) + \\
 & 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) + 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) \\
 & = B_{11} \ddot{\theta}(t) + B_{12} \ddot{\delta}_1(t) + B_{13} \ddot{\delta}_2(t) + N_1(q(t), \dot{q}(t))
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_1} = \\
 & \left[\underbrace{\rho A R_1 + M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell)}_{B_{21}} \right] \ddot{\theta}(t) + \left[\underbrace{\rho A S_1 + M_p W_1^2(\ell) + J_p W_1'(\ell)^2}_{B_{22}} \right] \ddot{\delta}_1(t) + \\
 & \left[\underbrace{M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)}_{B_{23}} \right] \ddot{\delta}_2(t) + \left(\underbrace{A_D S_1 + K_D I Z_1}_{H_{22}} \right) \dot{\delta}_1(t) - \\
 & [\rho A S_1 + M_p W_1^2(\ell)] \delta_1(t) \dot{\theta}^2(t) - M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) + \underbrace{E I Z_1}_{K_{22}} \delta_1(t) \\
 & = B_{21} \ddot{\theta}(t) + B_{22} \ddot{\delta}_1(t) + B_{23} \ddot{\delta}_2(t) + H_{22} \dot{\delta}_1(t) + N_2(q(t), \dot{q}(t)) + K_{22} \delta_1(t)
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_2} = \\
 & \left[\underbrace{\rho A R_2 + M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell)}_{B_{31}} \right] \ddot{\theta}(t) + \left[\underbrace{M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)}_{B_{32}} \right] \ddot{\delta}_1(t) + \\
 & \left[\underbrace{\rho A S_2 + M_p W_2^2(\ell) + J_p W_2'(\ell)^2}_{B_{33}} \right] \ddot{\delta}_2(t) + \left(\underbrace{A_D S_2 + K_D I Z_2}_{H_{33}} \right) \dot{\delta}_2(t) - \\
 & [\rho A S_2 + M_p W_2^2(\ell)] \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) - M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \dot{\theta}^2(t) + \underbrace{E I Z_2}_{K_{33}} \delta_2(t) \\
 & = B_{31} \ddot{\theta}(t) + B_{32} \ddot{\delta}_1(t) + B_{33} \ddot{\delta}_2(t) + N_3(q(t), \dot{q}(t)) + H_{33} \dot{\delta}_2(t) + K_{33} \delta_2(t)
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Le modèle dynamique non linéaire du bras de robot flexible étudié est alors donné, sous forme compacte matricielle, par :

$$\begin{bmatrix} B_{11}(q) & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\delta}_1(t) \\ \ddot{\delta}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\delta}_1(t) \\ \dot{\delta}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(q, \dot{q}) \\ N_2(q, \dot{q}) \\ N_3(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

et sous forme simplifiée par :

$$B(q)\ddot{q} + H\dot{q} + N(q, \dot{q}) + Kq(t) = F(t) \quad (3.69)$$

où

- B est dite *matrice masse ou d'inertie* formée des éléments :

$$\begin{aligned} B_{11}(q) &= J_h + \frac{1}{3}\rho A \ell^3 + M_p \ell^2 + J_p + [\rho A S_1 + M_p W_1^2(\ell)]\delta_1^2(t) + \\ &\quad [\rho A S_2 + M_p W_2^2(\ell)]\delta_2^2(t) + 2M_p W_1(\ell)W_2(\ell)\delta_1(t)\delta_2(t) \\ B_{12} &= B_{21} = \rho A R_1 + M_p \ell W_1' + J_p W_1' \\ B_{13} &= B_{31} = \rho A R_2 + M_p \ell W_2' + J_p W_2' \\ B_{23} &= B_{32} = M_p W_1' W_2' + J_p W_1' W_2' \\ B_{22} &= \rho A S_1 + M_p W_1^2 + J_p W_1'^2 \\ B_{33} &= \rho A S_2 + M_p W_2^2 + J_p W_2'^2 \end{aligned} \quad (3.70)$$

- H est dite *matrice d'amortissement visqueux* formée des éléments :

$$H_{22} = A_D S_1 + K_D IZ_1, \quad H_{33} = A_D S_2 + K_D IZ_2 \quad (3.71)$$

- N est dite *matrice des effets de Coriolis et centrifuges* formée des éléments :

$$\begin{aligned} N_1(q, \dot{q}) &= 2 \left\{ \begin{aligned} &(\rho A S_1 + M_p W_1^2)\delta_1(t)\dot{\delta}_1(t) + (\rho A S_2 + M_p W_2^2)\delta_2(t)\dot{\delta}_2(t) + \dots \\ &\dots M_p W_1' W_2' [\dot{\delta}_1(t)\delta_2(t) + \delta_1(t)\dot{\delta}_2(t)] \end{aligned} \right\} \dot{\theta}(t) \\ N_2(q, \dot{q}) &= -[(\rho A S_1 + M_p W_1^2)\delta_1(t) + M_p W_1' W_2' \delta_2(t)]\dot{\theta}^2(t) \\ N_3(q, \dot{q}) &= -[(\rho A S_2 + M_p W_2^2)\delta_2(t) + M_p W_1' W_2' \delta_1(t)]\dot{\theta}^2(t) \end{aligned} \quad (3.72)$$

- K est dite *matrice de raideur ou de rigidité* formée des éléments :

$$K_{22} = EIZ_1, \quad K_{33} = EIZ_2 \quad (3.73)$$

- $q(t)$ est le vecteur des variables généralisées donné par:

$$q(t) = [\theta(t) \quad \delta_1(t) \quad \delta_2(t)]^T \quad (3.74)$$

avec :

$\theta(t)$: variable rigide de rotation (mode rigide)

$\delta_1(t)$: variable flexible relative au premier mode vibratoire (amplitude modale temporelle)

$\delta_2(t)$: variable flexible relative au deuxième mode vibratoire (amplitude modale temporelle)

$F(t)$ est le vecteur des forces généralisées agissant sur les coordonnées généralisées correspondantes,

donné par :

$$F(t) = [\tau \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.75)$$

avec τ : couple moteur au niveau de l'encastrement entraînant en rotation le bras de robot.

III.1.1.3 Simulation de la commande en boucle ouverte

A. Paramètres physiques du système étudié

Les paramètres physiques du bras de robot à une liaison flexible encastéré-chargé étudié sont donnés dans l'annexe C. La liaison constituant ce bras de robot est sous forme d'une poutre en aluminium type 6061-T06 encastérée ("clamped") par un moyeu ("hub") rigide sur l'arbre d'un moteur électrique considéré, dans ce cas de montage, comme étant à haut rapport de réduction ("high gear") (Cf. § II.3).

B. Fonctions de forme modales

Les quatre premières fonctions admissibles (fonctions modales de forme) correspondant au système encastéré-libre et encastéré-chargé sont respectivement illustrées par les figures suivantes :

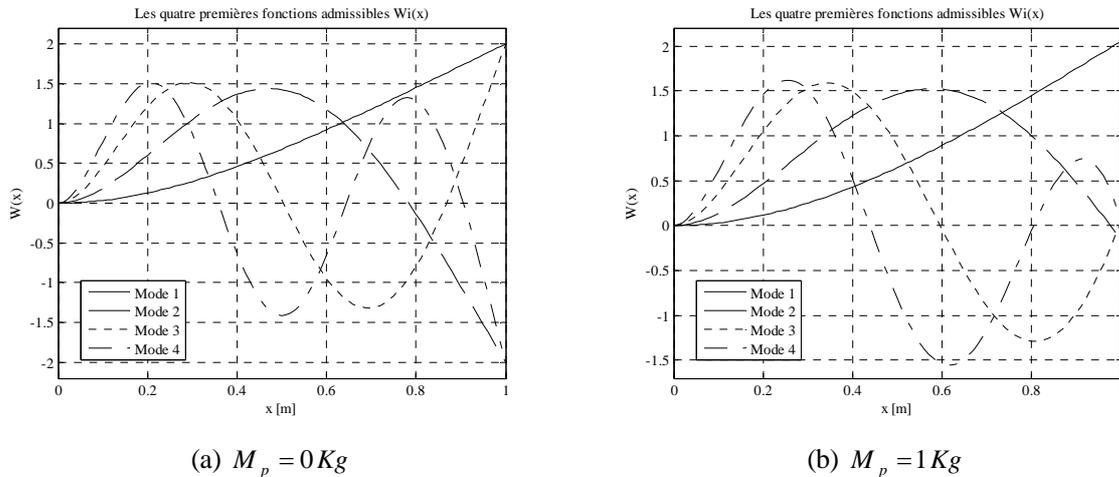


Figure 3.2 Fonctions admissibles du modèle : (a) encastéré-libre ; (b) encastéré-chargé

C. Réponses impulsionnelles

Pour analyser le comportement dynamique de notre système robotique, les réponses impulsionnelles suivantes, représentant les déflexions de l'extrémité manipulatrice, ont été obtenues pour les deux cas encastéré-libre (figure 3.3.a) et encastéré-chargé (figure 3.3.b):

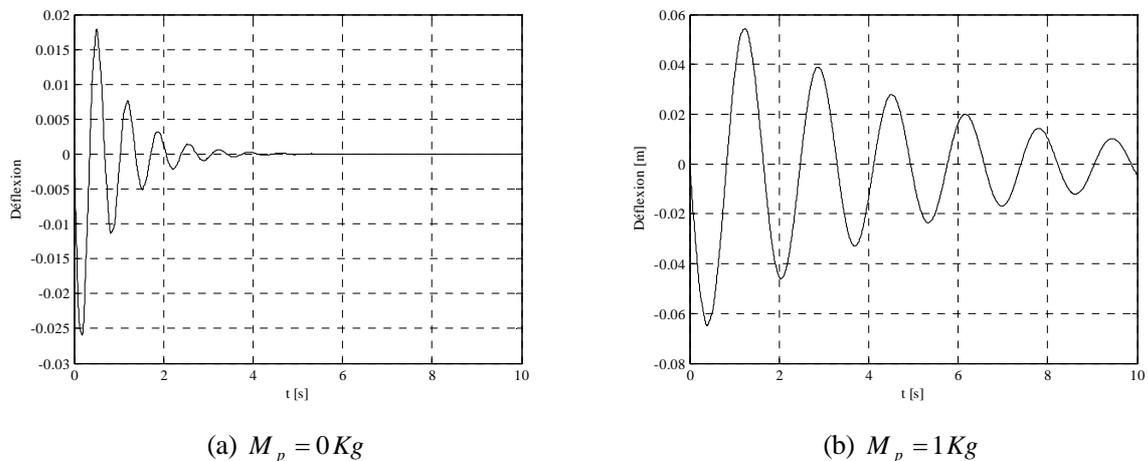


Figure 3.3 Réponses impulsionnelles en déflexion de l'extrémité du bras flexible encastéré:
(a) libre ; (b) chargé

La figure 3.3.a représentant l'évolution de la déflexion de l'extrémité de la liaison libre, met clairement en évidence le comportement vibratoire amorti du bras manipulateur à structure flexible suite à l'excitation impulsionnelle qu'il a subie.

Le bras de robot étant, cette fois-ci, chargé à son extrémité libre et soumis à la même excitation à sa base, exhibe aussi une déflexion vibratoire illustrée par la figure 3.3.b. Cependant, nous constatons que les oscillations évoluent avec une fréquence nettement moins importante (mouvement moins amorti) et des amplitudes plus grandes et moins amorties. Ceci démontre l'importance de l'effet de la charge sur la dynamique du bras de robot flexible et prouve la nécessité de sa prise en compte dans la modélisation mathématique du système.

III.1.2 Modèle 2 : Poutre d'Euler-Bernoulli Articulée-Chargée avec Amortissements Interne de Kelvin-Voigt et Externe de l'Air

Dans ce cas, le montage à la base est du type articulé ("pinned")-chargé. La particularité physique de cette deuxième configuration est la valeur du moment d'inertie de l'articulation bras flexible-arbre moteur J_h qui est plus faible que celle relative à l'encastrement bras-arbre moteur de la première configuration.

L'EDP générale (3.9) établie pour le modèle 1 est reconduite pour le modèle 2 à développer dans cette partie, mais les C-L spécifiques au présent cas sont différentes au niveau de l'extrémité articulée. Elles sont données par [BEL 90, LOU 07a, LOU 07b]:

- Extrémité articulée :

$$\begin{cases} w(0,t) = 0 \\ EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = J_h \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=0} \end{cases} \quad (\text{équilibre des moments à la base}) \quad (3.76)$$

- Extrémité libre chargée :

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=\ell} = -J_p \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=\ell} \\ EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=\ell} = M_p \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=\ell} \end{cases} \quad (3.77)$$

Réécrites sur la base des relations (3.14) et (3.27), elles deviennent :

- Extrémité articulée :

$$\begin{cases} W(0) = 0 \\ EI W''(0) = -J_h \omega^2 W'(0) \end{cases} \quad (3.78)$$

- Extrémité libre chargée :

$$\begin{cases} EI W''(\ell) = J_p \omega^2 W'(\ell) \\ EI W'''(\ell) = -M_p \omega^2 W(\ell) \end{cases} \quad (3.79)$$

L'application de la première des C-L (3.78) donne lieu à la relation :

$$A_4 = -A_2 \quad (3.80)$$

ce qui conduit à écrire $W(x)$ sous la forme :

$$W(x) = A_1 \sin(\beta x) + A_2 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] + A_3 \sinh(\beta x) \quad (3.81)$$

En appliquant, la deuxième des C-L (3.78), on établit la relation :

$$A_2 = \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 (A_1 + A_3) \quad (3.82)$$

ce qui permet d'écrire $W(x)$ sous la forme :

$$W(x) = A_1 \left\{ \sin(\beta x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] \right\} + A_3 \left\{ \sinh(\beta x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] \right\} \quad (3.83)$$

Pour déterminer les deux constantes restantes, on fait appel aux deux autres C-L données en (3.79). Les résultats auxquels on aboutit sont :

$$\begin{aligned} A_1 \left\{ \left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 - 1 \right) \sin(\beta \ell) - \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cos(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cosh(\beta \ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sinh(\beta \ell) \right\} - \\ A_3 \left\{ \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cos(\beta \ell) - \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sin(\beta \ell) - \left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 + 1 \right) \sinh(\beta \ell) + \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cosh(\beta \ell) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

et

$$\begin{aligned} A_1 \left\{ \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cos(\beta \ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 + \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sin(\beta \ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta \ell) \right\} - \\ A_3 \left\{ -\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta \ell) + \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cosh(\beta \ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 - \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sinh(\beta \ell) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

ce qui donne les deux relations équivalentes suivantes exprimant le coefficient A_3 en fonction du coefficient A_1 :

$$A_3 = A_1 \frac{\left\{ \left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 - 1 \right) \sin(\beta \ell) - \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cos(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cosh(\beta \ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sinh(\beta \ell) \right\}}{\left\{ \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cos(\beta \ell) - \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sin(\beta \ell) - \left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 + 1 \right) \sinh(\beta \ell) + \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cosh(\beta \ell) \right\}} \quad (3.86)$$

$$A_3 = A_1 \frac{\left\{ \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cos(\beta \ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 + \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sin(\beta \ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta \ell) \right\}}{\left\{ -\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta \ell) + \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cosh(\beta \ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 - \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sinh(\beta \ell) \right\}} \quad (3.87)$$

Les détails des calculs de l'application de la deuxième des conditions aux limites (3.78) et des deux conditions aux limites (3.79) sont présentés dans l'annexe A.

Les équations (3.84) et (3.85) peuvent être rassemblées en une seule formulation matricielle comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_{A_{11}} & Q_{A_{12}} \\ Q_{A_{21}} & Q_{A_{22}} \end{bmatrix}}_{Q_A(\beta \ell)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

avec

$$Q_{A_{11}} = \left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 - 1 \right) \sin(\beta\ell) - \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cos(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cosh(\beta\ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sinh(\beta\ell) \quad (3.89)$$

$$Q_{A_{12}} = -\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cos(\beta\ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sin(\beta\ell) + \left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 + 1 \right) \sinh(\beta\ell) - \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cosh(\beta\ell) \quad (3.90)$$

$$Q_{A_{21}} = \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cos(\beta\ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 + \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sin(\beta\ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta\ell) \quad (3.91)$$

$$Q_{A_{22}} = \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta\ell) - \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cosh(\beta\ell) - \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 - \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sinh(\beta\ell) \quad (3.92)$$

Les solutions non triviales de l'équation (3.88) peuvent être obtenues, en égalisant à zéro le déterminant de la matrice $Q_A(\beta\ell)$:

$$\begin{vmatrix} Q_{A_{11}} & Q_{A_{12}} \\ Q_{A_{21}} & Q_{A_{22}} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.93)$$

L'équation (3.93) donne lieu à l'équation caractéristique fréquentielle transcendante suivante :

$$\begin{aligned} & \cos(\beta\ell) \sinh(\beta\ell) - \sin(\beta\ell) \cosh(\beta\ell) - \frac{2M_p}{\rho A \ell} \beta \ell \sin(\beta\ell) \sinh(\beta\ell) - \\ & \frac{M_p (J_h + J_p)}{\rho^2 A^2 \ell^4} (\beta\ell)^4 [\cos(\beta\ell) \sinh(\beta\ell) - \sin(\beta\ell) \cosh(\beta\ell)] - \\ & \frac{2J_p}{\rho A \ell^3} (\beta\ell)^3 \cos(\beta\ell) \cosh(\beta\ell) - \frac{J_h}{\rho A \ell^3} (\beta\ell)^3 [1 + \cos(\beta\ell) \cosh(\beta\ell)] + \\ & \frac{J_h J_p}{\rho^2 A^2 \ell^6} (\beta\ell)^6 [\cos(\beta\ell) \sinh(\beta\ell) + \sin(\beta\ell) \cosh(\beta\ell)] - \frac{J_h M_p J_p}{\rho^3 A^3 \ell^7} (\beta\ell)^7 [1 - \cos(\beta\ell) \cosh(\beta\ell)] = 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

Si J_h est négligé, l'équation caractéristique s'écrit :

$$\begin{aligned} & \cos(\beta\ell) \sinh(\beta\ell) - \sin(\beta\ell) \cosh(\beta\ell) - \frac{2M_p}{\rho A \ell} \beta \ell \sin(\beta\ell) \sinh(\beta\ell) \\ & - \frac{M_p J_p}{\rho^2 A^2 \ell^4} (\beta\ell)^4 [\cos(\beta\ell) \sinh(\beta\ell) - \sin(\beta\ell) \cosh(\beta\ell)] - \frac{2J_p}{\rho A \ell^3} (\beta\ell)^3 \cos(\beta\ell) \cosh(\beta\ell) = 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

Si $M_p = J_p = 0$ (système articulé-libre ou non chargé), l'équation caractéristique se réduit à :

$$\cos(\beta\ell) \sinh(\beta\ell) - \sin(\beta\ell) \cosh(\beta\ell) = 0 \quad (3.96)$$

Le nombre de solutions $(\beta\ell)_i$ ou $\beta_i \ell$ de l'équation (3.94) étant infini et celui des modes flexibles vibratoires l'étant, par conséquent, aussi, on peut écrire, en optant pour la relation donnée par l'équation (3.85), que :

$$A_{3_i} = A_{1_i} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta_i^4 - 1 \right) \cos(\beta_i \ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 + \frac{M_p}{\rho A} \beta_i \right) \sin(\beta_i \ell) - \\ \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta_i^4 \cosh(\beta_i \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 \sinh(\beta_i \ell) \\ - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta_i^4 \cos(\beta_i \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 \sin(\beta_i \ell) + \\ \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta_i^4 - 1 \right) \cosh(\beta_i \ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 - \frac{M_p}{\rho A} \beta_i \right) \sinh(\beta_i \ell) \end{array} \right\} \quad (3.97)$$

$$= A_{1_i} \sigma_i$$

ce qui conduit à la forme suivante des fonctions de forme modales:

$$W_i(x) = A_{1_i} \left\langle \begin{array}{l} \sin(\beta_i x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] + \\ \sigma_i \left\{ \sinh(\beta_i x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] \right\} \end{array} \right\rangle \quad (3.98)$$

qu'on réécrit, plus simplement, sous la forme :

$$W_i(x) = \Omega_i \left\langle \begin{array}{l} \sin(\beta_i x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] + \\ \sigma_i \left\{ \sinh(\beta_i x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] \right\} \end{array} \right\rangle \quad (3.99)$$

Les coefficients Ω_i , choisis aussi tels que $\int_0^\ell [W_i(x)]^2 dx = \ell$ [THE 95], sont donnés par :

$$\Omega_i = \left\langle \begin{array}{l} \ell \\ \int_0^\ell \left\langle \begin{array}{l} \sin(\beta_i \ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 [\cos(\beta_i \ell) - \cosh(\beta_i \ell)] + \\ \sigma_i \left\{ \sinh(\beta_i \ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 [\cos(\beta_i \ell) - \cosh(\beta_i \ell)] \right\} \end{array} \right\rangle^2 dx \end{array} \right\rangle^{\frac{1}{2}} \quad (3.100)$$

Le déplacement transversal de la liaison flexible obtenu, comme solution à l'équation (3.9) du mouvement amorti d'une poutre d'Euler-Bernoulli articulée-chargée est finalement exprimée par :

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \Omega_i e^{-\xi_i \omega_{n_i} t} \cos(\omega_{d_i} t - \psi_i) \left\langle \begin{array}{l} \sin(\beta_i x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] + \\ \sigma_i \left\{ \sinh(\beta_i x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_i^3 [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] \right\} \end{array} \right\rangle \quad (3.101)$$

Le modèle mathématique dynamique du bras flexible en tant que poutre d'Euler-Bernoulli articulée-chargée est le même que celui établi pour le cas encasté-chargé.

En finalité, la différence entre les deux modèles présentés réside, exclusivement, dans les expressions des fonctions de forme modales résultant de conditions aux limites différentes.

III.1.2.1 Simulation de la commande en boucle ouverte :

A. Paramètres physiques du système étudié

Les paramètres physiques du bras de robot à une liaison flexible articulé-chargé étudié sont les mêmes que ceux utilisés pour le cas précédent, excepté le moment d'inertie de l'articulation J_h . Ils sont donnés dans l'annexe C. La liaison constituant le bras manipulateur est la même poutre en aluminium type 6061-T06, mais, cette fois-ci, articulée, via un moyeu ou pivot ("hub") rigide, à l'arbre d'un moteur électrique considéré comme étant à entraînement direct ("direct drive").

B. Fonctions modales de forme

Les quatre premières fonctions modales de forme, correspondant au système articulé-libre et articulé-chargé, sont respectivement illustrées par les figures 3.4.a et 3.4.b suivantes :

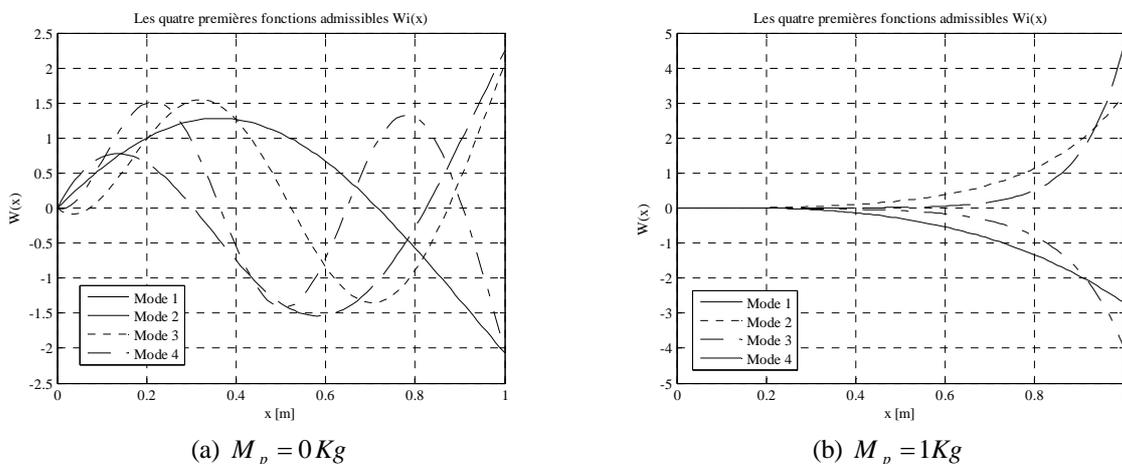


Figure 3.4 Fonctions admissibles du modèle : (a) articulé-libre ; (b) articulé-chargé

C. Réponses impulsionnelles

Pour analyser le comportement dynamique de cette nouvelle configuration de notre système robotique, les réponses impulsionnelles suivantes, représentant les déflexions de l'extrémité manipulatrice, ont été obtenues pour les deux cas articulé-libre (figure 3.5.a) et articulé-chargé (figure 3.5.b):

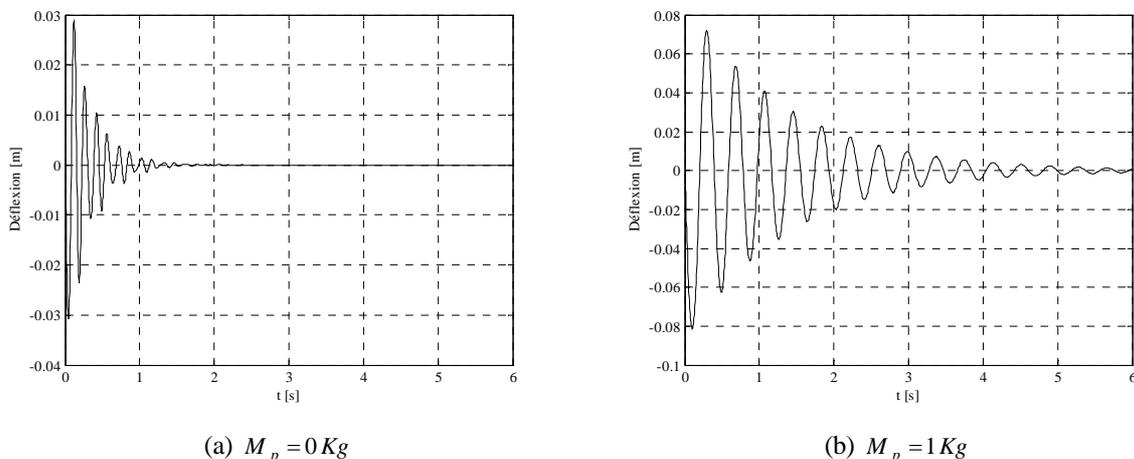


Figure 3.5 Réponses impulsionnelles en déflexion de l'extrémité du bras flexible articulé:

(a) libre ; (b) chargé

En examinant les deux réponses obtenues, nous pouvons constater un comportement oscillatoire amorti plus prononcé en fréquence et en amplitude, par rapport aux cas encastré-libre et encastré-chargé.

En comparant les allures des courbes de réponse des figures 3.5.a et 3.5.b, nous pouvons remarquer, comme pour le cas encastré précédent, un accroissement des amplitudes des oscillations et une diminution de leur fréquence d'évolution dus à l'effet de la charge. Cependant, il y a une différence qui réside dans le taux d'accroissement des amplitudes de ces oscillations et le taux d'atténuation de leur fréquence. En effet, ils sont de moindre importance pour le présent cas, surtout pour la fréquence.

III.2 CONCLUSION

La modélisation mathématique d'un robot manipulateur à liaison flexible est un problème à dimension infinie, s'exprimant sous la forme d'équations aux dérivées partielles, dites intégro-différentielles, fonctions de l'espace et du temps (spatio-temporelles). En fait, elle peut être ramenée à un problème de dimension finie, par une décomposition du champ de déplacement en des fonctions de forme (spatiales), sur une base modale (temporelle) caractérisée par un nombre fini suffisant de modes. Ceci permet d'aboutir à un modèle d'ordre réduit, convenable pour les besoins de la commande.

En effet, nous avons développé, dans ce chapitre, deux modèles dynamiques du robot flexible étudié en associant cette décomposition spatio-temporelle ("Assumed Modes Method") associé au formalisme énergétique Lagrangien.

La liaison souple constituant le bras manipulateur, étant considérée comme une poutre d'Euler-Bernoulli, la modélisation a été appliquée à deux configurations différentes du robot: bras encastré-chargé et bras articulé-chargé.

Des simulations numériques ont permis de mettre en évidence le comportement vibratoire du robot flexible en boucle ouverte, pour les cas libre et chargé. Ceci a permis, notamment, de montrer l'influence importante de la charge sur l'évolution dynamique de l'organe terminal ou extrémité de préhension du bras souple.

CHAPITRE IV

Approches de Modélisation Mathématique d'un Bras de Robot Manipulateur à liaison Flexible en Poutre de Timoshenko

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le développement détaillé de modèles mathématiques du bras de robot flexible, objet de notre étude, en se basant sur la théorie des poutres de Timoshenko. Le premier modèle dynamique concerne le cas encastéré-chargé, alors que le deuxième sera développé pour le cas articulé-chargé. Le comportement des deux systèmes soumis, à une commande en boucle ouverte, est illustré par les réponses obtenues par simulation numérique des deux modèles dynamiques établis.

IV.1 MODELISATION MATHÉMATIQUE EN POUTRE DE TIMOSHENKO

La théorie des poutres de Timoshenko [TIM 74], développée par Timoshenko vers 1920, est largement utilisée pour la modélisation mathématique descriptive des vibrations latérales des poutres. Cette modélisation à base d'équations aux dérivées partielles (EDP) est souvent choisie pour sa meilleure précision dans la prédiction de la réponse d'une poutre par rapport à la théorie d'Euler-Bernoulli [GEI 01, STE 06]. En effet, il a été prouvé et montré, dans la littérature, que les prédictions du modèle de poutre de Timoshenko (P-T) sont en excellente adéquation avec les résultats obtenus avec les équations de l'élasticité exacte et les résultats expérimentaux [TRA 53, HUA 61, STE 82, HAN 99, STE 06]. Cependant, au vu de sa complexité, ce modèle de Timoshenko est plus difficile à utiliser à des fins de commande que celui d'E-B [MAC 04].

Cette théorie tient compte des effets d'inertie rotationnelle et de déformation par cisaillement qui sont négligés dans la théorie d'E-B. La vibration transversale de la poutre dépend de ses propriétés géométriques et constitutives (matériau constituant), au même titre que la dépendance du couple externe appliqué. Les propriétés géométriques concernent, principalement, la longueur ℓ de la poutre, les dimensions et la forme de sa section transversale telles que son aire A , son moment d'inertie I par rapport à l'axe central de fléchissement et le coefficient de cisaillement de Timoshenko k . Ce dernier est un coefficient réel positif variable ($k < 1$) relatif à la distribution de la contrainte de cisaillement telle que l'aire de cisaillement soit égale à kA . Pour ce qui est des propriétés du matériau de la poutre, il s'agit de sa densité de masse par unité de volume ρ , de son module de Young ou module d'élasticité E et de son module de cisaillement ou module de rigidité G .

IV.1.1 Modèle 1 : Poutre de Timoshenko Encastérée-Chargée avec Amortissements Interne de Kelvin-Voigt et Externe de l'Air

IV.1.1.1 Etablissement et résolution de l'équation de mouvement

A. Equation du mouvement

L'équation de mouvement du bras de robot à une liaison déformable, considérée comme une P-T, peut être établie sur la base de l'équilibre des moments et celui des forces agissant sur un élément infinitésimal de la poutre de masse dm et de longueur dx , représenté sur la figure 4.1.

Du à l'effet de cisaillement, la forme rectangulaire originale de l'élément infinitésimal change pour s'apparenter à une sorte de parallélogramme avec des côtés légèrement courbés.

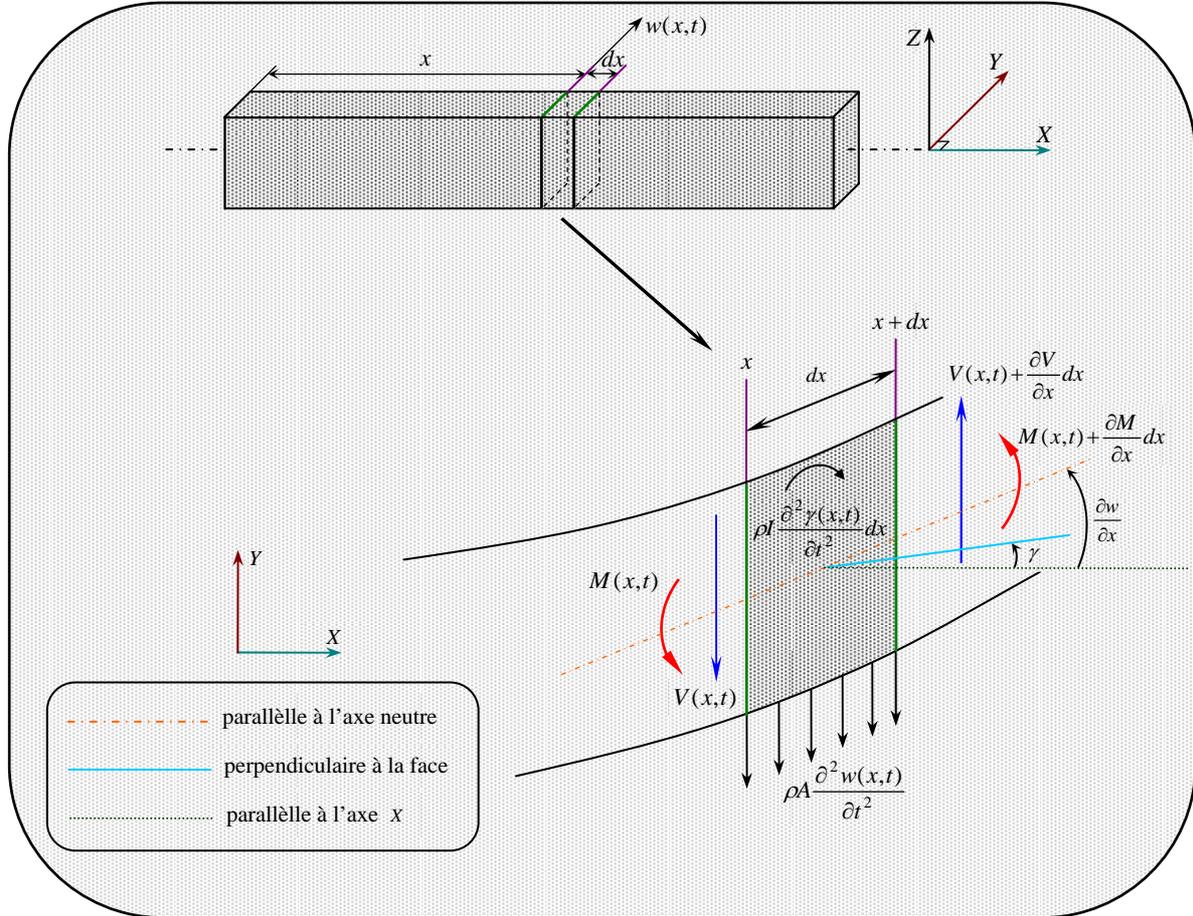


Figure 4.1 Cinématique de déformation d'un élément de P-T en flexion

Comme indiqué sur la figure 4.1, le premier côté est sujet à une force de cisaillement $V(x,t)$ et un moment fléchissant $M(x,t)$. Du côté opposé, correspondant à la position $x + dx$, la force de cisaillement s'exprime par :

$$V(x + dx, t) = V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \quad (4.1)$$

De même, le moment à la position $x + dx$ est :

$$M(x + dx, t) = M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \quad (4.2)$$

Il est à noter que la déflexion totale est due simultanément aux forces de flexion et de cisaillement.

L'angle de cisaillement noté $\sigma(x,t)$ est égal à la pente de la déflexion de l'axe neutre $\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$ diminuée de la pente de la courbe de flexion $\gamma(x,t)$:

$$\sigma(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \gamma(x,t) \quad (4.3)$$

D'après la théorie élémentaire de la flexion, la force de cisaillement $V(x,t)$ est donnée par l'équation :

$$V(x,t) = kAG\sigma(x,t) = kAG \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \gamma(x,t) \right] \quad (4.4)$$

L'expression du moment interne total (flexion et amortissement) $M(x,t)$, établie au chapitre III en fonction de $w(x,t)$, est exprimée, dans le cas présent, en fonction de $\gamma(x,t)$:

$$M(x,t) = EI \frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x} + K_D I \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial x \partial t} \quad (4.5)$$

La relation d'équilibre des moments agissants sur l'élément dx autour de l'axe Z s'écrit :

$$\left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] - M(x,t) + \left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] dx - \rho I \frac{\partial^2 \beta(x,t)}{\partial t^2} dx = 0 \quad (4.6)$$

dx étant infinitésimal, $(dx)^2$ est négligeable ce qui donne lieu à l'expression simplifiée suivante exprimant la relation entre la variation spatiale du moment fléchissant et la force de cisaillement :

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = -V(x,t) + \rho I \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.7)$$

où le terme $\rho I \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial t^2}$ représente l'inertie de rotation distribuée résultat du produit du moment d'inertie de masse de la section de la poutre et de l'accélération angulaire.

Le bilan exprimant l'équilibre des forces agissantes sur l'élément dx est donné par :

$$\left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] - V(x,t) - A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (4.8)$$

où les termes $A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx$, $\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} dx$ représentent, respectivement, la force de résistance de l'air et la force d'inertie transversale distribuées sur l'élément de longueur dx .

La simplification de (4.8) donne lieu à la relation

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} - A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.9)$$

Le remplacement des équations (4.4) et (4.5) dans l'équation (4.7) et celui de (4.4) dans (4.9) donne lieu aux deux équations couplées du mouvement de la P-T amortie :

$$K_D I \frac{\partial^3 \gamma(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + EI \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial x^2} + kAG \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \gamma(x,t) \right] - \rho I \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.10)$$

$$kAG \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x} \right] - \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (4.11)$$

Si les termes des effets amortissants sont supprimés, l'ensemble classique des deux EDP couplées développé, pour la première fois, par Timoshenko [TIM 21, TIM 22] apparaît :

$$EI \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial x^2} + kAG \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \gamma(x,t) \right] - \rho I \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.12)$$

$$kAG \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x} \right] - \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.13)$$

Pour établir les deux équations complètes suivantes régissant le mouvement de la P-T amortie, les deux équations (4.10) et (4.11) sont découplées dans ce qui suit.

Réarrangeons l'équation (4.11) comme suit :

$$\frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{kG} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \frac{A_D}{kAG} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \quad (4.14)$$

Dérivons, à présent, l'équation (4.10) par rapport à x :

$$K_D I \frac{\partial^4 \gamma(x,t)}{\partial x^3 \partial t} + EI \frac{\partial^3 \gamma(x,t)}{\partial x^3} + kAG \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - kAG \frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x} - \rho I \frac{\partial^3 \gamma(x,t)}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (4.15)$$

Le remplacement de (4.14) dans (4.15) donne lieu à la première équation découplée suivante représentant l'EDP régissant le déplacement transversal (déflexion) de la P-T avec amortissements interne et externe :

$$\begin{aligned} K_D I \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} - \frac{K_D I \rho}{kG} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^3} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} + \frac{K_D A_D}{\rho kAG} \right) \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} - \frac{E I A_D}{kAG} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\rho I A_D}{kAG} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t^3} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pour obtenir la deuxième équation découplée, commençons par réarranger l'équation (4.10) comme suit :

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = - \frac{K_D I}{kAG} \frac{\partial^3 \gamma(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial x^2} + \gamma(x,t) + \frac{\rho I}{kAG} \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.17)$$

Dérivons, ensuite, l'équation (4.11) par rapport à x :

$$kAG \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} - kAG \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} - A_D \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} = 0 \quad (4.18)$$

Le remplacement de (4.17) dans (4.18) donne lieu à la deuxième équation découplée suivante représentant l'EDP régissant les variations de la pente de flexion de la P-T avec amortissements interne et externe :

$$\begin{aligned} K_D I \frac{\partial^5 \gamma(x,t)}{\partial x^4 \partial t} - \frac{K_D I \rho}{kG} \frac{\partial^5 \gamma(x,t)}{\partial x^2 \partial t^3} + EI \frac{\partial^4 \gamma(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} + \frac{K_D A_D}{\rho kAG} \right) \frac{\partial^4 \gamma(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 \gamma(x,t)}{\partial t^4} - \frac{E I A_D}{kAG} \frac{\partial^3 \gamma(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\rho I A_D}{kAG} \frac{\partial^3 \gamma(x,t)}{\partial t^3} + \rho A \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial t^2} + A_D \frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Similaire à celle établie par [SOO 96, SOO 98], l'équation (4.16) est l'EDP linéaire homogène du 5^{ème} ordre de la P-T avec effets d'amortissements interne et externe, exprimant la déflexion $w(x,t)$.

En vue de sa résolution, cette équation doit être affectée de conditions initiales et aux limites que nous donnons ci-après :

Conditions initiales: $w(x,0) = w_0, \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{w}_0 \quad (4.20)$

Conditions aux limites (C.L):

• *Extrémité encastrée* : $w(0,t) = 0, \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ (4.21)

• *Extrémité chargée* : $EI \left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=\ell} = -J_p \left. \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right|_{x=\ell}, EI \left. \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=\ell} = M_p \left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \right|_{x=\ell}$ (4.22)

A noter que l'EDP classique du 4^{ième} ordre de Timoshenko [TIM 74] est retrouvée si les termes relatifs aux amortissements sont supprimés :

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$
 (4.23)

Si l'effet de l'inertie de rotation est négligé, le modèle de "poutre en cisaillement" ("shear beam") apparaît [HAN 99] :

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \frac{\rho I E}{kG} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$
 (4.24)

Par contre, si l'effet de cisaillement est celui négligé, l'équation de la poutre de Rayleigh [HAN 99] s'établit :

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$
 (4.25)

Par ailleurs, si les effets d'inertie de rotation et de cisaillement sont simultanément négligés, on se réduit à l'équation classique d'E-B [MEI 97] donnée par :

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$
 (4.26)

Si les effets d'amortissement sont associés à la poutre d'E-B, l'EDP correspondante établie au chapitre précédent est retrouvée :

$$K_D I \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + A_D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0$$
 (4.27)

B. Application d'une méthode de résolution classique

La résolution de l'EDP (4.16) formée de termes à dérivées mixtes est un problème mathématique fort complexe. Parmi les quelques méthodes de résolution des EDP, existant dans la littérature, nous pouvons citer deux principales approches: la méthode de la transformation de Laplace résultant en une solution de forme intégrale [BOL 55, ORT 96] et la méthode d'expansion des fonctions propres, dite aussi méthode d'expansion en séries ou plus fréquemment méthode des modes supposés [AND 53, DOL 57, HUA 61, DEL 91b, FRA 91, THE 95, THE 97, MEI 97, EKW 01].

Pour notre travail, nous avons opté pour la deuxième méthode que nous avons déjà utilisée au chapitre précédent et qui est, d'ailleurs, la plus communément employée pour les systèmes à paramètres distribués [FRA 91, DWI 06].

Selon cette méthode, la déflexion $w(x,t)$ peut prendre la forme séparée suivante consistant en une somme infinie de produits entre des fonctions admissibles ou fonctions modales de forme $W_n(x)$, devant satisfaire les C-L prédéfinies et des coordonnées généralisées modales temporelles $\delta_n(t)$:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \delta_n(t) \quad (4.28)$$

Ayant tenté d'appliquer la même procédure utilisée pour la poutre d'E-B au chapitre précédent, il s'est avéré impossible d'établir l'expression générale des fonctions modales de forme pour la P-T amortie. Ceci est dû au caractère inséparable des termes de l'équation complexe (4.16) objet de la résolution.

A noter que les mêmes constatations ont été émises dans les travaux de Sooraksa [SOO 96, SOO 98] qui sont les plus proches de notre contexte et dans lesquels, il a été confronté à des difficultés analogues aux nôtres mais à un degré moindre vu qu'il n'a pas tenu compte des C-L, ni des effets de la charge qui sont incontournables et qui ne peuvent être négligés [DEL 91b, THE 95, THE 97]. De plus, aucune étude de modélisation dynamique n'a été réalisée dans le cadre de ces travaux.

C. Méthode de résolution proposée

Pour proposer une solution à ce problème mathématique fort complexe, restant à ce jour ouvert, nous nous sommes, en premier lieu, quelque peu inspirés du travail de Sooraksa présenté dans [SOO 96, SOO 98], dont l'idée principale consiste à proposer une expression générale approchée des fonctions $W_n(x)$, en assimilant la poutre articulée (encastrée)-chargée à une poutre articulée (encastrée)-articulée (encastrée) vu que la charge à l'extrémité est considérée comme très lourde par rapport au poids de la poutre. Le remplacement de $W_n(x)$ dans l'EDP de la P-T amortie permet, alors, d'établir l'expression temporelle des coordonnées généralisées modales $\delta_n(t)$ ce qui fait, notamment, ressortir les pulsations naturelles non amorties des modes vibratoires. Les résultats de simulation, présentés dans ces travaux, ne font aucunement apparaître de comportement en déflexion de l'extrémité chargée en se contentant de présenter des déflexions en des points intermédiaires le long de la poutre en flexion entre ses deux extrémités. Il est, pourtant, tout à fait clair que c'est le comportement de l'extrémité chargée qui est le plus important dans une étude de modélisation et de commande d'un bras de robot manipulateur.

Cette approche présente, à notre avis, l'inconvénient d'ignorer les vraies C-L de la structure ainsi que les effets dynamiques, à importance cruciale, de la charge.

Pour notre part, nous avons, en premier lieu proposé une forme des fonctions admissibles $W_n(x)$, dans le but d'établir l'expression de la pulsation naturelle non amortie en fonction des paramètres physiques de la P-T amortie.

Les fonctions $W_n(x)$ devant respecter les C-L du cas encastré-chargé, nous avons proposé la forme suivante pour ces fonctions admissibles [LOU 06a, LOU 06b, LOU 06c, LOU 06d, LOU 06e, LOU 06f, LOU 07c]:

$$W_n(x) = 1 - \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad (4.29)$$

Le remplacement de (4.28) avec (4.29) dans (4.16) conduit, après quelques développements à l'équation différentielle ordinaire (EDO) du quatrième ordre suivante :

$$\begin{aligned}
 & C_1 \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right] \frac{d^4 \delta_n(t)}{dt^4} + \\
 & \left\{ C_2 \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right] - C_3 (2n-1)^2 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right\} \frac{d^3 \delta_n(t)}{dt^3} + \\
 & \left\{ C_4 \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right] - C_5 (2n-1)^2 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right\} \frac{d^2 \delta_n(t)}{dt^2} + \\
 & \left\{ C_6 \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right] - C_7 (2n-1)^2 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} - C_8 (2n-1)^4 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right\} \frac{d\delta_n(t)}{dt} + \\
 & C_9 (2n-1)^4 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \delta_n(t) = 0
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

où

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\rho^2 I}{kG}; & C_2 &= \frac{\rho I A_D}{kAG}; & C_3 &= \frac{K_D I \rho \pi^2}{4kGL^2}; & C_4 &= \rho A; & C_5 &= \frac{\rho I \pi^2}{4L^2} \left(1 + \frac{E}{kG} + \frac{K_D A_D}{\rho kAG} \right); & C_6 &= A_D; \\
 C_7 &= \frac{E I A_D \pi^2}{4kAGL^2}; & C_8 &= \frac{K_D I \pi^4}{16L^4}; & C_9 &= \frac{E I \pi^4}{16L^4}.
 \end{aligned}$$

Après calcul numérique, basé sur les données physiques présentées dans l'annexe C, nous avons trouvé que les coefficients des termes $\frac{d^4 \delta_n(t)}{dt^4}$ et $\frac{d^3 \delta_n(t)}{dt^3}$ dans (4.30) sont très petits (négligeables) devant ceux des termes d'ordre de dérivation inférieurs (voir les détails dans le tableau 4.1 ci-contre).

Coefficient	Valeur
C_1	$1.471639 \cdot 10^{-13}$
C_2	$6.172672 \cdot 10^{-13}$
C_3	$2.744159 \cdot 10^{-11}$
C_4	0.244134
C_5	$9.638139 \cdot 10^{-6}$
C_6	1.024000
C_7	$4.154884 \cdot 10^{-5}$
C_8	$2.496107 \cdot 10^{-5}$
C_9	8.645056

Tableau 4.1 Valeurs numériques des coefficients

L'équation (4.30) étant réduite à une EDO du second ordre, et au vu de la nature du système modélisé, quelques développements et approximations, permettant d'aboutir à une EDO du second ordre caractérisant un système linéaire élastique amorti, ont pu donner lieu à l'expression suivante :

$$\frac{d^2 \delta_n(t)}{dt^2} + CF_1 \frac{d\delta_n(t)}{dt} + CF_2 \delta_n(t) = 0 \tag{4.31}$$

$$\text{où } CF_1 = \frac{C_6 + C_7 (2n-1)^2 + C_8 (2n-1)^4}{C_4 + C_5 (2n-1)^2} \text{ et } CF_2 = \frac{C_9 (2n-1)^4}{C_4 + C_5 (2n-1)^2}.$$

Considérant, le cas sous-amorti, avec un ensemble de conditions initiales $\delta(0)$ et $\dot{\delta}(0)$, la solution de (4.31) peut s'écrire :

$$\delta_n(t) = \kappa_n e^{-\xi_n \omega_{n_n} t} \cos(\omega_{d_n} t - \psi_n) \tag{4.32}$$

$$\text{où } \omega_{n_n} = \sqrt{CF_2} = \sqrt{\frac{C_9 (2n-1)^4}{C_4 + C_5 (2n-1)^2}}, \quad \xi_n = \frac{CF_1}{2\omega_{n_n}} = \frac{C_6 + C_7 (2n-1)^2 + C_8 (2n-1)^4}{2[C_4 + C_5 (2n-1)^2] \omega_{n_n}}, \quad \omega_{d_n} = \omega_{n_n} \sqrt{1 - \xi_n^2},$$

$$\kappa_n = \sqrt{\left[\frac{\dot{\delta}_n(0) + \delta_n(0) \xi_n \omega_{n_n}}{\omega_{d_n}} \right]^2 + [\delta_n(0)]^2}, \quad \psi_n = \arctan \left[\frac{\dot{\delta}_n(0) + \delta_n(0) \xi_n \omega_{n_n}}{\omega_{d_n} \delta_n(0)} \right], \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Le déplacement transversal de la liaison flexible du robot, obtenu approximativement, sur la base des fonctions de forme modales adoptées, comme une solution de l'équation de la poutre amortie de Timoshenko (4.16), est finalement exprimé par :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n e^{-\xi_n \omega_n t} \cos(\omega_n t - \psi_n) \left\{ 1 - \cos \left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right] \right\} \quad (4.33)$$

Le but principal des développements précédents étant l'établissement de l'expression de la pulsation naturelle ω_n ou simplement ω_n . Elle est déterminée comme suit :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{C_9 (2n-1)^4}{C_4 + C_5 (2n-1)^2}} = \sqrt{\frac{EI\pi^4 (2n-1)^4}{4\rho IL^2 \pi^2 \left(1 + \frac{E}{kG} + \frac{K_D A_D}{\rho kAG} \right) + 16\rho AL^4}} \quad (4.34)$$

En s'appuyant sur les résultats importants, des études comparatives approfondies, réalisées par [ROS 90] et [LOU 05] qui ont prouvé que les fonctions de forme modales du déplacement transversal (déflexion) relatives à la théorie de la P-T ainsi que leurs fréquences propres sont très proches de celles relatives à la poutre d'E-B pour les premiers modes vibratoires dominants, nous avons proposé, comme contribution [LOU 06a, LOU 06c, LOU 06e, LOU 06f, LOU 07c], de reprendre la même forme des fonctions admissibles établies précédemment pour le cas de la poutre d'E-B encastée-chargee (§ III.1.1), mais en tenant compte de la nouvelle expression des pulsations naturelles vibratoires ω_n , incluant les différents effets spécifiques à la P-T amortie, que nous venons d'établir (équation (4.34)); ce qui donne :

$$W_n(x) = \Omega_n \{ \sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x) + \sigma_n [\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)] \} \quad (4.35)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_n = \frac{[\cos(\beta_n \ell) + \cosh(\beta_n \ell)] - \frac{M_p}{\rho A \ell} \beta_n \ell [\sin(\beta_n \ell) - \sinh(\beta_n \ell)]}{[\sin(\beta_n \ell) - \sinh(\beta_n \ell)] + \frac{M_p}{\rho A \ell} \beta_n \ell [\cos(\beta_n \ell) - \cosh(\beta_n \ell)]} \\ \Omega_n = \left\{ \frac{\ell}{\int_0^\ell \{ \sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x) + \sigma_n [\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)] \}^2 dx} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

A noter que l'effet important de la charge est pris en compte dans l'expression des fonctions modales de forme $W_n(x)$ à travers le terme σ_n dépendant de M_p .

L'expression des β_n est déterminée à partir de la relation $\beta_n^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega_n^2$ (Cf. § III.1.1.1) pour donner :

$$\beta_n = \sqrt[4]{\frac{A\pi^4 (2n-1)^4}{4IL^2 \pi^2 \left(1 + \frac{E}{kG} + \frac{K_D A_D}{\rho kAG} \right) + 16AL^4}} \quad (4.36)$$

IV.1.1.2 Elaboration du Modèle dynamique

Pour l'élaboration du modèle dynamique, le formalisme Lagrangien, présenté au chapitre précédent, est adopté avec les expressions énergétiques suivantes :

Energie cinétique :

$$T = T_h + T_\ell + T_p \quad (4.37)$$

avec

$$T_h = \frac{1}{2} J_h \dot{\theta}^2(t) \quad (4.38)$$

$$T_\ell = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A [x^2 + w^2(x,t)] \dot{\theta}^2(t) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A 2x \dot{\theta}(t) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho I \left[\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (4.39)$$

$$T_p = \frac{1}{2} M_p \left\{ [x^2 + w^2(x,t)]_{x=\ell} \dot{\theta}^2(t) + \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]_{x=\ell}^2 + 2\dot{\theta}(t) \left[x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]_{x=\ell} \right\} + \frac{1}{2} J_p \left[\dot{\theta}(t) + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} \right]_{x=\ell}^2 \quad (4.40)$$

Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left[\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell kAG [\sigma(x,t)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left[\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell kAG \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \beta(x,t) \right]^2 dx \quad (4.41)$$

Energie dissipative :

$$D = \frac{1}{2} \int_0^\ell A_D \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell K_D I \left[\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right]^2 dx \quad (4.42)$$

En appliquant la méthode Lagrangienne en tenant compte de ces expressions énergétiques et en combinant la forme séparée (4.28), en tenant compte des conditions d'orthogonalité des fonctions admissibles [TIM 74] utilisées précédemment (§ III.1.1.2 – équation (3.58)), nous avons abouti, après de longs développements (voir annexe D pour les détails), au modèle dynamique linéaire suivant basé sur les deux premiers modes vibratoires dominants ($i = 1, 2$):

$$B \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + H \frac{dq(t)}{dt} + Kq(t) = F(t) \quad (4.43)$$

avec :

- $B = \begin{bmatrix} J_T & V_1 & V_2 \\ V_1 & \alpha_1 & R \\ V_2 & R & \alpha_2 \end{bmatrix}$: Matrice masse ou d'inertie

où $J_T = J_h + J_b + J_p + M_p \ell^2$; $V_i = \Psi_i + M_p \ell W_i(\ell) + J_p W_i'(\ell)$;

$$\alpha_i = S_i - \frac{\Phi_i A_D^2}{kAG} - \frac{A_D^2 EIZ_i}{(kAG)^2} - K_D \Pi_i - \frac{K_D I \rho^2 \omega_i^4 Z_i}{(kG)^2} - \frac{2\rho K_D I \omega_i^2 X_i}{kG}; \quad R = -\frac{\rho I}{kG} (\omega_2^2 K_D Y_1 + \omega_1^2 K_D Y_2),$$

avec $J_b = \rho A \int_0^\ell x^2 dx$, $\Psi_i = \rho A \int_0^\ell x W_i(x) dx$, $S_i = \rho A Z_i + M_p W_i^2(\ell) + J_p W_i'^2(\ell)$, $\Phi_i = \int_0^\ell \int_0^\ell W_i^2(x) dx^2$,

$$Z_i = \int_0^\ell W_i^2(x) dx, \quad \Gamma_i = \int_0^\ell W_i''^2(x) dx, \quad X_i = \int_0^\ell W_i''(x) W_i(x) dx, \quad Y_i = \int_0^\ell W_i''(x) W_j(x) dx \text{ avec } i \neq j.$$

- $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & Q_1 - Q_2 \\ 0 & Q_2 - Q_1 & C_2 \end{bmatrix}$: Matrice d'amortissement visqueux

où $C_i = A_D Z_i + K_D \Pi_i$; $Q_1 = \frac{A_D I}{kAG} (EY_2 - \omega_2^2 K_D Y_1)$; $Q_2 = \frac{A_D I}{kAG} (EY_1 - \omega_1^2 K_D Y_2)$.

- $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & R' \\ 0 & R' & G_2 \end{bmatrix}$: Matrice de rigidité

où $G_i = \frac{\Phi_i (\rho A)^2 \omega_i^4}{kAG} + E \Pi_i + \frac{\rho^2 E I \omega_i^4 Z_i}{(kG)^2} + \frac{A_D^2 K_D I \omega_i^4 Z_i}{(kAG)^2} + \frac{2 \omega_i^2 K_D E I X_i}{kG}$; $R' = \frac{\rho E I}{kG} (\omega_2^2 Y_1 + \omega_1^2 Y_2)$.

- $q(t) = [\theta(t) \ \delta_1(t) \ \delta_2(t)]^T$ et $F = [\tau \ 0 \ 0]^T$ sont, respectivement, les vecteurs des coordonnées et des forces généralisées.

IV.1.2.3 Simulation de la commande en boucle ouverte

A. Paramètres physiques du système étudié

Les paramètres physiques du bras de robot à une liaison flexible encastré-charge, étudié en tant que P-T amortie, sont les mêmes que ceux utilisés pour la poutre d'E-B, au chapitre précédent. Ils sont, donc, donnés dans l'annexe C avec notamment les paramètres relatifs à la théorie de Timoshenko.

B. Fonctions modales de forme

Les quatre premières fonctions admissibles (fonctions modales de forme), correspondant au système encastré-libre et encastré-charge, sont, respectivement, illustrées par les figures 4.2.a et 4.2.b suivantes :

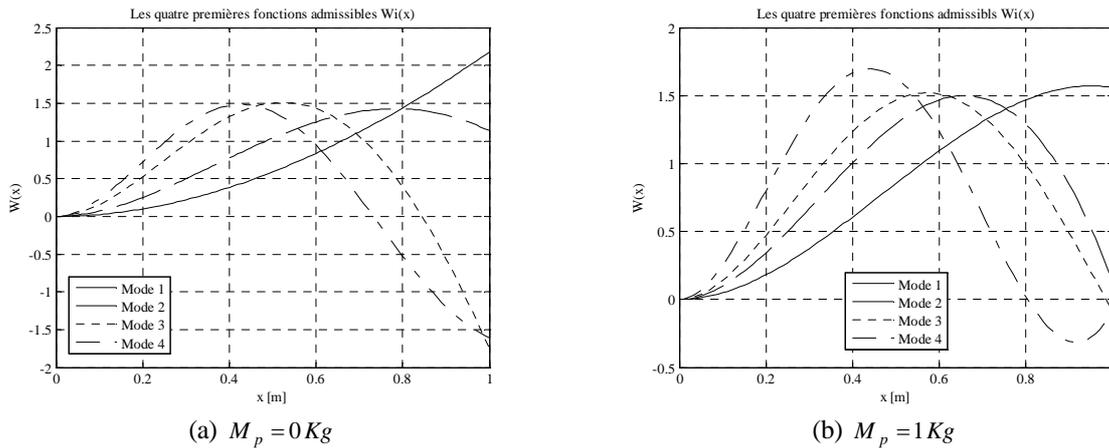


Figure 4.2 Fonctions admissibles du modèle : (a) encastré-libre ; (b) encastré-charge

C. Réponses impulsionnelles

Pour analyser le comportement dynamique du présent système robotique, les réponses impulsionnelles suivantes, représentant les déflexions de l'extrémité manipulatrice, ont été obtenues pour

les deux cas encastré-libre (figure 4.3.a) et encastré-chargé (figure 4.3.b) [LOU 06a, LOU 06b, LOU 06c, LOU 06d, LOU 06f]:

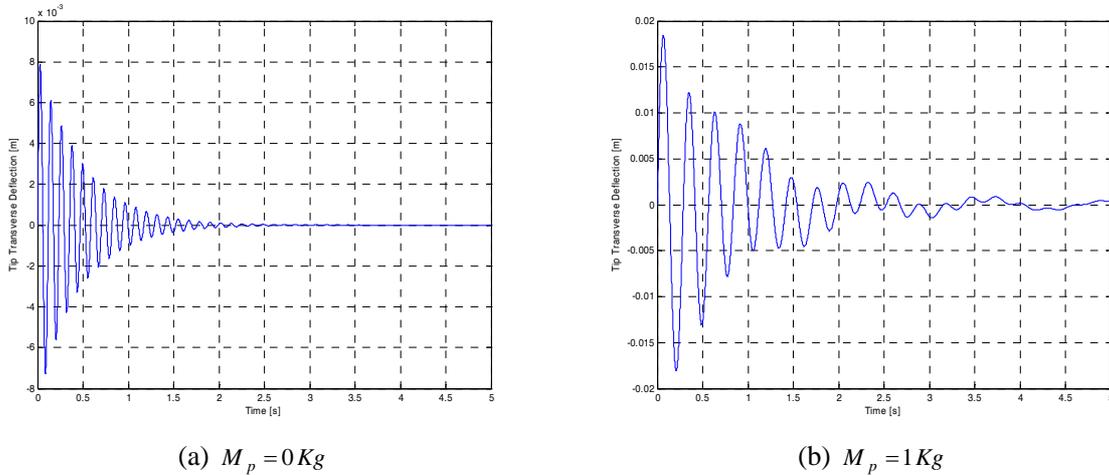


Figure 4.3 Réponses impulsionnelles en déflexion de l'extrémité du bras flexible encastré :

(a) libre; (b) chargé

La figure 4.3.a, représentant l'évolution de la déflexion de l'extrémité de la liaison flexible libre du bras manipulateur, exhibe clairement un comportement hautement vibratoire bien qu'amorti, suite à l'application d'une excitation impulsionnelle. Il est intéressant de noter que cette réponse est nettement plus oscillatoire et à une plus haute fréquence que son analogue obtenue pour la poutre d'E-B.

Le bras de robot étant, cette fois-ci, porteur d'une charge à son extrémité libre et soumis à la même excitation à sa base, exhibe aussi une évolution vibratoire illustrée par les variations de la déflexion correspondante montrée sur le graphe de la figure 4.3.b. Cependant, nous constatons que les oscillations évoluent avec une fréquence nettement moins importante et des amplitudes de plus grande magnitude (mouvement moins amorti). Cette variation de dynamique comportementale du bras flexible, confirme l'importance et la nécessité de la prise en compte de l'effet de la charge dans la modélisation mathématique de ce dernier.

A noter que ce sont les mêmes constatations comparatives que celles émises pour le cas de la poutre d'E-B.

IV.1.2 Modèle 2 : Poutre de Timoshenko Articulée-Chargée avec Amortissements Interne de Kelvin-Voigt et Externe de l'Air

L'EDP linéaire homogène du cinquième ordre de la P-T avec effets d'amortissements interne de Kelvin-Voigt et externe de l'air exprimant la déflexion $w(x,t)$ donnée par l'équation (4.16) est reconduite, mais avec des C-L spécifiques au présent cas [BEL 90, LOU 06e, LOU 07a, LOU 07c]:

- *Extrémité articulée* : $w(0,t) = 0, EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = J_h \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=0}$ (4.44)

- *Extrémité chargée* : $EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=\ell} = -J_p \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=\ell}, EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=\ell} = M_p \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=\ell}$ (4.45)

Les mêmes étapes, suivies pour la résolution de l'EDP de la P-T amortie encastrée-chargée, vont être appliquées pour le présent cas.

Tout d'abord, nous donnons l'expression de la forme séparée de la déflexion mettant, notamment, en évidence les fonctions de forme modales proposées pour le cas articulé-chargé assimilé au cas articulé-articulé au vu de l'importance de la charge [SOO 96, SOO 98, HAN 99, STE 06, LOU 06e, LOU 07a, LOU 07b, LOU 07b]:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \delta_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{n\pi x}{L} \right] \cdot \delta_n(t) \quad (4.46)$$

Le remplacement de (4.46) dans (4.16) conduit, après quelques développements à l'EDO du 4^{ème} ordre suivante :

$$c_1 \frac{d^4 \delta_n(t)}{dt^4} + (c_2 n^2 + c_3) \frac{d^3 \delta_n(t)}{dt^3} + (c_4 n^2 + c_5) \frac{d^2 \delta_n(t)}{dt^2} + (c_6 n^4 + c_7 n^2 + c_8) \frac{d \delta_n(t)}{dt} + c_9 n^4 \delta_n(t) = 0 \quad (4.47)$$

$$\text{où } c_1 = \frac{\rho^2 I}{kG}; c_2 = \frac{K_D I \rho \pi^2}{kGL^2}; c_3 = \frac{\rho I A_D}{kAG}; c_4 = \frac{\rho I \pi^2}{L^2} \left(1 + \frac{E}{kG} + \frac{K_D A_D}{\rho kAG} \right); c_5 = \rho A; c_6 = \frac{K_D I \pi^4}{L^4};$$

$$c_7 = \frac{E I A_D \pi^2}{kAGL^2}; c_8 = A_D; c_9 = \frac{E I \pi^4}{L^4}.$$

Après calcul numérique basé sur les données physiques données en annexe C, nous avons trouvé que les coefficients des termes $\frac{d^4 \delta_n(t)}{dt^4}$ et $\frac{d^3 \delta_n(t)}{dt^3}$ dans (4.47) sont très petits (négligeables) devant ceux des termes d'ordre de dérivation inférieurs (voir le tableau 4.2).

Coefficient	Valeur
c_1	$1.471639 \cdot 10^{-13}$
c_2	$1.097663 \cdot 10^{-10}$
c_3	$6.172672 \cdot 10^{-13}$
c_4	$3.855255 \cdot 10^{-5}$
c_5	0.244134
c_6	$3.993772 \cdot 10^{-4}$
c_7	$1.661953 \cdot 10^{-4}$
c_8	1.024000
c_9	138.320909

Tableau 4.2 Valeurs numériques des coefficients

L'équation (4.26) se réduit, alors, à l'EDO du 2nd ordre suivante :

$$\frac{d^2 \delta_n(t)}{dt^2} + cf_1 \frac{d \delta_n(t)}{dt} + cf_2 \delta_n(t) = 0 \quad (4.48)$$

$$\text{où } cf_1 = \frac{c_6 n^4 + c_7 n^2 + c_8}{c_4 n^2 + c_5}; cf_2 = \frac{c_9 n^4}{c_4 n^2 + c_5}.$$

L'équation (4.48) a la forme générale d'une EDO du 2nd ordre caractérisant un système linéaire élastique amorti.

Considérant, le cas sous-amorti, avec un ensemble de conditions initiales $\delta(0)$ et $\dot{\delta}(0)$, sa solution est :

$$\delta_n(t) = C_n e^{-\xi_n \omega_{n_n} t} \cos(\omega_{d_n} t - \psi_n) \quad (4.49)$$

$$\text{où } \omega_{n_n} = \sqrt{cf_2} = \sqrt{\frac{c_9 n^4}{c_4 n^2 + c_5}}, \xi_n = \frac{cf_1}{2 \omega_{n_n}} = \frac{c_6 n^4 + c_7 n^2 + c_8}{2(c_4 n^2 + c_5) \omega_{n_n}}, \omega_{d_n} = \omega_{n_n} \sqrt{1 - \xi_n^2},$$

$$\kappa_n = \sqrt{\left[\frac{\dot{\delta}_n(0) + \delta_n(0) \xi_n \omega_{n_n}}{\omega_{d_n}} \right]^2 + [\delta_n(0)]^2}, \quad \psi_n = \arctan \left[\frac{\dot{\delta}_n(0) + \delta_n(0) \xi_n \omega_{n_n}}{\omega_{d_n} \delta_n(0)} \right], \quad n=1,2,3,\dots$$

Le déplacement transversal de la liaison flexible du robot, obtenu approximativement, sur la base des fonctions de forme modales adoptées, comme une solution de l'équation de la poutre amortie de Timoshenko (4.16) articulée-chargée est finalement exprimé par :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n e^{-\xi_n \omega_{n_n} t} \cos(\omega_{d_n} t - \psi_n) \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.50)$$

Le but principal des développements précédents étant l'établissement de l'expression de la pulsation naturelle ω_{n_n} ou simplement ω_n , elle est déterminée comme suit :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{c_9 n^4}{c_4 n^2 + c_5}} = \sqrt{\frac{EI \pi^4 n^4}{\rho I \pi^2 L^2 \left(1 + \frac{E}{kG} + \frac{K_D A_D}{\rho k A G} \right) n^2 + \rho A L^4}} \quad (4.51)$$

Comme pour le cas encasté, s'appuyant sur les résultats des travaux de [ROS 90] et [LOU 05], nous avons proposé [LOU 07a, LOU 07b], de reprendre la même forme des fonctions admissibles établies précédemment pour le cas de la poutre d'E-B articulée-chargée (§ III.1.2), mais en tenant compte de la nouvelle expression des pulsations naturelles vibratoires ω_n , incluant les différents effets spécifiques à la P-T amortie, que nous venons d'établir (équation (4.51)); ce qui donne :

$$W_n(x) = \Omega_n \left\langle \begin{array}{l} \sin(\beta_n x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_n^3 [\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)] + \\ \sigma_n \left\{ \sinh(\beta_n x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_n^3 [\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)] \right\} \end{array} \right\rangle \quad (4.52)$$

avec

$$\sigma_n = \frac{\left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta_n^4 - 1 \right) \cos(\beta_n \ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta_n^3 + \frac{M_p}{\rho A} \beta_n \right) \sin(\beta_n \ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta_n^4 \cosh(\beta_n \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta_n^3 \sinh(\beta_n \ell)}{-\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta_n^4 \cos(\beta_n \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta_n^3 \sin(\beta_n \ell) + \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta_n^4 - 1 \right) \cosh(\beta_n \ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta_n^3 - \frac{M_p}{\rho A} \beta_n \right) \sinh(\beta_n \ell)}$$

et

$$\Omega_n = \left\{ \frac{\ell}{\int_0^\ell \left\langle \sin(\beta_n x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_n^3 [\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)] + \sigma_n \left\{ \sinh(\beta_n x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta_n^3 [\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)] \right\} \right\rangle^2 dx} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

L'expression des β_n est déterminée à partir de la relation $\beta_n^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega_n^2$ pour donner :

$$\beta_n = \sqrt[4]{\frac{A \pi^4 n^4}{I \pi^2 L^2 \left(1 + \frac{E}{kG} + \frac{K_D A_D}{\rho k A G} \right) n^2 + A L^4}} \quad (4.53)$$

IV.1.2.1 Simulation de la commande en boucle ouverte

A. Paramètres physiques du système étudié

Les paramètres physiques du bras de robot à une liaison flexible articulé-chargé, étudié en tant que P-T, sont donnés dans l'annexe C.

B. Fonctions modales de forme

Les quatre premières fonctions admissibles correspondant au système articulé-libre et articulé-chargé sont, respectivement, illustrées par les figures 4.4.a et 4.4.b suivantes [LOU 07b]:

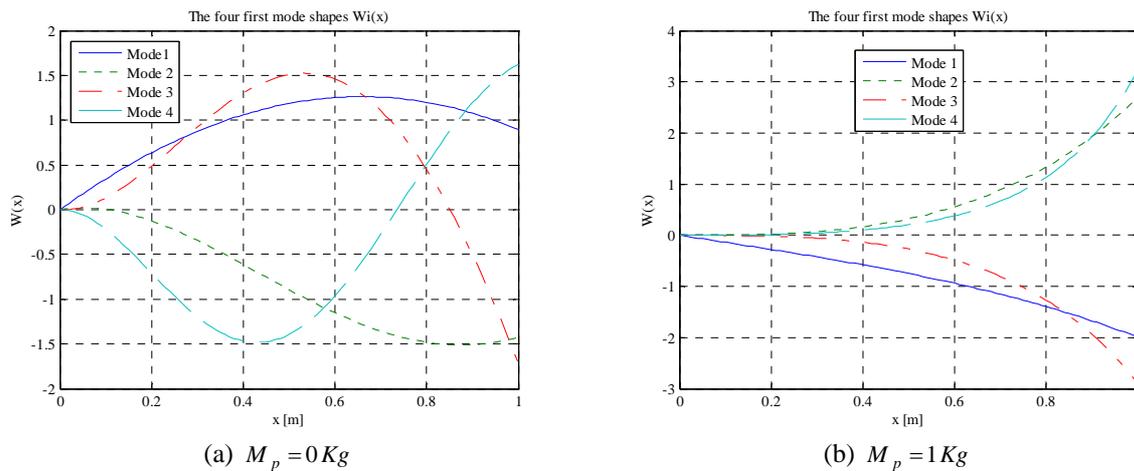


Figure 4.4 Fonctions admissibles du modèle : (a) articulé-libre ; (b) articulé-chargé

C. Réponses impulsionnelles

Pour analyser le comportement dynamique du présent système robotique, les réponses impulsionnelles suivantes, représentant les déflexions de l'extrémité, ont été obtenues pour les deux cas articulé-libre (figure 4.5.a) et articulé-chargé (figure 4.5.b) [LOU 06e, LOU 07a, LOU 07b, LOU 07c]:

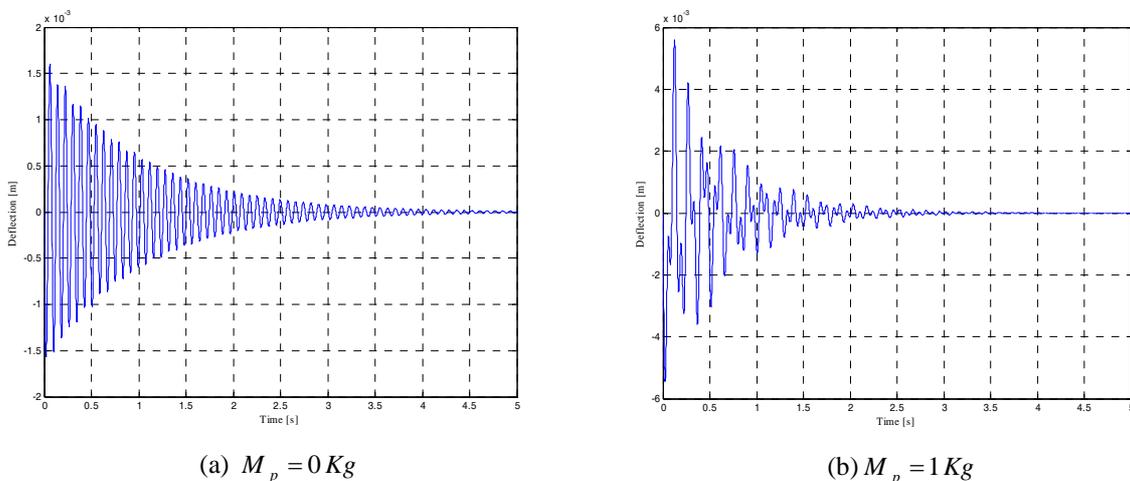


Figure 4.5 Réponses impulsionnelles en déflexion de l'extrémité du bras flexible articulé:
(a) libre ; (b) chargé

L'observation des deux réponses obtenues, nous permet d'affirmer que, par rapport aux cas encasté-libre et encasté-chargé, le comportement oscillatoire des deux présents cas est nettement de plus haute fréquence, mais de moindre magnitude pour les amplitudes des oscillations.

La comparaison des allures des courbes de réponse des figures 4.5.a et 4.5.b, nous fait remarquer, comme pour le cas encasté, un accroissement important des amplitudes des oscillations, mais, surtout, une diminution de leur fréquence d'évolution. Ces deux effets inverses sont, évidemment, dus à l'influence de la charge sur la dynamique du système global. Nous pouvons constater, aussi, que même l'allure des oscillations diffère, cette fois-ci, entre le cas libre et celui chargé.

Enfin, il faut noter que ces réponses sont beaucoup plus oscillatoires, et à une plus importante fréquence que leurs analogues, obtenues pour la poutre d'E-B, mais, avec des amplitudes sensiblement moindres.

IV.2 CONCLUSION

Dans ce quatrième chapitre, la théorie des poutres de Timoshenko a été utilisée pour la modélisation du bras manipulateur à liaison flexible objet de notre étude.

Deux modèles dynamiques ont été développés sur la base d'une nouvelle approche que nous avons proposée mettant en œuvre, notamment, la méthode des modes supposés (décomposition spatio-temporelle) et le formalisme énergétique Lagrangien.

Ces deux modèles mathématiques établis pour les configurations de fixation bras-moyeu-actionneur encastée-libre(chargé) et articulée-libre (chargé) ont fait l'objet de simulations numériques pour mettre en évidence et analyser le comportement vibratoire du robot flexible en boucle ouverte. Ceci nous a permis, notamment, de montrer l'influence importante de la charge sur l'évolution dynamique de l'organe terminal ou extrémité de préhension du bras souple ainsi que celle de la nature de la fixation (montage) de la première extrémité du bras robotique avec le moyeu-actionneur.

CHAPITRE V

Logique Floue / Commande Floue Algorithmes Génétiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous développerons les notions essentielles de logique floue puis les principes de base de son utilisation en commande. Ensuite, les algorithmes génétiques seront abordés en mettant l'accent sur les phases principales de leur mise en oeuvre.

V.1 LOGIQUE FLOUE – COMMANDE FLOUE

V.1.1 Introduction

Les bases de la logique floue (“fuzzy logic” en anglais) [ZAD 88] furent jetées dans les années soixante, suite aux travaux du professeur, d'origine iranienne, Lotfi A. Zadeh à l'université américaine de Berkeley (Californie) sur ce qu'il dénomma “fuzzy sets” ou sous-ensembles flous (SEFs) [ZAD 65]. Par ce nouveau formalisme de la logique, il put prendre en considération les problèmes posés par les connaissances imprécises ou vagues qui ne pouvaient être traités dans le cadre de la logique classique bivalente (binaire).

Depuis, elle a de plus en plus suscité un fervent intérêt de la part des chercheurs et un peu plus tard, des ingénieurs et des industriels et, plus généralement, de tous ceux qui ont éprouvé le besoin de formaliser des méthodes empiriques, de généraliser des modes de raisonnement naturels, d'automatiser la prise de décision dans leur domaine, de construire des systèmes artificiels capables d'effectuer les tâches habituellement prises en charge par les humains.

La tendance générale du passage de la prise en charge humaine vers la prise en charge de systèmes artificiels, dans beaucoup de disciplines, n'a pu que conforter et conférer une place de prédilection à cette logique multivalente appropriée pour l'imprécis et/ou l'incertain.

En effet, le raisonnement humain, “à caractère flou”, est une symbiose de logique et d'imagination, c'est à dire, une superposition de rigueur et d'intuition agissant de concert ou séparément. La logique humaine est un enchaînement d'idées, de concepts, concrets ou abstraits, aboutissant à des conclusions qui entraînent des décisions ou restant à l'état de résultats éventuellement exploitables.

Le caractère flou du raisonnement humain est illustré par sa capacité de résumer les informations pour extraire à partir des collections de masses de données stockées dans la mémoire, les sous-collections qui ont un rapport avec la tâche considérée. Par sa nature, un résumé est une approximation de ce qu'il résume.

Pour plusieurs cas, une caractérisation très approximative d'une collection de données est suffisante, car la plupart des tâches faites par les êtres humains n'exigent pas un degré très élevé de précision dans leur exécution [ZAD 88].

Une imitation de ces aspects qualitatifs et approximatifs du raisonnement humain a donné naissance à un autre type de systèmes de commande qui trouvent de puissantes applications, surtout dans des situations où le système à commander est mal défini (mathématiquement).

L'idée de commande floue ("fuzzy control" en anglais) a été proposée dans des notes publiées par Zadeh, lui-même, en 1968 et 1972 et a été décrite avec plus de détails en 1973 [ZAD 73].

Une année après, en 1974, la première implémentation d'une commande floue a vu le jour grâce à l'équipe du professeur, d'origine tanzanienne, Ebrahim H. Mamdani et a été réalisée sur une machine à vapeur au Queen Mary College de Londres [MAM 74, MAM 75].

Par la suite, mais, un peu plus tard, le déferlement de toute une vague commerciale de dispositifs à logique floue, japonais pour la plupart, a popularisé cette nouvelle notion de logique. La plus célèbre des toutes premières applications floues est, sans doute, le contrôleur du métro de Sendai, au Japon, réalisé par la société Hitachi en 1988 [KOS 93].

V.1.2 Logique Floue : Principes de Base et Définitions [LOU 97]

V.1.2.1 Sous-ensembles flous et terminologie

Soit U une collection continue ou discrète d'objets génériquement dénotés par $\{u\}$. U est appelé *univers de discours* et u représente l'élément générique de U .

Sous-ensemble flou

Un sous-ensemble flou (SEF) peut être vu comme une généralisation du concept de sous-ensemble ordinaire (sous-ensemble "booléen") dont la *fonction d'appartenance* (FA) f prend seulement deux valeurs $\{0,1\}$.

Ainsi, sur un univers de discours U , un SEF F est caractérisé par une FA μ_F prenant des valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, i.e. $\mu_F : U \rightarrow [0,1]$.

Remarque : Par abus de langage, un SEF est fort souvent confondu avec ensemble flou.

Considérons l'exemple de la figure 5.1 suivante :

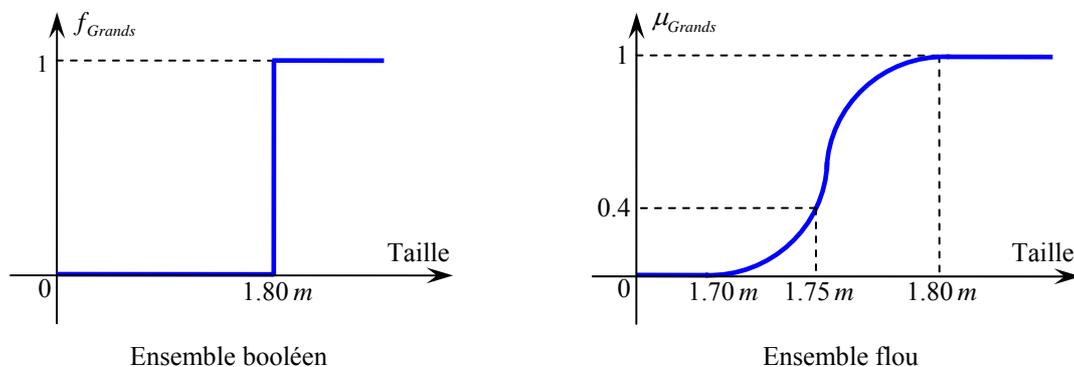


Figure 5.1 Représentation de la fonction "Grands" dans le cas booléen et flou

L'univers de discours de la variable "Taille" est l'ensemble des tailles possibles d'un individu. "Grands" est une *valeur linguistique* de cette variable.

Soit $1.75 m$ la taille de Mohamed. Dans le cas le sous-ensemble booléen, Mohamed n'appartient pas à la classe des "Grands". Dans le cas du SEF, il appartient à la classe des "Grands" avec un *degré d'appartenance* 0.4.

La notion de SEF évite, donc, l'utilisation arbitraire de limites rigides d'appartenance à des classes; il serait aberrant de considérer qu'un individu de $1.80 m$ est grand, mais qu'un autre de $1.795 m$ ne l'est pas.

Un SEF peut être représenté comme un ensemble de paires (élément générique, degré d'appartenance) ordonnées $F = \{(u, \mu_F(u)) \mid u \in U\}$ et on le notera:

- $F = \int_U \frac{\mu_F(u)}{u}$ si U est continu et infini,
- $F = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_F(u_i)}{u_i} = \frac{\mu_F(u_1)}{u_1} + \frac{\mu_F(u_2)}{u_2} + \dots + \frac{\mu_F(u_n)}{u_n}$ si U est discret et fini.

Dans les deux notations, la barre horizontale n'est pas un quotient, mais plutôt un délimiteur. En effet, le numérateur dans les deux notations est le degré d'appartenance au sous-ensemble F associé à l'univers de discours indiqué dans le dénominateur de chaque expression. Dans la première notation, le signe d'intégration ne représente pas une intégration algébrique mais plutôt une notation d'union ensembliste pour des variables continues. Dans la seconde notation, le symbole de sommation ne représente pas une sommation algébrique, mais plutôt une "union floue". De plus, les signes « + » ne représentent pas une addition algébrique mais une union théorique de fonctions.

La notion de SEF permet :

- la gradation de l'appartenance d'une variable à une classe définie, donc la description de situations intermédiaires entre le tout ou rien,
- l'utilisation de catégories aux limites mal définies (comme "petits" ou "grands"),
- un passage progressif d'une propriété à une autre (passage de "petits" à "grands"),
- l'utilisation de valeurs approximatives ("environ $1.80 m$ ").

Voici quelques caractéristiques essentielles qui distinguent les SEFs des sous-ensembles classiques (booléens) :

- *Support* : $\text{supp}(F) = \{u \in U \mid \mu_F(u) > 0\}$, c'est l'ensemble de tous les éléments u de U qui appartiennent au moins un peu au SEF F .
- *Point de commutation* : c'est le cas particulier où l'élément u de U est tel que $\mu_F = 0.5$.
- *Hauteur* : $h(F) = \sup_{u \in U} \{\mu_F(u)\}$, c'est le plus fort degré avec lequel un élément de U peut appartenir au SEF F . Très souvent, les fonctions d'appartenance (FAs) sont choisies normalisées en imposant $h(F) = 1$.
- *Noyau* : $\text{noy}(F) = \{u \in U \mid \mu_F(u) = 1\}$, c'est l'ensemble des éléments de U appartenant à F de façon absolue (avec un degré 1).

Un sous-ensemble classique est un SEF normalisé et identique à son noyau et son support : F classique (booléen) si $F = \text{supp}(F) = \text{noy}(F)$ et $h(F) = 1$.

Coupe de niveau α ou α -coupe

α -coupe(F) = $F_\alpha = \{u \in U \mid \mu_F(u) \geq \alpha\}$, c'est l'ensemble des éléments de U qui appartiennent à F avec un degré d'appartenance au moins égal à α .

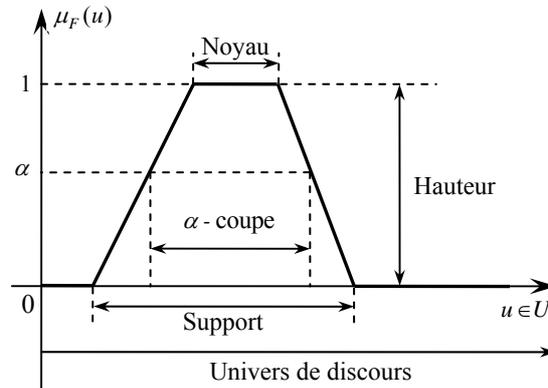


Figure 5.2 Support, hauteur, noyau et α -coupe d'un SEF

Singleton flou

Le SEF dont le support est un singleton dans U avec $\mu_F(u) = 1$ est appelé singleton flou (figure 5.3).

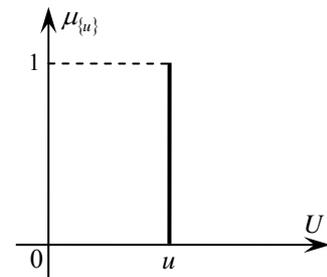


Figure 5.3 Singleton flou

Sous-ensemble flou normal

Un SEF F est convexe si $\forall u \in U, \max(\mu_F(u)) = 1$.

Sous-ensemble flou convexe

Un SEF F est convexe si $\forall u_1, u_2 \in U, \forall \lambda \in]0, 1[$, $\mu_F(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \leq \min(\mu_F(u_1), \mu_F(u_2))$.

Partition floue

N SEFs (F_1, F_2, \dots, F_N) définis sur l'univers de discours U forment une partition floue (figure 5.4) si

$$\forall u \in U, \sum_{i=1}^N \mu_{F_i}(u) = 1.$$

Une partition floue composée de SEFs convexes et normaux implique que pas plus de deux FAs se recouvrent.

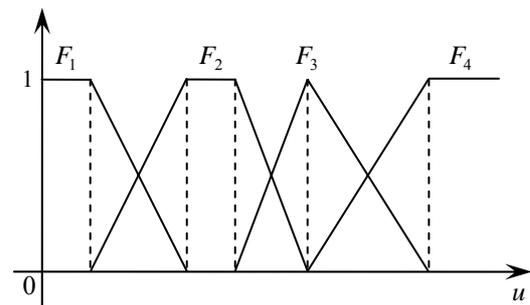


Figure 5.4 Exemple de partition floue

Variable linguistique

Une variable linguistique [ZAD 75] est généralement représentée par un triplet (x, U, T_x) où x est la variable elle-même (son nom), U son univers de discours et T_x l'ensemble des caractérisations floues de la variable x .

Considérons, par exemple, la variable *Taille* définie sur l'ensemble des entiers positifs et caractérisée par les SEFs *Petite*, *Moyenne* et *Grande*. La variable *Taille* est alors représentée par le triplet suivant : $(\text{Taille}, \mathbb{N}^+, \{\text{Petit}, \text{Moyen}, \text{Grand}\})$ (Figure 5.5).

Une personne mesurant 146 cm est de taille *Petite* avec un degré d'appartenance 0.4 (40 %) et de taille *Moyenne* avec un degré d'appartenance 0.6 (60 %).

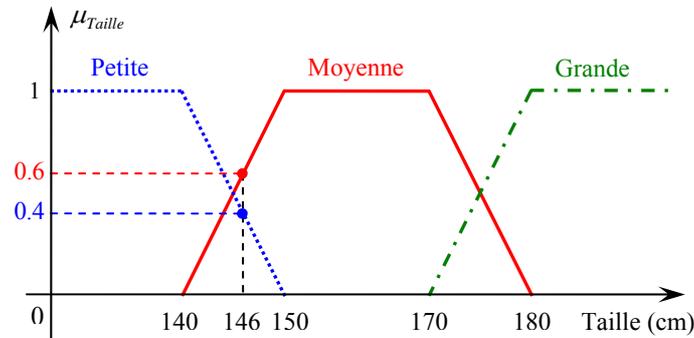


Figure 5.5 Représentation graphique des tailles floues

V.1.2.2 Opérations sur les sous-ensembles flous

Le concept de SEF, étant une généralisation de celui de sous-ensemble classique, il est nécessaire de définir les opérations équivalentes aux opérations booléennes.

Soient A et B deux SEFs dans U ayant, respectivement, μ_A et μ_B comme FAs.

Egalité et inclusion

- A est égal à B si $\forall u \in U \mu_A(u) = \mu_B(u)$
- A est inclus dans B si $\forall u \in U \mu_A(u) \leq \mu_B(u)$

Intersection et union

Rappel :

- Tout opérateur “t-norme” (noté T) est un opérateur d'intersection. Une telle norme triangulaire est une fonction $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie pour tout u, v, w de $[0, 1]$:
 - $T(u, v) = T(v, u)$ commutativité
 - $T(u, T(v, w)) = T(T(u, v), w)$ associativité
 - $T(u, v) \leq T(w, z)$ si $u \leq w$ et $v \leq z$ monotonie
 - $T(u, 1) = u$ élément neutre
- Tout opérateur “t-conorme” (noté \perp) est un opérateur d'union. Une telle co-norme triangulaire est une fonction $\perp : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie pour tout u, v, w de $[0, 1]$:
 - $\perp(u, v) = \perp(v, u)$ commutativité
 - $\perp(u, \perp(v, w)) = \perp(\perp(u, v), w)$ associativité
 - $\perp(u, v) \leq \perp(w, z)$ si $u \leq w$ et $v \leq z$ monotonie
 - $\perp(u, 0) = u$ élément neutre

La généralisation de ces opérations du contexte booléen vers le contexte flou n'est pas unique [MIZ 89]. Zadeh a proposé les opérateurs suivants (les plus souvent adoptés) :

- $\forall u \in U \mu_{A \cap B}(u) = \mu_{A \text{ ET } B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u))$ (intersection)
- $\forall u \in U \mu_{A \cup B}(u) = \mu_{A \text{ OU } B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u))$ (union)

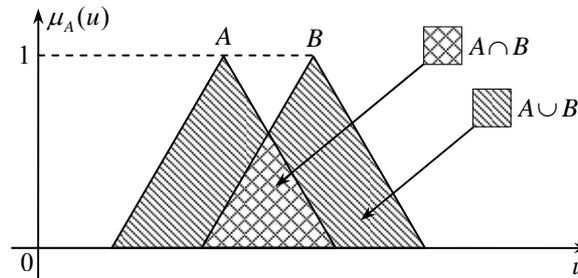


Figure 5.6 Exemple d'intersection et d'union de sous-ensembles flous

Les principales normes triangulaires t-normes et t-conormes sont présentées dans le tableau 5.1 suivant [LAC 97]:

Nom (date)	t-normes	t-conormes
Zadeh (1973)	$\min(u, v)$	$\max(u, v)$
Lukasiewicz (1976)	$\max(u + v - 1, 0)$	$\min(u + v, 1)$
Hamacher (1978) $\gamma > 0$	$\frac{u \cdot v}{\gamma + (1 - \gamma)(u + v - u \cdot v)}$	$\frac{u + v - (2 - \gamma)u \cdot v}{1 - (1 - \gamma)u \cdot v}$
Brandler et Kohout (1980)	$u \cdot v$	$u + v - u \cdot v$
Weber (1983)	$\begin{cases} u & \text{si } v = 1 \\ v & \text{si } u = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} u & \text{si } v = 0 \\ v & \text{si } u = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
Dubois et Prade (1986) $\chi \in [0, 1]$	$\frac{u \cdot v}{\max(u, v, \chi)}$	$\frac{u + v - u \cdot v - \min(u, v, 1 - \chi)}{\max(1 - u, 1 - v, \chi)}$

Tableau 5.1 Principales t-normes et t-conormes

Complémentation

$\forall u \in U \mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$ avec $A \cup \bar{A} \neq U$ et $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ (\bar{A} complément de A)

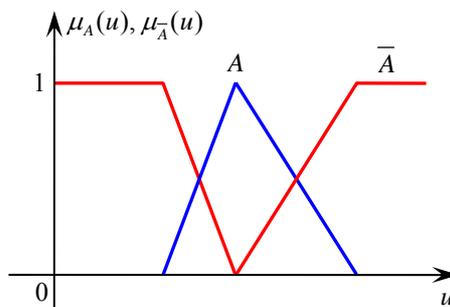


Figure 5.7 Exemple de complémentation d'un sous-ensemble flou

Produit cartésien

Soient A_1, A_2, \dots, A_n des SEFs, respectivement définis sur U_1, U_2, \dots, U_n . Leur produit cartésien

$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ est un SEF défini sur $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ ayant pour FA :

$$\forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U, \mu_A(u) = \min(\mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2), \dots, \mu_{A_n}(u_n))$$

V.1.2.3 Logique floue et raisonnement approximatif

Dans un raisonnement approximatif en logique floue, la représentation des connaissances est construite sur la base des variables linguistiques [ZAD 75].

Proposition floue

La connaissance experte est souvent traduite avec des règles du type “**Si** *⟨prémisse⟩* **alors** *⟨conclusion⟩*”. L’une des principales caractéristiques de la logique floue vient du fait que ces règles, appelées aussi règles d’*inférence*, sont susceptibles de représenter l’imprécis, si les prémisses et les conclusions sont exprimé&es avec des mots du langage naturel.

En logique floue, il existe deux familles de règles d’inférence :

- Les règles simples :

“Si u est A alors v est B ”

- Les règles graduelles :

“Souvent Si u est A , alors v est B ”

“Plus u est A , plus v est B ” ...

avec A et B des SEFs définis sur leurs univers de discours respectifs U et V , u et v eux variable floues prenant leurs valeurs linguistiques dans U et V .

Cette représentation suppose que les prémisses sont des contraintes sur les variables, et que la conclusion est calculée à travers un processus de propagation des contraintes comprenant trois étapes [ZAD 88] :

- l’implication floue
- l’inférence floue
- l’agrégation des règles.

Implication floue

L’implication floue permet le calcul du degré de vérité d’une proposition floue, c’est-à-dire la mesure de la conformité de cette proposition avec le contenu de notre connaissance de la réalité [DUB 85]. On peut aussi dire qu’elle quantifie la force de la liaison entre la prémisse et la conclusion de la règle. L’implication floue (notée \Rightarrow) est une généralisation de l’implication classique.

Soient la prémisse $P = “u \text{ est } A”$, la conclusion $Q = “v \text{ est } B”$ et la règle $R : P \Rightarrow Q : “Si u \text{ est } A \text{ alors } v \text{ est } B”$. Alors, le produit cartésien (traduction mathématique du produit cartésien) de $R : P \Rightarrow Q$, noté aussi $R = P \times Q$, est caractérisé par :

$\mu_R(u, v) = \mu_{P \times Q}(u, v) = \mathbf{imp}(\mu_P(u), \mu_Q(v))$, avec $u \in U$ et $v \in V$ où **imp** est l’opérateur du produit cartésien.

Il existe de nombreux et différents opérateurs d'implication floue (près de 40), mais, les plus souvent utilisés dans le domaine de la commande sont [MIZ 88, BOU 93] :

- l'implication de Mamdani (1974) : $\mu_R(u, v) = \mathbf{imp}(\mu_P(u), \mu_Q(v)) = \min(\mu_P(u), \mu_Q(v))$
- l'implication de Larsen (1980) : $\mu_R(u, v) = \mathbf{imp}(\mu_P(u), \mu_Q(v)) = \mu_P(u) \cdot \mu_Q(v)$

Inférence floue : le modus ponens généralisé

Soit la règle : “Si la puissance de la machine est importante, alors sa consommation en courant est élevée”. Cette règle doit pouvoir être utilisée pour une machine donnée dont on connaît précisément la puissance, qui n’est pas forcément typique de la caractérisation “importante”, et doit également fournir une conclusion relative à sa consommation en courant si la puissance de la machine n’est que relativement importante, par exemple. Dans la logique classique, la règle de raisonnement du *modus ponens* ne permettrait d’obtenir une conclusion que si l’on savait exactement que la puissance de la machine considérée est importante. Il faut donc modifier le modus ponens pour atteindre la souplesse de raisonnement souhaitée.

Le modus ponens trouve son équivalent (sa généralisation) flou dans le cadre du raisonnement approximatif sous la forme du *modus ponens généralisé* [ZAD 88]. Ce dernier permet de traiter, dans un même cadre, des connaissances exprimées de façon symbolique et des données purement numériques, tout en tenant compte de l’aspect graduel des caractérisations floues (si la donnée est très proche de la prémisse de la règle, la conclusion est très proche de la conséquence de la règle).

Etant donné une règle R et des informations relatives au fait observé (P), la conclusion (Q) est déterminée à partir de la loi de composition \circ , en appliquant le modus ponens généralisé :

$$\mu_Q(v) = \mu_{P \circ R}(v) = \sup_{u \in U} \{T[\mu_P(u), \mu_R(v)]\}$$

Voici une présentation formelle simple du modus ponens et de sa généralisation le modus ponens généralisé :

	<i>Logique classique</i>	<i>Logique floue</i>
Règle R	: Si u est A alors v est B	: Si u est A alors v est B
Assertion (fait observé) P	: u est A	: u est A'
Dédution Q	: v est B	: v est B'

Le SEF inféré B' se déduit de A' à travers la règle R :

$$\mu_{B'}(v) = \mu_{A' \circ R}(v) = \sup_{u \in U} \{T[\mu_{A'}(u), \mu_R(u, v)]\} = \sup_{u \in U} \{T[\mu_{A'}(u), \mathbf{imp}(\mu_A(u), \mu_B(v))]\}$$

Dans le domaine de la commande, c’est l’opérateur de Zadeh qui est le plus couramment utilisé :

$$\mu_{B'}(v) = \sup_{u \in U} \min[\mu_{A'}(u), \mu_R(u, v)] = \sup_{u \in U} \min[\mu_{A'}(u), \mathbf{imp}(\mu_A(u), \mu_B(v))]$$

Agrégation des règles

Le raisonnement précédent s’étend aux bases de règles comportant plusieurs propositions. Ces règles sont généralement (domaine de la commande) reliées par l’opérateur OU. Chaque règle est traitée séparément et les ensembles inférés, à partir de chaque proposition, sont agrégés pour définir l’ensemble final.

Formulation pour plusieurs règles élémentaires (les règles R_i sont du type “si u est A_i alors v est B_i ”) :

Règle floue R : $R = (R_1 \text{ OU } R_2 \dots \text{ OU } R_i \dots \text{ OU } R_n)$

Assertion (fait observé) P : u est A'

Déduction Q : v est B'

Le SEF inféré B' se déduit de A' à travers la règle R :

$$\mu_{B'}(v) = \mu_{A' \circ R}(v) = \sup_{u \in U} \{ \Gamma[\mu_{A'}(u), \mu_R(u, v)] \}$$

avec $\mu_R(u, v) = \mu_{R_1 \text{ OU } R_2 \dots \text{ OU } R_n}(u, v) = \perp [\mu_{R_1}(u, v), \mu_{R_2}(u, v), \dots, \mu_{R_n}(u, v)]$.

V.1.3 Commande Floue

Habituellement, une loi de commande est élaborée à partir d'une approche système basée sur l'utilisation des informations disponibles. Mais, dans l'hypothèse de la non disponibilité ou de la difficulté d'obtention d'un modèle mathématique du processus à commander, la connaissance ne peut provenir qu'uniquement de mesures des variables caractéristiques, et d'une description linguistique du fonctionnement du processus ou de la stratégie de son pilotage utilisée par des experts ou des opérateurs qualifiés. La connaissance disponible s'exprime alors dans un langage naturel et logique qu'il convient d'exploiter pour synthétiser une stratégie de commande.

Les approches conventionnelles (classiques) de l'automatique, nécessitant la disponibilité d'une modélisation mathématique explicite, étant inadaptées à l'utilisation d'une telle forme de connaissances, les contrôleurs flous (CFs), traduction littérale de la dénomination anglaise “Fuzzy Controllers”, sont tout à fait recommandés pour ce type de problématique. En effet, leur loi de commande est exprimée avec des règles linguistiques et offrent la capacité et la facilité d'intégration de données subjectives [YAG 94, PAS 98].

Une loi (un algorithme) de commande floue consiste en une collection de règles floues appelée base de règles. Plusieurs solutions peuvent être envisagées pour établir ces règles [LAC 97]:

- La méthode la plus utilisée pour la commande de systèmes de complexité importante est l'extraction des connaissances d'opérateurs humains. Elle peut être obtenue directement sous forme de règles énoncées par des experts dans la commande du processus ou bien à partir d'un jeu de données entrées-sorties représentatif du comportement de l'opérateur humain. Pour le second cas, il s'agit de construire un modèle flou des actions de commande prises par l'opérateur [TAK 85].
- A l'instar de la méthodologie usuelle en automatique conventionnelle, le contrôleur flou (CF) peut être élaboré sur la base d'un modèle flou du système à commander. On peut citer essentiellement deux méthodes : celle des règles à conclusion polynomiale [TAK 85] et celle du modèle d'état flou [TON 80, TOG 85]. L'inversion de ce modèle conduit directement à un CF. Cependant, l'utilisation de ce modèle inverse en tant que contrôleur n'est envisageable que lorsque le système à commander est à minimum de phase. Dans le cas contraire, cela conduirait à une instabilité du système en boucle fermée. L'utilisation à la fois directe et indirecte [BAV 96] (après inversion) du modèle flou du processus conduit à des lois de commande floue par modèle interne ou prédictive [BAB 95].

- Les connaissances des automaticiens sur le comportement des processus vis-à-vis de certaines classes d'entrées (par exemple les réponses temporelles) peuvent aussi être utilisées pour la réalisation de CFs [SUG 85, TAN 87]. Il existe également des règles d'équivalence entre les contrôleurs classiques de type PID et les CFs [FOU 92, MIZ 95, MAN 99]. Une table de règles très connue en régulation est celle de Mac Vicar-Whelan [MAC 76] utilisée avec succès dans plusieurs applications [LOU 97]. Ces contrôleurs sont des versions floues de contrôleurs usuels.

Ayant passé en revue, dans le paragraphe précédent, les principaux concepts et outils de la théorie des SEFs, nous pouvons à présent procéder au développement des notions principales constituant la base de conception d'un CF.

V.1.3.1 Description générale d'un contrôleur flou

La structure générale d'un processus à commander via un CF est illustrée par la figure 5.8 suivante [LOU 97, ADD 05] :

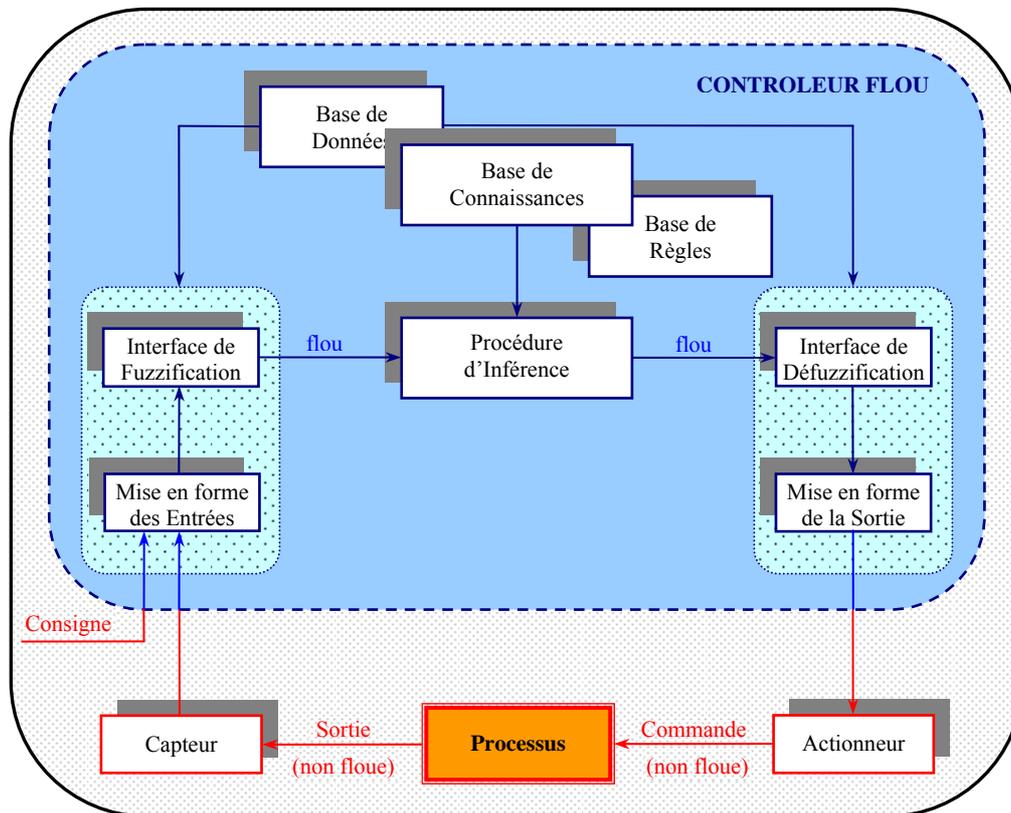


Figure 5.8 Schéma synoptique général d'un CF appliqué à la commande d'un processus

Ce schéma synoptique met, essentiellement, en évidence les parties constitutives de base d'un CF [LEE 90a, LEE 90b, PAS 98] :

- La variable caractéristique du processus à commander à savoir sa sortie prélevée et la consigne définissent les variables d'entrée du CF. La sortie de ce dernier est la commande à appliquer au processus.

- La base de connaissance est composée d'une base de données et d'une base de règles :
 - La base de données regroupe :
 - Les SEFs associés aux variables d'entrées (sortie) et leurs partitions sur leurs univers de discours respectifs régissant l'interface de fuzzification (défuzzification),
 - Les éléments réalisant la mise en forme des entrées (facteurs d'échelle (gains) pour la normalisation - calcul d'erreur et de variation d'erreur) et de la sortie (facteurs d'échelle (gains) pour la dénormalisation).
 - La base de règles contient des règles de la forme :

“SI (X_1 est A_1 et X_2 est A_2) ALORS (Y est B)”

X_1 , X_2 et Y étant des grandeurs physiques caractéristiques du système et du problème de commande. A_1 et A_2 sont des labels (valeurs) linguistiques alors que B peut être une valeur linguistique (contrôleur de type Mamdani) ou algébrique (contrôleur de type Sugeno).
- La procédure d'inférence traite les données d'entrée floues et les règles de décision pour inférer les actions (décisions) de commande floue en employant l'implication floue et les lois d'inférence de la logique floue.

On peut définir et décrire un CF comme étant un système à base de connaissances particulier, utilisant un raisonnement en profondeur dans une procédure de chaînage avant des règles (activation des règles par les prémisses). Toutes les règles activables (prémisses caractérisées par un degré d'appartenance non nul) sont activées. On considère ensuite “une moyenne” sur le résultat de ces règles pour engendrer une décision finale.

Base de connaissances

La base de connaissances comprend une connaissance du domaine d'application et des objectifs de la commande prévue. Elle consiste en une “base de données” et une “base de règles de commande linguistique floue” :

Base de données

La base de données fournit les définitions nécessaires utilisées pour définir les règles de commande linguistique et la manipulation des données floues dans le CF. Cette base régit le fonctionnement des blocs *mise en forme des entrées*, *interface de fuzzification*, *interface de défuzzification* et *mise en forme de la sortie*.

Base de règles

La base de règles caractérise les buts et la stratégie de la commande émis par les experts du domaine au moyen d'un ensemble de règles linguistiques de commande. Elle comporte une table de décision fournissant les règles de décision de base nécessaires au déroulement de la *procédure* ou du *mécanisme d'inférence*.

Mise en forme des entrées

Cette première étape permet le traitement des variables d'entrée du CF, par exemple, calcul d'erreurs et de variation d'erreurs. L'utilisation d'univers de discours normalisés (compris entre -1 et 1) nécessite une transformation d'échelle. Elle est réalisée par l'intermédiaire de facteurs d'échelle (gains de normalisation)

transformant les valeurs des grandeurs physiques des entrées en des valeurs normalisées appartenant à l'intervalle [-1, 1].

Interface de fuzzification

Dans les applications de commande floue, les données observées sont habituellement physiques (réelles numériques). Or, le traitement de données dans un CF est basé sur la théorie des SEFs; les données observées nécessitent donc une fuzzification, c'est-à-dire, une projection des variables physiques réelles sur des SEFs caractérisant les valeurs linguistiques prises par ces variables avec des degrés d'appartenance à tel ou tel SEF sur l'univers de discours correspondant (voir exemple de la figure 5.9).

Ces SEFs sont caractérisés par leurs FAs ayant des formes arbitraires, pouvant être triangulaires (voir figure 5.10), trapézoïdales, exponentielles, gaussiennes, Il est à noter que les formes triangulaires sont les plus fréquemment utilisées en commande au vu de leur facilité de programmation. Par ailleurs, des études comparatives de commande en boucle fermée ont donné lieu, selon différentes formes de FAs, à des résultats pratiquement similaires [LAC 97, LOU 97]. Quant à leur nombre, partitionnant l'univers de discours, il est généralement impair car elles se répartissent symétriquement autour de zéro (3, 5 et 7 sont des valeurs courantes). L'exemple de la figure 5.10 montre une répartition linéaire de 7 FAs de forme triangulaire symétrique dont chacune est affectée d'une valeur linguistique, avec :

- | | | |
|----------------------|------------|----------------------|
| NG : "Négatif Grand" | | PP : "Positif Petit" |
| NM : "Négatif Moyen" | Z : "Zéro" | PM : "Positif Moyen" |
| NP : "Négatif Petit" | | PG : "Positif Grand" |

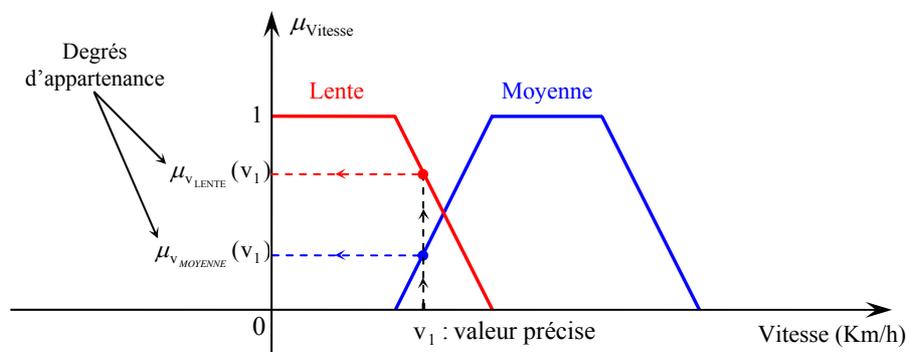


Figure 5.9 Exemple de fuzzification d'une valeur numérique précise

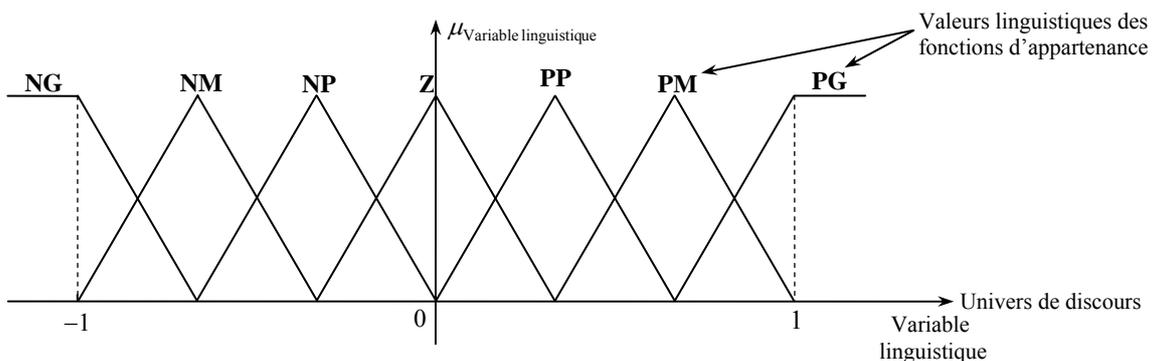


Figure 5.10 Exemple de fonctions d'appartenance triangulaires

Procédure d'inférence

Le fonctionnement de ce bloc d'inférence, noyau du CF, repose sur les données fournies par la base des règles. Le raisonnement type Mamdani est utilisé pour illustrer la procédure d'inférence correspondante.

Cette méthode se base sur l'utilisation de l'opérateur "min" pour la combinaison des prémisses et pour l'implication et l'opérateur "max" pour l'agrégation des règles.

Le raisonnement est exposé par deux règles simples :

Si x_1 est ZE et x_2 est ZE **alors** u est ZE

Si x_1 est PP et x_2 est PP **alors** u est PP

Pour un couple d'observation (x_{1_0}, x_{2_0}) , l'ensemble inféré (u') est caractérisé par :

$$\mu_{u'}(u) = \max\{\min[\mu_{ZE}(x_{1_0}), \mu_{ZE}(x_{2_0}), \mu_{ZE}(u)], \min[\mu_{PP}(x_{1_0}), \mu_{PP}(x_{2_0}), \mu_{PP}(u)]\}$$

Chaque règle est activée séparément et les conclusions sont agrégées pour définir le SEF de u' .

Ce raisonnement, facilement généralisable à plusieurs règles, est illustré par la figure 5.11.

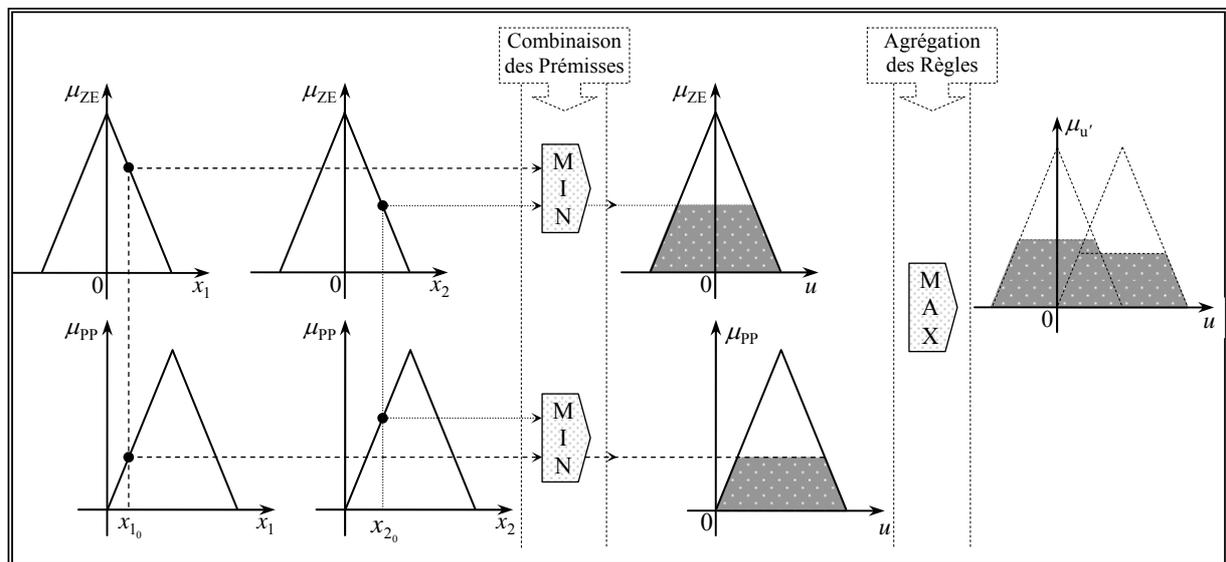


Figure 5.11 Illustration de la méthode de raisonnement de Mamdani pour deux règles

Interface de défuzzification

Le résultat de l'agrégation des règles est une décision sous forme d'un SEF caractérisé par la FA $\mu_{u'}(u)$.

Etant donné que l'organe de commande (actionneur) ne s'accommode pas d'un tel genre de décision puisqu'il nécessite une grandeur physique bien déterminée (précise), il est impératif de réaliser la transformation de cette information floue en une grandeur de commande précise; c'est la phase de défuzzification dont les informations nécessaires à son exécution sont puisées dans la base de données.

Plusieurs méthodes sont applicables [DRI 93, JAM 93, BUH 94, PAS 98], parmi lesquelles :

- méthode de la hauteur ou du maximum
- méthode du centre de gravité
- méthode du premier des maxima
- méthode du centre des aires
- méthode du dernier des maxima
- méthode du centre de la plus grande surface
- méthode de la moyenne des maxima
- méthode du centre des maxima

Dans ce qui suit, nous exposons celles qui sont les plus utilisées en commande.

Méthode de la hauteur et ses variantes

La méthode de la hauteur consiste à choisir comme grandeur de commande la valeur du maximum (voir figure 5.12).

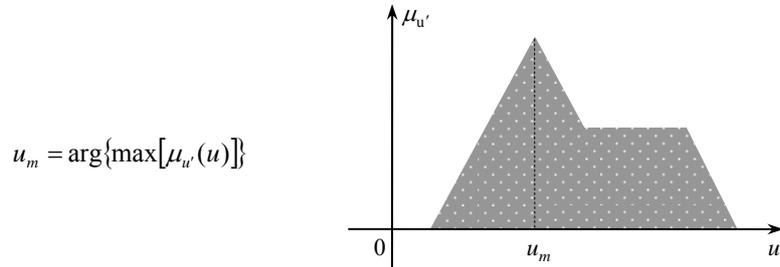


Figure 5.12 Exemple de défuzzification par la méthode de la hauteur

Dans le cas où la FA $\mu_{u'}(u)$ a plus d'un maximum, on a le choix entre le *premier*, le *dernier* ou la *moyenne* des *maxima*. Une illustration de toutes ces variantes est donnée par la figure 5.13.

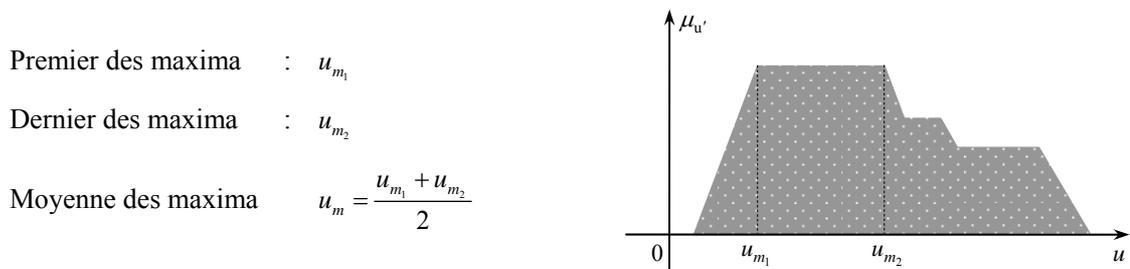


Figure 5.13 Exemple d'application des variantes de la méthode de la hauteur

Il est à noter que ces méthodes ont l'avantage de ne nécessiter que peu de calculs mais présentent l'inconvénient de pouvoir engendrer des discontinuités dans la loi de commande. Ceci explique pourquoi elles ne sont pas fréquemment utilisées en commande floue.

Méthode du centre de gravité

C'est la méthode la plus utilisée dans les CFs. Elle génère le centre de gravité de l'espace flou délimité par la distribution de la FA résultante représentant l'action de commande. Cette méthode procure pratiquement les meilleurs résultats mais elle est aussi la plus coûteuse en calculs.

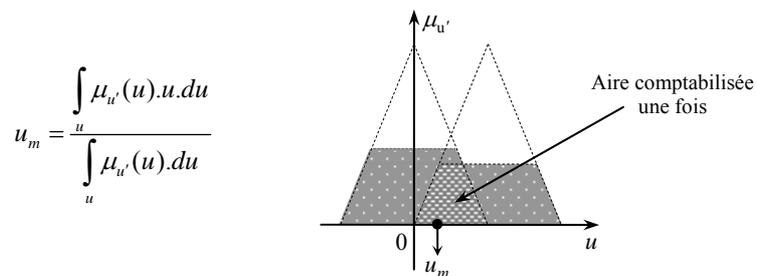


Figure 5.14 Illustration de la défuzzification par la méthode du centre de gravité

Méthode du centre des aires

Cette méthode, similaire à la précédente mais plus simple, ne nécessite pas le calcul de $\mu_{u'}(u)$. L'idée est de considérer la contribution de chaque aire individuellement. L'ensemble u' est alors construit à partir de chaque aire (voir figure 5.15). A noter que les aires qui se recouvrent, si elles existent, sont comptabilisées plus d'une fois.

$$u_m = \frac{\int_u \sum_{i=1}^n \mu_{u'_i}(u).du}{\int_u \sum_{i=1}^n \mu_{u'_i}(u).du}$$

avec $i = 1$ à n : le nombre d'aires

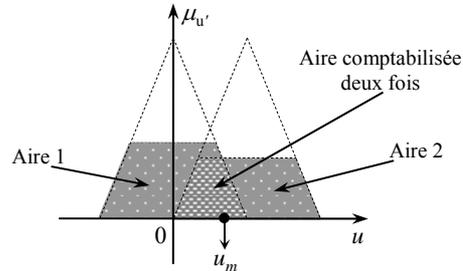


Figure 5.15 Illustration de la défuzzification par la méthode du centre des aires

Méthode du centre de la plus grande surface

Cette méthode consiste à calculer le centre de gravité de la plus grande surface.

Méthode du centre des maxima

Le maximum de chaque contribution (μ'_k) est déterminé. La commande à appliquer est leur moyenne pondérée vis-à-vis des degrés d'activation (voir figure 5.16).

$$u_m = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{u'_i}(u_{m_i}).u_{m_i}}{\sum_{i=1}^n \mu_{u'_i}(u_{m_i})}$$

avec $i = 1$ à n : le nombre de maxima

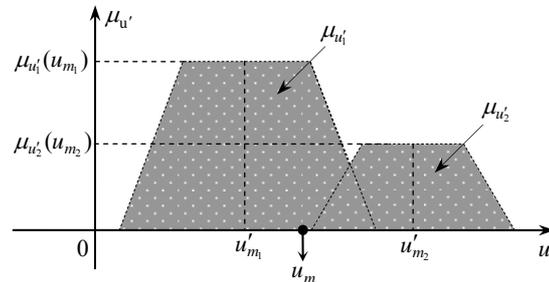


Figure 5.16 Illustration de la défuzzification par la méthode du centre des maxima

Mise en forme de la sortie

Ce dernier bloc du CF, régi par la base des données, permet de transformer (“dénormaliser”) les valeurs normalisées de la variable de commande en des valeurs en conformité avec son domaine physique d'application. Il permet aussi d'obtenir des effets particuliers (proportionnel, intégral, ...) [BUH 94].

V.2 ALGORITHMES GENETIQUES

V.2.1 Introduction

Malgré l'évolution permanente des calculateurs et les progrès fulgurants de l'informatique, il existera certainement toujours, pour la résolution d'un problème difficile, une taille critique au dessus de laquelle même une énumération partielle des solutions admissibles devient prohibitive. Compte tenu de ces difficultés, la plupart des recherches dans le domaine de l'optimisation combinatoire se sont orientées vers le développement de méthodes *heuristiques* et *métaheuristiques*.

Une heuristique peut être conçue pour résoudre un type de problème donné, ou bien être conçue comme une méthode générale, qui peut être adaptée à divers problèmes d'optimisation. Dans le second cas, elle est désignée par le terme *métaheuristique*.

Les méthodes *métaheuristiques* se divisent en deux grandes catégories:

Méthodes de voisinage [SEV 01]: Elles se basent sur le principe que la recherche de la solution optimale, parmi un grand nombre de solutions à vérifier, est difficile à réaliser aléatoirement. Il serait, donc, plus judicieux de guider la recherche et se restreindre à un chemin précis (région de l'espace des solutions à explorer). L'ensemble des solutions partageant une propriété commune avec la solution courante (la meilleure trouvée) est appelé *voisinage*. Parmi ces méthodes, on peut citer le *Recuit Simulé* [KIR 83] et la *Recherche Tabou* [GLO 97].

Méthodes évolutives [DRE 03]: Ce sont des méthodes d'optimisation stochastique inspirées puis développées à partir de l'observation de phénomènes biologiques. Elles sont caractérisées par une "population" initiale de solutions, générée aléatoirement. Cette dernière sera améliorée au fil des "générations". Ainsi, de meilleures solutions sont continuellement produites. Ces dernières, à leurs tours, constitueront une nouvelle génération (espace de solutions). Les méthodes évolutives les plus utilisées sont : les *Algorithmes Génétiques* [GOL 89], l'Optimisation par *Colonies de Fourmis* [DOR 96] et l'Optimisation par *Colonies d'Abeilles* [TER 00, PHA 06].

Les algorithmes génétiques (AGs) [GOL 89, WHI 93, MAN 96, SCH 01] sont des algorithmes d'optimisation globale stochastique. Ils sont basés sur l'exploration aléatoire de l'espace de solutions. Pouvant être qualifiés de métaphore simplifiée de l'évolution biologique, ils tentent de modéliser et de simuler la capacité qu'ont les organismes vivants à s'adapter à leur environnement et le fait que les individus les mieux adaptés aient plus de chance de survivre et de se reproduire [DAR 59]. Ainsi, leurs caractéristiques seront globalement, reproduites dans les générations suivantes.

Ces algorithmes s'inspirent de la théorie, Darwinienne, de l'évolution des espèces [DAR 59]. Ils en reprennent, d'ailleurs le vocabulaire. Ainsi, on parlera d'*individus* formant une *population*, de *chromosome* représentant une solution potentielle et faisant office d'individu. Ce chromosome est constitué de *gènes* qui contiennent les caractéristiques héréditaires de l'individu. On parlera aussi d'opérateurs génétiques telles que *sélection*, *croisement*, *mutation*, ... qui agissent sur les individus avec certaines probabilités afin de mieux explorer l'espace de recherche.

Le processus d'un algorithme génétique (AG) (figure 5.17) consiste à faire évoluer, à partir d'un tirage initial, un ensemble de points de l'espace des solutions (individus) vers le ou les optima d'un problème d'optimisation combinatoire. Le processus s'exécute en itérant une population de taille constante N . Par analogie avec la génétique, on parle alors de générations successives. Afin de faire évoluer ces populations de la génération k à la génération $k+1$, l'AG se base sur les trois opérations : *sélection*, *croisement* et *mutation*. Ces opérations ou opérateurs génétiques agissent sur tous les individus de la $k^{\text{ème}}$ génération. Pour chaque génération, l'AG s'attache à sélectionner les meilleurs individus selon un critère ou fonction d'évaluation ou encore fonction d'optimisation appelée *fitness* ou *adaptation*. L'adaptation ou fitness d'un individu dépend, donc, d'une fonction de coût; elle exprime sa capacité ou ses chances de survivre et de se reproduire.

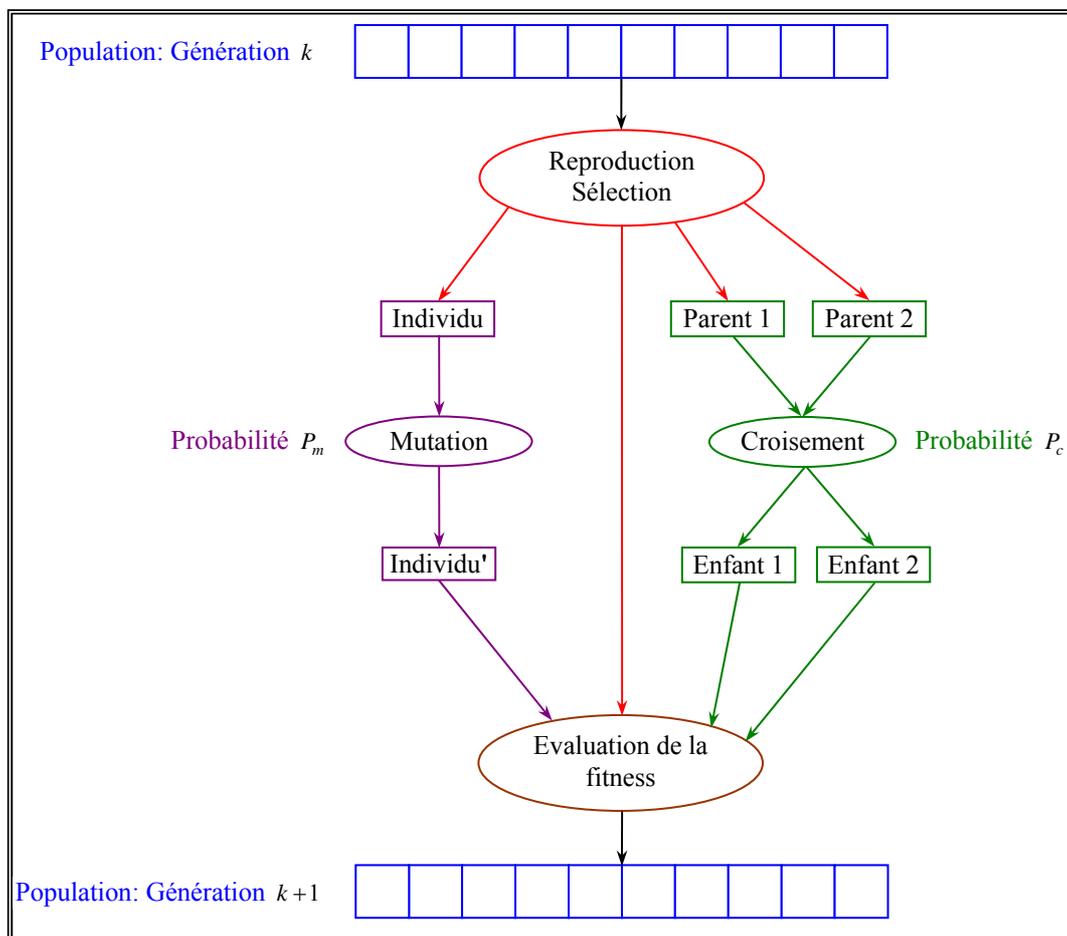


Figure 5.17 Principe général d'un algorithme génétique

La première formulation rigoureuse des principes généraux des AGs est due à John H. Holland [HOL 75]. La parution de l'ouvrage de David Goldberg [GOL 89] qui décrit l'utilisation des AGs dans le cadre de la résolution de problèmes concrets a permis la vulgarisation de ces derniers et a marqué le début d'un nouvel intérêt pour cette technique d'optimisation.

Ayant été reconnu comme une approche valide des problèmes nécessitant une exploration performante, et économique du point de vue calcul, les AGs sont maintenant appliqués plus largement aux domaines d'affaires, à la recherche scientifique,

Ajouté à cela, les AGs risquent moins d'être piégés dans des minima locaux comme les algorithmes classiques (recuit simulé, recherche tabou,...) du fait qu'ils explorent, en parallèle, un ensemble de solutions possibles des problèmes traités.

Les AGs diffèrent des algorithmes classiques d'optimisation et de recherche essentiellement en quatre points fondamentaux :

- Les AGs utilisent un codage des éléments de l'espace de recherche et non pas les éléments eux-mêmes.
- Les AGs recherchent une solution à partir d'une population de points et non pas à partir d'un point unique.
- Les AGs n'imposent aucune régularité sur la fonction d'évaluation (continuité, dérivabilité, convexité, ...).
- Les AGs ne sont pas déterministes; ils utilisent des règles de transition probabilistes.

V.2.2 Fondements, Définitions et Principes de Base

Les AGs, qui sont une transcription directe du processus naturel d'évolution au monde de l'informatique, sont essentiellement fondés sur :

- Une représentation chromosomique des solutions du problème.
- Une méthode pour générer une population initiale de solutions.
- Une méthode d'évaluation qui classe les solutions selon leurs aptitudes.
- Des opérateurs génétiques, qui définissent la manière dont les caractéristiques des parents sont transmises aux descendants.

V.2.2.1 La représentation chromosomique - Codage des données

C'est un moyen de coder les solutions d'un problème ou encore les individus. Chaque solution est constituée d'une chaîne de symboles appartenant à un alphabet à priori de petite taille. Dans les AGs, le symbole a un rôle similaire à celui du gène dans la génétique naturelle.

En général, chaque individu (solution) est représenté par une chaîne binaire de 0 et de 1. Le choix d'un code doit tenir compte de la complexité du processus de codage/décodage qui peut ralentir les calculs et influencer considérablement la convergence de l'AG tout entier.

Historiquement, le codage utilisé par les AGs était présenté sous forme de chaînes de bits contenant toute l'information nécessaire à la description d'un point dans l'espace d'état [DEL 95, MAN 96, SCH 01, DUR 04]. Ce type de codage a pour intérêt de permettre de créer des opérateurs de croisement et de mutation simples. C'est également en utilisant ce type de codage que les premiers résultats de convergence théorique ont été obtenus.

Cependant, ce type de codage n'est pas toujours bon comme le montrent les deux exemples suivants :

- Deux éléments voisins en terme de distance de Hamming ne codent pas nécessairement deux éléments proches dans l'espace de recherche. Cet inconvénient peut être évité en utilisant un codage de Gray.

- Pour des problèmes d'optimisation dans des espaces de grande dimension, le codage binaire pourrait rapidement devenir mauvais. Généralement, chaque variable est représentée par une partie de la chaîne de bits et la structure du chromosome n'a pas alors forcément la structure du problème.

Les AGs utilisant des vecteurs réels [GOL 91, WRI 91] évitent ce problème en conservant les variables du problème dans le codage de l'élément de population sans passer par le codage binaire intermédiaire. La structure du problème est conservée dans le codage.

Il existe deux types de difficultés pour le choix du codage. D'une part celui-ci doit pouvoir être adapté au problème de façon à limiter au mieux la taille de l'espace de recherche (espace de solutions), et aussi de façon que les nouveaux individus engendrés par les opérateurs génétiques (croisement, mutation, ...) soient souvent les plus significatifs possible; c'est à dire qu'ils puissent coder des solutions valides en respectant les contraintes du problème à résoudre.

Le choix d'un codage approprié est un élément critique dont dépend grandement l'efficacité d'un AG [GOL 91, DEL 95].

Un individu est défini par son *génotype*, c'est à dire une structure de données. Ce génotype est exprimé par la fonction d'évaluation pour obtenir son *phénotype*. Celui ci indique l'aptitude de l'individu à substituer dans son environnement (à se reproduire).

Le génotype est constitué d'un ensemble de gènes. Chaque gène peut prendre un certain nombre de valeurs dénommées *allèles*. Pour une représentation binaire par exemple : les gènes sont les bits et les allèles auront pour valeurs 1 et 0.

V.2.2.2 Génération de la population initiale

Comme déjà cité, les AGs manipulent un ensemble de solutions à la fois; pour cela, on doit avoir au départ une population initiale de solutions. Celle-ci est générée soit d'une façon aléatoire, soit à l'aide d'autres méthodes d'optimisation ou encore à base d'heuristique spécifique au problème.

Le choix de la population initiale d'individus conditionne fortement la rapidité de convergence de l'algorithme. Si la position de l'optimum dans l'espace d'état est totalement inconnue, il est naturel de générer aléatoirement des individus en faisant des tirages uniformes dans chacun des domaines associés aux composantes de l'espace d'état en veillant à ce que les individus produits respectent les contraintes [MIC 91]. Si par contraintes on entend que des informations a priori sur le problème sont disponibles, il paraît bien évidemment naturel de générer les individus dans un sous domaine particulier afin d'accélérer la convergence. Dans l'hypothèse où la gestion des contraintes ne peut se faire directement, les contraintes sont généralement incluses dans le critère à optimiser sous forme de pénalités [DEL 95].

V.2.2.3 La fonction d'évaluation

Elle prend en argument l'individu et lui associe un coût de performance. Souvent appelée "fitness", elle prend ses valeurs dans \mathbb{R}^+ . Cette fonction doit guider l'algorithme vers l'optimum en réalisant implicitement une pression de sélection dans cette direction. De plus, l'efficacité d'un AG s'appuie pour une grande part, sur la qualité de cette fonction. La mise au point d'une bonne fonction

d'adaptation doit respecter plusieurs critères qui se rapportent à sa complexité et à la satisfaction des contraintes du problème. Lorsque la fonction d'adaptation apparaît excessivement complexe, consommant une importante puissance de calcul, la recherche d'une approximation plus simple est souhaitable.

V.2.2.4 Élitisme

Les solutions optimales peuvent être perdues à cause du croisement et de la mutation, en plus de l'absence de garantie pour que ces opérations préservent le meilleur fitness. Une stratégie élitiste consiste à conserver d'une génération à l'autre, dans la population, au moins l'individu ayant la meilleure adaptation. Dans ces modèles, le meilleur individu d'une population est sauvé avant que les opérations aient lieu. Après que la nouvelle population se soit formée et évaluée, on l'examine pour voir si cette meilleure structure a été préservée. Sinon, la copie sauvée est réinsérée de nouveau dans la nouvelle population à la place du membre le plus faible. L'AG effectue les opérations sur cette même nouvelle population.

V.2.2.5 Les opérateurs génétiques

Ces opérateurs, qui sont la base des AGs, définissent la manière dont les individus se recombinent et s'agencent pendant la phase de reproduction.

Les opérateurs qu'on retrouve le plus souvent sont : la sélection, le croisement et la mutation.

A. Sélection ou reproduction

A l'inverse d'autres techniques d'optimisation, les AGs n'ont pas besoin de connaître ou d'estimer les dérivées de la fonction objectif, ce qui rend leur domaine d'application plus vaste. Aucune hypothèse sur la continuité n'est non plus requise. Néanmoins, dans la pratique, les AGs sont sensibles à la régularité des fonctions qu'ils optimisent [DUR 04].

Le peu d'hypothèses requises permet de traiter des problèmes très complexes. La fonction à optimiser peut ainsi être le résultat d'une simulation.

Cette opération est fondée sur le principe d'adaptation de chaque individu d'une population à son environnement (à un problème donné donc), suivant la théorie de la sélection naturelle introduite par Charles Darwin [DAR 59]. Ainsi, seuls les individus les plus aptes à répondre à certains critères seront sélectionnés pour survivre et se multiplier.

Dans le cas des AGs, on associe au problème une fonction d'évaluation "*fitness*" de cette adéquation des individus avec la question posée. On va évaluer cette fonction pour chaque chromosome d'une population, et seuls ceux dont la qualité sera suffisante seront conservés d'une génération à une autre. La sélection permet, donc, d'identifier statistiquement les meilleurs individus d'une population et d'éliminer les mauvais qui seront remplacés par d'autres individus. Il s'agit d'une stratégie dite *élitiste*.

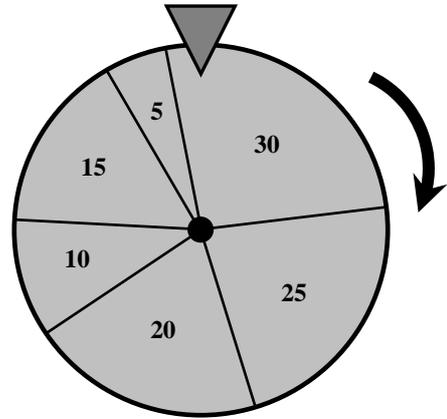
On trouve dans la littérature un nombre important de principes de sélection plus ou moins adaptés aux problèmes qu'ils traitent. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes attachés à tester et évaluer les deux principales méthodes de sélection suivantes qui sont, d'ailleurs, les plus couramment utilisées:

- Méthode de la *Roue de loterie (Roulette wheel selection)* [GOL 89] ;
- Méthode *Stochastique du reste (Stochastic remainder without replacement selection)* [GOL 89].

Principe de l'algorithme de sélection "Roue de loterie"

Un algorithme notoire de sélection est le prélèvement stochastique avec remplacement, généralement connu sous le nom d'algorithme *Roue de Loterie*. Le principe de cette méthode est analogue au fonctionnement d'une roue de Loterie (figure 5.18).

Figure 5.18 Roue de Loterie



Chaque individu dans une population est assigné à un secteur de la roue, la taille (surface) de ce secteur étant proportionnelle à la fitness de l'individu (sa chance ou probabilité de survie). La taille ou fitness relative est donnée par la formule :

$$Ps_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_j}$$

où f_i est la valeur de la fonction d'évaluation pour l'individu i (la fitness) et f_j est la valeur de la fonction d'évaluation pour l'individu j .

On fait tourner la roue N fois (N nombres aléatoires générés) et à chaque fois, l'individu pointé par l'indicateur est sélectionné (reproduit). Ceci a permis donc de reproduire le nombre requis d'individus pour former une population de taille N . A priori, cette technique permet de reproduire les individus proportionnellement à leur adaptation (fitness relative). Mais, dans le cas d'une population de petite taille, la sélection devient biaisée à cause du petit nombre de tirages effectués. On peut aussi dire que l'inconvénient de cette approche est qu'elle ne garantit pas la représentation, dans la prochaine génération, des individus les mieux adaptés.

Principe de l'algorithme de sélection "Stochastique du reste"

La sélection *stochastique du reste* est un autre algorithme très connu qu'on rencontre souvent et qui remédie au problème évoqué dans la *Roulette wheel selection*. Dans cette méthode l'espérance du nombre de fois choisi est calculée pour chaque individu. En d'autres termes, on associe à chaque individu le rapport R_i de sa fitness sur la moyenne des fitness (i.e. N fois sa fitness relative) :

$$R_i = \frac{f_i}{\left(\frac{\sum_{j=1}^N f_j}{N} \right)} = N.Ps_i$$

On prend, ensuite, sa partie entière $E(R_i)$ et l'individu est reproduit de manière déterministe exactement $E(R_i)$ fois. Enfin, on exécute la *Roulette wheel selection* sur tous les individus affectés des fitness $R_i - E(R_i)$ pour compléter la nouvelle population. Ce principe de sélection est très souvent plus efficace que le précédent sur les petites populations.

On applique très souvent le principe d'élitisme lors du processus de sélection en conservant systématiquement le meilleur individu de la population courante dans la génération suivante, sans lui faire subir d'opérateurs de croisement ou de mutation qui pourraient le détruire. En outre, ce principe confère à un AG la propriété de croissance monotone de la fitness du meilleur individu de la population au cours des générations.

En fin de la sélection, on aura une nouvelle population appelée population intermédiaire qui est constituée des individus ayant les bonnes valeurs d'adaptation qui ont été sélectionnés plusieurs fois, et les mauvais auront disparus de la population.

B. Croisement (Crossover)

Après la phase de sélection, l'opérateur de croisement (*crossover*) reproduit de nouveaux individus à partir de couples de parents pris aléatoirement avec la probabilité P_c parmi les individus qui ont survécu. En général P_c varie entre 0.25 et 0.90.

Le processus se présente comme suit :

Pour chaque individu de la population Générer un réel $r \in [0, 1]$ Si $r < P_c$ alors l'individu est marqué pour un croisement
--

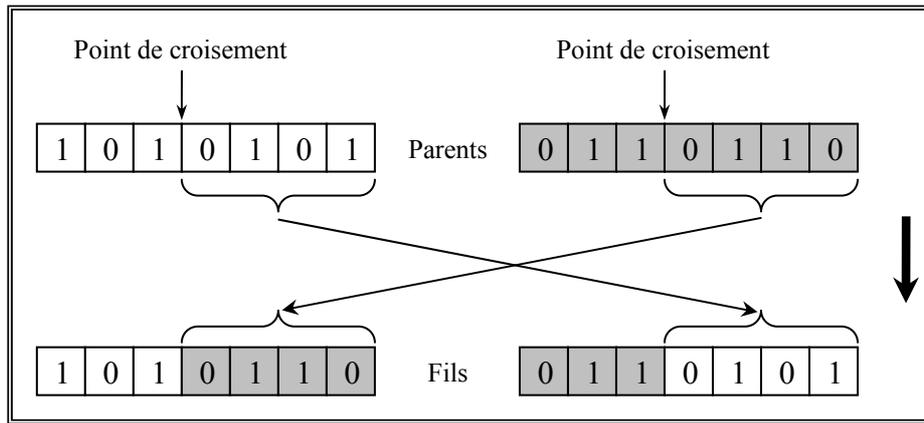
Les individus marqués sont pris deux à deux pour subir l'opération de croisement.

Le principe du croisement consiste à échanger les gènes des parents afin de donner des enfants qui portent des propriétés combinées. Bien qu'il soit aléatoire, cet échange d'informations offre aux AGs une part de leur puissance. Quelques fois, de « bons » gènes d'un parent viennent remplacer les « mauvais » gènes d'un autre et créent un fils mieux adapté que ses parents. Ce mécanisme ne permet pas uniquement d'explorer l'espace mais d'exploiter les individus.

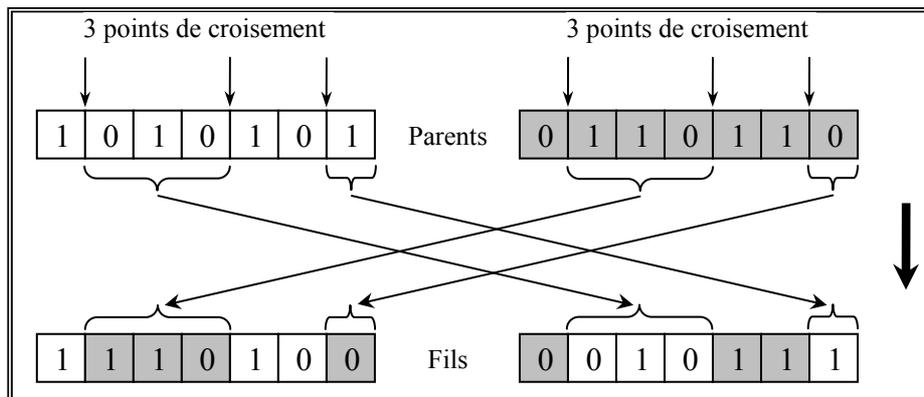
Cette opération a, donc, pour but d'enrichir la diversité de la population en manipulant, par divers croisements, la structure des chromosomes [QI 93]. Classiquement, les croisements sont envisagés avec deux parents et génèrent deux enfants. Dans ce qui suit, les trois principales techniques de croisement sont présentées :

Technique du Slicing crossover

La méthode de croisement fondamentale est appelée *slicing crossover* [HOL 92] ou croisement à découpage. Selon cette technique, on tire aléatoirement un point de croisement inter-gènes dans chacun des chromosomes des parents et on intervertit les parties se trouvant de part et d'autre de ce point. On obtient ainsi deux fils qui héritent des propriétés de l'un et de l'autre des deux parents conformément au schéma de la figure 5.19.

Figure 5.19 Principe du *slicing crossover*Technique du *k*-point slicing crossovers

Le mécanisme du *slicing crossover* peut être vu comme présentant l'inconvénient de privilégier les extrémités des individus et entraîner, donc, la génération de fils plus ou moins proches de leurs parents. Pour cela, il serait plus judicieux d'étendre ce principe en découpant le chromosome non pas en 2 sous-chaînes mais en 3, 4, ...etc. Cette technique, dite *k*-point *slicing crossovers* [BRI 91], consiste en la considération de *k* points de croisement au lieu d'un seul conformément au schéma de la figure 5.20 qui montre un exemple d'application du *3-point slicing crossover*.

Figure 5.20 Principe du *3-point slicing crossover*

Les croisements "1 point" et "2 points" sont couramment employés en pratique pour leur simplicité et leur bonne efficacité [DRE 03].

Technique du croisement uniforme [SYS 89]

Ce mécanisme de croisement peut être vu comme un croisement multi-points dont le nombre de points de croisement est indéterminé a priori. Il utilise une chaîne de bits générée aléatoirement, appelée masque, de même longueur que les chromosomes des individus (voir figure 5.21). Les gènes (bits) de la progéniture (les deux fils) sont formés à partir de ceux des individus initiaux (parents) en fonction de la valeur du bit correspondant du masque. Par exemple, en parcourant les bits du masque, lorsque la valeur du bit vaut 1, la valeur de bit correspondant du premier parent est affectée au bit de même ordre du deuxième fils alors que celle du deuxième parent est affectée au bit du premier fils. La procédure est inversée si le bit du masque

est 0 (c'est à dire que l'affectation du bit du premier fils viendra du premier parent et celle du bit du deuxième fils viendra du deuxième parent). Le croisement uniforme a les avantages de simplicité, de bonne efficacité [DAV 91].

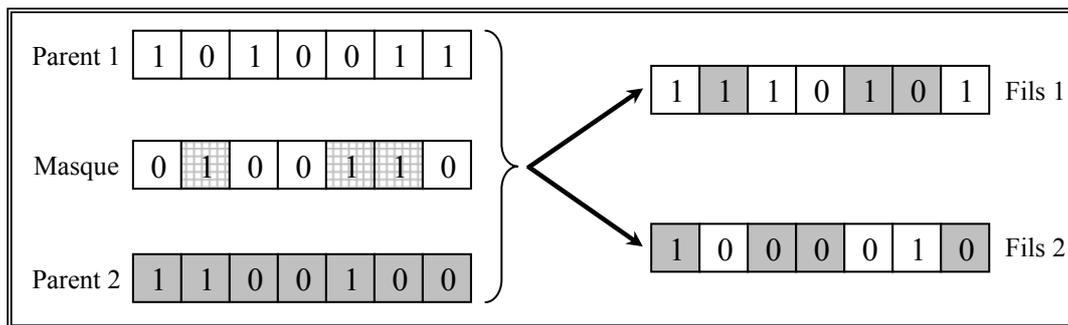


Figure 5.21 Principe du *croisement uniforme*

Il n'y a pas de critères de choix évidents entre les différentes variantes vues ci-dessus. Pour tel type de problèmes, le slicing crossover (croisement en 1 point) sera décevant alors qu'un croisement uniforme fonctionnera mieux. Pour un autre type, la situation sera inverse. L'opérateur de croisement universel capable des performances les meilleures pour tout problème n'est pas encore découvert, et il est probable qu'il n'existe pas. Toutefois, en pratique, lorsque le codage binaire est satisfaisant, il apparaît que le choix de la bonne variante est rarement critique, et que les performances varient généralement peu selon l'opérateur choisi.

Un croisement est dit *léthal* s'il produit un ou deux individus ayant une trop faible adaptation pour se reproduire. Une solution pour éviter une trop forte proportion de croisement des individus létaux consiste à accoupler préférentiellement les individus qui se ressemblent au niveau génotypique.

Toutefois, lorsque le problème est complexe, bien qu'on ait l'assurance que les génotypes croisés ressemblent aux génotypes des parents, cela ne signifie pas que les descendants aient des performances proches de celles des parents. De plus, cette option réduit notablement l'exploration de l'espace de recherche et il peut s'ensuivre des convergences prématurées. Enfin, croiser des individus trop proches les uns des autres ne produit que rarement de la nouveauté, la convergence de l'algorithme s'en trouve ralentie. La restriction de l'appariement est donc une opération délicate à mettre en œuvre.

C. Mutation

Classiquement, l'opérateur de mutation modifie aléatoirement un individu pour en former un autre qui le remplacera. Il peut être vu comme un opérateur mineur, chargé de maintenir un minimum de diversité dans la population, ce que ne peut pas assurer le croisement.

L'opérateur de mutation apporte aux AGs la propriété d'ergodicité de parcours d'espace. Cette propriété indique que l'AG sera susceptible d'atteindre tous les points de l'espace d'état, sans pour autant les parcourir tous dans le processus de résolution [TAT 93, DEL 95].

Cet opérateur agit sur un individu. Il consiste à choisir d'une manière aléatoire un ou plusieurs gènes (bits) et à modifier leurs valeurs. Chaque bit d'un individu a une probabilité pour qu'il subisse une mutation notée P_m .

Le processus se présente comme suit :

- ┌ Pour chaque bit d'un individu de la population
- ├ Générer un réel $r \in [0, 1]$
- └ Si $r < P_m$ alors le bit est inversé

Cette probabilité de mutation P_m est généralement petite (généralement comprise entre 0.01 et 0.15 ou d'après [LIN 95] de l'ordre de 0.001 ou un peu moins par bit) et elle est constante durant toute l'exécution de l'AG. Cependant, une technique de variation de cette probabilité existe. Elle utilise une variation de la probabilité de mutation durant l'exécution de l'algorithme, et ceci en commençant par un taux relativement élevé et en diminuant de façon continue pendant que l'AG progresse. Cette méthode permet à l'AG de rechercher plus les solutions potentielles au départ et de s'accrocher à la meilleure solution en convergeant vers elle. D'autre part, des études empiriques conseillent pour l'obtention de bons résultats une fréquence qui se situe autour d'une mutation tous les 1000 bits.

Plusieurs arguments justifient l'utilisation de la mutation. Ainsi, les actions combinées de sélection et de croisement peuvent faire disparaître des gènes, aux mêmes positions des génotypes pour tous les individus. La mutation est capable de réintroduire ces gènes dans la population et participe ainsi au maintien de la diversité, utile à une bonne exploration de l'espace de recherche. D'autre part, la mutation assure une recherche locale aléatoire autour de chaque individu. Dans cet ordre d'idée, la mutation peut améliorer considérablement la qualité des solutions découvertes. En effet, le croisement perd de son importance lorsqu'une grande partie de la population est localisée dans les voisinages des maxima de la fonction d'adaptation. Dans ce cas, les individus situés sur un même pic sont souvent identiques et ne subissent aucune modification, ou alors, si les parents appartiennent à des pics différents, les descendants montreront généralement de faibles performances. En revanche, la recherche aléatoire due aux mutations donne une chance à chaque individu de s'approcher des positions exactes des maxima, autant que le permet la précision du codage.

V.3 CONCLUSION

Ce chapitre a été, en premier lieu, consacré aux rappels sur la théorie de la logique floue. Ensuite, les différents aspects de l'application de cette théorie dans le domaine de la commande des systèmes ont été présentés.

La stratégie de commande à base de logique floue s'apparente à une commande experte (système expert), en ce sens qu'elle s'appuie sur une base de connaissances et sur des règles de traitement de celles-ci (inférence) pour la prise de décision dont la forme dépend, essentiellement, du processus sous commande et d'heuristiques.

Enfin, nous avons présenté les fondements, définitions, principes de base et différentes opérations régissant le développement et l'exécution des AGs en tant que méthode d'optimisation globale stochastique.

A noter que ces algorithmes évolutifs seront utilisés pour l'optimisation des différents paramètres d'un CF, dans le cadre du prochain chapitre.

CHAPITRE VI

Application de Contrôleurs Intelligents à la Commande du Bras de Robot Manipulateur à liaison Flexible

Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les détails de la mise en œuvre des schémas principaux de contrôleurs intelligents élaborés à base de logique floue et d'algorithmes génétiques pour la commande en position et en poursuite de trajectoire du bras de robot manipulateur flexible objet de notre étude.

VI.1 CONCEPTION ET APPLICATION D'UN CONTROLEUR FLOU TYPE MAMDANI A LA COMMANDE DU BRAS DE ROBOT FLEXIBLE

VI.1.1 Description du Schéma de Commande Floue Typique

La majorité des contrôleurs flous (CFs) développés utilisent le schéma simple proposé par Mamdani [MAM 77] pour les systèmes mono-entrée mono-sortie. Ce schéma, représenté dans la figure 6.1, est composé :

- du contrôleur flou (CF) comprenant:
 - un bloc de calcul de la variation de l'erreur Δe au cours du temps,
 - les facteurs d'échelle ou gains associés, respectivement, à l'erreur e , à sa variation Δe et à la variation de la commande Δu : G_e , $G_{\Delta e}$ et $G_{\Delta u}$,
 - un bloc de fuzzification de l'erreur e et de sa variation Δe ,
 - une base des règles de commande floue,
 - une logique floue utilisée pour l'évaluation des règles de commande floue (inférence),
 - un bloc de défuzzification servant à convertir la valeur floue de la variation de commande Δu^* en une valeur numérique Δu ,
- du processus à commander (bras flexible du robot objet de l'étude).

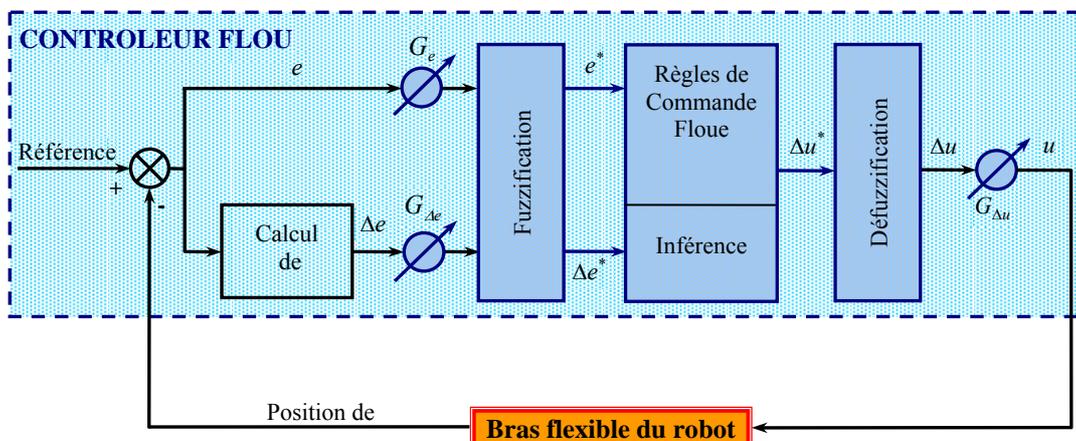


Figure 6.1 Schéma de commande en boucle fermée à CF type Mamdani appliqué à la commande du bras flexible

VI.1.2 Algorithme de Commande Floue

Le succès des algorithmes flous dans la commande des processus complexes est dû au choix de méthodes relativement pratiques, permettant avec une simplicité notable, la mise au point de tels algorithmes [YEN 95].

Ces méthodes consistent à formuler un ensemble de règles de décision en termes linguistiques, utilisant des sous-ensembles flous (SEFs) pour décrire les amplitudes de l'erreur, de sa variation et de la variation de la commande. En combinant ces règles, on peut dresser des tables de décision permettant de donner les valeurs de la sortie du contrôleur correspondant aux situations d'intérêt. Pour ce faire, on est appelé à quantifier ces différentes variables. Les niveaux de quantification ainsi obtenus forment les univers de discours et les valeurs obtenues sont assignées à un ensemble de SEFs linguistiquement étiquetés par des termes ou symboles.

Les valeurs des degrés d'appartenance sont subjectivement attribuées, pour définir le sens des étiquettes des SEFs, selon certaines formes de fonctions d'appartenance (FAs).

Ces SEFs sont combinés grâce aux opérateurs fondamentaux suivants, qu'il est opportun de rappeler:

- réunion " $A \cup B$ " correspondant à la fonction OU définie par:

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (6.1)$$

- intersection " $A \cap B$ " correspondant à la fonction ET définie par:

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (6.2)$$

- complémentation " \bar{A} " correspondant à la fonction NON définie par:

$$\mu_{(\text{NON}A)}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (6.3)$$

VI.1.2.1 Loi de commande

La loi adoptée est fonction des entrées choisies pour notre contrôleur, en l'occurrence, l'erreur et sa variation sur une période d'échantillonnage T_e :

$$\Delta u(kT_e) = f(e(kT_e), \Delta e(kT_e)) \quad (6.4)$$

Par conséquent, l'activation de l'ensemble des règles de décision associées donne la variation de la commande Δu nécessaire et qui constitue, donc, la sortie de notre contrôleur.

Cette variation de la commande est obtenue par une simple lecture d'une table de décision prédéfinie hors ligne.

En général, le signal de sortie u_0 fournit par la défuzzification doit être soumis à un traitement afin d'obtenir le signal de commande effectif u . Dans la plupart des cas, il y a proportionnalité entre u_0 et u lorsque l'organe de commande fonctionne comme amplificateur de puissance [BUH 94]:

$$u = G_u * u_0 \quad (6.5)$$

G_u est le gain associé à la commande.

Ainsi, notre choix de la loi de commande s'est porté sur la forme suivante (commande type PD) [BUH 94]:

$$u(kT_e) = G_{\Delta u} * \Delta u(kT_e) \quad (6.6)$$

$G_{\Delta u}$: gain associé à la variation de la commande $\Delta u(kT_e)$ générée à l'instant T_e .

VI.1.2.2 Implémentation

Pour résumer, la valeur de la commande peut être obtenue en suivant les étapes suivantes [LOU 97]:

1- Calcul de l'erreur présente et de sa variation :

$$e(kT_e) = \text{référence} - \text{sortie du processus} \quad (6.7)$$

$$\Delta e(kT_e) = \frac{e(kT_e) - e(kT_e - T_e)}{T_e} \quad (6.8)$$

2- Normalisation de l'erreur et de sa variation à l'aide des facteurs d'échelle ou gains correspondants :

$$e^*(kT_e) = G_e * e(kT_e) \quad (6.9)$$

$$\Delta e^*(kT_e) = G_{\Delta e} * \Delta e(kT_e) \quad (6.10)$$

3- Fuzzification ou conversion des valeurs obtenues en variables floues,

4- Lecture du niveau de quantification du sous-ensemble flou (SEF) résultant de la variation de la commande dans la table de décision,

5- Défuzzification ou conversion du niveau obtenu en valeur numérique normalisée de la variation de la commande,

6- Détermination de la commande à appliquer à l'entrée du processus à réguler à l'aide du facteur d'échelle ou gain correspondant :

$$u(kT_e) = G_{\Delta u} * \Delta u(kT_e) \quad (6.11)$$

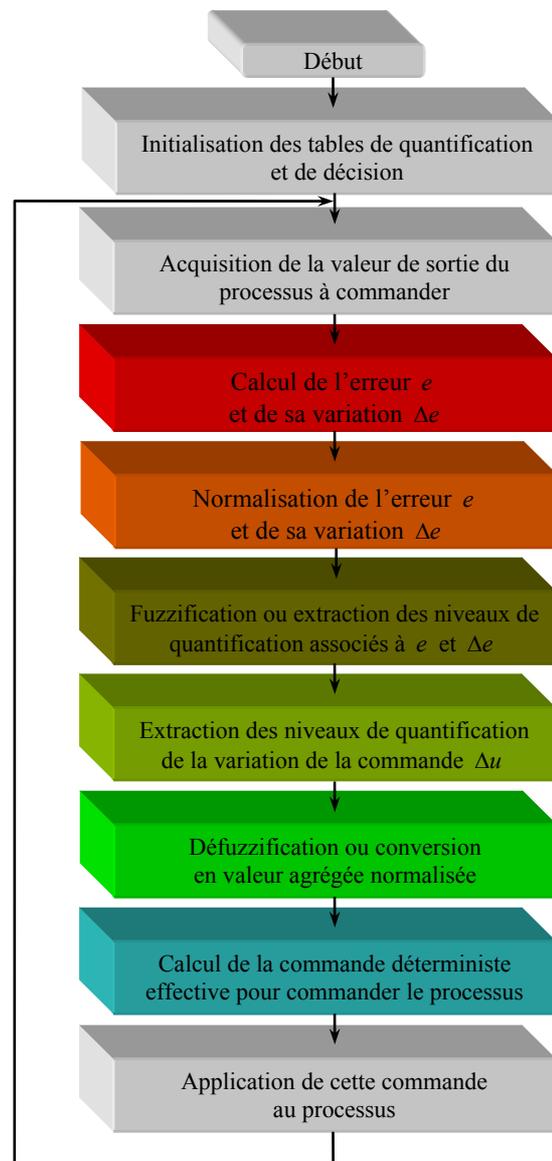


Figure 6.2 Organigramme de l'algorithme de commande floue

VI.1.3 Application du Contrôleur Flou Type Mamdani à la Commande en Position du Bras de Robot Manipulateur Flexible

La travail à présenter dans cette partie concerne l'application de l'algorithme de commande floue type Mamdani, dont nous venons d'explicitier les principales étapes, au positionnement de l'extrémité manipulatrice du bras de robot flexible représenté par le modèle de Timoshenko encastré-chargé établi au chapitre IV.

Il s'agit de commander en position, à partir de l'action motrice au niveau de l'articulation, l'extrémité de manipulation de ce bras de robot flexible ("commande non-colocalisée") [FRA 91]; ce qui constitue la difficulté d'une telle démarche par rapport à la commande articulaire classique des robots rigides ("commande colocalisée"). Cette dernière a, d'ailleurs, été essayée sur des systèmes tels que le notre, mais, sans succès notable [DE LUC 89a].

L'expression de la sortie (variable à commander) de notre système résulte de l'application de l'équation (2.6) (§ II.3.1) à l'extrémité du bras ($x=\ell$). Elle est donnée par :

$$\alpha(\ell,t)=\theta(t)+\frac{w(\ell,t)}{\ell} \quad (6.12)$$

VI.1.3.1 Hypothèses pour la conception du contrôleur flou adopté

Pour concevoir le CF adéquat pour la commande du bras manipulateur flexible, certaines propriétés de ce dernier sont exploitées pour faciliter cette conception. Eu égard à la nature et au comportement (mouvement) symétrique du système robotique objet de notre étude, nous avons adopté les caractéristiques suivantes :

- des FAs symétriques,
- une table de décision également symétrique [MAC 76, LOU 97],
- les univers de discours des variables du CF sont normalisés pour se trouver entre -1 et 1. Les gains du CF donnent, en conséquence, les valeurs appropriées aux variables pondérées par ces gains de mise à l'échelle,
- le nombre de SEFs des variables du contrôleur est un nombre entier impair supérieur à 1 (3, 5, 7 ou 9). En combinaison avec la condition de symétrie, ceci signifie que la fonction centrale d'appartenance, pour toutes les variables, aura son sommet (centre) en zéro,
- les sommets (centres) des FAs correspondent aux sommets des bases des FAs adjacentes. Ceci assure que la valeur de n'importe quelle variable d'entrée est un membre d'au plus deux SEFs. De plus, on est assuré que si le degré d'appartenance d'une variable à un sous-ensemble est 1, elle n'appartient à aucun autre sous-ensemble adjacent,
- on suppose que les premières et dernières FAs ont leurs sommets à -1 et à 1 respectivement. Ceci peut être justifié par le fait que le changement des valeurs des facteurs d'échelle ou gains aura un effet semblable de changement des positions de ces sommets.

VI.1.3.2 Fonctions d'appartenance

A. Forme des fonctions d'appartenance

Pour le choix de la forme des FAs, nous avons procédé par essai et observation. Les trois formes principales (triangulaires, trapézoïdales et gaussiennes) ont été essayées. Les résultats obtenus pour les formes trapézoïdales et gaussiennes n'ont pas été assez satisfaisants. En revanche, le choix de formes triangulaires s'est avéré le plus approprié.

B. Distribution des fonctions d'appartenance

Après plusieurs essais de diverses distributions, celle qui a donné lieu à plus de satisfaction est simplement la distribution uniforme ou équidistante avec des formes symétriques ce qui donne un chevauchement de 50 % entre les SEFs adjacents.

C. Nombre de classes ou sous-ensembles flous

Plusieurs combinaisons des nombres impairs (3, 5, 7, 9) pour les SEFs représentant les trois variables du CF (e , Δe , Δu) ont été essayées.

Le choix le plus judicieux s'est avéré 7 SEFs pour les trois variables symbolisés (étiquetés) comme suit :

PG : Positif Grand, **PM** : Positif Moyen, **PP** : Positif Petit, **Z** : Zéro et environs, **NP** : Négatif Petit, **NM** : Négatif Moyen, **NG** : Négatif Grand.

VI.1.3.3 Table de décision

La table de décision adoptée pour notre CF est celle universelle de Mac Vicar-Whelan [MAC 76] illustrée par la figure 6.3. Elle est organisée sous forme d'une table diagonale symétrique de 49 règles décisionnelles composées par les paires situation/action de la forme : Si e est A et Δe est B, alors Δu est C.

Δu		e						
		NG	NM	NP	Z	PP	PM	PG
Δe	NG	NG	NG	NG	NG	NM	NP	Z
	NM	NG	NG	NG	NM	NP	Z	PP
	NP	NG	NG	NM	NP	Z	PP	PM
	Z	NG	NM	NP	Z	PP	PM	PG
	PP	NM	NP	Z	PP	PM	PG	PG
	PM	NP	Z	PP	PM	PG	PG	PG
	PG	Z	PP	PM	PG	PG	PG	PG

Figure 6.3 Table de décision de Mac Vicar-Whelan (7 x 7 = 49 règles)

VI.1.3.4 Méthode d'inférence

Pour ce qui est de la méthode d'inférence, notre choix s'est porté sur la méthode "Max-Min" (raisonnement type Mamdani) illustrée au chapitre V.

A noter que ce choix résulte des comparaisons des résultats de plusieurs essais, mettant en œuvre les trois principales méthodes d'inférence utilisées en commande floue, à savoir, Max-Min, Max-Produit et Somme-Produit [BUH 94, LOU 97].

VI.1.3.5 Méthode de Défuzzification

La méthode de défuzzification adoptée est celle qui est la plus utilisée en commande, à savoir la méthode du centre de gravité (voir chapitre V).

VI.1.3.6 Résultats de la simulation de la commande en position du bras de robot manipulateur flexible par le contrôleur flou adopté

L'application du CF adopté pour la commande en position angulaire du bras manipulateur flexible, dont les paramètres physiques sont donnés dans l'annexe C, a donné lieu aux résultats présentés sur les figures 6.4 et 6.5 représentant, respectivement, la réponse à une consigne angulaire en échelon de position de 90° et la commande (couple moteur) générée correspondante.

Cette assez bonne performance est le résultat de dizaines de tests essai/observation caractérisés, spécifiquement, par de multiples combinaisons de réglages des trois gains du CF, à savoir G_e , $G_{\Delta e}$ et $G_{\Delta u}$.

Les valeurs finales de ces gains, ayant donné lieu à cette performance sont les suivantes :

$$G_e = 0.52, G_{\Delta e} = 0.49, G_{\Delta u} = 11.1.$$

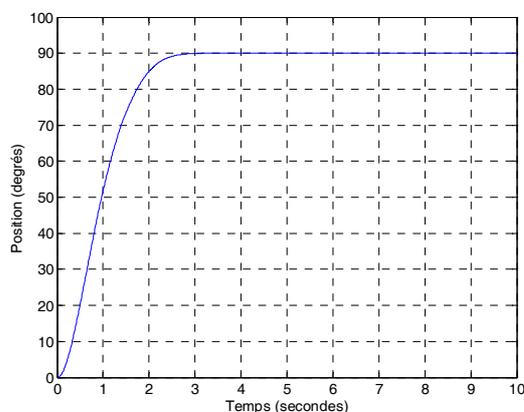


Figure 6.4 Réponse en position angulaire du CF

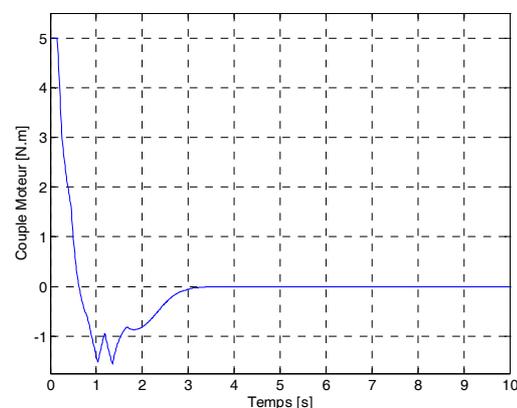


Figure 6.5 Commande générée

VI.2 CONCEPTION ET APPLICATION D'UN CONTROLEUR FLOU TYPE MAMDANI OPTIMISE PAR ALGORITHMES GENETIQUES À LA COMMANDE DU BRAS DE ROBOT FLEXIBLE

Dans cette seconde partie du présent chapitre, les algorithmes génétiques (AGs), en tant que métaheuristique évolutive, vont nous servir à remédier au caractère empreint de subjectivité qui a prévalu lors de la conception du CF précédent. En effet, ces AGs génèrent et font évoluer une population de CFs en appliquant les différentes phases d'exécution d'un algorithme génétique (AG) : sélection, croisement, mutation. Ainsi, de génération en génération, nous obtiendrons un CF encore plus performant. Le meilleur contrôleur (optimal) obtenu sera délivré à l'issue de la dernière itération exécutive de l'AG.

Les paramètres du CF que l'AG aura à optimiser, pour une éventuelle amélioration des performances obtenues au paragraphe précédent, sont :

- le nombre de SEFs pour chaque variable,
- la forme des FAs pour chaque variable,
- l'espacement (distribution) des FAs pour chaque variable,
- les règles de la table de décision,
- les trois gains du CF.

VI.2.1 Hypothèses et Contraintes de Conception

Nous donnons, dans ce qui suit, quelques hypothèses et contraintes de conception concernant la table de décision et les FAs des variables du CF à optimiser :

- Le nombre de SEFs (*NEF*) pour chaque variable peut prendre une des valeurs possibles suivantes {3, 5, 7, 9} seulement. En effet, dans la littérature la plupart des conceptions de contrôleurs flous utilisent cette plage de valeurs [LEE 93]. Ce choix est d'ailleurs favorable pour le codage des solutions dans l'AG (*NEF* est codifié en 2 bits seulement réduisant ainsi la taille du chromosome).
- Les SEFs seront symbolisés (étiquetés) par la désignation standard et indexés par ordre croissant. Si, par exemple, le *NEF* d'une variable linguistique est égal à 5, les SEFs correspondant seront : NG, NM, Z, PM, PG indexés de 1 à 5. De plus les SEFs comme NG et NM seront considérés opposés à PG et PM respectivement.
- A partir de valeurs (index des SEFs) extrêmes en entrée (variables linguistiques de l'*erreur* et de la *variation de l'erreur*) résultent, le plus souvent, une valeur extrême en sortie (variable linguistique de la *variation de commande*), alors qu'une valeur moyenne en sortie est généralement générée à partir de valeurs moyennes en entrée. Par ailleurs, des combinaisons similaires de valeurs en entrée conduisent généralement à une valeur similaire en sortie.
- Tous les univers de discours sont normalisés entre -1 et +1.

VI.2.2 Génération des Règles de Décision (Table de Décision)

La méthode adoptée pour la génération des règles constituant la table décision est inspirée de celle utilisée dans les travaux de [PAR 95, FOR 02]. Elle est basée, essentiellement, sur une sorte de grille (représentation analogue à la table de décision dans le plan de phase [PAR 95]) servant à la génération de la table des règles linguistiques de décision. Comme contribution, nous avons apporté une modification à la technique d'affectation des règles de décision à chacun des nœuds de la grille (cases de la table de décision) en cas de distances égales entre les points représentant les règles candidates (voir ci-après le principe de la méthode à travers deux exemples illustratifs). Dans les travaux de [FOR 02], cette affectation est effectuée aléatoirement. A noter que notre méthode d'affectation respecte, beaucoup plus, les hypothèses énoncées précédemment (les mêmes adoptées dans [FOR 02]) et permet d'obtenir des tables de décision plus symétriques au sens de la correspondance entre les SEFs opposés.

VI.2.2.1 Principe de la méthode

D'abord une grille est construite à partir de deux paramètres d'espacement $PsGe$ et $PsG\Delta e$ concernant, respectivement, les deux entrées *erreur* e et *variation de l'erreur* Δe du CF.

Le premier (resp. le deuxième) paramètre d'espacement $PsGe$ (resp. $PsG\Delta e$) fixe les abscisses (resp. les ordonnées) des nœuds formant la grille dans l'univers de discours (entre -1 et +1) avec un simple calcul que nous détaillerons dans le paragraphe suivant.

Chaque abscisse (resp. ordonnée) représente un SEF de la variable d'entrée e (resp. Δe), le nombre de nœuds formant la grille est ainsi égal au produit des deux nombres de SEFs des variables d'entrée.

Une fois les noeuds de la grille placés (voir les deux exemples illustratifs sur les figures 6.9 et 6.10), on introduit les points de sortie sur une droite correspondant à la variable de sortie : *variation de la commande* Δu . Cette fois, ce sont des points (de sortie) qui représentent les SEFs et non pas leurs coordonnées. Le nombre de points est égal au nombre de SEFs de la variable de sortie.

Un troisième paramètre d'espacement $PsG\Delta u$, fixe les abscisses (les ordonnées) des points de sortie de la même manière que pour les noeuds de la grille tandis que les ordonnées (les abscisses) seront calculées par un autre paramètre angulaire, noté "Angle", qui détermine la pente de la droite portant les points de sortie par rapport à l'horizontale. La variation de ce paramètre angulaire se fait dans le sens anti-horaire, dans l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Chaque noeud de la grille représente une case de la table de décision et chaque point de sortie représente un SEF de la variable linguistique *variation de la commande*. Une fois que toutes les coordonnées des points (noeuds grille et points sortie) ont été calculées, l'affectation peut s'effectuer en déterminant la distance minimale parmi l'ensemble des distances séparant chaque noeud de la grille de tous les points de sortie. On affecte, ainsi, à chaque noeud de la grille le point de sortie qui lui est le plus proche et, par conséquence, la case correspondante à ce noeud dans la table de décision contiendra le SEF représenté par le point de sortie sélectionné. Cependant, un problème (conflit d'affectation) pourrait se poser en cas d'égalité de deux distances minimales entre un noeud et deux points de sortie. Nous avons proposé de prendre le point de sortie dont le SEF correspondant est d'index inférieur s'il s'agit d'une case de la partie diagonale supérieure de la table et le point de sortie dont le SEF est d'index supérieur si la case appartient à la partie diagonale inférieure. A noter qu'il ne peut y avoir plus de deux points de sortie équidistants par rapport à un noeud donné de la grille car les points de sortie sont tous sur une même droite.

VI.2.2.2 Paramètre d'espacement

Le paramètre s'espacement PsG définit la manière dont les coordonnées (positions) C_i des points intermédiaires (entre le centre et les extrémités) sont espacées par rapport au centre. Ce paramètre offre une flexibilité d'espacement variable telle que, plus il est supérieur à 1, plus les coordonnées sont davantage rapprochées du centre, et plus il est inférieur à 1, plus les coordonnées sont éloignées du centre. A la valeur 1, les positions sont, donc, réparties de manière uniforme (équidistante) dans l'univers de discours $[-1, 1]$.

Les coordonnées C_i étant, évidemment, de nombre égal à celui des SEFs utilisés, nous avons proposé une formulation de la loi de leur espacement en fonction de la valeur du paramètre PsG .

D'abord, leurs positions réparties de manière équidistante, notées CEq_i , sont exprimées par :

$$CEq_i = 2\left(\frac{i-1}{NEF-1}\right) - 1, \quad i = 1, \dots, NEF \quad (6.13)$$

Les C_i sont, alors, déterminées en fonction du paramètre d'espacement PsG comme suit:

$$C_i = \text{sign}(CEq_i) * |CEq_i|^{PsG} \quad (6.14)$$

avec $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $PsG = (PsG_1)^{PsG_2}$, PsG_2 prenant les valeurs +1 ou -1.

A titre illustratif, les tableaux 6.1 et 6.2 donnent les coordonnées C_i calculées pour une variable linguistique, respectivement, à 7 SEFs et 5 SEFs, en utilisant différentes valeurs du paramètre d'espacement.

PsG	Coordonnées C_i						
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
0.25	-1	-0.90	-0.76	0	0.76	0.90	1
0.5	-1	-0.81	-0.58	0	0.58	0.81	1
1	-1	-0.67	-0.33	0	0.33	0.67	1
2	-1	-0.44	-0.11	0	0.11	0.44	1
4	-1	-0.20	-0.01	0	0.01	0.2	1

Tableau 6.1 C_i en fonction de PsG pour 7 SEFs

PsG	Coordonnées C_i				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
0.25	-1	-0.84	0	0.84	1
0.5	-1	-0.70	0	0.70	1
1	-1	-0.50	0	0.50	1
2	-1	-0.25	0	0.25	1
4	-1	-0.06	0	0.06	1

Tableau 6.2 C_i en fonction de PsG pour 5 SEFs

Exemples illustratifs de la méthode de la grille :

Deux exemples illustrant la constitution de la grille, ainsi que la méthode d'affectation des SEFs de sortie aux différents nœuds de cette grille, sont donnés dans ce qui va suivre.

A noter que les noeuds de la grille sont représentés par des étoiles rouges et les points de sortie par des cercles bleus. Les flèches violettes représentent quelques exemples de distances minimales entre des points de sortie et les nœuds de la grille expliquant l'affectation des SEFs aux cases de la table de décision.

Exemple 1 :

La grille de la figure 6.6 est construite en utilisant 5 SEFs pour chacune des trois variables du CF à partir des paramètres suivants :

- Paramètres d'espacement des variables d'entrée ($e, \Delta e$) et de la variable de sortie (Δu) égaux à 1 (espacement uniforme ou équidistant) : $PsGe=1$; $PsG\Delta e=1$; $PsG\Delta u=1$,
- Paramètre angulaire égal à 60° : $Angle=60^\circ$.

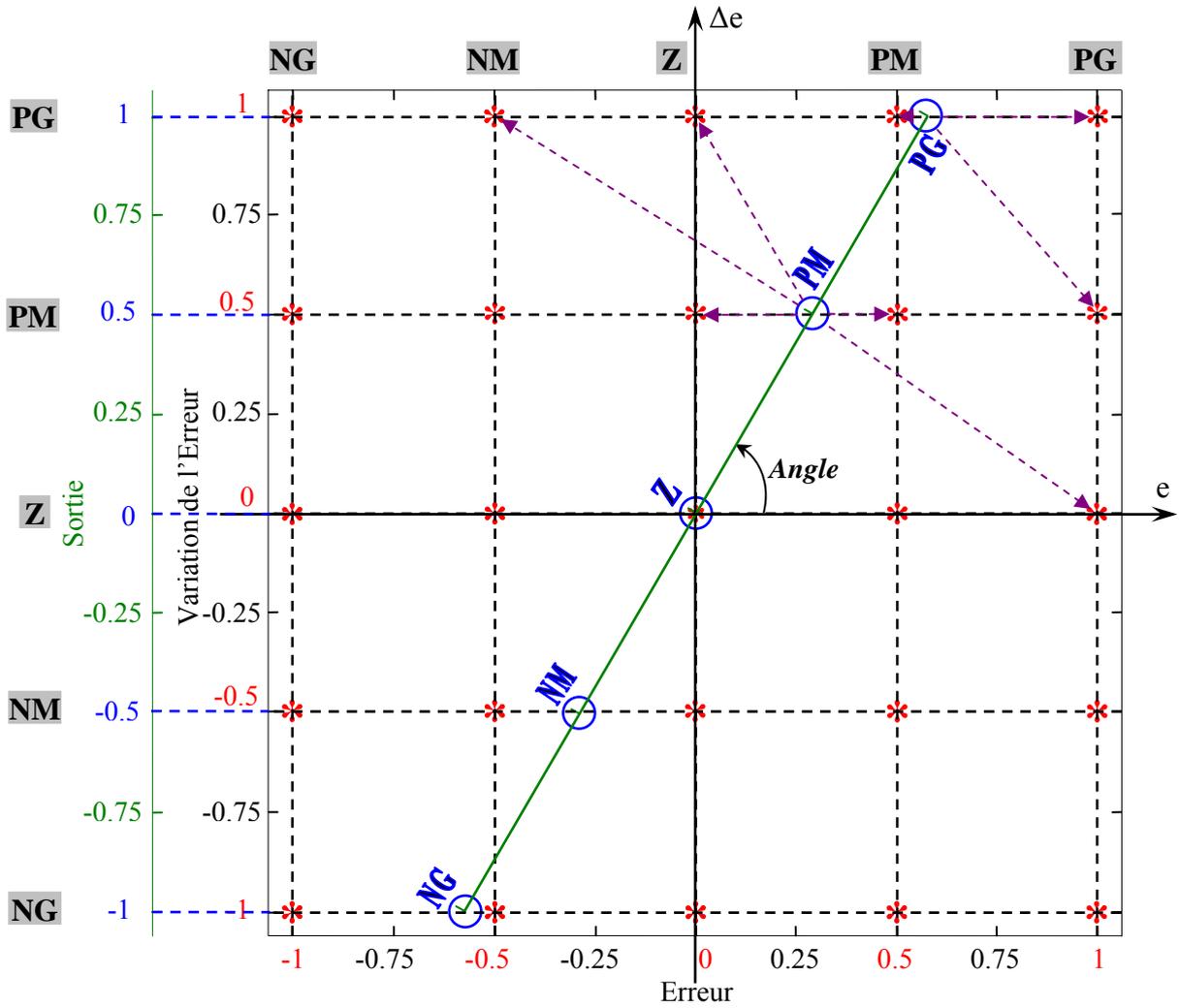


Figure 6.6 Représentation de la constitution de la grille de l'exemple illustratif 1

La table de décision résultante est donnée sur la figure 6.7 ci-contre :

Δu		e				
		NG	NM	Z	PM	PG
Δe	NG	NG	NG	NM	NM	Z
	NM	NG	NM	NM	Z	Z
	Z	NM	Z	Z	Z	PM
	PM	Z	Z	PM	PM	PG
	PG	Z	PM	PM	PG	PG

Figure 6.7 Table de décision obtenue pour l'exemple illustratif 1

Exemple 2 :

La grille de la figure 6.8 est construite en utilisant 5 SEFs pour chaque variable du CF avec comme paramètres :

$PsGe=0.5$; $PsG\Delta e=1$; $PsG\Delta u=2$; $Angle=30^\circ$.

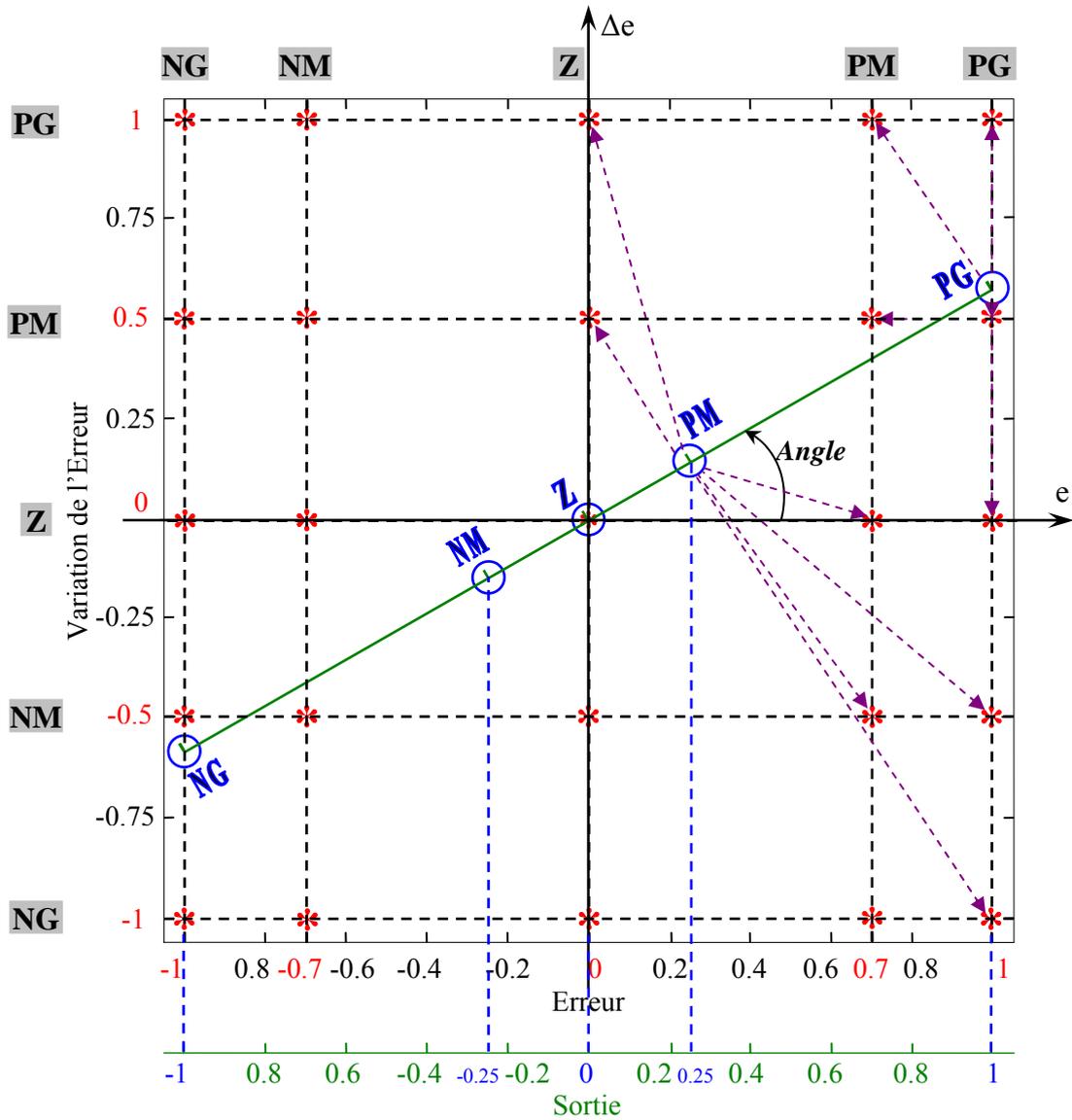


Figure 6.8 Représentation de la constitution de la grille de l'exemple illustratif 2

La table de décision résultante est donnée sur la figure 6.9 ci-contre :

Δu		e				
		NG	NM	Z	PM	PG
Δe	NG	NG	NG	NM	Z	PM
	NM	NG	NG	NM	PM	PM
	Z	NG	NM	Z	PM	PG
	PM	NM	NM	PM	PG	PG
	PG	NM	Z	PM	PG	PG

Figure 6.9 Table de décision obtenue pour l'exemple illustratif 2

Remarque : La table de décision obtenue avec les trois paramètres d'espacement égaux à 1 et l'Angle égal à 45° donne lieu à la table standard de Mac Vicar-Whelan.

VI.2.3 Génération des Fonctions d'Appartenance

VI.2.3.1 Définition des fonctions d'appartenance

Il est opportun de rappeler que chacune des variables linguistiques (*erreur*, *variation de l'erreur*, *commande*) est caractérisée par un nombre de SEFs (*NEF*) et chaque SEF est défini par sa propre fonction d'appartenance (FA).

Après étude de différentes formes de FAs, il s'est avéré que trois types de forme conviennent à notre méthode de conception et d'optimisation :

- forme triangulaire
- forme trapézoïdale qui inclut (généralise) la forme triangulaire
- forme gaussienne double ou à deux cotés (sommet plat).

- La forme triangulaire est définie avec trois paramètres [P1 P2 P3] représentant, respectivement:

- l'abscisse gauche de la base,
- l'abscisse du sommet,
- l'abscisse droite de la base,

les ordonnées étant fixées à [0 1 0] respectivement.

Chaque base d'un triangle commence par une abscisse égale à celle du sommet du triangle précédent et se termine par celle du triangle suivant.

- La forme trapézoïdale est définie avec quatre paramètres [P1 P2 P3 P4] représentant, respectivement:

- l'abscisse gauche de la base,
- l'abscisse gauche du sommet,
- l'abscisse droite du sommet,
- l'abscisse droite de la base,

les ordonnées étant fixées à [0 1 1 0] respectivement.

La forme trapézoïdale se trouve ainsi cadrée par quatre points : (P1,0), (P2,1), (P3,1) et (P4,0) (voir figure 6.13). A noter que si P2 = P3, on obtient la forme triangulaire.

- La forme gaussienne double est définie avec quatre autres paramètres [*Sig*₁ G₁ G₂ *Sig*₂] tels que :

- $Y(x) = \text{Exp} \left[-\frac{(x-G_1)^2}{2*(\text{Sig}_1)^2} \right]$ définit la courbe de la forme du coté gauche de la gaussienne,

- $Y(x) = \text{Exp} \left[-\frac{(x-G_2)^2}{2*(\text{Sig}_2)^2} \right]$ définit la courbe de la forme du coté droit de la gaussienne.

Afin de pouvoir utiliser cette forme dans le cadre de notre méthode, nous devons la cadrer par les mêmes points utilisés pour la forme trapézoïdale (voir figure 6.14). En d'autres termes, nous avons à chercher à définir la présente forme avec les paramètres [P1 P2 P3 P4] au lieu de [*Sig*₁ G₁ G₂ *Sig*₂].

Pour cela, nous avons adopté un nombre ε très petit (dans notre programme $\varepsilon=0.01$ a parfaitement convenu) tel que :

- * la courbe du côté gauche de la gaussienne passe par les points (P1, ε) et (P2,1),
- * la courbe du côté droit de la gaussienne passe par les points (P3,1) et (P4, ε).

Cette formulation nous conduit à établir les deux systèmes d'équations suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Exp} \left[-\frac{(P1-G_1)^2}{2*(Sig_1)^2} \right] = \varepsilon \\ \text{Exp} \left[-\frac{(P2-G_1)^2}{2*(Sig_1)^2} \right] = 1 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \text{Exp} \left[-\frac{(P3-G_2)^2}{2*(Sig_2)^2} \right] = 1 \\ \text{Exp} \left[-\frac{(P4-G_2)^2}{2*(Sig_2)^2} \right] = \varepsilon \end{array} \right.$$

dont la résolution donne : $G_1 = P2$; $G_2 = P3$; $Sig_1 = \sqrt{-\frac{(P1-P2)^2}{2*\log(\varepsilon)}}$; $Sig_2 = \sqrt{-\frac{(P4-P3)^2}{2*\log(\varepsilon)}}$.

Remarque : ε a été utilisé car les deux courbes gaussiennes ne passent jamais par un point d'abscisse nulle.

VI.2.3.2 Paramètre d'espace

Les abscisses des sommets des différentes formes sont calculées par le même principe d'espace paramétrique utilisé pour les coordonnées des nœuds de la grille et des points de la droite de sortie dans la génération de la table de décision (§ VI.2.2).

Les paramètres d'espace des FAs relatives aux variables *erreur e*, *variation de l'erreur Δe* et *variation de la commande Δu* sont, respectivement, notés par *PsFe*, *PsFΔe* et *PsFΔu*.

Des exemples d'espace de FAs triangulaires sont donnés sur les figures 6.10, 6.11 et 6.12 suivantes :

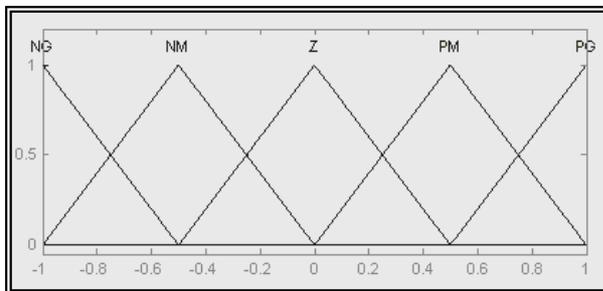


Figure 6.10 FAs de 5 SEFs avec $PsF=1$

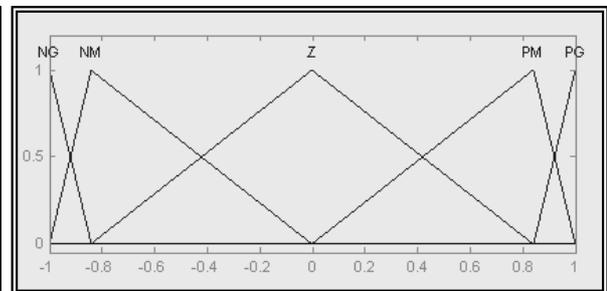


Figure 6.11 FAs de 5 SEFs avec $PsF=0.25$

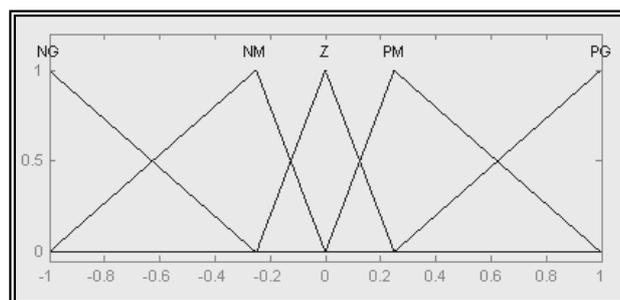


Figure 6.12 FAs de 5 SEFs avec $PsF=2$

VI.2.3.3 Paramètre de forme

La méthode adoptée pour l'espace des FAs étant inspirée des travaux de [PAR 95, CHE 00, FOR 02], nous avons introduit, comme autre contribution, un nouveau paramètre de conception que nous avons appelé *paramètre de forme Pf*. Ce paramètre servira à diversifier (hybrider) les formes des FAs, au sein de l'univers de discours de chaque variable du CF, lors de l'optimisation par AG.

Nous avons défini le paramètre de forme Pf , comme étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, 2[$, dont la partie entière, notée $E(Pf)$, déterminera la forme à utiliser et dont la partie fractionnaire, notée $F(Pf)$, déterminera l'écartement par rapport au centre de la forme (voir les exemples des figures 6.13 et 6.14) :

- *Partie entière de Pf*:

La partie entière de ce paramètre détermine la forme des FAs comme suit :

- * $E(Pf) = 0$: forme trapézoïdale ou triangulaire
- * $E(Pf) = 1$: forme gaussienne double.

- *Partie fractionnaire de Pf*:

La partie fractionnaire de Pf détermine l'écartement par rapport au centre de la forme comme le montre les figures 6.13 et 6.14 suivantes :

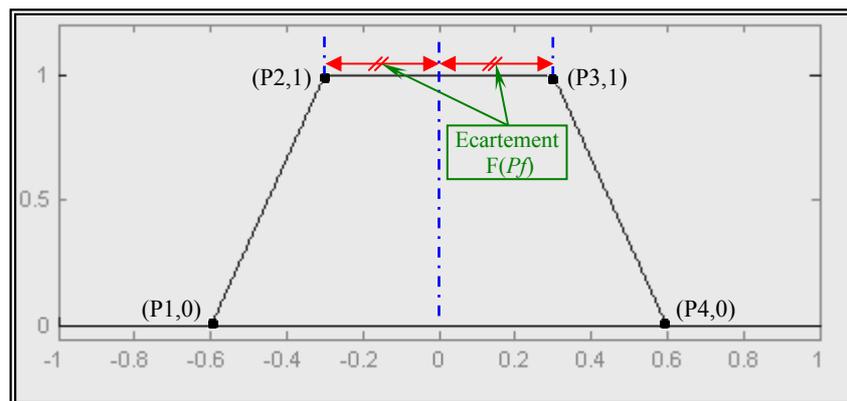


Figure 6.13 FA de forme trapézoïdale

Il est tout à fait évident que si l'écartement est égal à zéro, la forme trapézoïdale devient une forme triangulaire.

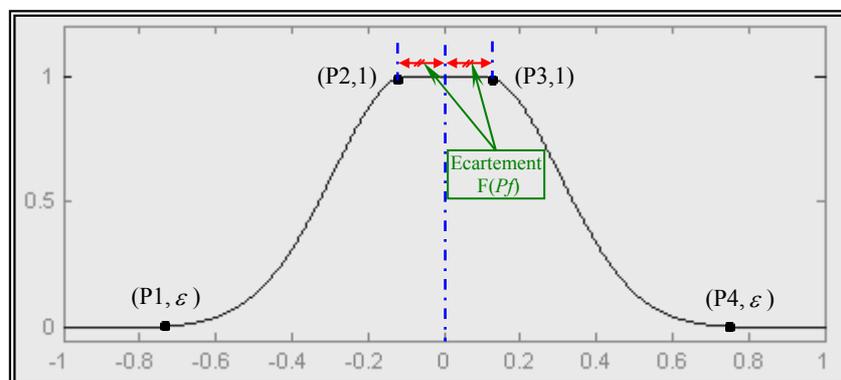


Figure 6.14 FA de forme gaussienne à deux cotés

Le nombre de SEFs de chaque variable, étant optimisé par AG, n'est donc pas fixe. Il n'est, par conséquent, pas envisageable d'affecter un paramètre de forme à chaque FA. Pour cela, nous avons proposé une solution qui consiste à affecter un paramètre de forme, noté PfM , pour la FA du milieu et un autre, noté PfE , pour celle de l'extrémité. Les paramètres de forme des FAs intermédiaires (entre la FA du milieu et celle de l'extrémité), notés PfI , sont alors déduits des deux paramètres précédents de sorte à ce qu'ils aient des valeurs intermédiaires à intervalles égaux.

Le paramètre de forme $PfI(i)$ de la $i^{\text{ème}}$ FA intermédiaire est déterminé comme suit :

$$PfI(i) = PfM + 2(i-1) \frac{PfE - PfM}{NEF - 1} \quad \text{avec } i=1, \dots, \frac{NEF+1}{2}$$

On peut constater que $PfI(1) = PfM$ et $PfI\left(\frac{NEF+1}{2}\right) = PfE$.

Ainsi deux paramètres suffisent pour l'utilisation de n'importe quel nombre de SEFs.

Nous noterons par $PfM\Delta e$, $PfM\Delta v$ et $PfM\Delta u$ les paramètres de forme de la FA du milieu pour les variables *erreur*, *variation de l'erreur*, et *variation de la commande* respectivement, et par $PfEe$, $PfE\Delta v$ et $PfE\Delta u$ les paramètres de forme de la FA de l'extrémité pour ces mêmes variables respectivement.

Nous présentons, sur les figures 6.15, 6.16, 6.17 et 6.18, quelques exemples illustratifs de l'effet du paramètre de forme sur la génération des FAs.

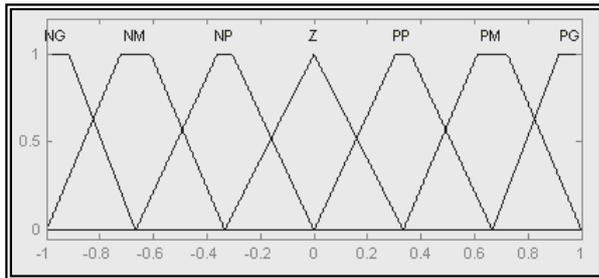


Figure 6.15 FAs avec $NEF=7$, $PfM=0$, $PfE=0.5$, $PsF=1$

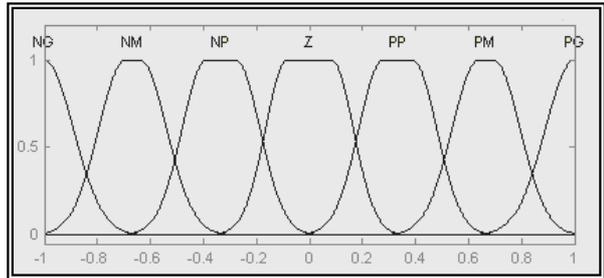


Figure 6.16 FAs avec $NEF=7$, $PfM=1.5$, $PfE=1$, $PsF=1$

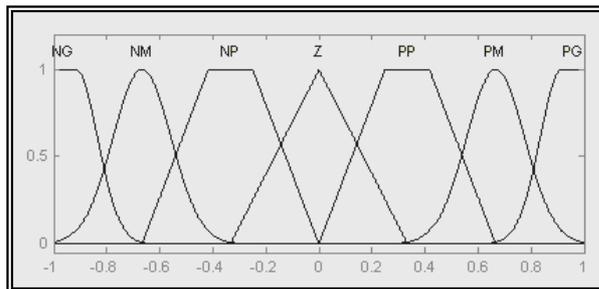


Figure 6.17 FAs avec $NEF=7$, $PfM=0$, $PfE=1.5$, $PsF=1$

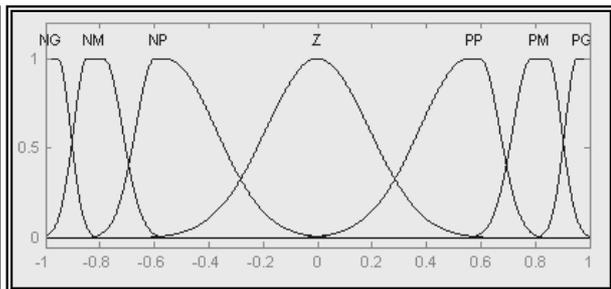


Figure 6.18 FAs avec $NEF=7$, $PfM=1$, $PfE=1.5$, $PsF=0.5$

Si le paramètre de forme de la FA du milieu est égal à celui de celle de l'extrémité, alors toutes les FAs de l'univers de discours auront la même forme définie par ce paramètre.

Il est important de noter que si d'éventuels chevauchements entre les FAs générées (voir figure 6.19) venaient à se produire, ils risqueraient de conduire au problème d'aplatissement de la caractéristique du régulateur flou, bien connu en commande floue [BUH 94].

Pour éviter de tels chevauchements, nous avons fixé un maximum pour la valeur de l'écartement, égal à la moitié de la distance minimale entre les deux sommets voisins.

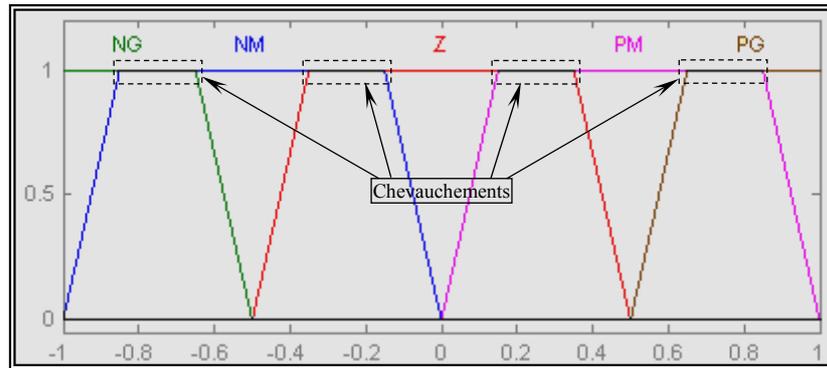


Figure 6.19 FAs de 5 SEFs présentant des chevauchements

VI.2.4 Codage des Paramètres (Gènes)

Les paramètres du CF à optimiser par AG pour chacune de ses variables (e , Δe , Δu) sont :

- le nombre de SEFs: $NEFe$, $NEF\Delta e$ et $NEF\Delta u$,
- les paramètres d'espacement de la grille: $PsGe$, $PsG\Delta e$ et $PsG\Delta u$,
- le paramètre angulaire de la droite de sortie de la grille: $Angle$,
- les paramètres d'espacement des FAs: $PsFe$, $PsF\Delta e$ et $PsF\Delta u$,
- les paramètres de forme des FAs du milieu et de l'extrémité: $PfMe$, $PfM\Delta e$, $PfM\Delta u$ et $PfEe$, $PfE\Delta e$, $PfE\Delta u$,
- les gains G_e , $G_{\Delta e}$ et $G_{\Delta u}$.

Pour l'exécution de l'AG, un codage approprié pour chacun de ces paramètres est indispensable, ce qui nécessite l'affectation d'un intervalle de variation accompagné d'un pas de précision pour chacun d'entre eux. Pour une application de commande telle que la notre, il est préconisé d'utiliser un codage binaire pour permettre à l'AG de chercher l'espace de solution plus minutieusement [FOR 02].

Après plusieurs tests, nous avons adopté les données présentées sur le tableau 6.3 suivant :

Paramètre	Intervalle	Précision	Nombre de bits pour le codage
Nombre de SEFs : NEF	[3 , 9]	2	2
I ^{er} paramètre d'espacement de la grille : PsG_1	[0.1 , 1]	0.01	7
II ^{ème} paramètre d'espacement de la grille : PsG_2	[-1 , 1]	2	1
Paramètre angulaire : $Angle$	[0 , $\pi/2$]	$\pi/512$	9
I ^{er} paramètre d'espacement des FAs : PsF_1	[0.1 , 1]	0.01	7
II ^{ème} paramètre d'espacement des FAs : PsF_2	[-1 , 1]	2	1
Paramètre de forme des FAs : Pf	[0 , 1.99]	0.01	8
Gains des entrées du CF: G_e , $G_{\Delta e}$	[0 , 50]	0.01	13
Gain de la sortie du CF: $G_{\Delta u}$	[0 , 50]	0.1	9

Tableau 6.3 Paramètres (gènes) utilisés pour le codage

- Le nombre de SEFs est limité, comme déjà précisé (§ VI.2.1), aux entiers impairs compris dans l'intervalle [3, 9]. Un avantage qui découle de ce choix est que l'information du nombre de SEFs peut être codée par deux bits seulement par variable.
- Pour l'espace de coordonnées de la grille, nous rappelons que le paramètre correspondant PsG est exprimé en fonction des deux paramètres PsG_1 et PsG_2 tels que $PsG=(PsG_1)^{PsG_2}$.
Le paramètre PsG_1 varie dans l'intervalle [0.1, 1] avec un pas de 0.01. Quant à PsG_2 , servant de paramètre puissance, il détermine la tendance de concentration des coordonnées, vers le centre ou vers l'extrémité, selon qu'il prenne les valeurs -1 ou 1.
- La codification du paramètre d'espace des FAs s'effectue de la même manière que pour l'espace de coordonnées de la grille avec $PsF=(PsF_1)^{PsF_2}$.
- La multitude de tests effectués est, principalement, due à la difficulté de fixer les intervalles et les pas de précision du paramètre de forme des FAs Pf , du paramètre angulaire $Angle$ et des trois gains du CF :
 - Le paramètre de forme a été choisi comme étant un nombre réel compris dans l'intervalle [0, 2[avec une précision de 0.01 suffisante pour la variation de ce paramètre.
 - Le paramètre angulaire $Angle$ varie dans l'intervalle [0, $\pi/2$] avec un pas de précision égal à $\pi/512$.
 - Les gains du CF G_e , $G_{\Delta e}$ et $G_{\Delta u}$ ont, comme plage de variation de leurs valeurs, l'intervalle [0, 50] avec un pas de précision de 0.01 pour les deux premiers et de 0.1 pour le troisième.

Nous aurons finalement la structure du chromosome illustrée sur la figure 6.20 suivante :

$NEFe$ (2 bits)	$NEF\Delta e$ (2 bits)	$NEF\Delta u$ (2 bits)	PsG_1e (7 bits)	$PsG_1\Delta e$ (7 bits)	$PsG_1\Delta u$ (7 bits)	PsG_2e (1 bit)	$PsG_2\Delta e$ (1 bit)	$PsG_2\Delta u$ (1 bit)	$Angle$ (9 bits)	PsF_1e (7 bits)
...										
$PsF_1\Delta e$ (7 bits)	$PsF_1\Delta u$ (7 bits)	PsF_2e (1 bit)	$PsF_2\Delta e$ (1 bit)	$PsF_2\Delta u$ (1 bit)	$PfMe$ (8 bits)	$PfEe$ (8 bits)	$PfM\Delta e$ (8 bits)	$PfE\Delta e$ (8 bits)	$PfM\Delta u$ (8 bits)	$PfE\Delta u$ (8 bits)
...										
G_e (13 bits)	$G_{\Delta e}$ (13 bits)	$G_{\Delta u}$ (9 bits)								

Figure 6.20 Structure du chromosome

Cette codification nécessite donc un chromosome de 146 bits pour chaque individu. Ceci signifie qu'il y a 2^{146} (environ 9×10^{43}) solutions potentielles ; ce qui constitue un véritable défi pour l'AG qui devra chercher des contrôleurs optimaux dans ce vaste espace de recherche.

VI.2.5 Fonction d'Evaluation (Fitness)

L'évaluation de la performance d'un CF donné à l'issue de chaque itération de l'exécution de l'AG est basée sur le résultat (réponse) de la simulation de son application à la commande en position de l'extrémité manipulatrice du bras de robot flexible objet de notre étude.

Les valeurs des erreurs calculées par rapport à la référence à chaque instant d'échantillonnage, ainsi qu'éventuellement les instants de leurs prélèvements serviront au calcul de la fitness de l'individu (CF).

Parmi les index de performance à usage courant en automatique, exprimés en termes de minimisation, nous pouvons citer des critères tels que *IAE* (intégrale des erreurs absolues), *ISE* (intégrale des erreurs carrées) et *ITAE* (intégrale des erreurs absolues multipliées par le temps) ; chacun de ces critères possédant ses propres performances [LIN 95].

Nous avons opté pour le critère *ITAE* qui est, d'ailleurs, utilisé dans la plupart des travaux, concernant l'optimisation des CFs, rencontrés dans la littérature. Il est calculé comme suit:

$$ITAE = \int_{t_0}^{t_f} t * |e(t)| dt = \int_{t_0}^{t_f} t * |y_d(t) - y(t)| dt \quad (6.15)$$

ou en discret

$$ITAE = \sum_{k=1}^n kT * |e(kT_e)| = \sum_{k=1}^n kT * |y_d(kT_e) - y(kT_e)| \quad (6.16)$$

où y_d est la réponse désirée (régime établi), y est la réponse effective, T_e est la période d'échantillonnage, $e(kT_e)$ est l'erreur prélevée au $k^{ième}$ instant d'échantillonnage et n est le nombre d'instant d'échantillonnage.

Cet index est inversé pour être exprimé en terme de maximisation. La fonction *fitness* est alors:

$$fitness = \frac{1}{ITAE} \quad (6.17)$$

La fonction implémentant la fitness ou fonction d'évaluation du CF appliqué au système robotique commandé comprend 4 étapes :

- Décodage du chromosome binaire pour donner les paramètres du CF,
- Génération du CF à partir de ces paramètres,
- Simulation de l'application du CF au système commandé,
- Calcul de la fitness du CF à partir des vecteurs des erreurs commises par rapport au régime établi (référence) et des instants de prélèvement de ces erreurs.

La valeur de la fitness est alors calculée en inversant *ITAE* (la somme des erreurs pondérées par leurs instants d'échantillonnage) :

$$fitness = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (kT) * |e(kT_e)|} \quad (6.18)$$

ce qui revient à écrire sous forme vectorielle :

$$fitness = \frac{1}{[Erreur(kT_e)] * [Temps(kT_e)]^t} \quad (6.19)$$

où *Erreur* est le vecteur ligne des erreurs se produisant aux instants de prélèvement et *Temps^t* est le vecteur transposé des instants de prélèvement.

Il est important de signaler que considérant le temps de calcul énorme que prennent les simulations, certaines de ces dernières sont arrêtées (si la réponse de l'extrémité du bras flexible s'éloigne trop de la référence alors, la simulation est immédiatement interrompue et une faible fitness est affectée au CF correspondant). Dans le cas de dépassement ("overshoot" ou "undershoot") de la réponse du bras flexible par rapport à sa référence, nous augmentons le poids de l'erreur dans la fitness, pénalisant ainsi ce mauvais comportement du système.

A noter que pour toutes les simulations, nous avons opté pour une période d'échantillonnage de 0.01 seconde et considéré une durée de simulation de la réponse de 10 secondes.

VI.2.6 Résultats de l'Optimisation du Contrôleur Flou par Algorithmes Génétiques et de son Application à la Commande du Bras Manipulateur Flexible

VI.2.6.1 Résultats de l'optimisation du contrôleur flou par algorithmes génétiques

Plusieurs exécutions d'AGs ont été réalisées, avec cent générations pour chacune, en opérant des changements de la méthode de sélection (R.L : Roue de Loterie ou bien R.L.R.S : Roue de loterie avec Reste Stochastique), de la méthode de croisement, de la probabilité de croisement ainsi que la probabilité de mutation. Les détails des dix exécutions successives comportant les meilleurs résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 6.4 suivant :

N° de l'Exécution	Taille de la Population	Méthode de Sélection	Méthode de Croisement	Probabilité de Croisement	Probabilité de Mutation	Valeur de la Fitness	Rang de la Génération
1	50	R.L	Un point	0.9	0.1	15.9464	61
2	50	R.L	Deux points	0.9	0.1	4.5991	92
3	50	R.L	Uniforme	0.9	0.1	15.0778	87
4	50	R.L	Un point	0.8	0.1	17.7158	74
5	50	R.L	Un point	0.8	0.15	5.1726	69
6	50	R.L.R.S	Un point	0.9	0.1	10.4453	66
7	50	R.L.R.S	Deux points	0.9	0.1	22.5864	70
8	50	R.L.R.S	Uniforme	0.9	0.1	9.5239	90
9	50	R.L.R.S	Un point	0.8	0.1	20.3388	85
10	50	R.L.R.S	Un point	0.8	0.15	15.6771	91

Tableau 6.4 Détails de 10 exécutions d'algorithmes génétiques

La meilleure fitness a été trouvée pendant la 7^{ème} exécution. Cependant, ce n'est pas le contrôleur correspondant que nous avons retenu comme étant le meilleur. En effet, après avoir effectué des tests de poursuite de trajectoire et des tests de perte de charge pour les deux contrôleurs correspondants aux deux

meilleures fitness obtenues (7^{ème} et 9^{ème} exécution), il s'est avéré que ces deux contrôleurs n'ont pas répondu à nos attentes, en matière de performances souhaitées. Nous avons donc retenu le CF trouvé pendant la 4^{ème} exécution, qui correspond à la troisième meilleure fitness trouvée. Ce dernier a tout à fait répondu à nos aspirations.

Ce problème s'expliquerait, peut-être, par le fait que la fonction d'évaluation que nous avons adoptée exprime uniquement les performances telles que la rapidité, la précision et la stabilité de la réponse du système commandé et ne prend pas en compte d'autres performances telle que la robustesse du contrôleur.

Pour avoir un aperçu général sur la progression de l'AG, ayant donné lieu au meilleur CF, le graphe de la figure 6.21, ci-dessous, illustre deux caractéristiques intéressantes. L'une, exprimant l'évolution de la meilleure fitness en fonction de la génération, montre la progression de l'amélioration de la fitness au fil des 100 générations. L'autre représente l'évolution de la moyenne des fitness par génération.

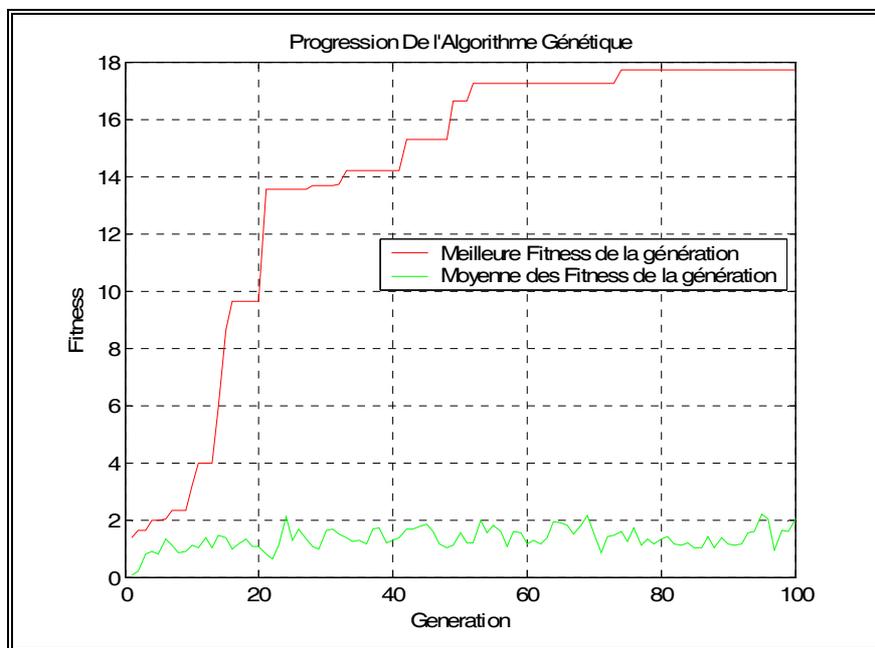


Figure 6.21 Progression de l'AG ayant donné lieu au meilleur CF

Les valeurs des paramètres de conception du CF optimisé par AG sont données dans le tableau 6.5 suivant:

Paramètre	Valeur
$NEFe, NEF\Delta e, NEF\Delta u$	9, 7, 9
$PsGe, PsG\Delta e, PsG\Delta u$	1.58, 0.21, 3.80
Angle	1.318
$PsFe, PsF\Delta e, PsF\Delta u$	1.17, 0.44, 1.98
$PfMe, PfEe, PfM\Delta e, PfE\Delta e, PfM\Delta u, PfE\Delta u$	0.28, 1.62, 0.5, 0.49, 1.68, 0.38
$G_e, G_{\Delta e}, G_{\Delta u}$	0.84, 0.20, 26.46

Tableau 6.5 Valeurs des paramètres de conception du CF optimisé

Les FAs et la table de décision générées sont présentées, respectivement, sur les figures 6.22 et 6.23 suivantes :

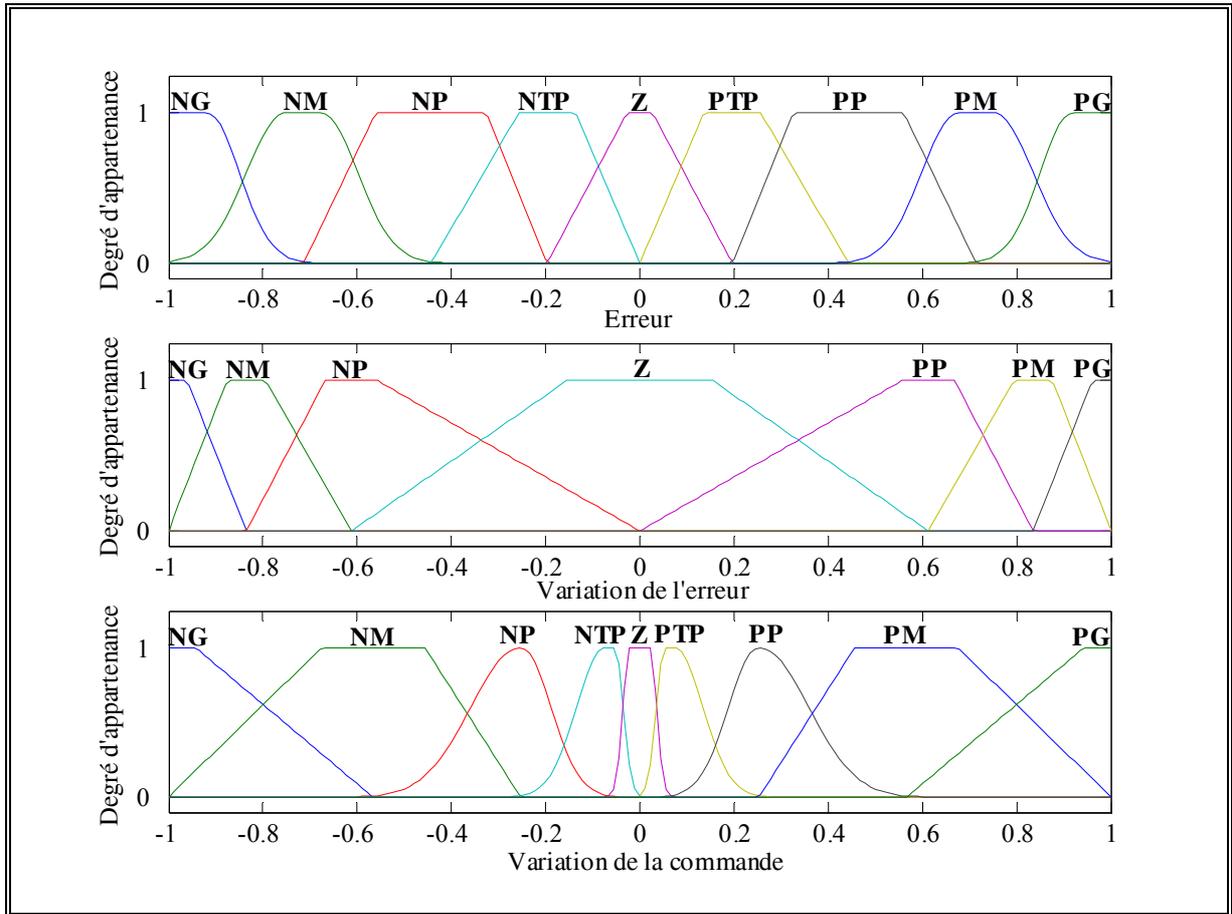


Figure 6.22 FAs du CF optimisé

Δu		e								
		NG	NM	NP	NTP	Z	PTP	PP	PM	PG
Δe	NG	NG	NG	NG	NG	NG	NG	NM	NM	NM
	NM	NG	NG	NG	NG	NG	NM	NM	NM	NM
	NP	NG	NG	NG	NM	NM	NM	NM	NM	NP
	Z	NM	NM	NP	NP	Z	PP	PP	PM	PM
	PP	PP	PM	PM	PM	PM	PM	PG	PG	PG
	PM	PM	PM	PM	PM	PG	PG	PG	PG	PG
	PG	PM	PM	PM	PG	PG	PG	PG	PG	PG

Figure 6.23 Table des règles de décision du CF optimisé

Neuf FAs (SEFs) ont été assignées aux variables *erreur* e et *variation de la commande* Δu du CF distribuées (espacées) avec une tendance à la compression vers le centre, plus accentuée, pour les FAs de la variable Δu . Quant à leurs formes elles sont de tendances inverses : pour la variable e , les formes de la FA du milieu est celle de l'extrémité sont, respectivement, trapézoïdale et gaussienne, alors que, pour la variable Δu , c'est le contraire. Pour ce qui est de la variable *variation de l'erreur* Δe du CF, sept FAs (SEFs), toutes de forme trapézoïdale, lui ont été assignées avec une distribution à tendance compressive vers les extrémités.

La table de décision du CF optimal est le résultat de l'optimisation de l'affectation des règles de décision ($7 \times 9 = 63$ règles), selon la méthode de la grille, vue précédemment.

VI.2.6.2 Résultats de simulation de l'application du contrôleur flou optimisé par algorithmes génétiques à la commande du bras manipulateur flexible

A. Commande en position

Comme premier test de base, nous simulons la soumission du bras de robot flexible à une référence en échelon de position angulaire de 90° . La réponse en position obtenue ainsi que le couple de commande généré par le CF optimisé sont, respectivement, présentés sur les figures 6.24 et 6.25.

Nous pouvons constater que la référence est atteinte, avec une haute précision, en moins de 2 secondes et qu'il n'y a pas d'erreurs en régime permanent (pas de vibrations résiduelles). Ce résultat nous permet d'affirmer qu'il y a une nette amélioration des performances du CF, suite à son optimisation par AG.

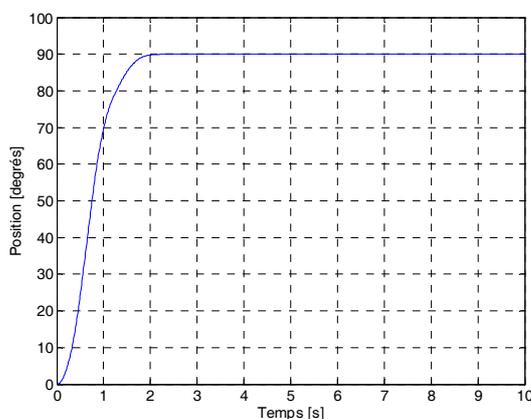


Figure 6.24 Réponse en position

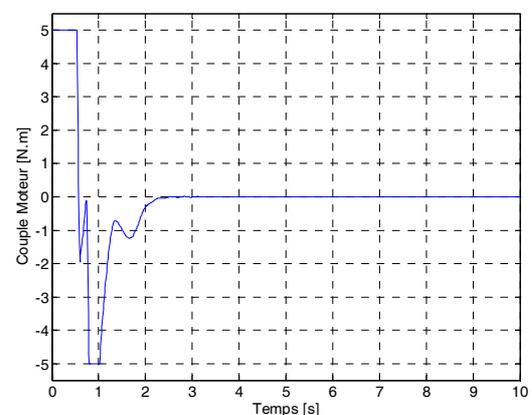


Figure 6.25 Commande générée

B. Test de répétitivité de tâche

Ce test consiste à soumettre l'organe terminal du bras flexible à une tâche de positionnement répétitive (signal de référence répétitif variant, périodiquement, entre deux positions distinctes). Il a pour but de tester les capacités du CF à réaliser cette tâche répétitive sans qu'il y ait d'accumulation d'erreurs statiques.

Pour notre application, nous avons prévu une consigne de ce mouvement de va et vient, entre 0° et 90° .

Le résultat de cet essai, fort intéressant en robotique, s'est avéré très satisfaisant, au vu de la réponse illustrée par la figure 6.26 incluant aussi le couple de commande généré. En effet, aucune accumulation d'erreur n'a été détectée.

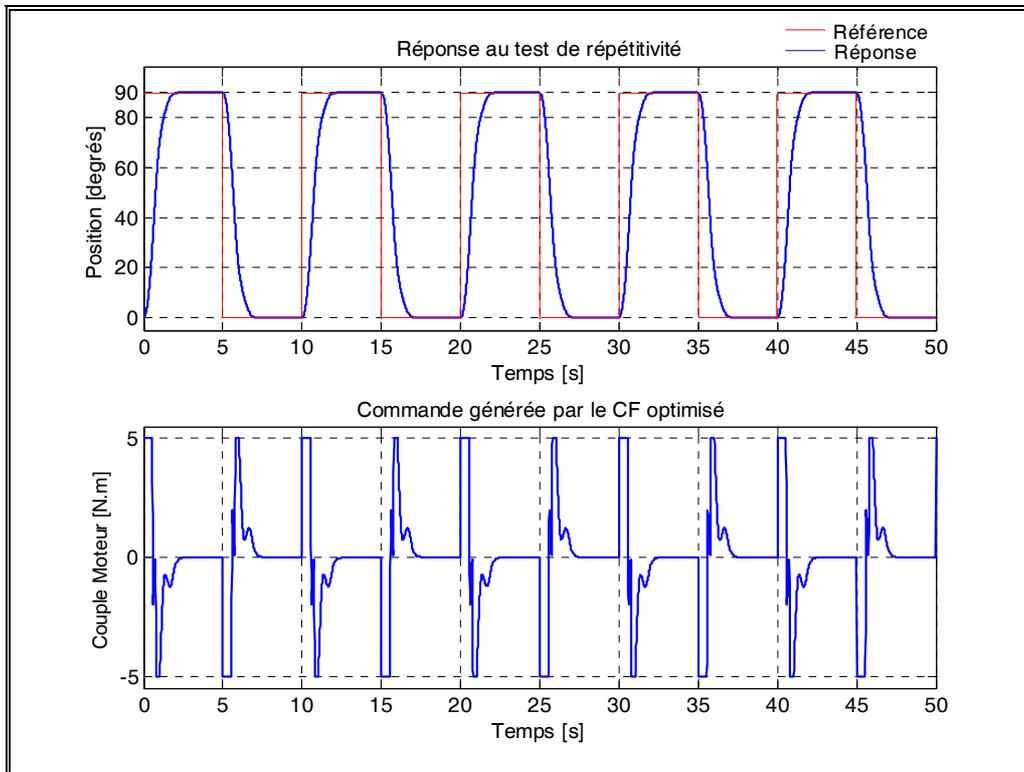


Figure 6.26 Réponse et couple de commande généré pour le test de répétitivité de positionnement

C. Test de variation de consigne

Le but du présent test est d'examiner les capacités de notre CF optimisé, à s'acquitter, convenablement, des tâches de positionnement précis de l'extrémité manipulatrice du robot à liaison élastique, mise à l'épreuve d'un signal de référence, constitué d'une suite de consignes variables. Pour cela, nous l'avons soumise au signal consigne suivant :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 10^\circ & \text{pour } 0 \leq t < 5 \\ 180^\circ & \text{pour } 5 \leq t < 10 \\ 45^\circ & \text{pour } 10 \leq t < 15 \\ 90^\circ & \text{pour } 15 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

La figure 6.27 montre les profils de la réponse totale obtenue, ainsi que les variations du couple de commande résultant. Au vu du comportement précis observé, nous pouvons attester de la performance satisfaisante réalisée par notre contrôleur intelligent.

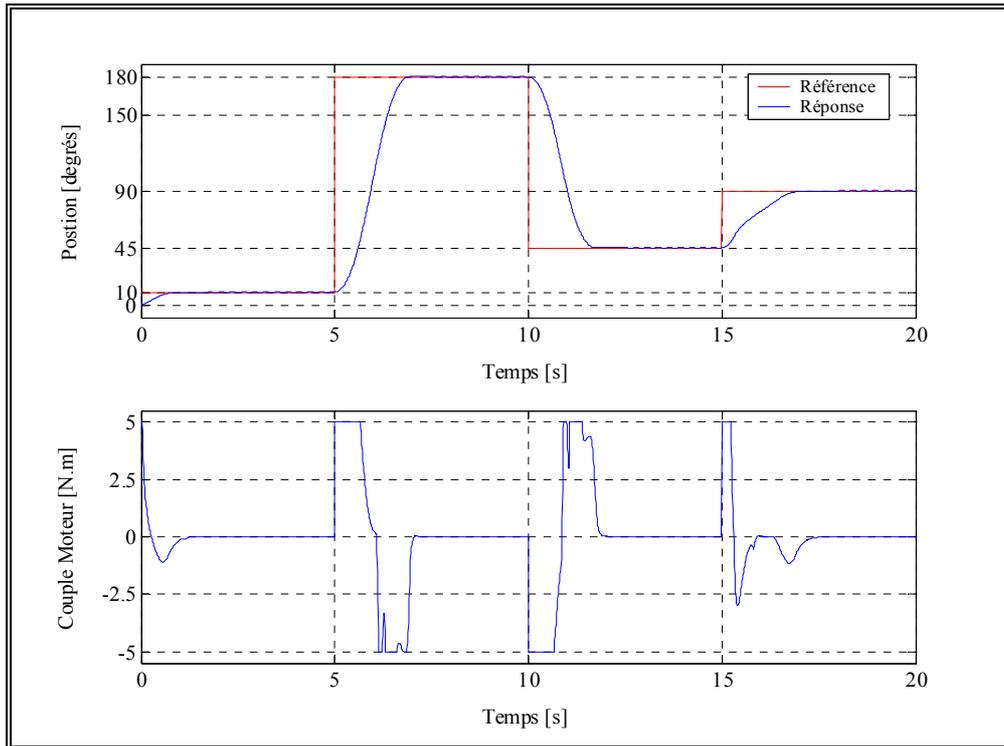


Figure 6.27 Test de variation de consignes de position

D. Test de poursuite de trajectoire

La réalisation d'une poursuite précise d'une trajectoire désirée par l'organe terminal des bras de robots manipulateurs à liaisons flexibles est un des problèmes majeurs posés, en matière de commande précise de tels robots.

Pour simuler la mise à l'épreuve de notre bras de robot flexible, à un tel test, nous avons généré la trajectoire suivante :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 60 \left\{ 1 + \sin \left[\frac{\pi(t-1)}{2} \right] \right\}^\circ & \text{pour } 0 \leq t < 2 \\ 120^\circ & \text{pour } 2 \leq t < 3 \\ 60 \left\{ 1 + \sin \left[\frac{\pi(t-2)}{2} \right] \right\}^\circ & \text{pour } 3 \leq t < 5 \\ 0^\circ & \text{pour } 5 \leq t \leq 7 \\ 60 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi(t-1)}{2} \right] \right\}^\circ & \text{pour } 7 \leq t \leq 13 \\ 120^\circ & \text{pour } 13 \leq t \leq 15 \end{cases}$$

La réponse du bras flexible à cette trajectoire de référence, ainsi que la commande générée par le CF optimisé, sont présentées sur la figure 6.28.

L'examen de la performance obtenue, nous permet d'affirmer que notre contrôleur linguistique a encore donné satisfaction lors de ce nouveau test plus critique. En effet, la tâche d'évolution en poursuite de trajectoire variable, de l'extrémité de la liaison, a été exécutée avec une grande précision.

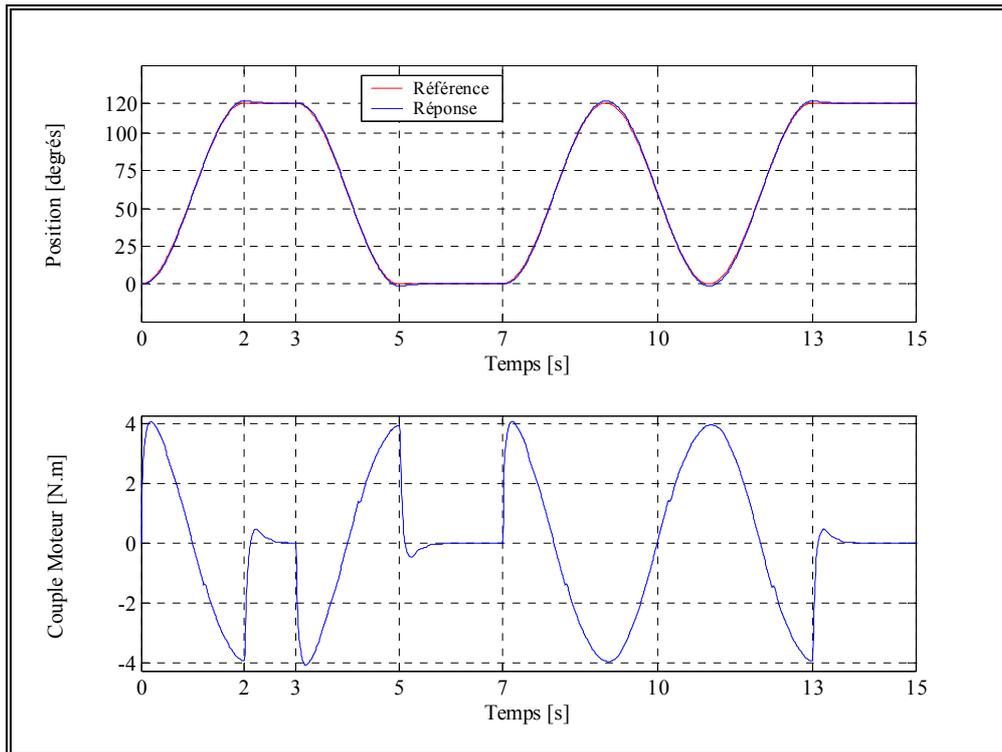


Figure 6.28 Test de poursuite d'une trajectoire

E. Tests de robustesse vis-à-vis des variations de charge

Lors de l'étude du comportement, en boucle ouverte, de notre bras de robot flexible, nous avons pu constater l'importance de l'effet de la charge transportée sur la dynamique de son évolution. Il est, donc, fort intéressant de faire subir, à notre système de commande, des changements brusques de dynamique, occasionnés par de subites variations de charge, pour tester sa robustesse à travers ses capacités compensatoires.

A cet effet, nous avons simulé de brusques pertes de charge, à l'instant $t = 0.5$ s, de 10 %, 30 %, 50 % et 70 % de la charge nominale (1 Kg), transportée lors d'une évolution de commande en position.

Les résultats de simulation obtenus sont présentés sur la figure 6.29.

En examinant ces quatre réponses, nous constatons que le contrôleur a assuré, avec une grande précision, la conduite du bras chargé vers sa consigne de position. En effet, aucune dégradation notable n'est à relever, ni en cours d'évolution (régime transitoire), ni en régime établi, si ce n'est un faible dépassement pour le dernier cas dû à la rapidité de montée de la réponse après l'instant de la subite variation.

Pour les cas de pertes de charge supérieures à 70%, les performances du CF commencent à se détériorer progressivement (apparition de dépassements).

Ceci dit, nous pouvons affirmer que notre CF intelligent a fait preuve de réelles capacités de robustesse, vis-à-vis de ces changements brusques de dynamique du système commandé.

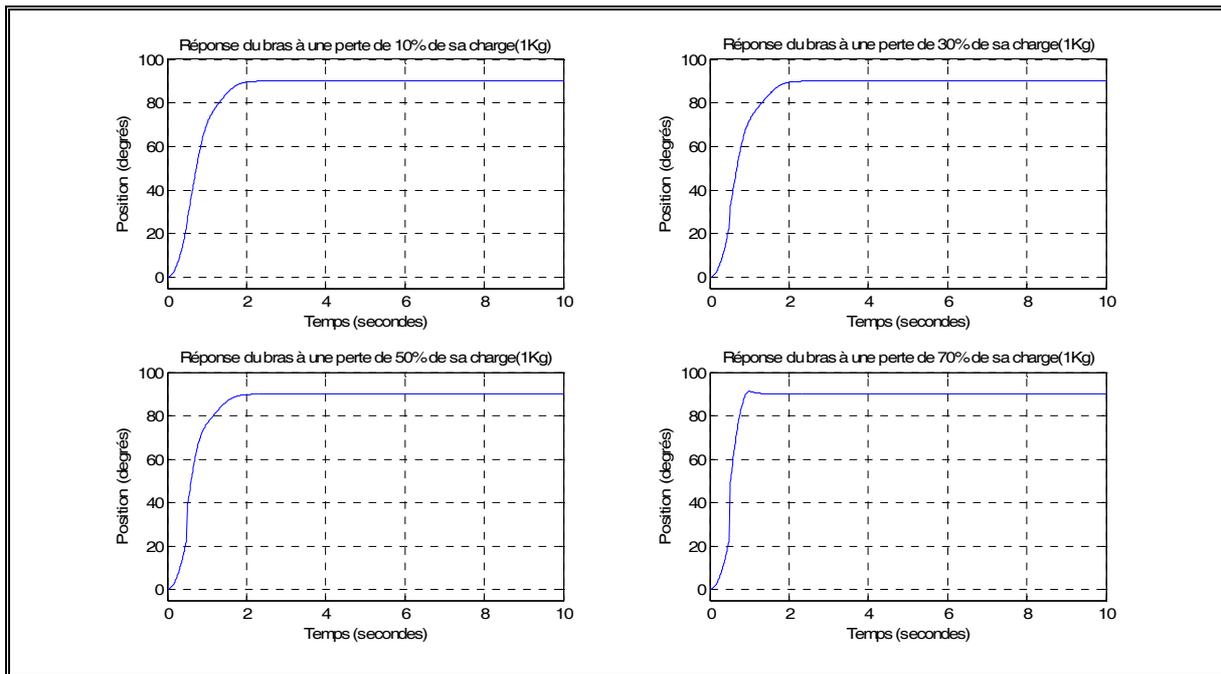


Figure 6.29 Résultats de la simulation des pertes de charge

VI.3 CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à la commande du bras de robot manipulateur à liaison flexible, objet de notre étude. A cet effet, nous avons proposé des contrôleurs non conventionnels, basés sur des techniques issues de l'intelligence artificielle, à savoir, la logique floue et les AGs.

Dans un premier temps et d'une manière empreinte de subjectivité, un CF du type Mamdani a été conçu pour être, ensuite, mis à l'épreuve de la commande en position de l'extrémité du bras manipulateur souple. Le résultat obtenu a été assez satisfaisant.

Par souci d'améliorer cette première performance réalisée, nous avons proposé, comme contribution, un ensemble de méthodologies d'optimisation, par AGs, des différents paramètres de ce CF : distribution et forme des FAs, table des règles de décision, valeurs des gains.

Les performances réalisées, suite aux différents tests effectués, permettent d'attester de l'efficacité de la stratégie de commande floue optimisée par AGs adoptée, pour la prise en charge de la commande précise et robuste du bras de robot flexible.

Conclusion Générale

Les travaux présentés dans cette thèse ont porté sur différentes approches de modélisation mathématique approfondie d'un bras de robot manipulateur à une liaison flexible basées sur les théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko encastrees et articulées en tenant compte des effets des amortissements viscoélastique structural interne dit de Kelvin-Voigt et visqueux externe de l'air. Par ailleurs, deux schémas de commande intelligente ont été proposés et appliqués à la commande du bras de robot flexible considéré.

Ces travaux ont été préparés au sein du Laboratoire de Commande des Processus du Département de Génie Electrique à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

Quatre modèles dynamiques complets du bras de robot souple ont été développés en se basant sur une association de la méthode des modes supposés et du formalisme énergétique de Lagrange.

Le développement des deux premiers modèles est basé sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli pour deux cas de configurations physiques : bras encastree-chargé puis articulé-chargé. Les phénomènes d'amortissements viscoélastique structural interne dit de Kelvin-Voigt et visqueux externe de l'air y ont été inclus pour une meilleure finesse de modélisation. Les équations mathématiques régissant le comportement dynamique du système ainsi modélisé ont été obtenues par application de l'association de la méthode des modes supposés et du formalisme énergétique Lagrangien.

Pour les deux autres modèles développés, la théorie des poutres de Timoshenko pour les deux cas encastree-chargé et articulé chargé a été utilisée. Les mêmes phénomènes d'amortissement ont été pris en compte dans l'obtention des ces deux derniers modèles dynamiques en se basant sur la même technique d'association de l'approche des modes supposés et du formalisme de Lagrange.

Une analyse détaillée, par simulation numérique, du comportement vibratoire en boucle ouverte de ces systèmes dynamiques complexes à paramètres distribués a été faite. Il a été notamment constaté que la charge à l'extrémité finale du bras manipulateur a une influence sensible sur les formes des fonctions modales de forme ainsi que sur la fréquence des oscillations de la liaison flexible avec un effet atténuant. En outre, les amplitudes correspondantes sont augmentées. A noter que le comportement pour le cas articulé est plus oscillatoire que celui correspondant au cas encastree pour les deux classes de modèles à savoir poutre d'Euler-Bernoulli et poutre de Timoshenko.

Concernant la commande du bras de robot flexible, nous avons opté pour des contrôleurs non conventionnels basés sur des techniques issues de l'intelligence artificielle, à savoir, la logique floue et les algorithmes génétiques.

Dans un premier temps et d'une manière empreinte de subjectivité, un premier contrôleur a été élaboré pour être appliqué à la commande en position de l'extrémité du bras manipulateur souple. Le résultat de simulation obtenu a été assez satisfaisant.

Par souci d'améliorer cette première performance réalisée, les différents paramètres de ce même contrôleur (distribution et forme des fonctions d'appartenance, table de décision, gains) ont été optimisés par algorithmes génétiques pour remédier au caractère subjectif de la première conception.

Nous avons proposé une variante de la technique de conception et d'optimisation par algorithmes génétiques d'un contrôleur flou dite de Park.

Nous avons, notamment, proposé, de prendre en considération l'optimisation des formes des fonctions d'appartenance en plus des autres paramètres optimisés par la méthode de Park. Nous avons, également, modifiés la technique d'affectation des règles de décision dans la grille proposée par Park.

Les performances réalisées, suite aux différents tests effectués, attestent de la capacité de la stratégie de commande floue optimisée par algorithmes génétiques adoptée à prendre en charge la commande du bras de robot flexible. Ceci nous amène à affirmer que l'optimisation par algorithmes génétiques est une méthodologie puissante et efficace pour palier au problème de subjectivité de génération des paramètres constitutifs des contrôleurs flous.

Ce travail ne saurait s'arrêter à ce stade et gagnerait énormément à être enrichi par d'éventuelles extensions. Nous en proposons quelques axes que nous envisageons, nous-mêmes, comme perspectives d'approfondissement de nos recherches, dans un futur très proche.

Il serait fort intéressant de mener des investigations, sur les possibilités de passage à l'optimisation du contrôleur flou, par algorithmes génétiques en temps réel.

Nous proposons aussi de procéder à une hybridation des capacités des algorithmes génétiques à vaste domaine d'exploration avec une métaheuristique d'optimisation par voisinage telle que la méthode Tabu ou celle du recuit simulé, pour une meilleure efficacité de recherche de solutions optimales.

Une stratégie à deux niveaux de commande, s'acquittant respectivement, des tâches de stabilisation des mouvements rigides et flexibles pourrait être entrevue pour une meilleure efficacité à l'épreuve du système robot flexible. Elle pourrait être basée sur une judicieuse séparation hiérarchique des natures des mouvements, par une technique telle que la méthode des perturbations singulières.

L'exploitation de la propriété de retour d'effort potentiel, propre au système déformable, offrirait une possibilité de réduire la consommation en énergie motrice.

Pour ce qui est de la modélisation, elle pourrait être étendue aux bras de robots à multiples liaisons flexibles et à articulations flexibles. Les effets de gravité et de torsion pourraient aussi être inclus, ce qui conduirait à l'élaboration d'un modèle dynamique tridimensionnel représentant un bras de robot flexible hautement manoeuvrable.

Références Bibliographiques

- [ADD 05] F. Adda, C. Larbes, M. Allek, **M. Loudini**, “Design of an Intelligent Fuzzy Logic Controller for a Nuclear Research Reactor”, *Progress in Nuclear Energy*, Vol. 46, No. 3-4, pp. 328-347, 2005 Elsevier Ltd.
- [ALA 06] M. S. Alam, M. O. Tokhi, M. N. H. Siddique, M. A. Hossain, “Design of a Hybrid Fuzzy Logic Controller for a Single Link Flexible Manipulator with Genetic Algorithms”, *Proceedings of the International Conference Control 2006 (ICC 2006)*, Glasgow, Ecosse, 30 Août–1 Septembre, 2006.
- [AME 65] W. F. Ames, “*Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*”, Academic Press, 1965.
- [AMI 91] S. H. M. Amin, A. S. Morris, “A MRAC Scheme to Control Lightweight Flexible Robot Manipulators”, *Proc. of IECON’91, Int. Conf on Industrial Electronics*, Vol. 2, pp. 1246-1250, 1991.
- [AND 53] R. A. Anderson, “Flexural Vibrations in Uniform Beams according to the Timoshenko Theory”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, pp. 504-510, 1953.
- [AOU 93] Y. Aoustin, C. Chevallereau, The Singular Perturbation Control of a Two-Flexible-Link Robot, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 3, pp. 737-742, Atlanta, GA, 1993.
- [AOU 97] Y. Aoustin, M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, J. Rudolph, “Theory and Practice in the Motion Planning and Control of a Flexible Robot Arm Using Mikusinski Operators”, *Proceedings of the IFAC Symposium on Robot Control*, , pp. 287–291, Nantes, France, Septembre 1997.
- [ARC 93] J. I. Arciniegas, A. H. Eltimsahy, K. J. Cios, “Fuzzy Inference and the Control of Flexible Robotic Manipulators”, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pp. 250–254, 1993.
- [ARC 97] J. I. Arciniegas, A. H. Eltimsathy, K. J. Cios, “Neural Networks-Based Adaptive Control of Flexible Robotic Arms”, *Neurocomputing*, Vol. 17, pp. 141–157, 1997.
- [BAB 95] R. Babuska, H. B. Verbruggen, “Model Based Design of Fuzzy Control Systems”, *European Working Group Meeting “FALCON – Fuzzy Algorithms for Control”*, Palma, Espagne, 1995.
- [BAI 98] M. Bai, D. Zhou, H. Schwartz, “Adaptive Augmented State Feedback Control for an Experimental Planar Two-Link Flexible Manipulator”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 14, No. 6, pp. 940–950, Décembre 1998.
- [BAK 67] W. E. Baker, W. E. Woolam, D. Young, “Air and Internal Damping of Thin Cantilever Beams”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 9, pp. 743-766, 1967.
- [BAN 95] R. Banavar, P. Dominic, “An LQG H^∞ Controller for a Flexible Manipulator”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 3, No. 4, pp. 409–416, Décembre 1995.
- [BAN 91] H. T. Banks, D. J. Inman, “On Damping Mechanisms in Beams”, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 716–723, 1991.
- [BAN 96] H. T. Banks, R. C. Smith, Y. Wang, “*Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control*”, Wiley-Masson, New York, USA, 1996.
- [BAN 06] D. Bandopadhyaya, D. K. Bhogadi, B. Bhattacharya, A. Dutta, “Active Vibration Suppression of a Flexible Link Using Ionic Polymer Metal Composite”, *Proc. IEEE Int. Conf. CIS-RAM*, Bangkok, Thaïlande, 7–9 June 2006.

- [BAN 07] D. Bandopadhyaya, B. Bhattacharya, A. Dutta, “An Active Vibration Control Strategy for a Flexible Link Using Distributed Ionic Polymer Metal Composites”, *Smart Materials and Structures*, No. 16, pp. 617–625, 2007.
- [BAR 88] E. Barbieri, U. Ozguner, “Unconstrained Mode Expansion for a Flexible Slewing Link”, *Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 110, pp. 416–421, 1988.
- [BAR 89] H. Baruh, S. S. K. Taikonda, “Issues in the Dynamics and Control of Flexible Robot Manipulators”, *AIAA Journal of Guidance and Control Dynamics*, Vol. 12, No. 5, pp. 659–671, Septembre 1989.
- [BAS 06] P. R. L. Bascetta, “End-Point Vibration Sensing of Planar Flexible Manipulators Through Visual Servoing”, *Mechatronics*, Vol. 16, pp. 221–232, 2006.
- [BAV 96] I. M. Bavelaar, “*Fuzzy Model Inversion*”, Rapport LAAS 96475, Laboratoire d’Analyse et d’Architecture des Systèmes du CNRS, Toulouse, France, Décembre 1996.
- [BAY 87a] E. Bayo, “A Finite-Element Approach to Control the End-Point Motion of a Single Link Flexible Robot”, *International Journal of Robotic Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 63–75, 1987.
- [BAY 87b] E. Bayo, B. Paden, “On Trajectory Generation for Flexible Robots”, *Int. Journal of Robotic Systems*, Vol. 4, No. 2, pp. 229–235, 1987.
- [BAY 88a] E. Bayo, “Computed Torque for the Position Control of Open-Chain Flexible Robots”, *Proceedings of the IEEE Int. Conference on Robotics and Automation*, pp. 316–321, Philadelphia, USA, 1988.
- [BAY 88b] E. Bayo, R. Movaghar, M. Medus, “Inverse Dynamics of a Single-Link Flexible Robot. Analytical and Experimental Results”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 3, No. 3, pp. 150–157, 1988.
- [BAY 89] E. Bayo, H. Moulin, “An Efficient Computation of the Inverse Dynamics of Flexible Manipulators in the Time Domain”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 710–715, Scottsdale, 1989.
- [BEL 90] F. Bellezza, L. Lanari, G. Ulivi, “Exact Modeling of the Slewing Flexible Link”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 734–739, Cincinnati, OH, USA, May 13–18, 1990.
- [BEN 00a] M. Benosman, G. Le Vey, “End-Effector Motion Planning for One-Link Flexible Robot”, *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 561–566, Vienna, Autriche, 2000.
- [BEN 00b] M. Benosman, G. Le Vey, “Exact Articular Trajectory Tracking for a One-Link Flexible Manipulator: An Approach through the Parametrization of Differential Operators”, *Proceedings of the 31rd International Symposium on Robotics*, pp. 493–498, Montréal, Canada, Mai 2000.
- [BEN 01] M. Benosman, G. Le Vey, “Stable Inversion of a Non Minimum Phase System through Nonlinear Boundary Value Problem Formulation”, *IFAC NOLCOS 2001 Proc.*, pp. 283–288, St Petersburg, Russia, 2001.
- [BEN 02a] M. Benosman, F. Boyer, G. Le Vey, D. Primault, “Flexible Links Manipulators: from Modelling to Control”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 34, No. 4, pp. 381–414, 2002.
- [BEN 02b] M. Benosman, G. Le Vey, “Joint Trajectory Tracking for Planar Multi-Link Flexible Manipulator”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2461–2466, Washington D.C., Mai 2002.
- [BEN 04a] M. Benosman, G. Le Vey, “Control of Flexible Manipulators: a Survey”, *Robotica*, No. 22, pp. 533–545, 2004.

- [BEN 04b] M. Benosman, G. Le Vey, L. Lanari and A. De Luca, “Rest to Rest Motion for Planar Multi-Link Flexible Manipulator”, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, No. 126, pp. 115-123, 2004.
- [BER 98] W. Bernzen, “Vibration Control of Flexible Robots Theoretical and Experimental Results”, *IFAC Juillet 1998*, pp. 537–542.
- [BOL 55] B. A. Boley, C. C. Chao, “Some Solutions of the Timoshenko Beam Equations”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, pp. 579-586, 1955.
- [BOO 83] W. Book, M. Majette, “Controller Design for Flexible Distributed Parameter Mechanical Arms via Combined State Space and Frequency Domain Techniques”, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, No. 105, pp. 245–254, Décembre 1983.
- [BOO 84] W. J. Book, “Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms”, *Int. J. of Rob. Res.*, Vol. 3, No. 3, pp. 87-101, 1984.
- [BOO 93] W. J. Book, “Controlled Motion in an Elastic World”, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, vol. 115, pp. 252–261, Jun. 1993.
- [BOU 93] B. Bouchon-Meunier, “*La Logique Floue*”, Collection Que sais-je ?, Presses Universitaires de France, 1993.
- [BRI 91] C. L. Bridges and D. E. Goldberg. “An Analysis of Multipoint Crossover”, *Proceedings of the Foundation of Genetic Algorithms*, FOGA, 1991.
- [BUH 94] H. Buhler, “*Réglage par Logique Floue*”, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne, Suisse, 1994.
- [CAN 81] J. T. Cannon, S. Dostrovsky, “*The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742*”, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [CAN 84] R. H. Cannon, E. Schmitz, “Initial Experiments on End-Point Control of a Flexible One-Link Robot”, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, pp. 62–75, 1984.
- [CAO 00] W. -J. Cao, J. -X. Xu, “A Learning Variable Structure Controller of a Flexible One-Link Manipulator”, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 122, pp. 624–631, Décembre 2000.
- [CAS 02] F. M. Caswara, H. Unbehauen, “A Neurofuzzy Approach to the Control of a Flexible-Link Manipulator”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 18, No. 6, pp. 932-944, Décembre 2002.
- [CET 86] S. Cetinkunt, B. Siciliano, W.J.Book, “Symbolic Modelling and Dynamic Analysing of Flexible Manipulators”, *Proc. of the IEEE Int. Conf. Syst. Man, Cybern.*, pp. 798-803, Atlanta, GA, USA, Octobre 1986.
- [CET 87] S. Cetinkunt, W. J. Book, “Symbolic Modeling of Flexible Manipulators,” *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 3, pp. 2074-2080, Raleigh, NC, USA, Avril 1987.
- [CHA 87] N. Chalhoub, A. Ulsoy, “Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results”, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, No. 109, pp. 299–310, Septembre 1987.
- [CHA 95] T. Chan, K. Stelson, “Point to Point Motion Commands that Eliminate Residual Vibration”, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 909–913, Washington, Juin 1995.
- [CHA 06] N. G. Chalhoub, G. A. Kfoury, B. A. Bazzi, “Design of Robust Controllers and a Nonlinear Observer for the Control of a Single-Link Flexible Robotic Manipulator”, *Journal of Sound and Vibration*, 2006.

- [CHE 89] Y. P. Chen, K. S. Yeung, "Regulation of a One Link Flexible Robot Arm Using Sliding Mode Technique", *International Journal of Control*, Vol. 49, pp. 1965-1978, 1989.
- [CHE 91] P. Chedmail, Y. Aoustin, C. Chevallereau, "Modelling and Control of Flexible Robots", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, pp. 1595-1619, Mai 1991.
- [CHE 95] F. Cheung, E. Fung, T. Leung, "A Two-Switching Surface Variable Structure Control Scheme for a Flexible Manipulator", *Proc. of the Americ. Contr. Conf.*, pp. 830-835, Washington, Juin 1995.
- [CHE 00] F. Cheong, R. Lai, "Constraining the Optimization of a Fuzzy Logic Controller using an Enhanced Genetic Algorithm", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, Vol 30, No.1, pp. 31-46, Février 2000.
- [CHO 95] S. B. Choi, C. C. Cheong, H.C. Shin, "Sliding Mode Control of Vibration in a Single-Link Flexible Arm with Parameter Variations", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 179, pp. 737-748, 1995.
- [CHO 99] S. B. Choi, S. S. Cho, H. C. Sin, H. K. Kim, "Quantitative Feedback Theory Control of a Single-Link Flexible Manipulator Featuring Piezoelectric Actuator and Sensor", *Smart Material Structures*, Vol. 8, pp. 338-349, 1999.
- [CHR 00] E. Christoforou, C. Damaren, "The Control of Flexible Link Robots Manipulating Large Payloads: Theory and Experiments", *Int. Journal of Robotic Systems*, Vol. 17, No. 5, pp. 255-271, 2000.
- [CHU 02] J. Chung, H.H. Yoo, "Dynamic Analysis of a Rotating Cantilever Beam by Using the Finite Element Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 249, No. 1, pp. 147-164, 2002.
- [DAA 98] J. Daafouz, G. Garcia, J. Bernussou, "Robust Control of a Flexible Robot Arm using the Quadratic D-Stability Approach", *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, Vol. 6, pp. 524-533, Juillet 1998.
- [DAD 01] M. H. Dado, "Parametric Pseudo-Rigid-Body Model for Large-Deflection Beams with End Loads", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 36, No. 7, pp. 1123-1133, 2001.
- [DAM 95] C. Damaren, "Passivity Analysis for Flexible Multilink Space Manipulators", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 2, pp. 272-279, Mars-Avril, 1995.
- [DAM 96a] C. Damaren, "Approximate Inverse Dynamics and Passive Feedback for Flexible Manipulators with Large Payloads", *IEEE Trans. on Rob. and Automation*, Vol. 12, No. 1, pp. 131-138, 1996.
- [DAM 96b] C. Damaren, "Adaptive Control of Flexible Manipulators Carrying Large Uncertain Payloads", *International Journal of Robotic Systems*, Vol. 13, No. 4, pp. 219-228, 1996.
- [DAR 59] C. Darwin, "*On the Origin of Species by Means of Natural Selection or the Preservations of Favoured Races in the Struggle of Life*", John Murray, 1859.
- [DAV 91] L. Davis, "*Handbook of Genetic Algorithms*", Van Nostrand Reinhold, New York, USA, 1991.
- [DEL 95] D. Delahaye, "*Optimisation de la Sectorisation de l'Espace Aérien par Algorithmes Génétiques*", Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, France, 1995.
- [DEL 88a] A. De Luca, P. Lucibello and G. Ulivi, "Inversion Techniques for Open and Closed-Loop Control of Flexible Robot Arms", *Robotics Automation and Manufacturing*, 1988.
- [DEL 88b] A. De Luca, B. Siciliano, "Joint-Based Control of Nonlinear Model of a Flexible Arm", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 935-940, Atlanta, Georgia, 1988.
- [DEL 89a] A. De Luca, B. Siciliano, "Trajectory Control of a Nonlinear One Link Flexible Arm", *International Journal of Control*, Vol. 50, No. 5, pp. 1699-1715, 1989.
- [DEL 89b] A. De Luca, P. Lucibello, G. Ulivi, "Inversion Techniques for Trajectory Control of Flexible Robot Arms", *Journal of Robotic Systems*, Vol. 6, No. 4, pp. 325-344, 1989.

- [DEL 91a] A. De Luca, L. Lanari, G. Ulivi, “End-Effector Trajectory Tracking in Flexible Arms: Comparison of Approaches Based on Regulation Theory”. Dans: *Advanced Robot Control Lecture Notes in Control and Information Sciences 162* (C. Canudas de Wit, Ed.), pp. 190–206, Berlin, Springer-Verlag, 1991.
- [DEL 91b] A. De Luca, B. Siciliano, “Closed Form Dynamic Model of Planar Multilink Lightweight Robots”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics SMC*, Vol. 21, No. 4, pp. 826–839, Juillet/Août 1991.
- [DEL 93a] A. De Luca and B. Siciliano, “Regulation of Flexible Arms under Gravity”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 4, pp. 463–467, 1993.
- [DEL 93b] A. De Luca, S. Panzieri, “Learning Gravity Compensation in Robots: Rigid Arms, Elastic Joints, Flexible Links”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 7, pp. 417–433, Septembre 1993.
- [DEL 01a] A. De Luca, G. Di Giovanni, “Rest to Rest Motion of a One-Link Flexible Arm”, *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pp. 923–928, Como, Italy, Juillet 2001.
- [DEL 01b] A. De Luca, G. Di Giovanni, “Rest to Rest Motion of a Two-Link Flexible Robot with a Flexible Forearm”, *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pp. 929–935, Como, Italy, Juillet 2001.
- [DEL 02] A. De Luca, V. Caiano, and D. Del Vecovo, “Experiments on Rest-to-Rest Motion of a Flexible Arm”, *Proc. of ISER’02, the 8th Int. Symposium on Experimental Robotics*, Sant’Angelo d’Ischia, Italie, July 8-11, 2002.
- [DEL 03] A. De Luca, “*Robots with Flexible Links: Modeling and Control*”, Scuola di Dottorato CIRA, Controllo di Sistemi Robotici per la Manipolazione e la Cooperazione, Bertinoro (FC), Italie, 14-16 Juillet 2003.
- [DEN 02] H. Deng, F. C. Sun, Z. Q. Sun, “Observer-Based Adaptive Controller Design of Flexible Manipulators Using Time-Delay Neurofuzzy Networks”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 34, pp. 453-466, 2002.
- [DOL 54] C. Dolph, “On the Timoshenko Theory of Transverse Beam Vibrations”, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 12, pp. 175-187, 1954.
- [DOR 96] M. Dorigo, V. Maniezzo, A. Colorni, “The Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Part B, Vol. 26, No. 1, pp. 1-13, 1996.
- [DRE 03] J. Dréo, A. Pétrowski, P. Siarry, E. Taillard, “*Métaheuristiques pour l’Optimisation Difficile*”, Eyrolles, 2003.
- [DRI 93] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, “*An Introduction to Fuzzy Control*”, Springer-Verlag, 1993.
- [DUB 85] D. Dubois, H. Prade, “*Théorie des Possibilités*”, 2^{ème} édition, Masson, 1985.
- [DUR 04] N. Durand, “*Algorithmes Génétiques et Autres Outils d’Optimisation Appliqués à la Gestion de Trafic Aérien*”, Rapport Interne du Laboratoire d’Optimisation Globale (LOG), ENAC, France, Octobre 2004.
- [DWI 06] S. K. Dwivedy, P. Eberhard, “Dynamic Analysis of Flexible Manipulators, a Literature Review”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 41, No. 7, pp. 749–777, 2006.
- [EDW 01] B. T. Edwards, B. D. Jensen, L. L. Howell, “A Pseudo-Rigid-Body Model for Initially-Curved Pinned-Pinned Segments Used in Compliant Mechanisms”, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 123, pp. 464-468, 2001.

- [EKW 01] S. Ekwaro-Osire, D. H. S. Maithripala, J. M. Berg, “A Series Expansion Approach to Interpreting the Spectra of the Timoshenko Beam”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, pp. 667-678, 2001.
- [FAR 01] M. P. Fard, “*Modelling and Control of Mechanical Flexible Systems*”, Doktor Ingenior Dissertation, Report 2000:14-W, Department of Engineering Cybernetics, Norwegian University of Science and Technology, N-7034 Trondheim, Norvège, 2001.
- [FLE 01] P. J. Fleming, R. C. Purshouse, “*Genetic Algorithms in Control Systems Engineering*”, Research Report No. 789, Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, Sheffield, S1 3JD, UK, Mai 2001.
- [FLE 02] P. J. Fleming, R. C. Purshouse, “Evolutionary Algorithms in Control Systems Engineering: A Survey”, *Control Engineering Practice*, Vol. 10, pp. 1223–1241, 2002.
- [FOR 02] J. Foran, “*Optimisation of a Fuzzy Logic Controller Using Genetic Algorithms*”, Master of Engineering in Electronic Systems, School of Electronic Engineering, Dublin City University, République d’Irlande, 2002.
- [FOU 92] L. Foulloy, S. Galichet, “Représentation des Contrôleurs Flous”, *Actes des Deuxièmes Journées Nationales sur les Applications des Ensembles Flous*, pp. 126-136, Nîmes, France, Novembre 1992.
- [FRA 91] A. R. Fraser, R. W. Daniel, “*Perturbation Techniques for Flexible Manipulators*”, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1991.
- [GE 97] S. S. Ge, T. H. Lee, E. G. Tan, “Adaptive Neural Network Control of Flexible Link Robots Based on Singular Perturbation”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 365–369, Hartford, CT, USA, 1997.
- [GE 98a] S. S. Ge, T. H. Lee, G. Zhu, “A Nonlinear Feedback Controller for a Single-Link Flexible Manipulator Based on Finite Element Model”, *Journal of Robotic Systems*, Vol. 14, No. 3, pp. 165–178, 1998.
- [GE 98b] S. S. Ge, T. H. Lee, J. Q. Gong, Z. P. Wang, “Model-Free Controller Design for a Single-Link Flexible Smart Materials Robots”, *International Journal of Control*, Vol. 73, No. 6, pp. 531–544, 2000.
- [GEI 01] B. Geist, J. R. McLaughlin, “Asymptotic Formulas for the Eigenvalues of the Timoshenko Beam”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 253, pp. 341-380, 2001.
- [GEN 95] H. Geniele, R. Patel, K. Khorasani, “Control of a Flexible-Link Manipulator”, *Proceedings of the IEEE Int. Conference on Robotics and Automation*, pp. 1217–1222, 1995.
- [GEN 97] H. Geniele, R. Patel, “End-Point Control of a Flexible Link Manipulator: Theory and Experiments”, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 5, No. 6, pp. 556–570, 1997.
- [GER 84] M. Geradin, G. Robert, C. Bernardin, “Dynamic Modelling of Manipulators with Flexible Members”, *Congress of Advanced Software in Robotics*, pp. 27-39, Liège, Belgique, 4-6 Mai 1984.
- [GER 87] M. Geradin, A. Cardona, “Kinematics and Dynamics of Rigid and Flexible Mechanics Using Finite Element and Quaternion Algebra”, *Rapport VA-46*, Université de Liège, LTAS, Belgique, May 1987.
- [GHA 94] M. Ghanekar, “*Scaling Laws for Linear Controllers of Dynamically Equivalent Single Flexible Link Manipulators*”, Master of Applied Science in Electrical Engineering, Waterloo, Ontario, Canada, 1994.
- [GHA 95] M. Ghanekar, D. Wang, G. Heppler, “Scaling Laws for Frequency Domain Controllers of Dynamically Equivalent Single Flexible Link Manipulators”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 919–924, 1995.

- [GLO 97] F. Glover, M. Laguna, “*Tabu Search*”, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [GOL 89] D. E. Goldberg, “*Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*”, Addison Wesley, ISBN: 0201157675, 1989.
- [GOK 98] M. Gokasan, O. S. Bogosyan, A. Arabyan, A. Sabanovic, “A Sliding Mode Based Controller for a Flexible Arm with a Load”, *IEEE Transactions*, pp. 1083–1087, 1998.
- [GRE 05] A. Green, J. Z. Sasiadek, “Adaptive Control of a Flexible Robot using Fuzzy Logic”, *J. Guid. Control Dyn.*, Vol. 28, No. 1, pp. 36-42, 2005.
- [GUA 89] P. Guay, “*Modèle Mécanique des Mécanismes. Formulation à l'aide de Groupes de Lie de Déplacements*”, Thèse de Doctorat en Mécanique, INSA de Lyon, Mars 1989.
- [GUT 98] L. B. Gutiérrez, F. L. Lewis, J. A. Lowe, “Implementation of a Neural Network Tracking Controller for a Single Flexible Link: Comparison with PD and PID Controllers”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 45, No. 2, pp. 307–318, Avril 1998.
- [HAN 99] S. M. Han, H. Benaroya, T. Wei, “Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, No. 5, pp. 935-988, 1999.
- [HAS 07] M. Hassan, R. Dubay, C. Li, R. Wang, “Active Vibration Control of a Flexible One-Link Manipulator Using a Multivariable Predictive Controller”, *Mechatronics*, Vol. 17, No. 2, pp. 311-323, 2007.
- [HAS 87] G. G. Hastings, W. J. Book, “A Linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators”, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 7, No. 1, pp. 61-64, 1987.
- [HIL 91] K. Hillsley, S. Yurkovich, “Vibration Control of Two-Link Flexible Robot Arm”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2121–2126, Sacramento, California, Avril 1991.
- [HOL 75] J. H. Holland, “*Adaptation in Natural and Artificial Systems*”, Ann Arbor, MI: Univ. Michigan Press, 1975.
- [HOL 92] J. H. Holland, “Genetic Algorithms”, *Scientific American*, pp. 66-72, Juillet 1992.
- [HOS 04] M. A. Hossain, A. A. M. Madkour, K. P. Dahal, and H. Yu, “Intelligent Active Vibration Control for a Flexible Beam System”, *Proceedings of the IEEE SMC UK-RI Chapter Conference 2004 on Intelligent Cybernetic Systems*, Londonderry, U.K, 7-8 Septembre 2004.
- [HUA 61] T. C. Huang, “The Effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 28, pp. 579-584, 1961.
- [HUA 00] H. -P. Huang, W. -M. Lin, “Control of a Flexible Robot Arm Using Simplified Fuzzy Controllers”, *International Journal of Fuzzy Systems*, Vol. 2, No. 1, pp. 67-77, Mars 2000.
- [IMA 81] E. Imam, “*Contribution à l'Etude Dynamique des Mécanismes Déformables*”, Thèse de Docteur Ingénieur en Mécanique, Lyon 1- INSA, France, 1981.
- [INM 96] D. J. Inman, “*Engineering Vibration*”, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [ISO 99] M. Isogai, F. Arai, T. Fukuda, “Modeling and Vibration Control with Neural Network for Flexible Multi-Link Structures”, *Proceedings of the IEEE Int. Conference on Robotics and Automation*, pp. 1096–1101, Detroit, Michigan, Mai 1999.
- [JAI 94] S. Jain, P. -Y. Peng, A. Tzes, F. Khorrami, “Neural Network Designs with Genetic Learning for Control of a Single Link Flexible Manipulator”, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2570-2574, Baltimore, Maryland, Juin 1994.

- [JAL 01] N. Jalili, "An Infinite Dimensional Distributed Base Controller for Regulation of Flexible Robot Arms", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 123, pp. 712–719, 2001.
- [JAM 93] M. Jamshidi, N. Vadiiee, T. J. Ross, "Fuzzy Logic and Control: Software and Hardware Applications", Prentice Hall, 1993.
- [JIA 06] X. Jiang, A. Konno, M. Uchiyama, "Visual Servoing Experiment Using a 3D Flexible-Link Manipulator", *Proc. of IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1224–1229, 2006.
- [JIA 07] X. Jiang, A. Konno, M. Uchiyama, "A Vision-Based Endpoint Trajectory and Vibration Control for Flexible Manipulators", *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 3427–3432, Rome, Italie, 2007.
- [JNI 07] A. Jnifene, "Active Vibration Control of Flexible Structures using Delayed Position Feedback", *Systems & Control Letters*, No. 56, pp. 215 – 222, 2007.
- [KAN 85] H. Kanoh, H. G. Lee, "Vibration Control of a One-Link Flexible Arm", *Proceedings of the 24th Conference on Decision and Control*, pp. 1172-1177, Ft. Lauderdale, FL, Décembre 1985.
- [KAR 01] M. Karkoub, K. Tamma, "Modelling and μ -Synthesis Control of Flexible Manipulators", *Computers and Structures*, No. 79, pp. 543–551, 2001.
- [KAR 06] H. R. Karimi, M. J. Yazdanpanah, R. V. Patel, K. Khorasani, "Modeling and Control of Linear Two-time Scale Systems: Applied to Single-Link Flexible Manipulator", *J. Intell. Robot. Syst.*, Vol. 45, pp. 235–265, 2006.
- [KHA 99] W. Khalil, E. Dombre, "Modélisation, Identification et Commande des Robots", Hermès Science Publications, Paris, 1999.
- [KIM 01] H. K. Kim, S. B. Choi, B. S. Thompson, "Compliant Control of a Two-Link Flexible Manipulator Featuring Piezoelectric Actuators", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, pp. 411–424, 2001.
- [KIM 04] C. Kimball, L. -W. Tsai, "Modeling of Flexural Beams Subjected to Arbitrary End Load", *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, No. 124, pp. 223-235, 2004.
- [KIR 83] S. Kirkpatrick, -C. D. Gelatt-- Jr., and M. P. Vecchi, "Optimization by simulated annealing", *Science*, Vol. 220, pp. 671-680, 1983.
- [KOS 93] B. Kosko, S. Isaka, "La logique Floue", *Pour la Science*, No. 191, pp. 62-68, 1993.
- [KRI 88] H. Krishnan, M. Vidyasagar, "Control of a Single-Link Flexible Beam using a Hankel-Norm-based Reduced Order Model", *Proc. of the IEEE Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 9-14, 1988.
- [KUB 99] E. Kubica, D. Wang, "Two-Stage Fuzzy Controller for a Flexible Link Manipulator", *International Journal of Robotics and Automation*, No. 14, pp. 9–14, 1999.
- [KWO 94] D. Kwon, W. Book, "A Time-Domain Inverse Dynamic Tracking Control of a Single-Link Flexible Manipulator", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, No. 116, pp. 193–200, 1994.
- [LAC 97] V. Lacrose, "Réduction de la Complexité des Contrôleurs Flous : Application à la Commande Multivariable", Thèse de doctorat, LAAS, INSA de Toulouse, Novembre 1997.
- [LAV 93] E. Lavrovskii, A. Formalskii, "Control of an Elastic Manipulator Arm Using Load Position and Velocity Feedback", *J. of Applied Mathematic Mechanics*, Vol. 57, No. 6, pp. 1005–1014, 1993.
- [LEE 90a] C. C. Lee, "Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller - Part I", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 20, No. 2, pp. 404-418, Mars/Avril 1990.

- [LEE 90b] C. C. Lee, “Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller - Part II”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 20, No. 2, pp. 419-435, Mars/Avril 1990.
- [LEE 88] J. D. Lee, B. L. Wang, “Optimal Control of a Flexible Robot Arm”, *Computers and Structures*, Vol. 29, No. 3, pp. 459–467, 1988.
- [LEE 90c] J. D. Lee, “Application of Optimal Control Theory to Flexible Robotic Manipulators”, *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, Vol.7, No. 3-4, pp. 327–355, 1990.
- [LEE 93] M. A. Lee, T. Takagi, “Integrating Design Stages of Fuzzy Systems Using Genetic Algorithms”, *Proc. of the 2nd IEEE Int. Conference on Fuzzy Systems*, pp. 612-617, San Fransisco, USA, 1993.
- [LEE 94] J. X. Lee, G. Vukovichand, J. Z. Sasiadek, “Fuzzy Control of a Flexible Link Manipulator”, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 568-574, Baltimore, Maryland, USA, 1994.
- [LEE 98] J. X. Lee, G. Vukovich, “Fuzzy Logic Control of Flexible Link Manipulators – Controller Design and Experimental Demonstrations”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 2, pp. 2002–2007, 1998.
- [LI 03] J. Li, “Hierarchical Fuzzy Logic Controller for a Flexible Link Robot Arm Performing Constrained Motion Tasks”, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, Vol. 150, No. 4, pp. 355–364, 2003.
- [LIC 01] W. Licheng, S. Zengqi, S. Fuchun, “Neural networks control structure for manipulators with flexible last link”, *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2404–2408, 2001.
- [LIN 93] Y. Lin, T. Lee, “An Investigation of Fuzzy Logic Control of Flexible Robots”, *Robotica*, Vol. 11, pp. 363–371, 1993.
- [LIN 02] J. Lin, F. L. Lewis, “Fuzzy Controller for Flexible-Link Robot Arm by Reduced-Order Techniques”, *IEEE Proc. on Contr. Theory and Applications*, Vol. 149, No. 3, pp. 177–187, 2002.
- [LIN 95] D. A. Linkens, H. O. Nyongesa, “Genetic Algorithms for Fuzzy Control. Part 1: Offline System Development and Application”, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, Vol. 142, No. 3, pp. 161-176, Mai 1995.
- [LIU 94] K. Liu, F. L. Lewis, “Hybrid Feedback Linearization/Fuzzy Logic Control of a Flexible Link Manipulator”, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, Vol. 2, pp. 325-336, 1994.
- [LOS 85] L. Losco, F. Pelletier, J.-P. Taillard, “Le Principe de Moindre Courbure en Robotique”, *4th IFTOMM Int. Symposium of Linkages and Computer Aided Design Methods*, Bucarest, Roumanie, Jul. 4-9, 1985.
- [LOS 91] L. Losco, F. Pelletier, J.-P. Taillard, “Modelling of a Chain of Rigid Bodies By Biquaternions”, *European J. Mech., A/Solids*, Vol. 10, No. 4, pp. 433-451, 1991.
- [LOU 05] M. Lou, Q. Duan, G. Chen, “Modal Perturbation Method for the Dynamic Characteristics of Timoshenko Beams”, *Shock and Vibration*, No. 12, pp. 425-434, IOS Press, 2005.
- [LOU 97] M. Loudini, “*Modélisation, Analyse et Méthodologies de Commande Linguistique Floue d’un Bras Manipulateur de Robot Flexible*”, Thèse de Magister, Laboratoire de Commande des Processus, Département de Génie Electrique, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1997.
- [LOU 06a] M. Loudini, M. A. Boumehdi, D. Boukhetala, M. Tadjine, “Mathematical Modeling of a Lightweight One-Link Flexible Robot Arm”, *Proceedings of the International Conference on Modeling and Simulation (MS 2006)*, pp. 451-456, 3-5 Avril 2006, Kuala Lumpur, Malaisie.
- [LOU 06b] M. Loudini, D. Boukhetala, M. Tadjine “Timoshenko Beam Theory based Mathematical Modelling of a Flexible Robot Manipulator”, *Proceedings of the International Conference on Control, Modeling and Diagnosis (ICCMD’06)*, Papier N° 178, 22-24 Mai 2006, Annaba, Algérie.

- [LOU 06c] **M. Loudini**, D. Boukhetala, M. Tadjine, M. A. Boumehdi, “Application of Timoshenko Beam Theory for Deriving Motion Equations of a Lightweight Elastic Link Robot Manipulator”, *International Journal of Automation, Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 5, No. 2, pp. 11-18, 2006, ISSN 1687-4811.
- [LOU 06d] **M. Loudini**, M. Tadjine, D. Boukhetala, “Timoshenko Beam Theory based Deriving Motion Equations of a One Link Flexible Robot Manipulator”, *International Conference on Automation Robotics and Autonomous Systems (ARAS'06)*, 13-15 Juin 2006, Sharm El Sheikh, Egypte.
- [LOU 06e] **M. Loudini**, D. Boukhetala, M. Tadjine, “Timoshenko Beam Theory Based Mathematical Modelling of a Lightweight Flexible Link Robot Manipulator”, *Proceedings of the International Conference on Modeling and Simulation (CDIC'06)*, Paper ID: P069, 3-5 Août 2006, Queretaro, Mexique.
- [LOU 06f] **M. Loudini**, D. Boukhetala, M. Tadjine, “Mathematical Modelling of a Single Link Flexible Manipulator”, *Proceedings of the International Conference: Control 2006*, Paper N° 208, 30 Août-1 Septembre 2006, Glasgow, Ecosse, Royaume Uni.
- [LOU 07a] **M. Loudini**, D. Boukhetala, M. Tadjine, “Comprehensive Mathematical Modelling of a Transversely Vibrating Flexible Link Robot Manipulator Carrying a Tip Payload”, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 67-83, 2007, ISSN 1425-1655.
- [LOU 07b] **M. Loudini**, D. Boukhetala, M. Tadjine, “Timoshenko Beam Theory Based Mathematical Modelling of a Lightweight Flexible Link Robot Manipulator”, *Advances in Dynamics, Instrumentation and Control*, Vol. II, A. Lozano, S. Rakheja and C.-Y. Su (Eds.), pp. 37-46, World Scientific Co. Pte. Ltd., ISBN-13 978-981-270-805-2, ISBN-10 981-270-805-7, 2007.
- [LOU 07c] **M. Loudini**, D. Boukhetala, M. Tadjine, “Comprehensive Mathematical Modelling of a Flexible link Robot Manipulator”, *International Journal of Modelling, Identification and Control*, à paraître dans Vol. 2, N° 4, 2007, ISSN 1746-6172, Inderscience Publishers.
- [LOV 44] A. E. H. Love, “*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*”, Dover, New York, 1944.
- [MAC 76] P. J. MacVicar-Whelan, “Fuzzy Sets for Man Machine Interactions”, *International Journal of Man-Machine Studies*, No. 8, pp. 687-697, 1976.
- [MAC 04] A. Macchelli, C. Melchiorri, “Modeling and Control of the Timoshenko Beam. The Distributed Port Hamiltonian Approach”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 43, No. 2, pp. 743-767, 2004.
- [MAE 02] Y. Maeda, “Real-Time Control and Learning using Neuro-Controller via Simultaneous Perturbation for Flexible Arm System,” *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2583-2588, 2002.
- [MAM 74] E. H. Mamdani, “Application of Fuzzy Algorithm for Control of a Simple Dynamic Plant”, *Proc. Inst. Elect. Eng. Contr. Sci.*, Vol. 121, pp. 1585-1588, 1974.
- [MAM 75] E. H. Mamdani, S. Assilian, “An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller”, *International Journal of Man-Machine Studies*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-13, 1975.
- [MAM 77] E. H. Mamdani, “*Applications of Fuzzy Set Theory to Control Systems: A Survey*”, *Fuzzy Automata and Decision Processes*, M. M. Gupta, G. N. Sardis and B. R. Gaines (Eds.), pp. 77-88, Amsterdam, North-Holland, 1977.
- [MAN 96] K. F. Man, K. S. Tang, S. Kwong, “Genetic Algorithms: Concepts and Applications”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 43, No. 5, pp. 519-534, 1996.
- [MAN 99] G. K. I. Mann, B. -G. Hu, R. G. Gosine, “Analysis of Direct Action Fuzzy PID Controller Structures”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics -Part B: Cybernetics*, Vol. 29, No. 3, pp. 371-388, Juin 1999.

- [MAR 77] D. L. Margolis, D. C. Karnopp, "Bond Graphs for Flexible Multibody Systems", *Proc. IUTAM Conf. on Multibody Dynamics*, pp. 208-219, Munich, 1977.
- [MAR 02] J. Martins, M. Ayala Botto and J. Sa Da Costa, "Modeling of Flexible Beams for Robotic Manipulators", *Multibody System Dynamics*, No. 7, pp. 79-100, 2002.
- [MAR 03] J. M. Martins, Z. Mohamed, M. O. Tokhi, J. Sa Da Costa, M. A. Botto, "Approaches for Dynamic Modelling of Flexible Manipulator Systems", *IEEE Proceedings on Control Theory and Applications*, Vol. 150, No. 4, pp. 401-411, 2003.
- [MAT 05] I. Z. Mat Darus, M.O. Tokhi, "Soft Computing-based Active Vibration Control of a Flexible Structure", *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Vol. 18, pp. 93-114, 2005.
- [MAX 03] N. D. Maxwell, S. F. Asokanathan, "Optimally distributed actuator placement and control for a slewing single-link flexible manipulator", *Smart Mater. Struct.*, Vol. 12, pp. 287-296, 2003.
- [MEC 94] P. Meckl, "Robust Motion Control of Flexible Systems using Feedforward Forcing Functions", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 2, No. 3, pp. 245-253, 1994.
- [MEI 97] L. Meirovitch, "*Principles and Techniques of Vibrations*", Prentice-Hall, Inc, 1997.
- [MER 95] T. Meressi, "Non-linear and Fuzzy Logic vibration Control of Flexible Manipulators", *Proc. of the American Control Conference*, pp. 4238-4242, Seattle, Washington, USA, Juin 1995.
- [MIC 91] Z. Michalewicz, C. Z. Janikov, "Handling Constraints in Genetic Algorithms", *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, ICGA, Cambridge, MA, USA, 1991.
- [MIT 92] P. Mitrouchev, "*Méthodologie pour l'Elaboration de Modèles de Comportement de Robot Manipulateurs Sujets à des Déformations Élastiques*", Thèse de Doctorat de l'U.F.R des Sciences et Techniques de l'Université de Franche-Comté, France, 1992.
- [MIZ 88] M. Mizumoto, "Fuzzy Controls under Various Fuzzy Reasoning Methods", *Information Sciences*, Vol. 45, pp. 129-151, 1988.
- [MIZ 89] M. Mizumoto, "Pictorial Representation of Fuzzy Connectives, Part I: Cases of t-norms, t-conorms and Averaging Operators", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 32, No. 2, pp. 217-242, 1989.
- [MIZ 95] M. Mizumoto, "Realization of PID Controls by Fuzzy Control Methods", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 70, pp. 171-182, 1995.
- [MOA 98] M. Moallem, K. Khorasani, R. V. Patel, "Inversion-Based Sliding Control of a Flexible-Link Manipulator", *International Journal of Control*, Vol. 71, No. 3, pp. 477- 490, 1998.
- [MOH 02] Z. Mohamed, M. O. Tokhi, "Vibration Control of a Single-Link Flexible Manipulator Using Command Shaping Techniques", *Proc IMechE-I: J. Syst. Control Eng.*, Vol. 216, No. 2, pp. 191-210, 2002.
- [MOH 05] Z. Mohamed, M. O. Tokhi, "Command Shaping Techniques for Vibration Control of a Flexible Robot Manipulator", *Mechatronics*, Vol. 14, pp. 69-90, 2004.
- [MOH 05] Z. Mohamed, J. M. Martins, M. O. Tokhi, J. S. Da Costa, M.A. Botto, "Vibration Control of a Very Flexible Manipulator System", *Control Engineering Practice*, Vol. 13, pp. 267-77, 2005.
- [MOH 98] A. Mohri, P. Sarkar, Yamamoto, "An Efficient Motion Planning of Flexible Manipulator Along Specified Path", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1104-1109, Leuven, Belgique, Mai 1998.
- [MON 97] G. Montseny, J. Audounet, D. Matignon, "Fractional Integro-Differential Boundary Control of the Euler-Bernoulli Beam", *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4973-4978, San Diego, California, 1997.

- [MOR 98] A. S. Morris, A. Madani, Quadratic Optimal Control of a Two-Flexible-Link Robot Manipulator, *Robotica*, Vol. 16, pp. 97–108, 1998.
- [MOU 94] V. G. Moudgal, K. M. Passino, S. Yurkovich, “Rule-Based Control for a Flexible-Link Robot”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 2, No. 4, pp. 392-405, Décembre 1994.
- [MOU 95] V. G. Moudgal, W. A. Kwong, K. M. Passino, S. Yurkovich, “Fuzzy Learning Control of a Flexible-link Robot”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.3, No.2, pp. 199-210, 1995.
- [NAG 87] G. Naganathan, A. H. Soni, “Coupling Effects of Kinematics and Flexibility in Manipulators”, *International Journal of Robotics Research*, Vol. 6, No. 1, pp. 75-84, 1987.
- [NAG 90] S. Nagarajan, D.A. Turcic, “Lagrangian Formulation of the Equations of Motion for the Elastic Mechanisms with Mutual Dependence between Rigid Body and Elastic Motions, Part 1: Element Level Equations, & Part II: System Equations”, *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 112, No. 2, pp. 203–214 et 215–224, 1990.
- [NIE 00] H. S. Nielsen, “Control of Fast Flexible Robots”, Ph. D. Thesis, Department of Automation, Technical University of Denmark, Building 326, DK-2800, Lyngby, Danemark, 2000.
- [NGU 07] V. B. Nguyen & A. S. Morris, “Genetic Algorithm Tuned Fuzzy Logic Controller for a Robot Arm with Two-link Flexibility and Two-joint Elasticity”, *Journal of Intelligent Robot. Syst.*, Vol. 49, pp. 3–18, 2007.
- [OCO 98] W. O’Connor, D. Lang, “Position Control of Flexible Robot Arms using Mechanical Waves”, *Trans. of the ASME, J. of Dynam. Syst., Measurement, and Contr.*, Vol. 120, pp. 334–339, 1998.
- [OCO 07] W. J. O’Connor, “Wave-Based Analysis and Control of Lump-Modeled Flexible Robots”, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 23, No. 2, pp. 342-352, 2007.
- [ORT 96] N. Ortner, P. Wagner, “Solution of the Initial-Boundary Value Problem for the Simply Supported Semi-Finite Timoshenko Beam”, *Journal of Elasticity*, Vol. 42, pp. 217-241, 1996.
- [PAR 95] Y. J. Park, H. S. Cho, D.H. Cha, “Genetic Algorithm-Based Optimization of Fuzzy Logic Controller Using Characteristic Parameters”, *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Evolutionary Computation*, pp. 831- 836, 1995.
- [PAS 98] K. M. Passino, S. Yurkovich, “*Fuzzy Control*”, Addison-Wesley, 1998.
- [PHA 06] D. T. Pham, A. Ghanbarzadeh, E. Koc, S. Otri, S. Rahim, M. Zaidi, “The Bees Algorithm - A Novel Tool for Complex Optimisation Problems”, *Proc. of the 2nd Int. Virtual Conference on Intelligent Production Machines and Systems (IPROMS 2006)*, Oxford, Elsevier, 2006.
- [POT 91] H. Pota, M. Vidyasagar, “Passivity of Flexible Beam Transfer Functions with Modified Outputs”, *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2826–2831 Sacramento, California, 1991.
- [QI 92] X. Qi, G. Chen, “Mathematical Modeling of Kinematics and Dynamics of Certain Single Flexible-Link Robot Arms”, *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, Vol. 1, pp. 288-293, Dayton, OH, USA, 13-16 Septembre, 1992.
- [QI 93] X. Qi, F. Palmieri, “The diversification Role of Crossover in the Genetic Algorithm”, *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, ICGA, Cambridge, MA, USA, 1993.
- [QIA 92] W.T. Qian, C.C.H. Ma, “A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, pp. 132–137, 1992.
- [RAY 45] J. W. S. Rayleigh (Lord), “*Theory of Sound*” (deux volumes), Dover Publications, New York, reissued 1945, Deuxième Edition.
- [REN 80] M. Renaud, “*Contribution à la modélisation et à la commande dynamique des robots manipulateurs*”, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Septembre 1980.

- [RHI 01] S. Rhim, W. J. Book, "Noise Effect on Adaptive Command Shaping Methods for Flexible Manipulator Control", *IEEE Control System Technology*, Vol. 9, No. 1, pp. 84–92, 2001.
- [RID 06] P. S. Ridgely, "A Method for Dynamic Modeling and Simulation of Flexible Beams", Thèse Ph. D., Berkeley, University of California, USA, 2006.
- [ROM 02] M. Romano, B. Agrawal, F. Bernelli-Zazzera, "Experiments on Command Shaping Control of a Manipulator with Flexible Links", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 25, No. 2, pp. 232–239, 2002.
- [ROS 90] R. E. Rossi, P. A. A. Laura, "Vibrations of a Timoshenko Beam Clamped at One End and Carrying a Finite Mass at the Other", *Applied Acoustics*, Vol. 30, pp. 293-301, 1990.
- [RYU 99] J. Ryu, D. S. Kwon, Y. Park, "A Robust Controller Design Method for a Flexible Manipulator with a Time Varying Payload and Parameter Uncertainties", *IEEE Int. Conference on Robotics and Automation*, pp. 413–418, Detroit, Mai 1999.
- [SAM 90] B. Samanta, "Dynamics of Flexible Multibody Systems Using Bond-Graphs and Lagrange Multipliers", *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, No. 1, pp. 30-35, Mars 1990.
- [SAS 88] J. Z. Sasiadek, R. Srinivasan, "Model Reference Adaptive Control of Flexible Manipulators", *IEE Seminar on Robotics and Control*, Oxford, pp. 62-70, 1988.
- [SAS 89] J. Z. Sasiadek, R. Srinivasan, "Dynamic Modeling and Adaptive control of a Single Link Flexible Manipulator", *AIAA J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12, No. 6, pp. 838–844, 1989.
- [SCH 01] L. M. Schmitt, "Fundamental study: Theory of genetic algorithms", *Theoretical Computer Science*, Vol. 259, pp. 1-61, 2001.
- [SCH 85] E. Schmitz, "Experiments on the End-Point Position Control of a Very Flexible One-Link Manipulator", Thèse Ph.D., Stanford University, Juin 1985.
- [SCI 96] L. Sciavico, B. Siciliano, "Modelling and Control of Robot Manipulators", McGraw-Hill Companies Inc., 1996.
- [SER 89] M. Serna, E. Bayo, "Trajectory Shaping for Flexible Manipulators: A Comparative Study", *Proceedings of the Fourth IEEE Int. Conference on Robotics and Automation*, pp. 159–174, Columbus, Ohio, 1989.
- [SEV 01] M. Sevaux, "Les Méthodes de Recherche par Voisinage", GRP Toulouse, Université de Valenciennes, 2001.
- [SHA 85] I. H. Shames, C. L. Dym, "Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics", Taylor and Francis, Bristol, Pennsylvania, 1985.
- [SHA 00] M. H. Shaheed, "Neural and Genetic Modelling, Control and Real-Time Finite Element Simulation of Flexible Manipulators", Thèse Ph.D., Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, Sheffield, UK, 2000.
- [SHA 05] J. Shana, H.-T. Liua, D. Sunb, "Modified Input Shaping for a Rotating Single-Link Flexible Manipulator", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 285, pp. 187–207, 2005.
- [SHI 00] L.Z. Shi and M. Trabia, "Genetic Tuning of Fuzzy Logic Controller for a Flexible Link Manipulators", *International Conference on Mathematics and Engineering Techniques in Medicine and Biological Science*, pp. 579–585, 2000.
- [SHI 05] L. Z. Shi, M. B. Trabia, "Comparison of Distributed PD-like and Importance-Based Fuzzy Logic Controllers for a Two-link Rigid-flexible Manipulator", *Journal of Vibration and Control*, No. 11, pp. 723–747, 2005.

- [SHI 06] L. Z. Shi and M. B. Trabia, “Design and Tuning of Importance-Based Fuzzy Logic Controller for a Flexible-Link Manipulator”, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, pp. 313–323, Vol. 17, 2006.
- [SIC 88] B. Siciliano, W. Book, “A Singular Perturbation Approach to Control of Lightweight Flexible Manipulators”, *International Journal of Robotics Research*, Vol. 7, No. 4, pp. 79–90, Août 1988.
- [SID 99] M. N. H. Siddique, M. O. Tokhi, “Collocated PD-like Fuzzy Logic Controller for Flexible-link Manipulator”, *Proceedings of the Asia-Pacific Vibration Conference*, pp. 359-365, Singapore, 13-15 Décembre, 1999.
- [SID 00] M. N. H. Siddique, M. O. Tokhi, “PD-PI Fuzzy Logic Control of Flexible-link Manipulators”, *Proc. of the 7th UK Workshop on Fuzzy Systems*, pp. 36-41, Sheffield, 26-27 Octobre, 2000.
- [SID 01] M. N. H. Siddique, M. O. Tokhi, “Neuro-Fuzzy Controller for Flexible-link Manipulators”, *Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence*, Vol. III, pp. 1548 – 1554, Las Vegas, 25-28 Juin 2001.
- [SID 01] M. N. H. Siddique, M. O. Tokhi, “PD-PI-Type Fuzzy Logic Vibration Control of Flexible-Link Manipulators”, *Proceedings of the 8th International Congress on Sound and Vibration*, pp. 371-378, Hong Kong, 02-06 Juillet 2001.
- [SID 02] M. N. H. Siddique, M. O. Tokhi, “GA-based Neuro-Fuzzy Controller for Flexible-link Manipulator”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 471-476, Glasgow, 18-20 Septembre 2002.
- [SIN 90] N. Singer, W. Seering, “Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration”, *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 112, pp. 76–82, 1990.
- [SIN 85] S. Singh, A. Schy, “Robust Torque Control of an Elastic Robotic Arm Based on Invertibility and Feedback Stabilisation”, *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1317–1322, Décembre 1985.
- [SIN 86] S. Singh, A. Schy, “Control of Elastic Robotic Systems by Nonlinear Inversion and Modal Damping”, *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 108, pp. 180–189, September 1986.
- [SMI 73] D. A. Smith, M. A. Chace, A. C. Rubens, “The Automatic Generation of a Mathematical Model for Machinery Systems”, *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 629-635, 1973.
- [SON 98] B. Song, A. J. Koivo, “Neural Network Model Based Control of a Flexible Link Manipulator”, *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 812–817, 1998.
- [SOO 96] P. Sooraksa, “*Mathematical Modeling and Fuzzy PID Control for Flexible-Link Robots*”, Thèse Ph.D., Department of Electrical and Computer Engineering, University of Houston, USA, 1996.
- [SOO 98] P. Sooraksa and G. Chen, “Mathematical Modeling and Fuzzy Control of a Flexible-Link Robot Arm”, *Mathl. Comput. Modelling*, Vol. 27, No. 6, pp. 73-93, 1998.
- [SOU 41] R. V. Southwell, “*An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*”, Oxford University Press, New York, 1941.
- [STE 82] N. G. Stephen “The Second Frequency Spectrum of Timoshenko Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 80, pp. 578-582, 1982.
- [STE 06] N. G. Stephen, “The Second Spectrum of Timoshenko Beam Theory”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, pp. 372-389, 2006.
- [SUB 03] B. Subudhi, A.S. Morris, “Singular Perturbation Approach to Trajectory Tracking of Flexible Robot with Joint Elasticity”, *Int. Journal of Systems Science*, Vol. 34, No. 3, pp. 167–179, 2003.

- [SUG 85] M. Sugeno, "An Introductory Survey of Fuzzy Control", *Information Sciences*, Vol. 36, pp. 59–83, 1985.
- [SUN 96] F. C. Sun, Z. Q. Sun, "A Multirate Adaptive Composite Controller for Flexible-Link Robot Using Neural Networks", *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pp.1039-1041, Beijing, Chine, 1996.
- [SUN 98] D. Sun, J. K. Mills, Combined PD Feedback and Distributed Piezoelectric-Polymer Vibration Control of a Single-Link Flexible Manipulator, *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 1, pp. 667–672, 1998.
- [SUN 99] D. Sun, J. K. Mills, "Study on Piezoelectric Actuators in Control of a Single-Link Flexible Manipulator", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 849-854, Michigan, 1999.
- [SUN 04] D. Sun, J.K. Mills, J. Shan, S.K. Tso, "A PZT Actuator Control of a Single-Link Flexible Manipulator based on Linear Velocity Feedback and Actuator Placement", *Mechatronics*, Vol. 14, pp. 381-401, 2004.
- [SUN 04] F. Sun, L. Zhang, Y. Tang, J. Zhang, "Neural Network plus Fuzzy PD Control of Tip Vibration for Flexible-link Manipulators", *Proceedings of the 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 28 Septembre-2 Octobre 2004, Sendai, Japon.
- [SUN 83] W. Sunada, S. Dubowsky, "On the Dynamic Analysis and Behavior on Industrial Robotic Manipulators with Elastic Members", *Transactions of the ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 105, pp. 42-51, 1983.
- [SUT 99] R. P. Sutton, G. D. Halikias, A. R. Plummer, D. A. Wilson, "Modelling and H^∞ Control of a Single-Link Flexible Manipulator", *Proc. Inst. Mech. Engineers*, Vol. 213, Part I, pp. 85-104, IMech 1999.
- [SYS 89] G. Syswerda, "Uniform crossover in Genetic Algorithms", *Proc. of the 3rd International Conference on Genetic Algorithms*, pp. 2-9, Cambridge, MA, USA, 1989.
- [TAK 85] T. Takagi, M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Application to Modelling and Control", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 15, No. 1, pp. 116-130, 1985.
- [TAL 97] H. A. Talebi, K. Khorasani, R. V. Patel, "Experimental Evaluation of Neural Network Based Controllers for Tracking the Tip Position of a Flexible-Link Manipulator", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3300–3305, 1997.
- [TAL 98] H. A. Talebi, R. V. Patel, K. Khorasani, "Inverse Dynamics Control of Flexible-Link Manipulators Using Neural Networks", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 806–811, Leuven, Belgique, 1998.
- [TAL 99] H. Talebi, K. Khorasani, R. Patel, "Experimental Results on Tracking Control of a Flexible-Link Manipulator, A New Output Redefinition Approach", *Proceedings of the IEEE Int. Conference on Robotics and Automation*, pp. 1090–1095, Detroit, Michigan, Mai 1999.
- [TAL 00] H. A. Talebi, R. V. Patel, H. Asmer, "Neural Network based Dynamic Modeling of Flexible-Link Manipulators with Application to the SSRMS", *Journal of Robotic Systems*, Vol. 17, No. 7, pp. 385-401, 2000.
- [TAN 87] K. L. Tang, R. J. Mulholland, "Comparing Fuzzy logic with Classical Controller Design", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 17, No. 6, pp. 1085-1087, 1987.
- [TAT 93] D. M. Tate, A. E. Smith, "Expected Allele Coverage and the Role of Mutation in Genetic Algorithms", *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms (ICGA)*, Cambridge, MA, USA, 1993.

- [TER 00] V. Tereshko, "Reaction-Diffusion Model of a Honeybee Colony's Foraging Behaviour", dans: *M. Schoenauer, et al. (Eds.), Parallel Problem Solving from Nature VI, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1917, pp. 807–816, Springer-Verlag, Berlin, 2000,.
- [THE 95] R. J. Theodore, A. Ghosal, "Comparison of the Assumed Modes and Finite Element Models for Flexible Multi-Link Manipulators", *International Journal of Robotics Research*, Vol. 14, No. 2, pp. 91–111, 1995.
- [THE 97] R. J. Theodore, A. Ghosal, "Modeling of Flexible-Link Manipulators with Prismatic Joints", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics -Part B: Cybernetics*, Vol. 27, No. 2, pp. 296-305, Avril 1997.
- [TIA 04] L. Tian, C. Collins, "A Dynamic Recurrent Neural Network-Based Controller for a Rigid-Flexible Manipulator System", *Mechatronics*, Vol. 14, pp. 471–490, 2004.
- [TIA 05] L. Tian, C. Collins, "Adaptive Neuro-Fuzzy Control of a Flexible Manipulator", *Mechatronics*, Vol. 15, pp. 1305-1320, 2005.
- [TIM 21] S. P. Timoshenko, "On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars", *Philosophical Magazine*, Vol. 6, No. 41, pp. 744-746, 1921.
- [TIM 22] S. P. Timoshenko, "On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross Section", *Philosophical Magazine*, Vol. 6, No. 43, pp. 125-131, 1922.
- [TIM 54] S. P. Timoshenko, "*Théorie des Vibrations*", Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris-Liège, 1954.
- [TIM 74] S. P. Timoshenko, D. H. Young, W. Jr. Weaver, "*Vibration Problems in Engineering*", Wiley, New York, 1974.
- [TOG 85] M. Togai, P. P. Wang, "Analysis of a Fuzzy Dynamic System and Synthesis of its Controller", *International Journal of Man-Machines Studies*, No. 22, pp. 355-363, 1985.
- [TOK 01] M. O. Tokhi, M. N. H. Siddique, "Soft Computing Control of Flexible-link Manipulators", *Proceedings of the 5th School on Active Noise and Vibration Control Methods*, pp.29-36, Krynica, Pologne, 22-25 Mai, 2001.
- [TON 80] R. M. Tong, "Some Properties of Fuzzy Feedback Systems", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 10, No. 6, pp. 327-330, 1980.
- [TOU 84] P. Touron, "*Modélisation de la Dynamique des Mécanismes Polyarticulés. Application à la CAO et à la Simulation des Robots*", Thèse USTL, Montpellier, France, Juillet 1984.
- [TRA 98] M. Trabia, "Tuning of Distributed Fuzzy Logic Controller for a Flexible-Link Robot", *Vibration and Noise Control*, No. 97, pp. 57–66, 1998.
- [TRA 01] M. Trabia, L. Z. Shi, "Design and Tuning of a Distributed Fuzzy Logic Controller for Flexible-Link Manipulators," *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, Vol. 10, No. 4, pp. 215–233, 2001.
- [TRA 53] P. W. Trail-Nash, A. R. Collar, "The effects of Shear Flexibility and Rotary Inertia on the Bending Vibrations of Beams", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 6, pp. 186-222, 1953.
- [TRA 95] C. Trautman and D. Wang, "Experimental H^∞ Control of a Single Flexible Link with a Shoulder Joint", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1235–1241, 1995.
- [TRU 79] A. Truckenbrodt, "Dynamics and Control Methods for Moving Flexible Structures and their Application to Industrial Robots", *Proceedings of the Fifth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, pp. 831–834, 1979.

- [TSO 03] S. K. Tsoa, T. W. Yang, W. L. Xu, Z. Q. Sun, "Vibration Control for a Flexible-Link Robot Arm with Deflection Feedback", *Int. Journal of NonLinear Mechanics*, Vol. 38, pp. 51–62, 2003.
- [TZA 89] S. Tzafestas, H. Kanoh, "Dynamic Studies of Flexible Robot Manipulators," in "*Distributed Parameter Systems: Modelling and Simulation*", T. Futagami, S.G Tzafestas and Y. Sunahara Ed., Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), IMACS 1989, pp.329-344.
- [VUK 82] M. Vukobratovic, V. Potkonjac, "*Dynamics of Manipulation Robots, Theory and Application*", Scientific Fundamentals of Robotics 1, Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [VUK 99] G. Vukovich and J. X. Lee, "Experiments of Fuzzy vs. PD Controls of Flexible Link Manipulator", *Proceedings of the 14th IFAC World Congress*, pp. 397–326, Beijing, China, 1999.
- [WAI 04] R. -J. Wai, M. -C. Lee, "Intelligent Optimal Control of Single-Link Flexible Robot Arm", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 51, No. 1, Février 2004.
- [WAN 89] W. Wang, S. Lu and C. Hsu, "Experiments on the Position Control of a One-Link Flexible Robot Arm", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 5, No. 3, pp. 131–138, Juin 1989.
- [WAN 91] D. Wang, M. Vidyasagar "Transfer Function for a Flexible Link", *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 10, No. 5, pp. 540–549, Octobre 1991.
- [WAN 92] D. Wang, M. Vidyasagar, "Passive Control of a Stiff Flexible Link", *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 11, No. 6, pp. 572–578, Décembre 1992.
- [WAN 03] F. Y. Wang, Y. Gao, "*Advanced Studies of Flexible Robotic Manipulators: Modeling, Design, Control and Applications*", Series in Intelligent Control and Intelligent Automation, Vol. 4, World Scientific, Août 2003.
- [WED 00] D. K. Wedding, A. Eltimsahy, "Flexible Link Control Using Multiple Forward Paths, Multiple RBF Neural Networks in a Direct Control Application", *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 4, pp. 2619–2624, 2000.
- [WHI 93] D. Whitley, "*A Genetic Algorithm Tutorial*", Technical Report CS-93-103, Dept. of Computer Science, Colorado State University, USA, 1993.
- [WRI 91] A. H. Wright, "Genetic Algorithms for Real Parameter Optimization", *Proceedings of the Foundation of Genetic Algorithms*, FOGA, 1991.
- [XU 00] J. -X. Xu, W. -J. Cao, "Synthesized Sliding Mode Control of a Single-Link Flexible Robot", *International Journal of Control*, Vol. 73, No. 3, pp. 197–209, 2000.
- [YAG 94] R. R. Yager, D. P. Filev, "*Essentials of Fuzzy Modelling and Control*", John Wiley & Sons, 1994.
- [YAN 95] J. Yang, F. Lian, L. Fu, "Adaptive Robust Control for Flexible Manipulator", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1223–1228, 1995.
- [YAN 97a] J. Yang, F. Lian, L. Fu, "Nonlinear Adaptive Control for Flexible-Link Manipulators", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 13, No. 1, pp. 140–1480, 1997.
- [YAN 97b] H. Yang, H. Krishnan and M. Ang Jr., "A Simple Rest-to-Rest Control Command for a Flexible Link Robot", *Proc. IEEE Int. Conf. on Rob. and Autom.*, pp. 3312–3317, Albuquerque, NM, 1997.
- [YAN 99] H. Yang, H. Krishnan, M. Ang Jr., "Tip-Trajectory Tracking Control of Single-Link Flexible Robots Via Output Redefinition", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1102–1107, Detroit, Michigan, Mai 1999.
- [YAN 00] H. Yang, H. Krishnan, M. H. Jr. Ang, "Tip-Trajectory Tracking Control of Single-Link Flexible Robots by Output Redefinition", *IEEE Proc. Contr. Theory Appl.*, Vol. 147, No. 6, pp. 580–587, 2000.

- [YAZ 97] M. J. Yazdanpanah, R. V. Patel, K. Khorasani, "Robust Regulation of a Flexible-Link Manipulator based on a New Modeling Approach", *Proc. Conf. Dec. Contr.*, San Diego, California, USA, Décembre 1997.
- [YAZ 88] A. Yazman, "Modélisation des Robots Flexibles par les Bond-Graphs, Application à l'Analyse de leurs Performances Dynamiques", Thèse de Doctorat en Automatique, Paris 11, France, 1988.
- [YEN 95] J. Yen, R. Langari, L. A. Zadeh (Eds.), "Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems", IEEE Press, New York, 1995.
- [YES 94] A. Yesildirek, M. W. Vandergrift, F. L. Lewis, "A Neural Network Controller for Flexible-Link Robots", *Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pp. 63-68, Août 1994.
- [YON 89] C. Yong, B. L. Walcott, "Control of a One-Link Flexible Manipulator via Lyapunov Methods", *Proceedings of the IEEE International Conference on System Engineering*, pp. 575-579, 1989.
- [YOO 96] B. Yoo, S. Jeong, W. Ham, "Hybrid Control of Flexible Manipulator based on Fuzzy Relations", *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, pp. 817-823, New Orleans, LA, USA, 1996.
- [YUA 03] L. Yuanchun, G. Liu, T. Hong, K. Liu, "Robust Control of a Two-Link Manipulator With Neural Network Based Quasi-Static Deflection Compensation", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 5258-5263, Denver, CO, USA, 2003.
- [YUH 87] J. Yuh, "Application of Discrete-Time Model Reference Adaptive Control to a Flexible Single-Link Robot", *J. Robot. Syst.*, Vol. 4, No. 5, pp. 621-630, 1987.
- [ZAD 65] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets", *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [ZAD 73] L. A. Zadeh, "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 3, No. 1, pp. 28-44, 1973.
- [ZAD 75] L. A. Zadeh, "The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning", *Information Sciences*, No. 8, Part I, pp. 199-249, Part II, pp. 301-357, No. 9, Part III, pp. 43-80, 1975.
- [ZAD 88] L. A. Zadeh, "Fuzzy Logic", *IEEE Computer*, pp. 83-93, Avril 1988.
- [ZAI 06] M. Z. Zain, M. O. Tokhi, Z. Mohamed, "Hybrid Learning Control Schemes with Input Shaping of a Flexible Manipulator System", *Mechatronics*, Vol. 16, pp. 209-219, 2006.
- [ZEN 48] C. Zener, "Elasticity and Inelasticity of Metals", University of Chicago Press, Chicago, USA, 1948.
- [ZHA 98] H. Zhao, D. Chen, "Tip trajectory Tracking for Multilink Flexible Manipulators Using Stable Inversion", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, pp. 314-320, Mars-Avril 1998.
- [ZHA 00] T. Zhang, G. Zhi, "Model Reduction of Flexible Manipulators", *Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation*, Vol. 1, pp. 95-98, 2000.
- [ZHA 04] N. Zhang, Y. Feng, X. Yu, "Optimization of Terminal Sliding Control for Two-Link Flexible Manipulators", *Proceedings of the IEEE 30th Annual Conference of Industrial Electronics Society*, Vol. 2, pp. 1318-1322, 2004.
- [ZIE 89] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, "The Finite Element Method", 4th Edition, Vol. 1 & 2, Mc Graw-Hill Book Company (U.K) Limited, 1989.
- [ZUO 95] K. Zuo, V. Drapeau, D. Wang, "Closed Loop Shaped Input Strategies for Flexible Robots", *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 14, No. 5, pp. 510-529, Octobre 1995.

ANNEXE A

Application des Conditions aux Limites pour la Poutre d'Euler-Bernoulli

L'expression générale de la fonction modale de forme est donnée par :

$$W(x) = A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x) + A_3 \sinh(\beta x) + A_4 \cosh(\beta x) \quad (\text{A.1})$$

A.1 POUTRE D'EULER-BERNOULLI ENCASTREE-CHARGEE

Rappelons les conditions aux limites (C-L) relatives à ce cas :

Extrémité encastrée:
$$\begin{cases} W(0) = 0 \\ W'(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Extrémité libre chargée:
$$\begin{cases} EIW''(\ell) - J_p \omega^2 W'(\ell) = 0 \\ EIW'''(\ell) + M_p \omega^2 W(\ell) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \omega^2 = \frac{EI}{\rho A} \beta^4 \quad (\text{A.3})$$

L'application des C-L (A.2) à l'équation (A.1) donne lieu à l'expression :

$$W(x) = A_1 [\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)] + A_2 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] \quad (\text{A.4})$$

Afin d'appliquer les C-L (A.3) à l'équation (A.4), pour déterminer les coefficients A_1 et A_2 , les trois premières dérivées de $W(x)$ sont données par :

$$W'(x) = \beta \{A_1 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] - A_2 [\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)]\} \quad (\text{A.5})$$

$$W''(x) = -\beta^2 \{A_1 [\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)] + A_2 [\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)]\} \quad (\text{A.6})$$

$$W'''(x) = -\beta^3 \{A_1 [\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)] + A_2 [\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)]\} \quad (\text{A.7})$$

Le remplacement de (A.5), (A.6) et (A.7) dans (A.3) donne lieu aux développements suivants :

$$\begin{aligned} EI \left\{ -\beta^2 \{A_1 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] + A_2 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)]\} \right\} - \\ J_p \omega^2 \left\{ \beta \{A_1 [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] - A_2 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)]\} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} EI \left\{ -\beta^3 \{A_1 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] + A_2 [\sinh(\beta \ell) - \sin(\beta \ell)]\} \right\} + \\ M_p \omega^2 \{A_1 [\sin(\beta \ell) - \sinh(\beta \ell)] + A_2 [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)]\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} A_1 \left\{ -J_p \omega^2 \beta [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] - EI \beta^2 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} - \\ A_2 \left\{ EI \beta^2 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - J_p \omega^2 \beta [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} -A_1 \left\{ EI \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - M_p \omega^2 [\sin(\beta \ell) - \sinh(\beta \ell)] \right\} - \\ A_2 \left\{ EI \beta^3 [\sinh(\beta \ell) - \sin(\beta \ell)] - M_p \omega^2 [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} A_1 \left\{ J_p \omega^2 \beta [\cos(\beta \ell) - \cosh(\beta \ell)] + EI \beta^2 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} - \\ A_2 \left\{ J_p \omega^2 \beta [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] - EI \beta^2 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$A_1 \{EI\beta^3 [\cos(\beta\ell) + \cosh(\beta\ell)] - M_p \omega^2 [\sin(\beta\ell) - \sinh(\beta\ell)]\} = A_2 \{M_p \omega^2 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] - EI\beta^3 [\sinh(\beta\ell) - \sin(\beta\ell)]\} \quad (\text{A.13})$$

Enfin, nous établissons les deux relations suivantes reliant les coefficients A_1 et A_2 :

$$A_2 = A_1 \left\{ \frac{J_p \omega^2 \beta [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] + EI\beta^2 [\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)]}{J_p \omega^2 \beta [\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)] - EI\beta^2 [\cos(\beta\ell) + \cosh(\beta\ell)]} \right\} \quad (\text{A.14})$$

$$A_2 = A_1 \left\{ \frac{EI\beta^3 [\cos(\beta\ell) + \cosh(\beta\ell)] - M_p \omega^2 [\sin(\beta\ell) - \sinh(\beta\ell)]}{EI\beta^3 [\sin(\beta\ell) - \sinh(\beta\ell)] + M_p \omega^2 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)]} \right\} \quad (\text{A.15})$$

A.2 POUTRE D'EULER-BERNOULLI ARTICULEE-CHARGEE

Les conditions aux limites (C-L) relatives à ce cas sont :

$$\text{Extrémité articulée :} \quad \begin{cases} W(0) = 0 \\ EIW''(0) = -J_h \omega^2 W'(0) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Extrémité libre chargée :} \quad \begin{cases} EIW''(\ell) - J_p \omega^2 W'(\ell) = 0 \\ EIW'''(\ell) + M_p \omega^2 W(\ell) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

avec $\omega^2 = \frac{EI}{\rho A} \beta^4$.

L'application de la première des C-L (A.16) donne lieu à la relation :

$$A_4 = -A_2 \quad (\text{A.18})$$

ce qui conduit à écrire $W(x)$ sous la forme:

$$W(x) = A_1 \sin(\beta x) + A_2 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] + A_3 \sinh(\beta x) \quad (\text{A.19})$$

Afin d'appliquer la deuxième des C-L (A.16) à l'équation (A.19), les deux premières dérivées de $W(x)$ sont données par :

$$W'(x) = \beta \{A_1 \cos(\beta x) + A_2 [-\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)] + A_3 \cosh(\beta x)\} \quad (\text{A.20})$$

$$W''(x) = \beta^2 \{-A_1 \sin(\beta x) + A_2 [-\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] + A_3 \sinh(\beta x)\} \quad (\text{A.21})$$

Le remplacement de (A.20) et (A.21) dans la deuxième des C-L de (A.16) donne lieu aux développements suivants :

$$EI\beta^2 (-2A_2) = -J_h \omega^2 \beta (A_1 + A_3) = -J_h \frac{EI}{\rho A} \beta^5 (A_1 + A_3) \Rightarrow A_2 = \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 (A_1 + A_3)$$

$$W(x) = A_1 \sin(\beta x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 (A_1 + A_3) [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] + A_3 \sinh(\beta x)$$

$$W(x) = A_1 \sin(\beta x) + A_1 \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] + A_3 \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] + A_3 \sinh(\beta x)$$

$W(x)$ s'écrit, enfin, sous la forme :

$$W(x) = A_1 \left\{ \sin(\beta x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] \right\} + A_3 \left\{ \sinh(\beta x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] \right\} \quad (\text{A.22})$$

Pour déterminer les deux constantes restantes A_1 et A_3 , il sera fait appel aux deux autres C-L données en (A.17), mais, après avoir exprimé les trois premières dérivées de $W(x)$ comme suit :

$$W'(x) = \beta \left\langle \begin{array}{l} A_1 \left\{ \cos(\beta x) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)] \right\} + \\ A_3 \left\{ \cosh(\beta x) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)] \right\} \end{array} \right\rangle \quad (\text{A.23})$$

$$W''(x) = \beta^2 \left\langle \begin{array}{l} -A_1 \left\{ \sin(\beta x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)] \right\} + \\ A_3 \left\{ \sinh(\beta x) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)] \right\} \end{array} \right\rangle \quad (\text{A.24})$$

$$W'''(x) = \beta^3 \left\langle \begin{array}{l} -A_1 \left\{ \cos(\beta x) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)] \right\} + \\ A_3 \left\{ \cosh(\beta x) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)] \right\} \end{array} \right\rangle \quad (\text{A.25})$$

Le remplacement de (A.23), (A.24) et (A.25) dans (A.17) donne lieu aux développements suivants :

* **Première C-L (A.16)** : $EIW''(\ell) - J_p \omega^2 W'(\ell) = 0 \Rightarrow W''(\ell) = \frac{J_p}{\rho A} \beta^4 W'(\ell) :$

$$\begin{aligned} & -A_1 \beta^2 \left\{ \sin(\beta \ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} + A_3 \beta^2 \left\{ \sinh(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} = \\ & \quad \frac{J_p}{\rho A} \beta^5 \left\langle \begin{array}{l} A_1 \left\{ \cos(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} + A_3 \left\{ \cosh(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} \end{array} \right\rangle \\ & -A_1 \left\{ \sin(\beta \ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} + A_3 \left\{ \sinh(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} = \\ & \quad \frac{J_p}{\rho A} \beta^3 \left\langle \begin{array}{l} A_1 \left\{ \cos(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} + A_3 \left\{ \cosh(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} \end{array} \right\rangle \\ & A_1 \left\{ -\sin(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} + A_1 \frac{J_p}{\rho A} \beta^3 \left\{ -\cos(\beta \ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} = \\ & \quad A_3 \frac{J_p}{\rho A} \beta^3 \left\{ \cosh(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} - A_3 \left\{ \sinh(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} \\ & A_1 \left\{ -\sin(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} + A_1 \left\{ -\frac{J_p}{\rho A} \beta^3 \cos(\beta \ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} = \\ & \quad A_3 \left\{ \frac{J_p}{\rho A} \beta^3 \cosh(\beta \ell) - \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} - A_3 \left\{ \sinh(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} \\ & A_1 \left\{ -\sin(\beta \ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] - \frac{J_p}{\rho A} \beta^3 \cos(\beta \ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] \right\} = \\ & \quad A_3 \left\{ \frac{J_p}{\rho A} \beta^3 \cosh(\beta \ell) - \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 [\sin(\beta \ell) + \sinh(\beta \ell)] - \sinh(\beta \ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta \ell) + \cosh(\beta \ell)] \right\} \end{aligned}$$

$$A_1 \left\{ -\sin(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cos(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cosh(\beta\ell) - \frac{J_p}{\rho A} \beta^3 \cos(\beta\ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sin(\beta\ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sinh(\beta\ell) \right\} =$$

$$A_3 \left\{ \frac{J_p}{\rho A} \beta^3 \cosh(\beta\ell) - \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sin(\beta\ell) - \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sinh(\beta\ell) - \sinh(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cos(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cosh(\beta\ell) \right\}$$

d'où la première relation entre A_1 et A_3 :

$$A_1 \left\{ \left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 - 1 \right) \sin(\beta\ell) - \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cos(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cosh(\beta\ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sinh(\beta\ell) \right\} =$$

$$A_3 \left\{ \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cos(\beta\ell) - \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sin(\beta\ell) - \left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 + 1 \right) \sinh(\beta\ell) + \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cosh(\beta\ell) \right\} \quad (\text{A.26})$$

* **Deuxième C-L (A.17)** : $EIW''(\ell) + M_p \omega^2 W(\ell) = 0 \Rightarrow W''(\ell) = -\frac{M_p}{\rho A} \beta^4 W(\ell)$

$$\beta^3 \left\langle -A_1 \left\{ \cos(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)] \right\} + A_3 \left\{ \cosh(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)] \right\} \right\rangle =$$

$$-\frac{M_p}{\rho A} \beta^4 \left\langle A_1 \left\{ \sin(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] \right\} + A_3 \left\{ \sinh(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] \right\} \right\rangle$$

$$-A_1 \left\{ \cos(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)] \right\} + A_3 \left\{ \cosh(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)] \right\} =$$

$$-A_1 \frac{M_p}{\rho A} \beta^4 \left\{ \sin(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] \right\} - A_3 \frac{M_p}{\rho A} \beta^4 \left\{ \sinh(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] \right\}$$

$$A_1 \left\{ -\cos(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)] \right\} + A_1 \frac{M_p}{\rho A} \beta^4 \left\{ \sin(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] \right\} =$$

$$A_3 \left\{ -\cosh(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)] \right\} + A_3 \frac{M_p}{\rho A} \beta^4 \left\{ -\sinh(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] \right\}$$

$$A_1 \left\{ -\cos(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)] + \frac{M_p}{\rho A} \beta \sin(\beta\ell) + \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] \right\} =$$

$$A_3 \left\{ -\cosh(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 [-\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)] - \frac{M_p}{\rho A} \beta \sinh(\beta\ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 [\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)] \right\}$$

$$A_1 \left\{ -\cos(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta\ell) + \frac{M_p}{\rho A} \beta \sin(\beta\ell) + \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta\ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta\ell) \right\} =$$

$$A_3 \left\{ -\cosh(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta\ell) - \frac{M_p}{\rho A} \beta \sinh(\beta\ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta\ell) + \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta\ell) \right\}$$

$$A_1 \left\{ \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta\ell) - \cos(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta\ell) + \frac{M_p}{\rho A} \beta \sin(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta\ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta\ell) \right\} =$$

$$A_3 \left\{ \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta\ell) + \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta\ell) - \frac{M_p}{\rho A} \beta \sinh(\beta\ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta\ell) \right\}$$

$$A_1 \left\{ \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cos(\beta\ell) + \left(\frac{J_h \beta^3 + 2M_p \beta}{2\rho A} \right) \sin(\beta\ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta\ell) \right\} =$$

$$A_3 \left\{ -\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta\ell) + \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cosh(\beta\ell) + \left(\frac{J_h \beta^3 - 2M_p \beta}{2\rho A} \right) \sinh(\beta\ell) \right\}$$

d'où la deuxième relation entre A_1 et A_3 :

$$A_1 \left\{ \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cos(\beta\ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 + \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sin(\beta\ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta\ell) \right\} = \quad (\text{A.27})$$

$$A_3 \left\{ -\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta\ell) + \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cosh(\beta\ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 - \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sinh(\beta\ell) \right\}$$

Les expressions (A.26) et (A.27) donnent lieu aux deux relations équivalentes suivantes exprimant le coefficient A_3 en fonction du coefficient A_1 :

$$A_3 = A_1 \left\{ \frac{\left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 - 1 \right) \sin(\beta\ell) - \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cos(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cosh(\beta\ell) + \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sinh(\beta\ell)}{\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \cos(\beta\ell) - \frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 \sin(\beta\ell) - \left(\frac{J_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^6 + 1 \right) \sinh(\beta\ell) + \left(\frac{J_h + 2J_p}{2\rho A} \right) \beta^3 \cosh(\beta\ell)} \right\} \quad (\text{A.28})$$

$$A_3 = A_1 \left\{ \frac{\left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cos(\beta\ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 + \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sin(\beta\ell) - \frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cosh(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sinh(\beta\ell)}{-\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 \cos(\beta\ell) - \frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 \sin(\beta\ell) + \left(\frac{M_p J_h}{2\rho^2 A^2} \beta^4 - 1 \right) \cosh(\beta\ell) + \left(\frac{J_h}{2\rho A} \beta^3 - \frac{M_p}{\rho A} \beta \right) \sinh(\beta\ell)} \right\} \quad (\text{A.29})$$

ANNEXE B

Application de la Méthode de Lagrange à la Poutre d'Euler-Bernoulli Amortie

L'équation générale régissant la méthode énergétique de Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i, \quad i=0,1,2,\dots \quad (\text{B.1})$$

où L est le Lagrangien défini par

$$L = T - U \quad (\text{B.2})$$

T : énergie cinétique ; U : énergie potentielle ; D : fonction de dissipation de Rayleigh ; F_i : force externe généralisée agissant sur la coordonnée généralisée correspondante q_i .

Afin d'établir l'énergie cinétique du bras flexible, dépendant de la vitesse d'évolution de celui-ci, un élément infinitésimal, de masse dm , de sa liaison est considéré, comme illustré par la figure B.1.

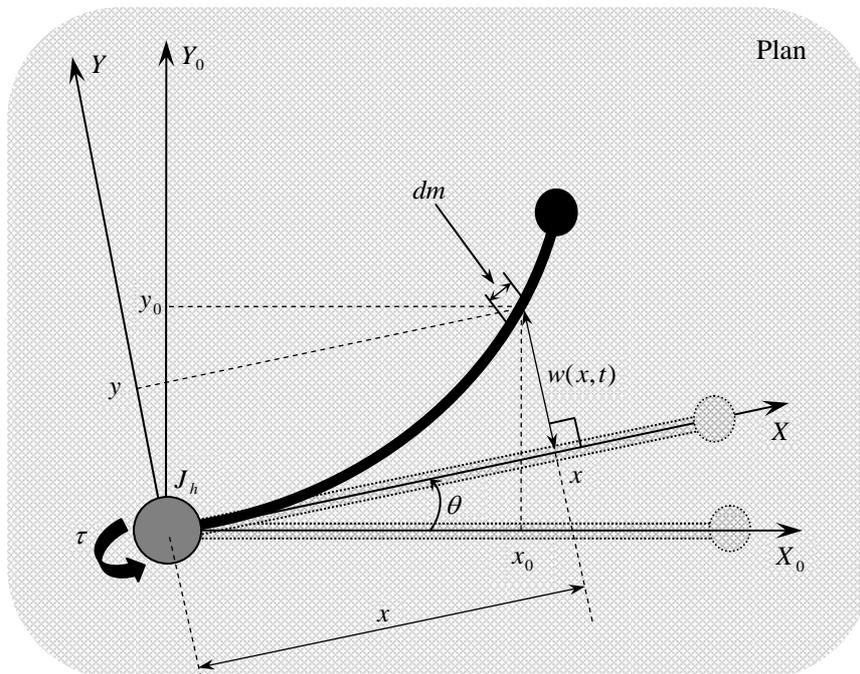


Figure B.1 Configuration du bras manipulateur flexible encastré-chargé

L'analyse cinématique du bras élastique exprime, par matrice de transformation, les coordonnées de l'élément infinitésimal dm dans le repère référentiel global $X_0 Y_0 Z_0$ [LOU 97]:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Par dérivation de (B.3), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -w\dot{\theta}\cos\theta - (x\dot{\theta} + \dot{w})\sin\theta \\ \dot{y}_0 = -w\dot{\theta}\sin\theta + (x\dot{\theta} + \dot{w})\cos\theta \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

En utilisant les équations précédentes, la vitesse de l'élément dm peut être exprimée par :

$$v^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = (x^2 + w^2)\dot{\theta}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{\theta}x\dot{w} \quad (\text{B.5})$$

L'énergie cinétique totale du robot manipulateur chargé est la somme des contributions des énergies cinétiques respectives de l'encastrement (assemblage base du bras robotique-actionneur) T_h , de la liaison flexible T_ℓ et de la charge T_p :

$$T = T_h + T_\ell + T_p \quad (\text{B.6})$$

avec

$$T_h = \frac{1}{2} J_h \dot{\theta}^2(t) \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} T_\ell &= \frac{1}{2} \int_0^\ell v^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^\ell v^2 \rho A dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell [(x^2 + w^2)\dot{\theta}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{\theta}x\dot{w}]^2 \rho A dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A [x^2 + w^2(x,t)] \dot{\theta}^2(t) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A 2x \dot{\theta}(t) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} M_p v_\ell^2 + \frac{1}{2} J_p \left[\dot{\theta}(t) + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} M_p \left\{ [(x^2 + w^2)\dot{\theta}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{\theta}x\dot{w}]_{x=\ell} \right\}^2 + \frac{1}{2} J_p \left[\dot{\theta}(t) + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} M_p \left\{ [x^2 + w^2(x,t)]_{x=\ell} \dot{\theta}^2(t) + \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]_{x=\ell}^2 + 2\dot{\theta}(t)x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=\ell} \right\} + \\ &\quad \frac{1}{2} J_p \left\{ \dot{\theta}(t) + \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} \right]_{x=\ell} \right\}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

L'énergie potentielle traduisant l'énergie élastique de flexion horizontale emmagasinée dans la liaison est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (\text{B.10})$$

L'énergie dissipée due aux effets amortissants externe de l'air et structurel de Kelvin-Voigt est exprimée par :

$$D = \frac{1}{2} \int_0^\ell A_D \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell K_D I \left[\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right]^2 dx \quad (\text{B.11})$$

En utilisant les équations (3.56), (3.57) et tenant compte de (3.58), on a les développements suivants pour les différentes énergies:

◆ Energie cinétique :

$$\begin{aligned}
T_\ell &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell [x^2 + w^2(x,t)] \dot{\theta}^2(t) dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \rho A \int_0^\ell x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \dot{\theta}(t) dx \\
&= \frac{1}{2} \rho A \left(\int_0^\ell x^2 dx \right) \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell w^2(x,t) dx \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \rho A \int_0^\ell x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx \dot{\theta}(t) \\
&= \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{1}{3} \ell^3 \right) \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \rho A [S_1 \delta_1^2(t) + S_2 \delta_2^2(t)] \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \rho A [S_1 \dot{\delta}_1^2(t) + S_2 \dot{\delta}_2^2(t)] + \\
&\quad \rho A [R_1 \dot{\delta}_1(t) + R_2 \dot{\delta}_2(t)] \dot{\theta}(t)
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
T_p &= \frac{1}{2} M_p \left\{ \left[\ell^2 + (W_1(\ell) \delta_1(t) + W_2(\ell) \delta_2(t))^2 \right] \dot{\theta}^2(t) + [W_1(\ell) \dot{\delta}_1(t) + W_2(\ell) \dot{\delta}_2(t)]^2 + \right. \\
&\quad \left. 2 \dot{\theta}(t) \ell [W_1(\ell) \dot{\delta}_1(t) + W_2(\ell) \dot{\delta}_2(t)] \right\} + \\
&\quad \frac{1}{2} J_p [W_1'(\ell) \dot{\delta}_1(t) + W_2'(\ell) \dot{\delta}_2(t) + \dot{\theta}(t)]^2 \\
&= \frac{1}{2} M_p \left\{ \ell^2 \dot{\theta}^2(t) + [W_1(\ell) \delta_1(t) + W_2(\ell) \delta_2(t)]^2 \dot{\theta}^2(t) + \right. \\
&\quad \left. 2 \ell \dot{\theta}(t) [W_1(\ell) \dot{\delta}_1(t) + W_2(\ell) \dot{\delta}_2(t)] + [W_1(\ell) \dot{\delta}_1(t) + W_2(\ell) \dot{\delta}_2(t)]^2 \right\} + \\
&\quad \frac{1}{2} J_p \left\{ \dot{\theta}^2(t) + W_1'(\ell)^2 \dot{\delta}_1^2(t) + W_2'(\ell)^2 \dot{\delta}_2^2(t) + 2 W_1'(\ell) W_2'(\ell) \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) + \right. \\
&\quad \left. 2 [W_1'(\ell) \dot{\delta}_1(t) + W_2'(\ell) \dot{\delta}_2(t)] \dot{\theta}(t) \right\} \\
&= \frac{1}{2} (M_p \ell^2 + J_p) \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} M_p W_1^2(\ell) \delta_1^2(t) \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} M_p W_2^2(\ell) \delta_2^2(t) \dot{\theta}^2(t) + \\
&\quad M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) + \left[\frac{1}{2} M_p W_1^2(\ell) + \frac{1}{2} J_p W_1'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_1^2(t) + \\
&\quad \left[\frac{1}{2} M_p W_2^2(\ell) + \frac{1}{2} J_p W_2'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_2^2(t) + [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) + \\
&\quad [M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + [M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell)] \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

En remplaçant (B.7), (B.12) et (B.13) dans (B.6), on a :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} J_h \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{6} \rho A \ell^3 \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \rho A [S_1 \delta_1^2(t) + S_2 \delta_2^2(t)] \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \rho A [S_1 \dot{\delta}_1^2(t) + S_2 \dot{\delta}_2^2(t)] + \\
&\quad \rho A [R_1 \dot{\delta}_1(t) + R_2 \dot{\delta}_2(t)] \dot{\theta}(t) + \frac{1}{2} (M_p \ell^2 + J_p) \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} M_p W_1^2(\ell) \delta_1^2(t) \dot{\theta}^2(t) + \\
&\quad \frac{1}{2} M_p W_2^2(\ell) \delta_2^2(t) \dot{\theta}^2(t) + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) + \\
&\quad \frac{1}{2} [M_p W_1^2(\ell) + J_p W_1'(\ell)^2] \dot{\delta}_1^2(t) + \frac{1}{2} [M_p W_2^2(\ell) + J_p W_2'(\ell)^2] \dot{\delta}_2^2(t) + \\
&\quad [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) + [M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + \\
&\quad [M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell)] \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) \\
&= \frac{1}{2} \left[J_h + \frac{1}{3} \rho A \ell^3 + M_p \ell^2 + J_p \right] \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} [M_p W_1^2(\ell) + \rho A S_1] \delta_1^2(t) \dot{\theta}^2(t) + \\
&\quad \frac{1}{2} [M_p W_2^2(\ell) + \rho A S_2] \delta_2^2(t) \dot{\theta}^2(t) + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) + \\
&\quad \frac{1}{2} [\rho A S_1 + M_p W_1^2(\ell) + J_p W_1'(\ell)^2] \dot{\delta}_1^2(t) + \frac{1}{2} [\rho A S_2 + M_p W_2^2(\ell) + J_p W_2'(\ell)^2] \dot{\delta}_2^2(t) + \\
&\quad [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) + [M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell) + \rho A R_1] \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + \\
&\quad [M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell) + \rho A R_2] \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

◆ Energie potentielle :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left[W_1''(x) \delta_1^2(t) + W_2''(x) \delta_2^2(t) + 2W_1'(x)W_2''(x) \delta_1(t) \delta_2(t) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} EI \left[\delta_1^2(t) \int_0^\ell W_1''^2 dx + \delta_2^2(t) \int_0^\ell W_2''^2(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} EI \left[\delta_1^2(t) Z_1 + \delta_2^2(t) Z_2 \right]
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

◆ Energie dissipative :

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2} \int_0^\ell A_D \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell K_D I \left[\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} A_D \left[\dot{\delta}_1^2(t) \int_0^\ell W_1'^2(x) dx + \dot{\delta}_2^2(t) \int_0^\ell W_2'^2(x) dx \right] + \frac{1}{2} K_D I \int_0^\ell \left[W_1'''(x) \dot{\delta}_1^2(t) + W_2'''(x) \dot{\delta}_2^2(t) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} A_D \left[\dot{\delta}_1^2(t) \int_0^\ell W_1'^2(x) dx + \dot{\delta}_2^2(t) \int_0^\ell W_2'^2(x) dx \right] + \frac{1}{2} K_D I \left[\dot{\delta}_1^2(t) \int_0^\ell W_1'''^2(x) dx + \dot{\delta}_2^2(t) \int_0^\ell W_2'''^2(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} A_D \left[\dot{\delta}_1^2(t) S_1 + \dot{\delta}_2^2(t) S_2 \right] + \frac{1}{2} K_D I \left[\dot{\delta}_1^2(t) Z_1 + \dot{\delta}_2^2(t) Z_2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} (A_D S_1 + K_D I Z_1) \dot{\delta}_1^2(t) + \frac{1}{2} (A_D S_2 + K_D I Z_2) \dot{\delta}_2^2(t)
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 L &= T - U \\
 &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{J_h + \frac{1}{3} \rho A \ell^3 + M_p \ell^2 + J_p}_J \right] \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \left[M_p W_1^2(\ell) + \rho A S_1 \right] \delta_1^2(t) \dot{\theta}^2(t) + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left[M_p W_2^2(\ell) + \rho A S_2 \right] \delta_2^2(t) \dot{\theta}^2(t) + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left[\rho A S_1 + M_p W_1^2(\ell) + J_p W_1'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_1^2(t) + \frac{1}{2} \left[\rho A S_2 + M_p W_2^2(\ell) + J_p W_2'(\ell)^2 \right] \dot{\delta}_2^2(t) + \\
 &\quad \left[M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell) \right] \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) + \left[M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell) + \rho A R_1 \right] \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + \\
 &\quad \left[M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell) + \rho A R_2 \right] \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) - \frac{1}{2} E I Z_1 \delta_1^2(t) - \frac{1}{2} E I Z_2 \delta_2^2(t)
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Dans ce qui suit, les expressions (B.16) et (B.17) sont utilisées pour les calculs nécessaires à la mise en œuvre de (B.1) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= J \dot{\theta} + \left[M_p W_1^2(\ell) + \rho A S_1 \right] \delta_1^2(t) \dot{\theta}(t) + \left[M_p W_2^2(\ell) + \rho A S_2 \right] \delta_2^2(t) \dot{\theta}(t) + 2 M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \dot{\theta}(t) \\
 &\quad + \left[M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell) + \rho A R_1 \right] \dot{\delta}_1(t) + \left[M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell) + \rho A R_2 \right] \dot{\delta}_2(t) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= J \ddot{\theta}(t) + \left[M_p W_1^2(\ell) + \rho A S_1 \right] 2 \delta_1(t) \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + \delta_1^2(t) \ddot{\theta}(t) + \\
 &\quad \left[M_p W_2^2(\ell) + \rho A S_2 \right] 2 \delta_2(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) + \delta_2^2(t) \ddot{\theta}(t) + \\
 &\quad 2 M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \left[\dot{\delta}_1(t) \delta_2(t) \dot{\theta}(t) + \delta_1(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) + \delta_1(t) \delta_2(t) \ddot{\theta}(t) \right] + \\
 &\quad \left[M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell) + \rho A R_1 \right] \dot{\delta}_1(t) + \left[M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell) + \rho A R_2 \right] \dot{\delta}_2(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \left\{ J + [M_p W_1^2(\ell) + \rho AS_1] \dot{\delta}_1^2(t) + [M_p W_2^2(\ell) + \rho AS_2] \dot{\delta}_2^2(t) + 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \right\} \ddot{\theta}(t) + \\
&\quad [M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell) + \rho AR_1] \ddot{\delta}_1(t) + [M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell) + \rho AR_2] \ddot{\delta}_2(t) + \\
&\quad 2[M_p W_1^2(\ell) + \rho AS_1] \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + 2[M_p W_2^2(\ell) + \rho AS_2] \dot{\delta}_2(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) + \\
&\quad 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) + 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1} &= [\rho AR_1 + M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell)] \dot{\theta}(t) + [\rho AS_1 + M_p W_1^2(\ell) + J_p W_1'(\ell)^2] \dot{\delta}_1(t) + \\
&\quad [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \dot{\delta}_2(t) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1} \right) &= [\rho AR_1 + M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell)] \ddot{\theta}(t) + [\rho AS_1 + M_p W_1^2(\ell) + J_p W_1'(\ell)^2] \ddot{\delta}_1(t) + \\
&\quad + [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \ddot{\delta}_2(t) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2} &= [\rho AR_2 + M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell)] \dot{\theta}(t) + [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \dot{\delta}_1(t) + \\
&\quad + [\rho AS_2 + M_p W_2^2(\ell) + J_p W_2'(\ell)^2] \dot{\delta}_2(t) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2} \right) &= [\rho AR_2 + M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell)] \ddot{\theta}(t) + [M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)] \ddot{\delta}_1(t) + \\
&\quad + [\rho AS_2 + M_p W_2^2(\ell) + J_p W_2'(\ell)^2] \ddot{\delta}_2(t) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1} &= [\rho AS_1 + M_p W_1^2(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}^2(t) + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) - EIZ_1 \dot{\delta}_1(t) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2} &= [\rho AS_2 + M_p W_2^2(\ell)] \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}^2(t) + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \dot{\theta}^2(t) - EIZ_2 \dot{\delta}_2(t) \\
\frac{\partial D}{\partial \theta} &= 0 ; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_1} = (A_D S_1 + K_D IZ_1) \dot{\delta}_1(t) ; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_2} = (A_D S_2 + K_D IZ_2) \dot{\delta}_2(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \theta} &= \\
&\quad \left\{ \underbrace{J + [M_p W_1^2(\ell) + \rho AS_1] \dot{\delta}_1^2(t) + [M_p W_2^2(\ell) + \rho AS_2] \dot{\delta}_2^2(t) + 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t)}_{B_{11}} \right\} \ddot{\theta}(t) + \\
&\quad \left[\underbrace{\rho AR_1 + M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell)}_{B_{12}} \right] \ddot{\delta}_1(t) + \left[\underbrace{\rho AR_2 + M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell)}_{B_{13}} \right] \ddot{\delta}_2(t) + \\
&\quad 2[\rho AS_1 + M_p W_1^2(\ell)] \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + 2[\rho AS_2 + M_p W_2^2(\ell)] \dot{\delta}_2(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) + \\
&\quad 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) + 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) \\
&= B_{11} \ddot{\theta}(t) + B_{12} \ddot{\delta}_1(t) + B_{13} \ddot{\delta}_2(t) + N_1(q(t), \dot{q}(t))
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_1} = \\
& \left[\underbrace{\rho AR_1 + M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell)}_{B_{21}} \right] \ddot{\theta}(t) + \left[\underbrace{\rho AS_1 + M_p W_1^2(\ell) + J_p W_1'(\ell)^2}_{B_{22}} \right] \ddot{\delta}_1(t) + \\
& \left[\underbrace{M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)}_{B_{23}} \right] \ddot{\delta}_2(t) - \left[\rho AS_1 + M_p W_1^2(\ell) \right] \delta_1(t) \dot{\theta}^2(t) - \\
& M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) + \underbrace{EIZ_1}_{K_{22}} \delta_1(t) + \left(\underbrace{A_D S_1 + K_D IZ_1}_{H_{22}} \right) \dot{\delta}_1(t) \\
& = B_{21} \ddot{\theta}(t) + B_{22} \ddot{\delta}_1(t) + B_{23} \ddot{\delta}_2(t) + N_2(q(t), \dot{q}(t)) + H_{22} \dot{\delta}_1(t) + K_{22} \delta_1(t)
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_2} = \\
& \left[\underbrace{\rho AR_2 + M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell)}_{B_{31}} \right] \ddot{\theta}(t) + \left[\underbrace{M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell)}_{B_{32}} \right] \ddot{\delta}_1(t) + \\
& \left[\underbrace{\rho AS_2 + M_p W_2^2(\ell) + J_p W_2'(\ell)^2}_{B_{33}} \right] \ddot{\delta}_2(t) - \left[\rho AS_2 + M_p W_2^2(\ell) \right] \delta_2(t) \dot{\theta}^2(t) - \\
& M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \dot{\theta}^2(t) + \underbrace{EIZ_2}_{K_{33}} \delta_2(t) + \left(\underbrace{A_D S_2 + K_D IZ_2}_{H_{33}} \right) \dot{\delta}_2(t) \\
& = B_{31} \ddot{\theta}(t) + B_{32} \ddot{\delta}_1(t) + B_{33} \ddot{\delta}_2(t) + N_3(q(t), \dot{q}(t)) + H_{33} \dot{\delta}_2(t) + K_{33} \delta_2(t)
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Les résultats (B.18), (B.19) et (B.20) permettent, enfin, d'établir le modèle dynamique recherché donné par:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_{11}(q) & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}}_{B(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\delta}_1(t) \\ \ddot{\delta}_2(t) \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\delta}_1(t) \\ \dot{\delta}_2(t) \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(q, \dot{q}) \\ N_2(q, \dot{q}) \\ N_3(q, \dot{q}) \end{bmatrix}}_{N(q, \dot{q})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_F \tag{B.21}$$

ou sous forme simplifiée

$$B(q)\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + N(q(t), \dot{q}(t)) + Kq(t) = F(t) \tag{B.22}$$

avec

$$\begin{aligned}
B_{11}(q) &= J_h + \frac{1}{3} \rho A \ell^3 + M_p \ell^2 + J_p + \left[\rho AS_1 + M_p W_1^2(\ell) \right] \delta_1^2(t) + \left[\rho AS_2 + M_p W_2^2(\ell) \right] \delta_2^2(t) + \\
& \quad 2M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \delta_2(t) \\
B_{12} &= B_{21} = \rho AR_1 + M_p \ell W_1(\ell) + J_p W_1'(\ell) \\
B_{13} &= B_{31} = \rho AR_2 + M_p \ell W_2(\ell) + J_p W_2'(\ell) \\
B_{23} &= B_{32} = M_p W_1(\ell) W_2(\ell) + J_p W_1'(\ell) W_2'(\ell) \\
B_{22} &= \rho AS_1 + M_p W_1(\ell)^2 + J_p W_1'(\ell)^2 \\
B_{33} &= \rho AS_2 + M_p W_2(\ell)^2 + J_p W_2'(\ell)^2
\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$H_{22} = A_D S_1 + K_D I Z_1 ; H_{33} = A_D S_2 + K_D I Z_2 \quad (\text{B.24})$$

$$K_{22} = E I Z_1 ; K_{33} = E I Z_2 \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} N_1(q, \dot{q}) &= 2 \left\{ \begin{aligned} & \left[\rho A S_1 + M_p W_1(\ell)^2 \right] \delta_1(t) \dot{\delta}_1(t) + \left(\rho A S_2 + M_p W_2(\ell)^2 \right) \delta_2(t) \dot{\delta}_2(t) + \\ & M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \left[\dot{\delta}_1(t) \delta_2(t) + \delta_1(t) \dot{\delta}_2(t) \right] \end{aligned} \right\} \dot{\theta}(t) \\ N_2(q, \dot{q}) &= - \left[\left[\rho A S_1 + M_p W_1(\ell)^2 \right] \delta_1(t) + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_2(t) \right] \dot{\theta}^2(t) \\ N_3(q, \dot{q}) &= - \left[\left[\rho A S_2 + M_p W_2(\ell)^2 \right] \delta_2(t) + M_p W_1(\ell) W_2(\ell) \delta_1(t) \right] \dot{\theta}^2(t) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

ANNEXE C

Paramètres Physiques du Bras de Robot Flexible Modélisé

Les paramètres physiques du système robotique étudié, leurs symboles ainsi que leurs valeurs et unités sont présentés dans le tableau suivant :

Paramètre	Symbole	Valeur & Unité
Inertie totale de l'ensemble moyeu ("hub") + rotor : $\begin{cases} \text{encastrement} \\ \text{articulation} \end{cases}$ (♦)	J_h	0.4 Kg.m^2
	J_h	0.15 Kg.m^2
Longueur de la liaison	ℓ	1 m
Aire de la section de la liaison	A	$9*10^{-5} \text{ m}^2$
Moment d'inertie de la liaison	I	$2*10^{-11} \text{ Kg.m}^2$
Densité massique linéaire uniforme de la liaison	ρ	2712.6 Kg.m^{-3}
Module d'élasticité de Young	E	$7.1*10^{10} \text{ Pa}$
Facteur de correction du cisaillement	k	$5/6$
Module de cisaillement	G	$1.2*10^9 \text{ Pa}$
Inertie de la charge (♦)	J_p	0.005 Kg.m^2
Masse nominale de la charge	M_p	1 Kg
Coefficient d'amortissement de Kelvin-Voigt	K_D	$2.05*10^5 \text{ Kg.m}^{-1} .s$
Coefficient de l'amortissement visqueux de l'air	A_D	$1.024 \text{ Kg.m}^{-1} .s$

Paramètres physiques du bras de robot flexible étudié

A noter que tous ces paramètres physiques avec les valeurs numériques correspondantes, à l'exception de ceux affectés du symbole (♦), peuvent être trouvés dans [SOO 96, SOO 98].

Nous avons proposé les valeurs numériques des paramètres (♦) vu que ces derniers ne sont pas nécessaires dans les méthodes proposées par Sooraksa dans [SOO 96, SOO 98].

ANNEXE D

Application de la Méthode de Lagrange à la Poutre de Timoshenko Amortie

Avant d'appliquer la méthode de Lagrange pour la modélisation du bras flexible en poutre de Timoshenko amortie, nous avons adopté les notations suivantes :

$$J_T = J_h + J_b + J_p + M_p \ell^2 ; V_i = \Psi_i + M_p \ell W_i(\ell) + J_p W_i'(\ell) ; R = -\frac{\rho K_D I}{kG} (\omega_2^2 Y_1 + \omega_1^2 Y_2) ; C_i = A_D Z_i + K_D I \Gamma_i ;$$

$$Q_1 = \frac{A_D E I Y_2}{kAG} - \frac{\omega_2^2 A_D K_D I Y_1}{kAG} ; Q_2 = \frac{A_D E I Y_1}{kAG} - \frac{\omega_1^2 A_D K_D I Y_2}{kAG} ;$$

$$\alpha_i = S_i - \frac{\Phi_i A_D^2}{kAG} - \frac{A_D^2 E I Z_i}{(kAG)^2} - K_D I \Gamma_i - \frac{K_D I \rho^2 \omega_i^4 Z_i}{(kG)^2} - \frac{2\rho K_D I \omega_i^2 X_i}{kG} ;$$

avec

$$J_b = \rho A \int_0^\ell x^2 dx , \Psi_i = \rho A \int_0^\ell x W_i(x) dx , Y_i = \int_0^\ell W_i''(x) W_j(x) dx \text{ avec } i \neq j , Z_i = \int_0^\ell W_i^2(x) dx , \Gamma_i = \int_0^\ell W_i''^2(x) dx ,$$

$$S_i = \rho A Z_i + M_p W_i^2(\ell) + J_p W_i'^2(\ell) ; \Phi_i = \int_0^\ell \int_0^\ell W_i^2(x) dx^2 , X_i = \int_0^\ell W_i''(x) W_i(x) dx .$$

Pour l'établissement du modèle dynamique désiré, l'équation générale régissant la méthode énergétique de Lagrange est rappelée ci-après :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i , \quad i=0,1,2 \quad (D.1)$$

où L est le Lagrangien défini par

$$L = T - U \quad (D.2)$$

T : énergie cinétique ; U : énergie potentielle ; D : fonction de dissipation de Rayleigh ; F_i : force externe généralisée agissant sur la coordonnée généralisée correspondante q_i avec $F_0 = \tau$ couple moteur agissant sur $q_0(t) = \theta(t)$, $F_1 = 0$, $q_1 = \delta_1(t)$, $F_2 = 0$, $q_2(t) = \delta_2(t)$.

Les expressions des différentes énergies déterminées sur la base des équations (4.37-4.42) (§ IV.1.1.1) sont données par :

◆ Énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} J_T \dot{\theta}^2 + V_1 \dot{\delta}_1(t) \dot{\theta}(t) + V_2 \dot{\delta}_2(t) \dot{\theta}(t) + \frac{1}{2} S_1 \dot{\delta}_1^2(t) + \frac{1}{2} S_2 \dot{\delta}_2^2(t) \quad (D.3)$$

◆ Energie potentielle :

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} EI \sum_{i=1}^2 \delta_i^2(t) \Gamma_i + \frac{1}{2} \frac{EI \rho^2}{(kG)^2} \sum_{i=1}^2 \omega_i^4 \delta_i^2(t) Z_i + \frac{1}{2} \frac{A_D^2 EI}{(kAG)^2} \sum_{i=1}^2 \dot{\delta}_i^2(t) Z_i + \frac{1}{2} K_D I \sum_{i=1}^2 \dot{\delta}_i^2(t) \Gamma_i + \\
& \frac{1}{2} \frac{K_D I \rho^2}{(kG)^2} \sum_{i=1}^2 \omega_i^4 \dot{\delta}_i^2 Z_i + \frac{1}{2} \frac{A_D^2 K_D I}{(kAG)^2} \sum_{i=1}^2 \omega_i^4 \delta_i^2 Z_i - \frac{\rho A A_D EI}{(kAG)^2} \sum_{i=1}^2 \omega_i^2 \delta_i \dot{\delta}_i Z_i + \\
& \frac{\rho A A_D K_D I}{(kAG)^2} \sum_{i=1}^2 \omega_i^4 \delta_i \dot{\delta}_i Z_i + \\
& \frac{\rho EI}{kG} [\omega_1^2 \delta_1^2(t) X_1 + \omega_2^2 \delta_2^2(t) X_2 + \omega_2^2 \delta_1(t) \delta_2(t) Y_1 + \omega_1^2 \delta_1(t) \delta_2(t) Y_2] - \\
& \frac{A_D EI}{kAG} [\delta_1(t) \dot{\delta}_1(t) X_1 + \delta_2(t) \dot{\delta}_2(t) X_2 + \delta_1(t) \dot{\delta}_2(t) Y_1 + \delta_2(t) \dot{\delta}_1(t) Y_2] + \\
& \frac{\rho K_D I}{kG} [\omega_1^2 \dot{\delta}_1^2(t) X_1 + \omega_2^2 \dot{\delta}_2^2(t) X_2 + \omega_2^2 \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) Y_1 + \omega_1^2 \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) Y_2] + \\
& \frac{A_D K_D I}{kAG} [\omega_1^2 \delta_1(t) \dot{\delta}_1(t) X_1 + \omega_2^2 \delta_2(t) \dot{\delta}_2(t) X_2 + \omega_2^2 \delta_2(t) \dot{\delta}_1(t) Y_1 + \omega_1^2 \delta_1(t) \dot{\delta}_2(t) Y_2] + \\
& \sum_{i=1}^2 \Phi_i \left[\frac{A_D^2}{2kAG} \dot{\delta}_i^2(t) + \frac{\omega_i^4 (\rho A)^2}{2kAG} \delta_i^2(t) - \frac{\rho A_D \omega_i^2}{kG} \delta_i(t) \dot{\delta}_i(t) \right]
\end{aligned} \tag{D.4}$$

◆ Energie dissipative :

$$\begin{aligned}
D = & \frac{1}{2} A_D [\dot{\delta}_1^2(t) Z_1 + \dot{\delta}_2^2(t) Z_2] + \frac{1}{2} K_D I [\dot{\delta}_1^2(t) \Gamma_1 + \dot{\delta}_2^2(t) \Gamma_2] \\
= & \frac{1}{2} (A_D Z_1 + K_D I \Gamma_1) \dot{\delta}_1^2(t) + \frac{1}{2} (A_D Z_2 + K_D I \Gamma_2) \dot{\delta}_2^2(t)
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Les différents termes devant être mis en œuvre dans (D.1) sont donnés dans ce qui suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = J_T \ddot{\theta}(t) + V_1 \ddot{\delta}_1(t) + V_2 \ddot{\delta}_2(t) ;$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1} \right) = & V_1 \ddot{\theta}(t) + \underbrace{\left[S_1 - \frac{\Phi_1 A_D^2}{kAG} - \frac{A_D^2 EI Z_1}{(kAG)^2} - K_D I K_1 - \frac{K_D I \rho^2 \omega_1^4 Z_1}{(kG)^2} - \frac{2 \rho K_D I \omega_1^2 X_1}{kG} \right]}_{\alpha_1} \ddot{\delta}_1(t) - \\
& \underbrace{\frac{\rho K_D I}{kG} (\omega_1^2 Y_2 + \omega_2^2 Y_1)}_R \ddot{\delta}_2(t) + \\
& \left[\frac{\rho A A_D \Phi_1 \omega_1^2}{kAG} + \frac{\rho A A_D EI \omega_1^2 Z_1}{(kAG)^2} - \frac{\rho A A_D K_D I \omega_1^4 Z_1}{(kAG)^2} + \frac{A_D EI X_1}{kAG} - \frac{\omega_1^2 A_D K_D I X_1}{kAG} \right] \dot{\delta}_1(t) + \\
& \underbrace{\left(\frac{A_D EI Y_2}{kAG} - \frac{\omega_2^2 A_D K_D I Y_1}{kAG} \right)}_{\hat{Q}_1} \dot{\delta}_2(t) ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2} \right) &= V_2 \ddot{\theta}(t) - \underbrace{\frac{\rho K_D I}{kG} (\omega_1^2 Y_2 + \omega_2^2 Y_1)}_R \ddot{\delta}_1(t) + \\ &\quad \left[S_2 - \frac{\Phi_2 A_D^2}{kAG} - \frac{A_D^2 E I Z_2}{(kAG)^2} - K_D I \Gamma_2 - \frac{K_D I \rho^2 \omega_2^4 Z_2}{(kG)^2} - \frac{2 \rho K_D I \omega_2^2 X_2}{kG} \right] \ddot{\delta}_2(t) + \\ &\quad \left(\frac{A_D E I Y_1}{kAG} - \frac{\omega_1^2 A_D K_D I Y_2}{kAG} \right) \dot{\delta}_1(t) + \\ &\quad \left[\frac{\rho A A_D \Phi_2 \omega_2^2}{kAG} + \frac{\rho A A_D E I \omega_2^2 Z_2}{(kAG)^2} - \frac{\rho A A_D K_D I \omega_2^4 Z_2}{(kAG)^2} + \frac{A_D E I X_2}{kAG} - \frac{\omega_2^2 A_D K_D I X_2}{kAG} \right] \dot{\delta}_2(t) \end{aligned} ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 ;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1} &= - \left[\frac{\Phi_1 (\rho A)^2 \omega_1^4}{kAG} + E I \Gamma_1 + \frac{\rho^2 E I \omega_1^4 Z_1}{(kG)^2} + \frac{A_D^2 K_D I \omega_1^4 Z_1}{(kAG)^2} + \frac{2 \omega_1^2 \rho E I X_1}{kG} \right] \delta_1(t) - \\ &\quad \underbrace{\frac{\rho E I}{kG} (\omega_2^2 Y_1 + \omega_1^2 Y_2)}_{R'} \delta_2(t) - \\ &\quad \left[\frac{-\rho A A_D \omega_1^2 \Phi_1}{kAG} - \frac{\rho A A_D E I \omega_1^2 Z_1}{(kAG)^2} + \frac{\rho A A_D K_D I \omega_1^4 Z_1}{(kAG)^2} - \frac{A_D E I X_1}{kAG} + \frac{A_D K_D I \omega_1^2 X_1}{kAG} \right] \dot{\delta}_1(t) + \\ &\quad \left(\frac{A_D E I Y_1}{kAG} - \frac{\omega_1^2 A_D K_D I Y_2}{kAG} \right) \dot{\delta}_2(t) \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\delta_2} &= - \underbrace{\frac{\rho E I}{kG} (\omega_2^2 Y_1 + \omega_1^2 Y_2)}_{R'} \delta_1(t) - \\ &\quad \left[\frac{\Phi_2 (\rho A)^2 \omega_2^4}{kAG} + E I \Gamma_2 + \frac{\rho^2 E I \omega_2^4 Z_2}{(kG)^2} + \frac{A_D^2 K_D I \omega_2^4 Z_2}{(kAG)^2} + \frac{2 \omega_2^2 \rho E I X_2}{kG} \right] \delta_2(t) + \\ &\quad \left(\frac{A_D E I Y_2}{kAG} - \frac{\omega_2^2 A_D K_D I Y_1}{kAG} \right) \dot{\delta}_1(t) - \\ &\quad \left[\frac{-\rho A A_D \omega_2^2 \Phi_2}{kAG} - \frac{\rho A A_D E I \omega_2^2 Z_2}{(kAG)^2} + \frac{\rho A A_D K_D I \omega_2^4 Z_2}{(kAG)^2} - \frac{A_D E I X_2}{kAG} + \frac{A_D K_D I \omega_2^2 X_2}{kAG} \right] \dot{\delta}_2(t) \end{aligned} ;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \theta} = 0 ; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_1} = \underbrace{(A_D Z_1 + K_D I \Gamma_1)}_{C_1} \dot{\delta}_1(t) ; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_2} = \underbrace{(A_D Z_2 + K_D I \Gamma_2)}_{C_2} \dot{\delta}_2(t) ;$$

Ces différentes expressions nous permettent d'arriver aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} &= J_T \ddot{\theta}(t) + V_1 \ddot{\delta}_1(t) + V_2 \ddot{\delta}_2(t) \\ &= B_{11} \ddot{\theta}(t) + B_{12} \ddot{\delta}_1(t) + B_{13} \ddot{\delta}_2(t) \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_1} &= V_1 \ddot{\theta}(t) + \alpha_1 \ddot{\delta}_1(t) + R \ddot{\delta}_2(t) + C_1 \dot{\delta}_1(t) + (Q_1 - Q_2) \dot{\delta}_2(t) + G_1 \delta_1(t) + R' \delta_2(t) \\ &= B_{21} \ddot{\theta}(t) + B_{22} \ddot{\delta}_1(t) + B_{23} \ddot{\delta}_2(t) + H_{22} \dot{\delta}_1(t) + H_{23} \dot{\delta}_2(t) + K_{22} \delta_1(t) \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_2} &= V_2 \ddot{\theta}(t) + R \ddot{\delta}_1(t) + \alpha_2 \ddot{\delta}_2(t) + (Q_2 - Q_1) \dot{\delta}_1(t) + C_2 \dot{\delta}_2(t) + R' \delta_1(t) + G_2 \delta_2(t) \\ &= B_{31} \ddot{\theta}(t) + B_{32} \ddot{\delta}_1(t) + B_{33} \ddot{\delta}_2(t) + H_{32} \dot{\delta}_1(t) + H_{33} \dot{\delta}_2(t) + K_{33} \delta_2(t) \end{aligned} \quad (D.8)$$

Les résultats (D.6), (D.7) et (D.8) permettent, enfin, d'établir le modèle dynamique recherché donné par:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\delta}_1(t) \\ \ddot{\delta}_2(t) \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & H_{23} \\ 0 & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\delta}_1(t) \\ \dot{\delta}_2(t) \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_F \quad (D.9)$$

ou sous forme simplifiée

$$B\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + Kq(t) = F(t) \quad (D.10)$$

avec

$$B_{11} = J_T ; B_{12} = B_{21} = V_1 ; B_{13} = B_{31} = V_2 ; B_{23} = B_{32} = R ; B_{22} = \alpha_1 ; B_{33} = \alpha_2 \quad (D.11)$$

$$H_{22} = C_1 ; H_{23} = Q_1 - Q_2 ; H_{32} = Q_2 - Q_1 ; H_{33} = C_2 \quad (D.12)$$

$$K_{22} = EIZ_1 ; K_{23} = K_{32} = R' ; K_{33} = EIZ_2 \quad (D.13)$$

B , H , K et F sont ainsi données par :

$$B = \begin{bmatrix} J_T & V_1 & V_2 \\ V_1 & \alpha_1 & R \\ V_2 & R & \alpha_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & Q_1 - Q_2 \\ 0 & Q_2 - Q_1 & C_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & R' \\ 0 & R' & G_2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$