

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Ecole Nationale Polytechnique**



**Département d'Automatique**

**Mémoire de  
Master en Automatique**

Intitulé

**Observateurs à entrées inconnues pour une classe de  
système non linéaire : Approche LMI**

Réalisé par :

**KAHELTRAS Mohamed**

Proposé et dirigé par :

**Dr R. ILLOUL**

**Promotion : Juin 2014**

Ecole Nationale Polytechnique : 10, Avenue Hassen Badi BP182 El-Harrach

**ملخص :** الهدف من هذا العمل هو تصميم مراقب ذو مداخل غير معروفة لفئة من الأنظمة اللاخطية. تعرف هذه الأنظمة باسم "بيشتز". يتم أيضاً التعرف على الشروط اللازمة لسير هذا المراقب، عملية تصميمه تستند على المتراجحات المصفوفية الخطية.

**مفاتيح :** مراقب ذو مداخل غير معروفة، مراقب ذو مداخل غير معروفة لا خطي، نظام بيشتز اللاخطي، المتراجحات المصفوفية الخطية.

**Résumé :** Ce travail a pour objectif la conception d'un observateur à entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires, cette classe s'appelle les systèmes non linéaires Lipchitziens. Les conditions d'existence de cet observateur seront établies, et sa synthèse sera basée sur l'utilisation des inégalités matricielles linéaires.

**Mots clés:** Observateur à entrées inconnues, observateurs à entrées inconnues non linéaires, systèmes non linéaires Lipchitziens, Inégalité matricielle linéaire.

**Abstract :** The purpose of this work is to present a method to design unknown input observer for nonlinear systems, we consider a class of Lipchitz nonlinear systems. The sufficient conditions of the existence of the nonlinear UIO are going to be established. The design of this observer is going to be based on linear matrix inequalities.

**Key words :** Unknown input observer (UIO), nonlinear unknown input observer, Lipchitz nonlinear systems, linear matrix inequalities (LMI)

# Remerciements

Au terme de ce travail, c'est avec émotion que je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce projet.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères à Dr R. Illoul pour avoir dirigé cette thèse et m'avoir permis de la réaliser dans les meilleures conditions. Je tiens particulièrement à le remercier de la liberté d'action qu'il m'a donnée à chaque étape de cette aventure. J'espère avoir été digne de la confiance qu'il m'avait accordée et que ce travail est finalement à la hauteur de ses espérances. Quoi qu'il en soit, j'ai beaucoup appris à ses côtés et je suis très honoré de l'avoir eu pour encadrant.

Un merci tout particulier à Faris et Salmane pour l'aide inconditionnelle qu'ils m'ont apportée, mais aussi pour leurs encouragements répétés au cours de la rédaction de ce manuscrit. J'aurais eu du mal à terminer ce travail sans le soutien engagé de Salim et Ouahab. Merci de votre confiance.

Mes remerciements s'adressent enfin à ma Mère, Mon Père, ainsi qu'à mes Sœurs et Mon Frère qui m'ont toujours épaulé. Je ne saurais oublier l'apport de chacun pour l'accomplissement de ce travail. Je demande enfin à toutes les personnes sollicitées dans le cadre de ce travail de trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

## Dédicace

*Je dédie ce mémoire en premier à mes très chers parents, dont le sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience, le soutien, l'aide et les encouragements sont le secret de ma réussite. Sans eux, je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui.*

*Je dédie ce travail également*

*A toute ma famille*

*A tous mes amis proches*

*A tous ceux qui me sont chers*

*Mohamed*

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Observateur à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires de classe lipschitzienne</b>	<b>4</b>
1.1 Initiation aux inégalités matricielles linéaires . . . . .	5
1.1.1 Introduction . . . . .	5
1.1.2 Définition des LMI . . . . .	5
1.2 Principe de l'observateur à entrées inconnues non linéaire . . .	6
1.2.1 Formulation LMI de la condition d'existence de l'observateur à entrées inconnues non linéaire . . . . .	8
1.2.2 Conception du NUIO . . . . .	10
1.2.3 Conclusion . . . . .	15
1.3 Conception d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes linéaires par approche LMI . . . . .	16
1.3.1 Conclusion . . . . .	19
<b>Conclusion générale</b>	<b>20</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>20</b>
<b>A CVX Solver</b>	<b>23</b>

---

## TABLE DES FIGURES

1.1	Erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues non linéaire . . . . .	12
1.2	Différents types d'entrées inconnues . . . . .	13
1.3	Erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues non linéaire . . . . .	14
1.4	Erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues non linéaire . . . . .	14
1.5	Erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues linéaire	18

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les chercheurs en automatique se sont beaucoup intéressés au sujet des observateurs à entrées inconnues durant les trente dernières années. Plusieurs méthodes de conception d'observateurs à entrées inconnues d'ordre plein ou réduit ont été élaborées et appliquées sur des systèmes linéaires[DZX94, CP99, KAH14].

Durant les années quatre-vingt-dix, de nouvelles techniques ont été proposées pour concevoir des observateurs à entrées inconnues non linéaires. A cause de la difficulté et de la complexité de conception de ces observateurs pour les systèmes non linéaires, des hypothèses ou des considérations ont été mises au point afin d'aboutir à une solution. Parmi ces considérations : l'utilisation des développement de Taylor ou la considération d'une classe de systèmes non linéaires particulière telle que : la classe des systèmes Lipschitziens.[PMZ05, SH11]

Dans ce travail, nous allons nous intéresser à la conception d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires du type Lipschitzien. Afin de pouvoir synthétiser cet observateur, on a fait appel à des techniques d'inégalités linéaires matricielles.

La première partie sera consacrée à l'introduction de la notion de LMI (inégalité matricielle linéaire), ensuite nous allons donner les différentes étapes à suivre pour concevoir un observateur à entrées non linéaire et enfin nous allons appliquer cette approche pour le cas des systèmes linéaires.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES POUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES DE CLASSE LIPSCHITZIENNE

## 1.1. INITIATION AUX INÉGALITÉS MATRICIELLES LINÉAIRES

---

### 1.1 Initiation aux inégalités matricielles linéaires

#### 1.1.1 Introduction

Les inégalités matricielles linéaires (affines) prennent une place de plus en plus importante dans les nouvelles méthodes de l'automatique. L'intérêt essentiel d'une formulation LMI est d'ordre numérique [TOS05]. En effet, une LMI peut être formulée comme un problème d'optimisation convexe qui peut être résolu de manière extrêmement efficace [RAK10, TOS05] grâce à des calculateurs puissants tels que : MATLAB.

L'histoire des LMI avec l'analyse des systèmes dynamiques remonte à plus de cent ans en arrière, lorsque Lyapunov a publié un de ces travaux, il s'agissait de ce qu'on appelle maintenant la théorie de Lyapunov. Il a démontré que l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

est stable si et seulement si il existe une matrice  $P$  définie positive telle que :

$$A^T P + P A < 0$$

Les deux contraintes  $P > 0$  et  $A^T P + P A < 0$  est ce que nous appelons une inégalité de Lyapunov en  $P$ , et c'est une forme spéciale d'une LMI.

En automatique, le succès des LMI est lié au fait que de nombreux problèmes, peuvent être formulés sous forme de LMI.[BGFB94]

#### 1.1.2 Définition des LMI

On appelle inégalité matricielle linéaire (ou inégalité matricielle affine et en anglais linear matrix inequality, noté LMI) le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques  $M_k$ ,  $k = 1 \dots n$ , trouver les réels  $x_k$ ,  $k = 1 \dots n$  tels que :

$$M_0 + x_1 M_1 + \dots + x_n M_n > 0.[LAR11]$$

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

### 1.2 Principe de l'observateur à entrées inconnues non linéaire

Dans cette partie, nous allons exposer une procédure de construction d'observateurs à entrées inconnues pour une classe de système non linéaire, appelée : systèmes non linéaires lipschitziens, à l'aide d'une approche basée sur l'utilisation des inégalités linéaires matricielles (LMI). [CS06]

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \Phi(x) + D_x d(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  et  $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$  sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrées connues, le vecteur des sorties et le vecteur des perturbations « entrée inconnue ». Les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  sont les matrices constitutives du système d'état.  $D_x \in \mathbb{R}^{n \times n_d}$  est la matrice d'application des entrées inconnues sur l'état du système. La matrice  $D_x$  doit être de rang plein en colonne. Si ce n'est pas le cas, on peut procéder à la décomposition suivante :

$$D_x(t) = D_1 D_2 d(t) \quad (1.2)$$

où  $D_1$  est de rang plein et le vecteur  $D_2 d(t)$  représente alors les nouvelles entrées inconnues.

$\Phi(x)$  est une fonction non linéaire qui satisfait la condition de Lipschitz c'est-à-dire pour tout  $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|\Phi(x) - \Phi(\hat{x})\| \leq \gamma |x - \hat{x}| \quad (1.3)$$

où  $\gamma$  est un réel positif.

Nous allons tout d'abord présenter la structure de l'observateur à entrées inconnues non linéaire qui sera étudiée, puis nous présentons les conditions suffisantes pour que cet observateur existe.

Pour cette étude nous allons proposer un observateur à entrées inconnues non linéaire, dont la structure est :

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Ky(t) + T\Phi(\hat{x}) \\ \hat{x}(t) = z(t) + Hy(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $F$ ,  $G$ ,  $K$  et  $T$  sont définies par :

$$F = TA - K_1C \quad (1.5)$$

$$G = TB \quad (1.6)$$

$$K = K_1(I - HC) + TAH \quad (1.7)$$

$$T = I - HC \quad (1.8)$$

$H$  et  $K_1$  seront par choisies par le concepteur. L'erreur d'estimation s'écrit alors :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (1.9)$$

$$= x(t) - z(t) - Hy(t) \quad (1.10)$$

$$= x(t) - z(t) - HCx(t) \quad (1.11)$$

$$= Tx(t) - z(t) \quad (1.12)$$

La dynamique de cet erreur devient :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_x d(t) - Fz(t) - TBu(t) \\ - Ky(t) - T\Phi(\hat{x}) - Hy(t) \end{aligned} \quad (1.13)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est donné par :

$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Phi(x) + D_x d(t) - \dot{z}(t) - Hy(t) \quad (1.14)$$

En remplaçant  $\dot{z}(t)$  par son expression de 1.4 et  $\dot{y}(t)$  par  $C\dot{x}(t)$ , l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Phi(x) + D_x d(t) - Fz(t) - Gu(t) \\ - Ky(t) - Ty(t) - T\Phi(\hat{x}) - HC(Ax(t) + Bu(t) + D_x d(t)) \end{aligned} \quad (1.15)$$

En remplaçant cette fois,  $I - HC$  et  $TB$  par  $T$  et  $G$  respectivement et en rajoutant et retranchant  $F\hat{x}(t)$  on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = Fe(t) + (TA - KC - FT)x(t) + (TB - G)u(t) \\ + T(\Phi(x) - \Phi(\hat{x})) + TD_x d(t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

**Théorème 1.1** [CS06] *Si il existe deux matrices  $H$  et  $K_1$  et une matrice symétrique définie positive  $P$  ( $P^T = P$  et  $P > 0$ ) tel que :*

$$HCD_x = D_x \quad (1.17)$$

$$F^T P + PF + \gamma PTT^T P + \gamma I < 0 \quad (1.18)$$

alors l'observateur 1.4 peut générer un état  $\hat{x}(t)$  qui tend asymptotiquement vers l'état réel du système  $x(t)$ .

Donc, d'après ce théorème, il suffit de trouver  $H$ ,  $K_1$  et  $P$  tel que l'inégalité 1.18 soit satisfaite. La résolution de l'inégalité 1.18 peut se faire de manière direct, sauf que cette méthode présente beaucoup de complication. C'est ce qui nous pousse à utiliser les techniques de LMI.

### 1.2.1 Formulation LMI de la condition d'existence de l'observateur à entrées inconnues non linéaire

Pour formuler l'inégalité 1.18 sous forme LMI, on doit chercher toutes les solutions possibles de  $E$  à partir de 1.17. Cette équation n'admet pas de solutions que si :

$$\text{Rang}(CD_x) = \text{Rang}(D_x) \quad (1.19)$$

Si cette condition est vérifiée alors la solution de l'équation 1.17 aura la forme suivante :

$$H = U - YV \quad (1.20)$$

où :

$$U = D_x(CD_x)^+ \quad (1.21)$$

$$V = I - (CD_x)(CD_x)^+ \quad (1.22)$$

et  $Y$  est une matrice choisie arbitrairement.  $(CD_x)^+$  représente : l'inverse généralisée de la matrice  $CD_x$ , et sa formule est la suivante :

$$(CD_x)^+ = [(CD_x)^T(CD_x)]^{-1}(CD_x)^T \quad (1.23)$$

En remplaçant  $F$  et  $T$  dans 1.18 par leurs formules respectives on retrouve :

$$\begin{aligned} & [(I - HC)A - K_1C]^T P + P[(I - HC)A - K_1C] + \\ & \gamma P(I - HC)(I - HC)^T P + \gamma I < 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

On injecte la formule 1.20 dans l'expression 1.18 :

$$[(I - (U - YV)C)A - K_1C]^T P + P[(I - (U - YV)C)A - K_1C] + \gamma P(I - (U - YV)C)(I - (U - YV)C)^T P + \gamma I < 0 \quad (1.25)$$

Enfin on retrouve :

$$[(I - UC)A]^T P + P(I - UC)A + (VCA)^T Y^T P + PY(VCA) - C^T K_1^T P - PK_1C + \gamma[P(I - UC) + PY(VC)][P(I - UC) + PY(VC)]^T + \gamma I < 0 \quad (1.26)$$

Le problème de trouver  $H$ ,  $K_1$  et  $P$ , revient maintenant à retrouver  $Y$ ,  $K_1$  et  $P$  à partir de l'inégalité 1.26. Nous allons présenter une lemme qui va permettre de formuler l'inégalité 1.26 comme une LMI.

**Lemme 1.1** [CS06] *L'inégalité matricielle donnée par 1.26 admet une solution pour  $Y$  et  $K_1$  et une matrice symétrique définie positive  $P$  ( $P^T = P$  et  $P > 0$ ) si et seulement si l'inégalité linéaire matricielle (LMI) suivante admet une solution pour  $\bar{Y}$ ,  $\bar{K}_1$  et  $P$*

$$\begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.27)$$

où :

$$X = [(I - UC)A]^T P + P(I - UC)A + (VCA)^T \bar{Y}^T P + P\bar{Y}(VCA) - C^T \bar{K}_1^T - \bar{K}_1 C + \gamma I < 0 \quad (1.28)$$

et

$$X_{12} = \sqrt{\gamma}[P(I - UC) + \bar{Y}(VC)] \quad (1.29)$$

avec :

$$Y = P^{-1}\bar{Y} \text{ et } K_1 = P^{-1}\bar{K}_1$$

**Théorème 1.1** [CS06] *Si la matrice  $CD_x$  est de rang plein en colonnes et la LMI définie par 1.27 admet une solution pour  $\bar{Y}$ ,  $\bar{K}_1$  et  $P$ , alors l'observateur à entrées inconnues non linéaire donné par 1.4 peut être synthétisé pour que l'erreur d'estimation  $e(t)$  tende asymptotiquement vers zéro.*

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

### 1.2.2 Conception du NUIO

Les étapes à suivre pour concevoir un observateur à entrées inconnues non linéaire sont énumérées dans les points suivants :

1. **Calculer**  $U$  à partir de :

$$U = D_x(CD_x)^+ \quad (1.30)$$

2. **Calculer**  $V$  à partir de :

$$V = I - (CD_x)(CD_x)^+ \quad (1.31)$$

3. Résoudre la LMI définie par 1.27 pour  $\bar{Y}$ ,  $\bar{K}_1$  et  $P$ , en utilisant des logiciels de résolution des LMI, pour notre étude nous avons fait appel à CVX SOLVER. [GB10]

4. **Calculer**  $Y$  à partir de :

$$Y = P^{-1}\bar{Y} \quad (1.32)$$

5. **Calculer**  $K_1$  à partir de :

$$K_1 = P^{-1}\bar{K}_1 \quad (1.33)$$

6. A partir de  $Y$  et  $K_1$  calculer les matrices de l'UIO :

$$\begin{aligned} H &= U - YV \\ T &= I - HC \\ F &= TA - K_1C \\ G &= TB \\ K &= K_1(I - HC) + TAH \end{aligned}$$

### Exemple d'application

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Phi(x) + D_x d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.34)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

$$\Phi(x) = [0.5\cos(x_2) \quad 0.6\sin(x_3) \quad 0]^T, \quad D_x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$d(t) = 20 * \cos(5 * t)$$

Le calcul des matrices  $U$  et  $V$  donne :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\|\Phi(x) - \Phi(\hat{x})\| = \left\| \begin{bmatrix} 0.5\cos(x_2) - 0.5\cos(\hat{x}_2) \\ 0.6\sin(x_3) - 0.6\sin(\hat{x}_3) \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \quad (1.35)$$

On prend  $\gamma = 0.6$ , ce qui donne :

$$\|\Phi(x) - \Phi(\hat{x})\| \leq 0.6 |x - \hat{x}|$$

Grâce au CVX Solver [GB10], on arrive à retrouver les matrices  $P$ ,  $\bar{Y}$  et  $\bar{K}_1$  solution de l'inégalité matricielle linéaire 1.27.

$$P = \begin{bmatrix} 14.1093 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0236 & 0 \\ 0 & 0 & 14.1093 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.6784 \\ 0 & -4.1093 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 7.3797 & 0 \\ -1.0236 & -1.6784 \\ 0 & 7.3797 \end{bmatrix}$$

$Y$  et  $K_1$  sont obtenus à l'aide de 1.32 et 1.33 :

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.6398 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0.5230 & 0 \\ -1 & -1.6398 \\ 0 & 0.5230 \end{bmatrix}$$

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

En déduire  $H$  à partir de 1.20 :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1.6398 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant  $H$  et  $K_1$ , on peut calculer les matrices de l'observateur, les résultats retrouvés sont :

$$F = \begin{bmatrix} -0.5230 & 0 & 0 \\ 0 & -1.6398 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5230 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1.6398 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.5230 & 0 \\ -1 & -1.6398 \\ 0 & 0.5230 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les résultats de simulation sont représentés dans les figures suivantes :

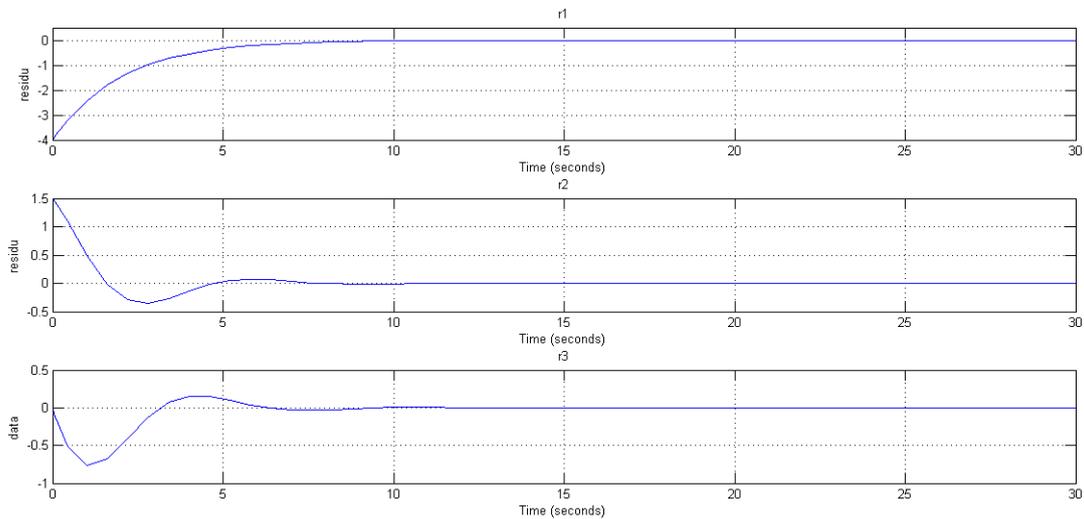


FIGURE 1.1 – Erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues non linéaire

Les graphes représentés dans la figure 1.1, montrent que l'erreur d'estimation  $e(t)$  tend vers zéro (c'est à dire le vecteur d'état estimé tend vers le

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

vecteur d'état réel du  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ ) et cela malgré la présence de la perturbation  $d(t)$  "objectif d'un observateur à entrées inconnues".

### Etude de la robustesse

Pour ce cas d'étude nous allons considérer en premier lieu que l'entrée inconnue (perturbation)  $d(t)$  est un signal sinusoïdale avec une amplitude très élevée :

$$d(t) = 1000 \sin(50t) \quad (1.36)$$

puis nous allons considérer que  $d(t)$  est un signal aléatoire avec une amplitude comprise entre -100 et 100 ; et cela pour montrer la robustesse de l'observateur à entrées inconnues non linéaire et son insensibilité aux entrées inconnues.

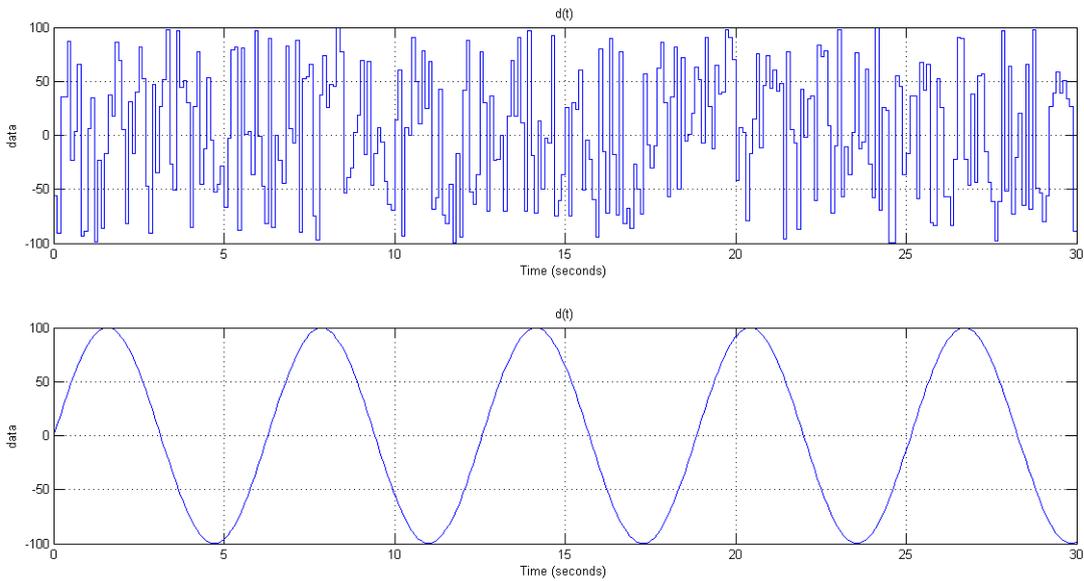


FIGURE 1.2 – Différents types d'entrées inconnues

L'erreur d'estimation pour le premier cas est donnée par :

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

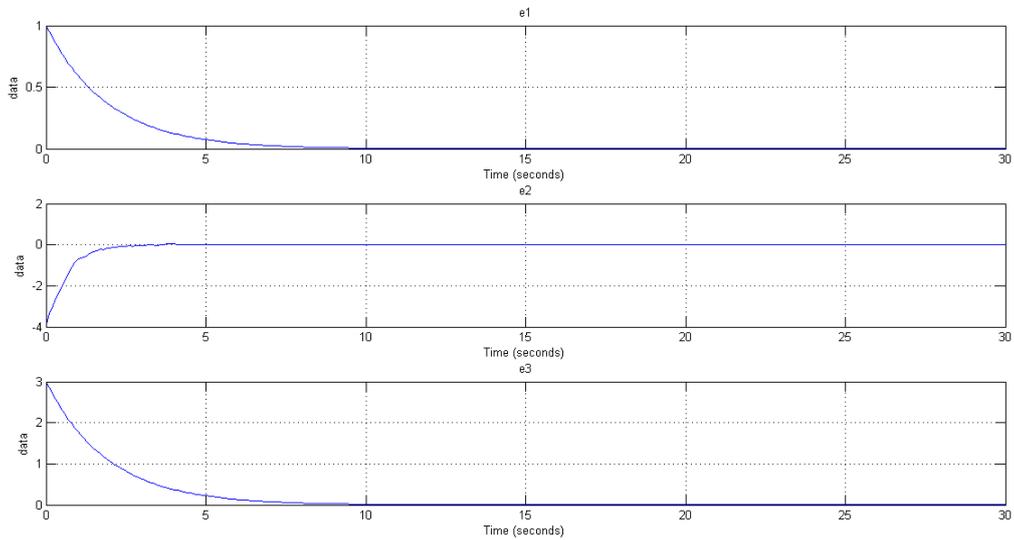


FIGURE 1.3 – Erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues non linéaire

pour le deuxième cas :

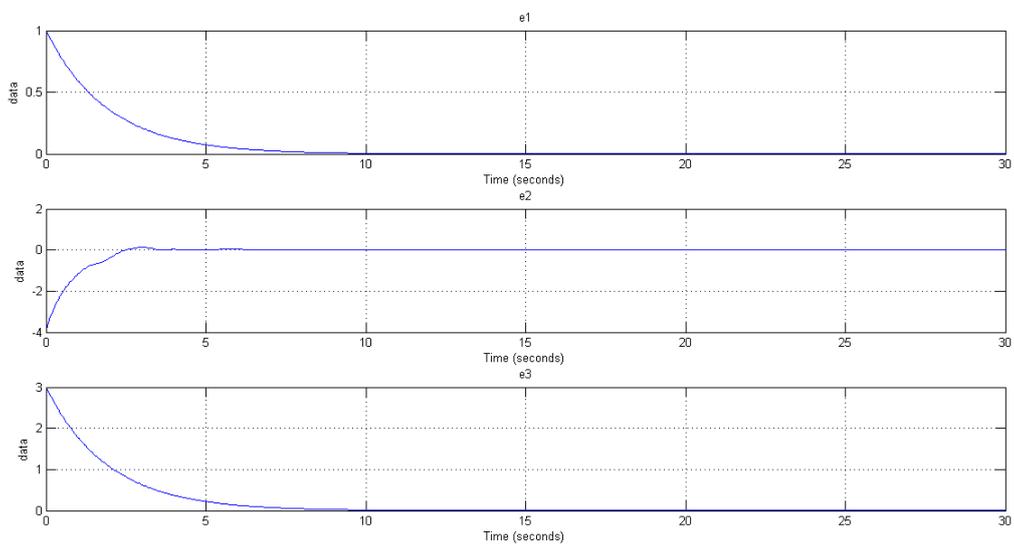


FIGURE 1.4 – Erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues non linéaire

Nous pouvons constater que les erreurs d'estimation tendent vers zéro

## 1.2. PRINCIPE DE L'OBSERVATEUR À ENTRÉES INCONNUES NON LINÉAIRE

---

indépendamment du signal  $d(t)$ , quelque soit sa forme ou son amplitude, l'état de l'UIO non linéaire va continuer à converger vers l'état du système.

### 1.2.3 Conclusion

On vient de voir une méthode qui permet d'estimer le vecteur d'état d'un système non linéaire lipschitzien de manière robuste à l'aide de l'approche LMI. On a aussi démontré que la variation du signal  $d(t)$  n'affecte pas la convergence des états de l'observateur vers les états du système.

### 1.3. CONCEPTION D'OBSERVATEURS À ENTRÉES INCONNUES POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES PAR APPROCHE LMI

---

## 1.3 Conception d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes linéaires par approche LMI

Le système décrit par 1.1 devient un système linéaire linéaire si  $\Phi(x) = 0$ . La conception d'un observateur à entrée pour un système linéaire peut être vue comme un cas spécial de la conception d'observateur à entrées inconnues non linéaire. Ceci se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= Fz(t) + Gu(t) + Ky(t) \\ \hat{x}(t) &= z(t) + Hy(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

où :

$$F = TA - K_1C \quad (1.38)$$

$$G = TB \quad (1.39)$$

$$K = K_1(I - HC) + TAH \quad (1.40)$$

$$T = I - HC \quad (1.41)$$

On introduit la LMI suivante :

$$\begin{aligned} [(I - UC)A]^T P + P(I - UC)A + (VCA)^T \bar{Y}^T P \\ + \bar{Y}(VCA) - C^T \bar{K}_1^T - \bar{K}_1 C < 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

avec :  $Y = P^{-1} \bar{Y}$  et  $K_1 = P^{-1} \bar{K}_1$ .

La résolution de l'inégalité 1.42 revient à résoudre la LMI 1.27 pour  $\gamma = 0$ , donc cette inégalité devient :

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.43)$$

où :

$$\begin{aligned} X = [(I - UC)A]^T P + P(I - UC)A + (VCA)^T \bar{Y}^T P \\ + P \bar{Y}(VCA) - C^T \bar{K}_1^T - \bar{K}_1 C < 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

### 1.3. CONCEPTION D'OBSERVATEURS À ENTRÉES INCONNUES POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES PAR APPROCHE LMI

---

#### Exemple d'application

Reprenons le système de l'exemple précédent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Phi(x) + D_x d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.45)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(x) = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad D_x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$d(t) = 20 * \cos(5 * t)$$

Le calcul des matrices  $U$  et  $V$  donne, les mêmes résultats :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices  $P$ ,  $\bar{Y}$  et  $\bar{K}_1$  sont données par :

$$P = \begin{bmatrix} 10.4955 & 0 & 0 \\ 0 & 10.4955 & 0 \\ 0 & 0 & 10.4955 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5.2478 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 5.2478 & 0 \\ -10.4955 & -15.7433 \\ 0 & -5.2478 \end{bmatrix}$$

$Y$  et  $K_1$  sont obtenus à l'aide de 1.32 et 1.33 :

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & -1.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

En déduire  $H$  à partir de 1.20 :

### 1.3. CONCEPTION D'OBSERVATEURS À ENTRÉES INCONNUES POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES PAR APPROCHE LMI

---

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant  $H$  et  $K_1$ , on peut calculer les matrices de l'observateur, les résultats retrouvés sont :

$$F = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & -1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1.25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les résultats de simulation sont représentés dans les figures suivantes :

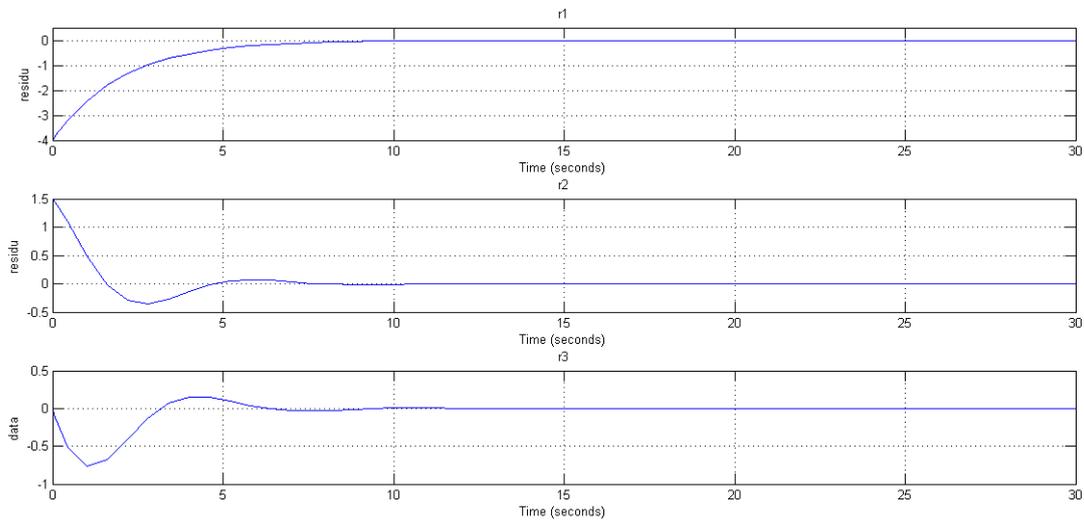


FIGURE 1.5 – Erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues linéaire

On voit très bien que les erreurs d'estimation convergent vers zéro, tout comme le cas non linéaire.

### 1.3. CONCEPTION D'OBSERVATEURS À ENTRÉES INCONNUES POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES PAR APPROCHE LMI

---

#### 1.3.1 Conclusion

A l'instar de la méthode de conception d'observateur à entrées inconnues donnée par [DZX94, CP99, KAH14], l'approche à base de formulation LMI donnent des résultats très satisfaisants en terme de convergence des états de l'observateur vers les états du systèmes.

---

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail nous a permis de comprendre la démarche à suivre pour concevoir un observateur à entrées inconnues pour une classe de système non linéaire lipschitzienne par formulation LMI.

Nous avons commencé par introduire les inégalités matricielles linéaires, expliquer l'intérêt de cet observateur en montrant que les états estimés vont tendre vers les états réels, puis nous avons donné la démarche à suivre pour concevoir ce type d'observateur. La robustesse du NUIO (nonlinear unknown input observer) a été étudiée pour différents signaux  $d(t)$ .

Du cas global, on est allés vers le cas spécial où la fonction exprimant la non linéarité du système est nulle, ce qui nous ramène au cas des systèmes linéaires et à l'instar de la méthode de conception d'observateur à entrées inconnues donnée par [DZX94, CP99, KAH14], l'approche à base de formulation LMI donnent des résultats très satisfaisants en terme de convergence des états de l'observateur vers les états du systèmes.

Les approches LMI présentent un grand avantage, car elles nous facilitent la résolution des inégalités représentant les conditions d'existence de l'observateur à entrées inconnues non linéaire et linéaire.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [BGFB94] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM studies in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [CP99] J Chen and R.J. Patton. *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer academy publishers, 1999.
- [CS06] Weitian Chen and M. Saif. Unknown input observer design for a class of nonlinear systems : an lmi approach. In *American Control Conference, 2006*, pages 5 pp.–, June 2006.
- [DZX94] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S. J. Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(3) :606–609, Mar 1994.
- [GB10] M. GRANT and S. BOYD. *CVX Users Guide*, 2010. document disponible sur <http://cvxr.com/cvx>. Le solveur cvx est téléchargeable à la même adresse.
- [KAH14] M. KAHELRAS. Utilisation des observateurs à entrées inconnues à la detection des défauts : Application cstr. Projet de fin d'études, Ecole Nationale Polytechnique, 2014.
- [LAR11] E. LAROCHE. Commande robuste. Université de Strasbourg, 2011. cours.
- [PMZ05] A.M. Pertew, H.J. Marquez, and Q. Zhao. Design of unknown input observers for lipschitz nonlinear systems. *Proceedings of the ACC, Portland,, 2005*.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [RAK10] I.N. RAKOTOARISOA. Synthèse robuste des systèmes linéaires par l'approche lmi (linear matrix inequality). Mémoire de fin d'études, Université d'Antananarivo, 2010.
- [SH11] Bongsob Song and J.K. Hedrick. Nonlinear observer design for lipschitz nonlinear systems. In *American Control Conference (ACC), 2011*, pages 2578–2583, June 2011.
- [TOS05] R. TOSCANO. *Commande et diagnostic des systèmes dynamiques : modélisation, analyse, commande par PID et par retour d'état, diagnostic, automatique*. Technosup (Paris). Ellipses Marketing, 2005.

---

---

# ANNEXE A

---

## CVX SOLVER

CVX est un système de modélisation et de résolution des problèmes d'optimisation convexe (sous MATLAB) qui sont décrits par un nombre de règles de construction, ce qui leur permet d'être analysés et résolus de manière efficace.

Parmi les problèmes qui peuvent être résolus à l'aide du CVX Solver on cite :

- Les problèmes de programmation linéaire (PL)
- Les problèmes d'optimisation semi-définie (PL)
- Les problèmes d'optimisation quadratiques (QP)
- Les problèmes de minimisation des normes
- La maximisation d'entropie etc...

Des modes spéciale sont inclus avec le CVX Solver permettant de faciliter la construction des problèmes, un de ces modes est le "SDP" *Semidefinite programs* ; ce mode permet donne accès à l'utilisation de la convention LMI (Inégalité Matricielle Linéaire) dans le programme CVX.

### Exemple 1

Considérons le problème suivant, où on cherche un matrice symétrique  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  qui satisfait l'inégalité Matricielle Linéaire suivante :

$$A^T P + P A < 0, \text{ avec } P > 0$$

---

où  $A$  est une donnée au préalable. En utilisant le CVX Solver le problème s'écrit :

```
cvx_begin sdp
    variable P(n,n) symmetric
    A'*P + P*A <= -eye(n);
    P >= eye(n);
cvx_end
```

### Exemple 2

Pour ce deuxième nous allons considérer un problème de minimisation sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & Tr(CX) \\ \text{sous} & Tr(AX) = b \\ & X \geq 0 \end{array}$$

où  $A$ ,  $C$  et  $b$  sont des données définies dans MATLAB. L'expression de ce problème dans le CVX Solver est :

```
cvx_begin
    variable X(n,n) symmetric;
    minimize( trace( C * X ) );
    subject to
    trace( A * X ) == b;
    X = semidefinite(n);
cvx_end
```

Pour plus d'information sur le CVX Solver consulter [GB10].