42/87

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT MÉCANIQUE

1 ex

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

SUJET

Réalisation d'un T.P. pour l'analyse des poutres soumises en petites et grandes déformations

Proposé par : Mr. RECHAK S.

Etudié par : Mr. BENHEDADA M.

Dirigé par : Mr. RECHAK S.

PROMOTION : JUIN 1987

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi – EL-HARRACH – ALGER

Ministère de l'enseignement supérieur — وزارة التعليم العالي
Ecole nationale polytechnique — المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Département : Génie Mécanique — فرع الهندسة الميكانيكية
Promoteur : RECHAK Saïd — الموجه : رشاق سعيد
Elève ingénieur : BENHEDADA. M — الطالب المهندس : بن حدادة محمد

الموضوع : انجاز عمل تطبيقي للعتبات في حالة الإنحناءات الصغيرة والكبيرة

الملخص : يهدف هذا العمل الى انجاز عمل تطبيقي للعتبات في حالة الإنحناءات الصغيرة و الكبيرة و من أجل هذا قمنا بطريقتين تجريبيتين لحساب مقادير الإنحناءات ، بالنسبة للإنحناءات الصغيرة قمنا بمقارنة النتائج التجريبية بالنتائج النظرية " طريقة مقاومة المواد " و بالنسبة للإنحناءات الكبيرة ، قارنا النتائج التجريبية بالنتائج العددية " طريقة الفروق المحدودة ، لبيكار ".

Sujet : *Réalisation d'un T.P pour l'analyse des poutre soumises à des petites et grandes déformations.*

Résumé : *L'objet de notre travail consiste à mettre en place un T.P pour l'analyse des poutres soumises à des petites et grandes déformations. Pour cela deux méthodes éxpérimentales ont éte établies ; pour les petites déformations, les résultats expérimentaux sont comparées aux valeurs théoriques ; pour les grandes déf. les mesures expérim-entales sont comparées aux résultats numérique par la methode des différences finies de PICARD.*

Subject : *Disining on experiment to analyse beams under small and large def.*

Abstract : *The object of this study consistes on desining on experimen-tation in order to analyse beams under small and large deformations. for this, two experimentals methodes have been estabtished ; for the cas of small deformations, experimental results are compared to theorical results, for the cas of large deformations the experimental results are compared to numerical results given by a devloped finite difference program (PICARD's methode)*

بسم الله الرحمن الرحيم

قل إن صلاتي ونسكي ومحياي ومماتي لله رب العالمين

صدق الله العظيم

DEDICACES

Je dédis ce modeste travail à :

- La mémoire de mon père
- Ma mère
- Mes Frères et Soeurs.
- Toute la Famille
- Tous ceux qui témoignent qu'il n ya de dieux qu'ALLAH et que MOHAMMED est son envoyé et son prophète.

B. Mohamed

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciments à mon promoteur : monsieur RECHAK saïd qui a eu l'aimable sollicitation de me suivre dans ce travail, ainsi que tous les enseigants qui ont contribué à ma formation

Que tous ceux qui ont participé de prés ou de loin à la realisation de ce projet trouve ici ma sincère gratitude.

B. mohamed

TABLE DES TABLEAUX

Tableau II-1 : Comparaison entre les valeurs de M et T cas d'une section rectangulaire 14

Tableau II-2 " " " " " cas d'une poutre en I 15

Tableau 1 : Resultats theoriques des deformeés - acier etiré 24

Tableau 2 : " experimentaux " " 25

Tableau 3 : Resultats theoriques des deformeés - acier doux 26

Tableau 4 : " experimentaux " " " 27

Tableau 5 : Resultats theoriques des deformeés - laiton 28

Tableau 6 : " experimentaux " " 29

Tableau 7 : Resultats experimentaux des trois metaux par la methode directe 30

Tableau 8 : " " " " 31

Tableau III-1 : comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales par un comparateur 46

Tableau III-2 " " " " " 47

Tableau III-3 comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales par la methode directe . . . 48

Tableau 9 : Resultats theoriques des deformeés - Acier special . . . 60

Tableau 10 : " experimentaux " " . . . 61

TABLE DES FIGURES

Figure I-1 : flexion plane . . . . :3

Figure I-2 : Flexion diviée 5

Figure I-3 : Flexion composeé 7

Figure II-1 : poutre soumise à un systeme de charge 9

Figure II-2 : poutre avant application des charges 10

Figure II-3 : poutre aprés " " " 10

Figure II-4 : Consideration géomètrique 11

Figure II-5 : Flêche aprés application des charges 16

Figure III-1 : Schéma d'encastrement 20

Figure III-2 : mesure par un comparateur 22

Figure III-3 : mesure par la methode directe 23

Figure III-4 : Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales - Materiau laiton 32

Figure III-8 : " " " " " " " " _ materiau acier doux 36

Figure III-12 : " " " " " " " " materiau acier etiré 40

Figure III-16 : les deplacements de la poutre - Methode directe . . . 49

Figure IV-1 : poutre soumise à des grandes deformation 50

Figure IV-2 : Difinition des angles 51

Figure IV-3 : representation de la poutre en parties 57

Figure V-1 : Comparaison entre les valeurs theorique et les mesure experimentales des grandes deformations . . . 62

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

CH I. GENERALITÉS 3

I-1 : FLexion plane 3

I-2 : Flexion diviée 5

I-3 : Flexion composeé 7

CH II. ETUDE THEORIQUE DES PETITES DEFORMATIONS 9

II-1 : Equation defferenlielle de la ligne élastique 10

II-2 : Effet de L'effort tranchant 13

II-3 : Utilisation de l'equation de la ligne élastique 16

II-4 : Methode d'integration de l'equation de la ligne elastique . . 17

CH III. ETUDE EXPERIMENTALE DES PETITES DEFORMATIONS 19

III-1 : schémá du banc d'essai 19

III-2 : Description du banc d'essai 20

III-3 : Mode opératoire 22

III-3-1 : Releve des mesures à l'aide d'un comparateur 22

III-3-2 : Releve des mesures par la methode directe 23

III-4 : Commentaire des resultats 44

III-4-1 : mesure par un comparateur 46

III-4-2 : mesure par la methode directe 48

CH. IV. ETUDE THEORIQUE DES GRANDES DEFORMATIONS 50

IV-1. Equation deffirentielle de la ligne elastique 51

IV-1.1 : " " en θ 52

IV-1-2 : " " en ϕ 53

IV.2 : Determination des deplacements verticaux et Deplacements horizontaux 57

CH. V. ETUDE EXPERIMENTALE DES GRANDES DEFORMATIONS 59

V-1 : Mode operatoire 59

V-2 : Commentaire des resultats 63

CONCLUSION . . . .

BIBLIOGRAPHIE . . . .

NOTATIONS UTILISEES

T : effort tranchant

N : " normal

M : moment de flexion

σ : contrainte normale

τ : contrainte tangentielle

ε : deformation linéaire relative

I : moment d'inertie $[mm^4]$

E : module de young $[daN/mm^2]$

α : l'angle entre l'horizontale et la ligne d'action d'effort

θ : " " la tangente à la ligne neutre et " "

ϕ : " " " " " " et l'horizontale

P : la charge

L : la porteé de la poutre

y : la deformeé

u : deplacement axial

v : deplacement vertical

INTRODUCTION

Dans beaucoup de cas, les chercheurs etudient les structures quand celle-ci sont soumises à des petites deformations où les lois de l'elasticité sont applicables. Dans cette étude, on s'interesse plus aux grandes deformations des structures.
On a considéré comme model simple le cas des poutres encastreés de differentes materiaux soumises à une charge à l'extrémité libre.
L'etude consistait à realiser une experience, relever des mesures experimentales et de virifier les resultats pratique par des resultats numeriques.

Contrairement aux grandes deformations, la theorie simple prédicte avec exactitude les resultats experimentaux des petites deformations.

Dans le cas des deformations larges, les termes non lineaires ont eté inclus et on a aboutit a une equation differentielle non lineaire cette dernière à été numeriquement integrée en utilisant la methode de Picard. les resultats obtenus paraissent trés satisfaisante pour la prediction des grandes deformations des structures.

I_GENERALITÉS

Les éléments de machine sont généralement soumis à différents types d'efforts. Particulierement les structures en élément poutre sont plutôt soumises à la flexion. Dans ce chapitre une brêve déscription des trois types de flexions est presentée.

I-1 Flexion plane

on entend par flexion plane un mode de sollicitation tel que dans les sections droites de la poutre il existe deux composantes d'efforts internes. Le moment flechisant et l'effort tranchant : M_z et T_y. On peut remarquer que la flexion plane a lieu, si toutes les forces externes appartiennent à l'un des plans principaux d'inertie. Et s'ils sont perpendiculaires à l'axes central de la poutre. Ce plan est designé par plan de force ou plan de charge

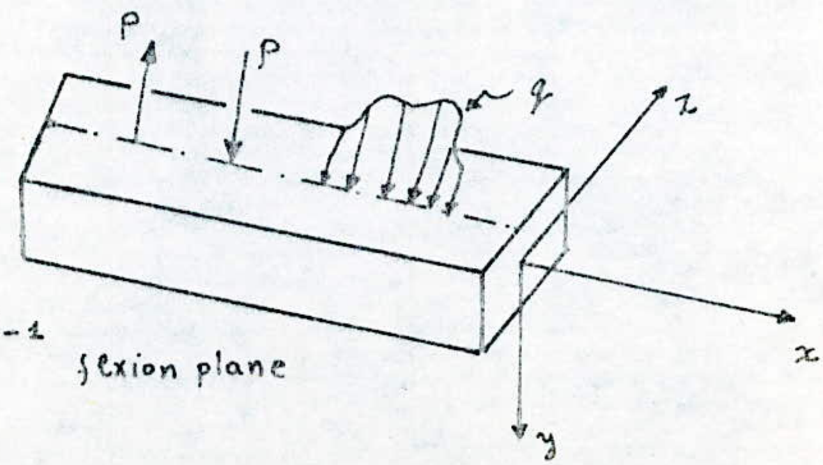


Fig : I-1
flexion plane

I-1-2 Contraintes

A- Contraintes Normales :

Les contraintes normales sont provoquées par le moment flechissant. Dans le cas d'une flexion pure, les contraintes sont donnés par

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad \ldots (1)$$

avec I_z : moment d'enertie axial de la section droite

z, y : sont les coordonnées cartesiennes du point étudier

Remarque :

La formule de NAvier à été obtenue (pour la flexion pure), à partire de l'hypothèse des sections planes. dans le cas de la flexion plane, les sections droites ne restent pas planes pendant la deformation, Cependant l'experience montre que l'erreur, due à l'utilisation de la formule de Navier est petite et peut être nigligeé dans les calculs pratiques

B- Contraintes tangentielles :

les contraintes tangentielles se caractérisent par la Formule de Jouravisky obtenue dans le cas d'une ~~cas~~ flexion plane de la poutre

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{I_z} \cdot \frac{m_z^w}{B} \quad \ldots (2)$$

B : Largeur de la fibre etudieé

m_z^w : le moment statique de la surface w par rapport à l'axe Z

I-2 Flexion devieé

On entend par flexion déviée un mode de sollicitation pour le quel dans les sections droites de la poutre exesistent les moments flechissants (M_y, M_z) et les efforts tranchants (T_y, T_z). C'est-à-dire il est possible de considerer la flexion devieé comme une action composeé des flexions planes par rapport aux axes y et z.

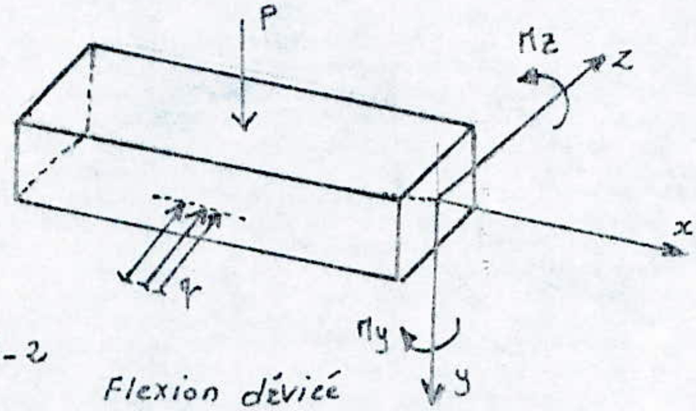


Figure I-2

Flexion déviée

la flexion devieé peut être effectueé par un système de charges croissant. L'axe central (x) de la poutre est perpendiculaire à celui-ci. Donc il faut considérer les deux cas suivants

a - le cas general ou les forces exterieures sont appliqueés dans les différents plans de charges.

b - le cas particulier ou toutes les forces exterieures appartiennent au seul plan de charge, qui ne coïncide pas avec l'un des plans principaux d'énertie

I-2-2. Contraintes

A- Contraintes normales :

Dans ce cas l'expression de σx est donneé par la Formule suivante

$$\sigma x = \frac{M_y}{I_y} Z + \frac{M_z}{I_z} y \quad .... (3)$$

le signe de σx dépend des signes des moment flechissants et du sens de coordonnées

B - Contraintes tangentielles :

les efforts tangentielles sont donnés par la formule de Jouravsky

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \, m_z^w}{I_z . B} \quad .... (4)$$

B : la largeur de la Fibre etudieé

w : la surface de la partie de la section droite setueé d'un côte de fibre etudieé

M_z^w : le moment statique de la surface w par rapport a l'axe (Z)

la contrainte tangentielle resultante au point consedré peut être representeé. Comme la somme geometrique des composantes obtenues

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad .... (5)$$

I-3 Flexion composée

Une poutre est dite soumise à la flexion composée si elle est soumise simultanement à la flexion et à la traction (ou compression)

Dans le cas general s'appelle une flexion gauche composée

Dans une section droite il exesiste, N_x, T_y, M_z, T_z, M_y

Dans le cas particulier s'appelle une flexion droite composée quiestcaracterisée par une action commune de la traction (ou compression) et la flexion plane

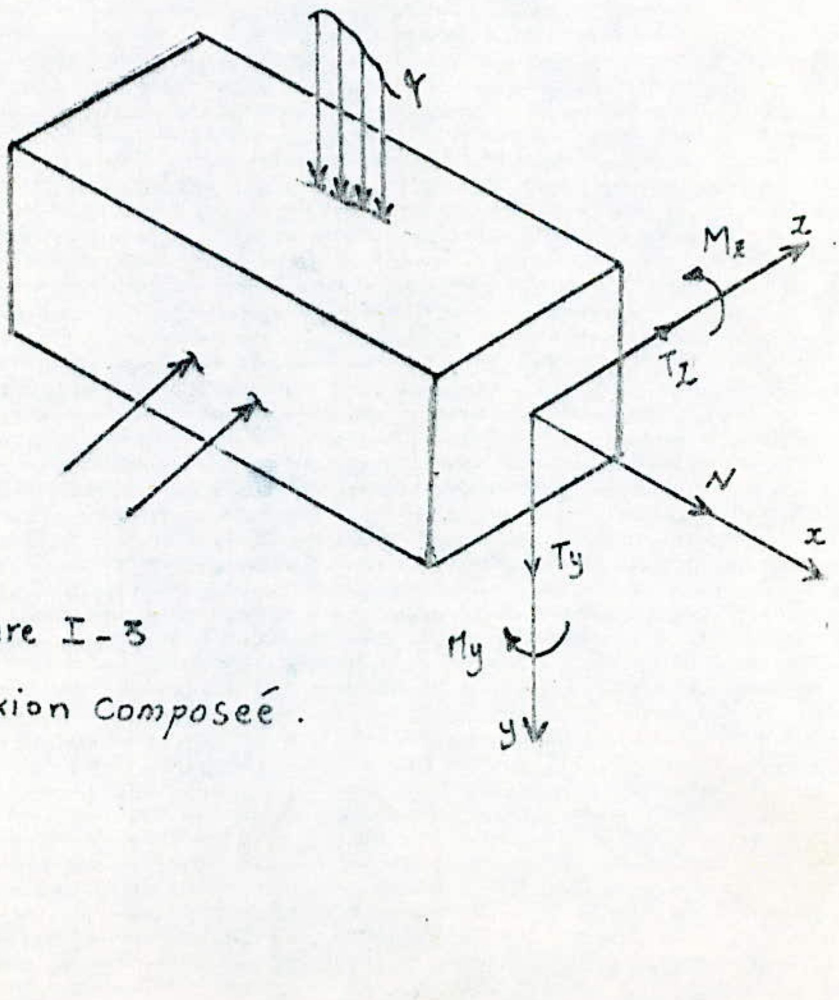


figure I-3
flexion composée.

I-3-2 Contraintes

A- les contraintes normales :

les contraintes normales qui sont provoquées par Nx, My et Mz sont données par la formule suivante

$$\sigma x = \frac{Nx}{S} + \frac{My}{Iy} z + \frac{Mz}{Iz} y \quad \ldots\ldots (6)$$

Pour le cas d'une flexion droite composée

$$\sigma x = \frac{Nx}{S} + \frac{Mz}{Iz} y \quad \ldots\ldots (7)$$

B- les contraintes tangentielle :

les contraintes tangentielles sont données par la formule suivantes

$$\tau_{xy} = \frac{Ty \; M_z^{\omega}}{I_z \cdot B} \qquad \tau_{xz} = \frac{Tz \; M_y^{\omega'}}{I_y \cdot B} \quad \ldots (8)$$

les contraintes tangentielles resultante est:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad \ldots\ldots (9)$$

II_ETUDE THEORIQUE DES PETITES DEFORMATIONS

les lois qui vont être enoncées dans cette etude sont:

- la ligne moyenne Lm de la poutre est rectiligne
- la poutre admet un plan de symetrie
- les effort exterieurs sont situés dans ce plan
- de plus, ces efforts doivent être perpondiculaire à ce plan
- les efforts et les couples appliqués ne devront faire apparaitre en aucun point de la poutre des deformations permanantes.

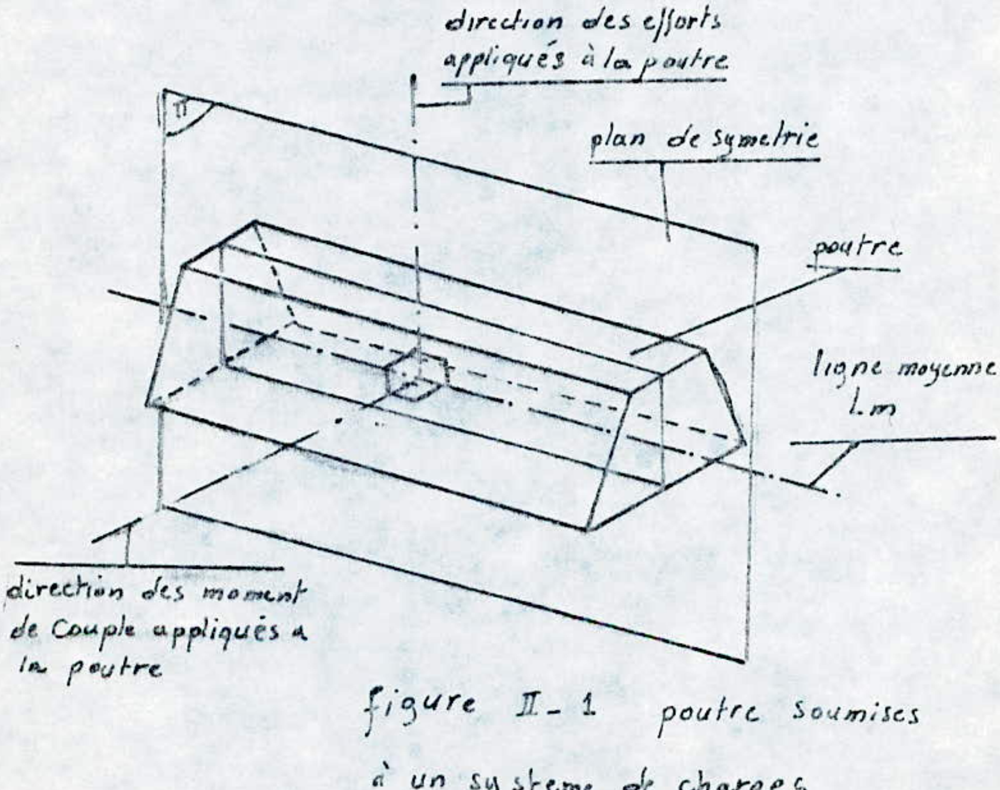


figure II_1 poutre soumises à un systeme de charges

II-1 l'equation défferentielle de la ligne élastique

Consédérons une tèlle poutre soumise à un système de charges selon les hypothèses citeés auparavant

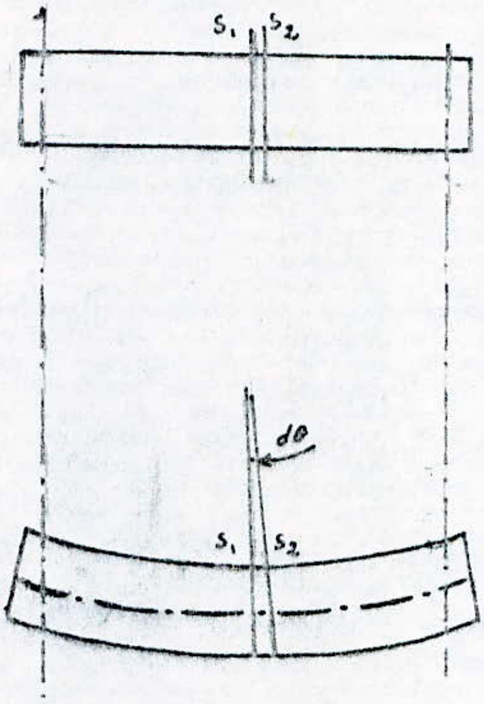


figure II-2

poutre avant appliquation descharges

figure II-3

poutre aprés application des charges

D'aprés L'hypothese de BERNOULLI selon la quelle toute Section plane est perpondiculaire à la ligne moyenne avant déformation reste plane et perpondiculaire à la Ligne moyenne aprés applications de charges.

Considerons deux sections planes normales à la ligne moyenne et separées avant l'application des charges par une distance dx.

Aprés application des charges et par suite de la rotation des sections, les plans Contenant S_1 et S_2 Forment

un angle $d\theta$. la ligne moyenne s'est deplaceé et est representeé par le trait mixte (voir figure II-3)
Cette ligne qui s'est deformeé élastiquement est appelleé ligne elastique.
les section S_1 et S_2 ont tourné. Dans le repère $(o, \vec{x}, \vec{y})$.
Convenons que S_1 reste immobile et que S_2 se soit deplaceé par rapport a S_1, S_2 et venue en S_2' (voir figure

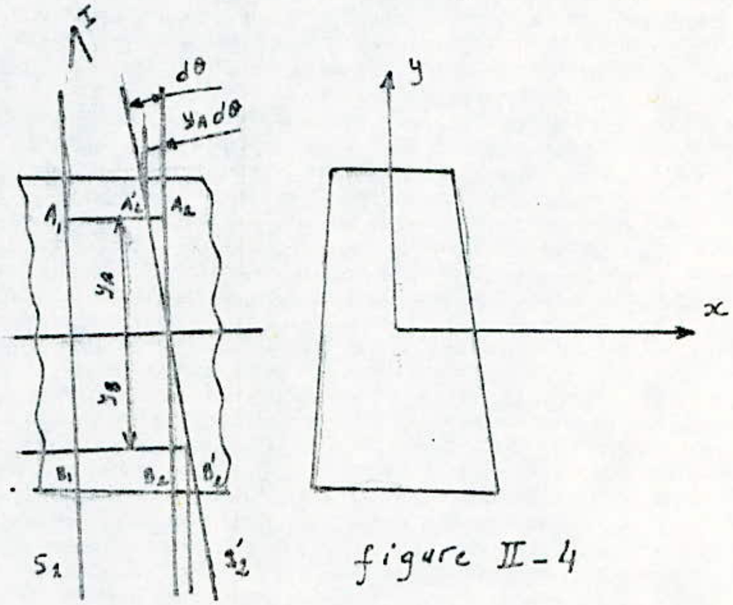


figure II-4

Considération géométrique

- Un segment A_1A_2 s'est raccourci de la longeur A_2A_2'
- Un segment B_1B_2 s'est elloigné de la longeur B_2B_2'
- L'intevalle G_1G_2 n'a pas changé de longeur, il appartient à la ligne moyenne.

Soit I la trace de l'intersection des deux plan contenant S_1 et S_2'

IG est le rayon de la Courbure de $G_1 G_2$ qui represente Un élément de la ligne moyenne élastique

$$IG_1 = R = \frac{dx}{d\theta} \quad \ldots (1)$$

Cherchons maintenant à évaluer la déformation relative longitudinale d'un segment tel que $A_1 A_2$ ou $B_1 B_2$ Celle déformation élastique répond à la loi de Hook et est due à la Contrainte normale σ

$$\sigma = E\varepsilon \quad \ldots (2)$$

Au dessus de $G_1 G_2$ $y > 0$. il vient $\varepsilon = \frac{\overline{A_2 A_2'}}{\overline{A_1 A_2}} < 0$

Soit $\varepsilon = -y_A \frac{d\theta}{dx} = -\frac{y_A}{R} = -\frac{|y_A|}{R} \quad \ldots (3)$

Au dessous de $G_1 G_2$ $y < 0$ il vient $\varepsilon = \frac{\overline{B_2 B_2'}}{\overline{B_1 B_2}} > 0$

Soit $\varepsilon = -y_B \frac{d\theta}{dx} = -\frac{y_B}{R} = \frac{|y_B|}{R} \quad \ldots (3')$

d'une façon generale, on peut donc ecrire $\varepsilon = -\frac{y}{R}$

d'ou $\sigma = -E \cdot \frac{y}{R}$ σ est la contrainles normale agissant sur S_1

$$\text{or} \quad \sigma = -\frac{M_z y}{E I_z} \quad \ldots (4)$$

D'où il vient en comparant ces deux expressions de la contrainte $\frac{1}{R} = \frac{M_z}{E I_z}$

or analytiquement on sait que :

$$R = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots\ldots (5)$$

d'où enfin

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad \ldots\ldots (6)$$

où M_z représente la mesure algébrique du moment de flexion de la Section S_2 Considéreé dans ce Calcul

Cette expression constitue l'équation differentielle qui admet pour solution $y = f(x)$ représentant l'équation de la ligne élastique de la poutre considérées dans le repère $(o, \vec{x} . \vec{y})$

II_2 L'effet de l'effort tranchant

Cette équation ne tient compte que des déformations dues aux contraintes normales et ne tient pas compte des déformations dûes à l'effort tranchant.

il est courament admis que la déformation élastique dûe a l'effort tranchant est toujour négligeable devant celle due au moment de flexion. Ceci n'est pas toujours verifié. Car si on considère le cas d'une poutrelle en I, on peut trouver une influence non negligeable l'étude complète n'est pas le but du sujet. Nous donnerons à titre documentaire, quelque resultats sur l'importance comparative des deplacements elastiques dûs à l'effort tranchant (y_T) et de ceux dûs au moment de flexion (y_M)

Considerons le cas d'une poutre de section rectangulaire constante est soumise à une charge uniformement repartie la poutre est supporté par deux appuis simples distants de L et admet une section de largeur b et d'hauteur h

on trouve $\frac{y_T}{y_M} = 2,4\left(\frac{h}{L}\right)^2$

Cas de la même poutre mais avec une charge concentreé P appliqueé au milieu de la poutre

on trouve $\frac{y_T}{y_M} = 3\left(\frac{h}{L}\right)^2$

	h/L	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{y_T}{y_M}$	charge repartie	0,017	0,024	0,087
	charge concentreé	0,021	0,03	0,047

Tableau N° II-1 Cas d'une section rectangulaire les resultats du Tableau N° II-1 montrent que dans le cas où la section est rectangulaire les deplacements elastiques dûs à l'effort tranchant peuvent être negligés. Des Calculs analogues effectués sur des poutres à section rectangulaire Conduisent à la même Conclusion

Cas d'une poutre à Section en I normalisée

Utilisant les mêmes notations que precedement, on obtient

$$\frac{y_T}{y_M} = 4\,\frac{h}{L}$$

	h/L	1/12	1/10	1/8
$\frac{y_T}{y_M}$	charge repartie	0,167	0,200	0,250
	charge concentreé	0,33	0,400	0,500

Tableau II-2 Cas d'une section en I

on voit que les deplacements dus à l'effort tranchant sont loin d'etre neglegeables dans certains cas

II-3 Utilisation de l'equation de la Ligne elastique

Soit $y = f(x)$ l'equation de la ligne elastique cherchée.

Dans le cas des petites deformations, le probleme se resout en prenant en consideration l'hypothèse que la courbure reste tres petite.

En effet, dans les constructions metalliques une Condition de deformation est souvent imposée avant toute Condition de resistance.

Dans ce cas on impose que la flêche maximale reste inferieure à $\frac{1}{500}$ de la porté

$$y_{max} < \frac{L}{500}$$

On en deduit que la ligne elastique d'une telle poutre est Une courbe tendue. Par consequent, la pente de la tangente reste trés faible puisque la courbe est trés petite

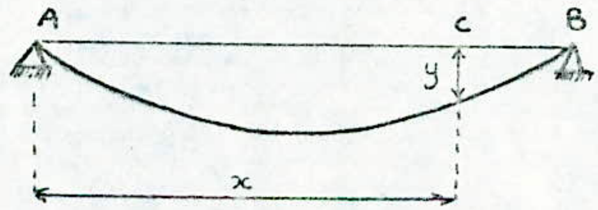


figure II-5 flêche aprés application des charges.

En c dans le figure II-1 on a $\frac{dy}{dx} = tg\,\theta$

Comme θ est trés petit : $tg\,\theta \simeq \theta$ d'ou $\frac{dy}{dx} \simeq \theta$

le terme $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = 1$ car $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ est negligeable devant 1

d'ou l'equation differentielle de la ligne élastique

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M_z}{E I_z} \quad \ldots\ldots (7)$$

II- 4 Methóde d'integration de L'equation de la Ligne elastique

Integrons l'equation (7) une première fois

$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M_z}{E I_z}$ avec $M_z = Px$. dans le cas d'une poutre encastrée chargeé à l'extrémité

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{P x^2}{E I_z 2} + C_1 \quad \ldots\ldots (8)$$

Utilisons la condition aux Limites

à $x = L$; $\frac{dy}{dx} = 0 \longrightarrow C_1 = \frac{PL^2}{2 E I_z}$

d'où $\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{-P}{EI_z} \frac{x^2}{2} + \frac{PL^2}{2EI_z} \quad \ldots\ldots (9)$

Integrons une deuxieme fois et appliquons la deuxieme condition au limites à $x = L$; $y = 0$

$$y = -\frac{P}{EI_z}\frac{x^3}{6} + \frac{PL^2}{2EI_z}x + C_2$$

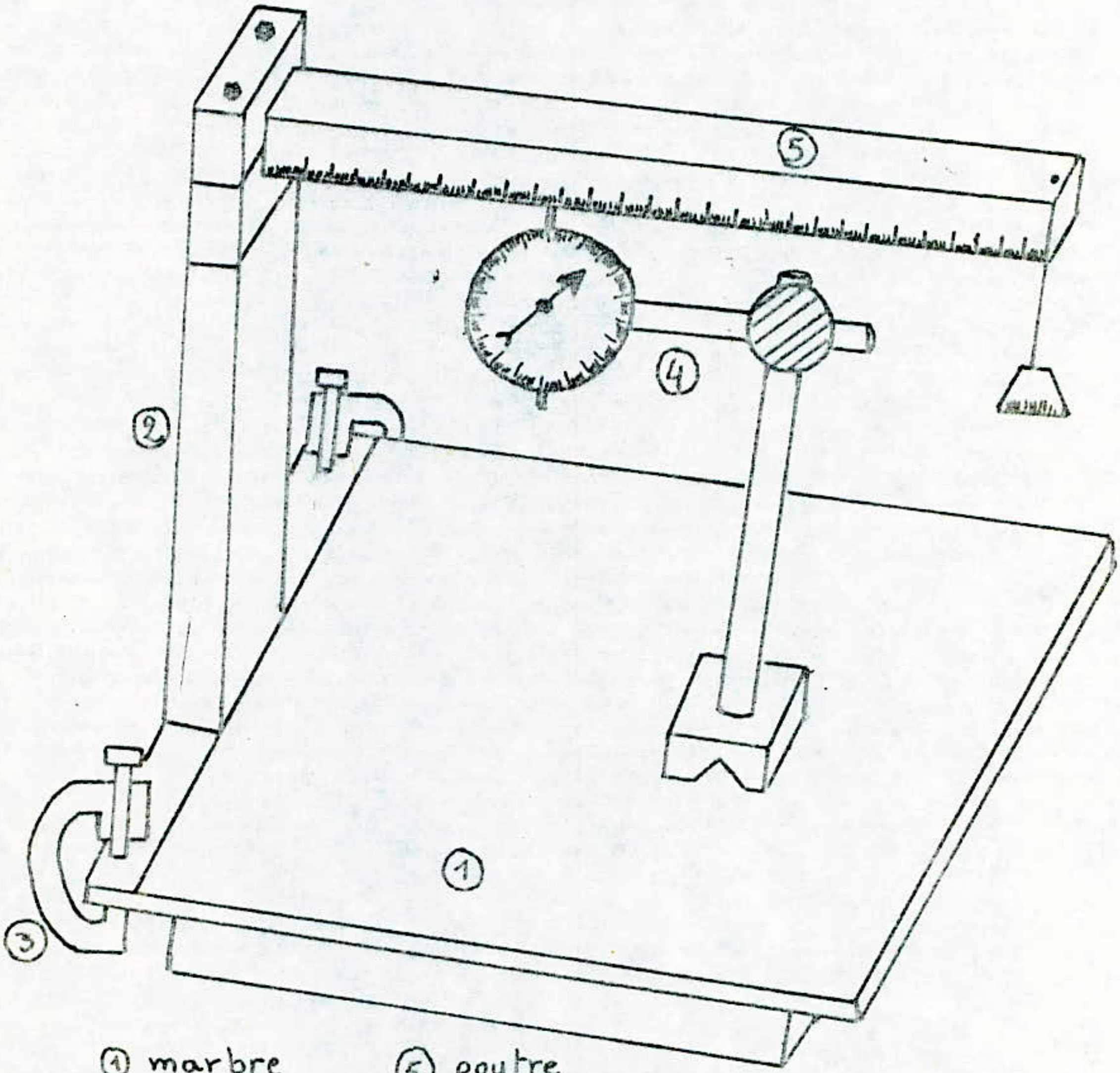
avec $C_2 = \frac{PL^3}{6EI6} - \frac{PL^3}{2EI_z} = -\frac{PL^3}{3EI_z}$

Finalement ;

$$y = -\frac{P}{6EI_z}\left(x^3 - 3L^2x + 2L^3\right) \quad \text{.....} \quad (10)$$

III. ETUDE EXPERIMENTALE DES PETITES DEFORMATIONS

III-1 Schema du banc d'essai



① marbre ⑤ poutre

② support

③ presse

④ comparateur

III _2 Description du banc d'essai

le banc d'essai que nous avons réalisé se compose des elements suivantes

1 - Un marbre plan 300 x 500 qui sert de surface de reference sur laquelle Coulisse horizontalement le comparateur il assure le parallelisme de la poutre d'étudier.

2 - Un support formé d'une poutre en U 80 lieé rigidement au marbre à l'aide de deux presses Armantstrang. Ces presses servent d'une part à Fixer le support sur le marbre, d'autre part permettent deregler le perpendicularité du support et du marbre

3 - l'encastrement qui est formé de deux pièces rainurées Comme le montre le dessin de la Figure ci dessous.

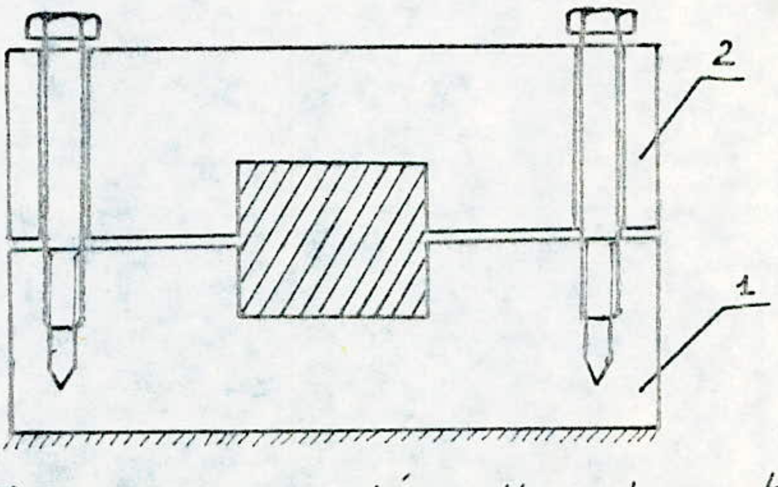


figure III - 1 Schéma d'encastrement

- Dans la figure III-1 la pièce (1) est fixée sur le support rigidement par soudure

la pièce (2) est assembleé avec la pièce (1) par deux vis M8 x30

Cette forme d'encastrement sert :

1- à eliminer tous les degrés de liberté par le serrage

2- le desserage permet

- de varier la longeur de la poutre

- de changer la poutre par une autre

3- Cette forme d'encastrement nous permet d'atteindre le point zero c'est-à-dire le point correspondant à $x = 0$

III _ 3 Mode operatoire

On a relevé les mesures selon 2 methodes :

1- Relevé de mesures à l'aide d'un comparateur

- la poutre a subit des deformation pendant l'usinage
- les poutres à etudieés sont legerement inclineés par rapport à la surface de reference dûe à son propre poids
- la perpendicularité du support de la poutre par rapport à la surface de reference n'est pas parfaite.

Vu ces conditions, les mesures ont été effectueés point par point pour ce fait le comparateur est placé à differentes sections de la poutre ; distante entre elles de 40 mm. Avant chaque mesure le comparateur est initialisé pour chaque cas de force, le même mode operatoire est repeté.

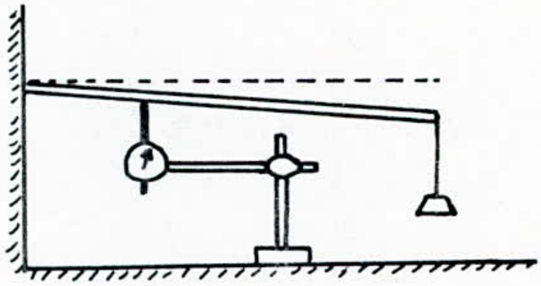


Figure III _ 2 mesure par comparateur

2- Methode directe

Cette methode permet de mesurer les deformations des poutres sans l'utilisation de comparateur ni d'autres appareils de mesure. Pour ce fait on a mis en place une nouvelle technique pratique qui consiste à :

a- Faire des trous de 1,5 mm de diametre le long de la poutre distants entre eux de 40 mm

b- pour chaque essai on place une aiguille qu'on la deplace d'un trou à l'autre. Cette aiguille laisse une trace sur la feuille de papier fixeé sur la plaque de plexiglas

c- à chaque mesure on initialise les traces de l'aiguille on mesurant la distance entre les points on obtient la flêche au point consideré.

remarque :

Dans les deux methodes on a utilisé des charges de l'ordre de 50 gf.

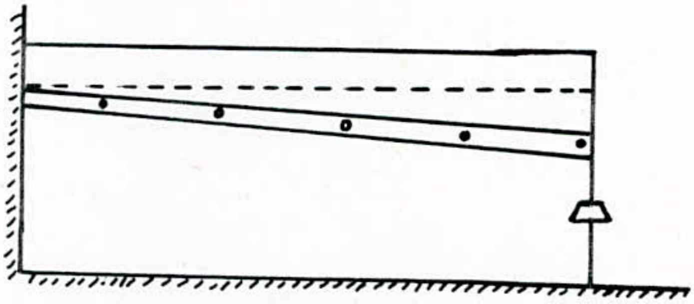


figure III -3   mesure par methode directe

Tableau N° 1 Resultats theoriques des deformeés [mm]

Materiau : acier etiré

P [gf] / x [mm]	50	100	150	200	400	600	800	1000	2000	3000
40	0,001	0,0026	0,003	0,005	0,010	0,03	0,080	0,102	0,204	0,365
80	0,005	0,010	0,015	0,020	0,040	0,064	0,170	0,222	0,440	0,665
120	0,011	0,022	0,033	0,044	0,089	0,133	0,306	0,380	0,760	1,149
160	0,019	0,038	0,057	0,076	0,153	0,229	0,462	0,570	1,150	1,730
200	0,028	0,057	0,086	0,116	0,213	0,340	0,642	0,800	1,600	2,400
240	0,040	0,080	0,120	0,160	0,321	0,480	0,840	1,050	2,100	3,156
280	0,052	0,105	0,157	0,210	0,392	0,630	1,057	1,320	2,640	3,963
320	0,066	0,132	0,198	0,261	0,520	0,790	1,284	1,408	3,210	4,208
360	0,080	0,160	0,240	0,321	0,642	0,960	1,305	1,600	3,507	4,816
400	0,094	0,189	0,284	0,379	0,759	1,130	1,519	1,890	3,790	5,698
440	0,100	0,219	0,320	0,439	0,879	1,310	1,759	2,190	4,390	6,590

Tableau N° 2

Materiau : acier etiré

Resultats experimentaux des deformées [mm] / comparateur

x [mm] \ P [gf]	50	100	150	200	400	600	800	1000
40	0,005	0,010	0,015	0,020	0,040	0,070	0,098	0,100
80	0,009	0,015	0,021	0,030	0,060	0,090	0,130	0,235
120	0,015	0,029	0,049	0,059	0,115	0,180	0,235	0,455
160	0,020	0,049	0,070	0,090	0,180	0,270	0,315	0,630
200	0,031	0,061	0,100	0,122	0,245	0,370	0,510	0,830
240	0,041	0,086	0,125	0,170	0,335	0,495	0,660	1,065
280	0,050	0,110	0,161	0,215	0,435	0,630	0,850	1,300
320	0,060	0,122	0,190	0,250	0,520	0,770	1,025	1,535
360	0,070	0,143	0,225	0,300	0,620	0,925	1,220	1,800
400	0,091	0,185	0,270	0,355	0,720	1,070	1,425	2,03
440	0,125	0,220	0,320	0,430	0,880	1,250	1,770	2,13

Tableau N° 3 Resultats theoriques des deformées [mm]

Materiau : acier doux

P [gf] / x [mm]	50	100	150	200	400	600	800	1000	2000	3000
40	0,001	0025	0,004	0,006	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,100
80	0,005	0,009	0,014	0,019	0,039	0,059	0,079	0,099	0,105	0,160
120	0,0108	0,021	0,032	0,043	0,084	0,129	0,170	0,216	0,306	1,280
160	0,018	0,037	0,055	0,073	0,140	0,222	0,290	0,371	0,480	1,500
200	0,028	0,056	0,084	0,099	0,224	0,336	0,440	0,560	0,600	2,030
240	0,038	0,077	0,116	0,152	0,311	0,466	0,620	0,770	0,898	2,780
280	0,050	0,099	0,152	0,203	0,401	0,610	0,810	1,100	2,13	3,050
320	0,064	0,128	0,192	0,256	0,512	0,768	0,924	1,280	2,50	3,800
360	0,077	0,155	0,233	0,311	0,622	0,933	1,240	1,550	3,110	4,600
400	0,081	0,184	0,276	0,369	0,730	1,100	1,395	1,840	3,680	5,52
440	0,100	0,212	0,319	0,420	0,850	1,270	1,700	2,120	4,250	6,380

Tableau N° 4

Materiau : acier doux

Resultats experimentaux des deformeés [mm] / Comparateur

P [gf] / x [mm]	50	100	150	200	400	600	800	1000
40	0,003	0,01	0,015	0,020	0,040	0,085	0,105	0,140
80	0,009	0,020	0,025	0,040	0,070	0,110	0,130	0,170
120	0,015	0,030	0,040	0,065	0,115	0,180	0,250	0,300
160	0,020	0,050	0,070	0,095	0,190	0,280	0,375	0,460
200	0,035	0,065	0,095	0,130	0,270	0,400	0,530	0,655
240	0,040	0,085	0,130	0,175	0,350	0,520	0,700	0,870
280	0,052	0,100	0,165	0,220	0,451	0,660	0,871	1,100
320	0,061	0,140	0,205	0,270	0,545	0,810	1,095	1,355
360	0,072	0,160	0,245	0,315	0,645	0, 95	1,285	1,610
400	0,10	0,180	0,285	0,385	0,725	1,14	1,500	1,880
440	0,12	0,220	0,320	0,450	0,920	1,41	1,810	2,160

Tableau N° 5 Resultats theoriques des deformeés [mm]

Materiau : Laiton

P [gf] / x (mm)	50	100	150	200	400	600	800	1000	2000	3000
40	0,002	0,004	0,006	0,009	0,018	0,027	0,034	0,045	0,091	0,197
80	0,008	0,017	0,026	0,035	0,070	0,100	0,141	0,170	0,350	1,050
120	0,019	0,038	0,057	0,076	0,150	0,230	0,307	0,380	0,760	1,870
160	0,032	0,065	0,098	0,130	0,260	0,390	0,720	0,650	1,310	2,970
200	0,049	0,099	0,140	0,190	0,390	0,590	0,797	0,990	1,990	3,700
240	0,069	0,138	0,204	0,270	0,590	0,840	1,090	1,380	2,760	4,140
280	0,090	0,181	0,270	0,360	0,820	1,050	1,440	1,810	3,620	5,430
320	0,113	0,227	0,341	0,450	1,080	1,360	1,820	2,270	5,520	6,820
360	0,138	0,276	0,414	0,550	1,380	1,650	2,210	2,760	6,570	8,290
400	0,163	0,327	0,490	0,650	1,360	1,970	2,610	3,270	6,970	9,810
440	0,180	0,378	0,567	0,750	1,51	2,270	3,028	3,780	7,570	11,35

Tableau N° 6

Materiau : Laiton

Resultats experimentaux des defomeés [mm] / comparateur

x [mm] \ P [gf]	50	100	150	200	400	600	800	1000
40	0,007	0,013	0,020	0,035	0,070	0,150	0,020	0,250
80	0,009	0,030	0,049	0,060	0,098	0,180	0,024	0,568
120	0,015	0,060	0,135	0,0115	0,170	0,335	0,45	0,890
160	0,030	0,100	0,160	0,0180	0,265	0,535	0,71	1,260
200	0,040	0,130	0,190	0,261	0,390	0,765	1,020	1,710
240	0,060	0,150	0,250	0,360	0,515	1,030	1,380	2,215
280	0,070	0,200	0,330	0,440	0,670	1,320	1,760	2,730
320	0,092	0,260	0,410	0,545	0,820	1,640	2,190	3,280
360	0,110	0,320	0,490	0,655	0,990	1,970	2,620	3,890
400	0,160	0,390	0,520	0,765	1,17	2,295	3,080	4,03
440	0,180	0,402	0,575	0,940	1,365	2,80	3,650	4,300

Tableau N° 7

Resultats experimentaux des deformées [mm] / methode directe

	Acier doux				Laiton				Acier etiré		
X [mm] \ P [gf]	50	100	150		50	100	150		50	100	150
280	0,07	0,12	0,15		0,09	0,20	0,30		0,06	0,12	0,16
320	0,08	0,13	0,20		0,10	0,25	0,35		0,075	0,13	0,20
360	0,09	0,15	0,25		0,13	0,30	0,45		0,09	0,15	0,24
400	0,10	0,20	0,30		0,15	0,35	0,50		0,10	0,20	0,31
440	0,15	0,25	0,35		0,20	0,40	0,57		0,125	0,25	0,35

Tableau N° 8

Resultats experimentaux des deformeés / methode directe

	Acier doux				Laiton				Acier etiré		
P[gf] / X[mm]	1000	2000	3000		1000	2000	3000		1000	2000	3000
280	1,00	2,05	2,50		2,50	4,50	6,60		0,90	1,50	2,40
320	1,05	2,17	3,00		3,00	5,21	8,30		1,10	2,00	3,00
360	1,11	2,50	3,60		3,60	6,30	10,00		1,30	2,50	3,50
400	1,30	2,80	4,80		4,00	7,20	11,30		1,80	3,50	4,80
440	1,40	3,30	5,00		4,50	8,50	13,80		2,00	3,80	5,00

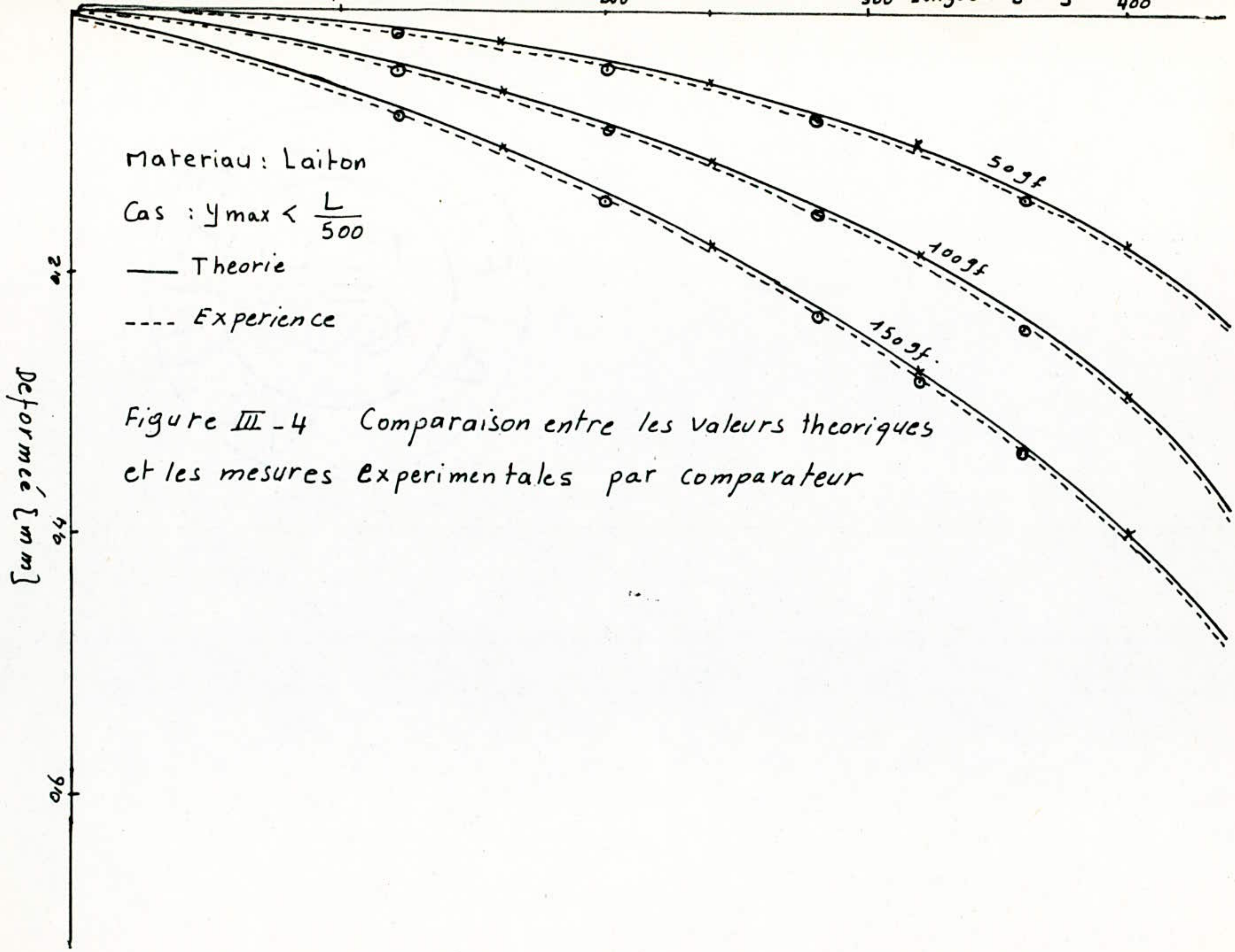


Figure III - 4 Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales par comparateur

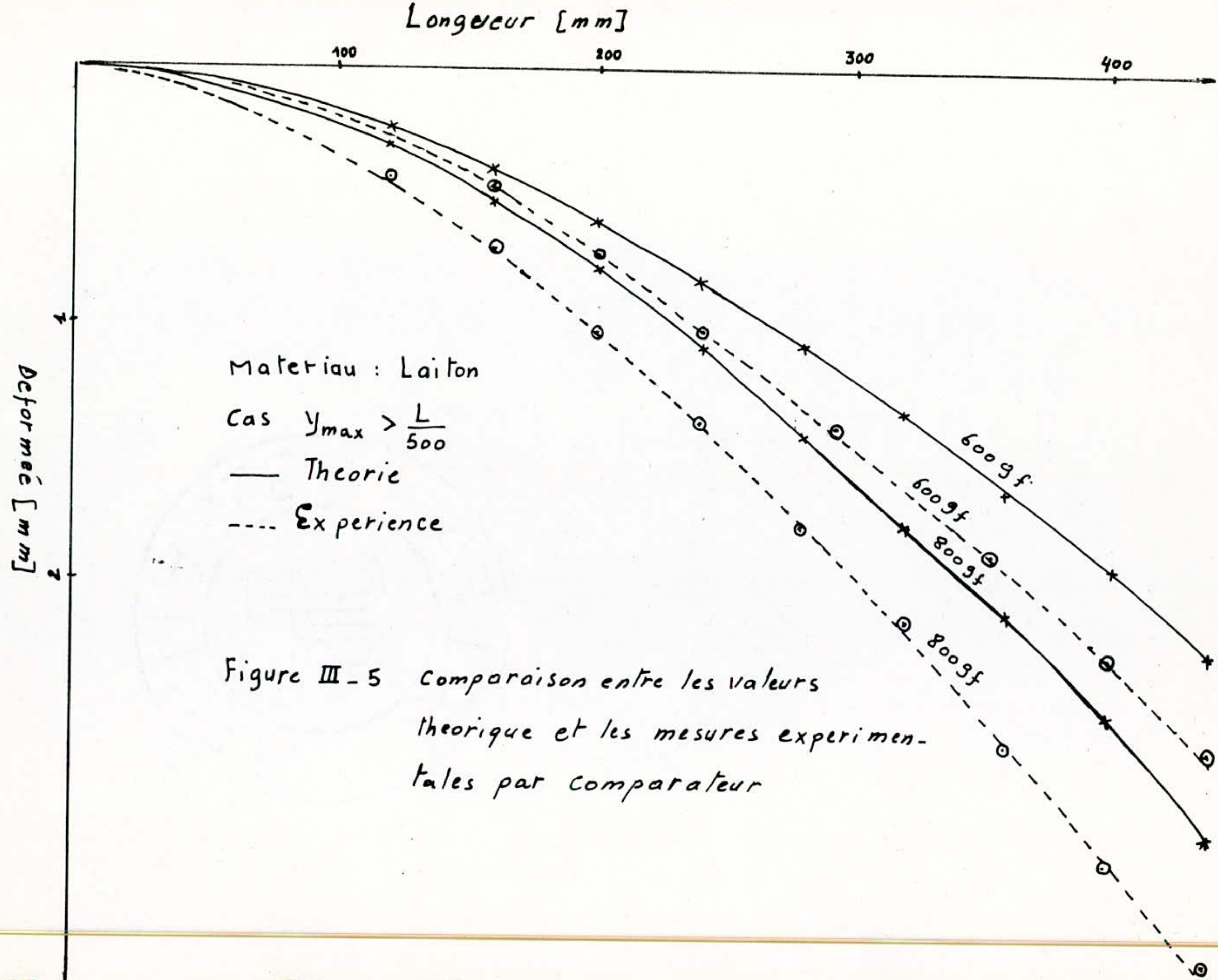


Figure III_5 Comparaison entre les valeurs theorique et les mesures experimentales par comparateur

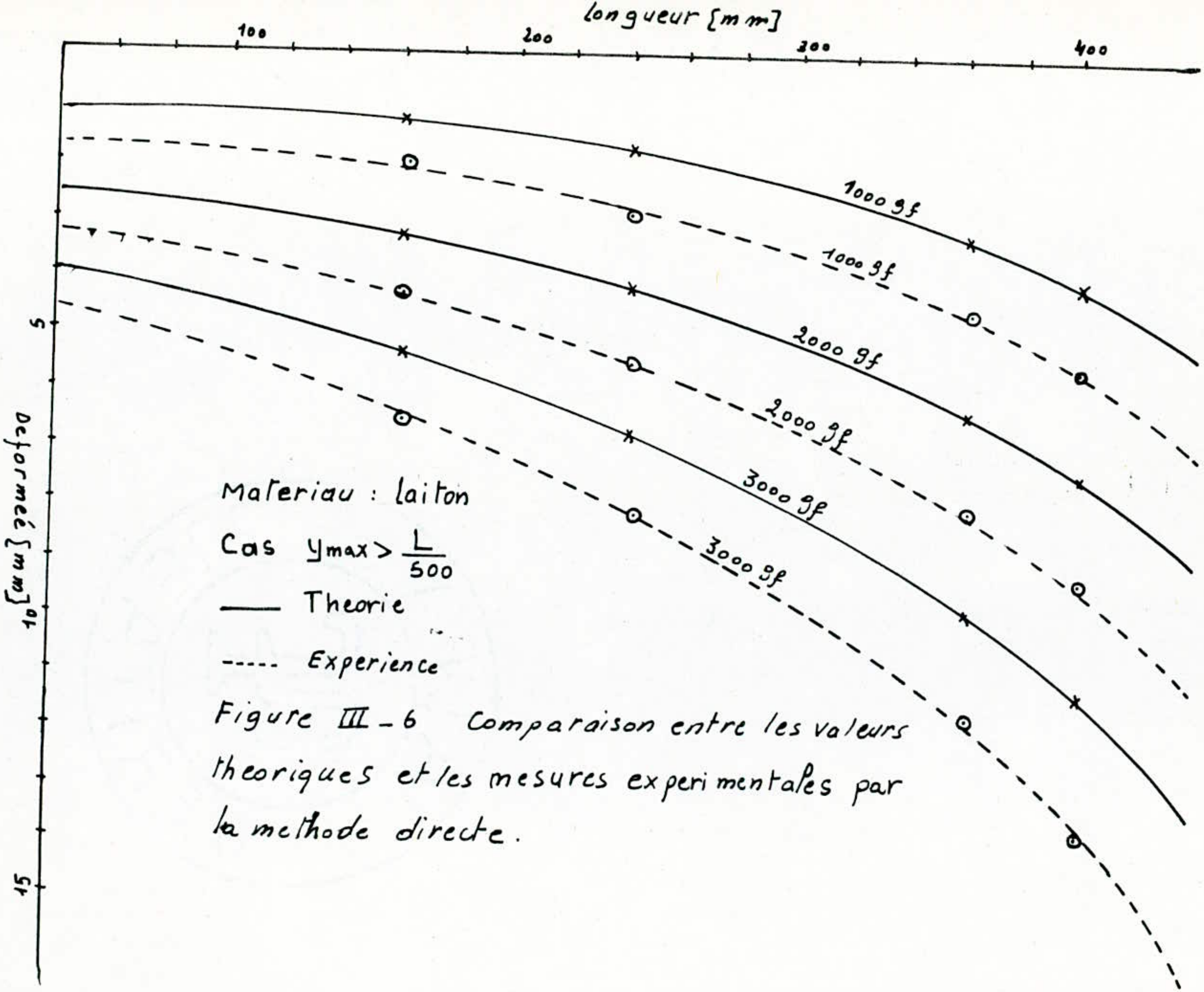


Figure III – 6 Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales par la methode directe.

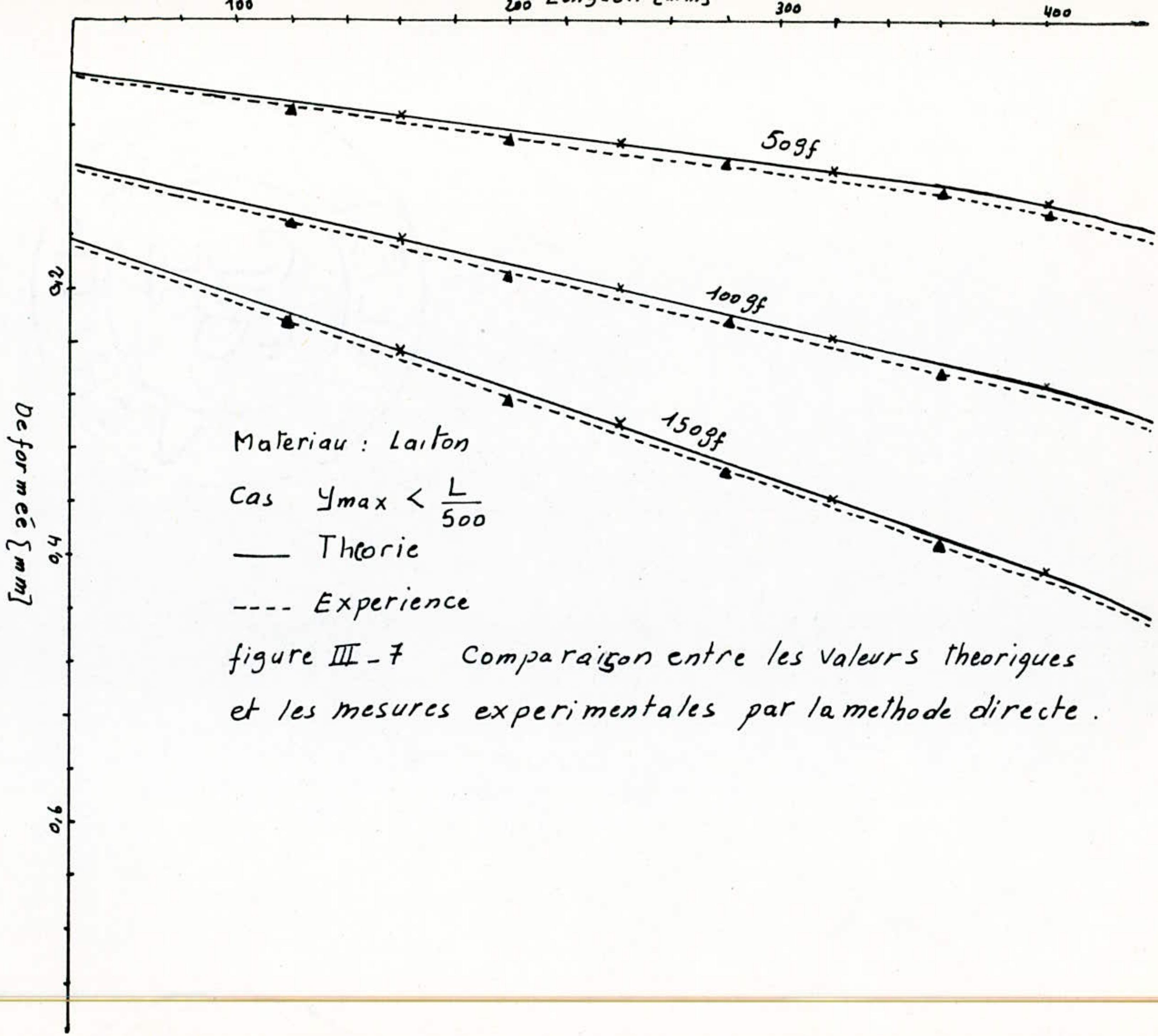


figure III-7 Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales par la methode directe.

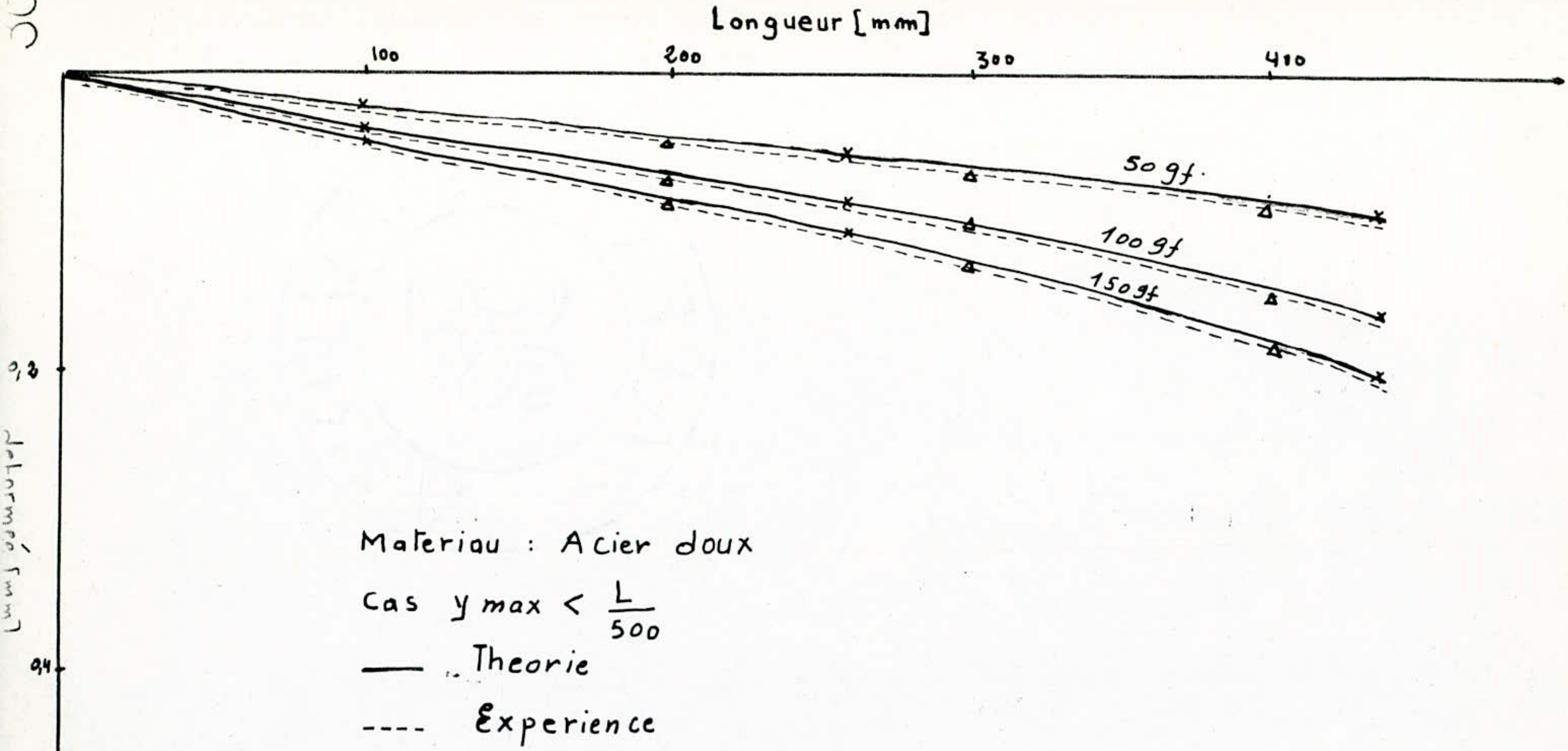


Figure III-8 Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales pour diffrentes chages par la methode directe.

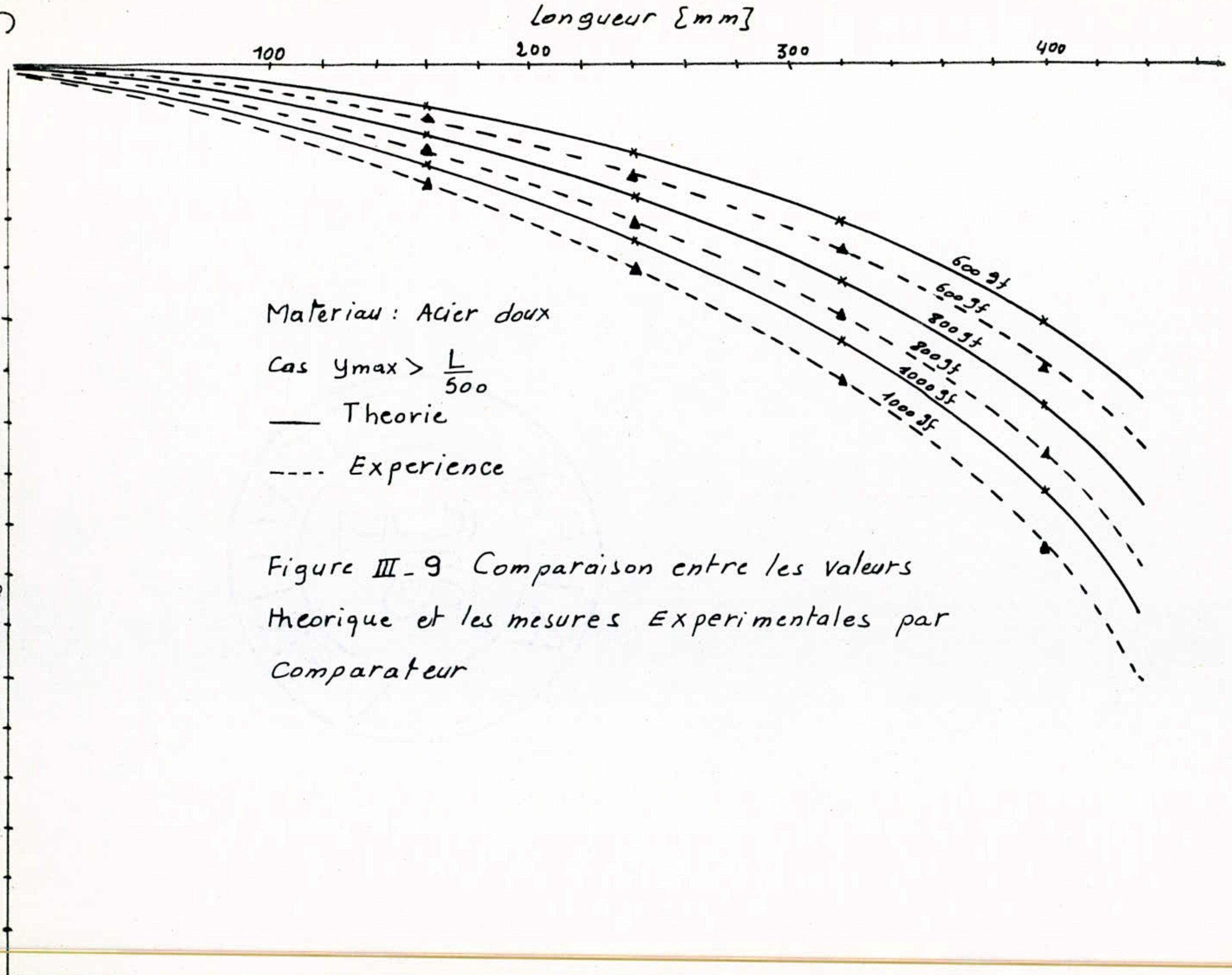


Figure III-9 Comparaison entre les valeurs theorique et les mesures Experimentales par Comparateur

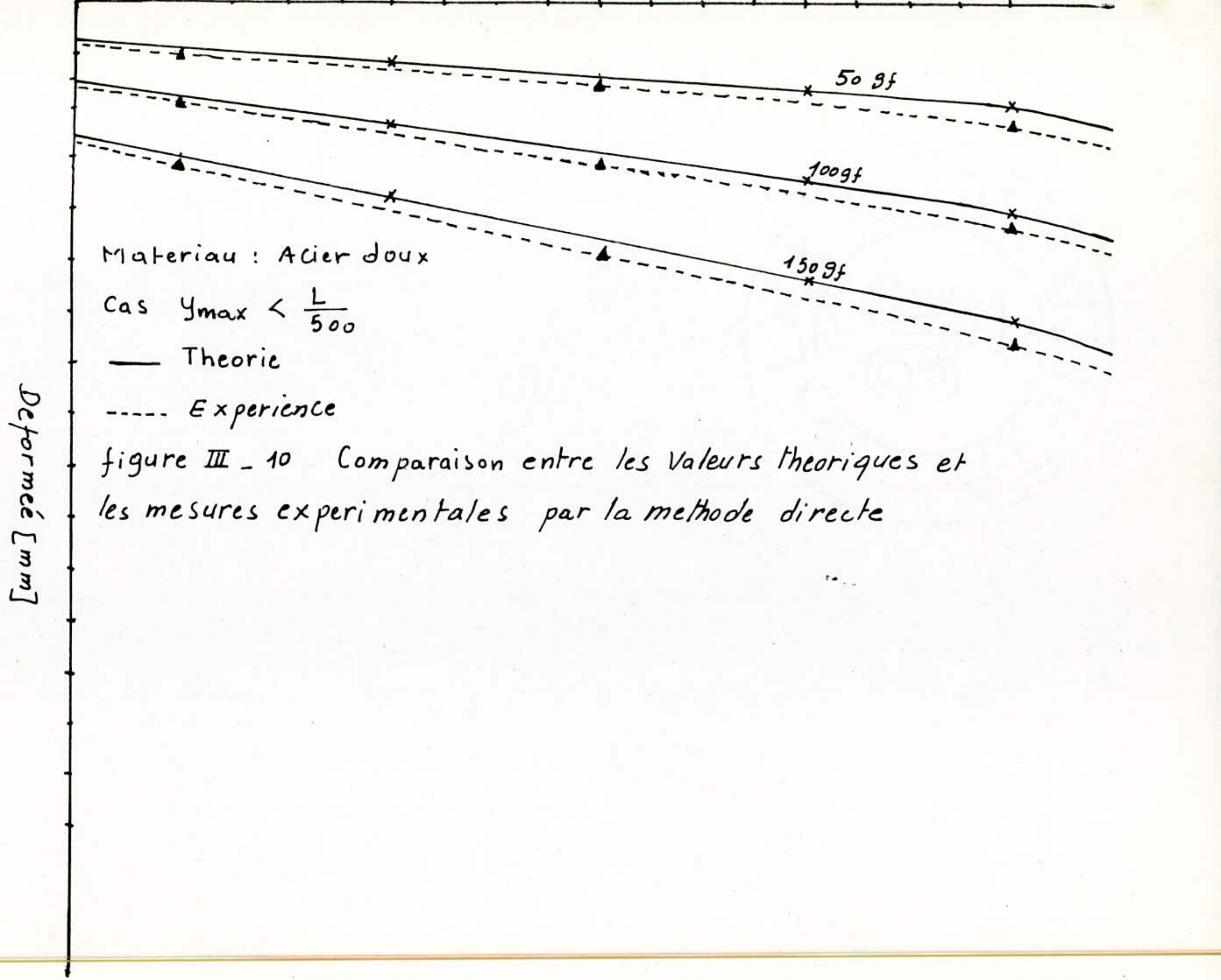


figure III _ 10 Comparaison entre les Valeurs theoriques et les mesures experimentales par la methode directe

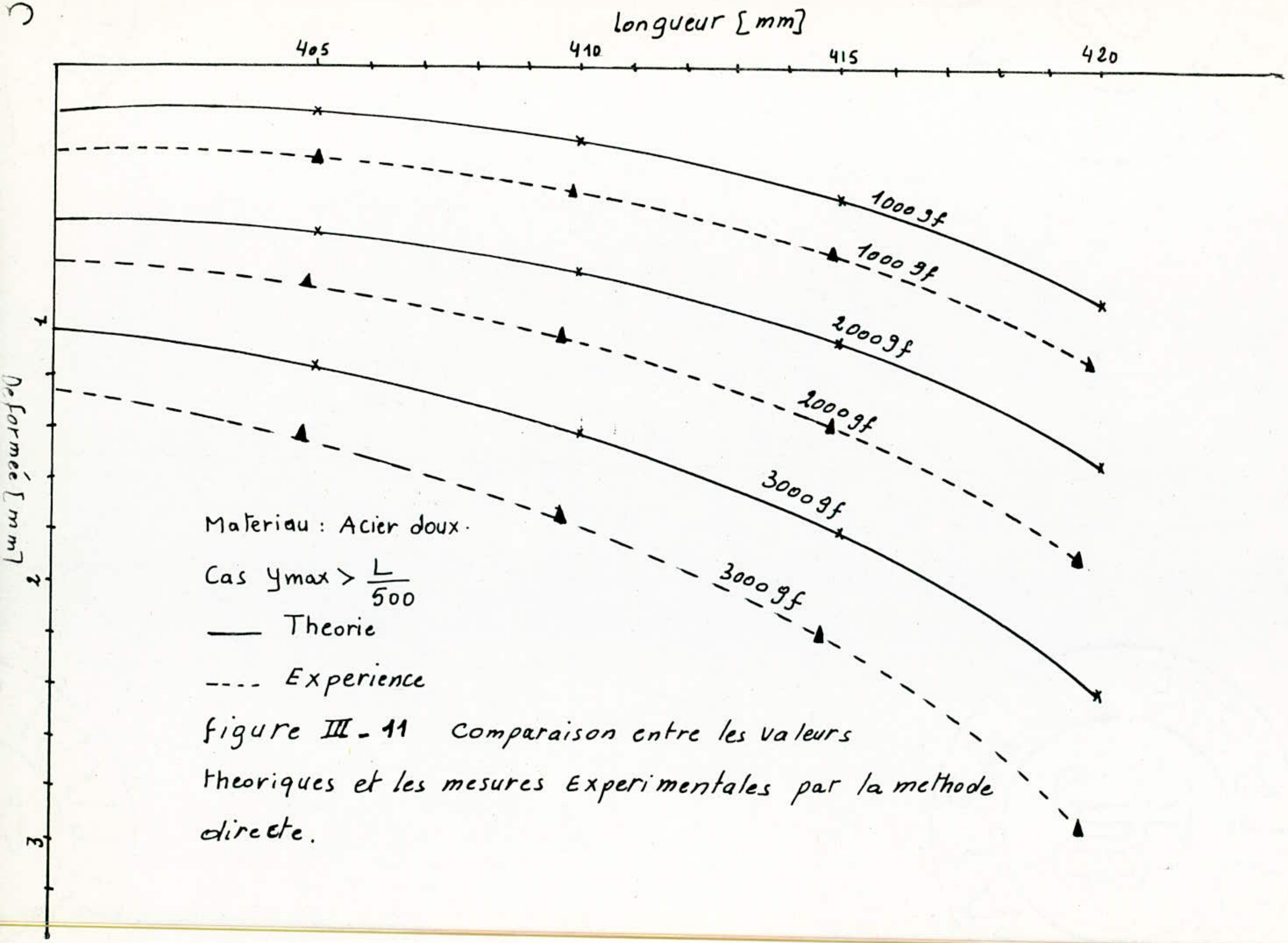


figure III - 11 Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures Experimentales par la methode directe.

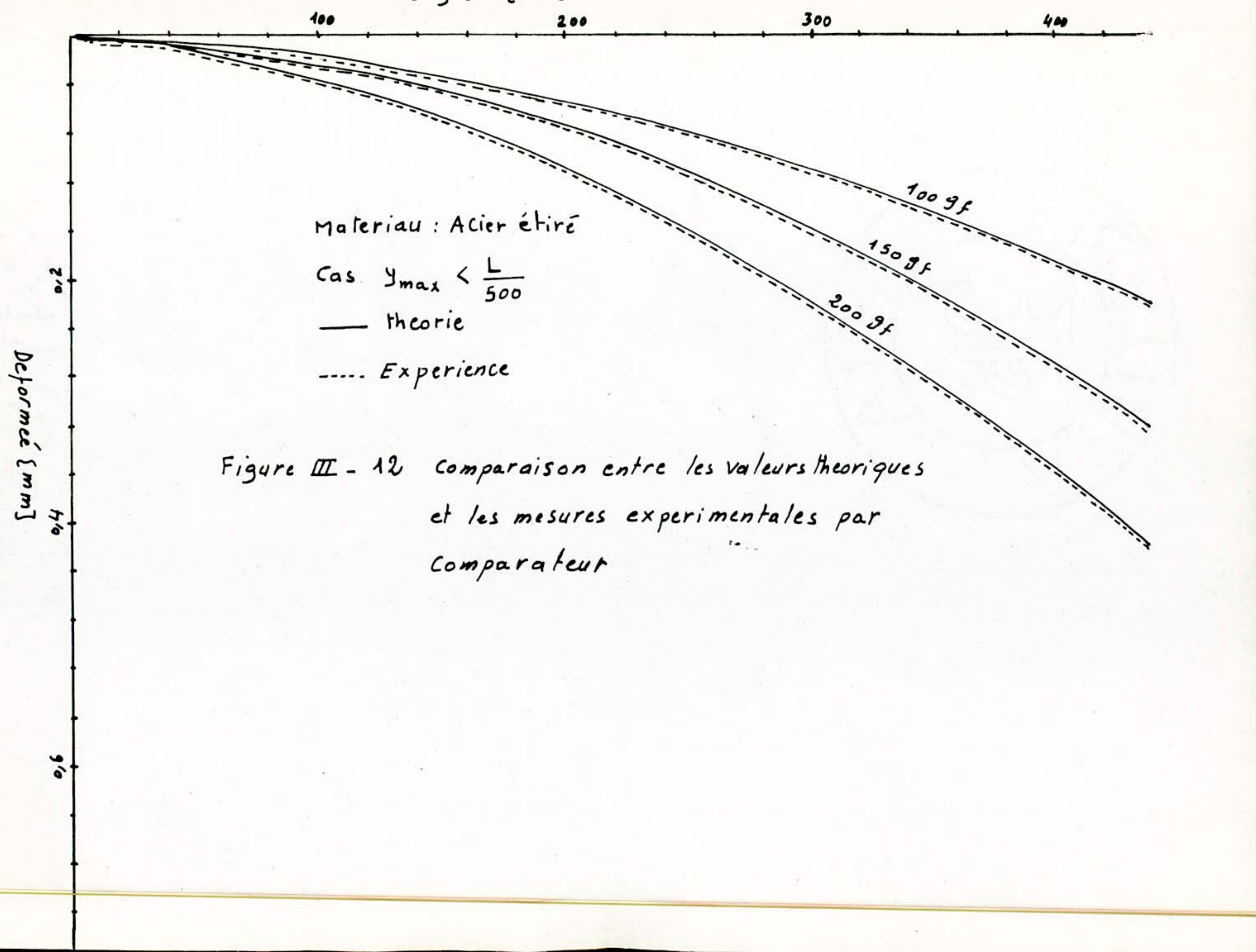


Figure III - 12 Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales par comparateur

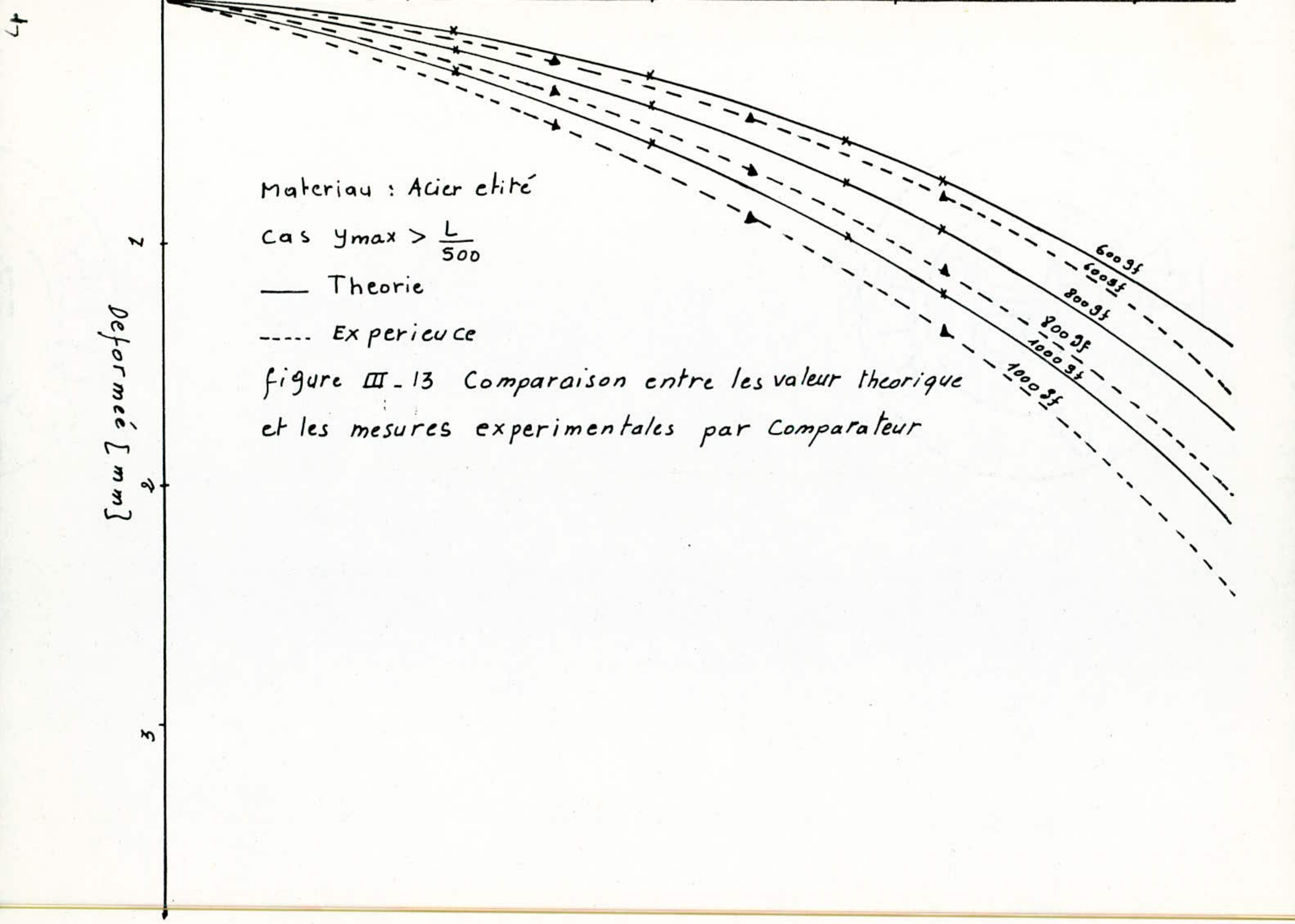


figure III-13 Comparaison entre les valeur theorique et les mesures experimentales par Comparateur

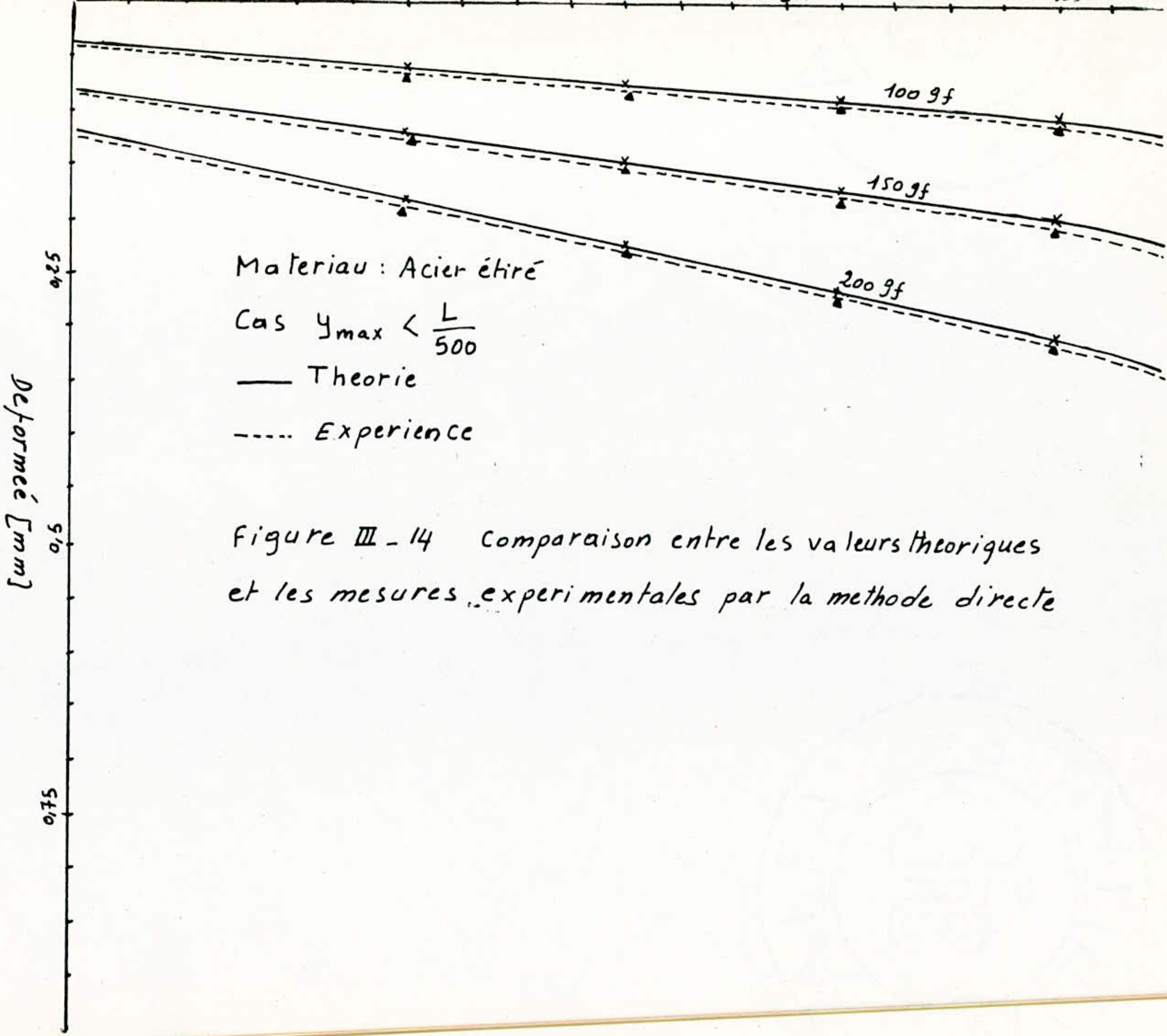


figure III - 14 Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales par la methode directe

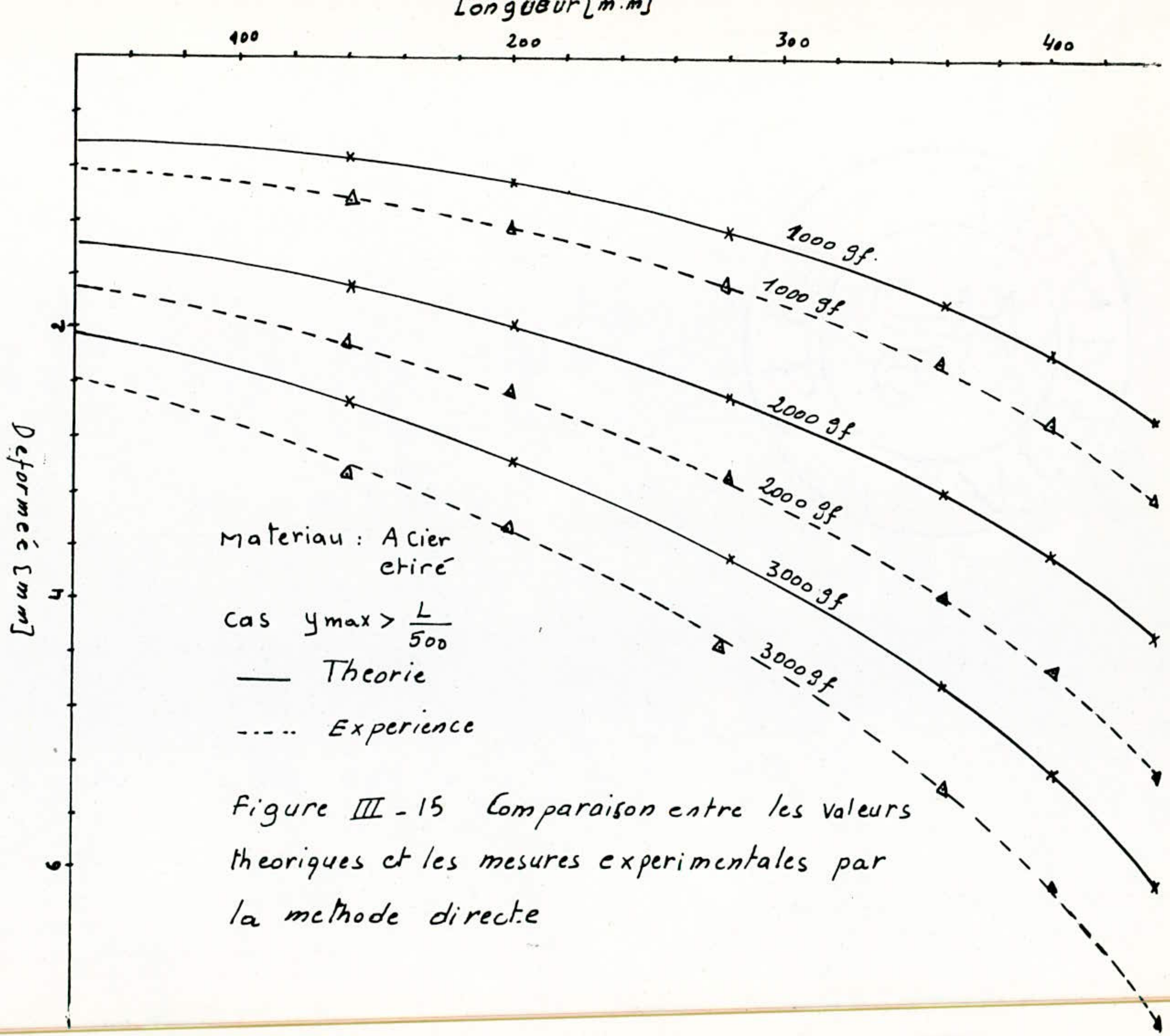


Figure III - 15 Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales par la methode directe

III - 4 Commentaire des resultats

1- Allure des courbes

On remarque, à partir des experiences faites que l'allure des courbes prend la forme envisageé quelque soit la charge appliqueé à l'extrémité libre de la poutre.
ce sont des courbes en X^3 dont l'equation est de la forme

$$y = A\left(x^3 - 3xl^2 + 2l^3\right) \quad \dots (1)$$

A etant une constante directement proportionnelle à la chage appliqueé et inversement proportionnelle au module d'elasticité et au moment d'inertie. $A \sim \frac{P}{EI}$
Le moment d'inertie $\left(I = \frac{bh^3}{12}\right)$ est une constante pour une section consideréé, Par conséquent A varie seulement avec la charge P et le module d'elasticité E.
La theorie donne pour A l'expression. $A = \frac{P}{6EI_z} \cdot\cdot (2)$
En fixant le module d'elasticité E, et en faisant varier la charge P., il a été observé que la pente augmente avec la charge Ceci verifie les previsions theoriques.
En effet la pente de la Courbe est theoriquement donneé par la relation

$$tg\,\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2EI_z}\left(x^2 - l^2\right) \quad \dots\dots (3)$$

l'equation (3) montre que $tg\,\theta$ est visiblement proportionel à P

2- Effet du module d'elasticité sur la flêche

-fixons cette fois ci la charge P et varions le module d'elasticité E. c'est-à-dire on considerera des poutres constituées de differents materiaux

L'experience montre que plus on augmente le module d'elasticite E, plus la flèche diminue. Celte observation et plus accenstueé lorsqu'il s'agit des flêches maximales

Par exemple, la flêche maximale pour le laiton E = 9000 daN/mm
est de l'ordre de 0,38 mm pour une charge de 100 gf tandisque pour l'acier E = 21000 daN/mm² la flèche et de l'ordre de 0,22 mm et ceci pour la même charge de 100gf. Celte evidence est aussi enconcordence avec la theorie (equation N° 2)

3- Etude comparative des resultats experimentaux et theorique

A- mesures par comparateur

Rappelons que pour les petites deformations, la condition de rigidite que doivent verifier les poutres est:

$$y_{max} < \frac{L}{500} \quad \text{ou } L \text{ est la portée de la poutre}$$

pour verifier l'importance de celte Condition on procède comme suit :

1° cas : $y_{max} < \frac{L}{500}$

Dans ce cas, les valeurs donneés par l'experience et celles donneés par la theorie sont proches les unes des autres ce rapprochement et dominant en milieu des barres et pres de l'extremité libre.
par exemple pour une charge P = 100 gf on obtient le tableau de valeur suivant :

Materiau	laiton			acier doux			acier etiré		
L [mm]	40	240	440	40	240	440	40	240	440
y ex [mm]	0,38	0,13	0,013	0,22	0,085	0,01	0,22	0,086	0,01
y th [mm]	0,378	0,138	0,007	0,212	0,077	0,0025	0,219	0,080	0,0026
$\frac{\Delta y}{y}$ %	0,53	6,15	42	3,64	9,41	75	0,45	6,97	74

Tableau III-1 Comparaison entre yth et yex.

Nous voyons que l'erreur augmente de 0,53 à 42 % pour le laiton, de 3,64 à 75 % pour l'acier doux et de 0,45 à 74 % pour l'acier etiré
Dans les trois cas l'erreur relative est trés grande au niveau de l'encastrement.
Ce ci n'est ni logique ni raisonable parce que

au niveau de l'encastrement la mesure est exacte donc l'erreur relative est indetermineé mathématiquement on la prend physiquement egale à zero
cette contradiction entre l'experience et la theorie peut etre interpretée par les point suivants

1- la perpondicularité n'est pas parfaite entre la poutre et la console et entre la console et la surface de reference (marbre)

2- le materiel utilisé pour les mesures n'est pas précis

3- les erreurs de lecture dûes a l'experimentateur

2° cas : $y_{max} > \frac{L}{500}$

les courbes theoriques et experimentales sont éloignées les unes des autres et ceci devient plus remarquable lorsque le module d'elasticité diminue

par exemple pour le cas du laiton

P [gf]	600	800	1000
y_{ex} [mm]	2,27	3,028	3,78
y_{th} [mm]	2,80	3,65	4,32
$\frac{\Delta y}{y}$ %	18,92	17,18	12,5

Tableau III-2

il est tres remarquable que le pourcentage d'erreur superieur à 10%

B. Mesure par la methode directe

1° cas $y_{max} < \frac{L}{500}$

les valeurs données par l'experience et celles données par la theorie sont proches les unes des autres ce rapprochement est dominant tout on rapprochant de léncastrement

mais l'erreur dans ce cas et plus grande que celle de l'experience faite par le Comparateur

le tableau III - 3 ci dessous donne un exemple de Comparaison

Methode	Mesure par comparateur		methode directe	
Mat.	laiton	acier doux	laiton	acier doux
y th [mm]	0,380	0,220	0,38	0,220
y ex [mm]	0,378	0,212	0,45	0,250
$\frac{\Delta y}{y}$ %	0,53	3,64	5	12

Tableau III - 3

Comparaison entre mesure par Comparateur et methode directe.

2° cas $y_{max} > \frac{L}{500}$

les courbes theoriques basées sur la methode elementaire et courbes experimentales sont éloignées l'une des autres beaucoup plus que dans le cas de la methode du comparateur cette methode à l'avantage :

- de donner une bonne verification pour la condition de rigidité .c'est-a-dire elle est valable seulement pour les petits deplacements
- de donner les deplacements axiaux de la poutre comme le montre sur la figure ci dessous.

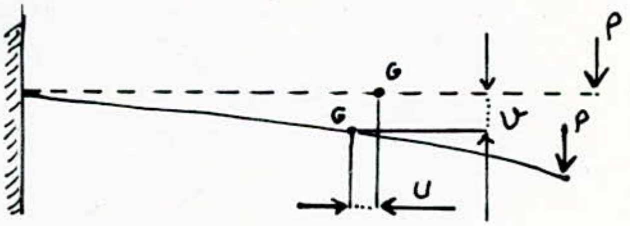


fig III - 16

IV. ETUDE THEORIQUE DES GRANDES DEFORMATIONS

les methode generale pour l'etude des grandes deformations d'une poutre soumise à la flexion ne se fait pas partir des hypotheses des petites deformations .

En effet pour les grandes deformations, l'equation

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M_z}{E I_z}$$

fait apparaitre un terme non linéaire $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Alors que l'expression du moment de flexion doit etre etablie en tenant compte de tous les deplacements de la poutre

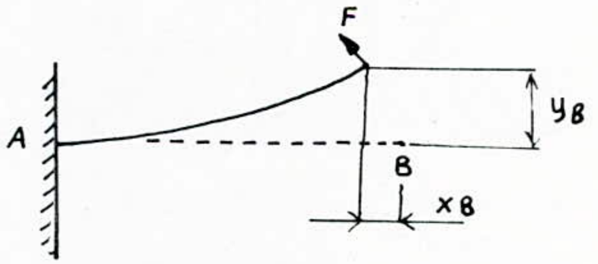


Figure IV - 1 Poutre soumise a des grandes deformations

On voit que la poutre dans la figure IV - 1 admet un deplacement horizontale d'une quantité x_B quand la flèche y_B augmente.

Il en resulte que le moment de flexion le long de AB varie en fonction de XB.

les problèmes de ce genre se rencontrent dans l'etude des ressorts speciaux

IV - 2 L'equation differentielle de la ligne elastique

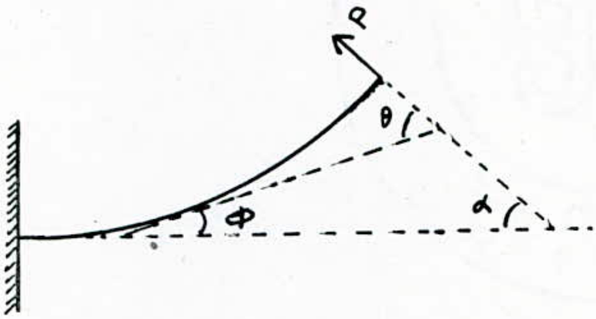


figure IV 2 poutre encastré soumise à des grandes deformations

hypolheses :

1- la poutre est horiginalement droite

2- les forces et les couples sont appliqueés à l'extremité libre

observons que $\theta = \phi + \alpha$ figure IV - 2

donc $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\phi}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}$; $\frac{d\alpha}{dx} = 0$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\phi}{dx} \quad \ldots\ldots (1)$$

avec α : c'est l'angle entre la ligne d'action de la force et l'horizontale

Donc pour une force donneé α = constante

θ : c'est l'angle entre la ligne d'action de la Force et la tangente à la ligne neutre.

Donc θ est une variable

ϕ : c'est l'angle entre la tangente à la ligne neutre et l'horizontale ; ϕ est aussi une variable.

VI - 2 - 1 Equation diffirentielle en θ

- Equations d'equilibre

$$T = -P \sin\theta \quad \ldots. (2)$$

$$N = -P \cos\theta \quad \ldots.. (3)$$

$$M = -\int \sigma_x \, y \, dy \; \ldots. (4)$$

avec y est la distance entre l'axe neutre et un point de la poutre.

les contraintes sont lieés aux deformations par la loi de Hook

$$\sigma_x = E \, \varepsilon_{xx} \quad \ldots.. (5)$$

les deformations sont lieés aux deplacements (ε) par la Formule.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = y \, \frac{d\theta}{dx} \; \ldots (6)$$

substitions (6) dans (5) on aura

$$\sigma_x = E y \, \frac{d\theta}{dx} \quad \ldots.. (7)$$

Substituons (7) dans (4)

$$M = -\int E y^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right) dy = -E \frac{d\theta}{dx} \int y^2 dy$$

$$\int y^2 dy = I_z \Rightarrow -E I_z \frac{d\theta}{dx} \quad \ldots\ldots (8)$$

Ecrivons la relation entre le moment et l'effort ~~tan~~ tranchant

$$T = -\frac{dM}{dx} \quad \ldots\ldots (9)$$

Mettons (2) et (8) dans (9)

$$-P \sin\theta = \frac{d}{dx}\left(EI \frac{d\theta}{dx}\right) = EI \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{P}{EI} \sin\theta = 0 \quad \ldots (10)$$

IV-2-2 Equation differentielle en ϕ

Equations d'equilibre

$$T = -P \cos\phi \quad \ldots. (11)$$

$$T = -\frac{dM}{dx}$$

$$M = -EI \frac{d\phi}{dx} \quad \ldots. (12)$$

$$-P \cos\phi = EI \frac{d^2\phi}{dx^2}$$

ou $$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{P}{EI} \cos\phi = 0 \quad \ldots. (13)$$

L'equation (13) est une equation non lineaire decrivant les grandes deformations d'une poutre soumise à une force placeé à l'extremité libre avec les conditions initiales

$$x = 0 \qquad \phi = 0$$

$$x = L \qquad \frac{d\phi}{dx} = 0$$

L'equation differentielle 13 avec ses conditions initiales peut être numeriquement integreé par la methode de PICARD

pour des valeurs de x proches de $x = x_0$ la valeur corespendante de $y = g(x)$ est proche de $y_0 = g(x_0)$ donc une première aproximation y_1 de $y = g(x)$ est obtenue en remplaçant y par y_0

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, x_0)\, dx$$

Une seconde approximation y_2 est alors obtenue en remplaçant y par y_1 dans le deuxième

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, x_0)\, dx$$

En repetant le procédé on obtient une section de valeurs $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$
chacune donnant une meilleur approximation de valeur chercheé.

Appliquons la methode de PICARD on pose $\bar{x} = \frac{x}{L}$

avec L est la porteé de la poutre

donc $x = \bar{x} L \qquad dx = L\, d\bar{x}$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d\phi}{d\bar{x}} \; ; \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2\phi}{d\bar{x}^2} \quad \ldots\ldots (14)$$

l'equation (13) devient .

$$\frac{1}{L^2} \frac{d^2\phi}{d\bar{x}^2} + \frac{P}{EI} \cos\phi = 0$$

ou $$\frac{d^2\phi}{d\bar{x}^2} + \bar{\alpha} \cos\phi = 0 \quad \ldots\ldots (15)$$

avec $\bar{\alpha} = \frac{PL^2}{EI}$.

les conditions initiales devient :

a) - $\bar{x} = 0 \qquad \phi = 0$

b) - $\bar{x} = 1 \qquad \frac{d\phi}{dx} = 0$

$$\frac{d^2\phi}{d\bar{x}^2} = -\bar{\alpha} \cos\phi$$

Posons $\phi_0 = 0 \Rightarrow \frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2} = -\bar{\alpha}\left[\cos\phi_0\right] = -\bar{\alpha}$

Integrons une fois

$$\frac{d\phi_1}{d\bar{x}} = -\bar{\alpha}\left[\bar{x} + A\right]$$

utilisons la conditions initiale (b) $\bar{x} = 1 \quad \frac{d\phi}{d\bar{x}} = 0$

$$0 = -\bar{\alpha}\left[\bar{x} + A\right] \Rightarrow A = -1$$

donc $\dfrac{d\phi_1}{d\bar{x}} = -\bar{\alpha}\left[\bar{x} - 1\right]$

Integrons une deuxième fois

$$\phi_1 = -\bar{\alpha}\left[\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x} + B\right]$$

a $\bar{x} = 0 ; \phi_1 = 0 \Rightarrow 0 = -\bar{\alpha}\left[B_1\right] \Rightarrow B = 0$

finalement;

$$\phi_1 = -\bar{\alpha}\left[\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x}\right] \quad \ldots\ldots (16)$$

Revenons à l'equation differentielle (2ª itteration)

$$\frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2} = -\bar{\alpha}\cos\phi_1 = -\bar{\alpha}\cos\left[-\bar{\alpha}\left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x}\right)\right]$$

$$\frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2} = +\bar{\alpha}\cos\left[+\bar{\alpha}\left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x}\right)\right]$$

developpons $\cos\left[\bar{\alpha}\left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x}\right)\right]$ en serie de Taylor

$$\cos X = \cos X_0 + (X - X_0)\left(-\frac{\sin X_0}{1!}\right) + (X - X_0)^2\left(-\frac{\cos X_0}{2!}\right)$$

donc pour $X_0 = 0$ et $\bar{\alpha}\left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x}\right) = X$

on obtient.

$$\cos\left[\bar{\alpha}\left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x}\right)\right]_{\bar{x}=0} = 1 - \left[\bar{\alpha}\left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x}\right)\right]^2 \frac{1}{2}$$

$$\cos\left[\bar{\alpha}\left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x}\right)\right]_{\bar{x}=0} = 1 - \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2\left(\frac{\bar{x}^4}{4} - \bar{x}^3 + \bar{x}^2\right)$$

$$\frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2} = -\bar{\alpha}\left\{1 - \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2\left[\frac{\bar{x}^4}{4} - \bar{x}^3 + \bar{x}^2\right]\right\}$$

Integrons une fois

$$\frac{d\phi_2}{d\bar{x}} = -\bar{\alpha}\left\{\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2\left[\frac{\bar{x}^5}{20} - \frac{\bar{x}^4}{4} + \frac{\bar{x}^3}{3}\right] + A_2\right\}$$

Appliquons la Condition initiale $\bar{x} = 1$ $\frac{d\phi_2}{d\bar{x}} = 0$

on obtient $A_2 = -1 + \frac{\bar{\alpha}^2}{15}$.

Integrons une deuxième fois

$$\phi_2 = \frac{\bar{\alpha}^3}{240}\bar{x}^6 - \bar{\alpha}^3\frac{\bar{x}^5}{40} + \bar{\alpha}^3\frac{\bar{x}^4}{24} - \frac{\bar{\alpha}}{2}\bar{x}^2 + \left(\alpha - \frac{\bar{\alpha}^3}{15}\right)\bar{x} + B$$

Appliquons la condition initiale $\bar{x} = 0$ $\phi_2 = 0$

on obtient $B = 0$

finalement :

$$\phi_2 = \frac{\bar{\alpha}^3}{240}\bar{x}^6 - \frac{\bar{\alpha}^3}{40}\bar{x}^5 + \frac{\bar{\alpha}^3}{24}\bar{x}^4 - \frac{\bar{\alpha}}{2}\bar{x}^2 + \left(\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}^3}{15}\right)\bar{x} \quad \ldots (1$$

IV-2 Determination des deplacements verticaux (v) et horizontaux

Divisons la poutre en plusieurs intervalles (disons N) voir figure IV-3

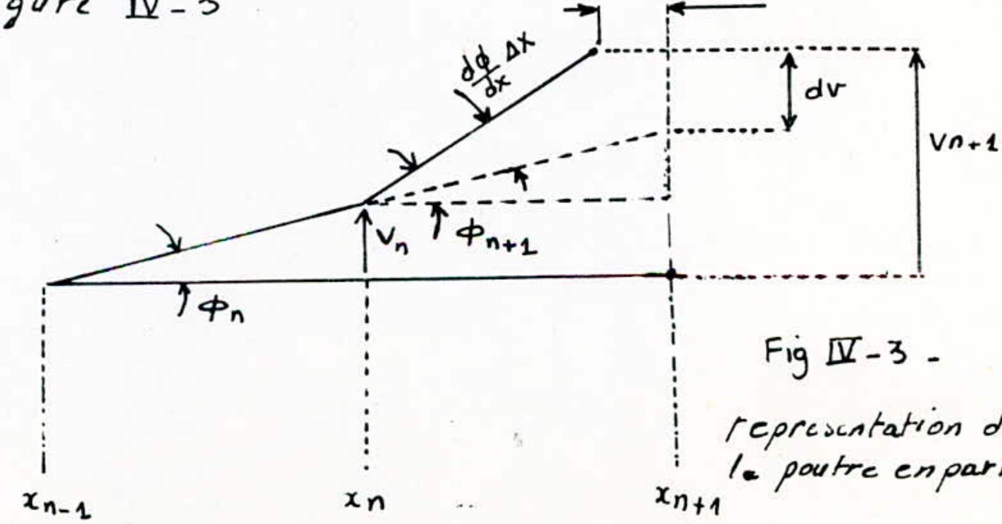


Fig IV-3 - representation de la poutre en parties

Donc on a ;

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{d\phi}{dX}\Delta X \quad \ldots\ldots (18)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{dv}{dX}\Delta X \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{du}{dx}\Delta X \quad \ldots\ldots (20)$$

D'autre part

$$\frac{dv}{dx} = \sin\left[\phi_n + \frac{d\phi}{dx}\Delta x\right] = \sin\phi_{n+1}$$

Donc

$$v_{n+1} = v_n + \Delta x \sin\phi_{n+1} \quad \ldots\ldots (21)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \cos\left(\phi_n + \frac{d\phi}{dx}\Delta x\right) = \cos\phi_{n+1} \quad \ldots (22)$$

$$d\bar{u} = dx + du \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{dx + du}{dx} = 1 + \frac{du}{dx} \quad \ldots (23)$$

De (23) et (22) on aura

$$\frac{du}{dx} = -1 + \cos\phi_{n+1}$$

Donc

$$u_{n+1} = u_n + \Delta X\left(-1 + \cos\phi_{n+1}\right) \quad \ldots\ldots (24)$$

V. ETUDE EXPERIMENTALE DES GRANDES DEFORMATIONS

V-1 Mode operatoire

on a relevé les resultats selon une methode applicable pour le cas des poutres flexibles soumises à des grandes deformations.

sur une plaque de plexiglasse on place une feuille de papier millimetré sur laquelle lit directement les deplacements transversaux et longitidinaux correspendants aux sections prealablement choisies de la poutre en faisons varier les charges on obtient le tableau de mesure N° 10

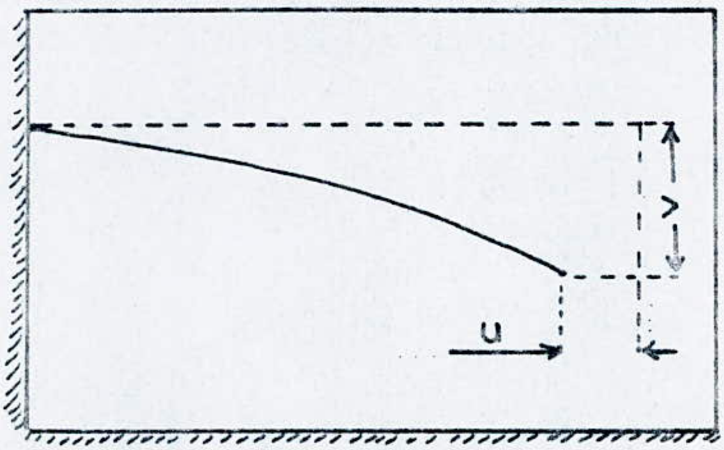


figure V-1 poutre soumise en grande deformations

Tableau N° 9 : Resultats théorique des deforées
Materiau : Acier special

1000 gf		2000 gf		3000 gf.	
U [mm]	V [mm]	U [mm]	V [mm]	U [mm]	V [mm]
5,28	59,3	18,89	111,06	34,92	149,3
4,45	51,58	15,94	96,70	29,50	130,25
3,63	43,9	13,94	82,45	24,21	111,32
2,85	36,42	10,26	68,53	19,14	92,79
2,14	29,25	7,71	55,17	14,45	74,94
1,51	22,50	5,47	42,58	10,30	58,42
0,98	16,36	3,58	31,01	6,78	42,45
0,57	10,89	2,09	20,71	3,98	28,47
0,27	6,26	1,01	11 93	1,94	16,46
0,091	2,58	0,33	4,93	0,60	6,84

Tableau N° 10 Resultats experimentaux des deformées.
Materiau : Acier special.

1000gf		2000gf		3000gf.	
U [mm]	V [mm]	U [mm]	V [mm]	U [mm]	V [mm]
5,44	59,99	19,40	112,50	35,61	150,70
4,59	52,36	16,40	97,90	30,12	131,49
3,74	44,57	13,40	83,50	24,70	112,40
2,92	36,97	10,50	69,50	19,53	93,70
2,20	29,69	7,90	55,90	14,75	75,69
1,56	22,86	5,60	43,15	10,51	58,60
1,00	16,61	3,70	31,40	6,92	42,80
0,59	11,06	2,15	20,99	4,07	28,70
0,28	6,35	1,00	12,09	1,99	16,60
0,094	2,62	0,34	5,00	0,66	6,91.

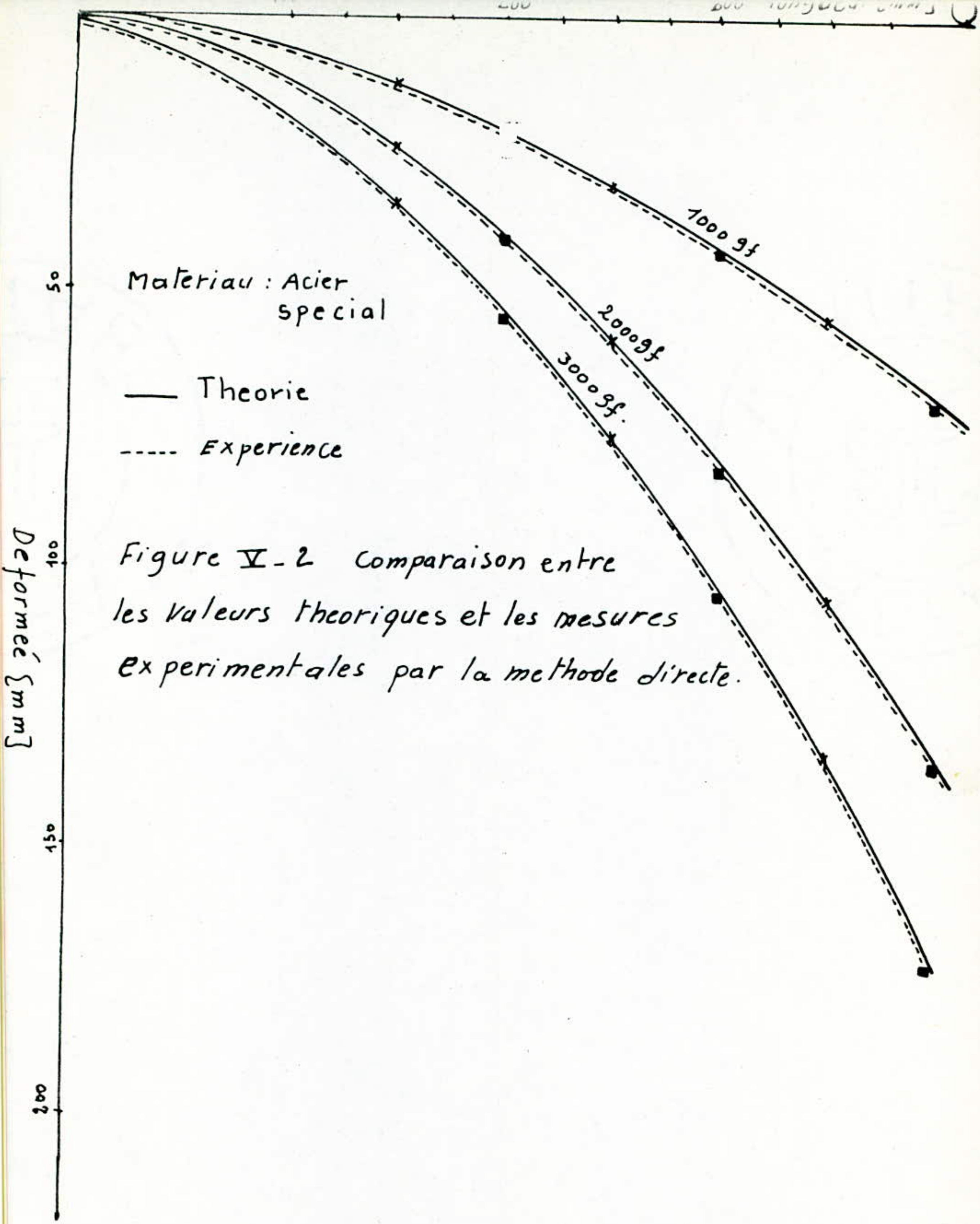


Figure V-2 Comparaison entre les valeurs theoriques et les mesures experimentales par la methode directe.

V-2 Commentaire des resultats.

les valeurs données par l'experience et celle données par la theorie son proches les unes des autres.
Ce rapprochement est remarquable pour n'impote quelle charge.
et ceci devient trés visiblement lorsque on calcul l'erreur pour des deffirentes valeurs.

Tableau V-1 Verification d'erreur.

Charges [gf]	1000			2 000			3000		
x [mm]	400	200	40	400	200	40	400	200	40
u th	5,28	1,51	0,091	18,89	5,47	0,93	34,92	10,30	0,60
u ex	5,44	1,56	0,094	19,40	5,60	0,34	35,60	10,51	0,66
$\frac{\Delta u}{u}$ %	2,9	3,2	3,1	2,6	2,3	2,9	1,9	1,29	9
V th	59,3	22,5	2,58	111,06	42,58	4,93	149,3	58,42	6,84
Vex	59,99	22,86	2,62	111,50	43,15	5,00	150,7	58,60	6,91
$\frac{\Delta V}{V}$ %	1,1.	1,15	1,5	0,39	1,3	2	0,9	0,3	1

il est claire que l'erreur est inferieur a 10% Dans tous

CONCLUSION

Une etude experimentale a été faite pour les petites et grandes deformations des poutres de materiaux differents. La loi linéaire était trés satisfaisante pour la prediction des petites deformations. Il a été constaté que ces lois ne peuvent en aucun cas prevoir les resultats des grandes deformations. Pour cela, l'equation differentielle non lineaire à été numeriquement integreé. les résultats ainsi oblenus prevoient convenablement les mesures experimentales avec une erreur relative inferieur à 10% .

BIBLIOGRAPHIE

1- Résistance des materiaux - Sollicitations simples

J.-P. LARRALDE

2- Resistance des materiaux theorique et experimentale

R. L'HERMITE

3 - Resistance des materiaux

M. KERGuignas

G. Gaignaert

4 - Resistance des materiaux

S.TimoSHENKO

5 - Theorie et applications des équations deffirentielle

FRANK - AYRES.JR

6 - Analyse numerique

FRANCIS SCHEID

```
==========================================================================
 CALCUL DE DEFORMEE D'UNE POUTRE EN PETITE DEFORMATIONS
POUTRE ENCATREE CHARGEE A L'EXTREMITE
=======================================================================
PRINT*,'DONNER LA VALEUR DU CHARGEMENT EN DAN'
ACCEPT*,P
PRINT*,'DONNER LA VALEUR DE L EN MM'
ACCEPT*,L
PRINT*,'DONNER LAVALEUR DE IZ EN MM**4'
ACCEPT*,YIZ
PRINT*,' DONNER LA VALEUR DE E EN DAN/MM**4'
ACCEPT*,E
PRINT*,'DONNER LA VALEUR DE N'
ACCEPT*,N
N:NBRE DE POINTS OU S'EFFECTUE LA MESURE
H:  VARIATION DE X
H=L/N
DO 10 I=0,N
X=0
X=X+I*H
Y=P*((X**3)-(3*X*L*L)+2*L**3)/(6*E*YIZ)
PRINT*,'X=',X,'Y=',Y
CONTINUE
END
```

```
=====================================================================
=====================================================================
CALCUL DE LA DEFORMEE D'UNE POUTRE EN GRANDES DEFORRMATIONS

=====================================================================
=====================================================================
DIMENSION U(20),V(20)
PRINT*,'DONNER LA VALEUR DU CHARGEMENT EN DAN'
ACCEPT*,P
PRINT*,'DONNER LA VALEUR DE E EN DAN/MM**2'
ACCEPT*,E
PRINT*,'DONNER LA VALEUR DE L EN MM'
ACCEPT*,YL
PRINT*,'DONNER LA VALEUR DE IZ EN MM**4'
ACCEPT*,ZI
PRINT*,'DONNER LA VALEUR DE N'
ACCEPT*,N
H=YL/N
I=1
U(I)=0
V(I)=0
DO 10 I=2,N
N=N+1
x=i*H
Z=X/YL
A=P*YL**2/(E*ZI)
==============================================================

         PHI1  PREMIERE ITERATION
===============================================================

PHI=-A*(Z**2/2-Z)
===============================================================

        PHI2   DEUXIEME  ITERATION
===============================================================
PHI=A**3*(Z**6/240-Z**5/40+Z**4/24-Z/15)+A*(-Z**2/2+Z)
PHI=(D*180)/3.14
F=COS(PHI)
U(I)=U(I-1)+H*(-1+COS(PHI))
V(I)=V(I-1)+H*SIN(PHI)
PRINT*,'PHI=',PHI,     'U(I)=',U(I),        'V(I)=',V(I)
10        CONTINUE
END
```