

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

oOo

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

THESE DE MAGISTER

en

Electronique Appliquée

OPTION

Acquisition et Traitement de l'Information

BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

**Annulation d'Echo lointain
dans
les Systemes de Telecommunications**

Etudiée par :

Mr. Z. KADALI

Ingénieur d'Etat en Electronique

Soutenue le 24 juin 1998 devant le jury suivant :

Mr. D. BERKANI

Mr. B. DERRAS

Mr. A. BELOUHRANI

Mme. HAMAMI

Mr. A. HAMZA

Mr. L. SAADAOU

Maître de conférences à l'ENP

Maître de conférences à l'ENP

Docteur à l'E.N.P

Chargé de cours à l' ENP

Chargé de cours à l' USTHB

Chargé de cours à l' ENP

Président

Rapporteur

Co-rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

إن تطوير الخوارزميات الجديدة، وتوفر العناصر الجذ متطورة، مكن من تطبيق المعالجة الرقمية للإشارة في مجال الاتصالات. إن الخوارزميات المتوفرة حالياً تتميز بعدة خصائص منها سرعة التكيف ومعدل الخطأ والحسابات والإنجاز.

إن هذه الدراسة تخص إلغاء الصدى البعيد. فبالنظر لأهمية التأخير الزمني في هذا النوع من الصدى، فإن تقدير زمن التأخير ضروري لإنجاز نموذج لمسلك الصدى البعيد. وبهذا فإن دراستنا تعرض وجهتي نظر لحل هذا المشكل، في الأولى، نقدر التأخير ومعاملات المرشح بإنفصال كل على حدى، نقترح تطبيق مقيّمات منفصلة جديدة لزمن التأخير مأخوذة من تقنيات معالجة الهوائيات. بينما في الثانية، التي تستعمل خوارزمية حديثة النشأة، تقدر زمن التأخير ومعامل مرشح الصدى في آن واحد ونقترح أيضاً في هذه الحالة تطبيق تقنية جديدة للموازنة العددية. وبما أن محيط الصدى عادة غير ثابت (متغير) ومجهول، فإن استعمال الخوارزميات المتكيفة أمر محتّم في هذه العملية التقديرية.

Abstract :

The developpement of new algorithms and more sophisticated hardware is making it possible to apply digital signal processing to the field of digital communication. Several algorithms are available with different characteristics in terms of steady state error, speed of convergence, computational complexity, and circuit complexity.

In this study we are concerned with far echo cancelling. Due to the important delay in this type of echo, time delay estimation is necessary for echo path modelling. We present two approches to solve this problem. The first one estimates the time delay and the echo filter coefficients separately, we propose to apply new discrete estimators of the delay already used in array signal processing. Whereas the second one uses a recently developed algorithm that estimates jointly the time delay and the echo filter coefficients, we propose also to apply in this case a new technique of numerical stabilization. Further, since the echo environnement is generally non stationary and unknown, adaptive algorithms are indispensable in the estimation process.

Résumé :

La mise au point d'algorithmes nouveaux et la disponibilité de composants plus complexes permet d'appliquer le traitement numérique du signal au domaine des télécommunications. Les algorithmes dont on dispose aujourd'hui offrent diverses caractéristiques de vitesse de convergence, taux d'erreur en régime établi, complexité de calcul et de réalisation physique.

Cette étude concerne l'annulation d'écho lointain. Vu l'importance du retard dans ce type d'écho, l'estimation du temps de retard est nécessaire pour la modélisation du chemin de l'écho distant. Nous présentons deux approches pour résoudre ce problème. Dans la première, nous estimons le retard et les coefficients du filtre de l'écho séparément, nous proposons d'appliquer de nouveaux estimateurs discrets du retard emprunté aux techniques du traitement d'antennes. Alors que dans la seconde qui utilise un algorithme récemment développé, estime conjointement le retard et la réponse impulsionnelle du chemin de l'écho, aussi nous proposons d'appliquer une nouvelle technique de stabilisation numérique. De plus, tant que l'environnement de l'écho est généralement non stationnaire et inconnu, les algorithmes adaptatifs sont indispensables dans ce processus d'estimation.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier sincèrement Messieurs **B. DERRAS** et **A. BELOUHRANI** pour leurs précieux conseils, ainsi que le suivi qu'ils ont assuré tout au long de l'élaboration de cette étude et surtout à Monsieur **A. BELOUHRANI** d'avoir accepté d'être mon Co-directeur de recherches.

Mes plus vifs remerciements vont également à Messieurs **A. BOUZIT**, **A. DABA**, **G.C. CARTER**, **A. BENALLAL**, **D. BOUDREAU**, **Y.T. CHAN** et **A. KAIDALI** pour m'avoir procuré la plus grande partie de la documentation sans oublier tout le personnel de la bibliothèque de l'Ecole Nationale Polytechnique.

Un grand merci à Messieurs **L. ABDELOUEL** et **A. NASRI** pour leur aide informatique, à **M. KARA-MOSTEPHA**, **N. KAIDALI**, **H. BENSAID**, **N.KHERCHI**, aux Demoiselles **F. AIT-LOUDHIA**, **S. BENANTAR**, et particulièrement Mademoiselle **A. LAMMARI** et Messieurs **M. BOUTAYARA**, **M. BOUKHALFA**, **R. FOUFA** et ses enfants pour les moyens matériels mis à ma disposition ainsi que leur précieux soutien morale et leur aide efficace. A toute personne que j'ai oublié de citer qui a contribué de près ou de loin à la rédaction de ce rapport.

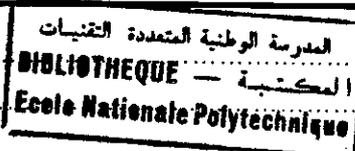
Enfin, j'exprime mon profond remerciement à ma mère, mon père, mes frères et ma sœur pour leur amour, leur patience et leur soutien. A mes parents, je dédie cette thèse et tous les efforts que sa rédaction a nécessités. Une partie de votre esprit s'y trouve uni au mien.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

Sommaire

INTRODUCTION	1
I. LE PROBLEME DE L'ECHO EN TELECOMMUNICATION.....	5
1.1 Origines du phénomène écho dans le réseau téléphonique.....	5
1.1.1 Définition du concept d'écho.....	5
1.1.2 Fréquence d'apparition de l'écho dans les réseaux de télécommunications modernes.....	5
1.1.3 L'écho acoustique et l'écho électrique.....	6
1.2 Conditions de production du phénomène "Echo" dans le réseau téléphonique.....	8
1.3 Conséquence de la présence de l'écho.....	10
1.4 Réponse impulsionnelle du trajet d'écho.....	12
II. SOLUTIONS ENVISAGEABLES DU PROBLEME DE L'ECHO.....	13
2.1 Contrôle de l'écho avec fuite.....	13
2.2 Suppresseur d'écho.....	14
2.3 Annuleur d'écho.....	15
2.4 Principe de l'annuleur d'écho lointain.....	17
2.5 Chemin de l'écho.....	18
2.6 Choix du modèle.....	19
2.7 Modèle pour le chemin de l'écho distant.....	21
2.8 Définition et estimation du retard.....	23
III. APPLICATION DU FILTRAGE ADAPTATIF A L'ANNULATION D'ECHO.....	27
3.1 Principe du filtrage adaptatif.....	27
3.2 Algorithmes du gradient stochastique LMS et NLMS.....	31
3.3 Algorithme des Moindres Carrés Récursifs (RLS).....	35
3.4 Algorithmes des Moindres Carrés Transversaux Rapides.....	39
3.4.1 Introduction.....	39
3.4.2 Obtention des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides.....	40
3.4.3 Trois algorithmes des moindres carrés transversaux rapides.....	48
3.4.4 Initialisation des algorithmes Moindres Carrés Rapides.....	53
3.5 Algorithme des Moindres Carrés Récursifs Conjoint (RLS Joint).....	54
3.5.1 Notations et définitions.....	55
3.5.2 Principe de l'algorithme RLS Conjoint.....	58
IV STABILITE DES ALGORITHMES DES MOINDRES CARRES TRANSVERSAUX RAPIDES.....	65
4.1 Introduction.....	65
4.2 Divergence des Algorithmes Moindres Carrés Transversaux Rapides.....	66
4.3 Méthodes de stabilisation des algorithmes Transversaux Rapides.....	72
4.3.1 Méthode de reinitialisation.....	73
4.3.2 Méthode de régularisation et de rappel à zéro périodique.....	75
4.3.3 Méthode de la constante de stabilisation.....	76
4.3.4 Stabilisation par introduction d'une redondance supplémentaire.....	77
4.3.5 Nouvelle méthode de stabilisation des algorithmes Moindres Carres Rapides.....	78
V. SIMULATION.....	84
5.1 Estimation séparée.....	84
5.1.1 Simulateur du retard.....	84
5.1.2 Estimation du retard avec les différentes fonctions d'intercorrelations.....	87
5.1.3 Annulation d'écho avec l'algorithme du gradient LMS.....	89
5.1.4 Annulation d'écho avec l'algorithme des moindres carrés récursifs rapides FTF 7N.....	91
5.2 Estimation conjointe.....	95
CONCLUSION.....	104
ANNEXES	
BIBLIOGRAPHIE	



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

**LISTE
DES FIGURES
ET
DES TABLES**

Liste des figures et des tables

<u>Fig.1:</u> Configuration actuelle du réseau téléphonique.	1
<u>Fig.2:</u> Diagramme fonctionnel d'un système de transmission bilatéral simultané de données sur deux fils. Echo proche d'origine H_1 et écho distant d'origine H_2 .	2
<u>Fig.3:</u> Réponse impulsionnelle du canal de l'écho distant. - -	4
<u>Fig.4:</u> Annuleur d'écho disjoint	4
<u>Fig.5:</u> Annuleur d'écho conjoint	4
<u>Fig.I-1:</u> Représentation de divers échos susceptibles d'être Rencontrés dans une communication internationale	7
<u>Fig.I-2:</u> Mise en œuvre de la séparation 2 fils / 4 fils.	8
<u>Fig.I-3:</u> Ligne spécialisée	9
<u>Fig.I-4:</u> Système de transmission avec multiplexage fréquentiel	9
<u>Fig.I-5:</u> Système de transmission avec multiplexage temporel	9
<u>Fig.I-6:</u> Origine de l'Echo distant et phénomène d'oscillation	11
<u>Fig.II-1:</u> Principe d'un supprimeur d'Echo classique	14
<u>Fig.II-2:</u> Fonctionnement du supprimeur d'Echo associé à l'hybride H_2	14
<u>Fig.II-3:</u> Principe d'un annuleur d'écho	15
<u>Fig.II-4:</u> Annuleur de l'écho distant	17
<u>Fig.II-5:</u> Le modèle	18
<u>Fig.II-6:</u> chemin de l'écho.	19
<u>Fig.II-7:</u> Annuleur d'écho avec l'estimateur du retard. /	20
<u>Fig.II-8:</u> Structure de l'annuleur d'écho distant	20
<u>Fig.II-9:</u> Modèle d'un annuleur d'écho (distant et local)	21
<u>Fig.II-10:</u> Modèle Mathématique du signal.	22
<u>Fig.II-11:</u> Modèle du système	23
<u>Fig.III-1 :</u> Schéma de principe du filtrage de l'écho	28
<u>Figure III.2:</u> Schéma de principe d'un système adaptatif:	30
<u>Table 3.1 :</u> Algorithme du gradient stochastique LMS	32
<u>Table 3.2 :</u> Algorithme du gradient stochastique normalisé NLMS	35
<u>Table 3.3 :</u> Algorithme RLS à facteur d'oubli exponentiel	38
<u>Table 3.4 :</u> Algorithme de Kalman Rapide	50
<u>Table 3.5 :</u> Algorithme F A E S T	51
<u>Table 3.6 :</u> Algorithme F T F	52
<u>Table 3.7 :</u> Initialisation des Algorithmes M.C.R.	54
<u>Figure III.3 :</u> <i>Système d'identification par l'estimateur adaptatif conjoint.</i>	55
<u>Table 3.8 :</u> Algorithme RLS joint	61

Liste des figures et des tables (suite)

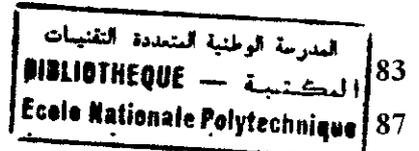


Table 4.1 : Algorithmme F T F Numériquement stable	83
Fig.V-1: Les différentes fonctions d'intercorrélation	87
Fig.V-2: L'influence du bruit sur les différentes fonctions d'intercorrélation.	88
Fig.V-3: Influence du pas d'adaptation Alpha et convergence des filtres	89
Fig.V-4 : Influence du bruit sur la convergence des filtres LMS adaptatifs	90
Fig.V-5: Influence de E_0 la variance initiale de l'erreur de prédiction retour et convergence des filtres	91
Fig.V-6: Influence du bruit sur la convergence des filtres FTF adaptatifs	92
Fig.V-7: La constante de vraisemblance $\gamma_N(n)$	100
Fig.V-8: La variable de divergence $\zeta_{N,t}$	100
Fig.V-9: Les erreurs quadratiques moyennes pour chacun des filtres de délai $l - 1, l$ et $l+1$	100
Fig.V-10: L'erreur quadratique du filtre aller	100
Fig.V-11: L'erreur quadratique du filtre retour	100
Fig.V-12: La constante de vraisemblance $\gamma_N(n)$	101
Fig.V-13: La variable de divergence $\zeta_{N,t}$	101
Fig.V-14: Les erreurs quadratiques moyennes pour chacun des filtres de délai $l - 1, l$ et $l+1$	101
Fig.V-15: L'erreur quadratique du filtre aller	101
Fig.V-16: L'erreur quadratique du filtre retour	101
Fig.V-17: La constante de vraisemblance $\gamma_N(n)$	102
Fig.V-18: La variable de divergence $\zeta_{N,t}$	102
Fig.V-19: Les erreurs quadratiques moyennes pour chacun des filtres de délai $l - 1, l$ et $l+1$	102
Fig.V-20: L'erreur quadratique du filtre aller	102
Fig.V-21: L'erreur quadratique du filtre retour	102
Fig.V-22: La constante de vraisemblance $\gamma_N(n)$	103
Fig.V-23: La variable de divergence $\zeta_{N,t}$	103
Fig.V-24: Les erreurs quadratiques moyennes pour chacun des filtres de délai $l - 1, l$ et $l+1$	103
Fig.V-25: L'erreur quadratique du filtre aller	103
Fig.V-26: L'erreur quadratique du filtre retour	103

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'interférence en téléphonie du signal de l'émission sur le signal désiré reçu est appelé écho. La configuration actuelle du réseau téléphonique est à l'origine d'échos dans les transmissions. Dans certaines conditions (Fig.1) ces échos peuvent être gênants, de telle sorte qu'on doit les réduire pour assurer une bonne qualité de transmission.

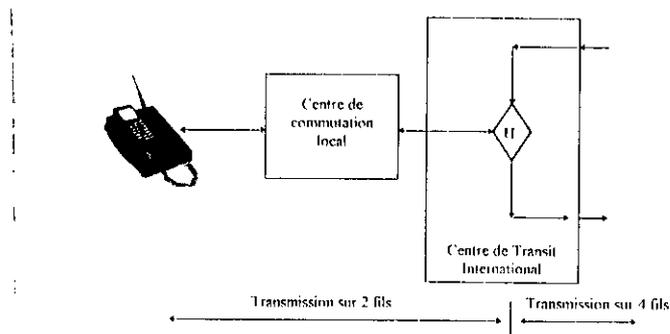


Fig.1: Configuration actuelle du réseau téléphonique.

Les variations d'impédance de lignes dues aux changements de calibre des fils, aux dérivations et aux imperfections d'adaptation du transformateur différentiel distant sont la cause principale de ces échos (Fig.2). Deux types d'échos se manifestent: l'écho local qui provient de la fuite du signal émis à travers les circuits de l'émetteur, et l'écho distant qui représente le signal émis après avoir parcouru une partie ou tout le chemin d'aller et de retour vers le destinataire. L'écho distant est donc une réplique retardée et distordue du signal émis; sa nuisance dépasse celle de l'écho local surtout lorsque le retard est supérieur à quelques dizaines de millisecondes comme est le cas dans le canal de satellite. Pour les appels locaux, ces échos ne sont décalés que de quelques millisecondes par rapport au signal incident et ne sont par conséquent pas perceptibles. Cependant, lorsqu'un retard est introduit dans les lignes unidirectionnelles, soit par une transmission par satellite, soit par un codage numérique, les échos deviennent perceptibles et gênants, et doivent être réduits pour assurer une bonne qualité de transmission.

A cette fin, dans les connections bilatérales à l'alternat (mode semi-duplex), on peut régler le problème de l'écho par commutation du trajet; c'est la technique des supprimeurs d'échos, ces dispositifs certes sont de faible complexité mais leur fonctionnement n'est pas toujours satisfaisant. Dans les connections bilatérales simultanées (mode duplex), on a recours à des organes annuleurs d'écho, qui reposent

sur le principe d'une simulation locale du trajet d'écho. Le signal d'écho estimé est soustrait du signal entrant, qui se voit ainsi restituer l'essentiel de sa pureté originelle. Les annuleurs d'écho fonctionnent parfaitement dans tous les cas, mais dont la complexité de mise en œuvre est beaucoup plus importante vu la puissance de calcul nécessaire à cette mise en œuvre.

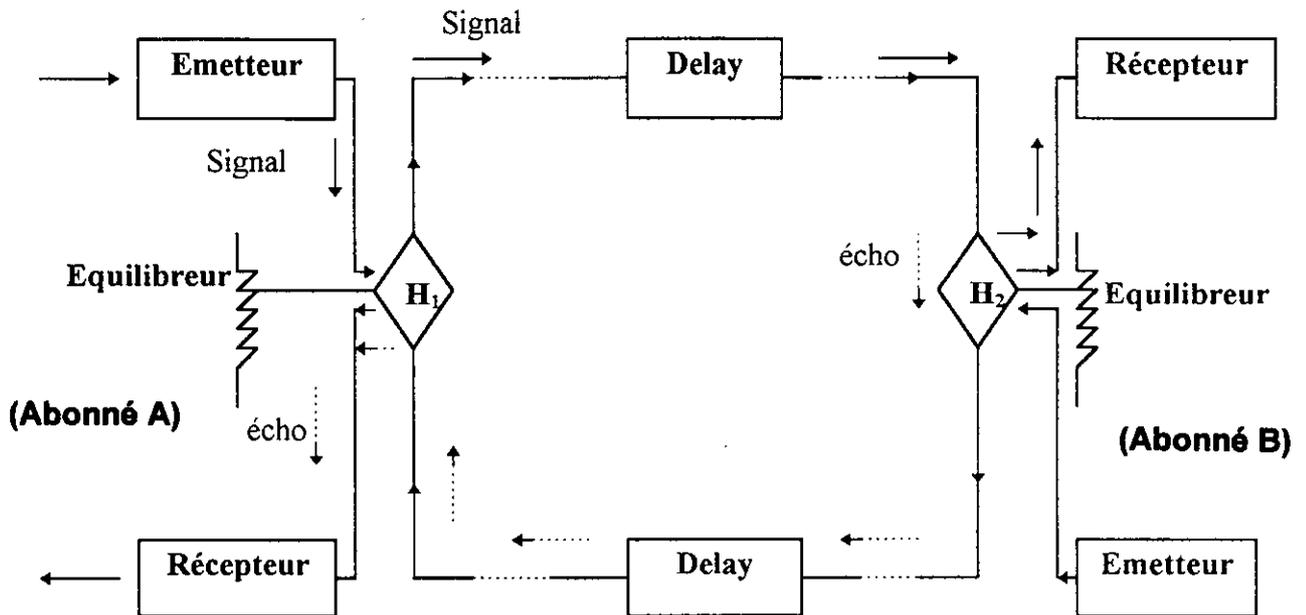


Fig.2: Diagramme fonctionnel d'un système de transmission bilatéral simultané de données sur deux fils. Echo proche d'origine H_1 et écho distant d'origine H_2 .

Nous avons cependant remarqué qu'en pratique on peut approximer le trajet d'écho par un retard pur suivi d'un filtre d'ordre réduit (Fig.3). Cette approximation permet d'une part de réduire considérablement la puissance de calcul requise par un annuleur d'écho et d'autre part d'améliorer la stabilité du filtre, le problème étant cependant ramené à la détermination correcte du retard pur.

Le problème de l'estimation du retard est motivé par l'annulation d'écho distant en téléphonie, bien que le problème de l'écho existait dès les premières implantations des réseaux téléphoniques, il s'est particulièrement aggravé quand on est passé au stade des transmissions par satellite. L'étude des estimations adaptatives du retard, appliquées à l'annulation d'écho, s'est beaucoup développée dès l'apparition des systèmes de transmission de données empruntant les réseaux téléphoniques, car ces systèmes sont beaucoup plus sensibles à la présence de l'écho que ceux de transmission de parole.

En pratique, il n'est pas facile de réaliser ces annuleurs d'écho, car les caractéristiques du trajet d'écho sont mal connues et peuvent changer d'une connexion à l'autre, voir pendant la même communication. Un choix des caractéristiques fixes des

filtres servant à la simulation, centré sur des valeurs moyennes ne s'avère pas vraiment satisfaisant. Il ne reste qu'une solution envisageable, celle où les filtres de simulation ont des coefficients adaptatifs.

Il est à faire observer que l'annulation de l'écho proche a fait l'objet de recherches à l'Ecole Nationale Polytechnique et ont été concrétisées par la thèse de Magister de A. Hamza. La présente étude est consacrée à l'étude et la conception de dispositifs adaptatifs pour estimer le retard et les coefficients de la réponse impulsionnelle du chemin de l'écho distant à identifier et capable aussi de rattraper des retards longs existants dans le réseau téléphonique. Ces dispositifs s'appellent les annuleurs d'écho lointain.

Dans notre travail, nous avons résolu le problème en utilisant une séquence de test qui permet d'évaluer le retard pur et les coefficients de l'annuleur d'écho à l'établissement d'une conversation téléphonique en moins de quelques centaines de millisecondes (<200 ms). Cette estimation a été réalisé en appliquant deux principales méthodes à savoir, l'annulation d'écho disjointe et l'annulation d'écho conjointe :

- L'annulation d'écho disjointe consiste à estimer le retard et les coefficients du filtre séparément. En premier lieu on estime le retard suivant trois différentes techniques temporelles discrètes étudiées et publiées par Giovanni Jacovitti et Gaetano Scarano [2] en 1993, puis on identifie les coefficients de la réponse impulsionnelle du chemin de l'écho en utilisant comme signal de référence le signal de base retardé avec le retard estimé (Fig.4) en appliquant soit le filtrage adaptatif basé sur la méthode du Gradient (LMS : Least Mean Square de Widrow [3 et 4], soit le filtrage adaptatif basé sur les Moindres Carrés Rapides (MCR) en particulier le FTF 7N (Fast Transversal Filter) de J.M Cioffi et T. Kailath [5].

- L'annulation d'écho conjointe revient à mettre en cascade deux filtres adaptatifs qui estimeront conjointement le retard et le canal du chemin de l'écho distant. L'algorithme est basé essentiellement sur les moindres carrés récurrents (RLS, Récurrent Least Squares) dont le FAEST (Fast a Posteriori Error Sequential Technique de Carayanis et Coll.[6]. Ce nouveau algorithme nommé RLS conjoint (RLS Joint) a été récemment développé par D. Boudreau et P. Kabal [7] dans le cadre de la réalisation d'une nouvelle génération de modem destiné aux réseaux de communications mobiles par satellite (Fig.5).

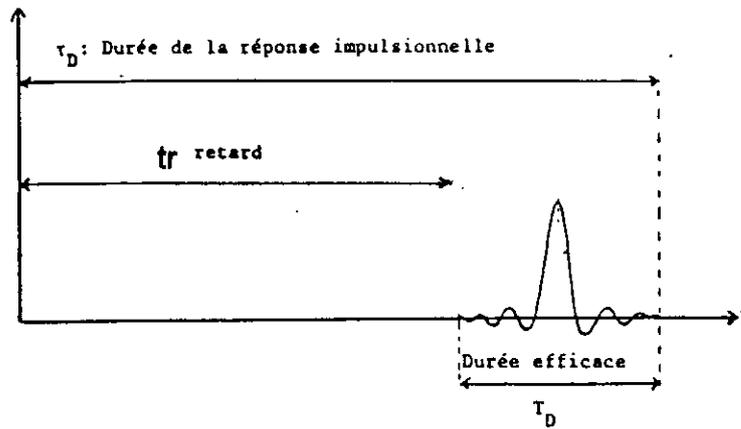


Fig.3: Réponse impulsionnelle du canal de l'écho distant.

Nous avons organisé la rédaction de ce rapport comme suit:

Nous étudierons l'annulation d'écho et l'estimation du retard dans la section II. Les méthodes adaptatives ainsi que leurs stabilité sont étudiées dans la section III et IV, où on présentera deux principales méthodes: l'annulation d'écho séparée ou disjointe et l'annulation d'écho conjointe. Dans la section V, la simulation où l'on abordera l'interprétation des résultats de simulation ainsi que la comparaison des différentes méthodes et enfin nous terminerons par la conclusion et les perspectives.

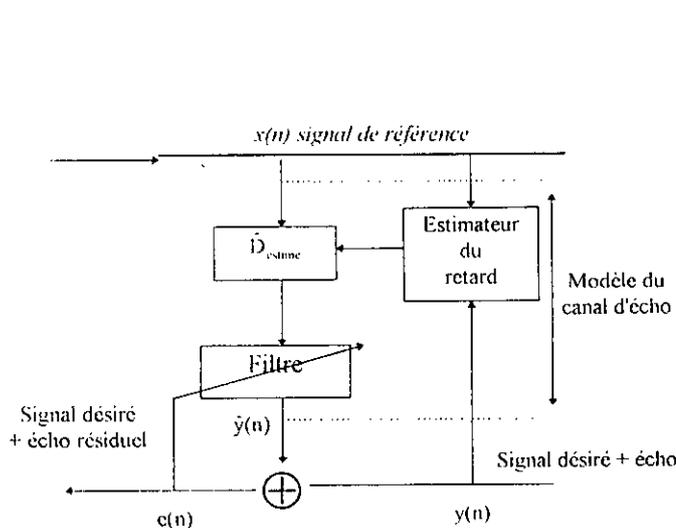


Fig.4: Annuleur d'écho disjoint

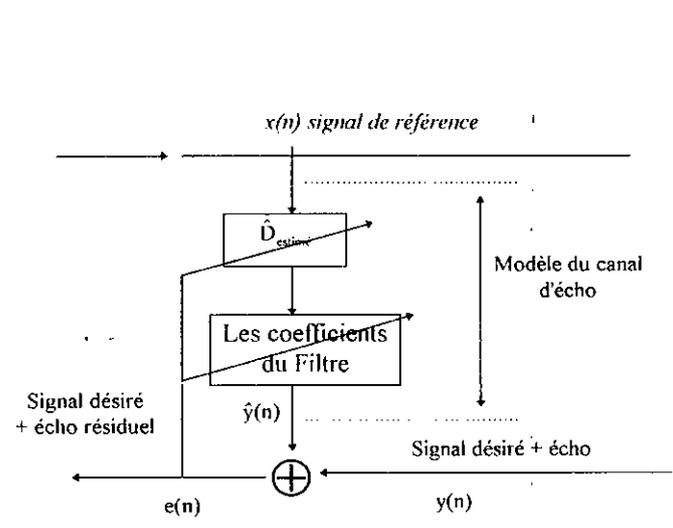


Fig.5: Annuleur d'écho conjoint

CHAPITRE I

LE PROBLEME DE L'ECHO EN TELECOMMUNICATION

I. LE PROBLEME DE L'ECHO EN TELECOMMUNICATION

1.1 ORIGINES DU PHENOMENE ECHO DANS LE RESEAU TELEPHONIQUE

1.1.1 Définition du concept d'echo

Un signal incident étant transmis dans un sens et sur un support donnée, l'écho peut se définir comme un signal de même nature retransmis vers le lieu d'émission du signal incident et déductible de ce dernier par une transformation appropriée.

1.1.2 Fréquence d'apparition de l'écho dans les réseaux de télécommunications modernes

Lorsque l'on considère le cas le plus général d'utilisation du réseau de télécommunications, celui d'une communication courante, tout abonné qui utilise son combiné est victime, la plupart du temps sans se rendre compte, de ce phénomène d'écho.

Une partie du signal vocal capté par le microphone et transformé en signal électrique retourne en effet vers l'écouteur, où elle est restituée sous forme sonore.

Néanmoins, le phénomène de "caverne" que l'on perçoit facilement par contraste en obturant momentanément l'écouteur, tout en parlant dans le microphone, est tolérable dans la grande majorité des communications courantes. Objectivement présent et mesurable, l'écho semble bien subjectivement absent.

Cette constatation résulte du fait que les circuits de télécommunications sont réalisés avec des supports de transmission assurant en général une grande vitesse de propagation du signal électrique (jusqu'à 250 Km/ms sur les circuits en câbles par exemple) [8], de telle sorte que l'écho électrique dans un pays d'étendue moyenne est peu décalé dans le temps par rapport au signal incident. Si de plus, comme c'est le cas ici, l'écho n'est pas d'un niveau trop élevé, il ne se détache pas subjectivement du signal incident.

Par contre, dans le réseau à longue distance sur support terrestre, sous-marin ou par satellite, l'écho est plus amplifié que précédemment.

Là, des dispositifs spéciaux de traitement de l'écho (suppresseurs ou

annuleurs d'écho) doivent être envisagés [9]. Ce type de phénomène est appelé écho d'origine électrique. Il existe d'ailleurs un second type d'écho, celui d'origine acoustique.

1.1.3 L'écho acoustique et l'écho électrique

L'écho acoustique n'existe véritablement que dans certains types de communications, où le terminal de l'abonné distant se compose d'un haut parleur se substituant à l'écouteur, et d'un microphone directif (par exemple équipements d'audioconférence ou les postes à "mains libre").

Son origine est simple: sans précautions particulières, le son subit des réflexions multiples contre les murs, le plafond constituant autant d'écho différent, qui sont captés par le microphone au même titre que la parole utile.

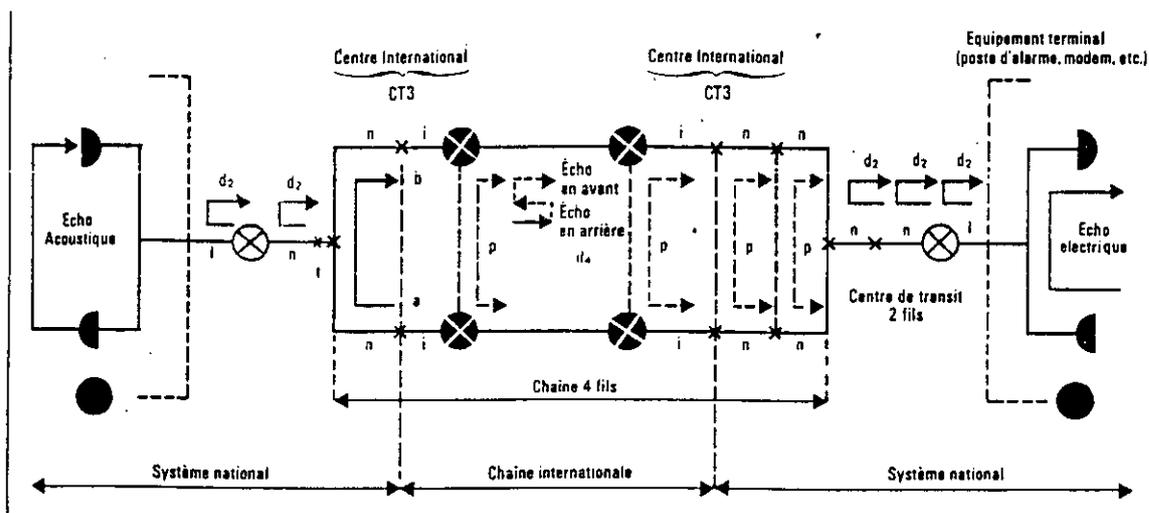
Un remède, cependant partiel, a été utilisé pour en limiter le niveau, donc la gêne ressentie, dans le cas des salles d'audioconférence. Celles-ci sont aménagées au moyen de murs destinés à absorber une partie du son, ce qui réduit la dynamique de l'écho acoustique, empêche tout risque d'accrochage acoustique (stabilité) et simplifie le problème de son traitement.

Ce premier remède technique n'est évidemment pas utilisable - le problème du traitement de l'écho avec toute sa dynamique et sa complexité reste général - dans le cas du poste à "mains libres" disposé chez l'abonné.

L'écho électrique est généré à partir du signal électrique transmis en ligne, d'où sa dénomination.

Son origine est multiple: il peut provenir soit d'un couplage électrique entre sens de transmission d'un même circuit 4 fils (paradiaphonie), soit d'une désadaptation d'impédance aux divers plans de raccordement 2 fils ou 4 fils des "maillons" mis au tandem pour constituer une liaison téléphonique, soit encore d'un découplage imparfait entre accès réception et émission 4 fils des dispositifs de passage 2 fils/4 fils, définissant par la-même l'affaiblissement d'équilibrage, soit évidemment de la composition de tous ces différents phénomènes.

Le diagramme (Fig I-1) ci-dessous illustre, dans une communication internationale, les différents chemins possibles des échos électriques et acoustiques pouvant être perçus à l'extrémité B, les échos prépondérants étant représentés en traits pleins.



X centre de commutation. ⊗ centre de transit international (CT2 ou CT1).
 ⊗ centre local.
 i : circuits internationaux.
 n : circuits nationaux de prolongement.
 l : circuit local.
 p : trajets de paradiaphonie entre sens de transmission d'un même circuit 4 fils.
 d : réflexions dues aux désadaptations d'impédances.
 d2 : sur ligne 2 fils.
 d4 : sur un sens de la ligne 4 fils d'un circuit international.
 a - l - b : trajet d'écho entre extrémités virtuelles analogiques du centre international dû à l'imperfection du découplage entre accès 4 fils du terminateur 2 fils/4 fils.

Fig.I-1: Représentation de divers échos susceptibles d'être Rencontrés dans une communication internationale [8]

Les avis du CCITT donnés sous les références [10], [11] et [8] explicitent ces différents types d'écho.

Comme le montre la figure I-2, le signal A provenant du poste A traverse la ligne 2 fils et passe à la ligne 4 fils par l'intermédiaire du circuit hybride de séparation 2F/4F (H_1). Il est transmis par la voie unidirectionnelle (L1) et regagne la ligne 2 fils de l'abonné B à l'aide de l'hybride (H_2). Si l'hybride (H_2) est mal adapté à la ligne de l'abonné (B), une partie du signal A s'injecte dans la voie réceptrice L2. Le signal injecté est l'écho. De la même façon, une partie du signal (B) se réfléchit dans la voie L1 au niveau de l'hybride (H_1). La désadaptation d'impédance est due au fait que l'impédance des paires d'abonnés, principalement fonction de leur longueur et de leur section, est extrêmement dispersée d'une communication commutée à une autre.

Le passage 2 fils/4 fils a été introduit originellement et l'est encore aujourd'hui pour n'utiliser qu'une paire métallique par abonné dans le réseau local au lieu de deux et réaliser ainsi des économies de cuivre considérables. Le passage 2 fils/4 fils reste une fonction essentielle des télécommunications, mais aussi une source de contraintes.

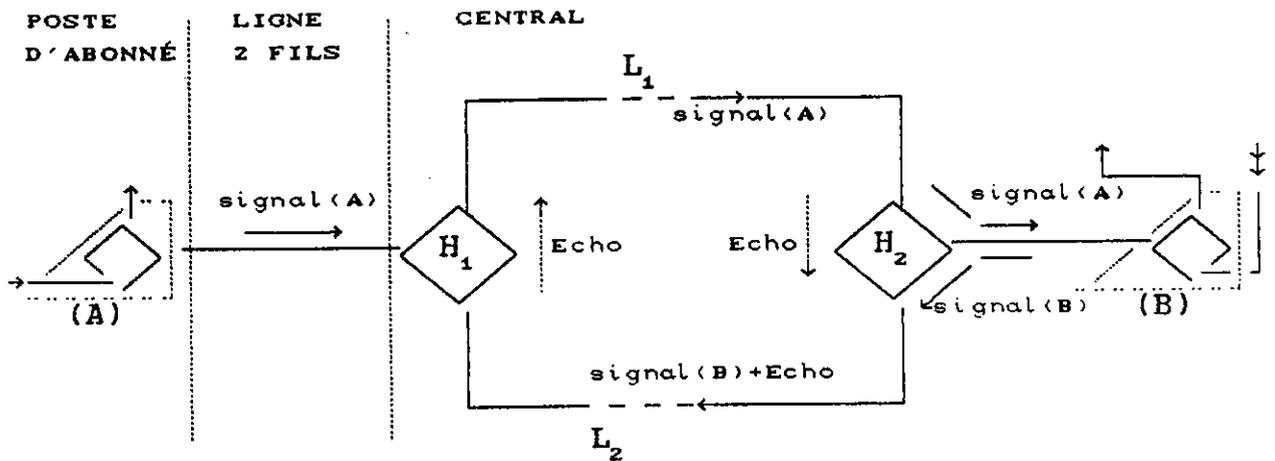


Fig.I-2: Mise en œuvre de la séparation 2 fils / 4 fils.

1.2 CONDITIONS DE PRODUCTION DE L'ECHO ELECTRIQUE DANS LE RESEAU TELEPHONIQUE

Comme nous l'avons vu, le phénomène d'écho est la conséquence de la réflexion d'une partie du signal émission en un point quelconque du trajet de la transmission, point où l'adaptation d'impédance n'est pas parfaite. Cela peut entraîner l'injection d'une partie de l'énergie du signal émission dans la voie réceptrice lors du passage 2-fils/4-fils. D'une manière générale, pour que la réflexion du signal puisse produire un phénomène perturbateur dû à l'écho, il faut trois conditions:

- a) Systèmes de transmissions avec passage 2 fils/4 fils.
- b) Signaux d'émissions et réceptions ayant leurs spectres dans une même bande de fréquence.
- c) Systèmes de transmissions "Full-Duplex"(Simultanéité dans le temps des signaux émission et réception).

Si l'une de ces trois conditions n'est pas présente, l'écho n'existe pas. Nous examinons ci-dessous différents cas où l'une de ces conditions est absente.

CAS 1: condition (a) non remplie

Dans le cas où les signaux émission et réception empruntent des supports de transmission différents (cas des lignes 4 fils), le problème de l'écho ne se pose pas (Fig. I-3).

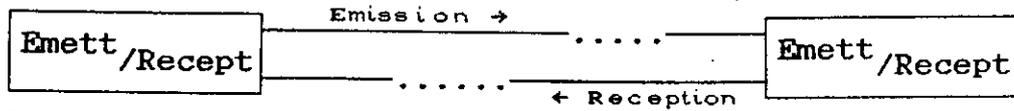


Fig.I-3: Ligne spécialisée

CAS 2: condition (b) non remplie

Avec un multiplexage fréquentiel où les canaux émission et de réception sont séparés dans le domaine de fréquences, le problème de l'écho est aussi résolu (Fig.I-4).

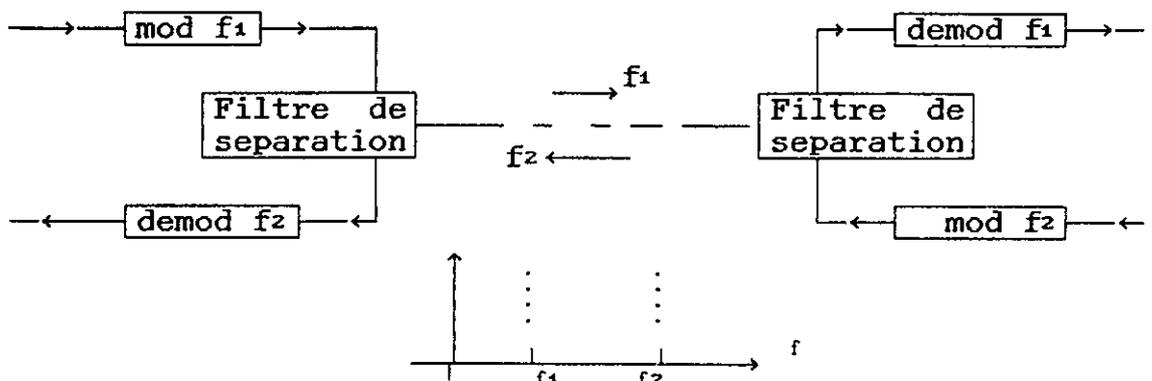


Fig.I-4: Système de transmission avec multiplexage fréquentiel

Cette séparation peut se faire à l'aide de deux fréquences porteuses f_1 et f_2 judicieusement choisies pour chaque sens de transmission. Elle peut aussi se faire à l'aide d'un codage approprié (codage différent par sens de transmission), en vue de séparer les 2 bandes en question [12].

CAS 3: condition (c) non remplie

Avec un multiplexage temporel (dit à l'alternat: Half-duplex) on émet et on reçoit alternativement [12] (Fig.I-5).

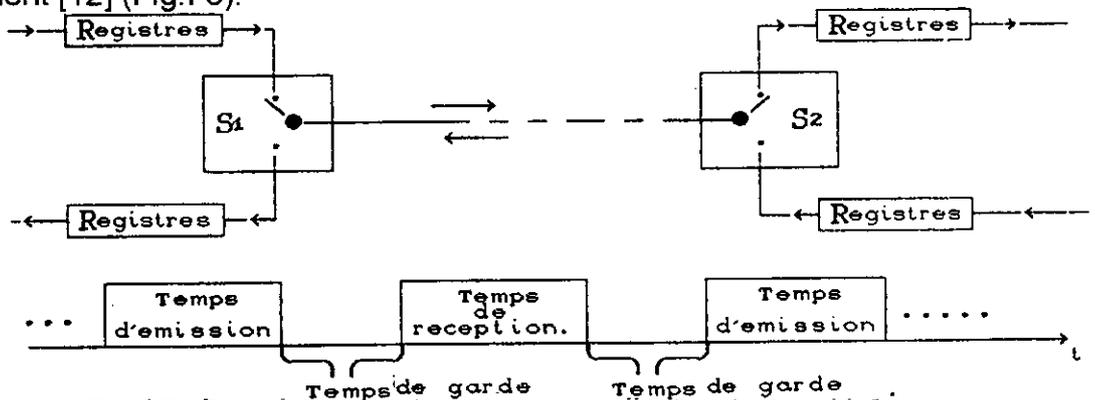


Fig.I-5: Système de transmission avec multiplexage temporel

Le signal d'émission est enregistré pour être transmis par blocs d'information à cadence rapide. Entre les blocs émissions consécutifs on reçoit les blocs de réception qui seront enregistrés à leur tour dans les registres de réception pour être relus avec la cadence normale.

En ce qui concerne les signaux dans la bande téléphonique, que ce soit la parole ou les données aucune des trois méthodes de transmission ci-dessus n'est vraiment parfaitement adaptée. Ce qui explique qu'aucune d'elles n'est généralisée, pour les raisons suivantes:

- La méthode 1 nécessiterait 4 fils au lieu de 2 fils.
- La méthode 2 est complexe par la présence des filtres de séparation de bande et des systèmes de modulation et démodulation.
- La méthode 3 nécessiterait des mémoires tampons pour traiter l'information.

Dans les réseaux téléphoniques actuels, les lignes qui relient les abonnés aux centraux sont constituées par des câbles 2 fils bidirectionnels. Les signaux d'émission et de réception conduits par ces lignes doivent être séparés d'une part dans le central téléphonique (dans le joncteur d'abonné) et d'autre part dans le poste d'abonné. De plus les signaux d'émission et de réception sont simultanés et ont leurs spectres dans la bande téléphonique (0 à 4 KHz).

Comme nous l'avons vu auparavant, les trois conditions (a), (b), et (c) sont toutes les trois réunies dans ce cas, le problème de l'écho se pose donc.

1.3 CONSEQUENCE DE LA PRESENCE DE L'ECHO

Le signal de l'écho n'est pas gênant lorsqu'il s'agit de l'hybride du poste d'abonné car l'écho n'est qu'une partie du signal de parole, la personne au téléphone s'entend légèrement elle-même. En pratique on crée volontairement ce phénomène car l'absence d'"écho local" peut donner une sensation désagréable à l'abonné. Au contraire dans le cas de transmission de données (avec un modem), cet écho local, s'il est suffisamment important, peut provoquer des erreurs au niveau de la détection des données reçues.

Quant aux échos réfléchis aux hybrides de passage 2F/4F situés aux centraux téléphoniques (H_1 et H_2), ils peuvent être à l'origine d'autres problèmes particuliers [13], [3], [14] :

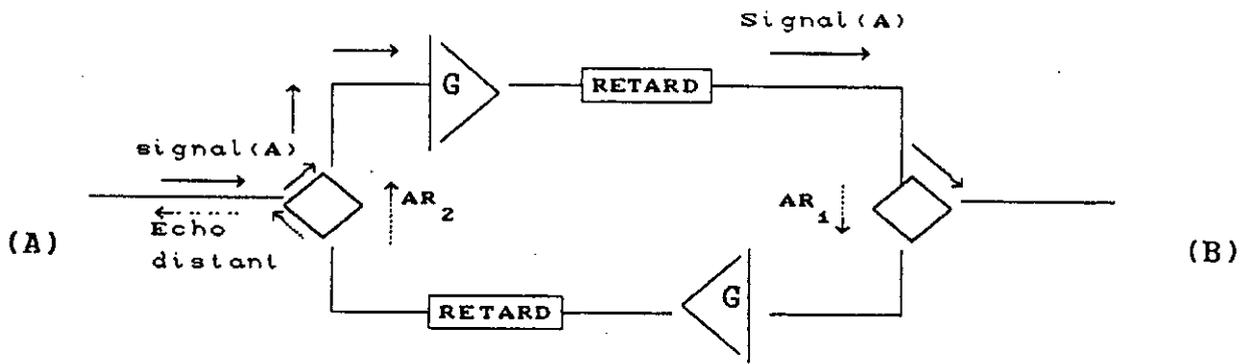


Fig.1-6: Origine de l'Echo distant et phénomène d'oscillation

- Echo distant:(figure I-6)

L'abonné (A) reçoit avec un retard une partie du signal qu'il a émis. Ce retard est le temps de propagation aller-retour du signal (A).

Dans une communication téléphonique cet écho distant est (même avec un niveau faible -40 dB par rapport au signal émis) gênant lorsque le retard dépasse quelques dizaines de millisecondes (seuil de la sensibilité de l'oreille au retard). Ce problème s'aggrave quand le canal de transmission comporte de longs trajets par exemple le passage par un satellite où le retard est de l'ordre de 0.5 seconde [8].

Dans le cas de la transmission de données, cet écho cause des perturbations au niveau de détection quelque soit la valeur du retard.

Un grand nombre d'expériences ont été menées à travers le monde pour définir qu'elle était l'intensité maximale d'un écho tolérable par les utilisateurs [8]. Il fut mis en évidence que la gêne apportée par un écho est d'autant plus importante que son niveau est plus fort et que son retard est plus grand [8] et [15].

- Problème de l'oscillation de la boucle de transmission:

Dans la boucle de transmission telle qu'elle est représentée à la figure I-6 :

- si le gain global de boucle est supérieur ou égal à 1,
- et si le déphasage de boucle (causé par le retard, est voisin de 360°),

alors la boucle de transmission devient instable, ce qui occasionne un phénomène d'oscillation.

Comme le montre la figure I-6 le gain de la boucle dépend de l'affaiblissement de l'écho des hybrides. On peut donc prémunir contre le phénomène d'oscillation ci-dessus en cherchant à rendre cet affaiblissement le plus grand possible.

1.4 REPOSE IMPULSIONNELLE DU TRAJET D'ECHO

Quelle que soit son origine, électrique ou acoustique, et le point d'observation, l'écho est une copie déformée du signal incident. Le trajet d'écho est communément décrit par sa réponse impulsionnelle (Fig.3).

Pour un trajet d'écho typique, cette réponse comporte un retard pur t_r , dû au retard inhérent aux éléments de transmission du trajet d'écho, et un signal dispersé de t_d dû à la distorsion de temps de propagation de groupe et aux réflexions multiples, on l'appelle parfois la durée efficace (Fig.3).

Les valeurs de ce retard et de cette dispersion dépend, de même que pour l'amplitude, des propriétés du trajet d'écho. Il résulte des considérations développées antérieurement que pour un écho:

- d'origine acoustique t_r peut être seulement égal à quelques millisecondes, alors que t_d peut durer quelques centaines de milliseconde du fait des réflexions multiples et de la faible vitesse de propagation du son dans l'air (340 m/s) [8].

- électrique, $t_r + t_d$ peut atteindre entre extrémités virtuelles analogiques du centre international et l'abonné, des valeurs de l'ordre de 36 ms (pour un pays d'étendue moyenne, le temps de propagation par sens sera inférieur à 18 ms) alors que t_r peut atteindre plusieurs centaines de millisecondes sur le trajet long distance de l'écho (jusqu'à environ 550 ms pour une liaison par satellite) [9].

La durée de la réponse impulsionnelle du chemin de l'écho distant ($t_r + t_d$) étant longue, il est donc nécessaire d'employer un filtre transversal à grand nombre de coefficients.

Avec un retard de 100 ms et une fréquence d'échantillonnage de 8 Khz, le nombre nécessaire de coefficients est supérieur à :

$$N = \frac{100 \cdot ms}{125 \cdot \mu s} = 800.$$

Dans le cas de transmission par satellite (retard de l'ordre de 0,5 seconde) ce nombre dépasse 4000.

L'origine des échos, qui ne peuvent être éliminés par des remèdes simples, et leurs caractéristiques étant connues, nous pouvons à présent décrire les équipements destinés à traiter ces échos dans les réseaux de télécommunications.

CHAPITRE II
SOLUTIONS
AU PROBLEME D'ECHE

II. SOLUTIONS AU PROBLEME D'ECHO

Cette section décrit les méthodes communes utilisées pour le contrôle de l'écho dans les réseaux téléphoniques. On y trouve les plans de fuites, la suppression de l'écho, et l'annulation d'écho [10], [16], [3], [13].

Dans les connexions bilatérales à l'alternat (mode semi-duplex), on peut régler le problème de l'écho par commutation du trajet; c'est la technique des supprimeurs d'écho. Dans les connexions bilatérales simultanées (mode full-duplex), on a recours à des organes annuleurs d'écho, qui reposent sur le principe d'une simulation locale du trajet d'écho. Nous verrons dans les paragraphes suivants que le signal d'écho estimé est soustrait du signal entrant, qui se voit ainsi restituer l'essentiel de sa pureté originelle (Fig. II-4).

2.1 CONTROLE DE L'ECHO AVEC FUITE

Cette approche pour le contrôle de l'écho dans le réseau consiste à introduire une fuite dans la liaison de retour d'une manière contrôlée. L'introduction de la fuite représente un échange entre ces effets bénéfiques sur les effets subjectifs de l'écho et ces effets indésirables sur le chemin de la parole de l'auditeur. L'effet de l'écho augmente tant que le délai de liaison aller-retour augmente. Donc pour éviter l'introduction de la fuite plus que nécessaire, la fuite devrait être augmentée tant que le délai de la liaison aller-retour augmente. Ceci est un principe de V.N.L. (Via Net Loss), dans lequel une fuite est ajoutée dans le support qui dépend de sa longueur. Sans spécifier les détails de ce plan, l'objectif du V.N.L. est de supprimer les fuites entre les deux centres de commutation dans toutes les liaisons [16 (Bell Labs.4.4)].

L'utilisation de la fuite pour contrôler l'écho est une mesure inadéquate pour les longs délais, tant que la fuite elle-même devient un affaiblissement important. Pour cette raison, l'utilisation de la fuite pour contrôler l'écho est adoptée seulement pour les supports terrestres jusqu'à 1900 Km dans le nord américain (cette distance change avec l'introduction des fibres optiques) [16].

Pour des supports plus longs, la fuite insérée est réduite à zéro, et on utilise dans ce cas soit le supprimeur d'écho soit l'annuleur d'écho qui seront décrits dans les paragraphes suivants. Pour simplifier les notations, on considérera dans ce qui suit que les signaux sont disponibles sous forme numérique sur la portion 4 fils des circuits. $x(nT)$,

ou plus simplement $x(n)$, représentera le signal $x(t)$ échantillonné à la fréquence $1/T$.

2.2 SUPPRESSEUR D'ECHO

Le schéma de principe d'un suppresser d'écho est représenté à la figure II-1, et comprend principalement un dispositif de mesure de l'énergie du signal lointain $x(n)$, un dispositif de mesure de l'énergie du signal local $y(n)$, et un organe de décision.

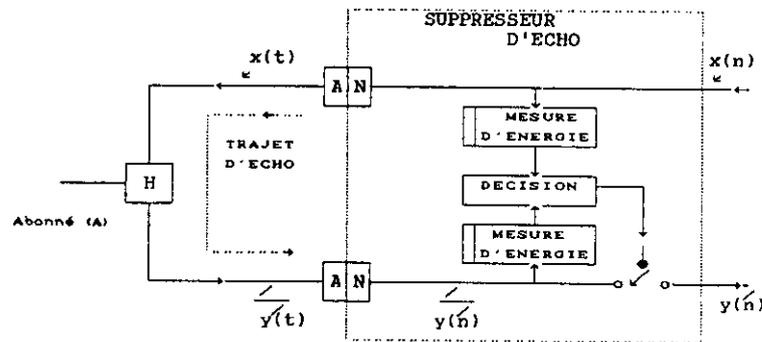


Fig.II-1: Principe d'un suppresser d'Echo classique

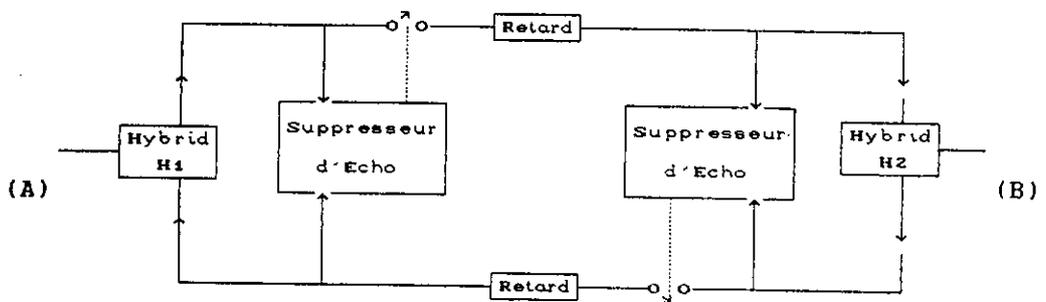


Fig.II-2: Fonctionnement du suppresser d'Echo associé à l'hybride H_2

Le fonctionnement du suppresser d'écho est basé sur le fait que le gain de l'hybride H entre les connexions aux lignes unidirectionnelles est toujours inférieur à l'unité, de telle sorte que dans le cas où seul le correspondant lointain parle, l'énergie du signal d'écho $y(n)$ est toujours inférieure à celle du signal incident $x(n)$. On prend alors la décision d'ouvrir le circuit d'émission (état de blocage), ce qui évite à l'abonné lointain de percevoir son propre écho (Fig.II-2). Le même dispositif fonctionne de façon indépendante à l'autre terminaison du circuit 4 fils, et permet de supprimer le retour d'écho de l'abonné local lorsque ce dernier parle.

De tels dispositifs permettent une élimination efficace des échos dans la mesure où les abonnés parlent à tour de rôle (Half Duplex: simple parole). Toutefois, si l'un des deux abonnés veut interrompre son interlocuteur, le suppresser d'écho risque d'empêcher les paroles prononcées par l'intervenant de parvenir au premier interlocuteur (Full Duplex:

double parole). On comprend que le dispositif simpliste de suppression d'écho décrit ici ne peut qu'assurer imparfaitement sa fonction dans le cas de double parole, et résulter en général dans une intervention difficile et un effet de hachage alterné de la conversation [8].

Ce dispositif ne permet en général un fonctionnement totalement satisfaisant que dans le cas de simple parole, et son utilisation très répandue n'est essentiellement due qu'à sa faible complexité de mise en œuvre.

L'écho peut en fait être parfaitement contrôlé grâce à l'utilisation de circuits beaucoup plus complexes décrits ci-dessous: les annuleurs d'écho.

2.3 ANNULEUR D'ECHO

Le schéma de principe d'un annuleur d'écho est représenté à la figure II-3, et comprend essentiellement un filtre numérique et un dispositif de mise à jour des coefficients de ce filtre. La fonction de l'annuleur d'écho consiste en une analyse des signaux $x(n)$ et $z(n)$ sur les terminaisons 4 fils pour en déduire une estimée $y(n)$ du signal d'écho, qui est ensuite retranchée au signal issu du transformateur hybride.

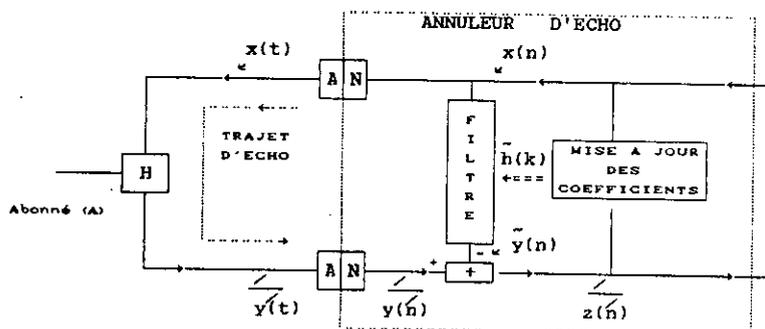


Fig.II-3: Principe d'un annuleur d'écho

On utilise généralement un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie (RIF) pour approximer le filtre équivalent au transformateur hybride.

Le signal $y(n)$ représentant l'écho estimé, est égal à:

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}(k) \cdot x(n-k) \quad (2-1)$$

où $\hat{h}(k)$; $k=0, \dots, N-1$ représente la réponse impulsionnelle du filtre. L'ordre N du filtre est d'autant plus grand que la distance séparant l'annuleur d'écho de l'hybride est importante.

Les coefficients de ce filtre sont adaptés à l'aide d'un algorithme adaptatif basé sur la minimisation de l'intercorrélacion entre le signal $x(n)$ sortant de l'annuleur en direction de l'hybride et le signal $z(n)$ qui en sort après annulation d'écho [17], [18], [19], [20], [21], [16], [14].

Idéalement, l'adaptation est réalisée à chaque instant d'échantillonnage n sur chaque coefficient :

$$\hat{h}(k, n) = \hat{h}(k, n-1) + \tilde{f}[z(n), x(n-k), n] \quad (2-2)$$

où $\hat{h}(k, n)$, $k=0, \dots, N-1$, représente la valeur du coefficient $\hat{h}(k)$ à l'instant n , et \tilde{f} est une fonction d'adaptation.

La relation (2-2) diffère d'un algorithme adaptatif à un autre. Elle converge très rapidement si et seulement si certaines conditions sont respectées, si bien que les dispositifs d'annulation d'écho permettent un contrôle très efficace de l'écho produit dans les terminaisons 4 fils du réseau téléphonique. Leur avantage essentiel sur les dispositifs de suppression d'écho est qu'ils permettent un fonctionnement en double parole sans aucune dégradation de la conversation. Le prix à payer est cependant une grande complexité de mise en œuvre. Puisque la durée moyenne du trajet d'écho peut atteindre environ 32 ms [8], l'ordre du filtre annuleur d'écho doit être de 256, en supposant une fréquence d'échantillonnage de 8 kHz. La puissance de calcul nécessaire est alors très importante.

Le signal d'entrée $x(t)$ est échantillonné à la fréquence universelle F_e prise égale à 8 KHz dans les systèmes de télécommunications. Selon les réalisations, le signal estimé de l'écho $\hat{y}(t)$ est soustrait du signal perturbé $y(t)$ sous forme analogique ou numérique. On considère dans ce qui suit les équations pour une soustraction numérique.

L'objectif de la présente étude est de concevoir un annuleur d'écho auto-adaptatif, simple avec les meilleures performances possibles et qui peut avoir le plus grand nombre d'applications:

- Dans les centraux téléphoniques aux niveaux des joncteurs d'abonnés,
- Dans le poste d'abonné en particulier dans les postes à main libre,
- Dans les modems de transmissions de données,
- Eventuellement dans les systèmes de numérisation et de transmission de parole.

2.4 PRINCIPE DE L'ANNULEUR D'ECHO LOINTAIN

L'estimation s'obtient par l'intermédiaire d'un filtre linéaire, appelé annuleur d'écho et dont l'entrée est le signal d'émission et dont la sortie est l'estimée recherchée. Le problème est ainsi réduit à l'identification des paramètres de ce filtre; ils sont déterminés de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne de l'estimation qui représente la puissance de l'écho résiduel. La complexité de ce traitement peut être considérablement réduite si le retard est considéré comme un paramètre de l'annuleur d'écho et que l'on cherche à estimer; l'annuleur d'écho est alors réalisé sous forme de deux filtres en parallèle: un estimateur de l'écho local et un estimateur de l'écho distant; ce dernier comme le montre la figure II-4, étant une cascade d'un élément de retard D et d'un filtre de complexité réduite. Un procédé pour estimer D est proposée [17], [18], [22], [23], [24], [25], [26].

Les méthodes de réalisation de l'annuleur d'écho local ont fait l'objet d'une thèse de Magister [1]. Nous nous intéressons uniquement dans la suite à l'écho distant qui sera désigné simplement par écho.

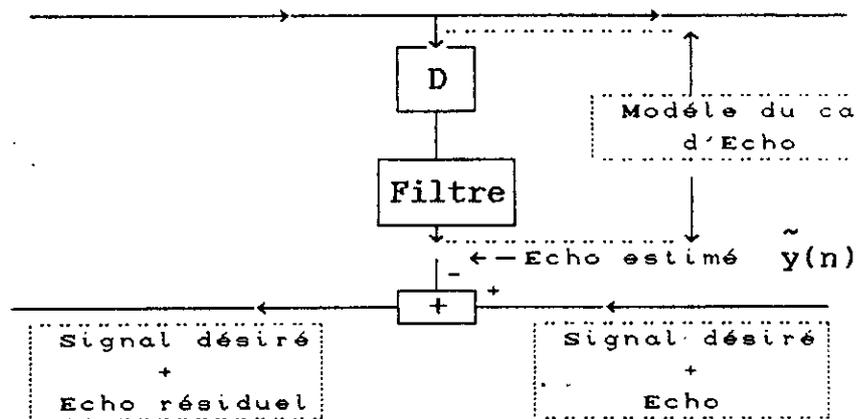


Fig.II-4: Annuleur de l'écho distant

En réalité, il faut considérer le problème de l'annulation d'écho comme étant un problème d'identification (Fig.II-5).

Nous voulons faire adapter un modèle, dont la structure générale est déterminée à l'avance, à un système inconnu.

Le modèle, ayant des paramètres variables est un problème d'identification paramétrique,

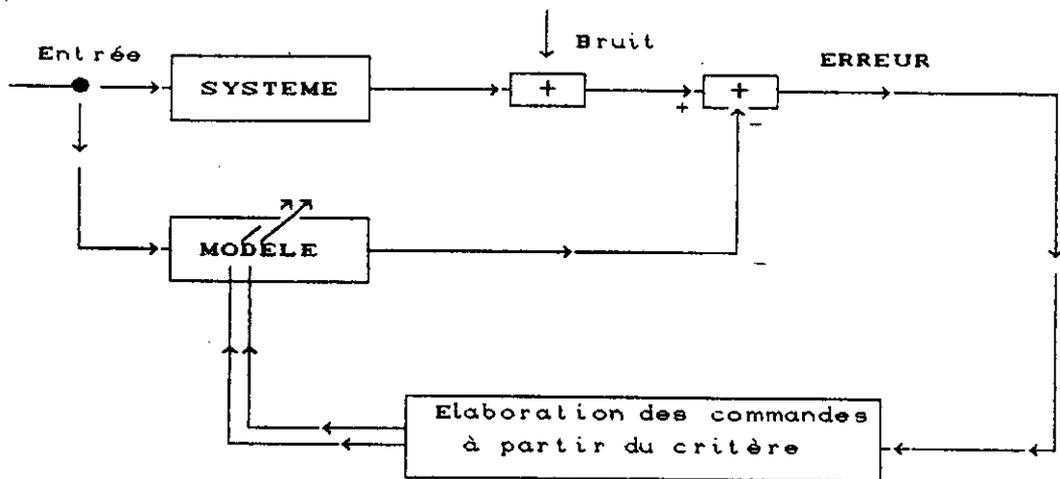


Fig.II-5: *Le modèle*

Les questions que l'on se pose sont les suivantes :

- 1) Quel est le système dans notre cas ?
- 2) Quel est le modèle le plus proche du système qui est en même temps simple et contenant toutes les informations déjà connues concernant le système ?
- 3) Quels sont les paramètres variables du modèle ?
- 4) Choisir une méthode réaliste et simple.
- 5) Comment agir sur les paramètres pour satisfaire le critère ?

2.5 CHEMIN DE L'ECHO

Dans notre cas, le système est le chemin à travers lequel, une partie du signal d'émission s'injecte dans la voie réceptrice (Fig.II-6).

Nous supposons que ce canal est linéaire et invariant dans le temps. Soit $h(t)$ sa réponse impulsionnelle, l'écho $y(t)$ a donc pour expression :

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \quad (2-3)$$

où $x(t)$ est le signal émis et \otimes représente la convolution.

Soit $f(t)$ la réponse impulsionnelle du modèle, l'écho estimé est donc :

$$\hat{y}(t) = x(t) \otimes f(t) \quad (2-4)$$

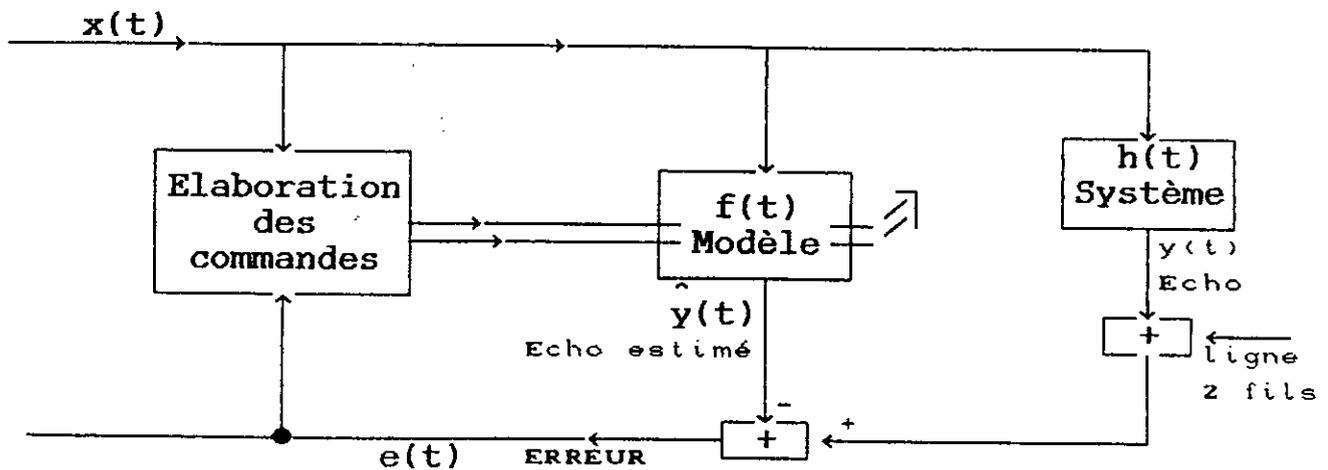


Fig.II-6: Chemin de l'écho.

L'erreur $e(t)$ qui est en fait l'écho résiduel à l'instant t a pour expression :

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (2-5)$$

$$= x(t) \otimes h(t) - x(t) \otimes f(t)$$

$$= x(t) \otimes [h(t) - f(t)]$$

$$= x(t) \otimes g(t) \quad (2-6)$$

où $g(t) = h(t) - f(t)$; $g(t)$ est alors le chemin de l'erreur

CRITERE

Le critère choisi est l'erreur quadratique moyenne soit

$$\bar{e}^2 = E[e^2(t)] \quad (2-7)$$

où $E[.]$ est l'espérance mathématique.

La minimisation de ce critère revient à maximiser le rapport signal de l'émission sur l'écho résiduel.

2.6 CHOIX DU MODELE

Le modèle qui est souvent utilisé pour l'annulation d'écho dans la transmission de données est un filtre transversal numérique dont les coefficients sont variables et adaptatifs (Fig.II-7). La raison de ce choix est qu'un tel filtre peut représenter n'importe quelle fonction de transfert si le nombre de ses coefficients est infini. Dans un cas pratique, ce nombre est supposé assez grand et la représentation est approximative.

L'intérêt de l'estimateur du retard est donc évident lorsque l'on utilise les filtres numériques. En estimant le retard, il suffit d'un nombre de coefficients correspondant à la durée efficace de la réponse impulsionnelle t_d pour représenter le trajet d'écho.

Ce modèle du chemin de l'écho distant est plus compliqué que celui de l'écho local (Fig.II-7 et Fig.II-8).

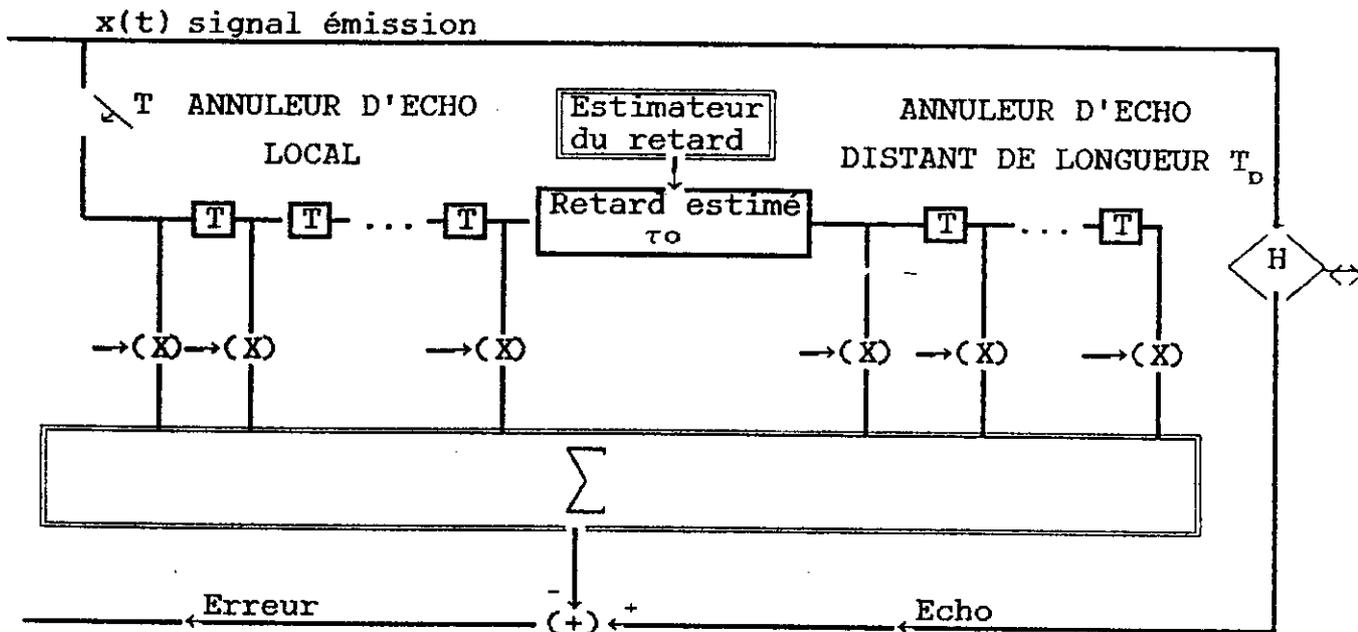


Fig.II-7: Annuleur d'écho avec l'estimateur du retard.

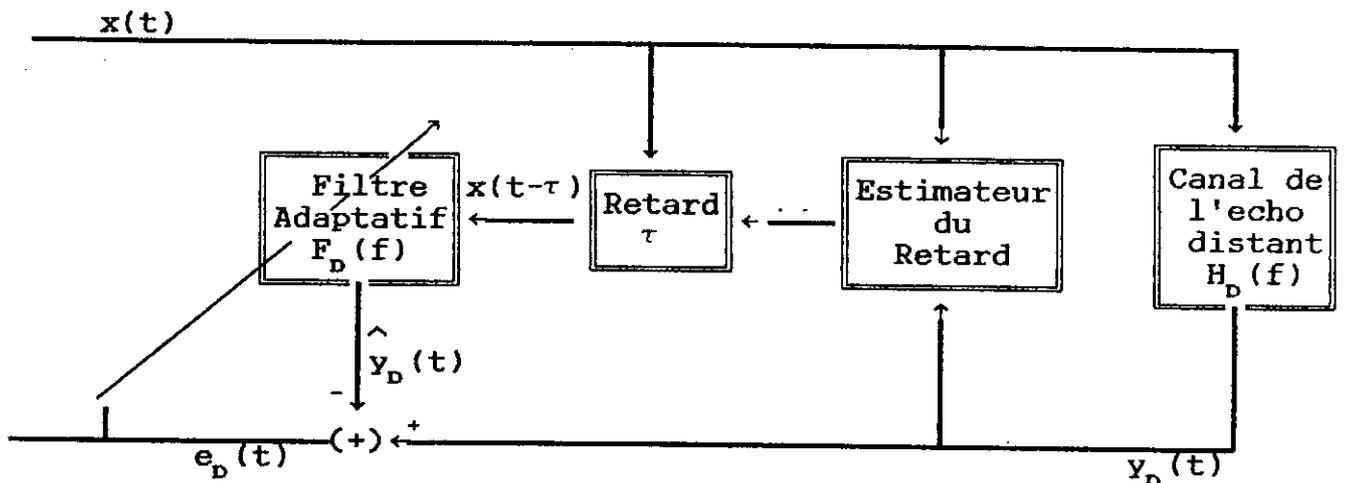


Fig.II-8: Structure de l'annuleur d'écho distant

La nature du chemin de l'écho distant n'est pas a-priori connue (câbles, faisceaux hertziens, satellites,...). Les mesures faites sur l'amplitude $|H_D(f)|$ de ce chemin [27] et [28]

ont montré que l'on peut la caractériser par un filtre passe-bande. Le modèle le plus simple est un filtre passe bande adaptatif suivi d'un retard variable.

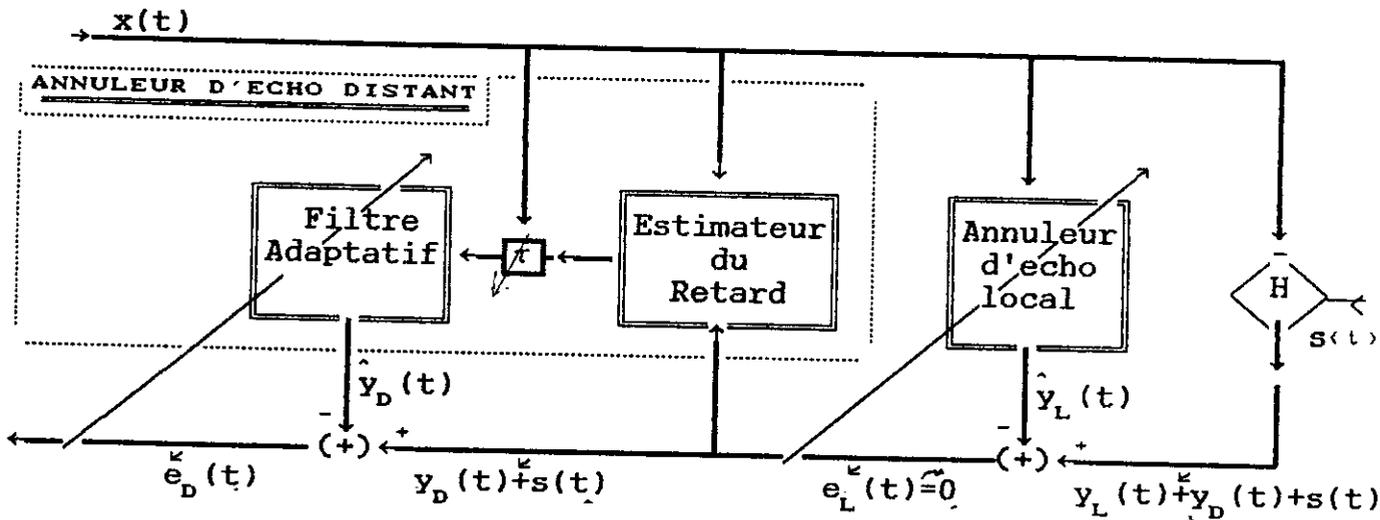


Fig.II-9: Modèle d'un annuleur d'écho (distant et local)

On suppose que

- 1) le signal $s(t)$ provenant de la ligne 2 fils de l'abonné distant (Fig.II-9) n'est pas corrélé avec $x(t)$. Avec cette hypothèse $s(t)$ n'a pas d'effet sur le comportement de l'estimateur.
- 2) l'écho local est complètement annulé.

2.7 MODELE POUR LE CHEMIN DE L'ECHO DISTANT

Le problème de l'estimation du délai entre deux versions temporelles continues du même signal, chacune d'elles est perturbée par des composantes du bruit non corrélées, fait l'objet de beaucoup d'effort de recherche ces dernières années. On se réfère au modèle conventionnel suivant des signaux temporels continus reçus par deux capteurs [2] et [7]:

$$\begin{cases} z_1(t) = x(t) + v_1(t) \\ z_2(t) = A \cdot x[t - D(t)] + v_2(t) \end{cases} \quad (2-8)$$

où $x(t)$ est le signal d'émission; $D(t)$ est le retard, A est le facteur de Gain constant; $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont des processus de bruit stationnaire de moyenne nulle, supposés non corrélés entre eux aussi bien qu'avec $x(t)$. Le problème est de trouver un estimateur \hat{D} du retard réel D en utilisant une suite finie d'échantillons de $z_1(t)$ et $z_2(t)$. Il est à faire

observer que lorsque l'écho est hautement intelligible dans le circuit téléphonique, on peut l'approximer raisonnablement au signal $x(t)$ décalé et atténué en amplitude. D'où la représentation logique de l'écho $y(t)$ par :

$$y(t) \approx A.x(t - D) \quad (2-9)$$

où A est une constante (Gain) et D le retard du chemin de l'écho .

Dans cette étude, on considérera spécifiquement les signaux et les systèmes en temps discret. Le modèle correspondant a la forme [2], [7]:

$$\begin{cases} z_1(n) = x(n) + v_1(n) \\ z_2(n) = \mathcal{L}_{D_n, h(n)}[x(n)] + v_2(n) \end{cases} \quad (2-10)$$

où n représente maintenant l'indice du temps discret et $\mathcal{L}_{D_n, h(n)}[\cdot]$ est un opérateur linéaire inconnu qui prend la forme de l'opération de filtrage, avec $h(n)$ comme réponse impulsionnelle du filtre, de la version décalée du signal $x(n)$ par D_n . Un diagramme synoptique correspondant au modèle mathématique (2.10) est illustré dans la figure II-10.

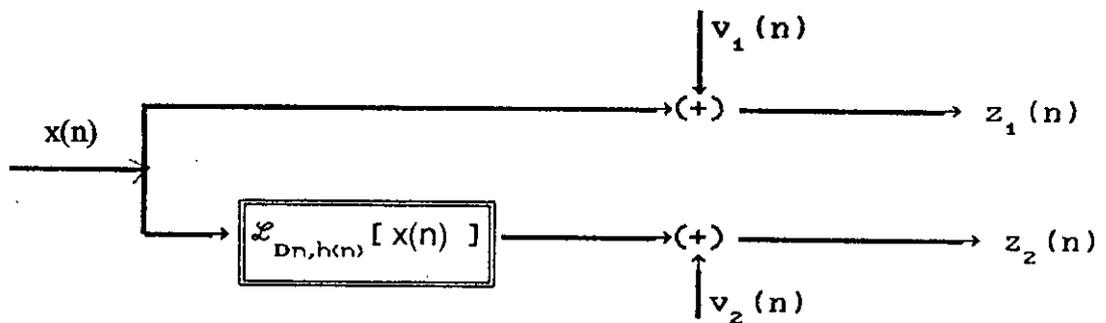


Fig.II-10: *Modèle Mathématique du signal.*

Le signal $x(n)$ peut être décalé avant ou après son filtrage. L'opérateur $\mathcal{L}[\cdot]$ correspond à l'opération de filtrage de $x(n)$, suivi d'un retard discret D_n . L'expression mathématique pour ce type d'opération est mieux exprimée en utilisant les versions en temps continu du filtre et du signal d'entrée. L'opération « filtre et retard » est donc donnée comme un rééchantillonnage de la version filtrée du signal continu $x(t)$, c.a.d

$$\mathcal{L}_{D_n, h(n)}[x(n)] = h(t) \otimes x(t) \Big|_{t=nT-D_n} \quad (2-11)$$

où l'opérateur \otimes représente l'opération de convolution. Le schéma synoptique correspondant au temps discret est illustré par la figure II-11.



Fig.II-11: Modèle du système

Une autre forme de $\mathcal{L}_{D_n, h(n)}[\cdot]$ correspond au filtrage de la version décalée de $x(n)$,

c.a.d ;

$$\mathcal{L}_{D_n, h(n)}[x(n)] = h(n) \otimes x(nT - D_n) \quad (2-12)$$

Notons que le retard de référence D_n n'est pas limité à une valeur entière de la période d'échantillonnage et peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

2.8 DEFINITION ET ESTIMATION DU RETARD

Soit l'observation : $z_2(t) = y(t) + v_2(t) \quad (2-13)$

avec $y(t) = x(t) \otimes h(t) \quad (2-14)$

et où \otimes désigne la convolution, $y(t)$ est l'écho, $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre qui modélise le canal d'écho et que l'on cherche à identifier et $v_2(t)$ est un bruit indépendant de $x(t)$ qui contient le signal de réception (Voir le modèle (2-10)).

Le retard D est défini comme la valeur du décalage s qui maximise la fonction d'intercorrélation :

$$R_{z_2, z_1}(s) = E[z_2(t).z_1^*(t-s)] = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha z_1^*(t-s).z_2(t) \cdot dt \quad (2-15)$$

où $E[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique et $*$ le conjugué complexe.

En remplaçant dans l'expression précédente z_2 et z_1 par le modèle (2-8) et en tenant compte des hypothèses du § 2.4, on obtient

$$R_{z_2, z_1}(s) \approx A \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha x(t-s).x(t-D) \cdot dt \quad (2-16)$$

On démontre que le terme de droite de l'équation (2.16) est maximum quand $s = D$.

Par ailleurs, comme que le calcul de l'intercorrélacion est coûteux en particulier pour les applications qui nécessitent un traitement intensif en temps réel, celle-ci a été remplacée par d'autres estimateurs en temps discrets [2] tels que :

- L'estimateur de corrélation directe (DC)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{D}_{DC} = \arg \max \hat{R}_{DC}(\tau) \\ \hat{R}_{DC}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n [z_1(kT) \cdot z_2(kT + \tau)] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2-17) \\ (2-18) \end{array}$$

où T est la période d'échantillonnage, et (N-1)T est la largeur de la fenêtre de l'estimation.

- L'estimateur (ASDF) de la fonction moyennée du carré de la différence, (Average Square Difference Function).

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{D}_{ASDF} = \arg \min \hat{R}_{ASDF}(\tau) \\ \hat{R}_{ASDF}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n [z_1(kT) - z_2(kT + \tau)]^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2-19) \\ (2-20) \end{array}$$

- L'estimateur (AMDF) de la fonction moyennée de la différence d'amplitude, (Average Magnitude Difference Function):

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{D}_{AMDF} = \arg \min \hat{R}_{AMDF}(\tau) \\ \hat{R}_{AMDF}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n |z_1(kT) - z_2(kT + \tau)| \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2-21) \\ (2-22) \end{array}$$

Il est à constater que l'estimateur AMDF n'implique pas de multiplications et il serait intéressant dans ces applications car la complexité de calcul est minimale (estimation rapide). La technique ASDF est convenable du point de vue calcul en prenant en considération le fait qu'il nécessite seulement des carrés au lieu de produits dans le cas de l'estimateur direct DC.

En pratique, l'estimateur du temps de retard est limité par la connaissance de la sensibilité du retard et par la résolution désirée. Puisque cette résolution est souvent plus fine que la période d'échantillonnage T, il est nécessaire d'interpoler.

En se référant à l'intercorrélacion directe et au modèle (2-8) on a

$$E[\hat{R}_{DC}(\tau)] = A R_{DC}(\tau - D) \quad (2-23)$$

Il faut noter que la corrélation $R_{DC}(\tau - D)$ est à bande limitée par hypothèse et présente un sommet symétrique autour de $\tau = D$. Cela suggère que la fonction de corrélation estimée peut être approximée par une parabole convexe dans le voisinage de son maximum.

$$\hat{R}_{DC}(\tau) = a\tau^2 + b\tau + c \quad (2-24)$$

a, b et c sont des paramètres convenables à la corrélation mesurée. En utilisant cette approximation simplifiée, l'estimation du temps de retard continu peut être réalisée en déterminant le sommet de la parabole en utilisant les trois mesures de l'intercorrélation:

$$\hat{D}_{DC} = -\frac{b}{2a} \quad (2-25)$$

On suppose que les décalages espacés de θ secondes sont valables autour du maximum de la parabole $\hat{R}_{DC}(\tau)$ des signaux échantillonnés chaque T secondes. Dans les applications usuelles $\theta = T$, mais on utilise dans notre cas des notations distinctes pour des raisons de généralisations.

Sous cette hypothèse, la procédure complète de l'estimation du temps de retard dans le domaine temporel continu implique deux étapes typiques:

- la localisation en premier lieu de l'index i_m du décalage maximum de l'intercorrélation $\hat{R}_{DC}(i_m T)$ (mauvaise estimation) ;
- puis l'évaluation du temps de retard $\hat{D}_{DC}(i_m T)$, et deux valeurs adjacentes $\hat{R}_{DC}(i_m T - \theta)$ et $\hat{R}_{DC}(i_m T + \theta)$ dans l'interpolation parabolique suivante, et on obtient les trois nouveaux estimateurs du retard selon les trois mesures en utilisant la même procédure:

$$\hat{D}_{DC} = -\frac{\theta}{2} \left[\frac{\hat{R}_{DC}(i_m + \theta) - \hat{R}_{DC}(i_m T - \theta)}{\hat{R}_{DC}(i_m T + \theta) - 2\hat{R}_{DC}(i_m T) + \hat{R}_{DC}(i_m T - \theta)} \right] + i_m T \quad (2-26)$$

$$\hat{D}_{ASDF} = -\frac{\theta}{2} \left[\frac{\hat{R}_{ASDF}(i_m + \theta) - \hat{R}_{ASDF}(i_m T - \theta)}{\hat{R}_{ASDF}(i_m T + \theta) - 2\hat{R}_{ASDF}(i_m T) + \hat{R}_{ASDF}(i_m T - \theta)} \right] + i_m T \quad (2-27)$$

$$\hat{D}_{AMDF} = -\frac{\theta}{2} \left[\frac{\hat{R}_{AMDF}^2(i_m T + \theta) - \hat{R}_{AMDF}^2(i_m T - \theta)}{\hat{R}_{AMDF}^2(i_m T + \theta) - 2\hat{R}_{AMDF}^2(i_m T) + \hat{R}_{AMDF}^2(i_m T - \theta)} \right] + i_m T \quad (2-28)$$

Dans les deux derniers cas i_m est l'index correspondant au temps de retard du minimum de \hat{R}_{ASDF} ou \hat{R}_{AMDF}

La précision de ces estimateurs a été évaluée en calculant leurs biais et leurs variances [2] , des résultats de simulations ont été obtenu dans [2] à partir de 2000 exécutions indépendantes, il apparait que :

$$\begin{array}{ccc} \text{Variance de} & < & \text{Variance de} & < & \text{Variance de l'estimateur} \\ \text{l'estimateur basée sur} & & \text{l'estimateur basée sur} & & \text{Basée sur DC.} \\ \text{l'ASDF} & & \text{l'AMDF} & & \\ & & & & (2-29) \end{array}$$

CHAPITRE III

Application du Filtrage Adaptatif

à

l'annulation d'écho

III. APPLICATION DU FILTRAGE ADAPTATIF A L'ANNULATION

3.1 PRINCIPE DU FILTRAGE ADAPTATIF

Les applications découlant du traitement adaptatif du signal sont d'une importance capitale. Il s'agit d'une classe d'algorithmes d'optimisation mis en œuvre en temps réel et assurant automatiquement l'optimisation d'un système en fonction de son environnement et son adaptation lors des fluctuations de ce dernier. En pratique ces propriétés sont fondamentales car elles évitent l'intervention d'un opérateur et permettent un fonctionnement sans coupures au cours du temps.

Les techniques adaptatives s'étendent à une variété de problèmes de détection, d'estimation et d'identification, rencontrés en transmissions, en acoustique sous-marine, en séismologie, en prospection pétrolières, en instrumentation biomédicale, en traitement de la parole et des images, en reconnaissance des formes, en contrôle des procédés, etc...

L'importance prise récemment par les traitements adaptatifs découle naturellement des progrès technologiques permettant des calculs très élaborés avec l'avènement de la technologie DSP (Digital Signal Processing).

Le problème qui nous intéresse dans cette étude est l'estimation continue d'un signal $y(t)$ éventuellement perturbé par un autre signal $v_2(t)$, à partir d'un signal $x(t)$, appelé signal de référence. La composante $v_2(t)$ est non mesurable, elle est incluse dans l'observation $z_2(t)$ captée sur une voie dite principale :

$$z_2(t) = y(t) + v_2(t). \quad (3-1)$$

On rappellera que dans notre cas de l'annulation d'écho $x(t)$ est le signal d'émission, $y(t)$ est le signal d'écho de l'abonné vers lui même et $v_2(t)$ est le bruit du milieu ou le signal de l'abonné distant. La restauration du signal utile est réalisée en soustrayant à l'observation $z_2(t)$ une estimée $\hat{y}(t)$ du signal $y(t)$ obtenue par un filtrage approprié du signal de référence $x(t)$.

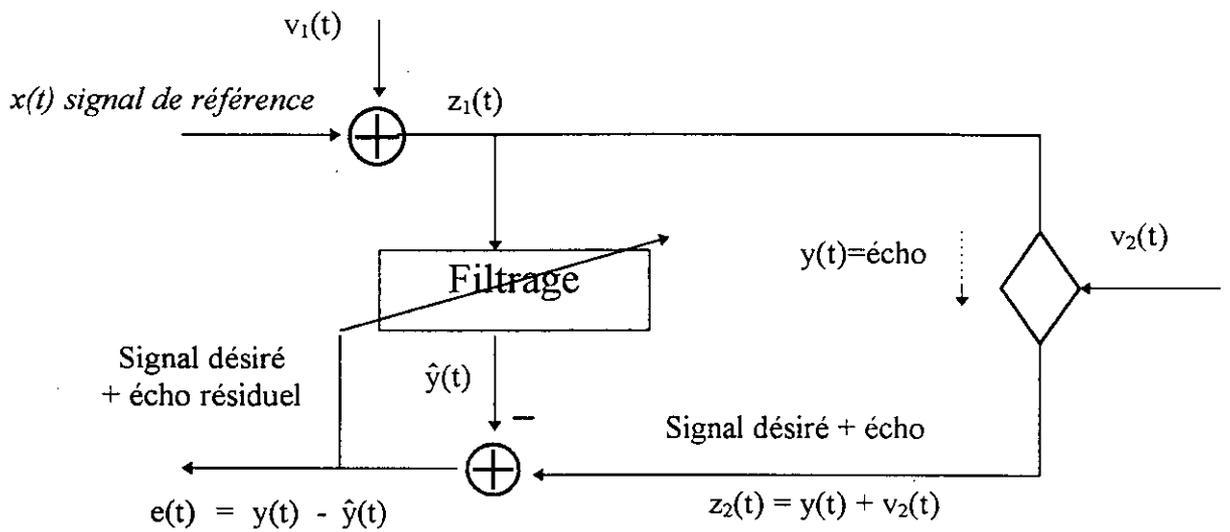


Fig.III-1 : Schéma de principe du filtrage de l'écho

Le schéma de principe de ce filtrage est représenté sur le Figure III-1, où les signaux sont connus aux instants d'échantillonnage T . Lorsqu'il n'y a pas de signal distant la puissance d'erreur tend asymptotiquement vers zéro. Mais ce n'est pas le cas dès qu'il existe à l'entrée de l'anneur d'écho soit du bruit, soit le signal distant.

Les hypothèses de base concernant le système de la Figure III-1 sont d'une part l'indépendance entre la composante $v_2(t)$ et les signaux $y(t)$ et $x(t)$, et d'autre part la corrélation des signaux $y(t)$ et $x(t)$.

Le signal $y(t)$ se déduit de $x(t)$ par un filtrage linéaire causal. Dans ces conditions, la sortie du système de la Figure III-1 s'écrit

$$e_{N,t} = y(t) - \sum_{j=1}^N h_j \cdot x(t-j) = y(t) - \mathbf{H}_N^T \mathbf{X}_{N,t} \quad (3-2)$$

où T désigne le transposé d'un vecteur ou d'une matrice, \mathbf{H}_N un vecteur d'ordre N contenant les coefficients de la réponse impulsionnelle finie et $\mathbf{X}_{N,t}$ un vecteur qui résume le passé du signal $x(t)$, sur une durée de N échantillons ;

$$\mathbf{H}_N = [H_N^1, H_N^2, H_N^3, \dots, H_N^N]^T ; \quad \mathbf{X}_{N,t} = [x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-N+1}]^T \quad (3-3)$$

L'anneur d'écho est donc le filtre linéaire \mathbf{H} estimateur de la référence $y(t)$ à partir du signal excitation $x(t)$, ainsi l'estimation de $y(t)$ est donnée par:

$$\hat{y}(t) = \mathbf{H}_N^T \cdot \mathbf{X}_{N,t} \quad (3-4)$$

La solution optimale du problème de l'estimation de $y(t)$ à partir d'une combinaison de Wiener-Hopf, qui exprime la nullité du gradient de l'erreur quadratique moyenne $E[e_{N,t}^2]$ en sortie.

$$\nabla_H E[\mathbf{e}_{N,t}^2]_{\mathbf{H}_n=\mathbf{H}_{N,opt}} = 2\mathbf{R}_{N,XX}\mathbf{H}_{N,opt} - 2\mathbf{P}_{N,XY} = 0 \quad (3-5)$$

$$\mathbf{H}_{N,opt} = \mathbf{R}_{N,XX}^{-1}\mathbf{P}_{N,XY} \quad (3-6)$$

où $E[\cdot]$ désigne la moyenne statistique et ∇_H l'opérateur gradient. Le vecteur $\mathbf{P}_{n,XY}$ désigne l'intercorrélation entre l'observation $y(t)$ et le vecteur du signal d'entrée dans la mémoire du filtre,

$$\mathbf{P}_{N,XY} = E[\mathbf{X}_{N,t} y(t)] \quad (3-7)$$

$$\text{La matrice carrée d'ordre } N; \mathbf{R}_{N,XX} = E[\mathbf{X}_{N,t} \mathbf{X}_{N,t}^T] \quad (3-8)$$

désigne la matrice d'autocorrélation du signal entrant (de référence) dans le filtre, elle est symétrique et définie positive. Cette dernière propriété assure l'existence et l'unicité de la solution optimale.

Cependant, dans la plupart des applications pratiques, les statistiques des signaux sont inconnues a-priori où les signaux sont souvent non stationnaires, par conséquent les statistiques doivent être évaluées à partir des données recueillies aux entrées. Ce type de problème amène à développer des méthodes de filtrage adaptatif où les coefficients du filtre \mathbf{H}_n changent en fonction des informations reçues. Ces coefficients sont ajustés à chaque instant t par un algorithme d'adaptation itératif. Les corrections successives dépendent des signaux d'entrée/sortie. Une procédure itérative bien connue pour annuler le gradient de l'erreur quadratique moyenne est de se déplacer, sur la surface de l'EQM (Erreur Quadratique Moyenne), dans la direction de la plus grande pente. Ainsi, l'algorithme du gradient déterministe s'écrit [28], [29] :

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} - \alpha \left[\nabla_H E[\bar{\mathbf{e}}_{N,t}^2] \right]_{\mathbf{H}=\mathbf{H}_{N,t-1}} \quad (3-9)$$

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} - 2\alpha (\mathbf{R}_{N,XX} \mathbf{H}_{N,t-1} - \mathbf{P}_{N,XY})$$

en utilisant l'égalité suivante :

$$\mathbf{R}_{N,XX} \mathbf{H}_{N,t-1} - \mathbf{P}_{N,XY} = E\{\mathbf{X}_{N,t} \mathbf{X}_{N,t}^T \mathbf{H}_{N,t-1} - \mathbf{X}_{N,t} y(t)\} = -E\{\mathbf{X}_{N,t} \bar{\mathbf{e}}_{N,t}\} \quad (3-10)$$

l'algorithme du gradient déterministe s'écrit encore

$$\boxed{\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} + 2\alpha E\{\bar{\mathbf{e}}_{N,t} \mathbf{X}_{N,t}\}} \quad (3-11)$$

où α est le pas d'adaptation, éventuellement variable, qui contrôle la stabilité et la vitesse de convergence de l'algorithme. $\mathbf{H}_{N,t}$ est le vecteur donné par (3-12) dépendant du temps

$$\mathbf{H}_{N,t} = [\mathbf{H}_{N,t}^1, \mathbf{H}_{N,t}^2, \mathbf{H}_{N,t}^3, \dots, \mathbf{H}_{N,t}^N]^T \quad (3-12)$$

L'erreur $\bar{e}_{N,t}$ désignera d'emblée une erreur de filtrage a priori (calculée avant la mise à jour du filtre) :

$$\bar{e}_{N,t} = y(t) - \mathbf{H}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \quad (3-13)$$

Le principal rôle d'un algorithme adaptatif est d'ajuster un vecteur de paramètres (ici $\mathbf{H}_{N,t}$) pour un objectif bien défini (minimisation de l'EQM dans l'exemple cité plus haut). Le schéma de principe d'un filtre adaptatif bouclé via un algorithme d'adaptation est représenté sur la figure III-2 ci-dessous.

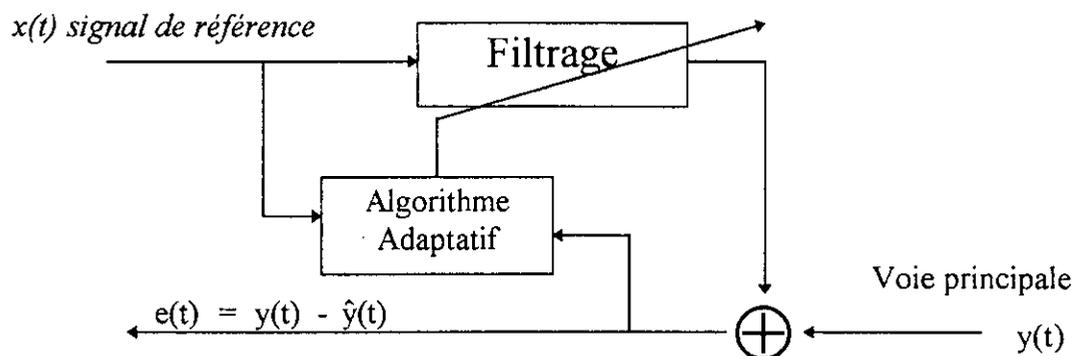


Figure III-2: Schéma de principe d'un système adaptatif.

Pour traiter un tel schéma, diverses approches peuvent être utilisées. Elles correspondent:

- d'une part, à la structure du filtre adaptatif:

filtre à réponse impulsionnelle infinie RII (ARMA) ou autorégressif pur (AR), filtre transverse ou filtre transverse réalisé par une structure en treillis + transverse,

- et d'autre part, à la technique utilisée pour adapter les coefficients du filtre adaptatif:

algorithmes utilisant la méthode des moindres carrés ou algorithmes utilisant le critère de l'erreur quadratique moyenne .

En plus, avec chaque couple filtre/algorithmes, il existe plusieurs versions dépendant:

- soit de la version de l'algorithmes adaptatif:

algorithme normalisé ou non normalisé,

- soit du type de signaux:
 - signal scalaire ou signal multidimensionnel,
- soit de la nature de la fenêtre d'observation:
 - fenêtre à oubli exponentiel, fenêtre glissante, etc...,
- soit du type de traitement utilisé:
 - traitement séquentiel (échantillon par échantillon) ou par bloc d'échantillons.

Les algorithmes adaptatifs ont largement été étudiés dans la littérature, il existe plusieurs ouvrages traitant de toutes sortes d'algorithmes adaptatifs [29], [30]-[31] et [3].

Dans notre cas, pour des applications à l'annulation d'écho, la structure du filtre sera évidemment transversale. Nous nous limiterons aux algorithmes basés sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne et ceux des moindres carrés transversaux rapides non normalisés utilisant une fenêtre d'observation à oubli exponentiel.

Ce choix, se justifie par le fait que les algorithmes de cette catégorie sont les algorithmes des moindres carrés les plus rapides connus à ce jour. La dénomination rapide se rapporte au coût, en nombre d'opérations arithmétiques et de la mise en œuvre de ces algorithmes.

Après un bref rappel des algorithmes du gradient stochastique LMS et NLMS (paragraphe 3.2), nous introduisons au paragraphe 3.3 la méthode des moindres carrés exacts par le biais de l'algorithme des moindres carrés récursif (RLS). Au paragraphe 3.4, nous présentons les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides.

3.2. ALGORITHMES DU GRADIENT STOCHASTIQUE LMS ET NLMS

Comme il a été vu au paragraphe précédent, la minimisation de l'EQM à la sortie peut être réalisée à l'aide de l'algorithme du gradient déterministe (3-9) si on dispose de certaines statistiques sur les signaux d'entrée. L'idée des algorithmes de type gradient stochastique est de remplacer la moyenne statistique dans l'algorithme (3-11) par sa valeur instantanée. La mise à jour du filtre basé sur l'algorithme du gradient stochastique (stochastique à cause de la suppression de la moyenne statistique) est gouvernée par le pas d'adaptation α , suivant:

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} + 2\alpha \mathbf{X}_{N,t} \bar{e}_{N,t} \quad (3-14)$$

Cet algorithme itératif est connu dans le domaine du traitement du signal adaptatif sous le nom d'algorithme LMS de Widrow (Least Mean Square algorithm) [29], [3], [4]. L'algorithme du gradient stochastique LMS, de complexité $2N+1$ opérations, est listé dans la table 3.1.

Table 3.1 : Algorithme du gradient stochastique LMS

- choix convenable de α , initialisation de $\mathbf{H}_{N,t}$ ($\mathbf{H}_{N,0} = \mathbf{0}$)
- A l'instant t , acquisition de x_t et y_t et mémorisation de x_t

$$\bar{e}_{N,t} = y(t) - \mathbf{H}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t}$$

- Adaptation du Filtre (Mise à jour des coefficients du filtre)

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} + 2\alpha \cdot \mathbf{X}_{N,t} \bar{e}_{N,t}$$

La condition nécessaire et suffisante de convergence de l'algorithme LMS est [4]:

$$0 < \alpha < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (3-15)$$

où λ_{\max} est la plus grande valeur propre de la matrice d'autocorrélation $\mathbf{R}_{N,XX}$ donnée par (3-7).

Cette condition est établie sous l'hypothèse que le vecteur $\mathbf{H}_{N,t-1}$ est indépendant du vecteur signal d'entrée $\mathbf{X}_{N,t}$. En pratique, puisque λ_{\max} n'est pas disponible, on utilise souvent, pour le choix de la constante α , une condition plus restrictive, (c'est une approximation de la condition (3-15), [29], [32], [3], [33]):

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{\text{trace}(\mathbf{R}_{N,XX})} \quad (3-16)$$

cette dernière condition exploite le caractère défini positif de la matrice d'autocorrélation (3-8) ($\lambda_{\max} < \text{trace}(\mathbf{R}_{N,XX})$).

L'algorithme est stable sous les conditions (3-15) ou (3-16). Mais l'existence de plusieurs modes de convergence dans le vecteur $\mathbf{H}_{N,t}$ rend la qualité (en terme de vitesse) de convergence fonction essentiellement du rapport de la plus grande valeur

propre à la plus faible valeur propre $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ de $\mathbf{R}_{N,XX}$ [29], [32], [31], [3], [33], [34], plus l'étalement de ces valeurs propres (rapport de la plus grande valeur à la plus petite) est élevé, plus lente est la convergence des coefficients. C'est peut être la seule limitation de l'algorithme LMS dans des applications où le signal d'entrée possède une grande dynamique spectrale. D'ailleurs, c'est pour cette raison qu'on tente d'utiliser dans des applications d'annulation d'écho des algorithmes de type moindres carrés exacts, dont la vitesse de convergence est indépendante de la dispersion des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée [29], [3], [33].

Les performances asymptotiques de l'algorithme LMS peuvent se résumer par le compromis à faire entre une EQM (en précision infinie) faible (α faible) d'une part c'est à dire proche de l'optimum de Wiener-Hopf et une meilleure vitesse de convergence et/ou une bonne capacité de poursuite des non-stationnarités (α grand) d'autre part. Des valeurs de α optimisant la vitesse de convergence initiale ou la capacité de poursuite d'un filtre variable sont données dans [34]. Notons enfin que l'analyse en virgule fixe effectuée par [35] montre que l'EQM due à la réalisation des calculs en précision finie est inversement proportionnelle au pas d'adaptation α et propose, pour améliorer les performances de l'algorithme en virgule fixe à précision limitée, de coder le vecteur des coefficients $\mathbf{H}_{N,t}$ avec plus de précision que les signaux x_t , y_t , et $\bar{e}_{N,t}$.

Pour les signaux d'entrée non-stationnaires, comme la parole par exemple, on choisit souvent une version de l'algorithme LMS facilitant le choix du pas d'adaptation constant. En effet, la condition de convergence (3-16) de l'algorithme LMS de Widrow dépend de la puissance du signal d'entrée x_t . Pour rendre les performances de l'algorithme indépendantes de cette puissance, on normalise le gain scalaire α de l'algorithme LMS par une quantité dépendant de l'énergie du signal d'entrée. Si on multiplie et on divise le pas d'adaptation α de l'expression (3-14) par la trace de la matrice $\mathbf{R}_{N,XX}$ et si on pose $\alpha' = \alpha \cdot \text{trace}(\mathbf{R}_{N,XX})$, l'expression (3-14) devient:

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} + \frac{2\alpha'}{\text{trace}(\mathbf{R}_{N,XX})} \cdot \mathbf{X}_{N,t} \bar{e}_{N,t} \quad (3-17)$$

Cette expression représente l'algorithme LMS normalisé appelé NLMS.

D'après (3-16), une condition suffisante pour la convergence de (3-17) est donnée par:

$$0 < \alpha' \leq 1 \quad (3-18)$$

En pratique, on substitue à la trace de \mathbf{R} une estimée à court terme. Ceci peut se faire, par exemple, par le calcul de l'énergie de x sur une fenêtre rectangulaire glissante de dimension N :

$$\hat{E}(t) = \text{trace}(\mathbf{R}_{N,XX}) = \mathbf{X}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,t} + c \quad (3-19)$$

où c est une constante positive ou nulle qui évite, dans les zones de très faible énergie, des divisions par de très faibles valeurs [29].

L'algorithme LMS à gain normalisé (NLMS), de complexité $3N$ opérations, ainsi obtenu est résumé dans la table 3.2. Cet algorithme est appelé parfois algorithme de la projection [29], [36].

Notons enfin qu'il existe une version de l'algorithme NLMS plus rapide que celle de la table 3.2. La réduction de complexité est obtenue en calculant l'énergie (3-19) d'une manière récursive sur une fenêtre à facteur d'oubli exponentiel w ($0 < w < 1$):

$$\hat{E}(t) = w \cdot \hat{E}(t-1) + (1-w)Nx_t^2 \quad (3-20)$$

Pendant très longtemps la mise à jour du filtre annulateur d'écho se faisait par l'algorithme des moindres carrés moyens (LMS:Least Mean Square) développé par Widrow [3][4], vue sa simplicité et ses performances en poursuite lente.

Il existe une littérature abondante sur l'algorithme LMS de laquelle se dégage comme nous venons de le voir que le compromis entre finesse et vitesse de convergence est très dépendant des statistiques du signal d'excitation et du rapport des valeurs propres extrémales de la matrice d'autocorrélation, ce qui constitue un grand inconvénient dans le cas de l'identification de grands systèmes tel que le canal de transmission (jusqu'à 8000 coefficients en acoustique).

D'ailleurs, c'est pour cette raison qu'on tente d'utiliser dans les applications d'annulation d'écho des algorithmes de type moindres carrés, dont la vitesse de convergence est indépendante de la dispersion des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée.

Table 3.2 Algorithme du gradient stochastique normalisé NLMS

Choix convenable de α , Initialisation de $\mathbf{H}_{N,t}$ ($\mathbf{H}_{N,0} = 0$)

Choix convenable de c

acquisition de x_t et y_t et mémorisation de x_t

Calcul de l'énergie de normalisation:

$$\hat{E}(t) = \mathbf{X}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,t}, \quad (\hat{E}(t) = c \text{ si } \hat{E}(t) < c)$$

Filtrage de y_t

$$\bar{e}_{N,t} = y(t) - \mathbf{H}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t}$$

Adaptation du Filtre (Mise à jour des coefficients du filtre)

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} + \frac{2\alpha'}{\text{trace}(\mathbf{R}_{N,XX})} \cdot \mathbf{X}_{N,t} \bar{e}_{N,t}$$

3.3 ALGORITHME DES MOINDRES CARRÉS RECURSIF (RLS)

Dans la méthode des moindres carrés, au lieu de minimiser un critère statistique établi sur l'erreur commise en estimant un signal $y(t)$ à partir d'une combinaison linéaire d'un autre signal $x(t)$, on minimise, à chaque instant t , la somme pondérée des carrés des erreurs commises depuis l'instant initial. La méthode des moindres carrés, ne faisant aucune hypothèse statistique, vise à minimiser par rapport au vecteur des paramètres $\mathbf{H}_{N,t}$ un critère de la forme [27][34], [13]:

$$J_N(t) = \sum_{i=1}^t w(t-i) \cdot e^2(i) = \sum_{i=1}^t w(t-i) \cdot [y(i) - \mathbf{H}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,i}]^2 \quad (3-21)$$

où $e(k)$ est l'erreur instantanée et $w(t)$ la fenêtre de pondération.

La fenêtre la plus fréquemment utilisée est l'exponentielle λ^t , où $\lambda(0 < \lambda \leq 1; t \geq 0)$ est un facteur d'oubli exponentiel qui permet à l'algorithme d'oublier le passé trop lointain et de poursuivre les non-stationnarités intervenant dans les signaux.

$$J_N(t) = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} (y(i) - \mathbf{H}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,i})^2 \quad (3-22)$$

Dans ce critère, on suppose que les signaux x_t et y_t sont nuls avant l'instant initial $t=0$; c'est à dire, on se place dans le cas dit de la fenêtre antérieure (« prewindowed case ») [29][28][32][33].

La solution qui exprime la nullité du gradient de la fonctionnelle $J_n(t)$ est [29][37][3][33] [34] :

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{R}_{N,t}^{-1} \Gamma_{N,t} \quad (3-23)$$

où la matrice $\mathbf{R}_{N,t}$ représente une matrice d'autocorrélation à court terme :

$$\mathbf{R}_{N,t} = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \mathbf{X}_{N,i} \mathbf{X}_{N,i}^T = \lambda \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{(t-1)-i} \mathbf{X}_{N,i} \mathbf{X}_{N,i}^T + \mathbf{X}_{N,t} \mathbf{X}_{N,t}^T \quad (3-24)$$

$$\mathbf{R}_{N,t} = \lambda \mathbf{R}_{N,t-1} + \mathbf{X}_{N,t} \mathbf{X}_{N,t}^T \quad (3-25)$$

Le vecteur $\Gamma_{N,t}$ désigne un vecteur d'intercorrélation à court terme :

$$\Gamma_{N,t} = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \mathbf{X}_{N,i} y(i) \quad (3-26)$$

$$= \lambda \Gamma_{N,t-1} + \mathbf{X}_{N,t} y(t) \quad (3-27)$$

En utilisant les deux expressions déduites de (3-25) et (3-27) :

$$\lambda \mathbf{R}_{N,t-1} = \mathbf{R}_{N,t} - \mathbf{X}_{N,t} \mathbf{X}_{N,t}^T$$

$$\lambda \Gamma_{N,t-1} = \Gamma_{N,t} - \mathbf{X}_{N,t} y(t)$$

dans la version de (3-23) ci-dessous :

$$\lambda \mathbf{R}_{N,t-1} \mathbf{H}_{N,t-1} = \lambda \Gamma_{N,t-1}$$

on aboutit à la mise à jour du filtre sous une forme récursive suivante :

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} - \mathbf{C}_{N,t} (y(t) - \mathbf{H}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t})$$

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} - \mathbf{C}_{N,t} \bar{e}_{N,t} \quad (3-28)$$

où le vecteur $\mathbf{C}_{N,t}$ est appelé gain de Kalman [30], [32], [33] :

$$\mathbf{C}_{N,t} = [\mathbf{C}_{N,t}^1, \mathbf{C}_{N,t}^2, \dots, \mathbf{C}_{N,t}^N]^T = -\mathbf{R}_{N,t}^{-1} \mathbf{X}_{N,t} \quad (3-29)$$

L'algorithme (3-28) nécessite l'inversion d'une matrice carré d'ordre N dont le coût de calcul est de l'ordre de N^3 opérations arithmétiques par itérations. L'algorithme RLS réalise

cette inversion matricielle en appliquant à la matrice $\mathbf{R}_{N,t}$ le lemme d'inversion matricielle suivant [29], [38] :

$$\begin{cases} (\mathbf{A} + \mathbf{UV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{UV}^T \mathbf{A}^{-1} / (1 + \mathbf{V}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}) \\ \text{avec } \mathbf{A} = \lambda \cdot \mathbf{R}_{N,t-1}; \mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{X}_{N,t} \end{cases} \quad (3-30)$$

on obtient la relation de récurrence qui nous résoudra le problème d'inversion de la matrice $\mathbf{R}_{N,t}^{-1}$, qui demande un ordre d'opérations arithmétiques proportionnel à N^2 .

$$\mathbf{R}_{N,t}^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} - \frac{\mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} \mathbf{X}_{N,t} \mathbf{X}_{N,t}^T \mathbf{R}_{N,t-1}^{-1}}{\lambda + \mathbf{X}_{N,t-1}^T \mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} \mathbf{X}_{N,t}} \right] \quad (3-31)$$

L'algorithme RLS à facteur d'oubli exponentiel complet est résumé dans la table 3.3. Pour assurer la stabilité de l'algorithme RLS, on force la symétrie de la matrice R par la relation suivante [29], [39]:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{R}_{N,t}^{-1} + \mathbf{R}_{N,t}^{-T}) = \mathbf{I} \quad (3-32)$$

\mathbf{I} étant la matrice identité

Notons que les variables de l'algorithme MCR (Moindres Carrées Rapides), appelées gain de Kalman dual $\tilde{\mathbf{C}}_{N,t}$ et variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ (voir prochain paragraphe pour les définitions), peuvent être calculées directement par l'algorithme RLS ou obtenues à partir des variables $\mathbf{K}_{N,t}$ et $k_{N,t}$ par les formules suivantes:

$$\gamma_{N,t} = \frac{\lambda}{k_{N,t}} \quad (3-33)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{N,t} = -\lambda^{-1} \mathbf{K}_{N,t} \quad (3-34)$$

Table 3.3 : Algorithme RLS à facteur d'oubli exponentiel

Initialisation:

$$\mathbf{R}_{N,0}^{-1} = c \cdot \mathbf{I}_N, \quad c > 0$$

Acquisition de x_t et y_t et mémorisation de x_t

Adaptation du gain de Kalman $C_{N,t}$:

Calcul d'un vecteur $\mathbf{K}_{N,t}$ et d'un scalaire $k_{N,t}$ intermédiaires:

$$\mathbf{K}_{N,t} = \mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} \mathbf{X}_{N,t}$$

$$k_{N,t} = \lambda + \mathbf{K}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,t},$$

Calcul du gain de Kalman:

$$\mathbf{C}_{N,t} = -k_{N,t}^{-1} \mathbf{K}_{N,t}$$

Calcul de l'inverse de la matrice d'autocorrélation:

$$\mathbf{R}_{N,t}^{-1} = \lambda^{-1} (\mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} - k_{N,t}^{-1} \mathbf{K}_{N,t} \mathbf{K}_{N,t}^T)$$

Filtrage de y_t (Calcul de l'erreur à priori)

$$\bar{e}_{N,t} = y(t) - \mathbf{H}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t}$$

Adaptation du Filtre: (Mise à jour des coefficients du filtre)

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} - \mathbf{C}_{N,t} \bar{e}_{N,t}$$

L'approche des moindres carrés constituait l'alternative, toutefois sa grande complexité (de l'ordre de N^2 opérations arithmétiques par itération) comparée à celle de LMS (de complexité de $2N+1$) la rendait impossible à mettre en œuvre.

Des versions rapides (Moindres Carrés Rapides MCR) comme le FTF: Fast Transversal Filter ont été développées. Elles présentent cependant des problèmes d'instabilité numérique lors de leur implantation.

3.4 ALGORITHMES DES MOINDRES CARRÉS TRANSVERSAUX RAPIDES

3.4.1 Introduction

L'algorithme RLS permet, en propageant une matrice carrée $N \times N$, de trouver itérativement la solution qui minimise le critère (3-22). Cette solution nécessite un coût en opérations arithmétiques proportionnel à N^2 . Durant cette dernière décennie, on s'est aperçu que la solution des moindres carrés pouvait être obtenue avec un coût opératoire proportionnel à N ; c'est ce qu'on appelle les algorithmes des moindres carrés rapides. Ces algorithmes dits rapides peuvent être divisés en deux catégories selon la structure utilisée [29]:

➤ algorithmes des MC rapides à structure transversale. Dans cette catégorie, on génère la solution des moindres carrés, à chaque instant t , pour un ordre donné N , en propageant 3 vecteurs d'ordre N (deux prédicteurs aller et retour et le gain de Kalman) au lieu d'une matrice. Les plus rapides algorithmes des MC connus à ce jour appartiennent à cette catégorie, ce sont les algorithmes non normalisés, dans le cas du préfenêtrage des données, faisant intervenir des erreurs a-posteriori [29].

➤ algorithmes des MC rapides à structure en treillis (ou treillis + transverse). Ces algorithmes génèrent la solution des MC, à chaque instant t et pour tous les ordres N à partir de l'ordre $N=1$, en propageant un jeu de coefficients, appelés coefficients de réflexion, équivalents aux coefficients de prédictions aller/retour.

Par la suite, on se limite aux algorithmes des moindres carrés transversaux rapides non normalisés à facteur d'oubli exponentiel obtenus dans le cas d'un préfenêtrage des signaux d'entrée (les signaux sont supposés nuls avant l'instant initial). On utilisera souvent la dénomination algorithmes des moindres carrés récursifs rapides (MCRR) pour désigner ce type d'algorithmes. Il existe plusieurs études de synthèse concernant l'obtention des algorithmes des MC transversaux rapides dans la littérature. Dans les références [5] et [40], on trouve les algorithmes MCR décrits par l'approche géométrique. L'obtention de ces mêmes algorithmes par l'approche algébrique est étudiée en détail dans les références [41], [39] et [42]. Dans les paragraphes qui suivent, nous décrirons brièvement l'essentiel des équations qui permettent d'obtenir les algorithmes des MC transversaux rapides à facteur d'oubli exponentiel pour le cas de préfenêtrage. Les équations présentées ici peuvent être retrouvées ou déduites des références [41] et [42].

3.4.2. Obtention des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides:

Partant de la simple remarque que la matrice d'autocorrelation à l'instant $(t+1)$ et à l'ordre de $(N+1)$ peut être exprimée de deux manières différentes, dont les composantes sont très liées avec la prédiction avant et arrière, on aboutit en utilisant le lemme d'inversion d'une matrice partitionnée, et la notion de rang de déplacement, à un algorithme de complexité très réduite $(7N)$ [3], [27], [34], [13]. La prédiction avant permet le passage du gain à l'instant $(t-1)$ et à l'ordre N au gain $\mathbf{C}_{N+1, (t+1)}$, et la prédiction arrière permet la mise à jour de $\mathbf{C}_{N, t}$ sachant $\mathbf{C}_{N+1, (t+1)}$:

Le but de la méthode des moindres carrés est de trouver le vecteur $\mathbf{H}_{N, t}$, qui minimise le critère (3-22). Une solution récursive à ce problème est donnée par l'algorithme (3-28). Cet algorithme utilise une erreur de filtrage a-priori (3-13) et un vecteur gain d'adaptation d'ordre N , qu'on a appelé gain de Kalman (3-29). Si on substitue (3-25) et (3-27) dans (3-23), on obtient une autre forme récursive du vecteur $\mathbf{H}_{N, t}$ strictement équivalente à (3-28), faisant intervenir une erreur de filtrage a-posteriori et un gain d'adaptation appelé gain de Kalman dual:

$$\mathbf{H}_{N, t} = \mathbf{H}_{N, t-1} - \tilde{\mathbf{C}}_{N, t} \cdot e_{N, t} \quad (3-35)$$

où $e_{N, t}$ désigne l'erreur de filtrage a-posteriori (calculée après mise à jour du filtre) et $\tilde{\mathbf{C}}_{N, t}$ le gain de Kalman dual. Ces grandeurs sont définies par les équations suivantes:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{N, t} = -\lambda^{-1} \mathbf{R}_{N, t-1}^{-1} \mathbf{X}_{N, t} \quad (3-36)$$

$$e_{N, t} = y(t) - \mathbf{H}_{N, t}^T \mathbf{X}_{N, t} \quad (3-37)$$

D'après les équations (3-35) et (3-37), l'algorithme (3-35) ne peut être appliqué tel quel car l'adaptation et le filtrage ne peuvent être réalisés en même temps, ceci est dû au fait que $e_{N,t}$ dépend de $\mathbf{H}_{N,t}$ qui est inconnu. Comme nous allons le voir par la suite, l'un des avantages des algorithmes MCR est que les erreurs a-posteriori peuvent être calculées à partir des erreurs a-priori avant l'opération d'adaptation. Le but des algorithmes MCR est de propager un vecteur gain qui est soit le gain de Kalman $\mathbf{C}_{N,t}$, soit le vecteur gain de Kalman dual $\tilde{\mathbf{C}}_{N,t}$. Pour cela, on exploite certaines propriétés d'invariance par décalage du vecteur signal d'entrée et de sa matrice d'autocorrélation. Le vecteur signal étendu à l'ordre N+1 peut s'écrire:

$$\mathbf{X}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} x_t \\ \mathbf{X}_{N,t-1} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

ou

$$\mathbf{X}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N,t} \\ x_{t-N} \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

Ces deux formes du vecteur signal permettent de définir deux matrices d'autocorrélation d'ordre N+1 partitionnées. La première, qui correspond au vecteur (3-38), s'écrit:

$$\mathbf{R}_{N+1,t} = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{X}_{N,i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & \mathbf{X}_{N,i-1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{0,t}^a & \Gamma_{N,t}^{a,T} \\ \Gamma_{N,t}^a & \mathbf{R}_{N,t-1} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

où:

$$\Gamma_{0,t}^a = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x_i^2 \quad (3-41)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{N,t}^a &= \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x_i \mathbf{X}_{N,i-1} \\ &= \lambda \Gamma_{N,t-1}^a + x_t \mathbf{X}_{N,t-1} \end{aligned} \quad (3-42)$$

Cette même matrice s'écrit pour la deuxième forme (3-39) du vecteur d'entrée:

$$\mathbf{R}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{N,t} & \Gamma_{N,t}^r \\ \Gamma_{N,t}^{r,T} & \Gamma_{0,t}^r \end{bmatrix} \quad (3-43)$$

où

$$\Gamma_{0,t}^r = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x_{i-N}^2 \quad (3-44)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{N,t}^r &= \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x_{i-N} \mathbf{X}_{N,i} \\ &= \lambda \Gamma_{N,t-1}^r + x_{t-N} \mathbf{X}_{N,t}\end{aligned}\quad (3-45)$$

Le calcul du gain de Kalman (3-29) ou du gain de Kalman dual (3-36) fait intervenir l'inverse de la matrice d'autocorrélation à court terme. Pour réaliser cette inversion, on utilise le lemme d'inversion d'une matrice partitionnée [29], [41], [42]. Si \mathbf{R} désigne une matrice partitionnée:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{bmatrix}\quad (3-46)$$

l'inverse de cette matrice \mathbf{R} s'écrit de manière générale (on suppose la compatibilité des dimensions et l'existence des inverses de certaines matrices de \mathbf{R}):

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{W} - \mathbf{Z}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y})^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{Z}\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\quad (3-47)$$

où

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z} \end{bmatrix} (\mathbf{X} - \mathbf{Y}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{Y}\mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix}\quad (3-48)$$

En utilisant la forme (3-47) pour inverser la matrice (3-43) et la forme (3-48) pour inverser la matrice (3-40), il vient:

$$\mathbf{R}_{N+1,t}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{N,t}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{N,t}^{-1}\Gamma_{N,t}^r \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\Gamma_{0,t}^r - \Gamma_{N,t}^{rT} \mathbf{R}_{N,t}^{-1} \Gamma_{N,t}^r)^{-1} \begin{bmatrix} -\Gamma_{N,t}^{rT} \mathbf{R}_{N,t}^{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\quad (3-49)$$

$$\mathbf{R}_{N+1,t}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{R}_{N,t-1}^{-1}\Gamma_{N,t}^a \end{bmatrix} (\Gamma_{0,t}^a - \Gamma_{N,t}^{aT} \mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} \Gamma_{N,t}^a)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\Gamma_{N,t}^{aT} \mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} \end{bmatrix}\quad (3-50)$$

La forme (3-49) fait apparaître un prédicteur retour optimal au sens des moindres carrés (le terme retour désigne la modélisation de l'échantillon x_{t-N} par une combinaison linéaire de N échantillons futurs),

$$\mathbf{b}_{N,t} = \mathbf{R}_{N,t}^{-1} \Gamma_{N,t}^r\quad (3-51)$$

optimal au sens des moindres carrés, c'est à dire minimisant le critère suivant:

$$J_{N,t}^r = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} (x_{i-N} - \mathbf{b}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,i})^2\quad (3-52)$$

Les versions récursives du prédicteur retour (3-51) faisant intervenir soit le gain de Kalman (3-29), soit le gain de Kalman dual (3-36), s'obtiennent de la même façon que les versions récursives (3-28) et (3-35) du filtre transverse $\mathbf{H}_{N,t}$:

$$\mathbf{b}_{N,t} = \mathbf{b}_{N,t-1} - \mathbf{C}_{N,t} \bar{r}_{N,t} \quad (3-53)$$

$$\mathbf{b}_{N,t} = \mathbf{b}_{N,t-1} - \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} r_{N,t} \quad (3-54)$$

où $\bar{r}_{N,t}$ et $r_{N,t}$ désignent respectivement les erreurs de prédiction retour a-priori et a-posteriori:

$$\bar{r}_{N,t} = \mathbf{x}_{t-N} - \mathbf{b}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \quad (3-55)$$

$$r_{N,t} = \mathbf{x}_{t-N} - \mathbf{b}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,t} \quad (3-56)$$

De la même façon, la forme (3-50) fait apparaître un prédicteur aller, pour la modélisation de x_t à partir d'une combinaison linéaire de son passé:

$$\mathbf{a}_{N,t} = \mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} \Gamma_{N,t}^a \quad (3-57)$$

Ce vecteur peut être obtenu en minimisant le critère des moindres carrés suivant:

$$J_{N,t}^a = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} (x_i - \mathbf{a}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,i-1})^2 \quad (3-58)$$

Les versions récursives de $\mathbf{a}_{N,t}$, s'obtiennent en substituant dans la solution optimale (3-57) des versions récursives de $\mathbf{R}_{N,t-1}^{-1}$ et de $\Gamma_{N,t}^a$. Elles s'écrivent:

$$\mathbf{a}_{N,t} = \mathbf{a}_{N,t-1} - \mathbf{C}_{N,t-1} \bar{e}_{N,t} \quad (3-59)$$

$$\mathbf{a}_{N,t} = \mathbf{a}_{N,t-1} - \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1} e_{N,t} \quad (3-60)$$

où $\bar{e}_{N,t}$ et $e_{N,t}$ sont les erreurs de prédiction aller a-priori et a-posteriori:

$$\bar{e}_{N,t} = x_t - \mathbf{a}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t-1} \quad (3-61)$$

$$e_{N,t} = x_t - \mathbf{a}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,t-1} \quad (3-62)$$

On reconnaît aussi que les termes entre parenthèses dans les expressions (3-49) et

(3-50) $\{(\Gamma_{0,t}^r - \Gamma_{N,t}^{rT} \mathbf{R}_{N,t}^{-1} \Gamma_{N,t}^r)\}$ et $\{(\Gamma_{0,t}^a - \Gamma_{N,t}^{aT} \mathbf{R}_{N,t-1}^{-1} \Gamma_{N,t}^a)\}$ sont respectivement les variances des erreurs de prédiction aller et retour (minima des critères (3-52) et (3-58) respectivement) [29], [32], [36], [38], [3], [33]. Leurs versions récursives s'écrivent [29], [41]:

$$\alpha_{N,t} = \lambda \alpha_{N,t-1} + \bar{e}_{N,t} e_{N,t} \quad (3-63)$$

$$\beta_{N,t} = \lambda \beta_{N,t-1} + \bar{r}_{N,t} r_{N,t} \quad (3-64)$$

où $\alpha_{N,t}$ désigne la variance des erreurs de prédiction aller et $\beta_{N,t}$ celle des erreurs de prédiction retour.

Les équations qui vont permettre de propager les gains de Kalman s'obtiennent en multipliant à droite les expressions (3-49) et (3-50) par le vecteur $-\mathbf{X}_{N+1,t}$ convenablement partitionné:

$$\mathbf{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}_{N,t} \end{bmatrix} \frac{e_{N,t}}{\alpha_{N,t}} \quad (3-65)$$

$$\mathbf{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{N,t} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{r_{N,t}}{\beta_{N,t}} \quad (3-66)$$

De la même manière, en multipliant à droite (3-49) et (3-50) (prises à l'instant $t-1$) par $-\lambda^{-1} \mathbf{X}_{N+1,t}^T$, on obtient deux expressions pour le gain de Kalman dual d'ordre $N+1$:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}_{N,t-1} \end{bmatrix} \frac{\bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \quad (3-67)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\bar{r}_{N,t}}{\lambda \beta_{N,t-1}} \quad (3-68)$$

Il faut noter que les expressions (3-65), (3-66), (3-67) et (3-68) font apparaître des erreurs de prédiction qui peuvent être calculées, sans utiliser les relations de convolution (3-55 & 3-56) ou (3-61 & 3-62), si on dispose de la première ou de la $N+1^{\text{ème}}$ composante du gain de Kalman ou du gain de Kalman dual [29]:

$$e_{N,t} = -\alpha_{N,t} \mathbf{C}_{N+1,t}^1 \quad (3-69)$$

$$\bar{e}_{N,t} = -\lambda \alpha_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^1 \quad (3-70)$$

$$r_{N,t} = -\beta_{N,t} \mathbf{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (3-71)$$

$$\bar{e}_{N,t} = -\lambda \beta_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (3-72)$$

Remarque: Il faut insister sur le fait que les algorithmes MCR rapides sont développés pour calculer le gain de Kalman rapidement. Or ce dernier est la résolution du système d'équations donné en (3-29). Il s'est avéré que ce système possède une propriété intéressante de décalage, ce qui permet de le résoudre par une méthode rapide (c.à.d par un algorithme de type Levinson). Cette manière de résolution fait apparaître trois filtres intermédiaires à savoir le filtre prédictor directe, le filtre prédictor rétrograde ou retour et le filtre du gain. Donc la différence entre l'algorithme donné dans la table 3.3 et ceux donné dans les tables 3.4, 3.5 et 3.6 réside dans la manière de calcul du gain de Kalman.

Par ailleurs, parmi les relations qui permettent de réduire la complexité dans les algorithmes, on trouve les relations qui lient les erreurs a-priori aux erreurs a-posteriori. Pour voir cela, il suffit de prendre par exemple l'erreur de filtrage a-posteriori (3-37) et de remplacer le filtre $\mathbf{H}_{N,t}$ par son équation d'adaptation (3-28). Il vient:

$$e_{N,t} = \bar{e}_{N,t} (1 + \mathbf{C}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t}) \quad (3-73)$$

Le terme entre parenthèses dans cette expression définit ce que l'on appelle la variable de vraisemblance [29], [38], [31], [33], [3]:

$$\begin{aligned} \gamma_{N,t} &= 1 + \mathbf{C}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \\ &= 1 - \mathbf{X}_{N,t}^T \mathbf{R}_{N,t}^{-1} \mathbf{X}_{N,t} \end{aligned} \quad (3-74)$$

En théorie, la matrice $\mathbf{R}_{N,t}$ et son inverse sont définis positifs. La variable $\gamma_{N,t}$ sera donc comprise entre 0 et 1 pour un fonctionnement normal de l'algorithme.

L'algorithme sauvegarde son caractère de moindres carrés tant que le rapport des erreurs de prédiction à priori et à posteriori désigné par la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ est inférieure à 1.

$$\text{Ainsi la condition } 0 < \gamma_{N,t} \leq 1 \quad (3-75)$$

est un bon test de la stabilité numérique de l'algorithme.

De la même façon, on obtient les relations entre les erreurs de prédiction a-priori et a-posteriori:

$$e_{N,t} = \gamma_{N,t-1} \bar{e}_{N,t} \quad (3-76)$$

$$\gamma_{N,t} = \gamma_{N,t-1} \bar{r}_{N,t} \quad (3-77)$$

D'autre part, les équations de mise à jour des vecteurs $\mathbf{H}_{N,t}$, $\mathbf{a}_{N,t}$ et $\mathbf{b}_{N,t}$ utilisant soit les erreurs a-priori, soit les erreurs a-posteriori, sont strictement équivalentes. Ceci conduit, en égalant deux d'entre elles, à la relation qui lie le gain de Kalman au gain de Kalman dual:

$$\mathbf{C}_{N,t} = \gamma_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} \quad (3-78)$$

En substituant cette relation dans (3-74), on a:

$$\gamma_{N,t} = \frac{1}{1 - \tilde{\mathbf{C}}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,t}} \quad (3-79)$$

Dans les algorithmes MCR, au lieu d'utiliser les définitions (3-74) ou (3-79) de la variable de vraisemblance, on utilise des versions plus rapides pour réduire la complexité. Ceci s'obtient en appliquant à la définition (3-74) les formes (3-65) et (3-66). En multipliant (3-65) à gauche par le vecteur $[x_t \quad \mathbf{X}_{N,t-1}^T]$, on trouve l'expression de la variable de vraisemblance d'ordre N+1 en fonction de celle d'ordre N:

$$\gamma_{N+1,t} = \frac{\lambda \alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t}} \gamma_{N,t-1} \quad (3-80)$$

De la même manière, en multipliant (3-66) à gauche par le vecteur $[\mathbf{X}_{N,t}^T \quad x_{t-N}]$, il vient:

$$\gamma_{N+1,t} = \frac{\lambda \beta_{N,t-1}}{\beta_{N,t}} \gamma_{N,t-1} \quad (3-81)$$

On pose:

$$\theta_{N,t} = \frac{\lambda \beta_{N,t-1}}{\beta_{N,t}} \quad (3-82)$$

qui s'écrit aussi (en manipulant les expressions (3-64) et (3-71)) :

$$\begin{aligned} \theta_{N,t} &= 1 + \bar{r}_{N,t} C_{N+1,t}^{N+1} \\ &= 1 + \bar{r}_{N,t} \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \end{aligned} \quad (3-83)$$

On calcule alors la variable de vraisemblance d'ordre N par la relation suivante:

$$\gamma_{N,t} = \frac{\gamma_{N+1,t}}{\theta_{N,t}} \quad (3-84)$$

Certains algorithmes rapides, au lieu de propager la variable $\gamma_{N,t}$ propagent son inverse :

$$\tilde{\gamma}_{N,t} = \frac{1}{\gamma_{N,t}} \quad (3-85)$$

D'après la relation (3-79), on a :

$$\tilde{\gamma}_{N,t} = (\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{C}}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,t}) \quad (3-86)$$

La technique rapide pour obtenir cette variable est identique à celle pour la variable $\gamma_{N,t}$. Il faut utiliser les formes (3-67) et (3-68) au lieu de (3-65) et (3-66):

$$\tilde{\gamma}_{N+1,t} = \tilde{\gamma}_{N,t-1} + \frac{\bar{e}_{N,t}^2}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \quad (3-87)$$

$$\tilde{\gamma}_{N+1,t} = \tilde{\gamma}_{N,t-1} + \frac{\bar{r}_{N,t}^2}{\lambda \beta_{N,t-1}} \quad (3-88)$$

En utilisant (3-72), on peut calculer la variable $\tilde{\gamma}_{N,t}$ comme suit:

$$\tilde{\gamma}_{N,t} = \tilde{\gamma}_{N+1,t} + \frac{\bar{r}_{N,t}}{\tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}} \quad (3-89)$$

On montre aussi, en utilisant l'expression (3-65), la définition de la variable de vraisemblance (3-74), la propriété de $(\mathbf{I} + \mathbf{X}^T \mathbf{Y}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{X} \mathbf{Y}^T)$ et les liens entre les déterminants des matrices $\mathbf{R}_{N+1,t}$ et $\mathbf{R}_{N,t}$, que la variable de vraisemblance peut se mettre sous la forme suivante [41], [43]:

$$\begin{aligned} \gamma_{N,t} &= \lambda^N \frac{\det(\mathbf{R}_{N,t-1})}{\det(\mathbf{R}_{N,t})} \\ &= \lambda^N \frac{\beta_{N,t-1}}{\alpha_{N,t}} \end{aligned} \quad (3-90)$$

3.4.3. Trois algorithmes des moindres carrés transversaux rapides

A partir des équations obtenues du raisonnement précédent, un grand nombre d'algorithmes MCR peuvent être obtenus. Tous ces algorithmes sont théoriquement équivalents et calculent la solution des moindres carrés avec un nombre de multiplications proportionnel à l'ordre N. Par la suite nous retiendrons trois algorithmes MCR les plus connus dans la littérature. Parmi ceux-ci, on trouve celui qu'on appelle l'algorithme de Kalman rapide (Fast Kalman Algorithm) [40][41] [29][44] [45]. Cet algorithme se caractérise par le calcul du gain de Kalman $C_{N,t}$, il n'utilise ni les erreurs a-posteriori, ni la variable de vraisemblance. Dans ces conditions, la mise à jour des vecteurs $\mathbf{b}_{N,t}$ (3-53) et $C_{N,t}$ (à partir de (3-66)) ne peut se faire en même temps. Pour contourner ce problème, on utilise l'expression (3-71) qui lie l'erreur de prédiction retour a-priori à la (N+1)^{ème} composante du gain de Kalman d'ordre N+1. On aura deux choix possibles pour adapter les vecteurs $C_{N,t}$ et $\mathbf{b}_{N,t}$. Pour le premier, on substitue $\mathbf{b}_{N,t}$, (3-53) dans (3-66), en tenant compte de (3-71):

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \bar{r}_{N,t} C_{N+1,t}^{N+1}} \left\{ C_{N+1,t} - C_{N+1,t}^{N+1} \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (3-91)$$

où $\mathbf{b}_{N,t}$ est donné par (3-53) et $C_{N+1,t}$ se calcule par (3-65).

Une autre façon de voir les choses est de substituer $C_{N,t}$ (extrait de (3-66)) dans l'expression de $\mathbf{b}_{N,t}$, en utilisant toujours la propriété (3-71); il vient:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N,t} \\ * \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \bar{r}_{N,t} C_{N+1,t}^{N+1}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N,t-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \bar{r}_{N,t} C_{N+1,t} \right\} \quad (3-92)$$

(* est un terme inutilisé par l'algorithme)

L'algorithme de Kalman rapide complet utilisant l'expression (3-91) pour le calcul du gain de Kalman d'ordre N, de complexité 10N, est résumé dans la table 3.4.

Les algorithmes des Moindres Carrés Récurives les plus rapides se caractérisent par le calcul du gain de Kalman dual $\tilde{C}_{N,t} = C_{N,t} / \gamma_{N,t}$ et font intervenir les erreurs a-posteriori calculées de manière simple à partir des erreurs a-priori. Leur complexité arithmétique est de l'ordre de 7N multiplications par itération. Le premier algorithme de ce type, dû à Carayannis et al. [43] (voir [41] pour l'algorithme à oubli exponentiel λ), fait

propager l'inverse de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$. Cet algorithme est connu sous le nom d'algorithme séquentiel rapide des erreurs a-posteriori (FAEST, « Fast A-posteriori Error Sequential Technique »). Il est résumé dans la table 3.5.

Une version très proche de l'algorithme FAEST a été obtenu par J.M. Cioffi & T. Kailath [5] à l'aide de l'approche géométrique. Cet algorithme fait propager la variable $\gamma_{N,t}$ au lieu de son inverse; il est appelé par ses auteurs algorithme des moindres carrés transversal rapide (FTF, « Fast Transversal Filter »). On l'appelle parfois l'algorithme FTF 7N (7N pour la complexité arithmétique) est résumé dans la table 3.6..

Table 3.4 : Algorithme de Kalman Rapide

➤ Variables disponibles à l'instant t :

$$\mathbf{a}_{N,t-1}, \mathbf{b}_{N,t-1}, \mathbf{C}_{N,t-1}, \alpha_{N,t-1}, \mathbf{H}_{N,t-1}$$

➤ Nouvelles informations x_t et y_t

➤ Modélisation de x_t et x_{t-N} ensuite calcule de:

$$\bar{e}_{N,t} = x_t - \mathbf{a}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t-1} \longrightarrow (3-61)$$

$$\mathbf{a}_{N,t} = \mathbf{a}_{N,t-1} - \mathbf{C}_{N,t-1} \bar{e}_{N,t} \longrightarrow (3-59)$$

$$e_{N,t} = x_t - \mathbf{a}_{N,t}^T \mathbf{X}_{N,t-1} \longrightarrow (3-62)$$

$$\alpha_{N,t} = \lambda \alpha_{N,t-1} + \bar{e}_{N,t} e_{N,t} \longrightarrow (3-63)$$

$$\mathbf{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}_{N,t} \end{bmatrix} \frac{e_{N,t}}{\alpha_{N,t}} \longrightarrow (3-65)$$

$$\bar{r}_{N,t} = x_{t-N} - \mathbf{b}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \longrightarrow (3-55)$$

$$\theta_{N,t} = 1 + \bar{r}_{N,t} \mathbf{C}_{N+1,t}^{N+1} \longrightarrow (3-83)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \theta_{N,t}^{-1} \left\{ \mathbf{C}_{N+1,t} - \mathbf{C}_{N+1,t}^{N+1} \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow (3-91)$$

$$\mathbf{b}_{N,t} = \mathbf{b}_{N,t-1} - \mathbf{C}_{N,t} \bar{r}_{N,t} \longrightarrow (3-53)$$

➤ Filtrage de y_t (erreur de filtrage a-priori)

$$\bar{e}_{N,t} = y_t - \mathbf{H}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \longrightarrow (3-13)$$

➤ Adaptation du Filtre: (Mise à jour des coefficients du filtre)

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} - \mathbf{C}_{N,t} \bar{e}_{N,t} \longrightarrow (3-28)$$

Table 3.5 :Algorithme F A E S T

By
CARAYANNIS
et ALL. [43]

➤ Variables disponibles à l'instant t :

$$\mathbf{a}_{N,t-1}, \mathbf{b}_{N,t-1}, \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1}, \tilde{\gamma}_{N,t-1}, \alpha_{N,t-1}, \beta_{N,t-1}, \mathbf{H}_{N,t-1}$$

➤ Nouvelles informations x_t et y_t

➤ Modélisation de x_t et x_{t-N} ensuite calcule de:

$$\bar{e}_{N,t} = x_t - \mathbf{a}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t-1} \longrightarrow (3-61)$$

$$\alpha_{N,t} = \lambda \alpha_{N,t-1} + \bar{e}_{N,t}^2 \tilde{\gamma}_{N,t-1}^{-1} \longrightarrow (3-63+3-76)$$

$$\tilde{\gamma}_{N+1,t} = \tilde{\gamma}_{N,t-1} + \frac{\bar{e}_{N,t}^2}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \longrightarrow (3-87)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}_{N,t-1} \end{bmatrix} \frac{\bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \longrightarrow (3-67)$$

$$\mathbf{a}_{N,t} = \mathbf{a}_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \tilde{\gamma}_{N,t-1}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1} \longrightarrow (3-60+3-76)$$

$$\bar{r}_{N,t} = -\lambda \beta_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \longrightarrow (3-72)$$

$$\tilde{\gamma}_{N,t} = \tilde{\gamma}_{N+1,t} + \frac{\bar{r}_{N,t}}{\tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1}} \longrightarrow (3-89)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t} - \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow (3-91)$$

$$\mathbf{b}_{N,t} = \mathbf{b}_{N,t-1} - \bar{r}_{N,t} \tilde{\gamma}_{N,t-1}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} \longrightarrow (3-54+3-77)$$

$$\beta_{N,t} = \lambda \beta_{N,t-1} + \bar{r}_{N,t}^2 \tilde{\gamma}_{N,t-1}^{-1} \longrightarrow (3-64+3-77)$$

➤ Filtrage de y_t (erreur de filtrage a-priori)

$$\bar{e}_{N,t} = y_t - \mathbf{H}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \longrightarrow (3-13)$$

$$e_{N,t} = \bar{e}_{N,t} \tilde{\gamma}_{N,t-1}^{-1} \longrightarrow (3-73+3-74)$$

➤ Adaptation du Filtre: (Mise à jour des coefficients du filtre)

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} - \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} e_{N,t} \longrightarrow (3-28+3-78)$$

Table 3.6 :Algorithme F T F

By
J.M.CIOFFI &
T.KAILATH [5]

➤ **Variables disponibles à l'instant t :**

$$\mathbf{a}_{N,t-1}, \mathbf{b}_{N,t-1}, \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1}, \gamma_{N,t-1}, \alpha_{N,t-1}, \beta_{N,t-1}, \mathbf{H}_{N,t-1}$$

➤ **Nouvelles informations** x_t et y_t

➤ **Modélisation de** x_t et x_{t-N} **ensuite calcule de:**

$$\bar{e}_{N,t} = x_t - \mathbf{a}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t-1} \longrightarrow (3-61)$$

$$\alpha_{N,t} = \lambda \alpha_{N,t-1} + \bar{e}_{N,t}^2 \gamma_{N,t-1} \longrightarrow (3-63+3-76)$$

$$\gamma_{N+1,t} = \frac{\lambda \alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t}} \gamma_{N,t-1} \longrightarrow (3-80)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}_{N,t-1} \end{bmatrix} \frac{\bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \longrightarrow (3-67)$$

$$\mathbf{a}_{N,t} = \mathbf{a}_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1} \longrightarrow (3-60+3-76)$$

$$\bar{r}_{N,t} = -\lambda \beta_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \longrightarrow (3-72)$$

$$\gamma_{N,t} = \frac{\gamma_{N+1,t}}{1 + \gamma_{N+1,t} \bar{r}_{N,t} \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1}} \longrightarrow (3-84+3-89)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t} - \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow (3-91)$$

$$\mathbf{b}_{N,t} = \mathbf{b}_{N,t-1} - \bar{r}_{N,t} \gamma_{N,t} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} \longrightarrow (3-54+3-77)$$

$$\beta_{N,t} = \lambda \beta_{N,t-1} + \bar{r}_{N,t}^2 \gamma_{N,t} \longrightarrow (3-64+3-77)$$

➤ **Filtrage de** y_t **(erreur de filtrage a-priori)**

$$\bar{e}_{N,t} = y_t - \mathbf{H}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \longrightarrow (3-13)$$

➤ **Adaptation du Filtre: (Mise à jour des coefficients du filtre)**

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} \longrightarrow (3-28)$$

3.4.4. Initialisation des algorithmes Moindres Carrés Rapides

Dans le cas de la fenêtre antérieure (préfenêtrage), les algorithmes MCR supposent que les signaux x_t et y_t sont nuls avant l'instant initial $t=0$. Par conséquent, les erreurs de prédiction retour et le prédicteur retour doivent être nuls avant l'instant $t=N$. Pour démarrer un algorithme MCR, plusieurs procédures d'initialisation ont été proposées [5] (voir aussi [39] pour une synthèse des méthodes d'initialisation des algorithmes MCR). Citons ici la procédure d'initialisation la plus simple et la plus sûre du point de vue numérique: cette procédure met les coefficients $\mathbf{H}_{N,t}$ à une valeur arbitraire $\mathbf{H}_{N,0}$, les prédicteurs aller/retour et le gain de Kalman à zéro, et initialise les variances des erreurs de prédiction avec des constantes faibles [29]. La procédure d'initialisation complète est donnée dans la table 3.7 (voir [5] pour une description complète de cette procédure d'initialisation). La constante E_0 représentant l'énergie de l'erreur de filtrage, est la seule qui doit être convenablement choisie. Pendant les premières itérations, les valeurs prises par les variables internes de l'algorithme sont étroitement liées au choix de la constante E_0 : une constante d'initialisation faible devant l'énergie du signal d'entrée x_t permet une convergence initiale rapide mais rend l'algorithme mal conditionné (matrice d'autocorrélation proche d'une matrice singulière). Par contre, une valeur importante permet d'assurer un bon conditionnement numérique initial de l'algorithme, mais ralentit en même temps sa vitesse de convergence initiale. En pratique, il faut assurer le démarrage de l'algorithme. On pourra choisir par exemple la constante E_0 qui vérifie l'inégalité suivante [5]:

$$E_0 \geq \frac{N}{100} \sigma_x^2 \quad (3-93)$$

où σ_x^2 est la variance du signal x_t .

Il faut noter que la quantité $N\sigma_x^2/100$ est assez pessimiste pour les longueurs N faibles (1 à 20) et assez optimiste pour N grand (N de l'ordre de 200 et plus). Des valeurs de E_0 assurant le bon fonctionnement initial peuvent être facilement trouvées par simulation pour un N donné.

Table 3.7 : Initialisation des Algorithmes M.C.R.

• Pour $t = 0$:

$$\mathbf{a}_{N,t} = \mathbf{b}_{N,t} = \mathbf{c}_{N,t} = 0 \quad (*)$$

$$\alpha_{N,t} = E_o \lambda^N, \quad \beta_{N,t} = E_o \quad (E_o > 0), \quad \gamma_{N,t} = 1.$$

$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,0}, \quad (\mathbf{H}_{N,0} : \text{Vecteur arbitraire})$$

(*) : $\mathbf{b}_{N,t}$ doit être nul pour $t < N$

3.5 ALGORITHME DES MOINDRES CARRÉS RECURSIFS CONJOINT (RLS JOINT) [7]

Pour estimer $\mathcal{L}_{dn,h(n)}[.]$ (Voir le modèle (2.10) et Fig.II.9.) ou son inverse, on propose d'utiliser un estimateur commun constitué au moins d'un élément du retard adaptatif D_n et d'un filtre conventionnel FIR adaptatif d'ordre N de coefficients $w_N(n)$, n étant le temps discret [7]. L'adaptation commune est basée sur l'utilisation du même signal erreur pour l'adaptation des deux systèmes, en utilisant le critère des moindres carrés. La configuration du système d'identification peut prendre par exemple la forme montrée dans la figure III-3.

Le choix du filtre adaptatif basé sur les moindres carrés récursifs (RLS) est motivé par les propriétés de convergence rapide de cet algorithme. Le développement de cette nouvelle technique consiste donc en la jonction entre l'estimation du temps de retard ainsi que du filtrage adaptatif basé sur les moindres carrés en utilisant la forme FAEST de l'algorithme RLS. Cet algorithme dénommé RLS conjoint (RLS joint) a été récemment développé par D. Boudreau et P. Kabal [7].

La raison de ce choix n'est pas seulement pour réduire la complexité de calcul, mais aussi dû au fait que la partie de l'estimation du retard de l'algorithme commun peut être naturellement liée avec les variables utilisées dans l'algorithme FAEST. L'inconvénient capital de l'algorithme FAEST ainsi que de tous les algorithmes des moindres carrés rapides est dû à la possibilité d'instabilité numérique dans les conditions de poursuites [5]. Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème [25][46][47][48], cependant ces méthodes restent non satisfaisantes et le problème persiste à ce jour.

Notons qu'une fois l'accomplissement de l'acquisition, les algorithmes des moindres carrés rapides sont aptes pour traquer le système de référence.

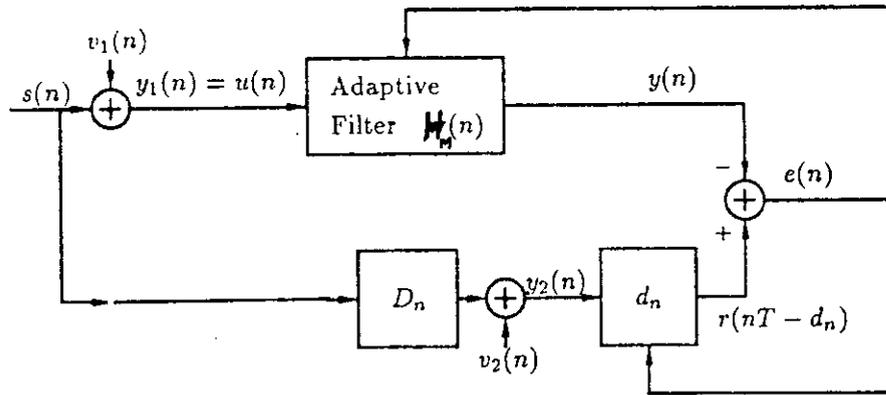


Figure III-3 : *Système d'identification par l'estimateur adaptatif conjoint.*

3.5.1 Notations et définitions :

Dans les algorithmes adaptatifs à moindres carrés récursifs à filtres transversaux d'ordre N et utilisant le préfenêtrage pondéré, le critère de performance à minimiser, à l'itération n , et pour un retard adaptatif entier ℓ (*) est :

$$\xi(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} |e_N(i, \ell)|^2 \quad (3-94)$$

où l'erreur d'estimation a-posteriori est définie par :

$$e_N(i, \ell) = r(i + \ell) - \mathbf{H}_N^{\ell H} \mathbf{u}_N(i) \quad (3-95)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mathbf{u}_N(i) = [u(i), u(i-1), \dots, u(i-N+1)]^T \\ \mathbf{H}_N^\ell(n) = [h_{1N}^\ell(n), h_{2N}^\ell(n), \dots, h_{NN}^\ell(n)]^T \end{cases} \quad (3-96)$$

L'indice H désigne le complexe conjugué transposé, l'échantillon $u(n)$ est la sortie du filtre, et $r(n+\ell)$ représente le signal de référence décalé (voir Fig.III-3). Le vecteur $\mathbf{H}_N^\ell(n)$ est le vecteur des coefficients du filtre adaptatif utilisé quand le décalage est ℓ . Rappelons que la méthode de préfenêtrage suppose que les données antérieures sont nulles à l'itération $n=1$ [51].

La constante λ est le facteur d'oubli. A vrai dire, l'algorithme basé sur (3-94) n'est pas complètement convenable pour traquer des signaux de référence non stationnaires puisqu'il ne peut jamais «oublier» complètement les données passées. Mais pour un λ plus petit que un, la capacité de poursuite est généralement acceptable [5]

La solution des moindres carrés est obtenue comme une fonction déterministe de la matrice d'autocorrélation à court terme $\mathbf{R}_N(n)$ définie comme :

$$\mathbf{R}_N(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}_N(i) \mathbf{u}_N^H(i) \quad (3-97)$$

et du vecteur d'intercorrélacion avec un décalage ℓ donné par

$$\mathbf{P}_N^\ell(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}_N(i) r^*(i + \ell) \quad (3-98)$$

Le vecteur des coefficients des moindres carrés à l'itération n , pour un décalage ℓ est

$$\hat{\mathbf{H}}_N^\ell(n) = \mathbf{R}_N^{-1}(n) \mathbf{P}_N^\ell(n) \quad (3-99)$$

et le minimum correspondant au critère des moindres carrés est

$$\xi_N(n, \ell) = \min_{\mathbf{H}} \xi(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \left| r(i + \ell) - \hat{\mathbf{H}}_N^{\ell H}(n) \mathbf{u}_N(i) \right|^2 \quad (3-100)$$

Notons que par hypothèse, les données produisent une matrice d'autocorrélation déterministe et non singulière.

La forme FTF de l'algorithme RLS est exprimée en termes de quatre filtres transversaux [5], qui sont appliqués sur le signal d'entrée. Avec une précision arithmétique infinie, elle met exactement en application les récursions RLS avec des économies de calcul larges. La particularité de l'algorithme RLS du filtre adaptatif est qu'il calcule la solution réelle du problème des moindres carrés (LS:Least square) à chaque itération, et qui nous assure une vitesse de convergence plus rapide que l'algorithme de la plus grande pente (steepest descent) ou le LMS [51]. Une étape de prédiction en avant et une autre en arrière sont utilisées en premier lieu (forward and backward). Elles blanchissent essentiellement le signal d'entrée, et leurs sorties ainsi que les réponses impulsionnelles sont utilisées pour la mise à jour du troisième filtre: filtre pour calculer le gain de Kalman. La sortie et le vecteur de pondération de ce troisième filtre sont utilisés pour mettre à jour le vecteur de pondération réel $w(n)$ du filtre adaptatif.

l'erreur d'estimation a-priori $\alpha_M(i, \ell)$ est définie comme

$$\alpha_N(i, \ell) = r(i + \ell) - \mathbf{H}_N^{\ell H}(n-1) \mathbf{u}_N(i) \quad (3-101)$$

On définit le vecteur des coefficients optimum pour une étape du prédicteur linéaire directe d'ordre m comme $\mathbf{a}_m(n)$ ($1 \leq m \leq N$). Ce vecteur minimise la somme des carrés des erreurs de prédictions a-posteriori en avant, définie comme

$$F_m(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} |f_m(i)|^2 \quad (3-102)$$

$$\text{où } f_m(i) = u(i) - \mathbf{a}_m^H(n) \mathbf{u}_m(i-1) \quad (3-103)$$

Donc, l'erreur de prédiction directe a-priori $\eta_m(i)$ est

$$\eta_m(i) = u(i) - \mathbf{a}_m^H(n-1) \mathbf{u}_m(i-1) \quad (3-104)$$

De même, le vecteur des coefficients optimum pour une étape de prédiction linéaire rétrograde d'ordre m est le vecteur $\mathbf{b}_m(n)$ qui minimise la somme des carrés des erreurs de prédiction rétrograde a-posteriori qui est exprimé comme

$$B_m(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} |b_m(i)|^2 \quad (3-105)$$

$$\text{avec } b_m(i) = u(i-m) - \mathbf{b}_m^H(n) \mathbf{u}_m(i) \quad (3-106)$$

d'où l'erreur de prédiction rétrograde a-priori $\psi_m(i)$ est :

$$\psi_m(i) = u(i-m) - \mathbf{b}_m^H(n-1) \mathbf{u}_m(i) \quad (3-107)$$

On définit quatre quantités supplémentaires qui sont utilisées spécifiquement dans les relations récursives de décalage et dans l'algorithme FAEST. Le produit scalaire de l'erreur de prédiction directe a-posteriori avec le signal de référence décalé est donné par :

$$v_m^{\ell}(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} f_m(i) r^*(i+\ell) \quad (3-108)$$

De la même manière, le produit scalaire de l'erreur de prédiction rétrograde a-posteriori avec le signal de référence décalé est donné par :

$$v_m^{b\ell}(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} b_m(i) r^*(i+\ell) \quad (3-109)$$

Le vecteur $\mathbf{C}_N(n)$ gain de Kalman utilisé dans l'algorithme RLS conjoint, est défini comme :

$$\mathbf{C}_N(n) = \mathbf{R}_N^{-1}(n-1) \mathbf{u}_N(n) \quad (3-110)$$

3.5.2 Principe de l'algorithme RLS conjoint

La solution de l'algorithme adaptatif conjoint réside dans la disponibilité des relations récursives du retard, qui nous permettent de calculer le vecteur des coefficients optimaux et la somme des erreurs au carré pour un certain retard, nous fournissent les mêmes quantités pour une autre valeur de retard.

Ces relations ont été dérivées en premier lieu pour l'estimation par bloc basée sur les moindres carrés par Kalouptsidis et All. [49] et ont été obtenues en utilisant une structure géométrique comme dans [50]. Ces relations sont données en annexe A.

Les récursions en avant impliquent le schéma suivant : la première quantité intéressante est exprimée à l'instant $n-1$ et pour un décalage de $\ell+1$, en utilisant la prédiction en avant d'ordre $N-1$. Donc la quantité exigée pour le décalage $\ell+1$ est calculée en utilisant une mise à jour temporelle récursive et une prédiction en arrière d'ordre $N-1$.

Différentes variantes d'algorithmes conjoints de filtres transversaux rapides et du temps de décalage peuvent être obtenues sur la base de l'erreur et du vecteur de pondération récursif. Ces algorithmes peuvent être exprimés sous la forme générale suivante:

- 1) Appliquer l'Algorithme RLS pour obtenir $\hat{\mathbf{H}}_N^\ell(n)$ et $\hat{\xi}_N(n, \ell)$
- 2) Adapter ℓ en utilisant l'information dérivée de $\hat{\xi}_N(n, \ell)$, et mettre à jour $\hat{\mathbf{H}}_N^\ell(n)$ et $\hat{\xi}_N(n, \ell)$ dans la direction du retard.

L'algorithme de poursuite conjoint est composé de trois phases de calcul distinctes. La première partie est essentiellement la phase préliminaire de l'algorithme FAEST, c'est à dire, les éléments essentiels de calcul utilisés dans les prédicteurs linéaires directe et rétrograde, ainsi que le filtre du gain de Kalman, une légère modification de l'expression conventionnelle de l'algorithme FAEST est utilisée en réduisant l'ordre de ces prédicteurs à l'ordre $(N-1)$ au lieu de l'ordre conventionnel N .

La seconde phase de calcul implique le calcul du vecteur des coefficients courant $\hat{\mathbf{H}}_N^\ell(n)$ et le calcul de trois sommes des erreurs; une pour chaque élément du jeu des décalages $\{\ell-1, \ell; \ell+1\}$. Le calcul de $\hat{\xi}_N(n, \ell)$, $\hat{\xi}_N(n, \ell+1)$ et $\hat{\xi}_N(n, \ell-1)$ est réalisé en utilisant les récursions de mise à jour du décalage de l'erreur et du vecteur de

pondération suscitée dans l'annexe A. Dans l'algorithme conjoint, le calcul de $\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell-1}(n)$ et de $\hat{\xi}_N(n, \ell-1)$ est exécuté en premier, en utilisant les équations FAEST usuelles. Par conséquent, les récursions du décalage en avant de l'erreur ainsi que du vecteur des coefficients seront utilisées en même temps, pour avoir les erreurs pour les délais ℓ et $\ell+1$, et le vecteur de pondération pour ℓ .

Les applications successives des récursions en avant produisent moins de calcul, comparativement par exemple à l'application des récursions en-avant et en arrière de l'erreur et du vecteur de pondération pour le décalage ℓ . Ce choix simplifie aussi la troisième phase de calcul, c'est à dire, pour $\ell+1$, ce qui entraîne une décision sur la mise à jour du décalage et le calcul des nouvelles variables correspondantes. Le retard est mis à jour en fonction des trois sommes d'erreurs $\{\hat{\xi}_N(n, \ell), \hat{\xi}_N(n, \ell+1), \hat{\xi}_N(n, \ell-1)\}$. Ce type d'algorithme conjoint calcule les deux estimations jusqu'à ce qu'elles correspondent à la solution moindres carrés conjointe à chaque itération.

Schématiquement, les phases de calcul préliminaires et de calcul d'erreurs de l'algorithme peuvent être représentées comme dans l'annexe B, où six filtres parallèles sont représentés. Les trois filtres du sommet sont essentiellement identiques comme ceux utilisés dans les filtres transversaux rapides conventionnels [3], [51], à l'exception de la différence de l'ordre des prédicteurs. Le quatrième filtre est destiné au calcul de $\hat{\xi}_N(n, \ell-1)$ et $\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell-1}(n-1)$. Il est à constater que $\hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell)$ est aussi obtenu à partir de ce filtre, en utilisant (A-1) voir annexe A et du fait que :

$$\hat{\mathbf{H}}_1^{\ell}(n) = \frac{v_{N-1}^{\ell}(n)}{F_{N-1}(n)}. \quad (3-111)$$

Le cinquième filtre, avec le vecteur des coefficients obtenu à partir de (A-7) annexe A, est utilisé pour calculer $v_{N-1}^{b(\ell+1)}(n)$ et $\hat{\xi}_N(n, \ell+1)$.

Dans cet algorithme on a choisi pour réactualiser le décalage :

$$\ell = \ell + \hat{\nabla}_\ell \hat{\xi}_N(n, \ell) \quad (3-112)$$

$$\text{où } \hat{\nabla}_\ell \hat{\xi}_N(n, \ell) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{1}, & \text{si } \langle \hat{\xi}_N(n, \ell+1) \rangle < \langle \hat{\xi}_N(n, \ell) \rangle \text{ et } \langle \hat{\xi}_N(n, \ell+1) \rangle < \langle \hat{\xi}_N(n, \ell-1) \rangle \\ -\mathbf{1}, & \text{si } \langle \hat{\xi}_N(n, \ell-1) \rangle < \langle \hat{\xi}_N(n, \ell) \rangle \text{ et } \langle \hat{\xi}_N(n, \ell-1) \rangle < \langle \hat{\xi}_N(n, \ell+1) \rangle \\ \mathbf{0}, & \text{sinon} \end{array} \right\} \quad (3-113)$$

et la notation $\langle \cdot \rangle$ représente une forme de la moyenne temporelle.

Notons que dans le cas d'une mise à jour positive dans (3-121) (voir l'algorithme dans le paragraphe ci-après), un simple transfert d'informations s'effectue seulement de $\ell+1$ à ℓ quantités et une réinitialisation de certaines variables est nécessaire. Dans le cas d'une mise à jour négative dans (3-122), certains calculs intermédiaires impliquant $\mathbf{P}_N^{\ell-1}(n)$ et $\mathbf{P}_N^{\ell-2}(n)$, sont nécessaires pour obtenir $v_{N-1}^{b\ell}(n)$ et $v_{N-1}^{b(\ell-2)}(n)$. Les vecteurs $\mathbf{P}_N^{\ell-1}(n)$ et $\mathbf{P}_N^{\ell-2}(n)$ sont réactualisés dans (3-117) et sont appelés "les récursions pour la mise à jour du lissage". Ces quantités sont utilisées avec quelques relations récursives en arrière du décalage, dans les calculs des nouvelles valeurs de $\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell-1}(n)$ et de $\hat{\xi}_N(n, \ell-1)$.

L'algorithme de poursuite conjoint est basé sur la poursuite de la valeur du décalage et des valeurs du vecteur de pondération, l'algorithme de poursuite suivant est appliqué sur les données d'entrée.

➤ **Variables disponibles à l'instant n:**

$$\mathbf{a}_{N,t-1}, \mathbf{b}_{N,t-1}, \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1}, \tilde{\gamma}_{N,t-1}, \alpha_{N,t-1}, \beta_{N,t-1}, \mathbf{H}_{N,t-1}$$

➤ **Nouvelles informations** x_t et y_t

➤ **1) Calculs préliminaires :**

Filtre 1 :

$$\eta_m(i) = u(i) - \mathbf{a}_m^H(n-1)\mathbf{u}_m(i-1)$$

$$f_{N-1}(n) = \frac{\eta_{N-1}(n)}{\gamma_{N-1}(n-1)}$$

$$\mathbf{a}_{N-1}(n) = \mathbf{a}_{N-1}(n-1) + \lambda^{-1} \cdot \mathbf{C}_{N-1}(n-1) \cdot f_{N-1}(n)$$

$$F_{N-1}(n) = \lambda \cdot F_{N-1}(n-1) + \eta_{N-1}(n) \cdot f_{N-1}(n) \quad (3-114)$$

Filtre 2 :

$$\mathbf{C}_N(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_{N-1}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{\eta_{N-1}(n)}{F_{N-1}(n-1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}_{N-1}(n-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{N-1}(n) = \left[\mathbf{C}_N(n) \right]_{N-1} + \mathbf{C}_{N,N}(n) \cdot \mathbf{b}_{N-1}(n-1)$$

$$\gamma_N(n) = \gamma_{N-1}(n-1) + \frac{|\eta_{N-1}(n)|^2}{\lambda \cdot F_{N-1}(n-1)} \quad (3-115)$$

Filtre 3 :

$$\psi_{N-1}(n) = \mathbf{C}_{N,N}(n) \cdot \mathbf{B}_{N-1}(n-1)$$

$$\gamma_{N-1}(n) = \gamma_N(n) - \lambda^{-1} \cdot \mathbf{C}_{N,N}(n) \cdot \psi_{N-1}(n)$$

$$\mathbf{b}_{N-1}(n) = \frac{\psi_{N-1}(n)}{\gamma_{N-1}(n)}$$

$$\mathbf{b}_{N-1}(n) = \mathbf{b}_{N-1}(n-1) + \lambda^{-1} \cdot \mathbf{C}_{N-1}(n) \cdot \mathbf{b}_{N-1}(n)$$

$$\mathbf{B}_{N-1}(n) = \lambda \cdot \mathbf{B}_{N-1}(n-1) + \psi_{N-1}(n) \cdot \mathbf{b}_{N-1}(n) \quad (3-116)$$

./...

➤ **b-2) Calculs des vecteurs de pondération et des erreurs :**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N^{\ell-1}(n) &= \lambda \cdot \mathbf{P}_{N-1}^{\ell-1}(n-1) + \mathbf{u}_N(n) \cdot r(n+\ell-1) \\ \mathbf{P}_N^{\ell-2}(n) &= \lambda \cdot \mathbf{P}_{N-1}^{\ell-2}(n-1) + \mathbf{u}_N(n) \cdot r(n+\ell-2) \end{aligned} \quad (3-117)$$

Filtre 4 : Calculs pour le retard $\ell-1$

$$\begin{aligned} \alpha_N(i, \ell-1) &= r(n+\ell-1) - \hat{\mathbf{H}}_N^{(\ell-1)H}(n-1) \mathbf{u}_N(n) \\ e_N(n, \ell-1) &= \frac{\alpha_N(n, \ell-1)}{\gamma_N(n)} \\ \hat{\mathbf{H}}_N^{\ell-1}(n) &= \hat{\mathbf{H}}_N^{\ell-1}(n-1) + \lambda^{-1} \cdot \mathbf{C}_N(n) \cdot e_N(n, \ell-1) \\ \hat{\xi}_N(n, \ell-1) &= \lambda \cdot \hat{\xi}_N(n-1, \ell-1) + \alpha_N^*(n, \ell-1) \cdot e_N(n, \ell-1) \end{aligned} \quad (3-118)$$

Filtre 5 : Calculs pour le retard ℓ

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell}(n-1) &= \left[\hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell}(n-1) \right]_{N-1} + \mathbf{a}_{N-1}(n) \cdot \mathbf{H}_{1N}^{\ell-1}(n) \\ \alpha_{N-1}(n, \ell) &= r(n+\ell) - \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell H}(n-1) \mathbf{u}_{N-1}(n) \\ e_{N-1}(n, \ell) &= \frac{\alpha_{N-1}(n, \ell)}{\gamma_{N-1}(n)} \\ \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell}(n) &= \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell}(n-1) + \lambda^{-1} \cdot \mathbf{C}_{N-1}(n) \cdot e_{N-1}(n, \ell) \\ v_{N-1}^{b\ell}(n) &= \lambda \cdot v_{N-1}^{b\ell}(n-1) + \psi_{N-1}(n) \cdot e_{N-1}(n, \ell) \\ \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell}(n) &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell}(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{v_{N-1}^{b\ell}(n)}{B_{N-1}(n)} \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{N-1}(n) \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell) &= \hat{\xi}_N(n, \ell-1) + F_{N-1}(n) \cdot |\mathbf{H}_{1N}^{\ell-1}(n)|^2 \\ \hat{\xi}_{N-1}(n, \ell) &= \lambda \cdot \hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell) + \gamma_{N-1}(n) \cdot |e_{N-1}(n, \ell)|^2 \\ \hat{\xi}_N(n, \ell) &= \hat{\xi}_{N-1}(n, \ell) - \frac{|v_{N-1}^{b\ell}(n)|^2}{B_{N-1}(n)} \end{aligned} \quad (3-119)$$

./...

Filtre 6 : Calculs pour le retard $\ell+1$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell+1}(n-1) &= \left[\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell}(n) \right]_{N-1} + \mathbf{a}_{N-1}(n) \cdot H_{IN}^{\ell}(n) \\
 \alpha_{N-1}(n, \ell+1) &= r(n+\ell+1) - \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{(\ell+1)H}(n-1) \cdot \mathbf{u}_{N-1}(n) \\
 e_{N-1}(n, \ell+1) &= \frac{\alpha_{N-1}(n, \ell+1)}{\gamma_{N-1}(n)} \\
 \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell+1}(n) &= \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell+1}(n-1) + \lambda^{-1} \cdot \mathbf{C}_{N-1}(n) \cdot e_{N-1}(n, \ell+1) \\
 v_{N-1}^{b(\ell+1)}(n) &= \lambda \cdot v_{N-1}^{b(\ell+1)}(n-1) + \psi_{N-1}(n) \cdot e_{N-1}(n, \ell+1) \\
 \hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell+1) &= \hat{\xi}_N(n, \ell) + F_{N-1}(n) \cdot |H_{IN}^{\ell}(n)|^2 \\
 \hat{\xi}_{N-1}(n, \ell+1) &= \lambda \cdot \hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell+1) + \gamma_{N-1}(n) \cdot |e_{N-1}(n, \ell+1)|^2 \\
 \hat{\xi}_N(n, \ell+1) &= \hat{\xi}_{N-1}(n, \ell+1) - \frac{|v_{N-1}^{b(\ell+1)}(n)|^2}{B_{N-1}(n)}
 \end{aligned} \tag{3-120}$$

b-3) Les mises à jour :

$$\text{IF } \langle \hat{\xi}_N(n, \ell+1) \rangle < \langle \hat{\xi}_N(n, \ell) \rangle \text{ AND } \langle \hat{\xi}_N(n, \ell+1) \rangle < \langle \hat{\xi}_N(n, \ell-1) \rangle$$

THEN

$$\hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell-1}(n) \leftarrow \hat{\mathbf{H}}_N^{\ell}(n)$$

$$\hat{\xi}_N(n, \ell-1) \leftarrow \hat{\xi}_N(n, \ell)$$

$$v_{N-1}^{b\ell}(n) \leftarrow v_{N-1}^{b(\ell+1)}(n)$$

$$\mathbf{P}_N^{\ell-2}(n) \leftarrow \mathbf{P}_N^{\ell-1}(n)$$

$$\mathbf{P}_N^{\ell-1}(n) = \mathbf{u}_N(n) \cdot r(n+\ell)$$

$$v_{N-1}^{b(\ell+1)}(n) = 0$$

$$\ell \leftarrow \ell+1$$

(3-121)

ENDIF

./....

IF $\langle \hat{\xi}_N(n, \ell-1) \rangle < \langle \hat{\xi}_N(n, \ell) \rangle$ AND $\langle \hat{\xi}_N(n, \ell-1) \rangle < \langle \hat{\xi}_N(n, \ell+1) \rangle$

THEN

$$v_{N-1}^{b(\ell+1)}(n) \leftarrow v_{N-1}^{b\ell}(n)$$

$$v_{N-1}^{b\ell}(n) = \left[-\mathbf{b}_{N-1}^H \quad 1 \right] \mathbf{P}_N^{\ell-1}(n)$$

$$v_{N-1}^{f(\ell-2)}(n) = \left[1 \quad -\mathbf{a}_{N-1}^H \right] \mathbf{P}_N^{\ell-2}(n)$$

$$\hat{\xi}_{N-1}(n, \ell-1) = \hat{\xi}_N(n, \ell-1) + B_{N-1}(n) \cdot \left| \mathbf{H}_{NN}^{\ell-1}(n) \right|^2$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell-1}(n-1) = \left[\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell-1}(n) \right]_{N-1} + \mathbf{b}_{N-1}(n-1) \mathbf{H}_{NN}^{\ell-1}(n-1)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell-1}(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell-1}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{v_{N-1}^{f(\ell-2)}(n)}{F_{N-1}(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}_{N-1}(n) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell-1) = \lambda^{-1} \hat{\xi}_N(n, \ell-1) + \lambda^{-1} \frac{\left| \mathbf{u}_{N-1}^H(n) \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell-1}(n-1) - r^*(n+\ell-1) \right|^2}{\gamma_{N-1}(n)}$$

$$\hat{\xi}_N(n, \ell+1) = \hat{\xi}_N(n-1, \ell-1) - \frac{\left| v_{N-1}^{f(\ell-2)}(n) \right|^2}{F_{N-1}(n)}$$

$$\mathbf{P}_N^{\ell-1}(n) \leftarrow \mathbf{P}_N^{\ell-2}(n)$$

$$\mathbf{P}_N^{\ell-2}(n) = \mathbf{u}_N(n) \cdot r^*(n+\ell-3)$$

$$\ell \leftarrow \ell - 1$$

(3-122)

ENDIF

L'originalité de l'algorithme conjoint de poursuite au sens des moindres carrés présenté, réside dans les calculs en série (voir Annexe B), à partir de $\hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell-1}(n-1)$, de toutes les erreurs nécessaires et des vecteurs de coefficients pour le décalage ℓ et $\ell+1$ en utilisant les récursions en arrière et en avant de l'erreur et du vecteur de coefficients vu dans l'annexe A. Une conséquence de cette approche séquentielle est la réduction de la mémoire nécessaire pour stocker les différentes grandeurs intéressantes. Les récursions de mise à jour du décalage s'ajoutent même bien à l'algorithme FAEST.

Au début de l'algorithme conjoint, les variables internes du FTF sont initialisées exactement comme proposé par CIOFFI et al [5], et les erreurs additionnelles et les variables de corrélations sont initialisées à zéro (voir Table 3.7 pp.54).

CHAPITRE IV
STABILITE DES ALGORITHMES
DES MOINDRES CARRES
TRANSVERS AUX RAPIDES

IV. STABILITE DES ALGORITHMES DES MOINDRES CARRES TRANSVERSAUX RAPIDES :

4.1 INTRODUCTION

Les problèmes posés par la mise en œuvre sur ordinateur ou sur processeur de signal spécialisé des algorithmes Moindres Carrés Rapides, étudiés précédemment, sont essentiellement la précision numérique, la stabilité numérique et la propagation des erreurs au cours du temps dans les équations récursives.

Il est bien connu que l'efficacité en complexité de calcul des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides est payée par une dégradation importante de leur propriétés numériques. Les erreurs numériques se propagent d'une manière non bornée au cours du temps, pour un facteur d'oubli exponentiel λ inférieur à 1, ce qui conduit à une solution instable à plus ou moins long terme.

Des efforts importants ont été fournis ces dernières années pour expliquer l'origine de cette instabilité numérique [40][46][48][49][52] à [56]. La référence [48] concerne les algorithmes MCR normalisés. Du point de vue théorique, une analyse de la propagation des erreurs numériques dans l'algorithme de Kalman rapide est proposée dans [52], pour un ordre égal à 1 et une séquence particulière du signal d'entrée x_t . En ce qui concerne l'algorithme Moindres Carrés transversal rapide (FTF(7N)), une analyse de la propagation des erreurs est proposée par le même auteur dans [40] et [53]. C'est la première analyse qui ne fait aucune hypothèse sur l'ordre et sur le signal. Malheureusement, l'auteur s'est limité à une analyse sur les variables scalaires de l'algorithme. L'hypothèse qui consiste à dire que le vecteur de prédiction retour est sans erreur n'est pas justifiée (voir [29]). Mais signalons que, grâce à l'effort initial développé par cet auteur, des analyses de propagations plus précises et des méthodes de stabilisation simples sont apparues par la suite [54][49][46].

Le but recherché dans [54] est de déterminer les équations de propagation des erreurs dans les algorithmes MCR pour n'importe quel ordre N et pour un signal d'entrée quelconque. La seule hypothèse, inévitable, utilisée est que l'on se situe au voisinage de la solution nominale de l'algorithme théorique, ce qui autorise une analyse au premier ordre avec linéarisation du système d'équation de propagation.

En général, à cause de la complexité des équations, il est très difficile de conclure sur la contribution de telle ou telle variable prise globalement dans l'algorithme à l'instabilité de celui-ci. Des hypothèses simplificatrices utilisées dans [54] ont permis de localiser les variables responsables du mauvais fonctionnement des algorithmes MCR

4.2 DIVERGENCE DES ALGORITHMES MC TRANSVERSAUX RAPIDES :

Les algorithmes MCR sont bien connus pour leur comportement instable et leur mauvaises propriétés numériques lorsque le facteur d'oubli λ est strictement inférieur à 1. Il faut tout d'abord noter qu'il existe deux types de divergence. Le premier se traduit par une explosion de la majorité des variables scalaires et vectorielles de l'algorithme. Le deuxième type de divergence se traduit par l'extinction de la majorité des variables importantes (prédicteurs et filtrage). Le deuxième type de divergence est plus lié à la nature du signal d'entrée et au mauvais conditionnement de sa matrice d'autocorrélation à court terme qu'aux erreurs numériques. Ce genre de phénomène s'observe très souvent avec des signaux de parole lors du passage d'une zone de faible énergie à une zone de forte énergie [29].

Ces deux types de divergence concernent uniquement la partie prédiction aller/retour; la partie filtrage est robuste par rapport à l'implantation numérique, elle nécessite seulement un facteur d'oubli compris entre 0 et 1 (0 exclu) [52] et le bon fonctionnement du gain d'adaptation (gain de Kalman) fourni par la partie prédiction aller/retour. Elle est stable si cette dernière l'est.

En général, le premier type de divergence est détecté quand la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ devient supérieur à 1, ce qui engendre après quelques itérations des valeurs négatives de cette même variable et la divergence des principales variables récursives (changement de signe de la boucle de correction des variables récursives). Pour les algorithmes de type Kalman rapide l'équivalent de ce comportement se traduit par le changement de signe de la variable positive $\mathcal{G}_{N,t}$. C'est ce mode de divergence qu'on appelle instabilité numérique, il est plus lié à la structure de l'algorithme qu'à la nature du signal d'entrée. Les erreurs numériques augmentent, au cours du temps, de manière régulière et non bornée. Le meilleur signal de test est le bruit blanc qui permet d'écarter le problème, commun à tous les algorithmes des moindres carrés exacts, dû au mauvais conditionnement de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée.

En réalité, la divergence de la variable de vraisemblance se produit très tard après la divergence d'autres variables de l'algorithme. La variable suivante :

$$\xi_{N,t} = \bar{r}_{N,t}^c - \bar{r}_{N,t}^p \quad (4-1)$$

constitue un bon indicateur de divergence. Elle représente la différence entre l'erreur de prédiction a-priori retour calculée directement sur le signal (convolution) et la même erreur calculée, sans redondance, à l'aide de la variance retour et la $(N+1)^{\text{ième}}$ composante du gain de Kalman d'ordre $N+1$:

$$\bar{r}_{N,t}^c = x_{t-N} - \mathbf{b}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \quad (4-2)$$

$$\bar{r}_{N,t}^p = -\lambda \cdot \beta_{N,t-1}^T \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \quad (4-3)$$

cette variable, introduite par [40], joue un rôle très important dans la stabilisation des algorithmes des Moindres Carrés rapides.

Nous ne voulons pas nous attarder sur les phénomènes d'instabilité observés en simulation, il existe une littérature abondante ([40][46][48][49][52] à [56]) à ce sujet. L'objet de cette partie est d'expliquer théoriquement les équations de propagation des erreurs dans les deux algorithmes des Moindres Carrés rapides les plus connus FTF 7N et le Kalman rapide et de localiser les variables qui causent cette instabilité en vue d'aboutir à une méthode de stabilisation simple. Au cours du chapitre V, nous présenterons quelques résultats de simulations qui montrent le mauvais fonctionnement des algorithmes Moindres Carrés transversaux rapides sur calculateur universel en virgule flottante simple précision (32 bits).

L'approche utilisée, pour l'analyse de la propagation des erreurs numériques, est décrite dans l'excellent article de S. Ljung and L. Ljung [52]. Tout algorithme adaptatif peut être vu comme un système dynamique non-linéaire à temps discret, qui s'écrit théoriquement sous la forme d'un système d'état suivant :

$$\mathbf{Z}_t = f(\mathbf{Z}_{t-1}, \mathbf{X}_{N,t}, y_t) \quad (4-4)$$

où la fonction $f(\cdot)$ dépend de la structure de l'algorithme, le vecteur \mathbf{Z}_t regroupe l'ensemble des variables récursives scalaires et vectorielles de l'algorithme, $\mathbf{X}_{N,t}$ et y_t désignent respectivement le vecteur signal d'entrée et le signal à modéliser.

En précision finie, le système (4-4) s'écrit :

$$\hat{\mathbf{Z}}_t = f(\hat{\mathbf{Z}}_{t-1}, \mathbf{X}_{N,t}, y_t) + \mathbf{E}(t) \quad (4-5)$$

où $\hat{\mathbf{Z}}_t$ désigne la variable vectorielle calculée par l'algorithme en présence des erreurs numériques représentées par le vecteur $\mathbf{E}(t)$.

L'erreur absolue ainsi introduite sera notée $\Delta\mathbf{Z}_t$:

$$\Delta\mathbf{Z}_t = \hat{\mathbf{Z}}_t - \mathbf{Z}_t \quad (4-6)$$

Pour effectuer le calcul des erreurs, on linéarise l'équation (4-6) autour de la solution nominale (solution théorique) :

$$\Delta\mathbf{Z}_t = \mathbf{F}(t) \cdot \Delta\mathbf{Z}_{t-1} + \mathbf{E}(t) \quad (4-7)$$

où la matrice de transition est exprimée par :

$$\mathbf{F}(t) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{Z}, \mathbf{X}_{N,t}, y_t)}{\partial \mathbf{Z}} \right|_{\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_{t-1}} \quad (4-8)$$

Cette façon de calculer les erreurs est souvent utilisée en physique. Supposons que l'on désire calculer ou évaluer un vecteur \mathbf{W} connaissant un autre vecteur \mathbf{V} ,

$$\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T, \quad \mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_M)^T \quad (4-9)$$

c'est à dire déterminer la valeur de :

$$\mathbf{W} = f(\mathbf{V}) \quad (4-10)$$

où $f(\cdot)$ est une fonction de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R}^N , dont on suppose qu'elle est différentiable au point \mathbf{V} . Supposons maintenant que le vecteur \mathbf{V} est connu avec une erreur $\Delta\mathbf{V}$

$$\Delta\mathbf{V} = \hat{\mathbf{V}} - \mathbf{V} \quad (4-11)$$

où

$$\Delta v_i = \hat{v}_i - v_i \quad i = 1, \dots, M \quad (4-12)$$

Dans ces conditions, le résultat sera connu avec une erreur $\Delta\mathbf{W}$:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{W} &= \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{W} \\ &= f(\hat{\mathbf{V}}) - f(\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (4-13)$$

ou encore

$$\Delta w_i = \hat{w}_i - w_i = f_i(\hat{\mathbf{V}}) - f_i(\mathbf{V}) \quad , \quad i = 1, \dots, M \quad (4-14)$$

Un développement en série de Taylor, au voisinage du vecteur \mathbf{V} sans erreur, donne :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W} &= f(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) - f(\mathbf{V}) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\partial^s f(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}^s} \cdot \frac{(\Delta \mathbf{V})^s}{s!} \end{aligned} \quad (4-15)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, l'expression précédente s'écrit :

$$\Delta \mathbf{W} = \frac{\partial f(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}} \cdot \Delta \mathbf{V} + o(\Delta \mathbf{V}) \quad (4-16)$$

avec

$$\frac{\partial f(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{V})}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{V})}{\partial v_M} \\ \frac{\partial f_N(\mathbf{V})}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial f_N(\mathbf{V})}{\partial v_M} \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

le terme $o(\Delta \mathbf{V})$ est un vecteur dont la norme décroît vers 0 plus vite que celle de $\Delta \mathbf{V}$

L'expression (4-16) s'écrit, de manière équivalente, pour les éléments du vecteur \mathbf{W} :

$$\Delta w_i = \frac{\partial f_i(\mathbf{V})}{\partial v_1} \cdot \Delta v_1 + \frac{\partial f_i(\mathbf{V})}{\partial v_2} \cdot \Delta v_2 + \dots + \frac{\partial f_i(\mathbf{V})}{\partial v_M} \cdot \Delta v_M \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4-18)$$

où la quantité $\partial f_i(\mathbf{V})/\partial v_j$ peut être interprétée comme étant la sensibilité de la variable w_i aux petites variations Δv_j de la variable v_j .

Dans les mesures physiques, au lieu de cette expression, on utilise souvent une approximation par excès de l'expression (4-18). On choisit l'erreur absolue du « pire des cas » :

$$\Delta w_i = \left| \frac{\partial f_i(\mathbf{V})}{\partial v_1} \right| \cdot \Delta v_1 + \left| \frac{\partial f_i(\mathbf{V})}{\partial v_2} \right| \cdot \Delta v_2 + \dots + \left| \frac{\partial f_i(\mathbf{V})}{\partial v_M} \right| \cdot \Delta v_M \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4-19)$$

Dans notre cas, on ne cherche pas à affecter une plage d'erreur absolue ou relative à une grandeur ou une mesure physique, mais on désire analyser la propagation des erreurs au voisinage de la solution théorique. Dans ce cas, pour le calcul des erreurs, on

utilise la relation (4-18) qui tient compte des variations instantanées des erreurs et de leur signe. La relation (4-16) est équivalente à (4-7) si on ne tient pas compte des erreurs d'arrondi instantanées $E(t)$. Pour l'étude de la propagation des erreurs numériques réalisée dans [47], ce terme supplémentaire n'est pas nécessaire ; il est important surtout pour évaluer les effets de la précision finie. Par conséquent, on suppose que les équations de l'algorithme se propagent avec une précision infinie (c'est la seconde hypothèse) et on étudie l'effet, dans le temps, d'une erreur déterministe ΔZ_{t_0} apparue à l'instant t_0 . C'est la façon dont cette erreur est propagée dans le futur qui détermine la stabilité ou l'instabilité de l'algorithme [47].

Le système d'état (4-7) débarrassé de la perturbation s'écrit alors :

$$\Delta Z_t = F(t) \cdot \Delta Z_{t-1} \quad (4-20)$$

où $F(t)$ est donnée par la matrice de sensibilité (4-17), avec $M = N$, $W = Z_t$ et $V = Z_{t-1}$.

Dans ce cas, le système perturbé (4-7) sera dit localement asymptotiquement stable si le système libre (4-20) est exponentiellement stable. Dans le cas contraire, le système perturbé est instable si le système non-perturbé l'est.

L'étude de la stabilité du système (4-20) revient à calculer et à étudier les propriétés de la matrice $F(t)$. Cette matrice sera dite stable si toutes ses valeurs propres sont de module inférieur à 1. On dira aussi, de manière équivalente, qu'un algorithme est stable numériquement si l'effet de n'importe quelle erreur dans (4-20) décroît au cours du temps ; dans le cas contraire, l'algorithme sera dit numériquement instable.

On suppose aussi que le signal d'entrée x_t est stationnaire et qu'il est tel que l'inverse de la matrice d'autocorrélation à court terme existe, en d'autres termes, que la solution des moindres carrés exacts existe quel que soit l'instant t et $\lambda < 1$.

Le vecteur d'état des équations de propagation des erreurs dans les variables récursives s'écrit :

$$\Delta Z_t = [\Delta A_t \quad \Delta C_t \quad \Delta B_t]^T \quad (4-21)$$

où

$$\Delta A_t = [\Delta a_{N,t} \quad \Delta \alpha_{N,t}]^T \quad \Delta C_t = [\Delta \tilde{C}_{N,t} \quad \Delta \gamma_{N,t}]^T \quad \Delta B_t = [\Delta b_{N,t} \quad \Delta \beta_{N,t}]^T \quad (4-22)$$

désignent respectivement les erreurs cumulées jusqu'à l'instant t dans les variables récurrentes aller, de Kalman et retour.

La matrice $\mathbf{F}(t)$ sera notée comme suit :

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}(t) & \mathbf{F}_{12}(t) & \mathbf{F}_{13}(t) \\ \mathbf{F}_{21}(t) & \mathbf{F}_{22}(t) & \mathbf{F}_{23}(t) \\ \mathbf{F}_{31}(t) & \mathbf{F}_{32}(t) & \mathbf{F}_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

La complexité des équations de propagations a amené dans [54] à considérer plusieurs cas particuliers. Dans tous ces cas, les erreurs numériques dans le calcul des variables de la prédiction retour (prédicteur et/ou variance des erreurs de prédiction) sont à l'origine du phénomène d'instabilité des algorithmes Moindres carrés Rapides. L'analyse faite dans [29] peut être étendue, sans grandes difficultés, à tous les algorithmes moindres carrés rapides existant dans la littérature. Du point de vue numérique, ces algorithmes ont été classés dans [29] en deux catégories. La première catégorie est celle des algorithmes (FTF 7N, FAEST, ...) qui calculent l'erreur de prédiction par une formule simple à l'aide de la variance des erreurs de prédiction et de la $N+1$ ième composante du gain de Kalman d'ordre $N+1$. Dans cette catégorie, on montre dans [29] que les erreurs numériques dans le prédicteur et la variance retour évoluent de manière instable en $1/\lambda$.

La deuxième catégorie est celle des algorithmes (Kalman rapide, FTF 7N+N, ...) qui calculent l'erreur de prédiction retour par convolution. Dans ce cas, on montre dans [29] que les erreurs numériques dans le calcul du prédicteur retour évoluent selon une marche aléatoire dont la variance augmente linéairement au cours du temps. C'est cette dernière propriété qui fait que les algorithmes calculent l'erreur de prédiction retour par convolution resteront stables plus longtemps que les algorithmes de la première catégorie.

Dans les paragraphes suivants, on présentera une méthode simple pour stabiliser les algorithmes moindres carrés rapides. Cette méthode de stabilisation découle directement de l'analyse de la propagation des erreurs numériques effectuée dans [29].

4.3 METHODES DE STABILISATION DES ALGORITHMES

TRANSVERSAUX RAPIDES :

Le défaut le plus important des moindres carrés transversaux rapides est la non-compensation des erreurs numériques. Ces erreurs s'accumulent et se propagent jusqu'à la divergence de l'algorithme. Plusieurs méthodes ont été proposées pour combattre le problème de l'instabilité numérique. Citons : la régulation de certaines variables critiques [48][55], la réinitialisation préventive sur conditions initiales du signal dans le filtre adaptatif ou non[56][5][57], l'introduction d'une redondance supplémentaire dans les calculs [53]. Signalons que certaines de ces méthodes ne combattent absolument pas le problème de l'accumulation des erreurs numériques. Les méthodes de réinitialisation ou de régularisation périodique utilisent des algorithmes numériquement instables entre les instants de réinitialisation ou de régularisation.

Après une revue des techniques de stabilisation des algorithmes moindres carrés rapides existant dans la littérature et de maintes tentatives de stabilisation sur le plan pratique, nous avons opté pour une méthode de stabilisation fondée sur l'analyse de la propagation des erreurs numériques effectuées dans [54]. Elle se distingue des méthodes citées plus haut par la stabilisation numérique de une ou deux variables récursives (prédicteur retour et/ou variance des erreurs de prédiction retour) dont l'instabilité a été établie dans [29].

Cette méthode a été testée dans [29] sur des signaux stationnaires (bruit blanc et bruit à spectre moyen de la parole). Des simulations ont été faites dans [54] en virgule flottante simple précision (32 bits) et en virgule fixe (16 bits), sur de très longues durées de signal (1 million d'échantillons et plus) n'ont fait apparaître aucune divergence, ceci quelle que soit la longueur de la réponse impulsionnelle identifiée.

4.3.1 Méthode de réinitialisation :

Une idée qui vient naturellement à l'esprit, une fois que le mauvais fonctionnement ou la divergence est constatée, est la réinitialisation de l'algorithme afin de poursuivre le traitement prévu. Sachant que les problèmes numériques proviennent de la partie prédiction aller/retour et non de la partie filtrage de l'algorithme, D.W. Lin [56], J.M. Cioffi et T. Kailath [5] proposent chacun de calculer un gain de Kalman avec un algorithme moindres carrés rapides numériquement instables puis le réinitialiser à l'aide des paramètres du filtre transversal adaptatif chaque fois que la divergence est détectée.

Le premier [56] tient compte du signal x_t présent dans la mémoire de l'algorithme, l'algorithme moindres carrés rapides proposé est de type covariance (de complexité $14N$), et l'instant de réinitialisation correspond à l'instant de changement de signe de la variable $\theta_{N,t}$ normalement positive :

$$\theta_{N,t} = 1 + \bar{r}_{N,t} \mathbf{C}_{N+1,t}^{N+1} = \lambda \frac{\beta_{N,t-1}}{\beta_{N,t}} = \frac{\gamma_{N+1,t}}{\gamma_{N,t}} \quad (4-24)$$

En utilisant ce même critère de détection de divergence, C.M.Cioffi et T.Kailath [5] proposent de réinitialiser l'algorithme sur les paramètres du filtre transversal \mathbf{H}_{N,t_d-1} en mettant simplement les filtres de prédiction \mathbf{a}_{N,t_d} , \mathbf{b}_{N,t_d} , et le gain de Kalman $\tilde{\mathbf{C}}_{N,t_d}$ à zéro. Pour cela, il suffit d'utiliser la procédure d'initialisation pondérée décrite précédemment. D'après les auteurs, le bon choix de la constante de pondération E_0 dans ces conditions est le suivant :

$$E_0 = \frac{\sigma_x^2}{N} \frac{\lambda}{(1-\lambda)} \quad (4-25)$$

Dans cette deuxième technique, après l'instant de réinitialisation et sur une durée de i échantillons (i échantillons pour le i ème coefficient du filtre adaptatif), le signal restant dans la mémoire de l'algorithme est pondéré par les coefficients du filtre adaptatif fixe identifié juste avant l'instant de décision de divergence. Le vecteur signal d'entrée, vu par l'algorithme après réinitialisation, s'écrit

$$\tilde{\mathbf{X}}_{N,t} = [\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-1}, \dots, \tilde{x}_{t-N+1}]^T \quad (4-26)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t &= x_t, \quad \text{pour } t > t_d \\ &= 0, \quad \text{pour } t \leq t_d \end{aligned} \quad (4-27)$$

Par conséquent, l'algorithme ne tient pas compte du signal mémorisé avant l'instant de divergence. Le vecteur signal, contenant les composantes du vecteur courant $\mathbf{X}_{N,t}$ avant l'instant de décision t_d , s'écrit :

$$\mathbf{X}_{N,t}^d = \mathbf{X}_{N,t} - \tilde{\mathbf{X}}_{N,t} \quad (4-28)$$

Notons que ce dernier vecteur s'annule à l'instant $t = t_d + N$ et que $\tilde{\mathbf{X}}_{N,t}$ devient le vecteur signal courant de l'algorithme.

Pour pallier à cet inconvénient de la technique de réinitialisation de J.M. Cioffi et de T. Kailath et tenir compte du signal restant dans la mémoire de l'algorithme, E.E. Eleftheriou et D.D. Falconer [57] proposent des techniques de réinitialisation périodique plus sophistiquées qu'une simple réinitialisation de l'algorithme moindres carrés rapides. L'idée de base dans ces techniques est de supprimer, dans le signal à modéliser y_t , l'influence du vecteur signal présent dans l'algorithme au moment de la réinitialisation. Les auteurs proposent de synthétiser, pendant les périodes de réinitialisation, le signal à modéliser qui alimente l'algorithme moindres carrés rapides par l'une des formules suivantes :

$$\tilde{y}_t = y_t - \mathbf{H}_{LMS, N, t}^T \mathbf{X}_{N,t}^d \quad (4-29)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= \mathbf{H}_{LMS, N, t}^T \tilde{\mathbf{X}}_{N,t} && \text{pendant la phase de réinitialisation} \\ &= y_t, && \text{sinon} \end{aligned} \quad (4-30)$$

où le filtre adaptatif $\mathbf{H}_{LMS, N, t}$ est adapté par un algorithme du gradient stochastique (LMS) initialisé par le filtre transversal \mathbf{H}_{N, t_d-1} issu de l'algorithme moindres carrés rapides. L'instant t_d désigne ici l'instant de réinitialisation qui n'est pas forcément l'instant de divergence. D'après les auteurs, la réinitialisation périodique de l'algorithme moindres carrés rapides sur les paramètres déjà identifiés à l'aide de la relation (4-29) donne les meilleurs résultats. Les tests ont été faits dans le contexte de l'égalisation de canal de transmission de données avec décision dans la boucle.

Notons que ces techniques de réinitialisation ont été proposées dans une optique de filtrage adaptatif, elle ne tiennent pas compte de la modélisation autorégressive (AR) du signal d'entrée. Dans ce dernier cas, les techniques de réinitialisation périodique introduisent des dégradations irréversibles. En effet, l'instabilité numérique peut intervenir à n'importe quel moment, même pendant les intervalles les plus stables (stationnaires) du signal d'entrée. L'information extraite du signal et cumulée dans les prédicteurs aller et retour se trouve périodiquement perdue par la mise à zéro des filtres de prédiction. En plus, dans certaines applications fondées sur l'analyse par prédiction linéaire, on ne peut pas se permettre de travailler avec un algorithme numériquement instable et attendre le moment de l'explosion de l'algorithme pour prendre une décision sur la suite des traitements. D'ailleurs, c'est pour cette raison que les auteurs, qui se sont intéressés à la modélisation du signal d'entrée x_t , se sont plutôt penchés sur des méthodes de régularisation et de maintien des pôles des modèles AR à l'intérieur du cercle unité.

4.3.2 Méthode de régularisation et de rappel à zéro périodique :

Nous décrivons ici brièvement les techniques de stabilisation des algorithmes moindres carrés rapides proposées dans un contexte de modélisation autorégressive. Dans ce cas, contrairement aux méthodes de réinitialisation proposées dans un contexte de filtrage, la dépendance par rapport à l'algorithme moindres carrés rapides utilisé est importante. Les algorithmes de modélisation AR diffèrent, et une méthode proposée pour un algorithme moindres carrés rapides donné n'est pas forcément bonne pour un autre algorithme moindres carrés rapides théoriquement équivalent. Les méthodes décrites ci-dessous ont été mises au point avec l'algorithme de Kalman rapide. Pour empêcher la dérive des pôles du modèle autorégressive estimé, P.Fabre et C.Gueguen [48] (voir aussi [39] pour plus de détails) proposent d'amortir périodiquement les coefficients des prédicteurs aller/retour et de régulariser au même instant la variance des erreurs de prédiction aller. Cela correspond à la modification suivante :

Toutes les T itérations, effectuer :

$$\mathbf{a}_{N,t}^{ii} = \rho^i \cdot \mathbf{a}_{N,t}^i \quad (4-31)$$

$$\mathbf{b}_{N,t}^{ii} = \rho^i \cdot \mathbf{b}_{N,t}^i \quad (4-32)$$

Pour amortir les coefficients ($i=1, 2, \dots, N$) des prédicteurs aller et retour. Et

$$\alpha_{N,t} = \lambda \cdot \alpha_{N,t-1} + \bar{e}_{N,t} e \alpha_{N,t} + \delta \quad (4-33)$$

Pour régulariser la variance des erreurs de prédiction aller.

Le paramètre ρ est une constante comprise entre 0.9 et 1, et δ est une constante positive faible qui évite une décroissance trop rapide vers 0 de la variance aller.

Le choix des paramètres (T , ρ , δ) est relativement critique : un amortissement important des coefficients AR introduit un biais important et peut même conduire à l'apparition prématurée de la divergence. Une constante de régularisation trop grande tue l'adaptativité de l'algorithme. En plus, comme la méthode est basée sur un algorithme de moindres carrés rapides numériquement instable entre les instants T , le choix de la période T dépend du facteur d'oubli exponentiel λ et des caractéristiques du signal d'entrée. Néanmoins, il semble que cette méthode donne de bons résultats pour la modélisation des signaux AR si les trois paramètres de la méthode sont bien choisis.

Signalons enfin que cette méthode a été mise au point pour l'algorithme de Kalman rapide et qu'elle porte son coût opératoire, aux instants T , de $10N$ à $12N$.

4.3.3 Méthode de la constante de stabilisation :

Un problème de mauvais conditionnement se pose pour le cas des signaux très prédictibles qui s'ajoute en plus à l'accumulation des erreurs dans les variables récursives retour [54]. Ce problème est dû à la division par la variance $\alpha_{N,t}$ des erreurs de prédiction aller (théoriquement nulle dans ce cas particulier), intervenant dans le calcul des variables de Kalman d'ordre $N+1$. Il est clair que cela pose un problème de représentation en pratique (surtout en virgule fixe précision limitée), même si on admet que les faibles valeurs de la variance aller peuvent être représentées en utilisant par exemple un processeur flottant. Les non-stationnarités du signal d'entrée posent aussi un problème à cause des faibles valeurs de la variance. Ces non-stationnarités se traduisent dans l'algorithme par des discontinuités importantes surtout au niveau des variances des erreurs de prédiction (passage instantané d'une valeur très faible à une valeur proche de l'énergie du signal est nécessaire pour le démarrage et le bon fonctionnement des algorithmes moindres carrés rapides. En résumé, aux instants de non-stationnarité l'algorithme se trouve mal initialisé (discontinuités importantes des variances).

Pour éviter la division par des valeurs très faibles de la variance aller $\alpha_{N,t}$ et pour permettre la mise en œuvre pratique sur un processeur de signal opérant en virgule fixe, M. Bellanger [55] (voir aussi [58]) propose de maintenir la variance $\alpha_{N,t}$ au-dessus d'un seuil minimal. Ceci s'effectue par l'ajout instantané à la variance des erreurs de prédiction aller d'une constante déterministe, appelée par l'auteur constante de stabilisation :

$$\alpha_{N,t} = \lambda \cdot \alpha_{N,t-1} + \bar{e}_{N,t} e_{N,t} + C \quad (4-34)$$

où $\alpha_{N,t}$ est la variance propagée par l'algorithme de Kalman rapide. Si on admet que les erreurs de prédiction sont faibles devant la constante C (cas des signaux très prédictibles), la valeur minimale de la variance sera égale approximativement à $C/(1-\lambda)$. Cette dernière valeur prise est en pratique nettement supérieure aux valeurs théoriques que doit prendre la variance aller, ce qui provoque une sous-optimalité dans la partie AR de l'algorithme moindres carrés rapides. Cette sous-optimalité se traduit dans le cas de filtrage par un ralentissement de la vitesse de convergence du filtre transverse $\mathbf{H}_{N,t}$.

Notons enfin que cette méthode ne règle absolument pas le problème de l'accumulation des erreurs numériques dans les algorithmes moindres carrés rapides, mais elle apparaît cependant efficace pour l'implantation sur un processeur de signal travaillant en virgule fixe précision limitée des algorithmes moindres carrés rapides, pour la modélisation de signaux sinusoïdaux bruités [58].

4.3.4 Stabilisation par introduction d'une redondance supplémentaire :

Parmi les méthodes de stabilisation étudiées jusqu'à présent, la méthode décrite sommairement ci-dessous est, à notre avis, la seule méthode qui a été conçue pour combattre réellement l'accumulation et la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes moindres carrés rapides. Cette méthode, due à J.L. Botto [53] (voir aussi [40] pour plus de détails sur les calculs), est proposée pour minimiser un critère quadratique sur certaines variables calculées par l'algorithme moindres carrés rapides. L'idée est d'exploiter un indicateur de divergence de l'algorithme. A l'instant t , si l'indicateur de divergence n'est pas nul, on agit sur certaines variables récursives de façon à les rapprocher de leurs valeurs théoriques. Pour réaliser ceci, l'auteur propose de minimiser en plus du critère des moindres carrés exacts, un critère supplémentaire, fonction des

filtres de prédictions aller/retour réellement calculés par l'algorithme et de l'indicateur de divergence (cette variable est donnée par la formule (4-1)).

En minimisant ce critère, J.L.Botto a obtenu un algorithme moindres carrés rapides de complexité $10N$ (soit $3N$ supplémentaire pour les algorithmes du type FTF de complexité $7N$). La stabilité et la robustesse de l'algorithme obtenu ont été testées par simulation dans diverses conditions de mise en œuvre. Néanmoins, plusieurs auteurs [42], [59] et [29] ont constaté des problèmes de divergence. De l'avis de Benallal dans [29], ces divergences de l'algorithme améliorent nettement les propriétés numériques des algorithmes moindres carrés rapides et peuvent être utilisés en pratique, en prenant quelques précautions mineures, sans grandes difficultés pour des applications telle que l'annulation d'écho acoustique.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons une nouvelle méthode de stabilisation numérique simple pour combattre l'accumulation des erreurs dans les algorithmes moindres carrés rapides. Cette méthode découle directement de l'analyse et des observations faites dans [54] concernant la propagation des erreurs numériques par un modèle d'état dans ces algorithmes.

4.3.5 Nouvelle méthode de stabilisation des algorithmes moindres carrés rapides :

Le principe de base de cette méthode de stabilisation que nous avons appliqué, est de calculer les équations de propagation des erreurs dans les algorithmes moindres carrés rapides puis de modifier par une contre-réaction convenable les propriétés numériques de chaque algorithme ou plus précisément certaines de ces variables récursives dont l'instabilité numérique est connue ou établie. Cette opération est rendue possible grâce à l'existence de variables redondantes. Nous avons utilisé les résultats de l'analyse de la propagation des erreurs largement simplifiée par le choix d'un facteur d'oubli très proche de 1.

On démontre dans [29] que les deux variables de l'algorithme FTF $7N$ qui sont à l'origine de l'instabilité sont la variance des erreurs de prédiction retour et le prédicteur retour. Ceci est dû essentiellement au calcul de l'erreur de prédiction retour par une formule sans redondance, que nous rappelons ici :

$$\bar{r}_{N,t} = -\lambda \beta_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (4-35)$$

Cette relation, contrairement à la relation de convolution, introduit des effets numériques négatifs dans le calcul des variables récurrentes retour (variance et prédicteur). D'ailleurs, il est connu que le remplacement de la relation (4-35) par la relation de convolution améliore nettement les performances des algorithmes des moindres carrés rapides (c'est le cas des algorithmes FTF 7N+N et de Kalman rapide). Il faut aussi prendre en compte la relation qui existe entre le filtre prédiction retour et le gain de Kalman dual d'ordre N. L'effet de cette relation dans le domaine numérique se traduit par un prédicteur retour numériquement instable à cause de la division par la variable $\theta_{N,t}$ inférieur à 1. Une fois connu l'origine du problème de l'instabilité numérique, il existe de multiples manières d'agir pour modifier les propriétés numériques de l'algorithme sans modifier sa structure théorique. Ces modifications des propriétés numériques de l'algorithme sont possibles grâce à l'existence de la redondance dans les algorithmes moindres carrés rapides. Par exemple, il existe deux manières de calculer l'erreur de prédiction retour. L'une est la relation (4-35), la deuxième est la relation de convolution :

$$\bar{r}_{N,t}^c = x_{t-N} - \mathbf{b}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \quad (4-36)$$

Ces deux formes de prédictions retour permettent de définir une variable indicatrice de divergence $\zeta_{N,t}$ théoriquement nulle.

En faisant un développement au premier ordre de cette expression, on obtient :

$$\zeta_{N,t} = -\mathbf{X}_{N,t}^T \cdot \Delta \mathbf{b}_{N,t} + \lambda \cdot \Delta \beta_{N,t-1} \cdot \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} + \lambda \cdot \beta_{N,t-1} \cdot \Delta \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (4-37)$$

Cette expression contient une information importante : $\zeta_{N,t}$ est fonction des erreurs numériques dans les variables récurrentes retour. Il est clair que la variable (4-37), qui est théoriquement nulle, ne modifie pas la structure théorique de l'algorithme. Par contre, son introduction en un point quelconque de l'algorithme modifie ces propriétés numériques.

Pour stabiliser l'algorithme FTF 7N, on définit trois erreurs de prédiction retour a-priori théoriquement équivalentes qui vont être utilisées pour calculer le vecteur de prédiction retour $\mathbf{b}_{N,t}$, la variance des erreurs de prédiction retour $\beta_{N,t}$, et la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$.

$$\bar{r}_{N,t}^b = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^b \xi_{N,t} \quad (4-38)$$

$$\bar{r}_{N,t}^\beta = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^\beta \xi_{N,t} \quad (4-39)$$

$$\bar{r}_{N,t}^\gamma = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^\gamma \xi_{N,t} \quad (4-40)$$

Où les paramètres scalaires μ^b, μ^β et μ^γ permettent de modifier et de contrôler la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes du type FTF 7N. Notons que le choix de $\mu^b = \mu^\beta = \mu^\gamma = -1$ conduit à l'algorithme FTF 7N, alors que le choix $\mu^b = \mu^\beta = \mu^\gamma = 0$ donne la version FTF 7N+N qui calcule l'erreur de prédiction retour par convolution.

Les erreurs numériques dans les relations (4-38), (4-39) et (4-40) s'écrivent :

$$\Delta \bar{r}_{N,t}^b = (1 + \mu^b) \Delta \bar{r}_{N,t}^c - \mu^b \Delta \bar{r}_{N,t}^p \quad (4-41)$$

$$\Delta \bar{r}_{N,t}^\beta = (1 + \mu^\beta) \Delta \bar{r}_{N,t}^c - \mu^\beta \Delta \bar{r}_{N,t}^p \quad (4-42)$$

$$\Delta \bar{r}_{N,t}^\gamma = (1 + \mu^\gamma) \Delta \bar{r}_{N,t}^c - \mu^\gamma \Delta \bar{r}_{N,t}^p \quad (4-43)$$

En tenant compte de $\Delta \bar{r}_{N,t}^c$ et $\Delta \bar{r}_{N,t}^p$, les relations (4-41), (4-42) et (4-43) s'écrivent encore :

$$\Delta \bar{r}_{N,t}^b = -(1 + \mu^b) \mathbf{X}_{N,t}^T \Delta \mathbf{b}_{N,t-1} + \mu^b \lambda \Delta \beta_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} + \mu^b \lambda \beta_{N,t-1} \Delta \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \quad (4-44)$$

$$\Delta \bar{r}_{N,t}^\beta = -(1 + \mu^\beta) \mathbf{X}_{N,t}^T \Delta \mathbf{b}_{N,t-1} + \mu^\beta \lambda \Delta \beta_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} + \mu^\beta \lambda \beta_{N,t-1} \Delta \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \quad (4-45)$$

$$\Delta \bar{r}_{N,t}^\gamma = -(1 + \mu^\gamma) \mathbf{X}_{N,t}^T \Delta \mathbf{b}_{N,t-1} + \mu^\gamma \lambda \Delta \beta_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} + \mu^\gamma \lambda \beta_{N,t-1} \Delta \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \quad (4-46)$$

Suite à l'analyse dans [5] de la propagation des erreurs numériques dans le système d'état défini précédemment avec les nouvelles erreurs numériques et à l'étude de [54] de l'influence numérique de ces nouvelles définitions des erreurs de prédiction, on choisit le jeu de paramètres $(\mu^b, \mu^\beta, \mu^\gamma)$ adéquat. Il faut choisir les paramètres de contrôle μ^b, μ^β et μ^γ , pour bien conditionner une des matrices composantes de la matrice de propagation des erreurs numériques responsable de l'instabilité numérique dans les algorithmes moindres carrés rapides même pour des conditions de simulation favorables par exemple dans le cas où les variables de Kalman sont N ou d'ordre N+1 sont propagées par l'algorithme RLS classique. L'étude de la stabilité globale de l'algorithme

modifié à partir des équations du paragraphe précédant reste un problème très difficile à résoudre à cause de la complexité des équations obtenues et de la dépendance de ces derniers.

D'après [29], il existe une infinité de solutions pour le choix des paramètres pour stabiliser le système (valeurs propres inférieures à 1 de la matrice suscitée qui pose problème). A chaque solution correspond une condition de stabilité sur le facteur d'oubli λ . Par la suite, on propose deux choix simples de paramètres μ^b, μ^β et μ^γ . Ces choix ont été largement testés par simulation dans [54], pour différents signaux d'entrée et différents paramètres de l'algorithme ; aucune tendance à la divergence n'a été observée. L'algorithme de moindres carrés rapides de type FTF 7N numériquement stable pour un choix convenable des paramètres μ^b, μ^β et μ^γ est listé à la table 4.1. Dans tous les cas, cet algorithme augmente la complexité de calcul de l'algorithme FTF 7N de N multiplications par échantillon traité. Cette complexité supplémentaire est due au calcul de l'erreur de prédiction retour par la convolution. Cette dernière est inévitable à cause de l'instabilité du prédicteur retour : elle contient les erreurs dans le calcul du prédicteur.

➤ **Choix 1 :** $\mu^b = \mu^\beta = \mu^\gamma = 1$

L'étude de la stabilité de la matrice de propagation des erreurs numériques (pôle à l'intérieur du cercle unité) nous impose la condition nécessaire de stabilité du système est :

$$1 > \lambda > \frac{4N+5}{4N+1} = 1 - \frac{1}{2N+3,5} \quad (4-47)$$

➤ **Choix 2 :** $\mu^\gamma = \mu^\beta = 0, \mu^b = 1$

Comme dans le cas du choix 1, ce choix des paramètres conduit à des conditions nécessaires de stabilité des équations de propagations des erreurs numériques dans les variables retour moins restrictives que celle du choix 1. Mais là aussi, la véritable condition de stabilité numérique n'est obtenue que si la variance des erreurs numériques dans le prédicteur retour reste bornée [29], la condition de stabilité (pôle à l'intérieur du cercle unité) de cette relation est donnée par la solution de l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - 2(1 - \lambda^2) + (N+2)(1 - \lambda^2)^2 \right) \right| < 1 \quad (4-48)$$

Cette inégalité est vérifiée si et seulement si le facteur d'oubli λ respecte la condition suivante :

$$1 \geq \lambda > \sqrt{(N+1)/(N+2)} \quad (4-49)$$

Cette dernière condition nécessaire pour la stabilité numérique du prédicteur est très proche de la condition du premier choix, sa borne inférieure est approchée par $1-1/(2N+4)$ dès que N dépasse la dizaine.

Pour stabiliser numériquement l'algorithme de Kalamn rapide, on a utilisé le même principe qui a servi à stabiliser l'algorithme FTF 7N (voir [54]): c'est à dire modifier les propriétés numériques des variables dont l'instabilité numérique est établie ou connue, et cela sans modifier les équations théoriques de l'algorithme.

Table 4.1 : Algorithme F T F Numériquement stable

➤ **Variables disponibles à l'instant t :**

$$\mathbf{a}_{N,t-1}, \mathbf{b}_{N,t-1}, \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1}, \gamma_{N,t-1}, \alpha_{N,t-1}, \beta_{N,t-1}, \mathbf{H}_{N,t-1}$$

➤ **Nouvelles informations x_t et y_t**

➤ **Modélisation de x_t et x_{t-N} ensuite calcul de:**

$$\bar{e}_{N,t} = x_t - \mathbf{a}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t-1} \longrightarrow (3-61)$$

$$\alpha_{N,t} = \lambda \alpha_{N,t-1} + \bar{e}_{N,t}^2 \gamma_{N,t-1} \longrightarrow (3-63+3-76)$$

$$\gamma_{N+1,t} = \frac{\lambda \alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t}} \gamma_{N,t-1} \longrightarrow (3-80)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}_{N,t-1} \end{bmatrix} \frac{\bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \longrightarrow (3-67)$$

$$\mathbf{a}_{N,t} = \mathbf{a}_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1} \longrightarrow (3-60+3-76)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{N,t} = x_{t-N} - \mathbf{b}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \longrightarrow (3-55)$$

$$\xi_{N,t} = \bar{\mathbf{r}}_{N,t} + \lambda \beta_{N,t-1} \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \longrightarrow (4-1+4-3)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{N,t}^b = \bar{\mathbf{r}}_{N,t}^c + \mu^b \xi_{N,t} \longrightarrow (4-38)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{N,t}^\beta = \bar{\mathbf{r}}_{N,t}^c + \mu^\beta \xi_{N,t} \longrightarrow (4-39)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{N,t}^\gamma = \bar{\mathbf{r}}_{N,t}^c + \mu^\gamma \xi_{N,t} \longrightarrow (4-40)$$

$$\gamma_{N,t} = \frac{\gamma_{N+1,t}}{1 + \gamma_{N+1,t} \bar{\mathbf{r}}_{N,t}^\gamma \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1}} \longrightarrow (3-84+3-89)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t} - \tilde{\mathbf{C}}_{N+1,t}^{N+1} \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow (3-91)$$

$$\mathbf{b}_{N,t} = \mathbf{b}_{N,t-1} - \bar{\mathbf{r}}_{N,t}^b \gamma_{N,t} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} \longrightarrow (3-54+3-77)$$

$$\beta_{N,t} = \lambda \beta_{N,t-1} + (\bar{\mathbf{r}}_{N,t}^\beta)^2 \gamma_{N,t} \longrightarrow (3-64+3-77)$$

➤ **Filtrage de y_t (erreur de filtrage a-priori)**

$$\bar{e}_{N,t} = y_t - \mathbf{H}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \longrightarrow (3-13)$$

➤ **Adaptation du Filtre: (Mise à jour des coefficients du filtre)**

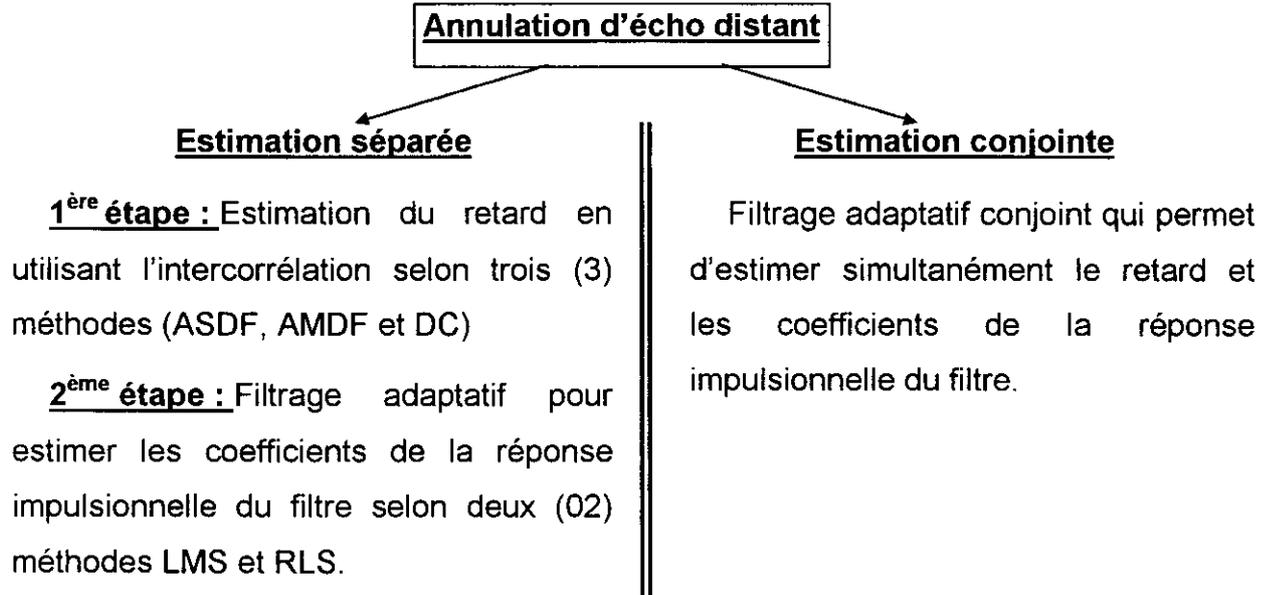
$$\mathbf{H}_{N,t} = \mathbf{H}_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t} \tilde{\mathbf{C}}_{N,t} \longrightarrow (3-28)$$

CHAPITRE V

SIMULATION

V. SIMULATION

Les différentes méthodes d'annulation d'écho ont été testées par une simulation faite en turbo pascal suivant l'organigramme ci-dessous.



Les signaux simulés sont conformes aux modèles du chemin de l'écho distant (Paragraphe 2.7 équation 2-8). De même le signal d'émission $x(t)$ générant l'écho est aussi conforme aux normes du CCITT [29], $x(t)$ est la somme de quatre sinusoides, c.à.d.,

$$x(k) = \sin(200\pi \cdot k) + \sin(600(\pi \cdot k)) + \sin(2000\pi \cdot k) + \sin(4000\pi \cdot k) \quad (5-1)$$

le canal d'écho distant est supposé de gain constant entre 200 et 3400 Hz et de phase linéaire. La fréquence d'échantillonnage est de 8 Khz. Les bruits $v_1(n)$ et $v_2(n)$ sont des bruits blancs gaussiens.

5.1 ESTIMATION SEPARÉE:

5.1.1 Simulateur du retard:

Un schéma d'un simulateur du retard du chemin de l'écho est proposé. Intuitivement, il serait clair que si le signal d'entrée peut être décalé dans le dispositif de simulation du retard variable par une quantité égale au chemin de l'écho, l'ordre nécessaire dans l'annuleur d'écho adaptatif sera réduit significativement. A cette fin, le circuit de mesure du retard (voir Annexe C) sert à calculer la fonction d'intercorrélation entre le signal d'entrée ou le signal générant l'écho et l'écho. Le point pour lequel on détermine le maximum de la fonction d'intercorrélation correspond au retard aller retour du chemin de l'écho.

Dans la forme préférée de cette technique, le circuit de mesure de ce délai comprend une ligne à retard ayant plusieurs cellules temporelles, avec un retard entre cellules égale à l'intervalle de Nyquist (voir Annexe D). Le signal d'entrée $x(t)$ dans le chemin de l'entrée, est délivré à la ligne à retard 21 et les signaux décalés par les cellules de retard respectives sont multipliés par les réseaux multiplicateurs 23 respectifs avec le signal d'écho $y(t)$ dans le chemin du signal de retour. Les signaux produits des réseaux multiplieurs sont moyennés par des circuits intégrateurs respectifs 25 et les signaux moyennés sont donc comparés pour déterminer le maximum des produits moyennés $R_{xy}(T), R_{xy}(2T), \dots, R_{xy}(NT)$. Ce maximum indique le retard du chemin de l'écho et il peut être utilisé d'une manière simple pour contrôler le dispositif du retard variable pour atteindre le retard du chemin de l'écho.

Pour mieux comprendre l'opération du circuit illustré dans l'Annexe D, supposons que le retard du chemin de l'écho est équivalent à la durée de retard de deux intervalles de Nyquist (c.a.d., $D=2.T$). Conformément à l'évidence mathématique, la sortie A_2 de l'intégrateur 25-2 sera dans ce cas d'une amplitude plus grande que n'importe quelle sortie de la série $\{A_n\}$. Le comparateur 26 alimentera donc la sortie 28-2 et la porte 29-2 est automatiquement activée. Par conséquent, le signal $x(t)$ sera retardé dans la ligne à retard 21 pour une période de deux intervalles de Nyquist. Ce dernier (c.a.d., $x(t-2T)$) se trouvera donc à la porte 29-2 et sera délivré à l'annuleur d'écho adaptatif 18 (voir annexe D). Par conséquent, le signal d'entrée $x(t)$ sera retardé dans la ligne à retard 21 par une quantité égale au retard du chemin de l'écho.

La ligne à retard 21 utilisée, les composants des réseaux de multiplicateurs et intégrateurs 23 et 25, et le comparateur 26 constituent le circuit de mesure du délai 20 de l'Annexe D. Et comme déjà expliqué, la ligne à retard 21 et les portes 29 fonctionnent comme le dispositif du retard variable 17. De ce fait, la ligne à retard a donc un double objectif (la mesure et la simulation du retard variable).

Le simulateur du retard montré en détail dans l'Annexe D peut être exploiter pour chaque annuleur d'écho et il peut apporter des améliorations telles que la stabilité des annuleurs ainsi que des performances concernant le rapport signal sur bruit. Mais il est évident (ou apparent) qu'une économie totale est insignifiante dans l'appareillage d'un circuit. Par contre, puisque le circuit mesurant le retard de l'Annexe D est nécessaire dans un annuleur d'écho pour un temps court seulement au début de chaque connexion, d'où il peut être à temps partagé entre plusieurs annuleurs d'écho. Il en résultera des gains

substantiels dans la circuiterie et dans l'économie. Un tel temps partagé, est symboliquement illustré dans l'Annexe C par des commutateurs unipolaires et unidirectionnels jumelés 10. A partir de l'instant d'établissement de la connexion téléphonique, le circuit 20 mesurant le délai est connecté en parallèle (en shunt) au chemin de l'écho. Le chemin des dispositifs connectés en série 17 et l'annuleur d'écho 18 est ouvert temporairement à cet instant. Une fois que le délai du chemin de l'écho est mesuré et le dispositif du délai variable est mis en service, le circuit 20 mesurant le retard est déconnecté et peut être utilisé donc pour mesurer le retard du chemin de l'écho d'une autre connexion téléphonique. Les dispositifs 17 et l'annuleur 18 connectés en série sont maintenant connectés à travers le chemin de l'écho et restent connectés pendant toute la durée de la communication. Le temps nécessaire pour mesurer le retard du chemin de l'écho et aussi pour mettre en service le dispositif du délai variable est principalement déterminé par le temps d'intégration des réseaux d'intégrateurs 25. Il est apparent donc que l'opération de simulation du retard peut être réalisée entre le temps d'établissement d'une connexion et l'arrivée du signal utile (la donnée ou la parole).

Les principes fondamentaux de cette méthode sont indépendants du signal générant l'écho et le choix de ce dernier est complètement arbitraire. C'est à dire, que le signal d'entrée $x(t)$ capté peut être de la parole, un bruit aléatoire, la donnée, une impulsion etc... Au fait, cette technique peut être utilisée avec beaucoup plus d'avantages en combinaison avec la technique d'interrogation par impulsion. Au cas le plus défavorable, le chemin de l'écho est interrogé par impulsion immédiatement après l'établissement de la connexion. Cette impulsion peut être aussi utilisée pour la simulation du retard du chemin de l'écho.

De plus, le schéma proposé peut être utilisé aussi bien avec la fonction d'intercorrélation directe (DC: Direct Correlator), qu'avec la fonction de différence au carré moyennée (ASDF: Average Square Difference Function) qu'avec aussi la fonction de différence d'amplitude moyennée (AMDF: Average Magnitude Difference Function).

5.1.2 Estimation du retard avec les différentes fonctions d'intercorrélation

Nous avons réalisé la même expérience avec différent rapport signal sur bruit 60 dB, 40 db, 30 dB, 20 dB et 10 dB. Nous avons choisi de présenter les deux exemples suivants avec un rapport signal sur bruit (SNR) de 40 dB et de 10 dB et dans les différents cas $N/M \gg 5$.

$K_{\text{convergence}}$ étant l'indice temporelle qui mettra en évidence la convergence des différents algorithmes pour lequel l'erreur quadratique moyenne est égale à 10^{-1} .

T_d = temps de retard de 3 ms.

N_e = Nombre d'échantillons du signal .

M = Nombre d'échantillons du signal utilisés pour le calcul de l'intercorrélation (temps d'intégration)

Att= L'atténuation du signal en décibel (équivalent à A)

SNR=SNR₁=SNR₂=rapport signal sur bruit sur les deux axes de communications émission et réception.

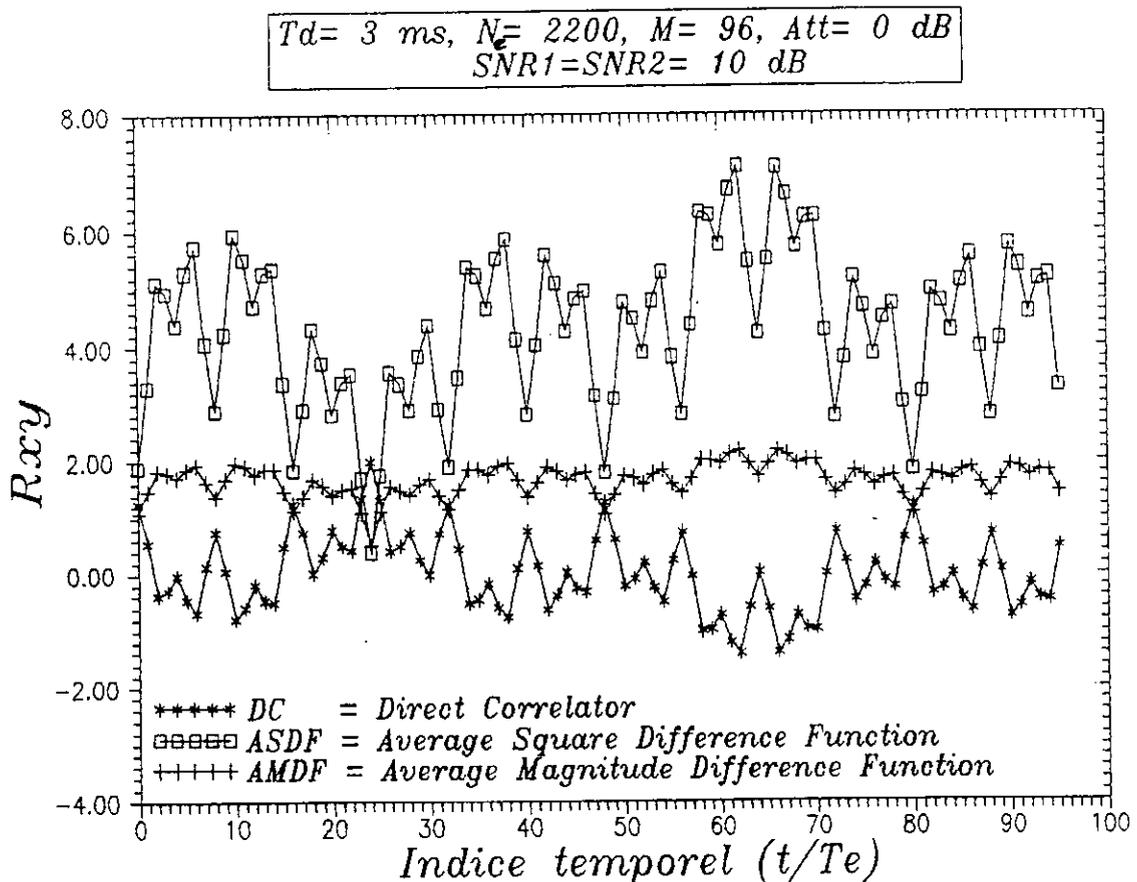


Fig.V-1: Les différentes fonctions d'intercorrélation

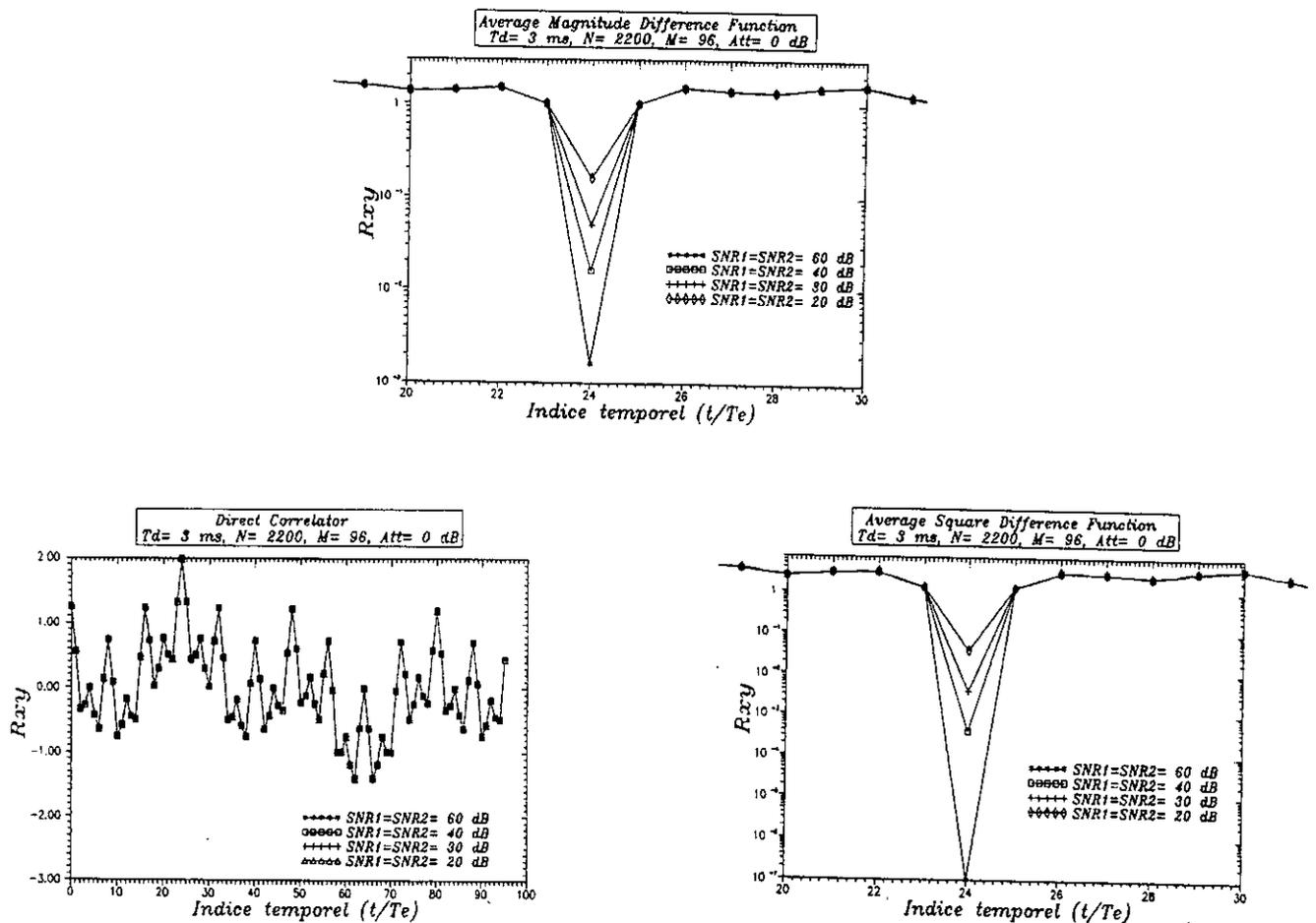


Fig.V-2: L'influence du bruit sur les différentes fonctions d'intercorrélation.

La figure V-1 nous montre comment, en identifiant l'optimum des différentes fonctions d'intercorrélation, on détermine le retard. On remarquera que l'estimateur de la fonction d'intercorrélation ASDF est bel et bien le meilleur car il y'a moins de risque d'avoir un faux optimum en comparaison à l'estimateur direct DC et aussi à l'estimateur AMDF.

Dans la figure V-2, l'estimateur DC est insensible au bruit, mais nécessite une complexité arithmétique beaucoup plus grande, par contre en comparant la figure V-2-b et V-2-c, on remarquera que l'estimateur ASDF est moins sensible au bruit qu'à celui de l'AMDF, ce qui confirme le choix de l'estimateur ASDF. [2]

Par ailleurs, il est à faire observer que pour un temps de retard simulé de 3 ms, les 3 estimateurs déterminent bien le retard simulé vu que $N_e/M > 5$, N_e étant le nombre d'échantillons du signal et M étant le temps d'intégration de la fonction d'intercorrélation.

5.1.3 Annulation d'écho avec l'algorithme du gradient LMS:

Après estimation du retard, l'algorithme adaptatif LMS est appliqué pour estimer les coefficients du filtre annuleur d'écho, les résultats de la simulation sont les suivants :

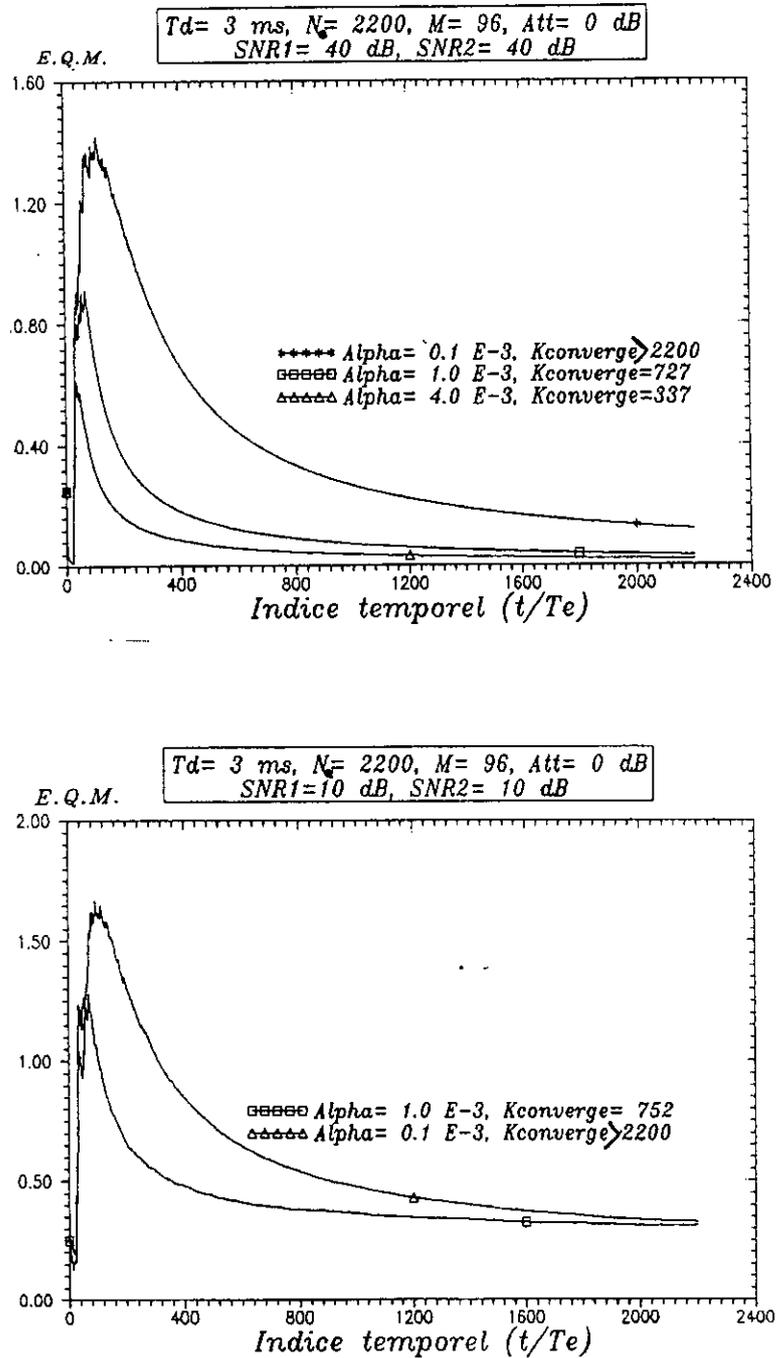
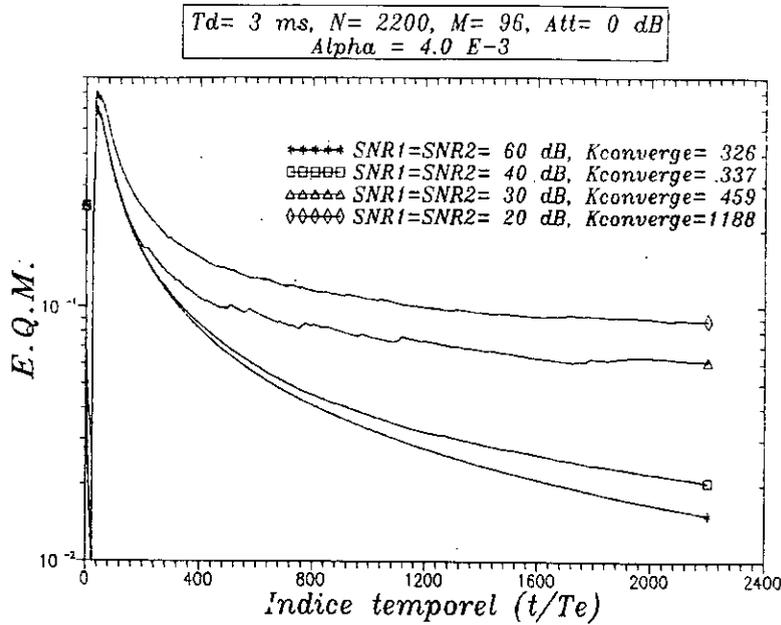
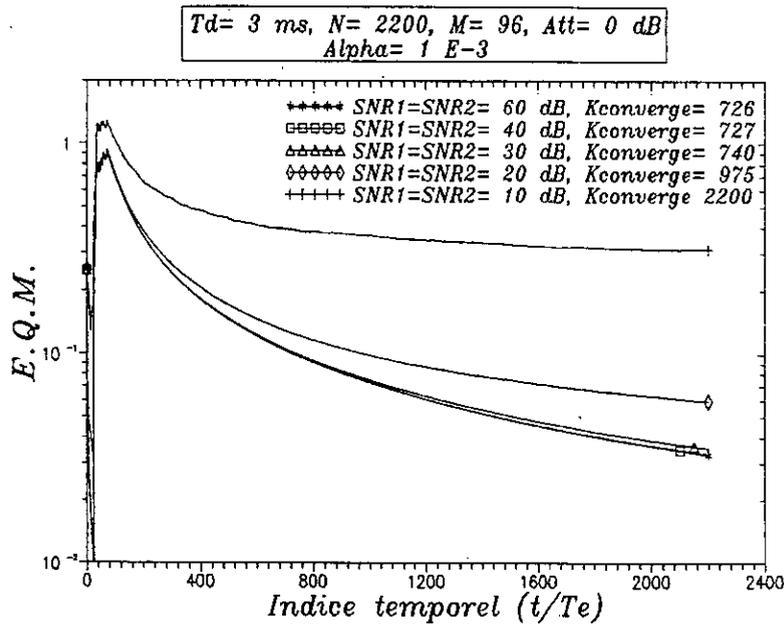


Fig.V-3: Influence du pas d'adaptation Alpha et convergence des filtres

L'Erreur Quadratique Moyenne



L'Erreur Quadratique Moyenne



L'Erreur Quadratique Moyenne

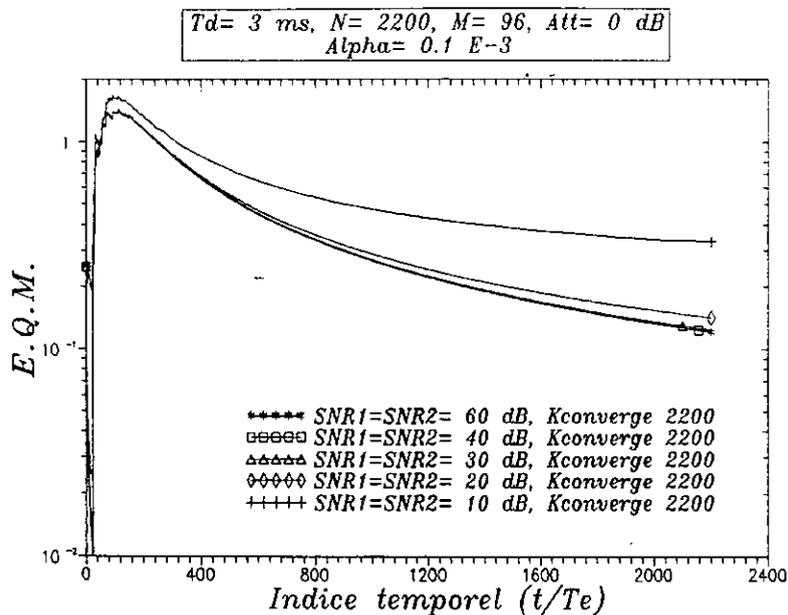


Fig.V-4 : Influence du bruit sur la convergence des filtres LMS adaptatifs

5.1.4 Annulation d'écho avec l'algorithme des moindres carrés recursifs rapides

FTF 7N :

De la même manière que le LMS, l'algorithme FTF 7N est appliqué pour estimer les coefficients du filtre annuleur d'écho d'une manière adaptative. Les résultats de cette estimation sont les suivants :

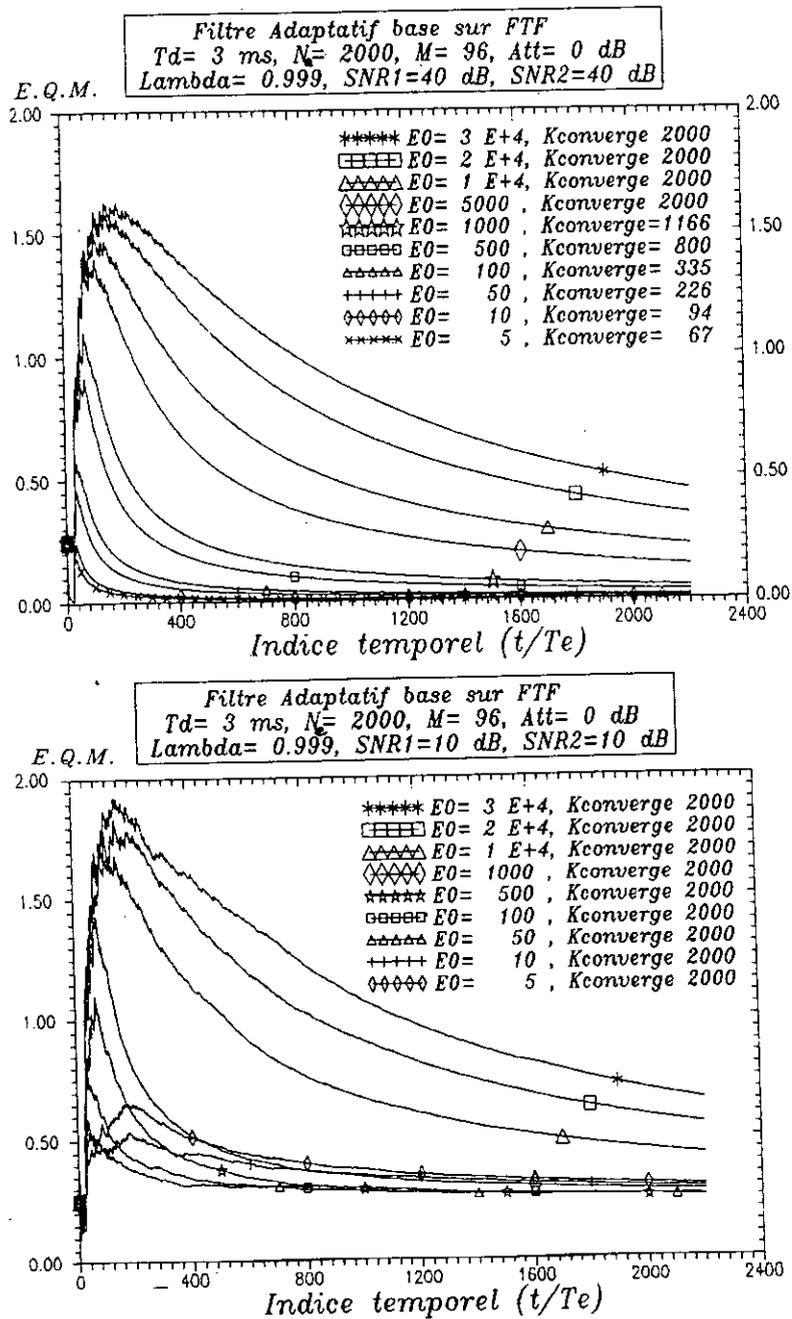


Fig.V-5: Influence de E_0 la variance initiale de l'erreur de prédiction retour et convergence des filtres

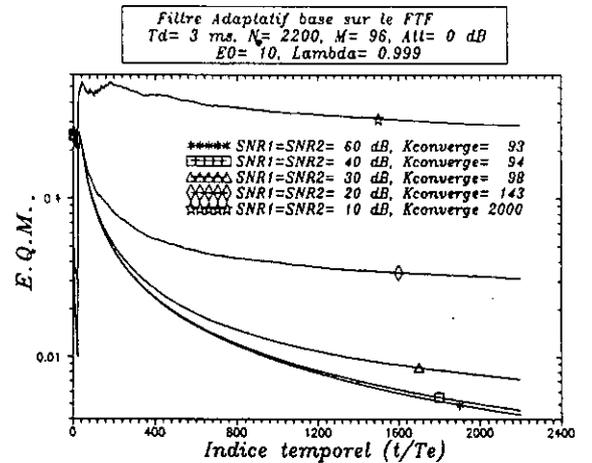
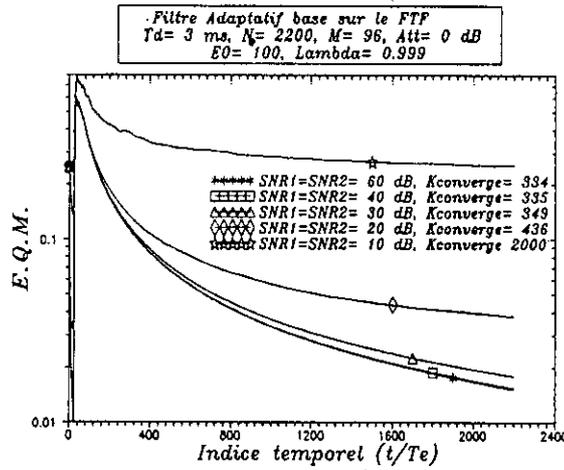
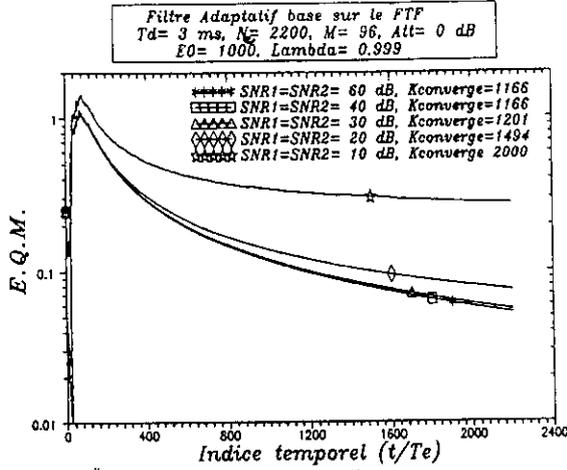


Fig.V-6: Influence du bruit sur la convergence des filtres FTF adaptatifs

Il est à rappeler que nous n'avons présenté que deux expériences sur les cinq réalisées pour différents rapport signal sur bruit 60 dB, 40 dB, 30 dB, 20 dB et 10 dB.

Les principaux aspects à considérer pour le choix d'un algorithme sont la vitesse de convergence, l'erreur en régime établi, la complexité de calcul et celle de la réalisation physique.

Les figures V-3, V-4, V-5 et V-6 et les légendes qui les accompagnent nous confirment les faits suivants:

- que l'algorithme FTF offre la vitesse maximale de convergence et l'erreur minimale en régime établi par rapport à l'algorithme LMS (il suffit de comparer $K_{\text{convergence}}$ pour les mêmes conditions de communication rapport signal sur bruit). La convergence est obtenue en un petit nombre de fois N_e échantillons, N étant l'ordre du filtre.

- qu'avec l'algorithme LMS du gradient stochastique, la convergence dépend des propriétés statistiques du signal et de la valeur de la constante d'adaptation α . Si cette constante approche sa valeur maximale, la vitesse de convergence s'accroît mais il en est de même de l'erreur en régime établi. Si elle est petite, l'erreur ou le bruit est réduit, mais la vitesse de convergence aussi. Il faut donc faire un compromis. On peut accepter une valeur élevée de α , soit pendant la période d'initialisation, soit pendant l'échange semi-duplex initial, puis passer à une valeur plus faible lorsqu'apparaît le signal distant. Plusieurs techniques ont été proposées pour le choix de α [28] [29] [34] [32] [33].

- Il faut également prêter attention à la précision des calculs (surtout des multiplications). Dans les annuleurs d'écho pour données, la précision des multiplications n'entre pas en jeu, puisque les valeurs +1, -1 et 0 ne peuvent signifier qu'un changement de signe ou la multiplication par zéro. Mais dans les annuleurs d'écho pour signaux vocaux, il faut faire attention aux pertes de précision résultant des multiplications. Dans de nombreux cas, on peut éviter des multiplications inutiles en choisissant avec soin les valeurs des constantes. C'est ainsi que dans l'algorithme LMS, choisir une constante α égale à une puissance de 2 revient à remplacer la multiplication par un décalage, qui permet à la fois de gagner du temps et d'éviter une perte de précision.

- nous pouvons constater l'influence du bruit sur chacun des algorithmes ainsi que le choix des paramètres prépondérants:

La condition nécessaire et suffisante de convergence de l'algorithme LMS est [29]:

$$0 < \alpha < 1/\lambda_{\max} \quad (5-2)$$

où λ_{\max} est la plus grande valeur propre de la matrice d'autocorrélation du signal x :

$$\mathbf{R}_{N,XX}$$

Cette condition est établie sous l'hypothèse que le vecteur $\mathbf{H}_{N,t-1}$ est indépendant du vecteur signal d'entrée $\mathbf{X}_{N,t}$. En pratique, puisque λ_{\max} n'est pas disponible, on utilise souvent, pour le choix de la constante α , une condition plus restrictive (c'est une approximation de la condition (5-2) [29] [32] [3] [33]):

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{\text{trace}(\mathbf{R}_{N,XX})} = \frac{1}{N \cdot \sigma_X^2} \quad (5-3)$$

où σ_X^2 étant la variance du signal X. Cette dernière condition exploite le caractère défini positif de la matrice d'autocorrélation ($\lambda_{\max} < \text{trace}(\mathbf{R}_{N,XX})$).

L'algorithme est stable sous les conditions (5.2) ou (5.3). Mais l'existence de plusieurs modes de convergence dans les vecteurs $\mathbf{H}_{N,t-1}$ rend la qualité (en terme de vitesse) de convergence fonction essentiellement du rapport de la plus grande valeur propre à la plus faible valeur propre $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ de $\mathbf{R}_{N,XX}$ [29] [32] [31] [3] [33] et [34]. Elle est optimale seulement pour un signal d'entrée blanc. C'est peut être la seule limitation de l'algorithme LMS dans les applications où le signal d'entrée possède une grande dynamique spectrale (c.a.d. que le spectre des valeurs propres est très dynamique et grand). D'ailleurs, c'est pour cette raison qu'on tente d'utiliser dans les applications d'annulation d'écho des algorithmes de type moindres carrés exacts, dont la vitesse de convergence est indépendante de la dispersion des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée [29] [3] [33].

Les performances asymptotiques de l'algorithme LMS peuvent se résumer par le compromis à faire entre une EQM (Erreur Quadratique Moyenne) faible (α faible) d'une part c'est à dire proche de l'optimum de Wiener-Hopf et une meilleure vitesse de convergence et/ou une bonne capacité de poursuite des non-stationnarités (α grand) d'autre part. Des valeurs de α optimisant la vitesse de convergence initiale ou la capacité de poursuite d'un filtre variable sont données dans [34]. Notons enfin que l'analyse en virgule fixe effectuée par [35] montre que pour améliorer les performances de l'algorithme en virgule fixe à précision limitée, de coder le vecteur des coefficients $\mathbf{H}_{N,t-1}$ avec plus de précision que les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $\bar{e}_{N,t}$, c'est ce que nous avons utilisé dans notre simulation.

- Dans le cas de la fenêtre antérieur (préfenêtrage), les algorithmes MCR (Moindres Carrés Rapides) supposent que les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont nuls avant l'instant initial $t=0$.

Par conséquent, les erreurs de prédiction retour et le prédicteur retour doivent être nuls avant l'instant $t=N$. Pour démarrer un algorithme MCR, plusieurs procédures d'initialisation ont été proposées [5] (voir aussi [39] pour une synthèse des méthodes d'initialisation des algorithmes MCR). Citons ici la procédure d'initialisation la plus simple et la plus sûre du point de vue numérique: cette procédure met les coefficients $\mathbf{H}_{N,t}$ à une valeur arbitraire $\mathbf{H}_{N,0}$, les prédicteurs aller/retour et le gain de Kalman à zéro, et initialise les variances des erreurs de prédiction avec des constantes faibles [29] la procédure d'initialisation est donnée dans l'annexe B (voir [5] pour une description complète de cette procédure d'initialisation). La constante E_0 représentant l'énergie de l'erreur de filtrage, est la seule qui doit être convenablement choisie. Pendant les premières itérations, les valeurs prises par les variables internes de l'algorithme sont étroitement liées au choix de la constante E_0 : une constante d'initialisation faible devant l'énergie du signal d'entrée $x(t)$ permet une convergence initiale rapide mais rend l'algorithme mal conditionné (matrice d'autocorrélation proche d'une matrice singulière). Par contre, une valeur importante permet d'assurer un bon conditionnement numérique initial de l'algorithme, mais ralentit en même temps sa vitesse de convergence initiale. En pratique, il faut assurer le démarrage de l'algorithme. On pourra choisir par exemple la constante E_0 qui vérifie l'inégalité suivante [5]:

$$\boxed{E_0 \geq N \cdot \sigma_x^2 / 100} \quad (5-4)$$

où σ_x^2 est la variance du signal $x(t)$.

Il faut noter que la quantité $N \cdot \sigma_x^2 / 100$ est assez pessimiste pour les longueurs N faibles (1 à 20) et assez optimiste pour N grand (N de l'ordre de 200 et plus) [29]. Des valeurs de E_0 assurant le bon fonctionnement initial peuvent être facilement trouvées par simulation pour un N donné [29].

5.2 ESTIMATION CONJOINTE

Ce type d'estimation est destiné pour les phénomènes où le délai est variable. Le défaut le plus important des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR) que nous avons rencontré lors des différentes simulations était la non-compensation des erreurs numériques. Ces erreurs s'accumulent et se propagent jusqu'à la divergence de l'algorithme. Plusieurs méthodes ont été proposées pour combattre le problème de l'instabilité numérique. Citons: la régularisation de certaines variables

critiques [48] [55], la réinitialisation préventive sur conditions initiales du signal dans le filtre adaptatif ou non [56][5][57], l'introduction d'une redondance supplémentaire dans les calculs [61]. Signalons que certaines de ces méthodes ne combattent absolument pas le problème de l'accumulation des erreurs numériques [29]. Les méthodes de réinitialisation ou de régularisation périodique utilisent des algorithmes numériquement instables entre les instants de réinitialisation ou de régularisation.

Après une revue des techniques de stabilisation des algorithmes MCR existant dans la littérature, nous avons opté pour une nouvelle méthode de stabilisation [47] qui nous a paru la plus fiable à ce jour. Cette méthode est fondée sur l'analyse de la propagation des erreurs numériques. Elle se distingue des méthodes citées plus haut par la stabilisation numérique de une ou deux variables récursives (prédicteur retour et/ou variance des erreurs de prédiction retour (backward) dont l'instabilité a été établi [29].

Ce problème s'est aggravé lorsqu'on est passé à l'algorithme RLS conjoint car l'ordre de la fonction de transfert est plus grand vu la structure du filtre avec une boucle supplémentaire pour la détermination en parallèle du délai.

Ainsi qu'il a été étudié ci-dessus, les deux variables de l'algorithmes FTF 7N qui sont à l'origine de l'instabilité sont la variance des erreurs de prédiction retour et le prédicteur retour [29]. Ceci est dû essentiellement au calcul de l'erreur de prédiction retour par une formule sans redondance, que nous rappelons ici:

$$\bar{r}_{N,t}^p = -\lambda \beta_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (4-3)$$

λ étant le facteur d'oubli, $\beta_{N,t-1}$ étant la variance des erreurs de prédiction retour et \tilde{C} étant le gain de Kalman dual.

Cette relation, contrairement à la relation de convolution, introduit des effets numériques négatifs dans le calcul des variables récursives retour (variance et prédicteur). D'ailleurs, il est connu que le remplacement de la relation (4-3) par la relation de convolution améliore nettement les performances des algorithmes des MC rapides (c'est le cas des algorithmes FTF 7N+N de Kalman rapide). Une fois connue l'origine du problème de l'instabilité numérique, il existe de multiples manières d'agir pour modifier les propriétés numériques de l'algorithme sans modifier sa structure théorique. Par exemple, il existe deux manières de calculer l'erreur de prédiction retour. L'une est la relation (4-3), la deuxième est la relation de convolution:

$$\bar{r}_{N,t}^c = x_{t-N} - \mathbf{b}_{N,t-1}^T \mathbf{X}_{N,t} \quad (4-2)$$

$\mathbf{b}_{N,t-1}$ étant le vecteur de prédiction retour,

En général, la divergence est détectée quand la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ devient supérieure à 1. En réalité, la divergence de la variable de vraisemblance se produit très tard après la divergence d'autres variables de l'algorithme. La variable suivante: $\zeta_{N,t} = \bar{r}_{N,t}^c - \bar{r}_{N,t}^p$ (4-1)

constitue un bon indicateur de divergence. Elle représente la différence entre l'erreur de prédiction a-priori retour calculée directement sur le signal (convolution) et la même erreur calculée, sans redondance, à l'aide de la variance retour et la $(N+1)^{\text{ième}}$ composante du gain de Kalman d'ordre $N+1$. Cette variable introduite joue un rôle très important dans la stabilisation des algorithmes des MCRapides.

En pratique, cette variable n'est jamais nulle à cause de la précision finie des machines utilisées comme vu au § 4.3.5. En effet, l'expression numérique de cette variable s'écrit pour un développement au 1^{er} ordre [29]:

$$\zeta_{N,t} = -\mathbf{X}_{N,t}^T \cdot \Delta \mathbf{b}_{N,t} + \lambda \cdot \Delta \beta_{N,t-1} \cdot \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} + \lambda \cdot \beta_{N,t-1} \cdot \Delta \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (4-37)$$

Cette expression contient une information importante: $\zeta_{N,t}$ est fonction des erreurs numériques dans les variables récursives retour. Il est clair que la variable (4-37), qui est théoriquement nulle, ne modifie pas la structure théorique de l'algorithme. Par contre, son introduction en un point quelconque de l'algorithme modifie ces propriétés numériques.

Pour stabiliser l'algorithme FTF 7N, on définit trois erreurs de prédiction retour a-priori théoriquement équivalentes qui vont être utilisées pour calculer le vecteur de prédiction retour $\mathbf{b}_{N,t}$, la variance des erreurs de prédiction retour $\beta_{N,t}$ et la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$:

$$\begin{cases} \bar{r}_{N,t}^b = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^b \zeta_{N,t} \\ \bar{r}_{N,t}^\beta = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^\beta \zeta_{N,t} \\ \bar{r}_{N,t}^\gamma = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^\gamma \zeta_{N,t} \end{cases} \quad (4-38 \text{ à } 4-40)$$

où les paramètres scalaires $\mu^b, \mu^\beta, \mu^\gamma$ permettent de modifier et de contrôler la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes de type FTF 7N.

Le principe de la méthode consiste donc à rediriger par une contre réaction convenablement choisie, les erreurs numériques dans les variables numériquement instables et ceci sans modifier la structure théorique de l'algorithme. Cette méthode s'est

avérée efficace. Elle augmente la complexité des algorithmes type FTF de N multiplications par échantillons. Par contre, elle n'augmente pratiquement pas la complexité des algorithmes type Fast Kalman (c'est à dire ceux qui calculent l'erreur de prédiction retour par une relation de convolution).

Le choix des paramètres μ^b , μ^β et μ^γ conduit à des conditions nécessaires de stabilité des équations de propagation des erreurs numériques (voir [29], chapitre 3), la condition de stabilité (pôle à l'intérieur du cercle unité) si et seulement si le facteur d'oubli λ respecte la condition $1 \geq \lambda > \sqrt{(N+1)/(N+2)}$ [29]. (4-49)

Les exemples N°1, 2 et 3 démontrent la difficulté dans le choix des paramètres et l'instabilité du filtre. Le tableau ci-dessous résume l'interprétation et les observations y afférentes.

Exemple	Paramètres choisis	Type d'algorithme	Observation	Conclusion
N°1	$\ell_0 = 12, \lambda = 0.996$ $E_0 = 10$	Stabilisé et avec réinitialisation de $\gamma_{N,t}$	Explosion de la constante de vraisemblance $\gamma_{N,t} > 1$	Instable
N°2	$\ell_0 = 12, \lambda = 0.996$ $E_0 = 100$	Non stabilisé et sans réinitialisation de $\gamma_{N,t}$	$\gamma_{N,t} > 1$, Explosion de ce paramètre, filtre retour ne fonctionne pas	Instable
N°3	$\ell_0 = 12, \lambda = 0.999$ $E_0 = 100$	Stabilisé et sans réinitialisation de $\gamma_{N,t}$	$\gamma_{N,t} > 1$ et explosion du filtre retour	Instable
N°4	$\ell_0 = 12, \lambda = 0.9958$ $E_0 = 100$	Stabilisé et avec réinitialisation de $\gamma_{N,t}$	$\gamma_{N,t} < 1$, les erreurs diminuent et les filtres aller et retour convergent	Stable et Converge vers $\hat{\ell} = 8$

Pour les exemples que nous avons présenté, nous avons pris le même signal et le même modèle utilisé dans l'estimation séparée, de plus nous avons pris comme retard initial (indice temporel correspondant) $\ell_0 = 12$. Dans l'exemple N°4, le facteur d'oubli $\lambda = 0.995$, $E_0 = 100$. L'algorithme a été stabilisé comme précité (voir les résultats de l'exemple N°4), ajouté à cela nous avons réinitialisé la constante de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ lorsque l'indice atteint l'ordre du filtre pour que l'algorithme puisse fonctionner

normalement ($\gamma_N(n)=1$). On remarquera sur la figure V-22 comment que $\gamma_N(n)$ est devenu <1 après son réinitialisation. Sur la figure V-23 la compensation des erreurs numériques par conséquent la stabilité de la variable de divergence. La figure V-24 nous montre les prises de décisions sur 25 échantillons ($J_{\text{décision}}=25$ échantillons) pour la mise à jour de l'indice temporel correspondant au retard variable ainsi que la convergence de l'algorithme, le retard estimé est $\hat{\ell} = 9$. Et enfin l'évolution des erreurs quadratiques du filtre prédictif aller (forward) sur la figure V-25, on remarquera sa convergence et sur la figure V-26 la divergence au début du filtre prédictif retour avant les 600 itérations et le début de convergence entre les itérations 600 et 800, ce qui nous a conduit à faire la proposition suivante: qu'il serait très intéressant de faire une deuxième réinitialisation de la variable de vraisemblance $\gamma_N(n)$ entre 600 et 800 et ainsi définir le retard atteint à ce niveau comme étant le retard initial et par suite considérer cette étape comme le démarrage de l'estimation conjointe RLS conjoint pour les phénomènes où le retard est variable, citons l'exemple des communications mobiles par satellite, la détection des sources mobiles ou la détection à partir de capteurs mobiles tel que la détection sous marine ou dans l'aviation en particulier. Cet algorithme a été réalisé dans le cadre de la réalisation d'une nouvelle génération de modem destiné au communication mobile par satellite.

Exemple N° 1

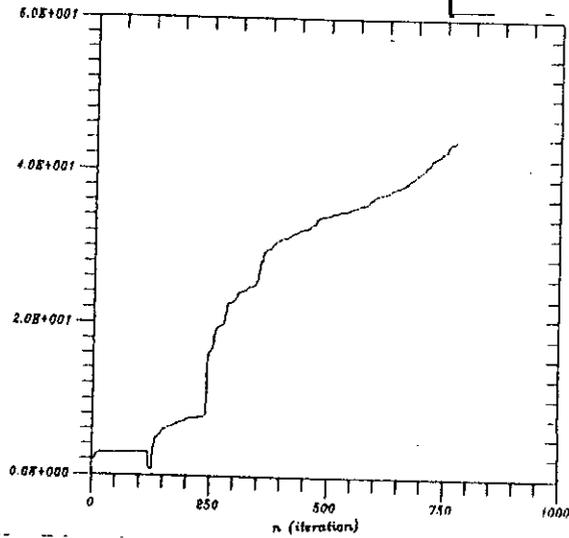


Fig.V-7: La constante de vraisemblance $\gamma_N(n)$

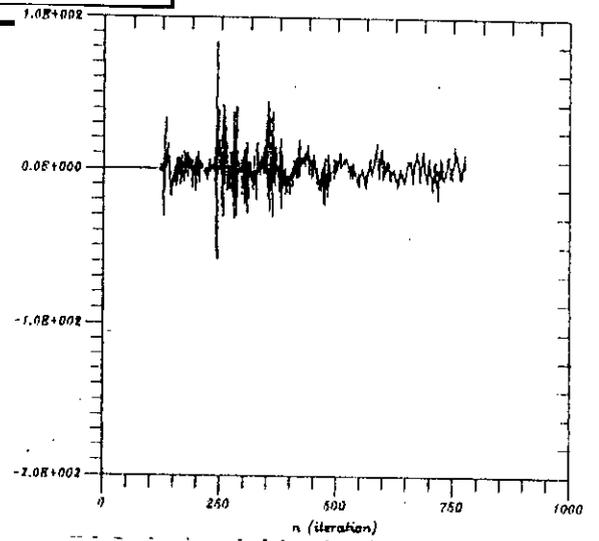


Fig.V-8: La variable de divergence $\zeta_{N,t}$

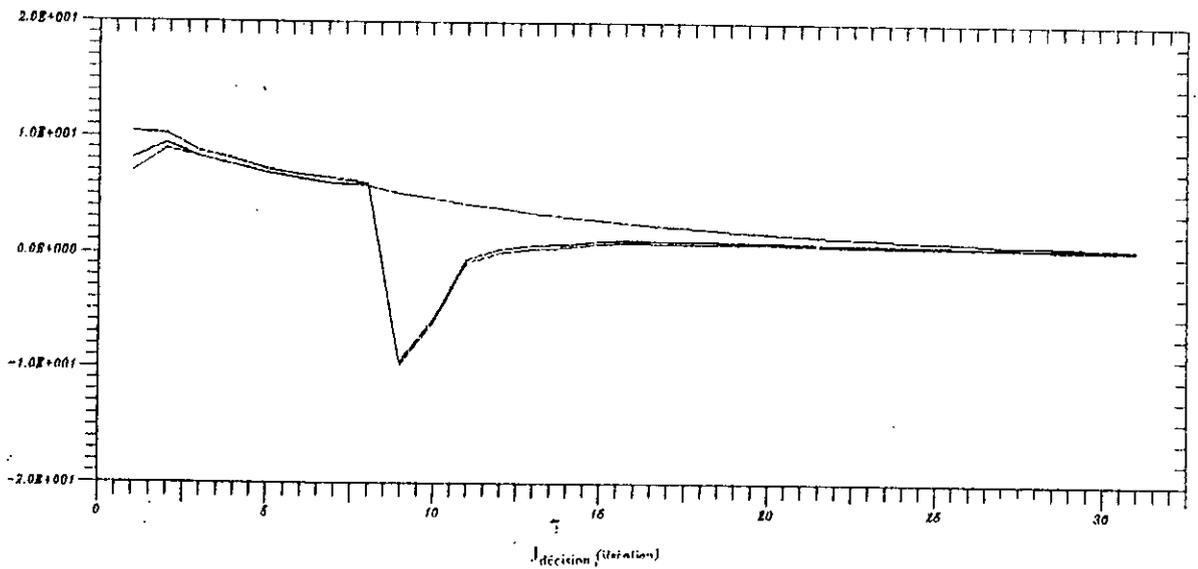


Fig.V-9: Les erreurs quadratiques moyennes pour chacun des filtres de délai $l-1$, l et $l+1$

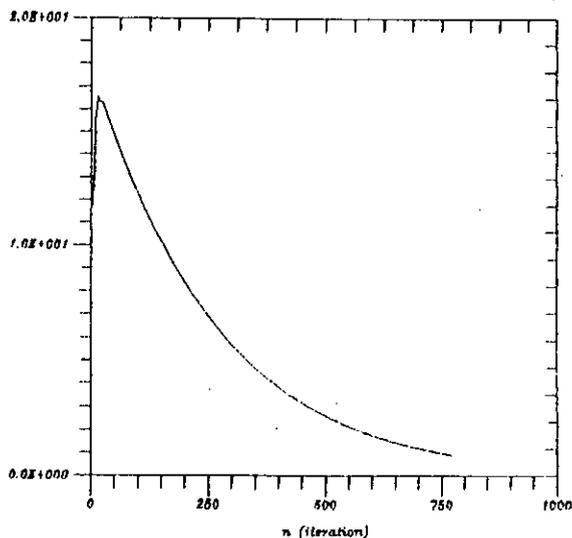


Fig.V-10: L'erreur quadratique du filtre aller

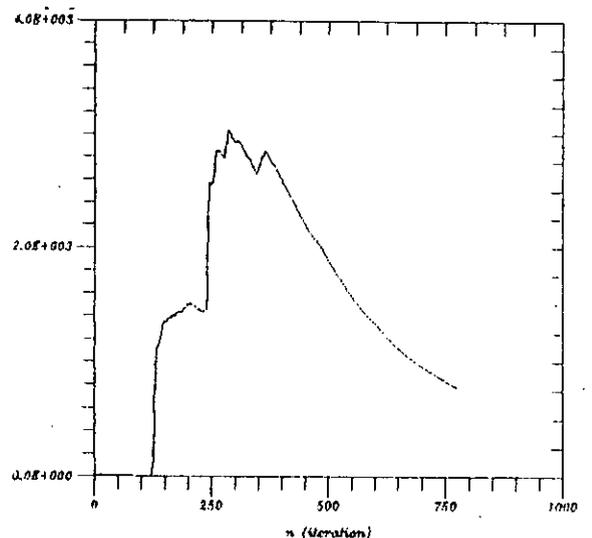


Fig.V-11: L'erreur quadratique du filtre retour

Exemple N° 2

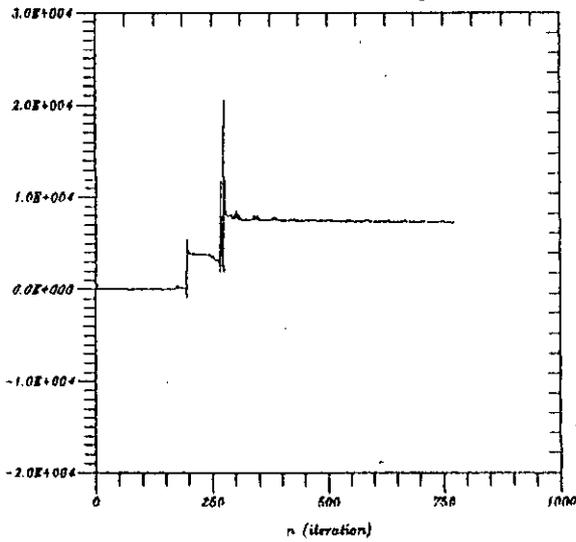


Fig.V-12: La constante de vraisemblance $\gamma_N(n)$

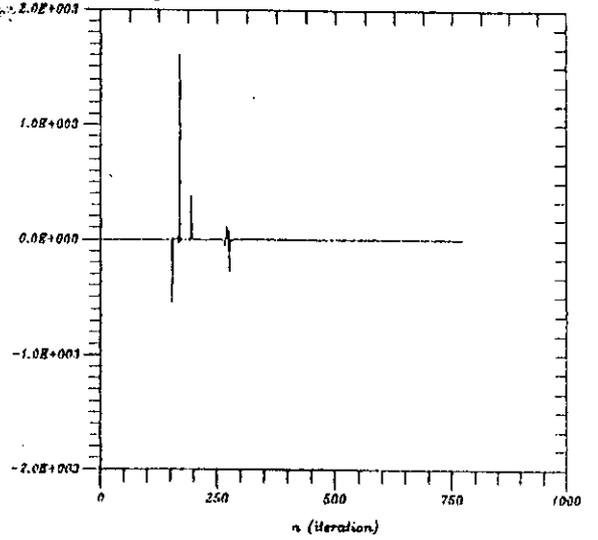


Fig.V-13: La variable de divergence $\zeta_{N,t}$

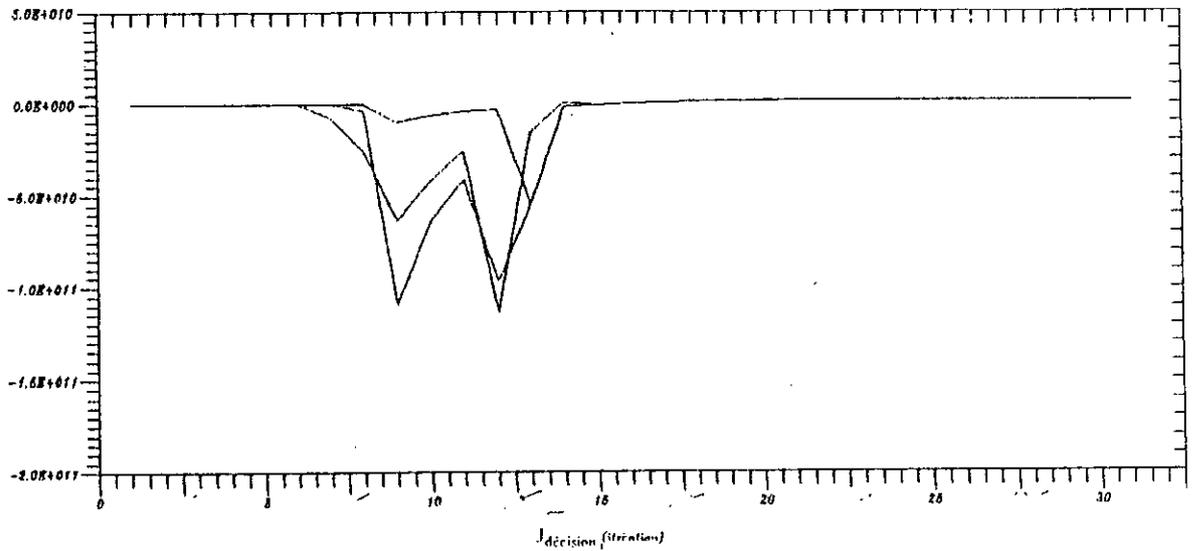


Fig.V-14: Les erreurs quadratiques moyennes pour chacun des filtres de délai $t-1$, t et $t+1$

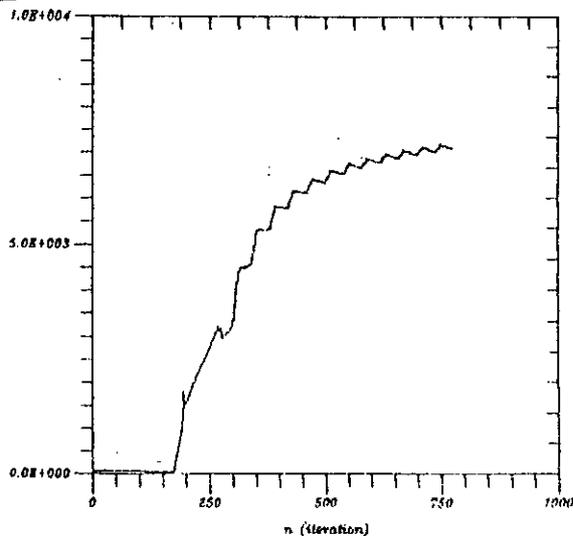


Fig.V-15: L'erreur quadratique du filtre aller

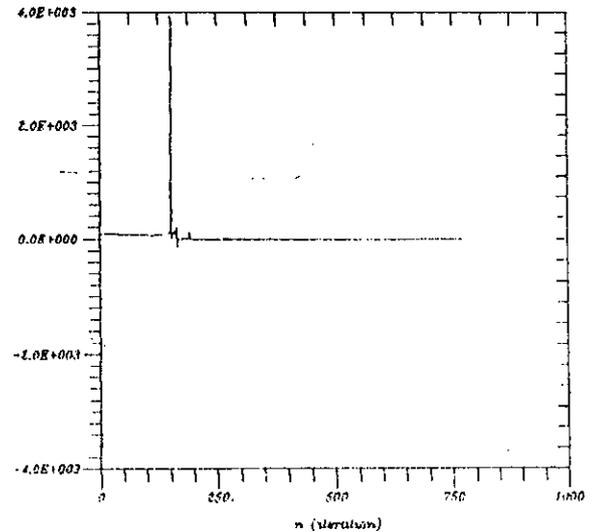


Fig.V-16: L'erreur quadratique du filtre retour

Exemple N° 3

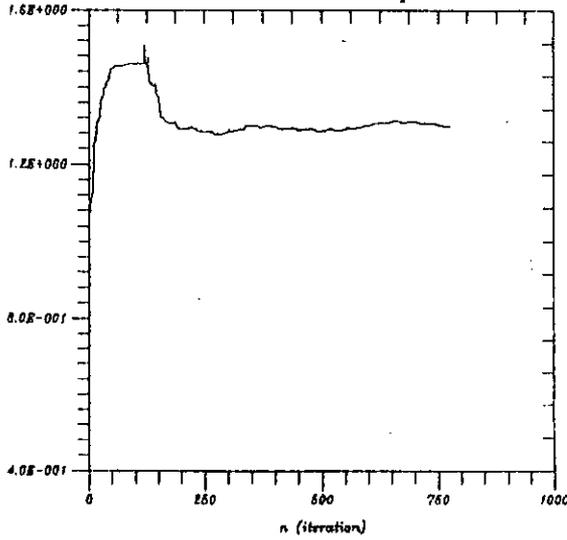


Fig.V-17: La constante de vraisemblance $\gamma_N(n)$

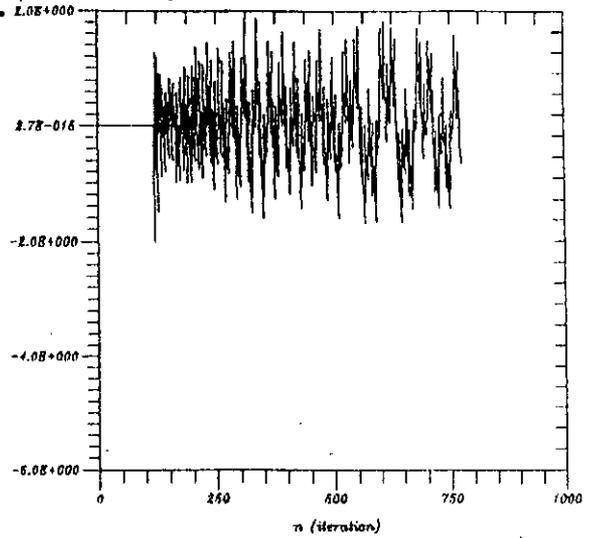


Fig.V-18: La variable de divergence $\zeta_{N,t}$

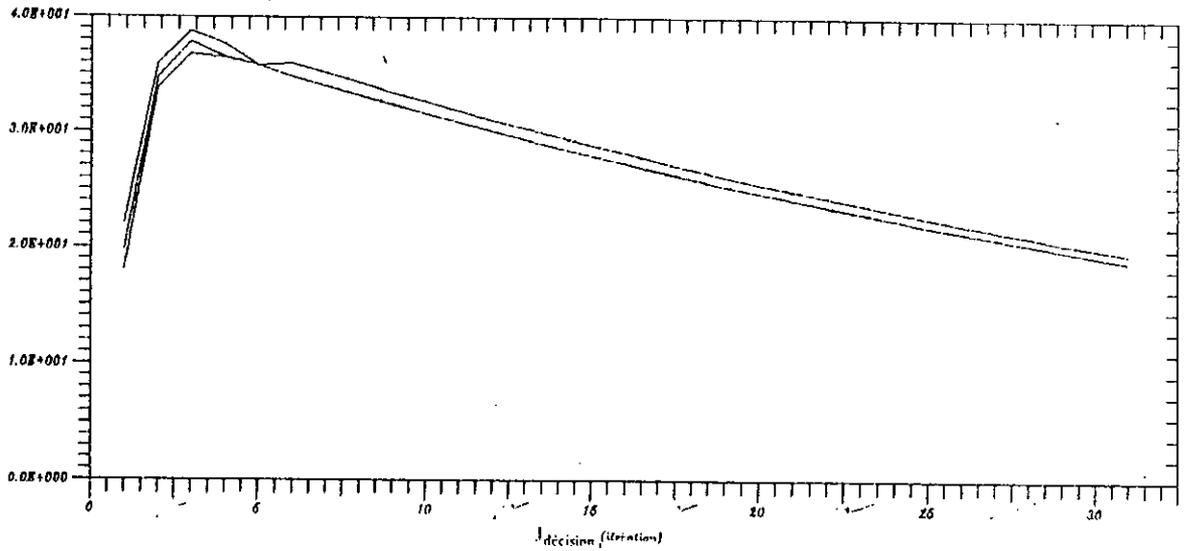


Fig.V-19: Les erreurs quadratiques moyennes pour chacun des filtres de délai $t-1$, t et $t+1$

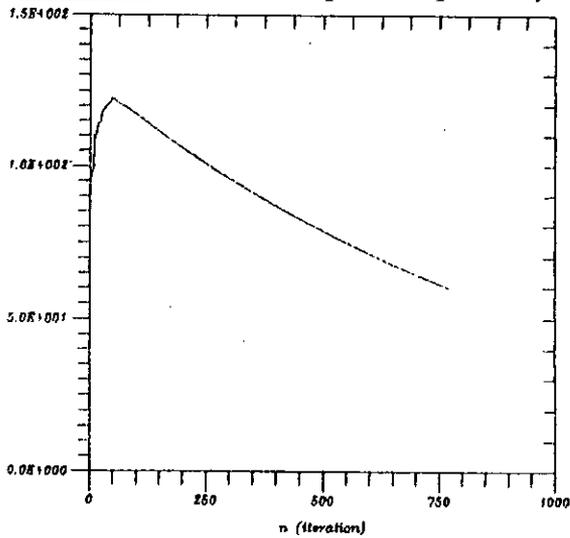


Fig.V-20: L'erreur quadratique du filtre aller

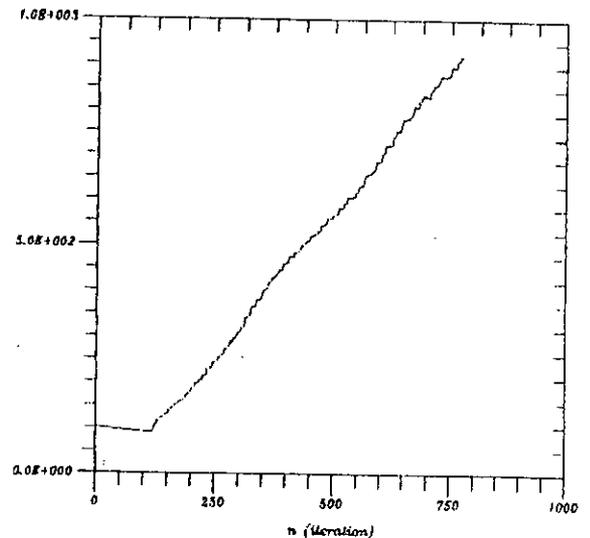


Fig.V-21: L'erreur quadratique du filtre retour

Exemple N° 4

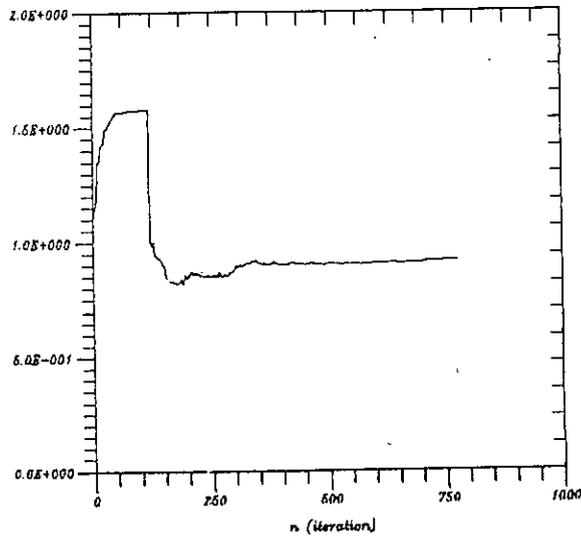


Fig.V-22: La constante de vraisemblance $\gamma_N(n)$

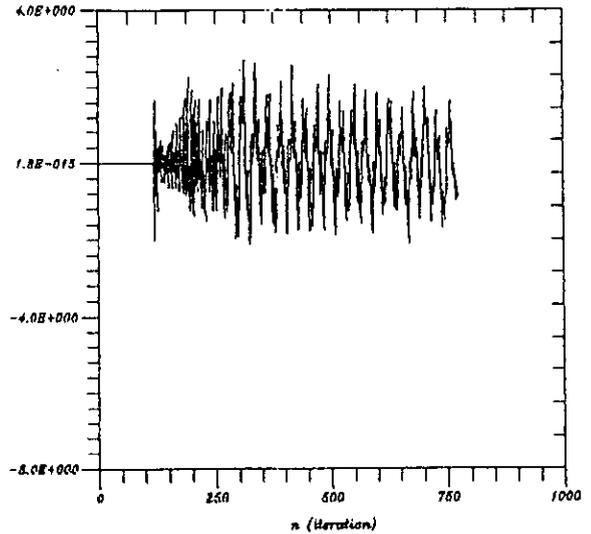


Fig.V-23: La variable de divergence $\zeta_{N,t}$

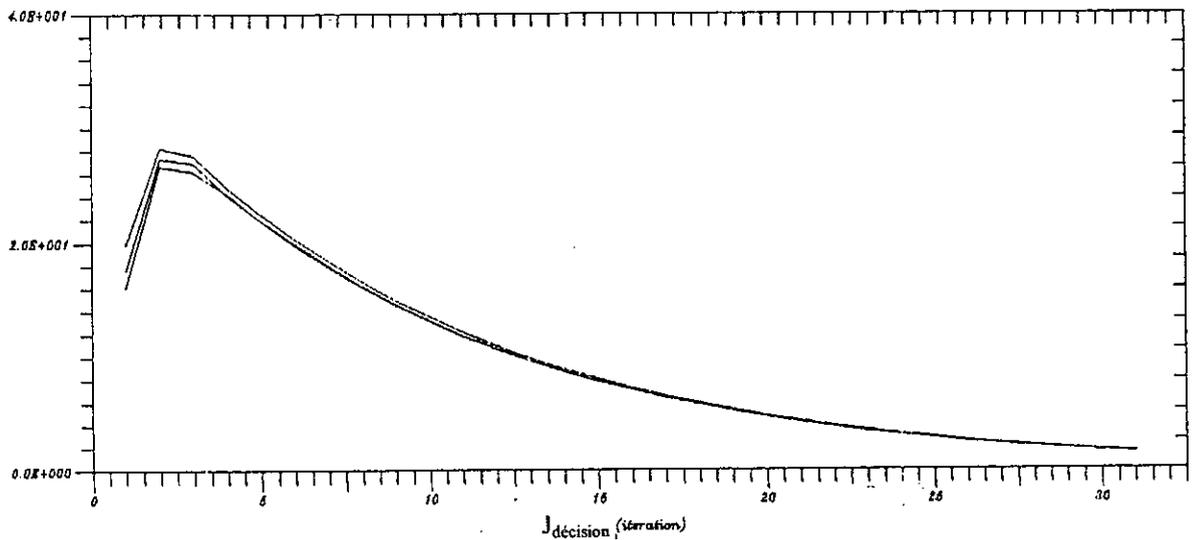


Fig.V-24: Les erreurs quadratiques moyennes pour chacun des filtres de délai $t-1$, t et $t+1$

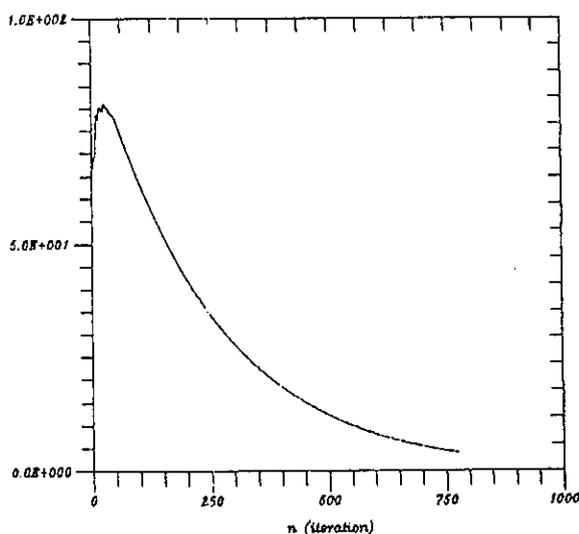


Fig.V-25: L'erreur quadratique du filtre aller

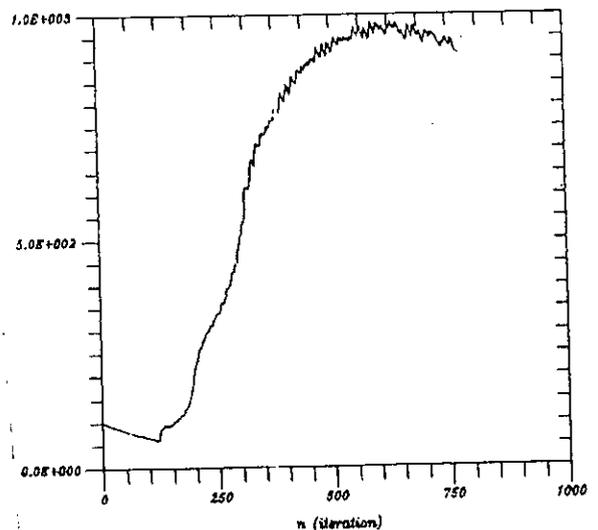


Fig.V-26: L'erreur quadratique du filtre retour

CONCLUSION

CONCLUSION

Dans notre travail, nous avons focalisé notre contribution sur un problème essentiel toujours d'actualité qui est l'annulation d'écho distant et en particulier l'utilisation d'algorithmes nouveaux dits des moindres carrés rapides possédant une plus grande capacité de poursuite et surtout une indépendance par rapport aux statistiques de l'entrée.

S'agissant de l'estimation séparée, en comparant les filtres adaptatifs LMS et FTF 7N, on remarque que le FTF a de meilleurs résultats vu les avantages qu'il offre que nous avons déjà précités. S'agissant de l'estimation conjointe, le problème d'initialisation et de conditionnement de cet algorithme reste posé à ce jour, il reste très difficile à initialiser et à stabiliser surtout qu'on estime conjointement au même instant la réponse impulsionnelle du filtre et le retard. Ce type d'estimation s'avère très intéressant dans les phénomènes où le retard est variable.

Un aspect important à considérer dans la conception d'un annuleur d'écho est le degré de précision limité des calculs arithmétiques, il faut analyser toutes les étapes de calcul dans leurs moindres détails pour déterminer la précision requise dans chacune, particulièrement lorsqu'il s'agit de multiplications (les produits de convolution). Il faut aussi tenir compte de la capacité de mémoire requise, lorsqu'on utilise un processeur de signal du commerce, il faut examiner avec soin les critères de conception, car certains de ces processeurs ont une capacité de mémoire interne limitée. Un autre critère important est la longueur de mot, c'est à dire la précision avec laquelle on représente chacune des variables utilisées dans l'annuleur. Ce qui explique les problèmes rencontrés pour stabiliser l'algorithme RLS conjoint car il est exigeant en précision (nécessite des calculs en double précision), or les contraintes matérielles ne nous permettraient pas d'atteindre des itérations plus importantes vu les limitations de la mémoire conventionnelle de base dont dispose les ordinateurs personnels, même en augmentant leurs RAM et en utilisant les pointeurs, l'application ne nous permettait d'accéder qu'à un segment de 64 Kilo-Octets.

Bien sûr, le concepteur devra pratiquer des compromis entre complexité du calcul, vitesse de convergence et niveau de bruit autour du point de convergence. Le progrès technologique rend le premier point de moins en moins critique, mais, dans la plupart des algorithmes, une vitesse de convergence accrue entraîne une erreur plus grande en régime établi, et il faut décider quel aspect favoriser.

Pour développer un annuleur d'écho, le concepteur se trouve confronté à toute une gamme de choix. Sa tâche est néanmoins facilitée chaque jour par de nouvelles améliorations apportées aux algorithmes connus et par les progrès technologiques.

Dans les réalisations matérielles d'aujourd'hui, on ne va guère au delà de l'utilisation de l'algorithme du LMS qui est le plus simple. Mais, de plus en plus, la recherche de performances accrues pour l'annulation d'écho conduit à utiliser de nouveaux algorithmes, comme ceux décrits dans notre travail.

Les algorithmes élaborés dans ce projet, offrent la possibilité de réaliser leurs implantations sur une carte à microprocesseur et cela par le biais de sujets de projets de fin d'études d'Ingénieur.

La réalisation de ce projet a nécessité un travail de préparation conséquent. Notamment en matière de connaissance dans le domaine de l'adaptatif et maîtrise de la programmation et du logiciel utilisé (Turbo Pascal). Cependant le manque de documentation a entraîné un retard appréciable sur l'avancement des travaux.

Toutefois, les résultats obtenus compensent ces difficultés, par le fait de leur acceptabilité pour ce type d'application.

Aussi, des perspectives apparaissent et peuvent faire par exemple l'objet de thème de recherche de troisième cycle ou de plusieurs projets de fin d'études d'ingénieur et sont comme suite: stabilisation numérique des algorithmes RLS en particulier le RLS conjoint, implantation en temps réel de ces algorithmes sur carte à microprocesseur DSP, applications de ces algorithmes d'annulation d'écho dans les téléphones à mains libres, dans les téléphones mobiles, dans les systèmes de télécommunications par satellite, des systèmes de communications cryptés utilisant la radio ainsi qu'une proposition de réalisation d'un annuleur d'écho avec le circuit de Motorola DSP 56200 (CAFIR : Cascadable Adaptive Finite Impulse Response Digital Filter) [20], modélisation adaptative des canaux de communication multivoie, égalisation adaptative des canaux téléphoniques et modélisation adaptative dans l'exploration géophysique (voir [3], pp.193-456).

ANNEXES

Annexe A

Ces équations nous permettent de calculer toutes les erreurs nécessaires et les vecteurs de coefficients pour le retard ℓ et $\ell+1$ en utilisant les récursions en arrières et en avants de l'erreur et du vecteur des coefficients à partir de $\hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell-1}(n-1)$:

1) Les récursions directes (en avant) pour l'erreur :

$$\hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell+1) = \hat{\xi}_N(n, \ell) + \frac{|v_{N-1}^{\ell}(n)|^2}{F_{N-1}(n)} \quad (\text{A-1})$$

$$\hat{\xi}_{N-1}(n, \ell+1) = \lambda \cdot \hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell+1) + \alpha_{N-1}^*(n, \ell+1) \cdot e_{N-1}(n, \ell+1) \quad (\text{A-2})$$

$$\hat{\xi}_N(n, \ell+1) = \hat{\xi}_{N-1}(n, \ell+1) - \frac{|v_{N-1}^{b(\ell+1)}(n)|^2}{B_{N-1}(n)} \quad (\text{A-3})$$

2) Les récursions rétrograde (en arrière) pour l'erreur :

$$\hat{\xi}_{N-1}(n, \ell) = \hat{\xi}_N(n, \ell) + \frac{|v_{N-1}^{b\ell}(n)|^2}{B_{N-1}(n)} \quad (\text{A-4})$$

$$\hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell) = \lambda^{-1} \cdot \hat{\xi}_{N-1}(n, \ell) - \lambda_{N-1}^{-1} \cdot \alpha_{N-1}^*(n, \ell) \cdot e_{N-1}(n, \ell) \quad (\text{A-5})$$

$$\hat{\xi}_N(n, \ell-1) = \hat{\xi}_{N-1}(n-1, \ell) - \frac{|v_{N-1}^{f(\ell-1)}(n)|^2}{F_{N-1}(n)} \quad (\text{A-6})$$

3) Les récursions directes (en avant) pour les coefficients du filtre au sens des moindres carrés (*):

$$\hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell+1}(n-1) = \left[\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell}(n) \right]_{N-1} + \mathbf{a}_{N-1}(n) \cdot \hat{\mathbf{H}}_{1N}^{\ell}(n) \quad (\text{A-7})$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell+1}(n) = \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell+1}(n-1) - \lambda^{-1} \cdot \mathbf{C}_{N-1}(n) \cdot e_{N-1}(n, \ell+1) \quad (\text{A-8})$$

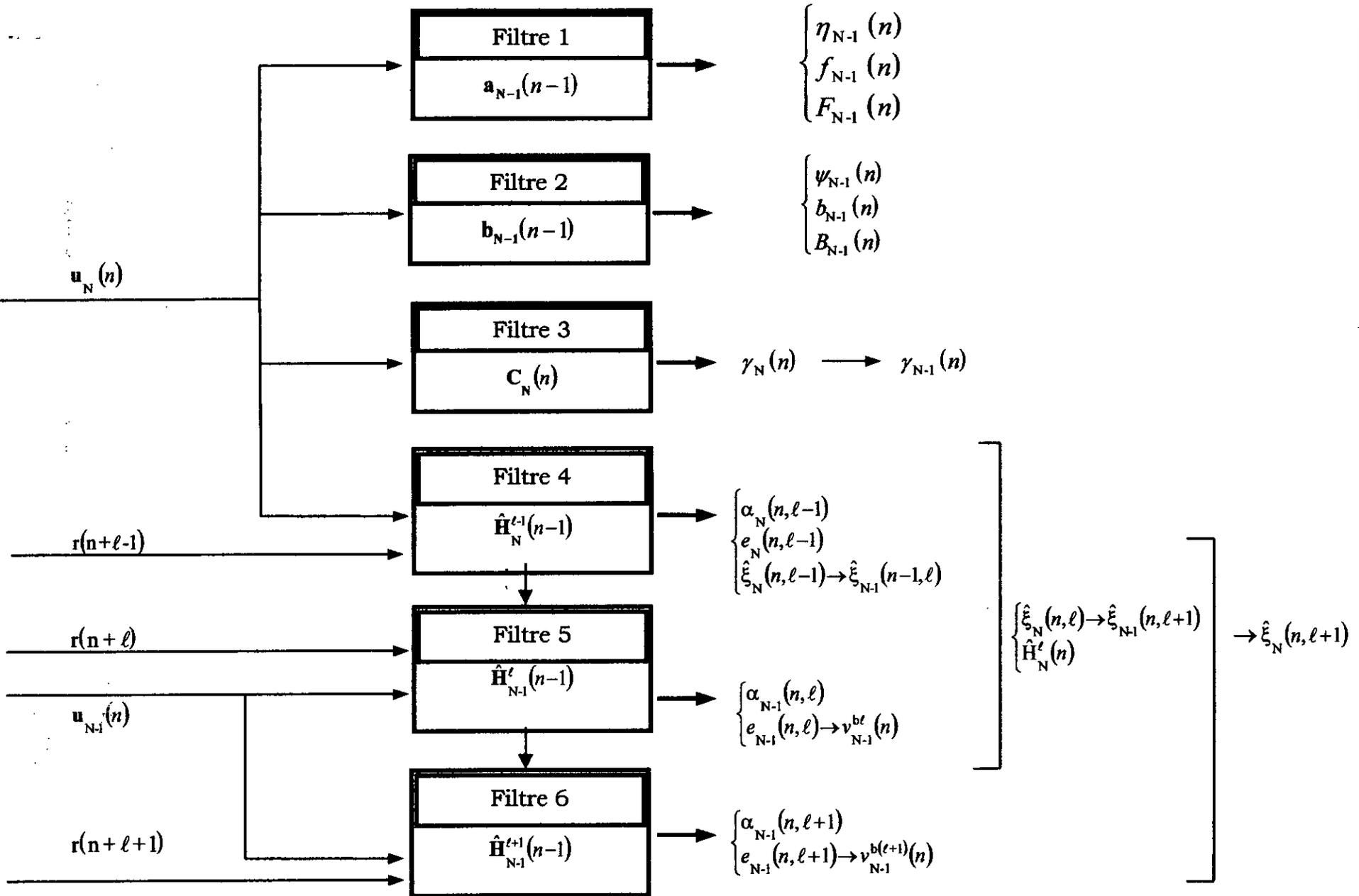
$$\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell+1}(n) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell+1}(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{v_{N-1}^{b(\ell+1)}(n)}{B_{N-1}(n)} \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{N-1}(n) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-9})$$

4) Les récursions rétrogrades (en arrière) pour les coefficients du filtre au sens des moindres carrés (*):

$$\hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell}(n) = \left[\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell}(n) \right]_{N-1} + \mathbf{b}_{N-1}(n) \cdot \hat{\mathbf{H}}_{NN}^{\ell}(n) \quad (\text{A-10})$$

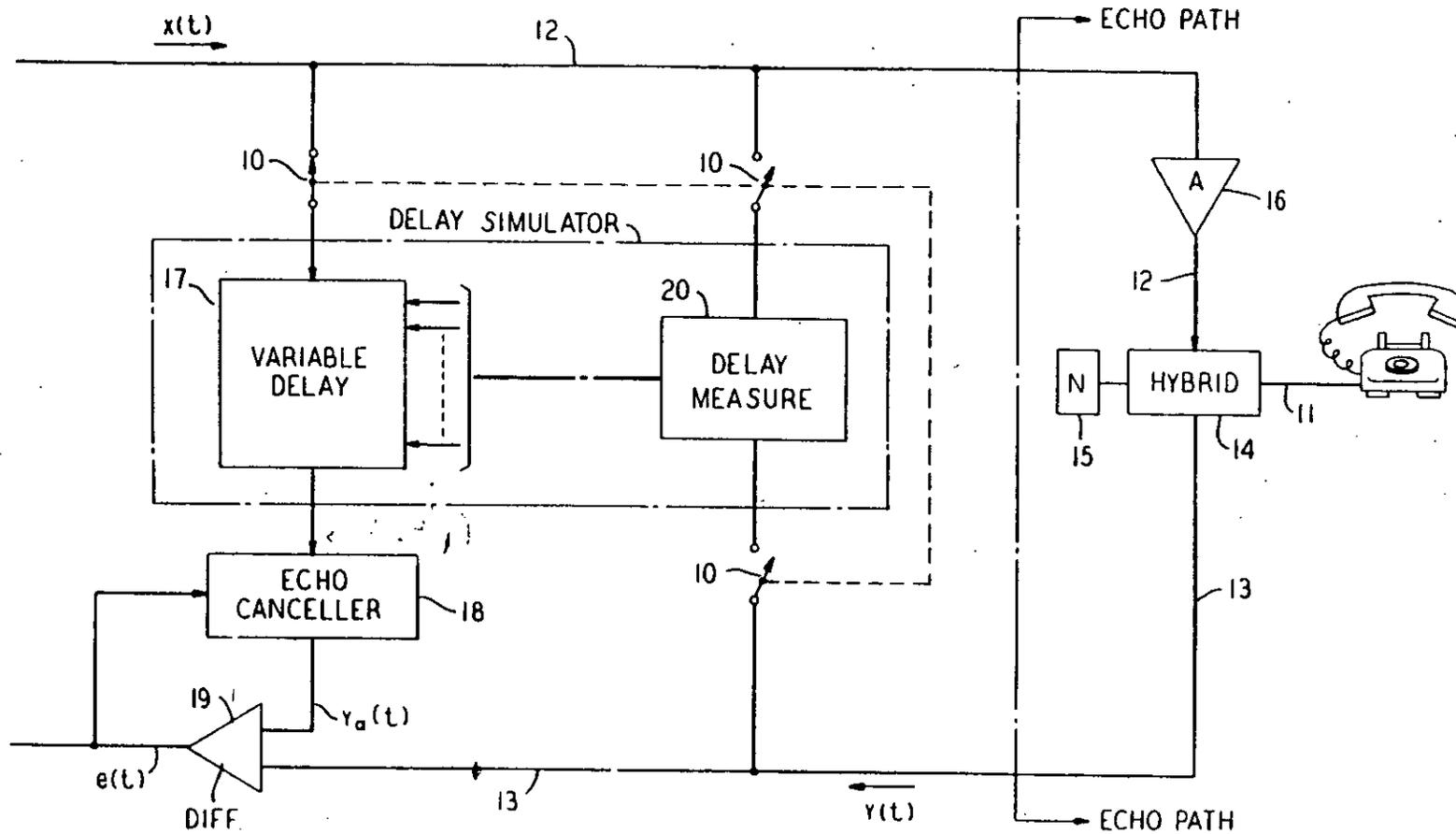
$$\hat{\mathbf{H}}_N^{\ell+1}(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{H}}_{N-1}^{\ell}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{v_{N-1}^{f(\ell-1)}(n)}{F_{N-1}(n)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}_{N-1}(n) \end{bmatrix} \quad (\text{A-11})$$

(*) : La notation $\left[\mathbf{x} \right]_N$ signifie que le vecteur réalisé, est constitué des N composants supérieurs du vecteur \mathbf{x} et $\left[\mathbf{x} \right]_{N-1}$ est le vecteur constitué des N composants du bas du vecteur \mathbf{x} .

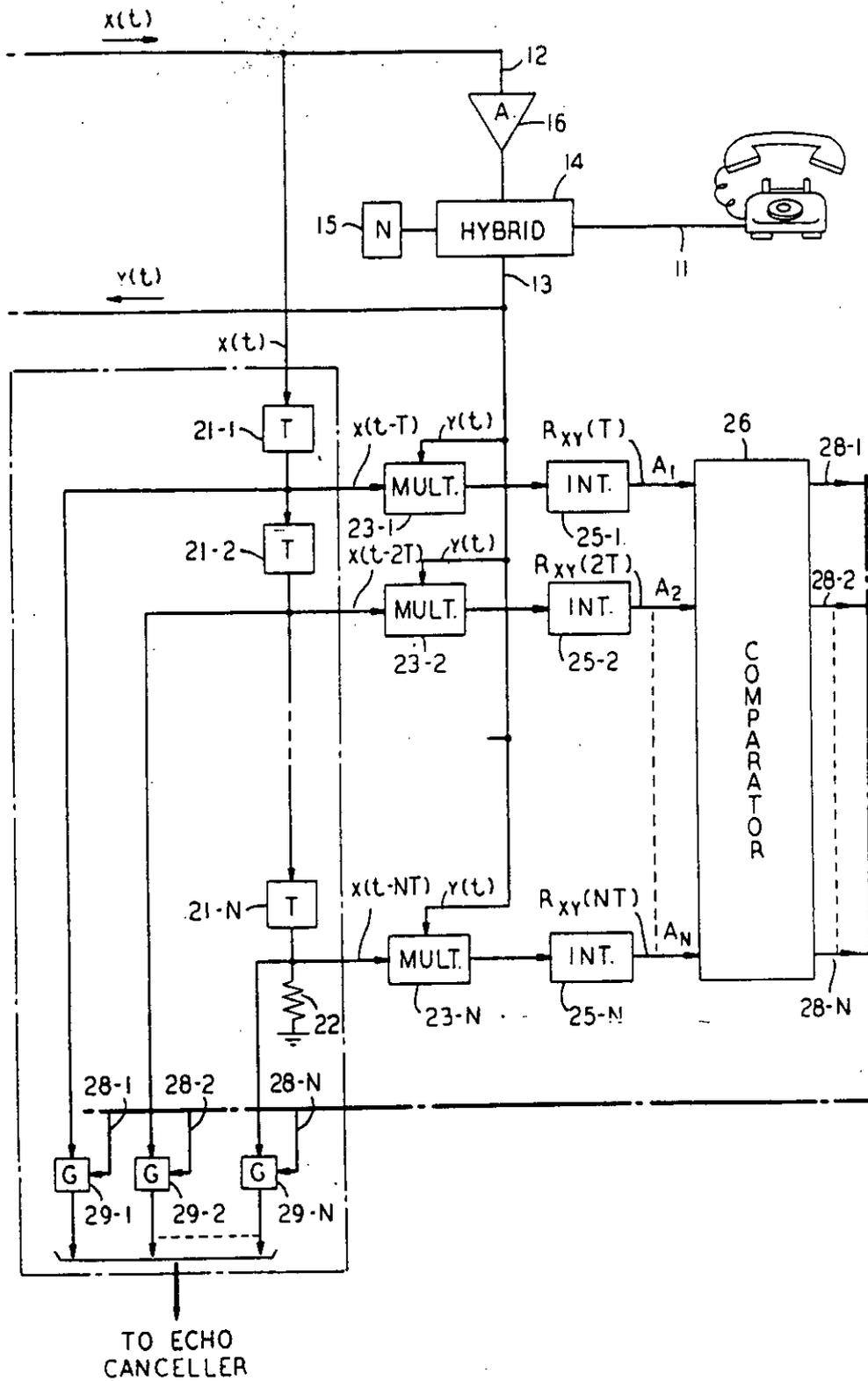


INTERPRETATION DU CALCUL DES ERREURS AUX DECALAGES $\ell-1$, ℓ et $\ell+1$ dans le RLS Conjoint.

Diagramme schématique du dispositif d'annulation



Annexe D



Détails illustrants la structure du circuit de mesure du retard

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [1] **A. HAMZA**, «Annulation d'écho local», Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, thèse de Magister 1990.
- [2] **G. JACOVITTI & G. SCARANO**, «Discrete time techniques for time delay estimation», IEEE Transactions in Signal Processing, Vol.41, N°2, Feb.1993, pp.525-533
- [3] **B. WIDROW & S.D. STEARNS**, «Adaptive Digital Processing», Prentice Hall 1985.
- [4] **B. WIDROW, J.M. Mc COOL, M.G. LARIMORE & C.R. JOHNSON**, «Stationnary and non-stationnary learning Characteristics of the LMS adaptive filter», in Proc. of IEEE 64, NO.8, Aug.1976.
- [5] **J.M. CIOFFI & T. KAILATH**, «Fast RLS transversal filters for adaptive filtering», IEEE Trans. ASSP, Vol. ASSP 32, NO.2, Apr.1984, pp.304-337
- [6] **G. CARAYANNIS, D. MANOLAKIS & N. KALOUPSIDIS**, «A fast sequential algorithm for least-squares filtering and prediction», IEEE Trans. ASSP, vol.ASSP-31, NO.6, Dec.1983.
- [7] **D. BOUDREAU & P. KABAL**, «Joint Time Delay estimation and adaptive recursive least squares filtering», IEEE Trans. ASSP, Vol.41, NO.2, FEB.1993, pp.592-601.
- [8] **M. ERDREICH**, «Le phénomène de l'écho dans les réseaux de télécommunications», Revue COMMUTATION ET TRANSMISSION, NO.4, 1981, pp.5-18.
- [9] **AVIS G114**, livre jaune du C.C.I.T.T, Edition 1981, Tome III.I, p.70.
- [10] **AVIS G 134**, livre jaune du C.C.I.T.T, Edition 1981, Tome III.I, p.127.
- [11] **Avis G 151**, livre jaune du C.C.I.T.T, Edition 1981, S 4-2, Tome III.I, p.139.
- [12] **L.G.ABRAHAM, D.M.FELLOWS**, "A Digital Telephone with Extentions," IEEE, Trans.Communication, vol.COM-29, n 11, NOV.1981, pp.1602- 1608
- [13] **O.MACCHI & M. BELLANGER**, «Transversal adaptive filtering», synthèses, Revue traitement du signal, Volume 5, NO.3, 1988, pp.115-131.
- [14] **C.N.COWAN and P.M.GRANT**, "Adaptive Filters," Prentice-Hall, Inc, edit.[1985]
- [15] **AVIS G131**, livre jaune du CCITT, ed. 1981, Annexe A, Tome III.I, p.122.
- [16] **Dr.KAMILO FEHER**, "ADVANCED DIGITAL COMMUNICATIONS, Systems and Signal Processing Techniques," Prentice-Hall, INC.
- [17] **M.M.SONDHI and D.A.BERKLEY**, "Silencing Echoes on Telephone Networks," Proc.of IEEE, 68-8, Aug.1980.
- [18] **M.H. BASTANI & G. KAWAS-KALEH**, «Estimation adaptative de retard, application à l'annulation d'écho», Nice 20 au 24 Mai 1985 (Dixième Colloque sur le traitement de signal et ses applications), pp.601-605.
- [19] **Michel LÉVY**, "Techniques d'annulation d'échos: Transmission téléphonique et transmission numérique," ANN.TELECOMMUN., 36, N .11-12, 1981, pp.651-661.
- [20] **Telecommunications Device Data**, "Cascadable Adaptive Finite Impulse Response Digital Filter (CAFIR) DSP56200," [MOTOROLA- Semiconductors DLE 136R1/D](Second Edition 1988), PP.3.37-3.49.
- [21] **P.C. CHING & Y.T. CHAN**, «Adaptive time delay estimation with constraints», IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, VOL.36, NO.4, April 1988- Correspondance, pp.599-602.

Bibliographie

- [22] **D.L. DUTTWEILER**, «Subsampling to estimate delay with applications to echo cancelling», IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, VOL.ASSP-31, NO.5, Octobre 1983, pp.1090-1099.
- [23] **D.D. FALCONER**, «Timing Jitter Effects on Digital Subscriber Loop Echo Cancellers : Part.I-Analysis of the effect», IEEE Transactions on Communications, VOL.COM-33, NO.8, August 1985, pp.826-832.
- [24] **D.D. FALCONER**, "Timing Jitter Effects on Digital Subscriber Loop Echo Cancellers: Part II-Considerations for squaring Loop Timing Recovery," IEEE Transactions on Communications, VOL.COM-33, NO.8, August 1985.Senior member IEEE, pp.826-832.
- [25] **J.L. DIRON & W.Y. CHEN**, «The implementation of an adaptive echo canceller for High-Speed Digital DATA Transmission», D2a.11 [CH2977-7/91/0000-1597.1991 IEEE], pp.1597-1600.
- [26] **J.R. CAVANAUGH, R.W. HATCH, J.L. NEIGH**, «A model for the subjective effects of listener echo on telephone connections», B.S.T.J., Vol.59, NO.6, July-August 1980, pp.1009-1059.
- [27] **F.P. DUFFY, G.K. Mc NEES, I. NASELL, T.W. THATCHER**, «Echo performance of toll telephone connections in the united states», B.S.T.J., Vol.54, NO.2, Feb.1975, pp.209-243.
- [28] **B. WIDROW**, «Adaptive Filters I : Fundamentals», Technical Report NO.6764-6, Systems Theory Laboratory, Stanford University, 1966.
- [29] **A. BENALLAL**, «Etude des Algorithmes des moindres carrés Transversaux rapides et applications à l'identification de réponses impulsionnelles acoustiques», Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes I, Traitement du signal et télécommunications, 20 Janv.1989.
- [30] **G.FAUCON et A.BENALLAL**, "Etude de deux structures de Corrélofiltre," soumis aux Annales des Télécommunications, Juin 1988.
- [31] **M.L. HONIG and D.G. MESSERCHMIT**, « adaptive filters structures, algorithms and applications », Kluwer Academic Publishers, Boston 1984.
- [32] **A. BIEVENISTE, M. METIVIER, et P. PRIOURET**, « Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques : théorie et applications », dans techniques stochastiques, MASSON 1987.
- [33] **M. BELLANGER**, « Adaptive digital filtering and signal analysis », Marcel Dekker, New York, 1987.
- [34] **O. MACCHI & M. BELLANGER**, «Le point sur le filtrage adaptatif transverse», GRETSI 1987.
- [35] **C. CARAISOS and B. LIU**, « A Round off Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm », IEEE ASSP-32, NO.1, Feb.1984.
- [36] **G.C.GOODWIN et K.SIN**, "Adaptive Filtering, Prediction, and Control," Prentice Hall 1984.
- [37] **J.P.JULLIEN**, "Acoustique des salles, prise et restitution du son, analysées à partir de la notion de canal acoustique," Note technique CNET NT/LAA/TSS/128, Aout 1982.
- [38] **L.LJUNG and T.SODERSTROM**, "Theory and Practice of Recursive Identification," M.I.T.Press.1983

Bibliographie

- [39] **P. FABRE**, « algorithmes transversaux rapides d'identification récursive et méthode de modélisation des réponses impulsionnelles complexes associées. Application au signal de parole », thèse de Docteur Ingénieur ENST Paris, Jan.1986.
- [40] **J.L.BOTTO**, "Etude des algorithmes Transversaux Rapides: Application à l'annulation d'écho acoustique pour l'audio- conférence," Thèse IRISA Rennes,r1
- [41] **G. CARAYANNIS, D. MANOLAKIS & N. KALOUPTSIDIS**, «A Unified View of Parametric Processing Algorithms for prewindowed signals », Signal Processing, Vol.10, No.4, June 1986.
- [42] **R.ALCANTARA**, "Implantation d'Algorithmes Rapides sur des Processeurs de Traitement du Signal," Thèse de Doctorat ENST Paris Sep.1986.
- [43] **G. CARAYANNIS, D. MANOLAKIS & N. KALOUPTSIDIS**, «A Fast Sequential Algorithm for Least-Squares filtering and prediction», IEEE Trans. ASSP, Vol. ASSP-31, No.6, Dec.1983.
- [44] **L.LJUNG, M.MORF AND D.FALCONER**, « Fast calculation of gain matrices for recursive estimation schemes », Int.J.Control, Vol.27, No.1, Jan.1978.
- [45] **D.FALCONER AND L.LJUNG**, « Application of fast Kalman estimation to adaptive equalisation », IEEE Trans.Commun., Vol.COM-26, No.10, Oct.1981.
- [46] **D.T.M. SLOCK & T. KAILATH**, «Numerically stable fast recursive least squares transversals filter», ICASSP-88, pp.1365-1368, D1.2.
- [47] **A. BENALLAL & A. GILLOIRE**, «A new method to stabilise fast RLS algorithms based on a first order model of the propagation of numerical errors», ICASSP-88, pp.1373-1376.
- [48] **P. FABRE and C. GUEGUEN**, « Fast RLS Algorithms : Preventing Divergence », Proc. of IEEE ICASSP 1985, Tampa.
- [49] **G. CARAYANNIS, D. MANOLAKIS & N. KALOUPTSIDIS**, «Fast design of multichannel FIR Least-squares filters with optimum lag», IEEE Trans. ASSP, Vol. ASSP-32, Fev.1984, pp.48-59
- [50] **D. BOUDREAU**, «Joint time delay estimation and adaptive filtering techniques", Ph.D. dissertation, Mc Gill University, 1990.
- [51] **S. HAYKIN**, «Adative filter theory», Englewood Cliffs, NJ :Prentice Hall, 1986.
- [52] **S. LJUNG and L. LJUNG**, « Error Propagation analysis of RLS adaptation algorithms », Automatica, Vol. 21, NO.2 1985.
- [53] **J.L. BOTTO**, « Stabilisation of Fast RLS Transversal filters for adaptive filtering », Pro. Of IEEE ICASSP 1987, Dallas.
- [54] **A. BENALLAL, A. GILLOIRE et G. FAUCON**, « Méthode de stabilisation des algorithmes de moindres carrés rapides appliqués au traitement de la parole », 11^{ème} colloque GRETSI, Juin 1987, Nice.
- [55] **M.G. BELLANGER**, « Engineering Aspects of Fast RLS Algorithmes in transversal adaptive filters », Proc. of IEEE ICASSP 1987, Dallas.
- [56] **D.W. LIN**, « On digital implementation of fast Kalman algorithms », IEEE. Trans. on ASSP., Vol.32, NO.5, Oct. 1984.

Bibliographie

- [57] **D.D.FALCONER and E.ELEFThERIOU**, "Tracking properties and steady- state performance of RLS adaptive filter algorithmes," IEEE Trans.ASSP, Vol.34, NO.5, Oct.1986, pp.1097-1110.
- [58] **J.M.M. TRAVASSOS ROMANO**, « Localisation de fréquences bruitées par filtrage adaptatif et Implantation d'algorithmes des moindres carrés rapides », thèse de Doctorat Université Paris-Sud, Déc.1987.
- [59] **J.M. CIOFFI**, « Limited précision effects in adaptive filtering », IEEE Trans. On circuits and systems, CAS-34, NO.7, July 1987.
- [60] **Avis G.227**,, livre vert Tome III.1, CCITT, Genève, Déc.1972, p.138.
- [61] **J.L. BOTTO et G.V. HOUSTAKIDES**, « Stabilizing the fast Kalman algorithmes », ASSP-37, NO.8, Sept.1989.