



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Automatique
Laboratoire de Commande des Processus



THESE DE DOCTORAT
en
Génie Electrique
Option : Automatique

Présentée par

NAFA FARES

Magister en Automatique de l'ENP Alger

Intitulée

**Contribution à la commande d'une classe de
systèmes mécaniques sous-actionnés**

Devant le jury d'examen composé de:

Président	Mr. BOUKHETALA Djamel	Professeur, ENP
Directeur	Mr. LABIOD Salim	Professeur, U. de Jijel
Co-directeur	Mr. CHEKIREB Hachemi	Professeur, ENP
Examineurs	Mr. LARABI Abdelkader	Professeur, USTHB
	Mr. NAIT SEGHIR Amirouche	Maitre de Conférences/A, USTHB
	Mr. BOUAKRIF FARAH	Maitre de Conférences/A, U. de Jijel

ENP 2014

تلخيص - الأنظمة الميكانيكية ناقصة التفعيل SMSA هي أنظمة تتميز بكون عدد درجات الحرية فيها أكبر من عدد تفاعيل التحكم وهي ميزة تجعل من هذه الأنظمة مصدرا مهما لتطوير تقنيات التحكم، خاصة أنظمة التحكم الكلاسيكية التي لا يمكن تطبيقها عليها في أغلب الحالات.

إن إدخال نظم التحكم القوي على SMSA و بالأخص منها نظام التحكم المنزلق يعد ميدان بحث هام في مجال دراسة ضمان استقرار و تقارب الأنظمة بصفة عامة. و بما أن SMSA في مجملها تتكون من عدة نظم فرعية، و متغيرات الحالة فيها لا تربطها علاقة تفاضلية مباشرة، فتوابت مساحة الانزلاق المعهودة لا يمكن استخلاصها مباشرة حسب شرط Hurwitz. و عليه فإن مبدأ التحكم المنفصل بطريقة الانزلاق يوفر مميزات خاصة لتجاوز هذه الإشكالية و يضمن تقارب متغيرات الحالة للنظام. هذه التقنية في عمومها تقوم على تكييف متغيرات الحالة ل SMSA لبناء مساحة منزلقة انفصالية. من هذا المنطلق قمنا بتشريح مشكل الاستقرار لقسم من SMSA من الدرجة الثانية ذي مدخل تحكم واحد و درجتين أو ثلاث درجات حرية. فقمنا بتصميم مجموعة تقنيات تحكم معتمدة أساسا على نمط الانزلاق المنفصل. بعد ذلك وافترضنا أن ديناميكية الجملة SMSA ليست معرفة بصفة كلية أو جزئية ، أدخلنا تقنيات التحكم الغامض التكييفي (المباشرة و غير المباشرة) على إستراتيجية الانزلاق المنفصل. إلى ذلك ، و في فصل موالي، أضفنا في نسق آخر تقنية التحكم بمنطق التبديل أو التحوّل في خلال كل مراحل التصميم استعملنا طريقة gradient لاستخراج قوانين التكييف. هذه الطريقة تسمح بتقليص فارق الخطأ بين القيمة المثالية و القيمة المقدرّة عبر النظام الغامض. البرهان على استقرار الجملة الكلية SMSA تمّ باستعمال نظرية Lyapunov. لتثبيت النتائج المتحصل عليها، قمنا بالحاكاة الرقمية على بعض الأمثلة ذات درجتين و ثلاث درجات حرية.

كلمات مفتاحية - جملة ميكانيكية ناقصة التفعيل ، تحكم منفصل منزلق ، تحكم منفصل تكييفي منزلق غامض ، دالة Lyapunov ، طريقة gradient

Résumé – Les systèmes mécaniques sous-actionnés (SMSA) sont des systèmes dont le nombre d'actionneurs est inférieur aux nombre de degrés de liberté (*dof*). Cette diversité des SMSA est une source de développements importants pour l'automatique, dans la mesure où la commande de ces systèmes donne souvent lieu à des problèmes inabordable par les moyens issus des techniques classiques. La commande robuste des SMSA, et en particulier la commande par les modes glissants (CMG), semble être un champ de recherche très intéressant pour assurer la stabilité et la convergence de ces systèmes. Or, vu que les SMSA sont généralement constitués de plusieurs sous-systèmes, et les variables d'états n'ont pas une relation différentielle directe entre elle aussi, les paramètres d'une surface de glissement commune ne peuvent pas être obtenus directement selon la condition d' Hurwitz. Ainsi, la commande découplée par les modes glissants (CDMG) est l'une des techniques qui permet de palier à ce problème en garantissant la convergence des états du système.

Pour cette problématique, nous avons considéré la stabilisation d'une classe de SMSA du second ordre ayant une entrée de commande à deux et trois degrés de liberté (*dof*). Pour surmonter le problème de stabilisation de ces systèmes, nous avons développé une panoplie de stratégies de commande fondée sur la commande découplée par les modes glissants (CDMG). Par ailleurs et dans le cas où la dynamique du système n'est pas totalement connue, le problème a été traité en développant une commande adaptative floue découplée par les modes glissant (CFDMG) : directe et indirecte. D'autre part, en exploitant les caractéristiques de la dynamique des SMSA, nous avons également mis en œuvre une commande à base de la logique de commutation «switching logic control».

Comme les systèmes flous sont utilisés pour approximer la commande idéale inconnue et les fonctions non linéaires par conséquent, les paramètres d'adaptations sont mis à jour en utilisant la méthode du gradient pour minimiser l'erreur entre la valeur idéale et sa valeur estimée via le système flou. L'analyse de la stabilité, des lois de commande proposées, est effectuée en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov. Enfin, pour valider l'efficacité de ces stratégies de commande, plusieurs simulations ont été effectuées dans le cas des SMSA à deux et trois *dof*.

Mots Clé – système mécanique sous-actionné, commande découplée par les modes glissants, commande adaptative floue découplée par les modes glissants, fonction de Lyapunov, méthode du gradient.

Abstract – Underactuated mechanical systems (UMS), or system having more degrees of freedom than actuators, are abundant in real-life. The interest for underactuated mechanical systems is motivated by the fact that, in general, the stabilization problem cannot be solved by smooth (or even continuous) time-invariant state feedbacks. The control of this class of UMS thus a challenging problem for which many open problems exist.

Introducing a robust control strategy seems to be an interesting research field and especially, the sliding mode control (SMC) becomes a basic trend of the fitted approaches. Because UMS usually consist of several subsystems and the state variables have no obvious differential relationship among these subsystems, the parameters of the common sliding mode surface cannot be obtained directly according to the Hurwitz condition. Indeed, decoupling sliding mode control is one of existing techniques able to cope with model uncertainties, disturbances and global stabilization of the whole system. However, it has been shown that the proposed sliding controllers cannot solve the asymptotic stabilization problem for a class of UMS, although they may still work in some very special cases in which the linearization about the desired configuration is controllable for the UMS.

Basically, we address the problem of controlling and stabilizing of a class of representative second-order UMS with a nominal model having one input and two or three degrees of freedom. We tackle panoplies of control strategy to solve control problems related to stabilization issue. These laws were developed based on decoupled SMC (DSMC), adaptive fuzzy (DSCM) "direct and indirect" and by considering the logic switching control law.

Furthermore, since fuzzy systems are used to approximate an unknown ideal controller and nonlinear functions, the adjustable parameters of the used fuzzy systems are updated using the gradient descent algorithm that is designed to minimize the error between the unknown ideal functions and the fuzzy systems. Based on Lyapunov stability theory, proofs and conditions are then given to ensure the stability of the closed-loop system. To illustrate the effectiveness of the above proposed strategies, many examples have been taken in consideration for numerical simulation

Key words – underactuated mechanical systems, decoupled sliding mode control, fuzzy adaptive decoupled sliding mode control, logic switching control, Lyapunov function, descent gradient method.

Avant propos

Au terme de cette thèse de doctorat, je tiens à exprimer ma gratitude aux personnes qui m'ont soutenu durant ces quelques années, et d'adresser mes sincères remerciements à tous ceux qui m'ont apporté de près ou de loin, aide et conseils lors de l'élaboration de ce travail.

Particulièrement, je remercie très chaleureusement mon directeur de thèse, Monsieur **Labiod Salim**, professeur à l'université de Jijel, qui a accepté de prendre la direction de cette thèse en cours de route, transformant ainsi les difficultés rencontrées en une expérience enrichissante. Je lui suis également reconnaissante de m'avoir assuré un encadrement rigoureux tout au long de ces années, tout en me donnant toutefois la possibilité de trouver par moi-même mon cheminement personnel.

Je suis aussi redevable à la contribution de monsieur **Chekireb Hachemi**, professeur à l'école nationale polytechnique, qui m'a dirigé tout au long de ce travail. Il a consacré, beaucoup de temps et d'énergie pour son avancement, et il n'a ménagé ni ses commentaires, toujours judicieux et rigoureux, ni ses encouragements. Aussi, pour son enthousiasme, ses précieux conseils, sa disponibilité et le partage de ses nombreuses connaissances lors de nos nombreuses discussions.

Je suis grandement reconnaissant à monsieur **Boukhetala Djamel**, Professeur à l'école Nationale Polytechnique d'Alger, pour son apport personnel et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'examiner mon travail en présidant le jury.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur **Larabi Abdelkader**, professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (U.S.T.H.B), pour la confiance et l'honneur qu'il m'accorde en acceptant d'être membre du jury.

Que Monsieur **Nait SEGHIR Amirouche**, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (U.S.T.H.B) trouve ici mes remerciements les plus sincères pour sa participation au sein du jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Bouakrif Farah**, Maître de conférences à l'Université de Jijel, pour l'honneur qu'il me fait en participant au jury de cette thèse.

Enfin, un remerciement particulier et une reconnaissance la plus profonde vont à ma mère et à ma femme pour leurs aides inestimables et leurs disponibilités tout le long de la réalisation de ce travail. Par leurs encouragements et leur appui moral inconditionnel et permanent, ils ont permis à ce travail d'arriver à son terme.

A la mémoire de mon père...
A ma mère et ...à ma petite famille.

Table des Matières

Liste des figures.....	iv
Liste des tableaux.....	v
Notation.....	vi

Introduction Générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre 1-

Modélisation et dynamiques des systèmes mécaniques sous actionnés

1.1. Modélisation mathématique des systèmes mécaniques.....	4
1.2. Dynamique des systèmes mécaniques complètement actionnés.....	6
1.3. Holonomie et dynamique des systèmes sous-actionnés.....	6
1.4. Propriétés des systèmes sous-actionnés.....	8
1.5. Linéarisation partielle par bouclage statique.....	10
1.5.1. Linéarisation partielle co-localisée par bouclage statique.....	10
1.5.2. Linéarisation partielle non co-localisée par bouclage statique.....	12
1.6. Classification des systèmes sous-actionnés.....	13
1.6.1. Systèmes sous-actionnés linéairement contrôlables.....	14
1.6.2. Systèmes sous-actionnés non linéairement contrôlables.....	14
1.6.3. Cas particulier : classification des systèmes sous-actionnés à deux <i>ddl</i>	14
1.6.4. Classification par motif de sous-action.....	15
1.6.5. Classification par contrainte du système.....	16
1.7. Quelques exemples de systèmes mécaniques sous-actionnés.....	16
1.7.1. Systèmes mécaniques sous-actionnés à deux <i>ddl</i>	16
1.7.1.1. Le pendubot.....	16
1.7.1.2. L'acrobot.....	18
1.7.1.3. Le pendule de Furuta.....	19
1.7.1.4. Le pendule à roue inertielle.....	19
1.7.1.5. Le pendule inverse sur chariot.....	20
1.7.1.6. Pont roulant (Overhead Crane system).....	22
1.7.1.7. Bille roulante et poutre (Beam and Ball system).....	23
1.7.2. Systèmes mécaniques sous-actionnés à trois degrés de liberté : le double pendule inversé sur chariot.....	24
1.8. Commande des SMSA.....	26

1.8.1. Les méthodes à base d'énergie.....	26
1.8.2. La commande optimale.....	27
1.8.3. La commande par les Modes glissants CMG : Sliding mode control...	28
1.8.4. La commande adaptative par la logique floue.....	29
1.9. Problématique et objectifs.....	29
1.9.2. Introduction.....	30
1.9.1. Formulation du Problème.....	30
1.10. Conclusion.....	36

Chapitre 2-

Commande découplée par mode de glissement

2.1. Introduction.....	37
2.2. Commande découplée par les modes de glissement des SMSA à 2 ddl.....	39
2.2.1. Approche 1.	39
2.2.2. Approche 2.....	41
2.2.3. Exemples d'application.....	46
2.2.3.1. Bille roulante sur poutre (Beam and Ball system).....	46
2.2.3.2. Le pendule (inversé) sur chariot.....	48
2.3. Commande découplée par mode de glissement des SMSA à 3 <i>ddl</i>	51
2.3.1. Approche 1.....	51
2.3.2. Approche 2.....	54
2.3.3. Exemple d'application: Double pendule inversé sur chariot.....	63
2.4. Conclusion.....	67

Chapitre 3-

Commande Adaptative découplée par mode de glissement

3.1. Introduction.....	66
3.2. Commande adaptative découplée par les modes de glissement floue directe....	70
3.2.1. Commande adaptative directe des SMSA à deux ddl.....	70
3.2.2. Exemples d'application.....	75
3.2.2.1. Bille roulante sur poutre: Beam and Ball.....	75
3.2.2.2. Pendule Inversé sur chariot.....	77
3.2.3. Commande adaptative directe des SMSA à trois <i>ddl</i>	78
3.2.4. Exemples d'application : Double pendule inversé sur chariot.....	82
3.3. Commande adaptative découplée indirecte floue par mode de glissement.....	83
3.3.1. Commande adaptative indirecte des SMSA à deux <i>ddl</i>	84
3.3.2. Exemples d'application.....	89
3.3.2.1. La bille roulante sur poutre.....	89
3.3.2.2. Pendule inversé sur chariot.....	90
3.3.3. Commande adaptative indirecte des SMSA à trois <i>ddl</i>	91
3.3.4. Exemple d'application.....	98
3.4. Conclusion.....	99

Chapitre 4- Commande par la logique de commutation

4.1. Introduction.....	101
4.2 Concept général de la commande via la logique de commutation.....	102
4.3. Conception de la commande par logique de commutation : SMSA à 2 <i>ddl</i>	104
4.2.1. Formulation du problème.....	100
4.2.2. Conception de la commande.....	100
4.2.3. Exemples et simulation.....	110
4.4. Conception de la commande par logique de commutation: SMSA à 3 <i>ddl</i>	113
4.4.1. Formulation du problème.....	113
4.4.2. Conception de la Commande.....	114
4.4.3. Résultats de simulation.....	119
4.5. Conclusion.....	121

Etude Comparative et conclusions

Références

Table des Figures

1.1 Le pendubot en coordonnées généralisées	17
1.2 L'acrobot en coordonnées généralisées	18
1.3 Le pendule de Furuta en coordonnées généralisées	19
1.4 Le pendule a roue inertielle en coordonnées généralisées	20
1.5 Le pendule inverse en coordonnes généralisées	21
1.6 Le pont roulant en coordonnées généralisées	23
1.7 Le système bille roulante et poutre	23
1.8 Le système double pendule inverse sur chariot	24
1.9 La commande agissante sur tout le système sur les deux sous-systèmes	31
1.10 Simulation de commande d'un pendule inversé sur chariot, exemple 1.	33
1.11 Simulation de commande d'un pendule inversé sur chariot, exemple 2.	33
1.12 La commande agissante sur tout le système sur les trois sous-systèmes	34
2.1 Le système bille roulante et poutre	46
2.2 Commande découplée par les modes glissants d'une bille roulante sur poutre	47
2.3 Le pendule inverse en coordonnées généralisées	48
2.4 Commande découplée par MG du pendule inverse sur chariot; 1 ^{iere} approche	49
2.5 Commande découplée par MG du pendule inverse sur chariot; 2 ^{ieme} approche.	50
2.6 Le schéma global de l'algorithme de commande de SMSA à 3 <i>ddl</i> , approche 1.	54
2.7 Le schéma global de l'algorithme de commande de SMSA 3 <i>ddl</i> , approche 2.	63
2.8 Le système double pendule inverse sur chariot.	64
2.9 commande découplée par les modes glissants du dpi, 1iere approche	65
2.10 commande découplée par les modes glissants du dpi, 2ieme approche.	66
3.1 Les fonctions d'appartenance des entrées floues	75
3.2 Commande découplée adaptative floue par MG sur la bille roulante et poutre.	76
3.3 Commande découplée adaptative floue par MG sur le pendule inversé sur chariot.	78
3.4 Commande découplée adaptative directe floue par MG du DPI	82
3.5 Commande découplée adaptative floue indirecte par MG bille roulante sur poutre.	90
3.6 Commande découplée adaptative floue indirecte par MG du pendule inversée.	91

3.8	Commande découplée adaptative floue indirecte par MG du DPI .	99
4.1	Le schéma de principe de la commande par la logique de commutation	104
4.2	Le schéma global de la commande des SMSA à deux <i>ddl</i>	108
4.3	Commande par logique e de commutation de la bille roulante sur poutre.	111
4.4	Commande pour la logique de commutation du pendule inversé sur chariot	112
4.5	Le schéma global de la commande pour un SMSA à trois <i>ddl</i>	119
4.6	Commande par la logique de commutation du DPI.	120

La liste des Tableaux

1.1 Classification des SMSA par contrainte	16
2.1 Les paramètres du pendule inversé sur chariot et du contrôleur CDMG	46
3.1 Paramètres de Commande pour la bille roulante et poutre	76
3.2 Paramètres de la commande du pendule inversé sur chariot.	77
3.3 Paramètres de la commande adaptative indirecte pour le bille roulante.	89
3.4 Paramètres de la commande adaptative indirecte du pendule inversé sur chariot	90
4.1 Distribution de valeurs des paramètres de commutation	114
4.2 Performances des différentes méthodes de commande, pendule inversé sur chariot	122
4.3 Performances des différentes méthodes de commande, DPI.	123

Notation

Symboles

$M(\mathbf{q})$	Matrice d'inertie du système qui est définie positive.
$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$	Vecteur des coordonnées généralisées
E_c	Energie cinétique
E_p	Energie potentielle
$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Lagrangien du système mécanique
$\bar{\boldsymbol{\tau}}_c$	Vecteur de m forces externes, avec $\bar{\boldsymbol{\tau}}_c \in \mathfrak{R}^m$
$F(\mathbf{q})$	Matrice associée aux m forces extérieures, avec $F(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}_{n \times m}$
$m_{ij}(\mathbf{q})$	Les éléments de la matrice d'énergie
$g_i(\mathbf{q})$	Éléments intervenant dans les forces centrifuges
$c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Éléments intervenant dans les forces de Coriolis
$\Gamma_{ij}^k(\mathbf{q})$	Symboles de Christoffel
$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	L'énergie totale d'un système mécanique
u	La commande
$f_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, 3$	Fonctions nonlinéaires relatives à la dynamique réduite d'un système mécanique sous-actionné.
$b_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, 3$	Gains de la commande
\mathbf{x}	Vecteur d'état constitué des éléments $x_i(t)$, avec $i = 1, \dots, 5$
S_i	Surfaces de glissement relatives au sous-système i , avec $i = 1, 2, 3$
λ_i	La pente de glissement de chaque surface : $i = 1, 2, 3$
$\tilde{x}_i = x_i - x_{id}$	L'erreur de réglage, avec x_{id} : constante réelle et : $i = 1, 3, 5$
u_{eq_i}	Commande équivalente relative à la surface de glissement i .
V	fonction de Lyapunov candidate.

p	Variable de Laplace
Δ_{ij}	$b_j(u_{eq_i} - u_{eq_j})$
B_{ij}	$b_i^{-1}b_j$
$\xi(\underline{s})$	Vecteur des fonctions floues
$\hat{\theta}$	Vecteur des paramètres à estimer
θ^*	Vecteur des paramètres optimaux
$\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$	Vecteur des erreurs d'estimation paramétrique
$J(\theta)$	fonction de coût quadratique relative au vecteur des paramètres à estimer
$\nabla_{\theta} J(\theta)$	$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \hat{\theta}}$

Abréviations and Acronymes

SMSA	Système mécanique sous-actionné
DPI	Double pendule inversée sur chariot
CMG	Commande par les modes glissants
<i>ddl</i>	Degrés de liberté
IDA	Interconnection and damping assignment control
PBC	Passivity based control
CDAFMG	commande découplée adaptative floue par les modes de glissement

Introduction Générale

De nos jours, la commande et la maîtrise des systèmes dynamiques sont devenues une nécessité pour satisfaire les différents besoins liés à l'activité humaine. Entre autre, le domaine des systèmes mécaniques, présentant une large diversité d'application, a connu une importante avancée technologique; ceci lui confère d'être un pôle intéressant pour les chercheurs en mécatronique. Un intérêt particulier de la recherche est consacré spécialement aux systèmes mécaniques sous-actionnés (SMSA).

Par définition, un système mécanique est dit sous-actionné lorsque le nombre de commandes est inférieur aux degrés de liberté (*ddl*) à commander. En effet, cette classe de systèmes est riche par son intérêt aussi bien théorique que pratique où ses applications incluent divers domaines tels que la robotique, les systèmes aéronautiques, les systèmes marins et les systèmes flexibles [Sab01].

Vue la particularité de la structure des modèles associés aux SMSA, leur commande fait généralement l'objet d'études distinctes. En effet, certains résultats et propriétés établis pour toute une classe de systèmes non linéaires ne sont plus valables. De plus, se manifestent d'autres propriétés indésirables telles qu'un degré relatif non déterminé ou un comportement à non minimum de phase.

Par ailleurs, plusieurs SMSA présentent une obstruction structurelle à l'existence de commandes stabilisantes lisses et invariantes dans le temps car, ils ne satisfont pas à la condition nécessaire de Brockett [Bro83], une des contributions majeure dans ce domaine. Typiquement, une première indication de cette obstruction découle du fait que la linéarisation de ces systèmes autour de n'importe quel point d'équilibre est non commandable surtout en absence des termes de gravité.

Il est à noter que les travaux effectués dans le domaine de la commande des SMSA appartiennent à un large éventail de classes de commande, notamment: le principe de la passivité ([Spo96], [Fan02] et [Ort98]), la commande basée sur le principe de l'énergie [Jia02][Whi06], la commande optimale [Tla11][Yan11], la commande par les modes

glissants (MG) [Hun93],[Edw98],[You99],[Krs95] et, la commande adaptative floue par MG [Lin07],[Wai08],[Yi05].

Largement appliquée, la commande robuste se réserve une grande part des travaux de recherche dédiés aux SMSA. Pour commander des systèmes perturbés mal modélisés, des techniques de commande à structure variables (par les modes glissants) sont efficaces à condition que les perturbations et les frottements vérifient une condition dite de recouvrement (matching condition).

Dans le cadre des SMSA, les travaux y associés sont généralement consacrés à la commande de systèmes particuliers (pendule inversé, poutre et bille, pendubot, acrobot, véhicules marins ...etc), et non à une étude généralisée des SMSA.

Comme le plus souvent, les SMSA comportent plusieurs sous-systèmes il est tout à fait naturel de chercher à les commander en mode découplé. De plus pour ce type de système, la commande découplée par les modes de glissement est largement exploitée dans les travaux de recherche au point où celle-ci est devenue une tendance de la commande pour les SMSA.

En effet, la synthèse d'une commande découplée permet de palier au problème des perturbations et des incertitudes et ceci est obtenu par une adaptation adéquate du découplage des surfaces choisies [Naz08].

Notre objectif est de contribuer à l'élaboration d'une panoplie de stratégies de commande pour une classe de SMSA du second ordre incertain et perturbé à deux et à trois *ddl*.

A cet effet, nous exposons un bref aperçu relatif aux caractéristiques mécaniques des SMSA et aux transformations possibles de leurs dynamiques. Ensuite, nous présentons quelques exemples des SMSA du second ordre à deux et à trois *ddl*. Par ailleurs, nous effectuons une brève étude bibliographique concernant les stratégies de commande dédiées à ces systèmes. Ceci, nous conduit de facto à poser la problématique et l'objectif de notre travail dans le cadre de cette thèse. Ainsi, pour le problème de stabilisation des SMSA à deux et trois *ddl*, nous développons une panoplie de commandes que nous pouvons classer comme suit :

i) la commande découplée par les modes de glissement (CDMG) :

Dans ce cas, la dynamique du SMSA est supposée entièrement connue ; et pour les deux systèmes à deux et trois *ddl*, nous utiliserons une surface de glissement standard linéaire. L'analyse de la stabilité est effectuée en appliquant la théorie de la stabilité au sens Lyapunov

ii) la commande découplée adaptative floue par les modes de glissement (CDAFMG) :

En absence d'une connaissance totale ou partielle de la dynamique des SMSA, nous développons différentes approches de commande découplée adaptative floue (du type TSK) par les modes de glissement (CDAFMG) : directe et indirecte. Ces stratégies de commandes sont établies dans le but d'améliorer d'une part l'insensibilité du système bouclé vis-à-vis des perturbations externes et d'autre part son comportement dynamique.

Il est à noter que les lois d'adaptations de ces commandes adaptatives, sont déduites en exploitant la méthode du gradient. La stabilité globale du système bouclé est étudiée à l'aide de la théorie de Lyapunov.

iii) la commande hybride par la logique de commutation :

Cette commande est élaborée à base de "commutateur" apte à superviser les différents signaux de commande dans le cas des SMSA à deux et trois *ddl*. Ainsi, les signaux de commande issus d'une famille de contrôleurs sont mis à contribution pour l'élaboration du signal de commande final.

Par ailleurs, et afin de valider les lois de commandes développées dans le cadre de cette thèse et d'évaluer leurs performances et de pouvoir les comparer, nous avons effectués la simulation de différentes SMSA sous la conduite de ces lois de commande.

Enfin, une conclusion générale avec les perspectives et les travaux futurs clôtura notre thèse.

Modélisation et dynamiques des systèmes mécaniques sous-actionnés

Dans ce chapitre, nous présentons d'une part les systèmes mécaniques sous-actionnés et d'autre part nous rappelons les concepts de la mécanique rationnelle qui permettent de concevoir un modèle dynamique de ces systèmes. Ainsi, nous allons donner une des définitions formelles des systèmes mécaniques sous-actionnés et non-holonomes. Ces derniers sont alors décrits par un modèle généralisé issu de l'équation d'Euler-Lagrange et qui est en final décrit par des équations différentielles du second ordre.

1.1. Modélisation mathématique des systèmes mécaniques

La modélisation, par des équations différentielles, d'un système mécanique, passe par plusieurs étapes ; en premier lieu, il faut choisir judicieusement un système de coordonnées. En effet, l'intérêt d'un tel choix, réside dans la simplification de la modélisation et dans l'analyse de ces systèmes. En seconde étape, choisir un formalisme pour élaborer le modèle dynamique du système soumis à l'étude. En général, cette modélisation peut s'effectuer en mettant en œuvre la méthode basée :

- soit sur la seconde loi de Newton laquelle nécessite l'étude de toutes les forces agissant sur le système.
- soit sur la formule d'Euler-Lagrange laquelle exige la détermination des différentes énergies échangées par le système.

Dans ce qui suit, nous ne présentons que la deuxième méthode, car dans la pratique elle est plus simple à mettre en œuvre.

Nous considérons un système mécanique composé de n corps solides non déformables. L'état énergétique de ce type de système est alors décrit par deux types d'énergie : l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p . Le lagrangien de ce système est défini comme étant la somme de ces deux énergies:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_c - E_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - E_p(\mathbf{q}) \quad (1.1)$$

où $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ est le vecteur des coordonnées généralisées et $M(\mathbf{q})$ est la matrice d'inertie du système qui est définie positive.

Les équations différentielles décrivant la dynamique d'un système mécanique sont obtenues par application de l'équation d'Euler-Lagrange donnée par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = F(\mathbf{q}) \bar{\boldsymbol{\tau}}_c \quad (1.2)$$

avec: $\bar{\boldsymbol{\tau}}_c \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur des forces externes, $F(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}_{n \times m}$ est la matrice associée aux forces extérieures agissant sur le système.

L'équation du mouvement du corps $i = (1, \dots, n)$ obtenue de (1.2) est alors donnée par :

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_j + g_i(\mathbf{q}) = \mathbf{e}_i^T F(\mathbf{q}) \bar{\boldsymbol{\tau}}_c, \quad i=(1, \dots, n) \quad (1.3)$$

où \mathbf{e}_i est la base standard de \mathfrak{R}^n , $g_i(\mathbf{q}) = \partial E_p(\mathbf{q}) / \partial q_i$ et $c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ sont des éléments intervenant dans les forces centrifuges et de Coriolis, ils sont définis par :

$$c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(\mathbf{q}) \dot{q}_k \quad (1.4)$$

où $\Gamma_{ij}^k(\mathbf{q})$ sont les symboles de Christoffel définis par :

$$\Gamma_{ij}^k(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} \right] \quad (1.5)$$

L'ensemble des dynamiques (1.3) peut être réécrit sous la forme vectorielle suivante :

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = F(\mathbf{q})\bar{\boldsymbol{\tau}}_c \quad (1.6)$$

où $M(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice d'inertie et $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est la matrice formée des éléments $c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Il est à noter que la matrice $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est constituée d'une part des termes contenant $\dot{\mathbf{q}}_i^2$ relatifs aux forces centrifuges et d'autre part des termes contenant le produit $\dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_j$ lesquels correspondent aux forces de Coriolis. Le vecteur $G(\mathbf{q})$ regroupe les termes des forces de gravité avec: $G(\mathbf{q}) = \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$. [Loz95].

1.2. Dynamique des systèmes mécaniques complètement actionnés

Soit un système mécanique de la forme (1.6), ce système est dit complètement actionné si le nombre des entrées de commande est égal au nombre de degrés de liberté: $\text{rang } F(\mathbf{q}) = m = n$ ou, autrement dit, $F(\mathbf{q})$ est une matrice carrée inversible. Par conséquent, les systèmes mécaniques complètement actionnés sont complètement linéarisables par retour d'état statique (i.e. ils n'admettent pas une dynamique des zéros) [Rav06]. En effet, l'application au système (1.6) de la commande (1.7) (dite par couple calculé) conduit à un double intégrateur $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$.

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_c = F(\mathbf{q})^{-1} (M(\mathbf{q})\mathbf{v} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q})) \quad (1.7)$$

Ceci permet d'appliquer aisément les concepts de l'automatique linéaire. Par conséquent, la commande des systèmes mécaniques complètement actionnés et sans perturbation ne pose pas de défis majeurs en termes de conception de la commande.

1.3. Holonomie et dynamique des systèmes sous-actionnés

Dans la suite, nous définissons la notion de la non-holonomie et les systèmes mécaniques sous-actionnés et on montre que la linéarisation par bouclage statique n'est plus possible pour toute la dynamique du système.

Définition 1.1 (Système Non-holonyme) [Spo96], [Sab01] *Considérons un système mécanique décrit par :*

$$\ddot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}_c) \quad (1.8)$$

où \mathbf{q} est le vecteur des états indépendants généralisés, $f(\cdot)$ est le champ de vecteur traduisant la dynamique du système et $\boldsymbol{\tau}_c$ est le vecteur des entrées généralisées. Supposons qu'il existe des contraintes empêchant le mouvement du système (1.8) dans toutes les directions de l'espace de configuration. Si ces contraintes dénotées par $s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ satisfont la propriété d'intégrabilité complète, c'est à dire, si elles peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$h(\mathbf{q}) = 0 \quad (1.9)$$

alors, ces contraintes sont appelées contraintes **holonomes**. Si ces contraintes ne peuvent pas être exprimées sous cette forme, alors elles sont dites contraintes **non-holonomes**. En particulier, ces contraintes sont dites non-holonomes de second ordre si elles sont non-intégrables en accélérations, i.e. si ces contraintes s'écrivent telle que :

$$s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (1.10)$$

Définition 1.2 (Système Sous-actionné) [Sab00] *Le système (1.6) est dit sous-actionné si les entrées généralisées ne peuvent pas commander les accélérations instantanées dans toutes les directions de l'espace des configurations. Ceci s'explique quand le rang $F(\mathbf{q}) = m < n$ (n est généralement défini comme étant le nombre de degrés de liberté de (1.6)). Autrement dit, un système mécanique est dit sous-actionné s'il admet moins d'actionneurs que de degrés de liberté.*

Soit le système (1.6), où $\boldsymbol{\tau}_c \in \mathfrak{R}^n$ est la commande donnée par $\boldsymbol{\tau}_c = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{0}_{1 \times (n-m)})^T$ avec: $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)^T$.

Ici, m dénote le nombre des entrées qui est inférieur au nombre des variables de configuration n .

Pour une répartition de la matrice non-carrée $F(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, des forces extérieures qui agissent sur le système, on peut écrire:

$$F(\mathbf{q})\bar{\boldsymbol{\tau}}_c = \begin{bmatrix} F_{11}(\mathbf{q}) & F_{12}(\mathbf{q}) \\ F_{21}(\mathbf{q}) & F_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times 1} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Ce qui donne :

$$F(\mathbf{q})\bar{\boldsymbol{\tau}}_c = \begin{bmatrix} F_{12}(\mathbf{q}) \\ F_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \quad (1.12)$$

Nous supposons que $F(\mathbf{q}) = [I_{m \times m}, 0_{(n-m) \times m}]^T$, et que le vecteur de configuration peut être partitionné selon $F(\mathbf{q})$ tel que: $\mathbf{q}^T = (\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T)$ où $\mathbf{q}_1 \in \mathfrak{R}^m$ et $\mathbf{q}_2 \in \mathfrak{R}^{(n-m)}$ représente respectivement le vecteur des configurations actionnés et celui des configurations sous-actionnées. Cela permet d'avoir :

$$F(\mathbf{q})\bar{\boldsymbol{\tau}}_c = \begin{bmatrix} I_{m \times 1} \\ 0_{(n-m) \times 1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{m \times 1} \\ 0_{(n-m) \times 1} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Ainsi, après le partitionnement de la matrice d'inertie $M(\mathbf{q})$ selon \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 , la dynamique d'un système sous-actionné peut être écrite sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ H_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{m \times 1} \\ 0_{(n-m) \times 1} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Où $M_{11}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, $M_{12}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{m \times (n-m)}$, $M_{21}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times m}$, $M_{22}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times (n-m)}$

En reformulant $F(\mathbf{q})$ tel que: $F(\mathbf{q}) = [I_m, 0]^T$, cela nous permet d'avoir l'équation généralisée d'un système mécanique sous-actionné comme suit:

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ H_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{m \times 1} \\ 0_{(n-m) \times 1} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

La restriction $m < n$ empêche une linéarisation par bouclage statique de la dynamique complète du système. Cependant, il est possible d'effectuer une linéarisation partielle du système [Sab01].

1.4. Propriétés des systèmes sous-actionnés

Les systèmes sous-actionnés présentent les propriétés intéressantes suivantes [Loz95]:

Propriété 1. $M(\mathbf{q})$ est une matrice symétrique définie positive.

Propriété 2. $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q})$ est une matrice antisymétrique.

Preuve. La dérivée d'un élément de la matrice d'inertie est donné par :

$$\dot{m}_{ij}(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (1.16)$$

Compte tenu de (1.5), la relation (1.4) peut être réécrite sous la forme :

$$2c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_k} + \frac{\partial m_{ik}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_j} - \frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_k} \right) \dot{\mathbf{q}}_k \quad (1.17)$$

Ainsi, en exploitant (1.16) et (1.17), un élément $n_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de la matrice de $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ peut être obtenu comme suit:

$$n_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{m}_{ij}(\mathbf{q}) - 2c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{\partial m_{ik}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_k \quad (1.18)$$

En utilisant (1.18), l'élément $n_{ji}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est tel que :

$$n_{ji}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{ki}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_j} - \frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \dot{\mathbf{q}}_k = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{\partial m_{ik}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_k = -n_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.19)$$

La relation (1.19) montre que $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + N^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$, ce qui prouve la propriété d'antisymétrie de la matrice $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Cette propriété est surtout utile pour démontrer la passivité de ces systèmes [Loz95].

Propriété 3. Les systèmes sous-actionnés sont des systèmes passifs.

Preuve. L'énergie totale d'un système sous-actionné est donnée par :

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + P(\mathbf{q}) \quad (1.20)$$

où : $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ est l'énergie cinétique du système, et $P(\mathbf{q})$ représente l'énergie potentielle de tout le système.

Un point de référence peut être choisi pour avoir la condition $P(\mathbf{q}) \geq 0$ et $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq 0$.

En utilisant (1.5) et les propriétés 1 et 2, la différentiation de $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ donne:

$$\dot{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \bar{\tau} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_2^T \tau \quad (1.21)$$

Sachant que la fonction de l'énergie totale $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est positive, on peut écrire :

$$E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geq 0 \Rightarrow E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - E(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \geq -E(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad (1.22)$$

Ce qui permet de déduire à partir de (1.21) que :

$$\int_0^t \dot{\mathbf{q}}_2^T \boldsymbol{\tau} dt = E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - E(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \geq -E(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad ?! \quad (1.23)$$

Cette propriété importante signifie qu'un tel système dispose d'une origine stable et qu'il existe toujours une loi de commande assurant $\dot{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$.

1.5. Linéarisation partielle par bouclage statique

1.5.1. Linéarisation partielle co-localisée par bouclage statique

Les variables actionnées, d'un système mécanique sous-actionné de la forme (1.15), sont regroupées dans le vecteur \mathbf{q}_2 . La procédure de linéarisation de la dynamique de \mathbf{q}_2 est dite: linéarisation partielle co-localisée par bouclage statique (Collocated partial feedback linearization) [Sab00]. Il est montré que tout système sous-actionné ayant la forme (1.15) peut être partiellement linéarisé en utilisant un changement de commande.

Proposition 1.1 [Sab00] *Il existe un changement global inversible de la commande de la forme:*

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.24)$$

qui linéarise partiellement la dynamique de (1.15) comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{p}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 &= f_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + g_0(\mathbf{q})\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= \mathbf{p}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Où $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})$ est une matrice symétrique définie positive et $g_0(\mathbf{q})$ est définie par

$$g_0(\mathbf{q}) = -M_{11}^{-1}(\mathbf{q})M_{12}(\mathbf{q}) \quad (1.26)$$

et :

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -M_{11}^{-1}(\mathbf{q})H_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ g_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -M_{11}^{-1}(\mathbf{q})M_{12}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Preuve.

A partir de l'équation (1.15) on peut tirer $\ddot{\mathbf{q}}_1$ comme suit :

$$\ddot{\mathbf{q}}_1 = -M_{11}^{-1}(\mathbf{q})H_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M_{11}^{-1}(\mathbf{q})M_{12}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_2 \quad (1.28)$$

Puis, dans la deuxième ligne de l'équation (1.15) $\ddot{\mathbf{q}}_1$ est remplacé par cette dernière expression, ce qui conduit à :

$$\left(M_{22}(\mathbf{q}) - M_{21}(\mathbf{q})M_{11}^{-1}(\mathbf{q})M_{12}(\mathbf{q})\right)\ddot{\mathbf{q}}_2 + H_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M_{21}(\mathbf{q})M_{11}^{-1}(\mathbf{q})H_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1.29)$$

en imposant:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{q}) &= M_{22}(\mathbf{q}) - M_{21}(\mathbf{q})M_{11}^{-1}(\mathbf{q})M_{12}(\mathbf{q}) \\ \beta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= H_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M_{21}(\mathbf{q})M_{11}^{-1}(\mathbf{q})H_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Par conséquent (1.29) devient : $\boldsymbol{\tau} = \alpha(\mathbf{q})\mathbf{u} + \beta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ce qui correspond à la forme recherchée (1.24). De plus, en définissant les nouvelles variables $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ telles que: $\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{p}_1$ et $\dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{p}_2$, alors les dynamiques (1.28) et (1.30) peuvent se mettre sous la forme résolue suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{p}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 &= f_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + g_0\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= \mathbf{p}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Le système d'équations (1.31) prend alors la forme canonique (1.25).

Il est à noter que la matrice $\alpha(\mathbf{q})$ est aussi une matrice symétrique définie positive. Effectivement, la matrice $\alpha(\mathbf{q})$ définit bien le complément de Schur qui est symétrique défini positif [Bak04].

Il est important de noter que la principale caractéristique du système sous-actionné (1.31) réside dans le fait que la nouvelle commande \mathbf{u} , apparaissant dans la dynamique du sous-système non linéaire $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$, apparaît également dans la dynamique du sous-système $(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2)$ qui est un sous-système linéaire. Cette particularité est en fait une source de complexité pour la conception de la commande relative à ces systèmes.

Remarque 1.1 En posant: $\underline{\mathbf{x}} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ la dynamique du sous-système (1.31) prend la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= f_0(\underline{\mathbf{x}}) + g_0(\underline{\mathbf{x}})\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}}_3 &= \mathbf{x}_4 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 &= \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.32)$$

où encore:

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u \quad (1.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= (\underline{x}_2, f_0(\underline{x}), \underline{x}_4, 0)^T \\ g(\underline{x}) &= (0, g_0(\underline{x}), 0, I_m)^T \end{aligned} \quad (1.34)$$

1.5.2. Linéarisation partielle non co-localisée par bouclage statique

Dans cette partie, nous présentons une procédure de linéarisation partielle permettant de linéariser les variables sous-actionnés.

Cette linéarisation partielle permet d'obtenir une forme normale quadratique non-triangulaire pour les SMSA à symétrie cinétique [Sab01].

Nous montrons par la suite que cette procédure n'est possible que si le nombre des entrées (commande) est supérieur ou égal au nombre des variables sous-actionnées [Sab01]. Nous appelons cette procédure par « la linéarisation partielle non co-localisée par bouclage statique (Non-located partial feedback linéarisation)».

Soit le système sous-actionné suivant :

$$\begin{bmatrix} M_{00}(\mathbf{q}) & M_{01}(\mathbf{q}) & M_{02}(\mathbf{q}) \\ M_{10}(\mathbf{q}) & M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{20}(\mathbf{q}) & M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_0 \\ \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ H_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ H_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_0 \\ \boldsymbol{\tau}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Où la nouvelle partition du vecteur des variables généralisées \mathbf{q} est telle que:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \mathfrak{R}^{n_0 \times n_1 \times n_2} \quad \text{où } n_0 = n_1 = m \text{ et } n_0 = n - 2m \geq 0$$

Il est important de signaler le cas particulier où le nombre des variables actionnés et des variables sous-actionnés sont égaux : $n = 2m$ et $n_0 = 0$. Dans ce cas, \mathbf{q}_0 est de dimension zéro et le vecteur \mathbf{q} se réduit à : $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, ce qui ramène l'équation de la forme (1.35) à la forme (1.15).

Proposition 1.2 ([Krs95] et [Tee91]) *Considérons les systèmes mécaniques sous-actionnés donnés par (1.35). Alors, il existe un changement de commande sous la forme :*

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \alpha_1(\mathbf{q})\mathbf{u}_1 + \beta_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.36)$$

avec: $\mathbf{u}_1 = \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \beta_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, qui linéarise la dynamique du système (1.35) tel que :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{p}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 &= f_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + g_2(\mathbf{q})\mathbf{u}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= \mathbf{p}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= \mathbf{u}_2\end{aligned}\tag{1.37}$$

Selon l'ensemble:

$$U = \{\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n \mid \det(M_{21}(\mathbf{q})) \neq 0\}\tag{1.38}$$

où :

$$\begin{aligned}f_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= -M_{21}^{-1}(\mathbf{q})H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ g_2(\mathbf{q}) &= M_{21}^{-1}(\mathbf{q})M_{22}(\mathbf{q})\end{aligned}\tag{1.39}$$

Preuve. En se basant sur la démonstration établie pour la Proposition 1.1, la dynamique du vecteur actionné $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)$ peut être linéarisé en utilisant le changement de la commande: $\boldsymbol{\tau}_1 = \alpha_1(\mathbf{q})\mathbf{u} + \beta_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ qui nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_0 &= \mathbf{u}_0 \\ \ddot{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{u}_1\end{aligned}\tag{1.40}$$

D'après la définition de l'ensemble U , $M_{21}(\mathbf{q})$ est une matrice inversible. Ainsi, la dernière ligne du système (1.35) donne :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_1 &= -M_{21}^{-1}(\mathbf{q})h_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M_{21}^{-1}(\mathbf{q})M_{20}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_0 - M_{21}^{-1}(\mathbf{q})M_{22}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_2 \\ \mathbf{u}_1 &= -M_{21}^{-1}(\mathbf{q})h_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M_{21}^{-1}(\mathbf{q})M_{20}(\mathbf{q})\mathbf{u}_0 - M_{21}^{-1}(\mathbf{q})M_{22}(\mathbf{q})\mathbf{u}_2\end{aligned}\tag{1.41}$$

Avec: \mathbf{u}_2 est la nouvelle entrée de commande.

1.6. Classification des systèmes sous-actionnés

Les systèmes totalement actionnés présentent généralement des propriétés particulières telles que la contrôlabilité linéaire, la linéarisation par retour d'état et la passivité et, accepte la transformation en cascade de forme standard telle que la forme quadratique non-triangulaire [Sab01], strict feedback [Tee91] et feed-forward [Spo95].

Par contre, les systèmes sous-actionnés sont caractérisés par l'absence d'une ou plusieurs de ces propriétés et de ce fait la conception de leur commande représente par elle-même un grand défi.

Dans la littérature spécialisée, plusieurs modèles mathématiques sont proposés et étudiés pour représenter les systèmes sous-actionnés. En effet, la classification des systèmes sous-actionnés en catégories ainsi que les transformations permettant d'écrire leurs modèles sous des formes canoniques sont d'une grande importance.

L'objectif principal d'une telle classification et des formes normales associées est de permettre une simplification de la conception de la commande. D'une manière générale, les systèmes sous-actionnés peuvent être classés en deux grandes catégories [Gol80]:

- Ceux qui sont linéairement contrôlables ;
- Ceux qui ne sont pas linéairement contrôlables.

1.6.1. Systèmes sous-actionnés linéairement contrôlables

La plupart des SMSA ayant une énergie potentielle sont linéairement contrôlable. Le champ de potentiel (comme la gravité et la raideur des ressorts) agit comme un actionneur supplémentaire et confère au système une contrôlabilité linéaire.

A cette classe de système, appartiennent le pendule inversé sur chariot, l'acrobot et le pendubot [Gol80].

1.6.2. Systèmes sous-actionnés non linéairement contrôlables

Les SMSA qui opèrent dans un plan horizontal (sans la gravité) tels que les robots sur roues mobiles, les manipulateurs planaires et les véhicules sous-marins, entrent dans cette catégorie. Il est à noter que pour une telle classe, les résultats de Brockett sont vérifiés [Gol80].

1.6.3. Cas particulier : classification des systèmes sous-actionnés à deux degrés de liberté

On considère un système mécanique sous-actionné à deux degrés de liberté ayant comme vecteur de coordonnées généralisées: $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$.

On suppose que la matrice d'inertie de ce système dépend seulement de \mathbf{q}_2 , i.e. $M = M(\mathbf{q}_2)$. Le Lagrangien d'un tel système est donné par:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{11}(\mathbf{q}) & m_{12}(\mathbf{q}) \\ m_{21}(\mathbf{q}) & m_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}) \quad (1.42)$$

Une classification naturelle des systèmes sous-actionnés à deux degrés de liberté peut être effectuée comme suit :

Définition 1.3 Système sous-actionné de la Classe-I et de la Classe-II [Gol80].

Un SMSA ayant un Lagrangien de la forme (1.42) est dit de classe-I, si et seulement si q_2 est la partie actionnée si par contre, q_1 est la partie non-actionnée, il est alors dit de classe-II. Les équations d'Euler-Lagrange du mouvement d'un tel système sous-actionné sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \tau_2 \end{aligned} \quad (1.43)$$

où, pour un système de classe-I on a $\tau_1 = 0$ et $\tau_2 = 0$ pour un système de Classe-II. Dans le cas où la matrice d'inertie ne dépend que de q_2 , alors l'équation (1.43) peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} M_{11}(q_2)\ddot{q}_1 + M_{12}(q_2)\ddot{q}_2 + M'_{11}(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + M'_{12}(q_2)\dot{q}_2^2 - g_1(q_1, q_2) &= \tau_1 \\ M_{21}(q_2)\ddot{q}_1 + M_{22}(q_2)\ddot{q}_2 - \frac{1}{2}M'_{11}(q_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}M'_{22}(q_2)\dot{q}_2^2 - g_2(q_1, q_2) &= \tau_2 \end{aligned} \quad (1.44)$$

avec : $g_i(q_1, q_2) = -\partial V(q_i)/\partial q_i, i = 1, 2$ et $M'_{ij}(q_2) = \frac{d}{dq_2} M_{ij}(q_2)$.

Remarque 1.2 L'acrobot, le pendule à roue inertielle et le système TORA sont de la Classe-I, alors que le pendule sur chariot est de la Classe-II [Gol80].

En outre des sus-dis classifications, la diversité de propriétés des SMSA permet une classification, notamment en considérant leurs natures, leurs contraintes, leurs configurations et bien évidemment le problème de la commande.

1.6.4. Classification par motif de sous-action

Pour pouvoir apporter la stratégie de commande adéquate pour un SMSA, il est nécessaire de comprendre les raisons de la sous-action régie dans ce système. En résumé, les motifs suivants permettent de classer les SMSA :

- a. Sous-action intrinsèque du système : à titre d'exemple, le space-craft, l'hélicoptère, sous-marin [Ege96] et robot mobile (wheeled mobile robot) [Den07], [Vel08].

- b. Sous-action par conception : pour apporter une réduction du coût ou pour des fins pratiques. Nous citons les systèmes satellitaires avec deux propulseurs [Wal94],[Bu98], les robots à bras flexible [De189].
- c. Sous-action dû à une panne : par exemple, surface vessel, VTOL aircraft.

1.6.5. Classification par contrainte du système

Plusieurs SMSA sont sujet à leur contrainte du premier ou du deuxième ordre. La contrainte du premier ordre inclus les coordonnées généralisées et la vitesse et la contrainte du second ordre inclus les coordonnées généralisées, la vitesse et l'accélération. La contrainte différentielle est holonomique si elle est intégrable et elle sera non-holonomique si elle est non-intégrable. Un SMSA est holonomique si la contrainte est complètement intégrable, et non-holonomique si ses contraintes sont non-intégrable ou partiellement intégrable [Ori91]. Des exemples des SMSA holonomique et non-holonomique sont donnés dans le tableau 1.1.

Tab 1.1. Classification des SMSA par contrainte.

Classe	Contrainte	Exemples
SMSA holonomique	Complètement intégrable	Pendule horizontal [Mar08], deux bras manipulateurs planaire [Ori91], pendule inverse sur chariot.
SMSA non-holonomique	Partiellement intégrable ou non-intégrable.	Robot mobile, surface vessel, acrobot et pendubot.

1.7. Quelques exemples de systèmes mécaniques sous-actionnés

Dans cette section, nous allons traiter quelques exemples de la classe des systèmes mécaniques sous-actionnés ayant deux ou trois degrés de liberté. En outre, nous allons présenter le modèle dynamique du pendule inversé, du pendubot, de l'acrobot, de la bille roulante sur poutre (beam and ball system), du pendule de Furuta et enfin du pendule à roue inertielle. Ces exemples servent de modèle pour tester les lois de commande qui vont être développées dans la suite de ce travail.

1.7.1. Systèmes mécaniques sous-actionnés à deux degrés de liberté

1.7.1.1. Le pendubot

Le pendubot, représenté à la figure 1.1, est constitué de deux tiges qui peuvent tourner autour de leurs axes respectifs [Spo95].

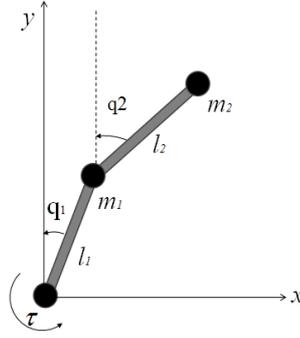


Fig 1.1 Le Pendubot en coordonnées généralisées

La tige1, de masse m_1 et de longueur l_1 , est actionnée par un couple de commande τ tandis que la tige 2, de masse m_2 et de longueur l_2 , est en rotation libre autour de la tige1. A vitesse nulle, le pendubot admet une infinité de points d'équilibre instable représentés par: $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_2 = 0, q_1 = \text{cte}$ correspondant à la position haute de la tige2 quelque soit la position de la première tige, et une infinité de points d'équilibre stable représentés par : $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0, q_2 = \pi, q_1 = \pi$ correspondant à la position basse de la tige1. Le lagrangien de ce système est donné par:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) + m_1 g l_1 (\cos q_1 - 1) + m_2 g l_2 (l_1 (\cos q_1 - 1) + l_2 (\cos q_2 - 1)) \quad (1.45)$$

Aussi, les équations dynamiques du mouvement sont telles que :

$$\begin{aligned} m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 - m_2 g l_2 \sin q_2 &= 0 \\ (m_2 + m_1) l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 - (m_2 + m_1) g l_1 \sin q_1 &= \tau \end{aligned} \quad (1.46)$$

A partir du système (1.45), il est facile d'identifier les matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ et $G(q)$ comme suit:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 + 2p_3 \cos q_2 & p_2 + p_3 \cos q_2 \\ p_2 + p_3 \cos q_2 & p_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_3 \dot{q}_2 \sin q_2 & -p_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ p_3 \dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_4 g \cos q_1 - p_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ -p_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} p_1 = (m_1 + m_2)l_1^2 + I_1 \\ p_2 = m_2l_2^2 + J_2 \\ p_3 = m_2l_1l_2 \\ p_4 = (m_1 + m_2)l_1 \\ p_5 = m_2l_2 \end{cases}$$

1.7.1.2. L'acrobot

L'acrobot est similaire au pendubot, sauf que le couple τ agit sur l'articulation joignant les 2 tiges (fig. 1.2) [Spo89] et [Fur91]. Aussi, les équations dynamiques du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} m_2l_1l_2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + m_2l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2l_1l_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 - m_2gl_2 \sin q_2 &= \tau \\ (m_2 + m_1)l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2l_1l_2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - m_2l_1l_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 - (m_2 + m_1)gl_1 \sin q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

L'acrobot admet aussi une infinité de points d'équilibre stables et instables. L'ensemble des points d'équilibre instables correspond aux positions où le centre de gravité du système global est situé dans le demi-plan supérieur par rapport à l'axe x et de plus la verticale, contenant ce centre de gravité, passe aussi par l'axe de rotation de la tige 1.

Les positions d'équilibres stables sont identiques aux points instables, à la différence que le centre de gravité est dans le demi-plan inférieur par rapport à l'axe x .

Un simple calcul des moments d'ordre 1 des 2 masses ponctuelles m_1 et m_2 par rapport à l'axe de rotation de la tige numéro 1 donne $m_2l_2 \sin q_2 = m_1l_1 \sin q_1$; correspondant aux points d'équilibres.

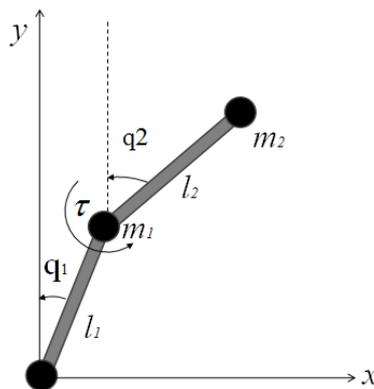


Fig 1.2 L'acrobot en coordonnées généralisées

1.7.1.3. Le pendule de Furuta

Le pendule de Furuta a été conçu par K. Furuta [Fur91] pour contrecarrer l'handicap dû à la limitation de la translation horizontale du pendule inversé classique. Le bras actionné en rotation dans le plan horizontal permet une course infinie (voir Fig 1.3) et de la il facilite la conception de la commande.

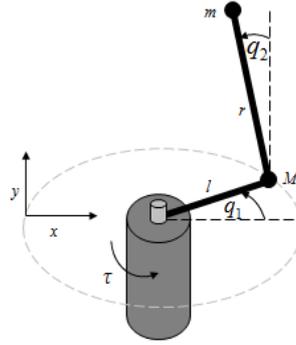


Fig 1.3 Le pendule de Furuta en coordonnées généralisées

A l'autre extrémité du bras, vient s'ajouter un pendule libre en rotation dans le plan vertical orthogonal au bras. Le Lagrangien de ce système est alors déterminé par :

$$L = \frac{1}{2} J_p \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} (J_b + J_p \sin^2 q_2) \dot{q}_1^2 - m_p l r \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 - m_p g r (\cos q_2 - 1) \quad (1.48)$$

Les équations dynamiques du mouvement, déduites de (1.48), sont données par :

$$\begin{aligned} -m_p l r \dot{q}_1 \cos q_2 + J_p \ddot{q}_2 - J_p \sin q_2 \cos q_2 \dot{q}_1^2 - m_p g r \sin q_2 &= 0 \\ (J_b + J_p \sin^2 q_2) \ddot{q}_1 - m_p l r \cos q_2 \ddot{q}_2 + 2J_p \sin q_2 \cos q_2 \dot{q}_2 + m_p l r \sin q_2 \dot{q}_2^2 &= \tau \end{aligned} \quad (1.49)$$

où J_p et J_b représentent respectivement le moment d'inertie du pendule et celui du bras, m_p la masse du pendule, l et r les longueurs respectives du bras et du pendule. Les positions d'équilibre stable (instable) correspondent à : $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = q_2 = 0$ ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$, $q_2 = \pi$).

1.7.1.4. Le pendule à roue inertielle

Le pendule à roue inertielle, représenté à la figure 1.4, est constitué d'un pendule libre en rotation autour d'un axe lié au sol, l'autre extrémité du pendule est reliée à un disque actionné ne pouvant que tourner [Spo96].

Le Lagrangien relatif à ce système est alors représenté par :

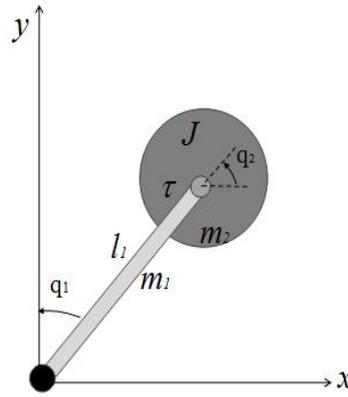


Fig 1.4 Le pendule à roue inertielle en coordonnées généralisées

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{q}_2^2 + (m_1 + m_2)gl(\cos q_1 - 1) \quad (1.50)$$

et la dynamique du mouvement issue de ce Lagrangien est décrite par :

$$\begin{aligned} [(m_1 + m_2)l^2 + J]\ddot{q}_1 + J\ddot{q}_2 - (m_1 + m_2)gl \sin q_1 &= 0 \\ J\ddot{q}_1 + J\ddot{q}_2 &= \tau \end{aligned} \quad (1.51)$$

où les paramètres m_1 , m_2 ; l et J représentent respectivement la masse du pendule, la masse du disque, la longueur du pendule et l'inertie du disque. Les points d'équilibres stables (respectivement, instables) correspondent à $q_1 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ (respectivement: $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$, $q_1 = \pi$).

1.7.1.5. Le pendule inverse sur chariot

Le pendule inverse est un système classique très intéressant et largement utilisé comme prototype de commande, au vu de sa nature non linéaire et instable [Shi00].

Le pendule inversé que nous considérons est composé de deux éléments (fig.1.5) :

- Un chariot libre en translation le long d'un rail de guidage.
- Un pendule pesant solidaire du chariot et libre en rotation.

Les équations dynamiques, régissant le mouvement du pendule inversé, sont écrites en considérant les coordonnées généralisés suivantes: $q_1 = x$ et $q_2 = \alpha$; où x représente la position du chariot sur son rail et α la position angulaire de la tige. L'énergie mécanique globale est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + ml\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + mgl(\cos\alpha - 1) \quad (1.52)$$

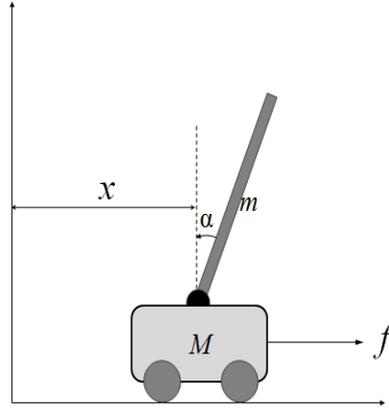


Fig 1.5 Le pendule inversé en coordonnées généralisées x et α

L'application des équations d'Euler-Lagrange (1.35), conduisent aux équations dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned} (m_c + m_p)\ddot{x} + m_p l \cos \alpha \ddot{\alpha} - m_p l \sin \alpha \dot{\alpha}^2 &= \tau \\ m_p l \cos \alpha \ddot{x} + m_p l^2 \ddot{\alpha} - m_p g l \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

Pour ces équations, m_c et m_p sont respectivement la masse du chariot et celle du pendule, l est la distance du centre de gravité du pendule à son axe de rotation, g est la constante de gravitation, τ est l'entrée de commande représentant la force f de traction.

Pour ce système, les matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ et $G(q)$ sont données par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l \cos \alpha \\ m_p l \cos \alpha & m_p l^2 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_p l \sin \alpha \dot{\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_p g l \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Enfin, le vecteur d'entrée est donné par :

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Rappelons que la matrice d'inertie est définie positive, donc inversible. Par inversion, la représentation d'état suivante peut être obtenue :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_1(\underline{x}) + b_1(\underline{x})u \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= f_2(\underline{x}) + b_2(\underline{x})u
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned}
 f_1 &= \frac{(m_p l^2 \dot{\alpha} - m_p g l \cos \alpha) \sin \alpha}{l(m_c + m_p \sin^2 \alpha)} \\
 b_1 &= \frac{l}{l(m_c + m_p \sin^2 \alpha)} \\
 f_2 &= \frac{((m_c + m_p)g - m_p l \cos \alpha \dot{\alpha}^2) \sin \alpha}{l(m_c + m_p \sin^2 \alpha)} \\
 b_2 &= -\frac{\cos \alpha}{l(m_c + m_p \sin^2 \alpha)}
 \end{aligned} \right. \tag{1.59}$$

Ce système admet une infinité de points d'équilibre caractérisés par: $\dot{x} = \dot{\alpha} = 0$, $\alpha = \{0, \pi\}$ modulo 2π et ceci pour tout x .

Les points d'équilibre correspondant à $\alpha = 0$ modulo 2π ; où 0 est la position verticale haute du pendule, sont instables; ceux correspondants à $\alpha = \pi$ modulo 2 sont stables.

1.7.1.6. Pont roulant (Overhead Crane system)

Le pont roulant (Overhead Crane) (fig.1.6) représente un système sous-actionné typique. Il est constitué d'un chariot se déplaçant horizontalement sur un rail et d'une charge pendulé verticalement à l'aide d'un câble rigide [Mon01].

Le modèle de la dynamique, obtenu des équations d'Euler-Lagrange, est comme suit:

$$\begin{aligned}
 x &: (m_g + m_c) \ddot{x} + m_g L (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = F \\
 \alpha &: \ddot{x} \cos \alpha + L \ddot{\alpha} + g \sin \alpha = 0
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

où: m_c et m_g sont respectivement la masse du chariot et celle de la charge; x est le déplacement horizontal, α l'angle de balancement de la charge et, L est la longueur du câble de suspension.

L'équation (1.60) peut être réécrite dans la forme différentielle (1.58) avec :

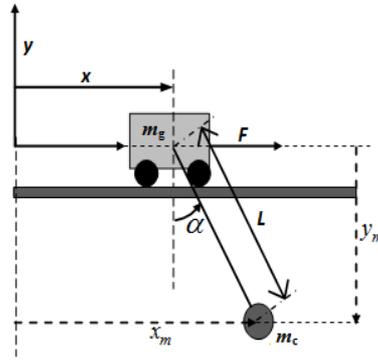


Fig 1.6 Le pont roulant en coordonnées généralisées x et α

$$\begin{cases} f_1 = \frac{mL\ddot{\alpha}^2 \sin \alpha + mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \\ b_1 = \frac{1}{M + m \sin^2 \alpha} \\ f_2 = -\frac{(M + m)g \sin \alpha + mL\ddot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha}{(M + m \sin^2 \alpha)L} \\ b_2 = -\frac{\cos \alpha}{(M + m \sin^2 \alpha)L} \end{cases} \quad (1.61)$$

Les seuls points d'équilibre stable de ce système correspondent à $\alpha = 0$ modulo 2π où 0 est la position verticale basse du câble

1.7.1.7. Bille roulante et poutre (Beam and Ball system)

Le système bille roulante et poutre est illustré à la Figure 1.7. Il consiste en une bille roulant sans glissement sur une poutre [Bar97]. L'équation de la dynamique du mouvement est donné par :

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= u \\ \ddot{r} &= B(r\dot{\alpha}^2 - g \sin \alpha) \end{aligned} \quad (1.62)$$

avec $B = mR^2 / (J_b + mR^2)$; J_b , le moment d'inertie de la bille ; m , la masse de la bille ; R , le diamètre de la bille.

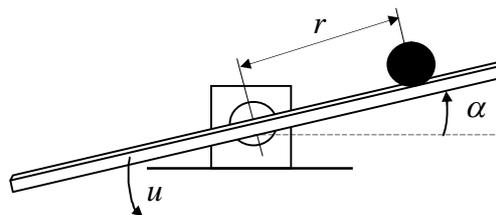


Fig 1.7 Le système Bille roulante et poutre

Le système bille roulante et poutre présente un problème de stabilisation très particulier. Ce dernier se caractérise par la difficulté due à la croissance rapide de la non-linéarité. Pour la bille, la non-linéarité critique est représentée par la force de centrifuge $r\dot{\alpha}^2$. Cette force s'avère déstabilisante quand elle s'oppose au terme de la force gravitationnelle: $-g \sin \alpha$ [Bar97]. Le seul point d'équilibre stable de ce système est représenté par le point $\alpha = 0$ et $r = 0$.

1.7.2. Systèmes mécaniques sous-actionnés à trois degrés de liberté : double pendule inversé sur chariot

Une vue schématique d'un double pendule inversé sur chariot est représenté à la Figure 1.8. Le premier pendule est placé sur un chariot tandis que le deuxième pivote autour d'un axe horizontal sur le premier pendule. Le chariot peut se déplacer sur un plan horizontal où une force u agit horizontalement pour permettre un balancement du système global. Pour un tel système, les pendules et le chariot sont rigides et il est supposé que chaque partie est distribuée d'une façon homogène et concentré dans son centre de gravité [Yam95]. Le Lagrangien de ce système est déterminé par :

$$L = \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1)\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 l_2^2 + I_2)\dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 l_1 + m_2 L_1)\dot{x}\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + m_2 l_2 \dot{x}\dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 + m_2 L_2 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - (m_1 l_1 + m_2 L_1)g \cos \alpha_1 - m_2 l_2 g \cos \alpha_2 \quad (1.63)$$

Où: l_1 et l_2 sont les positions des centre de gravitation par rapport aux axes de rotation des tiges 1 et 2 respectivement, tandis que L_1 et L_2 représentent les longueurs des tiges 1 et 2.

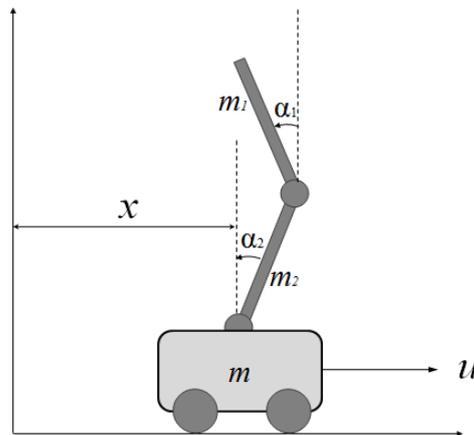


Fig 1.8 Le système double pendule inversé sur chariot

En dérivant par rapport à x, \dot{x}_1, α et $\dot{\alpha}$ où $\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2)^T$, les équations de Lagrange sont établis comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= u \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.64)$$

Le système (1.64) est mis dans la forme matricielle (1.6) avec $q = (x \quad \alpha_1 \quad \alpha_2)^T$ et les matrices $M(q), C(q, \dot{q}), G(q)$ et $B(q)$ sont telles que :

$$M(q) = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \cos \alpha_1 & d_3 \cos \alpha_2 \\ d_2 \cos \alpha_1 & d_4 & d_5 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ d_3 \cos \alpha_2 & d_5 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & d_6 \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -d_2 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 & -d_3 \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & d_5 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ 0 & -d_5 \dot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_1 \sin \alpha_1 \\ -f_2 \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

$$B = [1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (1.68)$$

Du fait que la masse d'une liaison est supposée concentrée au centre géométrique de cette même liaison aussi, nous aurons $l_i = L_i/2$ et $I_i = m_i L_i^2/12$ et les paramètres d_i ($i=1, \dots, 6$) et f_i ($i=1, 2$) intervenant dans les matrices $M(q), C(q, \dot{q})$ et $G(q)$ sont déterminés par:

$$d_1 = m_0 + m_1 + m_2; \quad d_2 = m_1 l_1 + m_2 L_1; \quad d_3 = \frac{1}{2} m_2 L_2; \quad d_4 = m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1; \quad d_5 = \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2,$$

$$d_6 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2; \quad f_1 = \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) L_1 g; \quad f_2 = m_2 l_2 g = \frac{1}{2} m_2 L_2 g.$$

À noter que la matrice $M(q)$ est symétrique non-singulière.

1.8. Commande des SMSA

Après avoir vu la dynamique, la classification et les caractéristiques des SMSA, nous allons voir dans cette section une vue d'ensemble sur la commande de ces systèmes. L'objectif de la commande des SMSA consiste à la synthèse d'une stratégie de commande qui assure une régulation du système en présence de perturbations extérieures et d'incertitudes. Un tel domaine de recherche peut être partagé en deux catégories: stabilisation et poursuite de trajectoire [Yan13].

La complexité de commande de ces systèmes réside dans le fait que le nombre d'actionneurs est inférieur au nombre de degrés de liberté à contrôler ce qui rend difficile l'application des stratégies de commande connues pour les systèmes complètement actionnés. Durant ces dernières années, plusieurs stratégies de commande à base de la linéarisation par retour d'état, le principe d'énergie, backstepping, la commande optimale, les modes glissants et la logique floue ont été développées pour la stabilisation des SMSA.

Dans ce qui suit, nous effectuons une analyse non exhaustive des méthodes existantes dans la littérature spécialisée.

1.8.1. Les méthodes à base d'énergie.

Nous avons vu en (1.23), que les SMSA sont passifs. Les méthodes de commande des SMSA à base de la passivité sont en général connues sous la dénomination PBC (Passivity Based Control). L'idée principale de ces méthodes consiste à réguler l'énergie totale du système à un état désiré en utilisant (1.18).

Dans la littérature, la méthode PBC est largement utilisée pour la commande spécifique des SMSA ; notamment deux bras manipulateurs [Lai09], pendule inverse [Shi99], double pendule inverse sur chariot [Zho01], double pendule en parallèle sur chariot [Xin05], pendule rotatif [Fre09], le système TORA [Gao09] et les robots biped [Spo07]. Pour les travaux cités précédemment, la commande basée sur l'énergie est en générale orientée vers le basculement du système (exemple : le pendule inversé, l'Acrobot, le pendubot, le pendule à roue inertielle) pour le forcer à se rapprocher du voisinage relatif au domaine de linéarité, ce qui permet de commuter la commande vers une commande linéaire du type LQR ou par placement de pôles.

Dans d'autres travaux, basés toujours sur le principe de la passivité, il a été développée une procédure qui permet de faire balancer les SMSA afin de les ramener sur leurs orbites homoclines et ensuite de commuter la commande vers une commande linéaire

([Spo96], [Fan02], [Ort98]), ou bien d'effectuer une transformation en des systèmes en cascades [Jan96] et [Kol02].

Du point de vue méthodologique, plusieurs stratégies ont été développés à base du principe de l'énergie, tel que la méthode du gain- L_2 [Van99], la méthode directe de Lyapunov [Jia02],[Whi06], backstepping [Gho06], [Kok92] et la méthode du IDA-PBC (Interconnection and damping assignment control-Passivity based control) et Lagrangien contrôlé.

L'une des limitations de la PBC est qu'elle n'est applicable qu'aux systèmes ayant un degré relatif inférieur ou égale à deux. Pour palier à ce problème, la technique du backstepping a été introduite pour transformer le système en une nouvelle forme récursive où la PBC peut être appliquée [Yang13].

Durant ces dernières années, cette technique du backstepping a été appliquée pour la commande de plusieurs modèles SMSA à deux *ddl* tels que la surface vessel [Do02], et VTOL aircraft [Do03]. Cependant, quand le *ddl* du SMSA augmente, la procédure du backstepping devient plus compliquée et ainsi l'implémentation d'un tel concept de commande dans la pratique devient irréalisable. D'autre part, et en exploitant les équations d'Hamilton et d'Euler-Lagrange, deux méthodes PBC distinctes ont été développées pour les SMSA : IDA-PBC [Ort02], [Ort04] et le Lagrangien contrôlé [Blo01].

Les deux méthodes comportent deux étapes : (i) reformuler le Hamiltonian/Lagrangian en une forme désirée avec des états d'équilibre adéquat en utilisant les entrées de commande et ainsi (ii) injecter l'amortissement dans le système pour assurer la passivité du système.

La différence principale, entre ces deux méthodes, réside dans le fait que le Lagrangien désiré dans la méthode du Lagrangien contrôlé est obtenu uniquement via la modification de la matrice d'inertie généralisée et la fonction de l'énergie potentielle [Ort02].

A noter que l'inconvénient majeur de la PBC est la limitation de son domaine d'application pratique à la robotique et à l'aéronautique [Yan13].

1.8.2. La commande optimale

Par définition, l'objectif de la commande optimale est de trouver une loi de commande $u(t)$ qui minimise (ou maximise) une fonction dite du coût :

$$J = \int f(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), u(t)) dt \quad (1.69)$$

Les problèmes de la commande optimale peuvent être traités sous deux différentes optiques : énergie-optimale où temps-optimal. Pour la commande de l'énergie optimale, l'idée repose sur le fait d'optimiser la consommation de l'énergie du système (exemple: [Tla11] et [Yan11]). Par ailleurs, la majorité des approches, dédiées à la commande en un temps optimal, sont basées sur les méthodes de la géométrie différentielle ; que ce soit pour la classe des systèmes rigides non-holonomes [Bul01], [Hus08] ou pour des applications spécifiques [Mas08] , [Pao11].

1.8.3. La commande par les Modes glissants CMG : (Sliding mode control)

L'incertitude demeure un challenge pour la commande des SMSA. Pour la conception de toute commande il faut avoir à l'esprit qu'il existe un écart entre le système et ces modèles théoriques à cause des dynamiques non modélisées, des incertitudes sur les paramètres et des perturbations externes. L'adaptabilité et la robustesse des lois de commandes à ces facteurs endogènes et exogènes constituent pour longtemps un défi et un objectif de recherche dans le domaine de l'automatique. La commande robuste et la commande adaptative [Åst95] sont deux techniques principales pour la compensation des incertitudes ce qui assure au système de rester insensible à ces incertitudes. Ces deux méthodes de commande ont été introduites pour la régulation des SMSA incertains. Largement appliquée, la commande robuste se réserve une grande part des travaux de recherche dédiée aux SMSA [Yan13].

Selon la nature de ces structures, la commande robuste est uniquement adéquate pour surmonter le problème des incertitudes de faibles valeurs [Slo84], tandis que la commande adaptative est appropriée pour une large variation des paramètres, mais reste sensible aux incertitudes non structurées.

Pour surmonter ces limitations, la commande par les modes glissants (CMG) a été introduite et il est à noter que cette méthode a reçu une attention particulière de la part de la communauté des automaticiens ces dernières années. Ceci provient du fait que la CMG est par essence insensible à la variation des paramètres et aux perturbations externes. En particulier, on trouve la commande par mode de glissement(CMG) dans [Hun93],[Edw98], [You99], [Krs95].

L'étude bibliographique montre que la CMG a connu un grand succès dans les applications de la commande : des satellites sous-actionné [Ash05], surface vessel [McN11], de l'hélicoptère [Hec10], du pendule inverse mobile (wheeled inverted pendulum) [Hua10], du système ball-and beam [Alm10], du système sous-action fuel cell [Dif09], du système TORA [Avi10], du robot biped [Nik07] et de l'overhead crane

[Alm09]. Par ailleurs, plusieurs chercheurs ont dédié leurs travaux pour la conception d'une CMG universelle pour les SMSA ayants la même dynamique (exemple: [Mar08], [Wan04], [Qia07], [Ner10]).

Particulièrement, plusieurs travaux ont favorisé la commande découplée par les modes glissants. Plus en détails, cette technique prend en considération un groupe de surface de glissement pour lequel ses éléments sont cascades du premier jusqu'au deuxième niveau afin de découpler les systèmes considérés [Lin05] et [Wan04].

Comme exemple, Lo et .al [Lo95] ont présenté un contrôleur découplé en mode de glissement appliqué aux SMSA du second ordre, qui assure la convergence du système. Cependant, l'analyse de la stabilité n'était pas détaillée et seules quelques remarques ont été présentées. Une autre approche a été introduite par Wang et .al [Wan04], où une analyse de la stabilité a été présentée en considérant la bornitude des fonctions non linéaires et des variables relatives aux surfaces du premier niveau. Or, il a été montré que le contrôleur proposé ne peut pas résoudre le problème de la stabilité asymptotique de cette classe de SMSA.

Mon et Lin [Lin05] ont présenté un contrôleur en CMG hiérarchisé n'assurant que la stabilité de la surface de glissement du second niveau où le signal de la commande globale ne comporte qu'une des surfaces du premier niveau, ce qui peut conduire à une perte de robustesse de la CMG face aux perturbations.

1.8.4. La commande adaptative par la logique floue

Une panoplie de travaux de recherches a introduit la logique floue (LF) pour la commande des SMSA. Vu la diversité des objectifs, la LF a été utilisée pour la stabilisation autour d'un point de fonctionnement [Tao08], [Wai08], la poursuite [Cai03] et en combinaison avec d'autres techniques de commande [Hwa09], [Kun09].

Pour améliorer la robustesse des SMSA, certains auteurs ont opté pour l'application des stratégies adaptatives à base de la logique floue et des réseaux de neurones. Ainsi, la commande découplée adaptative floue par les modes de glissement (CDAFMG) est exploitée dans plusieurs travaux de recherche ([Lin07], [Kir95], [Wai08] et [Yi05]).

A titre d'exemple, la CDAFMG est proposée dans [Lin05] prend en compte la définition d'une surface de glissement de second niveau incluant l'une des surfaces du premier niveau et la variation du signe de la deuxième surface. De même, dans [Wai08], la CDAFMG hiérarchique proposée tient compte de la synthèse d'un facteur de couplage optimal à base d'un système flou.

1.9. Problématique et objectifs

1.9.1. Introduction

La commande des SMA représente un vrai défi à cause de leur dynamique fortement non linéaire et de la dimension réduite des entrées (nombre d'entrée moins que le nombre des sorties). En général, les méthodes de commande sont conçues pour la régulation d'un système ou bien pour réduire la dimension de son modèle. Cependant, ces méthodes ne présentent pas les mêmes performances et les mêmes avantages. En général, la question relative à la stabilité des lois de commandes développées pour les SMA, est traitée restrictivement de plus, elle n'est pas toujours rigoureusement étudiée ce qui rend hasardeux leur application dans le cas des systèmes réels (par exemple : [Lin05], [Wai08], [Yi05])

De plus, et vu la dynamiques des SMSA, les paramètres de la CMG ne peuvent pas être obtenus directement selon Hurwitz à cause de la non existence d'une relation différentielle entre les sous-systèmes du SMSA [Slo91]. Il est à noter qu'il existe encore de nombreuses questions ouvertes pour ce problème aussi bien au niveau théorique que sur des aspects pratiques.

1.9.2. Formulation du Problème

Nous considérons une classe (Classe I ou Classe II) de SMSA à deux ou à trois *ddl* ayant une seule entrée de commande.

Tout au long de ce travail, et dans le but d'assurer les développements qui vont suivre, les hypothèses suivantes sont supposées satisfaites pour les SMSA à deux où à trois *ddl* :

- i) Les états \underline{x} sont mesurables ;
- ii) Pour garantir la contrôlabilité du système, les gains de commande $b_i(\underline{x})$ sont non nuls sur le domaine de fonctionnement ($b_i(\underline{x}) \neq 0, i = 1, 2, 3$).

Le SMSA à deux *ddl* ayant pour entrée u (commande) et comme vecteur d'état \underline{x} , peut être décrit par la dynamique en forme différentielle suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_1(\underline{x}) + b_1(\underline{x})u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= f_2(\underline{x}) + b_2(\underline{x})u(t)\end{aligned}\tag{1.70}$$

où: $\underline{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ est le vecteur d'état; $f_1(\underline{x})$, $f_2(\underline{x})$, $b_1(\underline{x})$ et $b_2(\underline{x})$ sont des fonctions non linéaires continues, partiellement ou totalement inconnues.

Il est évident que le système (1.70) peut être vu comme étant constitué par deux sous-systèmes dans la forme canonique du seconde-ordre incluant les variables d'état (x_1, x_2) et (x_3, x_4) (Fig 1.9). Ainsi deux surfaces de glissement du premier niveau peuvent être définies par:

$$S_1 = \dot{x}_1 + \lambda_1 \tilde{x}_1 = x_2 + \lambda_1 \tilde{x}_1 \quad (1.71)$$

$$S_2 = \dot{x}_3 + \lambda_2 \tilde{x}_3 = x_4 + \lambda_2 \tilde{x}_3 \quad (1.72)$$

où $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ sont des erreurs de réglage telles que: $\tilde{x}_1 = x_1 - x_{1d}$ et $\tilde{x}_3 = x_3 - x_{3d}$. Les grandeurs (x_{1d}, x_{3d}) et $(\dot{x}_{1d}, \dot{x}_{3d})$ désignent respectivement les références désirées et leurs dérivées qui sont supposées bornées. De plus, λ_1 et λ_2 sont des constantes positives représentant la pente de glissement de chaque surface.

L'objectif est d'assurer la stabilité du système (1.70) et de forcer les sorties x_1 et x_3 à se stabiliser aux références constantes x_{1d} et x_{3d} . En dérivant (1.71) et (1.72) par rapport au temps, on obtient:

$$\dot{S}_1 = f_1 + b_1 u + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) \quad (1.73)$$

$$\dot{S}_2 = f_2 + b_2 u + \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d}) \quad (1.74)$$

Si pour ce cas, la dynamique du système est supposée parfaitement connue et ce dernier ne subit aucune perturbation externe, les commandes équivalentes relatives pour chaque sous-système et qui correspondent à: $\dot{S}_1 = 0$ et $\dot{S}_2 = 0$ sont alors données par:

$$u_{eq_1} = -b_1^{-1} (f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d})) \quad (1.75)$$

$$u_{eq_2} = -b_2^{-1} (f_2 + \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d})) \quad (1.76)$$

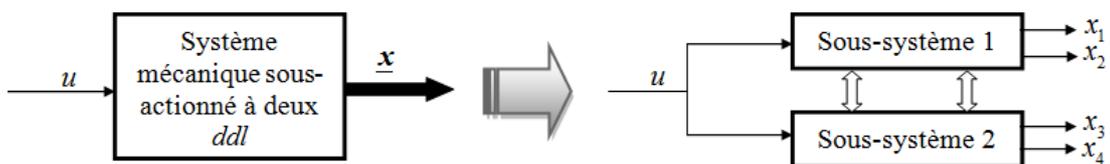


Fig 1.9 L'entrée de commande agissant sur tout le système, agit en fait sur les deux sous-systèmes

Ainsi, en respectant le principe de synthèse de la commande par les modes de glissement, les commandes possibles pour ces deux sous-systèmes sont données par :

$$u_1 = -K_1 b_1^{-1} \operatorname{sgn}(S_1) + u_{eq_1} \quad (1.77)$$

$$u_2 = -K_2 b_2^{-1} \operatorname{sgn}(S_2) + u_{eq_2} \quad (1.78)$$

Où: K_1 et K_2 sont des coefficients strictement positifs et $\operatorname{sgn}(\cdot)$ représente la fonction signe.

Pour garantir un glissement idéal, indépendamment de la condition initiale, les surfaces doivent vérifier les inégalités suivantes [Slo91]:

$$\begin{aligned} S_1 \dot{S}_1 &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S_1^2 \leq -\eta_1 |S_1| \\ S_2 \dot{S}_2 &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S_2^2 \leq -\eta_2 |S_2| \end{aligned} \quad (1.79)$$

où η_1 et η_2 sont des constantes strictement positives.

En choisissant K_1 et K_2 dans (1.77) et (1.78) suffisamment élevés pour que l'état du système puisse atteindre la surface de glissement et maintenir le mouvement de glissement, ce qui signifie que (1.79) est vérifiée [Slo91]; i.e.: K_1 et K_2 peuvent être imposés tels que :

$$\begin{aligned} K_1 &= \eta_1 + \varepsilon_{\max} \\ K_2 &= \eta_2 + \varepsilon_{\max} \end{aligned} \quad (1.80)$$

Où : ε_{\max} représente le maximum des incertitudes et des erreurs de modélisation.

Cependant, il est évident que les lois de commandes (1.77) et (1.78) ne permettent pas d'atteindre l'objectif global de commande vu que chacune d'elles n'est synthétisée que pour stabiliser uniquement et exclusivement le sous-système associé.

L'exemple, d'une application des lois de commande (1.77) et (1.78) au cas d'un pendule inversé sur chariot (Fig. 1.10 et Fig.1.11), montre clairement que la stabilité de chaque état du sous-système associé est assurée séparément mais la stabilité globale (simultanée des deux états) n'est pas satisfaite.

De même, cette problématique est reconduite pour un modèle d'ordre supérieurs, notamment à trois *ddl* dont la dynamique en forme différentielle est donnée par:

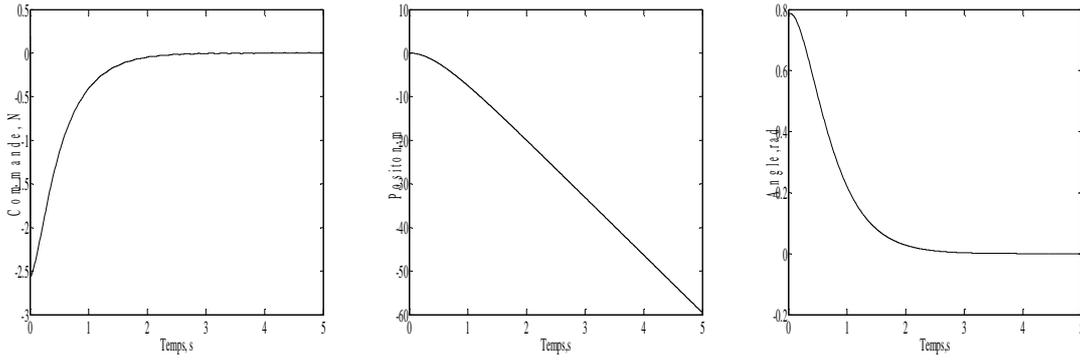


Fig 1.10 Exemple de simulation de commande d'un pendule inversé sur chariot en utilisant la commande (1.77) pour les valeurs désirées: $(x_{1d}, x_{3d}) = (0, 5m)$ avec les paramètres de commande: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$, $K_1 = 15$. En fait, l'angle du pendule converge vers la valeur désirée tandis que la position diverge largement de l'objectif.

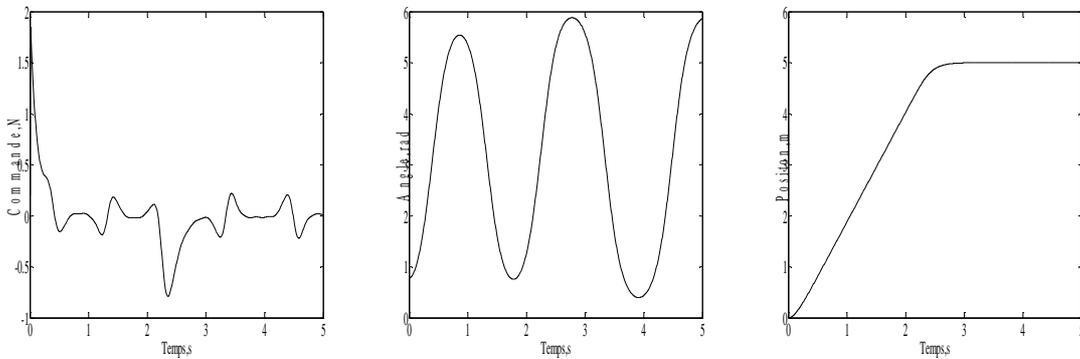


Fig 1.11 Exemple de simulation de commande d'un pendule inversé sur chariot en utilisant la commande (1.78) pour les valeurs désirées: $(x_{1d}, x_{3d}) = (0, 5m)$ avec les paramètres de commande: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$, $K_2 = 10$. La position converge vers sa valeur désirée vu que le système est sous l'effet de la commande stabilisante du sous-système représentant la position du chariot.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_1(\underline{x}) + b_1(\underline{x})u(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= f_2(\underline{x}) + b_2(\underline{x})u(t) \\
 \dot{x}_5(t) &= x_6(t) \\
 \dot{x}_6(t) &= f_3(\underline{x}) + b_3(\underline{x})u(t)
 \end{aligned} \tag{1.81}$$

où: $\underline{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t))$ représente le vecteur d'état, $u(t)$ est le signal de commande, $f_1(\underline{x})$, $f_2(\underline{x})$, $f_3(\underline{x})$, $b_1(\underline{x})$, $b_2(\underline{x})$ et $b_3(\underline{x})$ sont des fonctions non linéaires continues, partiellement ou totalement inconnues.

Le système (1.81) peut être considéré comme étant composé de trois sous-systèmes de forme canonique du second ordre qui incluent les états (x_1, x_2) , (x_3, x_4) et (x_5, x_6) , et qui

sont soumis au même signal de commande u (Fig 1.12). L'objectif de la commande est de garantir la stabilité du système (1.81) et d'assurer une poursuite d'un signal de référence par les sorties du système (x_1, x_2, x_3) .

Bien qu'en synthétisant des lois de commandes qui assurent la convergence et la stabilité de chaque sous-système, l'objectif de garantir la convergence globale de tout le système n'est pas satisfaite : le couplage entre la commande et les différents sous-systèmes rend cet objectif difficile à établir. En effet, en considérant la dynamique (1.81), nous pouvons définir trois surfaces de glissement relatives aux trois sous-systèmes comme suit :

$$S_1 = \dot{x}_1 + \lambda_1 \tilde{x}_1 = x_2 + \lambda_1 \tilde{x}_1 \quad (1.82)$$

$$S_2 = \dot{x}_3 + \lambda_2 \tilde{x}_3 = x_4 + \lambda_2 \tilde{x}_3 \quad (1.83)$$

$$S_3 = \dot{x}_5 + \lambda_3 \tilde{x}_5 = x_6 + \lambda_3 \tilde{x}_5 \quad (1.84)$$

Où: $\tilde{x}_i = x_i - x_{id}$ (x_{id} sont des valeurs désirées variables avec le temps, bornées et de dérivées bornées, $i=1, 3, 5$) et λ_1, λ_2 et λ_3 des paramètres constants positifs représentant la pente de glissement de chaque surface.

En dérivant (1.82) à (1.84) par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{S}_1 = f_1 + b_1 u + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) \quad (1.85)$$

$$\dot{S}_2 = f_2 + b_2 u + \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d}) \quad (1.86)$$

$$\dot{S}_3 = f_3 + b_3 u + \lambda_3 (x_6 - \dot{x}_{5d}) \quad (1.87)$$

Comme on s'intéresse au problème de stabilisation, donc : $\dot{x}_{1d} = 0$, $\dot{x}_{2d} = 0$ et $\dot{x}_{3d} = 0$ (valeurs désirées constante), d'où :

$$\dot{S}_1 = f_1 + b_1 u + \lambda_1 x_2 \quad (1.88)$$

$$\dot{S}_2 = f_2 + b_2 u + \lambda_2 x_4 \quad (1.89)$$

$$\dot{S}_3 = f_3 + b_3 u + \lambda_3 x_6 \quad (1.90)$$

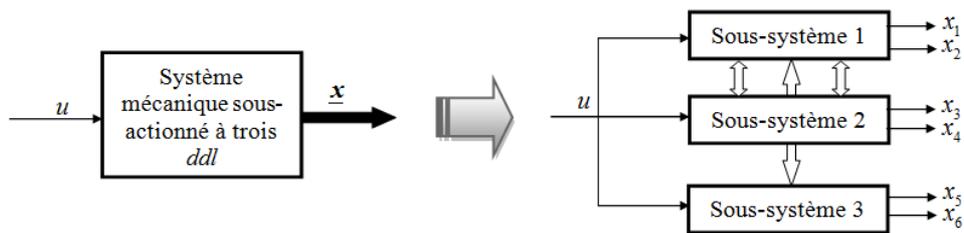


Fig 1.12 La commande agissante sur tout le système, agit en fait sur les trois sous-systèmes

Dans le cas où la dynamique du système est parfaitement connue, les commandes équivalentes relatives aux trois sous-systèmes s'obtiennent dans la condition où on a : $\dot{S}_1 = \dot{S}_2 = \dot{S}_3 = 0$ et ainsi, $u = u_{eq_1}$, $u = u_{eq_2}$ et $u = u_{eq_3}$ avec:

$$u_{eq_1} = -b_1^{-1} (f_1 + \lambda_1 x_2) \quad (1.91)$$

$$u_{eq_2} = -b_2^{-1} (f_2 + \lambda_2 x_4) \quad (1.92)$$

$$u_{eq_3} = -b_3^{-1} (f_3 + \lambda_3 x_6) \quad (1.93)$$

Selon la stratégie de commande par les MG, un contrôleur en MG peut être défini pour chaque sous-système comme suit:

$$u_1 = -K_1 b_1^{-1} \text{sgn}(S_1) + u_{eq_1} \quad (1.94)$$

$$u_2 = -K_2 b_2^{-1} \text{sgn}(S_2) + u_{eq_2} \quad (1.95)$$

$$u_3 = -K_3 b_3^{-1} \text{sgn}(S_3) + u_{eq_3} \quad (1.96)$$

Et donc le glissement idéal est assurer indépendamment de la condition initiale et de plus on a [Slo91] :

$$\begin{aligned} S_1 \dot{S}_1 &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S_1^2 \leq -\eta_1 |S_1| \\ S_2 \dot{S}_2 &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S_2^2 \leq -\eta_2 |S_2| \\ S_3 \dot{S}_3 &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S_3^2 \leq -\eta_3 |S_3| \end{aligned} \quad (1.97)$$

avec η_1, η_2 et η_3 sont des constantes strictement positives.

Il est à noter que les coefficients de commande positifs K_1 , K_2 et K_3 doivent être suffisamment élevés pour imposer un régime glissant. Ainsi, la relation (1.97) est vérifiée en imposant:

$$\begin{aligned} K_1 &= \eta_1 + \varepsilon_{\max} \\ K_2 &= \eta_2 + \varepsilon_{\max} \\ K_3 &= \eta_3 + \varepsilon_{\max} \end{aligned} \quad (1.98)$$

où ε_{\max} représente le maximum des incertitudes et des erreurs de modélisation.

Bien que les lois de commandes (1.94), (1.95) et (1.96) assurent la convergence et la stabilité de chaque sous-système, l'objectif d'une convergence globale de tout le système n'est pas garanti.

Face à ce constat, il serait judicieux que la loi de commande globale puisse inclure une partie de la loi de commande de chaque sous-système ou qu'une nouvelle formulation puisse être définie incluant une combinaison de chacune des paires: (x_1, x_2) et (x_3, x_4) pour les systèmes à deux *ddl* et (x_1, x_2) , (x_3, x_4) et (x_5, x_6) pour les systèmes à trois *ddl*.

Pour réaliser un découplage adéquat, nous allons considérer dans le chapitre suivant plusieurs approches de synthèse de commande découplée par monde glissement.

1.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé principalement les concepts de base utilisés pour la modélisation des systèmes mécanique sous-actionnés. Des définitions ont été établies pour décrire de tels systèmes sous-actionnés et non-holonomes par un modèle généralisé régit par l'équation d'Euler-Lagrange ainsi que par des équations différentielles du second ordre. Les notions de non-holonomie et de sous-actionnement ont été aussi présentées.

Nous avons cité plusieurs exemples de systèmes sous-actionnés dont ils feront part d'exemples d'applications des stratégies de commandes adoptées dans les chapitres suivants.

Après une brève analyse d'une liste non exhaustive des travaux relatifs aux commandes des SMSA cités dans la littérature, nous avons posé le problème relatif à la classe des SMSA sujet de notre travail.

Les chapitres, qui vont suivre, seront consacrés au développement de différentes lois de commande pour les deux catégories de SMSA: à deux et trois *ddl*.

Commande découplée par mode de Glissement

Dans ce chapitre et dans le but de synthétiser des commandes stabilisantes pour les SMSA, nous développons en premier lieu différentes lois de commande fondées sur la technique des modes glissants (CMG).

Principalement, il s'agit d'exploiter la forme différentielle simplifiée des SMSA pour développer des commandes stabilisantes en boucle fermée adaptées à la dynamique nonlinéaire des modèles à deux et à trois degrés de liberté (ddl). Le développement de ces lois de commande est complété par une analyse spécifique de la stabilité laquelle est élaborée sur la base du critère de stabilité de Lyapunov.

Tout au long de ce chapitre, la performance de ces différentes lois de commande, est évaluée par simulation en considérant des exemples typiques.

2.1. Introduction

Durant cette dernière décennie, la théorie de la commande robuste a été appliquée aux systèmes sous-actionnés du fait que ces systèmes manifestent un certain niveau d'incertitude. De plus, la commande par les modes glissants a été largement utilisée pour une large classe de systèmes non linéaires pour sa robustesse et sa simplicité de mise en œuvre ([Utk77],[Slo84]). La commande par les modes glissants (CMG), en raison de sa robustesse vis-à-vis des incertitudes et des perturbations externes, peut être appliquée aux systèmes non linéaires incertains et perturbés [Slo91], [Utk77].

La CMG permet de contraindre l'état du système à atteindre en un temps fini une surface donnée (définie dans l'espace d'état) pour ensuite y rester. L'évolution des états

d'un système soumis à une loi de commande qui maintient ces états sur une surface donnée ne dépend plus du tout du système lui même ou des perturbations auxquelles il peut être soumis, mais uniquement des propriétés de cette surface [Bre10].

En fait, il s'agit de définir une surface dite de glissement en fonction des états du système de façon qu'elle soit attractive et qui permet d'extraire une loi de commande robuste via le critère de stabilité au sens de Lyapunov [Slo84].

Une condition nécessaire pour l'établissement d'un régime glissant est que la variable de glissement ait un degré relatif égal à 1 par rapport à la commande (le degré relatif d'un système est le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie par rapport au temps pour faire apparaître l'entrée de manière explicite) [Utk92],[Isi95].

La commande globale synthétisée se compose de deux termes: le premier permet de ramener l'état du système jusqu'à cette surface et le second permet de maintenir l'état sur cette surface et de le faire glisser le long de celle-ci vers l'origine du plan de phase. La commande globale ainsi construite permet d'assurer en plus des bonnes performances de poursuite et de robustesse, une dynamique rapide et un temps de réponse court [Utk92].

Comme déjà vu dans le chapitre précédent, pour les SMSA qui sont constitués de plusieurs sous-systèmes où les variables d'état ne dispose d'aucune interaction entre elles que via le signal de commande ; les paramètres de la surface de glissement ne peuvent pas être obtenus directement selon la condition d'Hurwitz [Slot91], [Utk92]. De ce fait, les recherches se sont données comme objectif de trouver la stratégie la plus adéquate pour étendre l'application de la CMG aux SMSA et pouvoir assurer la stabilisation globale du système.

Dans la littérature, on trouve plusieurs versions de cette technique adaptées selon les modèles à commander. Principalement, on rencontre deux procédures différentes pour prendre en charge le problème du choix de la surface de glissement et de la synthèse de la commande [Hun93], [Edw98], [You99] et [Krs95]. La première consiste en une construction des surfaces de glissement à deux niveaux suivie d'une synthèse de la commande globale à partir de l'analyse de la stabilité de tout le système. La seconde fait appel à une variable dite de découplage, celle-ci doit permettre une certaine interaction entre les différents sous-systèmes.

Dans ce chapitre, nous allons développer pour une classe des SMSA un ensemble de lois de commande découplées par les modes glissants (CDMG) relatives à différentes stratégies.

Tout au long de ce chapitre et les chapitres qui suivent, nous allons considérer une classe de SMSA à une entrée et plusieurs sorties à deux et trois *ddl* dont la dynamique est donnée par les expressions analytiques différentielles données par (1.70) et (1.81).

2.2. Commande découplée par les modes de glissement des SMSA à 2 *ddl*

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une classe de SMSA à deux *ddl* donné par la dynamique (1.60) peut être vu comme étant constitué par deux sous-systèmes dans la forme canonique du seconde-ordre incluant les variables d'état (x_1, x_2) et (x_3, x_4) . Pour ces deux sous-système, on a défini deux surfaces de glissement du premier niveau données par (1.71) et (1.72).

De plus, il a été mentionné que les commandes par les modes glissants relatives pour chaque sous-système correspondant à S_1 et S_2 , et données respectivement par (1.77) et (1.78), ne permettent pas d'atteindre l'objectif global de commande vu que chacune d'elles n'est conçue que pour réguler uniquement et exclusivement le sous-système associé.

Il s'avère important que la commande globale puisse inclure simultanément les informations des deux sous-systèmes. Cette importante question fait l'objet, dans ce qui suit, du développement de deux approches de synthèse de la commande basées sur la CMG.

2.2.1. Approche 1. [Naf13] et [Naf11c]

Soit la loi de commande par les modes de glissement suivante:

$$u = u_{eq_1} - b_1^{-1} (K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \beta(S_1 - S_2)) \quad (2.1)$$

Où K , Q et β sont des paramètres de synthèse strictement positifs et $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe standard.

En remplaçant la commande (2.1) par sa valeur dans l'équation (1.73) relative à \dot{S}_1 on obtient :

$$\dot{S}_1 = -K \operatorname{sgn}(S_1) - QS_1 - \beta(S_1 - S_2) \quad (2.2)$$

Pour rendre la surface de glissement attractive et garantir un mouvement de glissement idéal, indépendamment de la condition initiale, le coefficient K doit vérifier la condition suivante :

$$K > \max(|\beta(S_1 - S_2)|) \quad (2.3)$$

Effectivement, soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} S_1^2 \quad (2.4)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\dot{V} = \dot{S}_1 S_1 \quad (2.5)$$

En remplaçant \dot{S}_1 par (2.2) dans l'expression (2.5), celle-ci devient :

$$\dot{V} = -K S_1 \operatorname{sgn}(S_1) - Q S_1^2 - \beta(S_1 - S_2) \quad (2.6)$$

En imposant le coefficient K tel que $K = \eta + \max(|\beta(S_1 - S_2)|)$ aussi, \dot{V} peut être borné tel que :

$$\dot{V} \leq -\eta |S_1| \quad (2.7)$$

Par conséquent, on aura $S_1 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Selon Fillipov, le mouvement du système sur la surface de glissement peut être interprété géométriquement comme une « moyenne » de la dynamique du système sur les deux cotés de la surface [Slo91]. Donc, la dynamique sur la surface de glissement peut être décrite telle que: $\dot{S}_1 \approx 0$. De plus, quand $S_1 \rightarrow 0$, on aura $\operatorname{sgn}(S_1) \approx S_1$, et ainsi (2.2) devient: $\dot{S}_1 \approx -(K + Q + \beta)S_1 + \beta S_2$, ou encore dans le domaine de Laplace (p variable de Laplace), on peut écrire:

$$S_1(p) = \frac{\beta}{(K + Q + \beta) + p} S_2(p) \quad (2.8)$$

Lemme 1. Pour toutes fonctions continues et dérivables ϕ et g ; si la relation suivante est vérifiée:

$$\dot{\phi} = -\gamma(\phi - g), \text{ avec } \gamma \gg 1 \quad (2.9)$$

Alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = g \quad (2.10)$$

Preuve. Dans le domaine de Laplace, la relation (2.9) peut être réécrite sous la forme:

$$\phi(p) = \frac{\gamma}{p + \gamma} g(p) = \frac{1}{1 + (1/\gamma)p} g(p) \quad (2.11)$$

Si $\gamma \gg 1$, $1/\gamma \rightarrow 0$ et alors $\phi(p) \approx g(p)$. Par conséquent, dans le domaine temporel, on a : $\phi(t) \approx g(t)$. C'est-à-dire, pour $\gamma \gg 1$ et une fonction $g(t)$ continue, dérivable et bornée, on a : $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = g$.

Puisque dans (2.13), la fonction de transfert $\beta / (p + (K + Q + \beta))$ est stable de plus en imposant $(K + Q + \beta) \gg 1$ et en utilisant le Lemme 1, on peut déduire que $S_2 \rightarrow 0$ puisque $S_1 \rightarrow 0$.

Théorème 2.1 [Naf13] *Soit la classe des systèmes mécaniques sous-actionnés à deux degrés de liberté de la forme (1.70) à laquelle sont associées les surfaces de glissement (1.71) et (1.72); sous la condition (2.3), la loi de commande par les modes de glissement (2.1) stabilise asymptotiquement le système à l'origine.*

2.2.2. Approche 2. [Naf10]

En mettant en œuvre à nouveau les caractéristiques des SMSA, nous allons développer une autre approche de commande par les modes glissants.

En exploitant les relations (1.73) et (1.74), puis (1.75) et (1.76), les dynamiques des surfaces S_1 et S_2 peuvent être réécrites sous la forme:

$$\dot{S}_1 = b_1 (u - u_{eq_1}) \quad (2.12)$$

$$\dot{S}_2 = b_2 (u - u_{eq_2}) \quad (2.13)$$

De la relation (2.13) on tire :

$$u = b_2^{-1} \dot{S}_2 + u_{eq_2} \quad (2.14)$$

En remplaçant la commande u dans (2.12) par (2.14), nous obtenons :

$$\dot{S}_1 = B_{21} \dot{S}_2 + \Delta_{21} \quad (2.15)$$

avec :

$$B_{21} = b_2^{-1} b_1 \text{ et } \Delta_{21} = b_1 (u_{eq_2} - u_{eq_1}) \quad (2.16)$$

Si on impose les constantes positives K_1 et K_2 , telles que :

$$\Delta_{21} = B_{21} (K_1 S_2 + K_2 \operatorname{sgn}(S_2)) \quad (2.17)$$

Alors, en utilisant (2.17), la relation (2.15) peut être réécrite comme suit:

$$\dot{S}_1 = B_{21} (\dot{S}_2 + K_1 S_2 + K_2 \operatorname{sgn}(S_2)) \quad (2.18)$$

Si l'égalité (2.17) est satisfaite et la loi de commande garantit la convergence : $(S_1, \dot{S}_1) \rightarrow (0, 0)$, par conséquent l'équation (2.18) se ramène à :

$$\dot{S}_2 = -K_1 S_2 - K_2 \operatorname{sgn}(S_2) \quad (2.19)$$

D'après la théorie de stabilité de Lyapunov, l'équation (2.19) permet de déduire que S_2 converge vers zéro ($S_2 \rightarrow 0$) en un temps fini.

Pour réaliser ce qui précède, nous considérons en premier lieu une nouvelle variable x_c qui va jouer le rôle de variable de découplage et en particulier elle va être définie comme étant la valeur désirée de x_2 afin de satisfaire la condition (2.17).

Donc, si la condition (2.17) est vérifiée, on peut alors écrire :

$$b_1 (u_{eq_2} - u_{eq_1}) = \frac{b_1}{b_2} (K_1 S_2 + K_2 \operatorname{sgn}(S_2)) \quad (2.20)$$

En remplaçant u_{eq_1} par son expression (1.75) où le terme \dot{x}_{1d} est pris nul ($\dot{x}_{1d} = 0$) du fait que le problème posé est un problème de stabilisation en un point; il vient :

$$b_1 \left(u_{eq_2} + \frac{f_1 + \lambda_1 x_2}{b_1} \right) = \frac{b_1}{b_2} (K_1 S_2 + K_2 \operatorname{sgn}(S_2)) \quad (2.21)$$

La résolution de l'équation (2.21) par rapport à x_2 permet de tirer la valeur désirée x_{2d} , notée x_c , comme suit :

$$x_{2d} = x_c = \frac{\left(\frac{b_1}{b_2} (K_1 S_2 + K_2 \operatorname{sgn}(S_2)) - b_1 u_{eq_2} - f_1 \right)}{\lambda_1} \quad (2.22)$$

Aussi, on propose de modifier la surface de glissement S_1 définie en (1.71) telle que :

$$S_{1c} = (x_2 - x_c) + \lambda_1 \tilde{x}_1 = S_1 - x_c \quad (2.23)$$

D'après (2.23), la dérivée temporelle de S_{1c} conduit à :

$$\dot{S}_{1c} = \dot{S}_1 - \dot{x}_c = b_1(u - u_{eq_1}) - \dot{x}_c \quad (2.24)$$

En exploitant l'expression (2.15) de \dot{S}_1 , (2.24) prend la forme :

$$\dot{S}_{1c} = \frac{b_1}{b_2} \dot{S}_2 + \Delta_{21} - \dot{x}_c \quad (2.25)$$

Etant donné que: $\dot{S}_{1c} = \dot{S}_1 - \dot{x}_c = b_1(u - u_{eq_1}) - \dot{x}_c$, la nouvelle expression de la commande équivalente relative à la surface de glissement S_{1c} est alors donnée par :

$$u_{eq} = u_{eq_1} + \frac{\dot{x}_c}{b_1} \quad (2.26)$$

Pour obtenir le signal de commande total, on utilise la théorie de stabilité de Lyapunov en se basant sur la forme standard d'une commande par les modes glissants telle que :

$$u = u_s + u_{eq} \quad (2.27)$$

Où u_s et u_{eq} représentent respectivement la partie à structure variable de la commande et la partie commande équivalente donnée par (2.26).

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_c = \frac{1}{2} S_{1c}^2 \quad (2.28)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par:

$$\dot{V}_c = S_{1c} \dot{S}_{1c} \quad (2.29)$$

En remplaçant \dot{S}_{1c} par son expression (2.24), alors (2.29) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= S_{1c} \left[b_1(u - u_{eq_1}) - \dot{x}_c \right] \\ &= S_{1c} \left[b_1(u_s + u_{eq} - u_{eq_1}) - \dot{x}_c \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

En remplaçant u_{eq} par l'expression (2.26), dans la relation (2.30) celle-ci se réduit à :

$$\dot{V}_c = S_{1c} b_1 u_s \quad (2.31)$$

On impose u_s telle que :

$$u_s = -b_1^{-1} (Q_1 \operatorname{sgn}(S_{1c}) + Q_2 S_{1c}) \quad (2.32)$$

Où Q_1 et Q_2 sont des coefficients strictement positifs.

Alors, (2.31) donne :

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= S_{1c}(-Q_1 \operatorname{sgn}(S_{1c}) - Q_2 S_{1c}) \\ &\leq -Q_1 |S_{1c}|\end{aligned}\quad (2.33)$$

La relation (2.33), permet d'assurer un glissement idéal à partir de n'importe quelle condition initiale dès que le vecteur d'état atteint la surface de glissement [Slo91].

Selon la théorie de Lyapunov, la surface S_{1c} est stable et converge asymptotiquement vers zéro. De plus, elle tend vers zéro en un temps fini t_1 donné par: $t_1 \leq |S_{1c}(t=0)|/Q_1$.

Alors, la dynamique du système en mode de glissement peut être écrite telle que $\dot{S}_{1c}(t) \approx 0$ ou encore : $\dot{S}_{1c} = \dot{S}_1 - \dot{x}_c \approx 0$.

En substituant \dot{S}_1 par son expression (2.15) dans la relation précédente, la dynamique de S_{1c} est alors exprimée par :

$$\frac{b_1}{b_2} \dot{S}_2 + \Delta_{21} - \dot{x}_c = 0 \quad (2.34)$$

De même à partir de (2.23) on a:

$$S_{1c} = 0 \Rightarrow x_c = x_2 + \lambda_1 \tilde{x}_1 \quad (2.35)$$

Par ailleurs, en utilisant (2.22) à la place de x_c dans la relation (2.35), on obtient :

$$x_2 + \lambda_1 \tilde{x}_1 = \frac{\left(\frac{b_1}{b_2} [K_1 S_2 + K_2 \operatorname{sgn}(S_2)] - b_1 u_{eq_2} - f_1 \right)}{\lambda_1} \quad (2.36)$$

D'où on en déduit:

$$\Delta_{21} = b_1 (u_{eq_2} - u_{eq_1}) = \frac{b_1}{b_2} (K_1 S_2 + K_2 \operatorname{sgn}(S_2)) - \lambda_1^2 \tilde{x}_1 \quad (2.37)$$

En exploitant l'égalité (2.36), la relation (2.37) permet de tirer l'équation suivante :

$$\frac{b_1}{b_2} \dot{S}_2 + \frac{b_1}{b_2} (K_1 S_2 + K_2 \operatorname{sgn}(S_2)) - \lambda_1^2 \tilde{x}_1 - \dot{x}_c = 0 \quad (2.38)$$

A partir de laquelle, on détermine l'expression finale de la dynamique de la surface S_2 :

$$\dot{S}_2 = - (K_1 S_2 + K_2 \operatorname{sgn}(S_2)) + \frac{b_2}{b_1} (\lambda_1^2 \tilde{x}_1 + \dot{x}_c) \quad (2.39)$$

Dans ce qui suit, nous allons démontrer la convergence de la surface S_2 . Ainsi, soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2 = \frac{1}{2} S_2^2 \quad (2.40)$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V}_2 = S_2 \dot{S}_2 \quad (2.41)$$

En substituant \dot{S}_2 par (2.39) dans l'expression de \dot{V}_2 , celle-ci devient :

$$\dot{V}_2 = -K_1 S_2^2 - K_2 S_2 \operatorname{sgn}(S_2) + \frac{b_2}{b_1} (\lambda_1^2 \tilde{x}_1 + \dot{x}_c) S_2 \quad (2.42)$$

Soit :

$$K_2 = \eta_2 + \bar{C} \quad \text{avec: } \bar{C} = \sup_{t \geq 0} \left| \frac{b_2}{b_1} (\lambda_1^2 \tilde{x}_1 + \dot{x}_c) \right|, \eta_2 > 0 \quad (2.43)$$

Par conséquent, \dot{V}_2 peut être bornée tel que:

$$\dot{V}_2 \leq -K_1 S_2^2 - \eta_2 |S_2| < 0 \quad (2.44)$$

Selon la théorie de stabilité, la surface de glissement S_2 est stable, i.e. : $V_2 \in L_\infty$ et $S_2 \in L_\infty$. Pour une telle condition, Fillipov a montré que le mouvement de la surface de glissement peut s'interpréter comme étant une moyenne de la dynamique du système de part et d'autre de la surface [Slo91]. Cette dynamique peut s'écrire telle que $\dot{S}_2 \approx 0$. De plus, cette surface de glissement S_2 tend vers zéro en un temps fini t_2 donné par: $t_2 \leq |S_2(t=0)|/\eta_2$. Finalement, et puisque S_2 tend vers zéro en un temps fini et $\dot{S}_2 \approx 0$, il est facile de conclure à partir de (2.39) que:

$$\dot{x}_c \rightarrow -\lambda_1^2 \tilde{x}_1, t > t_2 \quad (2.45)$$

Or (2.35) permet de déduire que: $x_c - x_2 = \lambda_1 \tilde{x}_1$ et ainsi (2.45) conduit à:

$$\dot{x}_c \rightarrow -\lambda_1 (x_c - x_2) \quad (2.46)$$

Pour $\lambda_1 \gg 1$, l'équation (2.46) permet de conclure que: $x_c \rightarrow x_2$ et ainsi (2.35) donne:

$$\tilde{x}_1 \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Finalement, à partir de l'analyse ci-dessus, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.2 [Naf10] *Soit une classe des systèmes mécaniques sous-actionnés à deux degrés de liberté de la forme (1.70) à laquelle sont jointes les surfaces de glissement (1.71), (1.72) et (2.23); si de plus la condition (2.43) est satisfaite, alors la loi de commande par les modes de glissement (2.27) stabilise le système à l'origine.*

2.2.3. Exemples d'application

Afin d'évaluer les performances de la commande proposée, nous appliquons celle-ci à deux catégories de SMSA à deux *ddl* : celle ayant des points d'équilibre stables et celle à points d'équilibre instables.

2.2.3.1. Bille roulante sur poutre (Beam and Ball system)

Nous rappelons que la dynamique du mouvement de ce système (Fig 2.1) est représentée par l'équation (1.62), (§chapitre 1) [Bar97]. Ce système ne dispose que d'un seul point d'équilibre stable représenté par: $\alpha = 0$ et $r = 0$.

Nous allons tester par simulation le fonctionnement de ce système sous l'effet de la commande synthétisée selon l'approche 1. Le système bille roulante sur poutre mis à l'essai est caractérisé par les paramètres suivants: $B = 0.7143$, $m = 0.05\text{kg}$; $J_b = 2 \times 10^{-6}$, $R = 0.01\text{m}$ et $g = 9.8\text{m/s}^2$. L'objectif de la commande est de maintenir ce système à la position d'équilibre stable correspondant au point: $\alpha = 0$ et $r = 0$. Les essais sont effectués en partant de deux états initiaux suivants: $EI_1 (\alpha_0 = \pi/4 \text{ et } r_0 = 10\text{m})$ et $EI_2 (\alpha_0 = \pi/3 \text{ et } r_0 = 10\text{m})$.

Pour vérifier la robustesse de la loi de commande, nous introduisons, en plus d'un bruit aléatoire donné par : $d = \text{rand}(t)$, une variation structurelle aléatoire de 100% relative à la masse de la bille telle que: $\Delta m = 0.05\text{rand}(t)$.

Après plusieurs simulations, nous avons obtenu les résultats représentés à la figure 2.2. Les gains de réglage correspondants sont données tels que: $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 1$, $\beta = 1$, $K_s = 4$ et $Q_s = 2$.

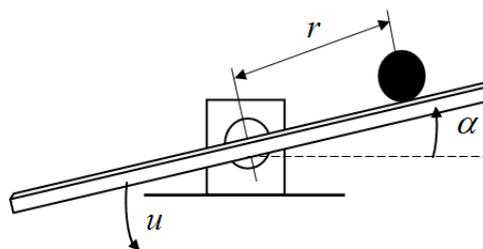


Fig 2.1 Le système bille roulante et poutre

Cette figure montre clairement que les deux états du système (Fig.2.2a et Fig.2.2b) convergent vers leurs objectifs désirés ($\alpha_d = 0$ et $r_d = 0$) pratiquement en 10s et d'une manière oscillatoire amortie où dès la 2^{ème} période d'oscillation le système atteint sa position statique. Ceci est vérifié pour les conditions initiales EI_1 et EI_2 .

Concernant les commandes (Fig.2.2c), celles-ci présentent chacune une pointe à environ $t=1s$ dépassant la valeur initiale et qui augmente en valeur absolue avec l'accroissement de r_0 . Cependant, ces commandes restent réalisables.

De par leur définition, les surfaces S_1 et S_2 suivent effectivement l'évolution des états $\alpha(t)$ et $r(t)$ pour les conditions EI_1 et EI_2 puisque on a : $\alpha(t) = 0$ et $r(t) = 0$.

Du fait que les variables d'état du système convergent vers leurs valeurs désirées en présence des de l'ensemble des perturbations considérées donc on peut dire que ces grandeurs demeurent insensibles aux variations causées par ces perturbations. En fait, ceci confirme la robustesse du réglage par la commande par l'approche 1.

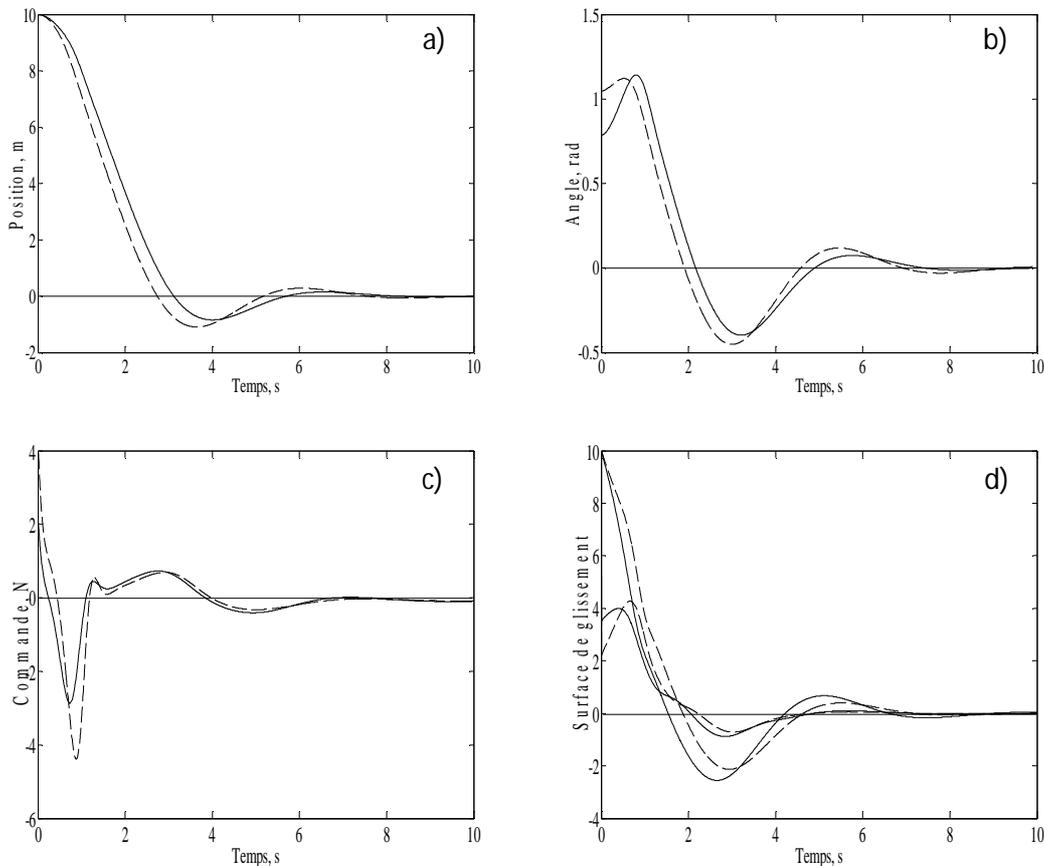


Fig 2.2 Commande découplée par les modes glissants d'une bille roulante sur poutre, EI_1 (--) et EI_2 (-.-) : a) Position de la bille r , b) Angle de la poutre α , c) commande appliquée au système u , d) Surfaces de glissements S_1 et S_2 .

Il est important de noter que ce système appartient à la classe particulière des systèmes ayant un des gains nul, ce qui ne permet pas d'obtenir les relations (2.18) et (2.22) et ainsi la deuxième méthode ne peut être appliquée.

2.2.3.2. Le pendule (inversé) sur chariot

Le pendule inversé est un système classique très intéressant et vu sa nature non linéaire et instable, il est souvent utilisé comme banc d'essai pour les commandes (Fig 2.3) [Mon02].

Il est composé d'un chariot pouvant se déplacer en translation le long d'un rail de guidage et, d'un pendule massif solidaire du chariot et pouvant tourner autour d'un axe horizontal. Ce système admet une infinité de points d'équilibre caractérisés par: $\dot{x} = \dot{\alpha} = 0$ et $\alpha = \{0, \pi\}$ modulo 2π et ceci quelque soit la position x du chariot.

Les points d'équilibre, relatifs à la position $\alpha = 0$ modulo 2π (la position verticale haute du pendule), sont instables; ceux correspondant à $\alpha = \pi$ modulo 2π (la position verticale basse du pendule), sont stables.

Pour valider les performances des lois de commande adoptées, nous avons effectué une série de simulations du comportement du pendule inverse sur chariot lorsque l'actionneur est piloté par ces lois de commandes.

Les paramètres caractérisant la dynamique du système sous essais ainsi que les coefficients apparaissant dans la commande sont donnés au Tab 2.1.

L'objectif recherché est de maintenir le système en équilibre stable à la position correspondant à: $x = \alpha = \dot{x} = \dot{\alpha} = 0$. Les essais sont effectués en démarrant des conditions initiales EI_1 ($\alpha_0 = -\pi/2$ et $x_0 = 0m$) et EI_2 ($\alpha_0 = -\pi/3$ et $x_0 = 0m$).

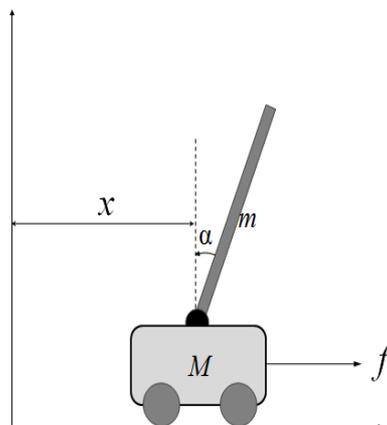


Fig 2.3 Le pendule inversé en coordonnées généralisées x et α

Tab 2.1 Les paramètres du pendule inversé sur chariot et du contrôleur CDMG

Paramètres du système	Paramètres du contrôleur
$m_p = 0.05 ; m_c = 1 ; L = 0.5 ;$ $g = 9.8 ; m_t = m_p + m_c$	$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, K_2 = 1, Q_2 = 1, K_s = 5,$ $Q_s = 20$

Lors du calcul des lois de commande et pour éviter les commutations à haute fréquence et de grandes amplitudes, la fonction discontinue signe a été remplacée par la fonction lisse arc-tangente.

L'évaluation de la robustesse des commandes, présentées dans l'approche 1 et 2, est effectuée en considérant une variation structurelle aléatoire de 50% sur la masse du pendule: $\Delta m_c = 0.5 \text{rand}(t)$, et en présence d'un bruit externe aléatoire donné par : $d = \text{rand}(t)$.

L'analyse des résultats des simulations représentés aux Figures 2.4 et 2.5, révèle que les états du système (angle α du pendule et position x du chariot) convergent vers leurs valeurs désirées (Fig 2.4 a, Fig 2.4b, Fig 2.5a et Fig 2.5b) approximativement dans un même temps de réponse de 4s pour les deux stratégies de commande.

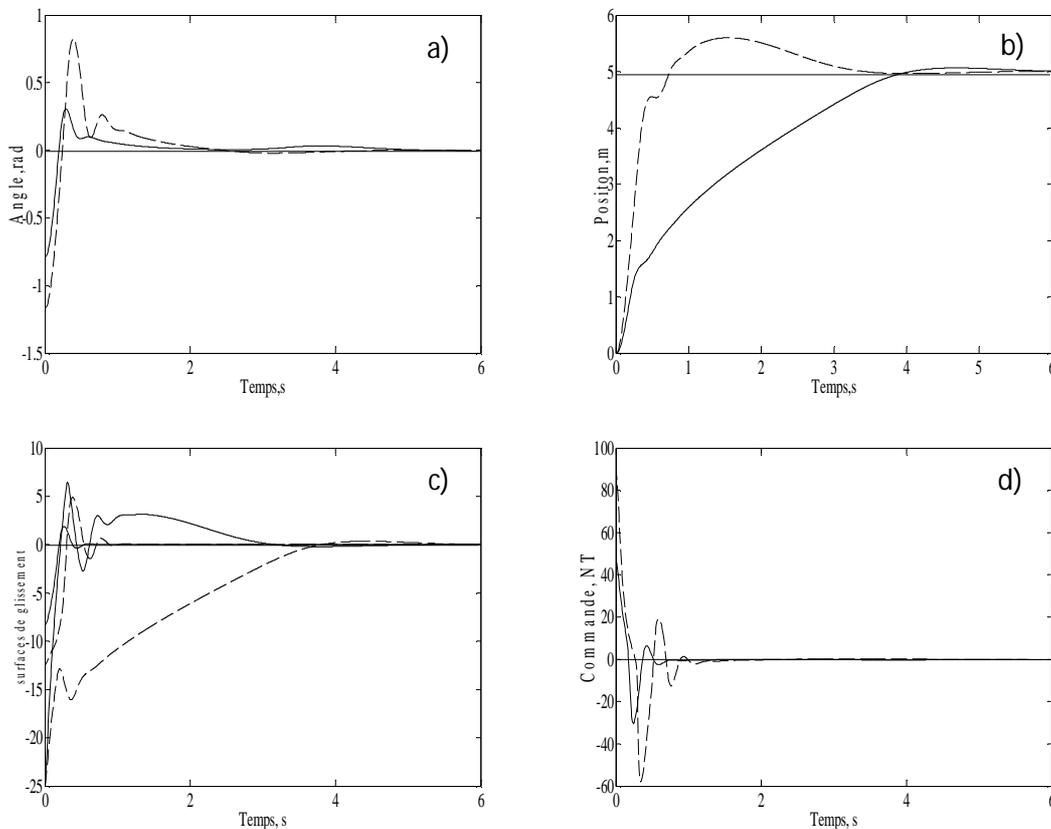


Fig 2.4 Commande découplée par les modes glissants du pendule inversé sur chariot; S_1 (- -) et S_2 (—), 1^{ière} approche: a) Position du chariot x ; b) Angle du pendule inversé α ; c) Surfaces de glissements S_1 et S_2 ; d) Signal de commande.

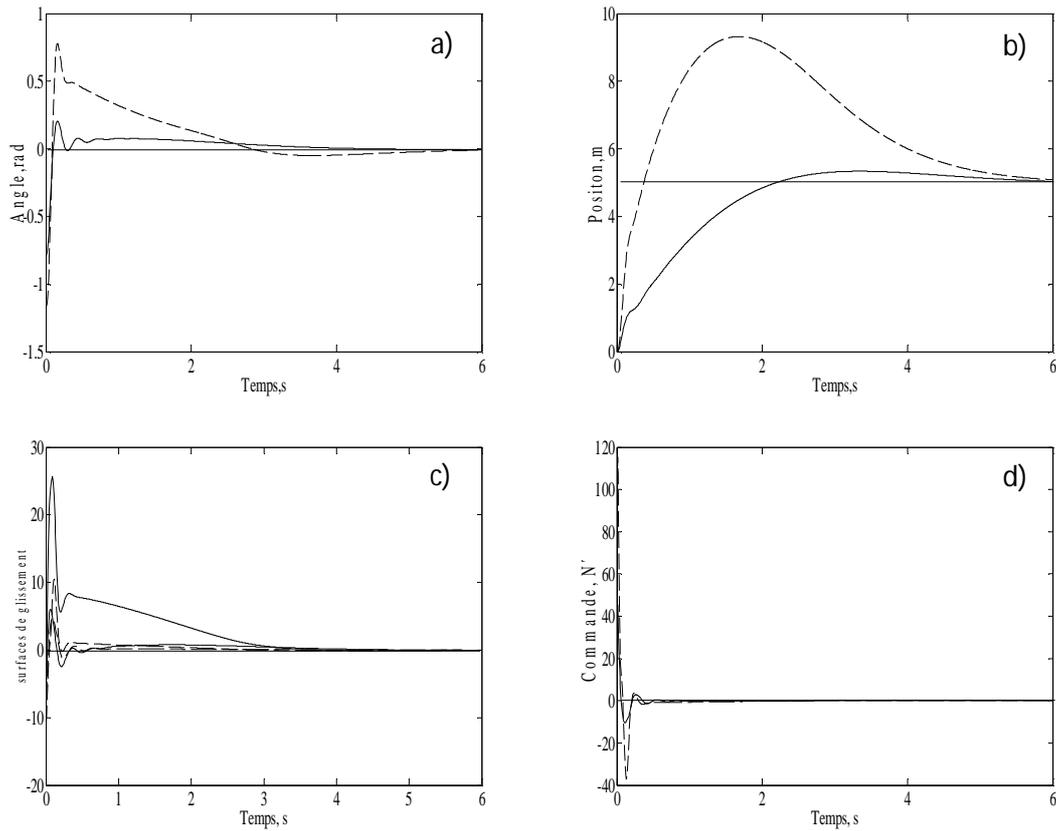


Fig 2.5 Commande découplée par les modes glissants du pendule inversé sur chariot; S_1 (-) et S_2 (\rightarrow) 2^{ème} approche: a) La position du chariot x , b) l'angle du pendule inversé α , c) surfaces de glissements du premier niveau, d) Signal de commande.

De plus, les deux stratégies de commandes présentent pratiquement un même temps de réponse de 4s. Ces réponses sont oscillatoires, elles tendent vers le régime statique en deux périodes d'oscillation pour α et en une seule période d'oscillation pour x . Les pics des oscillations sont plus prononcés pour les conditions initiales EI_2 que EI_1 .

En effet, on relève un pic maximal de 9.4m dans le cas de la 2^{ème} procédure pour les conditions initiales EI_2 alors que la valeur statique est 5m. Les signaux relatifs aux deux lois de commande apparaissent aux figures 2.4 d et 2.5 d. Ces commandes sont oscillatoires amorties présentant des pics plus importants dans les conditions EI_2 que EI_1 .

Ces pointes apparaissent aux instants d'inversement du pendule vu que la condition initiale adoptée sur l'angle de la tige est proche de $-\pi/2$ ce qui nécessite une action importante de la part du chariot pour permettre le basculement initial du pendule.

La 2^{ème} loi de commande présente des oscillations moins fortes (un régime quasi-asymptotique) à l'exception d'une valeur initiale plus importante que dans le cas de la 1^{ère} commande.

De plus, les deux commandes (par l'approche 1 et 2) présentent une bonne robustesse car les perturbations aux quelles le système est soumis n'ont pas affecté la convergence des états du système.

2.3. Commande découplée par mode de glissement des SMSA à 3 ddl

Dans cette section, nous procédons à la synthèse d'une commande découplée par les modes de glissement pour un SMSA à trois ddl ayant une seule entrée de commande et trois variables de sortie.

Nous avons vu au chapitre précédent qu'un SMSA à trois ddl modélisé par (1.71) peut être représenté par trois sous-systèmes de forme canonique du second ordre qui incluent les états (x_1, x_2) , (x_3, x_4) et (x_5, x_6) aussi, nous avons pu définir trois surfaces de glissement, notamment (1.82), (1.83) et (1.84), relatives à ces trois sous-systèmes respectivement.

Par ailleurs, la synthèse des lois de commande par les modes glissants (1.94), (1.95) et (1.96) exclusive pour chaque sous-système ne garantissent pas l'objectif d'une convergence globale de tout le système. Pour réaliser un découplage adéquat, nous considérons une nouvelle approche pour la synthèse d'une CMG découplée relative à cette classe de systèmes.

Dans ce qui suit, nous allons détailler la synthèse de la loi de commande en utilisant deux approches différentes.

2.3.1. Approche 1 [Naf11b]

Dans cette approche, nous allons synthétiser une loi de commande découplée par mode de glissement en utilisant lemme 1. Le théorème suivant résume le signal de commande conçu.

Théorème 2.3 *Soit une classe des systèmes mécaniques sous-actionnés à trois degrés de liberté donné par (1.81) et soient les surface de glissement (1.82), (1.83) et (1.84) ; pour toute fonction bornée $\phi(t)$, la loi de commande donnée par:*

$$u = -b_1^{-1} \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + (f_1 + \lambda_1 x_2) + \alpha \left(S_1 - \left(-\mu(\phi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta (S_3 - S_2) \right) \right) \right] \quad (2.47)$$

Où η , ρ , α , β et K sont des constantes positives telles que:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \max \left| \left(-\mu(\varphi_M - S_3) + \beta(S_3 - S_2) \right) \right| + Q \\
 Q &> \max \left[\beta(S_3 - S_2) \right] \\
 \dot{\varphi} &= -\mu(\varphi - S_3) \\
 \varphi_M &= \max |\varphi| \\
 K &= \eta + \rho
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

permet la stabilisation et la convergence vers zéro des surfaces de glissement S_1 , S_2 et S_3 .

Preuve. En remplaçant (2.47) dans (1.85) on obtient :

$$\dot{S}_1 = -\alpha \left\{ S_1 - \left[-\mu(\varphi - S_3) + \beta(S_3 - S_1) + \text{sgn}(S_3) \right] \right\} - K \text{sgn}(S_1) \tag{2.49}$$

Soit la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V = \frac{1}{2} S_1^2 \tag{2.50}$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par:

$$\dot{V} = S_1 \dot{S}_1 \tag{2.51}$$

En substituant \dot{S}_1 par (2.48) dans l'expression de \dot{V} , celle-ci devient :

$$\dot{V} = -\alpha S_1 \left[S_1 - \left(\mu(\varphi - S_3) - \beta(S_3 - S_2) + Q \text{sgn}(S_3) \right) \right] - K S_1 \text{sgn}(S_1) \tag{2.52}$$

Sous la condition de la première équation de (2.48), nous pouvons réécrire (2.52) telle que:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -\alpha |S_1| \left[\left(S_1 + \left(\mu(\varphi - S_3) - \beta(S_3 - S_2) - Q \text{sgn}(S_3) \right) \right) \right] - (\eta + \rho) |S_1| \\
 &\leq -\alpha |S_1| (S_1 - \rho) - (\eta + \rho) |S_1| \\
 &\leq -\eta |S_1| < 0
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Ce qui permet de conclure que $S_1(t)$ est stable et tend vers zéro asymptotiquement en un temps fini t_1 donné par: $t_1 \leq |S_1(t=0)|/\eta$. Ainsi, et une fois les modes de glissement sont établis, la dynamique du système se réduit à $\dot{S}_1(t) \approx 0$.

Par ailleurs, en moyenne, on a $\text{sgn}(S_1) \rightarrow S_1$ quand $t \rightarrow \infty$ et donc (2.49) prend la forme:

$$\dot{S}_1 = -(K + \alpha) \left\{ S_1 - \alpha \frac{[-\mu(\varphi - S_3) + \beta(S_3 - S_2) + Q \operatorname{sgn}(S_3)]}{(K + \alpha)} \right\} \quad (2.54)$$

En utilisant le Lemme 1, nous pouvons déduire que:

$$S_1 \rightarrow \alpha \frac{-\mu(\varphi - S_3) + \beta(S_3 - S_2) + Q \operatorname{sgn}(S_3)}{(K + \alpha)}, \text{ pour } K + \alpha \gg 1 \quad (2.55)$$

Puisque nous avons déjà montré que $S_1 \approx 0$ quand $t \rightarrow \infty$, alors (2.55) donne :

$$-\mu(\varphi - S_3) \approx -\beta(S_3 - S_2) - Q \operatorname{sgn}(S_3) \quad (2.56)$$

La substitution de la troisième équation de (2.48) dans (2.54) permet d'obtenir:

$$\dot{\phi} \approx -\beta(S_3 - S_2) - Q \operatorname{sgn}(S_3) \quad (2.57)$$

En exploitant le Lemme 1 et pour $\mu \gg 1$, la 3^{ème} équation de (2.48) permet de déduire que $\phi \rightarrow S_3$ donc $\dot{\phi} \rightarrow \dot{S}_3$ et par conséquent (2.57) peut être réécrite sous la forme :

$$\dot{S}_3 = -\beta(S_3 - S_2) - Q \operatorname{sgn}(S_3) \quad (2.58)$$

Pour montrer la convergence de la surface S_3 , on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$W = \frac{1}{2} S_3^2 \quad (2.59)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\dot{W} = S_3 \dot{S}_3 \quad (2.60)$$

En utilisant (2.58), (2.60) devient :

$$\dot{W} = -S_3 Q \operatorname{sgn}(S_3) - \beta S_3 (S_3 - S_2) \quad (2.61)$$

En imposant $Q = \eta' + \max[\beta(S_3 - S_2)]$ et $\eta' > 0$, \dot{W} peut être bornée tel que :

$$\dot{W} \leq \eta' |S_3| < 0 \quad (2.62)$$

Cela implique que : $W(t) \leq W(0)$, et par conséquent, S_3 est bornée, i.e. $S_3 \in L_\infty$.

Ainsi, ceci nous garantit que la surface S_3 tend vers zéro en un temps fini t' donné par $t' \leq |S_3(t=0)|/\eta'$ et la dynamique de la surface de glissement devient: $\dot{S}_3 \approx 0$ et $S_3(t) \approx 0$. Alors, quand $t \rightarrow \infty$, (2.58) donne :

$$\dot{S}_3 \approx -\beta(S_3 - S_2) - Q \operatorname{sgn}(S_3) \approx 0 \quad (2.63)$$

Comme en moyenne le terme $\operatorname{sgn}(S_3) \rightarrow S_3$ quand $t \rightarrow \infty$, donc (2.63) se réduit à:

$$\dot{S}_3 \approx -(\beta + Q)(S_3 - \beta S_2 / (\beta + Q)) \quad (2.64)$$

En utilisant le Lemme 1, (2.61) permet de conclure que: $S_3 \rightarrow S_2$ pour $\beta + Q \gg 1$, et ainsi nous aurons à la fin de la démonstration $S_2 \approx 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Le schéma global de la commande selon l'approche 1 est illustré dans la figure 2.6.

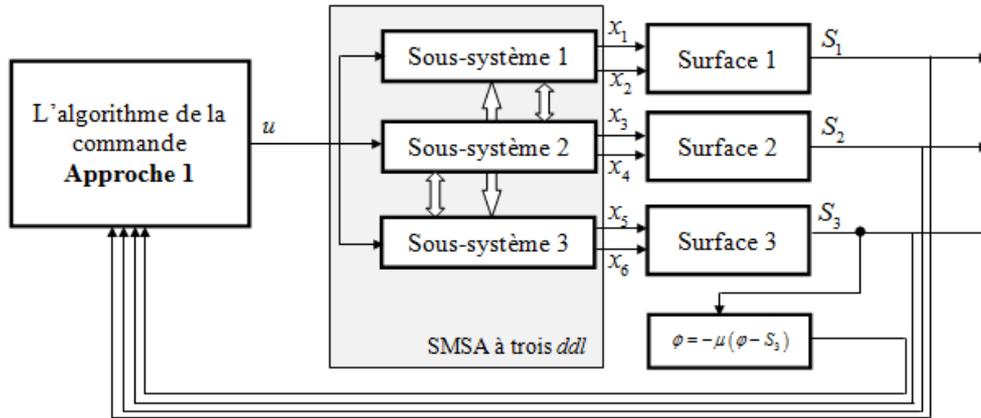


Fig 2.6 Le schéma global de l'algorithme de commande SMSA à trois ddl, approche 1

2.3.2. Approche 2

Les propriétés mathématiques des SMSA permettent de procéder via une autre approche pour extraire une loi de commande découplée par mode de glissement. En rappelant les relations (1.91), (1.92) et (1.93), nous pouvons écrire:

$$f_1 + \lambda_1 x_2 = -b_1 u_{eq_1} \quad (2.65)$$

$$f_2 + \lambda_2 x_4 = -b_2 u_{eq_2} \quad (2.66)$$

$$f_3 + \lambda_3 x_6 = -b_3 u_{eq_3} \quad (2.67)$$

En exploitant (2.65), (2.66) et (2.67), les dynamiques (1.88-90) deviennent :

$$\dot{S}_1 = b_1 (u - u_{eq_1}) \quad (2.68)$$

$$\dot{S}_2 = b_2 (u - u_{eq_2}) \quad (2.69)$$

$$\dot{S}_3 = b_3 (u - u_{eq_3}) \quad (2.70)$$

d'où :

$$u = b_1^{-1} \dot{S}_1 + u_{eq_1} \quad (2.71)$$

$$u = b_2^{-1} \dot{S}_2 + u_{eq_2} \quad (2.72)$$

$$u = b_3^{-1} \dot{S}_3 + u_{eq_3} \quad (2.73)$$

Pour exprimer \dot{S}_1 en fonction de \dot{S}_2 , nous utilisons (2.71) et (2.72), et ainsi nous obtiendrons:

$b_1^{-1} \dot{S}_1 = b_2^{-1} \dot{S}_2 + u_{eq_2} - u_{eq_1}$, d'où:

$$\dot{S}_1 = b_1 b_2^{-1} \dot{S}_2 + b_1 (u_{eq_2} - u_{eq_1}) \quad (2.74)$$

En posant $B_{12} = b_1 b_2^{-1}$ et $\Delta_{12} = b_1 (u_{eq_2} - u_{eq_1})$, donc (2.74) devient :

$$\dot{S}_1 = B_{12} \dot{S}_2 + \Delta_{12} \quad (2.75)$$

De même, pour écrire \dot{S}_1 en fonction de \dot{S}_3 , nous utilisons (2.71) et (2.73) ce qui conduit à :

$$\dot{S}_1 = b_1 b_3^{-1} \dot{S}_3 + b_1 (u_{eq_3} - u_{eq_1}) \quad (2.76)$$

Soit : $B_{13} = b_1 b_3^{-1}$ et $\Delta_{13} = b_1 (u_{eq_3} - u_{eq_1})$, d'où :

$$\dot{S}_1 = B_{13} \dot{S}_3 + \Delta_{13} \quad (2.77)$$

Enfin, \dot{S}_2 en fonction de \dot{S}_3 est obtenue, à partir (2.69) et (2.70), comme suit :

$$\dot{S}_2 = B_{23} \dot{S}_3 + \Delta_{23} \quad (2.78)$$

Avec $B_{23} = b_2 b_3^{-1}$ et $\Delta_{23} = b_2 (u_{eq_3} - u_{eq_2})$

D'après (2.68), (2.75) et (2.77), la dynamique de \dot{S}_1 peut donc s'exprimer sous les trois formes suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= b_1 (u - u_{eq_1}) \\ \dot{S}_1 &= B_{12} \dot{S}_2 + \Delta_{12} \\ \dot{S}_1 &= B_{13} \dot{S}_3 + \Delta_{13} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Nous allons établir une procédure de convergence incrémentale et cela revient à définir un ensemble de surfaces de glissement qui engendre la convergence vers zéro dans le cas où l'une des surfaces converge.

Ainsi, nous définissons la 1^{ière} nouvelle surface de glissement telle que :

$$S_{1c} = (x_2 - x_{1c}) + \lambda_1 \tilde{x}_1 = S_1 - x_{1c} \quad (2.80)$$

Donc : $\dot{S}_{1c} = \dot{S}_1 - \dot{x}_{1c}$, ou encore:

$$\dot{S}_{1c} = b_1 (u - u_{eq_1}) - \dot{x}_{1c} \quad (2.81)$$

La commande équivalente $u = u_{eq_c}$ est obtenue dans le cas où $\dot{S}_{1c} = 0$ d'où :

$$0 = b_1 (u - u_{eq_1}) - \dot{x}_{1c} \rightarrow u_{eq_c} = b_1^{-1} \dot{x}_{1c} + u_{eq_1} \quad (2.82)$$

La commande u par les modes glissants est telle que:

$$u = u_s + u_{eq_c} \quad (2.83)$$

Remarque 2.1 La stratégie de synthèse exige que la commande globale (2.83) contienne toutes les informations sur les états du système : fonction nonlinéaires et gains de commande. Pour cela nous définissons la variable x_{1c} assurant cette propriété.

Ainsi, en utilisant (2.80) et en substituant u dans (2.81), on obtient l'expression de \dot{S}_{1c} telle que: $\dot{S}_{1c} = b_1 (u_s + u_{eq_c} - u_{eq_1}) - \dot{x}_{1c}$. Puis dans cette dernière relation nous remplaçons u_{eq_c} par son expression (2.82), nous obtiendrons alors la forme suivante de

\dot{S}_{1c} : $\dot{S}_{1c} = b_1 (u_s + b_1^{-1} \dot{x}_{1c} + u_{eq_1} - u_{eq_1}) - \dot{x}_{1c}$, ou encore:

$$\dot{S}_{1c} = b_1 u_s \quad (2.84)$$

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} (S_{1c})^2 \quad (2.85)$$

En utilisant (2.84), la dérivée temporelle de (2.85) est alors exprimée par :

$$\dot{V}_1 = S_{1c} b_1 u_s \quad (2.86)$$

Un choix possible de u_s est tel que:

$$u_s = -b_1^{-1} (Q_{11} \operatorname{sgn}(S_{1c}) + Q_{12} S_{1c}) \quad (2.87)$$

Où Q_{11} et Q_{12} sont des paramètres strictement positifs. Ainsi, en exploitant (2.87), \dot{V}_1 devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -Q_{11} \operatorname{sgn}|S_{1c}| - Q_{12} S_{1c}^2 \\ &\leq -Q_{12} S_{1c}^2 \end{aligned} \quad (2.88)$$

Une fois le vecteur d'état atteint la surface de glissement, la relation (2.88), permet d'assurer un glissement idéal indépendamment de la condition initiale [Slo91]. Ceci conduit à une convergence de S_{1c} vers 0 en un temps fini et assure une moyenne de la dynamique nulle $\dot{S}_{1c} \approx 0$. Donc, nous pouvons écrire :

$$S_{1c} \rightarrow 0 \Rightarrow S_1 = x_{1c} \text{ avec } : S_1 = x_2 + \lambda_1 \tilde{x}_1 \quad (2.89)$$

Soit:

$$x_{1c} = \frac{(C_1 - b_1 u_{eq_2} - f_1)}{\lambda_1} \quad (2.90)$$

avec :

$$C_1 = B_{12} (K_{12} S_{2c} + K_{11} \operatorname{sgn}(S_{2c})) \quad (2.91)$$

Nous définissons une nouvelle surface de glissement S_{2c} donnée par :

$$S_{2c} = S_2 - x_{2c} \quad (2.92)$$

Où x_{2c} est une variable qui sera définie ultérieurement.

En remplaçant (2.90) dans (2.89), on obtient :

$$x_2 + \lambda_1 \tilde{x}_1 = \frac{C_1 - b_1 u_{eq_2} - f_1}{\lambda_1} \rightarrow f_1 + \lambda_1 x_2 + b_1 u_{eq_2} = C_1 - \lambda_1^2 \tilde{x}_1 \quad (2.93)$$

Du fait que $f_1 + \lambda_1 x_2 = -b_1 u_{eq_1}$ aussi, la relation ci-dessous prend la forme :

$$b_1 (u_{eq_2} - u_{eq_1}) = C_1 - \lambda_1^2 \tilde{x}_1, \text{ ou encore :}$$

$$\Delta_{12} = C_1 - \lambda_1^2 \tilde{x}_1 \quad (2.94)$$

D'autre part, comme $\dot{S}_{1c} = 0$, on a alors $\dot{S}_1 = \dot{x}_{1c}$ ainsi, (2.75) permet d'écrire:
 $B_{12}\dot{S}_2 + \Delta_{12} - \dot{x}_{1c} = 0$, ou encore : $B_{12}\dot{S}_2 + \Delta_{12} - \dot{S}_1 = 0$ et donc:

$$\Delta_{12} = \dot{S}_1 - B_{12}\dot{S}_2 \quad (2.95)$$

En utilisant (2.94) et (2.95), on en déduit que: $C_1 - \lambda_1^2 \tilde{x}_1 = \dot{S}_1 - B_{12}\dot{S}_2$, d'où :

$$\dot{S}_2 = -B_{12}^{-1}C_1 + B_{12}^{-1}(\dot{S}_1 + \lambda_1^2 \tilde{x}_1) \quad (2.96)$$

Sachant que: $\dot{S}_{2c} = \dot{S}_2 - \dot{x}_{2c}$, la dérivée temporelle de la nouvelle surface de glissement S_{2c} est alors donnée par:

$$\dot{S}_{2c} = -B_{12}^{-1}C_1 + B_{12}^{-1}(\dot{S}_1 + \lambda_1^2 \tilde{x}_1) - \dot{x}_{2c} \quad (2.97)$$

Dans le but de démontrer la convergence de la surface S_{2c} , nous définissons la fonction de Lyapunov candidate suivante:

$$V_2 = \frac{1}{2} S_{2c}^2 \quad (2.98)$$

En dérivant (2.98) par rapport au temps on obtient :

$$\dot{V}_2 = S_{2c} \dot{S}_{2c} \quad (2.99)$$

En utilisant (2.97), \dot{V}_2 est alors exprimé par :

$$\dot{V}_2 = -B_{12}^{-1}C_1 S_{2c} + \left[B_{12}^{-1}(\dot{S}_1 + \lambda_1^2 \tilde{x}_1) - \dot{x}_{2c} \right] S_{2c} \quad (2.100)$$

En remplaçant C_1 par sa valeur (2.91) dans l'expression ci-dessous de \dot{V}_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -B_{12}^{-1} \left[B_{12} (K_{12} S_{2c} + K_{11} \operatorname{sgn}(S_{2c})) \right] S_{2c} + \left[B_{12}^{-1}(\dot{S}_1 + \lambda_1^2 \tilde{x}_1) - \dot{x}_{2c} \right] S_{2c} \\ &\leq -K_{11} |S_{2c}| - K_{12} S_{2c}^2 + \left[B_{12}^{-1}(\dot{S}_1 + \lambda_1^2 \tilde{x}_1) - \dot{x}_{2c} \right] S_{2c} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Si on impose K_{11} tel que :

$$K_{11} \geq \sup_{t \geq 0} \left| B_{12}^{-1}(\lambda_1^2 \tilde{x}_1 + \dot{x}_{1c}) - \dot{x}_{2c} \right| \quad (2.102)$$

Alors \dot{V}_2 vérifie la condition :

$$\dot{V}_2 \leq -K_{12} S_{2c}^2 \quad (2.103)$$

Il est clair que (2.103) permet de conclure que la surface de glissement S_{2c} est stable au sens de Lyapunov et converge vers zéro avec une dynamique vérifiant $\dot{S}_{2c} \approx 0$. D'autre part, comme $S_{2c} = 0$, par conséquent de (2.91) nous déduisons que $C_1 = 0$. De plus, la relation (2.97) de \dot{S}_{2c} conduit à :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{S}_{2c} = 0 \\ C_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{x}_{2c} = \dot{S}_2 = B_{12}^{-1} (\lambda_1^2 \tilde{x}_1 + \dot{x}_{1c}) \quad (2.104)$$

et (2.93) devient :

$$\Delta_{12} = -\lambda_1^2 \tilde{x}_1 \quad (2.105)$$

Or, il est clair qu'ayant $S_{2c} = 0$, (2.92) donne : $x_{2c} = S_2 = x_4 + \lambda_2 \tilde{x}_3$. Si on impose :

$$x_{2c} = \frac{C_2 - b_2 u_{eq_3} - f_2}{\lambda_2} \quad (2.106)$$

et :

$$C_2 = B_{32} (K_{31} S_3 + K_{32} \text{sgn}(S_3)) \quad (2.107)$$

Donc, on a : $x_4 + \lambda_2 \tilde{x}_3 = \frac{C_2 - b_2 u_{eq_3} - f_2}{\lambda_2}$, et par la suite en utilisant (2.66), on obtient :

$$C_2 - \lambda_2^2 \tilde{x}_3 = b_2 (u_{eq_3} - u_{eq_2}) \text{ et ainsi :}$$

$$\Delta_{23} = C_2 - \lambda_2^2 \tilde{x}_3 \quad (2.108)$$

Cependant, puisque : $\dot{S}_2 = B_{23} \dot{S}_3 + \Delta_{23}$, $\dot{S}_{2c} = \dot{S}_2 - \dot{x}_{2c}$, $S_{2c} = 0$ et $\dot{S}_{2c} = 0$, donc on peut avoir :

$$\Delta_{23} = \dot{x}_{2c} - B_{23} \dot{S}_3 \quad (2.109)$$

Des relations (2.108) et (2.109) de Δ_{23} , on en déduit que :

$$C_2 - \lambda_2^2 \tilde{x}_3 = \dot{x}_{2c} x - B_{23} \dot{S}_3 \quad (2.110)$$

ou encore :

$$\dot{S}_3 = -B_{23}^{-1}C_2 + B_{23}^{-1}(\lambda_2^2 \tilde{x}_3 + \dot{x}_{2c}) \quad (2.111)$$

a. Analyse de convergence de x_5

Soit maintenant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_3 = \frac{1}{2} S_3^2 \quad (2.112)$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par

$$\dot{V}_3 = S_3 \dot{S}_3 \quad (2.113)$$

En utilisant (2.111), la relation (2.113) devient comme suit:

$$\dot{V}_3 = S_3 \left(-B_{23}^{-1}C_2 + B_{23}^{-1}(\lambda_2^2 \tilde{x}_3 + \dot{x}_{2c}) \right) \quad (2.114)$$

En utilisant (2.107) pour C_2 , il vient:

$$\dot{V}_3 = -K_{31} S_3^2 - K_{32} |S_3| + B_{23}^{-1}(\lambda_2^2 \tilde{x}_3 + \dot{x}_{2c}) S_3 \quad (2.115)$$

En choisissant K_{32} tel que :

$$K_{32} = \sup_{t \geq 0} \left| B_{23}^{-1}(\lambda_2^2 \tilde{x}_3 + \dot{x}_{2c}) \right| \quad (2.116)$$

Donc, (2.115) devient :

$$\dot{V}_3 \leq -K_{31} S_3^2 \quad (2.117)$$

La relation (2.117) permet de déduire la stabilité de la surface de glissement S_3 et sa convergence vers zéro avec une dynamique telle que $\dot{S}_3 = 0$. De la définition de S_3 et sachant que $S_3 = 0$ par conséquent on en déduit que $\tilde{x}_5 = 0$.

De plus, (2.107) permet d'avoir : $C_2 \rightarrow 0$ et de conclure à partir de (2.111) que :

$$\dot{x}_{2c} = -\lambda_2^2 \tilde{x}_3 \quad (2.118)$$

D'autre par, la relation (2.109) se réduit à :

$$\Delta_{23} = -\lambda_2^2 \tilde{x}_3 \quad (2.119)$$

b. Analyse de convergence de x_1 et x_3

Dans la partie précédente, nous avons établi que : $\dot{S}_{1c} = 0$ et d'après (2.77) on a donc $B_{13}\dot{S}_3 + \Delta_{13} - \dot{x}_{1c} = 0$ et comme $\dot{S}_3 = 0$, il vient au final:

$$\Delta_{13} = \dot{x}_{1c} \quad (2.120)$$

De plus, $\dot{S}_{2c} = 0$ et d'après (2.78) on a donc $B_{23}\dot{S}_3 + \Delta_{23} - \dot{x}_{2c} = 0$ et comme $\dot{S}_3 = 0$, on a alors:

$$\Delta_{23} = \dot{x}_{2c} \quad (2.121)$$

Aussi, $\dot{S}_{1c} = 0 \Rightarrow \dot{S}_1 = \dot{x}_{1c}$ et d'après (2.75) on obtient donc : $B_{12}\dot{S}_2 + \Delta_{12} - \dot{x}_{1c} = 0$, ou encore :

$$\dot{S}_2 = -B_{12}^{-1}(\Delta_{12} - \dot{x}_{1c}) \rightarrow \dot{S}_2 = -B_{12}^{-1}(\Delta_{12} - \dot{S}_1) \quad (2.122)$$

D'autre part, il est clair que (2.118) et (1.119) donnent: $\Delta_{23} = \dot{x}_{2c} = -\lambda_2^2 \tilde{x}_3$ et sachant que $\dot{S}_{2c} = 0 \Rightarrow \dot{S}_2 = \dot{x}_{2c}$, d'où (2.104) peut s'écrire:

$$\dot{x}_{2c} = B_{12}^{-1}(\lambda_1^2 \tilde{x}_1 + \dot{x}_{1c}) = -\lambda_2^2 \tilde{x}_3 \quad (2.123)$$

Sachant que $\dot{x}_{2c} = \dot{S}_2$ et $\dot{x}_{1c} = \dot{S}_1$ aussi (2.123) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{S}_2 = B_{12}^{-1}(\lambda_1^2 \tilde{x}_1 + \dot{S}_1) \\ \dot{S}_2 = -\lambda_2^2 \tilde{x}_3 \end{cases} \quad (2.124)$$

De la définition de la surface S_2 , on en déduit que $\tilde{x}_3 = (S_2 - x_4)/\lambda_2$ et ainsi, en utilisant cette expression de \tilde{x}_3 dans la deuxième équation de (2.124) celle-ci devient :

$$\dot{S}_2 = -\lambda_2 (S_2 - x_4) \quad (2.125)$$

La relation (2.125) peut être vue comme étant la dynamique de la surface S_2 qui minimise la fonction quadratique $J(S_2)$ définie par :

$$J(S_2) = \frac{1}{2} \lambda_2 (S_2 - x_4)^2 \quad (2.126)$$

Effectivement, en utilisant la méthode du gradient, la trajectoire de la surface $S_2(t)$ qui minimise (2.126) est générée par: $\dot{S}_2 = -\lambda_2 \frac{\partial J}{\partial S_2} = -\lambda_2 (S_2 - x_4)$, notamment (2.125) [Wan94].

Ainsi, cela permet de déduire que $S_2 \rightarrow x_4$. Or, à partir de la définition de la surface S_2 , on a :

$$x_4 + \lambda_2 \tilde{x}_3 = x_4 \Rightarrow \tilde{x}_3 = 0 \quad (2.127)$$

Comme $\dot{S}_2 = \dot{x}_{2c}$ et $\dot{x}_{2c} = -\lambda_2^2 \tilde{x}_3 \Rightarrow \dot{S}_2 = -\lambda_2^2 \tilde{x}_3$ donc $\dot{x}_{2c} = 0$. Or, d'après (2.121) on en déduit que $\Delta_{23} = \dot{x}_{2c} = 0$. Sachant que : $\Delta_{23} = b_2 (u_{eq_3} - u_{eq_1})$ avec : $b_2 \neq 0$, cela permet de déduire que: $u_{eq_3} = u_{eq_1}$.

D'autre part, nous avons : $\Delta_{12} = b_1 (u_{eq_2} - u_{eq_1}) = b_1 (u_{eq_3} - u_{eq_1}) = \frac{b_1}{b_2} b_2 (u_{eq_3} - u_{eq_1})$, ou :

$$\Delta_{12} = B_{12} \Delta_{13} \quad (2.128)$$

Puisque: $\Delta_{13} = \dot{x}_{1c}$, cela permet d'avoir: $\Delta_{12} = B_{12} \dot{x}_{1c}$ et ainsi, la relation (2.105) conduit à:

$$\lambda_1^2 \tilde{x}_1 = -B_{12} \dot{x}_{1c} \quad (2.129)$$

Vu que nous avons montré dans (2.123) que : $\dot{x}_{2c} = B_{12}^{-1} (\lambda_1^2 \tilde{x}_1 + \dot{x}_{1c})$, donc on a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2c} &= B_{12}^{-1} (-B_{12} \dot{x}_{1c} + \dot{x}_{1c}) \\ &= (1 - B_{12}^{-1}) \dot{x}_{1c} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Par conséquent, sachant que : $\dot{x}_{2c} = 0$, on obtient alors : $(1 - B_{12}^{-1}) \dot{x}_{1c} = 0$. De plus, Il est claire que pour $b_1 \neq b_2$, on aura: $\dot{x}_{1c} = 0$ et ainsi: $\lambda_1^2 \tilde{x}_1 = -B_{12} \dot{x}_{1c} \rightarrow \lambda_1^2 \tilde{x}_1 = 0$. Enfin, puisque $\lambda_1 \neq 0$ on obtient: $\tilde{x}_1 = 0$. Le schéma bloc de la commande est illustré dans la figure 2.7. Finalement, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.4 *Soit une classe de systèmes mécaniques sous-actionnés à trois degrés de libertés de la forme (1.81) et à laquelle sont jointes les surfaces de glissement (1.82), (1.83), (1.84), (2.80) et (2.92). Si les conditions (2.102) et (2.116) sont satisfaites, alors la commande découplée par mode de glissement donnée par (2.83) stabilise asymptotiquement le système à l'origine.*

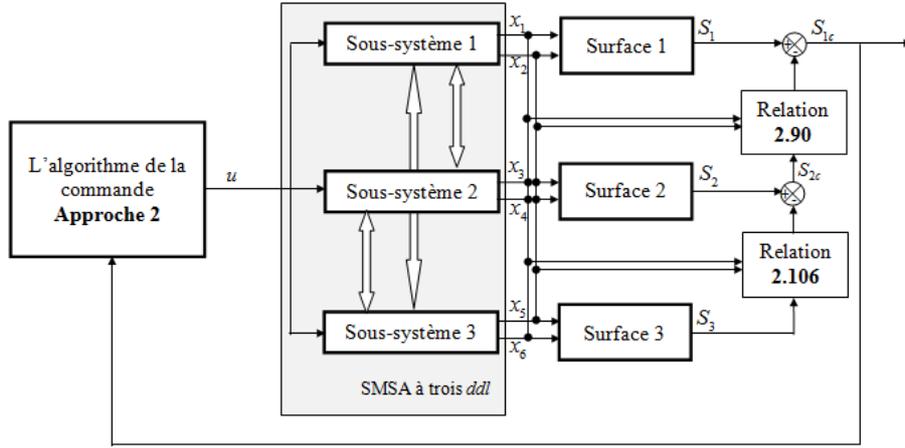


Fig 2.7 Le schéma global de l'algorithme de commande 3ddl, Approche 2.

2.3.3. Exemple d'application: Double pendule inversé sur chariot

Dans cette section, nous proposons via un exemple de simulation relatif au double pendule inversé (DPI) (Figure 2.8), d'analyser les performances de la stratégie de commande proposée. La dynamique d'un DPI donné au chapitre 2, peut être réécrite sous la forme d'état (1.71) telle que [Yam95] :

$$\begin{cases} f_1 = \frac{A_{21}}{l_1 m_1} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{l_1} g \sin \alpha_2 - \frac{A_{11}}{l_1 m_c} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ f_2 = \frac{A_{11}}{l_2 m_1} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ f_3 = \frac{A_{11}}{m_c} \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (2.131)$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{A_{22}}{l_1 m_1} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\cos \alpha_2}{l_1 m_c} - \frac{A_{12}}{l_1 m_c} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ b_2 = \frac{A_{12}}{l_2 m_1} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ b_3 = \frac{1}{m_c} + \frac{A_{12}}{m_c} \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (2.132)$$

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{a_{22} (l_1 \dot{\alpha}_2^2 - g \cos \alpha_2) - a_{12} l_2 \dot{\alpha}_1^2}{\Delta} \\ A_{12} = -\frac{a_{22} \sin \alpha_2}{\Delta m_c} \\ A_{21} = -\frac{a_{12} (l_1 \dot{\alpha}_2^2 - g \cos \alpha_2) + a_{11} l_2 \dot{\alpha}_1^2}{\Delta} \\ A_{22} = \frac{a_{12} \sin \alpha_2}{\Delta m_c} \end{cases} \quad (2.133)$$

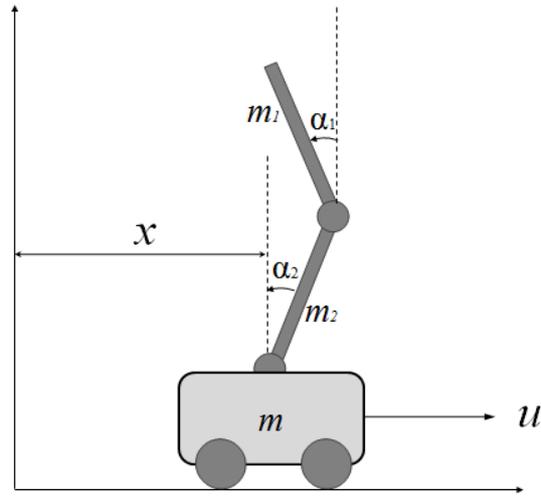


Fig 2.8 Le système double pendule inversé sur chariot.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = \frac{1}{m_1} + \frac{\sin \alpha_2}{m_2} \\ a_{12} = -\frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{m_1} \\ a_{12} = -\frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{m_1} \\ a_{22} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \end{array} \right. \quad (2.134)$$

Les paramètres du DPI relatifs aux simulations sont tels que: $l_1 = 1m$, $l_2 = 1m$, $m_1 = 1kg$, $m_2 = 1kg$. L'objectif de la commande est de maintenir les deux tiges à la position verticale, i.e: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, et ramener le chariot vers les positions horizontales désirées : $(x_{1d}, x_{2d}, x_{3d}) = (0, 0, 3m)$ et $(x_{1d}, x_{2d}, x_{3d}) = (0, 0, 4m)$.

Pour palier le problème des commutations de grandes amplitudes à haute fréquence dues aux fonctions signe, nous avons remplacé les fonctions discontinues signe par la fonction arc-tangente.

Pour l'approche 1, et après plusieurs simulations, les valeurs choisies pour les gains du contrôleur sont: $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0.5$, $K = 40$, $Q = 1$, $\alpha = 10$, $\mu = 10$, $\beta = 10$. Afin de tester la robustesse, nous considérons que la dynamique du système est soumise d'une part à des variations paramétriques aléatoires de 50% touchant les masses du

système: $\Delta m_i = 0.5 \text{rand}(t)$ avec $i=(1,2)$ et d'autre part à une perturbation sinusoïdale d donnée par: $d = 0.1 \sin(20\pi t)$.

A la figure 2.9, on peut observer la convergence, en un temps fini, de tous les états du DPI (voir les figures 2.9a, 2.9b et 2.9c). Pour les deux valeurs désirées, nous pouvons constater que les angles des deux tiges présentent deux cycles d'oscillation avant d'atteindre l'état stationnaire qui correspond à la valeur désirée (Fig.2.9a et b), tandis que la position du chariot présente une convergence sans oscillation (Fig.2.9c).

Pour la commande, on constate qu'elle présente un pic de 60N durant la phase transitoire, et cela correspond au basculement des deux tiges du DPI qui nécessitent plus d'effort pour les ramener au voisinage du point d'équilibre (Fig.2.9.d).

La simulation de l'approche 2 est basée sur les paramètres suivants de la loi de commande: $\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 0.5, K = 7, Q = 1, K_{12} = 0.1, K_{23} = 1, K_{13} = 0.1, K_{32} = 1, K_1 = 7, Q_1 = 1$. En gardant les mêmes objectifs, les résultats de simulation sont présentés aux figures 2.10.

Il est facile de constater la convergence de tous les états du DPI vers leurs valeurs désirées : figures 2.10a , 2.10b et 2.10c.

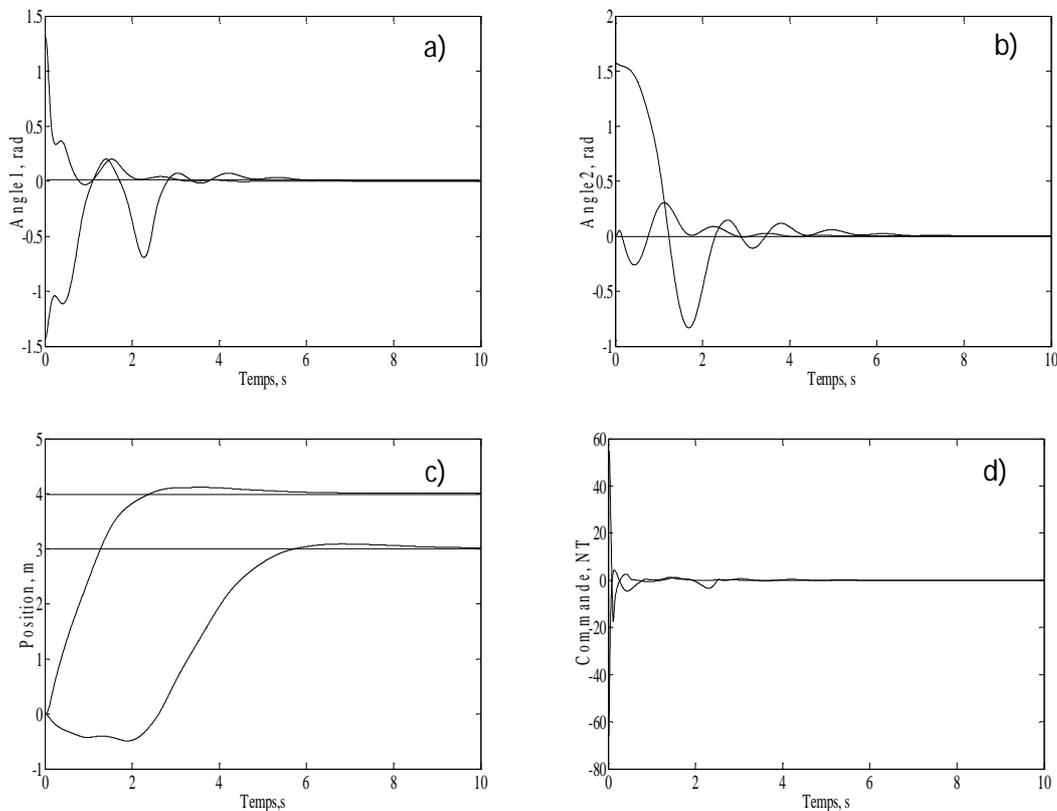


Fig 2.9 Commande découplée par les modes glissants du DPI, 1^{ère} approche : a) Angle d'inclinaison de la 1^{ère} tige du DPI, b) Angle d'inclinaison de la 2^{ème} tige du DPI d) Position du chariot, c) Commande appliquée au système.

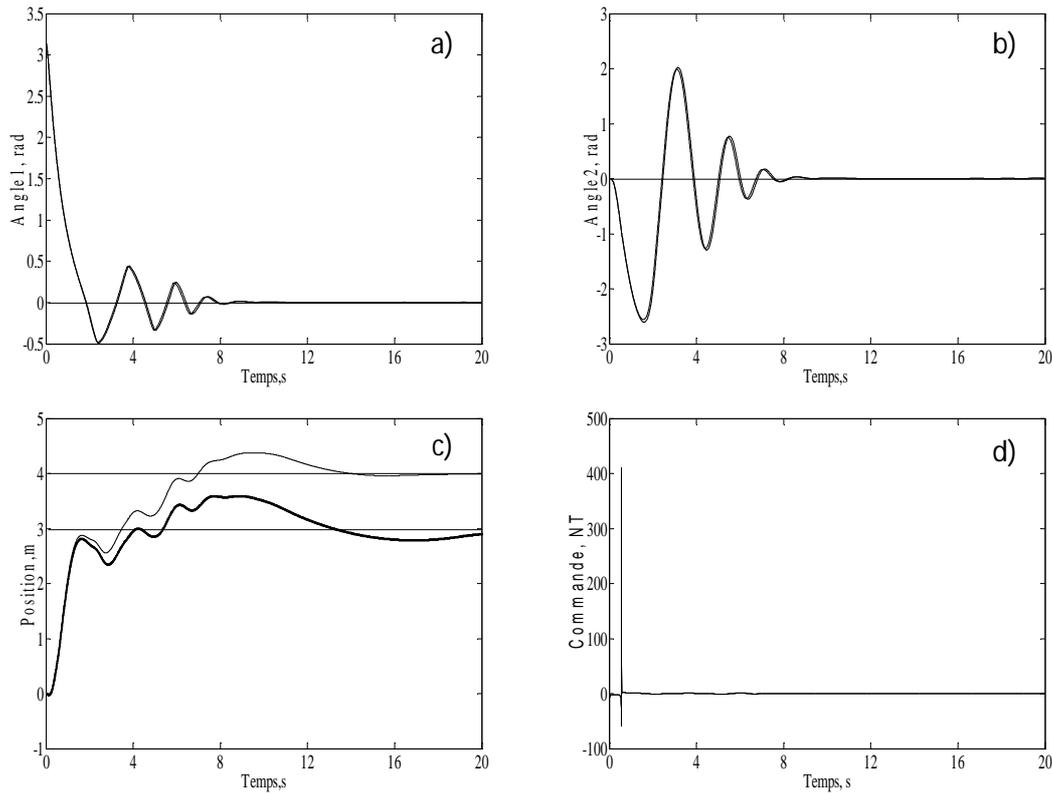


Fig 2.10 Commande découplée par les modes glissants du DPI, 2^{ème} approche: a) Angle d’inclinaison de la 1^{ère} tige du DPI, b) Angle d’inclinaison de la 2^{ème} tige du DPI, d) Position du chariot, c) Commande appliquée au système.

Sur la figure 2.10 d, on constate que le signal de commande présente un pic assez important si on le compare à celui de la figure 2.9b qui correspond à la commande synthétisée par l’approche 1. Pour l’approche 2, la commande nécessite plus d’effort pour basculer les deux pendules de la position de repos vers la position d’équilibre système $(0,0,3m)$ et $(0,0,4m)$.

De point de vue performance, une comparaison en les deux approches permet de voir que le temps de réponse dans l’approche 1 est plus court que celui relatif à l’approche 2. De plus, le signal de commande présente un pic assez grand par rapport à celui de l’approche 1. Néanmoins, les deux méthodes confirment la convergence et la stabilité du DPI.

Concernant la robustesse, les figures 9 et 10 révèlent que malgré les variations structurelles et la perturbation externe injectées au niveau de la dynamique du système, les états ont pu converger en un temps acceptable vers leurs valeurs désirées. Par conséquent, les deux approches proposées pour le SMSA à trois ddl manifestent une robustesse remarquable.

2.4. Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre deux nouvelles approches pour la synthèse d'une commande découplée par les modes de glissement pour les SMSA à deux et à trois *ddl* en exploitant les caractéristiques et les propriétés de ces systèmes.

Dans les deux cas, les commandes proposées ont pu réaliser de bonnes performances relatives à la convergence et à la robustesse des signaux de sortie. Ceci confirme les résultats avancés dans l'analyse de la stabilité basée sur la théorie de Lyapunov.

Comme constaté dans ce chapitre, l'application de ces stratégies de commande aux différents SMSA a donné des résultats satisfaisants.

Dans la suite de ce travail, nous allons développer une stratégie de synthèse de commande adaptative en considérant une absence d'information sur la dynamique du système.

Commande Adaptative Floue Découplée par Mode de Glissement

Ce chapitre est consacré à quelques méthodes de synthèse de la commande adaptative par les modes glissants basées sur les systèmes flous. L'application de ces techniques aux SMSA est rendue possible grâce à l'exploitation de leur forme différentielle simplifiée. Par conséquent, ces commandes adaptatives à base des systèmes flous sont développées pour différents types de SMSA, notamment ceux à deux et à trois ddl. De plus, pour tous ces systèmes commandés, la stabilité en boucle fermée est établie en utilisant la méthode de stabilité au sens de Lyapunov.

3.1. Introduction

Nous avons vu, au chapitre précédent, les étapes nécessaires pour la synthèse d'une commande découplée par les modes de glissement. La stratégie adoptée était basée sur la connaissance intégrale de la dynamique du système, i.e. les fonctions non linéaires $f_i(\underline{x})$ et $b_i(\underline{x})$ sont supposées connues. Cependant, dans le cas d'une absence d'information sur la dynamique du système (partiellement ou totalement, i.e. les fonctions non linéaires $f_i(\underline{x})$ et $b_i(\underline{x})$ sont mal connues ou inconnues), les lois de commande découplées obtenues seront inefficaces ou impossibles à déterminer. Pour

remédier à cet inconvénient, une solution consiste à estimer la dynamique du système pour synthétiser une loi de commande. Pour assurer de bonnes performances, des algorithmes d'adaptation sont utilisés pour générer la valeur estimée de la commande globale.

Comme méthode de conception des commandes adaptatives, celle fondée sur la logique floue est devenue la tendance incontournable surtout pour les systèmes complexes [Sab00], [Mon01]. Une caractéristique majeure des systèmes à logique floue est leur habilité à simuler, dans une certaine mesure, le raisonnement humain. Cette habilité est inhérente à la définition des fonctions d'appartenance, de l'établissement des règles floues et du traitement mathématique de ces règles pour en tirer une information viable. L'analyse de la stabilité pour de tels schémas est effectuée en utilisant le théorème de stabilité au sens de Lyapunov.

De ce fait, deux approches sont proposées. La première est dite directe, elle implique l'approximation de la commande idéale basée sur les modes glissants et qui est inconnue ([Mon01], [Kha96], [Pas98]). Cependant, dans ce type de commande, le gain de commande du système doit être constant où sa dérivée par rapport au temps doit satisfaire quelques contraintes restrictives. La seconde approche est dite indirecte, celle-ci fait appel à deux approximateurs pour obtenir les estimés de la dynamique du système à commander. Ces estimés sont utilisés pour établir la loi de commande adaptative dans le but de résoudre le problème de poursuite ([Cha01], [Chek03] et [Wan94]).

Pour les SMSA, qui représentent une classe très attractive de systèmes couplés, la commande adaptative floue doit surmonter la difficulté due au couplage existant entre la commande et les sorties [Naf13]. Plusieurs travaux ont incorporé cette technique de commande découplée adaptative floue par les modes de glissement ([Guo07], [Lo98], [Wan94]). Dans ces travaux, les paramètres d'adaptation du système flou sont ajustés via des lois adaptatives basées sur l'approche de Lyapunov, i.e., les paramètres adaptatifs sont conçus de telle façon à assurer la convergence de la fonction de Lyapunov. Toutefois, pour une adaptation concrète, il s'avère important d'effectuer une identification directe entre les fonctions inconnues et leurs estimées floues adaptatives [Lab07].

A partir de ce background, notre travail en premier lieu consiste à introduire une nouvelle méthode de commande découplée par les modes de glissement pour les SMSA à deux et à trois *ddl* pour palier à une connaissance partielle du système et à l'influence

d'une mauvaise modélisation. Pour y parvenir, la méthode de la descente du gradient est mise à l'œuvre pour établir les lois d'adaptation des paramètres.

3.2. Commande adaptative directe découplée floue par les modes de glissement

Dans cette partie, nous nous intéressons à la mise en œuvre d'une loi de commande floue découplée par les modes de glissement pour une classe des SMSA. Nous avons vu au chapitre précédent que la synthèse des CDMG suppose une connaissance parfaite de la dynamique du système SMSA à considérer, i.e. la disponibilité des fonctions non linéaires $f_i(\underline{x})$ et $b_i(\underline{x})$. Cette synthèse a révélé l'existence d'une commande idéale qui est indéterminée dans le cas où les fonctions non linéaires sont inconnues. Afin de résoudre ce problème, nous proposons, dans ce qui suit, l'utilisation des systèmes flous adaptatifs pour l'approximation de cette loi de commande idéale. La loi d'adaptation des paramètres est conçue en exploitant l'erreur entre le signal de la commande idéale et le signal issu du contrôleur flou.

3.2.1. Commande adaptative directe des SMSA à deux *ddl*

Nous avons vu au chapitre 2, que si la dynamique d'un SMSA à deux *ddl* donnée par (1.70) est connue, i.e., $f_i(\underline{x})$ et $b_i(\underline{x})$ sont complètement connues, il existe une commande idéale par les modes de glissement donnée par :

$$u^* = u_{eq} - b_1^{-1} (K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \beta(S_1 - S_2)) \quad (3.1)$$

avec K , Q et β sont des paramètres strictement positifs.

Cependant, dans le cas où $f_1(\underline{x})$ et $b_1(\underline{x})$ sont inconnues, la loi de commande (3.1) est indéfinie. Pour palier à ce problème, nous proposons un système flou adaptatif apte à reproduire cette loi de commande idéale. Dans ce but, nous exploitons le signal d'erreur entre le contrôleur adaptatif et le contrôleur idéal (3.1) pour mettre à jour les paramètres du système flou utilisé et ainsi approcher la partie incertaine du signal de commande.

Pour développer cette loi de commande adaptative, nous supposons que la commande idéale (3.1) peut être approximée, en utilisant un système flou, comme suit :

$$u^* = \xi^T(\underline{S})\theta^* \quad (3.2)$$

Où $\underline{S} = [S_1, S_2]^T$ et $\xi(\underline{S})$ est le vecteur des fonctions floues de base supposé convenablement spécifié par l'utilisateur. De plus, nous supposons que le système flou

satisfait la propriété de l'approximation universelle dans un ensemble compact Ω_s qui est supposé suffisamment large pour que la variable \underline{S} évolue dans cet ensemble sous l'effet de la commande.

Par ailleurs, puisque le vecteur des paramètres optimaux θ^* est inconnu, on considère son estimée $\hat{\theta}$ pour construire la loi de commande adaptative suivante [Wan94]:

$$u = \xi^T(\underline{S})\hat{\theta} \quad (3.3)$$

Soit maintenant l'erreur d'identification ou d'estimation entre les deux lois de commande u^* et u :

$$e_u = u - u^* \quad (3.4)$$

Ainsi, en utilisant (3.2) et (3.3), on obtient:

$$e_u = \xi^T(\underline{S})\hat{\theta} - u^* = \xi^T(\underline{S})\tilde{\theta} \quad (3.5)$$

où $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ est le vecteur des erreurs d'estimation paramétrique.

Théorème 3.1 [Naf13] *Soit la classe des systèmes mécaniques sous-actionnés à deux degrés de libertés de la forme (1.70) à laquelle sont associées les surfaces de glissement S_1 et S_2 définies respectivement par (1.71) et (1.72). Si cette classe de système est soumise à la loi de commande donnée par (3.3) où le vecteur des paramètres $\hat{\theta}$ est adapté suivant la loi :*

$$\dot{\hat{\theta}} = -\eta_u \xi(\underline{S}) (\dot{S}_1 + K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 - w) \quad (3.6)$$

avec:

$$w = -\beta(S_1 - S_2) \quad (3.7)$$

et K, Q, β et η_u sont des constantes strictement positives ; par conséquent, toutes les variables du système en boucle fermée sont bornées et les surfaces de glissements S_1 et S_2 convergent vers zéro.

Preuve : En substituant (3.1) dans (1.73) et tenant compte du fait que: $b_1 u = b_1 u^* + b_1 (u - u^*)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= f_1 + \lambda_1 x_2 + b_1 u^* + b_1 e_u \\
 &= b_1 \left[-K b_1^{-1} \operatorname{sgn}(S_1) - Q b_1^{-1} S_1 - b_1^{-1} \beta (S_1 - S_2) + u_{e_{q_1}} \right] - b_1 u_{e_{q_1}} + b_1 e_u \\
 &= b_1 e_u - K \operatorname{sgn}(S_1) - Q S_1 - \beta (S_1 - S_2)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ou encore :

$$\dot{S}_1 = b_1 e_u - K \operatorname{sgn}(S_1) - Q S_1 + w \tag{3.9}$$

Soit maintenant la fonction de coût quadratique qui exprime la mesure donnée par la différence entre la commande idéale et celle floue:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} b_1 e_u^2 = \frac{1}{2} b_1 \left(\xi^T(\underline{S}) \hat{\theta} - u^* \right)^2 \tag{3.10}$$

Nous exploitons la méthode du gradient pour minimiser la fonction (3.10) vis-à-vis du vecteur $\hat{\theta}$ des paramètres ajustables. Ainsi, en appliquant cette méthode la trajectoire $\hat{\theta}(t)$ qui minimise (3.14) est générée par l'équation différentielle suivante [Wan94]:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\eta_u \nabla_{\theta} J(\theta) \tag{3.11}$$

Le gradient de $J(\theta)$ par rapport à $\hat{\theta}$ est donné par :

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \frac{\partial J(\theta)}{\partial \hat{\theta}} = \xi(\underline{S}) b_1 e_u \tag{3.12}$$

Par conséquent, en exploitant (3.12), la loi d'adaptation (3.11) devient:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\eta_u \xi(\underline{S}) b_1 e_u \tag{3.13}$$

Cependant, dans sa forme (3.13), cette loi d'adaptation ne peut être utilisée car les termes b_1 et e_u ne sont pas disponibles. Pour surmonter ce problème, le terme $b_1 e_u$ est tiré directement de l'équation (3.9):

$$b_1 e_u = \dot{S}_1 + K \operatorname{sgn}(S_1) + Q S_1 - w \tag{3.14}$$

Ainsi, (3.13) devient :

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\eta_u \xi(\underline{S}) (\dot{S}_1 + K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 - w) \quad (3.15)$$

A ce stade, nous considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V = \frac{1}{2} S_1^2 + \frac{1}{2\eta_u} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (3.16)$$

Sa dérivée \dot{V} est donnée par :

$$\dot{V} = S_1 \dot{S}_1 + \frac{1}{\eta_u} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \quad (3.17)$$

En utilisant (3.9) pour \dot{S}_1 et (3.13) pour $\dot{\tilde{\theta}}$, il vient :

$$\dot{V} = S_1 (b_1 e_u - K \operatorname{sgn}(S_1) - QS_1 + w) - \tilde{\theta}^T \xi(\underline{S}) b_1 e_u \quad (3.18)$$

En exploitant (3.5) pour e_u , \dot{V} devient :

$$\dot{V} = -S_1 (K \operatorname{sgn}(S_1) - w) - QS_1^2 + S_1 b_1 e_u - b_1 e_u^2 \quad (3.19)$$

En considérant l'inégalité suivante :

$$S_1 b_1 e_u \leq \frac{1}{2} b_1 e_u^2 + \frac{1}{2} b_1 S_1^2 \quad (3.20)$$

Par conséquent \dot{V} , donné par (3.19), peut être bornée tel que :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -S_1 (K \operatorname{sgn}(S_1) - w) - QS_1^2 + \frac{1}{2} b_1 S_1^2 - \frac{1}{2} b_1 e_u^2 \\ &\leq -S_1 (K \operatorname{sgn}(S_1) - w) - QS_1^2 + \frac{1}{2} b_{\max} S_1^2 - \frac{1}{2} b_1 e_u^2 \\ &\leq -S_1 (K \operatorname{sgn}(S_1) - w) - \left(Q - \frac{1}{2} b_{\max} \right) S_1^2 - \frac{1}{2} b_1 e_u^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

En imposant $Q \geq 1/2b_{\max}$ et $K > \max(|w|) + \kappa$, $\kappa > 0$, l'inégalité (3.21) se ramène à :

$$\dot{V} \leq -\kappa |S_1| \quad (3.22)$$

La condition (3.22) garantit la bornitude de S_1 et $\tilde{\theta}$. De plus, selon le lemme de Barbalat, la surface de glissement S_1 est asymptotiquement stable, i.e. $S_1 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Il reste à démontrer la convergence de la surface de glissement S_2 , pour cela, nous partons de l'équation (3.9) :

$$\dot{S}_1 = b_1 e_u - K \operatorname{sgn}(S_1) - QS_1 - \beta(S_1 - S_2) \quad (3.23)$$

Par ailleurs, en moyenne, nous avons $\operatorname{sgn}(S_1) \approx S_1$ quand $t \rightarrow \infty$. Ainsi, (3.23) se réduit comme suit :

$$\dot{S}_1 = b_1 e_u - (K + Q + \beta)S_1 + \beta S_2 \quad (3.24)$$

En supposant que le processus d'adaptation converge et donc le terme e_u est suffisamment petit, donc (3.24) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{S}_1 = -(K + Q + \beta)S_1 + \beta S_2 \quad (3.25)$$

Par conséquent, et en utilisant le Lemme 1 (chapitre 2), la convergence de S_1 implique la convergence de S_2 vers zéro.

Remarque 3.1 La loi d'adaptation (3.6) ne peut être implémentée puisque la dérivée de S_1 n'est pas disponible. Cependant, une version échantillonnée implémentable peut être établie comme suit [Lab07]:

$$\frac{\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t - \Delta t)}{\Delta t} = -\eta_u \xi(\underline{S}) \left(\frac{S_1(t) - S_1(t - \Delta t)}{\Delta t} + K \operatorname{sgn}(S_1(t)) + QS_1(t) + \beta(S_1(t) - S_2(t)) \right) \quad (3.26)$$

où Δt est un incrément de temps qui est toujours positif. En supposant que Δt est suffisamment petit, alors (3.26) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t - \Delta t) - \eta_u \xi(\underline{S}) \left\{ (1 + (Q + \beta)\Delta t)S_1(t) - S_1(t - \Delta t) + K \operatorname{sgn}(S_1(t))\Delta t - \beta S_2(t)\Delta t \right\} \quad (3.27)$$

Remarque 3.2 La discontinuité de la commande, due à l'effet de la fonction $\operatorname{sgn}(\cdot)$, peut être atténuée en remplaçant celle-ci par la fonction saturation définie par:

$$\operatorname{sat}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \geq \varepsilon \\ x & \text{si } |x| < \varepsilon \\ -1 & \text{si } |x| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3.28)$$

Où: ε est une constante positive définie par l'utilisateur.

3.2.2. Exemples d'application

La méthode proposée, est testée par simulation numérique dans le cas où elle est appliquée à différents SMSA à deux *ddl*, à savoir : bille roulante sur poutre et le pendule inversé sur chariot. Pour la synthèse de la commande découplée adaptative flou, un système de la forme standard T-S est utilisé pour générer le signal de commande. Ce système flou a pour entrée la variable Z défini par : $Z = [S, \dot{S}]$ où chaque variable Z_j , avec $j=(1,2)$, est représentée par trois fonctions d'appartenance gaussiennes (Fig 3.1) :

$$\mu_{F_j^1}(Z_j) = \exp\left(-0.5\left(\frac{Z_j + 1}{0.25}\right)^2\right), \quad \mu_{F_j^2}(Z_j) = \exp\left(-0.5\left(\frac{Z_j}{0.25}\right)^2\right),$$

$$\mu_{F_j^3}(Z_j) = \exp\left(-0.5\left(\frac{Z_j - 1}{0.25}\right)^2\right)$$

De plus, les grandeurs physiques d'entrées sont transformées en valeur normalisée dans l'intervalle $[-1,1]$. Ici, la valeur normalisée d'une grandeur physique est définie comme étant la valeur relative par rapport à la grandeur d'échelle $L_i = \max|Z_j|$.

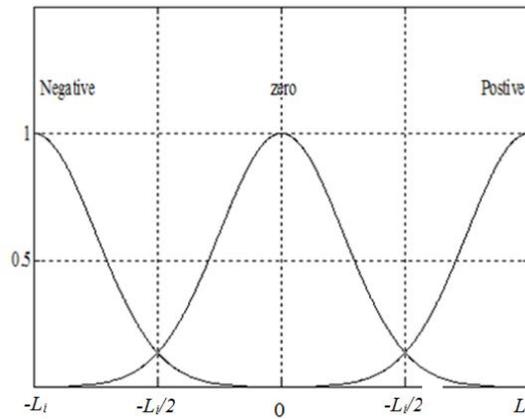


Fig 3.1 Les fonctions d'appartenance des entrées floues

3.2.2.1. Bille roulante et poutre: Beam and Ball

L'équation de la dynamique du mouvement de la bille roulante sur poutre est donnée par (1.52) [Bar97]. Le système mis à l'essai est caractérisé par les paramètres suivants: $B= 0.7143$, $M=0.05$ kg; $J_b = 2 \times 10^{-6}$, $R = 0.01$ m, $g=9.8$ m/s².

Après plusieurs essais de simulations, nous établis les paramètres de la commande tels que mentionnée dans le tableau 3.1 où le pas de calcul a été imposé à 0.005s et le point de départ est pris tel que $\alpha_0 = \pi/3$ et trois différentes valeurs pour x_0 : 0m , 2m et, 5m .

Tab 3.1 Les paramètres de Commande pour la bille et poutre

Les paramètres de glissement	Les paramètres des lois d'adaptation	Paramètres de simulation
$K = 1.5$, $Q = 2$, $\beta = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$	$\eta = 1$; $\sigma = 0.01$	Pas de simulation: $h = 0.005$ position initiale: $\alpha_0 = \pi/3$, $x_0 = 0m$, $2m$ et $5m$

Par ailleurs, l'évaluation de la robustesse de la loi de commande est faite durant les simulations numériques dans le cas où le système est soumis à un bruit aléatoire donné par: $d = \text{rand}(t)$ et en présence d'une variation structurelle aléatoire de 100% touchant la masse de la bille: $\Delta M = 0.05\text{rand}(t)$.

Plusieurs simulations relatives à ce système ont été effectuées dans le cas adaptatif direct (CDAFDMG). Les résultats obtenus de ces simulations sont indiqués à la figure 3.2. De celle-ci, nous observons que les états du système (angle d'inclinaison de la poutre et la position de la bille sur poutre) convergent rapidement vers leurs valeurs désirées (Fig. 3.2a & 3.2b).

Cette convergence des états du système vers leurs valeurs désirées laisse supposer la convergence de la commande vers sa valeur idéale.

De plus, nous constatons que la commande adaptative floue directe présente des pics durant la phase transitoire de convergence.

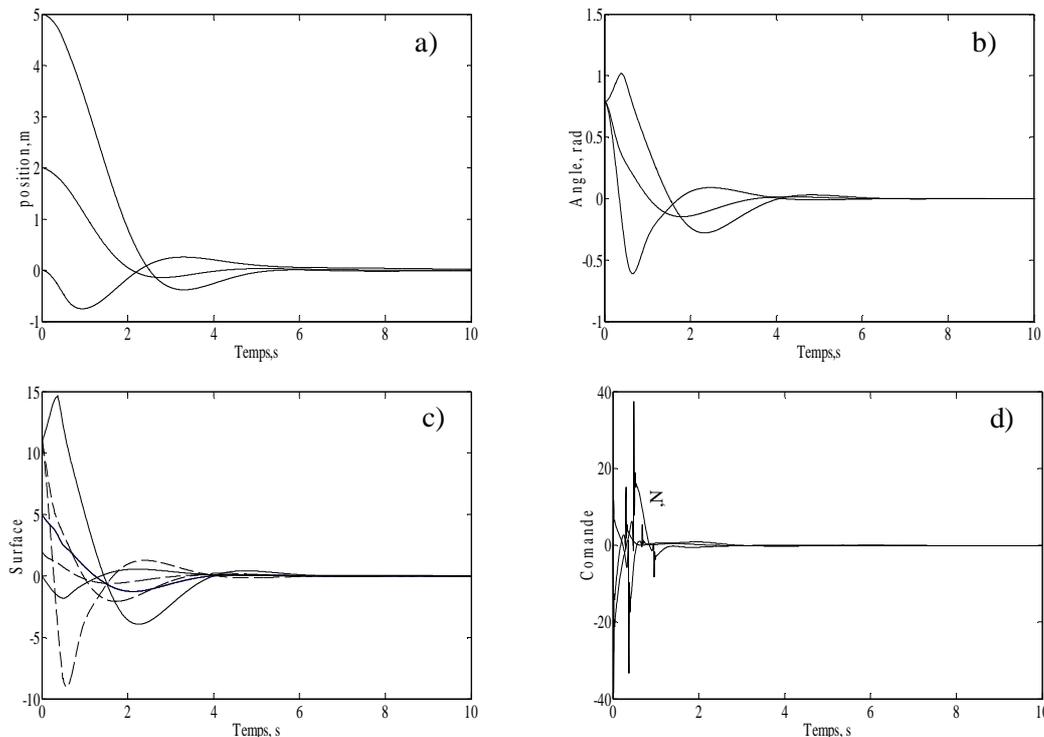


Fig 3.2 Commande découplée adaptative floue par les modes glissants sur la bille roulante et poutre : a) Position de la bille, b) Angle d'inclinaison de la poutre, c) Surfaces de glissement, d) La commande.

Ceci est probablement dû au processus d'adaptation des paramètres. Un tel phénomène se manifeste généralement quand le processus d'estimation flou nécessite plus de temps pour atteindre la valeur idéale à partir des valeurs initiales choisies. De plus, durant cette phase transitoire le système nécessite plus d'effort pour ramener les états de leurs valeurs initiales au voisinage des valeurs désirées. En présence de l'ensemble des perturbations considérées, les réponses des états du système montrent leurs convergences en un temps satisfaisant vers leurs références. Aussi, on peut conclure que cette commande présente une bonne robustesse.

3.2.2.2. Pendule Inversé sur chariot

Le pendule inversé représente un bon modèle pour tester les performances de la stratégie adoptée car ce système présente un point d'équilibre instable. Pour effectuer les simulations et déterminer les commandes, nous avons considéré l'équation de la dynamique mentionnée au chapitre 1. Le système à tester est défini par les paramètres suivants [Shi00]: $m_p = 0.05$, $m_c = 1$, $L = 0.5$, $g = 9.8$ et $m_t = m_p + m_c$. Le tableau 3.2 regroupe les paramètres utilisés pour la détermination des lois de commande et pour effectuer la simulation. Durant les simulations, nous considérons que le système est affecté par une variation structurelle aléatoire de 50% sur la masse du pendule telle que: $\Delta m_c = 0.5 \text{rand}(t)$ et par un bruit externe aléatoire: $d = \text{rand}(t)$.

Les résultats des simulations, pour le cas direct sont montrés aux figures 3.3. Les états du système oscillent durant pratiquement un cycle et demi avant d'atteindre le régime statique (Fig. 3.3a & 3.3b).

De plus, il est confirmé que tous les états du système convergent vers leurs valeurs désirées comme il a été prévu par l'analyse de la convergence et de la stabilité exposée à la section précédente. Les signaux de commandes floues obtenus sont présentés aux figures 3.3c et 3.3d.

Ces dernières révèlent que ces signaux présentent des pointes de valeur (110N) à $t=0.1s$.

Tab 3.2 Les paramètres de la commande du pendule inversé sur chariot

Les paramètres de glissement	Les paramètres des lois d'adaptation	Paramètres de simulation
$K_2 = 1, Q_2 = 1, K_s = 5,$ $Q_s = 2, \lambda_1 = 8, \lambda_2 = 1$	$\eta = 1, \sigma = 0.01$	Pas de simulation: $h = 0.005$ position initiale: $(\alpha_0, x_0) = (-\pi/2, 0)$

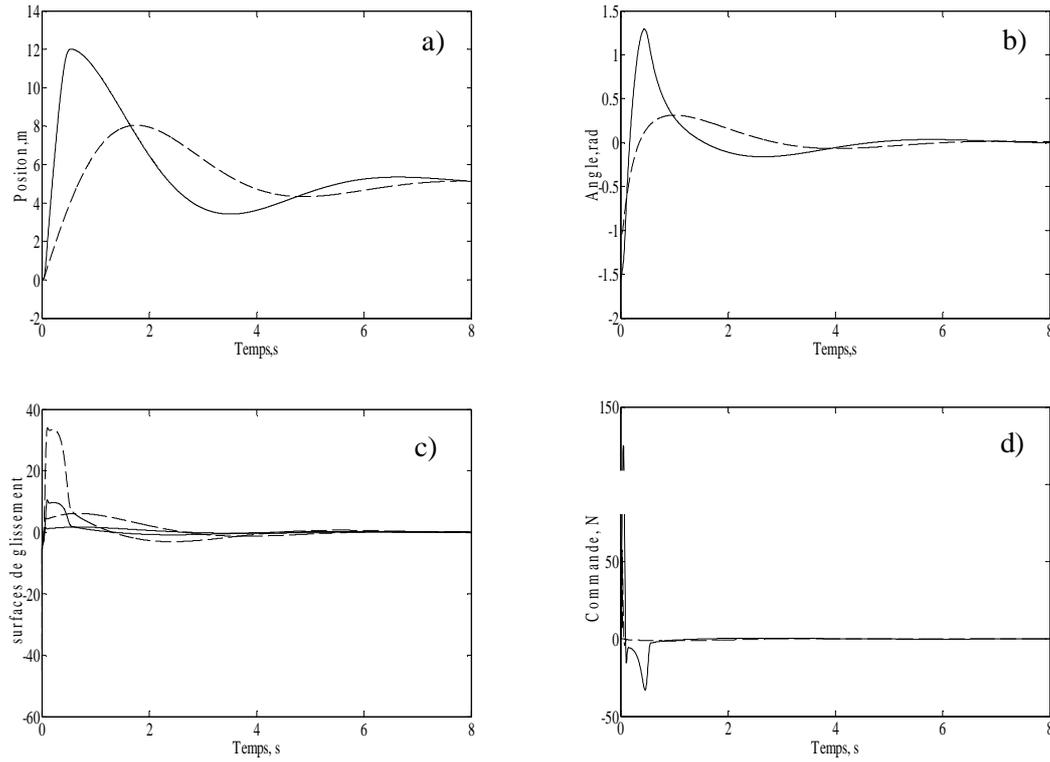


Fig 3.3 Commande découplée adaptative floue par les modes glissants sur le pendule inversé sur chariot : a) Position du chariot, b) Angle du pendule, c) Surfaces de glissement, d) Commande appliquée au système

Le basculement du pendule de sa valeur initiale vers le point d'équilibre instable fait que le signal de commande nécessite plus d'effort. Les résultats obtenus montrent la convergence en un temps tolérable des états vers leurs références malgré, la présence des variations paramétriques et d'une perturbation externe affectant le système. Ceci prouve la robustesse de la commande appliquée.

3.2.3. Commande adaptative directe des SMSA à trois *ddl*

Au chapitre précédent, nous avons établi dans la première approche, une commande idéale découplée par les modes de glissement pour les SMSA à trois *ddl* donnée par :

$$u^* = -b_1^{-1} \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + (f_1 + \lambda_1 x_2) + \alpha \left(S_1 - (-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right) \right] \quad (3.29)$$

où η, ρ, α et β des constantes positives telles que : $Q = \eta' + \max[\beta(S_3 - S_2)]$,

$$K = \eta + \rho, \eta' > 0,$$

$$\begin{aligned} \rho &= \max \left| \left(-\mu(\varphi_M - S_3) + \beta(S_3 - S_2) \right) \right| + Q \\ Q &> \max [\beta(S_3 - S_2)] \\ \dot{\varphi} &= -\mu(\varphi - S_3) \\ \varphi_M &= \max |\varphi| \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dans le but de développer une loi de commande adaptative, nous supposons que la commande idéale (3.29) peut être approximée par un système flou comme suit:

$$u^* = \xi^T(\underline{S})\theta^* \quad (3.31)$$

Où le vecteur \underline{S} est défini tel que $\underline{S} = [S_1, S_2, S_3]^T$ et le vecteur des fonctions floues de base $\xi(\underline{S})$ est supposé convenablement spécifié par le concepteur. Comme le vecteur optimal θ^* est inconnu, on ne considère alors que son estimée $\hat{\theta}$ aussi, on propose la loi de commande suivante :

$$u = \xi^T(\underline{S})\hat{\theta} \quad (3.32)$$

L'erreur d'identification ou d'estimation $e_u = u - u^*$, est donnée par :

$$e_u = \xi^T(S)\hat{\theta} - \xi^T(S)\theta^* = \xi^T(S)\tilde{\theta} \quad (3.33)$$

Où: $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ est le vecteur de l'erreur d'estimation des paramètres.

En considérant l'expression (1.82) de S_1 et la dynamique du 1^{ier} sous-système, la dérivée \dot{S}_1 est alors donnée par :

$$\dot{S}_1 = f_1 + \lambda_1 x_2 - \lambda_1 \dot{x}_{1d} + b_1 u \quad (3.34)$$

Comme la commande réelle est telle que $u = u^* + e_u$ et $\dot{x}_{1d} = 0$, il vient :

$$\dot{S}_1 = f_1 + \lambda_1 x_2 + b_1 u^* + b_1 e_u \quad (3.35)$$

Si dans cette dernière expression de \dot{S}_1 , on substitue u^* par son expression (3.29), il vient :

$$\dot{S}_1 = -\alpha \left[S_1 - \left(-\mu(\varphi - S_3) + \beta(S_3 - S_2) + Q \operatorname{sgn}(S_3) \right) \right] - K \operatorname{sgn}(S_1) + b_1 e_u \quad (3.36)$$

De cette dernière relation, on peut tirer :

$$b_1 e_u = \dot{S}_1 + K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left[S_1 - \left(-\mu(\varphi - S_3) + \beta(S_3 - S_2) + Q \operatorname{sgn}(S_3) \right) \right] \quad (3.37)$$

Soit maintenant la fonction de coût quadratique définie en fonction de l'erreur e_u telle que :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} b_1 e_u^2 = \frac{1}{2} b_1 (\xi^T(\underline{S}) \hat{\theta} - u^*)^2 \quad (3.38)$$

En premier lieu en appliquant la méthode du gradient [Wan94], la solution $\hat{\theta}(t)$, qui minimise la fonction de coût (3.38), vérifie alors l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\eta_u \nabla_{\theta} J(\theta) \quad (3.39)$$

Et en second lieu, le gradient de $J(\theta)$ par rapport à $\hat{\theta}$ est donné par :

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \frac{\partial J(\theta)}{\partial \hat{\theta}} = \xi(\underline{S}) b_1 e_u \quad (3.40)$$

Par conséquent, la loi d'adaptation du vecteur des paramètres $\hat{\theta}$ issue de la méthode du gradient est telle que :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\eta_u \xi(\underline{S}) b_1 e_u \quad (3.41)$$

En utilisant (3.37), l'équation (3.41) devient :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\eta_u \xi(\underline{S}) \left\{ \dot{S}_1 + K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left[S_1 - (-\mu(\varphi - S_3) + \beta(S_3 - S_2) + Q \operatorname{sgn}(S_3)) \right] \right\} \quad (3.42)$$

Maintenant, soit la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V = \frac{1}{2} S_1^2 + \frac{1}{2\eta_u} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (3.43)$$

La dérivée temporelle de V est donnée par :

$$\dot{V} = S_1 \dot{S}_1 + \frac{1}{\eta_u} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \quad (3.44)$$

En substituant dans cette dernière relation \dot{S}_1 par son expression (3.36) et $\dot{\tilde{\theta}}$ par son expression (3.42), il vient :

$$\dot{V} = -\alpha S_1 C_s - K S_1 \operatorname{sgn}(S_1) + b_1 S_1 e_u - \tilde{\theta}^T \xi(\underline{S}) b_1 e_u \quad (3.45)$$

Avec: $C_s = S_1 + [\mu(\varphi - S_3) - \beta(S_3 - S_2) - Q \operatorname{sgn}(S_3)]$.

Et comme: $e_u = \xi^T(\underline{S}) \tilde{\theta} = \tilde{\theta}^T \xi(\underline{S})$, donc (3.45) devient :

$$\dot{V} = -\alpha S_1 C_s - K |S_1| + b_1 S_1 e_u - e_u^2 \quad (3.46)$$

En remplaçant C_s par son expression, on obtient:

$$\dot{V} = -\alpha S_1^2 - \alpha S_1 \left(\mu(\varphi - S_3) - \beta(S_3 - S_2) - Q \operatorname{sgn}(S_3) \right) - (\eta + \rho) |S_1| + b_1 S_1 e_u - b_1 e_u^2$$

En imposant $\rho = \max \left| \alpha \left[-\mu(\varphi_M - S_3) + \beta(S_3 - S_2) \right] \right| + \alpha Q$, \dot{V} peut être bornée telle que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha S_1^2 - \eta |S_1| + \frac{1}{2} b_1 S_1^2 + \frac{1}{2} b_1 e_u^2 - b_1 e_u^2 \\ &\leq -\eta |S_1| - \left(\alpha - \frac{1}{2} b_1 \right) S_1^2 - \frac{1}{2} b_1 e_u^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Il est clair que pour $\alpha \geq \frac{1}{2} b_{\max}$, nous aurons :

$$\dot{V} \leq -\eta |S_1| \quad (3.48)$$

La relation (3.48) assure la bornitude de S_1 et $\tilde{\theta}$. Par ailleurs, selon la théorie de stabilité de Lyapunov, la surface de glissement S_1 est asymptotiquement stable. Par conséquent, $S_1 \rightarrow 0$ en un temps fini et une fois les modes de glissement établis, la dynamique du système est en moyenne définie par : $\dot{S}_1(t) \approx 0$.

L'établissement de la convergence de la surface de glissement S_1 engendre la convergence du processus du fait que la démonstration suit les mêmes étapes déjà détaillées au chapitre 2.

Ainsi, S_2 et S_3 tendent aussi vers zéro (sous la condition : $Q = \eta' + \max \left[\beta(S_3 - S_2) \right]$).

Théorème 3.1 *Soit la classe des SMSA à trois ddl de la forme (1.81) à laquelle sont associées les surfaces de glissement données par (1.82)-(1.84). Si ce système est soumis à la loi de commande adaptative (3.31) où les paramètres sont adaptés selon la loi (3.42). Par conséquent, les variables d'état du système en boucle fermée sont bornées et les surfaces de glissement convergent vers zéro.*

Remarque 3.3 Une version échantillonnée de la loi d'adaptation (3.42) peut être établie comme suit :

$$\frac{\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t - \Delta t)}{\Delta t} = -\eta_u \xi(x) \left(\frac{S_1(t) - S_1(t - \Delta t)}{\Delta t} + K \operatorname{sgn}(S_1(t)) + \alpha C_s(t) \right) \quad (3.49)$$

Où encore :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t - \Delta t) - \eta_u \xi(\underline{x}) \left[S_1(t) - S_1(t - \Delta t) + K \Delta t \operatorname{sgn}(S_1(t)) + \alpha C_s(t) \Delta t \right] \quad (3.50)$$

3.2.4. Exemples d'application : Double pendule inversé sur chariot

Pour valider la loi de commande développée dans la section précédente, notamment la commande découplée adaptative floue par mode de glissement pour un SMSA à trois ddl, nous considérons un DPI ayant pour dynamique (1.63). Les paramètres de la commande sont pris tels que: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, $K = 40$, $Q = 10$, $\mu = 19$, $\beta = 19$, $\eta = 2.5$, $\alpha = 1$.

L'objectif de maintenir les deux tiges à la position verticale, et de ramener le chariot vers les positions horizontales désirées telles que: $(x_{1d}, x_{2d}, x_{3d}) = (0, 0, 4m)$.

De plus, nous évaluons la robustesse dans le cas où la dynamique du système est sous l'effet conjugué d'une perturbation externe aléatoire d donnée par : $d = 0.1 \operatorname{rand}(t)$ et des variations paramétriques aléatoires de 50% touchant les deux masses: $\Delta m_i = 0.5 \operatorname{rand}(t)$ avec $i=(1,2)$.

Nous pouvons remarquer la convergence en un temps fini de tous les états du DPI: les angles d'inclinaison des deux tiges (Fig.3.4a et Fig.3.4b) et la position du chariot (Fig 3.4c).

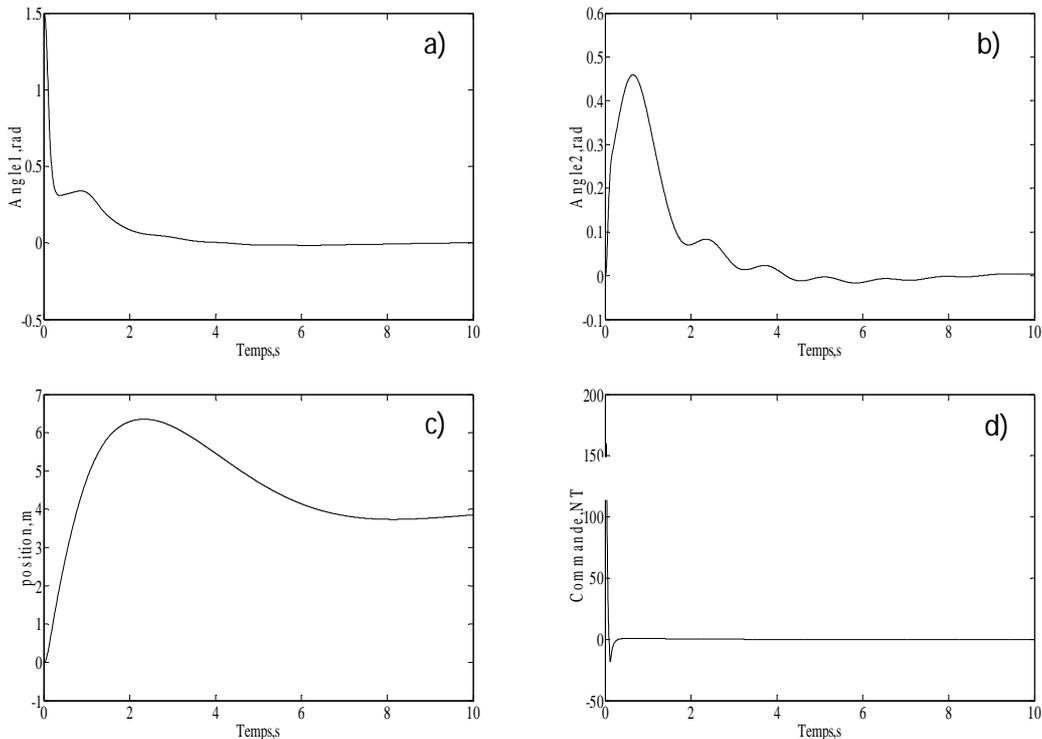


Fig 3.4 Commande découplée adaptative directe floue par les modes glissants du double pendule inversé sur chariot : a) Angle d'inclinaison de la tige 1, b) Angle d'inclinaison de la tige 2, c) Position du chariot, c) Commande appliquée au système.

Chaque état du système présente une allure quasi continue avec faible oscillation avant d'atteindre la valeur désirée, tandis que la position du chariot présente une convergence continue sans oscillation (Fig.3.4c). Pour les trois variables d'état, le temps de réponse est de 8s.

Le signal de commande correspondant montré à la figure 3.4d, présente un pic de 150N à $t=0.3s$ avant d'atteindre un régime stationnaire relatif à la mise du DPI sur le point d'équilibre.

De plus, les résultats obtenus pour ce SMSA à trois *ddl* montrent que les variations structurelles et les perturbations externes n'ont pas entravé la convergence satisfaisante du système.

3.3. Commande adaptative découplée indirecte floue par mode de glissement

Après avoir développé une approximation adaptative directe de la commande idéale par les modes glissants découplée (pour les SMSA à deux et à trois *ddl*), nous introduisons, dans cette section, une approximation indirecte de cette même commande via une identification directe des termes inconnus dans la dynamique du SMSA en exploitant les systèmes flous.

Dans cette section, nous tiendrons compte d'une erreur d'approximation non nulle des fonctions nonlinéaires $f_1(\underline{x})$ et $b_1(\underline{x})$ due à l'approximation par un système flou. Ainsi, nous supposons que ces fonctions non- linéaires $f_1(\underline{x})$ et $b_1(\underline{x})$, peuvent être approximées d'une façon optimale par des systèmes flous dans un ensemble Ω_x , comme suit:

$$f_1 = \xi_{f_1}^T(\underline{x})\theta_{f_1}^* - \varepsilon_{f_1}, \quad (3.51)$$

$$b_1 = \xi_{b_1}^T(\underline{x})\theta_{b_1}^* - \varepsilon_{b_1}, \quad (3.52)$$

où ε_{f_1} et ε_{b_1} sont les erreurs de l'approximation floue, $\theta_{f_1}^*$ et $\theta_{b_1}^*$ sont les vecteurs des paramètres optimaux inconnus qui minimisent les erreurs $|\varepsilon_{f_1}|$ et $|\varepsilon_{b_1}|$ dans l'ensemble Ω_x , $\xi_{f_1}^T(\underline{x})$ et $\xi_{b_1}^T(\underline{x})$ sont les vecteurs des fonctions de base convenablement choisis par le concepteur.

De plus, nous supposons que ces systèmes flous satisfont à la propriété d'approximation universelle dans l'ensemble opérationnel compact Ω_x , qui est supposé suffisamment grand pour garantir aux variables d'état d'évoluer dans Ω_x quand le système est en

boucle fermée. Ainsi, il est raisonnable de considérer que les erreurs d'approximation soient bornées pour tout $x \in \Omega_x$. En exploitant les estimés $\hat{\theta}_{f_1}$ et $\hat{\theta}_{b_1}$, relatifs aux vecteurs des paramètres optimaux $\theta_{f_1}^*$ et $\theta_{b_1}^*$ qui sont inconnus, les estimés \hat{f}_1 et \hat{b}_1 peuvent être alors exprimés par :

$$\hat{f}_1 = \xi_{f_1}^T(\underline{x}) \hat{\theta}_{f_1} \quad (3.53)$$

$$\hat{b}_1 = \xi_{b_1}^T(\underline{x}) \hat{\theta}_{b_1} \quad (3.54)$$

3.3.1. Commande adaptative indirecte des SMSA à deux *ddl*

En substituant dans l'expression (3.1) de la loi de commande idéale par les modes de glissement, les fonctions f_1 et b_1 par leurs estimés \hat{f}_1 et \hat{b}_1 , celle-ci devient :

$$u = -\hat{b}_1^{-1} \left(\hat{f}_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) + (K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \beta(S_1 - S_2)) \right) \quad (3.55)$$

En ajoutant et en retranchant \hat{f}_1 et $\hat{b}_1 u$ à l'expression (1.73) de \dot{S}_1 , celle-ci devient:

$$\dot{S}_1 = (f_1^* - \hat{f}_1) + (b_1^* - \hat{b}_1)u + \hat{f}_1 + \hat{b}_1 u + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) \quad (3.56)$$

A ce stade, on substitue u du terme $\hat{b}_1 u$ dans (3.56) par son expression (3.55), on aboutit alors à l'expression suivante de \dot{S}_1 :

$$\dot{S}_1 = (f_1 - \hat{f}_1) + (b_1 - \hat{b}_1)u - K \operatorname{sgn}(S_1) - QS_1 - \beta(S_1 - S_2) \quad (3.57)$$

On définit l'erreur de modélisation globale e_m par:

$$e_m = \left[(f_1 - \hat{f}_1) + (b_1 - \hat{b}_1)u \right] \quad (3.58)$$

En utilisant les relations de (3.51) à (3.54), on peut récrire (3.58) dans la forme suivante:

$$e_m = \xi_{f_1}^T(\underline{x}) \tilde{\theta}_{f_1} + \xi_{b_1}^T(\underline{x}) \tilde{\theta}_{b_1} u + \varepsilon_m \quad (3.59)$$

Où :

$$\tilde{\theta}_{f_1} = \theta_{f_1}^* - \hat{\theta}_{f_1}, \quad \tilde{\theta}_{b_1} = \theta_{b_1}^* - \hat{\theta}_{b_1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_m = -\varepsilon_{f_1} - \varepsilon_{b_1} u \quad (3.60)$$

Cependant, l'erreur d'approximation ε_m est supposée bornée vu que ε_m est une fonction dépendante de \underline{x} et u [Lab07].

Hypothèse 3.1 L'erreur d'approximation ε_m est bornée comme suit: $\|\varepsilon_m\| \leq \delta_m$ où $\delta_m > 0$.

Tenant compte de (3.57), la relation (3.58) nous permet alors d'obtenir:

$$e_m = \dot{S}_1 + [K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \beta(S_1 - S_2)] \quad (3.61)$$

Maintenant, pour pouvoir extraire les lois d'adaptation des paramètres, nous considérons la fonction de coût quadratique qui mesure l'écart entre ces nonlinéarités inconnues et leurs approximations floues comme suit:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e_m^2 = \frac{1}{2} (\xi_{f_1}^T(\underline{x}) \tilde{\theta}_{f_1} + \xi_{b_1}^T(\underline{x}) \tilde{\theta}_{b_1} u + \varepsilon_m)^2 \quad (3.62)$$

En appliquant la méthode du gradient, les dynamiques de θ_{f_1} et θ_{b_1} sont déterminées alors par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = -\eta \nabla_{\theta_{f_1}} J(\theta) \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = -\eta \nabla_{\theta_{b_1}} J(\theta) \end{cases} \quad (3.63)$$

où η est une constante positive. Ceci permet de déduire les lois d'adaptation $\dot{\hat{\theta}}_{f_1}$ et $\dot{\hat{\theta}}_{b_1}$ suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = \eta \xi_{f_1}(\underline{x}) e_m \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = \eta \xi_{b_1}(\underline{x}) u e_m \end{cases} \quad (3.64)$$

Du fait que l'erreur de modélisation est non disponible, aussi le terme e_m dans la relation (3.54) est remplacé par son expression équivalente (3.61) pour obtenir des lois d'adaptation réalisables comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = \eta \xi_{f_1}(\underline{S}) (\dot{S}_1 + K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \beta(S_1 - S_2)) \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = \eta \xi_{b_1}(\underline{S}) u (\dot{S}_1 + K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \beta(S_1 - S_2)) \end{cases} \quad (3.65)$$

Finalement et dans le but d'améliorer la robustesse des lois d'adaptation (3.65) face aux erreurs d'approximation, les lois (3.65) sont modifiées en introduisant les termes contenant le coefficient positif σ (σ -modification) comme suit [Ioa96]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = \eta \xi_{f_1}(\underline{S}) (\dot{S}_1 + K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \beta(S_1 - S_2)) - \eta \sigma \hat{\theta}_{f_1} \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = \eta \xi_{b_1}(\underline{S}) u (\dot{S}_1 + K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \beta(S_1 - S_2)) - \eta \sigma \hat{\theta}_{b_1} \end{cases} \quad (3.66)$$

Théorème 3.2 *Soit la classe des SMSA à deux ddl de la forme (1.81) pour laquelle nous définissons les surfaces de glissement (1.71) et (1.72). Si ce système est soumis à la loi de commande adaptative (3.55) où les paramètres sont adaptés selon les lois (3.66) et en supposant que l'erreur d'approximation est bornée telle que: $|\varepsilon_m| \leq \delta_m$ par conséquent, les variables d'état du système en boucle fermée sont uniformément bornées et les surfaces de glissement convergent vers un voisinage de l'origine dont la taille peut être ajustée par les paramètres de conception.*

Preuve. Pour étudier la stabilité du système en boucle fermée lorsqu'il est soumis à la commande adaptative (3.55) et où les paramètres sont modifiés selon les lois (3.66), nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} S_1^2 + \frac{1}{2\eta} (\tilde{\theta}_{f_1}^T \tilde{\theta}_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \tilde{\theta}_{b_1}) \quad (3.67)$$

La dynamique de V est alors telle que :

$$\dot{V} = S_1 \dot{S}_1 - \frac{1}{\eta} (\tilde{\theta}_{f_1}^T \dot{\hat{\theta}}_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \dot{\hat{\theta}}_{b_1}) \quad (3.68)$$

Or, de (3.61), on peut tirer \dot{S}_1 sous la forme :

$$\dot{S}_1 = e_m - [K \operatorname{sgn}(S_1) + QS_1 + \beta(S_1 - S_2)] \quad (3.69)$$

De plus, les lois d'adaptation modifiées (3.66) peuvent se mettre sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = \eta \xi_{f_1}(\underline{S}) e_m - \eta \sigma \hat{\theta}_{f_1} \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = \eta \xi_{b_1}(\underline{S}) u e_m - \eta \sigma \hat{\theta}_{b_1} \end{cases} \quad (3.70)$$

Ainsi, en remplaçant dans \dot{V} , \dot{S}_1 par (3.69), $\dot{\theta}_{f_1}$ et $\dot{\theta}_{b_1}$ par (3.70), on obtient :

$$\dot{V} = S_1 \left[e_m - K \operatorname{sgn}(S_1) - QS_1 - \beta(S_1 - S_2) \right] - \left[\tilde{\theta}_{f_1}^T \xi_{f_1}(\underline{S}) + \tilde{\theta}_{b_1}^T \xi_{b_1}(\underline{S}) u \right] e_m + \sigma \left(\tilde{\theta}_{f_1}^T \hat{\theta}_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \hat{\theta}_{b_1} \right) \quad (3.71)$$

D'autre part, la relation (3.59) permet de tirer:

$$\xi_{f_1}^T(\underline{x}) \tilde{\theta}_{f_1} + \xi_{b_1}^T(\underline{x}) \tilde{\theta}_{b_1} u = e_m - \varepsilon_m \quad (3.72)$$

Et par la suite, l'expression de \dot{V} devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S_1 \left(e_m - K \operatorname{sgn}(S_1) - QS_1 - \beta(S_1 - S_2) \right) - (e_m - \varepsilon_m) e_m + \sigma \left(\tilde{\theta}_{f_1}^T \hat{\theta}_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \hat{\theta}_{b_1} \right) \\ &= S_1 e_m - K |S_1| - QS_1^2 - \beta S_1 (S_1 - S_2) - e_m^2 + \varepsilon_m e_m + \sigma \left(\tilde{\theta}_{f_1}^T \hat{\theta}_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \hat{\theta}_{b_1} \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

En considérant les inégalités suivantes :

$$S_1 e_m \leq \frac{1}{2} e_m^2 + \frac{1}{2} S_1^2, e_m \varepsilon_m \leq \frac{1}{4} e_m^2 + \varepsilon_m^2, \quad (3.74)$$

$$\sigma \tilde{\theta}_{f_1}^T \hat{\theta}_{f_1} \leq -\frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{f_1}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{f_1}^*\|^2, \quad \sigma \tilde{\theta}_{b_1}^T \hat{\theta}_{b_1} \leq -\frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{b_1}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{b_1}^*\|^2$$

\dot{V} peut être borné comme suit :

$$\dot{V} \leq -K |S_1| - \left(Q - \frac{1}{2} \right) S_1^2 - \beta S_1 (S_1 - S_2) - \frac{1}{2} e_m^2 - \frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{f_1}\|^2 - \frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{b_1}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{f_1}^*\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{b_1}^*\|^2 + \delta_m^2 \quad (3.75)$$

En imposant $K = k + \max(|\beta(S_1 - S_2)|)$, (3.75) devient :

$$\dot{V} \leq -k |S_1| - \left(Q - \frac{1}{2} \right) S_1^2 - \frac{1}{2} e_m^2 - \frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{f_1}\|^2 - \frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{b_1}\|^2 + \Gamma_m \quad (3.76)$$

avec:

$$\Gamma_m = \frac{\sigma}{2} \|\theta_{f_1}^*\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{b_1}^*\|^2 + \delta_m^2 \quad (3.77)$$

Pour $Q > 1/2$ et $\gamma = \min \left(2 \left(Q - \frac{1}{2} \right), \sigma \eta \right)$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$-2\left(Q - \frac{1}{2}\right)\frac{S_1^2}{2} - \eta\sigma\left(\frac{1}{2\eta}\|\tilde{\theta}_{f_i}\|^2 + \frac{1}{2\eta}\|\tilde{\theta}_{b_i}\|^2\right) \leq -\gamma\left(\frac{S_1^2}{2} + \frac{1}{2\eta}\|\tilde{\theta}_{f_i}\|^2 + \frac{1}{2\eta}\|\tilde{\theta}_{b_i}\|^2\right)$$

Ou encore :

$$-2\left(Q - \frac{1}{2}\right)\frac{S_1^2}{2} - \eta\sigma\left(\frac{1}{2\eta}\|\tilde{\theta}_f\|^2 + \frac{1}{2\eta}\|\tilde{\theta}_{b_1}\|^2\right) \leq -\gamma\mathcal{V} \quad (3.78)$$

En tenant compte de (3.78), la relation (3.76) devient :

$$\dot{V} \leq -\gamma\mathcal{V} - \frac{1}{2}e_m^2 + \Gamma_m \leq -\gamma\mathcal{V} + \Gamma_m \quad (3.79)$$

L'équation (3.79) permet de déduire que la fonction de Lyapunov candidate satisfait la condition suivante :

$$0 \leq V(t) \leq \left(V(0) - \frac{\Gamma_m}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} + \frac{\Gamma_m}{\gamma} \quad (3.80)$$

La relation (3.80) permet de conclure que les grandeurs S_1 , $\tilde{\theta}_{f_i}$ et $\tilde{\theta}_{b_i}$ sont uniformément bornés. De plus, la surface de glissement S_1 converge asymptotiquement vers un voisinage de Ω_m défini tel que : $\Omega_m = \{S_1 \mid |S_1| \leq \sqrt{2\Gamma_m/\gamma}\}$ et sa dynamique moyenne est représentée alors par $\dot{S}_1 \approx 0$.

Par ailleurs, nous admettons que le voisinage $\pm\sqrt{2\Gamma_m/\gamma}$ est suffisamment petit pour qu'on puisse approximer $\text{sgn}(S_1)$ par : $\text{sgn}(S_1) \rightarrow S_1$. Aussi, la relation (3.69) se réduit à :

$$\dot{S}_1 \approx -(Q + \beta + K)\left(S_1 - \frac{\beta S_2 + e_m}{(Q + \beta + K)}\right) \quad (3.81)$$

Pour : $Q + \beta + K \gg 1$, le lemme 1 permet d'avoir : $S_1 \rightarrow \frac{\beta S_2 + e_m}{(Q + \beta + K)}$ ou encore :

$$S_2 \approx -\frac{e_m - (Q + \beta + K)\sqrt{2\Gamma_m/\gamma}}{\beta} \quad (3.82)$$

Remarque 3.4 En absence des erreurs d'approximation ($\varepsilon_{f_i} = 0$, $\varepsilon_{b_i} = 0$ et $\sigma = 0$), on aura : $\Gamma_m = 0$. Cela permet d'avoir : $(S_1, S_2) \rightarrow (0, 0)$ quand $t \rightarrow \infty$.

Remarque 3.5 Une version échantillonnée des lois d'adaptation (3.66) peut être établie telle que:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\theta}_{f_1}(t) - \hat{\theta}_{f_1}(t - \Delta t)}{\Delta t} &= \eta \xi(\underline{x}) \left(\frac{S_1(t) - S_1(t - \Delta t)}{\Delta t} + K \operatorname{sgn}(S_1(t)) + QS_1(t) + \beta(S_1(t) - S_2(t)) \right) \\ &\quad - \eta \sigma \hat{\theta}_{f_1}(t-1) \\ \frac{\hat{\theta}_{b_1}(t) - \hat{\theta}_{b_1}(t - \Delta t)}{\Delta t} &= \eta \xi(\underline{x}) u(t) \left(\frac{S_1(t) - S_1(t - \Delta t)}{\Delta t} + K \operatorname{sgn}(S_1(t)) + QS_1(t) + \beta(S_1(t) - S_2(t)) \right) \\ &\quad - \eta \sigma \hat{\theta}_{f_1}(t-1) \end{aligned} \quad (3.83)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{f_1}(t) &= \eta \xi(\underline{x}) \left\{ S_1(t) - \Delta t \left[S_1(t - \Delta t) + K \operatorname{sgn}(S_1(t)) + QS_1(t) + \beta(S_1(t) - S_2(t)) \right] \right\} \\ &\quad \hat{\theta}_{f_1}(t - \Delta t) - \eta \sigma \Delta t \hat{\theta}_{f_1}(t-1) \\ \hat{\theta}_{b_1}(t) &= \eta \xi(\underline{x}) u(t) \left\{ S_1(t) - \Delta t \left[S_1(t - \Delta t) + K \operatorname{sgn}(S_1(t)) + QS_1(t) + \beta(S_1(t) - S_2(t)) \right] \right\} \\ &\quad \hat{\theta}_{b_1}(t - \Delta t) - \eta \sigma \Delta t \hat{\theta}_{f_1}(t-1) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Où : Δt est le pas d'échantillonnage.

3.3.2. Exemples d'application

3.3.2.1. La bille roulante sur poutre

Nous avons pris les mêmes paramètres du système bille roulante et poutre. Les simulations effectuées pour le cas adaptatif indirect sont illustrées à la figure 3.5 pour des paramètres relatifs à la commande donnés au tableau 3.3.

Pour l'étude de la robustesse, nous avons considéré la même situation pour les variations structurelles et les bruits externes.

Tab 3.3 Paramètres de la commande indirecte pour le système bille roulante sur poutre

Les paramètres de glissement	Les paramètres des lois d'adaptation	Paramètres de simulation
$K = 4, Q = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \beta = 3$	$\eta = 1; \sigma = 0.01$	Pas de simulation: $h = 0.005$, position initiale : $(\alpha_0, x_0) = (\pi/3, (5m, 2m, 0))$

Il est clair que tous les états du système (angle d'inclinaison de la poutre et la position de la bille) convergent vers les valeurs désirées (Fig.3.5a & 3.5b). Evidemment, cette convergence vers les valeurs désirées laisse supposer que la commande converge aussi vers le signal idéal. En outre, la commande adaptative indirecte développée dans cette section présente une robustesse remarquable et le système reste insensible aux perturbations considérées durant les simulations numériques.

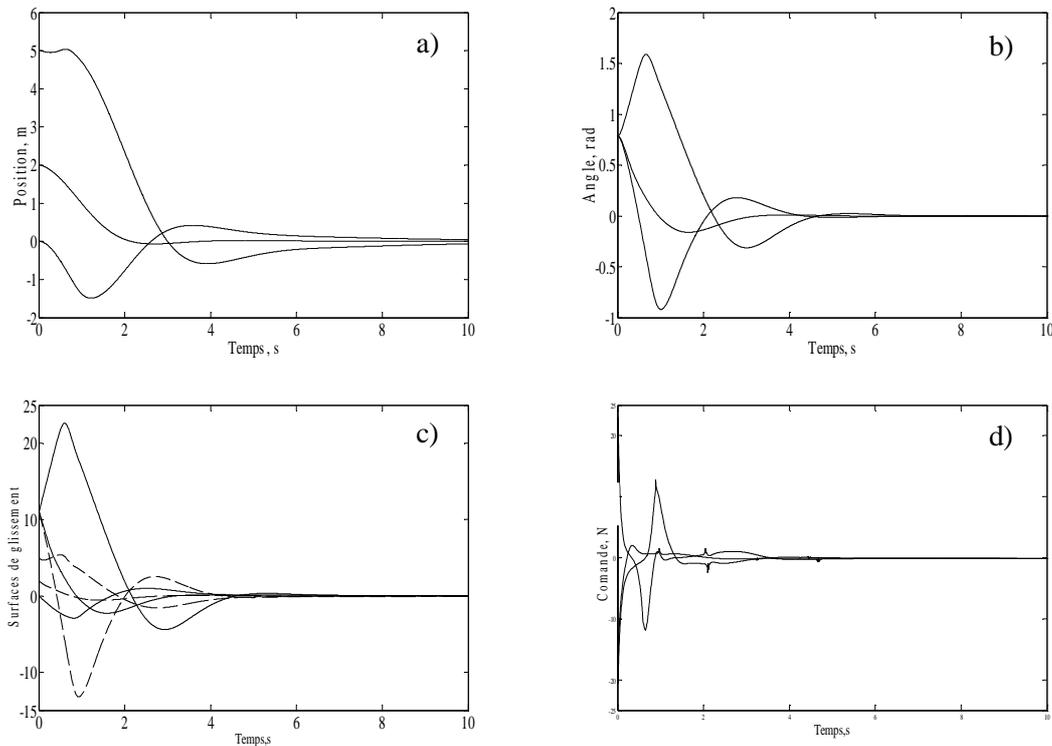


Fig 3.5 Commande découplée adaptative floue indirecte par mode de glissement de bille roulant sur poutre : a) Position de la bille, b) Angle d'inclinaison de la poutre, c) Surfaces de glissements, d) Commande appliquée au système.

3.3.2.2. Pendule inversé sur chariot

Les paramètres de la commande pour le cas indirect sont présentés au tableau 3.4 et le SMA utilisé est représenté par la même dynamique que celle indiquée par la relation (1.43) [Shi00] avec : $m_p = 0.05$, $m_c = 1$, $L = 0.5$, $g = 9.8$ et, $m_t = m_p + m_c$. Les résultats des simulations sont illustrés aux figures 3.6.

Tab 3.4 Les paramètres de commande du pendule inversé du chariot

Les paramètres de glissement	Les paramètres des lois d'adaptation	Paramètres de simulation
$K = 60, Q = 20,$ $\lambda_1 = 17, \lambda_2 = 5$	$\eta = 1 ; \sigma = 0.15$	Pas de simulation: $h = 0.01$, Position initiale: $(\alpha_0, x_0) = (-\pi/2, 0)$ objectif : $(\alpha_d, x_d) = (0, 5)$

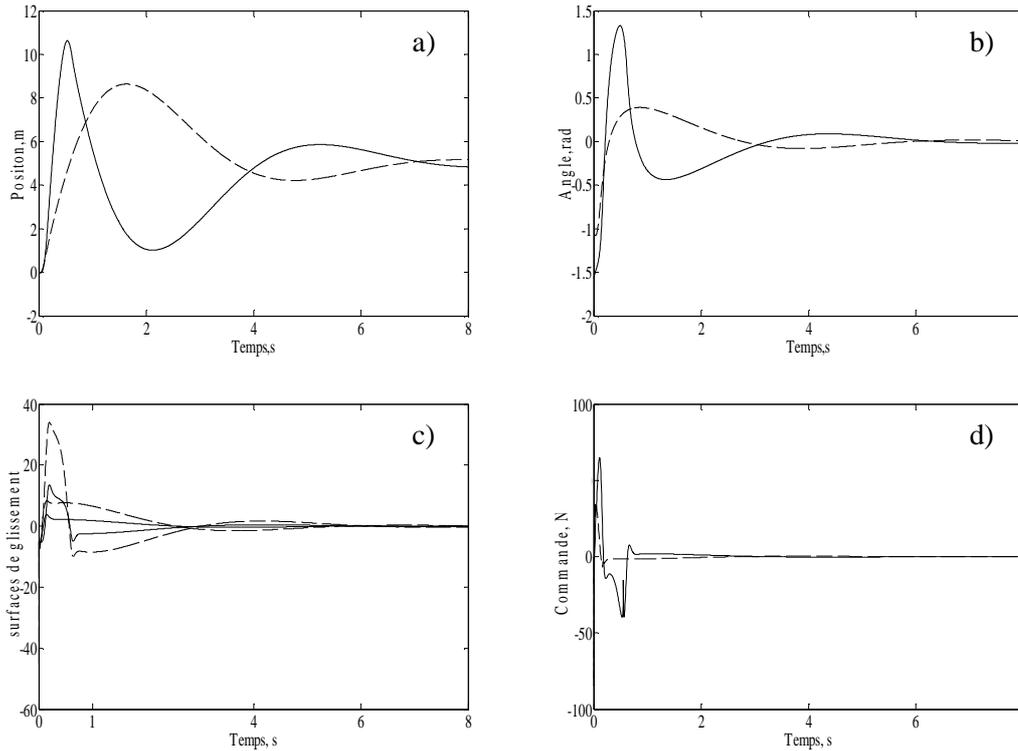


Fig 3.6 Commande découplée adaptative floue indirecte par mode de glissement du pendule inversée : a) Position du chariot, b) Angle d'inclinaison du pendule, c) Surfaces de glissements, d) Commande appliquée au système

Les états du système atteignent le régime statique durant le premier cycle (Fig. 3.3a & 3.3b). De plus, il est clair que tous les états du système convergent vers leurs valeurs désirées. Ceci est conforme à l'analyse de la convergence et de la stabilité développée dans la section précédente. Le signal de commande floue obtenu est présenté à la figure 3.6d. Ce signal présente un pic durant la phase transitoire (d'une valeur de 60N à l'instant $t=0.2s$).

Concernant la robustesse, il est évident que la commande indirecte adaptative développée pour les SMSA à deux *ddl* reste robuste vis-à-vis des mêmes perturbations considérées pour le cas de la commande adaptative directe.

3.3.3. Commande adaptative indirecte des SMSA à trois *ddl*

Dans cette section, on considère la commande idéale par les modes de glissement (3.29) déjà établie pour les SMSA à trois *ddl* où les fonctions inconnues f_1 et b_1 sont remplacées par leurs estimés \hat{f}_1 et \hat{b}_1 . Ceci conduit à la loi de commande suivante :

$$u = -\hat{b}_1^{-1} \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \hat{f}_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) + \alpha \left(S_1 - \left(-\mu (\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta (S_3 - S_2) \right) \right) \right] \quad (3.85)$$

où η, ρ, α et β sont des constantes positives telles que $K = \eta + \rho$ et

$$\begin{aligned}\rho &= \max \left| \left(-\mu(\varphi_M - S_3) + \beta(S_3 - S_2) \right) \right| + Q \\ Q &> \max \left[\beta(S_3 - S_2) \right] \\ \dot{\varphi} &= -\mu(\varphi - S_3) \\ \varphi_M &= \max |\varphi|\end{aligned}\quad (3.86)$$

Si dans l'expression de \dot{S}_1 , on ajoutant et on retranchant \hat{f}_1 et $\hat{b}_1 u$ celle-ci devient alors:

$$\dot{S}_1 = (f_1 - \hat{f}_1) + (b_1 - \hat{b}_1)u + \hat{f}_1 + \hat{b}_1 u + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_{1d}) \quad (3.87)$$

En remplaçant la commande u par son expression (3.85) dans (3.87), cette dernière devient:

$$\dot{S}_1 = (f_1 - \hat{f}_1) + (b_1 - \hat{b}_1)u - \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left(S_1 - \left(-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2) \right) \right) \right] \quad (3.88)$$

On définit l'erreur de modélisation ou d'identification globale e_m telle que :

$$e_m = (f_1 - \hat{f}_1) + (b_1 - \hat{b}_1)u \quad (3.89)$$

En utilisant (3.51)-(3.54), on peut récrire (3.89) comme suit :

$$e_m = \xi_{f_1}^T(\underline{S}) \tilde{\theta}_{f_1} + \xi_{b_1}^T(\underline{S}) \tilde{\theta}_{b_1} u + \varepsilon_m \quad (3.90)$$

avec :

$$\tilde{\theta}_{f_1} = \theta_{f_1}^* - \hat{\theta}_{f_1} \text{ et } \tilde{\theta}_{b_1} = \theta_{b_1}^* - \hat{\theta}_{b_1} \text{ et } \varepsilon_m = -\varepsilon_{f_1} - \varepsilon_{b_1} u \quad (3.91)$$

Nous supposons que l'erreur d'approximation ε_m est bornée par une constante positive δ_m [Lab07].

Tenant compte de l'expression (3.89) pour e_m , la relation (3.88) conduit à:

$$e_m = \dot{S}_1 + \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left(S_1 - \left(-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2) \right) \right) \right] \quad (3.92)$$

Dans le but d'établir les lois d'adaptation, nous considérons la fonction de coût quadratique qui est une mesure de l'écart entre ces nonlinéarités inconnues et leurs approximations adaptatives comme suit :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e_m^2 = \frac{1}{2} \left(\xi_{f_1}^T(\underline{S}) \tilde{\theta}_{f_1} + \xi_{b_1}^T(\underline{S}) \tilde{\theta}_{b_1} u + \varepsilon_m \right)^2 \quad (3.93)$$

En procédant de la même manière que dans le cas des systèmes à deux *ddl*, les dynamiques de θ_{f_1} et θ_{b_1} sont alors données par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = -\eta \nabla_{\theta_{f_1}} J(\theta) \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = -\eta \nabla_{\theta_{b_1}} J(\theta) \end{cases} \quad (3.94)$$

où η est une constante positive. Ce qui permet de déduire les lois d'adaptation suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = \eta \xi_{f_1}(\underline{x}) e_m \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = \eta \xi_{b_1}(\underline{x}) u e_m \end{cases} \quad (3.95)$$

Cependant, les lois (3.95) ne sont pas faisables vu la non disponibilité de l'erreur e_m , aussi, celle-ci est remplacée par son expression (3.92) pour aboutir aux lois d'adaptation suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = \eta \xi_{f_1}(\underline{x}) \left(\dot{S}_1 + \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left(S_1 - (-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right) \right] \right) \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = \eta \xi_{b_1}(\underline{x}) u \left(\dot{S}_1 + \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left(S_1 - (-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right) \right] \right) \end{cases} \quad (3.96)$$

Finalement, ces dernières lois sont à nouveau modifier en introduisant un terme de modification σ comme suit [Ioa96]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = \eta \xi_{f_1}(\underline{x}) \left(\dot{S}_1 + \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left(S_1 - (-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right) \right] \right) - \eta \sigma \hat{\theta}_{f_1} \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = \eta \xi_{b_1}(\underline{x}) u \left(\dot{S}_1 + \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left(S_1 - (-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right) \right] \right) - \eta \sigma \hat{\theta}_{b_1} \end{cases} \quad (3.97)$$

Théorème 3.3 Soit une classe des SMSA à trois *ddl* de la forme (1.81) pour laquelle les surfaces de glissement sont définies selon (1.82)-(1.34). Si l'erreur d'approximation de ce système est bornée telle que $|\varepsilon_m| \leq \delta_m$ et s'il est soumis à la loi de commande adaptative (3.94) où les paramètres sont modifiés selon (3.97) ; par conséquent, les

variables d'état du système en boucle fermée sont uniformément bornées et les surfaces de glissement convergent vers un voisinage de l'origine dont la dimension peut être ajustée par des paramètres de conception.

Preuve.

Soit la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V = \frac{1}{2} S_1^2 + \frac{1}{2\eta} (\tilde{\theta}_{f_1}^T \tilde{\theta}_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \tilde{\theta}_{b_1}) \quad (3.98)$$

Sa dérivée temporelle \dot{V} est donnée par :

$$\dot{V} = S_1 \dot{S}_1 - \frac{1}{\eta} (\tilde{\theta}_{f_1}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \dot{\tilde{\theta}}_{b_1}) \quad (3.99)$$

La relation (3.88) permet d'obtenir \dot{S}_1 sous la forme :

$$\dot{S}_1 = e_m - \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left(S_1 - (-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right) \right] \quad (3.100)$$

D'autre part, les lois d'adaptation (3.97) modifiées peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{f_1} = \eta \xi_{f_1}(\underline{S}) e_m - \eta \sigma \hat{\theta}_{f_1} \\ \dot{\hat{\theta}}_{b_1} = \eta \xi_{b_1}(\underline{S}) u e_m - \eta \sigma \hat{\theta}_{b_1} \end{cases} \quad (3.101)$$

En remplaçant \dot{S}_1 , $\dot{\hat{\theta}}_{f_1}$ et $\dot{\hat{\theta}}_{b_1}$ respectivement par leurs expressions (3.100) et (3.110),

\dot{V} devient alors :

$$\dot{V} = S_1 \left\{ e_m - \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left[S_1 - (-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right] \right] \right\} - \left(\xi_{f_1}^T(\underline{S}) \tilde{\theta}_{f_1} + \xi_{b_1}^T(\underline{S}) \tilde{\theta}_{b_1} u \right) e_m + \sigma \left(\tilde{\theta}_{f_1}^T \theta_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \theta_{b_1} \right) \quad (3.102)$$

Or, de la relation (3.90), on peut tirer la relation suivante :

$$e_m - \varepsilon_m = \xi_{f_1}^T(\underline{S}) \tilde{\theta}_{f_1} + \xi_{b_1}^T(\underline{S}) \tilde{\theta}_{b_1} u \quad (3.103)$$

Ce qui permet de modifier (3.102) comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= S_1 \left\{ e_m - \left[K \operatorname{sgn}(S_1) + \alpha \left(S_1 - (-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right) \right] \right\} \\
 &\quad - (e_m - \varepsilon_m) e_m + \sigma \left(\tilde{\theta}_{f_1}^T \hat{\theta}_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \hat{\theta}_{b_1} \right) \\
 &= S_1 e_m - K |S_1| - \alpha S_1^2 + \alpha S_1 \left[(-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right] \\
 &\quad - e_m^2 + \varepsilon_m e_m + \sigma \left(\tilde{\theta}_{f_1}^T \hat{\theta}_{f_1} + \tilde{\theta}_{b_1}^T \hat{\theta}_{b_1} \right)
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

En tenant compte des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 S_1 e_m &\leq \frac{1}{2} e_m^2 + \frac{1}{2} S_1^2, e_m \varepsilon_m \leq \frac{1}{4} e_m^2 + \varepsilon_m^2, \sigma \tilde{\theta}_{f_1}^T \hat{\theta}_{f_1} \leq -\frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{f_1}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{f_1}^*\|^2, \\
 \sigma \tilde{\theta}_{b_1}^T \hat{\theta}_{b_1} &\leq -\frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{b_1}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{b_1}^*\|^2 \text{ et } \varepsilon_m^2 \leq \delta_M^2 ;
 \end{aligned}$$

\dot{V} peut être est bornée tel que :

$$\dot{V} \leq -K |S_1| - \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) S_1^2 + \alpha S_1 C_s - \frac{1}{4} e_m^2 - \frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{f_1}\|^2 - \frac{\sigma}{2} \|\tilde{\theta}_{b_1}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{f_1}^*\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{b_1}^*\|^2 + \delta_M^2 \tag{3.105}$$

$$\text{Avec : } C_s = \left[(-\mu(\varphi - S_3) + Q \operatorname{sgn}(S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right]$$

Cependant, en rappelant les conditions (2.45) , notamment :

$$K = \eta + \rho \text{ et } \rho = \max \left| \alpha \left[(-\mu(\varphi - S_3) + \beta(S_3 - S_2)) \right] \right| + \alpha \tag{3.106}$$

Il vient:

$$\dot{V} \leq -\eta |S_1| - \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) S_1^2 - \frac{1}{4} e_m^2 - \frac{\sigma}{2} \left(\|\tilde{\theta}_{f_1}\|^2 + \|\tilde{\theta}_{b_1}\|^2 \right) + \Gamma_m \tag{3.107}$$

avec :

$$\Gamma_m = \frac{\sigma}{2} \|\theta_{f_1}^*\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\theta_{b_1}^*\|^2 + \delta_m^2 \tag{3.108}$$

Pour : $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\gamma = \min \left(2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right), \eta \sigma \right)$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$-2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{S_1^2}{2} - \eta \sigma \left(\frac{1}{2\eta} \|\tilde{\theta}_f\|^2 + \frac{1}{2\eta} \|\tilde{\theta}_{b_1}\|^2 \right) \leq -\gamma \left(\frac{S_1^2}{2} + \frac{1}{2\eta} \|\tilde{\theta}_f\|^2 + \frac{1}{2\eta} \|\tilde{\theta}_{b_1}\|^2 \right)$$

Ou:

$$-2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{S_1^2}{2} - \eta\sigma\left(\frac{1}{2\eta}\|\tilde{\theta}_f\|^2 + \frac{1}{2\eta}\|\tilde{\theta}_{b1}\|^2\right) \leq -\gamma V \quad (3.109)$$

En tenant compte de (3.109), la relation (3.107) devient :

$$\dot{V} \leq -\gamma V - \frac{1}{4}e_m^2 + \Gamma_m \leq -\gamma V + \Gamma_m \quad (3.110)$$

L'équation (3.110), nous permet de déduire que la fonction de Lyapunov candidate satisfait la condition suivante :

$$0 \leq V(t) \leq \left(V(0) - \frac{\Gamma_m}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} + \frac{\Gamma_m}{\gamma} \quad (3.111)$$

Selon (3.111), la trajectoire de $V(t)$ nous garantit que S_1 , $\tilde{\theta}_f$ et $\tilde{\theta}_b$ sont uniformément bornés. De plus, la surface de glissement S_1 converge asymptotiquement vers un voisinage Ω_m tel que $\Omega_m = \{S_1 \mid |S_1| \leq \sqrt{2\Gamma_m/\gamma}\}$ et présente une dynamique moyenne définie par $\dot{S}_1 = 0$. Par ailleurs, nous admettons que le voisinage $\pm\sqrt{2\Gamma_m/\gamma}$ est suffisamment petit pour que la fonction $\text{sgn}(S_1)$ puisse être approximée par: $\text{sgn}(S_1) \rightarrow S_1$. Par conséquent, la relation (3.100) devient :

$$\dot{S}_1 = -(K + \alpha) \left\{ S_1 - \alpha \frac{[-\mu(\phi - S_3) + \beta(S_3 - S_2) + Q \text{sgn}(S_3)] + e_m}{(K + \alpha)} \right\} \quad (3.112)$$

En utilisant le lemme 1, il est facile de trouver que :

$$S_1 \rightarrow \alpha \frac{(-\mu(\phi - S_3) + \beta(S_3 - S_2) + Q \text{sgn}(S_3)) + e_m}{(K + \alpha)} = \varpi \quad \text{pour : } \alpha + K \gg 1 \quad (3.113)$$

Cependant, vu que S_1 est bornée telle que $|S_1| \leq \sqrt{2\Gamma_m/\gamma}$, cela permet de conclure que:

$|\varpi| \leq \sqrt{2\Gamma_m/\gamma}$. Ainsi, (3.103) donne :

$$-\mu(\phi - S_3) \approx -\beta(S_3 - S_2) - Q \text{sgn}(S_3) + \varpi \frac{K + \alpha}{\alpha} \quad (3.114)$$

D'autre part, puisque la fonction ϕ est générée via la relation différentielle:

$\dot{\phi} = -\mu(\phi - S_3)$, il vient que $\phi \rightarrow S_3$ (selon lemme 1 ; Chapitre 2, section 2.2.2). Ainsi,

(3.114) permet d'écrire :

$$\dot{S}_3 \approx -\beta(S_3 - S_2) - Q \operatorname{sgn}(S_3) + \varpi \frac{K + \alpha}{\alpha} \quad (3.115)$$

Soit maintenant la fonction de Lyapunov suivante:

$$W = \frac{1}{2} S_3^2 \quad (3.116)$$

Sa dérivée temporaire est alors donnée par:

$$\dot{W} = S_3 \dot{S}_3 \quad (3.117)$$

En utilisant (3.115), l'équation (3.117) devient:

$$\dot{W} = -S_3 Q \operatorname{sgn}(S_3) - S_3 \left(\beta(S_3 - S_2) + \varpi \frac{K + \alpha}{\alpha} \right) \quad (3.118)$$

Aussi, pour un choix de Q tel que : $Q = \eta' + \max \left[\beta(S_3 - S_2) + \varpi \frac{K + \alpha}{\alpha} \right]$ et $\eta' > 0$, la relation (3.118) nous permet de conclure que:

$$\dot{W} \leq -\eta' |S_3| \quad (3.119)$$

La relation (3.119) signifie que $W(t) \leq W(0)$, et ainsi S_3 est bornée, i.e. $S_3 \in L_\infty$. De ce fait, la surface S_3 tend vers zéro en un temps t' donné par: $t' \leq |S_3(t=0)| / \eta'$ avec une dynamique exprimée par: $\dot{S}_3 \approx 0$ et $S_3(t) \approx 0$. Donc, quand $t \rightarrow \infty$ et en tenant compte de tous ceci, la relation (3.115) devient :

$$\dot{S}_3 \approx -\beta(S_3 - S_2) - Q \operatorname{sgn}(S_3) + \varpi \frac{K + \alpha}{\alpha} \approx 0 \quad (3.120)$$

Comme en moyenne, $\operatorname{sgn}(S_3) \rightarrow S_3$ quand $t \rightarrow \infty$ aussi, la relation (3.120) peut être réécrite telle que :

$$\dot{S}_3 \approx -(\beta + Q) \left(S_3 - \frac{\beta S_2 + \varpi \frac{K + \alpha}{\alpha}}{\beta + Q} \right) \quad (3.121)$$

L'application du lemme 1 dans le cas de la relation (3.121), nous permet de conclure que:

$$S_3 \rightarrow \frac{\beta S_2 + \varpi \frac{K + \alpha}{\alpha}}{\beta + Q} \approx 0 \text{ pour } \beta \gg 1, \quad (3.122)$$

Donc : $S_2 \rightarrow -\frac{\varpi}{\beta} \frac{K + \alpha}{\alpha}$, et sachant que $|\varpi| \leq \sqrt{2\Gamma_m/\gamma}$, on obtient:

$$|S_2| \approx \frac{K + \alpha}{\beta \alpha} \sqrt{2\Gamma_m/\gamma} \quad (3.123)$$

Remarque 3.6 Dans le cas de l'absence de l'erreur d'approximation, i.e. $\varepsilon_{f_1} = 0, \varepsilon_{b_1} = 0$ et $\sigma = 0$, il est évident que: $\Gamma_m = 0$ et ainsi: $\varpi = 0$. Par conséquent, l'ensemble Ω_m sera réduit à : $\Omega_m = \{S_1 \mid |S_1| \leq 0\}$ et par la suite on aura: $S_1 = 0$. De plus, la relation (3.123) permet d'avoir aussi: $S_2 \approx 0$. Finalement, le système converge vers l'ensemble défini par : $(S_1, S_2, S_3) \rightarrow (0, 0, 0)$ quand $t \rightarrow \infty$.

3.3.4. Exemple d'application

Dans cette section, nous nous proposons de valider, les lois de commande développées dans la section précédente, par simulations numériques dans le cas où le système étudié est un double pendule inversé (DPI). Les simulations du fonctionnement du DPI, sous la conduite des lois de commande proposées, ont pour objectifs d'évaluer d'une part la qualité de la stabilisation du DPI et d'autre part les performances en termes de robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations externes. Nous exploitons le modèle, donné sous la forme différentielle réduite (2.71), pour d'une part calculer les lois de commande du DPI et pour d'autre part entreprendre la simulation de son fonctionnement.

Les paramètres du DPI soumis à l'étude sont comme suit : $l_1 = 1m, l_2 = 1m, m_1 = 1kg, m_2 = 1kg$. Après plusieurs essais de simulations à la recherche de la réponse satisfaisante du DPI sous commande, les coefficients du contrôleur ont été fixés comme suit : $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.5, K = 45, Q = 2, \mu = 10, \beta = 10, \eta = 2.5, \alpha = 1$.

Pour l'étude de la robustesse, nous avons pris les mêmes valeurs des perturbations que celles pour le cas de la commande adaptative directe. L'objectif recherché revient à maintenir les deux tiges à la position verticale, et de ramener le chariot vers les positions horizontales désirées telles que: $(x_{1d}, x_{2d}, x_{3d}) = (0, 0, 4m)$. Les résultats de simulations sont présentés à la figure 3.7.

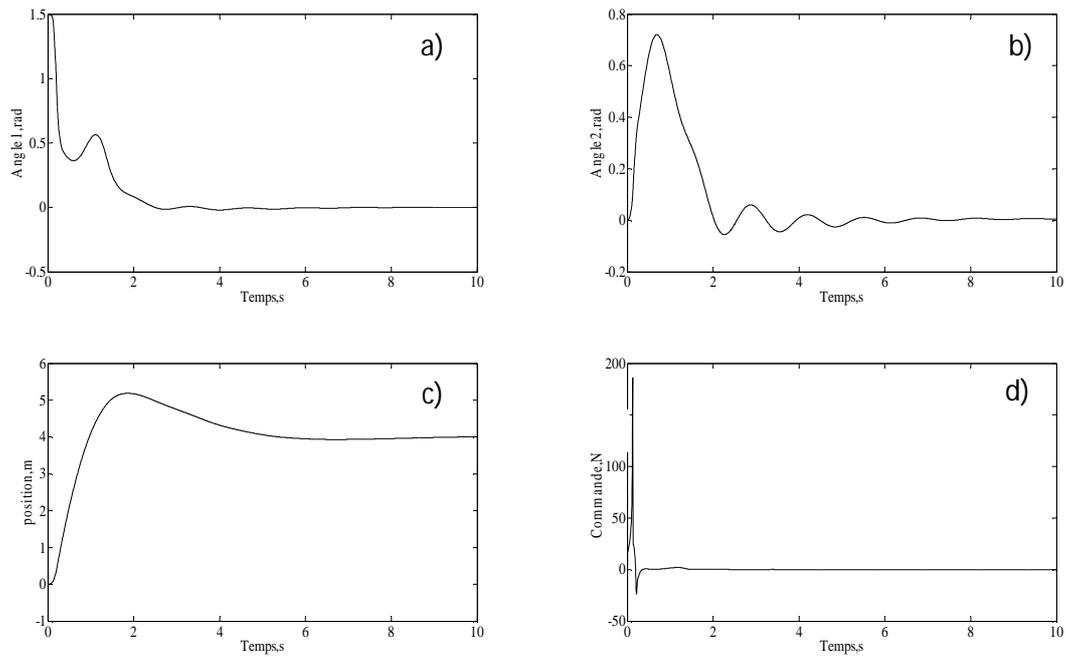


Fig 3.7 Commande découplée adaptative floue indirecte par mode de glissement du DPI: a) Angle d'inclinaison de la tige 1, b) Angle d'inclinaison de la tige 2, c) Position du chariot, c) Signal de commande appliqué au DPI.

Evidemment, nous pouvons constater en première lecture la convergence en un temps fini de tous les états du DPI: les angles d'inclinaison des deux tiges (Fig.3.7a et Fig.3.7b) et la position du chariot (Fig. 3.7c). Il est clair que l'évolution des angles d'inclinaison des deux tiges présente une allure quasi continue avec une faible oscillation avant d'atteindre la valeur désirée, alors que la position du chariot présente une convergence sans oscillation (Fig.3.7c). Pour les trois variables d'état, le temps de réponse est de 8s. Le signal de la commande correspondant illustré à la figure 3.7d, il présente un pic de 180N à $t=0.3s$ avant d'atteindre un régime stationnaire relatif à la mise du DPI sur le point d'équilibre.

Pour toutes ces simulations, on constate que la robustesse de la commande adaptative indirecte est aussi assurée puisque les performances du système restent satisfaisantes même sous l'effet de toutes les perturbations considérées.

3.4. Conclusion

En conclusion, nous avons dans cette partie développée une synthèse de la commande adaptative découplée par les modes de glissement en utilisant les systèmes flous. Dans les deux approches présentées dans ce chapitre : directe et indirecte ; l'ajustement des paramètres du système flou a été effectué en optant une adaptation basée sur l'identification de l'erreur entre la fonction inconnue et son approximation adaptative. Nous avons vu que l'extraction des différentes lois d'adaptation des paramètres était

effectuée en utilisant la méthode de descente du gradient. L'application de la méthode proposée à différents SMSA a donné des résultats satisfaisants.

De plus, nous avons montré que les lois de commande proposées permettent la stabilisation du système aux valeurs de référence tout en assurant la bornitude de tous les signaux.

Commande par la logique de commutation

Dance ce chapitre, nous allons présenter la conception d'une commande à base de la logique de commutation. Une étude détaillée est effectuée dans les sections de ce chapitre dans le cas des SMSA à 2 et 3 ddl.

4.1. Introduction

La technique de commutation est introduite au niveau de la commande pour enrichir le domaine de la régulation automatique et d'offrir d'autres techniques assurant la stabilité. En effet, il était montré que la commutation entre de multiples modèles adaptatifs peut d'une part apporter une amélioration à la réponse transitoire des systèmes de commande adaptative ([Mor92] et [Nar94]) et d'autre part surmonter les limitations de la commande adaptative et donc améliorer ses performances [Gas00].

Dans plusieurs domaine d'application industrielle, l'idée de l'introduction de la logique de commutation dans la commande est sujette d'un grand intérêt vu que le procédé à commander subit des changements du mode opératoire de telle façon qu'un seul contrôleur ne permettra pas de garantir la stabilité et la convergence en boucle fermée [Mos95], [Ioa96], [Hes01] et [And08].

En effet, la commutation entre les contrôleurs est très intéressante pour assurer une protection du procédé contre tout effet indésirable de l'environnement où le procédé opère [Goo01], [Gla00]. De plus, les changements de la dynamique du procédé sous commande et le caractère de perturbation, nécessitera un changement rapide dans l'action du contrôleur pour maintenir les performances en boucle fermée [Nar94], [Hes01].

Ainsi, la commande par la "logique de commutation" ou par la supervision et encore dite la commande multi contrôleurs, s'inscrit dans la cadre de la commande de procédés non linéaires. Une analogie avec la commande adaptative est possible dans le cas où les contrôleurs locaux sont de même structure, la structure équivalente est un contrôleur dont les paramètres varient au cours du temps, mais cette évolution des paramètres n'est pas régie par une équation dynamique. De même, une analogie peut être faite avec la commande floue avec des contrôleurs de ce type [Gas00].

L'architecture la plus simple pour la commande par commutation se résume en un système utilisant une famille de contrôleurs u_i , i.e.: la sortie mesurée y , du système à commander, active un ensemble de contrôleurs u_i générant à chaque instant des entrées candidates lesquelles sont susceptibles d'être utilisées comme entrée du système de commande.

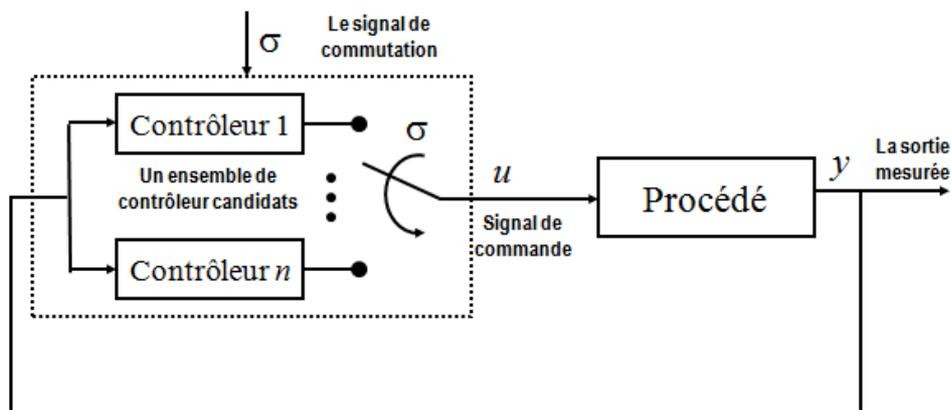


Fig 4.1 Le schéma de principe de la commande par la logique de commutation

4.2. Concept général de la commande via la logique de commutation

Cette technique de commande permet la commutation entre les lois de commande selon la structure et l'environnement du procédé à réguler et elle autorise l'utilisation de contrôleurs obtenus par des méthodes diverses. En général, elle consiste en deux étapes:

- *Synthèse de contrôleurs stabilisants locaux* : en connaissant a priori le comportement du système dans différentes zones de fonctionnement, la synthèse de contrôleurs locaux devient alors moins compliquée.
- *Synthèse de la commande globale* : dans cette étape, on doit prendre en compte ces lois de commande locales afin d'élaborer la loi de commande effectivement appliquée au système à réguler. Ce rôle est rempli par le commutateur à déterminer.

En outre pour chaque sous-système, l'objectif du commutateur est de synthétiser un signal de commande final à partir des différentes sorties des contrôleurs relatifs à ce sous-système. Le commutateur peut avoir différentes formes : non linéaire, floue ou adaptative, et dépend des entrées et de la sortie correspondantes.

De point de vue structure, deux types de commutations sont illustrées dans la littérature spécialisé : *commutation franche* et *commutation pondérée*.

Pour la commutation franche, le commutateur choisit uniquement un seul contrôleur parmi un ensemble de contrôleurs locaux. Cette sélection peut faire intervenir un superviseur constitué d'un ensemble de prédicteurs. L'algorithme de commutation est alors basé sur la minimisation d'un critère quadratique : le correcteur associé au prédicteur correspondant au plus petit critère est sélectionné par le commutateur et constitue le signal de commande du procédé (Exemple : [Hun97], [Dub94],[Xu00]).

Pour la deuxième, il s'agit en fait d'un "mélangeur" capable de pondérer les différents signaux de commande. Ainsi, plusieurs signaux de commande issus des correcteurs locaux sont pris en compte dans l'élaboration du signal de commande final [Nak97]. L'un des objectifs est d'avoir des transitions moins "brutales" pour passer d'un contrôleur local à un autre. Dans la littérature, plusieurs méthodes sont utilisées, notamment à commutation floue (exemple: [Nak97], [Nar89]).

La structure en plusieurs sous-systèmes des SMSA constitue une caractéristique avantageuse à l'application de la commande par la logique de commutation. La solution réside dans l'utilisation d'une des commandes stabilisantes pour chaque sous-systèmes ou bien pour un ensemble de sous-système. Dans ce chapitre, nous établissons une logique de commutation pondérée entre les différentes commandes stabilisantes pour chaque sous-système. Cette commutation peut être déduite en considérant un ensemble élargi de signaux de commande. Que se soit pour les SMSA à deux ou à trois *ddl*, la logique de commutation est conçue en se basant sur la méthode du gradient et l'analyse de la stabilité globale du système à commander est effectuée en utilisant la théorie de Lyapunov.

4.3. Conception de la commande par logique de commutation : SMSA à 2 ddl

4.3.1. Formulation du problème

Comme vu aux chapitres précédents, ces entrées de commande u_1 et u_2 n'assurent pas à chaque sous-système de poursuivre sa propre surface de glissement vu qu'elles ne considèrent que la commande exclusive des sous-systèmes (x_1, x_2) et (x_3, x_4) . Ainsi, une commutation entre les deux commandes u_1 et u_2 peut être très intéressante pour assurer la convergence des deux sous-systèmes. En se basant sur le principe de la commande par la logique de commutation, nous développons une nouvelle méthodologie de synthèse de la commande pour assurer la convergence du système en boucle fermée vers le point d'équilibre défini par : $\Omega = \{ \underline{x} : \{ S_1(\underline{x}, t) = 0 \} \cap \{ S_2(\underline{x}, t) = 0 \} \}$. La commande globale u issue de la commutation entre les deux commandes (u_1 et u_2) par les modes de glissement est donnée par la relation suivante :

$$u = \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 \quad (4.1)$$

Dans (4.1), α est considéré comme le paramètre de commutation pour l'adaptation de la commande globale dans le but de stabiliser les deux surfaces S_1 et S_2 . Le paramètre α vérifie la condition :

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.2)$$

Evidemment, pour $\alpha = 0$ ou 1 , la commande globale prend exclusivement la valeur u_1 ou u_2 . La stratégie globale, est basée sur ces considérations et le paramètre α joue le rôle de commutateur qui attribue une certaine pondération pour chaque commande u_1 et u_2 pour générer le signal de commande globale qui stabilise le système global.

4.3.2. Conception de la commande

La partie suivante est consacrée à la synthèse d'une loi de commande par la logique de commutation. En rappelant les formules (1.63) et (1.64) qui définissent les dérivées par rapport au temps des surface de glissement S_1 et S_2 respectivement, et en remplaçant u par sa valeur (4.1), on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= b_1 \left(\alpha (u_1 - u_2) + u_2 - u_{eq_1} \right) \\ \dot{S}_2 &= b_2 \left(\alpha (u_1 - u_2) + u_2 - u_{eq_2} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le problème revient maintenant à chercher la valeur optimale α^* qui annule simultanément \dot{S}_1 et \dot{S}_2 . Ainsi, (4.3) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{S}_1}{\partial \alpha} &= b_1 (u_1 - u_2) \\ \frac{\partial \dot{S}_2}{\partial \alpha} &= b_2 (u_1 - u_2)\end{aligned}\quad (4.4)$$

Il est évident que si $u_1 = u_2$ on a: $\frac{\partial \dot{S}_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \dot{S}_2}{\partial \alpha} = 0$. Dans ce cas, la relation (4.3) assure que $u = u_1 = u_2$, et par la suite, les deux sous-systèmes sont alors soumis au même signal de commande qui garantit la convergence des surfaces S_1 et S_2 . En effet, quand : $u = u_1 = u_2$, il est clair que le glissement idéal défini par la relation (1.69) est satisfaite. De plus, un choix des gains K_1 et K_2 , suivant la condition (1.70) garantit à l'état du système d'atteindre les surfaces de glissement S_1 et S_2 de maintenir son mouvement de glissement et de ce fait la dynamique du système se réduit à $\partial \dot{S}_1 = \partial \dot{S}_2 = 0$.

Afin d'assurer un signal de commande qui est proche des deux commandes décentralisées u_1 et u_2 , nous considérons la fonction quadratique suivante :

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \left[(u - u_1)^2 + (u - u_2)^2 \right] \quad (4.5)$$

qui mesure la différence entre la commande globale (4.1) et les commandes décentralisée désirée (1.67) et (1.68).

En remplaçant dans (4.5) la commande u par (4.1), il vient :

$$\begin{aligned}J(\alpha) &= \frac{1}{2} \left[(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 - u_1)^2 + (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 - u_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(u_1 - u_2)^2 (\alpha - 1)^2 + (u_1 - u_2)^2 \alpha^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (u_1 - u_2)^2 [2\alpha^2 - 2\alpha + 1]\end{aligned}\quad (4.6)$$

Nous utilisons la méthode du gradient pour minimiser la fonction du coût (4.6) vis à vis du paramètre α . Aussi, la trajectoire $\alpha(t)$, issue de la méthode du gradient [Wan94], vérifie la dynamique suivante:

$$\dot{\alpha} = -\kappa \nabla_{\alpha} J(\alpha) \text{ et } \kappa > 0 \quad (4.7)$$

Comme le gradient de $J(\alpha)$ par rapport à α est donné par:

$$\nabla_{\alpha} J(\alpha) = \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = (u_1 - u_2)^2 (2\alpha - 1) \quad (4.8)$$

Par conséquent la dynamique (4.7) est déterminée par:

$$\dot{\alpha} = -\kappa (u_1 - u_2)^2 (2\alpha - 1) \quad (4.9)$$

Comme $0 \leq \alpha \leq 1$ aussi, l'équation (4.9) devient :

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} -\kappa (u_1 - u_2)^2 (2\alpha - 1), & \text{si } : 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.10)$$

D'une autre manière, on peut extraire à partir de (4.9) une valeur de α non différentielle comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = -\kappa (u_1 - u_2)^2 (2\alpha - 1) &\rightarrow \frac{2d\alpha}{(2\alpha - 1)} = -2\kappa (u_1 - u_2)^2 dt \\ &\rightarrow \ln |2\alpha - 1| = -2\kappa \int_0^{\infty} (u_1 - u_2)^2 dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ce qui permet d'avoir :

$$|2\alpha - 1| = e^{-2\kappa \int_0^{\infty} (u_1 - u_2)^2 dt} \quad (4.12)$$

D'où :

$$\alpha = \begin{cases} \frac{e^{-2\kappa \int_0^{\infty} (u_1 - u_2)^2 dt} + 1}{2} \\ \text{ou} \\ -\frac{e^{-2\kappa \int_0^{\infty} (u_1 - u_2)^2 dt} - 1}{2} \end{cases} \quad (4.13)$$

Supposition 4.1 Nous supposons que les commandes u_1 et u_2 sont contraintes à la condition $|u_1| \leq U_m$ et $|u_2| \leq U_m$ et $U_m > 0$ durant tout le processus d'adaptation.

Il est évident que l'équation (4.12) assure la condition $0 \leq \alpha \leq 1$, de plus à partir de (4.6),

$$\text{on a : } 0 \leq J(\alpha) \leq \frac{1}{2}(u_1 - u_2)^2 \leq 2U_m^2.$$

D'autre part, le minimum de $J(\alpha)$ correspond à : $\Omega = \{u_1, u_2, \alpha \mid (u_1 = u_2) \text{ ou } \alpha = 1/2\}$.

Ce qui nous permet de distinguer deux cas :

Cas .1: $\alpha = 1/2$.

En remplaçant $\alpha = 1/2$ dans l'équation (4.9), on aura : $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ et

$$J\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(u_1 - u_2)^2 = C^2 \leq U_m^2 \text{ où } C \text{ est une constante réelle. Donc, on peut écrire:}$$

$u_1 = u_2 + 2C$ et donc u prend les 2 formes suivantes : $u = u_1 - C$ et $u = u_2 + C$. Aussi en exploitant ces deux formes de u les dynamiques \dot{S}_1 et \dot{S}_2 données respectivement par (1.63) et (1.64), deviennent :

$$\dot{S}_1 = f_1 + b_1(u_1 - C) + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_{1d}) \quad (4.14)$$

$$\dot{S}_2 = f_2 + b_2(u_2 + C) + \lambda_2(x_4 - \dot{x}_{3d}) \quad (4.15)$$

Maintenant, posons :

$$K_1 = b_1 U_m + \eta_1 \text{ et } K_2 = b_2 U_m + \eta_2 \quad (4.16)$$

et soit la fonction de Lyapunov relative aux surfaces S_1 et S_2 suivante :

$$V = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2) \quad (4.17)$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V} = S_1 \dot{S}_1 + S_2 \dot{S}_2 \quad (4.18)$$

En remplaçant \dot{S}_1 et \dot{S}_2 par leurs expressions (4.14) et (4.15) il vient :

$$\dot{V} = S_1(f_1 + b_1(u_1 - C) + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_{1d})) + S_2(f_2 + b_2(u_2 + C) + \lambda_2(x_4 - \dot{x}_{3d})) \quad (4.19)$$

En utilisant u_1 et u_2 selon (1.77) et (1.78) de plus K_1 et K_2 sont imposés selon (4.16), \dot{V} devient :

$$\dot{V} = S_1(-b_1 C - K_1 \operatorname{sgn}(S_1)) + S_2(b_2 C - K_2 \operatorname{sgn}(S_2)) \quad (4.20)$$

D'où :

$$\dot{V} \leq \eta_1 |S_1| - \eta_2 |S_2| \quad (4.21)$$

Ainsi, d'après la théorie de stabilité de Lyapunov, les deux surfaces S_1 et S_2 sont stables et convergent vers zéro.

Cas .2: $\alpha \neq 1/2$.

En rappelant la première équation de (4.10), on a: $\dot{\alpha} = -\kappa(u_1 - u_2)^2(2\alpha - 1) = 0$, et par la suite, nous aurons: $u_1 = u_2$ ou $\alpha = 1/2$.

Comme $\alpha \neq 1/2$, il vient que $\dot{\alpha} = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. Donc les deux surfaces S_1 et S_2 seront stables et convergent vers zéro sans aucune conditions sur les paramètres de conception des commandes u_1 et u_2 .

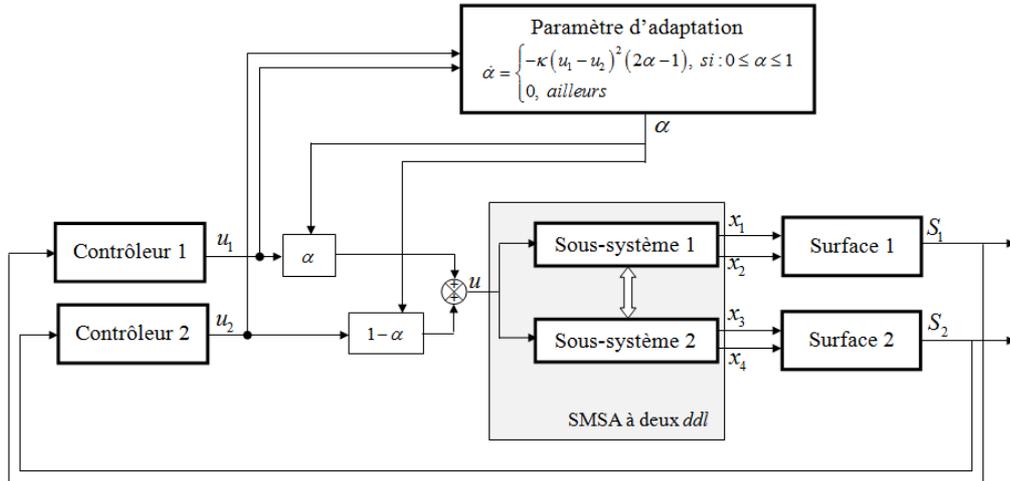


Fig 4.2 Le schéma global de la commande des SMSA à deux ddl

Proposition 4.1 [Naf11a] Soit une classe de SMSA avec 2 ddl de la forme (1.70) à laquelle sont associées les surfaces de glissement (1.71) et (1.72), et les lois de commande décentralisées (1.77) et (1.78) respectivement. Si ce système est soumis à la loi de commande globale (4.1) où le paramètre α est adapté selon (4.10) (ou (4.13)) et les gains K_1 et K_2 vérifient la condition (4.16) par conséquent, toutes les variables d'état du système en boucle fermée sont uniformément bornées et toutes les surfaces de glissement convergent vers zéro.

Remarque 4.1 La structure de commande définie par (4.1) peut être appliquée à un ensemble de la paire des commandes (u_1 et u_2) autre que celle définie par (1.77) et (1.78) et en particulier aux SMSA ayant l'un des gains nul (b_1 ou b_2).

Par exemple pour les SMSA à 2ddl, nous pouvons créer deux autres surfaces à partir de (1.71) et (1.72) telles que:

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_1 - S_2 = \dot{x}_1 + \lambda_1 \tilde{x}_1 - \dot{x}_3 - \lambda_2 \tilde{x}_3 \\ S_{21} &= S_1 + S_2 = \dot{x}_1 + \lambda_1 \tilde{x}_1 + \dot{x}_3 + \lambda_2 \tilde{x}_3 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dont les dérivées temporelles sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{S}_{12} &= f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) - f_2 - \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d}) + u(b_1 - b_2) \\ \dot{S}_{21} &= f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) + f_2 + \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d}) + u(b_1 + b_2) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Et les commandes équivalentes sont déterminées par :

$$\begin{aligned} u_{eq_{12}} &= -(b_1 - b_2)^{-1} (f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) - f_2 - \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d})) \\ u_{eq_{21}} &= -(b_1 + b_2)^{-1} (f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) + f_2 + \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d})) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Avec : $(b_1 - b_2) \neq 0$ et $(b_1 + b_2) \neq 0$.

Les commandes en mode glissant possibles pour chaque sous-système sont déduites telles que :

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_{S_{12}} + u_{eq_{12}} \\ u_{21} &= u_{S_{21}} + u_{eq_{21}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

où:

$$\begin{aligned} u_{S_{12}} &= -K_{12} (b_1 - b_2)^{-1} \text{sgn}(S_{12}) \\ u_{S_{21}} &= -K_{21} (b_1 + b_2)^{-1} \text{sgn}(S_{21}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Et K_{12} et K_{21} sont des coefficients strictement positifs.

La loi de commutation entre les deux contrôleurs générant, par la technique des modes glissants, les commandes u_{12} et u_{21} garde la même forme (4.1) donc, la commande globale u est telle que:

$$u = \alpha u_{12} + (1 - \alpha) u_{21} \quad (4.27)$$

En suivant la même méthode développée dans le cas de la commande globale (4.1), on peut montrer que la commande (4.27) peut aussi assurer la convergence du système en boucle fermée vers le point d'équilibre défini par l'ensemble Ω_{12} tel que:

$$\Omega_{12} = \{x : \{S_{12}(x, t) = 0\} \cap \{S_{21}(x, t) = 0\}\}. \text{ Ainsi, (4.21) permet d'avoir: } S_1 = 0 \text{ et } S_2 = 0$$

4.3.3. Exemples et simulation

Afin de tester la loi de commande adaptative par logique de commutation au cas des SMSA à deux ddl , nous considérons deux exemples : le premier concerne la commande de la bille roulant sur poutre (beam and ball) tandis que le deuxième est dédié à la commande d'un pendule inverse sur chariot.

Pour la bille roulante sur poutre (dynamique donnée par 1.7.1.7, §1), nous allons appliquer la loi de commande proposée (Proposition 4.1). Cependant, ce système particulier présente un gain nul ce qui nécessite l'élaboration d'une deuxième commande stabilisante (*Remarque 4.1*). Ainsi, on choisit une surface de glissement additionnelle S donnée par: $S = S_1 - S_2$. La commande robuste par MG peut être écrite telle que :

$$u_s = -K(b_1 - b_2)^{-1} \left[\text{sgn}(S) + f_1 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_{1d}) - f_2 - \lambda_2(x_4 - \dot{x}_{3d}) \right] \quad (4.28)$$

Celle-ci assure en fait la convergence de S_1 vers S_2 ($S_1 \rightarrow S_2$).

L'objectif de la commande par commutation est donc d'effectuer une commutation entre u_s et u_1 pour assurer la convergence de S_2 vers S_1 et la convergence de S_1 vers zéro.

Donc la commande globale u est telle que:

$$u = \alpha u_s + (1 - \alpha) u_1 \quad (4.29)$$

Les paramètres relatifs à la commande et, qui ont conduit à des résultats satisfaisants, sont tels que: $K_1 = 1, K = 1, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 1$ et $\kappa = 0.2$. L'étude de la robustesse est effectuée dans le cas où la dynamique du système est assujettie à une perturbation externe de la forme $d = \text{rand}(t)$ et en présence d'une variation structurelle aléatoire de 100% affectant la masse de la bille telle que: $\Delta M = 0.05 \text{rand}(t)$.

Les résultats de simulations représentés aux figures 4.3a et 4.3b montrent clairement que tous les états du système convergent vers les valeurs désirées (position de la bille et angle de la poutre). On constate une convergence sans oscillation de la position de la bille ainsi que l'angle d'inclinaison de la poutre en un temps de réponse de 10s sans qu'il y ait un important dépassement par rapport à la valeur désirée durant la période transitoire. Le signal de commande ainsi que le paramètre de commutation apparaissent respectivement aux figures 4.3c et 4.3d. Il est clair que la valeur de la commande globale présentée à la Figure 4.3c ne dépasse pas 6N ce qui donne avantage à la stratégie adoptée pour ce système.

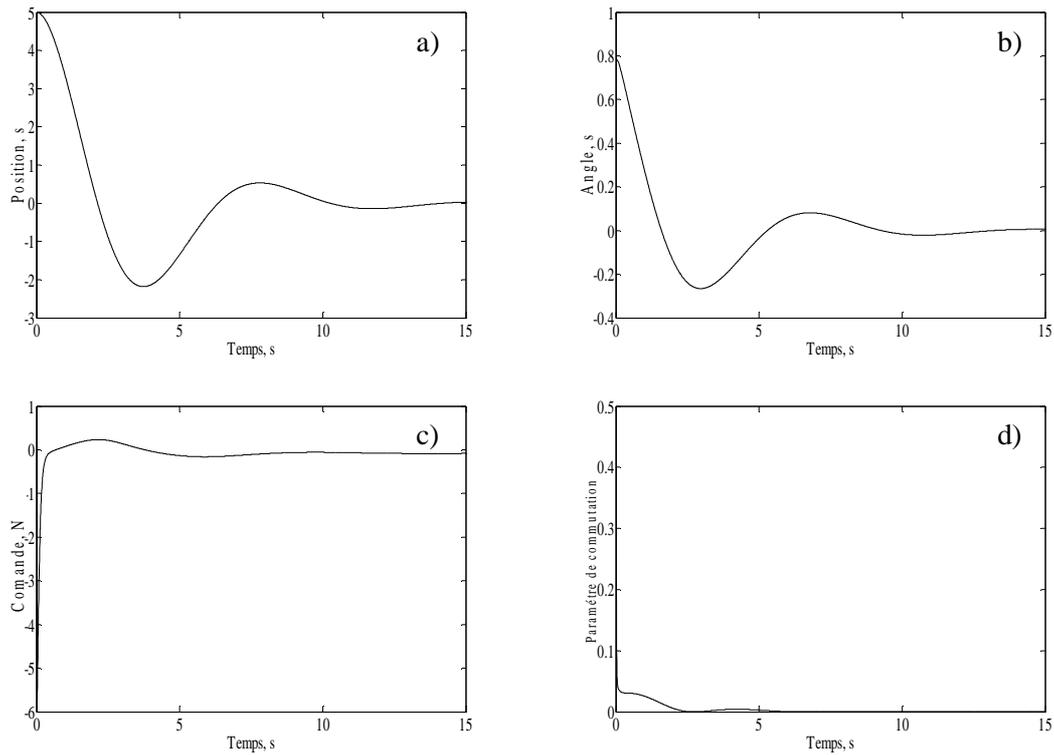


Fig 4.3 Commande par logique de commutation de la bille roulante sur poutre: a) Position de la bille, b) Angle d'inclinaison de la poutre, c) Signal de commande appliqué au système, c) Paramètre α .

De plus, nous pouvons constater que la commande par la logique de commutation adoptée pour ce SMSA à deux *ddl* est robuste vis-à-vis de l'ensemble des perturbations considérées. En effet, tous les états du système convergent d'une manière satisfaisante vers leurs références.

Pour le deuxième exemple, notamment le pendule inverse sur chariot qui présente un point d'équilibre instable, les paramètres relatifs à la commande sont pris tels que: $K_1 = 1, K_2 = 1, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 100, \kappa = 0.1$. L'objectif de la commande est de maintenir le pendule en position verticale pour une position spécifiée du chariot: $(\theta_{1d}, x_d) = (0, 5m)$, et le système démarre des conditions initiales suivantes: $(\theta_0, x_0) = (\pi, 0)$.

Afin d'étudier la robustesse, nous avons pris les mêmes valeurs des perturbations qu'aux chapitres précédents, notamment : une variation structurelle aléatoire de 50% affectant la masse du pendule telle que: $\Delta m_c = 0.5 \text{rand}(t)$ en présence d'une perturbation externe aléatoire donné par: $d = \text{rand}(t)$. Les résultats de simulations sont illustrés dans les figures 4.4.

Nous pouvons constater la convergence de tous les états du système vers leurs valeurs désirées (Fig. 4.4a et 4.4b).

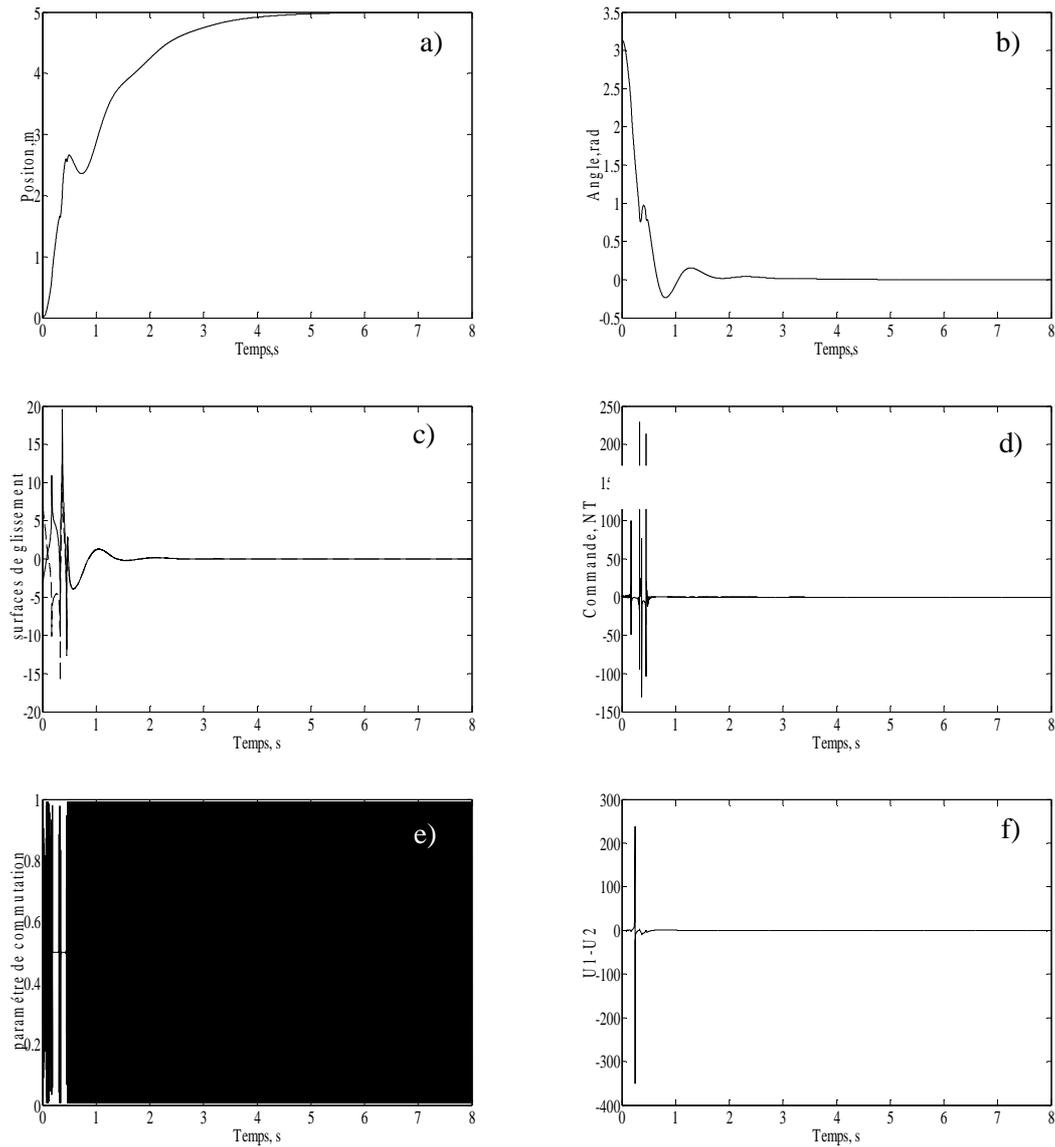


Fig 4.4 Commande pour la logique de commutation du pendule inversé sur chariot : a) Position du chariot, b) Angle d'inclinaison du pendule, c) Signal de commande appliqué au système, c) Paramètre α .

Le signal de commande mentionné à la figure 4.3d, montre un pic important de 220N durant la période transitoire.

De plus, vu que l'objectif est de forcer l'une des deux commandes u_1 ou u_2 à converger vers l'autre, nous pouvons constater que la différence entre les deux signaux tend vers zéro (Fig.4.4f).

L'évolution du paramètre de commutation apparaît à la figure 4.4e. Du point de vue robuste, nous remarquons que le système reste insensible face aux variations et aux perturbations externes.

En effet, les performances de la convergence, de tous les états du système, restent satisfaisantes même en présence des perturbations.

4.4. Conception de la Commande par la logique de commutation : SMSA à 3 ddl

4.4.1. Formulation du problème

Dans cette section, nous développons la méthode de synthèse relative à la commande par les modes de glissement pour un SMSA à trois *ddl* ayant une seule entrée de commande et à trois variables de sortie. Comme déjà mentionné au chapitre 1, la dynamique d'un SMSA à trois *ddl* peut être réécrite sous la forme différentielle simplifiée (1.71).

Nous avons vu que chacune des lois de commande u_1, u_2 et u_3 ne permet pas la convergence vers zéro de tous les sous-systèmes vu que ces commandes considèrent un contrôle exclusif des paires (x_1, x_2) , (x_3, x_4) and (x_5, x_6) .

Sur la base de la technique de commande par la logique de commutation, nous allons créer un ensemble de contrôleurs candidats tel que le système en boucle fermée converge vers le point d'équilibre défini dans l'ensemble Ω tel que:

$\Omega = \{ \underline{x} : \{ S_1(\underline{x}, t) = 0 \} \cap \{ S_2(\underline{x}, t) = 0 \} \cap \{ S_3(\underline{x}, t) = 0 \} \}$. Ce point d'équilibre défini par

l'ensemble Ω fait appel à une stratégie de commutation dans l'ensemble C_u donné par:

$$C_u = \{ u_1, u_2, u_3 \}.$$

Ainsi, l'objectif global est d'établir une combinaison entre ces différentes lois de commande pour assurer la condition : $u = u_1 = u_2 = u_3$.

Soit le signal de commande généralisée suivant:

$$\begin{aligned} u &= \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_{23} \\ u_{23} &= \beta u_2 + (1 - \beta) u_3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Avec :

$$0 \leq \alpha \leq 1 \text{ et } 0 \leq \beta \leq 1 \quad (4.31)$$

Dans (4.30) les termes α et β sont considérés comme des paramètres de commutation conçus pour adapter le signal de la commande globale afin d'assurer la convergence vers zéro et la stabilité des surfaces S_1, S_2 et S_3 .

Par ailleurs pour $(\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1)$ et $(\beta = 0 \text{ ou } \beta = 1)$, il est évident que la commande globale prend exclusivement les valeurs u_1, u_2 et u_3 comme mentionné au tableau 4.1.

Tab 4.1 Distribution de valeurs des paramètres de commutation

β	1	0
α		
1	$u = u_1$	$u = u_1$
0	$u = u_2$	$u = u_3$

4.4.2. Conception de la Commande

En utilisant (4.29), les dérivées temporelles des surfaces de glissement, sont alors données par :

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= b_1 (\alpha u_1 + (1-\alpha) [\beta u_2 + (1-\beta) u_3] - u_{eq_1}) \\
 \dot{S}_2 &= b_2 (\alpha u_1 + (1-\alpha) [\beta u_2 + (1-\beta) u_3] - u_{eq_2}) \\
 \dot{S}_3 &= b_3 (\alpha u_1 + (1-\alpha) [\beta u_2 + (1-\beta) u_3] - u_{eq_3})
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Pour extraire les lois d'adaptation relatives aux paramètres inconnues α et β , nous considérons la fonction de coût quadratique qui mesure l'écart entre la commande globale (4.30) et les commandes décentralisées par les MG données par (1.94)-(1.96):

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \left[(u - u_1)^2 + (u - u_{23})^2 + (u_{23} - u_2)^2 + (u_{23} - u_3)^2 \right] \tag{4.33}$$

Le développement de la fonction quadratique (4.33) conduit à la forme suivante de $J(\alpha, \beta)$:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \left[(u_1 - u_{23})^2 [2\alpha^2 - 2\alpha + 1] + (u_2 - u_3)^2 [2\beta^2 - 2\beta + 1] \right] \tag{4.34}$$

En utilisant la méthode du gradient, les trajectoires des paramètres α et β , minimisant la fonction de coût (4.33) vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} &= -\kappa_1 \nabla_{\alpha} J(\alpha, \beta) \\
 \dot{\beta} &= -\kappa_2 \nabla_{\beta} J(\alpha, \beta)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Avec: $\kappa_2 > 0$ et $\kappa_1 > 0$.

Le gradient de $J(\alpha, \beta)$ par rapport à α et β est donné par:

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha} J(\alpha, \beta) &= \frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = (u_1 - u_{23})^2 [2\alpha - 1] \\ \nabla_{\beta} J(\alpha, \beta) &= \frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -(u_1 - u_{23})(u_2 - u_3) [2\alpha^2 - 2\alpha + 1] + (u_2 - u_3)^2 [2\beta - 1]\end{aligned}\quad (4.36)$$

Les gains α et β issus de l'algorithme du gradient sont alors donnés par les équations différentielles suivantes:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\kappa_1 (u_1 - u_{23})^2 [2\alpha - 1] \\ \dot{\beta} &= \kappa_2 \left((u_1 - u_{23})(u_2 - u_3) [2\alpha^2 - 2\alpha + 1] - (u_2 - u_3)^2 [2\beta - 1] \right)\end{aligned}\quad (4.37)$$

Cependant, et sachant que: $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$, l'équation (4.37) peut être ramenée à :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \begin{cases} -\kappa_1 (u_1 - u_{23})^2 [2\alpha - 1], & \text{si } : 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \\ \dot{\beta} &= \begin{cases} \kappa_2 \left((u_1 - u_{23})(u_2 - u_3) [2\alpha^2 - 2\alpha + 1] - (u_2 - u_3)^2 [2\beta - 1] \right), & \text{si } : 0 \leq \beta \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}\end{aligned}\quad (4.38)$$

Supposition 4.2 Nous supposons que les commandes u_1, u_2 et u_3 vérifient la contrainte:

$$|u_1| \leq U_m, |u_2| \leq U_m \text{ et } |u_3| \leq U_m, \text{ où } : U_m > 0.$$

Par conséquent, (4.33) permet d'écrire: $0 \leq J(\alpha, \beta) \leq 4U_m^2$. Par la suite, et en analysant

(4.36), on constate que le minimum de $J(\alpha, \beta)$ correspond à:

$$\begin{cases} \nabla_{\alpha} J(\alpha, \beta) = 0 \\ \text{et} \\ \nabla_{\beta} J(\alpha, \beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{et} \\ \left[\left\{ (u_1 - u_{23})(2\alpha^2 - 2\alpha + 1) + (u_2 - u_3)(2\beta - 1) \right\} = 0 \text{ ou } (u_2 = u_3) \right] \end{cases}\quad (4.39)$$

Il faut noter que: $0.5 \leq 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 \leq 1$ et $0.5 \leq 2\beta^2 - 2\beta + 1 \leq 1$.

La relation (4.39) permet de distinguer quatre cas possibles pour déterminer le minimum de $J(\alpha, \beta)$ donné par (4.34).

$$\text{Cas 1 : } (u_1 = u_{23}) \text{ et } \left\{ (u_1 - u_{23})(2\alpha^2 - 2\alpha + 1) + (u_2 - u_3)(2\beta - 1) \right\} = 0$$

$$\dot{\beta} = -\kappa_2 (u_2 - u_3)(2\beta - 1)^2 \quad (4.40)$$

La relation (4.40) est similaire à (4.9). Les mêmes étapes de démonstration permettent de déduire que pour :

$$K_2 = b_2 U_m + \eta_2 \text{ et } K_3 = b_3 U_m + \eta_3 \quad (4.41)$$

Les surfaces S_2 et S_3 tendent vers zéro $\forall \beta : 0 \leq \beta \leq 1$ et par conséquent $u_2 = u_3$ et $J(\alpha, \beta)$ devient :

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (u_2 - u_3)^2 (2\beta^2 - 2\beta + 1) = 0 \quad (4.42)$$

D'autre part, vu que: $u_1 = u_{23}$ et $u_2 = u_3$, l'utilisation de (4.30) permettra d'avoir: $u_{23} = u_2 = u_3$ et $u = u_1 = u_{23}$, ce que donne en final: $u = u_1 = u_2 = u_3$. Donc, pour un gain K_1 strictement positif qui satisfait (1.98), le régime de glissement est satisfait pour la surface S_1 et (1.97) sera assuré. Par la suite on aura $S_1 \rightarrow 0$.

$$\text{Cas 2 : } u_1 = u_{23} \text{ et } u_2 = u_3$$

Il est clair qu'à partir de (4.30) on a :

$$\begin{aligned} u &= \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_{23} = u_1 = u_3 \\ u_{23} &= \beta u_2 + (1 - \beta) u_3 = u_3 = u_2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

D'où : $u_1 = u_2 = u_3$, et donc d'après (1.87) et (1.88) il vient que S_1 , S_2 et S_3 convergent vers zéro.

$$\text{Cas 3 : } \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \left\{ (u_1 - u_{23}) \frac{1}{2} + (u_2 - u_3)(2\beta - 1) \right\} = 0$$

Dans ce cas, on a:

$$(u_1 - u_{23}) = 2(u_2 - u_3)(1 - 2\beta) \quad (4.44)$$

Et le gradient (4.34) prend la valeur :

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \left[(u_1 - u_{23})^2 \frac{1}{2} + (u_2 - u_3)^2 (2\beta^2 - 2\beta + 1) \right] \quad (4.45)$$

Finalement, et comme la relation (4.43) est satisfaite, alors $J(\alpha, \beta)$ devient :

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \left[4(u_2 - u_3)^2 (1 - 2\beta)^2 + (u_2 - u_3)^2 (2\beta^2 - 2\beta + 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(u_2 - u_3)^2 (4 - 16\beta + 16\beta^2 + 2\beta^2 - 2\beta + 1) \right] \end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \left[(u_2 - u_3)^2 (18\beta^2 - 18\beta + 5) \right] \quad (4.46)$$

Puisque: $\forall \beta : 0 \leq \beta \leq 1$, le terme $18\beta^2 - 18\beta + 5 \neq 0$ et donc $J(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow u_2 = u_3$. De plus, puisque $(u_1 - u_{23}) \frac{1}{2} + (u_2 - u_3)(2\beta - 1) = 0$ et $u_2 = u_3$ donc $u_1 = u_{23}$ ou encore :

$u = u_1 = u_2 = u_3$. Cette dernière relation couplée avec la dynamique des surfaces (4.32) assure la convergence vers zéro de toutes les surfaces de glissement.

Cas 4 : $\alpha = \frac{1}{2}$ et $u_2 = u_3$

On aura à partir de (4.34) :

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} (u_1 - u_{23})^2 \quad (4.47)$$

Donc, pour $J(\alpha, \beta) = 0$, il est clair qu'on a $u_1 = u_{23}$.

Cependant, puisque : $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_{23})$, on aura : $u = u_1 = u_{23}$. De plus, sachant que $u_2 = u_3$, donc (4.30) donne: $u_{23} = u_2 = u_3$.

Cela permet de conclure que: $u = u_1 = u_2 = u_3$, et ainsi, toutes les surfaces de glissements subissent le même signal de commande qui assure le régime de glissement et donc ces surfaces convergent vers zéro.

Proposition 4.2 Soit une classe de SMSA à 3 ddl de la forme (1.81) à laquelle sont jointes les surfaces de glissement (1.82)-(1.84) et les lois de commande décentralisées (1.91)-(1.93). Si le système est soumis à la loi de commande adaptative globale (4.30)

où les paramètres de commutation α et β sont adaptés selon (4.38) par conséquent toutes les variables d'état du système en boucle fermée et toutes les surfaces de glissement convergent vers zéro.

Remarque 4.2 Un autre ensemble de famille de commandes peut être défini et spécialement pour les SMSA ayant l'un des gains nul. Pour les systèmes à 3ddl, nous pouvons déduire trois autres surfaces à partir des surfaces (1.82)-(1.84) comme suit:

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_1 - S_2 = \dot{x}_1 + \lambda_1 \tilde{x}_1 - \dot{x}_3 - \lambda_2 \tilde{x}_3 \\ S_{21} &= S_1 + S_2 = \dot{x}_1 + \lambda_1 \tilde{x}_1 + \dot{x}_3 + \lambda_2 \tilde{x}_3 \\ S_{13} &= S_1 - S_3 = \dot{x}_1 + \lambda_1 \tilde{x}_1 - \dot{x}_5 - \lambda_3 \tilde{x}_6 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Leurs dérivées temporelles sont alors données par:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{12} &= f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) - f_2 - \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d}) + u(b_1 - b_2) \\ \dot{S}_{21} &= f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) + f_2 + \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d}) + u(b_1 + b_2) \\ \dot{S}_{13} &= f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) - f_3 - \lambda_3 (x_6 - \dot{x}_{5d}) + u(b_1 - b_3) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Et les commandes équivalentes relatives s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} u_{eq_{12}} &= -(b_1 - b_2)^{-1} (f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) - f_2 - \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d})) \\ u_{eq_{21}} &= -(b_1 + b_2)^{-1} (f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) + f_2 + \lambda_2 (x_4 - \dot{x}_{3d})) \\ u_{eq_{13}} &= -(b_1 - b_3)^{-1} (f_1 + \lambda_1 (x_2 - \dot{x}_{1d}) - f_3 - \lambda_3 (x_6 - \dot{x}_{5d})) \end{aligned} \quad (4.50)$$

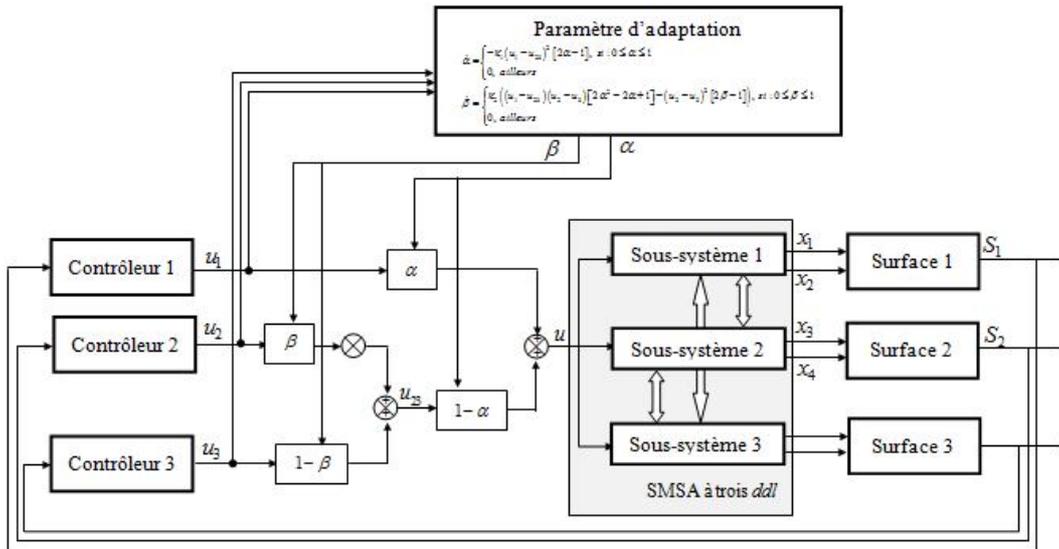
Les commandes par les MG possibles pour les trois sous-systèmes sont donc déterminées par :

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_{S_{12}} + u_{eq_{12}} \\ u_{21} &= u_{S_{21}} + u_{eq_{21}} \\ u_{13} &= u_{S_{13}} + u_{eq_{13}} \end{aligned} \quad (4.51)$$

où :

$$\begin{aligned} u_{S_{12}} &= -K_{12} (b_1 - b_2)^{-1} \text{sgn}(S_{12}) \\ u_{S_{21}} &= -K_{21} (b_1 + b_2)^{-1} \text{sgn}(S_{21}) \\ u_{S_{13}} &= -K_{13} (b_1 - b_2)^{-1} \text{sgn}(S_{13}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

et K_{12} , K_{21} et K_{13} sont des coefficients strictement positifs.


 Fig 4.5 Le schéma global de la commande pour un SMSA à trois *ddl*.

La technique de commutation entre les trois contrôleurs en MG générant u_{12} , u_{21} et u_{13} est de la même forme que (4.30) :

$$\begin{aligned} u &= \alpha u_{12} + (1 - \alpha) u_{23} \\ u_{23} &= \beta u_{21} + (1 - \beta) u_{13} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Par conséquent, cette commande permet également la convergence vers le point d'équilibre défini par: $\Omega_{123} = \{x : \{S_{12}(x, t) = 0\} \cap \{S_{21}(x, t) = 0\} \cap \{S_{13}(x, t) = 0\}\}$. Ainsi, on aura : $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ et $S_3 = 0$.

4.4.3. Résultats de simulation

Dans ce paragraphe, nous considérons la commande d'un modèle sous-actionné à trois *ddl*, notamment le double pendule inversé sur chariot.

L'objectif est de stabiliser les deux tiges du pendule sur une position verticale pour une position spécifiée du chariot: $(\theta_{1d}, \theta_{2d}, x_d) = (0, 0, 4m)$. Les paramètres relatifs aux surfaces de glissement (4.27), aux lois de commande (4.30) et (4.31) ainsi ceux de la loi d'adaptation (4.39), sont imposés après plusieurs essais tels que: $\kappa_1 = 0.1, \kappa_2 = 0.4, K_1 = 80, K_2 = 1, K_3 = 0.1, \lambda_1 = 8, \lambda_2 = 35$ et $\lambda_3 = 1$. Le système démarre à partir des conditions initiales suivantes: $(\theta_{1d}, \theta_{2d}, x_d) = (\pi, 0, 0)$. De plus, on considère le cas où les variations paramétriques aléatoires de 50% affectent les deux masses du système:

$\Delta m_i = 0.5\text{rand}(t)$ avec $i=(1,2)$ et en présence d'une perturbation externe aléatoire d donnée par : $d = 0.1\text{rand}(t)$.

Les résultats de la simulation sont montrés aux figures 4.6. En résumé, cette application numérique confirme les résultats de notre analyse de la convergence telle que mentionnée dans la section précédente. En effet, les figures 4.5a et 4.5b révèlent clairement que la position du chariot ainsi que les angles des deux tiges tendent vers leur valeurs désirées d'une façon continue est sans oscillation.

On relève que le temps de réponse est environ de 10s. Le signal de commande globale nécessaire pour la stabilisation du DPI est donné à la figure 4.5d et, il est clair que la valeur de ce signal présente un pic de 15N très inférieure à la valeur maximale admissible.

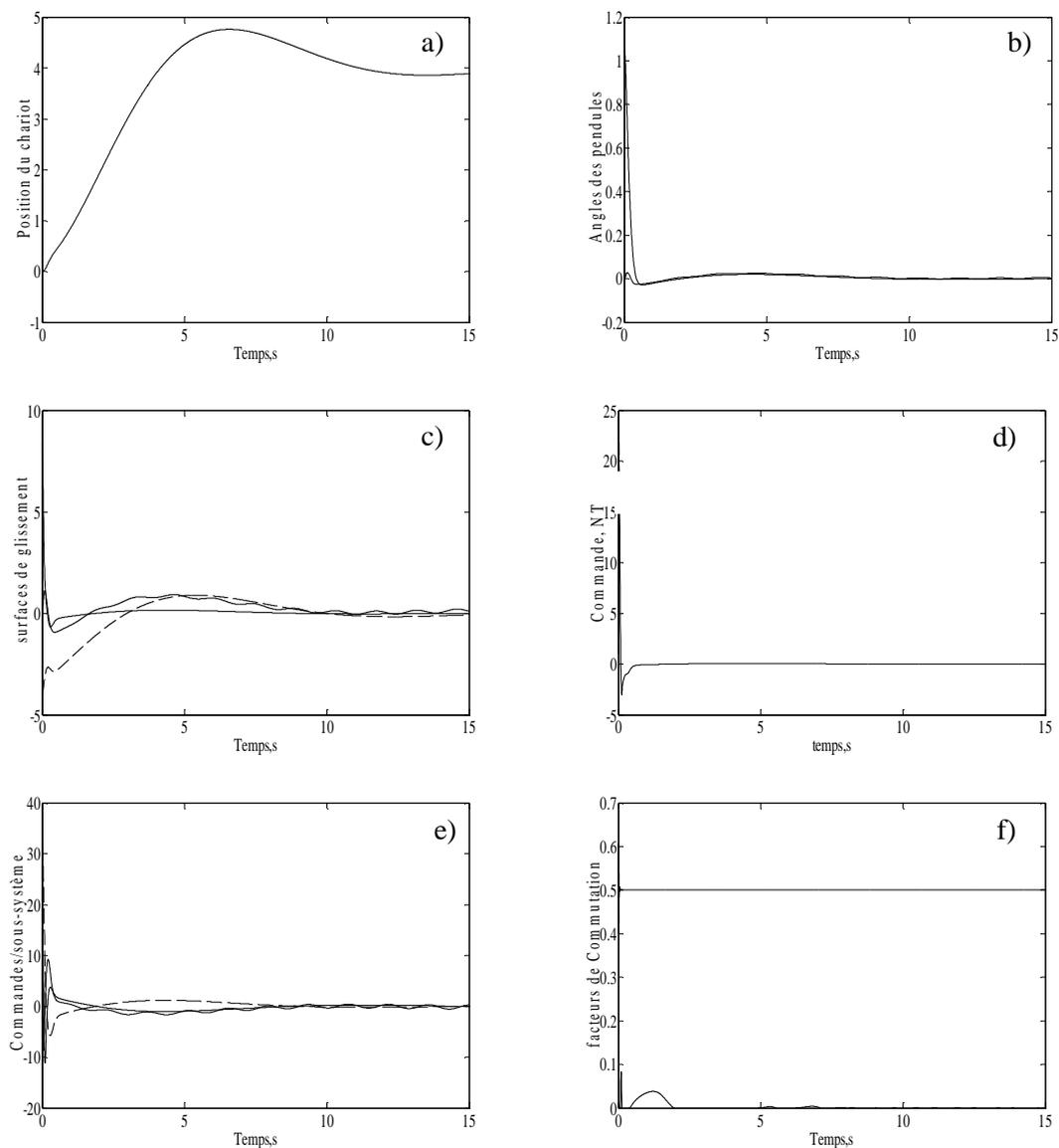


Fig. 4.6 Commande par la logique de commutation du DPI : a) Position du chariot, b) Angles d'inclinaison des bras du pendule, c) Surfaces de glissement, d) Signal de la commande globale, e) les Commandes décentralisées, f) Paramètre de commutation α et β .

La figure 4.6e illustre l'évolution des commandes u_1, u_2 et u_3 , où on peut constater qu'elles convergent vers la même valeur ce qui valide notre analyse de convergence. Les paramètres de commutation α et β apparaissent à la figure 4.5f où $\alpha = 0.5$ et β tend vers zéro.

Enfin, les résultats obtenus pour ce SMSA à trois *ddl* montrent que la convergence des états du système s'établit d'une manière satisfaisante en dépit de l'ensemble des perturbations affectant la dynamique du système.

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle stratégie de commande par logique de commutation adaptative associées au SMSA.

En se basant sur le principe de la logique de commutation, un algorithme de commande était établi pour deux différents systèmes à 2 et à 3 *ddl*.

Nous avons établi que les lois de commandes proposées assurent la stabilité et de la convergence des SMSA à 2 et à 3 *ddl*. Les résultats obtenus relatifs à l'application de ces commandes à différents SMSA ont révélé que cette stratégie est une solution efficace pour la conduite de tels types de système. L'avantage principal de cette stratégie de commande réside dans le fait qu'elle assure une convergence de tous les états du système en un temps d'action assez réduit par rapport à celui occasionné par les autres lois de commandes développées dans cette thèse.

Etude Comparative et Conclusion

1. Etude Comparative

Avant de conclure ce travail, nous effectuons tout d'abord une étude comparative des résultats de simulations relatives aux différentes stratégies de commande développées aux chapitres précédents dans le cas d'un même SMSA à deux *ddl* puis à trois *ddl*.

Ainsi, nous considérons les résultats du **pendule inverse sur chariot** pour les SMSA à deux *ddl* et ceux du **double pendule inversé** pour les SMSA à trois *ddl*. Cette étude est établie sur la base des critères suivants: le temps de réponse, l'allure de la réponse des états du système, la précision et enfin le comportement du signal de la commande.

Pour le pendule inverse sur chariot, nous avons considéré que le système est affecté par une variation structurelle aléatoire de 50% sur la masse du pendule telle que: $\Delta m_c = 0.5 \text{rand}(t)$ et par un bruit externe aléatoire: $d = \text{rand}(t)$.

Ainsi, nous avons vu que toutes les approches présentées (y compris les stratégies adaptatives) assurent la convergence de tous les états du système vers leurs valeurs désirées (angle d'inclinaison du pendule α et position du chariot x). Pour les deux conditions initiales considérées: $EI_1(\alpha_0 = -\pi/2 \text{ et } x_0 = 5m)$ et $EI_2(\alpha_0 = -\pi/3 \text{ et } x_0 = 5m)$. Le tableau ci-après (Tab 5.1) regroupe les performances des différentes approches. On remarque que d'une manière générale, les différentes stratégies de commande présentent le même temps de réponse, la même allure de réponse avec deux périodes d'oscillation avant d'atteindre le régime stationnaire e avec une précision de 1%.

Cependant, le signal de commande issu de la méthode basée sur la logique de commutation présente un pic assez important par rapport aux autres stratégies (une différence qui varie de 200% à 300%). Dans ce contexte, la CGM découplée adaptative indirecte présente le signal le moins contraignant à l'entrée du système.

En présence de l'ensemble des perturbations considérées, les réponses des états du système montrent leurs convergences en un temps satisfaisant vers leurs références. Aussi, on peut conclure que les commandes synthétisées présentent une bonne robustesse.

Tab 5.1 Performances des différentes méthodes de commande dans le cas du pendule inversé sur chariot

	Temps de réponse	Réponse de l'angle du pendule	Réponse du chariot	Précision et erreur	Signal de la commande
CMG découplée Non-adaptative					
Approche 1	4 ~5s	Deux périodes d'oscillation avec un pic de 0.8rad l'état initiale 2.	Une seule période d'oscillations avec un pic de 5.5m pour l'état initiale 2	Angle : <1% Position : <1%	Un pic de 80N durant la période transitoire.
Approche 2	4 ~5s	Deux périodes d'oscillation avec un pic de 0.8rad pour EI_1 .	Une seule période d'oscillations avec un pic de 9m pour EI_1	Angle: <1% Position: <1%	Un pic de 115N durant la période transitoire.
CMG découplée adaptative					
Méthode directe	4 ~5s	Une période d'oscillation avec un pic de 1.4rad pour EI_1	Une seule période d'oscillations avec un pic de 11m pour EI_1	Angle : <1% Position : 5%	Un pic de 130NT durant la période transitoire
Méthode directe	4 ~5s	Une seule période d'oscillation avec un pic de 1.4rad pour EI_1 .	Une seule période d'oscillations avec un pic de 11m pour EI_1	Angle :<1% Position: <1%	Un pic de 60N durant la période transitoire
Commande par la logique de commutation					
	2 ~5s	Convergence sans oscillation (smooth)	Une seule période d'oscillations.	Angle: <1% Position : <1%	Un pic de 230N durant la période transitoire

Pour le cas d'un système à trois *ddl*, notamment, le DPI, nous avons vu aux chapitres précédents que les stratégies développées garantissent la stabilité et la convergence de tous les états du système vers leurs valeurs désirées: $(0, 0, 3m)$ et $(0, 0, 4m)$.

De plus, nous avons évalué la robustesse dans le cas où la dynamique du système est sous l'effet conjugué d'une perturbation externe aléatoire d donnée par : $d = 0.1\text{rand}(t)$ et des variations paramétriques aléatoires de 50% touchant les deux masses: $\Delta m_i = 0.5\text{rand}(t)$ avec $i=(1,2)$. Le Tableau ci-dessous (Tab 5.2) résume les performances constatées pour chaque stratégie de commande.

Tab 5.2 Performances des différentes méthodes de commande pour le DPI

	Temps de réponse	Réponse des angles des pendules	Réponse du chariot	Précision et erreur	Signal de la commande
Commande Non-adaptative					
Approche 1	4~6 s	trois périodes d'oscillation avec un pic de -0.5rad et -0.8 rad.	Convergence continue sans oscillation.	Angles: <1% Position: <1%	Un pic de 55N durant la période transitoire.
Approche 2	8~12 s	Deux périodes d'oscillation avec un pic de 2rad l'état initiale 2.	Trois périodes d'oscillations avec un pic de 9m pour l'état initial 2	Angles: <1% Position: <1%	Un pic de 400N durant la période transitoire.
Commande adaptative					
Méthode Directe	6~8 s	Convergence quasi-continue sans oscillation.	Convergence continue.	Angles: <1% Position: <5%	Un pic de 150N durant la période transitoire.
Méthode indirecte		Convergence avec une période d'oscillation.	Convergence continue.	Angles : <1% Position: <1%	Un pic de 180N durant la période transitoire.
Commande par la logique de commutation					
	2~9s	Convergence continue sans oscillation	Convergence continue sans oscillation	Angles:<1% Position: <1%	Un pic de moins de 20N.

Les mêmes remarques peuvent être constatées pour le DPI en ce qui concerne les performances des stratégies de commande présentées dans notre travail, sauf que pour la commande par la logique de commutation, là où on constate un signal de commande moins faible par rapport aux résultats obtenus pour le pendule inversé (Tab 5.2).

A noter que l'approche 2 non-adaptative se manifeste par un pic de 400N du signal de la commande.

De plus, les résultats obtenus des différentes stratégies de commande pour ce SMSA à trois *ddl* montrent que les variations structurelles et les perturbations externes n'ont pas entravé la convergence satisfaisante du système.

2. Conclusion Générale

Cette thèse est dévolue au problème de la stabilisation d'une classe de SMSA du second ordre à deux et à trois *ddl* dans le but de contribuer à enrichir le domaine de la commande des systèmes mécaniques sous-actionnés (SMSA).

Particulièrement, ce cadre est défini par les caractéristiques de ces systèmes qui se manifestent par l'existence de plus de *ddl* que de nombre d'actionneurs. Le problème posé est très ambitieux dans le sens où il fallait synthétiser des commandes stabilisantes pour des systèmes complexes et ne disposants pas de lois généralisées.

En premier lieu, et après un bref rappel sur les caractéristiques dynamiques des SMSA, nous avons exploité ce background pour développer une commande découplée par les modes de glissement (CDMG). De ce fait, nous avons considéré deux niveaux de surfaces de glissement pour assurer le découplage adéquat et ensuite en exploitant les fonctions de Lyapunov nous avons établi la preuve de la convergence de cette méthode de commande. Cependant, en absence totale ou partielle d'information sur la dynamique des SMSA, nous avons introduit une commande découplée adaptative floue (du type TSK) par les modes de glissement (CDAFMG : directe et indirecte). La détermination des lois d'adaptation des paramètres est fondée sur la méthode du gradient tout en exploitant directement l'erreur d'identification entre la fonction inconnue et son approximation adaptative.

Par ailleurs, nous avons établi via la théorie de stabilité de Lyapunov que les lois de commande proposées assurent la convergence de tous les états du système.

Enfin, et vu la particularité de la dynamique des SMSA, nous avons pu développer une commande adaptative par la logique de commutation (Switching logic). Cette approche

part du fait que le concepteur dispose d'une panoplie de commandes stabilisantes pour chaque sous-système exclusivement et qu'il serait peut être possible de concevoir une commande hybride à partir de ces commandes décentralisées pour stabiliser le système globale. À partir de cette famille de contrôleurs, nous avons conçu un commutateur adaptatif qui a permis d'élaborer un signal de commande final assurant la convergence globale du SMSA. Similairement aux méthodes précédentes, la stabilité de la commande par la logique de commutation a été effectuée à l'aide de la théorie de Lyapunov.

Pour toutes les méthodes de commande proposées dans cette thèse, nous avons validés les études de convergence et de robustesse via des simulations relatives à différents SMSA à deux et à trois *ddl*.

3. Quelques perspectives

Vu la richesse d'application et la diversité de modèles de SMSA, de nombreuses pistes restent à explorer ou améliorer.

À cet effet, vis-à-vis du premier chapitre, une première voie serait de développer d'autres approches de commande non encore exploitées d'une manière élargie aux SMSA, par exemple la commande optimale qui permettrait de s'affranchir des difficultés d'optimisation des gains de commande par les modes glissants d'ordre un et deux.

Par ailleurs, la commande par les modes de glissement d'ordre supérieur présente un autre défi pour les SMSA et son intérêt réside dans le fait qu'elle permet d'améliorer la robustesse et d'éliminer l'effet du chattering.

De plus, au niveau de la loi de commande, l'extension de la commande adaptative par les modes glissants aux systèmes multi-variables peut être étudiée.

Concernant la commande par la logique de commutation, nous jugeons intéressant d'introduire d'autres sous-ensembles de famille de commandes fondées sur d'autres approches de synthèse (pour les sous-systèmes), à savoir : les contrôleurs PID, le backstepping, ...etc.

Références

- [Alm09] Almutairi, N.B., Zribi, M., “Sliding mode control of a three dimensional overhead crane”, *J. Vib. Control*, 2009, 15, pp. 1679– 1730
- [Alm10] Almutairi, N.B., Zribi, M.: “On the sliding mode control of a ball on a beam system”, *Nonlinear Dyn.*, 2010, 59, pp. 221–238
- [And08] B.D.O. Anderson and A. Dehghani, “Challenges of adaptive control-past, permanent and future”, *Annual Reviews in Control*, 32:123–135, 2008.
- [Ash05] Ashrafiuon, H., Erwin, R.S.: “Shape change maneuvers for attitude control of underactuated satellites”, *Proc. American Control Conf.*, Portland, OR, USA, pp. 895–900, 2005
- [Åst95] Åström, K.J., Wittenmark, B, *Adaptive control*, Addison-Wesley, 1995.
- [Avis10] Avis, J.M., Nersesov, S.G., Nathan, R., Ashrafiuon, H., Muske, K.R.: “A comparison study of nonlinear control techniques for the RTAC system”, *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2010, 11, pp. 2647–2658
- [Bak04] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary, T.Szulc, “Properties of Schur complements in partitioned idempotent matrices”, *Linear Algebra Application*, 379 (2004) 303-318
- [Bar97] C. Barbu, R. Sepulchre, W. Lin , P.V. Kokotovic, “Global Asymptotic Stabilization of the Ball-and-Beam Model”, *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2351–2355, 1997.
- [Bi02] Bi, F.Y., Wei, Y.J., Zhang, J.Z., Cao, W. “Position-tracking control of underactuated autonomous underwater vehicles in the presence of unknown ocean currents”, *IET Control Theory Appl.*, 2010, 4, pp. 2369–2380.
- [Blo01] Bloch, A.M., Chang, D.E., Leonard, N.E., Marsden, J.E., “Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: potential shaping”, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2001, 46, pp. 1556–1571
- [Bro83] R.W. Brockett, “Asymptotic stability and feedback stabilization”, in *Differential geometric control theory*, Birkhausen, Boston, pp.181–191, 1983.
- [Bul01] Bullo, F., Lynch, K.M.: “Kinematic controllability for decoupled trajectory planning in underactuated mechanical systems”, *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2001, 17, pp. 402–412
- [Bul98] Bullo, F., *Nonlinear control of mechanical systems: a Riemannian geometry approach*, PhD dissertation, Department of Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology, 1998.
- [Cai03] Cai, Z., Su, C.Y, “Real-time tracking control of underactuated Pendubot using Takagi–Sugeno fuzzy systems”. *Proc. IEEE Int. Symp. Computational Intelligence in Robotics and Automation*, Kobe, Japan, 2003, pp. 73–78
- [Cha01] Y.C. Chang, “Adaptive fuzzy-based tracking control for nonlinear SISO systems via VSS and H_∞ approaches”, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 9, pp. 278-292, 2001.

- [**Chek03**] H.Chekireb, M. Tadjine, D. Bouchaffra, “Direct adaptive fuzzy control of nonlinear system class with applications“. *Control and Intelligent Systems*, Vol. 31, No. 2, pp.113-121, 2003.
- [**Che96**] C.S Chen et W.L. Chen, “Robust model reference adaptive control of nonlinear systems using fuzzy systems”, *Int. J. Syst. Sci.* vol. 27, no. 12, pp. 1435–1442, 1996.
- [**Del89**] de Luca, A., Siciliano, B., “Trajectory control of a non-linear one-link flexible arm”, *Int. J. Control*, 1989, 50, pp. 1699–1715
- [**Den07**] Deng, M.C., Inoue, A., Shibata, Y., Sekiguchi, K., Ueki, N., “An obstacle avoidance method for two wheeled mobile robot”, *Proc. IEEE Int. Conf. Networking, Sensing and Control*, London, UK, 2007, pp. 689–692.
- [**Dif09**] DiFiore, D.C, *Sliding mode control applied to an underactuated fuel cell system*, MSc dissertation, Department of Mechanical Engineering, Rochester Institute of Technology, 2009.
- [**Do02**] Do, K.D., Jiang, Z.P., Pan, J, “Underactuated ship global tracking under relaxed conditions”, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2002, 47.
- [**Do03**] Do, K.D., Jiang, Z.P., Pan, J.: “On global tracking control of a VTOL aircraft without velocity measurements”, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2003, 48, pp. 2212–2217
- [**Dub94**] L. Dubois, J-Y Dieulot and P. Borne, “Use of Fuzzy Logic in Multi-Models Control”, *In the Proceedings of the International Conference on Systems, Man and Cybernetics, IEEE SMC’94*, Vol. 1, pp 471-474, San Antonio, Texas, USA, October 1994.
- [**Edw98**] Edwards, C., S.K.Spurgeon, *Sliding mode control: theory and applications*, Taylor and Francis, London, UK, 1998.
- [**Ege96**] Egeland, O., Dalsmo, M., Sordalen, O.J.: “Feedback control of a nonholonomic underwater vehicle with constant desired configuration”, *Int. J. Robot. Res.*, 1996, 15, pp. 24–35
- [**Fan02**] Fantoni, I., Lozano, R.: “Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit”, *Int. J. Control*, 2002, 75, pp. 390–398
- [**Fis99**] K. Fischle et D. Schroder, “Improved stable adaptive fuzzy control method”, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* vol. 7, no. 1, pp. 27-49, 1999.
- [**Fre09**] Freidovich, L., Shiriaev, A., Gordillo, F., Gómez-Estern F., Aracil, J., “Partial-energy-shaping control for orbital stabilization of highfrequency oscillations of the Furuta pendulum”, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2009, 17, pp. 853–858
- [**Fur91**] K. Furuta, M. Yamakita, S. Kobayashi, and M. Nishimura, “A new inverted pendulum apparatus for education”, *Advances in control education*, Pergamon, 1991.
- [**Gao09**] Gao, B., Zhang, X., Chen, H., Zhao, J, “Energy-based control design of an underactuated 2-dimensional TORA system”. *Proceed. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, St. Louis, USA, 2009, pp. 1296–1301

- [Gas00] K. Gasso. *Identification des systèmes dynamiques non linéaires: approche multi-modèle*, Thèse de doctorat, Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Institut National Polytechnique de Lorraine, Décembre 2000.
- [Gho06] J.Ghomam, Mnif, F., Benali, A., Derbel, N., "Asymptotic backstepping stabilization of an underactuated surface vessel", *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2006, 14, pp. 1150–1157
- [Gla00] A.H. Glattfelder, Y. Ohta, E. Mosca, and S. Wieland, "Special issue on anti-windup control", *European Journal of Control*, 2000.
- [Gol80] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley., Reading, MA,USA, 1980,
- [Goo01] G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado, *Control system design*, Prentice Hall, 2001.
- [Guo07] Weiping Guo and Diantong Liu, "Adaptive Sliding Mode Fuzzy Control for a Class of Underactuated Mechanical Systems". *Lecture Notes in Computer Science*, Volume 4681/2007, 345-354, 2007.
- [Hec10] Héctor, R., Rosales, A., Ferreira, A., Dávila, A., "Robust regulation for a 3-DOF helicopter via sliding-modes control and observation techniques". *Proc. American Control Conf.*, Baltimore, MD, USA, 2010, pp. 4427–4432
- [Hes01] [Hes01] J. Hespanha, "Tutorial on supervisory control," *Lecture Notes for the Workshop Control using Logic and Switching for the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, December 2001.
- [Hu07] G. Hu, C. Makkar et W. E. Dixon,"Energy-based nonlinear control of underactuated Euler Lagrange systems subject to impacts", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 52(9):1742 – 1748, September 2007.
- [Hua10] Huang, J., Guan, Z.H., Matsuno, T., Fukuda, T., Sekiyama K, "Sliding mode velocity control of mobile-wheeled inverted pendulum systems", *IEEE Trans. Robot.*, 2010, 26, pp. 750–758
- [Hun93] J.Y. Hung, W. Gao , J. C. Hung, "Variable Structure Control: A Survey", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol.40, no.1pp.2-21, 1993
- [Hun97] K. J. Hunt and T. A. Johansen,"Design and Analysis of Gain-Scheduled Control Using Local Controller Networks", *Int. J. Control*, 1997, Vol. 66, n°5, pp 619-651.
- [Hus08] Hussein, I., Bloch, A.M.,"Optimal control of underactuated nonholonomic mechanical systems", *IEEE Trans. Autom. Control*, 2008, 53, pp. 668–682
- [Hwa09] Hwang, C.L., Wu, H.M., Shih, C.L,"Fuzzy sliding-mode underactuated control for autonomous dynamic balance of an electrical bicycle", *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2009, 17, pp. 658–670
- [Ioa96] P.A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [Isi95] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, London, 1995.
- [Jan96] M. Jankovic, D. Fontaine et P. V. Kokotovic. "Tora example : Cascade and passivity based control designs", *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 4(3) :292 – 297, 1996.

- [Jia02] Jiang, Z.P., “Global tracking control of underactuated ships by Lyapunov’s direct method”, *Automatica*, 2002, 38, pp. 301–309
- [Kha96] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996.
- [Kok92] P. V. Kokotovic, M. Krstic, I. Kmettakopoulos, “Backstepping to passivity: Recursive design of adaptive systems”, *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, USA, 1992, pp. 3276–3280.
- [Kol02] O. Kolesnichenko, A.S. Shiriaev. ”Partial stabilization of underactuated euler. Lagrange systems via a class of feedback transformations”. *Systems and Control Letters*, 45(2) :121132, 2002.
- [Krs95] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons, 1995.
- [Kun09] Kung, C.C., Chen, T.H., Huang, L.C.,”Adaptive fuzzy sliding mode control for a class of underactuated systems”. *Proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems*, Taipei, Taiwan, 2009, pp. 1791–1796
- [Lab07] S. Labiod, T.M. Guerra, “Adaptive fuzzy control of a class of SISO nonaffine nonlinear systems”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 158 (10), pp. 1098–1126,2007.
- [Lai09] Lai, X.Z., She, J.H., Yang, S.X., Wu, M., “Comprehensive unified control strategy for underactuated two-link manipulators”, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B: Cybern.*, 2009, 39, pp. 389–398
- [Li97] H. X. Li, H. B. Gatland, A. W. Green, “Fuzzy variable structure control”, *IEEE Trans. Syst., Man Cybern. B, Cybern.*, vol.27, no.2, pp.306–312, Apr, 1997.
- [Lin05] C.M. Lin, Yi-Jen Mon, “Decoupling Control by Hierarchical Fuzzy Sliding-Mode Controller”, *IEEE Transactions on Control Systems Technologies*, Vol. 13, No. 4, pp. 593-598, July 2005
- [Lin07] C. Lin. ”Robust adaptive critic control of nonlinear systems using fuzzy basis function network : an LMI approach”, *Journal of Information Sciences*, pages 4934–4946, 2007.
- [Liu05] D.Liu, W.Guo, J. Yi, "Composite sliding mode fuzzy control for double-pendulum-type overhead crane", *Proc. Int. Conf on Machine Learning and Cybernetics*, pp 767-772, 2005.
- [Lo98] Ji-Chang Lo and Ya-Hui Kuo, “Decoupled Fuzzy Sliding-Mode Control”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 3, August 1998, pp. 426-435
- [Loz95] Lozano and I. Fantoni, “Passivity based control of the inverted pendulums”, *In Normand-Cyrot, Perspectives in control*, New York, Springer, 1998.
- [Mar08] Martinez, R., Alvarez, J., Orlov, Y., “Hybrid sliding-mode-based control of underactuated systems with dry frictions”, *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2008, 55, pp. 3998–4003
- [Mas08] Mason, M.B.P., Piccoli, B.,”Time optimal swing-up of the planar pendulum”, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2008, 53, pp. 1876–1886

- [McN11] McNinch, L.C., Ashrafiuon, H., "Predictive and sliding mode cascade control for unmanned surface vessels", *Proc. American Control Conf.*, San Francisco, CA, USA, 2011, pp. 184–189
- [Mon01] Y.-J. Mon, C.-M. Lin, "Hierarchical fuzzy sliding-mode Control", *IEEE World Congress on Computational Intelligence*, pp.656–661, 2001.
- [Mor92] A. S. Morse, D. Mayne and G. C. Goodwin, "Applications of Hysteresis Switching in Parameter Adaptive Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, n°9, September 1992, pp 1343-1354.
- [Mos95] E. Mosca. *Optimal, Predictive, and Adaptive Control*. Prentice Hall, 1995.
- [Naf10] F. Nafa, S. Labiod , H. Chekireb, "Decoupled Sliding Mode Controller For The Stabilization Of A Class Of Underactuated Mechanical Systems", *the Mediterranean Journal of Measurement and Control*, Vol. 6, No. 4, 2010, ISSN: 1743-9310.
- [Naf11a] F. Nafa, S. Labiod , H. Chekireb , "Supervisory adaptive Sliding Controller for a Class of underactuated Mechanical Systems", *The International Conference on Electronics & Oil: From Theory to Applications (ICEO'11)*, March 01-03, 2011 Ouargla Algeria.
- [Naf11b] F. Nafa, S. Labiod, H. Chekireb, "A structured sliding mode controller for a class of under-actuated mechanical systems", *7th International Workshop on Systems, Signal Processing and their Applications (WOSSPA 2011)*, May 09-11, 2011, Tipaza, Algeria
- [Naf11c] F. Nafa, S. Labiod , H. Chekireb, "Stable Sliding Mode Controller Design for a Class of Underactuated Mechanical Systems", *International Conference On Mechanical Engineering*, CIGM, November 2011, Skikda, Algeria.
- [Naf13] F. Nafa, S. Labiod , H. Chekireb , "Direct adaptive fuzzy sliding mode decoupling control for a class of underactuated mechanical systems", *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, ISSN 1300-0632, vol.21, issue.6, pp 1615-1630, 2013.
- [Nak97] Y. Nakoula, *Apprentissage des modèles linguistiques flous, par jeu de règles pondérées*. Thèse de Doctorat, Université de Savoie, Juillet 1997.
- [Nar89] K. S. Narendra, A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice-Hall International Editions, 1989.
- [Nar94] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, "A Common Lyapunov Function for Stable LTI Systems with Commuting A-Matrices", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, n°12, December 1994, pp. 2469-2471.
- [Naz08] S. Nazrulla et H. K. Khalil. "A novel nonlinear output feedback control applied to the Tora benchmark system", *In 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3565–3570, Mexico, 2008
- [Ner10] Nersesov, S.G., Ashrafiuon, H., Ghorbanian, P., "On the stability of sliding mode control for a class of underactuated nonlinear systems". *Proc. American Control Conf.*, Baltimore, MD, USA, 2010, pp. 3446–3451
- [Nik07] Nikkhah, M., Ashrafiuon, H., Fahimi, F., "Robust control of underactuated

- bipeds using sliding modes”, *Robotica*, 2007, 25, pp. 367–374.
- [Oli07] J. P. Oliver, O. A. Ramirez. ”Control based on swing up and balancing scheme for an underactuated system, with gravity and friction compensator”. *In IEEE Fourth Congress of Electronics, Robotics and Automotive Mechanics*, pages 603–607, 2007.
- [Ori91] Oriolo, G., Nakamura, T., “Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: underactuated manipulators”, *Proc. IEEE Int. Conf. Decision and Control*, Brighton, UK, 1991, pp. 2398–2403
- [Ort98] R. Ortega, A. Loria, P. Nicklasson, et H. Sira-Ramirez, *Passivity-based control of Euler Lagrange systems*, Springer, 1998
- [Ort02] Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B., Escobar, G., ”Interconnection and damping assignment passivity-based control of port controlled Hamiltonian systems”, *Automatica*, 2002, 38, pp. 585–596
- [Ort04] Ortega, R., Canseco, E., “Interconnection and damping assignment passivity-based control: a survey”, *European J. Control*, 2004, 10, pp. 432–450
- [Pao11] Paoletti, P., Genesio, R., ”Rate limited time optimal control of a planar pendulum”, *Syst. Control Lett.*, 2011, 60, pp. 264–270
- [Pas98] K.V. Passino, S. Yurkovich, *Fuzzy Control*, Addison Wesley Longman, 1998.
- [Pen07] Y. Peng, J. Han et Q. Song. ”Tracking control of underactuated surface ships: using unscented kalman filter to estimate the uncertain parameters”. *In International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 1884 – 1889, 2007
- [Per02] W. Perruquetti et J.P. Barbot, *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker, 2002.
- [Qia07] Qian, D.W., Yi, J.Q., Zhao, D.B., ”Robust control using sliding mode for a class of underactuated systems with mismatched uncertainties”, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Rome, Italy, 2007, pp. 1449–1454
- [Rav06] Ravi N. Banavar et Velupillai Sankaranarayanan, *Switched Finite Time Control of a Class of Underactuated Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006,
- [Ros10] T.J. Ross, *Fuzzy logic with engineering applications*, 3rd Edition, Wiley, 2010.
- [Sab00] Reza Olfati-Saber, “Cascade Normal Forms for Underactuated Mechanical Systems”, *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia December; 2000, pp. 2162-2167.
- [Sab01] Olfati-Saber, *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [Shi00] A. Shiriaev, A. Pogromsky, H. Ludvigsen and O. Egeland, ”On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 10, pp. 283-300, 2000.
- [Slo84] Slotine, J.E., “Sliding controller design for nonlinear systems”, *Int. J. Control*, 1984, 40, pp. 421–434

- [Slo91] J.J.E. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Upper Saddle River, NJ, USA, Prentice Hall, 1991.
- [Spo89] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, 1989.
- [Spo95] M. W. Spong and D. J. Block, "The Pendubot: a mechatronic system for control research and education", *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 555-556, New Orleans, Dec. 1995.
- [Spo96] Spong, M.W., "Energy based control of a class of underactuated mechanical systems", *Proc. IFAC World Congress*, S.Francisco, USA, 1996, pp. 431-435
- [Spo07] Spong, M.W., Holm, J.K., Lee, D., "Passivity-based control of bipedal locomotion", *IEEE Robot. Autom. Mag.*, 2007, 14, pp. 30-40
- [Tao08] Tao, C.W., Taur, J.S., Hsieh, T.W., Tsa, C.L., "Design of a fuzzy controller with fuzzy swing-up and parallel distributed pole assignment schemes for an inverted pendulum and cart system", *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2008, 16, pp. 1277-1288
- [Tee91] A.R. Teel, "Using Saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems", *IFAC NOLCOS'92 Symposium*, pp.369-374, June 1991.
- [Tla11] Tlalolini, D., Chevallereau, C., Aoustin, Y., "Human-like walking: optimal motion of a bipedal robot with toe-rotation motion", *IEEE Trans. Robot.*, 2011, 16, pp. 310-320
- [Utk77] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [Utk92] V.I. Utkin, *Sliding Modes in control and Optimization*, New York: Springer-Verlag, 1992.
- [Van99] van der Schaft, A., *L2-gain and passivity in nonlinear control*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [Vel08] Velagic, J., Lacevic, B., Osmic, N., "Nonlinear motion control of mobile robot dynamic model", In Jing, X.J. (Ed.): 'Motion Planning', *InTech Education and Publishing*, 2008.
- [Wai08] Wai, R.J., Kuo, M.A., Lee, "Cascade direct adaptive fuzzy control design for a nonlinear two-axis inverted-pendulum servomechanism", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B, Cybern.*, 2008, 38, pp. 439-454
- [Wal94] Walsh, G.C., Montgomery, R., Sastry, S., "Orientation control of the dynamic satellite", *Proc. Am. Control Conf.*, Berkeley, CA, USA, 1994, pp. 138-142.
- [Wan94] L.X. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control Design and Stability: Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.
- [Wan04] W. Wang, J. Yi, D. Zhao, D. Liu, "Design of stable sliding mode controller for a class of second-order under-actuated systems", *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, Vol. 151, No. 6, November 2004, pp. 683-690.
- [Wan05] W. Wang, Jianqiang Yi, Dongbin Zhao, Xiaojing Liu, "Design of Cascade Fuzzy Sliding-Mode Controller", *American Control Conference*, Portland, OR, USA. pp. 4649-4654, June 8-10, 2005

- [Whi06] White, W.N., Foss, M., Guo, X., “A direct Lyapunov approach for a class of underactuated mechanical systems”. *Proc. American Control Conf.*, Minneapolis, Minnesota, USA, 2006, pp. 103–110
- [Xin05] Xin, X., Kaneda, M., “Analysis of the energy-based control for swinging up two pendulums”, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2005, 50, pp. 679–684
- [Xu00] J.-X. Xu, C.-C. Hang and C. Liu, “Parallel Structure and Tuning of a Fuzzy PID Controller”, *Automatica*, Vol. 36, 2000, pp 673-684.
- [Xu08] Xu, R., Özgüner, U., “Sliding mode control of a class of underactuated systems”, *Automatica*, 2008, 44, pp. 233–241
- [Yam93] M. Yamakita, K. Nonaka, and K. Furuta, “Swing up control of a double pendulum”, *Proc. the American Control Conference*, pp.2229–2233, 1993.
- [Yam95] M.Yamakita, M.Iwashiro, Y.Sugahara, and K.Furuta, ”Robust swing up control of double pendulum”, *In American control conference*, pp. 290–295, 1995.
- [Yan11] Yang, E.C., Chao, P.C., Sung, C.K., ”Optimal control of an underactuated system for landing with desired postures”, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2011, 19, pp. 248–255
- [Yan13] L. Yang , Y.Hongnian, "A survey of underactuated mechanical systems", *IET Control Theory and Applications*, 2013, Vol. 7, Iss. 7, pp. 921–935
- [Yi05] J. Yi, W. Wang, “Cascade sliding-mode controller for large scale underactuated systems”, *Proc. the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005, pp. 301-306
- [You99] S.Young K. D., Utkin V. I. et Ozguner U, “A Control Engineer’s guide to sliding mode controller”, *IEEE Trans. Control System Technology*. Vol. 7, pp 328 – 342, 1999.
- [Yu98] X. Yu, Z. Man, B. Wu, “Design of fuzzy sliding-mode control systems”, *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 95, no. 3, pp. 295–306, 1998.
- [Zho01] Zhong, W., Rock, H., ”Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart”, *Proc. IEEE Int. Conf. Control Applications*, Mexico City, Mexico, 2001, pp. 896–901