

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Mécanique

THESE
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique
Présentée par

BOUZIANI Ryad
Ingénieur d'état en Génie Mécanique

Pour l'obtention du titre de
MAGISTER EN GENIE MECANIQUE
Option : Construction Mécanique

THEME

**SIMULATION NUMERIQUE DE
L'EMBOUTISSAGE DES TOLES**

Soutenue le 14 Décembre 2002 devant le jury composé de :

M.BOUAZIZ	M.Conférences	E.N.P	Président
S.RECHAK	Professeur	E.N.P	Rapporteur
Y.BELKACEMI	Dr.Chargé de cours	E.N.P	Examineur
K.AZZOUAOUI	Chargé de cours	U.S.T.H.B	Examineur
M.OUADJAOUT	Chargé de cours	E.N.P	Examineur

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse le Professeur **S.RECHAK** pour avoir accepté de m'encadrer et pour ses conseils précieux.

Mes sincères salutations sont réservées au **Dr. M. BOUAZIZ** (E.N.P) pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Mes vifs remerciements s'adressent également à **Dr. Y.BELKACEMI** (E.N.P) pour ses conseils et d'avoir accepté d'examiner mon travail et de faire partie du jury.

Je suis sensible à l'honneur que me font : Monsieur **K. AZZOUAOUI** (U.S.T.H.B) et Monsieur **M.OUADJAOUT** (E.N.P) en acceptant de juger mon travail et de faire partie du jury.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

ملخص :

هذه الدراسة تتناول المحاكاة العددية لتطريق الصفائح المعدنية باستعمال طريقة العناصر المنتهية. فقد اعتبرنا التطريق عملية ذات تحولات كبيرة. قانون السلوك المرن - اللدن المستعمل يحتوي على المرونة موحدة الخواص، اللدانة غير موحدة الخصائص الموصوفة بواسطة معيار هيل، والتصلب موحّد الخواص. للأخذ بعين الاعتبار تغير الشروط الحدية خلال عملية التشكيل، استعملنا صياغة لاغرانج المحدثة. أخيرا أدرجنا المنحنيات الحدية الإجهادية للتشكيل. التي تعتبر معيارا جوهريا لحدّ قابلية تشكيل المعادن. الكلمات المفتاحية : المحاكاة العددية - التطريق - المرونة اللدنة - التشوهات الكبيرة - العناصر المنتهية - المنحنيات الحدية للتشكيل.

Résumé :

Cette étude traite de la simulation numérique de l'emboutissage des tôles en utilisant la méthode des éléments finis.

Nous avons considéré l'emboutissage comme un processus à grandes transformations. La loi de comportement élastoplastique utilisée comporte l'élasticité isotrope, l'orthotropie plastique initiale décrite par le critère de Hill et l'écrouissage isotrope.

La prise en compte du changement des conditions aux limites le long du déroulement du processus nous a amené à utiliser une description lagrangienne actualisée.

Finalement, nous avons introduit les courbes limites de formage (C.L.F) en contraintes qui représentent un critère intrinsèque de limite de formabilité des métaux.

Mots clés : Simulation numérique – Emboutissage – Elastoplasticité – Grandes déformations – Eléments finis – Courbes limites de formage.

Abstract :

This study deals with sheet metal deep-drawing numerical simulation using the finite elements method .

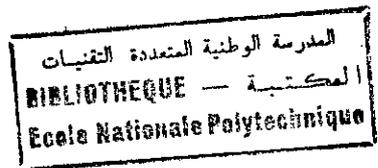
We considered deep-drawing as a large deformation process. The elastoplastic behavior law used includes isotropic elasticity, initial orthotropic plasticity described by Hill criterion and isotropic hardening.

To take into account boundary conditions variation along the process, we used the updated lagrangian formulation.

Finally, we introduced the forming limit diagrams (F.L.D) in stresses that represents an intrinsic criterion of the formability limit.

Key words : Numerical simulation – Deep-drawing – Elastoplasticity – Large deformation – Finite element – Forming limit diagrams

SOMMAIRE



PRINCIPALES NOTATIONS.....	
INTRODUCTION ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE.....	1
CHAPITRE I : GENERALITES.....	6
I.1: Elastoplasticité-Aspects phénoménologiques.....	7
I.1.1.Limite d'élasticité – Critère de plasticité.....	7
I.1.2.Ecrouissage.....	8
I.2. Comportement plastique anisotrope des tôles laminées.....	11
I.2.1.Coefficient d'anisotropie.....	11
I.2.2.Critère anisotrope.....	12
CHAPITRE II: COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE EN GRANDES TRANSFORMATIONS.....	16
II.1. Cinématique des grandes transformations.....	17
II.1. Décomposition polaire du gradient de la transformation.....	18
II.2. Principe des puissances virtuelles.....	19
II.2.1. Equations d'équilibre.....	19
II.2.2. Principe des puissances virtuelles.....	20
II.3. Relations constitutives.....	23
II.3.1. Décomposition de la déformation totale.....	23
II.3.1.1. Décomposition cinématique de la transformation.....	23
II.3.1.2. Décomposition de la déformation totale.....	24
II.3.2. Relation entre vitesses de contrainte et de déformation élastiques.....	26
II.3.3. Choix d'un critère de plasticité et d'une loi d'écrouissage.....	28
II.3.4. Loi d'écoulement plastique.....	30

II.3.5. Comportement élastoplastique.....	32
II.4. Linéarisation du P.P.V en formulation Lagrangienne actualisée.....	35
II.5. Particularités de l'emboutissage 2 D	39
II.5.1. Déformation plane.....	39
II.5.2. Déformation axisymétrique.....	40
II.6. Discrétisation spatiale par éléments finis.....	44
II.6.1. Fonctions d'interpolation.....	44
II.6.2. Discrétisation du P.P.V. linéarisé.....	45
CHAPITRE III : MODELISATION DU PROCESSUS DE DEFORMATION LORS DE L'EMBOUTISSAGE.....	48
III.1. Modèle.....	49
III.2. Conditions aux limites.....	50
CHAPITRE IV : MISE EN OEUVRE ET RESULTATS.....	52
IV.1. Organigramme.....	53
IV.2. Méthode de résolution- la méthode frontale.....	55
IV.3. Algorithme de calcul des contraintes par incrément.....	55
IV.2. Résultats et interprétation.....	59
IV.2.1. Pliage des tôles.....	59
IV.2.2. Emboutissage d'une pièce hémisphérique.....	61
CHAPITRE V : CONTRAINTES LIMITES DE FORMAGE.....	68
V.1. Introduction.....	68
V.2. Courbes limites de formage.....	68

V.2.1. Hypothèses simplificatrices.....	71
V.2.2. Contraintes limites de formage.....	72
CONCLUSION.....	74
BIBLIOGRAPHIE.....	76
ANNEXES.....	81
ANNEXE 1 : Objectivité et dérivées objectives.....	82
ANNEXE 2 : Expression du tenseur rotation. Méthode de HUGHES.....	86

PRINCIPALES NOTATIONS.

Notation	Signification
X	Vecteur position dans la configuration C_0
x	Vecteur position dans la configuration C_t
v	Vecteur vitesse.
F	Gradient de la transformation
L	Gradient de vitesse
D	Tenseur vitesse de déformation
W	Tenseur vitesse de rotation
E	Tenseur de déformation de Green-Lagrange
S	Second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff
σ	Tenseur de contraintes de Cauchy
U	Tenseur de déformation pure droit
V	Tenseur de déformation pure droit
$d\Omega_0$	Elément de volume dans C_0
$d\Omega$	Elément de volume dans C_t
:	Produit tensoriel doublement contracté

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE :

L'emboutissage à froid des tôles minces est un procédé de mise en forme, par déformation plastique, des métaux en feuilles, à température ambiante.

Les tôles utilisées sont des tôles laminées à froid, ce qui leur donne un comportement anisotrope lors du processus.

C'est un procédé qui consiste en la mise en forme d'une feuille de métal, convenablement découpée et appelée *flan* en une pièce plus ou moins creuse par enfoncement de la tôle à l'aide d'un *poignon* aux dimensions intérieures de la pièce, dans une cavité creuse, la *matrice*, aux côtes extérieures de la pièce à obtenir.

L'emboutissage peut être avec ou sans *serre flan*. (fig.1 et 2)

Ce procédé, difficile à maîtriser, dépend de nombreux paramètres liés à la géométrie, à la nature des matériaux et aux efforts appliqués. Des essais au laboratoire et à l'atelier sont souvent nécessaires pour déterminer une combinaison adéquate de ces paramètres et obtenir un embouti réussi. Ces essais sont en général nombreux, lents et coûteux.

La nécessité d'améliorer la qualité et de réduire le coût et le délai de la mise au point des produits a suscité un intérêt de plus en plus important de la simulation numérique de ce processus. Ceci a été facilité grâce à l'évolution des moyens informatiques à bas prix et au développement de méthodes numériques très élaborées, telles que la méthode des éléments finis qui nécessite, surtout dans les applications non linéaires, des calculateurs rapides ayant une taille de mémoire suffisamment grande.

De nombreux travaux utilisant la méthode des éléments finis pour la modélisation et la simulation numérique des tôles minces ont été réalisés.

Au début, on utilisait la théorie des petites déformations élastoplastiques pour simuler le processus sans tenir compte du problème de contact [31].

Ensuite la théorie des grandes déformations élastoplastiques [15, 16, 33] est introduite dans les simulations, et on a commencé à prendre en compte le problème de contact avec frottement ainsi que l'effet d'anisotropie [16].

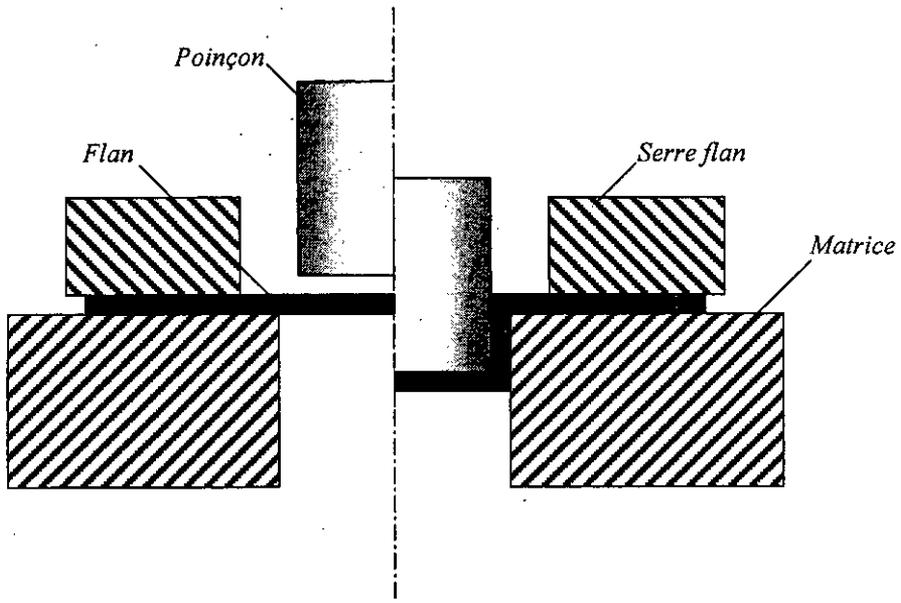


Fig.1. Emboutissage avec serre flan

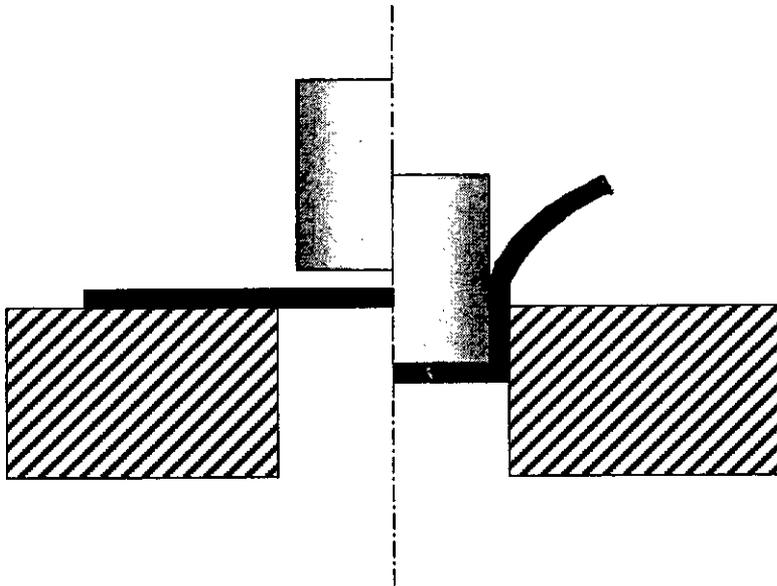


Fig.2. Emboutissage sans serre flan

Dans le présent travail, nous procédons à une simulation de l'emboutissage 2D en utilisant la méthode des éléments finis et la théorie des grandes transformations, tout en tenant compte de l'anisotropie plastique initiale, l'écroutissage isotrope et l'évolution du contact avec frottement entre la tôle et l'outil.

La simulation numérique de l'emboutissage demande une modélisation très fine des phénomènes physiques intervenant dans la mise en forme. On citera :

- La formulation du problème, qui aboutit à des équations nécessitant des méthodes d'approximation et de résolution performantes.
- La modélisation du comportement de la tôle qui subit au cours de l'emboutissage de grandes transformations élastoplastiques.
- La modélisation du contact avec frottement entre la tôle et les outils.
- La prise en compte des efforts de retenue (cas de l'emboutissage avec serre flan).

Ce travail est présenté suivant le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions fondamentales liées à l'élastoplasticité et à l'anisotropie plastique.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la formulation détaillée du comportement élastoplastique en grandes transformations sous forme incrémentale et la forme linéarisée du principe des puissances virtuelles en description Lagrangienne actualisée ainsi que sa discrétisation par la méthode des éléments finis.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation du processus de déformation pendant le déroulement de l'emboutissage où nous utilisons une méthode explicite pour résoudre le problème de contact tôle-outil avec frottement. Un repère local est introduit pour faciliter l'imposition des conditions aux limites aux nœuds qui sont en contact avec l'outil.

Dans le quatrième chapitre nous présentons l'organigramme global décrivant le code élaboré ainsi que l'algorithme de calcul des contraintes par incrément. Nous

procédons à la validation du code de simulation, par comparaison des résultats numériques aux résultats expérimentaux.

Dans le cinquième chapitre nous introduisons les courbes limites de formage en contraintes qui sont indépendantes du trajet de la déformation et constituent ainsi un critère intrinsèque de la limite de formabilité des métaux.

Nous terminons le présent travail par une conclusion et des recommandations.

Chapitre I

GENERALITES

I.GENERALITES

L'emboutissage des tôles est un processus à déformation élastoplastique des tôles obtenues par laminage, donc anisotropes.

I.1- ELASTOPLASTICITE –Aspects phénoménologiques : [2, 3, 4, 6]

L'analyse de la réponse d'une éprouvette, à partir d'un état initial donné pris comme état de référence, à diverses sollicitations de traction-compression permet de dégager les principaux aspects phénoménologiques de l'élastoplasticité, lorsque la viscosité et l'endommagement sont négligés. Sur la base de ces observations, on peut dégager les principales questions que devra résoudre une représentation locale et tridimensionnelle de ce comportement.

I.1.1-Limite d'élasticité (seuil de plasticité) – Critère de plasticité : [3, 4]

La limite d'élasticité est la contrainte au-dessus de laquelle apparaissent des déformations irréversibles dans un essai sur éprouvette soumise à un chargement monotone : une traction par exemple. Le premier écart à la linéarité étant généralement difficile à discerner avec précision, on préfère retenir la valeur conventionnelle de la contrainte axiale correspondant à une déformation axiale permanente de 0.2 %. Cela nécessite de supprimer la charge pour mettre en évidence la déformation permanente ε^p , la déformation totale ε se décomposant à tout moment en parties : plastique ε^p et élastique ε^e (soit $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$).

La généralisation de la notion de limite d'élasticité au cas tridimensionnel est le critère de plasticité. Il définit le domaine, dans l'espace de contraintes à six dimensions, à l'intérieur duquel toute variation de contrainte n'engendre que des variations de déformation élastique. On définit alors une fonction $f(\sigma)$, à valeurs scalaires, du tenseur de contraintes telle que par convention, elle prenne des valeurs négatives tant que la réponse est purement élastique et s'annule à l'entrée dans le régime plastique. La fonction $f(\sigma)$ est dite fonction de charge.

I.1.2-Ecrouissage : [2, 3, 4]

Si on soumet une éprouvette à une traction jusqu'à une certaine valeur de la déformation plastique axiale ε_1^p et de la contrainte σ_1 suivie par une décharge jusqu'à contrainte nulle, la décharge se fait de manière élastique avec un module que l'on peut considérer comme inchangé par rapport au module initial : on se retrouve alors au point $O_1(0, \varepsilon_1^p)$ de la figure(fig.I.1). L'état atteint en O_1 étant stabilisé, si on veut déterminer la limite d'élasticité en traction dans l'état O_1 , on trouvera sensiblement la valeur σ_1 et non plus σ_0 c'est à dire qu'il y a eu durcissement du matériau : c'est ce qu'on appelle *écrouissage*.

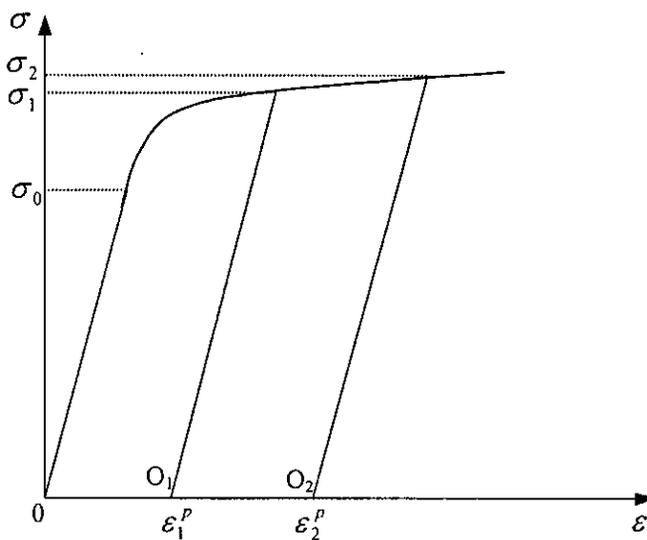


Fig.I.1 Courbe d'écrouissage. Essai de traction

De même que la limite d'élasticité d'une éprouvette évolue au cours de l'écoulement plastique en traction ou en compression lorsque le matériau est écrouissable, la surface de charge, dans le cas tridimensionnel, évolue aussi au cours de l'écoulement, le point de charge restant toujours sur la surface. Pour cette raison la fonction de charge doit dépendre d'autres variables que les seules composantes du tenseur de contraintes : ces variables sont les paramètres d'écrouissage.

Il existe plusieurs manières de schématiser le durcissement des matériaux engendré par les déformations.

I.1.2.1-Ecrouissage isotrope :

Bien que la plupart des matériaux présentent une forte anisotropie d'écrouissage, le schéma de l'écrouissage isotrope est très utilisé à cause de sa simplicité et de sa bonne représentativité dans le cas du chargement radial, c'est à dire lorsque le vecteur représentatif des contraintes dans l'espace des contraintes garde une direction constante.

On dira qu'un matériau est justiciable de l'hypothèse d'écrouissage isotrope, si la frontière de son domaine d'élasticité ne dépend que d'un paramètre scalaire Y .

La fonction de charge aura alors comme expression :

$$f(\sigma, Y) = f(\sigma) - h(Y) \quad (I.1)$$

La courbe de compression succédant à une traction dans un essai d'écrouissage se déduit de la courbe de traction monotone par une homothétie de rapport -1 et de centre le point à contrainte nulle (fig.I.2), et la surface de charge ne subit qu'une simple dilatation homothétique par rapport à l'origine (fig.I.3).

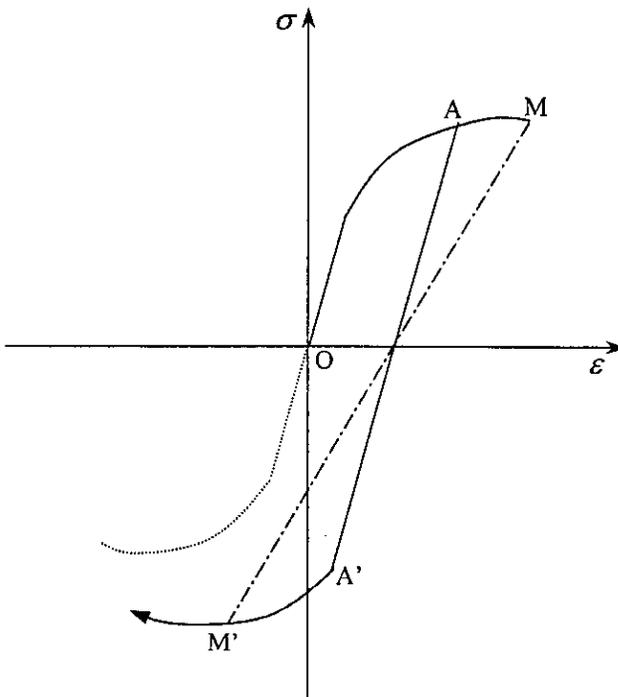


Fig.I.2 Ecrouissage isotrope. Essai de traction -compression

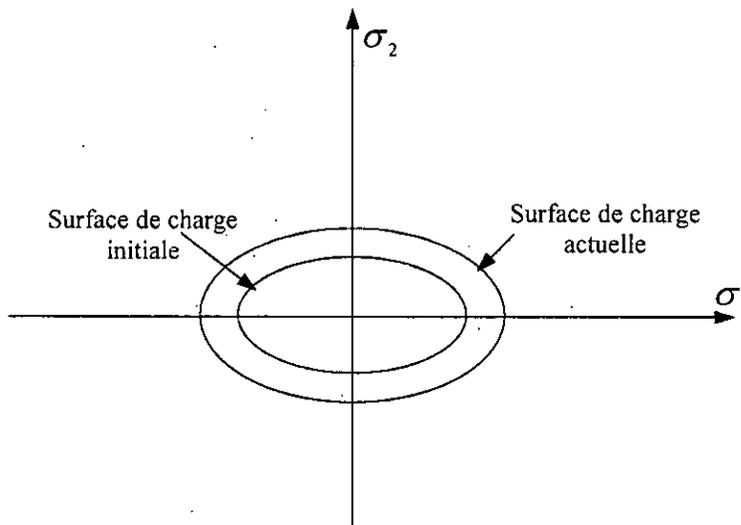


Fig.I.3 Evolution de la surface de charge -Ecouissage isotrope-

I.1.2.2-Ecouissage cinématique :

Une schématisation très utile de l'écrouissage anisotrope est l'écrouissage cinématique linéaire pour lequel on considère une simple translation de la surface de charge dans l'espace des contraintes, sans rotation ni déformation. Un paramètre tensoriel d'écrouissage, soit X , de même ordre que σ doit alors être utilisé. La fonction de charge s'écrira :

$$f(\sigma, X) = f(\sigma - X) \quad (I.2)$$

Le point X se trouvant, vis à vis de la surface de charge après écoulement, dans la même situation que l'était l'origine vis à vis de la surface initiale (fig.I.4).

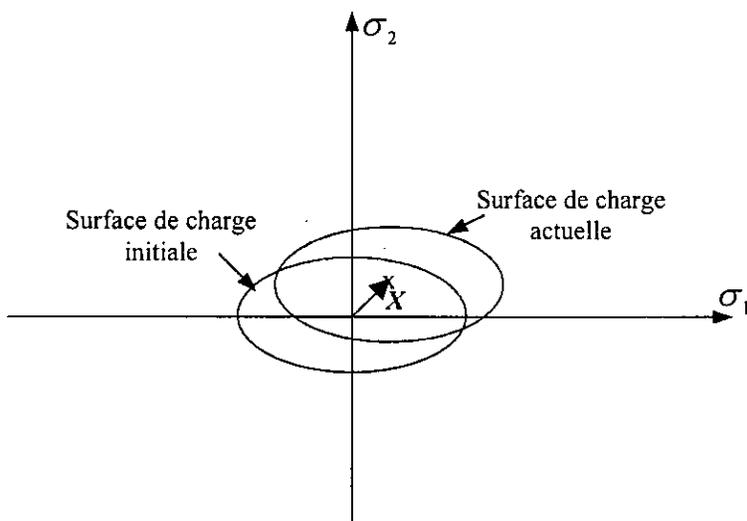


Fig.I.4 Evolution de la surface de charge -Ecouissage cinématique-

A partir de ces deux schémas extrêmes d'écroutissage, on peut envisager diverses extensions, notamment :

- L'écroutissage cinématique non linéaire.
- La combinaison d'écroutissage isotrope et d'écroutissage cinématique (dilatation et translation de la surface de charge).

I.1.2.3-Effet Bauschinger :

L'effet Bauschinger se met en évidence lorsque l'on soumet une éprouvette à un essai de traction suivi d'un essai de compression ; on constate souvent que la traction préalable a écrouti le matériau dans le sens de la traction (augmentation de la limite d'élasticité) mais l'a adouci dans le sens de la compression c'est à dire que la limite d'élasticité en compression est plus faible que la limite initiale en compression. Parmi les deux schématisations simples de l'écroutissage évoquées ci dessus, l'écroutissage cinématique se rapproche plus de cas réellement rencontrés et donne une première approximation de l'effet Bauschinger.

I.2-COMPORTEMENT PLASTIQUE ANISOTROPE DES TOLES LAMINEES : [6, 7]

Les tôles utilisées en emboutissage étant obtenues par laminage à froid, elles ont un comportement plastique anisotrope [7]. Ceci se traduit, au niveau macroscopique, par des caractéristiques mécaniques et rhéologiques du matériau différentes suivant l'orientation sur le plan de la tôle. Signalons que cette anisotropie n'est pas la plus générale il s'agit d'un cas particulier de l'anisotropie appelé orthotropie plastique ; c'est à dire que les tôles présentent trois plans de symétrie mutuellement orthogonaux. Les intersections de ces plans définissent les axes d'orthotropie.

I.2.1-Coefficient d'anisotropie : [6, 7]

Pour tenir compte de l'anisotropie, LANKFORD (1950) a introduit le coefficient d'anisotropie [6] qui est défini par le rapport des déformations rationnelles en largeur et en épaisseur dans l'essai de traction :

$$r = \ln(l/l_0) / \ln(e/e_0) \quad (I.3)$$

l étant la largeur et e l'épaisseur de l'éprouvette en traction. l_0 et e_0 leurs valeurs initiales.

En tenant compte de l'incompressibilité plastique du matériau, on peut facilement déterminer le coefficient r en mesurant les déformations suivant la longueur et la largeur de l'éprouvette de traction et en déduire la déformation suivant l'épaisseur, puisque:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \quad (1.4)$$

Une valeur élevée de r , correspond en fait à une résistance élevée à l'amincissement, paramètre qui joue évidemment un rôle dans les déformations par emboutissage.

Cependant, comme r est la conséquence de la présence d'une texture dans la tôle, on observe également une variation de r en fonction de l'orientation considérée dans le plan de la tôle. Il est d'usage de prendre comme direction de référence le sens du laminage ; on trouve donc en général le coefficient r avec un petit indice indiquant l'angle de traction par rapport au sens du laminage ou sous sa forme moyenne qui est définie par :

$$\bar{r} = \frac{1}{4}(r_0 + 2r_{45} + r_{90}) \quad (1.5)$$

Cette définition est valable pour les aciers doux présentant des maximums de r à 0 et 90° ou à 45° de la direction du laminage.

Le coefficient r est utilisé pour évaluer l'influence des différentes orientations cristallographiques que les opérations de laminage et de recristallisation peuvent permettre de développer dans les tôles, sur leur aptitude à l'emboutissage.

1.2.2-Critère anisotrope : [3, 6, 7]

Hill a étudié l'anisotropie plastique des tôles minces laminées, jouissant de la symétrie orthotrope par rapport aux directions de laminage DL, transverse DT et normale DN. Dans ces axes, l'expression $f(\sigma_{ij})$, prend la forme :

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 \quad (1.6)$$

F, G, H, L, M et N sont des paramètres du matériau, appelés coefficients de Hill.

On fait l'hypothèse que, $f(\sigma_{ij})$ est le potentiel plastique.

Les déformations incrémentales sont obtenues en différentiant $f(\sigma_{ij})$ par rapport aux σ_{ij} .

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = G(\sigma_x - \sigma_z) + H(\sigma_x - \sigma_y) \quad (I.7)$$

et par conséquent :

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{G(\sigma_x - \sigma_z) + H(\sigma_x - \sigma_y)} = d\lambda \quad (I.8)$$

Des expressions similaires sont obtenues pour les autres composantes de l'incrément de déformation qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= d\lambda [H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)] \\ d\varepsilon_y^p &= d\lambda [F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)] \\ d\varepsilon_z^p &= d\lambda [G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)] \\ d\gamma_{yz}^p &= d\lambda L \sigma_{yz} \\ d\gamma_{zx}^p &= d\lambda M \sigma_{zx} \\ d\gamma_{xy}^p &= d\lambda N \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (I.9)$$

Ces expressions satisfont la condition d'incompressibilité plastique :

$$d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = 0 \quad (I.10)$$

Lorsque les incréments de déformation élastique sont petits par comparaison aux incréments de déformation plastique, ces derniers peuvent être confondus avec les incréments de déformation totale.

Si on découpe une éprouvette de traction dans une tôle laminée, dans la direction du laminage parallèlement à l'axe x , on obtient :

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{G + H} = \frac{d\varepsilon_y^p}{-H} = \frac{d\varepsilon_z^p}{-G} \quad (I.11)$$

Le coefficient d'anisotropie dans cette direction s'écrit :

$$r_x = \frac{d\varepsilon_y^p}{d\varepsilon_z^p} = \frac{H}{G} \quad (\text{I.12})$$

et si on découpe une éprouvette dans la direction transverse parallèlement à l'axe y , on obtient :

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{-H} = \frac{d\varepsilon_y^p}{F+H} = \frac{d\varepsilon_z^p}{-F} \quad (\text{I.13})$$

Le coefficient d'anisotropie dans cette direction s'écrit :

$$r_y = \frac{d\varepsilon_x^p}{d\varepsilon_z^p} = \frac{H}{F} \quad (\text{I.14})$$

Si on découpe maintenant une éprouvette dans une direction faisant un angle α avec la direction de laminage, on aura :

$$\sigma_x = \sigma \cos^2 \alpha \quad , \quad \sigma_y = \sigma \sin^2 \alpha \quad , \quad \sigma_{xy} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \quad (\text{I.15})$$

où : σ est la contrainte de traction appliquée sur cette éprouvette.

En substituant ces expressions dans les équations (I.9) on obtient :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= [(G+H)\cos^2 \alpha - H\sin^2 \alpha] \sigma d\lambda \\ d\varepsilon_y^p &= [(F+H)\sin^2 \alpha - H\cos^2 \alpha] \sigma d\lambda \\ d\varepsilon_z^p &= -[F\sin^2 \alpha + G\cos^2 \alpha] \sigma d\lambda \\ d\gamma_{xy}^p &= [N\sin \alpha \cos \alpha] \sigma d\lambda \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

L'incrément de déformation dans le sens perpendiculaire à α s'écrit :

$$d\varepsilon_{\alpha+(\pi/2)}^p = d\varepsilon_x^p \sin^2 \alpha + d\varepsilon_y^p \cos^2 \alpha - 2d\gamma_{xy}^p \sin \alpha \cos \alpha \quad (\text{I.17})$$

et par conséquent, le coefficient d'anisotropie dans la direction α s'écrit :

$$r_\alpha = \frac{d\varepsilon_{\alpha+(\pi/2)}^p}{d\varepsilon_z^p} = \frac{d\varepsilon_x^p \sin^2 \alpha + d\varepsilon_y^p \cos^2 \alpha - 2d\gamma_{xy}^p \sin \alpha \cos \alpha}{d\varepsilon_z^p}$$

$$r_\alpha = \frac{H + (2N - F - G - 4H)\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha} \quad (I.18)$$

les équations ci-dessus donnent :

$$r_x = r_0 = \frac{H}{G}$$

$$r_y = r_{90} = \frac{H}{F} \quad (I.19)$$

$$r_{45} = \frac{2N - (F + G)}{2(F + G)} \quad \text{ou} \quad \frac{N}{G} = \left(r_{45} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{r_0}{r_{90}} \right)$$

r_0 , r_{45} et r_{90} désignent les valeurs du coefficient d'anisotropie respectivement le long, à 45° et à 90°, par rapport à la direction du laminage.

Chapitre II

COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE EN GRANDES TRANSFORMATIONS

II.COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE EN GRANDES TRANSFORMATIONS :

II.1.CINEMATIQUE DES GRANDES TRANSFORMATIONS : [1, 3, 9, 30]

Considérons un solide déformable occupant à l'instant t_0 une configuration C_0 dite configuration de référence et à l'instant t , après avoir subi une transformation, une configuration C_t : configuration actuelle.

Dans ce chapitre, le mouvement du solide est considéré dans un système de coordonnées fixe. Toutes les variables cinématiques et statiques sont mesurées dans ce système de coordonnées.

Désignons par \mathbf{X} et \mathbf{x} les vecteurs position d'un point matériel par rapport à ce repère respectivement dans les configurations C_0 et C_t .

Le vecteur déplacement du point P est défini par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (\text{II.1})$$

et le vecteur vitesse par :

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (\text{II.2})$$

Une mesure fondamentale de la déformation du corps est donnée par le gradient de la transformation défini par :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{où : } \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \text{ et } \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

Le gradient de la transformation décrit les dilatations et les rotations subies par les fibres du matériau de l'instant t_0 à l'instant t .

On définit le tenseur des déformations entre les configurations C_0 et C_t par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{II.4})$$

Ce tenseur est dit de Cauchy- Green droit.

On définit aussi le tenseur de déformation de Green- Lagrange par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (\text{II.5})$$

ou en utilisant la notation indicielle :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (\text{II.6})$$

Le gradient de la vitesse \mathcal{V} par rapport à \mathbf{x} est donné par la relation :

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{II.7})$$

La partie symétrique de \mathbf{L} est le tenseur vitesse de déformation \mathbf{D} et sa partie antisymétrique est le tenseur vitesse de rotation \mathbf{W}

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (\text{II.8})$$

où :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

II.1.1. Décomposition polaire du gradient de la transformation

L'énoncé du théorème de la décomposition polaire stipule que toute transformation linéaire inversible \mathbf{F} admet deux décompositions multiplicatives uniques :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (\text{II.9})$$

Où : R est un tenseur orthogonal appelé tenseur de rotation

U et V sont les tenseurs de déformation pure droit et gauche respectivement. Ce sont deux tenseurs symétriques et définis positifs.

On voit bien en utilisant $RU=VR$ que U et V ont les mêmes valeurs propres et que les axes principaux de V se déduisent de ceux de U par la rotation R .

II.2.PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES : [1,9,21, 30]

II.2.1. Equations d'équilibre :

Soit un solide déformable occupant à l'instant t un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ et soumis à l'action des forces extérieures surfaciques et/ou volumiques.

Le principe fondamental de la mécanique, traduit par la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathcal{V} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f d\Omega \quad (\text{II.10})$$

Où : σ : tenseur de contraintes de Cauchy

\mathcal{V} : vecteur vitesse

ρ : masse volumique

f : vecteur des forces volumiques par unité de masse

n : la normale à $\partial\Omega$.

En utilisant la formule de Green, et en tenant compte de la conservation de la masse, on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d\mathcal{V}}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \text{div} \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \rho f d\Omega \quad (\text{II.11})$$

En l'absence des forces volumiques et en négligeant l'effet des accélérations, on aboutit à :

$$\int_{\Omega} \text{div } \sigma \, d\Omega = 0 \quad (\text{II.12})$$

Ce qui donne les équations d'équilibre du milieu continu :

$$\text{div } \sigma = 0 \quad (\text{II.13})$$

Avec les conditions aux limites:

$$\mathcal{V} = \bar{\mathcal{V}} \quad \text{sur } \partial\Omega_{\mathcal{V}} \quad (\text{II.14})$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^* \quad \text{sur } \partial\Omega_{\mathbf{T}}$$

où : \mathbf{T} est le vecteur contrainte de Cauchy,

et \mathcal{V} le vecteur vitesse de déplacement.

En désignant par \mathbf{n} le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\partial\Omega$ on a :

$$\mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{n} \quad (\text{II.15})$$

II.2.2 Principe des puissances virtuelles : [1, 9, 15, 16, 30]

Soit \mathcal{V}_{adm} , l'ensemble des vecteurs vitesses virtuelles, cinématiquement admissibles. En multipliant l'équation (II.13) par un vecteur $\delta \mathcal{V} \in \mathcal{V}_{adm}$ et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} \text{div } \sigma \cdot \delta \mathcal{V} \, d\Omega = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'application du théorème de la divergence donne :

$$\int_{\Omega} \sigma : \text{grad } \delta \mathcal{V} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \text{div}(\sigma \cdot \delta \mathcal{V}) \, d\Omega = 0 \quad (\text{II.17})$$

$$\text{ou} \quad \int_{\Omega} \sigma : \text{grad } \delta \mathcal{V} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathcal{V} \, d\Gamma = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$\text{ou encore} \quad \int_{\Omega} \sigma : \delta \mathbf{D} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathcal{V} \, d\Gamma \quad (\text{II.19})$$

On suppose que : $\partial\Omega = \partial\Omega_\nu \cup \partial\Omega_T$

$$\begin{aligned} \text{Et :} \quad \delta\mathcal{V} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_\nu, \\ \sigma \cdot n &= T^* \text{ sur } \partial\Omega_T. \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{On aura alors :} \quad \int_{\Omega} \sigma : \delta D d\Omega = \int_{\partial\Omega_T} T^* \cdot \delta \mathcal{V} d\Gamma \quad (\text{II.21})$$

Ou en composantes :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta D_{ij} d\Omega = \int_{\partial\Omega_T} T_i^* \delta \mathcal{V}_i d\Gamma \quad (\text{II.22})$$

Cette identité s'appelle la forme eulerienne du principe des puissances virtuelles car, la modélisation des efforts intérieurs par le champ des tenseurs des contraintes de Cauchy est défini sur la configuration C_t .

L'utilisation de la forme Lagrangienne du principe des puissances virtuelles consiste en la description du principe dans la configuration initiale de référence C_0 . En utilisant le tenseur de déformation de Green- Lagrange dans cette description, on doit définir un tenseur de contraintes approprié : c'est le second tenseur de Piola-Kirchhoff : S , défini par [1] :

$$J\sigma : D = S : \dot{E} \quad (\text{II.23})$$

$$\text{où :} \quad J = \det F$$

Chaque membre de l'identité (II.23) exprime la puissance des forces intérieures par unité de volume de référence.

En tenant compte de (II.5), (II.7) et (II.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{1}{2} (\dot{F}^T F + F^T \dot{F}) = \frac{1}{2} (F^T L^T F + F^T L F) \\ &= F^T \left(\frac{1}{2} (L^T + L) \right) F = F^T D F \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Pour obtenir l'expression explicite de \mathbf{S} , on substitue (II.24) dans (II.23) :

$$J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \mathbf{S} : (\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}) \quad (\text{II.25})$$

ou en composantes :

$$J\sigma_{ij} D_{ij} = S_{ij} F_{ki} D_{kl} F_{lj} \quad (\text{II.26})$$

ou encore :

$$J\sigma_{ij} D_{ij} = (F_{ki} S_{ij} F_{lj}) D_{kl} \quad (\text{II.27})$$

qui peut se mettre en écriture tensorielle sous la forme :

$$J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = (\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T) : \mathbf{D} \quad (\text{II.28})$$

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (\text{II.29})$$

et par conséquent :

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{II.30})$$

c'est l'expression du second tenseur de Piola-Kirchhoff.

En se basant sur l'équation (II.30), l'équation (II.21) devient :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} \, d\Omega_0 = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T}^{*0} \cdot \delta \mathcal{V} \, d\Gamma_0 \quad (\text{II.31})$$

II.3.RELATIONS CONSTITUTIVES :

L'écriture d'un modèle de comportement élastoplastique en grandes déformations est basée sur la séparation de la déformation totale en déformation élastique(réversible) et plastique(irréversible).

La règle de partition utilisée en petites déformations : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ ne se généralise en grandes transformations qu'au prix d'une complexité considérable [3].

Dans le présent travail, on utilise une approche s'appuyant sur des observations micromécaniques, basée sur une décomposition multiplicative du gradient de la transformation en parties élastique et plastique.

Pour décrire complètement une loi de comportement élastoplastique, on doit suivre la démarche suivante :

- a- Décomposition de la déformation totale.
- b- Définition d'une relation entre les contraintes et les déformations élastiques ou entre leurs vitesses.
- c- Choix d'un critère de plasticité.
- d- Ecriture de la loi d'évolution de la surface de plasticité(ou surface de charge),c'est à dire la loi d'écrouissage.
- e- Ecriture de la loi d'écoulement plastique.

II.3.1.Décomposition de la déformation totale : [1, 9, 17, 20, 30]

II.3.1.1.Décomposition cinématique de la transformation :

Par décomposition cinématique de la transformation, on entend une décomposition multiplicative de F , qui permet d'écrire le tenseur vitesse de déformation D sous la forme :

$$D = D^e + D^p \quad (\text{II.32})$$

La décomposition adoptée dans ce travail repose sur l'introduction du concept de configuration intermédiaire relâchée.

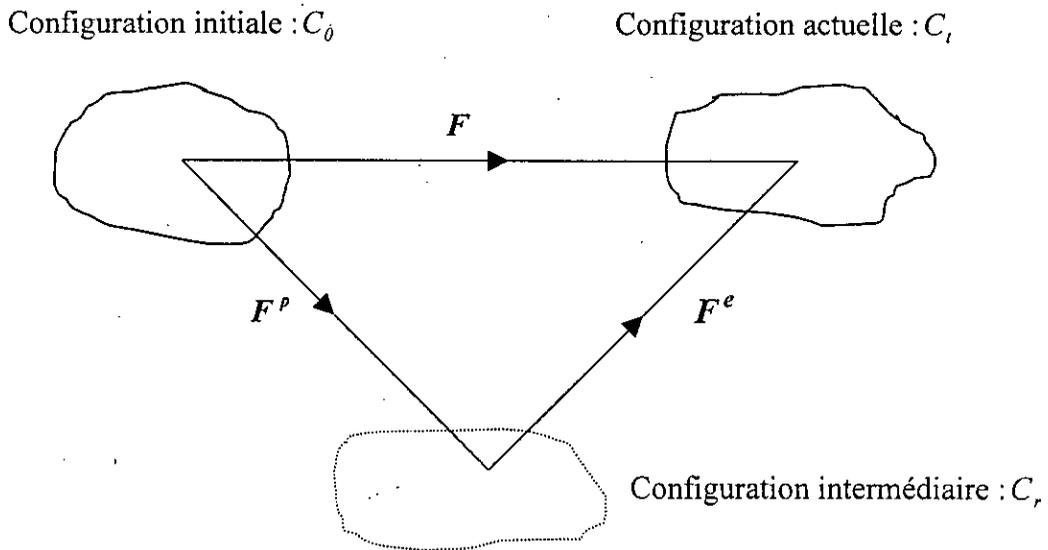


Fig.(II.1)

La figure (II.1) montre schématiquement la décomposition de la transformation F en une transformation plastique F^p entre configurations initiale et intermédiaire, et une transformation élastique F^e entre cette dernière et l'état actuel.

Soit :
$$F = F^e F^p \quad (\text{II.33})$$

II.3.1.2. Décomposition de la déformation totale :

Cette décomposition multiplicative du gradient de la transformation permet la décomposition du gradient de vitesse L :

$$\begin{aligned} L = \dot{F}F^{-1} &= (\dot{F}^e F^p)' (F^e F^p)^{-1} = (\dot{F}^e F^p + F^e \dot{F}^p) F^{p^{-1}} F^{e^{-1}} \\ &= \dot{F}^e F^{e^{-1}} + F^e \dot{F}^p F^{p^{-1}} F^{e^{-1}} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

qui peut aussi être décomposé en parties élastique et plastique [1] :

$$\begin{aligned} L^e &= \dot{F}^e F^{e-1} \\ L^p &= F^e \dot{F}^p F^{p-1} F^{e-1} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

où : le point désigne la dérivée temporelle particulière.

Puisque $\det F^p = 1$, on a : $J = \det F^e > 0$ et on peut calculer la décomposition polaire :

$$F^e = VR \quad (\text{II.36})$$

où : R est un tenseur orthogonal.

V est un tenseur symétrique, défini positif.

Dans les procédés de mise en forme à froid, la transformation entre la configuration intermédiaire et la configuration actuelle génère de petites déformations élastiques. C'est pourquoi, on peut poser :

$$V = I + \varepsilon, \quad \text{avec } \|\varepsilon\| \ll 1 \quad (\text{II.37})$$

En substituant (II.36), (II.37) dans (II.35), on obtient :

$$\begin{aligned} L^e &= \dot{V}V^{-1} + V\dot{R}R^T V^{-1} \\ L^p &= VR\dot{F}^p F^{p-1} R^T V^{-1} \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

En tenant compte de l'hypothèse de petites déformations élastiques, on obtient :

$$\begin{aligned} L^e &= \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{R}R^T - \dot{R}R^T \varepsilon + \dot{R}R^T \\ L^p &= R\dot{F}^p F^{p-1} R^T \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

En faisant l'hypothèse que la vitesse de rotation plastique est nulle, la décomposition des équations (II.39) en parties symétriques et antisymétriques donne :

$$D = D^e + D^p \quad (\text{II.40})$$

où :

$$\begin{aligned} D^e &= \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{R}R^T - \dot{R}R^T \varepsilon \\ D^p &= R\dot{F}^p F^{p-1} R^T \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^e = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad (\text{II.41})$$

$$\text{D'où :} \quad \mathbf{D}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^J = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.42})$$

Où : $\boldsymbol{\varepsilon}^J$ est la dérivée objective de Jaumann.

Les équations (II.40) écrites dans un repère tourné par la rotation \mathbf{R} deviennent :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} &= \bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{D}}^p \\ \text{avec :} \quad \bar{\mathbf{D}} &= \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}, \quad \bar{\mathbf{D}}^e = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\varepsilon}^J \mathbf{R}, \quad \bar{\mathbf{D}}^p = \mathbf{R}^T \mathbf{D}^p \mathbf{R} = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

II.3.2. Relation entre vitesses de contrainte et de déformation élastique :

Dans un processus élastoplastique, la transformation élastique se fait entre la configuration intermédiaire relâchée C_r et la configuration actuelle C_t .

Soit \mathbf{S} , le second tenseur de Piola-Kirchhoff associé à C_r :

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{e-T}, \quad J = \det \mathbf{F}^e \quad (\text{II.44})$$

et soit \mathbf{E}^e , le tenseur de Green-Lagrange décrivant la déformation élastique :

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e - \mathbf{I} \right) \quad (\text{II.45})$$

En faisant l'hypothèse que les déformations élastiques sont petites devant l'unité, c'est à dire :

$$\mathbf{F}^e = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{R}, \quad \text{avec} \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1 \quad (\text{II.46})$$

et en négligeant les termes de second ordre en $\boldsymbol{\varepsilon}$, on obtient :

$$\mathbf{E}^e = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{R}, \quad E_{ij}^e = R_{ki} R_{lj} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.47})$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}, \quad S_{ij} = R_{ki} R_{lj} \sigma_{kl} \quad (\text{II.48})$$

$$\text{et} \quad \mathbf{S} = \mathbf{C}^e : \mathbf{E}^e, \quad S_{ij} = C_{ijkl}^e E_{kl}^e \quad (\text{II.49})$$

La dérivée temporelle de l'équation (II.44) donne :

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{e^{-1}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} \mathbf{F}^{e^{-T}} \quad (\text{II.50})$$

où $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR}$ est la dérivée de Truesdell de $\boldsymbol{\sigma}$ donnée par l'expression :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}^e \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^{eT} + (\text{tr} \mathbf{L}^e) \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{II.51})$$

En substituant (II.46) dans (II.50) et en supposant que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ soit petite, l'équation (II.50) devient :

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{R}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} \mathbf{R} \quad (\text{II.52})$$

$$\text{avec :} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}^e \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{W}^e$$

D'autre part, la dérivée temporelle de (II.47) donne :

$$\dot{\mathbf{E}}^e = \mathbf{R}^T \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{R} \quad (\text{II.53})$$

$$\text{avec :} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{W}^e \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{W}^e$$

En dérivant l'équation (II.49), on obtient :

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^e : \dot{\mathbf{E}}^e, \quad \dot{S}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{E}_{kl}^e \quad (\text{II.54})$$

Compte tenu des équations (II.52) et (II.53), l'équation (II.54) devient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} = \bar{\mathbf{C}}^e : \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \dot{\sigma}_{ij}^{TR} = \bar{C}_{ijkl}^e \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl} \quad (\text{II.55})$$

$$\text{avec :} \quad \bar{C}_{ijkl}^e = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} C_{mnpq}^e$$

De plus, notre hypothèse sur la nullité de la vitesse de rotation plastique, permet l'écriture de l'équation (II.55) sous la forme :

$$\dot{\sigma}^J = \bar{C}^e : \dot{\varepsilon}^J \quad , \quad \dot{\sigma}_{ij}^J = \bar{C}_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl}^J \quad (\text{II.56})$$

C'est la relation entre les vitesses de variation des contraintes et des déformations.

$$\text{avec : } \bar{C}_{ijkl}^e = C_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{II.57})$$

où : λ et μ sont les constantes de Lamé.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

et δ_{ij} est le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$$

L'équation (II.57) est justifiée par le fait que la déformation élastique est isotrope.

II.3.3. Choix d'un critère de plasticité et d'une loi d'écrouissage : [3, 4, 6]

Les tôles utilisées dans le processus d'emboutissage, sont obtenues par laminage à froid, ce qui conduit à un comportement plastique anisotrope particulier : c'est l'orthotropie plastique ; c'est à dire que les tôles présentent trois plans de symétrie mutuellement orthogonaux. Les intersections de ces plans définissent les axes d'orthotropie.

Dans ce travail, on utilise le critère de plasticité de Hill, car il décrit bien l'orthotropie plastique initiale, avec une loi d'écrouissage isotrope.

Le critère de plasticité s'écrit :

$$f(\sigma_{eq}, \sigma_y) = \sigma_{eq} - \sigma_y = 0 \quad (\text{II.58})$$

où : σ_y est la contrainte d'écoulement en traction simple.

σ_{eq} est la contrainte équivalente définie par :

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma : \mathbf{M} : \sigma \quad , \quad \sigma_{eq}^2 = M_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (\text{II.59})$$

\mathbf{M} est un tenseur symétrique de quatrième ordre qui a les propriétés suivantes :

$$M_{ijkl} = M_{klij} \quad , \quad M_{iikm} = 0 \quad (\text{II.60})$$

l'orthotropie plastique initiale de la tôle est décrite par le critère de Hill, formulé sous la forme (II.59) avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}^2 = & F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_y - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_z)^2 \\ & + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xy}^2 + 2N\sigma_{zx}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

où : les composantes de σ sont prises par rapport aux axes d'orthotropie,

et F, G, H, L, M, N sont les six paramètres scalaires adimensionnels du matériau. Ils peuvent être déterminés à l'aide de trois expériences de traction simple et trois expériences de cisaillement simple.

Les lois d'écrouissage isotrope adoptées sont :

$$\begin{aligned} \text{la loi de Swift:} \quad & \sigma_y = c(a + \varepsilon_{eq}^p)^n ; \quad 0 \leq n \leq 1. \\ \text{la loi de Ludwik :} \quad & \sigma_y = \sigma_0 + b(\varepsilon_{eq}^p)^n ; \quad 0 \leq n \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

où : c, a, b et n sont constantes, pour un matériau donné.

II.3.4. Loi d'écoulement plastique : [2, 3, 5, 6, 20]

Pour dériver la loi d'écoulement plastique, on suppose que la vitesse de déformation plastique est proportionnelle au gradient en contraintes d'une quantité appelée *potentiel plastique* Q , telle que :

$$\mathbf{D}^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad D_{ij}^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{II.63})$$

où : λ est une constante de proportionnalité appelée : *multiplicateur plastique*.

Le potentiel plastique Q ne peut pas être déterminé dans sa forme la plus générale. Dans le cas de la plasticité, on le confond avec la surface d'écoulement : $f \equiv Q$, ce qui donne la loi d'écoulement associée :

$$\mathbf{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad D_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{II.64})$$

En substituant (II.58) et (II.59) dans (II.64), on obtient :

$$\mathbf{D}^p = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{eq}} \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} \quad , \quad D_{ij}^p = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{eq}} M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (\text{II.65})$$

Dans ce travail, on a choisi la déformation plastique équivalente ε_{eq}^p comme paramètre d'érouissage isotrope. Elle est définie par :

$$\varepsilon_{eq}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt \quad (\text{II.66})$$

où :

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^p = \frac{1}{\sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p$$

est la vitesse de déformation plastique équivalente.

La prise en compte de l'équation (II.65) dans (II.66) donne :

$$\dot{\lambda} = \dot{\varepsilon}_{eq}^P \quad (\text{II.67})$$

L'état de contraintes pour lequel $f = 0$ représente l'état plastique, tandis que l'état élastique est caractérisé par l'inégalité : $f < 0$.

Dans un état plastique, le changement incrémental de la fonction de charge, dû à un changement incrémental de contraintes s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (\text{II.68})$$

Si :

- $df < 0$: une décharge élastique a lieu, et le point définissant l'état de contraintes se déplace vers l'intérieur de la surface de charge.
- $df = 0$: il s'agit d'un écoulement plastique. Le point définissant l'état de contraintes reste sur la surface de charge.

Dans le cas d'un matériau écrouissable, le point de contrainte reste toujours sur la surface de charge qui est en expansion.

En dérivant l'équation (II.58) par rapport au temps, on obtient dans le cas de la charge :

$$\dot{\sigma}_{eq} - \frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon_{eq}^P} \cdot \dot{\varepsilon}_{eq}^P = 0 \quad (\text{II.69})$$

Posons : $H' = \frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon_{eq}^P}$

L'équation (II.69) s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{eq} - H' \cdot \dot{\varepsilon}_{eq}^P = 0 \quad (\text{II.70})$$

La dérivée de l'équation (II.59) par rapport au temps donne :

$$\dot{\sigma}_{eq} = \frac{1}{\sigma_{eq}} (\sigma : M : \dot{\sigma}) \quad (\text{II.71})$$

En substituant (II.70) dans (II.67) et en tenant compte de (II.71), il résulte pour le cas de la charge :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H' \sigma_{eq}} (\sigma : M : \dot{\sigma}) \quad (\text{II.72})$$

Dans les autres cas, c'est à dire : élastique, plastique avec décharge ou charge neutre, le multiplicateur plastique est nul.

II.3.5. Comportement élastoplastique :

Pour décrire le comportement élastoplastique des tôles pendant le processus d'emboutissage, on suppose que le matériau qui présente une orthotropie plastique initiale reste orthotrope et que ses axes d'orthotropie tournent avec la vitesse de rotation élastique (la vitesse de rotation plastique étant nulle).

On exprime alors les relations déjà obtenues dans la configuration initiale dans la configuration tournée par la rotation \mathbf{R} [16, 26] et on obtient les relations suivantes :

$$\bullet \quad \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{D}}^p \quad (\text{II.73})$$

$$\bullet \quad \dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{D}}^e \quad (\text{II.74})$$

$$\bullet \quad f(\sigma_{eq}, \sigma_Y) = \sigma_{eq} - \sigma_Y(\varepsilon_{eq}^p) = 0 \quad (\text{II.75})$$

$$\bullet \quad \bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \bar{\sigma}} \quad (\text{II.76})$$

$$\text{avec : } \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}, \quad \bar{\mathbf{D}}^e = \mathbf{R}^T \varepsilon^J \mathbf{R}, \quad \bar{\mathbf{D}}^p = \mathbf{R}^T \mathbf{D}^p \mathbf{R}, \quad (\text{II.77})$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{R}^T \dot{\sigma}^J \mathbf{R}, \quad \bar{\sigma} = \mathbf{R}^T \sigma \mathbf{R}, \quad \sigma_{eq}^2 = \bar{\sigma} : \bar{\mathbf{M}} : \bar{\sigma},$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{R}^T (\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R}) \mathbf{R}, \quad \bar{M}_{ijkl} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} M_{mnpq}.$$

Le multiplicateur scalaire plastique $\dot{\lambda}$ s'écrit dans la configuration tournée par la rotation \mathbf{R} :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H' \sigma_{eq}} (\bar{\sigma} : \bar{\mathbf{M}} : \dot{\bar{\sigma}}) \quad (\text{II.78})$$

On pose :

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{M}} : \bar{\sigma} \quad (\text{II.79})$$

En introduisant (II.74) dans (II.78) et en tenant compte de (II.73), (II.76) et (II.79), on obtient :

$$\dot{\lambda} = \sigma_{eq} \frac{\bar{\mathbf{A}} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{D}}}{H' \sigma_{eq}^2 + \bar{\mathbf{A}} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{A}}} \quad (\text{II.80})$$

La loi d'écoulement élastoplastique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}} &= \mathbf{C}^e : (\bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{D}}^p) = \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{D}} - \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{eq}} \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{A}} \\ &= \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{D}} - \frac{(\bar{\mathbf{A}} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{D}})(\mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{A}})}{H' \sigma_{eq}^2 + \bar{\mathbf{A}} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{A}}} \end{aligned} \quad (\text{II.81})$$

Si le matériau est en décharge ou en état élastique, la loi de comportement s'écrit :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{D}} \quad (\text{II.82})$$

En introduisant (II.57) dans (II.81), l'expression (II.81) s'écrit :

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \lambda \delta_{ij} \bar{D}_{ii} + 2\mu \bar{D}_{ij} - \frac{4\mu^2 \bar{A}_{ij} \bar{D}_{kl} \bar{A}_{kl}}{H' \sigma_{eq}^2 + 2\mu \bar{A}_{pq} \bar{A}_{pq}} \quad (\text{II.83})$$

L'équation (II.83) peut se mettre sous la forme :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} : \bar{\mathbf{D}} \quad , \quad \dot{\bar{\sigma}}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \bar{D}_{kl} \quad (\text{II.84})$$

avec :

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e - \frac{4\mu^2 \bar{A}_j \bar{A}_{kl}}{H' \sigma_{eq}^2 + 2\mu \bar{A}_{pq} \bar{A}_{pq}} \quad (\text{II.85})$$

II.4. LINEARISATION DU P.P.V EN FORMULATION LAGRANGIENNE ACTUALISEE :

Dans une opération de mise en forme des tôles par emboutissage, les conditions aux limites changent tout au long du déroulement du processus. Pour pouvoir prendre en compte ce changement de conditions aux limites, on suppose qu'il y a des intervalles de temps suffisamment petits durant lesquels les conditions aux limites peuvent être considérées comme inchangées, et par conséquent le principe des puissances virtuelles aussi. Un changement éventuel dans les conditions aux limites peut se produire donc au début de chaque incrément.

L'utilisation de la formulation lagrangienne actualisée [10, 11] implique l'écriture du principe des puissances virtuelles par rapport à la configuration du début de l'incrément et par conséquent sa linéarisation par rapport à cette même configuration.

A l'instant t (début de l'incrément), le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\int_{\Omega_0} \sigma : \delta D d\Omega_0 = {}^t R \quad (\text{II.86})$$

R^t est la puissance des forces surfaciques extérieures à l'instant t .

avec :
$$\delta D = \frac{1}{2} (\delta L + (\delta L)^T)$$

A l'instant $t + \Delta t$ (fin de l'incrément), il s'écrit :

$$\int_{\Omega_0} S : \delta \dot{E} d\Omega_0 = {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{II.87})$$

avec :
$$S = J F^{-1} \sigma F^{-T}, \quad \delta \dot{E} = \frac{1}{2} (F^T \delta \dot{F} + (\delta \dot{F})^T F)$$

En effectuant la soustraction membre à membre entre (II.86) et (II.87), on obtient :

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D}) d\Omega_0 = \Delta \mathbf{R} \quad (\text{II.88})$$

avec
$$\Delta \mathbf{R} = \int_{\Sigma_0} \Delta \mathbf{P} \cdot \delta(\mathbf{d}\mathbf{u}) d\Sigma_0$$

En reportant l'identité :

$$\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\sigma} : ((\mathbf{I} - \mathbf{F}^T) \delta \dot{\mathbf{F}})$$

dans l'équation (II.88), on arrive à :

$$\int_{\Omega_0} [(\mathbf{S} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \dot{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{F}^T - \mathbf{I}) \delta \dot{\mathbf{F}}] d\Omega_0 = \Delta \mathbf{R} \quad (\text{II.89})$$

En divisant par Δt et en calculant la limite de l'équation (II.89) quand Δt tend vers 0 nous obtenons :

$$\int_{\Omega_0} (\dot{\mathbf{S}} : \delta \dot{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}}^T \delta \dot{\mathbf{F}})) d\Omega_0 = \dot{\mathbf{R}} \quad (\text{II.90})$$

En tenant compte de la relation :

$$\delta \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{D} \mathbf{F} \quad (\text{II.91})$$

L'équation (II.90) s'écrit :

$$\int_{\Omega_0} (\dot{\mathbf{S}} : (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{D} \mathbf{F}) + \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}}^T \delta \dot{\mathbf{F}})) d\Omega_0 = \dot{\mathbf{R}} \quad (\text{II.92})$$

ou encore :

$$\int_{\Omega_0} [(\mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T) : \delta \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}}^T \delta \dot{\mathbf{F}})] d\Omega_0 = \dot{\mathbf{R}} \quad (\text{II.93})$$

Le tenseur de contraintes de Cauchy est lié au second tenseur de Piola-Kirchhoff par la relation :

$$\sigma = J^{-1} F S F^T \quad (\text{II.94})$$

En prenant la dérivée par rapport au temps de cette dernière équation, on arrive à :

$$\dot{\sigma} = -\dot{J}J^{-2} F S F^T + J^{-1} \dot{F} S F^T + J^{-1} F \dot{S} F^T + J^{-1} F S \dot{F}^T \quad (\text{II.95})$$

soit :

$$\begin{aligned} F \dot{S} F^T &= J(\dot{\sigma} + \dot{J}J^{-2} F S F^T - J^{-1} \dot{F} S F^T - J^{-1} F S \dot{F}^T) \\ &= J(\dot{\sigma} + \text{tr}D \sigma - J^{-1} \dot{F} S F^T - J^{-1} F S \dot{F}^T) \end{aligned} \quad (\text{II.96})$$

En reportant (II.96) dans (II.93) et en tenant compte de (II.7) et (II.8), on aboutit à :

$$\int_{\Omega_0} (\dot{\sigma}^J - 2\sigma D + \sigma \text{tr}D) : \delta D d\Omega + \int_{\Omega_0} \sigma : (L^T \delta L) d\Omega = \dot{R} \quad (\text{II.97})$$

où : $\dot{\sigma}^J$ est la dérivée objective de Jaumann. Elle est donnée par la formule :

$$\dot{\sigma}^J = \dot{\sigma} + \sigma W - W\sigma \quad (\text{II.98})$$

Dans le cas de la mise en forme à froid, le terme $(\sigma \text{tr}D) : \delta D$ peut être négligé avec une bonne approximation. L'équation (II.97) devient alors :

$$\int_{\Omega_0} (\dot{\sigma}^J - 2\sigma D) : \delta D d\Omega + \int_{\Omega_0} (\sigma L^T) : \delta L d\Omega = \dot{R} \quad (\text{II.99})$$

D'autre part, en adoptant une loi de comportement non visqueuse, l'échelle de temps n'intervient pas, et seule la chronologie des événements est prise en compte. Ceci nous permet de remplacer les dérivées par rapport au temps des différentes variables dans l'équation (II.99) par leurs incréments respectifs, ce qui donne :

$$\int_{\Omega_0} (d\sigma^J - 2\sigma d\varepsilon) : \delta (d\varepsilon) d\Omega + \int_{\Omega_0} (\sigma dl^T) : \delta (dl) d\Omega_0 = dR \quad (\text{II.100})$$

$$\text{avec : } d\mathbf{R} = \int_{\Sigma^0} d\mathbf{P} \cdot \delta(d\mathbf{u}) d\Sigma_0$$

$$d\sigma^J = \dot{\sigma}^J dt, \quad d\varepsilon = \mathbf{D} dt, \quad d\mathbf{l} = \mathbf{L} dt$$

L'utilisation de la loi de comportement élastoplastique (II.100) conduit à la relation :

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{C}^{ep} : d\varepsilon - 2\sigma d\varepsilon) : \delta(d\varepsilon) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} (\sigma d\mathbf{l}^T) : \delta(d\mathbf{l}) d\Omega_0 = \int_{\Sigma_0} d\mathbf{P} \cdot \delta(d\mathbf{u}) d\Sigma_0 \quad (\text{II.101})$$

c'est le principe des puissances virtuelles sous forme incrémentale.

où : $d\mathbf{P}$ représente l'ensemble des forces incrémentales extérieures surfaciques sur la configuration au moment t .

La résolution du problème d'équilibre, pour un intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, consiste en la détermination des déplacements incrémentaux, des déformations et des contraintes incrémentales, en résolvant le système (II.101).

La configuration à l'instant $t + \Delta t$ est estimée en ajoutant les incréments des déplacements calculés aux coordonnées à l'instant t .

En général, la solution obtenue par cette méthode – dite méthode tangente – ne satisfait pas d'une manière rigoureuse le principe des puissances virtuelles et la loi de comportement élastoplastique à l'instant $t + \Delta t$. Pour cette raison nous utilisons la méthode itérative de Newton-Raphson [1, 2, 11], pour résoudre le problème d'équilibre d'une manière plus précise. Pour cela, on procède de la manière suivante :

En supposant que les déplacements incrémentaux obtenus par la méthode tangente représentent les déplacements incrémentaux à l'itération 0 dans le schéma itératif, on actualise la configuration et on détermine les déformations et les contraintes incrémentales pour cette itération. Ensuite, en effectuant une linéarisation du principe des puissances virtuelles par rapport aux déplacements incrémentaux actualisés après l'itération i (dans ce cas $i = 0$),

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{C}^{ep} : d\varepsilon - 2\sigma d\varepsilon) : \delta(d\varepsilon) d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma d\mathbf{l}^T) : (\delta d\mathbf{l}) d\Omega \\ & = \int_{\Sigma} \mathbf{P} \delta(d\mathbf{u}) d\Sigma - \int_{\Omega} \sigma : \delta(d\varepsilon) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II.102})$$

On résout l'équation (II.102) et on obtient les variations dans les incréments de déplacement $du^{(i)}$.

Les déplacements incrémentaux améliorés pour l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ sont obtenus par :

$$\Delta \mathbf{u}^{(i)} = \Delta \mathbf{u}^{(i-1)} + d\mathbf{u}^{(i)} \quad (\text{II.103})$$

et la configuration actualisée par :

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{X} + \Delta \mathbf{u}^{(i)} \quad (\text{II.104})$$

\mathbf{X} représente la configuration du début de l'incrément.

A partir de cette configuration actualisée $\mathbf{x}^{(i)}$ et des incréments de déplacement $\Delta \mathbf{u}^{(i)}$, on approxime les déformations incrémentales, les contraintes et les déformations plastiques équivalentes. Une fois déterminées, on résout de nouveau le système (II.102) pour l'itération suivante par rapport à la nouvelle configuration.

Le calcul se poursuit jusqu'à ce que les forces résiduelles deviennent suffisamment petites indépendamment de $\delta(du)$.

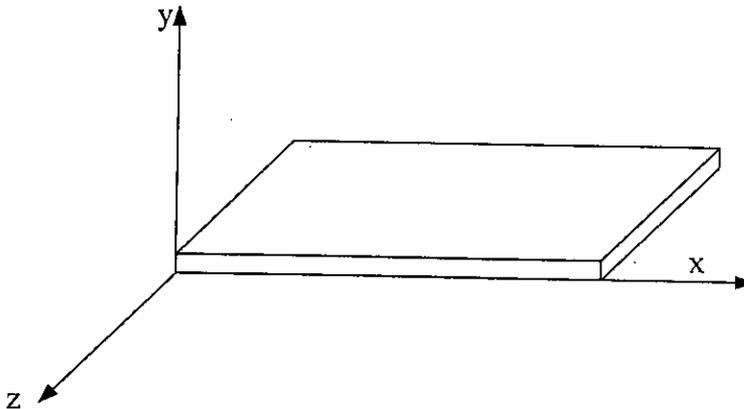
Dès que cette condition est remplie, on passe à un nouvel intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ en utilisant le schéma lagrangien actualisé.

II.5. PARTICULARITES DE L'EMBOUTISSAGE 2D :

Dans le présent travail, on traite de la simulation numérique de l'emboutissage 2D (déformation plane ou axisymétrique).

La géométrie de la tôle, du poinçon, de la matrice est repérée dans un système d'axes fixe qui définit le caractère bidimensionnel du problème.

II.5.1. Déformation plane :



On a :

$$\bar{\sigma}_{xz} = \bar{\sigma}_{yz} = 0$$

$$d\bar{\varepsilon}_{xz}^p = d\bar{\varepsilon}_{yz}^p = 0$$

$$d\bar{\varepsilon}_{zz} = 0$$

$$d\bar{\varepsilon}_{xz} = d\bar{\varepsilon}_{yz} = 0$$

Par conséquent la contrainte équivalente au sens de Hill σ_{eq} est déterminée par :

$$\sigma_{eq}^2 = F(\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\sigma}_{zz})^2 + G(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy})^2 + H(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}_{xx})^2 + 2M\bar{\sigma}_{xy}^2 \quad (\text{II.105})$$

où : F, G et H sont obtenus par des essais de traction simples dans le plan de la tôle.

M est approximé par la valeur correspondant au cisaillement dans le plan de la tôle.

$$M=N$$

Si la contrainte seuil σ_y est prise égale à la contrainte d'écoulement dans la direction de laminage, on obtient :

$$G + H = 1$$

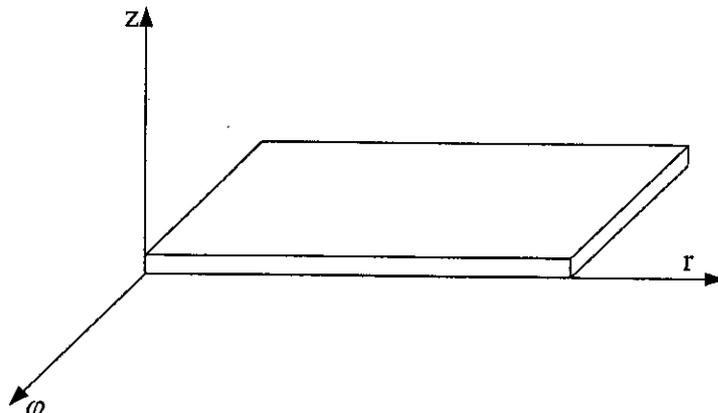
En tenant compte des équations précédentes, on obtient:

$$G = \frac{1}{1+r_0}, \quad H = \frac{r_0}{1+r_0},$$

$$F = \frac{r_0}{(1+r_0)r_{90}}, \quad M = N = \frac{1}{1+r_0} \left(r_{45} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{r_0}{r_{90}} \right) \quad (\text{II.106})$$

II.5.2. Déformation axisymétrique :

Dans ce cas, on utilise les coordonnées cylindriques :



On a :

$$\bar{\sigma}_{r\varphi} = \bar{\sigma}_{z\varphi} = 0$$

$$d\bar{\varepsilon}_{r\varphi}^p = d\bar{\varepsilon}_{z\varphi}^p = 0$$

$$d\bar{\varepsilon}_{r\varphi} = d\bar{\varepsilon}_{r\varphi} = 0$$

Pour préserver la symétrie axiale, on néglige l'anisotropie plane de la tôle et un coefficient d'anisotropie moyen \bar{r} est introduit en vue de calculer F, G, H et M :

$$\bar{r} = \frac{1}{4}(r_0 + 2r_{45} + r_{90}) \quad (\text{II.107})$$

En introduisant $\bar{\sigma}$ dans l'expression de la contrainte équivalente, on obtient :

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{1}{1+\bar{r}} \left((\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi})^2 + \bar{r}(\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} - \bar{\sigma}_{rr})^2 + (\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{zz})^2 \right) + 2M\bar{\sigma}_{rz}^2 \quad (\text{II.108})$$

où :

$$M = \frac{1+2\bar{r}}{1+\bar{r}} \quad (\text{II.109})$$

Comme plusieurs composantes des différents tenseurs considérés sont nulles, il est commode d'arranger les composantes non nulles en matrices unidimensionnelles.

Ainsi on remplace les champs incrémentaux par les vecteurs :

$$\{\mathbf{du}\} = \begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{dl}\} = \begin{Bmatrix} dl_{11} \\ dl_{22} \\ dl_{12} \\ dl_{21} \\ (dl_{33}) \end{Bmatrix},$$

$$\{\mathbf{d\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\gamma_{12} \\ (d\varepsilon_{33}) \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{d\sigma}\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \\ (d\sigma_{33}) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.110})$$

dans le cas de déformation plane, on élimine les composantes entre parenthèses tout en tenant compte de :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{33} &= dl_{33} = 0 \\ d\sigma_{33} &= \frac{E}{(1-2\nu)}(d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22}) - d\sigma_{11} - d\sigma_{22} \end{aligned} \quad (\text{II.111})$$

la rotation incrémentale $d\omega_{ij}$ a toutes les composantes nulles sauf :

$$d\omega_{12} = -d\omega_{21} = \frac{1}{2}(dl_{12} - dl_{21}) = d\omega \quad (\text{II.112})$$

En introduisant les équations (II.110), (II.111) et (II.112) dans (II.102), on obtient la forme matricielle du principe des puissances virtuelles linéarisé :

$$\int_{\Omega} \{ \delta(d\varepsilon) \}^T ([C] - [H]) \{ d\varepsilon \} + \{ \delta(dl) \}^T [G] \{ dl \} d\Omega = \int_{\Sigma} \{ \delta(du) \}^T \{ dP \} \cdot d\Sigma \quad (\text{II.113})$$

et la relation entre les incréments de contraintes et de déformations

$$\{ d\sigma^J \} = [C] \{ d\varepsilon \} \quad (\text{II.114})$$

où: $[C]$ est la matrice de comportement élastoplastique définie par :

$$[C] = [C^e] - [C^p] \quad (\text{II.115})$$

$$[C^e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}$$

$$[C^p] = \frac{4\mu^2}{H'\sigma_{eq}^2 + 2\mu \bar{A}_{pq} \bar{A}_{pq}} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix}$$

où :

$$B_{ij} = A_i A_j \quad (\text{II.116})$$

et

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ 2A_{12} \\ (A_{33}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ (A_4) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.117})$$

$$\{\bar{A}\} = [\bar{M}] \{\bar{\sigma}\} \quad (\text{II.118})$$

$$\{\bar{A}\} = [r(\alpha)] \{A\} \quad (\text{II.119})$$

$$\{\bar{\sigma}\} = [r(\alpha)] \{\sigma\} \quad (\text{II.120})$$

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} G+H & -G & 0 & -H \\ -G & F+G & 0 & -F \\ 0 & 0 & 2M & 0 \\ -H & -F & 0 & F+H \end{bmatrix} \quad (\text{II.121})$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & 2\sigma_{22} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{12} & \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.122})$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.123})$$

$$[r(\alpha)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.124})$$

$$[r(\alpha)]^{-1} = [r(-\alpha)] \quad (\text{II.125})$$

Une fois on a déterminé les composantes $d\sigma_{ij}^J$, les composantes $d\sigma_{ij}$ sont calculées à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} d\sigma_{11} &= d\sigma_{11}^J + 2\sigma_{12} d\omega \\ d\sigma_{22} &= d\sigma_{22}^J - 2\sigma_{12} d\omega \\ d\sigma_{12} &= d\sigma_{12}^J + (\sigma_{22} - \sigma_{11})d\omega \\ d\sigma_{33} &= d\sigma_{33}^J \end{aligned} \quad (\text{II.126})$$

II.6. DISCRETISATION SPATIALE DU PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES PAR ELEMENTS FINIS :

II.6.1. Fonctions d'interpolation :

Dans ce travail nous utilisons les éléments rectangulaires à 4 et à 8 nœuds.

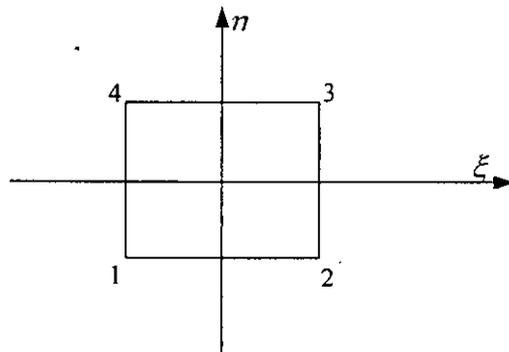
- Fonctions d'interpolation pour l'élément rectangulaire à 4 nœuds :

$$N_1 = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1)$$

$$N_2 = -\frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta + 1)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta - 1)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1)$$



- Fonctions d'interpolation pour l'élément rectangulaire à 8 nœuds :

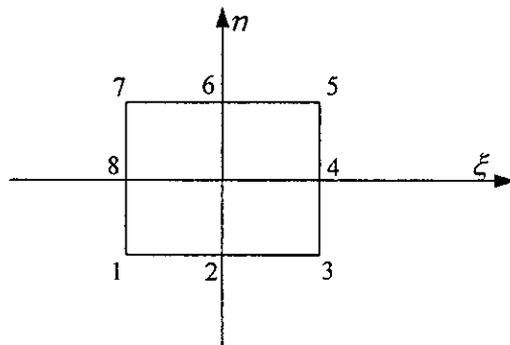
$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 - \xi^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta)$$



$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

II.6.2. Discrétisation du principe des puissances virtuelles linéarisé :

Dans le présent travail, on a utilisé des éléments isoparamétriques [2], c'est à dire que les coordonnées et les déplacements incrémentaux sont approximés à l'intérieur de chaque élément par les mêmes fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}\} &= \sum_i N_i(\xi, \eta) \{\mathbf{x}\}_i \\ \{d\mathbf{u}\} &= \sum_i N_i(\xi, \eta) \{d\mathbf{u}\}_i \end{aligned} \quad (\text{II.127})$$

où : ξ, η sont les coordonnées canoniques,

N_i les fonctions d'interpolation,

$\{\mathbf{x}\}_i$ le vecteur position du nœud i ,

$\{d\mathbf{u}\}_i$ le vecteur déplacement incrémental du nœud i .

En tenant compte des équations :

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= \frac{\partial(d\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}, & dl_{ij} &= \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j}, \\ d\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(d\mathbf{l} + (d\mathbf{l})^T), & d\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(dl_{ij} + dl_{ji}) \end{aligned} \quad (\text{II.128})$$

on obtient :

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} = \sum_i [\mathbf{B}]_i \{d\mathbf{u}\}_i,$$

et

$$\{dl\} = \sum_i [E]_i \{du\}_i \quad (\text{II.129})$$

avec

$$[B]_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{N_i}{x_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad [E]_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{N_i}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.130})$$

En prenant les mêmes fonctions d'interpolation pour $\{\delta(du)\}$, on obtient :

$$\{\delta(d\varepsilon)\} = \sum_i [B]_i \{\delta(du)\}_i,$$

et

$$\{\delta(dl)\} = \sum_i [E]_i \{\delta(du)\}_i \quad (\text{II.131})$$

en introduisant (II.129) et (II.131) dans le principe des puissances virtuelles, on obtient :

$$\{\delta(du)\}_i^T \left\{ \sum_j [k]_{ij} \{du\}_j - \{df\}_i \right\} = 0, \quad i, j = 1, n \quad (\text{II.132})$$

avec

$$[k]_{ij} = \int_{\Omega^e} ([B]_i^T ([C] - [H]) [B]_j + [E]_i^T [G] [E]_j) d\Omega \quad (\text{II.133})$$

$$\{df\}_i = \int_{\Sigma^e} N_i \{dP\} d\Sigma \quad (\text{II.134})$$

où : n est le nombre total des nœuds,

Ω^e est le domaine occupé par un élément quelconque.

Σ^e la frontière du domaine.

Le choix de $\{\delta(du)\}_i$ étant arbitraire on a :

$$\sum_j [k]_{ij} \{du\}_j = \{df\}_i, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (\text{II.135})$$

ou en écriture compacte :

$$[K]\{dU\} = \{dF\} \quad (\text{II.136})$$

$$\{dU\} = \begin{Bmatrix} \{du\}_1 \\ \{du\}_2 \\ \vdots \\ \{du\}_{n_n} \end{Bmatrix} \quad \{dF\} = \begin{Bmatrix} \{df\}_1 \\ \{df\}_2 \\ \vdots \\ \{df\}_n \end{Bmatrix} \quad (\text{II.137})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [k]_{11} & [k]_{12} & \dots & [k]_{1n_n} \\ [k]_{21} & [k]_{22} & \dots & [k]_{2n_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [k]_{n_n,1} & [k]_{n_n,2} & \dots & [k]_{n_n,n_n} \end{bmatrix} \quad (\text{II.138})$$

où : $[K]$ est la matrice de rigidité élémentaire,

$\{dU\}$ le vecteur déplacement élémentaire,

et $\{dF\}$ le vecteur force élémentaire.

Chapitre III

MODELISATION DU PROCESSUS DE DEFORMATION LORS DE L'EMBOUTISSAGE

III. MODELISATION DU PROCESSUS DE DEFORMATION LORS DE L'EMBOUITISSAGE.

III.1. MODELE :

Afin de pouvoir simuler le processus d'emboutissage, il est nécessaire d'avoir un modèle pouvant décrire le processus d'une façon suffisamment rigoureuse, tout en tenant compte du temps de calcul.

Durant tout le processus, on considère que la matrice est immobile.

La prise en compte des conditions aux limites se fait de la manière suivante :

Durant le déroulement du processus, la surface de la tôle du point D jusqu'à E est supposée toujours en contact sans frottement avec la matrice (fig.III.1); le bord EF est fixé dans la direction x ; le point C, qui est le point de la tôle le plus proche du rayon du poinçon, est considéré en contact géométrique avec le nez du poinçon et adhère si le coefficient de frottement n'est pas nul.

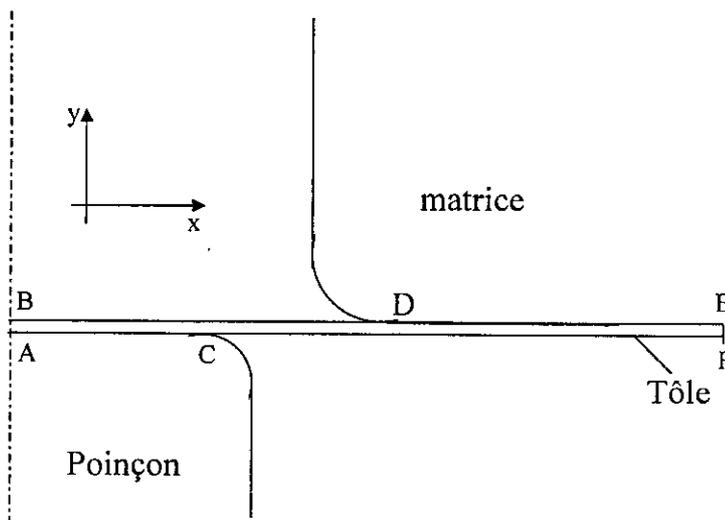


Fig.III.1. Schéma représentatif du modèle au début du processus

En faisant avancer le poinçon, le bord EF reste fixé jusqu'à ce que la somme des réactions sur ce bord atteigne une force pré-imposée F . Dans ce cas le bord est déclaré libre en gardant cette réaction constante ; sinon, le bord reste fixé.

Les conditions ci-dessus permettent de simuler la présence et l'action du serre-flan sans l'introduire d'une manière effective comme surface de contact.

Pour résoudre le problème de contact tôle-outil avec frottement, nous utilisons la méthode explicite, c'est à dire que nous supposons que pendant un intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$, il n'y a pas de changement des conditions aux limites et que les changements éventuels sont actualisés à la fin de l'incrément.

On suppose que les outils sont rigides, et que pour la gestion du problème de contact seuls les nœuds situés sur la surface de la tôle sont considérés.

Les nœuds en contact avec l'outil peuvent devenir libres, et inversement les nœuds libres peuvent entrer en contact.

Chaque nœud qui entre en contact avec l'outil constitue l'origine d'un repère, appelé repère local. Ce dernier est défini par un vecteur normal à la surface de l'outil noté n et un vecteur t tangent à l'outil au point de projection (fig.III.2). Pour un point qui n'est pas en contact, le repère local est confondu avec le repère global.

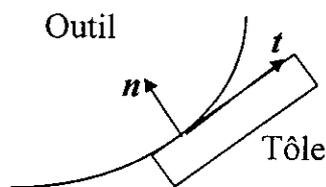


Fig.III.2. Point de la tôle en contact avec l'outil - Repère local.

III.2. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONTACT TOLE-OUTIL :

Sur la base du modèle dégagé et pour tenir compte du contact tôle-outil, on doit définir les conditions aux limites aux nœuds.

Nœud libre ayant tendance à entrer en contact :

Soit x le vecteur position d'un nœud N au début de l'incrément, x_c le point d'intersection C du trajet rectiligne avec l'outil (Fig.III.3), et du le déplacement incrémental.

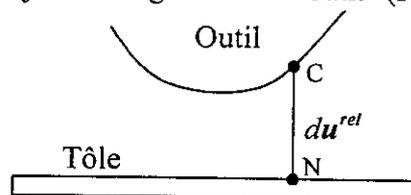


Fig.III.3. Condition de contact tôle-outil

$$du^{rel} = du - du^{outil} \quad (III.1)$$

si

$$|du^{rel}| < |x_c - x| \quad (III.2)$$

le nœud reste libre

si

$$|du^{rel}| \geq |x_c - x| \quad (III.3)$$

le nœud est entré en contact avec l'outil.

Nœud en contact ayant tendance à devenir libre :

Soit f le vecteur force au début de l'incrément et df l'incrément de force.

Si

$$f_n + df_n < 0 \quad (III.4)$$

le nœud reste en contact

si

$$f_n + df_n \geq 0 \quad (III.5)$$

le nœud devient libre.

Nœud bloqué ayant tendance à glisser

Comme le nœud est bloqué au début de l'incrément, on a :

$$|f_t| < \mu |f_n| \quad (III.6)$$

si

$$|f_t + df_t| < \mu |f_n + df_n| \quad (III.7)$$

le nœud reste bloqué,

si au contraire,

$$|f_t + df_t| \geq \mu |f_n + df_n| \quad (III.8)$$

le nœud est glissant.

Chapitre IV

MISE EN OEUVRE ET RESULTATS

IV.1. Organigramme :

Dans ce qui suit, nous présentons l'organigramme décrivant le code de simulation élaboré, précédé par une brève description des principaux sous-programmes :

ROUTINE INPUT : Permet la lecture des données définissant la géométrie, les conditions aux limites initiales et les propriétés du matériau.

ROUTINE CHARGE : Evalue les forces nodales équivalentes.

ROUTINE CONDIL : Définit la géométrie de l'outillage et actualise les conditions aux limites.

ROUTINE INCREM : Incrémente les forces appliquées.

ROUTINE STIFF : Calcule la matrice de rigidité élémentaire pour un matériau élastique ou élastoplastique.

ROUTINE FRONT : Résout le système d'équations par la méthode frontale.

ROUTINE RESIDU : Calcule les forces résiduelles.

ROUTINE CONVER : Vérifie la convergence du processus de résolution.

ROUTINE OUTPUT : Imprime les résultats relatifs à cet incrément.

L'organigramme est présenté ci-dessous :

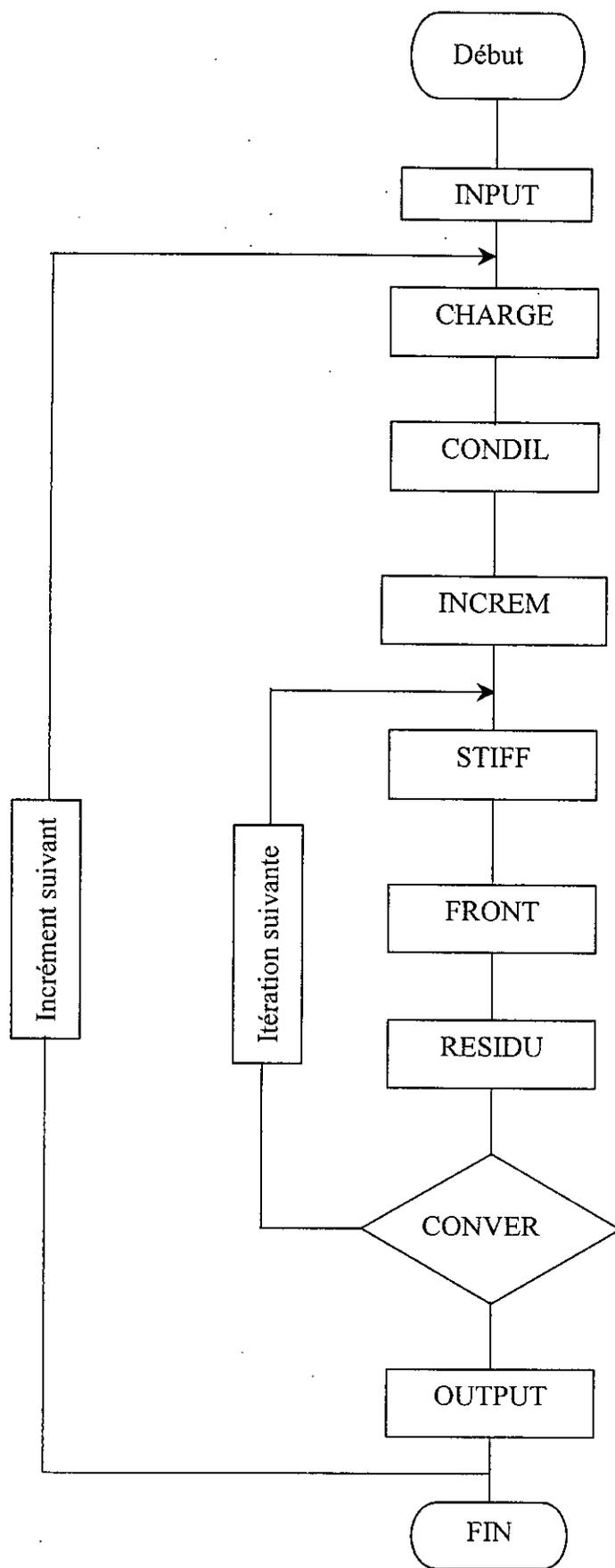


Fig.IV.1. Organigramme global

IV.2. Méthode de résolution : la méthode frontale[1, 2].

La méthode de résolution des équations adoptée est un facteur majeur influençant l'efficacité du programme éléments finis élaboré. Dans ce travail, nous avons opté pour la méthode de Gauss frontale qui combine la factorisation de Gauss à une optimisation de la taille mémoire.

L'idée principale de cette méthode est d'assembler les équations et d'éliminer les variables en même temps. Dès que les coefficients d'une équation sont complètement assemblés à partir des contributions des éléments environnants, la variable correspondante peut être éliminée. Par conséquent, la matrice de rigidité de la structure complète ne serait jamais formée.

IV.3. ALGORITHME DE CALCUL DES CONTRAINTES PAR INCREMENT

Avant de considérer les résultats de la simulation, nous allons présenter l'algorithme de calcul des contraintes pour chaque incrément. Ce calcul se fait après actualisation des conditions aux limites.

Durant l'application d'un incrément de force, un élément ou une partie d'un élément peut passer de l'état élastique à l'état élastoplastique. La détermination des contraintes et des déformations aux points d'intégration de Gauss permet de discerner ce passage éventuel en chacun de ces points.

Un élément peut avoir donc, un comportement partiellement élastique et partiellement élastoplastique si, seulement quelques points ont atteint la contrainte d'écoulement.

Pour un incrément de force quelconque, il est nécessaire de déterminer la proportion provoquant une déformation élastique et celle produisant une déformation plastique, ensuite, on ajuste les valeurs des contraintes et des déformations jusqu'à ce que le critère d'écoulement et la loi de comportement soient satisfaits.

La procédure adoptée est la suivante :

- 1- Les forces appliquées pour la i ème itération sont les forces résiduelles ψ^{i-1} qui donnent des incréments de déplacement $d\mathbf{u}$ ainsi que des incréments de déformation $d\boldsymbol{\varepsilon}$.

- 2- Calcul du changement incrémental de contrainte $d\sigma_e^i$, en supposant que le matériau se comporte élastiquement.
- 3- Calcul des contraintes totales de chaque élément en chaque point de Gauss.

$$\sigma_e^i = \sigma^{i-1} + d\sigma_e^i$$

où : σ^{i-1} est la contrainte de convergence de l'incrément $i-1$.

- 4- L'étape suivante dépend de ce que l'écoulement plastique s'est produit ou non au point de Gauss durant la $(i-1)$ ème itération.

On vérifie donc si :

$$\sigma_{eq}^{i-1} - \sigma_Y > 0,$$

Où : σ_{eq}^{i-1} est la contrainte équivalente.

- Si la réponse est : oui

Le point de Gauss est déjà entré en écoulement.

On vérifie alors si : $\sigma_{eq}^i > \sigma_{eq}^{i-1}$,

- Si la réponse est : oui

Le point de Gauss est déjà entré en écoulement et la contrainte croît toujours.

- Si la réponse est : non

Le point de Gauss est en décharge élastique. Aller à l'étape 7.

- Si la réponse est : non

Le point de Gauss n'est pas entré en écoulement plastique.

On vérifie si : $\sigma_{eq}^i > \sigma_Y$,

- Si la réponse est : oui

Le point de Gauss est entré en écoulement plastique durant l'application de la charge correspondant à l'itération. La portion de contrainte supérieure à celle d'écoulement doit être réduite à la surface de charge.

Le facteur de réduction est donné par :

$$R = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma_{eq}^i - \sigma_Y}{\sigma_{eq}^i - \sigma^{i-1}}$$

- Si la réponse est : non

Le point de Gauss est toujours dans l'état élastique. Aller à l'étape 7.

- 5- Pour les seuls points de Gauss qui sont entrés en écoulement, calculer la portion de contrainte totale qui satisfait le critère d'écoulement : $\sigma^{i-1} + (1 - R)d\sigma_e^i$.
- 6- La portion de contrainte restante $R d\sigma_e^i$ doit être effectivement annulée. Le point A doit être amené sur la surface de charge en permettant une déformation plastique d'avoir lieu. Physiquement ceci peut être décrit comme suit. En effectuant un chargement à partir du point C , le point de contrainte se déplace élastiquement jusqu'à ce qu'il rencontre la surface de charge au point B . un comportement élastique au-delà de ce point peut provoquer un état de contrainte final défini par le point A . Cependant, pour satisfaire le critère d'écoulement, le point représentant l'état de contrainte ne peut pas se déplacer à l'extérieur de la surface de charge et par conséquent, le point représentant l'état de contrainte peut seulement traverser la surface de charge jusqu'à ce que les conditions d'équilibre et les relations constitutives soient satisfaites.

- 7- Pour les points de Gauss dont le comportement est élastique, calculer :

$$\sigma^i = \sigma^{i-1} + d\sigma_e^i$$

- 8- Finalement, calculer les forces nodales équivalentes, à partir des valeurs des contraintes élémentaires.

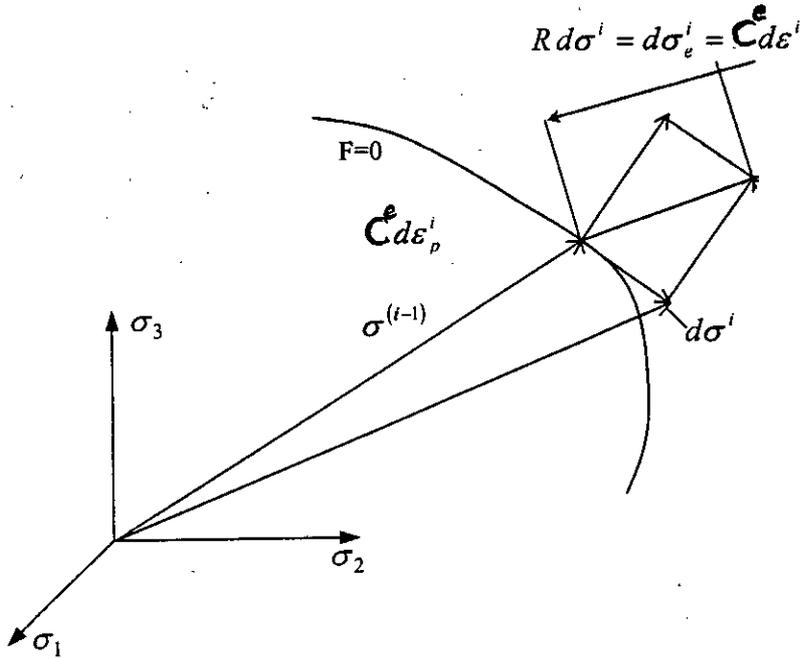


Fig. IV.2. Changement incrémental de contraintes dans un milieu élastoplastique. Le point est en écoulement plastique

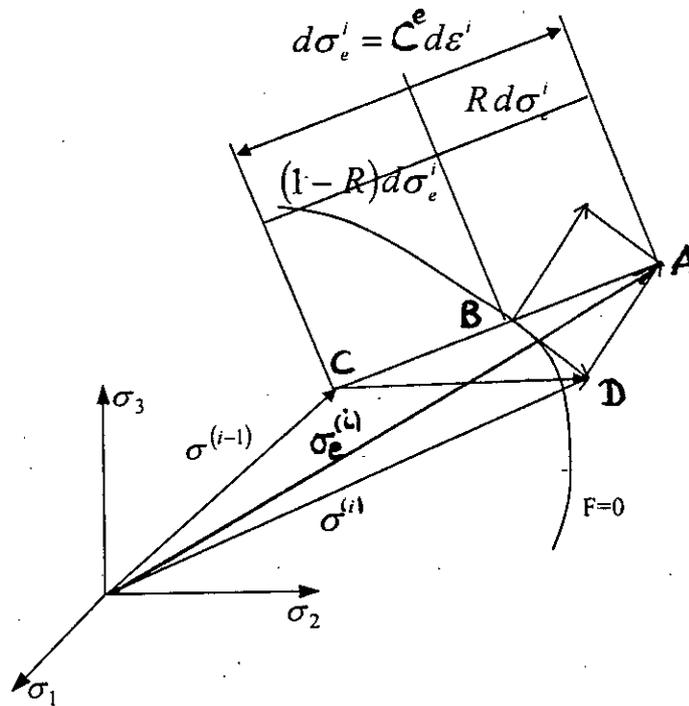


Fig. IV.3. Changement incrémental de contraintes dans un milieu élastoplastique. Le point est initialement élastique.

IV.2. RESULTATS ET INTERPRETATION :

Dans ce paragraphe, nous tenons à valider notre modèle en comparant les résultats numériques aux résultats expérimentaux. Pour cela nous considérons deux cas : le pliage des tôles et l'emboutissage d'une pièce de forme hémisphérique.

IV.2.1. Pliage des tôles : [14]

La tôle utilisée est en acier dont la composition chimique est la suivante :

C %	Si %	P %	S %
0.15	0.33	0.019	0.008

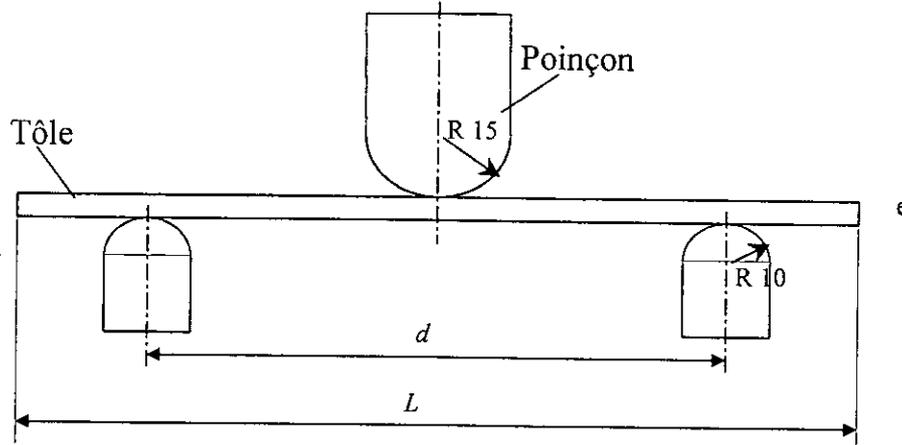


Fig.IV.3. Pliage - Outillage

$L = 200 \text{ mm}$, $d = 160 \text{ mm}$

L'épaisseur de la tôle : $e = 8 \text{ mm}$

La largeur de la tôle : $w = 40 \text{ mm}$

Loi d'érouissage de Ludwik : $\sigma_y = \sigma_0 + b(\varepsilon_{eq}^p)^n$; $0 \leq n \leq 1$.

E	ν	σ_y	σ_0	n
206 GPa	0.3	552 MPa	676 MPa	0.69

Vu la symétrie, nous considérons seulement la moitié de la tôle. Nous utilisons un maillage de 42 éléments et 64 nœuds avec l'élément isoparamétrique à quatre nœuds. La courbe représentant l'effort sur le poinçon en fonction de l'avance de celui-ci est présentée ci dessous (Fig.IV.4) :

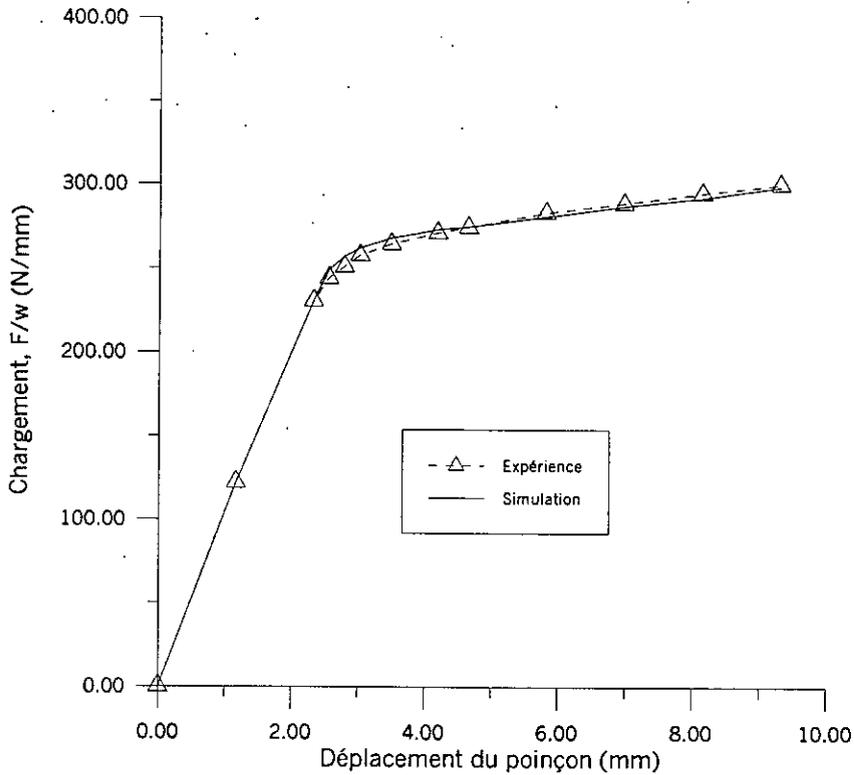


Fig.IV.4.Effort sur le poinçon en fonction de l'avance

Le profil de la ligne médiane sous différents chargements est représenté (Fig.IV.5) :

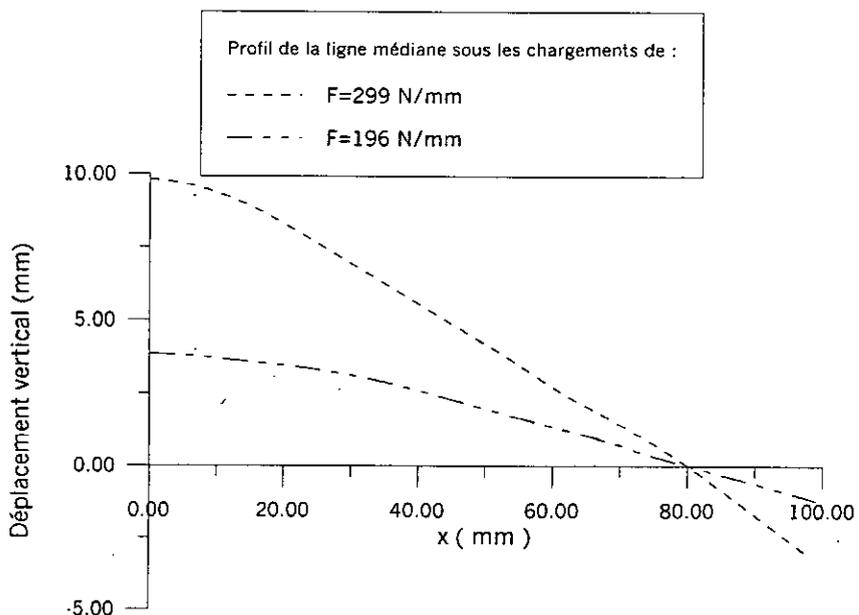


Fig.IV.5.Profil de la ligne médiane sous différents chargements

IV.2.2. Emboutissage d'une pièce hémisphérique : [8]

Il s'agit d'une opération d'emboutissage relativement simple, dont l'outillage est composé d'un poinçon hémisphérique, d'une matrice cylindrique et d'une entrée matrice en quart de tor

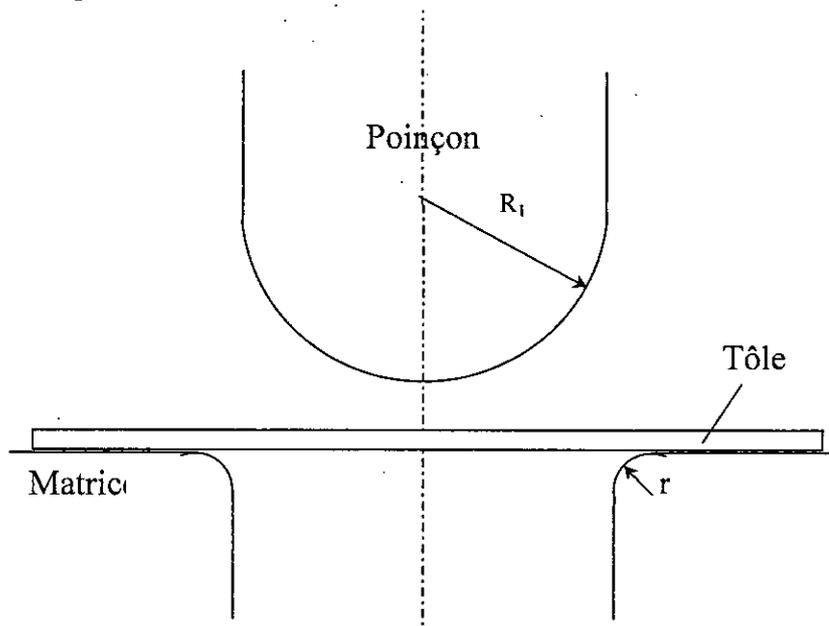


Fig.IV.6. Emboutissage d'une pièce hémisphérique -
Outillage

Géométrie de la tôle : disque de rayon $R=126.4$ mm et d'épaisseur $e=0.7$ mm.

$\nu = 0.3$ Mpa, $E = 0.208 \cdot 10^6$ **Matériau de la tôle** : acier soldur isotrope :

C %	Si %	P %	S %	Mn %
0.1	0.1	0.035	0.025	0.5

Outillage: Poinçon hémisphérique de $R1=100$ mm,

Entrée matrice torique de $r=23$ mm.

Descente totale du poinçon : 55 mm.

Nous utilisons un maillage de 80 éléments et 403 nœuds avec l'élément isoparamétrique à huit nœuds. Les dimensions d'un élément type sont :

e : épaisseur de la tôle : 0.7 mm. Largeur égale à 1.58 mm

Les résultats obtenus de l'application de l'emboutissage sont illustrés dans les figures (IV.7), (IV.8), (IV.9), (IV.10), (IV.11) et (IV.12).

La figure (IV.7) représente la variation de la déformation dans l'épaisseur en fonction de la distance au centre de la tôle pour des descentes de 45mm et 55mm respectivement. On peut observer que les deux courbes ont la même allure (absence de frottement).

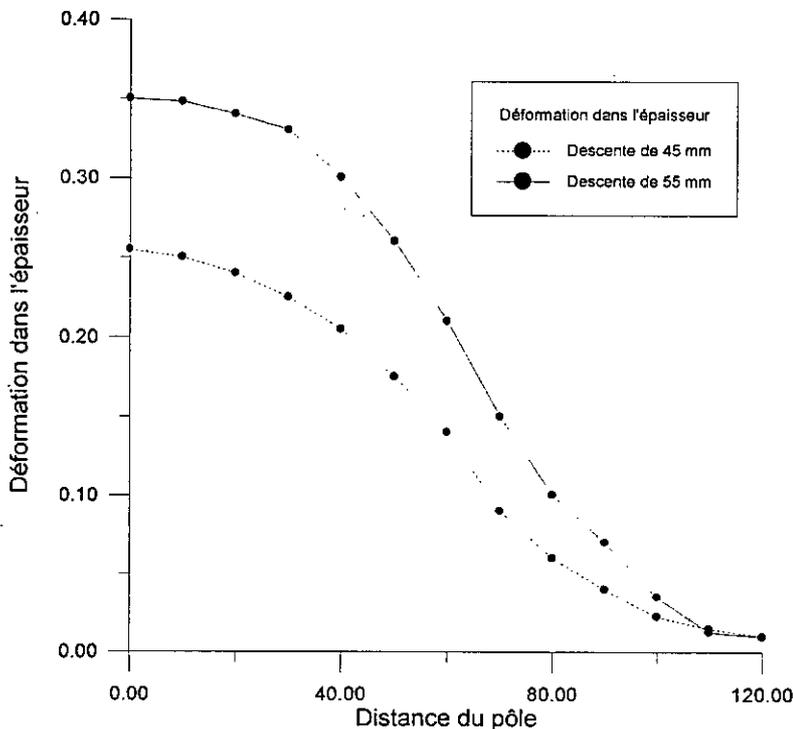


Fig.IV.7. Variation de la déformation en fonction de la distance au centre de la tôle pour des descentes de 45 et 55 mm. Frottement nul : $Fr=0$

Les figures (IV.8), (IV.9) montrent la variation de la déformation dans l'épaisseur en fonction de la distance au centre de la tôle pour des descentes de 45mm (IV.8) et 55mm (IV.9) avec un coefficient de frottement $Fr = 0.15$. On peut remarquer le rapprochement des résultats numériques et expérimentaux loin du pôle, et la différence sensible existante près du pôle.

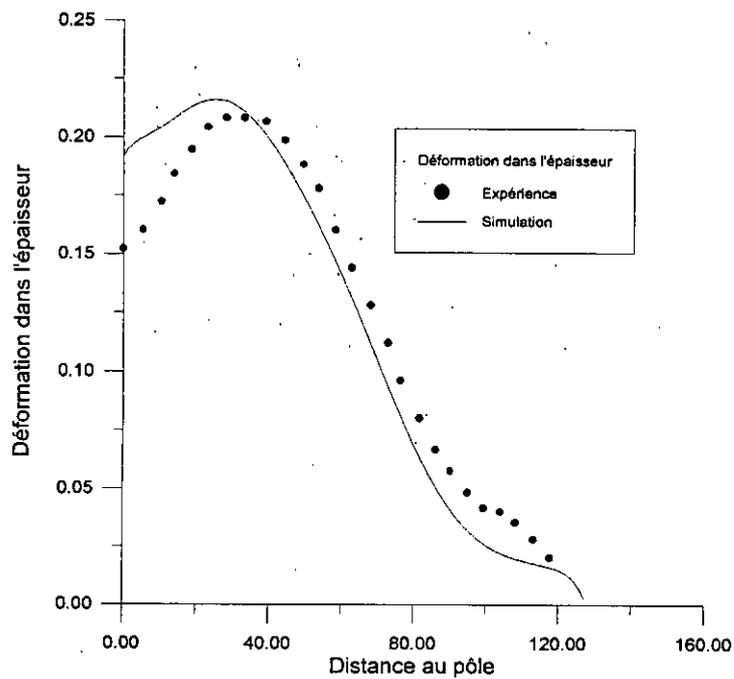


Fig.IV.8. Variation de la déformation dans l'épaisseur en fonction de la distance au centre de la tôle pour une descente de 45 mm. $Fr=0.15$

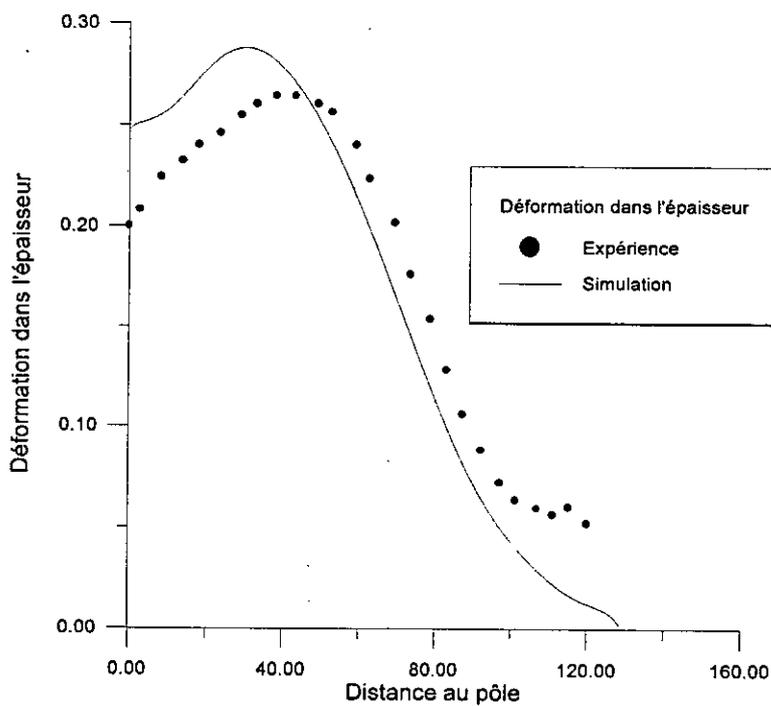


Fig.IV.9. Variation de la déformation dans l'épaisseur en fonction de la distance au centre de la tôle pour une descente de 55 mm. $Fr=0.15$

Les figures (IV.10) et (IV.11) représentent la variation circonférentielle et radiale, respectivement en fonction de la distance au centre de la tôle pour des descentes de 45mm.

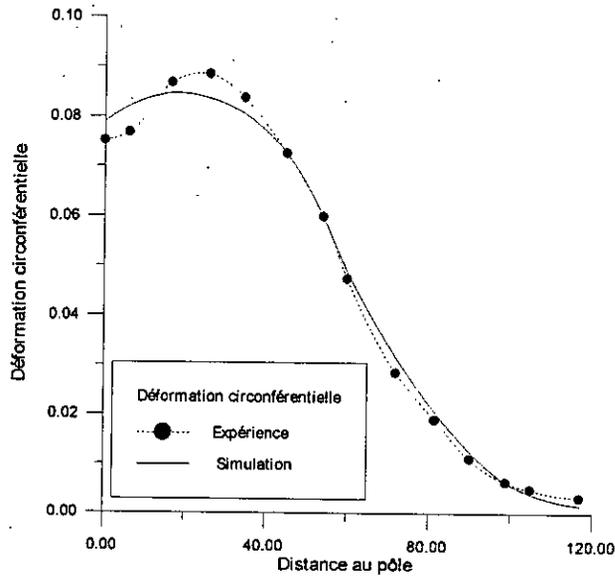


Fig.IV.10. Variation de la déformation circonférentielle en fonction de la distance au centre de la tôle pour une descente de 45 mm. $Fr=0.15$

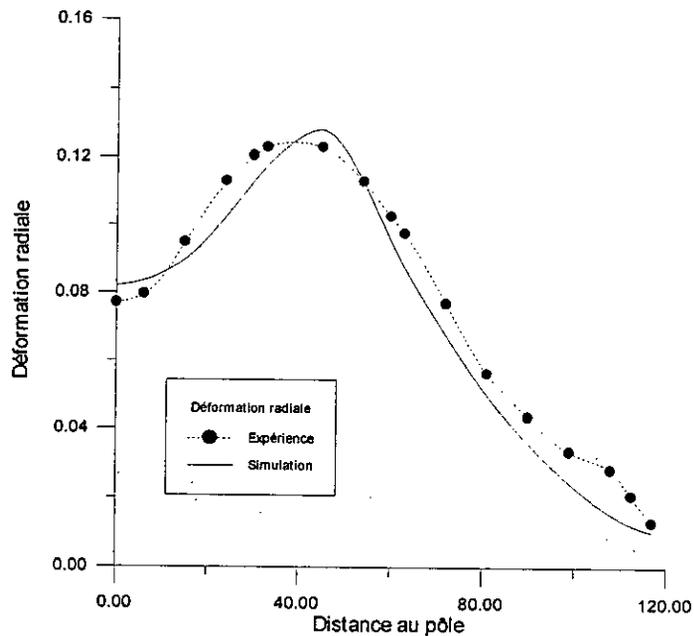


Fig.IV.11. Variation de la déformation radiale en fonction de la distance au centre de la tôle pour une descente de 45 mm. $Fr=0.15$

Finalement, la figure (IV.12) représente l'effort d'emboutissage sur le poinçon en fonction de la descente :

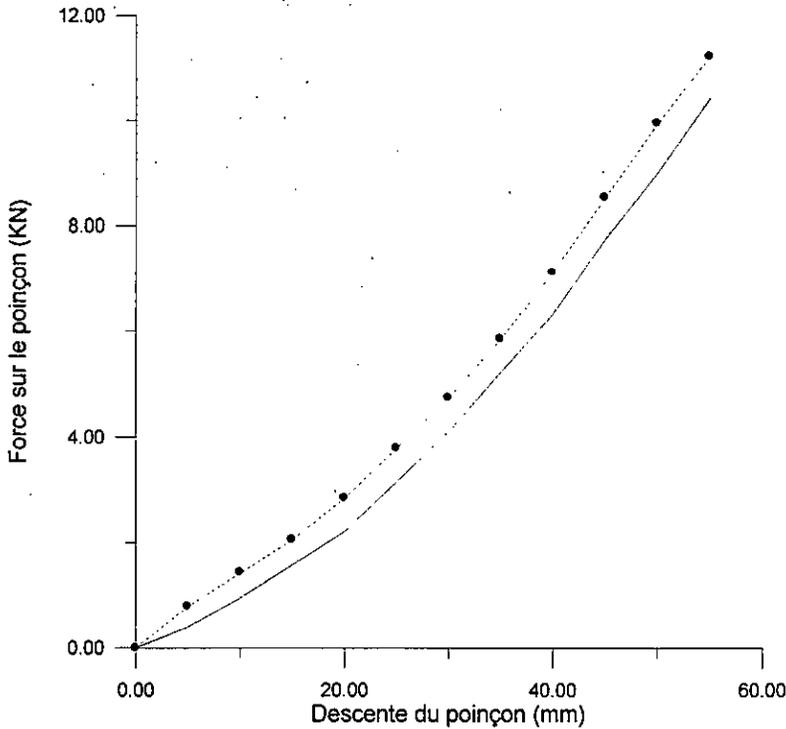


Fig.IV.12. Effort sur le poinçon en fonction de la descente.

IV.2.3. Interprétation :

Pour le premier cas qui concerne le pliage de la tôle, nous remarquons une très bonne concordance entre les résultats numériques et expérimentaux décrivant l'évolution de l'effort sur le poinçon en fonction de sa descente. Vu la symétrie axiale nous avons représenté le profil de la ligne médiane de la moitié de la tôle sous l'effet de deux valeurs du chargement.

Concernant le cas de l'embouti hémisphérique, nous avons constaté que l'effort d'emboutissage est faiblement influencé par le coefficient de frottement, et que les résultats numériques et expérimentaux sont en concordance.

Cependant un décalage est remarqué sur les courbes des déformations. Ce décalage est dû d'une part au fait que le code de calcul travaille en symétrie de révolution (isotropie planaire) c'est à dire que la déformation radiale est supposée la même sur tous les points appartenant à un même cercle, de même pour la déformation

circouférencielle, ce qui n'est pas le cas en réalité du fait de l'anisotropie planaire. D'autre part, il est du aussi à notre modèle décrivant l'évolution du contact tôle-outil lors du processus qui est très simpliste et ne décrit pas la réalité d'une façon rigoureuse.

L'utilisation d'incrément plus fins ainsi que l'introduction d'un élément fini riche peuvent améliorer la qualité des résultats, mais augmentent considérablement le temps de calcul.

Chapitre V

CONTRAINTES LIMITES DE FORMAGE

V. CONTRAINTES LIMITES DE FORMAGE : [7]

V.1. INTRODUCTION :

L'emboutissage est un procédé de formage à froid des tôles minces largement utilisé dans l'industrie.

Vu l'importance du tonnage traité, un gain économique considérable peut être réalisé en économisant de la matière lors de la mise en forme des pièces par ce procédé.

Dans cette optique, des études et des recherches ont été menées et ont conduit à la détermination d'une limite de formabilité des matériaux, traduite par l'établissement d'une courbe spécifique à chaque métal appelée *Courbe Limite de Formage* (C.L.F).

Ces C.L.F sont généralement tracées en déformation [24, 29]; ce qui signifie leur dépendance du trajet de chargement. Or, les C.L.F déterminées usuellement sont obtenues pour des trajectoires de déformation rectilignes ; ce qui ne permet pas de les utiliser pour d'autres trajets de déformations.

La nécessité de trouver un critère déterminant la limite de formabilité des matériaux indépendamment du trajet de déformation a conduit ARRIEUX, BEDRIN et BOIVIN à la prise en compte des contraintes de surface, et ils ont démontré que la représentation des C.L.F déterminées sur la base de ces contraintes est indépendante du trajet de déformation [7], ce qui constitue un critère intrinsèque de la limite de formabilité du matériau.

V.2. COURBES DES CONTRAINTES LIMITES DE FORMAGE : [6, 7]

Pour un matériau anisotrope, l'expression de la surface de charge, d'après le critère d'écoulement de Hill, peut s'écrire :

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 \quad (V.1)$$

F, G, H, L, M et N sont les coefficients de Hill.

D'autre part la loi de la normalité de la déformation plastique s'écrit :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{V.2})$$

$d\lambda$ est le coefficient de proportionnalité.

$d\varepsilon_{ij}^p$ est l'incrément de déformation plastique,

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= d\lambda [H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)] \\ d\varepsilon_y^p &= d\lambda [F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)] \\ d\varepsilon_z^p &= d\lambda [G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)] \\ d\varepsilon_{yz}^p &= d\lambda L \sigma_{yz} \\ d\varepsilon_{zx}^p &= d\lambda M \sigma_{zx} \\ d\varepsilon_{xy}^p &= d\lambda N \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

$d\lambda$ peut s'exprimer en fonction de la contrainte équivalente et du taux de déformation plastique équivalent.

La contrainte équivalente à un état de contraintes donné, est la contrainte de traction qui se trouve sur la même surface de charge.

Pour un matériau anisotrope, il faut en plus préciser la direction de la contrainte équivalente. Ainsi, la contrainte équivalente par rapport à la direction de laminage y peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned} \sigma_{eq/y}^2 &= \frac{1}{F+H} [F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ &\quad + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2] \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

L'énergie plastique dissipée par unité de volume s'écrit :

$$dW^p = \sum \sigma_{ik} (d\varepsilon)_{ik}^p = \sigma_{eq/y} d\varepsilon_{eq/y}^p \quad (\text{V.5})$$

où : $d\varepsilon_{eq/y}^p$ est le taux de déformation plastique équivalent.

En tenant compte des équations (V.3) et (V.4) dans (V.5) nous obtenons l'expression de $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{1}{F+H} \cdot \frac{d\varepsilon_{eq/y}^p}{\sigma_{eq/y}} \quad (V.6)$$

Déterminons, maintenant, l'expression de $d\varepsilon_{eq/y}^p$ en fonction des composantes de déformation.

A partir des relations contraintes-déformations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{d\lambda} F d\varepsilon_x^p &= FH(\sigma_x - \sigma_y) + FG(\sigma_x - \sigma_z) \\ \frac{1}{d\lambda} G d\varepsilon_y^p &= GF(\sigma_y - \sigma_z) + GH(\sigma_y - \sigma_x) \end{aligned} \quad (V.7)$$

soit

$$\frac{1}{d\lambda} (F d\varepsilon_x^p - G d\varepsilon_y^p) = (FG + FH + GH)(\sigma_x - \sigma_y) \quad (V.8)$$

donc :

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{1}{d\lambda} \cdot \frac{1}{FG + GH + FH} \cdot (F d\varepsilon_x^p - G d\varepsilon_y^p) \quad (V.9)$$

et de même

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_z &= \frac{1}{d\lambda} \cdot \frac{1}{FG + GH + FH} \cdot (G d\varepsilon_y^p - H d\varepsilon_z^p) \\ \sigma_z - \sigma_x &= \frac{1}{d\lambda} \cdot \frac{1}{FG + GH + FH} \cdot (H d\varepsilon_z^p - F d\varepsilon_x^p) \end{aligned} \quad (V.10)$$

en reportant ces expressions dans (V.4), nous obtenons :

$$\sigma_{eq/y}^2 = \frac{1}{d\lambda^2(F+H)} \left\{ \frac{1}{(FG+FH+GH)^2} \left[F(Gd\varepsilon_y^p - Hd\varepsilon_z^p)^2 + G(Hd\varepsilon_z^p - Fd\varepsilon_x^p)^2 + H(Fd\varepsilon_x^p - Gd\varepsilon_y^p)^2 \right] + 2 \left[\frac{(d\varepsilon_{yz}^p)^2}{L} + \frac{(d\varepsilon_{xz}^p)^2}{M} + \frac{(d\varepsilon_{xy}^p)^2}{N} \right] \right\} \quad (V.11)$$

en tenant compte de (V.6) dans (V.11), nous obtenons :

$$\varepsilon_{eq/y}^2 = (F+H) \left\{ \frac{1}{(FG+FH+GH)^2} \left[F(Gd\varepsilon_y^p - Hd\varepsilon_z^p)^2 + G(Hd\varepsilon_z^p - Fd\varepsilon_x^p)^2 + H(Fd\varepsilon_x^p - Gd\varepsilon_y^p)^2 \right] + 2 \left[\frac{(d\varepsilon_{yz}^p)^2}{L} + \frac{(d\varepsilon_{xz}^p)^2}{M} + \frac{(d\varepsilon_{xy}^p)^2}{N} \right] \right\} \quad (V.12)$$

V.2.1. Hypothèses simplificatrices : [7]

Pour faciliter l'exploitation de ces expressions théoriques, des hypothèses simplificatrices compatibles avec les conditions réelles de travail sont introduites :

- On suppose que l'on peut confondre un incrément de déformation totale et un incrément de déformation plastique, cela revient au fait que les déformations élastiques sont très petites par rapport aux déformations plastiques.
- On suppose que les directions principales de la sollicitation sont confondues avec les axes de symétrie et d'anisotropie des échantillons.

Dans la pratique, nous ferons correspondre ces axes à x et y . l'expression (V.12) devient alors :

$$d\varepsilon_{eq/y}^2 = \frac{F+H}{(FG+FH+GH)^2} \left[F(Gd\varepsilon_y^p - Hd\varepsilon_z^p)^2 + G(Hd\varepsilon_z^p - Fd\varepsilon_x^p)^2 + H(Fd\varepsilon_x^p - Gd\varepsilon_y^p)^2 \right] \quad (V.13)$$

- Dans notre cas, où les matériaux sont des produits plats, la contrainte normale σ_z est négligeable, d'où la relation contrainte-déformation suivante :

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_x &= \frac{d\varepsilon_{eq/y}}{(F+H)\sigma_{eq/y}} [G\sigma_x + H(\sigma_x - \sigma_y)] \\
d\varepsilon_y &= \frac{d\varepsilon_{eq/y}}{(F+H)\sigma_{eq/y}} [F\sigma_y - H(\sigma_x - \sigma_y)] \\
d\varepsilon_z &= -\frac{d\varepsilon_{eq/y}}{(F+H)\sigma_{eq/y}} [G\sigma_x + F\sigma_y]
\end{aligned} \tag{V.14}$$

Il est clair que si nous voulons exprimer un changement de direction de référence, x par exemple, la contrainte et la déformation équivalentes par rapport à cette direction s'expriment par :

$$\sigma_{eq,x}^2 = \frac{1}{G+H} [F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2] \tag{V.15}$$

et

$$\varepsilon_{eq,x}^2 = \frac{G+H}{(FG+FH+GH)^2} [F(Gd\varepsilon_y^p - Hd\varepsilon_z^p)^2 + G(Hd\varepsilon_z^p - Fd\varepsilon_x^p)^2 + H(Fd\varepsilon_x^p - Gd\varepsilon_y^p)^2] \tag{V.16}$$

V.2.2. Contraintes limites de formage :

Pour un incrément de déformation donné, Hage Chehade et M.Boivin [7] ont mesuré expérimentalement, à l'aide d'un microscope, $d\varepsilon_x$ et $d\varepsilon_y$; et ont déduit $d\varepsilon_z$ d'après l'hypothèse de l'incompressibilité plastique :

$$d\varepsilon_z = -(d\varepsilon_x + d\varepsilon_y) \tag{V.17}$$

A partir de ces trois valeurs, ils ont calculé la déformation équivalente $d\varepsilon_{eq}$ suivant la direction de référence choisie ; et ils ont déterminé la contrainte équivalente à l'aide de la loi d'écrouissage du matériau.

La détermination de σ_x et σ_y se fait alors en résolvant le système (V.14) en choisissant deux de ces équations.

Ainsi, les contraintes à l'apparition de la striction peuvent être évaluées par :

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{F+H}{FG+GH+HF} \cdot \frac{\sigma_{eq/y}}{d\varepsilon_{eq/y}} ((F+H)d\varepsilon_x + Hd\varepsilon_y) \\
\sigma_y &= \frac{F+H}{FG+GH+HF} \cdot \frac{\sigma_{eq/y}}{d\varepsilon_{eq/y}} (Hd\varepsilon_x + (G+H)d\varepsilon_y)
\end{aligned} \tag{V.18}$$

σ_y peut être déterminée aussi par la relation :

$$\sigma_y = \frac{H}{F + H} \cdot \sigma_x + \frac{\sigma_{eq/y}}{d\varepsilon_{eq/y}} \cdot d\varepsilon_y \quad (V.19)$$

Pour un trajet de déformation linéaire, l'incrément de déformation peut être égal à la déformation totale.

Pour un chemin de déformation brisé, le calcul de la déformation équivalente se fait en deux étapes :

- Calcul des deux déformations équivalentes à la fin de la prédéformation et à l'apparition de la striction.
- Calcul de la déformation équivalente globale, puis de la contrainte équivalente correspondante par la courbe d'écroutissage.

L'application de (V.18) sur la deuxième partie du trajet permet d'obtenir les contraintes à l'apparition de la striction.

Un avantage important du raisonnement en contraintes est de pouvoir, par un calcul numérique simple, prédire la striction d'une tôle pour un trajet de déformation quelconque.

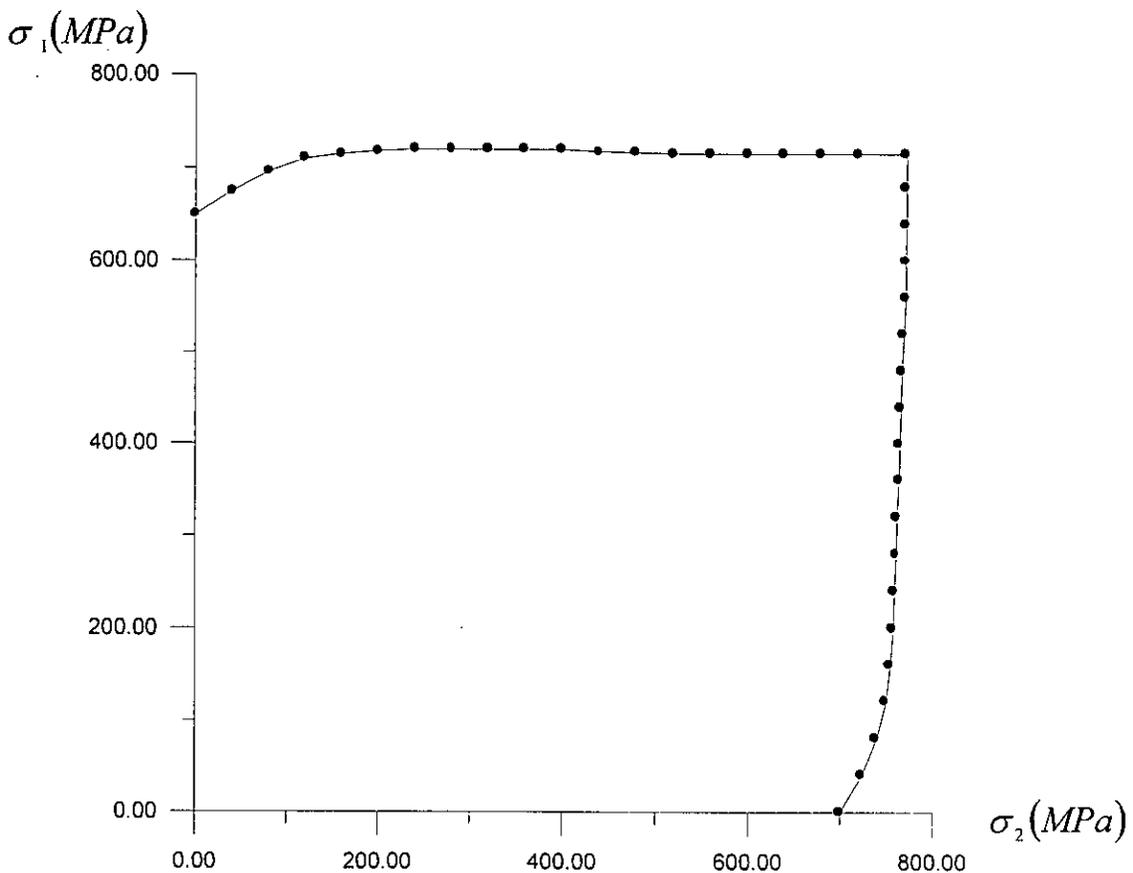


Fig.V.1. Courbe de contrainte limite d'emboutissage de l'acier XD 340

CONCLUSION

CONCLUSION:

L'objet de cette étude était la simulation numérique de l'emboutissage des tôles. Pour cela, nous avons considéré l'emboutissage comme étant un processus à grandes transformations. La loi de comportement élastoplastique utilisée comprend l'élasticité isotrope, l'orthotropie plastique initiale décrite par le critère de Hill et l'écroutissement isotrope.

L'écriture de la loi de comportement élastoplastique a nécessité la séparation des déformations élastique et plastique. Ceci a été permis grâce à la décomposition multiplicative du gradient de la transformation basée sur le concept de configuration intermédiaire relâchée.

Pour la prise en compte des changements des conditions aux limites tout au long du déroulement du processus, nous avons utilisé une description lagrangienne actualisée où nous avons supposé que pendant chaque incrément de temps les conditions aux limites restent inchangées et que tout changement éventuel se produit à la fin de l'incrément

La validation du code de calcul est faite en traitant le cas du pliage d'une tôle (déformation plane) et l'emboutissage d'une pièce hémisphérique (déformation axisymétrique), où nous avons remarqué la concordance entre résultats numériques et expérimentaux.

La nécessité de trouver un critère d'arrêt de la simulation nous a conduit à introduire les courbes limites de formage en contraintes qui représentent un critère intrinsèque de la limite de formabilité des matériaux.

Comme suite à ce travail nous proposons :

- D'utiliser un modèle d'écroutissement combiné isotrope-cinématique pour prendre en compte l'effet Bauschinger qui peut ne pas être négligeable dans certains cas.
- D'utiliser des éléments riches pour améliorer la précision des résultats.
- De faire une analyse et une modélisation approfondies du contact avec frottement entre la tôle et l'outil, ainsi qu'une modélisation plus réaliste de l'effort de retenue.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Klaus-Jürgen Bathe**, « Finite element Procedures », Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [2] **D.R.J.Owen-E.Hinton**, « Finite Elements in Plasticity. Theory and practice », Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1986.
- [3] **J.Lemaitre-J.L.Chaboche**, « Mécanique des matériaux solides », Dunod, Paris, 1996.
- [4] **D.François-A.Pineau-A.Zaoui**, « Comportement mécanique des matériaux, élasticité et plasticité », Hermès, Paris, 1995.
- [5] **G.W.Rowe-C.E.N Sturgess-P.Hartley-I.Pillinger**, « Finite element plasticity and metalforming analysis », Cambridge University Press, 1991.
- [6] **W.Johnson-P.B.Mellor**, « Engineering Plasticity », Ellis Horwood Ltd., Publishers, 1983.
- [7] **I.Hage Chehade-M.Boivin**, « Tôles pour emboutissage. Caractérisation par les courbes limite en contraintes », Matériaux et techniques, juin 1990.
- [8] **M.Bellet, E.Massoni, J.L.Chenot**, « Numerical Simulation of Thin Sheet Forming Processes by the Finite Element Method », Eng. Comput., 1990, Vol.7, March, pp. 21-31.
- [9] **Jean Coirier**, « Mécanique des milieux continus. Concepts de base », Dunod, Paris, 1997.
- [10] **R.M. McMeeking, J.R. Rice**, « Finite-Element Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation », Int. J. Solids Structures, 1975, Vol 11, pp. 601-616.

- [11] **J.C. Nagtegaal, J.E. De Jong**, « Some Computational Aspects of Elastic-Plastic Large Strain Analysis », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1981, Vol. 17, pp. 15-41.
- [12] **J.C. Nagtegaal**, « On the Implementation of Inelastic Constitutive Equations with Special Reference to Large Deformation Problems », *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* 1982, Vol. 33, pp. 469-484.
- [13] **R. Rubinstein, S.N. Atluri**, « Objectivity of Incremental Constitutive Relations over Finite Time Steps in Computational Finite Deformation Analysis », *Experimental Mechanics*, 1989, pp. 460-465.
- [14] **J.W. Joo, B.M. Kwak**, « Simulation of Three-point Bending at Large Deflections by an Elastoplastic Contact Analysis », *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* 1983, Vol. 36, pp. 277-290.
- [15] **H.D. Hibbit, P.V. Marcal, J.R. Rice**, « A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large displacement », *Int. J. Solids Structures*, 1970, Vol 6, pp. 1069-1086
- [16] **J.C. Nagtegaal, N. Rebelo**, « On the Development of a General Purpose Finite Element Program for Analysis of Forming Processes », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1988, Vol. 25, pp. 113-131.
- [17] **J.C. Simo, M. Ortiz**, « A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive equations », *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* 1985, Vol. 49, pp. 221-245.
- [18] **C. Truesdell**, « Hypo-elasticity », *J. Rat. Mech. Anal.*, 1955, Vol. 4, pp. 83-133.
- [19] **J.C. Nagtegaal, D.M. Parks, J.R. Rice**, « On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range », *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* 1974, Vol. 4, pp. 153-177.

- [20] **H. Stumpf, J. Badur**, « On Missing Links of Rate-Independent Elasto-Plasticity at Finite Strains », *Mech. Res. Com.*, 1990, Vol. 17, pp.353-364.
- [21] **P. Keck, M. Wilhelm, K. Lange**, « Application of the Finite element Method to the Simulation of Sheet Forming Processes : Comparison of Calculations and Experiments », *Int. J. Num. Meth. Eng*, 1990, Vol. 30, pp. 1415-1430.
- [22] **A. Combescure, Y.Jiaju**, « Finite Element Method for Large Displacement and Large Strain Elasto-Plastic Analysis of Shell structures and some Application of Damage Mechanics », *Eng. Fract. Mech.*,1990, Vol. 36 (2), pp. 219-231.
- [23] **D.M. Woo**, « On the Complete Solution of the Deep-Drawing Problem », *Int. J. Mech. Sci*, 1968, Vol. 10, pp. 83-94.
- [24] **A. Graf, W.F.Hosford**, « Calculations of Forming Limit Diagrams », *Met. Trans.*, 1990, Vol.21A, pp. 87-94.
- [25] **J. Bonet, R.D. Wood, A.H.S.Wargadipura**, « Numerical Simulation of the Superplastic Forming of Thin Sheet Components Using the Finite Element Method », *Int. J. Num. Meth. Eng*, 1990, Vol. 30, pp. 1719-1737.
- [26] **J.C. Nagtegaal, F.E. Veldpaus**, « Analysis of Metal Forming Problems with an Improved Finite Strain Plasticity Formulation », *Int. Num. Meth. In Indust. Forming Processes*, 1982, pp. 1-15.
- [27] **M.J. Saran, A. Samuelsson**, « Elastic-Viscoplastic Implicit Formulation For Finite Element Simulation of Complex Sheet Forming Processes », *Int. J. Num. Meth. Eng*, 1990, Vol. 30, pp. 1675-1697.
- [28] **F.Sidoroff**. « Incremental Constitutive Equation for Large Strain Elasto Plasticity », *Int. J. Eng. Sci*, 1982, Vol. 20, pp. 19-26.

[29] **C.H. Toh**, « Prediction of the Forming Limit Curves of Sheet Materials Using the Rigid-Plastic Finite Element Method », *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, 1989, Vol. 29(3), pp. 333-343.

[30] **J. Salençon**, « Mécanique du continu », ellipses, 1995.

[31] **A. S. Wifi**, « An incremental complete solution of the stretch forming and deep drawing of circular blank using a hemispherical punch », *Int. J. Mech. Sci.*, 1976, Vol. 18, pp. 23-31.

[32] **Katri I. Ika Ferreira, Deane Roehl**, « Three dimensional elastoplastic contact analysis at large strains with enhanced assumed strain elements », *Int. J. Solids Structures*, 2001, Vol 38, pp. 1855-1870.

[33] **S. C. Tang**, « Large elastoplastic strain analysis of flanged hole forming », *Comp. Str.*, 13, p 363, 1981.

ANNEXES

ANNEXE I : Objectivité et dérivées objectives.

En mécanique, l'*objectivité* signifie le caractère intrinsèque vis-à-vis du changement de référentiel. Ainsi :

- Une grandeur scalaire est objective si deux observateurs obtiennent la même valeur de cette grandeur dans leurs référentiels respectifs.
- Pour une grandeur vectorielle observée dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* à l'instant t , il faut que les expressions obtenues dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , écrites respectivement dans les repères R et R^* , soient liées par la formule de changement de repère qui exprime la correspondance entre R et R^* à cet instant, due au mouvement rigidifiant de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} .
- Si on considère des grandeurs tensorielles rattachées à des observations effectuées aux instants : initial t_0 et actuel t . L'objectivité d'une telle grandeur signifie que les expressions obtenues par deux observateurs, qui sont relatives aux repères R_{t_0} et R_t pour l'un, $R_{t_0}^*$ et R_t^* pour l'autre sont liées par les formules de changement de repères correspondantes : R_{t_0} en $R_{t_0}^*$, R_t en R_t^* .
- L'objectivité de l'équation exprimant une loi physique s'analyse de façon analogue : l'écriture d'une telle équation ne permet pas à deux observateurs de discerner leurs référentiels respectifs à partir des mesures qu'ils y effectuent. Cela veut dire que les équations exprimant la loi physique pour deux observateurs sont liées par les formules de changement de repères correspondantes.

1. Dérivation temporelle du tenseur des contraintes :

1.1. Dérivée particulaire :

Le tenseur des contraintes de Cauchy étant naturellement défini sur la configuration actuelle C_t , on se retrouve, en ce qui le concerne, en présence d'une description eulérienne. La dérivée particulaire $\dot{\sigma}$ se calcule en utilisant la formule :

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{grad}\sigma \cdot \mathbf{V} \quad (\text{A1.1})$$

Il est intéressant d'effectuer ce même calcul en passant en description lagrangienne, à partir de la définition du second tenseur de Piola-Kirchhoff :

1.2. Dérivée intrinsèque (dérivée de Truesdell).

L'idée directrice dans la définition de cette dérivée du tenseur σ par rapport au temps est de la construire à partir de la dérivée temporelle $\dot{\mathbf{S}}$ du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, par la même correspondance qui lie σ et \mathbf{S} . On définit ainsi la dérivée intrinsèque (ici : dérivée de Truesdell) :

$$\left(\frac{D\sigma}{Dt} \right)_T = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{A1.2})$$

Elle est évidemment objective.

On remarque évidemment que, par construction :

$$\left(\frac{D\sigma}{Dt} \right)_T = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{S} = \text{Cte}$$

Il en résulte que dans ce cas le tenseur sur C_t

$$\frac{\rho_0}{\rho} \sigma = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{A1.3})$$

conserve des composantes constantes dans toute base constituée de vecteurs matériels. L'application de ce résultat au cas particulier où le mouvement en M à l'instant t est rigidifiant met en valeur l'intérêt de l'introduction de cette dérivée. On a alors:

$$\left(\frac{D\sigma}{Dt}\right)_T = \dot{\sigma} - \omega \cdot \sigma - \sigma \cdot \omega^T \quad (\text{A1.3})$$

et $\left(\frac{D\sigma}{Dt}\right)_T = 0$ signifie que le tenseur des contraintes σ subit à l'instant t la même rotation que l'élément de matière en M c'est à dire que les contraintes principales demeurent constantes et que le trièdre des directions principales de σ tourne comme l'élément de matière.

1.3. Dérivée corotationnelle (dérivée de Jaumann) :

L'idée qui préside à la construction de cette dérivée du tenseur σ par rapport au temps procède de la remarque précédente à propos de la dérivée intrinsèque, et de la formule (A.1.3). On se propose, à partir de $\dot{\sigma}$, de définir et de calculer une dérivée de σ par rapport au temps, dont la nullité caractérise le fait que le tenseur σ suit un mouvement rigidifiant significatif pour la matière en M , défini même lorsque le mouvement réel en M n'est pas lui même rigidifiant.

Comme tel mouvement il est naturel de choisir le mouvement rigidifiant du trièdre des directions principales du tenseur taux de déformation D , matérialisé dans C_t .

On définit alors la dérivée corotationnelle ou dérivée de Jaumann par la formule :

$$\left(\frac{D\sigma}{Dt}\right)_J = \dot{\sigma} - \omega \cdot \sigma - \sigma \cdot \omega^T \quad (\text{A1.4})$$

Cette définition correspond bien à l'objectif poursuivi. En effet

$$\left(\frac{D\sigma}{Dt}\right)_J = 0 \Leftrightarrow \dot{\sigma} = \omega \cdot \sigma + \sigma \cdot \omega^T$$

et cette dernière équation implique que σ conserve des composantes constantes dans tout repère animé du mouvement rigidifiant de vitesse de rotation ω autour de M . On remarque évidemment que si le mouvement réel est rigidifiant les dérivées intrinsèque (de Truesdell) et corotationnelle (de Jaumann) sont identiques et que, dans le cas général, elles sont liées par :

$$\left(\frac{D\sigma}{Dt}\right)_T = \left(\frac{D\sigma}{Dt}\right)_J - \mathbf{D}\cdot\sigma - \sigma\cdot\mathbf{D} + \sigma(\text{tr}\mathbf{D}) \quad (\text{A1.5})$$

où le gradient du champ de vitesse n'intervient que par le taux de déformation \mathbf{D} et qui met bien en évidence l'objectivité de la dérivée corotationnelle.

ANNEXE II : Expression du tenseur rotation. Méthode de HUGHES :

En désignant les coordonnées à l'instant t par \mathbf{x}_n et celles à l'instant $t + \Delta t$ par \mathbf{x}_{n+1} , on a le gradient de la transformation F pour cet incrément :

$$F_{n+1} = I + G_0 = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} \quad (\text{A.2.1})$$

Dans la méthode de Hughes, on suppose que les coordonnées des points matériels varient linéairement pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$

$$\mathbf{x}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{x}_n + \alpha \mathbf{x}_{n+1} \quad (\text{A.2.2})$$

où α varie entre 0 et 1.

En notant les déplacements incrémentaux par :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \quad (\text{A.2.3})$$

On définit,

$$G_\alpha = \frac{\partial(\Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}} \quad (\text{A.2.4})$$

ce qui donne :

$$G_\alpha = (I + \alpha G_0)^{-1} G_0 \quad (\text{A.2.5})$$

où :

$$G_0 = \frac{\partial(\Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}_n} \quad (\text{A.2.6})$$

L'incrément des déformations de Hughes est défini par :

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{2} (G_\alpha + G_\alpha^T) \quad (\text{A.2.7})$$

en introduisant (A.2.5) dans cette expression, nous obtenons :

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{2} \left((I + \alpha G_0)^{-1} G_0 + G_0^T (I + \alpha G_0)^{-T} \right) \quad (\text{A.2.8})$$

Pour les rotations incrémentales, Hughes a proposé dans le cas où le tenseur objectif vitesse de Jaumann est choisi, de prendre le tenseur des rotations incrémentales \mathbf{r} égal à la rotation incrémentale ρ associée à la vitesse de rotation \mathbf{W} . En intégrant alors l'équation différentielle,

$$\dot{\rho} \rho^T = \mathbf{W} \quad (\text{A.2.9})$$

par la méthode du mi-point généralisée avec la condition initiale $\rho = I$ au moment t , on obtient :

$$\mathbf{r} = \rho_{n+1} = \mathbf{I} + (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{W}_\alpha)^{-1} \mathbf{W}_\alpha \quad (\text{A.2.10})$$

avec

$$\mathbf{W}_\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_\alpha - \mathbf{G}_\alpha^T) \quad (\text{A.2.11})$$

La valeur de α recommandée par Hughes est de $\frac{1}{2}$.

Dans son travail de l'intégration de la loi de comportement, il a défini une expression des déformations incrémentales tournées telle que :

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \rho_{1/2}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rho_{1/2} \quad (\text{A.2.12})$$

En utilisant le développement en série de Taylor de (A.2.12) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux en \mathbf{G}_0 , la déformation incrémentale tournée $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ devient :

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0^T) + \frac{1}{4} (\mathbf{G}_0^T \mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^2 - (\mathbf{G}_0^T)^2 - \mathbf{G}_0 \mathbf{G}_0^T) \quad (\text{A.2.13})$$

La rotation incrémentale peut être obtenue de la même façon :

$$\mathbf{r} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^T) + \frac{1}{8} (3(\mathbf{G}_0^T)^2 - \mathbf{G}_0^2 - \mathbf{G}_0^T \mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0 \mathbf{G}_0^T) \quad (\text{A.2.14})$$