

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

Thèse de magister

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique
Thème :

Caractérisation mécanique des mousses de polyéthylène :
Modèle hyperélastique

Présenté par :
M. K. Mouattah

Directeur de thèse :
Pr. A. Bali

JURY :

M. M.T Abadlia
M. A. Bali
M. N. Laradi
M. K. Silhadi
M. R. Boutemeur

Professeur
Professeur
Maître de conférence
Maître de conférence
Chargé de cours

Président (Univ. de Boumerdès)
Rapporteur (ENP)
Examineur (USTHB)
Examineur (ENP)
Examineur (ENP)

Novembre 1998

Ecole Nationale Polytechnique
10, Avenue Hassan Badi El-Harrach, Alger

Remerciements



Le professeur A. Bali a accepté volontairement et aimablement de diriger ce travail.

Qu'il trouve, ici, mon profond sentiment de gratitude et de reconnaissance pour l'effort qu'il a consenti dans l'encadrement de ce travail.

*Mes remerciements s'adressent à M. **M.T. Abadlia** qui a accepté de présider le jury de soutenance.*

*Je suis, également, reconnaissant à MM. **N. Laradi, K. Silhadi** et **R. Boutameur** pour avoir accepté d'examiner ce travail et je suis sensible à leur présence au jury.*

*Je tiens à remercier, vivement, **M.T. Douibi**, chef du département de génie des polymères à l'université de Sétif, qui m'a ouvert les portes des laboratoires et m'a accueilli avec joie et bonté.*

*Je voudrais exprimer ma sympathie à l'ingénieur de laboratoire, **Messaoud**, pour son abnégation ; je le remercie du fond du cœur.*

*Ma reconnaissance va également à mes amis qui m'ont soutenu et aidé à surmonter les difficultés rencontrées. Je cite, dans le désordre et sans prétendre à l'exhaustivité : **M. Taouti, O. Allaoui, H.A. Benhorma, M. Djedid** et **A. Ghrib**.*

J'adresse mes amitiés à tous mes collègues du centre universitaire de Laghouat.

تهدف هذه الدراسة إلى تحديد الخواص الميكانيكية لصف خاص من المواد هو البوليميرات الموسعة ذي استعمالات واسعة في المجال الصناعي و تحديدا في مجال الهندسة المدنية. أخذ مثال على ذلك البوليإيثيلين الموسع الذي يمكن أن يعوض خشب البناء مع ديمومة أكبر واستعمل نموذج لفرط المرونة. أجريت تجربتا الشد و الضغط أحادي المحاور على عينات محضرة من هذه المادة و تمكنا من تحديد خواصها الميكانيكية. أثبتت المقارنة بين النموذج النظري و معطيات التجربة أن هذا النموذج يمكن اعتباره صالحا إلى حد كبير من التشوهات إلا أنه غير مناسب لتفسير بعض الظواهر التي لوحظت أثناء إجراء التجارب و بخاصة ظاهري التجهيج و التأخر العائدين إلى السلوك اللزج.

Abstract:

This study deals with the determination of mechanical properties of a special categories of materials, namely, the expanded polymers which have a wide use in industries and, especially, in civil engineering domain. A hyperelastic model was adopted (Blatz-Ko law). As an example of this kind of materials, polyethylene foams have been taken which would be used, probably, as a lumber. Two types of tests : uniaxial tension and compression were carried and the mechanical properties were determined. The results show , to a large extend, a good agreement between the theoretical model and the experimental data. However, it remains unable to explain certain phenomena such as hystereis and delay which are sign of viscoelastic behaviour.

Résumé :

Cette étude consiste à déterminer les propriétés mécaniques d'une certain catégorie de matériaux, en l'occurrence, les polymères expansés qui ont une vaste application dans l'industrie et, particulièrement, dans le domaine de génie civil.. Un modèle hyperélastique a été adopté (loi de Blatz-Ko). Les mousses de polyéthylène, qui pourraient être utilisées en tant que bois de charpente avec une meilleure durabilité, ont été étudiées en effectuant deux types d'essais : traction et compression uniaxiales. La comparaison a montré une bonne corrélation entre le modèle théorique et les données de l'expérience. Toutefois, ce modèle reste incapable d'expliquer certaines phénomènes tels que l'hystérésis et le retard qui sont signe de viscoélasticité.

Mots-clefs :

Mousses ; polyéthylène ; caractérisation mécanique ; hyperélasticité ; modèle de Blatz-Ko ; hystérésis ; retard

Introduction

1

Chapitre I Comportement mécanique des mousses

6

I-1 Introduction

I-2 Propriétés des plastiques cellulaires

I-3 Comportement mécanique

I-3-1 Introduction

I-3-2 Comportement multiforme

I-3-2-1 Compression

I-3-2-2 L'effet Poisson

I-3-2-3 Effets de la température et de la vitesse de déformation

I-4 Modèles physiques

I-4-1 Modèles micromécaniques

I-4-2 Modèles phénoménologiques

I-4-2-1 Modèles biphasiques

I-4-2-2 Modèles monophasiques

Chapitre II Rappels de mécanique des milieux continus

20

II-1 Introduction

II-2 Notion de configuration

II-3 Tenseurs des déformations

I-4 Tenseurs de contraintes

II-5 Conclusions

Chapitre III Théorie d'hyperélasticité

32

III-1 Lois de comportement des matériaux simples

III-1-1 Définition d'une loi de comportement

III-1-2 Matériaux simples

III-3 Matériau élastique de Cauchy

III-3 Matériaux hyperélastiques

III-3-1 Conditions imposées à la fonction d'énergie de déformation

III-3-2 Relations contraintes-déformations pour un matériau isotrope hyperélastique

III-3-2 La fonction d'énergie de déformation pour un matériau élastique isotrope

III-3-3 Formes générales des fonction d'énergie de déformation

III-3-4 Ecriture de la loi de comportement pour le tenseur nominal

Chapitre IV Etude expérimentale

47

IV-1 Le matériau

IV-2 Le dispositif expérimental

IV-3 Résultats et discussions

IV-3-1 Essai de traction

IV-3-1-1 Détermination des paramètres du matériau

IV-3-1-2 Phénomène d'hystérésis

IV-3-2 Essai de compression

Conclusion et suggestions

68

Notations et symboles utilisés

(Les tenseurs sont écrits en gras)



B	tenseur inverse de F	ε	Déformations
		η	Porosité de la mousse
		θ	Tr (ε)
C	Tenseur de déformation de Cauchy-Green droit (ou des dilatations)	$\lambda \equiv \lambda_1$	Extension principale (sens longitudinal) = l/l_0
		$\lambda_2 = \lambda_3$	Extension principale (sens transversal)
D	Tenseur de vitesse du déplacement	μ	Paramètre du matériau $\equiv G_0$
E	Tenseur de déformation de Green-Lagrange	ν	Paramètre du matériau \equiv coefficient de Poisson
E	Module d'Young		
F	Force appliquée pendant l'essai	ξ	Facteur de forme caractérisant la mousse
<i>f</i>	Paramètre du matériau		
G_0	Module de rigidité au cisaillement	ρ_m	Densité de la mousse
		ρ_s	Densité du polymère
		ρ_{rel}	Densité relative = ρ_m / ρ_s
I_1, I_2, I_3	Invariants principaux de la déformation	σ	Contrainte nominale = F/A_0
J_1, J_2, J_3	Invariants modifiés		
S	Tenseur de contraintes nominales		
T	Tenseur de contraintes de Cauchy		
U	Tenseur d'extension droit		
V	Tenseur d'extension gauche		
W	Fonction d'énergie de déformation		
X	Vecteur position d'une particule dans la configuration de référence		
x	Vecteur position d'une particule dans la configuration actuelle		

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction

Les mousses de polyéthylène appartiennent à la catégorie de matériaux appelés "matériaux cellulaires". Ils sont appelés ainsi à cause des bulles de gaz emprisonnées au sein d'un polymère solide.

Bien que le polyéthylène, mis au point il y a environ 70 ans, soit universellement connu il n'en est pas de même pour le polyéthylène expansé (mousse).

Alors que les premiers essais effectués aux USA, en Europe et au Japon à la fin des années 50 ont mis au point de nombreuses réalisations originales, c'est le développement du polystyrène expansé et du polyuréthane qui a retenu l'attention du public.

L'idée originale qui a stimulé la mise au point des plastiques expansés remonte à 1937 [1,2]. Les Allemands, en utilisant les déchets de la chimie d'uréthane, ont développé des mousses rigides pour fournir à la machine de guerre allemande des matériaux sandwich à légers et très résistants pour les avions, sous-marins et tanks. Les Américains ont, vite, pris le relais des Allemands en se procurant leur savoir-faire en la matière dès la fin de la guerre. Durant les années 60, les matériaux cellulaires ont connu une grande importance en raison de la facilité de leur mise en œuvre et leurs applications de plus en plus étendues.

Le retard accusé par le polyéthylène expansé (par rapport au polystyrène et au polyuréthane) réside dans le fait que les procédés de préparation sont très coûteux, ce qui a fait que son prix de revient par unité de volume dépasse largement celui du polystyrène à faible densité ou du polyuréthane.

Ce handicap pourrait être surmonté par leurs caractéristiques qui sont, généralement, meilleures. Les mousses de polyéthylène sont tenaces, flexibles, résistent à l'abrasion et aux effets chimiques et offrent des propriétés d'isolation thermique et électrique excellentes. Les propriétés mécaniques des mousses de polyéthylène sont intermédiaires

entre les mousses rigides et les mousses très flexibles.

La structure de la cellule des mousses de polyéthylène est fermée et leur densité varie entre 0.03 g/cm^3 et la densité du polymère solide.

Les plastiques expansés sont constitués de deux phases : une phase gazeuse (agent gonflant) et une phase solide (plastique). La nature chimique du plastique est le facteur prépondérant dans la détermination des propriétés des mousses et la composition de la phase gazeuse a un effet important sur quelques propriétés telle que l'isolation thermique [3]. Les agents gonflants les plus utilisés sont au nombre de 3. Le procédé de préparation dépend de l'application envisagée du polyéthylène expansé [3,4,5]. La technique de l'extrusion dite 'en direct gazing' est la plus utilisée [4]. Il s'agit d'un procédé en continu avec introduction de l'agent gonflant dans le four de l'extrudeuse. La température d'extrusion est strictement contrôlée. Elle est augmentée graduellement jusqu'à la température de décomposition du gaz. La réticulation chimique du polyéthylène pourrait améliorer ses propriétés [3,6].

Compte tenu de leurs propriétés uniques, les mousses trouvent leur utilisation étendue à une multitude de domaines tels que comptent le bâtiment et la construction(chapes flottantes, revêtements de sol plinthes, sous-couches, rubans adhésifs isolants, isolations des canalisations...etc.); l'emballage de produits délicats; les équipements de sport...etc. *Un autre champ d'application prometteur utilisant le polyéthylène expansé est le recyclage des bouteilles de polyéthylène de haute densité en bois de charpente qui est plus durable que le bois* [6].

Les propriétés uniques des matériaux cellulaires ont suscité un intérêt croissant en industrie. Leur étude est, de ce fait, très importante, quoique complexe et vaste à cause

de leurs caractéristiques très variées quant à la densité, la porosité, la forme de la cellule, la rigidité...etc. Le retard du polyéthylène expansé a fait que peu d'études lui ont été consacrées. Ceci incite à explorer ce matériau sous différents aspects. Son comportement mécanique en grandes déformations est, à cet égard, de grand intérêt. *L'objectif de ce travail est la caractérisation mécanique de ce type de matériaux, i.e. la recherche d'un modèle physique, et par la suite mathématique, pour certains types d'essais en vue de déterminer quelques paramètres qui contribueraient à une meilleure compréhension du comportement dudit matériau dans l'optique d'une utilisation appropriée.*

De ce fait, cette étude comportera quatre chapitres, à savoir :

- Le premier chapitre fera état des connaissances dans le domaine du comportement mécanique des mousses et décrira les différentes approches utilisées dans la littérature pour appréhender ce problème,
- Le deuxième chapitre sera consacré à un rappel de la mécanique des milieux continus en introduisant les définitions des différents tenseurs de déformation et de contrainte ainsi que d'autres notions importantes,
- Le troisième chapitre aura pour objectif de développer la théorie d'hyperélasticité et de dégager un modèle théorique susceptible de décrire le comportement de la mousse de polyéthylène en grandes déformations,
- Le quatrième chapitre sera de caractère expérimental dans le but de validation du modèle précédemment développé (chap.III). Le matériau ainsi que le dispositif expérimental y seront décrits. Les résultats seront discutés dans le cadre de l'objectif du travail.

Enfin, une conclusion générale étoffera ce travail. Des suggestions ouvrant d'autres perspectives de travail y succéderont.

CHAPITRE I

COMPORTEMENT MECANIQUE DES MOUSSES

I-1 Introduction

Les mousses des polymères sont des matériaux cellulaires de synthèse car il en existe dans la nature (bois, liège, os...) et ils sont connus pour leur optimisation de rigidité et leur absorption d'énergie. En fait, grâce aux avancées technologiques, tous les matériaux peuvent être transformés en structures cellulaires. On cite, à ce titre, le béton cellulaire et ses qualités.

L'intérêt de l'étude mécanique de ces mousses provient de leurs utilisations très variées. A titre d'exemple, l'une des applications où la connaissance de la réponse mécanique d'une mousse joue un rôle important est la confection des sièges d'automobiles. Sur la figure (I-1), on a représenté la réponse force-déplacement de deux mousses flexibles. La forme de la courbe peut être utilisée pour évaluer le degré de confort des coussins confectionnés un type de mousses ou l'autre. Hilyard [7] établit que la courbe avec plateau est une indication d'un coussin inconfortable alors qu'un coussin confortable exhibe une indentation croissante avec une force croissante.

La diversité des mousses a fait l'objet une littérature vaste et abondante. Un journal, *Journal of cellular plastics*, leur y est entièrement consacré. L'ouvrage de Gibson et Ashby [8] est une référence dans le domaine.

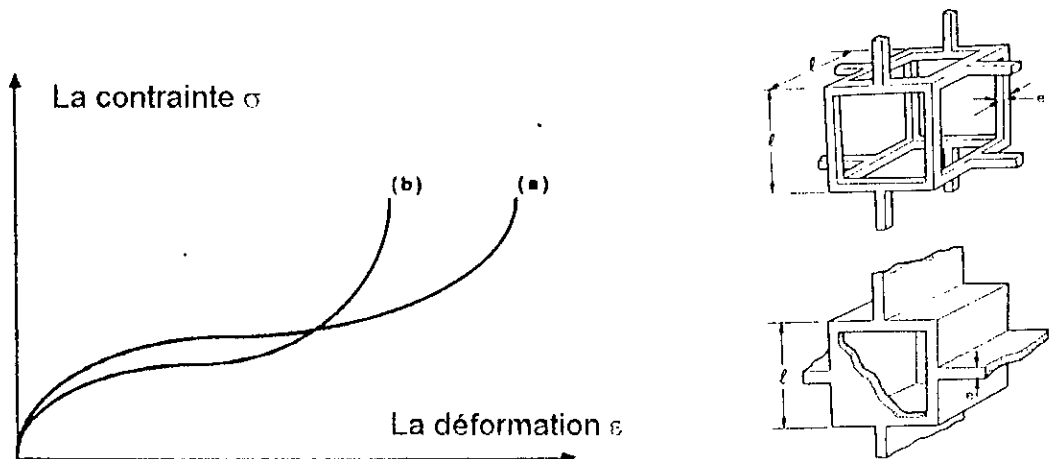


Fig.I-1 courbe force-déplacement pour deux mousses[7] Fig.I-2 Formes des cellules des mousses ouverte et fermée[13]

I-2 Propriétés des plastiques cellulaires :

I-2-1 Structure physique :

Le matériau cellulaire est constitué d'un squelette, ou d'une matrice de cellules tridimensionnelles, emprisonnant un gaz ou un liquide. Ces cellules sont de forme polyédrique. Les parois, où la matière solide se concentre, sont soit ouvertes soit fermées, cas des mousses de polyéthylène, (voir fig.1-2).

Les propriétés structurales critiques des plastiques expansés sont dues à : le polymère, l'agent gonflant, la densité, le rapport entre cellules fermées et cellules ouvertes, la taille et la forme de la cellule et l'anisotropie.

I-2-1-1 Le polymère :

Ses propriétés sont largement modifiées après expansion. La plupart de ses propriétés mécaniques deviennent plus *douces (softer)*.

I-2-1-2 L'agent gonflant

La nature et la proportion de l'agent gonflant influent sur les caractéristiques mécaniques de la mousse [9]. La figure (I-3) [10] montre la dépendance du module d'Young en fonction de la nature du gaz et de sa proportion. Si l'agent gonflant est un gaz, qui est le cas de la plupart des mousses, ceci entraînera une faible viscosité, une faible densité et un faible poids. Dans les mousses à cellules fermées, la déformation mécanique augmente la pression du gaz ce qui pour effet d'augmenter la rigidité.

I-2-1-3 La densité :

Le polymère et l'agent gonflant ont des effets, le plus souvent, opposés sur plusieurs propriétés. De ce fait leur rapport dans la mousse, qui définit sa densité, détermine leurs contributions relatives aux propriétés du matériau. Ce rapport est, en général, l'aspect structural le plus important. La densité est en relation directe avec les propriétés mécaniques et autres de la mousse.

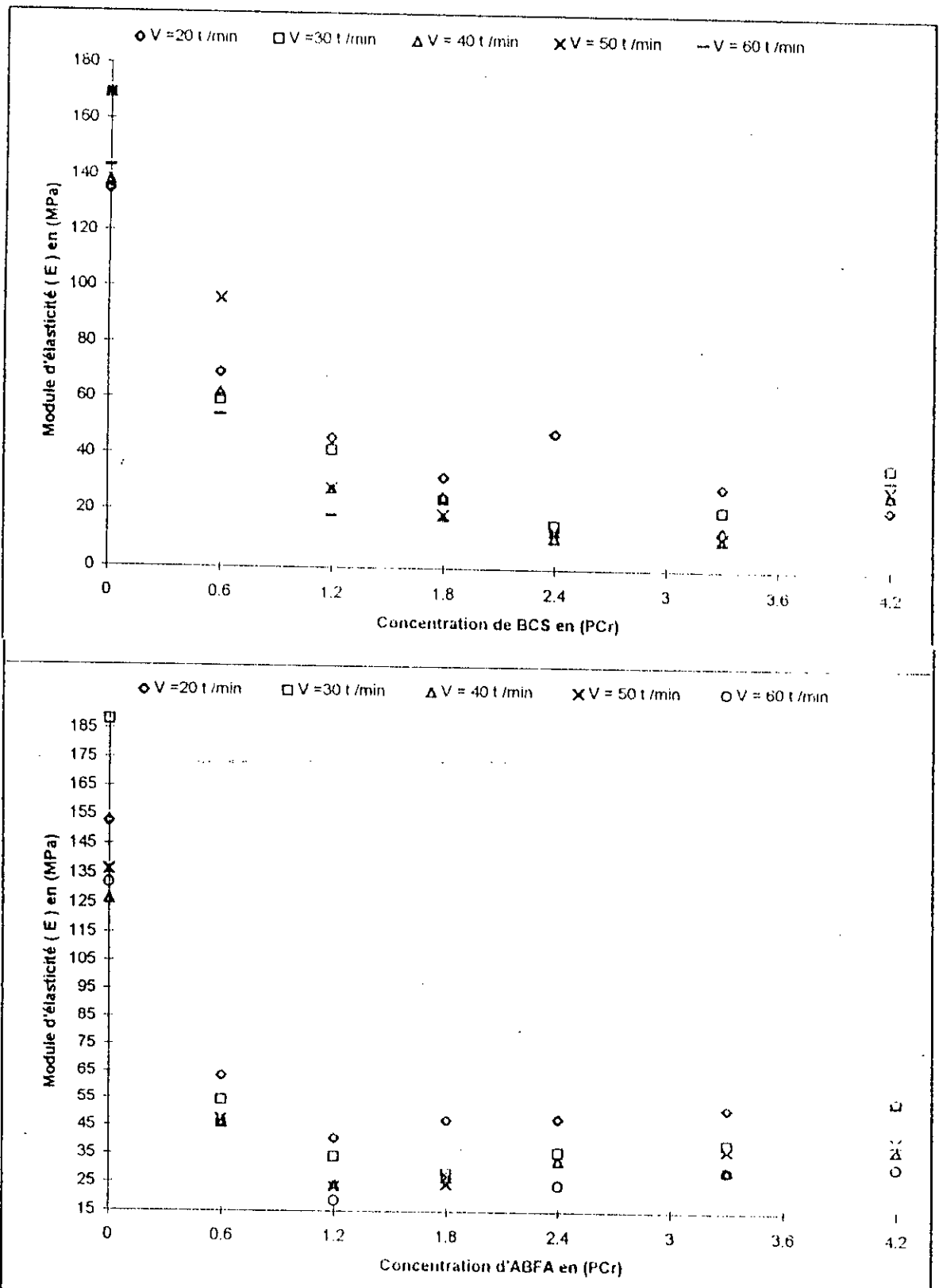


Fig. I-3 Variation du module d'Young d'une mousse-PE pour deux types d'agents gonflants pour différentes proportions [10]

La densité relative est définie par :

$$\rho_{rel} = \frac{\rho_m}{\rho_s} \quad (I-1)$$

Et la porosité η par :

$$\eta = 1 - \rho_{rel} \quad (I-2)$$

Un travail important, montrant la variation de la rigidité de la mousse avec la densité, a été entrepris [11,12] en se basant sur des données expérimentales de traction et de cisaillement. Une relation empirique liant le module d'Young de la mousse à cette densité est de la forme :

$$E = K\rho_m^\alpha \quad (I-3)$$

Où E est le module d'Young ; K et α deux constantes ; ρ_m est la densité de la mousse.

Dans le cas des mousses à cellules ouvertes, cette relation devient [11,13] :

$$E_m = E_s \left(\frac{\rho_m}{\rho_s} \right)^2 \quad (I-4)$$

Elle est appelée, généralement, la loi de puissance (Power law).

1-2-1-4 La forme et la taille de la cellule :

La forme et la taille de la cellule influent sur le comportement de la mousse. Dans une cellule fermée (les faces sont matérielles formées de membranes) le gaz, emprisonné dans chaque cellule, ne peut pas s'en échapper pendant la déformation. Ceci augmente la pression sur le gaz et la mousse devient plus rigide. Dans les mousses à cellules ouvertes (composées uniquement d'arêtes, les faces étant vides), le gaz circule librement entre les cellules pendant la compression de la mousse. L'augmentation de la taille de la cellule est en relation directe avec le module et l'absorption du choc[6]. En contrepartie, sa réduction augmente la rigidité et l'isolation thermique.

1-2-1-5 L'anisotropie :

La forme et la symétrie de la cellule sont décisives pour l'anisotropie macroscopique.

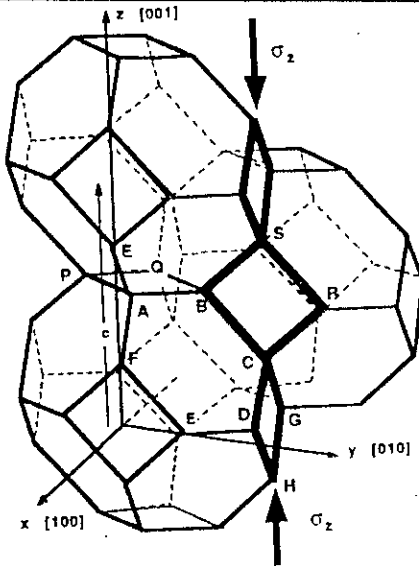


Fig.I-4 Prise en compte de l'anisotropie [14]

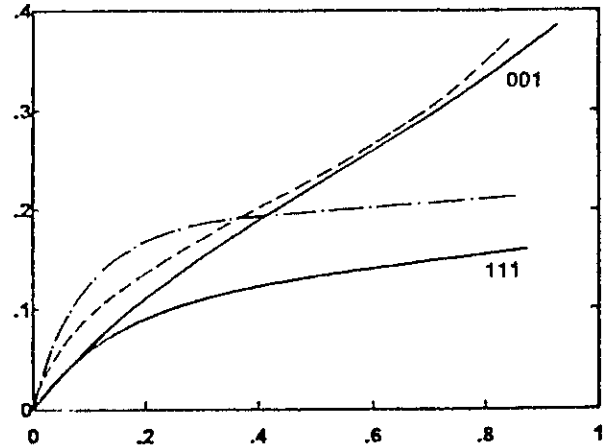


Fig.I-5 Courbe de compression d'une mousse à cellule ouverte selon la direction de sollicitation [14]

I-3 Comportement mécanique

I-3-1 Introduction

Le comportement macroscopique des mousses dépend, à la fois, des propriétés du matériau constituant le squelette, de l'agent gonflant et de la topologie de la cellule comme il a été déjà souligné. Si le matériau des parois cellulaires est élastomère, c'est à dire se comportant en élastique non linéaire, la mousse se comportera de la même manière. Si, par contre, il est plastique il en sera de même pour la mousse. Mais la plupart des mousses sont élastiques, parfois légèrement visqueuses (le cas du polyuréthane). Son comportement, donc, est très proche d'un matériau élastique non linéaire.

I-3-2 Comportement multiforme:

D'autre part, ce comportement est multiforme: la mousse ne se comporte pas de la même manière en traction qu'en compression. D'ailleurs, cet aspect des choses va être mis en évidence par les essais.

I-3-2-1 Compression:

Lorsqu'on comprime une mousse, la courbe contrainte-déformation (fig.I-6) présente trois phases. Aux petites déformations ($< 5\%$), la mousse se déforme en *élasticité linéaire*; puis il y a un *plateau de déformation*: une faible augmentation de la charge entraîne des grandes déformations; enfin, une troisième phase de *densification*

où les parois de la cellule se pressent les unes contre les autres.

Aux petites déformations, les parois de la cellule *fléchissent* comme des poutres de module E_s encastées à ses deux extrémités. La théorie des poutres permet d'obtenir le module de la mousse en fonction de la densité relative. Il est, alors, sous la forme suivante:

$$\frac{E_m}{E_s} = \left(\frac{\rho_m}{\rho_s} \right)^2 \quad (I-6)$$

C'est une relation approchée. C'est ainsi que Zhu et al.[14] ont obtenu la relation suivante pour une direction donnée:

$$\frac{E_m}{E_s} = 0.7242 \left(\frac{\rho_m}{\rho_s} \right)^2 \quad (I-7)$$

Ces résultats sont obtenus grâce aux travaux de Timoshenko et Gere[15] dans la solution du problème de flambement élastique d'une poutre cantilever. Il reste à signaler, enfin, que la longueur du plateau des déformations diminue si la densité relative augmente, car les effets structuraux sur la réponse macroscopique diminuent. L'effet du flambage élastique des cellules est, donc, plus important dans le cas des mousses à faible densité (fig.I-7).

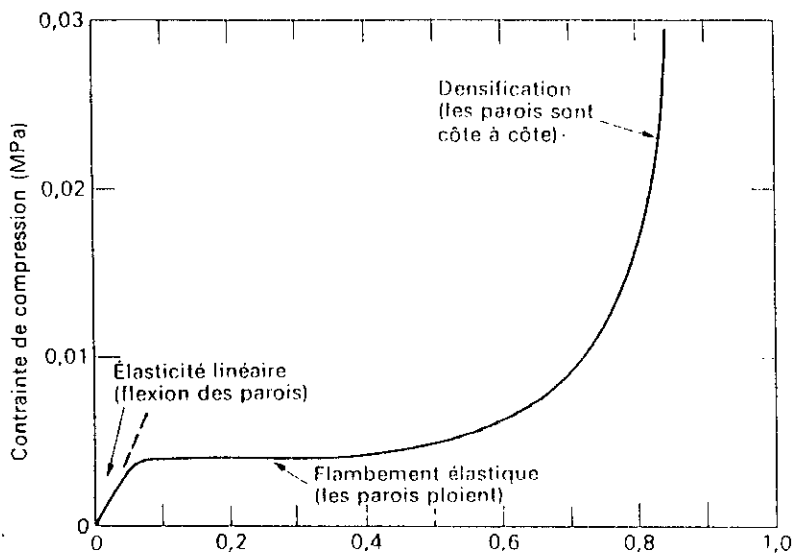


Fig.I-6 Courbe de pression des mousses

I-3-2-2 L'effet Poisson:

Le coefficient de Poisson en traction diffère de celui obtenu en compression. On peut le considérer comme étant, pratiquement, constant en traction. C'est le coefficient qui nous paraît le plus *paradoxal*. Car il peut osciller entre valeurs négatives et valeurs positives supérieures à 1. Lee et al [16] ont mis au point des mousses en polyuréthane anisotropes avec $\nu > 1$ en soumettant de telles mousses à une déformation uniaxiale de 25 à 45% à une température supérieure à la température d'adoucissement et en les refroidissant à une déformation uniaxiale. D'autre part, certaines mousses fabriquées à travers une transformation volumique permanente, [17,18], passent de cellules à forme convexe (polyèdre conventionnel) à une forme non-convexe (re-entrant). Ce type de mousses a un coefficient de Poisson négatif. C'est à dire que de telles mousses se dilatent si elles sont tirées et se rétrécissent en compression. Ce type de comportement a un grand effet sur les performances mécaniques des mousses. De tels matériaux sont appelés matériaux *auxétiques*.

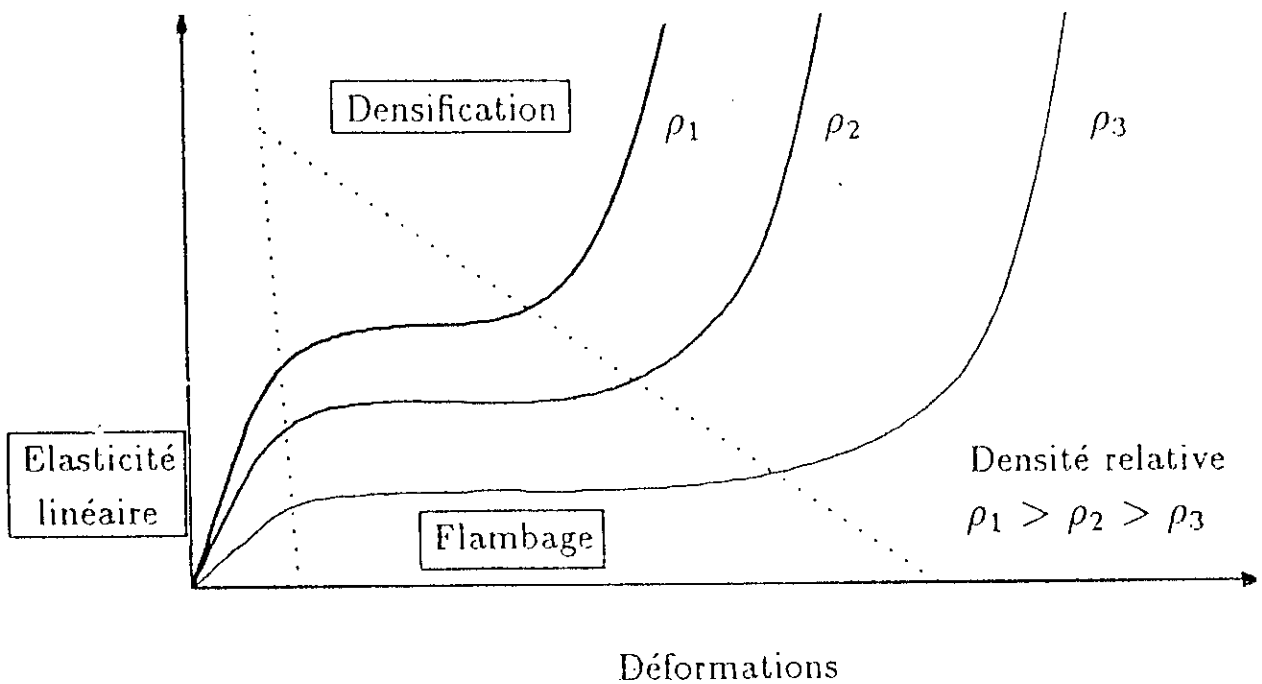


Fig. I-7 Effet de la densité sur la réponse de la mousse [20]

I-3-3 Effets de la température et de la vitesse de déformation:

Les mousses, étant constituées de matériaux polymériques, sont très influencées par la température. La vitesse de déformation joue, également, un rôle important dans le comportement mécanique des mousses. On peut le constater en examinant les figures (I-8) et (I-9) [19]. Une relation générale englobant les différents facteurs serait de la forme [19]:

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_0(\varepsilon)L(T) \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{a+b\varepsilon} \quad (I-8)$$

Où $\sigma_0(\varepsilon)$ représente la relation contrainte-déformation pour une vitesse de déformation quasi-statique arbitraire ε_0 , a et b sont des paramètres du matériau.

La fonction de dépendance de la température est définie par :

$$L(T) = \text{Exp} \left[-\frac{C_1(T - T_r)}{C_2 + T - T_r} \right] \quad (I-9)$$

où C_1 et C_2 sont des paramètres du matériau,

T_r est la température de service ($\sim 25^\circ$).

Des essais effectués à Liège sur des mousses de polyuréthane [20] confirment que, au dessous d'une vitesse de déformation inférieure à 100 mm/mn, le comportement mécanique ne dépend pratiquement pas de la vitesse de déformation. On peut, donc, négliger l'effet de viscosité et l'effet de frottement interne.

I-4 Modèles physiques

L'objectif du modèle physique est de représenter le comportement mécanique du solide réel. On choisit, donc, les aspects les plus significatifs du comportement général du matériau en adoptant des hypothèses simplificatrices qui conduisent à un modèle bien adapté à un cas particulier. Ainsi, le modèle de comportement d'un matériau peut être différent en quasi-statique, en dynamique, en petites et en grandes déformations, en chargement simple ou complexe...etc.

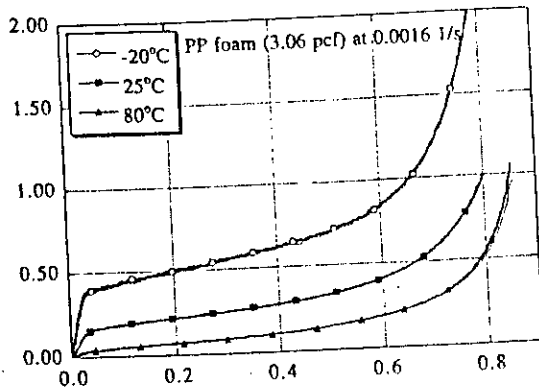


Fig.I-8 Variation du comportement d'une mousse-PP en fonction de la température [19]

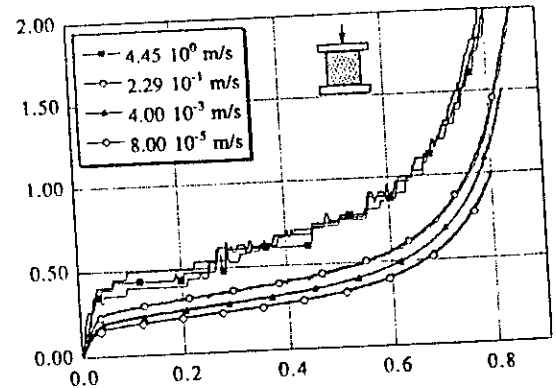


Fig.I-9 Variation du comportement d'une mousse-PP en fonction de la vitesse de déformation [19]

Le modèle physique doit être exprimé, ensuite, sous forme mathématique. A ce stade de la modélisation, le problème se pose quant au choix de la mesure de contrainte et de la déformation, c'est à dire quel couple, pour l'écriture de la loi de comportement.

En fin de compte, les paramètres de cette loi sont déterminés à partir des résultats expérimentaux. Adopter telle ou telle loi dépend, en grande partie, du nombre et type d'essais à effectuer. Une loi à un nombre défini de paramètres nécessiterait plus d'essais compliqués qu'une loi à un nombre de paramètres inférieur bien que la première approcherait mieux le comportement réel du matériau. Il s'agit, donc, de faire un arbitrage pour optimiser ainsi nos connaissances sur le matériau étudié. Ceci est vrai pour tous les matériaux et, particulièrement, pour les mousses dont nous avons vu les différents paramètres devant être pris en compte. Mais, en pratique, on peut bien réduire le nombre d'essais du fait que ces matériaux rempliraient une fonction déterminée selon une histoire de chargement spécifié à l'avance.

Dans la littérature consacrée aux matériaux cellulaires, les mousses en particulier, on rencontre deux approches pour modéliser le comportement mécanique. Les modèles

micromécaniques, dérivés de l'étude de structure cellulaire, face aux modèles macroscopiques. Ces derniers sont caractérisés par l'approche phénoménologique, typique du domaine des milieux continus. On présentera, ci-après, les deux démarches et on spécifiera notre choix.

1-4-1 Modèles micromécaniques

Dans l'approche micromécanique, pour évaluer les principales propriétés de la microstructure, on considère un seul élément cellulaire en le traitant comme un assemblage de barres élastiques. On suppose que les arêtes des cellules supportent seules le chargement extérieur, les forces dans les faces n'étant pas prises en compte. Ces chargements provoquent le flambement élastique des arêtes comme on l'a déjà évoqué ci-dessus. On peut, à ce sujet, consulter le travail de Zhu et al [14], très fourni, et qui, de plus, tenait compte de l'anisotropie.

Les relations continues entre les contraintes et les déformations effectives sont obtenues pour un élément arbitrairement orienté dans l'espace. Ensuite, les contraintes macroscopiques sont obtenues grâce à l'hypothèse que toutes les orientations possibles des micro-cellules sont également probables dans l'ensemble de la structure.

Tous les modèles micromécaniques se basent sur l'hypothèse que la structure microscopique est constituée de polyèdres réguliers de même type et de même taille. Une autre hypothèse, restreignante, est celle qui considère le matériau comme étant élastique linéaire. Et si ce modèle prend en considération les non-linéarités, elles seront d'origine géométrique (changement d'orientation des arêtes [14]). Ces deux hypothèses limitent le champ de validité de ces modèles au domaine des petites déformations et sont incapables de prévoir un coefficient négatif. Beaucoup d'efforts restent à fournir dans cet axe-là et, notamment, si l'on sait que l'irrégularité des cellules est plus répandue.

1-4-2 Modèles phénoménologiques

Dans cette approche, la structure microscopique du matériau n'est pas prise en compte. Elle n'est utile que dans la mesure où elle aiderait à expliquer certains phénomènes macroscopiques tels que le retard pris par l'éprouvette de compression pour revenir à son état initial après suppression du chargement, comme il sera constaté

dans la partie expérimentale. Les paramètres du matériau sont, donc, déterminés à partir de son comportement macroscopique. La loi de comportement est exprimée sous forme d'une relation liant la contrainte à la déformation.

On distingue, dans le cadre cette approche, deux types de modèles pour les mousses. Le premier considère la mousse comme un milieu biphasique, constitué d'un squelette et de l'air contenu dans les cellules. Les deux composantes sont, dans ce cas, modélisées séparément. Le deuxième, par contre, considère la mousse comme un milieu continu homogène et développe, ainsi, un seul modèle pour les deux composantes.

I-4-2-1 Modèles biphasiques

Les modèles biphasiques, connus dans la modélisation des matériaux poreux, sont aussi utilisés pour les mousses. Si le fluide est l'air et il n'y a pas de couplage non-linéaire entre le comportement du squelette et la pression de l'air, la loi peut être obtenue sous la forme:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{sq} + p^{air} \delta_{ij} \quad (I-10)$$

Ce type de loi exprime les contraintes totales dans la mousses comme la somme des contraintes dans le squelette et dans l'air. Cette relation est connue en mécanique des sols saturés sous le nom du postulat de Terzaghi [21]. Puisque l'air ne supporte que les charges volumiques (la pression), le déviateur des contraintes de l'air reste toujours nul. Cette superposition des réponses mécaniques dans l'air et dans le squelette est valable uniquement si l'évolution de la pression est indépendante de l'histoire des déformations. Cette hypothèse est, dans la plupart des cas, vérifiées. Les autres modèles prennent en compte le couplage entre la pression dans l'air et l'état de contrainte dans le squelette. C'est le cas de certains types de mousses plastiques.

Le comportement de l'air peut varier avec le type de cellule, et doit être parfois prise en compte dans la modélisation. Pour les cellules fermées, on utilise, souvent, la loi des gaz parfaits et pour les cellules ouvertes une loi d'écoulement la loi de d'Arcy par exemple.

La limite de cette approche réside dans la difficulté de connaître la contribution de chacune des composantes (l'air et le squelette).

1-4-2-2 Modèles monophasiques

Les modèles monophasiques ne tiennent pas compte des différences de comportement des composantes de la structure interne du matériau. Les deux milieux sont traités ensemble dans un seul modèle macroscopique. L'avantage de ces modèles par rapport aux modèles biphasiques est la facilité de leur vérification expérimentale.

Pour notre étude on a opté pour *un modèle monophasique d'élasticité non-linéaire*. C'est le modèle hyperélastique qui est retenu grâce sa relative facilité, d'une part, et, d'autre part, il a fait ses preuves pour d'autres types de mousses et, notamment, celles du polyuréthane.

Chapitre II

Rappels de mécanique des milieux continus

II-1 Introduction

Dans ce chapitre, seront introduites, brièvement, les notions fondamentales de la mécanique des milieux continus telles que, entre autres, la notion de déformation et de contrainte. On utilisera, le plus souvent, l'écriture tensorielle qui est la plus universelle et la plus concise. Le lecteur intéressé par plus de détail pourra consulter les nombreux ouvrages sur le sujet, dont [22-26].

On ne retiendra, dans notre cadre, que la notion d'un milieu matériellement simple, c'est à dire les milieux pour lesquels la comparaison entre les voisinages d'une même particule, avant et après déformation, se fait à l'aide des dérivées premières des grandeurs cinématiques. Dans de nombreux problèmes de mécanique, ces dérivées restent faibles devant 1. Du point de vue mathématique on ne conserve, alors, que les dérivées premières n'intervenant qu'au premier ordre et on reste dans le domaine linéarisé. Du point de vue physique le matériau reste, pratiquement, inchangé et nous sommes dans l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.). Une telle approche peut, cependant, échouer dans certains cas particuliers. Les élastomères et certains matériaux polymériques, dont les mousses, en sont des cas remarquables où plusieurs aspects de non-linéarité surgissent. Ces aspects de non-linéarité pourraient être:

- matériels: l'hyperélasticité, par exemple,
- géométriques: dues aux grandes déformations,
- dus aux conditions aux limites: le contact et le frottement...etc.

Le matériau que nous étudierons (les mousses-PE) est le siège des deux premiers types de non-linéarité.

II-2 Notion de configuration

Lors d'une sollicitation extérieure, les particules constituant un corps déformable, occupent à chaque instant t un ensemble de positions dans l'espace: c'est la configuration du système à l'instant t notée $\Omega(t)$.

II-3 Tenseurs des déformations

II-3-1 Gradient de la déformation

Soient $\Omega_0(t)$ et $\Omega(t)$ respectivement les configurations de référence non déformée de repère $\{E_i\}$ et courante de repère $\{E_i'\}$ d'un corps C.

Soient \mathbf{X} et \mathbf{x} les places qu'occupe une particule du corps C dans les configurations de référence et courante.

Soit le mouvement du corps C décrit par la relation

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}) \quad (\text{II-1})$$

En coordonnées cette relation s'écrit

$$x_i = \chi_i(\mathbf{X}_k) \quad (\text{II-2})$$

Les x_i étant les coordonnées de \mathbf{x} , X_k celles de \mathbf{X} .

En différentiant (II-2) on trouve

$$dx_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_k} dX_k \quad (\text{II-3})$$

Ce qui s'écrit en terme tensoriel

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (\text{II-4})$$

Où \mathbf{F} est un tenseur appelé *gradient de déformation* du mouvement (relatif à la configuration de référence) et défini par

$$\mathbf{F} = \text{grad } \chi(\mathbf{X}) \quad (\text{II-5})$$

Les composantes de \mathbf{F} sont de la forme : $F_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k}$

On dit que l'élément matériel $d\mathbf{x}$ est le transporté de $d\mathbf{X}$ par convection.

Remarque : considérons l'équation

$$\mathbf{F} \, d\mathbf{X} = 0 \quad (\text{II- 6})$$

si $d\mathbf{X} \neq 0$, ceci implique qu'il existe un élément du corps C dont la longueur est réduite à zéro après déformation (matrice \mathbf{F} singulière). Ceci est, physiquement, irréaliste, donc inconcevable. ce qui impose la condition $\mathbf{F} \, d\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ pour tout $d\mathbf{X}$ non nul, autrement dit la matrice \mathbf{F} est régulière.

Soit par définition

$$J = \det \mathbf{F} \quad (\text{II- 7})$$

La régularité de \mathbf{F} entraîne l'existence de son inverse \mathbf{F}^{-1} . Posons

$$\mathbf{B} = (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (\text{II- 8})$$

La relation (II-4) donne :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{B}^T dx \quad (\text{II- 9})$$

$\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ est une matrice symétrique. $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$, $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ le sont également.

Quel que soit $d\mathbf{X}$ non nul, \mathbf{F} étant régulière, on a :

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) d\mathbf{X} = (\mathbf{F} d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} d\mathbf{X}) = |\mathbf{F} d\mathbf{X}|^2 > 0$$

donc $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ est une matrice définie positive ($\mathbf{F} \mathbf{F}^T$, $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ le sont également).

$\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ et $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$ sont appelés respectivement *tenseurs de déformation de Cauchy-Green droit et gauche*.

II-3-2 Déformation d'un élément volumique et d'un élément de surface

Soit un élément volumique défini par les éléments de ligne $d\mathbf{X}^{(1)}$, $d\mathbf{X}^{(2)}$, $d\mathbf{X}^{(3)}$ au point X de $\Omega_0(t)$. De la relation (II-4) on a

$$dx^{(j)} = \mathbf{F} \, d\mathbf{X}^{(j)} \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{II-10})$$

Nous supposons que les éléments $d\mathbf{X}^{(j)}$ sont orientés dans le sens positifs,

i.e. $\mathbf{dX}^{(1)} \cdot (\mathbf{dX}^{(2)} \wedge \mathbf{dX}^{(3)}) > 0$.

Le volume du parallélépipède infinitésimal de coté $\mathbf{dX}^{(1)}$, $\mathbf{dX}^{(2)}$, $\mathbf{dX}^{(3)}$, est donné par :

$$\mathbf{dV} = \mathbf{dX}^{(1)} \cdot (\mathbf{dX}^{(2)} \wedge \mathbf{dX}^{(3)}) \quad (\text{II-11})$$

$$= \det (\mathbf{dX}^{(1)}, \mathbf{dX}^{(2)}, \mathbf{dX}^{(3)}) \quad (\text{II-12})$$

$\mathbf{dX}^{(i)}$ est un vecteur colonne .

le volume correspondant à l'état déformé est :

$$dv = \det [\mathbf{dx}^{(1)}, \mathbf{dx}^{(2)}, \mathbf{dx}^{(3)}] \quad (\text{II-13})$$

Portons (II-7), (II-10), (II-11) dans (II-4) on obtient

$$dv = (\det \mathbf{F}) dV \equiv J dV \quad (\text{II-14})$$

Par convention, les éléments volumiques sont pris positifs ($J > 0$). J est physiquement interprété comme le rapport du volume à l'état déformé par celui à l'état initial d'un élément volumique. Il représente, en coordonnées, le déterminant du Jacobien de la transformation définie par le relation (II-2).

S'il n'y a pas de changement de volume local lors de la déformation (déformation isochore) au point x :

$$J \equiv \det \mathbf{F} = 1 \quad (\text{II-15})$$

Cette relation est d'une grande importance pour les matériaux incompressibles. Elle sert à résoudre certains problèmes aux limites par optimisation en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

Un corps est dit non déformé si tout élément \mathbf{dX} du corps à l'état initial conserve sa longueur après déformation.

La forme globale de (II-14) donne :

$$\int_{\Omega} dv = \int_{\Omega_0} J dV \quad (\text{II-16})$$

Considérons un élément de surface \mathbf{dS} au voisinage de X sur Ω_0 tel que

$d\mathbf{S} = \mathbf{N} dS$, où \mathbf{N} est un vecteur unitaire positif normal à la surface. Soit $d\mathbf{X}$ un élément matériel du corps Ω_0 coupant le bord de dS tel que $d\mathbf{S}$ et $d\mathbf{X}$ deviennent respectivement $d\mathbf{s}$ et $d\mathbf{x}$ avec $d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds$ (\mathbf{n} vecteur unitaire positif normal à sa surface ds). Le volume dV devient à l'état déformé $dv = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{s}$, de la relation (II-14) on a :

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{s} = J d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{II-17})$$

Ce qui donne d'après (II.4)

$$\mathbf{F}^T d\mathbf{s} = J d\mathbf{S} \quad (\text{II-18})$$

et on a, par la suite:

$$d\mathbf{s} = J \mathbf{B} d\mathbf{S} \quad (\text{II-19})$$

$$\mathbf{n} d\mathbf{S} = J \mathbf{B} \mathbf{N} d\mathbf{S}$$

Ces deux relations entre un élément de la surface initiale et un autre de la surface déformé sont appelées *formules de Nanson*.

II-3-3 Mesures de la déformation

De la relation (II-4) on a :

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \quad (\text{II-20})$$

(II-20) représente la différence entre les carrés des longueurs d'un élément de ligne dans la configuration courante et la configuration de référence. Pour un corps non déformé (translation, rotation d'un corps rigide) on a, alors :

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} \quad (\text{II-21})$$

S'il existe un point du corps où (II-21) n'est pas vérifiée, alors la matrice $\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}$ définit un tenseur de déformation.

On appelle *tenseur de déformation de Green-Lagrange* le tenseur défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (\text{II-22})$$

Les composants de \mathbf{E} sont de la forme :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial X_i} - \delta_{ij} \right) \quad (\text{II-23})$$

On peut écrire (II-20) de manière équivalente, à savoir

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{x} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x}$$

Le tenseur $\frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T)$ est appelé *tenseur de déformation d'Euler-Almansi*.

Soit $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ le *déplacement* d'une particule de la configuration de référence à la configuration courante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} \quad (\text{II-24})$$

Le *gradient du déplacement* est le tenseur :

$$\mathbf{D} = \text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (\text{II-25})$$

La relation (II-22) devient:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T + \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \quad (\text{II-26})$$

d'où , en coordonnées cartésiennes :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (\text{II-27})$$

u_i étant les coordonnées de \mathbf{u} dans la base de référence $\{E_i\}$.

Soient \mathbf{M} et \mathbf{m} deux vecteurs unitaires suivant $d\mathbf{X}$ et $d\mathbf{x}$ respectivement. De (II-4), on a :

$$\mathbf{m} |d\mathbf{x}| = \mathbf{F} \mathbf{M} |d\mathbf{X}| \quad (\text{II-28})$$

et, par conséquent

$$|d\mathbf{x}|^2 = \mathbf{M} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{M}) |d\mathbf{X}|^2 \quad (\text{II-29})$$

Ce qui donne

$$\frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} \equiv [\mathbf{M} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{M})]^{1/2} = \lambda(\mathbf{M})$$

$\lambda(\mathbf{M})$ est appelé *l'extension* dans la direction \mathbf{M} en \mathbf{X} . Elle est définie comme étant le rapport entre la longueur de l'élément de ligne de la configuration courante sur celle dans la configuration de référence. La mesure de déformation de l'ingénieur est définie comme $\epsilon = \lambda - 1$, $|\mathrm{d}\mathbf{x}| - |\mathrm{d}\mathbf{X}|$ *allongement*.

III-3-4 Déformation pure

Une déformation est dite pure si le repère orthogonal choisi à l'état initial ne subit aucune rotation lors de la déformation. Autrement dit, il n'existe pas de déformation de cisaillement.

III-3-5 Décomposition polaire du gradient de la déformation

Le théorème de la décomposition polaire est d'un grand intérêt dans l'interprétation géométrique de la déformation. Ce théorème stipule que, pour tout tenseur du second ordre non-singulier, il existe deux tenseurs symétriques définis positifs uniques, \mathbf{U} et \mathbf{V} , et un tenseur orthogonal, \mathbf{R} , tel que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (\text{II-30})$$

On peut en conclure, alors, que \mathbf{F} représente une rotation rigide si et seulement si $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$. Si, par contre, $\mathbf{R} = \mathbf{1}$, alors $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ et la déformation est dite pure.

Les tenseurs de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi deviennent:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \text{ et } \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^2) \quad (\text{II-31})$$

respectivement.

Les tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{V} sont appelés '*les tenseurs d'extension droit et gauche*', respectivement.

Il est à noter, également, que les extensions principales de \mathbf{U} et de \mathbf{V} se confondent et qu'il en est de même pour \mathbf{F} en cas de déformations pures.

III-3-6 Autres mesures de la déformation

Dans cette section on a défini les tenseurs de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) ; \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^2)$$

Le fait que la déformation s'annule si et seulement si $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{I}$ permet de définir beaucoup d'autres mesures de déformation basées sur \mathbf{U} et \mathbf{V} . Par exemple, les tenseurs du second ordre, lagrangien et eulérien définis par:

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{I}) \\ \ln \mathbf{U} & \ln \mathbf{V} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \neq 0 \\ m = 0 \end{array} \quad (\text{II-32})$$

où m est un entier (positif ou négatif), sont des mesures souhaitables de la déformation. $\ln \mathbf{U}$ est appelé *mesure de Hencky*.

Ils sont coaxiaux avec \mathbf{U} et \mathbf{V} respectivement, ont pour valeurs principales:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{m}(\lambda^m - 1) \\ \ln \lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \neq 0 \\ m = 0 \end{array} \quad (\text{II-33})$$

La validité de (II-32) pourrait être étendue aux puissances non entières de m .

On peut, également, définir le *tenseur de déformation de Biot*:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} - \mathbf{I} \quad (\text{II-34})$$

qui correspond à $m=1$.

Ces trois tenseurs, *Green-Lagrange* ($m=2$), *Biot* ($m=1$), *Hencky* ($m=0$), sont d'un intérêt central dans la théorie d'élasticité.

III-4 Tenseurs de contraintes

Le vecteur contrainte \mathbf{t} en un point \mathbf{x} de la configuration courante Ω_t , dépend de la normale \mathbf{n} à la surface sur laquelle il s'applique : $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$.

Pour tout point \mathbf{x} de Ω_t , il existe un tenseur $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, appelé *tenseur de contrainte de Cauchy*, indépendant de la normale \mathbf{n} , tel que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (\text{II-35})$$

En coordonnées cartésiennes (II-34) donne

$$t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = T_{ij}(\mathbf{x}) n_j \quad (\text{II-36})$$

Ce tenseur est appelé, aussi, tenseur de contraintes vraies et il est symétrique.

Calculons la résultante des forces sur toute la surface $\partial\Omega_t$ de la configuration courante, en utilisant la formule de Nanson (II-19), il vient :

$$\int_{\partial\Omega_t} T n da = \int_{\partial\Omega_0} J T B N dA \quad (\text{II-37})$$

\mathbf{N} étant la normale à la surface $\partial\Omega_0$ de la configuration de référence. Soit par notation

$$\mathbf{S}^T = J \mathbf{T} \mathbf{B} \quad (\text{II-38})$$

On pose:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{B}^T \mathbf{T} \quad (\text{II-39})$$

Le tenseur \mathbf{S} est appelé *tenseur de contraintes nominal*. Son transposé \mathbf{S}^T est le *premier tenseur de Piola-Kirchhoff*.

Le *second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff* est défini par :

$$\mathbf{S}^{(2)} = J \mathbf{B}^T \mathbf{T} \mathbf{B} \quad (\text{II-40})$$

Ce qui permet d'écrire le tenseur de contraintes de Cauchy :

$$\mathbf{T} = J^{-1} (\mathbf{B}^{-1})^T \mathbf{S}^{(2)} \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{II-41})$$

ou bien

$$\mathbf{T} = J^{-1} (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{S}^{(2)} (\mathbf{F})^T \quad (\text{II-42})$$

Ecrite en coordonnées cartésiennes (II-41) devient :

$$T_{ij} = J^{-1} F_{ik} F_{jh} S^{(2)}_{kh} \quad (\text{II-43})$$

L'équation (II-42) nous donne la relation entre les composantes du tenseur de Cauchy (état déformé) et celle du second tenseur de Piola-Kirchhoff (état non déformé).

Le tableau II-1 présente les différentes définitions des tenseurs dans l'étude de déformation finies.

Rappelons, enfin, qu'en petites déformations, les différents tenseurs de déformation ou de contrainte définis ci-dessus sont équivalents.

III-5 Conclusions

Les notions introduites dans ce chapitre sont valables pour tout milieu continu. L'expérience a montré que les matériaux n'ont pas le même comportement. Ce

caractère intrinsèque du comportement du matériau relève de l'étude des lois de comportement, sujet du prochain chapitre.

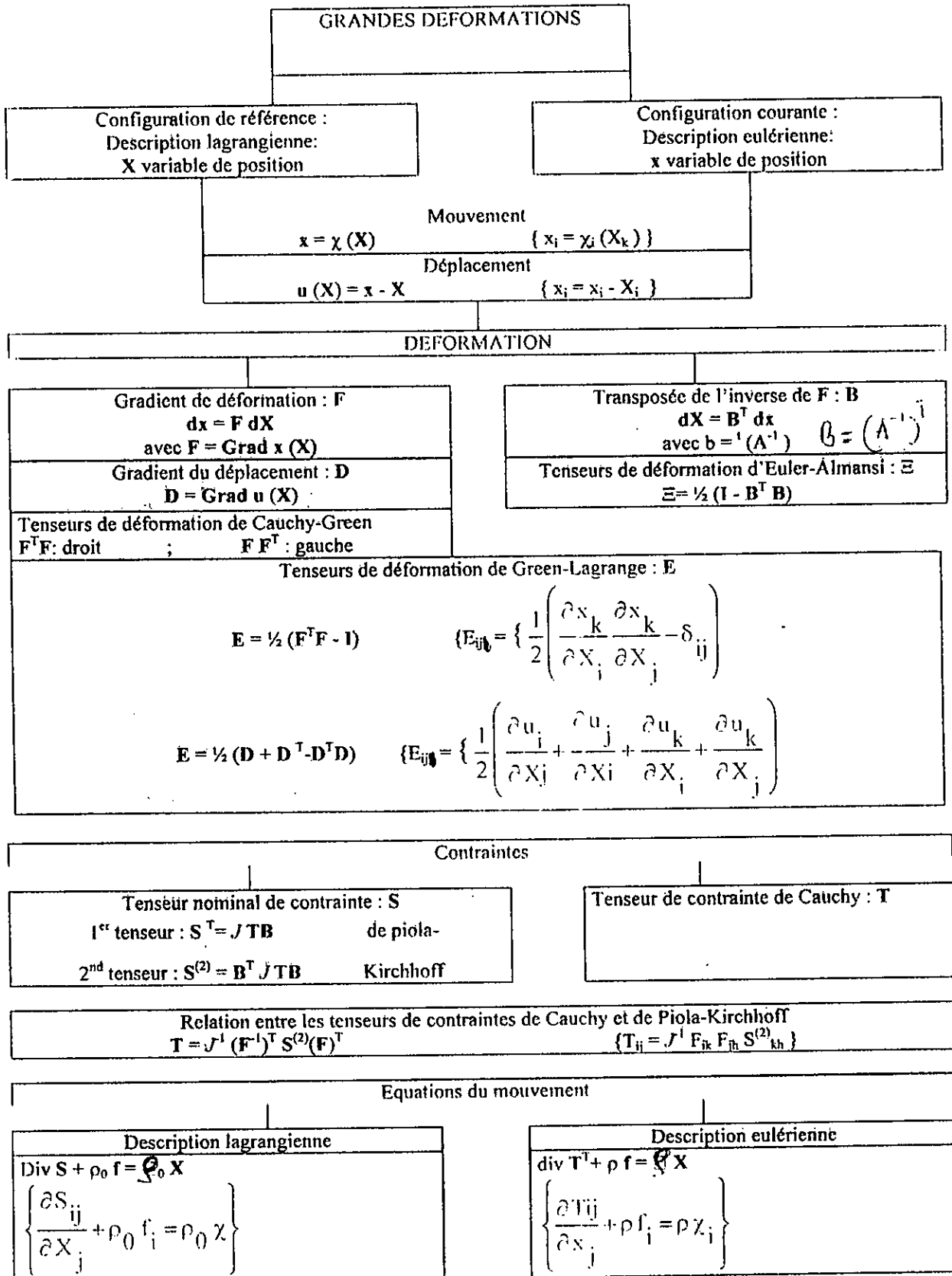


Tableau II-1: Tableau synoptique des différentes définitions des tenseurs

CHAPITRE III
THEORIE D'HYPERELASTICITE

III-1 Lois de comportement des matériaux simples

III-1-1 Définition d'une loi de comportement

Une loi de comportement décrit la nature macroscopique du matériau en question. Plus précisément, la loi de comportement décrit un matériau idéal et la prédiction de cette loi devrait fournir une approximation proche du comportement réel (observé) du matériau. La recherche d'une telle loi relève du domaine de la rhéologie qui, au sens large, est la science de la déformation de la matière sous l'effet des sollicitations qui lui sont appliquées. A ce titre, les rhéologues étudient les propriétés intrinsèques de déformabilité et d'écoulement des échantillons. Sous cet angle, seuls les aspects rhéologiques du comportement sont considérés en négligeant les aspects thermiques, physico-chimiques, vieillissant et visqueux. La théorie d'élasticité traite la représentation mathématique des propriétés macroscopiques trouvées à partir des données expérimentales, et ne s'intéresse pas à expliquer comment ces propriétés découlent de la structure microscopique sous-jacente. La théorie suppose que le matériau est parfaitement élastique. Ceci, bien entendu, est une idéalisation mais elle procure, en pratique, une bonne approximation de la réalité en beaucoup de circonstances. L'hypothèse est valide si les effets dépendant du temps tels que le fluage et la relaxation sont négligeables sur l'intervalle de temps que dure l'expérience. Une fois la propriété d'élasticité établie, dans ce sens, il est commun de supposer qu'elle peut être décrite en terme d'une fonction énergie de déformations. Ceci exige du matériau l'absence d'effets d'hystérésis. Encore une idéalisation. Bien que ces effets puissent être pris en compte par l'élasticité de Cauchy, la simplicité gagnée en travaillant avec une seule fonction scalaire est un argument de poids. On peut, donc, négliger l'effet d'hystérésis.

Rem. Quelques effets d'hystérésis peuvent être prédits en utilisant une fonction non convexe[27]. Ceci est en contradiction avec les conditions imposées à cette fonction pour assurer l'unicité de la solution[28].

Si le tenseur de Cauchy est connu en tout point du matériau à l'instant t pour tout mouvement jusqu'au temps t , alors la relation entre σ et l'histoire du mouvement jusqu'à t (inclus) décrit la réponse en contrainte du matériau pour tout mouvement arbitraire. Cette relation est appelée loi de comportement ou équation constitutive. Que le comportement d'un matériau est totalement défini par une telle équation est une hypothèse appelée communément «principe de déterminisme». Quelques modifications

sont à prévoir si le matériau est soumis à certaines conditions internes.¹

D'autres hypothèses sont nécessaires pour permettre des simplifications sur la théorie des lois de comportement. De telles hypothèses doivent être basées sur des considérations physiques et non seulement mathématiques. Une hypothèse importante est celle qui consiste à dire que deux observateurs en mouvement relatif font des déductions équivalentes (mathématiques et physiques) sur les propriétés macroscopiques du matériau. En d'autres termes, les propriétés du matériau ne sont pas affectées par la superposition d'un mouvement rigide et la relation entre contrainte et mouvement a la même forme pour les deux observateurs. Ceci est appelé « le principe d'objectivité matérielle ».

III-1-2 Matériaux simples

Un matériau est dit simple à une configuration donnée si sa réponse à toutes déformations dans cette configuration est déterminée, uniquement, par sa réponse aux déformations homogènes dans un certain voisinage de cette configuration. C'est à dire que

$$\sigma = G(\text{grad}x; X, t) \quad (\text{III-1})$$

Cette forme de la loi de comportement englobe toutes les lois de comportement mécaniques pures rencontrées en physique et en ingénierat.

Si on spécialise l'éq. (III-1) telle que la contrainte ne dépend du gradient de la déformation qu'à l'instant t et non de toute l'histoire, alors le matériau est appelé matériau élastique.

En fait, en élasticité, deux types de matériaux élastiques sont envisageables. Les matériaux élastiques de Cauchy et les matériaux élastiques de Green (ou matériaux hyperélastiques). Ils possèdent tous les deux, bien sûr, la propriété fondamentale d'élasticité qui est celle de la totale réversibilité.

III-3 Matériau élastique de Cauchy

Un matériau élastique de Cauchy est un matériau pour lequel, en chaque point

¹ On a utilisé le terme 'conditions internes' pour traduire 'internal constraints' au lieu de 'contraintes internes' pour ne pas prêter à confusion.

matériel, l'état des contraintes dans la configuration courante est déterminé, seulement, par l'état de déformation dans cette même configuration relativement à une configuration de référence donnée. Le tenseur de contrainte de Cauchy ne dépend pas du chemin de la déformation pris de la configuration de référence; mais le travail effectué par cette contrainte dépend, en général, du chemin de la déformation. Ceci veut dire, contrairement au matériau de Green, que l'élasticité de Cauchy a une structure non conservative (la contrainte ne dérive pas d'un potentiel).

Donc,

$$\sigma = \mathbf{G}(\mathbf{F}) \quad (\text{III-2})$$

IV-3 Matériaux hyperélastiques

Ce type de matériaux désignent les matériaux élastiques pour lesquels une fonction d'énergie de déformation existe. Il est, également, appelé, matériau de Green. Les propriétés mécaniques de tels matériaux sont, alors, caractérisé par cette fonction d'énergie de déformation (ou potentiel élastique) W , et la relation donnant le tenseur de contrainte nominal est de la forme

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad (\text{III-3})$$

L'élasticité de Green est un cas spécial de l'élasticité de Cauchy du fait que la variation d'énergie entre deux configurations différentes est indépendante du chemin suivi. Elle dépend, uniquement, de la valeur de W en chacun de ces points.

Conditions imposées à la fonction d'énergie de déformation

1- La fonction W est objective, i.e. invariable par changement d'observateur.

2- La fonction W est fonction, uniquement, du tenseur de déformation pure droit \mathbf{U} ,

$$\mathbf{W} = W(\mathbf{U}) \quad (\text{III-4})$$

Elle est, donc, indépendante de toute rotation et est, de ce fait, une fonction scalaire objective de \mathbf{F} . i.e. l'énergie élastique de stockée n'est pas affectée par la superposition d'un mouvement rigide après déformation.

3- La valeur de la fonction W est indépendante du choix du tenseur de déformation utilisé dans sa représentation.

4- L'état naturel est libre de contraintes ce qui fait que

$$\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \lambda_i} = \mathbf{0} \quad (\text{III-5})$$

dans cet état.

5- Cette fonction d'énergie de déformation doit, en outre, vérifier les conditions de stabilité de Drucker et les conséquences qui en suivent, à savoir: normalité, convexité [10].

6- La loi de comportement qui en découle doit se réduire à la loi de Hooke linéaire en cas de petites déformations.

IV-3-2 Relations contraintes-déformations pour un matériau isotrope hyperélastique

Dans le cadre de notre travail, on a considéré les mousses comme étant des matériaux hyperélastiques isotropes. Nous nous limiterons, donc, à cette hypothèse de travail n'envisagerons que les matériaux isotropes.

Pour de tels matériaux \mathbf{W} est fonction des invariants principaux $I_1(\mathbf{U})$, $I_2(\mathbf{U})$, $I_3(\mathbf{U})$ ou, de manière équivalente, une fonction symétrique des déformations principales λ_1 , λ_2 et λ_3 .

Donc,

$$\mathbf{W}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{W}(\mathbf{V}) = \mathbf{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (\text{III-6})$$

La symétrie impose

$$\mathbf{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathbf{W}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2) = \mathbf{W}(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1) \quad (\text{III-7})$$

Les composantes principales du tenseur de Biot et du tenseur nominal sont données par:

$$\mathbf{t}_i^{(n)} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \lambda_i}; \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{III-8})$$

Pour le tenseur de Kirchhoff

$$\mathbf{f}_i = \lambda_i \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \lambda_i} \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{III-9})$$

Et les composantes du tenseur de Cauchy sont

$$\mathbf{J}\mathbf{t}_i = \lambda_i \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \lambda_i} \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{III-10})$$

avec :

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (\text{III-11})$$

Si on impose à un matériau certaines conditions internes, les formules précédentes doivent être modifiées. Ainsi, pour un matériau incompressible, cette condition est formulée comme suit

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (\text{III-12})$$

et les composantes principales de Cauchy sont données par

$$\mathbf{t}_i = \lambda_i \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \lambda_i} - p \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{III-13})$$

où p est un scalaire qui joue le rôle d'une pression hydrostatique.

Les deux relations (III-10) et (III-13) décrivent le comportement d'un matériau hyperélastique en termes du tenseur de contraintes de Cauchy tout en ayant en mémoire que ce tenseur est coaxial avec les tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{V} .

On peut montrer [27] que pour un matériau hyperélastique isotrope le tenseur nominal \mathbf{S} est donné par:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial I_1} \mathbf{F}^T + 2 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial I_2} \{I_1 \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}\} \mathbf{F}^T + 2I_3 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial I_3} \mathbf{B}^T \quad (\text{III-14})$$

où I_1, I_2, I_3 sont les principaux invariants du tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} .

III-3-2 Les fonction d'énergie de déformation pour un matériau élastique isotrope

Les conditions imposées à \mathbf{W} sont d'ordre mathématique: objectivité et symétrie matérielle et physique: conformité aux résultats expérimentaux.

D'autres conditions mathématiques, liées au problème d'existence de la solution, dans les problèmes aux limites rétrécissent la classe des fonction d'énergie de déformation admissibles.

IV-3-3 Formes générales des fonction d'énergie de déformation

On a vu que \mathbf{W} peut être exprimée sous forme d'une fonction des déformations principales ou des invariants principaux de \mathbf{U} . Elle peut l'être pour tout ensemble d'invariants indépendants de la déformation.

Les invariants les plus utilisés sont:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \} \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad \text{(III-15)}$$

qui sont les invariants principaux de $\mathbf{FF}^T = \mathbf{V}^2$.

Etant donné que \mathbf{W} est continûment différentiable infiniment de fois par rapport à I_1 , I_2 et I_3 , on pourrait écrire $\mathbf{W}(I_1, I_2, I_3)$ comme une série infinie de I_1^{-3} , I_2^{-3} , I_3^{-1} [42],

Donc,

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} C_{pqr} (I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q (I_3 - 1)^r \quad \text{(III-16)}$$

où p, q, r prennent les valeurs 0, 1, 2... et les coefficients C_{pqr} sont indépendants de la déformation.

Une fonction d'énergie de déformation isotrope peut être approximée, plus ou moins finement, par le développement de cette forme en un nombre fini de termes.

Elle peut être écrite en termes des déformations principales sous la forme:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} a_{pqr} \left\{ \left[\lambda_1^p (\lambda_2^q + \lambda_3^q) + \lambda_2^p (\lambda_3^q + \lambda_1^q) + \lambda_3^p (\lambda_1^q + \lambda_2^q) \right] (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^r - 6 \right\} \quad \text{(III-17)}$$

La valeur de W est la même dans (III-16) et (III-17) pour la même histoire de déformation, bien entendu.

Les formes particulières les plus utilisées se déduisent de ces formes générales qui ne sont pas, somme toute, les seules.

Ainsi, pour un matériau incompressible (la plupart des matériaux caoutchoutiques), on peut citer la fonction d'énergie de déformation de Mooney-Rivlin:

$$W(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad \text{(III-18)}$$

Cette fonction est, surtout, utilisée pour l'étude des déformations des élastomères supportant jusqu'à 150% de déformation. Elle est incorporée dans le code de calcul ANSYS.

Un certain nombre de matériaux, dits matériaux néo-hookéen (Neo-Hookean), possède une fonction d'énergie de déformation de la forme:

$$W(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) \quad \text{(III-19)}$$

Ces deux formes ont joué un rôle très important dans le développement de la théorie de l'élasticité non-linéaire[29,30].

Ogden[27] a pu proposer une forme de la fonction d'énergie de déformation en termes des λ_i avec des puissances non-entières pour des matériaux hyperélastiques légèrement incompressibles qui est valable jusqu'à 600% de déformation :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 \right) / \alpha_i \quad \text{(III-20)}$$

Cette forme est, néanmoins, peu commode dans l'utilisation des codes de calcul par éléments finis car elle sous-entend la connaissance des déformations principales.

Swanson [31] a pu combiner l'avantage des puissances non-entières et l'utilisation des invariants de la déformation

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sum_i \frac{3A_i(I_1/3)^{1+\alpha_i}}{2(1+\alpha_i)} + \sum_j \frac{3B_j(I_2/3)^{1+\beta_j}}{2(1+\beta_j)} + \int_0^{I_3} \frac{g(\xi)}{2} d\xi - \left(\sum_i A_i + 2\sum_j B_j \right) \frac{\ln I_3}{2} \quad \text{(III-21)}$$

Dans cette forme, la compressibilité est incluse par l'introduction du 3^{ième} invariant I_3 .

Cette forme a prouvé son efficacité en comparaison avec les données de l'expérience (fig.III-1) [31].

Le choix d'une forme ou d'une autre n'est, donc, pas tâche aisée. Toutefois, on peut se laisser guider par le tableau III-1, en signalant que ces lois sont pour des matériaux incompressibles. Il suffit, alors, d'ajouter une fonction du 3^{ième} invariant de la déformation pour les généraliser au cas compressible.

Un immense travail a été effectué par [32-34] pour déterminer les fonctions d'énergie de déformation mais ce ne sont pas, bien évidemment, des lois à validité

globale et un grand degré de complexité surgit lorsqu'on traite des problèmes d'élasticité finie pour d'autres problèmes comme la torsion [35].

III-3-4 Ecriture de la loi de comportement pour le tenseur nominal

On sait bien que

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{III-22})$$

C'est un ensemble de trois fonctions scalaires.

On a également

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \lambda_i} \quad (\text{III-23})$$

En différentiant (III-15), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} &= 2\lambda_i \\ \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_i} &= 2\lambda_i(I_1 - \lambda_i^2) \quad i=1, 2, 3 \\ \frac{\partial I_3}{\partial \lambda_i} &= \frac{I_3}{\lambda_i} \end{aligned} \quad (\text{III-24})$$

Remplaçons dans (III-23):

$$\sigma_i \lambda_i = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_i + \frac{\partial W}{\partial I_2} \lambda_i (I_1 - \lambda_i^2) + \frac{\partial W}{\partial I_3} \left(\frac{I_3}{\lambda_i} \right) \right] \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{III-25})$$

L'équation (III-25) exprime, donc, la loi de comportement dans le repère principal des déformations principales. Le problème se ramène, en définitive, à l'évaluation des paramètres $\left\{ \frac{\partial W}{\partial I_1}, \frac{\partial W}{\partial I_2}, \frac{\partial W}{\partial I_3} \right\}$ à l'aide d'essais expérimentaux.

Il faut rappeler que cette loi de comportement doit se réduire à la loi de Hooke en cas de petites déformations infinitésimales.

Pour cela, exprimons λ_i en fonction de ε_i et remplaçons dans l'équation (III-15)

$$\lambda_i = 1 + \varepsilon_i \quad (\text{III-26})$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 2 + 2\theta \\ I_2 &= 3 + 4\theta \\ I_3 &= 1 + 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-27})$$

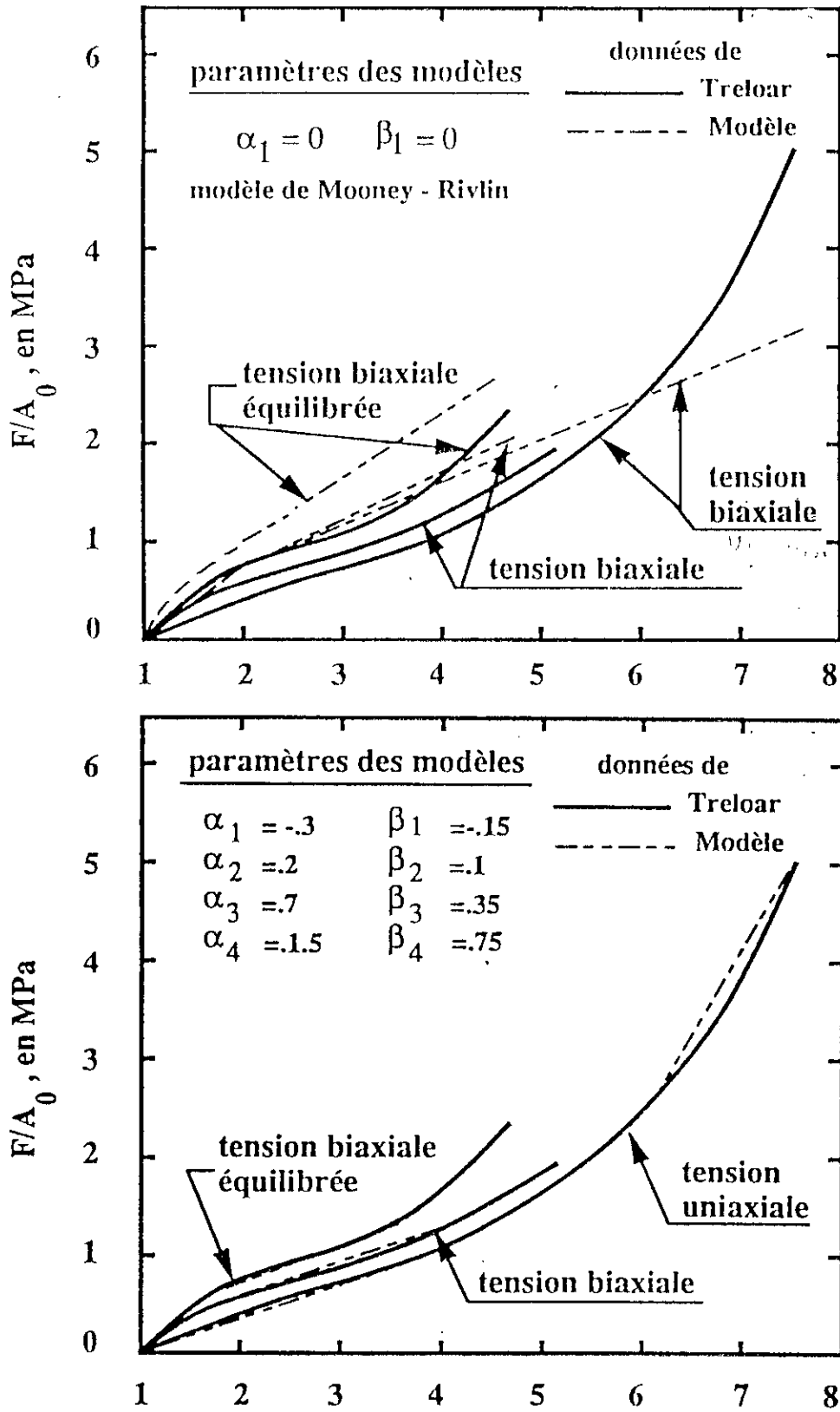


Fig. III-1 Comparaison du modèle de l'éq.(III-21) avec l'expérience:(a) modèle à 2 paramètres; (b) modèle à 8 paramètres [31]

où $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, en ne conservant, bien sûr, les termes d'ordre supérieur à 1.

Etant donné (III-27), on peut exprimer les gradients de la fonction d'énergie de déformation sous les formes suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I_1} &= A + B\theta \\ \frac{\partial W}{\partial I_2} &= C + D\theta \\ \frac{\partial W}{\partial I_3} &= E + F\theta \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-28)}$$

De (III-26)-(III-28), (III-25) devient:

$$\sigma_i = 2[A + A\varepsilon_i + B\theta + 2C + 2C\theta + 2D\theta + E + 2E\theta - E\varepsilon_i + F\theta] \quad \text{(III-29)}$$

Identifions cette relation à la loi de Hooke exprimée, elle aussi, dans le repère principal:

$$\sigma_i = 2\mu\varepsilon_i + \lambda\theta \quad \text{(III-30)}$$

On aura:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\mu f \\ C &= \frac{1}{3}\mu(1-f) \\ E &= -\frac{1}{2}\mu(2-f) \\ B + 2D + F &= \frac{1}{2}\lambda + 2\mu \end{aligned} \right. \quad \text{(III-31)}$$

Le coefficient f est introduit pour des raisons algébriques.

D'après les travaux énormes de Rivlin et Saunders [36] (Fig.III-3), rapportés dans plusieurs références, dont [27,29,37], on peut établir que $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ sont indépendantes de I_1, I_2, I_3 et, donc, constantes tout au long de l'histoire de la déformation.

Ceci nous conduit à poser:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I_1} &= A = \frac{1}{2}\mu f; B = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial I_2} &= C = \frac{1}{2}\mu(1-f); D = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial I_3} &= E + F\theta = -\frac{1}{2}\mu f' + \left(\frac{1}{2}\lambda + 2\mu\right)\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-32})$$

ce qui implique que

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-33})$$

Et en raison de la compatibilité:

$$W_{,ij} = W_{,ji} \quad (\text{III-34})$$

On pose:

$$\frac{\partial W}{\partial I_3} = \frac{\partial W}{\partial I_3}(I_3) \quad (\text{III-35})$$

On remplace dans la loi de comportement de l'équation (22):

$$\sigma_i \lambda_i = \mu + \lambda^2 + \mu(1-f) \left(I_2 - \frac{I_3}{\lambda_i^2} \right) + 2I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3}(I_3) \quad (\text{III-36})$$

On peut modifier l'équation (III-36) pour avoir une forme plus convenable en introduisant les nouveaux invariants:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= I_1 \\ J_2 &= I_2 / I_3 \\ J_3 &= \sqrt{I_3} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-37})$$

Elle devient :

$$\sigma_i \lambda_i = \mu \left[f \lambda_i^2 - \frac{1-f}{\lambda_i^2} \right] + J_3 \frac{\partial W}{\partial J_3}(J_3) \quad (\text{III-38})$$

Cette forme va être utilisée pour le dépouillement des essais.

$W(I_1, I_2)$	$\partial W / \partial I_1$	$\partial W / \partial I_2$	$\partial^2 W / \partial I_1^2$	$\partial^2 W / \partial I_2^2$	Commentaire
$K_1 (I_1 - 3)$	K_1	0	0	0	seulement pour petites déformations
$K_1 (I_1 - 3) + K_2 (I_2 - 3)$	K_1	K_2	0	0	bon en traction uniaxiale et cisaillement simple; assez mauvais en biaxial et en cisaillement pur
$K_1 (I_1 - 3) + K_2 (I_2 - 3)^2 + K_3 (I_2 - 3)$	$K_1 + 2K_2 (I_1 - 3)$	K_3	$2K_2$	0	bon en équibiaxial mais assez mauvais en uniaxial
$K_1 (I_1 - 3) + f(I_2 - 3)$ f = fonction à déterminer	$K_1 + 2K_2 (I_1 - 3) + 3K_3 (I_1 - 3)$	$f'(I_2 - 3)$	0	$f''(I_2 - 3)$	cette forme paraît avoir un grand domaine d'application si la fonction f est bien définie
$K_1 (I_1 - 3) + K_2 \ln(I_2)$	K_1	K_2 / I_2	0	$-K_2 / I_2^2$	cas particulier de la forme précédente
$K_1 \int e^{k(I_1 - 3)^2} dI_1 + K_2 \ln(I_2 / 3)$	$K_1 e^{k(I_1 - 3)^2}$	K_2 / I_2	$2k \cdot K_1 (I_1 - 3) \cdot e^{k(I_1 - 3)^2}$	$-K_2 / I_2^2$	très bon en uniaxial et en biaxial pour un grand domaine de déformation; un peu moins bon en équibiaxial à très grandes déformations
$K_1 (I_1 - 3) + K_2 (I_2 - 3)^2 + K_3 (I_2 - 3)^3 + K_4 (I_2 - 3)$	$K_1 + 2K_2 (I_1 - 3) - 3K_3 (I_1 - 3)^2$	K_4	$2K_2 + 6K_3 (I_1 - 3)$	0	bon en traction-compression uniaxiales et en état plan de déformation, mais mauvais en biaxial

$W(I_1, I_2)$	$\partial W / \partial I_1$	$\partial W / \partial I_2$	$\partial^2 W / \partial I_1^2$	$\partial^2 W / \partial I_2^2$	Commentaire
$K_1 \int e^{k(I_1 - 3)^2} dI_1$ $+K_2 \ln[((I_2 - 3)+g)/g]$ $+K_3 (I_2 - 3)$	$K_1 e^{k(I_1 - 3)^2}$	$K_2 / (I_2 - 3 + g) + K_3$	$2k.K (I_1 - 3). e^{k(I_1 - 3)^2}$	$-K_2 / (I_2 - 3 + g)^2$	expression très générale valable sur tout le domaine de déformation du néoprène; cette expression comporte 5 paramètres
$K_1 (I_1 - 3) + K_2 (I_2 - 3)$ $+K_3 (I_2 - 3)^2 + K_4 (I_2 - 3)^3$	K_1	$K_2 + 2K_3 (I_2 - 3)$ $+3K_4 (I_2 - 3)^2$	0	$2K_3 + 6K_4 (I_2 - 3)$	bon en uniaxial et biaxial pour un grand domaine de déformation
$K_1 (I_1 - 3) + K_2 (I_2 - 3)^2$ $+K_3 (1 - e^{a(I_2 - 3)})$ $+K_4 (1 - e^{b(I_2 - 3)})$	$K_1 + 2K_2 (I_1 - 3)$	$-a.K_3 e^{a(I_2 - 3)} - b.K_4 e^{b(I_2 - 3)}$	$2K_2$	$-a^2.K_3 e^{2a(I_2 - 3)} - b^2.K_4 e^{2b(I_2 - 3)}$	bons résultats en uniaxial et en biaxial (6 paramètres)
$K_1 (I_1 - 3) + K_2 (I_2 - 3)$ $+K_3 (I_1 - 3)(I_2 - 3)$	$K_1 + K_3(I_2 - 3)$	$K_2 + K_3(I_1 - 3)$	0	0	parfaite concordance en uniaxial sur tout le domaine de déformation de caoutchouc naturel renforcé au carbone
$K_1 (I_1 - 3) + K_2 (I_2 - 3)$ $+K_3 (I_1 - 3)^2 (I_2 - 3)^2$	$K_1 + 2K_3 (I_1 - 3) (I_2 - 3)^2$	$K_2 + 2K_3 (I_2 - 3) (I_1 - 3)^2$	$2K_3 (I_2 - 3)^2$	$2K_3 (I_1 - 3)^2$	même appréciation que pour la forme précédente mais pour des caoutchoucs pur à base de butadiène-styrène

Tableau -1 Différentes lois de comportement hyperélastiques

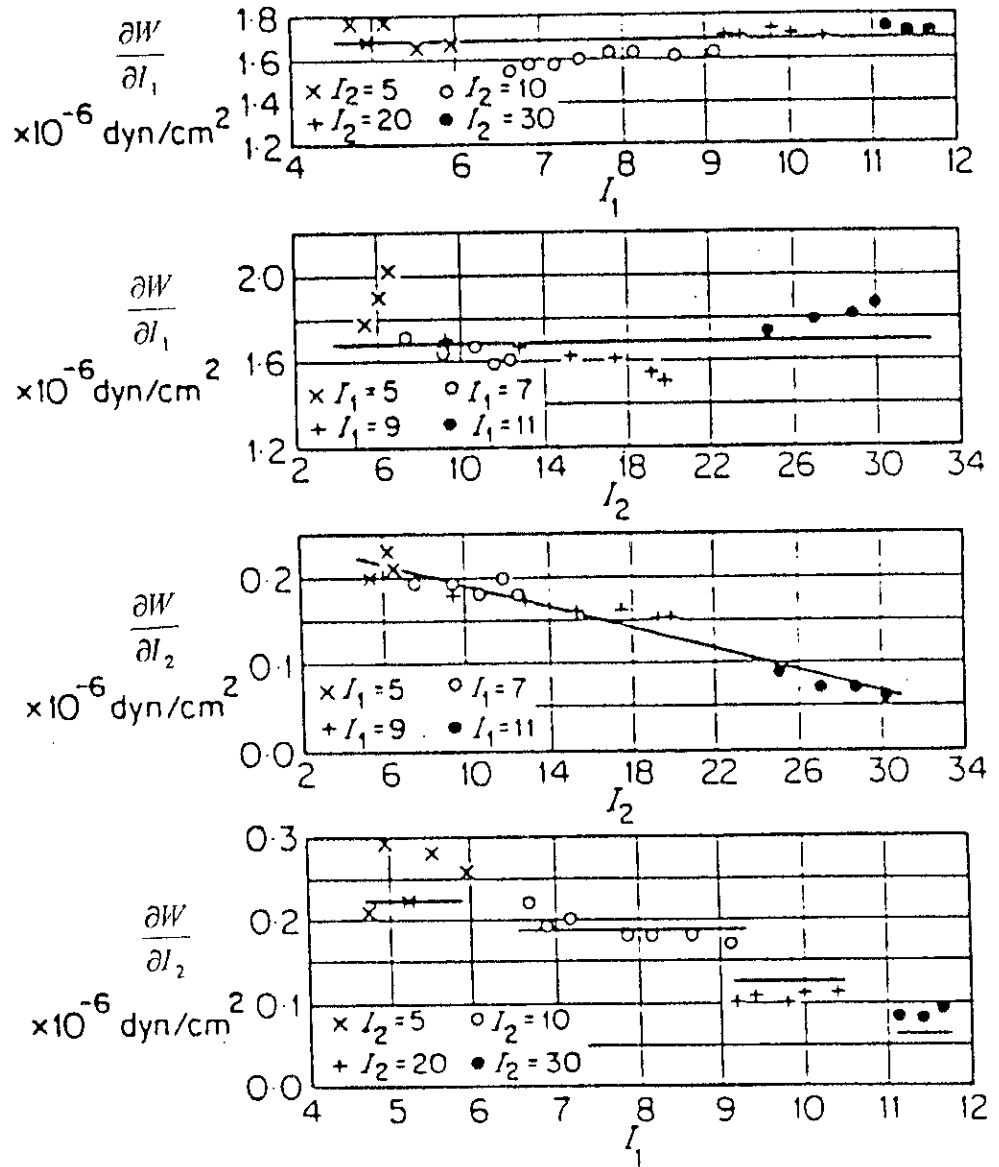


Fig. III-3 Dépendance de $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ par rapport à I_1 et I_2 .

D'après Rivlin et Saunders. (Unité: $1 \text{ dyn/cm}^2 = 0.1 \text{ Pa}$)

CHAPITRE IV
ETUDE EXPERIMENTALE

IV-1 Le matériau :

Notre étude expérimentale comporte deux essais : essai de traction uniaxiale et essai de compression. Ce sont, d'ailleurs, les deux essais, ainsi que la flexion, disponible sur la machine utilisée dans cette étude.

Le matériau utilisé (mousse de polyéthylène) est d'usage général tel que l'emballage d'appareils scientifiques ou l'absorption de bruit. Sa densité est mesurée et est égale à 0.04 g/cm^3 .

Les éprouvettes de traction sont préparées sous forme d'haltères (fig.IV-1) avec les dimensions inscrites sur la figure afin d'annuler l'effet des conditions aux limites car une forme parallélépipédique a été essayée mais la rupture se faisait au niveau des mâchoires. Le mode de fixation est de type adhérence. Pour ce qui est de la compression, on a préparé des blocs parallélépipédiques de dimensions $50 \times 50 \times 45 \text{ mm}^3$.

Les spécimens sont marqués par des lignes horizontales et verticales à l'aide d'un marker noir en vue de mesurer les variations de dimensions dans le sens du chargement et dans le sens latéral. La mesure de la déformation latérale est indispensable car les mousses sont des matériaux très compressibles et la mesure de la déformation longitudinale ne suffirait pas à en déduire la déformation dans le sens latéral en se servant de la condition d'incompressibilité :

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (\text{IV-1})$$

IV-2 Le dispositif expérimental :

La machine de traction utilisée est une L'HOMARGY-ADAMEL modèle dy25 destinée aux essais de traction, flexion et compression sur tous matériaux : plastiques, élastomères, fils textiles ou métalliques, tissus, métaux, bois...etc., dont la charge de rupture est inférieure à 20 KN. C'est une machine asservie par ordinateur intégrant le logiciel AUTOTRAC et permettant l'affichage numérique de la force et du déplacement avec une large gamme de vitesses de déformation variant de 0.1 à 500 mm/mn. Elle procure, également, le tracé des courbes force-déplacement ou contrainte-déformation ainsi que la contrainte de rupture et le module d'Young à l'origine. Sur la figure (IV- 2), on voit le bâti de la machine.

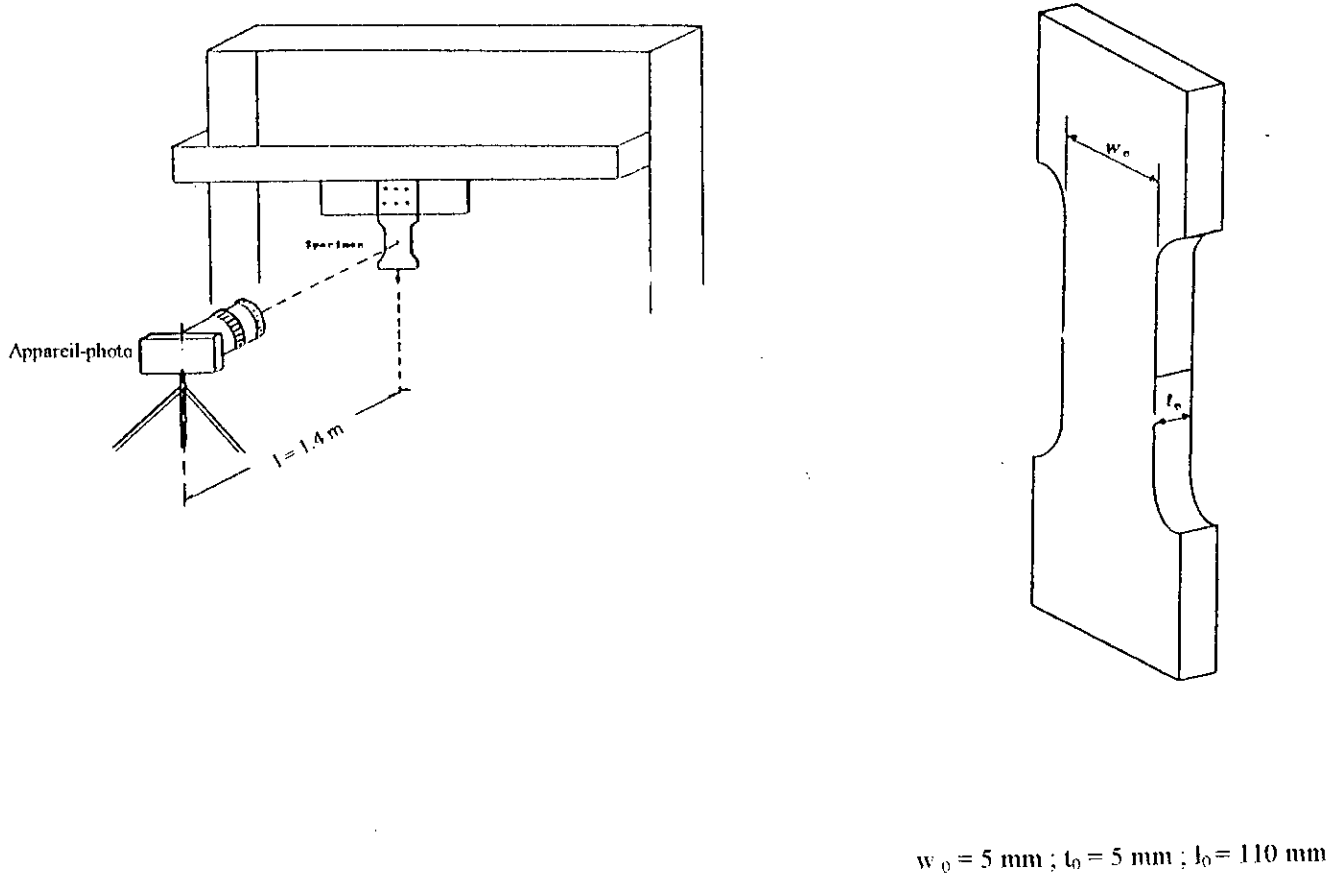


Fig.IV-1 Essai de traction

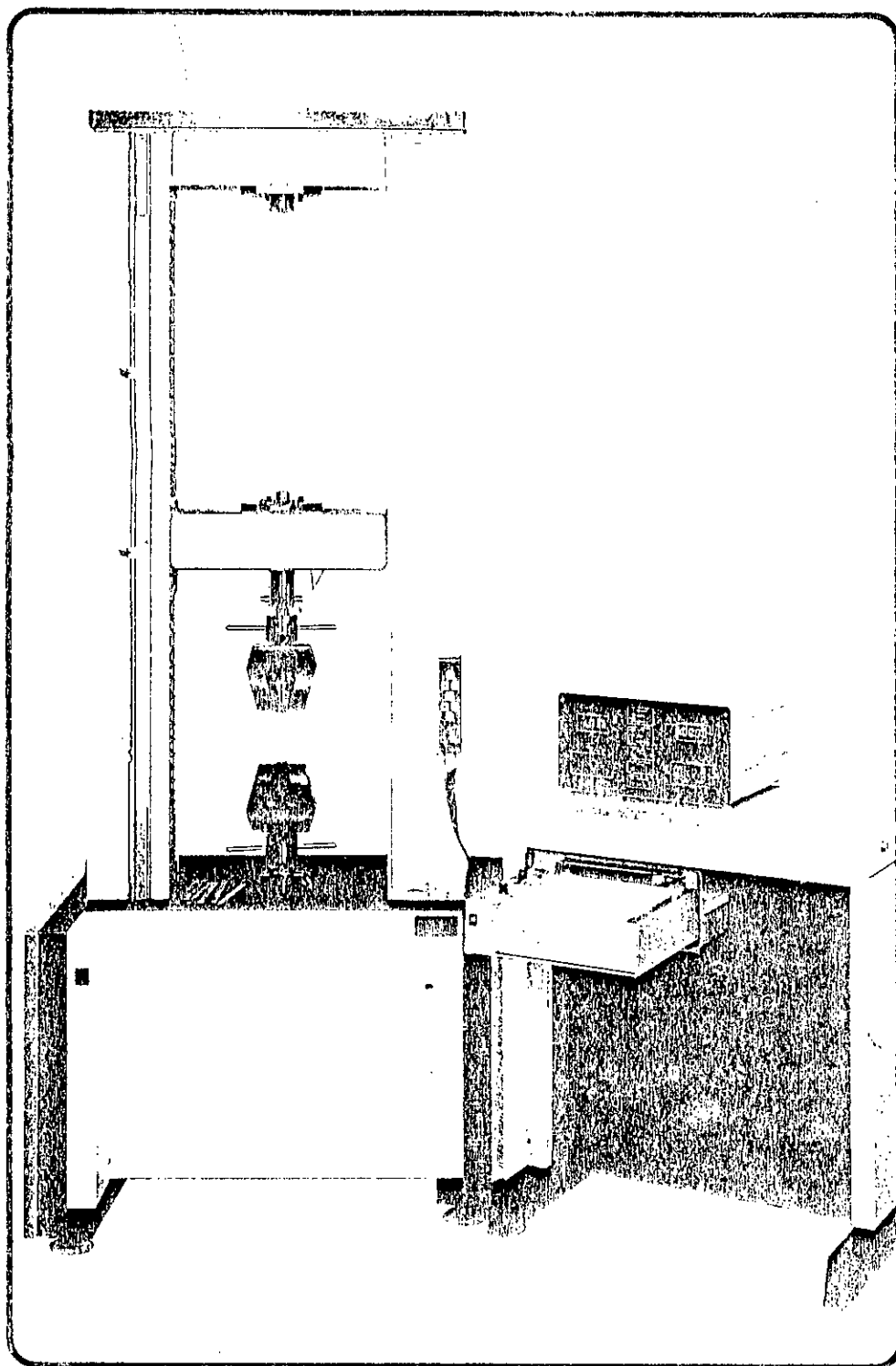


Fig.IV-2 Machine de traction L'Homargy Adamel dy25

Les photos 1 et 2 (fig.IV-3) montrent les éprouvettes avant le début de chargement. Un appareil photo muni d'un zoom a été placé en face des éprouvettes afin d'enregistrer différentes séquences de l'essai et pouvoir ainsi mesurer les variations dans les lignes tracées sur l'éprouvette (fig.IV-3). Les mesures de ces variations sont effectuées au sein d'un laboratoire de photographie sur les négatives avec un agrandissement de plus de 5 fois.

IV-3 Résultats et discussions :

La collection des données pour les deux essais est montrée dans les tableaux 1 et 2. Par raison de symétrie $\lambda_2 = \lambda_3$; le rapport de volume J est ainsi facilement calculé

$$J = \lambda_1 \lambda_2^2 \quad (\text{IV-2})$$

Dans l'essai de traction certaines éprouvettes ont été sollicitées jusqu'à la rupture alors que, pour d'autres, un cycle de chargement-déchargement a été effectué pour mettre en évidence le phénomène d'hystérésis. La moyenne des déformations est de 25%. Quant à la compression, la course de la traverse mobile a été réglée pour atteindre une moyenne de déformation de l'ordre de 50%.

IV-3-1 Essai de traction

IV-3-1-1 Détermination des paramètres du matériau

La figure (IV-4), montre une micrographie optique de la mousse. Le résultat confirme notre hypothèse d'isotropie étant donné que la forme des cellules est irrégulière et que leur disposition est aléatoire dans la structure, i.e., le matériau ne possède pas des directions privilégiées. Ceci est d'autant plus vrai que le polyéthylène utilisé est un polyéthylène à basse densité c'est à dire que la partie amorphe, qui est de type caoutchoutique [38], est plus importante que la partie cristalline [3].

Les courbes de contrainte-déformation et force-déplacement (fig.IV-5 et fig.IV-6) indiquent une forte non-linéarité à partir de 3% environ.

La forme de la courbe sur fig.(IV-5) nous incite à choisir une fonction énergie de déformation $W(I_1, I_2, I_3)$ comme celle proposée par Blatz et Ko [39] utilisée par Blatz[40] pour modéliser une certaine catégorie de mousses de polyuréthane. Elle est de la forme:

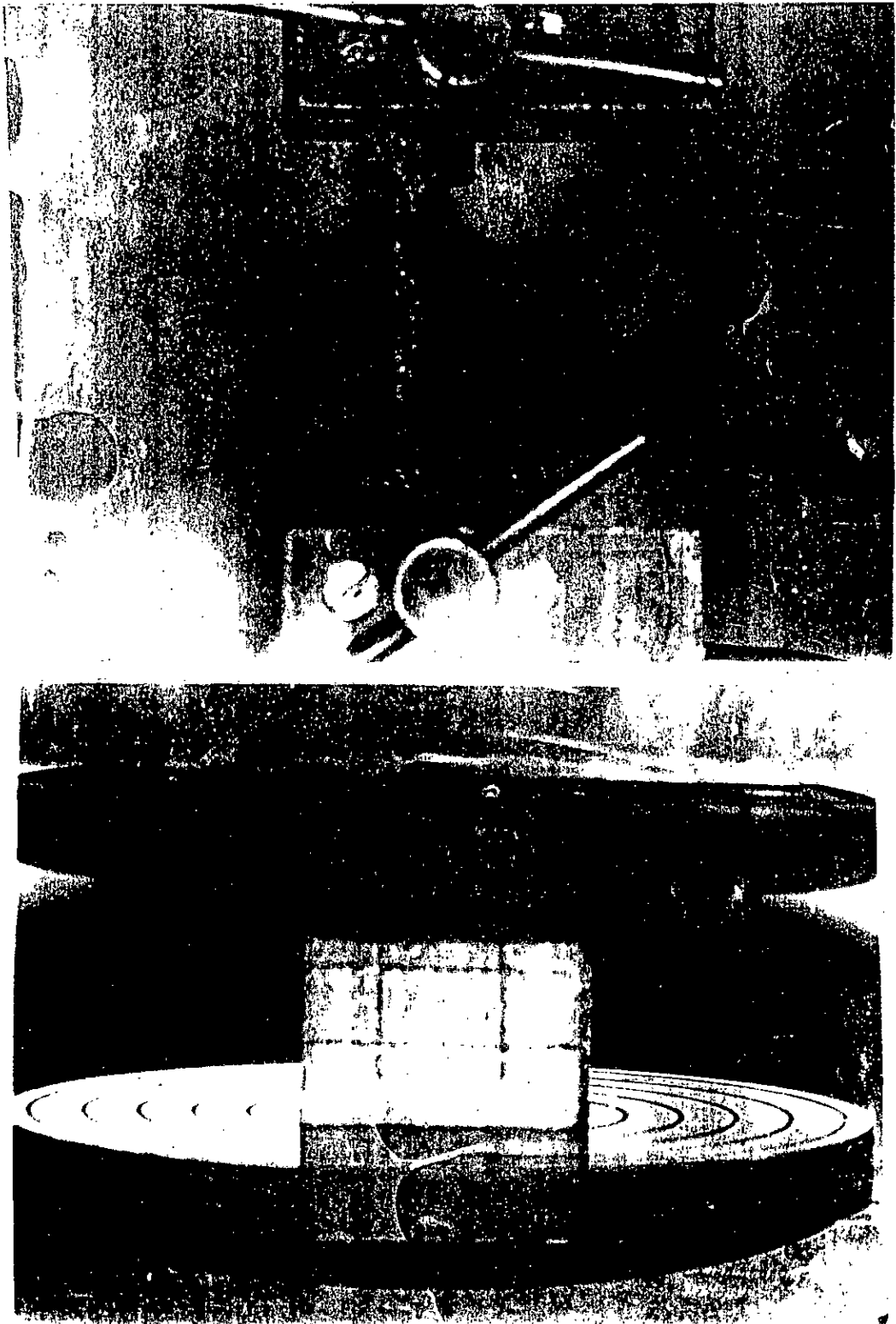


Fig.IV-3 Les éprouvettes avant les essais

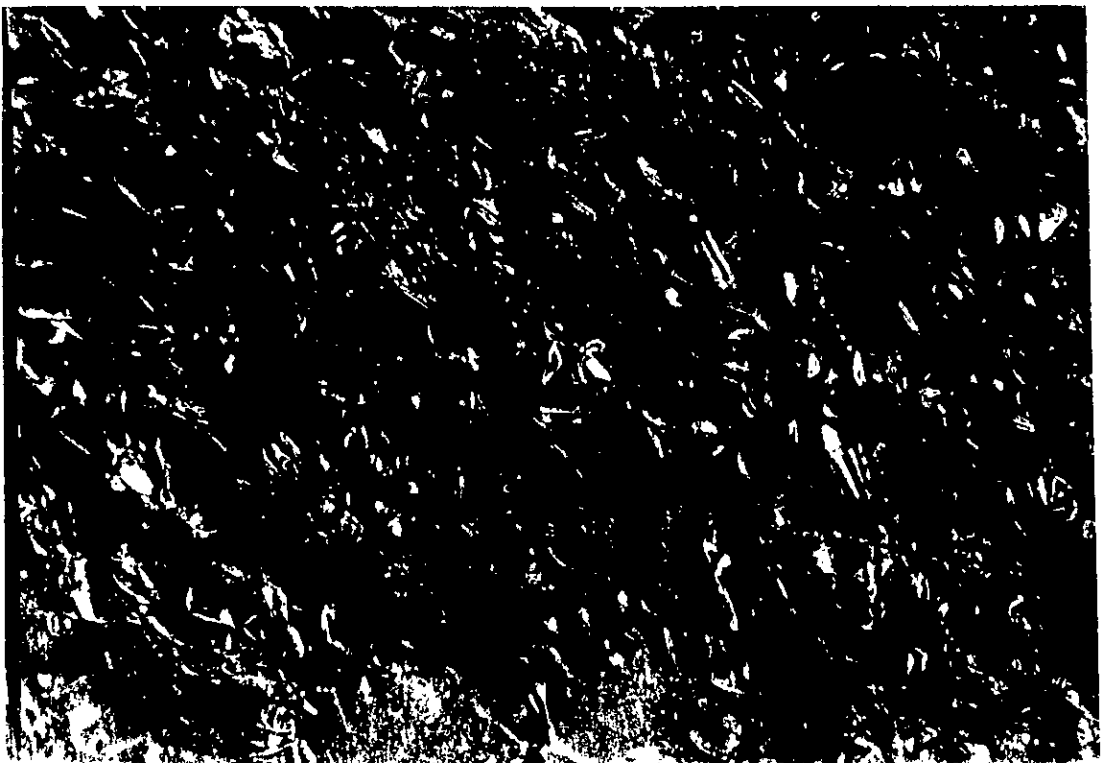


Fig. IV-4 Micrographie de la mousse-PE: (Aggrandissement 40 fois et 10 fois)

λ	σ (10^{-1} Mpa)	λ_2	J
1	0	1	1
1.025	.696	.994	1.012737
1.06	1.392	.986	1.030528
1.094	1.8	.978	1.046393
1.122	2.052	.975	1.066601
1.147	2.28	.968	1.074767
1.175	2.472	.963	1.089658
1.2	2.592	.954	1.092139
1.236	2.64	.952	1.120192

Tableau 1 Résultats de l'essai de traction.

λ	λ_2	ϵ	σ (10^{-1} Mpa)
.958	1.008	.042	-0.48
.866	1.019	.137	-0.72
.814	1.024	.186	-0.752
.763	1.024	.237	-0.8
.72	1.036	.28	-0.848
.594	1.053	.406	-1.08
.534	1.073	.466	-1.213
.467	1.089	.533	-1.456

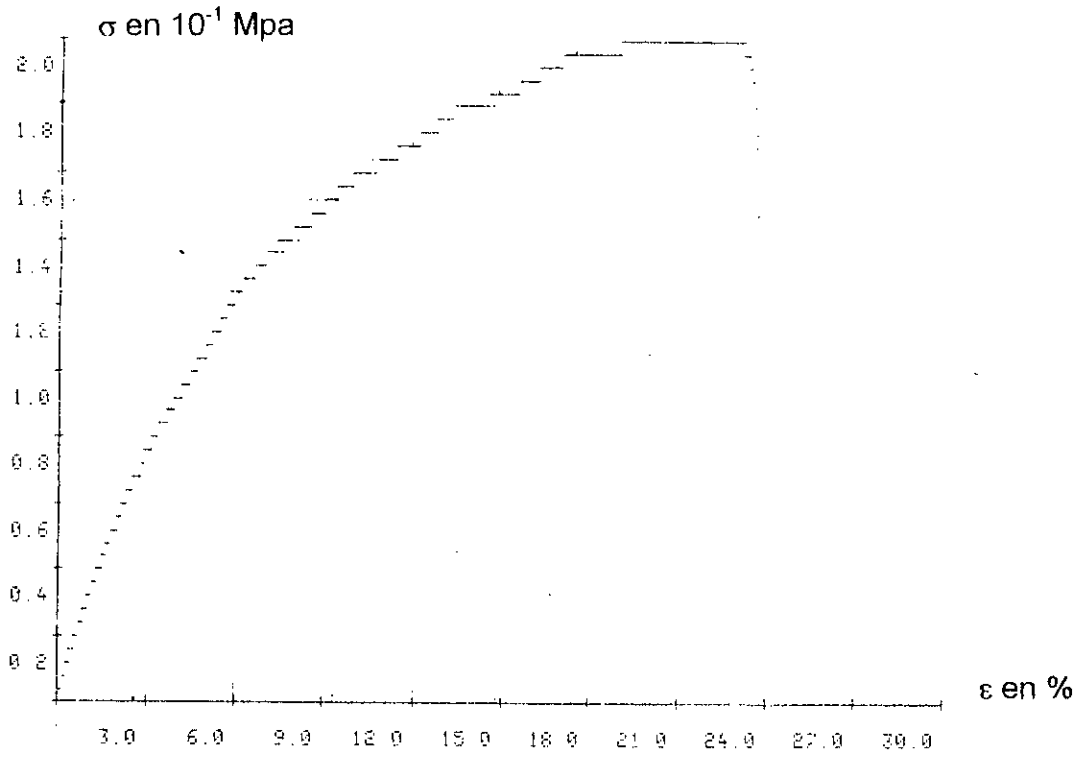


Fig. IV-5 Courbe contrainte-déformation en traction

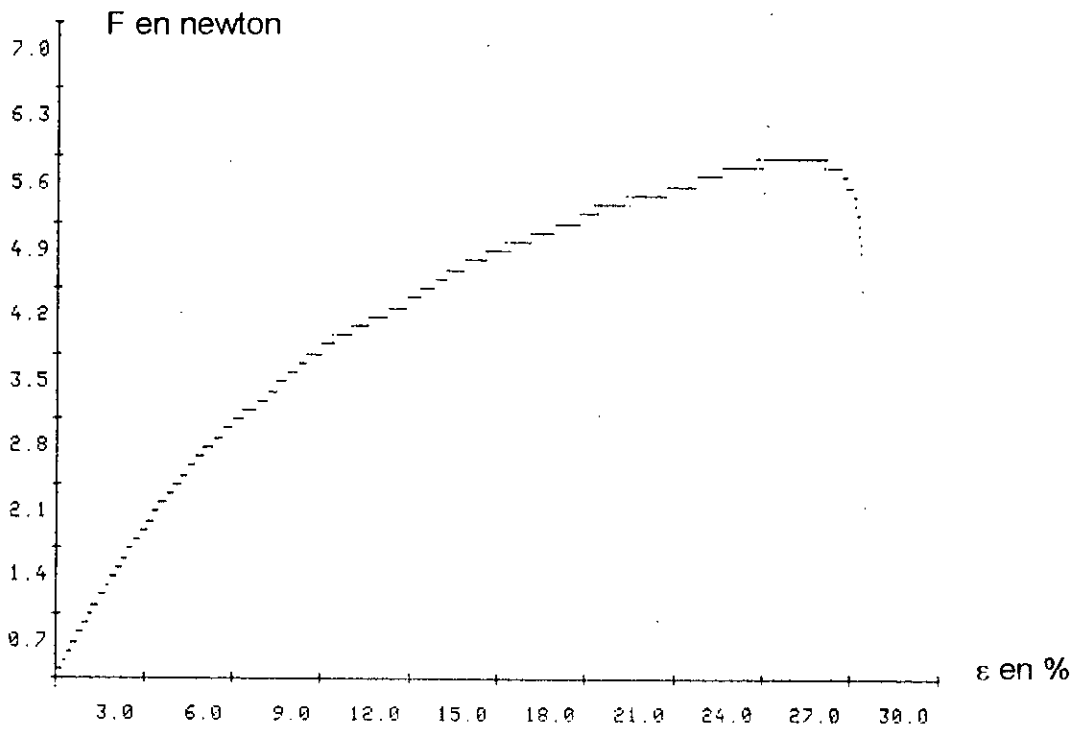


Fig. IV-6 Courbe force-déplacement en traction

$$W = \frac{1}{2} \mu f \left[J_1 - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} J_3^{-2\nu/(1-2\nu)} \right] + \frac{1}{2} \mu (1-f) \left[J_2 - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} J_3^{2\nu/(1-2\nu)} \right] \quad (IV-3)$$

Où μ , ν et f sont des paramètres du matériau à déterminer à l'aide d'essais expérimentaux ; et où

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ J_2 &= I_2/I_3 = 1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2 + 1/\lambda_3^2 \\ J_3 &= I_3^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (IV-4)$$

sont des invariants de la déformation exprimés en fonction des dilatations principales [39]. Une fonction plus compliquée avec un nombre de paramètres plus important aurait exigé un nombre de types d'essais plus importants et plus compliqués.

Selon la théorie d'hyperélasticité, les composantes principales du tenseur nominal sont données par:

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad (IV-5)$$

Différentiant l'équation (IV-3)

$$\sigma_i \lambda_i = \mu \left[f \left(\lambda_i^2 - J_3^{-2\nu/(1-2\nu)} \right) - \left(1 - f \left(\frac{1}{\lambda_i^2} - J_3^{2\nu/(1-2\nu)} \right) \right) \right] \quad (IV-6)$$

En traction uniaxiale

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = (J_3 \lambda_1^{-1})^{1/2} \quad (IV-7)$$

Exprimant l'équation (IV-6) pour les couples (σ_1, λ_1) et (σ_2, λ_2) et en soustrayant, on obtient

$$\frac{\sigma \lambda}{\lambda^2 - \lambda_2^2} = \mu \left[f + \frac{1-f}{\lambda^2 \lambda_2^2} \right] \quad (IV-8)$$

Pour valider notre choix de fonction énergie de déformation de l'éq.(IV-4), il faudrait que le tracé de $\sigma \lambda / \lambda_2 - \lambda_2^2$ en fonction de $1/\lambda^2 \lambda_2^2$ nous donne une droite d'équation :

$$AX+B, \text{ avec } A = \mu f \text{ et } B = \mu (1-f).$$

Les données du tableau 1 sont ajustées par une droite, à l'aide de la méthode des

moindres carrés, avec un coefficient de corrélation de 0.97.

Les valeurs des paramètres μ et f sont reportées sur la figure (IV-7).

Le coefficient μ joue le rôle, en quelque sorte, du module de rigidité au cisaillement dans la cas linéaire.

La courbe de variation de λ_2 en fonction de λ_1 (fig. IV-8), permet de supposer que J_3 est de la forme

$$J_3 = \lambda^3 \quad (\text{IV-10})$$

Sachant que

$$\lambda_i = 1 + \varepsilon_i \quad (\text{IV-11})$$

Et en remplaçant dans

$$J_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (\text{IV-12})$$

On obtient, en ne gardant que les termes linéaires,

$$J_3 = 1 + 2\Phi \quad (\text{IV-13})$$

Où

$$\Phi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{Tr}(\varepsilon) \quad (\text{IV-14})$$

En développant l'équation (IV-10), tout en prenant en compte les équations (IV-11) et (IV-13), on aura

$$\Phi = a \varepsilon \quad (\text{IV-15})$$

et, par la suite,

$$a = 1 - 2\nu \quad (\text{IV-16})$$

L'équation (IV-10) définit le coefficient de Poisson par une mesure de la déformation de Hencky comme suit:

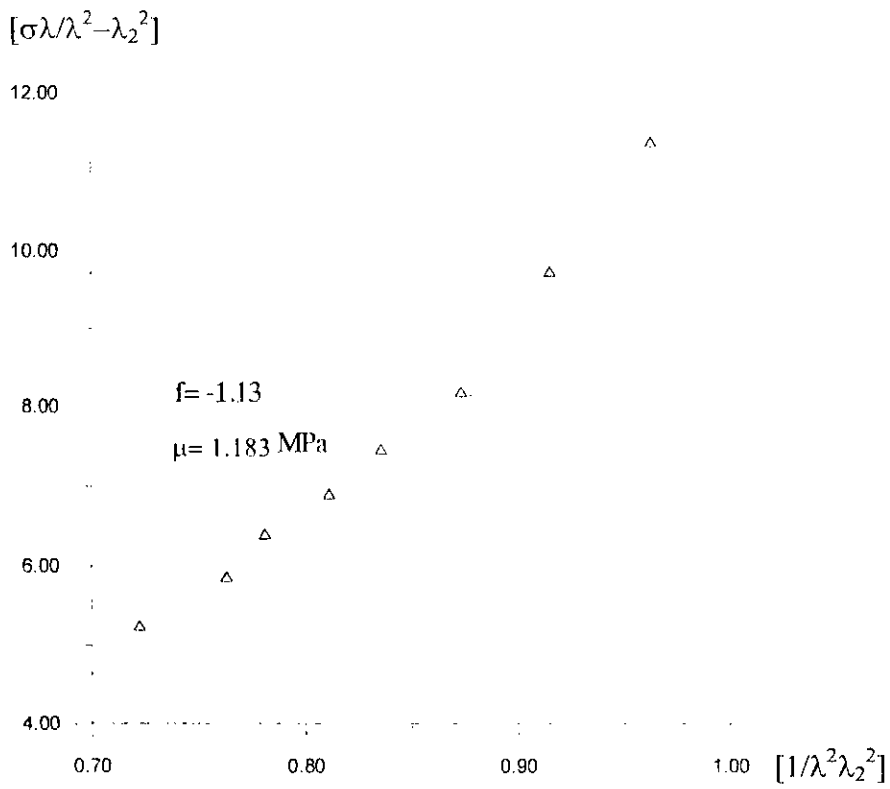


Fig.IV-7 Evaluation des paramètres du matériau (mousses-PE)

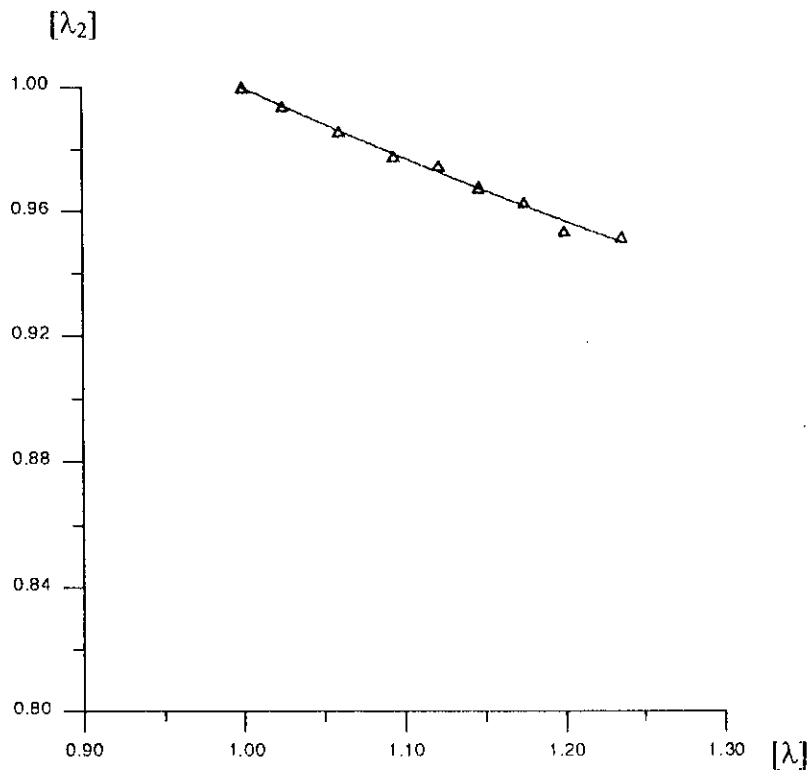


Fig.IV-8 Variation de la déformation latérale en fonction de l'extension longitudinale

$$J_1 = \lambda \lambda_2^2 = \lambda^{1+2\nu} \quad (IV-17)$$

$$\lambda_2 = \lambda^{-\nu} \quad (IV-18)$$

$$\nu = -\ln \lambda_2 / \ln \lambda \quad (IV-19)$$

La figure (IV-9) qui représente la courbe $\ln J - \ln \lambda$, après un ajustage à l'aide des moindres carrés, est, effectivement, une droite passant par l'origine avec une pente égale à 0.52. Ceci donne une valeur approchée de $\nu = 0.24$, ce qui traduit une forte compressibilité.

Toujours, dans un souci de validation de notre choix de l'énergie de déformation, on détermine la valeur du module d'Young E_0 pour les petites déformations, donc en élasticité linéaire, donnée par :

$$E_0 = 2\mu (1+\nu) \quad (IV-20)$$

Elle de l'ordre de 2.9 MPa. Comparée à celle donnée par l'expérience qui est de l'ordre de 2.4 MPa, on s'aperçoit qu'il y a une erreur d'environ 20%. Cette erreur est due à plusieurs facteurs qui traduisent, en fait, les difficultés rencontrées. Les plus importants sont :

- l'existence de défauts internes dans l'éprouvette, étant donné que c'est un matériau cellulaire, affecte les résultats de calculs de la contrainte.
- L'absence de moyens pour stabiliser l'hystérésis compte tenu du nombre très élevé de cycles nécessaires à cette fin (voir IV-3-1-2) et la non-prise en compte de ce phénomène qui est signe de viscoélasticité.
- L'utilisation d'une caméra vidéo et le traitement d'images à l'aide d'un micro-ordinateur aurait été plus avantageux qu'un appareil photo.

Cet écart est, également, mis en évidence sur la fig.(IV-10) qui représente les deux courbes expérimentale et théorique. Le module d'Young instantané est représenté sur la fig. (IV-11). Il est, bien entendu, fonction de la déformation en raison de la non-linéarité.

Le modèle de l'équation (IV-18) reliant λ_2 à λ n'est pas le seul, car dans des modèles proposés par Hill [41] pour les matériaux compressibles, cette relation en traction uniaxiale est donnée par :

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-n/2n+1} \quad (IV-21)$$

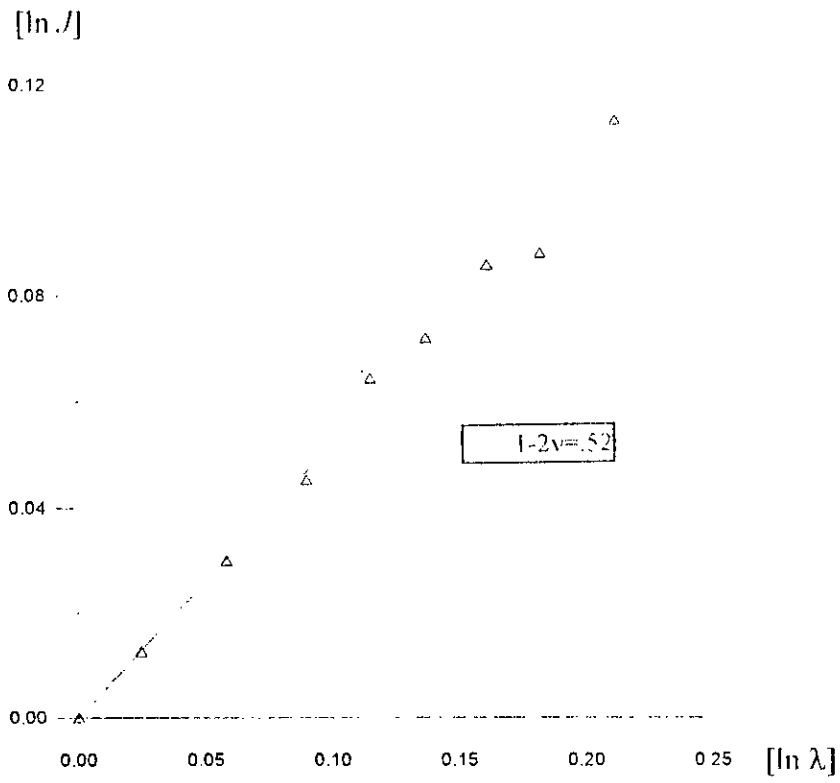


Fig.IV-9 Evaluation du coefficient de Poisson

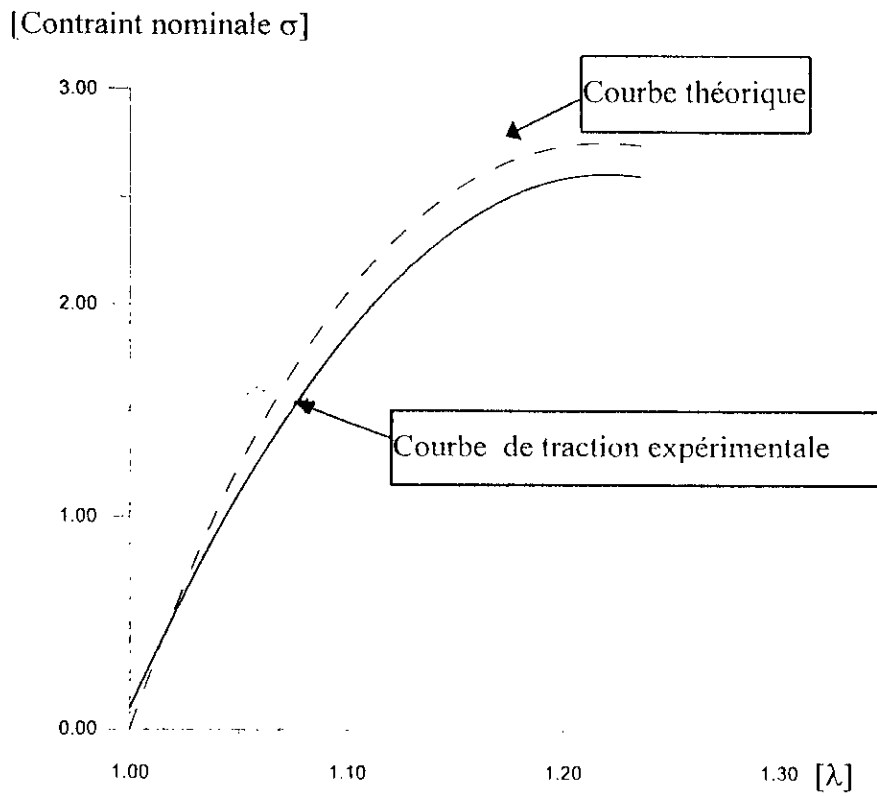


Fig. IV-10 Comparaison entre la courbe expérimentale et le modèle de Blatz-Ko

[Le module d'Young E en 10^{-1} MPa]

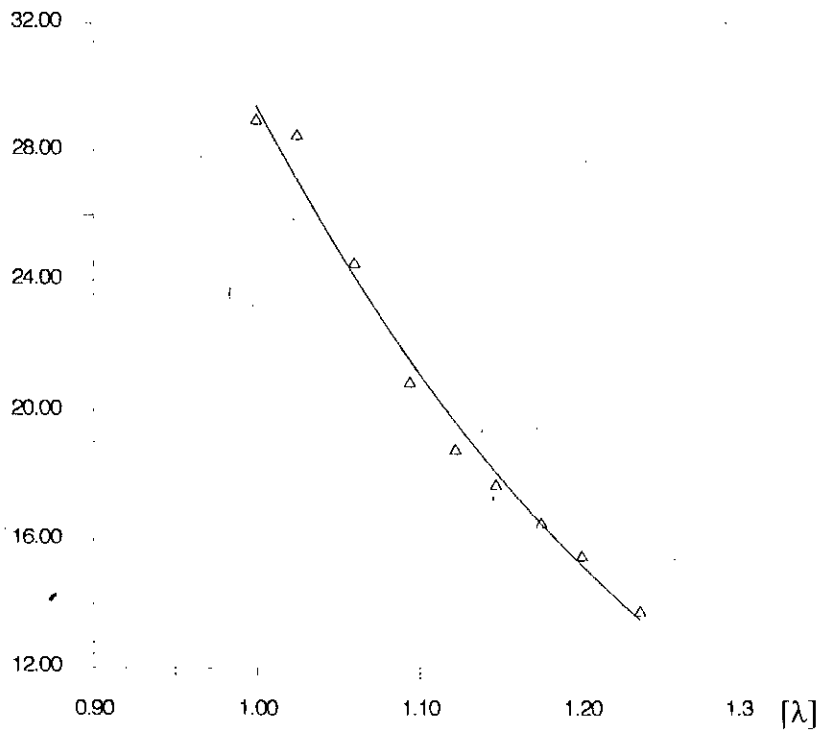


Fig. IV-11 Variation du module d'Young en traction

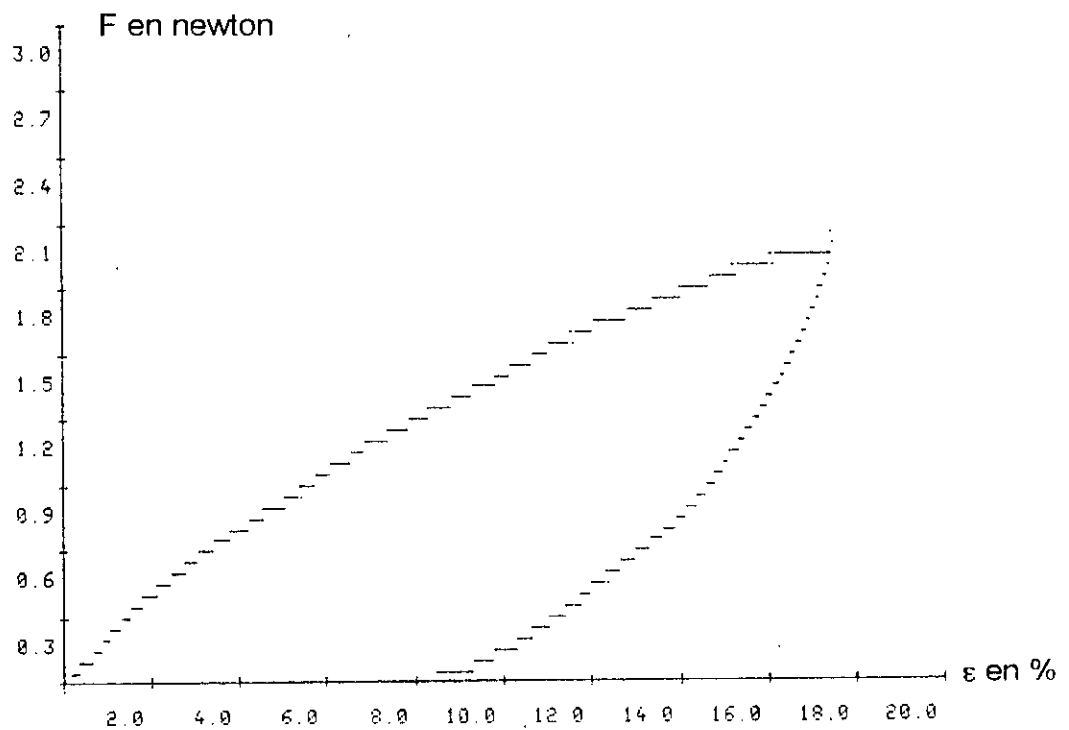


Fig. IV-12 Courbe de traction avec hystérésis

Où n est considéré comme un paramètre du matériau. Cette relation, linéaire, a été utilisée par Storakers [42] pour ajuster ses données expérimentales pour différents types de caoutchoucs et déterminer la valeur de n pour ces matériaux. On peut avoir des relations non linéaires entre λ_2 et λ [43]. De ce fait le coefficient de Poisson ne peut être considéré ν comme étant constant.

Un autre modèle hyperélastique pour des matériaux compressibles a été utilisé pour modéliser le comportement des mousses de polyéthylène mais les résultats n'étaient pas concluants. Ce modèle est de la forme :

$$J_3 \sigma_i = \mu (\lambda_i^2 - 1) + \mu' J_3 (J_3 - 1)$$

IV-3-1-2 Phénomène d'hystérésis

L'hystérésis observée sur la figure (IV-12) est due, en toute vraisemblance, à une perte d'énergie due au frottement interne. Dans certaines conditions, déformations à faible vitesse, cette hystérésis ne dépend pas de cette vitesse. On peut, donc, négliger l'effet de viscosité. La vitesse de déformation adoptée dans nos expériences est de 20 mm/mn.

Pour stabiliser l'hystérésis, sans toutefois disparaître, un très grand nombre de cycles de chargement-déchargement est nécessaire. Cescotto [44], en effectuant des essais de compression sur un bloc de caoutchouc industriel, a atteint 900 cycles comme le montre la figure IV-13.

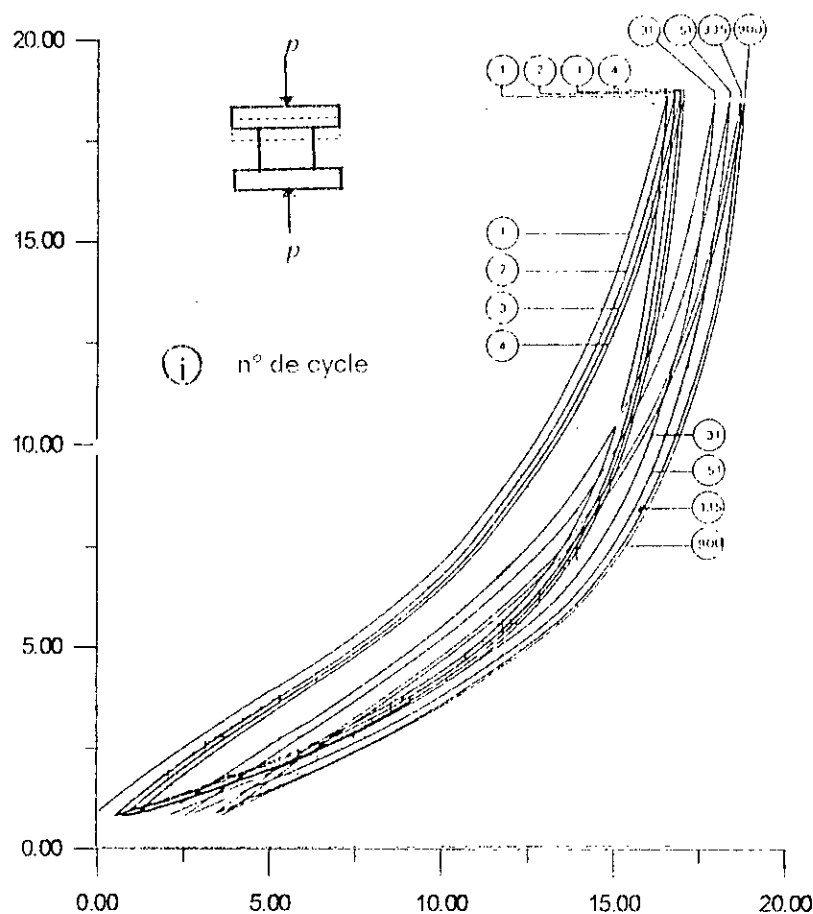


Fig.IV-13 Stabilisation de l'hystérésis par chargement cyclique [44]

IV-3-2 Essai de compression

Dans cet essai, (fig.IV-14), les mousses de polyéthylène se comportent de manière identique à celle décrite dans la littérature. Dans un premier temps, la mousse a une réponse linéaire pour les déformations inférieures à 5%. Il s'ensuit un plateau dû au flambement des arêtes de la cellule, suivi, en dernier lieu, d'une 3^{ème} branche due à la densification. La figure IV-15 de chargement-déchargement présente, également, une hystérésis et l'on remarque, qu'après suppression totale du chargement, il persiste, encore, une déformation 'permanente'. Ceci laisse à supposer, de prime abord, un comportement plastique, ce qui n'est pas le cas. Car cette déformation 'permanente' s'efface au bout d'un certain temps, et le bloc de compression recouvrera son état initial.

Le modèle d'élasticité retardée, non instantanée, nous paraît plus adéquat. Ce modèle a été utilisé par Terzaghi [21] dans sa théorie de consolidation des sols en se basant sur les courbes oedométriques. Ce phénomène de retard a été relevé par plusieurs auteurs.

Ainsi Loveridge [45] et Mills[46], en étudiant le comportement et le processus de récupération entre chocs pour des mousses en polyéthylène à haute densité, dans le

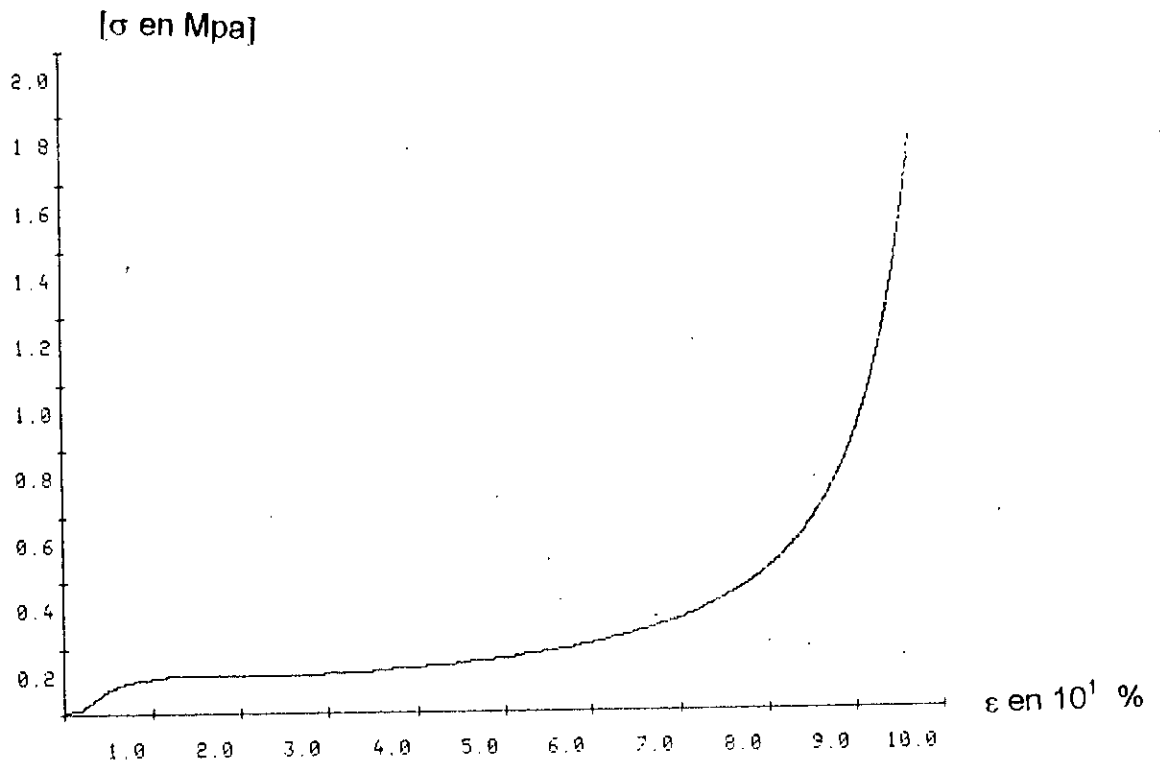


Fig. IV-14 Courbe de compression de la mousse-PE

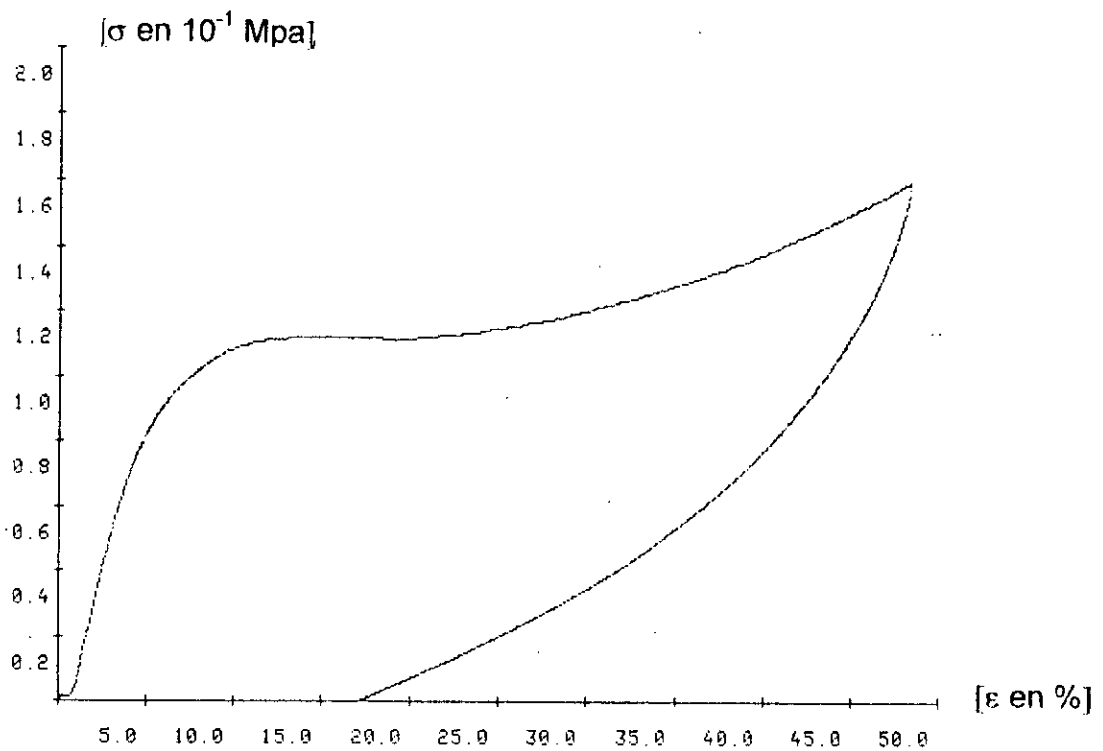


Fig. IV-15 Forme de l'hystérésis en compression

domaine des déformations élevées de 80-90%, ont pu constater que la majorité sont réversibles dans une période de 24h. G'sell [47], rapportant les travaux de Li[48] sur la recouvrance, dans le polystyrène à 100°, d'une bande de cisaillement formée en compression ambiante pendant plus d'une centaine d'heures, interprète ce résultat, qui indique que la déformation s'est accompagnée d'un changement structural, en termes d'orientation des chaînes macromoléculaires entre leurs points d'enchevêtrement. Le matériau revient à son état initial, après déchargement, par le jeu des forces entropiques subies les chaînes.

On est en présence, alors, de l'élasticité caoutchoutique décrite convenablement par Treloar[38,49], basée sur la notion d'entropie et non de l'énergie interne comme en élasticité instantanée ou cristalline (voir, également [50]). La figure V-16 illustre, bien, la différence entre les deux types d'élasticité. D'ailleurs, dans nos essais, on a bien relevé une certaine dissipation énergétique qui est, théoriquement, nulle dans la cas des déformations élastiques instantanées.

La courbe donnant la variation du coefficient de Poisson en compression, (fig.IV-17), se prête mieux au 3^{ème} modèle proposé par Wronsky[20] sauf pour les grandes déformations de l'ordre de 50%.

Ceci s'explique par le fait que, à ce niveau de la déformation, le matériau commence à se densifier et, donc, se rapprocher du matériau solide qui se comporte, lui-même, à la limite, comme un matériau incompressible, c'est à dire que $\nu \rightarrow 0.5$.

Le module d'Young, comme dans le cas de la traction, est fonction de la déformation comme l'atteste la fig. IV-18.

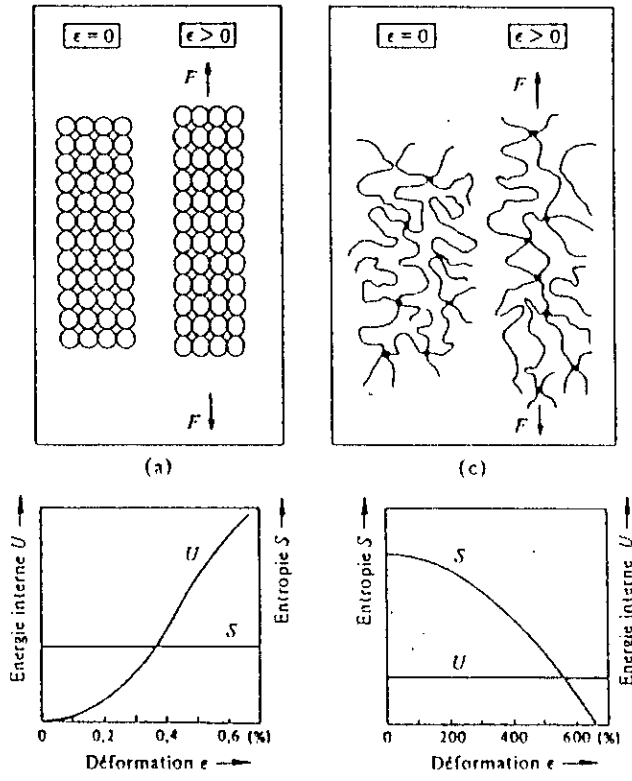


Fig. IV-16 Elasticité cristalline (a) et caoutchoutique (b) [51]

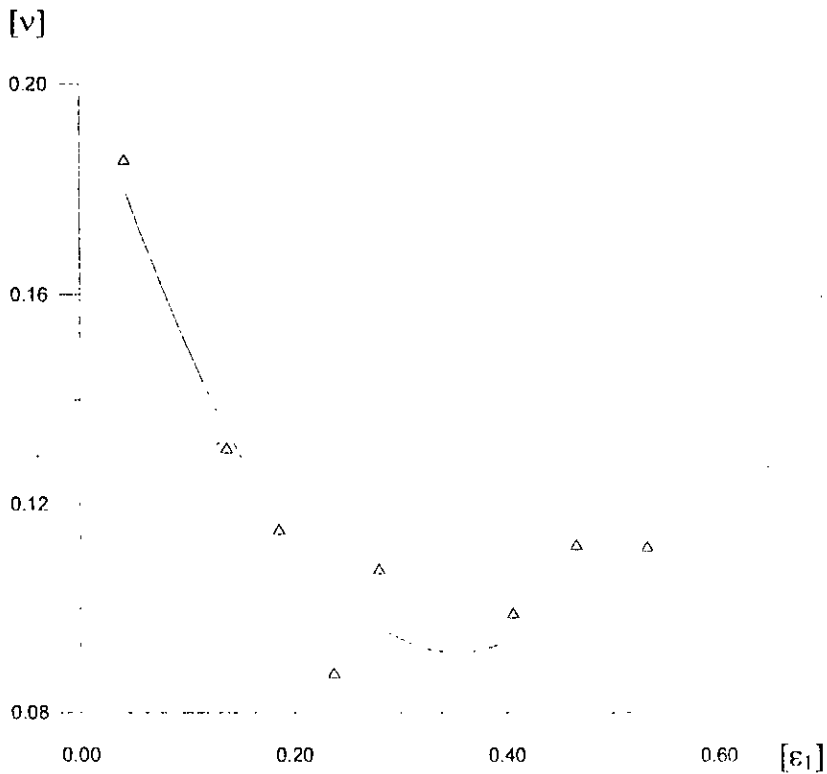


Fig. IV-17 Variation du coefficient de Poisson en compression

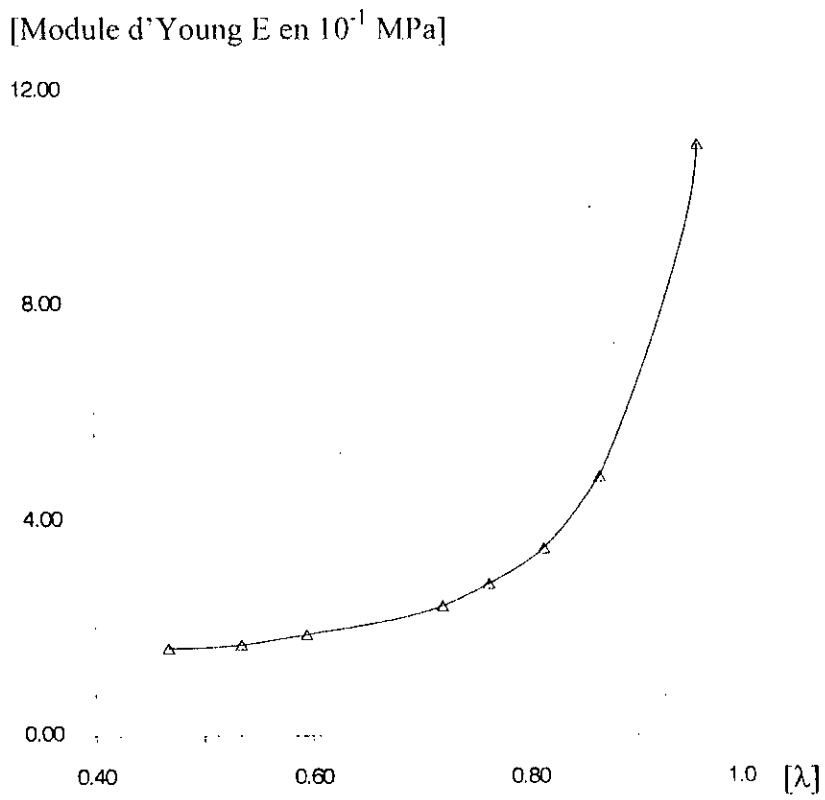


Fig. IV-18 Variation du module d'Young en compression

CONCLUSIONS ET SUGGESTIONS

Conclusions et suggestions

Les essais menés au laboratoire de génie des polymères (université de Sétif) sur des mousses de polyéthylène en traction et en compression uniaxiales ont montré que ce type de matériaux présentent une non-linéarité prononcée et peuvent subir de grandes déformations tout en restant pratiquement élastiques. Ces mousses sont, généralement, très compressibles compte tenu que leur coefficient de Poisson avoisine 0.24

Une loi de type hyperélastique isotrope proposée par Blatz et Ko [39] approche, dans une large mesure, le comportement de ces mousses en traction uniaxiale (fig.IV-10).

On ne peut, donc, pas parler d'une loi de comportement de validité globale pour tous les types de chargement.

Le comportement multiforme est, ainsi, mis en évidence et ce en deux aspects observés lors des essais :

- La courbe de réponse contrainte-déformation en traction uniaxiale diffère de celle en compression, i.e., que le comportement des mousses de polyéthylène dépend de l'histoire de chargement.
- La compressibilité : Alors que le coefficient de Poisson est, pratiquement, constant en traction uniaxiale (0.24) tout au long de la déformation, il est, par contre, très dépendant de celle-ci et pouvant varier dans un intervalle de 0.09 jusqu'à 0.19.

La courbe montrant cette variation, (fig.IV-17), peut être assimilée au 3^{ème} modèle proposé par Wronsky[20] pour modéliser l'effet Poisson des mousses.

Il faut noter, également, que le module d'Young est une fonction non-linéaire de la déformation comme le montrent la figure IV-11, pour la traction, et la figure IV-18, pour la compression.

Toutefois, bien que cette corrélation entre les données expérimentales et le modèle théorique soit acceptable, dans une large mesure, les phénomènes d'hystérésis et de retard mis en évidence lors des essais (fig.IV-12 et fig.IV-15) montrent les limites de validité de ce modèle. En effet, ces deux phénomènes sont signe de viscoélasticité.

Ceci laisse à penser que leur prise en compte aboutirait à une meilleure compréhension du comportement du matériau. On pourra, par la suite, chercher si cette viscoélasticité est linéaire ou non-linéaire.

Le polyéthylène, pour des déformations suffisamment grandes, peut être considéré viscoélastique non-linéaire [52].

Les essais effectués concernaient, uniquement, le domaine statique (ou quasi-statique). Or, on sait, parfaitement, qu'un vaste domaine d'application des mousses, l'emballage de produits et d'appareillages délicats, nécessiteraient une étude dynamique pour déterminer les modules complexes des mousses. Ainsi, les travaux menés par Weber[53] sont, de ce fait, très importants. Il propose une certaine histoire de déformation consistant en une vibration linéaire, avec une seule fréquence, superposée à une grande déformation statique. Une loi de comportement de type viscoélastique non-linéaire est dérivée à partir de la représentation intégrale. Des essais de traction et de cisaillement sont réalisés afin de déterminer les modules complexex en fonction de la fréquence et l'angle de phase.

Bibliographie

- [1]Collington K.T., Developments in structural foams in western Europe, J. Cellular Plastics, July/August (1975)
- [2]Wendle B. C., History of structural foams, J. Cellular Plastics, May/June (1977)
- [3]Burillo G. and Adem E., Polyethylene foams, The polymeric Mat.Encyclopaedia, CRC Press Inc. (1996)
- [4]SFIP, Journées sur les thermoplastiques cellulaires, 27/11/1984
- [5]Techniques de l'ingénieur, A1015
- [6]Deanin R.D., Foamed Plastics, The polymeric Mat.Encyclopaedia.CRC Press Inc. (1996)
- [7]Hilyard N.C., *Mechanics of cellular plastics*, McMillan N.Y. (1982)
- [8]Gibson L. and Ashby M., *Cellular solids: structure and properties*, Pergamon Oxford (1988)
- [9]Nutter J. I., Benning C. J., Filled PE foams, J. Cellular Plastics, Sept. (1966)
- [10]Djessas F. et Nechadi H., Etude des propriétés mécaniques du PE expansé, mémoire d'ingénieur, Université de Sétif (1997)
- [11]Kasner A.I. , Meinecke E.A., Effect of porosity on mechanical properties of rubber, Rubber Chemistry and Technology, Vol.68 (1995)
- [12]Mehta B. S., Colombo E. A., Mechanical properties of foamed plastics, J. Cellualr Plastics, Jan./Feb. (1976)
- [13]Ashby M. F., D. R. H. Jones, *Matériaux*, Dunod (1992)
- [14]Zhu H. X. and al., Analysis of the high strain compression of open-cell foams, J.Mech. Phys. Solids, Vol.45, n°11/12 (1995)
- [15]Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., Theory of elastic stability, McGraw-Hill, NY(1961)
- [16]Lee T., Lakes R.S., Anisotropic PU foams with Poisson's Ratio greater than 1, J.Mat. Sci., 32 (9), May (1997)

- [17] **Choi J. B., Lakes R. S.**, Non-linear analysis of the Poisson's ratio of negative Poisson's ratio foams, *J. Composite materials*, 29 (1), (1995)
- [18] **Theocaris P. S.**, Negative Poisson's ratio in composite with star-inclusions: A numerical homogenization approach, *Archive for app.Mech.*, 67(4), April (1997)
- [19] **Zhang J.**, Constitutive modeling and material characterization of polymeric foams, *J. Engng. Mat. Tech.*, Vol.119, July (1997)
- [20] **Wronsky M.**, Couplage du contact et du frottement avec la mécanique non-linéaire des solides en grandes déformations, Thèse de doctorat, Univ. de Lille (1994)
- [21] **Costet et Sanglerat**, *Cours de mécanique des sols*. T.1, 3^{ième} éd. (1988)
- [22] **Duvaut G.**, *Mécanique des milieux continus*. Masson (1990)
- [23] **Germain P. et Muller P.**, *Introduction à la Mécanique des milieux continus*, Masson (1980)
- [24] **Germain P.**, *Mécanique*, Ellipses (1986)
- [25] **Lai W. M., Rubin D., Kempel E.**, *Introduction to continuum mechanics*, 3^d ed., Pergamon Press (1993)
- [26] **Salençon J.**, MMC, Editions de l'Ecole Polytechnique (1986)
- [27] **Ogden R. W.**, *Non-linear elastic deformation*, Ellis Horwood Lim., England (1984)
- [28] **Chen W.F. and Han D.J.**, *plasticity for structural engineers*, Springer Verlag N.Y. Inc. (1988)
- [29] **Rivlin R. S.**, Large elastic deformation, *Rheology*, Vol.I, Chap.10. Academic Press (1956)
- [30] **Hunter S.C.**, Some exact solution in the theory of finite Elasticity for incompressible neo-Hookean materials, *Int.J.Non-linear Mech.* Vol.7 (1972)
- [31] **Swanson S. R., Christensen L. W., Ensign M.**, Finite element calculations for slightly compressible hyperelastic materials, *Computers & Structures*, Vol.21, n°1/2 (1985)

- [32]**Jones A., A.G. Green, M. Simpson**, Strain energy function of rubber,
Part I- Characterization of gum vulcanizates, J. App.Polymer Sci. (JAPS),
Vol.19 (1975)
- [33]**Jones A., A.G. Green, ,** Strain energy function of rubber,
Part II- Characterization of the filled vulcanizates, JAPS, Vol.19 (1975)
- [34]**Jones A., L.R.G. Treloar**, The properties of rubber in pure homogenous strain,
J.A.P., Vol.8 (1975)
- [35]**Levinson M.**, Finite torsion of slightly compressible rubberlike circular
cylinders, Int. J. Non-linear Mech., Vol.7 (1972)
- [36]**Rivlin R. S. and Saunders D. W.**, Large elastic deformations of isotropic
materials, VII- Experiments on the deformations of rubber, Phil. Trans.
Roy. Soc., London, A243 (1951)
- [37]**Béda T.**, Modules complexes des matériaux viscoélastiques par essais
dynamiques sur tiges: petites et grandes déformations, Thèse de doctorat,
CNAM (1990)
- [38]**Treloar L. R. G.**, The elasticity and related properties of rubbers,
Rep. Prog. Phys., **36** (1973)
- [39]**Blatz P.J and W.L. Ko**, Trans. Soc. Rheol. **6**, 223 (1962)
- [40]**Blatz P.J.**, Application of large deformation theory to the micromechanical
behaviour of rubberlike polymers-porous, unfilled and filled, in Rheology
Vol.V, Academic Press, (1969)
- [41]**Hill R.**, Aspect of invariance in solid mechanics, Advancement in applied
Mechanics, Vo.18, Academic Press, N.Y. (1978)
- [42]**Storackers B.**, On the material representation and constitutive branchiry in finite
compressibility elasticity, J. Mech. Phys. Solids, Vol.34 (1986)
- [43]**El Ratal W.U. & Malick P.K.**, Elastic response of flexible PU foams in uniaxial
tensions, J. Engng. Mat. Tech., Vol.118, April (1996)

- [44] **Cescotto S.**, Grandes déformations des matériaux hyperélastiques en état plan de contraintes par la méthode des éléments finis. Collection des publications de la faculté des sciences appliquées (n°64), Univ. de Liège (1978)
- [45] **Loveridge P., Mills N.J.**, The mechanism of recovery of impacted HDPE foam, Cellular Polymers, Vol.10, n°5, (1991)
- [46] **Mills N. J., Hwang M. H.**, The multiple impact performance of HDPE foams, Cellular Polymers, Vol.8, n°4, (1989)
- [47] **G'sell Ch.**, Lois de comportement mécaniques des polymères solides
- [48] **Li J. M.**, Physical chemistry of some microstructural phenomena, Met. Trans., 9A (1978)
- [49] **Treloar L. R. G.**, *The physics of rubber elasticity*, Oxford Univ. Press, London and N.Y., (1958)
- [50] **Courraze G. et Grossard J.L.**, *Initiation à la rhéologie*, 2^{ème} 2éd. Lavoisier Tec & Doc (1991)
- [51] **Kurtz, W., Mercier, J.P. et Zambelli, G.**, *Introduction à la science des matériaux*, T.1, Presses Polytechniques et universitaires Romandes, 1995
- [52] **Lifshitz T. M., Kolsky H.**, Non-linear viscoelastic behaviour of polyethylene, Int. J. Solids and Structures, Vol.3 (1967)
- [53] **Weber H.**, Characterization of non-linear viscoelastic materials for a special class of loading histories, Creep in structures, IUTAM Symposium Cracow/Poland (1990), M. Zyczkowsky(ed.)
- [54] **Brockman R.A.**, On the use of the Blatz-Ko constitutive model in non-linear finite element analysis, Computers & Structures, Vol.4 n°4 (1986)
- [55] **Cescotto S., Fonder G.**, A finite element approach for large strains of nearly incompressible rubberlike materials, Int. J. Solids Structures, Vol.15 (1979)