

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Civil
Laboratoire de Génie Sismique & de Dynamique des
Structures



Thèse de Doctorat en Sciences en Génie-civil

Option: Structures

Présentée par :

FEDGHOUCHE Ferhat

Ingénieur d'Etat en Travaux Publics de l'ENTP
Magister en Génie-Civil de l'ENTP

Modèle de calcul de moindre coût des poutres en T en béton armé par optimisation non-linéaire

Soutenue publiquement le **10 Mars 2013** devant le jury composé de :

Président:	M.K. Berrah	Professeur	ENP/ONS
Directeur de thèse:	B. Tiliouine	Professeur	ENP
Examineurs:	M. Hammoutène	Professeur	ENP
	A. Bouchair	Professeur	U. Blaise Pascal, France
	A. Nechnech	Maître de Conférences- A	USTHB
	T. Branci	Maître de Conférences- A	U. Chlef
Invité:	J.A. Lavin	Directeur Technique	FCC, Espagne
		Professeur associé	U. Barcelone

ENP 2013

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse sont l'aboutissement d'un travail de recherche effectué au sein du Laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des Structures de l'Ecole Nationale Polytechnique sous la direction du Professeur B. TILIOUINE.

Les nombreuses entrevues et fructueuses discussions qu'il a bien voulu m'accorder m'ont permis de bénéficier de sa précieuse aide et de ses conseils éclairés, d'apprécier l'étendue de ses connaissances et de comprendre que la discipline et la persévérance dans le travail sont les critères fondamentaux de la réussite. Aujourd'hui, par le biais de ce travail, je tiens à lui présenter mes remerciements les plus sincères et à lui témoigner mon profond respect.

Je tiens à remercier vivement le Professeur M.K. BERRAH (Directeur Général à l'Office Nationale des Statistiques) de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de thèse.

D'autre part, je tiens à adresser un remerciement particulier et un témoignage de reconnaissance au Professeur M. HAMMOUTENE pour son soutien effectif et ses orientations éclairées. Je le remercie chaleureusement pour l'intérêt permanent qu'il a porté à ce travail et pour avoir bien voulu accepter d'examiner cette thèse.

Mes remerciements s'adressent également au Professeur A. BOUCHAIR de l'Université Blaise Pascal (France) pour son soutien moral et pour l'intérêt bienveillant qu'il a témoigné à ce travail de recherche.

Je voudrais exprimer ici ma profonde reconnaissance à Messieurs A. NECHNECH, Maître de conférences-A à l'USTHB et T. BRANCI, Maître de conférences-A l'université de Chlef pour leurs encouragements, leurs précieuses observations ainsi que pour avoir accepté d'examiner le présent travail et participer au jury de soutenance.

Je voudrais aussi adresser mes vifs remerciements à Monsieur J.A. Lavin, Directeur Technique de l'entreprise FCC Construction, et Professeur associé à l'université de Barcelone qui, malgré un agenda de travail très chargé, a bien voulu accepter de participer au jury de soutenance.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Enfin, ce travail n'aurait certainement pas vu le jour sans la confiance et le soutien moral permanent que m'ont témoignés mes parents tout au long de ma vie d'étudiant. Je suis aujourd'hui très heureux de leur dédier cette thèse.

Cherchons donc ce qu'il y a mieux à faire

non ce qui est le plus en usage.

Sénèque.

ملخص:

يحتوي هذا البحث على عرض طريقة تطبيقية عامة معتمدة أساسا على طرق التقليل إلى الحد الأدنى و هذا من أجل الحصول على تصميم منخفض التكاليف لعوارض ذات مقاطع T مشكلة من الخرسانة المسلحة العادية و ذات المقاومة العالية وفق الحالات الحدية النهائية المعروفة في قانون الخرسانة المسلحة للدول الأوروبية Eurocode2. ويمكن الحد الأدنى للدالة الهدف في تخفيض تكاليف كل من الخرسانة والحديد وكذلك القالب مع الخضوع لمجموعة من القيود تتمثل في القيود المحددة في التصميم وكذلك القيود وفق القوانين المعمول بها بما في ذلك Eurocode2 المتمثلة في السلوك اللاخطي و النهائي لكل من الحديد و الخرسانة فضلا عن القيود المرتبطة بالقواعد الحالية للممارسات التطبيقية. ويمكن صياغة هذا المقترح وفق قوانين أخرى للخرسانة المسلحة من دون إجراء تعديلات رئيسية تذكر. و لقد تم اعتبار الوزن الذاتي الذي يساهم بصورة فعالة في طاقة الإنحاء للعوارض الطويلة كمتغير سواء في الدالة الهدف أو في دوال القيود. و تم تطوير عملية تحسين التكلفة عن طريق استخدام تقنية خفض معمم للدرج في غضون فضاء ضيق من عدد متغيرات التصميم. و تعرض أمثلة نموذجية من أجل توضيح خطوة خطوة منهجية التصميم الأمثل و تقديم التطبيقات التي يمكن استخدامها في الأبحاث العلمية المستقبلية. و تم إجراء مقارنات مع أساليب الدراسات الكلاسيكية المتبعة من طرف مكاتب الدراسات و تُظهر النتائج المتحصّل عليها أنه يمكن تطبيق المنهجية المقترحة و الخاصة بالعوارض T بنجاح. إنّ هذه المنهجية فعالة اقتصاديا مقارنة بالطرق التقليدية الخاصة بمكاتب الدراسات و هي أيضا بسيطة عمليا وأكثر شمولاً من أساليب التحسين الأخرى المتواجدة و المتعارف عليها و التي لا تمثل جميع متغيرات التصميم كما هو الشأن في هذا البحث.

الكلمات الرئيسية للبحث: التحسين اللاخطي ، الحد الأدنى لتكلفة التصميم ، الخرسانة المسلحة ، العوارض ذات مقاطع T ، الحمولة النهائية ،

قانون الخرسانة المسلحة للدول الأوروبية Eurocode2

Résumé:

Le présent travail de recherche résume une méthodologie générale pour obtenir, sur la base d'une méthode de minimisation directe, des dimensionnements optimaux de moindres coûts des poutres en T en béton armé ordinaire et à haute résistance soumises à des charges ultimes. La fonction objectif à minimiser comprend les coûts du béton, de l'acier et du coffrage. L'ensemble des contraintes consiste aussi bien en des contraintes de conception (définies, ici, conformément à l' Eurocode2 incluant celles liées aux comportements non linéaires ultimes du béton et de l'acier) qu'en que des contraintes relatives aux règles pratiques courantes de pré-dimensionnement et de bonne exécution. Toutefois, la formulation proposée peut facilement s'étendre à d'autres codes de calcul sans modifications majeures. Le poids propre de la poutre en T qui peut influencer de manière substantielle sur la résistance flexionnelle ultime pour des poutres de longues portées, est considéré comme variable à la fois dans la fonction objectif ainsi que dans les fonctions contraintes. Le processus d'optimisation des coûts est basé sur la technique du Gradient Réduit Généralisé dans l'espace limité d'un nombre réduit de variables de conception pour. Des exemples types de conception sont présentés en vue d'illustrer la procédure de calcul optimal, étape par étape, et de fournir des applications susceptibles d'être utilisées dans de futures recherches. Les comparaisons avec les méthodes de calcul standard de bureaux d'études sont effectuées. Les résultats obtenus montrent que la méthode proposée peut être appliquée avec succès au dimensionnement des poutres en T en béton armé ordinaire et à haute résistance. La méthodologie proposée est économiquement efficace par rapport aux méthodes conventionnelles et de conception de calcul de bureaux d'études et peut être facilement étendue à d'autres sections couramment utilisées dans la conception des structures. Le modèle de moindre coût suggéré est également pratique, simple et plus complet que les autres modèles de calculs disponibles dans la littérature, qui ne tiennent pas compte de toutes les variables de conception prises en compte dans la présente recherche.

Mots-clés: Optimisation non linéaire; Conception de moindre coût; Béton armé; poutres en T; charges ultimes; Eurocode2 (E-C2).

Abstract:

The present research work outlines a general procedure for obtaining on the basis of direct minimization optimal cost designs of ordinary and high strength concrete T-beams at ultimate design loads. For the sake of clarity, only that of the study relative to ordinary reinforced concrete has been presented in this report. The objective function to be minimized is divided into costs of concrete, steel and formwork. The set of constraints consists in design constraints (defined in accordance with Eurocode2 including the nonlinear ultimate behaviors of concrete and reinforcing steel) as well as current practices rules. However, the proposed formulation can easily cater for other design codes without major alterations. Self weight of T-beam which may contribute substantially to the ultimate bending moment capacity for long spans is considered variable both in the objective and the constraints functions. The cost optimization process is developed by the use of the Generalized Reduced Gradient technique in the space of only a reduced number of design variables. Typical design examples are presented to illustrate the step by step optimal design procedure and to provide applications that can be used in future investigations. Comparisons with standard design office methods are performed and the results reported showing that the proposed method can be successfully applied to the optimal design of reinforced concrete ordinary concrete and high strength concrete T-beams. The proposed methodology is economically effective compared to conventional office design methods and can be easily extended to other sections commonly used in structural design. It is also practically simple and more comprehensive than other optimization methods available in the specialized literature which do not account for all the design variables considered in this work.

Keywords: Non-linear Optimization; Minimum Cost Design; Reinforced Concrete; T-beams; Ultimate Loads; Eurocode2 (EC-2).

SOMMAIRE

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

1.1 INTRODUCTION GENERALE	07
1.2 OBJECTIFS VISES.....	10
1.3 ORGANISATION DE LA THESE.....	11

CHAPITRE II

CONCEPTS ET FORMULATION GENERALE D'UN PROBLEME

D'OPTIMISATION

2.1 INTRODUCTION	14
2.2 ROLE DE L'OPTIMISATION.....	15
2.3 ELEMENTS D'OPTIMISATION	15
2.3.1 Formulation générale du problème.....	18
2.3.2 Variables de décision	18
2.3.3 Contraintes.....	19
2.3.4 Fonction objectif.....	19
2.4 TYPE DE PROBLEMES D'OPTIMISATION.....	19
2.4.1 Problèmes probabilistes.....	20
2.4.2 Problèmes déterministes	20
2.5. METHODE ET FORMULATION GENERALE D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION DETERMINISTE.....	21
2.5.1 Contraintes	21
2.5.2 Espace de conception.....	23
2.5.3 Fonction objectif	24
2.5.4 Formulation dans l'espace des variables de conception	26

CHAPITRE III
ALGORITHME ET METHODES UTILISES POUR LA RESOLUTION
NUMERIQUE

3.1 OPTIMISATION NON-LINEAIRE.....	28
3.2 ALGORITHMES D'OPTIMISATION NON-LINEAIRE.....	29
3.3 METHODE DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE SEQUENTIELLE... ..	29
3.4 METHODE DU GRADIENT REDUIT GENERALISE	31

CHAPITRE IV
MODELE DE CALCUL DE MOINDRE COUT DES POUTRES EN T
EN BETON ARME PAR OPTIMISATION NON-LINEAIRE
CAS DES BETONS ARMES ORDINAIRES

4.1 INTRODUCTION.....	34
4.2 ETATS LIMITES ULTIMES.....	37
4.2.1 Courbes contraintes-déformations non- linéaires du béton ordinaire	39
4.2.2 Courbe contraintes-déformations bilinéaire à palier horizontal de l'acier.....	40
4.3 FORMULATION ET SOLUTION DU PROBLEME DE CONCEPTION OPTIMALE DE MOINDRE COUT DES SECTIONS DE POUTRES EN T EN BETON ARME.....	41
4.3.1 Fonction objectif.....	41
4.3.2. Formulation du problème.....	42
4.3.3. Méthode de résolution.....	44
4.4 RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION.....	45
4.4.1 Exemple numérique 1.....	46
4. 4.1.1. Procédure étape par étape.....	46
4.4.1.2. Comparaison entre la solution de conception optimale des moindres Coûts et celle de conception standard.....	48
4. 4.1.3 Comportement de la solution de conception de moindre coût.....	49
4.4.2 Exemple numérique 2.....	51
4.5 CONCLUSIONS.....	52

CHAPITRE V
MODELE DE CALCUL DE MOINDRE COUT DES POUTRES EN T
EN BETON ARME PAR OPTIMISATION NON-LINEAIRE
CAS DES BETONS ARMES A HAUTES RESISTANCES (BHR)

5.1	INTRODUCTION.....	55
5.2	ETATS LIMITES ULTIMES	57
5.2.1	Courbes contraintes-déformations non- linéaires du béton à haute résistance.	60
5.2.2	Courbe contraintes-déformations bilinéaire à palier horizontal de l'acier.....	62
5.3	FORMULATION ET SOLUTION DU PROBLEME DE CONCEPTION OPTIMALE DE MOINDRE COUT DES SECTIONS DE POUTRES EN T EN BETON ARME A HAUTE RESISTANCE.....	63
5.3.1	Position du problème.....	63
5.3.2	Fonction objectif	64
5.3.3	Formulation du problème.....	65
5.3.4	Méthode de résolution.....	67
5.4	RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION.....	68
5.4.1	Exemple numérique 1: Avantage économique de l'utilisation de la technologie des bétons à hautes résistances.....	69
5.4.2	Exemple numérique 2: Performance du modèle de calcul de moindre coût et méthodologie de solution.....	69
5.4.2.1	Procédure étape par étape.....	71
5.4.2.2	Comparaison entre la solution de conception optimale des moindres coûts et celle de conception standard	72
5.4.2.3	Comportement de la solution de conception de moindre coût.....	72
5.5	CONCLUSIONS.....	74

CHAPITRE VI
CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

6.1	CONCLUSIONS GENERALES	77
6.2	PERSPECTIVES	82
	REFERENCES.....	83

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

1.1 INTRODUCTION GENERALE

Dans la littérature technique de la construction, on trouve des centaines d'ouvrages, de caractère théorique, sur le calcul des structures, mais très peu sur les conditions générales des différents types, sur les raisons fondamentales qui les ont déterminés, sur les bases qui doivent orienter leur choix et sur les idées essentielles qui guident le projeteur au début de son travail, suivant des principes qu'il a assimilés peu à peu, mais auxquels il réfléchit rarement.

Le calcul n'est pas autre chose qu'un outil qui permet de vérifier que les formes et dimensions d'une construction, encore à l'état de projet ou déjà réalisée, sont capables de supporter les efforts auxquels elle doit être soumise.

Dans tous les problèmes, on se propose d'obtenir un certain résultat en satisfaisant à des conditions dont les unes sont essentielles et dont les autres sont accessoires.

Tout d'abord, les matériaux doivent être résistants dans la mesure où la résistance représente l'aptitude à supporter les sollicitations mécaniques auxquelles ils doivent être soumis en chaque point. Pour cela, il est nécessaire de connaître ces sollicitations.

Leur détermination, à partir d'un ensemble de charges ou de forces extérieures, prise comme donnée du problème, et des caractères mécaniques (élastique, plastique, etc...) du matériau, constitue la partie la plus étudiée dans les livres et dans les écoles.

Il y a un autre aspect du problème, que tout le monde reconnaît : c'est celui de l'économie.

Toutes choses étant égales, par ailleurs, un ouvrage doit être aussi économique que possible.

Certainement, il y a des constructions somptueuses - les raisons humaines et sociales du luxe sont mal connues ; ses excès sont blâmables ; mais il existe dans le fond même de la nature humaine. Le problème, comme toujours est de lui assigner des limites raisonnables, qui varient beaucoup d'un cas à l'autre. En dehors de quelques exceptions, il y a toujours des limites de prix au-delà desquelles l'ouvrage n'est plus réalisable. En général on peut dire que, à efficacité égale, la condition du prix minimum est toujours valable et doit être prise en considération.

Cependant, la solution n'est presque jamais si claire et si précise. Le prix agit sur l'augmentation ou la diminution de la sécurité, sur la durabilité, sur l'apparence esthétique, ...etc. Et si le coût est mathématiquement calculable, les avantages ou les inconvénients que ses variations impliquent dans les domaines si divers, sont généralement impossibles à évaluer. C'est pourquoi les opinions sur un projet, qui sont nécessairement subjectives, sont souvent contradictoires et donnent lieu à des discussions.

Toutefois, comme dans beaucoup de ces problèmes, la logique et même les mathématiques peuvent apporter un secours efficace au service du bon sens et de la pondération qui doivent toujours régler les jugements de l'homme.

Le prix dépend, à son tour, d'une multitude de variantes comme par exemple : le prix des matériaux, les horaires du travail et le rendement de la main-d'œuvre, les frais généraux et les dépenses de tous genres qui grèvent l'opération, ainsi que le procédé de construction qui a été retenu, compte tenu des progrès de la technique applicable à chaque cas.

Et, si l'on reste dans le domaine économique, il faut considérer aussi les frais d'entretien qui peuvent varier d'un matériau à l'autre, ou d'un type de construction à un autre, ou même varier avec les dimensions. D'autre part, le prix doit être examiné en tenant compte des bénéfices directs ou indirects, mesurables ou non, que l'on attend de l'opération.

En définitive, le problème comporte quatre données fondamentales ; l'usage, la résistance (y compris la stabilité), les exigences esthétiques, les conditions économiques.

L'idéal que cherchent à atteindre tous ceux qui sont associés à l'acte de construire est de réaliser l'ouvrage qui donnera les meilleures garanties de service dans des conditions requises de sécurité, au meilleur prix. Cette dernière condition prend une importance de plus en plus grande, car les besoins en équipement de toutes natures se développent à un rythme tel qu'ils nécessitent une étude approfondie des investissements nécessaires. Elles se traduisent par la recherche systématique de l'excellence à donner, dans un cadre de référence déterminé, le meilleur usage des ressources disponibles. On peut dire que l'émergence des méthodes d'optimisation et leur développement servent à rendre explicite la recherche, l'évaluation et le classement des options, ce qui jusque-là, avaient été accompli de façon implicite.

Il n'existe pas, de nos jours, un modèle d'optimisation (ou une théorie générale d'optimisation) pour la totalité des opérations de conceptions et de réalisations qui s'appliquent aux systèmes de génie civil les plus importants. La théorie et les méthodes d'optimisation élaborées par des chercheurs de divers pays se sont limitées jusqu'ici à des exemples très particuliers d'éléments de construction et manquent, tout au moins dans l'étape actuelle, de la qualification nécessaire pour une application générale.

Historiquement, le problème de maximiser ou minimiser une fonction sous des conditions d'égalité est un problème mathématique classique. Il s'agit d'un problème d'optimisation qui remonte à Lagrange après un premier intérêt porté par Monge en 1776. Le fait d'étendre la théorie de Lagrange et de ses multiplicateurs au cas où il y a aussi des contraintes d'inégalité est relativement nouveau et les premiers résultats ne datent que depuis 1948. C'est-à-dire à l'arrivée du monde informatique.

Durant les cinquante dernières années, les méthodes d'optimisation ont été utilisées dans de nombreux secteurs notamment celui de l'industrie aérospatiale.

Les méthodes graphiques ont été les plus fréquemment utilisées durant les cinq premières décennies. Pendant les six dernières décennies, beaucoup de progrès a été réalisé dans le domaine de l'optimisation numérique. Malgré l'apparente diversité des thèmes abordés, la prise de conscience progressive d'une affinité profonde, tant du point de vue des structures que des méthodes, entre les différentes classes de problèmes, amène rapidement à les intégrer au sein d'une nouvelle discipline, plus vaste, la programmation mathématique, et marque l'annonce d'un vaste mouvement unificateur qui semble encore loin actuellement d'avoir atteint son terme; c'est ainsi que l'histoire de cette discipline se trouve jalonnée par une intense activité de recherche et d'un volume considérable de publications ainsi qu'un certain nombre des travaux de synthèse remarquables.

1.2 OBJECTIFS VISES

Le présent travail de recherche vise le développement d'une méthodologie générale en vue d'obtenir, sur la base d'une méthode de programmation mathématique, des dimensionnements optimaux de moindres coûts des poutres en T soumises à des charges ultimes. Deux cas seront considérés : les cas des bétons armés ordinaires d'une part et celui des bétons à hautes résistances d'autre part. De manière générale, la fonction objectif à minimiser devra comprendre les coûts du béton, de l'acier et du coffrage. Les contraintes consisteront en des contraintes de conception aux Etats Limites Ultimes (ELU) définies conformément à un code récent de conception et de calcul des structures en béton armé largement adopté par la communauté internationale. Le modèle mathématique de moindre coût devra également inclure les contraintes liées aux règles pratiques courantes de pré-dimensionnement et de bonne exécution.

Le processus d'optimisation des coûts sera basé sur une technique d'optimisation numérique dans l'espace limité d'un nombre réduit de variables de conception

Des exemples types de conception seront présentés aussi bien pour les bétons ordinaires que pour les bétons à hautes résistances en vue :

- d'illustrer la procédure de calcul optimal étape par étape.
- d'évaluer la performance du modèle de conception de moindre coût et la méthodologie de solution.
- d'examiner les caractéristiques des solutions optimales obtenues afin d'identifier les contraintes actives et non actives.
- de fournir des solutions de conception économique de moindre coût pouvant être utilisées comme base de comparaison dans de futures investigations.

1.3 ORGANISATION DE LA THESE

La présente thèse est organisée en six chapitres :

Le premier chapitre intitulé **Chapitre I** est consacré à une introduction générale incluant les objectifs visés et le plan général de la thèse.

Le chapitre II traite les notions fondamentales d'optimisation, la formulation mathématique générale du problème qui comporte l'identification des variables de décision, la définition d'une fonction objectif et la description des contraintes imposées aux variables de décision.

Le chapitre III présente un bref exposé de deux méthodes numériques d'optimisation qui forment l'outil principal pour résoudre des problèmes d'optimisation non-linéaire sous contraintes d'égalité et d'inégalité. Les problèmes de programmation mathématique non-linéaire sous contraintes surgissent souvent dans de nombreuses applications d'ingénierie et

l'optimisation structurale. Les méthodes d'optimisation les plus connues pour résoudre ces problèmes sont essentiellement la méthode de Programmation Quadratique Séquentielle (PQS) et la méthode du Gradient Réduit Généralisé (GRG). Un bref exposé des principes à la base de ces deux méthodes.

Le chapitre IV est consacré au développement d'un modèle numérique en vue d'obtenir d'une méthode d'optimisation non-linéaire, des dimensionnements de moindres coûts des poutres en T en béton armé ordinaire, soumises à des charges ultimes.

Il fournit aussi la formulation et la solution du problème correspondant qui sont décrits en détail.

Des exemples types de conception sont présentés en vue d'illustrer la procédure de calcul optimal, étape par étape, et de fournir des applications susceptibles d'être utilisées dans de futures recherches. Des comparaisons avec les méthodes de calcul standard utilisés dans les bureaux d'études sont effectuées et les résultats de calcul examinés.

Le chapitre V de manière similaire au chapitre précédent, vise le développement d'une méthodologie générale pour obtenir, sur la base d'une méthode de minimisation directe, des dimensionnements optimaux de moindres coûts des poutres en T en béton armé à haute résistance, sous chargements ultimes. Les lois de comportement des matériaux acier et béton à haute résistance en conformité avec la philosophie des états limites ultimes sont discutées. La formulation et la solution du problème de programmation non-linéaire sont soulignées. Des exemples types de conception sont présentés en vue d'illustrer la procédure de calcul optimal, étape par étape, et de fournir des applications susceptibles d'être utilisées dans de futures recherches. Des comparaisons avec les méthodes de calcul standard de bureaux d'études sont effectuées. Les résultats obtenus montrent que la méthode proposée peut être

appliquée avec succès au dimensionnement des poutres en T en béton armé à haute résistance.

Le Chapitre VI synthétise l'essentiel des travaux de recherche effectués ainsi que les principaux résultats obtenus, et récapitule les conclusions générales issues du présent travail de recherche.

CHAPITRE II

CONCEPTS ET FORMULATION GENERALE D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION

2.1 INTRODUCTION

L'optimisation peut être regardée comme une recherche systématique de l'excellence tendant à donner, dans un cadre de référence prédéterminé le meilleur usage des ressources disponibles bien que le choix de référence (objectifs réalistes, contraintes pertinentes, modèle mathématiques corrects, paramètres des charges et de sécurité adéquats) aient un effet fondamental sur les résultats de l'optimisation, sa discussion comporte une étude spéciale et approfondie.

Le mot optimisation en mathématique désigne la recherche des conditions moyennant pour lesquelles une fonction donnée atteint un optimum, qui se présente le plus souvent comme un extremum. L'optimum impose qu'une certaine fonction de mérite (fonction objectif, fonction économique) soit maximale ou minimale.

C'est la recherche de la meilleure solution, évaluée selon certains critères avec prise en compte des conditions nécessaires. On voit immédiatement à quel point ce genre de problème peut répondre à des préoccupations de tout ordre physique, mécanique, technique, économique,...etc.

Historiquement, le problème de maximiser ou de minimiser une fonction sous des conditions d'égalité est un problème mathématique bien classique (c'est un problème d'optimisation qui remonte à Lagrange après un premier intérêt porté par MONGE en 1776 à un problème de ce genre. Le fait d'étendre le théorie de Lagrange et de ses multiplicateurs ou cas où il y a aussi

des contraintes d'égalité est relativement nouveau et les premiers résultats ne datent que depuis 1948 c'est à dire à l'arrivée du monde informatique

L'objectif dans l'optimisation des éléments en béton armé est de trouver les dimensions optimales et le coût minimum correspondant des matériaux mis en œuvre. En général, le nombre de variables de conception indépendantes est relativement petit et les contraintes sont données par des expressions explicites.

2.2 ROLE DE L'OPTIMISATION

Le rôle de l'optimisation dans la construction est capital car il permet de déterminer la meilleure solution d'un problème et d'aboutir à des coûts minimaux. Le développement des méthodes d'optimisation n'a servi qu'à rendre explicite la recherche, l'évolution et le classement des options. Les tendances faites pour développer ces méthodes ont eu pour effets bénéfiques d'affiner notre compréhension du projet et d'identifier les applications valables de la sous-optimisation et de restructurer un grand nombre des processus partiels qu'intègre l'étude du projet.

2.3 ELEMENTS D'OPTIMISATION

La programmation mathématique se propose pour objet l'étude théorique des problèmes d'optimisation ainsi que la conception et la mise en œuvre des algorithmes de résolution.

La présence du terme "programmation" dans le nom donné à cette discipline peut s'expliquer historiquement par le fait que les premières recherches et les premières applications se sont développées dans le contexte de l'économie et de la recherche opérationnelle.

Très naturellement, la terminologie employée alors reflète l'étroite relation existant entre l'activité d'analyse mathématique d'un problème et son interprétation économique (la recherche d'un programme économique optimal).

C'est ainsi que G.B. Dantzig propose en 1949 le terme de programmation linéaire pour l'étude des problèmes théoriques et algorithmiques liés à l'optimisation de fonction linéaires sous contraintes linéaires. Dans le même sens, W. Kuhn and A. W. Tucker proposent en 1951 le nom de programmation non-linéaire pour l'étude des problèmes d'optimisation non-linéaires avec ou sans contraintes.

La programmation en nombres entiers est suggérée par Gomory en 1958 pour les problèmes d'optimisation où les variables sont astreintes à ne prendre que les valeurs entières, tandis que le terme de programmation dynamique est employé par R.Bellman en 1957 pour une méthode générale d'optimisation des systèmes dynamiques (c'est à dire évoluant au cours du temps).

Cependant, malgré l'apparente diversité des thèmes abordés entre les années 1945 et 1960, la prise de conscience progressive d'une affinité profonde, tant du point de vue des structures que des méthodes, entre les différentes classes de problèmes, a amené rapidement à les intégrer au sein d'une nouvelle discipline, plus vaste, la programmation mathématique, et marque l'annonce d'un vaste mouvement unificateur qui semble encore loin actuellement d'avoir atteint son terme.

La programmation mathématique est aujourd'hui une branche particulièrement active des mathématiques appliquées, et il y a, à cela, de nombreuses raisons. La première est peut-être le nombre, la variété, et l'importance de ses applications que ce soit dans la science de l'ingénieur, ou dans d'autres domaines des mathématiques appliquées.

Sans prétendre être exhaustif, on peut citer :

En recherche opérationnelle : optimisation de systèmes technico-économiques (planification, économétrie), problèmes de transport, d'ordonnancement, de gestion de stocks, etc.

En analyse numérique : approximation, régression, résolution de systèmes linéaires et non linéaires, méthodes numériques liées à la mise en œuvre des méthodes d'éléments finis, etc.

En automatique : identification des systèmes, commande optimale des systèmes, filtrage, ordonnancement d'atelier, commande de robots, etc.

En ingénierie : dimensionnement et optimisation de structures, conception optimale de systèmes techniques complexes tels que systèmes informatiques, réseaux d'ordinateurs, réseaux de transport, de télécommunications, etc.

En économie mathématique : résolution de grands modèles macro-économiques (type modèle de Leontiev et dérivés), modèles micro-économiques ou modèles d'entreprise, théorie de la décision et théorie des jeux.

Mais l'importance de la programmation mathématique vient aussi du fait qu'elle fournit un cadre conceptuel adéquat pour l'analyse et la résolution de nombreux problèmes de mathématiques appliquées. Ceci explique sans aucun doute que la programmation mathématique ait donné lieu, depuis 30 ans, à une intense activité de recherche et à un volume de publications considérable. Mais, au lieu de ce foisonnement, l'élaboration des concepts fondamentaux et la tendance à l'unification ont été constamment au centre des préoccupations, et c'est ainsi que l'histoire de cette discipline se trouve jalonnée par un certain nombre de travaux de synthèse remarquables, qui ont souvent été à l'origine de courants de recherche nouveaux et féconds.

2.3.1 Formulation générale du problème

D'une façon générale, un problème de programmation mathématique non-linéaire peut être énoncé comme suit :

Trouver le vecteur $\{X\}$ de variables de décision (appelées aussi variables de conception) tel que :

$$Z = F(\{X\}) \longrightarrow \text{Min}$$

$$g_i(\{X\}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

$$h_j(\{X\}) = 0 \quad j = 1, \dots, k.$$

Z est la fonction objectif du problème désignée également par (fonction critère ou fonction mérite). Les fonctions g_i et h_j sont appelées contraintes d'inégalité et contraintes d'égalité respectivement.

Les contraintes d'égalité peuvent souvent être éliminées et la recherche optimale peut être effectuée dans l'espace des solutions admissibles défini par les contraintes d'inégalité. A ce jour il n'existe pas une méthode de programmation mathématique non linéaire que l'on peut qualifier de façon systématique comme la plus efficace et de nombreux algorithmes ont été proposés dans la littérature spécialisée.

2.3.2 Variables de décision

Les variables de conception ou de décision ou variables de calcul sont constituées par les dimensions (épaisseur, longueur, largeur,...) de la structure ou par d'autres paramètres. Dans les structures à deux ou trois dimensions celles qui définissent la géométrie sont particulièrement intéressantes à déterminer afin de minimiser la quantité des matériaux mis en œuvre.

Le calcul consiste à définir les valeurs des composantes du vecteur $X : x_1, x_2, \dots, x_n$ qui représentent les inconnues du problème (on appelle ces composantes les variables de décision).

2.3.4 Contraintes

La structure calculée doit satisfaire aux exigences fonctionnelles concernant la résistance, ou l'utilisation, ... etc. Ces exigences qu'on appelle conditions sont les limitations ou les contraintes du problème. Il convient de répartir les contraintes en deux classes ; celles qui doivent être satisfaites comme des égalités strictes et celles qui sont régies par des inégalités.

2.3.5 Fonction objectif

Parmi les facteurs caractéristiques d'une structure, il y a toujours un dont l'importance prédomine. Ce facteur constitue le critère d'optimisation et qui est représenté sous la forme d'une fonction objectif $Z = F(\{X\})$ on dit aussi parfois : fonction économique, fonction critère ou fonction mérite. C'est cette fonction que l'algorithme d'optimisation va optimiser.

En outre, le critère de mérite n'exige pas d'être déterministe et peut s'exprimer en terme de probabilité.

En optimisation des structures, on utilise souvent un volume minimale comme critère plutôt qu'un coût minimal pour la raison que les coefficients de coût sont trop difficile à déterminer.

2.4 TYPE DES PROBLEMES D'OPTIMISATION

- Problèmes probabilistes.
- Problèmes déterministes.

2.4.1 Problèmes probabilistes

En général le problème de dimensionnement probabiliste optimal peut être énoncé comme suit :

Pour une structure à configuration, charges probables et variations des résistances connues.

Trouver les résistances moyennes des éléments:

Telles que des niveaux de confiance spécifiés et des conditions d'économie déterminées soient satisfaits.

La confiance à ruine est définie comme la probabilité requise pour qu'une structure n'atteigne pas sa ruine plastique ; la confiance à plasticité est la probabilité nécessaire pour qu'une section de la structure ne soit pas la première à se transformer en une rotule plastique.

2.4.2 Problèmes déterministes

Soit une structure dont les charges, géométrie et dimensions des sections en béton sont fixées.

Le problème de dimensionnement optimal consiste à déterminer les variables x_i ($i = 1, 2, \dots, n$.) qui optimisent une certaine fonction de mérite et satisfaisant également aux contraintes.

Par conséquent, le dimensionnement optimal est équivalent à un problème d'optimisation d'une fonction non-linéaire sous des contraintes non-linéaires ou linéaires. Ceci constitue un problème typique de programmation non-linéaire pouvant être résolu par les techniques de programmation mathématique.

2.5 METHODE ET FORMULATION GENERALE D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION DETERMINISTE

2.5.1 Contraintes

Chaque groupe de valeurs pour les variables de décision (ou de conception) représente une conception de la structure. Clairement, quelques conceptions sont des solutions utiles pour l'optimisation du problème, mais d'autres peuvent être inadéquates en terme de fonctions, comportement ou autre considération. Si une conception satisfait toutes les exigences ou condition imposées, elle sera dite " solution admissible " (ou solution faisable).

Les conditions (ou restrictions) qui doivent être satisfaites afin d'obtenir une conception sont dites les contraintes. Du point de vue physique on peut identifier deux sortes de contraintes :

- Les contraintes imposées sur les variables de conception et qui limitent leur champs sont appelées contraintes de conception où contrainte de bon côté.

Les contraintes qui sont explicitées sur la forme peuvent provenir de différentes considérations telles que la fonctionnalité, la fabrication ou l'esthétique. De cette façon une contrainte de conception est une limitation spécifique ou imposée sur une variable de conception.

- Les contraintes qui dérivent des exigences sur le comportement sont appelées les contraintes de comportement. Les limitations sur les contraintes maximales, déplacement, flambement sont des exemples typiques de contraintes de comportement.

Des contraintes de comportement explicites ou implicites sont toutes deux rencontrées dans la conception pratique.

Les contraintes de comportement explicites sont souvent données par des formules présentées dans des cadres de conception ou des spécifications. Cependant, les contraintes de comportement sont généralement implicites.

D'un point de vue mathématique, les contraintes de conception et de comportement peuvent être usuellement exprimées comme un groupe d'inégalités.

$$g_j(\{x\}) \leq 0 ; \quad j = 1, \dots, m.$$

où m est le nombre de contraintes d'inégalité et X le vecteur des variables qui peut comprendre les variables de décision et de comportement. Souvent dans un problème de conception des structures, on a aussi à considérer les contraintes d'égalité de la forme générale :

$$h_j(\{X\}) = 0 ; \quad j = 1, \dots, k.$$

où k est le nombre d'égalité.

Dans la plupart des cas, les contraintes d'égalité peuvent être utilisées pour éliminer des variables des processus d'optimisation en réduisant leur nombre.

En général, les équations d'analyse d'un problème sous condition peuvent être exprimées en termes de variable de la forme de l'équation. Cependant, si nous choisissons les variables comme indépendantes alors ces équations peuvent calculer les variables de comportement pour chacune des conceptions données.

Cette procédure est avantageuse dans plusieurs cas, puisque nous avons à trouver les valeurs optimales d'un nombre moindre de variable, et le problème aura une dimension plus réduite.

L'égalité peut présenter aussi différente considération de conception telle qu'un rapport désiré entre la longueur de la pièce et son épaisseur peut facilement réduire le nombre de variables indépendantes.

Cependant, dans certains cas, la procédure d'élimination peut être complexe et consomme de temps et quelques contraintes d'égalité doivent être considérées.

2.5.2 Espace de conception

Chaque variable de décision peut être considérée comme une dimension dans un espace de conception, et chaque groupe particulier de ces variables comme un point de cette espace.

Dans le cas de deux variables, l'espace de conception se ramène à un plan.

Dans le cas général de n variable nous avons un hyperplan de dimension n . Une conception qui satisfait toute ces contraintes $g_j(\{X\}) \leq 0$ est une conception faisable. Le groupe des valeurs variable de conception qui satisfait l'équation $g_j(\{X\}) = 0$ forme une surface dans l'espace de conception c'est une surface dans le sens qu'elle coupe l'espace en deux régions, une où $g_j > 0$ et l'autre $g_j < 0$.

Le groupe de toutes les conceptions faisables forme la région faisable. Les parties des surfaces de contraintes respectives qui limitent la région faisable forment la surface de contraintes composées.

Les points à l'intérieur de la région faisable ($g_j < 0 ; i = 1, \dots, m$), sont appelés points, libres, ou conception sans contrainte.

Les points sur la surface sont appelées ($g_j = 0$) points limites.

Il est possible que la région faisable soit composée de deux ou plus de sous régions disjointes, mais ceci est rare dans les problèmes de conception où les éléments ne peuvent pas être éliminés.

Le sous espace où deux ou plusieurs contraintes $g_j(\{X\})$ se croisent est appelé une intersection. Dans l'espace à deux dimensions, l'intersection de deux contraintes est un point.

La $j^{\text{ème}}$ contrainte est dite être active en un point de conception si $g_j(\{X\}) = 0$ et elle est dite passive si $g_i(\{X\}) < 0$. Si $g_i(\{X\}) > 0$, la contrainte est violée et la conception correspondante est infaisable.

Les contraintes d'égalité :

$$h_j(\{X\}) = 0 \quad j = 1, \dots, k.$$

introduisent un couplage entre les variables ils peuvent être vues comme des surfaces dans l'espace de conception à n dimensions.

Les points de conception faisable doivent être localisés à l'intersection de ses surfaces.

Le nombre de contrainte d'égalité, k doit satisfaire $k \leq T$, où T est le nombre total des variables.

Dans le cas où $k = T$, les variables peuvent en principe être déterminées comme solutions des équations : $h_j(\{X\}) = 0$ et il n'y pas de problème d'optimisations au sens propre.

2.5.3 Fonction objectif

Il existe habituellement un nombre infini de conception faisable. Pour obtenir la meilleur, il est nécessaire de former une fonction de variable à utiliser pour la comparaison des conceptions faisables.

La fonction objectif appelé aussi coût, critère, ou fonction de mérite et la fonction à partir de laquelle la petite valeur est recherché dans un problème d'optimisation. C'est une fonction de variable X et elle peut représenter le poids, le coût de la structure ou n'importe quel autre critère à partir duquel une conception possible est préférée aux autres.

Nous supposons toujours que la fonction objectif $Z = F(\{X\})$ doit être minimisée ceci n'implique aucune diminution de la généralisation puisque le minimum de $-F(\{X\})$ est obtenue lorsque $F(\{X\})$ est maximum, c'est-à-dire $\text{Max}(F\{X\}) = -\text{Min}(-F\{X\})$.

Le choix d'une fonction objectif peut être une des plus importantes décisions dans la procédure d'une conception optimale.

La formulation mathématique de la fonction objectif peut être une tâche très difficile, par exemple lorsque des valeurs esthétiques importantes sont influencés par les variables de décision. En général, la fonction objectif représente la propriété simple la plus importante d'une conception mais elle peut représenter aussi la résultante d'un certain nombre de propriétés. Des précautions doivent être prises pour optimiser la fonction objectif qui reflète au mieux, le véritable but d'un problème d'optimisation.

Le poids est la fonction objectif la plus habituellement utilisée dû au fait qu'il est facilement quantifiable bien que la plupart des méthodes d'optimisation ne se limitent pas à la minimisation du poids. Le poids de la structure est souvent d'une importance critique, mais la minimisation du poids n'est pas toujours la tâche la plus facile.

Le coût est d'une importance pratique plus grande que celle du poids, mais il est souvent difficile d'obtenir suffisamment de données pour la construction d'une fonction réelle du coût. Une fonction du coût général doit inclure le coût des matériaux, de la fabrication, du transport, ...etc. En plus du coût engendré par construction et la conception et d'autres

facteurs tels que la mise en service, maintenance, réparation, assurance ...etc. doivent être considérés. Cependant, il n'est pas toujours désirable de considérer une fonction aussi large que possible.

D'un point de vue pratique, il est demandé d'introduire une fonction objectif qui est à la fois sensible aux variations des variables de décision et à la composante la plus importante du coût. En général, la fonction objectif est une fonction non linéaire des variables de décision.

2.5.4 Formulation dans l'espace des variables de conception

Le problème général de conception de la structure optimale peut être formulé comme étant le choix d'une conception et des variables de comportement correspondantes soumises aux contraintes relatives à la conception et au comportement de la structure, de telle sorte que la fonction objectif soit minimale.

Si le comportement de la structure peut être facilement calculé pour n'importe quelle valeur donnée des variables de conception, les équations d'analyse peuvent être extraites de la formulation mathématique. Dans de tels cas, nous utilisons les équations d'analyse pour évaluer les contraintes qui sont données de façon implicite. Une formulation explicites de ces contraintes est possibles seulement pour des structures déterminées ou simples.

Supposons que toutes les contraintes d'égalité peuvent être éliminées, le problème de conception optimale peut être formulé mathématiquement comme étant une façon de choisir le vecteur des variables de décision $\{X\}$ de telle sorte :

$$g_i(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, m.$$

$$Z = F(\{X\}) \longrightarrow \text{Min.}$$

L'équation signifie que $F(\{X\})$ donne un minimum.

Ce problème est dit formulé dans l'espace de conception puisque les variables de décision sont les seules indépendantes. Les deux équations ci-dessus représentent une forme de problème appelé programmation mathématique.

CHAPITRE III
ALGORITHME ET METHODES UTILISES POUR LA RESOLUTION
NUMERIQUE

3.1 OPTIMISATION NON-LINEAIRE

On parle d'optimisation non-linéaire si la fonction objectif, qui doit être minimisée ou maximisée, est non-linéaire. La formule générale d'un problème d'optimisation non-linéaire est la suivante:

$$\text{Min. } f(x)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

En satisfaisant les contraintes:

$$g(x) \leq 0$$

$$h(x) = 0$$

où les fonctions des contraintes sont des fonctions linéaires ou non-linéaires. Si les hypothèses de continuité, de différentiabilité et de déterminisme sont satisfaites il s'agit d'optimisation différentiable. L'hypothèse de continuité admet que la fonction objectif et les fonctions des contraintes sont des fonctions continues. L'hypothèse de différentiabilité admet qu'elles sont des fonctions différentiables et l'hypothèse de déterminisme consiste à ignorer les erreurs éventuelles dans les données du problème.

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons aux méthodes numériques pour l'optimisation continue, différentiable et non-linéaire et deux algorithmes sont utilisés. Ces deux méthodes d'optimisation vont être brièvement introduites.

3.2 ALGORITHMES D'OPTIMISATION NON-LINEAIRE

Un algorithme d'optimisation est une procédure de recherche et de comparaison de solutions possibles admissibles, jusqu'à ce qu'une solution optimale soit trouvée. Aucun algorithme d'optimisation n'est universel. Il est au contraire développé pour trouver des solutions à une famille de problèmes très spécifique. Une bonne compréhension des algorithmes est donc indispensable pour choisir l'algorithme le mieux adapté à la résolution d'un problème donné.

Dans le cadre de cette recherche, deux algorithmes classiques d'optimisation sont présentés. Ces deux algorithmes sont brièvement introduits ci-après. Ils appartiennent aux groupes des algorithmes d'optimisation non-linéaire les plus utilisés pour l'analyse structurale.

3.3. METHODE DE LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE SEQUENTILLE

Un problème général de programmation non- linéaire sous contraintes peut être énoncé comme suit:

$$\text{Minimiser } f(x), \quad x \in F \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n,$$

Sous les contraintes :

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = p + 1, \dots, q$$

$$a_k \leq x_k \leq b_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

où

$x = [x_1, \dots, x_n]$ est un vecteur de n variables, $f(x)$ est la fonction objectif, $h_i(x)$ ($i = 1, \dots, p$) est la i -ième contrainte d'égalité, et $g_j(x)$ ($j = 1, \dots, q$, $q < n$) est la j -ième contrainte d'inégalité.

S est l'espace de recherche et F est l'espace de recherche faisable. a_k et b_k représentent les limites inférieure et supérieure des variables x_k ($k = 1, \dots, n$), respectivement.

Il est supposé que toutes les fonctions $f(x)$, $h(x)$, et $g(x)$ sont deux fois continûment différentiable. Dans la plupart des problèmes de programmation non linéaire $f(x)$, $h(x)$ et $g(x)$ sont non convexes et les problèmes possèdent des solutions optimales locales multiples.

Uniquement dans le cas où la fonction $f(x)$ est convexe, chaque $h_i(x)$ est linéaire et chaque $g_j(x)$ est convexe. Tout minimum local contraint est également un minimum global contraint.

Les méthodes de programmation quadratique séquentielle sont des méthodes itératives qui permettent de résoudre la $k^{\text{ième}}$ itération, un sous-problème quadratique (PQ) de la forme:

$$\text{Minimiser } \frac{1}{2} d^t H_k d + \nabla f(x_k)^t d, \quad i = 1, \dots, p, \quad (\text{a})$$

Soumis à :

$$\nabla h_i(x_k)^t d + h_i(x_k) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (\text{b})$$

$$\nabla g_j(x_k)^t d + g_j(x_k) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, q,$$

où d est la direction de recherche et H_k est une approximation définie positive de la matrice Hessienne de la fonction Lagrangienne du problème (P). La fonction Lagrangienne est donnée par :

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1}^p u_i h_i(x) + \sum_{j=p+1}^q v_j g_j(x), \quad (\text{c})$$

où u_i et v_i sont les multiplicateurs de Lagrange. Le sous-problème (PQ) peut être résolu en utilisant la stratégie suivante. La solution d_k de la solution est utilisée pour générer une nouvelle itération:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad (\text{d})$$

où le paramètre de la longueur de pas $\alpha_k \in [0,1]$ dépend de quelques techniques d'optimisation suivant une direction de recherche.

A chaque itération, la matrice H_k est actualisée selon une méthode de type Quasi-Newton. La méthode d'actualisation préférable de H_k est celle de Broyden-Fletcher Goldfarb-Shanno dite (BFGS) [1], où H_k est initialement égale à la matrice identité I actualisée en utilisant la formule de récurrence :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^t}{s_k^t y_k} - \frac{H_k s_k s_k^t H_k}{s_k^t H_k s_k},$$

où :

$$s_k = x_{k+1} - x_k, y_k = \nabla L(x_{k+1}, u_{k+1}, v_{k+1}) - \nabla L(x_k, u_k, v_k) \quad (e)$$

Une description plus détaillée de la méthode de la programmation quadratique séquentielle est donnée dans les références [2,3].

3.4. METHODE DU GRADIENT REDUIT GENERALISE

L'algorithme du gradient réduit généralisé (GRG) transforme les contraintes d'inégalité en des contraintes d'égalité en introduisant des variables d'écart. En conséquence, toutes les contraintes du problème de programmation non linéaire ci-dessus s'écrivent sous forme d'égalité et peuvent être représentées comme suit:

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (1)$$

où x contient aussi bien les variables originales que les variables d'écart. Les variables

sont divisées en variables dépendantes, x_D , et variables indépendantes, x_I , (variables basiques et non-basiques, respectivement):

$$x = \begin{bmatrix} x_D \\ \dots \\ x_I \end{bmatrix} \quad (2)$$

Les noms des variables basiques et non-basiques relèvent de la terminologie utilisée en programmation linéaire. De même, le gradient de la fonction objectif et la matrice Jacobienne peuvent être partitionnés comme suit:

$$a = \begin{bmatrix} a_D \\ \dots \\ a_I \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_D \\ \dots \\ b_I \end{bmatrix}, \quad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} \nabla_D f(x) \\ \dots \\ \nabla_I f(x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} \nabla_D h_1(x) & \vdots & \nabla_I h_1(x) \\ \nabla_D h_2(x) & \vdots & \nabla_I h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \nabla_D h_q(x) & \vdots & \nabla_I h_q(x) \end{bmatrix}$$

Soit x^0 une solution initiale faisable vérifiant les contraintes d'égalité et les contraintes limites. Il est à noter que les variables de base doivent être choisies de telle sorte que $J_D(x^0)$ soit inversible.

Le vecteur gradient réduit est déterminé comme suit:

$$g_I = \nabla_I f(x^0) - \nabla_D f(x^0) (J_D(x^0))^{-1} J_I(x^0) \quad (4)$$

Les directions de recherche pour les variables indépendantes et les variables dépendantes sont donnés par :

$$d_I = \begin{cases} 0, & \text{si } x_i^0 = a_i, g_i > 0, \\ 0, & \text{si } x_i^0 = b_i, g_i < 0, \\ -g_i & \text{autrement,} \end{cases}$$

$$d_D = -(J_D(x^0)^{-1}J_I(x^0))d_I \quad (5)$$

Une minimisation de la fonction $f(x)$ suivant une ligne pour trouver la longueur de pas, α , pour la solution du problème suivant:

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser } f(x^0 + \alpha d), \\ &\text{Soumises à} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}, \\ \text{où} \quad &\alpha_{max} = \sup \left\{ \frac{\alpha}{a} \leq x^0 \leq x^0 + \alpha d \leq b \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

La solution optimale α^* du problème permet de déterminer la solution suivante donné est

la solution suivante :

$$x^1 = x^0 + \alpha^* d \quad (8)$$

Une description plus détaillée de la méthode du gradient réduit généralisé est donnée dans la référence [4].

Dans ce présent travail de recherche on a utilisé l'algorithme du gradient réduit généralisé pour la résolution numérique.

CHAPITRE IV
MODELE DE CALCUL DE MOINDRE COUT DES POUTRES EN T
EN BETON ARME PAR OPTIMISATION NON-LINEAIRE
CAS DES BETONS ARMES ORDINAIRES

4.1 INTRODUCTION

En béton armé ordinaire, les poutres en T sont fréquemment utilisées en construction industrielle, particulièrement, dans les étages courants des bâtiments, les murs de soutènement, les tabliers de ponts et plus généralement dans tous les projets de construction en béton armé où une partie appropriée de la dalle est associée à la section de résistance des poutres principales. Pour une utilisation à grande échelle de ces éléments structuraux, comme cela peut être le cas pour les éléments préfabriqués en béton armé dans les ateliers et les usines, une attention particulière doit être accordée à la conception optimale car elle constitue un facteur clé dans la réduction du coût global d'un projet.

Les coûts des matériaux de construction dépendront essentiellement des dimensions de la section transversale des éléments et des coûts unitaires du béton, des armatures en acier.

Toutefois, il convient de noter que la conception optimale de moindre coût en béton armé ordinaire des poutres en T est difficile en utilisant les méthodes classiques de conception adoptées par les bureaux d'études car il y a un grand nombre de solutions de conception conduisant à une même capacité de résistance flexionnelle. Dans ce cas, le recours à une technique d'optimisation numérique devient nécessaire et le développement d'une approche de conception économique [5, 6, 7, 8, 9] s'impose. Dans ce cas, une partie importante du montant total du projet englobe essentiellement les coûts des matériaux élémentaires de construction du béton, de l'acier et du coffrage.

Du point de vue économique, il est également souhaitable de prendre en compte dans le processus d'optimisation des sections critiques, le comportement non-linéaire ultime du béton et de l'acier d'armature en conformité avec les codes de conception actuels [7, 10, 11, 12]. La prise en considération des états limites de service peut être incluse, sans modifications majeures, mais abordée ailleurs car elle nécessite une plus grande attention en termes de restrictions sur la capacité de flexionnelle, en termes de limitations de contraintes dans le béton et l'acier, en fonction de conditions de fissuration ainsi que de limitation de flèches. Ces restrictions auront des conséquences directes sur les limites de l'espace de conception et les solutions admissibles du problème d'optimisation.

L'art d'une approche économique de moindre coût consiste à développer et à formuler d'abord un modèle d'optimisation structurale, et de le résoudre ensuite en utilisant un algorithme de programmation mathématique approprié. Le modèle d'optimisation structurale consiste en général à définir une fonction objectif et un ensemble de contraintes. Celui-ci comprend généralement: i) les limites de la recherche pour les variables de décision, ii) les restrictions sur le comportement structural et iii) les conditions de variations des déformations et des contraintes ainsi que leurs limites. Idéalement, la conception finale doit veiller à inclure la compatibilité entre les dimensions géométriques de la section en T optimale et la condition de chargement ultime, y compris le poids propre de la poutre en T. Une attention particulière a été accordée à cet aspect pratiquement négligé dans les études de recherche antérieures.

Un autre aspect important de l'approche économique de moindre coût est l'utilisation appropriée d'un algorithme d'optimisation particulier. Les techniques d'optimisation peuvent être divisés en trois grandes catégories: les techniques de programmation mathématique [3,6, 13,14, 15, 16], les méthodes basées sur des critères d'optimalité [8, 17, 18] et les algorithmes dits de recherche heuristique [19, 20, 21, 20].

Dans ce cadre, la présente étude porte sur le développement d'une procédure générale d'obtention, sur la base d'une technique de programmation mathématique appropriée, des dimensionnements optimaux des poutres en T en béton armé compatibles avec diverses exigences structurales et non structurales conformément à la philosophie des Etats Limites Ultimes selon l'Eurocode2 (EC-2) [12].

Plus précisément, cette étude démontre la formulation et la solution du problème non linéaire de l'approche économique de moindre coût des poutres en T en béton armé sous charges ultimes. Il importe de souligner que bien que les travaux développés dans le présent document soient basés sur l'utilisation d'un code spécifique de conception et de calcul des structures en béton armé à savoir l'Eurocode2 (EC-2), la méthodologie peut être facilement étendue à des codes de conception et de calcul utilisés dans d'autres pays sans modifications majeures. Le problème d'optimisation est formulé comme un problème de programmation non-linéaire et le processus d'optimisation est fondé sur l'utilisation de la technique de GRG [15, 21] dans l'espace d'un nombre réduit de variables de conception.

Pour le processus d'optimisation des coûts, le coût global des matériaux de construction, y compris les coûts de béton, d'acier et de coffrage, représente la fonction objectif et l'ensemble des contraintes comprend des restrictions sur les contraintes de comportement, les conditions relatives à la compatibilité de déformation dans l'acier et le béton, les dimensions transversales de la section en T fondées sur des règles pratiques de pré-dimensionnement et de bonne exécution en vigueur. Le poids propre de la poutre en T qui peut contribuer de manière substantielle à la détermination de la capacité de résistance flexionnelle ultime pour de longues portées est considéré comme variable à la fois dans la fonction objectif et les fonctions de contraintes.

Des exemples types sont présentés pour illustrer l'applicabilité de la formulation, de la méthodologie de solution conformément aux spécifications de l'Eurocode2 (EC-2) et de fournir des solutions optimales susceptibles d'être utilisées dans de futures investigations. Les résultats sont ensuite confrontés aux solutions issues de méthodes classiques de conception et de calcul des poutres en T en béton armé ordinaire. Enfin des conclusions d'importance pratique pour le monde professionnel sont formulées.

Ce présent travail est développé sur la base des hypothèses et choix suivants :

- L'Etat Limite Ultime (ELU) est un état déterminant pour le dimensionnement des sections et la vérification à l'Etat Limite de Service (ELS) est inutile. On suppose que l'environnement est non agressif et aucun risque de corrosion ni à craindre (fissuration peu nuisible ou peu préjudiciable).

- Poutres en T soumises à la flexion simple à l'ELU sans aciers comprimés selon EC2.

4.2 ETATS LIMITES ULTIMES

Conformément à la philosophie de calcul aux états limites ultimes, les hypothèses utilisées pour les distributions des déformations et des contraintes dans la section transversale type en T (Fig. 1.a) sont respectivement illustrés sur les Figures 1. b et 1.c.

Les dimensions en béton armé de la section transversale sont définies par les paramètres suivants (voir Figure 1.a) :

b: largeur effective de la table de compression

b_w : largeur de la nervure

h: hauteur totale

h_f : hauteur de la table

Les paramètres d , d_s et A_s représentent respectivement:

d: hauteur utile

d_s : distance du centre de gravité des aciers à la fibre la plus tendue du béton.

A_s : section des aciers tendus

Dans le diagramme de déformation linéaire ε_c et ε_s désignent respectivement les déformations du béton et de l'acier. Dans le diagramme rectangulaire de distribution de contraintes supposé uniforme, f_{cd} représente la valeur de calcul de la résistance à la compression du béton et f_{yd} est la limite d'élasticité de calcul de résistance de l'acier. Conformément au code EC-2, le paramètre ω est la profondeur relative de la zone comprimée du béton et l'axe neutre se trouve à la distance $\omega d/0.8$ à partir de la fibre supérieure la plus comprimée.

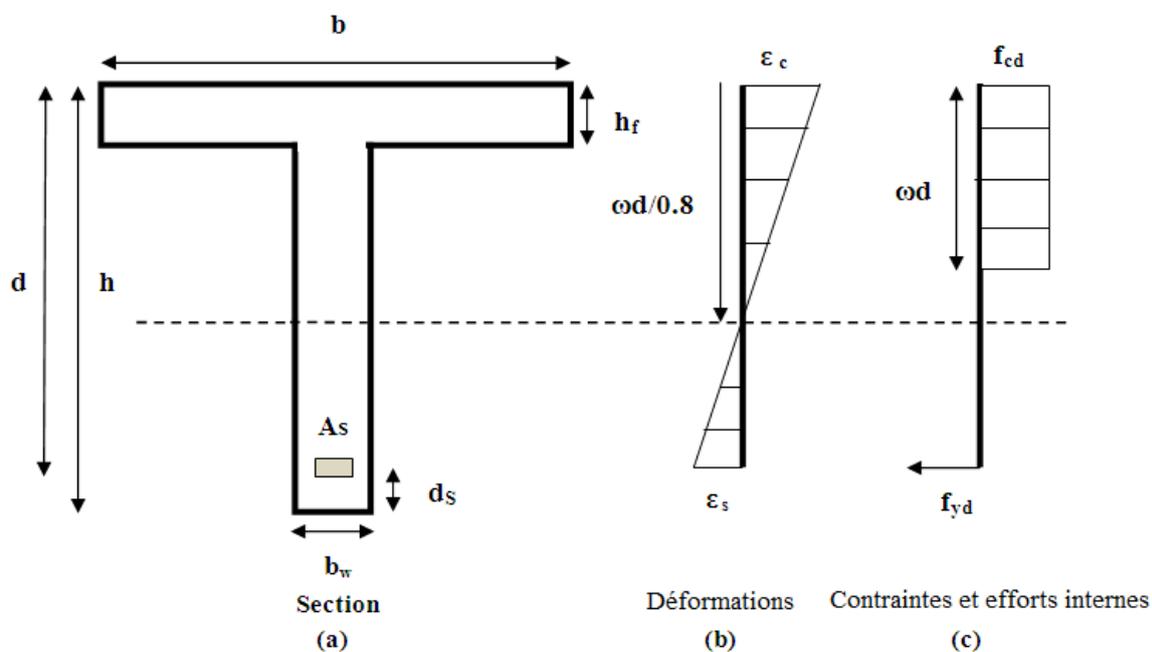


Fig.1. (a) Poutre en T; (b) diagramme de déformations et (c) diagramme de contraintes.

Dans l'élaboration d'un modèle optimal de moindre coût pour les poutres en T en béton armé ordinaire, il est nécessaire de formuler des contraintes de comportement. En général, les contraintes de comportement sont basées sur les codes de conception et de calcul qui peuvent différer d'un pays à l'autre. Le dimensionnement final de ces sections en T nécessite la connaissance des lois de comportement non linéaires du béton et de l'acier. Pour les exemples

d'illustration, les contraintes de calcul seront définies ici en conformité avec les spécifications du code de conception et de calcul des structures en béton armé Eurocode2 (EC-2).

4.2.1 Courbe contraintes-déformations non-linéaires du béton ordinaire

Selon l'annexe Française de l'Eurocode2 (EC-2), et comme illustré par la courbe parabole-rectangle indiquée dans la Figure 2, la courbe contraintes-déformations du béton est de type non-linéaire défini par les équations suivantes:

$$\left[\begin{array}{ll} \sigma_c = f_{cd} [1 - (1 - \varepsilon_c / \varepsilon_{c2})^n] & \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ \sigma_c = f_{cd} & \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \end{array} \right.$$

Conformément au calcul aux états limites ultimes, la rupture est supposée avoir lieu par écrasement du béton pour un raccourcissement maximal $\varepsilon_{cu2} = 3,5 \text{ ‰}$ et la résistance à la traction du béton est également supposée nulle.

Dans le présent travail, et dans un souci de simplification, la force interne résultante et le moment résistant d'une poutre en T sont calculés sur la base d'un diagramme rectangulaire simplifié de contraintes supposées uniformément réparties comme indiqué dans Fig.1.c et tel que recommandé par l'Eurocode2 (EC-2-3.1.7) pour des sections de béton armé soumises à la flexion simple dans le cas du Pivot B. L'utilisation d'un diagramme rectangulaire simplifié de contraintes uniformément réparties est l'équivalent du diagramme parabole-rectangle et conduit aux mêmes résultats en termes de section d'acier pour les classes de béton ordinaire de résistances caractéristiques $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$.

Toutefois, pour les classes de béton de résistances caractéristiques: $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$, et en utilisant des adaptations respectives décrites dans EC-2, il est possible de montrer que des différences significatives dans les valeurs de résistance ultime en flexion peuvent se produire

lorsque $f_{ck} = 90\text{MPa}$. Dans ce cas précis, la procédure d'optimisation doit être adaptée en conséquence [22].

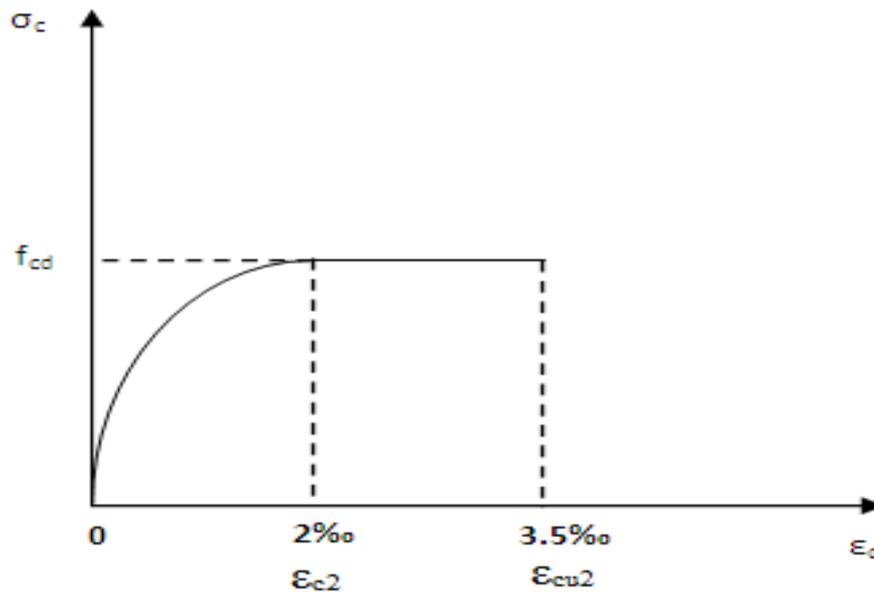


Fig. 2. Courbe contraintes-déformations du béton ordinaire.

4.2.2 Courbe contraintes-déformations bilinéaire à palier horizontal de l'acier

La loi de comportement contrainte-déformation de l'acier est de type élastique, parfaitement plastique comme illustrée par la courbe simplifiée bilinéaire représentée dans la figure 3, où E_s désigne le module d'élasticité et f_{yd} , ϵ_s tels que définis précédemment.

La déformation maximale élastique ϵ_{yd} correspondant à limite d'élasticité de l'acier peut être déterminée à partir de la relation $\epsilon_{yd} = f_{yd} / E_s$ avec f_{yd} égal à f_{yk} / γ_s et f_{yk} la limite élastique de l'acier et γ_s est le coefficient de sécurité partiel pour l'acier. La déformation de rupture de l'acier est considérée comme illimitée.

Dans le présent travail, la contrainte dans l'acier est maintenue égale à f_{yd} . La phase élastique représentée sur la figure 3 est représentée dans le but d'indiquer la limite inférieure du

domaine plastique. Cette dernière correspond à la meilleure utilisation de l'acier à l'état limite ultime. En outre, la déformation d'acier est considérée comme illimitée, comme indiqué dans la figure 3, conformément à l'annexe française à Eurocode2 (EC-2). Dans ce travail, pour une utilisation optimale de l'acier, la déformation doit demeurer toujours supérieure ou égale à la déformation limite élastique.

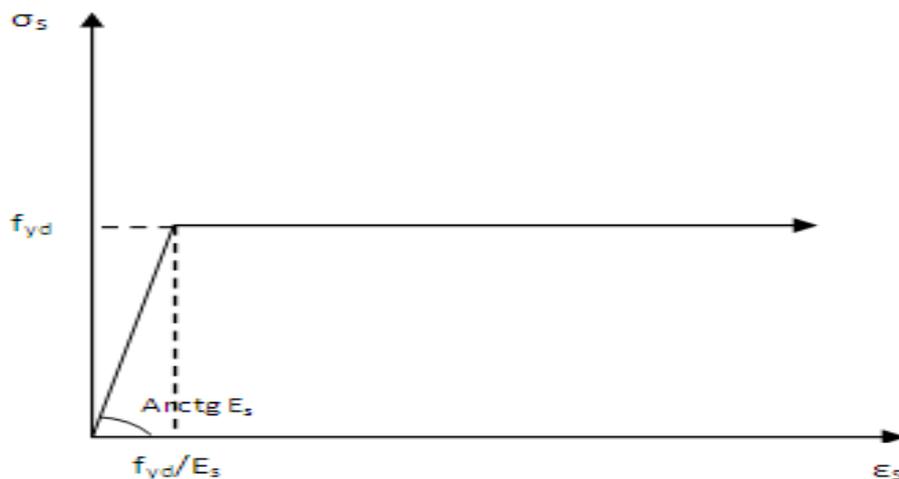


Fig. 3. Courbe contraintes-déformations bilinéaire à palier horizontal de l'acier.

4.3 FORMULATION ET SOLUTION DU PROBLEME DE CONCEPTION OPTIMALE DE MOINDRE COUT DES SECTIONS DE POUTRES EN T EN BETON ARME.

4.3.1 Fonction objectif

Considérons maintenant la poutre en T en béton armé, représentée sur la Fig. 1.a, et soit C_0 la fonction objectif représentant le coût total de béton, de l'acier et du coffrage utilisés. Cette fonction peut être définie comme suit:

$$C_0 = C_c(b_w d + (b - b_w) h_f) + C_s A_s + C_f[b + 2(d_s + d)]$$

où:

C_0 : coût total par unité de longueur de la poutre en T

C_s : coût unitaire de l'acier

C_c : coût unitaire du béton

C_f : coût unitaire de coffrage

Les éléments de coût tels que les coffrages de béton et de façonnage de l'acier sont présentés implicitement et sont inclus dans la fonction objectif en termes de pourcentages appropriés des coûts unitaires de béton et d'acier, respectivement.

Il devrait être tout aussi important de noter que dans un problème d'optimisation de moindres coûts, les valeurs optimales des variables de conception sont affectées par les valeurs relatives des coûts de la fonction objectif seulement, mais pas par les valeurs absolues des coûts. En d'autres termes, les valeurs absolues de coût affectent la valeur finale de la fonction objectif, et non pas les valeurs optimales des variables de conception. Ainsi, la fonction objectif à minimiser peut être écrite comme suit:

$C \longrightarrow \text{Min.}$

$$C = b_w d + (b - b_w) h_f + (C_s / C_c) A_s + C_f / C_c [b + 2(d_s + d)]$$

Le coût global absolu peut ensuite être déduit à partir du coût optimisé C à l'aide de la relation

$$C_0 = C \cdot C_c.$$

La valeur du rapport coût C_s / C_c varie d'un pays à un autre, voire d'une région à une autre pour certains pays.

4.3.2 Formulation du problème

Comme mentionné précédemment, les contraintes de conception seront définies en conformité avec les spécifications de conception de l'Eurocode2 (EC-2). Ainsi, et sans perte de généralité, le problème de conception de moindre coût des poutres en T en béton armé sous charges ultimes peut être mathématiquement formulé comme suit:

Trouvez les variables de conception b , b_w , h , d , h_f , A_s et ω telles que:

$C \longrightarrow \text{Min.}$

$$C = b_w d + (b - b_w) h_f + (C_s / C_c) A_s + C_f / C_c [b + 2(d_s + d)] \quad (1)$$

Sous les contraintes suivantes:

a. *Contraintes de comportement:*

$$M_{Ed} \leq f_{cd}(b-b_w)h_f(d-0,50h_f)+f_{cd}.b_w.d^2.\omega(1-0,5\omega) \quad (2)$$

$$\omega = (f_{yd}/f_{cd})(A_s/b_w.d) - (b-b_w) h_f / b_w.d \quad (3)$$

$$A_s / b_w.d \geq p_{min} \quad (4)$$

$$A_s / (b_w h+(b-b_w)h_f) \leq p_{max} \quad (5)$$

Dans les équations (2) et (3) ci-dessus, il est supposé que la position de l'axe neutre est situé sous la table de compression de la poutre en T ce qui garantie que la section se comporte comme une section de poutre en T telle qu'indiquée sur la Fig. 1.a ($h_f < \omega d$).

b. *Conditions relatives à la compatibilité des déformations dans l'acier et le béton:*

$$0.0035 (0.8-\omega) / \omega \geq f_{yd} / E_s \quad (6)$$

$$\omega(1-0,5\omega) \leq 0.392 \quad (\text{acier de classe S400}) \quad (7)$$

c. *Contrainte de résistance au cisaillement:*

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max} = v_1 f_{cd} b_w z / (\tan(\theta) + \cot(\theta)) \quad (8)$$

d. *Contraintes liées aux variables de conception y compris les règles de pratique courante de pré-dimensionnement et de bonne exécution (voir le Tableau 1 ci-après):*

Tab. 1 Variables de conception incluant les règles de la pratique courante

Variables de Conception	Numéro de l'équation
$h \geq L / 16$	(9)
$d / h = 0.90$	(10)
$0.20 \leq b_w / d \leq 0.40$	(11)
$(b-b_w) / 2 \leq L / 10$	(12)
$b/h_f \leq 8$	(13)
$h_f \geq h_{min}$	(14)

où:

L: portée de la poutre

M_{Ed} : moment fléchissant sollicitant ultime.

V_{Ed} : effort tranchant de calcul à l'ELU dû aux charges appliquées

$V_{Rd,max}$: effort tranchant de calcul maximal pouvant être supporté sans provoquer l'écrasement des bielles de béton comprimé

p : pourcentage d'acier

p_{\min} : pourcentage minimum de l'acier

p_{\max} : pourcentage maximal d'acier

θ : angle entre les bielles de compression de béton

v_1 : un coefficient adimensionnel,

$$v_1 = 0,60 (1 - f_{ck}/250)$$

z : bras de levier, $z = 0,9 d$

h_{\min} : hauteur minimale de la table de compression du béton.

4.3.3 Méthode de résolution

La fonction objectif représentée par l'Eq. (1) et les équations de contraintes représentée par les équations [Eq.(2) ,..., Eq.(14)], forment ensemble un problème d'optimisation non-linéaire. Les raisons de la non-linéarité de ce problème d'optimisation sont essentiellement liées aux expressions de la géométrie de la section transversale, de la résistance flexionnelle ultime de la section et d'autres équations de contraintes ainsi que l'obligation d'ajuster de manière itérative le poids propre de la pièce, à la fois dans les fonctions des contraintes ainsi que dans la fonction objectif. La fonction objectif et les fonctions des contraintes sont des fonctions non-linéaires en termes de variables de conception. Les variables de conception du modèle sont les dimensions géométriques de la section transversale en T , la section d'acier A_s et la profondeur relative de la zone de compression du béton ω (égal au rapport de la force axiale interne dans les aciers à la force totale de compression interne dans le béton).

Afin de résoudre ce problème d'optimisation non-linéaire, la méthode du Gradient Généralisé Réduit (GRG) [4] est utilisée car elle présente les avantages suivants:

- i) La méthode GRG est largement reconnue pour son efficacité en vue de résoudre une classe assez large de problèmes non-linéaires d'optimisation.

- ii) Le programme peut gérer jusqu'à 200 contraintes, ce qui est approprié pour les problèmes d'optimisation et de conception des poutres en T en béton armé.
- iii) Le programme lui-même permet d'estimer la matrice Hessienne en utilisant des techniques de différences finies.
- iv) La méthode du gradient réduit généralisé (GRG) utilisée par le programme permet une sélection systématique entre la méthode de Quasi-Newton et la méthode du Gradient Conjugué (GC) , en fonction de la capacité de stockage informatique disponible.

4.4 RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION

Deux exemples de conception types sont donnés, illustrant la procédure étape par étape de la conception optimale. Les objectifs de ces tests d'application sont les suivants:

- i) Evaluer la performance du modèle de conception de moindre coût et la méthodologie de solution.
- ii) Examiner les caractéristiques de la solution optimale afin d'identifier les contraintes actives et non actives.
- iii) Fournir des solutions de conception économique de moindre coût pouvant être utilisées comme base de comparaison dans de futures investigations.

Comme mentionné précédemment, les contraintes de conception sont définies en conformité avec les spécifications de conception et de calcul de l'EC-2. Les solutions optimales sont alors comparées aux solutions de conception standard obtenues en conformité avec le code de calcul EC-2. Pour mieux illustrer la variabilité des solutions optimales (y compris les effets de

pois propre) en fonction des coûts unitaires des matériaux, les solutions optimales sont calculées pour des ratios de coûts unitaires donnés. Les résultats en termes de gains correspondants sont présentés sous forme graphique.

4.4.1. Exemple numérique 1

Les poutres en T traitées dans ce travail sont isostatiques et de longues portées. Elles sont soumises à des moments de flexion prépondérants par rapport aux efforts tranchants.

Le coût de coffrage est pris égale à zéro ($C_f/C_c=0$) pour les exemples numériques traités.

4.4.1.1. Procédure étape par étape

L'approche précédente de conception économique à moindre coût est appliquée au dimensionnement optimal d'une poutre en T en béton armé pour laquelle un dimensionnement classique conformément au code de calcul de béton armé Eurocode2 (EC-2) a été effectué.

L'étude d'une poutre en T de pont roulant en béton armé appuyée simplement soumise à des forces concentrées disposées de telle sorte à produire un moment maximal comme indiqué sur la Fig. 4 ci-dessous.

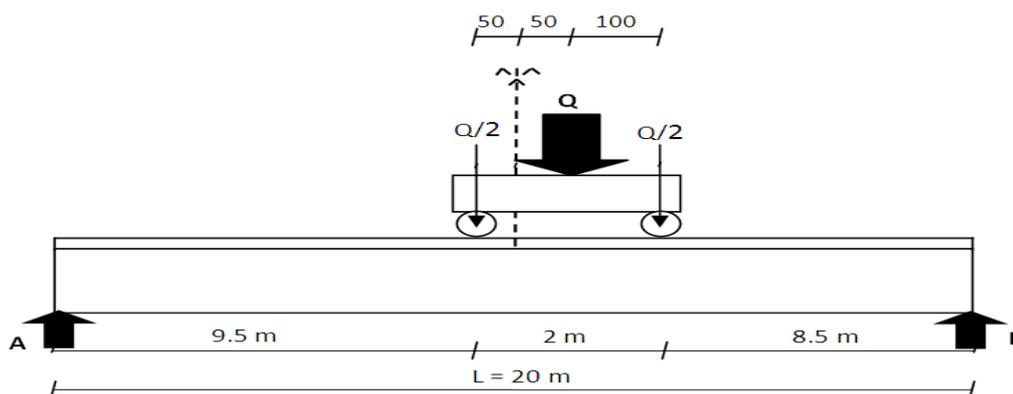


Fig. 4. Position critique du pont roulant sur l'élément de poutre en T

Les données relatives à ce système sont définies comme suit:

Portée de la poutre: $L = 20\text{ m}$

Charges et sollicitations :

Charge permanente: $G = 19.50 \text{ kN / m}$, (le poids propre initial incluse)

Moment maximale dû aux charges permanentes : $M_G = 975 \text{ KNm}$.

Effort tranchant maximal dû aux charges permanentes: $V_G = 195 \text{ KN}$.

Moment maximale dû aux charges de service: $M_Q = 2450 \text{ KNm}$.

Effort tranchant maximal dû aux charges de service: $V_Q = 517.2 \text{ KN}$.

La combinaison de charges fondamentale selon l'EC-2 conduit aux valeurs suivantes:

$$M_{Ed} = 1.35 M_G + 1.5 M_Q$$

$$M_{Ed} = 4.991 \text{ MNm}$$

$$V_{Ed} = 1.35 V_G + 1.5 V_Q$$

$$V_{Ed} = 1.039 \text{ MN}$$

Paramètres caractéristiques des matériaux acier et béton utilisés:

Tab.2 Valeurs des paramètres caractéristiques du béton et de l'acier

Caractéristiques des matériaux : béton et acier	Exemple numérique 1 Solution classique	Exemple numérique 2 Solution classique
<i>Classe de béton</i>	C20/25	C30/37
Résistance caractéristique à la compression du béton : f_{ck}	20MPa	30MPa
Coefficient partiel de sécurité du béton : γ_c	1.5	1.5
Résistance à la compressive de calcul du béton: f_{cd}	11.33MPa	17MPa
<i>Classe d'acier</i>	S400	S500
Limite d'élasticité de l'acier : f_{yk}	400 MPa	500 MPa
Contrainte de calcul de l'acier : f_{yd}	348 MPa	435 MPa
Module d'élasticité de Young de l'acier : E_s	$2 \times 10^5 \text{ MPa}$	$2 \times 10^5 \text{ MPa}$
Pourcentage minimal de l'acier: p_{min}	0.13%	0.13%
Pourcentage maximal de l'acier: p_{max}	4%	4%

Coûts unitaires des matériaux de construction :

Les coûts unitaires de l'acier et du béton sont généralement déterminés en conformité avec le livre des prix unitaires pour les matériaux de construction [23]. Dans le présent exemple, les ratios de coûts unitaires $C_s / C_c = 36$ et $C_f / C_c = 0$ sont utilisés.

Il est à noter que le vecteur solution du problème ci-dessus ne peut pas être considéré comme la solution définitive du problème de conception économique de moindre coût. Des itérations

sur le poids propre ont été effectuées du fait du changement des dimensions de la section initiale après optimisation, le degré de non-linéarité du problème d'optimisation qui en résulte augmente encore. La solution finale optimale est ainsi obtenue en deux phases:

La phase 1 porte sur la détermination de la solution à l'aide des paramètres de charge initiale (c'est à dire avec prise en compte du poids propre initial correspondant à la solution de départ).

La phase 2 concerne la mise à jour du poids propre de la poutre (à la fois dans les fonctions contraintes et la fonction objectif) en considérant les nouvelles dimensions géométriques de la section optimisée obtenue à l'issue de la phase 1. Les forces modifiées, en raison de la variation du poids propre, sont à nouveau calculées, les nouvelles dimensions de la poutre sont optimisées et le processus se poursuit jusqu'à la convergence de la solution. Dans le présent exemple, le vecteur solution optimale est atteinte après 5 cycles d'itérations seulement.

4.4.1.2. Comparaison entre la solution de conception optimale des moindres coûts et celle de conception standard

Le vecteur de variables de conception (pour des rapports de coût unitaire $C_s / C_c = 36$ et $C_f/C_c=0$) y compris les dimensions géométriques de la section transversale de la poutre en T et la section d'acier de renforcement en traction, obtenu à partir de la solution standard et la solution optimale (en utilisant l'approche proposée), sont indiquées dans le Tableau 4.

Tab. 4 Solution classique et solution optimale avec et sans effets du poids propre.

	Solution classique	Solution optimale	Solution optimale avec itérations sur le poids propre
b(m)	1.20	1.20	1.20
b _w (m)	0.40	0.30	0.29
h(m)	1.60	1.67	1.64
d(m)	1.46	1.50	1.47
h _f (m)	0.14	0.15	0.15
A _S (m ²)	117.02x10 ⁻⁴	114.30 x10 ⁻⁴	110.96x10 ⁻⁴
ω	0.424	0.477	0.472
C _o /C _c	1.117272	0.999221	0.969360

A partir des résultats ci-dessus, il apparaît clairement que la profondeur relative de la zone de compression du béton associée à la solution optimale est de 13% supérieure à celle donnée par la solution classique, ce qui conduit à une meilleure utilisation du béton. Il est également constaté qu'un gain de l'ordre de 15% peut être obtenu sur les valeurs des coûts relatifs C_o/C_c en utilisant la formulation basée sur la solution optimale économique de moindre coût proposée.

4.4.1.3 Comportement de la solution de conception de moindre coût

Une étude des contraintes d'inégalité a indiqué que les contraintes de conception de la poutre étaient toutes non actives à l'exception des contraintes de comportement associées à la résistance flexionnelle ultime équation Eq.(2); et les contraintes de conception géométriques [les équations Eq.(11); Eq.(13)] et l'équation Eq.(14). En outre, les résultats obtenus à l'aide de divers exemples ont montré que la solution optimale est insensible aux changements dans la contrainte liée à l'effort tranchant qui peut donc être exclue de la formulation du problème.

Les valeurs obtenues pour la largeur de la nervure b_w et de l'épaisseur de la table h_f sont celles des limites inférieures.

Afin de mieux illustrer la variabilité de la solution optimale en fonction du rapport du coût unitaire C_s/C_c, la solution optimale a été calculée pour différents rapports C_s / C_c = 20, 36, 50, 100, 150. Les vecteurs optimaux correspondants à la solution optimale ainsi que les valeurs de

$C_{o \text{ optimal}}$ (coût optimal total par unité de longueur de la poutre en T) et de $C_{o \text{ classique}}$ (le coût classique total par unité de longueur de poutre en T), sont présentés dans le Tableau 5.

Tab .5 Variation des solutions de conception optimale en fonction du rapport des coûts unitaires C_s/C_c .

C_s/C_c	20	36	50	100	150
Solution optimale					
b_{opt} (m)	1.20	1.20	1.20	1.20	0.97
$b_{w \text{ opt}}$ (m)	0.29	0.29	0.31	0.36	0.41
h_{opt} (m)	1.59	1.64	1.72	1.97	2.25
d_{opt} (m)	1.43	1.47	1.54	1.78	2.03
$h_{f \text{ opt}}$ (m)	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$A_{s \text{ opt}}$ (m ²)	116.25×10^{-4}	110.96×10^{-4}	103.89×10^{-4}	90.25×10^{-4}	83.43×10^{-4}
ω_{opt}	0.534	0.472	0.388	0.237	0.206
$C_{o \text{ optimal}}$	$0.78028 C_c$	$0.96936 C_c$	$1.13075 C_c$	$1.66351 C_c$	$2.15965 C_c$
$C_{o \text{ classique}}$	$0.92522 C_c$	$1.117272 C_c$	$1.26905 C_c$	$1.84210 C_c$	$2.41515 C_c$

La réduction des coûts globaux réalisés sur la poutre en T pour un rapport de coût unitaire donné C_s / C_c , peut être estimé à partir du gain relatif (en pourcentage) défini comme suit:

$$\text{Gain en (\%)} = ((C_{o \text{ classique}} - C_{o \text{ optimal}}) / C_{o \text{ classique}}) \times 100$$

Les gains relatifs ont été déterminés pour les différentes valeurs des ratios de coûts unitaires et les résultats correspondants sont présentés dans le Tableau 6 et illustrés dans la Fig. 5 ci-dessous.

Tab. 6 Variation du gain relatif (%) en fonction des valeurs du rapport C_s / C_c

C_s/C_c	20	36	50	100	150
Gain (%)	19	15	12	11	12

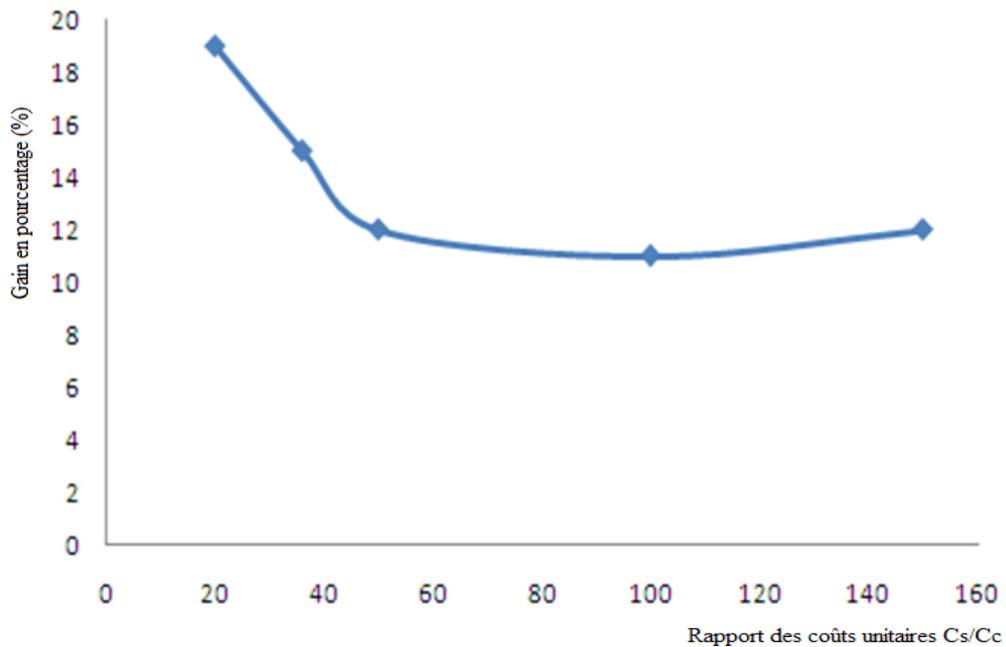


Fig. 5. Variation du gain (%) en fonction des valeurs du rapport C_s / C_c

Il peut être observé à partir de la figure 5, que le gain relatif diminue rapidement pour des valeurs croissantes du rapport du coût unitaire jusqu'à la valeur $C_s / C_c = 50$, puis se stabilise au-delà de cette valeur autour d'une valeur moyenne sensiblement égale à 12%.

4.4.2 Exemple numérique 2

Les données relatives à cet exemple sont définies comme suit:

Portée de la poutre: $L = 8\text{m}$

Charge permanente: $G = 21.49\text{KN} / \text{m}$ (y compris le poids propre initial)

Surcharge: $Q = 50\text{KN} / \text{m}$

Moment de calcul maximal:

$$M_{Ed} = 0.835\text{MNm}$$

Cisaillement maximal:

$$V_{Ed} = 0.418\text{MN}$$

Données relatives aux coûts unitaires des matériaux de construction:

$$C_s / C_c = 36 \text{ et } C_f / C_c = 0$$

Le vecteur des variables de conception, y compris les dimensions géométriques de la poutre à section transversale en T et la section d'acier obtenues à partir d'une approche standard et la solution de conception optimale y compris les effets du poids propre en utilisant l'approche proposée, sont indiqués dans le Tableau 7 ci-dessus.

Tab .7 Solution de conception optimale, incluant les effets du poids propre

	Solution classique	Solution optimale
b(m)	0.50	0.35
b _w (m)	0.30	0.25
h(m)	0.80	0.88
d(m)	0.72	0.79
h _f (m)	0.15	0.15
A _S (m ²)	29.83x 10 ⁻⁴	28.11 x10 ⁻⁴
ω	0.214	0.288
C _o	0.377388 C _c	0.336196 C _c

A partir des résultats ci-dessus, il apparaît clairement que la profondeur relative de la zone de compression du béton comparée à la solution optimale est de 35% supérieure à celle donnée par l'approche de conception standard, ce qui conduit à une utilisation meilleure du béton. Il est également constaté que le gain relatif réalisé sur les aciers est de l'ordre de 6% (ce qui est d'une grande importance) et que le coût total rapport $C_{o \text{ classique}} / C_{o \text{ optimal}}$ est égal à 1.12, soit un gain important ou une économie de l'ordre de 12% par rapport à la solution de conception classique.

4.5 CONCLUSIONS

Cette étude porte sur la conception économique de moindre coût des poutres en T en béton armé sous chargement ultime en conformité avec la dernière version de l'Eurocode2 (EC-2).

Une approche analytique du problème fondé sur un critère de conception de coût minimal des matériaux de construction mis en œuvre et un ensemble de contraintes, notamment de comportement non-linéaire du béton et de l'acier est formulée. L'ensemble des contraintes comprend (i) la recherche des limites pour les variables de décision (ii) les restrictions sur le

comportement structural en termes de résistance flexionnelle ultime, et les pourcentages minimaux et maximaux d'acier de renforcement (iii) les différentes conditions de compatibilité en termes de déformations dans le béton et l'acier ainsi que leurs limites, et (iv) les restrictions sur la résistance au cisaillement des sections en T. Des exemples de problèmes types avec leurs solutions de conception de moindres coûts (qui peuvent servir à des fins de comparaison pour des futures recherches) ont été présentés afin d'illustrer et de valider l'applicabilité de la formulation. Les résultats ont clairement montré que la programmation non-linéaire peut être appliquée avec succès à la conception optimale de moindre coût des poutres en T en béton armé ordinaire, offrant une approche générale qui peut être utilisée sans la nécessité d'abaques ou des tables de calcul et ou encore de connaissances préliminaires des algorithmes de programmation non-linéaire.

A partir des résultats de la présente étude, il est possible de tirer les principales conclusions suivantes:

- La formulation d'un problème de conception optimale de moindre coût des poutres en T en béton armé ordinaire peut être traduite en un problème de programmation non-linéaire, dont la solution numérique est efficacement déterminée selon la méthode du Gradient Généralisé Réduit. L'espace des solutions faisables et les solutions optimales peuvent être obtenus en utilisant seulement un nombre réduit de variables de conception représentant les dimensions de la section transversale de la poutre, la profondeur relative de la zone de compression et la section des aciers.
- La comparaison des solutions obtenues avec l'approche de dimensionnement standard a clairement montré que les solutions optimales obtenues en utilisant l'approche proposée conduisent généralement à des économies substantielles en termes de quantités des matériaux de construction à mettre en œuvre.

- Les solutions optimales sont affectées par le rapport des résistances des matériaux f_{yd} / f_{cd} et les pourcentages des aciers. La solution optimale est également très sensible à la configuration initiale et au rapport du coût C_s / C_c des matériaux utilisés, qui peut varier d'un pays à un autre, voire éventuellement d'une région à une autre pour certains pays.
- Les solutions optimales sont insensibles aux variations des contraintes de cisaillement pour les cas traités . La contrainte due à l'effort de cisaillement n'est pas généralement critique dans la conception optimale de moindre coût des poutres en T en béton armé soumises à la flexion simple et peut donc être exclue de la formulation du problème.
- La fonction objectif et les contraintes prises en compte dans le présent travail présentent un caractère illustratif. D'autres objectifs plus sophistiqués et d'autres considérations peuvent être facilement être pris en charge par des modifications appropriées du présent modèle économique de moindre coût. Bien que les développements présentés dans ce travail de recherche soient basées sur le règlement de béton armé EC-2, la formulation proposée peut facilement être élargie à d'autres codes de calcul utilisés dans d'autres pays sans modifications majeures.
- La méthodologie proposée est économiquement efficace par rapport aux méthodes conventionnelles de conception de bureaux d'études et peut être facilement étendue à d'autres sections couramment utilisées dans la conception des structures. Elle est également pratique, simple et plus complète que les autres modèles de calculs disponibles dans la littérature, qui ne tiennent pas compte de toutes les variables de conception prises en compte dans la présente recherche.

CHAPITRE V

MODELE DE CALCUL DE MOINDRE COUT DES POUTRES EN T EN BETON ARME PAR OPTIMISATION NON-LINEAIRE:

CAS DES BETONS ARMES A HAUTES RESISTANCES (BHR)

5.1. INTRODUCTION

Les éléments structuraux à sections transversales en T sont économiquement plus efficaces que les éléments à sections rectangulaires et sont fréquemment utilisés dans la construction industrielle [24]. Ils représentent des éléments importants dans divers domaines d'applications de la construction de planchers de bâtiment et les tabliers de ponts. Pour une utilisation à grande échelle de ces éléments structurels, comme cela peut être pour les éléments préfabriqués en béton armé à haute résistance (BHR) dans les unités de production, une attention particulière doit être accordée à la conception optimale car elle constitue un facteur clé dans la réduction du coût global du projet.

Du point de vue économique, il est nécessaire d'intégrer les nombreux avantages de BHR en utilisant des éléments structurels [25, 26, 27] dans la procédure de conception optimale. En utilisant la technologie du BHR, les dimensions transversales des éléments sont considérablement réduites. Par conséquent, moins de béton et moins de coffrage sont nécessaires. Au même temps, la quantité d'acier d'armature peut être réduite d'une façon significative. Le résultat net est que la poutre en T peut être réalisée avec la section transversale optimale du béton et la section optimale d'armature avec un coût minimal.

À l'heure actuelle, le coût de BHR pour une classe de résistance C80/95 est d'environ 1,50 plus élevé que celui du béton ordinaire de classe de résistance C30/37. Pour les BHR avec les classes supérieures telles que C90/105, le coût est de l'ordre de 1,80. Toutefois, ce surcoût est

plutôt négligeable en comparaison avec les avantages économiques obtenus grâce à la réduction des quantités de matériaux de construction à utiliser. En outre, cette réduction se traduira par la réduction du poids et donc des fondations assez légères et moins coûteuses par voie de conséquence.

Un autre aspect important dans le développement d'une approche de conception optimale est l'utilisation d'un algorithme d'optimisation approprié et adéquat. Différentes méthodes numériques ont été utilisées dans les techniques d'optimisation [6,28,29]. Les techniques d'optimisation peuvent être globalement divisées en trois grandes catégories: les techniques de programmation mathématique [25], les méthodes basées sur des critères d'optimalité [8, 9, 10, 30, 31, 32] et les algorithmes dits de recherche heuristique [20].

Actuellement, les algorithmes de programmation mathématique sont les plus couramment utilisés dans les méthodes de conception optimale pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes basées sur la transformation en des problèmes de minimisation sans contrainte [33]. Les méthodes directes considèrent que la limitation directe des surfaces dans l'espace des variables de conception par des contraintes ont été également développées. Cette dernière classe est un domaine de recherche très actif dans l'optimisation de l'ingénierie et de nombreux algorithmes sont disponibles de nos jours.

Ce travail porte sur le développement d'un modèle de calcul de moindre coût des poutres en T en béton à haute résistance (BHR) soumise à la flexion simple conformément aux Etats Limites Ultimes (ELU) en utilisant la dernière version de l'Eurocode2 (EC-2). Il importe de souligner que bien que les travaux développés dans le présent document soient basés sur l'utilisation d'un code spécifique de conception et de calcul des structures en béton armé à savoir l'Eurocode2 (EC-2), la méthodologie peut être facilement étendue à des codes de conception et de calcul utilisés dans d'autres pays sans modifications majeures.

Le problème d'optimisation est formulé comme un problème de programmation non-linéaire et le processus d'optimisation est fondé sur l'utilisation de la technique du Gradient Réduit Généralisé GRG [4] dans l'espace d'un nombre réduit de variables de conception.

Pour le processus d'optimisation des coûts, le coût global des matériaux de construction, y compris les coûts de béton, d'acier et de coffrage, représente la fonction objectif et l'ensemble des contraintes comprend des restrictions sur les contraintes de comportement, les conditions relatives à la compatibilité de déformation dans l'acier et le béton, les dimensions transversales de la section en T fondées sur des règles pratiques de pré-dimensionnement et de bonne exécution en vigueur des méthodes de conception et de calculs actuelles [12]. Le poids propre de la poutre en T qui peut contribuer de manière substantielle à la détermination de la capacité de résistance flexionnelle ultime pour de longues portées est considéré comme variable à la fois dans la fonction objectif et les fonctions de contraintes.

Des exemples types sont présentés pour illustrer l'applicabilité de la formulation, de la méthodologie de solution conformément aux spécifications de l'Eurocode2 (EC-2) et de fournir des solutions optimales susceptibles d'être utilisées dans de futures investigations. Les résultats sont ensuite confrontés aux solutions issues de méthodes classiques de conception et de calcul des poutres en T en béton armé à haute résistance. Enfin des conclusions d'importance pratique pour le monde professionnel sont formulées.

5.2. ETATS LIMITES ULTIMES

La conception fondée sur un compromis coût-sécurité d'une structure en béton armé soumise à des conditions de charge ultime dépend rarement d'une analyse théorique complexe. Elle peut être réalisée par un bon choix du site de construction, un meilleur choix de la structure porteuse et son système de contreventement et une attention particulière doit être accordée aux règles de pratique courante de pré-dimensionnement et de bonne exécution. Cependant, la

réduction du coût global de la structure dépendra fortement d'un choix adéquat des matériaux de construction qui seront utilisés, y compris les coûts de main-d'œuvre, ainsi que de la conception optimale des différents éléments structurels (comme cela peut être le cas pour une utilisation à grande échelle des éléments préfabriqués en BHR). En outre, la conception optimale de ces composants doit être fondée sur le comportement non-linéaire de BHR et de l'acier décrits dans les codes de conception et de calcul de béton armé en vigueur.

Conformément à l'Eurocode2 (EC-2) [12], les hypothèses retenues à l'ELU pour les distributions de contrainte et de déformation des poutres en T en BHR représentée dans Fig. 1.a sont respectivement illustrées dans la Fig. 1.b. et Fig. 1.c.

Les dimensions en béton armé à haute résistance de la section transversale sont définies par les paramètres suivants (voir Fig1.a):

b: largeur effective de la table de compression

b_w : largeur de la nervure

h: hauteur totale

h_f : hauteur de la table

Les paramètres d , d_s et A_s représentent respectivement:

d : hauteur utile

d_s : distance du centre de gravité des aciers à la fibre la plus tendue du béton.

A_s : section des aciers tendus

Dans le diagramme de déformation linéaire ε_c et ε_s désignent respectivement les déformations du béton et de l'acier (voir Fig.1.b). Le paramètre α représente la profondeur relative de la zone comprimée du béton et de l'axe neutre à partir de la fibre supérieure la plus comprimée du béton. Dans le diagramme uniformément répartie des contraintes montré par la Fig.1.c, $f_{cd} = 0.85f_{ck}/\gamma_c$ est la valeur de calcul de résistance à la compression du béton, γ_c le facteur de sécurité partiel pour le béton et f_{ck} est la résistance caractéristique du béton à 28 jours.

Conformément à l'EC-2, un diagramme rectangulaire simplifié est recommandé moyennant une adaptation pour les bétons de hautes résistances. Cela nécessite la mise en place d'un facteur λ de la profondeur de la zone de compression et un facteur de la résistance de calcul η . λ et η sont deux facteurs à la fois linéairement dépendant de la résistance caractéristique f_{ck} et donnés par les deux équations suivantes:

$$\lambda = 0.8 - (f_{ck} - 50) / 400 \quad (1)$$

$$\eta = 1.0 (f_{ck} - 50) / 200 \quad (2)$$

avec $50 < f_{ck} \leq 90 \text{MPa}$

F_c et F_s désignent les résultantes des forces internes dans la section de BHR et l'acier, respectivement.

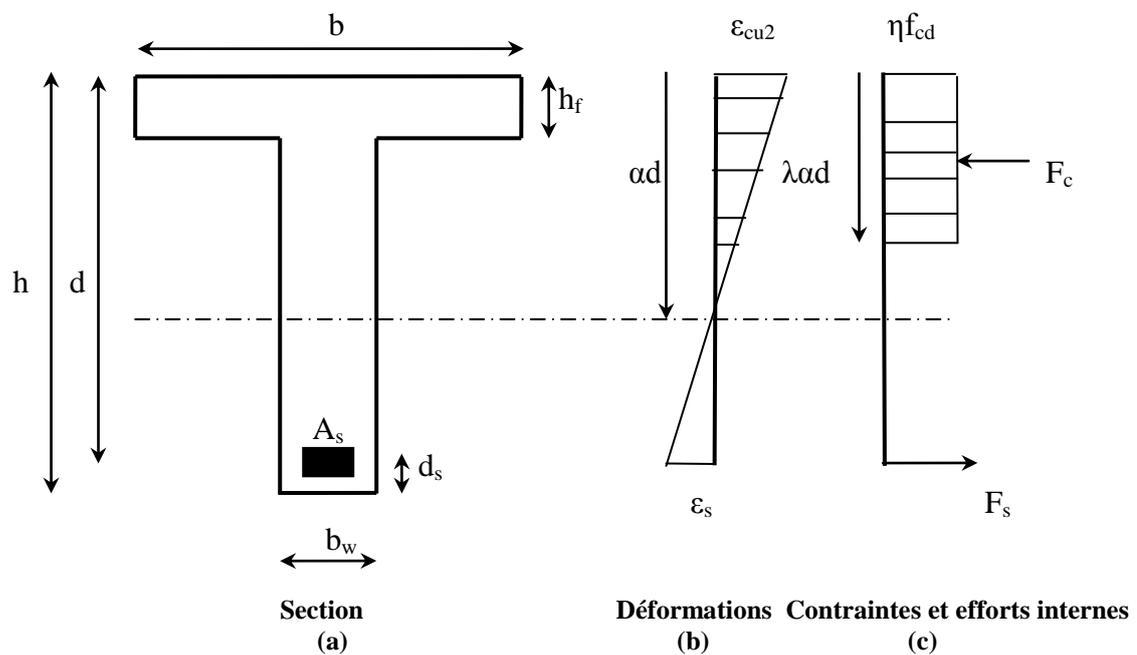


Fig.1. (a) Poutre en T en BHR; (b) diagramme de déformations et (c) diagramme de contraintes et efforts internes.

Il convient également de noter que la conception optimale des poutres à sections en T en béton à haute résistance nécessite la connaissance des lois constitutives non-linéaires des deux matériaux acier et béton et qui seront décrites dans les paragraphes suivants.

5.2.1. Courbes contraintes-déformations non-linéaires du Béton à Haute Résistance

Diverses formulations à base analytique des courbes contraintes-déformations des poutres en BHR sont disponibles dans la littérature spécialisée [12, 34].

Conformément à l'Eurocode2 (EC-2), deux alternatives de courbes contraintes-déformations du béton peuvent être envisagées: l'une est basée sur la loi puissance (voir Fig.2.) et l'autre est basée sur une relation bilinéaire. Dans le présent travail, seule la conception courbe contraintes-déformations basée sur la loi puissance sera retenue. Dans ce cas, la loi contraintes-déformations peut être écrite comme:

$$\sigma = f_{cd} [1 - (1 - \varepsilon_c / \varepsilon_{c2})^n] \quad \text{pour } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad (3-1)$$

$$\sigma = f_{cd} \quad \text{pour } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \quad (3-2)$$

où n , ε_{c2} et ε_{cu2} peuvent être obtenues à partir des équations suivantes:

$$n = 1.4 + 23.4 [(90 - f_{ck}) / 100]^4 \quad (4)$$

$$\varepsilon_{c2} (\text{‰}) = 2.0 + 0.0085 (f_{ck} - 50)^{0.53} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{cu2} (\text{‰}) = 2.6 + 35 [(90 - f_{ck}) / 100]^4 \quad (6)$$

le Tableau 1 ci-dessous résume les valeurs des propriétés caractéristiques des différentes classes de BHR telles que décrites par l'EC-2.

Tab.1 Classes de résistance et propriétés du BHR

Classe	C55/67	C60/75	C70/85	C80/95	C90/105
f_{ck} (MPa)	55	60	70	80	90
f_{ctm} (MPa)	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0
ε_{c2} (‰)	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
ε_{cu2} (‰)	3.1	2.9	2.7	2.6	2.6
n	1.75	1.6	1.45	1.4	1.4
λ	0.7875	0.775	0.7500	0.7250	0.7000
η	0.975	0.950	0.900	0.850	0.800

Dans ce tableau, les définitions suivantes sont utilisées:

ε_{c2} : déformation correspondante à la contrainte maximale pour la loi puissance (σ_c - ε_c)

ε_{cu2} : déformation ultime du béton à la compression de la loi puissance (σ_c - ε_c)

n : facteur

f_{ctm} : résistance moyenne à la traction du béton

A noter que la relation ci-dessus pour la loi puissance se réduit à une parabole -rectangle pour les bétons ordinaires avec $n = 2$ et $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$.

Il convient également de noter que le BHR montre un comportement plus fragile, selon les courbes à branches horizontales pour les valeurs de résistance caractéristique à la compression $50 < f_{ck} \leq 90\text{MPa}$.

La rupture est supposée avoir lieu par écrasement du béton pour un raccourcissement maximal ε_{cu2} (‰) et la résistance à la traction du béton est également supposée nulle.

Dans le présent travail, dans un souci de simplification, les forces résultantes et moments internes dans une section de poutre en T en BHR ont été calculés en utilisant un schéma de répartition uniforme des contraintes comme indiqué dans Fig.1.c. et telles que recommandé par les dispositions de l'EC-2 en flexion pour les sections partiellement comprimées dans le cas de Pivot B.

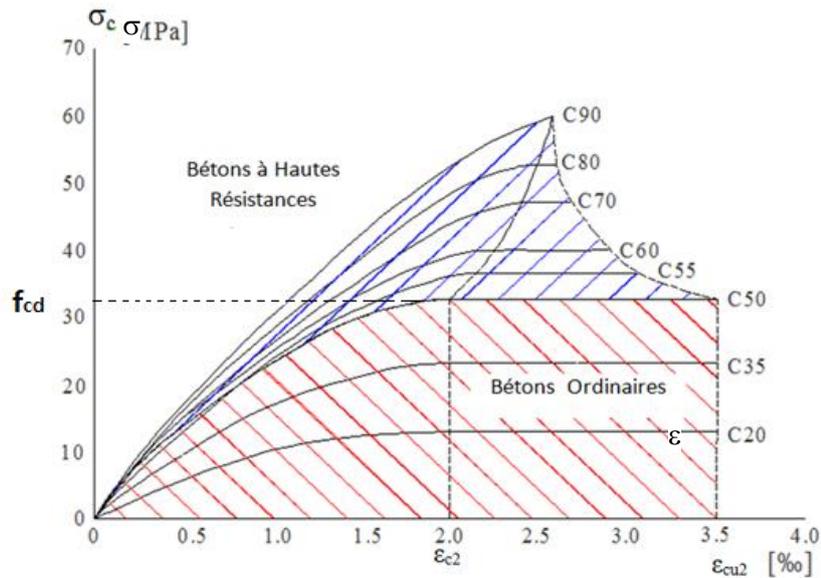


Fig. 2. Courbes contraintes-déformations du béton ordinaire et BHR.

5.2.2 Courbe contraintes-déformations bilinéaire à palier horizontal de l'acier

Le diagramme de contrainte-déformation pour l'acier est donné par la courbe de comportement simplifiée montrée par la Figure 3. Le comportement de l'acier est de type élastique parfaitement plastique, linéaire dans la plage élastique jusqu'à la limite caractéristique d'élasticité f_{yk} et la contrainte de calcul de l'acier est $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$ où, γ_s est le coefficient partiel de sécurité. Il convient de noter que l'EC-2 permet l'utilisation d'une courbe contrainte-déformation alternative à celle indiquée dans la Figure 3 avec une branche supérieure inclinée et la déformation maximale limitée à une valeur qui dépend de la classe de l'acier.

Cependant, la courbe la plus couramment utilisé est celle donnée par la Figure 3. Elle sera utilisée dans la présente recherche.

Dans le présent travail, la contrainte dans l'acier est maintenue égale à f_{yd} . La phase élastique représentée sur la Fig. 3 est représentée dans le but d'indiquer la limite inférieure du domaine plastique. Ce dernier correspond à la meilleure utilisation de l'acier à l'état limite ultime. En

outre, la déformation de l'acier est considérée illimitée conformément aux dispositions de l'Eurocode2 (EC-2) et indiquée en Fig.3.

Dans la présente thèse, pour une utilisation optimale de l'acier, la déformation doit être toujours supérieure ou égale à la déformation limite élastique $\varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s$, où E_s représente le module d'élasticité de l'acier.

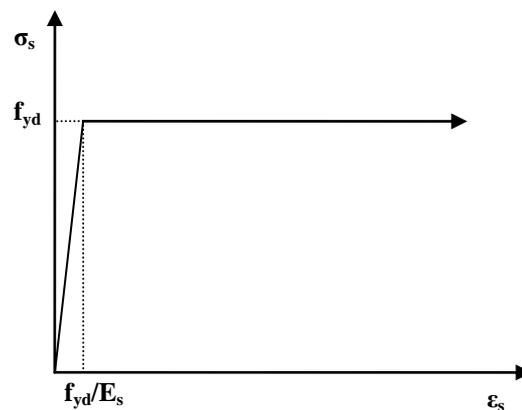


Fig. 3. Courbe contraintes-déformations bilinéaire à palier horizontal de l'acier

5.3. FORMULATION ET SOLUTION DU PROBLEME DE CONCEPTION OPTIMALE DE MOINDRE COÛTS DES SECTIONS EN T EN BETON ARME A HAUTE RESISTANCE

5.3.1 Position du problème

Les variables de conception du modèle sont les dimensions géométriques (b , b_w , d , h_f) de la section transversale de la poutre en T, la section d'acier A_s , et la profondeur relative α de la zone de compression du béton.

Trouver les variables de conception b , b_w , d , h_f , A_s , et α étant donné :

Portée de la poutre: L

Moment fléchissant ultime: M_{Ed}

Effort de cisaillement ultime: V_{Ed}

Résistance caractéristique à la compression sur cylindre de BHR à 28 jours: f_{ck}

Facteur de résistance de calcul: η

Facteur de profondeur de la zone de compression: λ

Limite d'élasticité caractéristique pour acier: f_{yk}

Module élastique: E_s

Pourcentage minimal de l'acier: p_{\min}

Pourcentage maximal de d'acier: p_{\max}

Coût total par unité de longueur de la poutre en T en BHR: C

Coût unitaire de l'acier d'armature: C_s

Coût unitaire du béton BHR: C_c

Coût unitaire de coffrage: C_f

5.3.2 Fonction objectif

Considérons maintenant la poutre à section en T en BHR représentée sur la Fig. 1.a, et soit C la fonction objectif représentant le coût total de béton, de l'acier et du coffrage utilisés par unité de longueur de la poutre.

Cette fonction peut être définie comme:

$$C = C_c(b_w d + (b - b_w) h_f) + C_s A_s + C_f [b + 2(d_s + d)] \quad (7)$$

Où les coûts unitaires C_c , C_s et C_f sont définis précédemment.

Les éléments de coût tels que les coffrages de béton et de façonnage de l'acier sont présentés implicitement et sont inclus dans la fonction objectif en termes de pourcentages appropriés des coûts unitaires de béton et d'acier, respectivement.

Il devrait être tout aussi important de noter que dans un problème d'optimisation de moindres coûts, les valeurs optimales des variables de conception sont affectées par les valeurs relatives des coûts de la fonction objectif seulement, mais pas par les valeurs absolues des coûts. En

d'autres termes, les valeurs absolues de coût affectent la valeur finale de la fonction objectif, et non pas les valeurs optimales des variables de conception. Ainsi, la fonction objectif à minimiser peut être écrite comme suit:

$$C / C_c \longrightarrow \text{Min.}$$

$$C / C_c = b_w d + (b - b_w) h_f + (C_s / C_c) A_s + C_f / C_c [b + 2(d_s + d)]$$

La valeur du rapport coût C_s / C_c varie d'un pays à un autre, voire d'une région à une autre pour certains pays.

5.3.3 Formulation du problème

Comme mentionné précédemment, les contraintes de conception seront définies en conformité avec les spécifications de conception de l'Eurocode2 (EC-2). Ainsi, et sans perte de généralité, le problème de conception de moindre coût des poutres en T en béton armé sous charges ultimes peut être mathématiquement formulé comme suit:

Trouvez les variables de conception b , b_w , h , d , h_f , A_s et α telles que:

$$C / C_c = b_w d + (b - b_w) h_f + (C_s / C_c) A_s + C_f / C_c [b + 2(d_s + d)] \longrightarrow \text{Min.} \quad (8)$$

Sous les contraintes suivantes:

a) *Contraintes de comportement:*

$$M_{Ed} \leq \eta f_{cd} (b - b_w) h_f (d - 0,50 h_f) + \eta \lambda f_{cd} \cdot b_w \cdot d^2 \alpha (1 - 0,5 \lambda \alpha)$$

$$(\text{moment externe incluant le poids propre} \leq \text{Moment résistant de la section}) \quad (9)$$

$$\alpha = (f_{yd} / f_{cd}) (A_s / \eta \lambda b_w \cdot d) - (b - b_w) h_f / \lambda b_w \cdot d \quad (\text{équilibre des forces internes}) \quad (10)$$

$$A_s / b_w d \geq p_{\min} \quad (\text{pourcentage minimal d'acier}) \quad (11)$$

$$A_s / (b_w h + (b - b_w) h_f) \leq p_{\max} \quad (\text{pourcentage maximal d'acier}) \quad (12)$$

Dans les équations (9) et (10), l'axe neutre se trouve dans la nervure).

b) *Conditions de compatibilité de déformations dans l'acier et le béton:*

$$\varepsilon_{cu2}((1/\alpha)-1) \geq f_{yd} / E_s \quad (\text{meilleure utilisation de l'acier}) \quad (13)$$

$$\lambda\alpha(1-0,5\lambda\alpha) \leq \mu_{limit} \quad (\text{ferraillage sans acier comprimé}) \quad (14)$$

c) *Contrainte de l'effort tranchant:*

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max} = v_1 f_{cd} b_w z / (\tan(\theta) + \cot(\theta)) \quad (15)$$

d) *Contraintes liées aux variables de conception y compris les règles de pratique courante de pré-dimensionnement et de bonne exécution:*

$$h \geq L / 16 \quad (16)$$

$$d / h = 0.90 \quad (17)$$

$$0.20 \leq b_w / d \leq 0.40 \quad (18)$$

$$(b-b_w) / 2 \leq L / 10 \quad (19)$$

$$b/h_f \leq 8 \quad (20)$$

$$h_f \geq h_{min} \quad (21)$$

où:

μ_{limit} : valeur limite du moment réduit:

θ : angle entre les bielles de compression de béton

v_1 : un coefficient adimensionnel, $v_1 = 0,60 (1-f_{ck}/250)$

z : bras de levier, $z = 0,9 d$

h_{min} : hauteur minimale de la table de compression du béton.

Il convient de noter que les ratios de coûts unitaires figurant dans l'Eq. (8) et plus précisément le rapport coût C_s / C_c varie d'un pays à l'autre et peut éventuellement dépendre d'une région à l'autre pour certains pays. Les valeurs de ces ratios de coût peuvent être estimées sur la base des données fournies dans les livres de prix unitaires applicables de matériaux de construction [23].

3.4. Méthode de solution

La fonction objectif donnée par l'Eq. (8) et les équations de contraintes représentées par l'Eq.(9) à l'Eq. (21), forment ensemble un problème d'optimisation non-linéaire.

Les raisons de la non-linéarité de ce problème d'optimisation sont essentiellement liées aux expressions de la géométrie de la section transversale, de la résistance flexionnelle ultime de la section et d'autres équations de contraintes ainsi que l'obligation d'ajuster de manière itérative le poids propre de la pièce, à la fois dans les fonctions des contraintes ainsi que dans la fonction objectif. La fonction objectif et les fonctions des contraintes sont des fonctions non- linéaires en termes de variables de conception. Les variables de conception du modèle sont les dimensions géométriques de la section transversale en T, la section d'acier A_s et la profondeur relative de la zone de compression du béton α (égal au rapport de la force axiale interne dans les aciers à la force totale de compression interne dans le béton). Afin de résoudre ce problème d'optimisation non-linéaire. Afin de résoudre ce problème d'optimisation non-linéaire, la méthode du Gradient Réduit Généralisé [4] est utilisée comme il est largement reconnu comme un algorithme efficace pour résoudre une classe assez large de problèmes d'optimisation non-linéaire.

5.4. RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION

Deux exemples sont traités.

Le premier exemple illustre les avantages économiques de l'utilisation de la technologie de BHR.

Le deuxième exemple illustre la performance du modèle de calcul de moindre coût et la méthodologie de solution.

Les poutres en T traitées dans ce travail sont isostatiques et de longues portées. Elles sont soumises à des moments de flexion prépondérants par rapport aux efforts tranchants.

Le coût de coffrage est pris égale à zéro ($C_f/C_c=0$) pour les exemples numériques traités.

4.1. Exemple numérique 1: Avantage économique de l'utilisation de la technologie du béton à haute résistance

Un exemple de conception est donné, illustrant l'avantage économique de l'utilisation de BHR dans la conception des poutres à sections en T à l'ELU. Etant donné, les caractéristiques de l'acier, les coûts unitaires de matériaux de construction et les conditions de chargement prévu, des solutions de conception sont obtenus pour les poutres en T en béton ordinaire et avec BHR conformément aux dispositions de l'Eurocode2 (EC-2). On voit d'après les résultats présentés dans le Tableau 2 et le Tableau 3 que l'utilisation de résistance à la compression $f_{ck}=30\text{MPa}$ pour un béton ordinaire (classe C30/37) nécessite une section transversale du béton ordinaire $S = 0.66\text{m}^2$, une section d'acier $A_s = 93\text{cm}^2$ et un coût total par unité de longueur $C = 0.993C_c$. D'autre part, il est également observé que l'utilisation de béton BHR de résistance à la compression $f_{ck}=60\text{MPa}$ (classe C60/75) permet une réduction de la surface en béton de 21% et une réduction de la surface de l'acier de 3% ainsi qu'une réduction des coûts significative de 29% des matériaux de construction.

Tab.2 Comparaison des solutions de conception classiques pour le béton armé ordinaire de Classe C30/37 et le béton à haute résistance de Classe C60/75 ($M_{ED}=4.991\text{MNm}$, $V_{ED}=1.039\text{MN}$, Classe de l'acier S500, $C_s/C_c=36$ pour le béton ordinaire, $C_s/C_c=25$ pour le béton BHR, $C_f/C_c=0$).

	Solution classique Béton ordinaire Classe C30/37	Solution optimale BHR Classe C60/75
b(m)	1.20	1.00
b _w (m)	0.40	0.35
h(m)	1.50	1.48
d(m)	1.35	1.33
h _f (m)	0.15	0.12
A _s (m ²)	93x10 ⁻⁴	90 x10 ⁻⁴
α	0.270	0.121
C/ C _c	0.993101	0.769518

Tab.3 Comparaison des gains obtenus en% lors de l'utilisation du béton armé ordinaire de classe C30/37 et BHR de classe C60/75.

	Poutre en T Béton ordinaire Classe C30/37	Poutre en T BHR Classe C60/75	Gain en pourcentage (%)
Aire du béton: $S=b_w d+(b-b_w) h_f$	0.660m ²	0.544m ²	21%
Aire des aciers: A_s	93cm ²	90 cm ²	3%
Coûts des matériaux de construction: $C/ C_c =C_c(b_w d+(b-b_w)h_f)+C_s A_s+C_f[b+2(d_s+d)]$	0.993101	0.769518	29%

5.4.2 Exemple numérique 2: Performance du modèle de calcul de moindre coût et méthodologie de solution

Dans le deuxième exemple, on illustre la procédure étape par étape de la conception optimale (modèle de calcul de moindre coût des poutres en T en BHR). Les objectifs de ces tests d'application sont les suivants:

- i) Evaluer la performance du modèle de conception de moindre coût et la méthodologie de solution.
- ii) Examiner les caractéristiques de la solution optimale afin d'identifier les contraintes actives et non actives.
- iii) Fournir des solutions de conception économique de moindre coût pouvant être utilisées comme base de comparaison dans de futures investigations.

Comme mentionné précédemment, les contraintes de conception sont définies en conformité avec les spécifications de conception et de calcul de l'EC-2. Les solutions optimales sont alors comparées aux solutions de conception standard obtenue en conformité avec le code de calcul EC-2. Pour mieux illustrer la variabilité des solutions optimales (y compris les effets de poids propre) en fonction des coûts unitaires des matériaux, les solutions optimales sont calculées

pour des ratios de coûts unitaires donnés. Les résultats en termes de gains correspondants sont présentés sous forme graphique.

Les données relatives à l'exemple B sont définies comme suit:

Portée de la poutre: $L = 29\text{m}$

Moment fléchissant agissant ultime, y compris le poids propre: $M_{Ed} = 8\text{MNm}$

Effort de cisaillement ultime, y compris le poids propre: $V_{Ed} = 3\text{MN}$

Les données relatives aux paramètres caractéristiques du BHR:

Classe de résistance du béton: C80/95.

Résistance caractéristique à la compression de béton à 28 jours: $f_{ck} = 80\text{MPa}$.

Coefficient partiel de sécurité pour le béton: $\gamma_c = 1.5$

Contrainte de compression admissible: $f_{cd} = 45.33\text{MPa}$

$\lambda = 0.725$

$\eta = 0.850$

Les données relatives aux propriétés de l'acier:

Acier de classe: S500

Limite élastique: $f_{yk} = 500\text{MPa}$

Coefficient partiel de sécurité pour l'acier: $\gamma_s = 1.15$

Contrainte de traction admissible: $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 435\text{MPa}$

Module d'élasticité: $E_s = 2 \times 10^5 \text{MPa}$

Pourcentage minimal de l'acier: $p_{\min} = 0.002496 = 0.26f_{ctm}/f_{yk}$

Pourcentage maximal de l'acier: $p_{\max} = 4\%$

$f_{ctm} = 4.4\text{MPa}$

Les données relatives aux coûts de matériaux de construction:

$C_s / C_c = 25$

$C_f / C_c = 0$

5.4.2.1. Procédure étape par étape

L'approche précédente de conception économique à moindre coût est appliquée au dimensionnement optimal d'une poutre en T en béton armé pour laquelle un dimensionnement classique conformément au code de calcul de béton armé Eurocode2 (EC-2) a été effectué.

Les coûts unitaires des matériaux de construction :

Les coûts unitaires de l'acier et du béton sont généralement déterminés en conformité avec le livre des prix unitaires pour les matériaux de construction [18]. Dans le présent exemple, les ratios de coûts unitaires $C_s / C_c = 36$ et $C_f / C_c = 0$ sont utilisés.

Il est à noter que le vecteur solution du problème ci-dessus ne peut pas être considéré comme la solution définitive du problème de conception économique de moindre coût. Des itérations sur le poids propre ont été effectuées du fait du changement des dimensions de la section initiale après optimisation, le degré de non-linéarité du problème d'optimisation qui en résulte augmente encore. La solution finale optimale est ainsi obtenue en deux phases:

La phase 1 porte sur la détermination de la solution à l'aide des paramètres de charge initiale

(C'est à dire avec prise en compte du poids propre initial correspondant à la solution de départ).

La phase 2 concerne la mise à jour du poids propre de la poutre (à la fois dans les fonctions contraintes et la fonction objectif) en considérant les nouvelles dimensions géométriques de la section optimisée obtenue à l'issue de la phase 1. Les forces modifiées, en raison de la variation du poids propre, sont à nouveau calculées, les nouvelles dimensions de la poutre sont optimisées et le processus se poursuit jusqu'à la convergence de la solution. Dans le présent exemple, le vecteur solution optimale est atteinte après 3 cycles d'itérations seulement.

5.4.2.2. Comparaison entre la solution de conception optimale des moindres coûts et celle de conception standard

Le vecteur de variables de conception (pour des rapports de coût unitaire $C_s / C_c = 36$ et $C_f/C_c = 0$), y compris les dimensions géométriques de la section transversale de la poutre en T et la section d'acier de renforcement en traction, obtenu à partir de la solution standard et la solution et de la solution optimale (en utilisant l'approche proposée), sont indiquées dans le Tableau 4.

Tab.4 Solution classique et solution optimale avec et sans effets du poids propre

	Solution classique BHR	Solution optimale BHR	Solution optimale BHR avec effet du poids propre
b(m)	1.00	0.80	0.80
b _w (m)	0.40	0.32	0.30
h(m)	1.70	1.80	1.80
d(m)	1.53	1.62	1.62
h _f (m)	0.12	0.10	0.10
A _s (m ²)	126x10 ⁻⁴	122 x10 ⁻⁴	114x10 ⁻⁴
α	0.159	0.236	0.214
C/ C _c	0.999773	0.876514	0.858287

A partir des résultats ci-dessus, il apparaît clairement que la profondeur relative de la zone de compression du béton associée à la solution optimale est de 48% supérieure à celle donnée par la solution classique, ce qui conduit à une meilleure utilisation du béton. Il est également constaté qu'un gain de l'ordre de 14% peut être obtenu sur les valeurs des coûts relatifs C_0/C_c en utilisant la formulation basée sur la solution optimale économique de moindre coût proposée sans effet du poids propre et 16% avec effet du poids propre.

5.4.2.3. Comportement de la solution de conception de moindre coût

Une étude des contraintes d'inégalité a indiqué que les contraintes de conception de la poutre étaient toutes non actives à l'exception des contraintes de comportement associées à la résistance flexionnelle ultime équation Eq.(9); et les contraintes de conception géométriques [les inéquations Eq.(16); Eq.(18)] et les inéquation [Eq.(20) ; Eq.(21)]. En outre, les

résultats obtenus à l'aide de divers exemples ont montré que la solution optimale est insensible aux changements dans la contrainte liée à l'effort tranchant qui peut donc être exclue de la formulation du problème. Les valeurs obtenues pour la largeur de la nervure b_w et de l'épaisseur de la table h_f sont celles des limites inférieures.

Afin de mieux illustrer la variabilité de la solution optimale en fonction du rapport du coût unitaire C_s/C_c , la solution optimale a été calculée pour différents rapports

$$C_s / C_c = 13, 25, 36, 70, 100, 130, 160, 200.$$

Les vecteurs optimaux correspondants à la solution optimale ainsi que les valeurs de C_{optimal} (coût optimal total par unité de longueur de la poutre en T) et de $C_{\text{o classique}}$ (le coût classique total par unité de longueur de poutre en T), sont présentés dans le Tableau 5.

Tab .5 Variation des solutions de conception optimale en fonction du rapport des coûts unitaires C_s/C_c .

C_s/C_c	13	25	36	70	100	130	160	200
Gain (%)	16	14	13	10	10	12	14	18

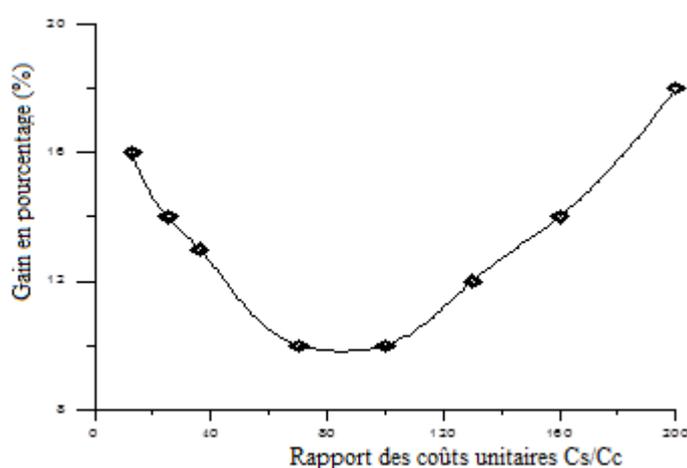


Fig. 4. Variation du gain en (%) en fonction du rapport des coûts unitaires C_s / C_c .

Il peut être observé à partir de la Fig.4, que le gain relatif diminue rapidement pour des valeurs croissantes du rapport du coût unitaire, se stabilise autour d'une valeur moyenne sensiblement égale à 10% pour les valeurs de $70 \leq C_s / C_c \leq 100$, puis augmente de manière significative au-delà de cette valeur moyenne.

En outre, la performance et la sensibilité du présent modèle de conception de moindre coût pour différentes classes de BHR et le taux de résistance des matériaux utilisés et prescrits dans CE-2 ont été examinés. Les résultats sont consignés dans le Tableau 6, ci-dessous, pour un rapport $C_s / C_c = 25$. On voit clairement que les pourcentages de gain sont insensibles aux variations de classes de BHR et les rapports de contraintes des matériaux. Des économies substantielles allant jusqu'à 14% (16% si l'on inclut les effets du poids propre qui peuvent être importants pour de des poutres de longues portées) peuvent être obtenus pour cet exemple de conception.

Tab.6 Performance du modèle de calcul de moindre coût de BHR par rapport aux classes de résistances et les ratios des résistances des matériaux de construction utilisés.

Classe de BHR	C55/67	C60/75	C70/85	C80/95	C90/105
f_{yd} / f_{cd}	14	13	11	9	8
(Gain en %)	13	14	14	14	14

5.5. CONCLUSIONS

Un modèle de calcul de moindre coût est présenté pour la conception optimale des poutres en T en BHR soumises à la flexion simple sous les états limites ultimes compte tenu des relations contraintes-déformations utilisées dans l'Eurocode2 (EC-2). La fonction objectif coût, les contraintes de comportement, y compris les non-linéarités de l'acier et de béton BHR, les conditions relatives à la compatibilité déformation de l'acier et du béton et les contraintes de variables géométriques de conception sont dérivées et mises en œuvre au sein de l'algorithme

d'optimisation du GRG. Le vecteur solution optimale comprend les variables de conception suivantes i)- dimensions géométriques optimales $(b, b_w, h, h_f)_{opt}$ de la poutre à section en T en BHR; ii)- section d'acier optimale $(A_s)_{opt}$; iii)- profondeur relative optimale $(\alpha)_{opt}$ de l'axe neutre de BHR et zone de compression, à partir de lesquelles les autres valeurs optimales de toutes quantités liées peuvent être déterminées. Une attention particulière est accordée à la formulation du problème et la méthodologie de solution. Le présent modèle est appliqué à cinq classes différentes de BHR: C55/67; C60/75; C70/85; C80/95; C90/105, décrites dans le EC-2. Afin de mieux illustrer la variabilité de la solution optimale avec les coûts de matériaux de construction, les solutions optimales ont été également calculées pour un large éventail de ratios de coûts unitaires $C_s / C_c = 13, 25, 36, 70, 100, 130, 160, 200$.

Les résultats obtenus dans cette étude ont montré que la technique du Gradient Réduit Généralisé d'optimisation peut être appliquée avec succès à la conception à moindre coût des poutres en T en béton à haute résistance soumises à la flexion simple sous les états limites ultimes offrant une approche qui peut être utilisée sans connaissance préalable de l'optimisation mathématique. Les comparaisons avec la méthode de conception standard ont clairement montré que les solutions optimales obtenues en utilisant le modèle du moindre coût, a permis d'atteindre des quantités optimales de matériaux de construction à utiliser.

Les solutions optimales sont très sensibles à la configuration initiale de la section et des rapports de coûts de matériaux de construction C_s / C_c utilisés.

Le pourcentage de gain obtenu en utilisant la formulation de conception de moindre coût est presque insensible aux variations des classes de BHR et des rapports de résistances des matériaux. Des économies substantiels allant jusqu'à 14% (ou 16% si les effets du poids propre sont inclus, ce qui peut être important pour de poutres de longues travées) peut être réalisé indépendamment des classes adoptées de BHR.

L'approche de calcul proposée est pratiquement simple, fiable et efficace par rapport aux procédures de conception standard utilisée dans les règles de l'art actuel.

D'autres exigences pratiques selon d'autres codes et d'autres contraintes de fabrication, ainsi que des fonctions objectifs de coûts plus sophistiquées et de section de géométrie différente peuvent être mises en œuvre dans le modèle d'optimisation de moindre coût actuel sans modifications majeures.

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

6.1 CONCLUSIONS GENERALES

Le présent travail de recherche résume une méthodologie générale pour obtenir, sur la base d'une méthode de minimisation directe, des dimensionnements optimaux de moindres coûts des poutres en T en béton armé ordinaire et à haute résistance soumises à des charges ultimes. Ce chapitre synthétise l'essentiel des travaux de recherche effectués ainsi que les principaux résultats obtenus, et récapitule les conclusions générales issues du présent travail de recherche.

Deux cas seront considérés : les cas des bétons armés ordinaires d'une part et celui des bétons armés à hautes résistances d'autre part.

CAS DES BETONS ARMES ORDINAIRES

Cette étude porte sur la conception économique de moindre coût des poutres en T en béton armé ordinaire sous chargement ultime en conformité avec la dernière version de l'Eurocode2 (EC-2).

Une approche analytique du problème fondé sur un critère de conception de coût minimal des matériaux de construction mis en œuvre et un ensemble de contraintes, notamment de comportement non-linéaire du béton et de l'acier est formulée. L'ensemble des contraintes comprend (i) la recherche des limites pour les variables de décision (ii) les restrictions sur le comportement structural en termes de résistance flexionnelle ultime, et les pourcentages minimaux et maximaux d'acier de renforcement (iii) les différentes conditions de compatibilité en termes de déformations dans le béton et l'acier ainsi que leurs limites, et (iv) les restrictions sur la résistance au cisaillement des sections en T. Des exemples de problèmes

types avec leurs solutions de conception de moindres coûts (qui peuvent servir à des fins de comparaison pour des futures recherches) ont été présentés afin d'illustrer et de valider l'applicabilité de la formulation. Les résultats ont clairement montré que la programmation non-linéaire peut être appliquée avec succès à la conception optimale de moindre coût des poutres en T en béton armé ordinaire, offrant une approche générale qui peut être utilisée sans la nécessité d'abaques ou des tables de calcul et ou encore de connaissances préliminaires des algorithmes de programmation non-linéaire.

A partir des résultats de la présente étude, il est possible de tirer les principales conclusions suivantes:

- La formulation d'un problème de conception optimale de moindre coût des poutres en T en béton armé ordinaire peut être traduite en un problème de programmation non-linéaire, dont la solution numérique peut être efficacement déterminée en utilisant la méthode du Gradient Réduit Généralisé. L'espace des solutions faisables et les solutions optimales peuvent être obtenus en utilisant seulement un nombre réduit de variables de conception représentant les dimensions de la section transversale de la poutre, la profondeur relative de la zone de compression et la section des aciers.
- La comparaison des solutions obtenues avec l'approche de dimensionnement standard a clairement montré que les solutions optimales obtenues en utilisant l'approche proposée conduisent généralement à des économies substantielles en termes de quantités des matériaux de construction à mettre en œuvre.
- Les solutions optimales sont affectées par le rapport des résistances des matériaux f_{yd}/f_{cd} et les pourcentages des aciers. La solution optimale est également très sensible à la configuration initiale et au rapport du coût C_s / C_c des matériaux utilisés, qui peut

varier d'un pays à un autre, voire éventuellement d'une région à une autre pour certains pays.

- Les solutions optimales sont insensibles aux variations des contraintes de cisaillement pour les cas traités. La contrainte due à l'effort de cisaillement n'est pas généralement critique dans la conception optimale de moindre coût des poutres en T en béton armé soumises à la flexion simple et peut donc être exclue de la formulation du problème.
- La méthodologie proposée est économiquement efficace par rapport aux méthodes conventionnelles de conception de bureaux d'études et peut être facilement étendue à d'autres sections couramment utilisées dans la conception des structures. Elle est également pratique, simple et plus complète que les autres modèles de calculs disponibles dans la littérature, qui ne tiennent pas compte de toutes les variables de conception prises en compte dans la présente recherche.

CAS DES BETONS ARMES A HAUTES RESISTANCES

Ce travail porte sur le développement d'un modèle de calcul de moindre coût des poutres en T en béton à haute résistance (BHR) soumise à la flexion simple conformément aux Etats Limites Ultimes (ELU) en utilisant la dernière version de l'Eurocode2 (EC-2). Il importe de souligner que bien que les travaux développés dans le présent document soient basés sur l'utilisation d'un code spécifique de conception et de calcul des structures en béton armé à savoir l'Eurocode2 (EC-2), la méthodologie peut être facilement étendue à des codes de conception et de calcul utilisés dans d'autres pays sans modifications majeures.

Le problème d'optimisation est formulé comme un problème de programmation non-linéaire et le processus d'optimisation est fondé sur l'utilisation de la technique du Gradient Réduit Généralisé (GRG) dans l'espace d'un nombre réduit de variables de conception.

Pour le processus d'optimisation des coûts, le coût global des matériaux de construction, y compris les coûts de béton, d'acier et de coffrage, représente la fonction objectif et l'ensemble des contraintes comprend des restrictions sur les contraintes de comportement, les conditions relatives à la compatibilité de déformation dans l'acier et le béton, les dimensions transversales de la section en T fondées sur des règles pratiques de pré-dimensionnement et de bonne exécution en vigueur. Le poids propre de la poutre en T qui peut contribuer de manière substantielle à la détermination de la capacité de résistance flexionnelle ultime pour de longues portées est considéré comme variable à la fois dans la fonction objectif et les fonctions de contraintes.

Des exemples types sont présentés pour illustrer l'applicabilité de la formulation, de la méthodologie de solution conformément aux spécifications de l'Eurocode2 (EC-2) et de fournir des solutions optimales susceptibles d'être utilisées dans de futures investigations. Les résultats sont ensuite confrontés aux solutions issues de méthodes classiques de conception et de calcul des poutres en T en béton armé à haute résistance. Enfin des conclusions d'importance pratique pour le monde professionnel sont formulées.

Le vecteur solution optimale comprend les variables de conception suivantes i)- dimensions optimales de la poutre à section en T en BHR (b, b_w, h, h_f)_{opt} ; ii)- section d'acier optimale (A_s)_{opt} ; iii)- profondeur relative de l'axe neutre de BHR et zone de compression (α)_{opt}, à partir de laquelle les valeurs optimales de toutes quantités liées peuvent être déterminées. Une attention particulière a été accordée à la formulation des problèmes et la méthodologie de solution. Le présent modèle est appliqué à cinq classes différentes de BHR: C55/67; C60/75;

C70/85; C80/95; C90/105, décrits dans le EC-2. Afin de mieux illustrer la variabilité de la solution optimale avec les coûts de matériaux de construction, les solutions optimales ont été également calculées pour un large éventail de ratios de coûts unitaires

$C_s / C_c = 13, 25, 36, 70, 100, 130, 160, 200.$

- Les résultats obtenus dans cette étude a démontré que la technique de Gradient Réduit Généralisé (GRG) peut être appliquée avec succès à la conception à coût minimum de béton à haute résistance des poutres en T en flexion simple à l'état limite ultime offrant une approche qui peut être utilisée sans connaissance préalable de l'optimisation mathématique. Les comparaisons avec la méthode de conception standard ont clairement montré que les solutions optimales obtenues en utilisant le modèle du coût minimum, a permis d'atteindre les quantités minimales de matériaux de construction à utiliser.
- Les solutions optimales sont très sensibles à la configuration initiale de la section et des rapports de coûts de matériaux de construction C_s / C_c utilisés.

Le pourcentage de gain obtenu en utilisant la formulation de conception à cout minimum minimale se trouve être plutôt insensibles aux modifications apportées aux classes de BHR et les rapports de résistances des matériaux. Des économies substantiels allant jusqu'à 14% (ou 16% si les effets du poids propre sont inclus, ce qui peut être important pour de poutres de longues travées) peut être réalisé indépendamment des classes adoptées de BHR.

L'approche de calcul proposée est pratiquement simple, fiable et efficace par rapport aux procédures de conception standard utilisée dans les règles de l'art actuel.

D'autres exigences pratiques selon d'autres codes et d'autres contraintes de fabrication, ainsi que des fonctions objectifs de coûts plus sophistiquées et de section de géométrie différente peuvent être mises en œuvre dans le modèle d'optimisation à coûts minimum actuel sans modifications majeures.

6.2 PERSPECTIVES

La fonction objectif et les contraintes prises en compte dans le présent travail présentent un caractère illustratif. D'autres fonctions objectifs plus sophistiquées et contraintes liées à d'autres formes géométriques de section et d'autres modes de sollicitations peuvent être aisément être pris en charge par des modifications appropriées du présent modèle économique de moindre coût. Bien que les développements présentés dans ce travail de recherche soient basées sur le règlement de béton armé EC-2, la formulation proposée peut facilement être élargie à d'autres codes de calcul utilisés dans d'autres pays sans modifications majeures.

Par ailleurs la formulation du modèle proposé peut être élargie à l'étude des autres éléments porteurs dalles et poteaux entre autres.

Enfin il est loisible de procéder à une étude comparative approfondie des algorithmes d'optimisation non-linéaire appliqués à la résolution numérique des problèmes supra-cités. L'approche de calcul proposée est pratiquement simple, fiable et efficace par rapport aux procédures de conception standard utilisée dans les règles de l'art actuel.

D'autres exigences pratiques selon d'autres codes et d'autres contraintes de fabrication, ainsi que des fonctions objectifs de coûts plus sophistiquées et de section de géométrie différente peuvent être mises en œuvre dans le modèle d'optimisation à coûts minimum actuel sans modifications majeures.

REFERENCES

- [1] Fletcher R., Practical methods of optimization, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Chichester, 1987.
- [2] Boggs P. T. and Tolle J. W., Sequential quadratic programming, Acta Numerica, Cambridge University Press, Cambridge, p. 1-51, 1995.
- [3] Boggs P. T. and Tolle J. W., Sequential quadratic programming for large – scale nonlinear optimization, J. Comp. Appl. Math., Vol. 124, p. 123 – 137, 2000.
- [4] L. S. Lasdon, A. D. Warren, A. Jain and M. Ratner, Design and testing of a generalized reduced gradient code for nonlinear programming, ACM Trans. Math. Software, Vol. 4, pp. 34 – 50, 1978.
- [5] Al-Salloum Y.A. and Siddiqi G.H.. Cost-optimum minimum design of reinforced concrete beams. ACI structural journal; Nov-Dec:647-55, 1994.
- [6] Nocedal, J. and Wright, S. J., Numerical optimization, Second edition, New York, Springer Verlag, 2006.
- [7] Ferreira C.C, Barros M.H.F.M, Barros A.F.M., Optimal design of reinforced concrete T-section in bending, Engineering Structures; 25: 951-964, 2003.
- [8] Adamu A. and Karihaloo BL., Minimum Cost Design of Reinforced Concrete T-Beams using DCOC. Part II : beams with uniform cross-sections, Struct. Optim;7:252-259, 1994.
- [9] Ceranic, B. and Fryer, C. , Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams, *Struct.Multidis.Optim.*, 20, 260-268, 2000.
- [10] Barros MHFM, Martins RAF, Barros AFM., Cost optimization of singly and doubly reinforced concrete beams with EC-2-2001., Struct Multidisc Optim;30:236-242, 2005.
- [11] Tiliouine B. and Fedghouche F., Optimal design of concrete T-beams under ultimate loads, 2nd International Conference on Engineering Optimization, Lisbon, Portugal; 2010.
- [12] Eurocode2, Calcul des structures en béton, Paris : AFNOR ; 2005.
- [13] Arora JS, Elwakeil OA, Chalanda AL, Hsieh CC., Global optimization methods for engineering applications, Struct. Optim;9:137-159, 1994.
- [14] Schittkowski K, Zillober C, Zotemantel R, Numerical comparison of non linear programming algorithms for structural optimization, Struct Optim;7:1-19, 1994.
- [15] Lasdon LS, and Smith S., Solving large sparse nonlinear programs using GRG, ORSA Journal on Computing;4:2-15, 1992.
- [16] Yeniay O., A comparative study on optimization methods for the constrained nonlinear programming problems, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2, pp. 165 – 173, 2005.
- [17] Han SH, Adamu A, Karihaloo BL. Minimum cost design of multispan partially prestressed concrete T-beams using DCOC, J Eng Optim;26:35-59, 1996.
- [18] Rozvany GIN, Zhoo M, Gollub W., Continuum –type optimality criteria methods for large finite element systems with a displacement constraint, Part II. Struct. Optim; 2:77-104, 1990.
- [19] Gen M. Cheng R., Genetic Algorithms and Engineering Design, New York: John Wiley & Sons; 1997.

- [20] Leps M, Sejnoha M., New approach to optimization of reinforced concrete beams, *J Comput Struct*;81(18-19):1957-1966, 2003.
- [21] Yokota T, Wada S, Taguchi T, Gen M., Ga-based method for a single reinforced concrete beam optimal T cross-section design problem using the ultimate strength., In: *Proceedings of the Fifth Asia Pacific Industrial Engineering and Management Systems APIMS*, 2004.
- [20] Deb K., An efficient constraint handling method for genetic algorithm, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 186, pp. 311 – 338, 2000.
- [21] Fedghouche F. and Tiliouine B., Minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections in bending under ultimate loads, the 5th International Conference on Advances in Mechanics, ICAMEM2010, December 18-20, Hammamet, Tunisia, 2010.
- [22] Barros MHFM, Barros AFM, Ferreira CA., Closed form of optimal design of rectangular reinforced concrete sections., *Engineering Computations*;7:761-776, 2004.
- [23] Spon's architects and builders price book 2011., Taylor & Francis Ltd, 2011.
- [24] Fedghouche, F. and Tiliouine, B., Minimum cost design of reinforced concrete T-beams at ultimate loads using Eurocode2., *Eng.Struct.*, 42, 43-50, 2012.
- [25] Edward, A., *High performance concretes and applications*, London, Edward Arnold, 1994.
- [26] Moreno, J., High-Performance Concrete: Economic Considerations, *Concrete International*, 20, 68-70, 1998.
- [27] Symposium Publication, Seventh International Symposium on the utilization of high strength / high performance concrete, *ACI Symposium Publication 228*, 1 & 2, 2005.
- [28] Ozbay, E., Oztas, A. and Baykasoglu, A., Cost optimization of high strength concretes by soft computing techniques, *Computers and Concrete, An Int'l Journal*, 7(3), 221-237, 2010.
- [29] Ozturk H.T., Durmus Ay. and Durmus Ah., Optimum design of a reinforced concrete beam using artificial bee colony algorithm, *Computers and Concrete, An Int'l Journal*, 10(3), 295-306, 2012.
- [30] Bonet, J.L., Barros, M.H.F.M and Romero M.L., Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending, *Computers and Structures*, 84, 2184-2193, 2006.
- [31] Bordignon R. and Kripka M., Optimum design of reinforced concrete columns subjected to uniaxial flexural compression, *Computers and Concrete, An Int'l Journal*, 9(5), 345-358, 2012.
- [32] Byoung-Han Choi, Abhinav Gupta, John W. Baugh Jr., The effects of construction related costs on the optimization of steel frames, *Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal*, 43(1), 31-51, 2012.
- [33] Raue, E., Non-linear analysis of reinforced concrete cross sections by non-linear optimization. computational modeling of concrete structures , *EURO-2006*, London, Balkema, UK. , 803-808, 2006.
- [34] Rashid, M. A. and Mansur, M.A., Reinforced high strength concrete beams in flexure, *ACI Structural Journal* , 03, 462-471, 2005 .