

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie civil



Présentée par

ZEGHLACHE BRAHIM

Ingénieur d'Etat en Génie Civil
de l'Ecole Nationale Polytechnique

pour obtenir le titre de

MAGISTER
en Génie civil

THEME :

**COMPORTEMENT DYNAMIQUE
DES OUVRAGES DE SOUTÈNEMENT
DE TYPE MUR POIDS**

Thèse soutenue le 15/12/98 devant le jury composé de :

Président	: Mr. B. TILIOUINE	Professeur, E.N.P.
Rapporteur	: Mr. S. BELKACEMI	Maître de conférence, E.N.P.
Examineurs	: Mr. M.K. BERRAH	Professeur, E.N.P.
	Mr. K. SILHADI	Maître de conférence, E.N.P.
	Mr. M. DEMIDEM	Chargé de cours, E.N.P.
Invité :	Mr. M. AGUID BACHAR	Maître de conférence, E.N.P.

الخلاصة

المهدف من هذا البحث هو دراسة سلوك المنشآت الإستنادية. من نوع حدار ناتى خاضع إلى تحريض ديناميكى حيبى. أحرى المنال النموذجى للحملة تربة هيكى مع نموذج مصغر و نموذجان بمقدار طبيعى بعناصر متببية. نفترض أن الجدران الإستنادية تمسك كتلة ضخمة من تربة حافة ومفككة. أحرى دراسة تحليلية ثابتة نسبة إلى جملة تربة هيكى تصورنا أنواع مختلفة من الحركة للحدار بمقدار طبيعى. نختم هذه الدراسة مقارنة مع الطرق ساكنة زائفة أو مرنة الموصة بها من طرف القوانين ضد الزلازل.

Summary

The aim of this work is the survey of the behaviour of gravity retaining walls subjected to a sinusoidal dynamic loading. The design of the soil-structure system for a small-scale model as well as for two full-sized models is made with finite element method. Gravity walls are supposed to retain a dry and pulverulent backfill soil. The survey is made while considering linear or non linear strain-stress relationships for soil.

A parametric analysis related to the soil-structure system is done. Various types of motion for the full-sized wall have been considered. A comparison with the pseudo-static or elastic methods recommended by parasismic regulations closes this survey.

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude du comportement des ouvrages de soutènement de type mur poids soumis à une sollicitation dynamique sinusoidale. La modélisation du système sol-structure aussi bien pour un modèle réduit et pour deux modèles de grandeur naturelle est faite par éléments finis. Les murs de soutènement sont supposés retenir un massif de sol sec et pulvérulent. L'étude est faite en considérant une loi de comportement linéaire ou non linéaire pour le sol.

Une analyse paramétrique relative au système sol-structure est effectuée. Divers modes de mouvement pour le mur de grandeur nature ont été envisagés. Une comparaison avec les méthodes pseudo-statiques ou élastiques préconisées par les règlements parasismiques clôture cette étude.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A mes parents
A ma femme
A mes enfants



Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur BELKACEMI Smaïn, qui a assuré la direction de ce travail.

Je remercie aussi les personnalités qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de cette thèse :

Mr. B. TILIOUINE, Professeur
Mr. M.K. BERRAH, Professeur
Mr. K. SILHADI, Maître de conférence
Mr. M. DEMIDEM, Chargé de cours
Mr. M. AGUID BACHAR, Maître de conférence.

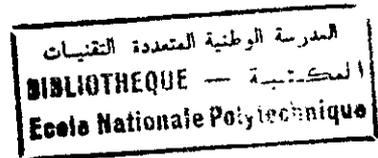
Je tiens aussi à témoigner ma gratitude à tous les collègues, au personnel du centre de calcul qui m'ont apporté leur précieuse aide morale, intellectuelle et matérielle.

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

	PAGES
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : Comportement pseudo- statique des ouvrages de soutènement	3
1.1 Introduction	3
1.2 Analyse statique d'un mur de soutènement : théorie de coulomb.	4
1.3 Analyse pseudo-statique de Mononobé-Okabé	9
1.4 Diverses approches pseudo –statiques	12
1.5 Méthode de Richards et Elms.	17
1.6 Conclusions.	22
CHAPITRE 2 : Approche expérimentale du comportement dynamique des ouvrages de soutènement.	23
2.1 Introduction	23
2.2 Expériences sur modèles réduits	24
2.3 Approche expérimentale de Chouvet	29
2.3.1 Dispositif expérimental	29
2.3.2 Caractéristiques du soutènement dynamique	31
2.3.3 Comparaison avec la méthode simplifiée de Richards et Elms.	32
2.4 Conclusions	32
CHAPITRE 3 : Approche dynamique de l'étude du comportement dynamique des ouvrages de soutènement.	35
3.1 Introduction	35
3.2 Modèles élastiques	36
3.3 Modèles viscoélastiques	40
3.3.1 Modèle de Veletsos et Younan : mur fixe	42
3.3.2 Autres modèles.	52
3.4 Modèles non linéaires	54
3.5 Conclusions.	64
CHAPITRE 4 : Lois de comportement des sols	67
4.1 Introduction.	67
4.2 Comportement élastique.	69

4.2.1 Matériau homogène isotrope linéaire.	69
4.2.2 Matériau isotrope élastique non – linéaire.	73
4.3 Critère de plasticité, fonction de charge.	80
4.3.1 Critère de plasticité indépendant du tenseur sphérique.	82
4.3.2 Critère de plasticité dépendant du tenseur sphérique.	84
4.3.3 Ecrouissage.	88
4.4 Les modèles élasto-plastiques.	91
4.4.1 Modèle élasto-plastique parfait	91
4.4.2 Modèle élasto-plastique avec écrouissage.	92
4.4.3 Modèle de Cam-Clay	94
4.4.5 Modèle de Cam-Clay modifié.	99
4.4.6 Les modèles endochroniques.	100
4.5 Les modèles viscoplastiques.	101
4.5.1 Modèles Rigides-Viscoplastiques.	102
4.5.2 Modèles élasto-vicoplastiques.	103
4.5.3 Modèles élastiques-viscoplastiques.	106
4.5.4 Modèles viscoélastiques –plastiques	106
4.6 Le modèle hyperbolique.	108
CHAPITRE 5 : Modèles considérés	109
5.1 Modèle de Duncan	109
5.1.1 Méthode incrémentale non linéaire.	109
5.1.2 Le modèle original.	109
5.1.3 Le modèle hyperbolique modifié.	113
5.1.4 Implémentation numérique du modèle.	116
5.1.5 Facteurs qui influent sur les paramètres de la loi de Duncan.	127
5.2 Modèle élastique parfaitement plastique	120
5.2.1 Introduction	120
5.2.2 Critère de chargement ou de déchargement.	120
5.2.3 Tenseur incrémental de déformation élastique et plastique.	121
5.2.4 Potentiel plastique et loi d'écoulement.	122
5.2.5 Convexité, normalité et unicité	128
5.2.6 Relation contrainte –déformation incrémentale.	130
5.2.7 Implémentation numérique.	137
CHAPITRE 6 : Applications des codes de calculs élaborés	139
6.1 Introduction	139
6.2 Stratégie de calcul	139
6.2.1 Modèle de Duncan	139
6.2.2 Modèle élasto-plastique parfait	140
6.3 Etude sur modèle réduit.	142
6.3.1 Modélisation du modèle réduit.	142
6.3.2 Approche élastique	147
6.3.3 Application du modèle de Duncan	147
6.3.4 Application du modèle élasto-plastique.	159
6.3.5 Conclusions entre les comportements des différents modèles	159



	PAGES
6.4 Etude sur modèle réel	163
6.4.1 Présentation des modèles considérés	163
6.4.2 Etude du mur fixe	165
6.4.3 Etude du Mur mobile	169
CONCLUSION	177
ANNEXE : Approche par la méthode des éléments finis.	
A.1 Introduction.	a.1
A.2 Présentation générale de la M.E.F.	a.1
A.3 Formulations des équations de mouvement.	a.3
A.3.1 Formulations des équations différentielles aux dérivées partielles	a.3
A.3.2 Forme intégrale de type Galerkin.	a.5
A.3.3 Approximation par éléments finis.	a.8
A.3.4 Equations de mouvements pou un problème élastique linéaire.	a.9
A.3.5 Equations de mouvement pour un problème viscoélastique linéaire.	a.11
A.3.6 Equations de mouvement pour un problème non-linéaire.	a.16
A.4 Résolution des équations d'équilibres ou bien de mouvements.	a.18
A.4.1 Forme généralisée des équations d'équilibre ou de mouvements.	a.18
A.4.2 Résolution pour un milieu élastique linéaire.	a.22
A.4.3 Problème linéaire viscoélastique.	a.23
A.4.4 Problème non linéaire.	a.23

Introduction

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Dans la pratique, l'ingénieur est souvent appelé à étudier des ouvrages de soutènement. La construction de ces ouvrages dans les régions sismiques, nécessite un dimensionnement qui assure la stabilité à la fois statique et dynamique. Les murs poids, les murs cantilevers, les parois moulées, les palplanches avec ou sans ancrages constituent les principaux ouvrages de soutènement. Les murs poids ont une géométrie simple (trapèze). Leurs études en statique comme en dynamique permettent de mettre en évidence les principaux phénomènes relatifs aux comportements des ouvrages de soutènement. Ils se différencient des autres ouvrages par leur masse importante et leur grande rigidité. Ils sont donc assimilables à un corps solide. Pour toutes ces raisons, ils sont idéals, pour une première approche du comportement dynamique des ouvrages de soutènement.

La nécessité d'avoir un outil de dimensionnement parasismique pour les ouvrages de soutènement s'est imposé au début de ce siècle. La première approche élaborée fut une approche pseudo-statique par *Okabe* (ref.38) et *Mononobé-Matsuo* (ref.33). Cette méthode a eu une endurance remarquable du fait de sa simplicité et les nombreux modèles pseudo-statiques qui ont suivi, s'en sont fortement inspirés. Ces modèles font l'objet du premier chapitre.

Ces méthodes simplifiées ont de nombreuses limitations qui les rendent à priori inadéquates à reproduire la complexité du phénomène d'interaction sol - structure bien qu'elles puissent donner globalement des résultats satisfaisants. Une approche expérimentale s'avère nécessaire pour valider un modèle pseudo-statique ou autre qui ne sera retenu que s'il recoupe les constatations expérimentales (ne serait ce qu'une partie). Ces approches expérimentales font l'objet du deuxième chapitre.

Traitant un problème dynamique de façon pseudo-dynamique, ces méthodes ne permettent pas de mettre en évidence les phénomènes complexes qui se produisent dans le sol ou aux interfaces... etc. La cinématique relative du sol et de la structure est ignorée, pourtant elle influe beaucoup sur l'état de contrainte dans le sol. Une tendance à une modélisation plus fine s'avère nécessaire, où le phénomène d'interaction sol - structure ou encore l'influence de la sollicitation sur le comportement du sol... etc., sont pris en compte (ne serait-ce que pour avoir une meilleure compréhension de l'ensemble des facteurs intervenant dans ce phénomène d'interaction sol - structure). Des approches multiples utilisant des modèles, des plus simples aux plus sophistiqués ont pour but d'essayer soit de rendre compte de la variation du champ des contraintes dans le temps pour les points du mur et du sol, soit de simuler la variation du champ des déplacements des points du mur ou du sol, soit les deux à la fois. Nous signalerons en plus que nombre d'auteurs tel que *Wolf J.P.* (ref.58) ou *Veletsos A.S.* et *Younan A.H.* (ref.54)...etc., publient jusqu'à présent des travaux dont le but est d'affiner des modèles très simplifiés, utilisant une modélisation par masses concentrées, ressorts et amortisseurs pour représenter l'interaction sol - structure. Ces modèles du fait de leur simplicité s'avèrent très utiles pour étudier les aspects du comportement des ouvrages de soutènement. Toutes ces différentes approches dynamiques font l'objet du troisième chapitre.

Parmi les études menées, la méthode analytique initialement utilisée les premières années pour les modèles simples a été remplacée par la technique des différences finies ou la technique des éléments finis... etc, pour simuler le comportement du massif derrière et sous le mur. Les codes de calculs qui en découlent, sont généralement utilisés pour permettre une meilleure compréhension ou explication du comportement général, pour explorer la limite de simple modèle et aussi pour prédire dans certains cas les résultats des modèles expérimentaux et d'observation réelle. Actuellement, il y a très peu d'applications dans les projets actuels

pour les ingénieurs en bureau d'études, si ce n'est pour traiter un projet important de taille non habituelle. L'approche par la méthode des éléments finis est présentée en annexe.

Les modèles les plus simples utilisent pour le sol une modélisation généralement élastique. C'est le cas des premiers modèles que l'on trouve dans la littérature où les auteurs ont étudié le cas où les déplacements sont suffisamment petits pour que l'on puisse supposer un comportement élastique pour le sol. Cette hypothèse trop contraignante a amené les chercheurs à considérer des modèles anélastiques non linéaires. L'étude des principales lois de comportements considérées pour les sols, fait l'objet du quatrième chapitre.

C'est principalement l'applicabilité du modèle non élastique et non linéaire de Duncan et du modèle élasto-plastique parfait que nous avons mis en pratique. L'étude de ces modèles fait l'objet du cinquième chapitre.

Possédant les données et les résultats expérimentaux effectués par *Chouvet* (1983) (ref.12) à L'E.C.P., c'est sur la base de ces essais que nous allons étudier l'applicabilité de ces modèles. Finalement, compte tenu des conclusions de l'étude précédente, nous avons appliqué le modèle qui semblait le plus conforme au mur de soutènement grandeur nature. Les études sur le modèle réduit et sur le modèle grandeur nature font l'objet du sixième chapitre dans lequel une étude paramétrique et une comparaison avec des modèles couramment utilisés en bureau d'étude (modèles pseudo-statiques ou viscoélastiques) sont effectuées.

Diverses formes de secousses dynamiques sont employées pratiquement. *Whitmann* (ref.56) croit fermement en l'utilisation de secousse simple de type sinusoïdale. Bien qu'une telle approche laisse sans réponse des questions à propos de ce qui peut survenir lorsque l'on a affaire à des accélérogrammes sismiques complexes, les tests avec de simple secousse sont possibles à observer et à étudier théoriquement. L'utilisation de simples secousses permet ainsi, de tirer des conclusions significatives entre les modèles ou entre les prédictions et les observations. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour une secousse de type sinusoïdal.

CHAPITRE 1 :

APPROCHE PSEUDO-STATIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES OUVRAGES DE SOUTÈNEMENTS

1.1 INTRODUCTION

La première approche, qui fut élaborée pour la détermination des pressions dynamiques exercées par les terres, sur un ouvrage de soutènement, soumis à un chargement dynamique, fut une approche pseudo-statique, par *Okabé* (ref.38) en 1926 et *Mononobé-Matsuo* (ref.33) en 1929.

Par approche pseudo-statique on entend par définition : l'étude ou l'analyse statique équivalente des pressions des terres qui s'exercent sur un ouvrage de soutènement lors d'une sollicitation dynamique. L'analyse statique équivalente consistant à remplacer les sollicitations dynamiques par des forces quasi-statiques équivalentes. Par une telle approche la nature dynamique du phénomène est entièrement masquée.

L'approche pseudo-statique développée par *Mononobé et Okabé* (ref.33 et ref.38) constitue une extension de la méthode de l'analyse statique de Coulomb à partir de la théorie de l'état limite. Par la suite, de nombreux chercheurs ont contribué, à étendre, améliorer cette approche pseudo-statique, qui fait encore l'objet d'investigation.

Ces approches initialisées par *Mononobé et Okabé* conduisent à l'évaluation de l'effort maximal exercé par le sol sur la structure. Cet effort est ensuite utilisé pour dimensionner l'ouvrage. Ces approches simples sont généralement utilisées dans la pratique courante (ref.16). Et la plupart des codes parasismiques font encore référence à ces méthodes.

D'autres chercheurs tels *H. Hichihara, H. Matsusawa, Kawamura* (ref.23) par exemple ont proposé d'autres méthodes de calculs basées, elles aussi sur un calcul à la rupture. Ces méthodes de calculs qui n'ont connu ni le succès ni le développement de l'approche de *Mononobé et Okabé*, font rarement l'objet de référence que ce soit dans la littérature classique, dans les codes parasismiques ou dans la pratique courante.

Pour mieux approcher les méthodes pseudo-statiques, on présentera tout d'abord la méthode de Coulomb qui est à la base même du développement des méthodes pseudo-statiques. On verra par la suite la méthode de *Mononobé-Okabé* dites M-O qui est à l'origine de la plupart des méthodes pseudo-statiques les plus usuelles. Puis on passera en revue rapidement les grandes étapes de son évolution et on s'attardera sur la méthode de *Richards R. et Elms D. G.* (ref 29) qui s'est, elle aussi largement répandue dans le monde.

La validité expérimentale de ces méthodes sera traitée dans le chapitre suivant. On remarquera que la comparaison des résultats de calculs avec l'expérience n'a pu, principalement être faite, qu'avec des expériences sur modèles réduits (ref .26 et ref.43).

1.2 ANALYSE STATIQUE D'UN MUR DE SOUTÈNEMENT : THÉORIE DE COULOMB.

Nous nous limiterons ici à un exposé général dans le cas de la poussée d'un massif pulvérulent.

Coulomb a établi sa théorie à partir du cas simple d'un mur vertical retenant un massif homogène à surface libre horizontale. Par la suite *Poncelet* a généralisé la méthode dite 'du coin de Coulomb' pour un mur incliné et pour une surface libre quelconque (ref.21). Nous envisagerons directement ici le cas le plus général.

Coulomb se propose de déterminer la pression globale exercée par le massif sur le mur en admettant que cette pression est due uniquement à l'action du coin limité (voir figure 1.1) par l'écran AB, la surface libre AC, et un plan de glissement hypothétique BC.

Le mur est supposé se déplacer suffisamment pour créer dans le massif amont un état d'équilibre limite sur le plan BC.

Pour déterminer la poussée active *Coulomb* étudie l'équilibre du coin ABC supposé indéformable et susceptible de glisser sur le plan BC. Tous les points sur BC sont supposés être dans un état d'équilibre limite actif (poussée) ou passif (butée) suivant le sens de déplacement du mur respectivement vers l'aval ou vers le massif. Dans ce cas la friction du sol est entièrement mobilisée sur la surface.

Le coin ABC est soumis à l'action de trois forces :

- Le poids W_S du massif de sol susceptible de glisser sur BC
- La résultante des réactions du sol le long de la ligne de glissement BC : R
- La réaction de l'écran sur le massif de sol (opposée à la poussée active ou passive suivant le cas) : $-P_{as}$

Les inconnues du problème sont les grandeurs de la poussée P_{as} , de la réaction R , les lignes d'action de ces forces étant supposées données. La position de la ligne de glissement c'est à dire ' θ ' est aussi une inconnue du problème.

L'étude de l'équilibre du coin de Coulomb, permet d'exprimer la force P_{as} en fonction de θ et on retient donc pour la poussée la plus grande valeur, la position correspondante de BC étant celle du plan de glissement réel.

La valeur de la poussée active obtenue analytiquement est :

$$P_{as} = \frac{1}{2} \gamma K_{as} H^2 \quad (1.1)$$

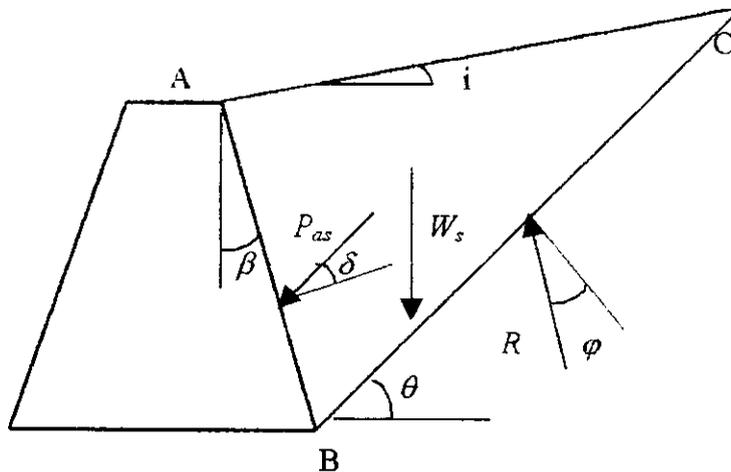
Avec

$$K_{as} = \frac{\cos^2(\varphi - \beta)}{\cos^2 \beta \cos(\beta + \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - i)}{\cos(\beta + \delta) \cos(i - \beta)}} \right]^2} \quad (1.2)$$

1.2.1 Point de passage de la résultante :

Le point de passage de la poussée sur l'écran reste indéterminé. Généralement on suppose que cette poussée résulte d'actions élémentaires croissant proportionnellement avec la pesanteur comme dans les des fluides, ce qui fait passer la résultante au tiers inférieur. Mais dans le cas général, la répartition des contraintes n'est pas triangulaire et on doit se contenter

des méthodes approximatives pour fixer ce point d'application qui a une importance capitale dans l'étude de la stabilité de l'ouvrage de soutènement.



Caractéristiques géométriques

H = Hauteur du mur.

i = Angle du terre-plein avec l'horizontale.

β = Angle du parement avec la verticale.

Caractéristiques du sol

φ = Angle de frottement interne du sol.

φ_b = Angle de frottement de la fondation sur le sol.

δ = Angle de frottement du sol sur le mur.

γ = Poids volumique du sol.

c = Cohésion du sol.

Coefficients de poussée

K_0 = Coefficient de poussée des terres au repos.

K_{as} = Coefficient de poussée des terres à l'état actif.

K_{ps} = Coefficient de poussée des terres à l'état passif.

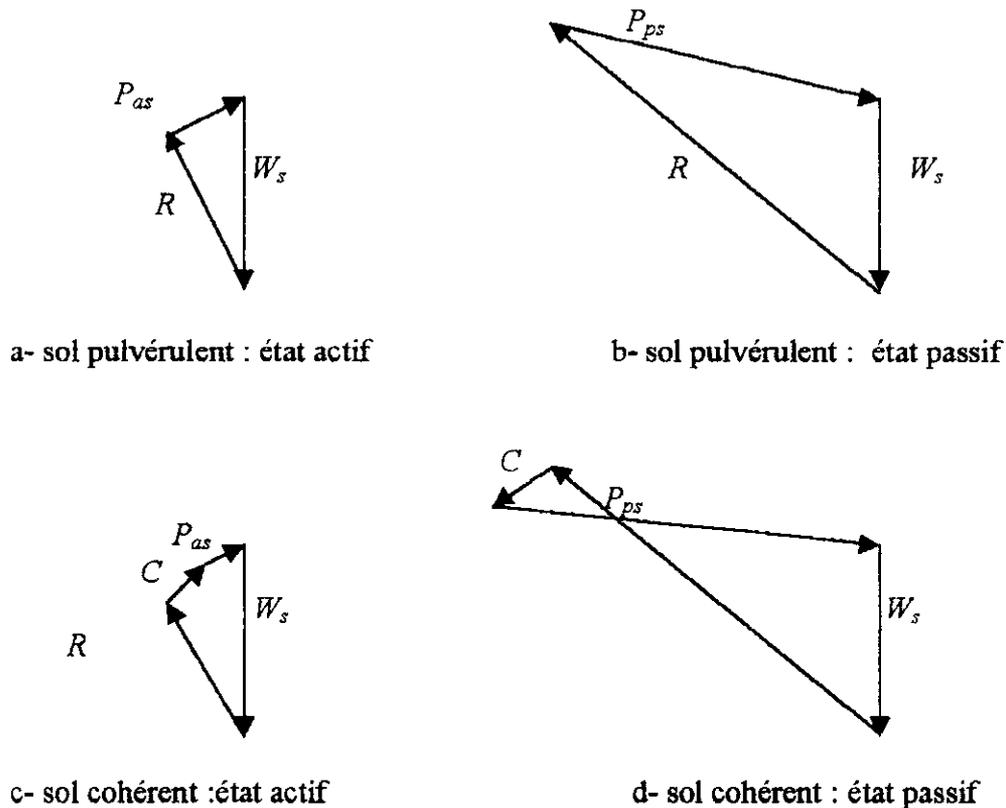
Autres paramètres

θ = Angle compris entre l'horizontale et la ligne de glissement BC.

γ_b = Poids volumique du mur

Figure 1.1 Notations et symboles : Théorie de Coulomb

- Si la surface est plane et sans surcharge, on fixe le centre de poussée au tiers inférieur du parement compté à partir de sa base, ce qui est assez bien vérifié expérimentalement.
- Si la surface est libre, irrégulière, et si des surcharges y sont appliquées, le centre de poussée est situé plus haut entre le tiers et le demi de la hauteur du parement compté à partir de sa base. *Terzaghi* (ref.21) propose de prendre pour centre de poussée le point d'intersection avec le parement de la droite menée par le centre de gravité du coin de glissement parallèlement au plan de glissement.



- P_{as} = Module de la poussée exercée par le massif de sol sur le mur à l'état actif
 P_{ps} = Module de la poussée exercée par le massif de sol sur le mur à l'état passif
 W_s = Poids du massif de sol susceptible de glisser ABC.
 R = Réaction sol - sol sur BC dues au frottement interne.
 C = Réaction sol - sol due à la cohésion seule.

*Figure 1.2 Théorie du coin de Coulomb
Diagramme des forces.*

1.2.2 - Choix à adopter pour l'angle d'obliquité ' δ '.

Il est essentiel de bien choisir l'angle d'obliquité ' δ '. Tout d'abord le signe de cet angle dépend du mouvement relatif du mur par rapport au sol. Dans le cas général où le mur est

bien fondé et où le terrain tasse par rapport au mur, cet angle est positif et peut être compris entre '0 et φ '. Pour un mur :

- Parfaitement lisse, $\delta = 0$, la poussée agit normalement à la paroi.
- Parfaitement rugueux, $\delta = \varphi$, on retrouve l'angle de frottement interne du sol. Le frottement interne du terrain est entièrement mobilisé.

Dans les cas courants et d'une façon plus ou moins arbitraire on prend :

- $\delta = \frac{\varphi}{4}$ pour un mur lissé au ciment
- $\frac{\varphi}{2} < \delta < \frac{2\varphi}{3}$ pour un mur en béton ou maçonnerie.

1.2.3 - Cas des sols cohérents.

Bien que la méthode de Coulomb ait été établie dans les cas des sols pulvérulents, elle peut également être appliquée au cas des sols cohérents. Cependant sa précision devient relative comme en témoignent les résultats expérimentaux (ref.21) et la valeur réelle de la poussée sera souvent supérieure à celle calculée par ce moyen.

La prise en compte de la cohésion se fait simplement en introduisant une force supplémentaire due à la cohésion du matériau agissant sur le plan de glissement BC. La prise en compte de cette force réduit l'importance de la poussée du massif sur le parement.

1.2.4 - Application de la méthode de Coulomb à la détermination de la butée.

Pour les sols pulvérulents, on peut de la façon identique obtenir la butée par application de la méthode de Coulomb en supposant que cette butée est fournie par l'action d'un coin ABC qui se soulève et glisse le long du plan incliné BC sauf que dans ce cas :

' δ ' est négatif

R est incliné de ' $-\varphi$ ' par rapport à la normale à BC.

P_{PS} correspond à un minimum pour toutes les positions possibles de la ligne BC et la position de BC correspondant à ce minimum est le plan de glissement.

Du fait des courbures présentées par les lignes de rupture en butée, la méthode de Coulomb est inexacte. Cependant *Terzaghi* (ref.21) a montré qu'elle donne des résultants acceptable lorsque l'obliquité ' δ ' reste en module inférieur à $\frac{\varphi}{3}$. Pour des valeurs plus importantes la

valeur obtenue par cette méthode devient très supérieure par rapport à la réalité. Elle conduit donc à surestimer la capacité de résistance du terrain et par conséquent la stabilité de l'ouvrage construit. C'est pour remédier à ces insuffisances que certains chercheurs ont proposé de conserver le principe de la méthode de Coulomb en adoptant une surface de glissement courbe. Par exemple nous avons :

La méthode de *Grey* pour laquelle la ligne de glissement est assimilée à une portion de cercle.

La méthode d'*Ohde* pour laquelle la ligne de glissement est assimilée à une spirale logarithmique.

Pour les sols cohérents il est absolument impossible d'accepter l'hypothèse d'une rupture plane. L'hypothèse la plus courante consiste à admettre que la ligne BC est composée (voir figure 1.3) :

- D'une partie courbe au voisinage du mur (assimilable à un cercle ou spirale logarithmique ou autres).
- D'une partie rectiligne ensuite.

Dans ces conditions la méthode de *Coulomb* peut être appliquée dans le cas de la butée.

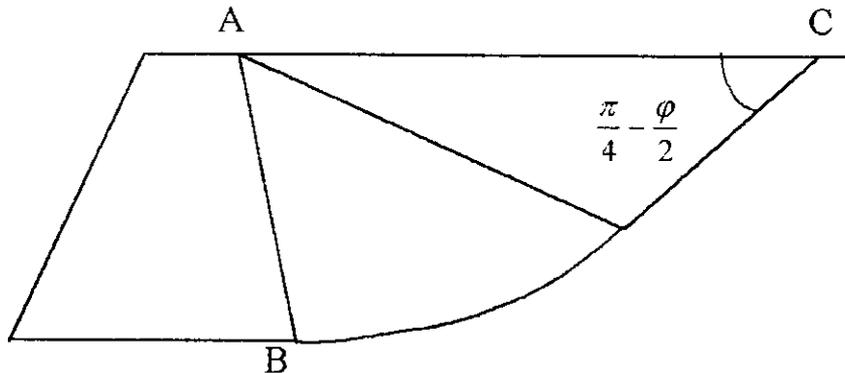


Figure 1.3 Surface de rupture simplifiée en butée

1.2.5 - Conclusions

La méthode de *Coulomb* est d'une grande simplicité d'application, et elle est la seule susceptible de fournir des résultats acceptables dans les cas complexes suivants :

- Surface libre irrégulière.
- Surcharges localisées ou réparties.
- Nappe phréatique de niveau variable.
- Formations stratifiées à angles de frottements interne voisins.

Ce sont les raisons pour lesquelles elle est encore largement utilisée dans le monde.

Elle suppose une ligne de rupture rectiligne, ce qui est grossièrement vérifié la plupart du temps à l'état actif. Sa précision est donc en général satisfaisante à la condition que le mur soit rigide et qu'il subisse un déplacement suffisant pour permettre au matériau de passer de l'état de repos, à l'état actif.

Elle est cependant insuffisante pour certaines inclinaisons, les poussées réelles étant supérieures à celles que donne la méthode de *Coulomb* (ref.21). En tout état de cause elle est inexacte dans le cas de la butée pour laquelle les lignes de rupture présentent de grandes courbures dans la plupart des cas.

Lors de son application il faut être très prudent pour les sols pulvérulents quant aux choix :

- De la position du point d'application qui intervient dans le calcul de manière très significative lors de la vérification de la stabilité du mur de soutènement.
- Du choix de l'angle d'obliquité à prendre dans les calculs pour les mêmes raisons

Pour un sol cohérent on remarquera en plus que le passage de l'état de repos à l'état actif ne se fait pas sans remaniement donc sans affecter à la baisse la cohésion du sol et ce principalement sur la surface de glissement. Pour un sol cohérent à l'état actif très affecté par la présence d'eau, le choix des paramètres citées ci-dessus ainsi que de la valeur à adopter pour la cohésion, dépendent en plus de la teneur en eau du matériau et pour les milieux

saturés des pressions interstitielles qui se sont développés à l'intérieur du massif donc du temps. Pour un sol cohérent à l'état passif cette méthode est acceptable généralement que pour des lignes de glissements courbes. La valeur de la butée calculée par la méthode de Coulomb devient tout à fait illusoire en présence de pression interstitielle.

1.3 ANALYSE PSEUDO-STATIQUE DE MONONOBE-OKABE

Cette méthode est l'extension directe de la méthode de *Coulomb* vue précédemment. *Mononobé* et *Okabé* (ref.33) et (ref.38) ont adapté les hypothèses de Coulomb à savoir :

- Le sol est homogène, sans cohésion et sec.
- Le mur se déplace suffisamment pour créer dans le massif amont un état d'équilibre limite.
- Une surface de glissement se développe dans le massif amont. Cette surface de glissement est plane passant par la base du mur. La friction du sol est entièrement mobilisée le long de cette surface lors de la rupture.
- Le coin du sol délimité par cette surface de glissement et la paroi amont du mur, se comporte comme un corps rigide, homogène et indéformable.
- Le champ d'accélération dans le massif de sol est homogène et caractérisé par les accélérations développées à la base du mur.

En considérant l'équilibre du prisme de glissement ABC (voir figure 1.4 et 1.5), *Mononobé* et *Okabé* schématisent les effets de la sollicitation dynamique par deux forces d'inerties, horizontale et verticale, correspondant au champ uniforme des accélérations. Ces forces, horizontale et verticale, sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} \text{Force d' inertie horizontale} &= K_h W_s \\ \text{Force d' inertie verticale} &= K_v W_s \end{aligned}$$

avec

W_s : Poids du coin de sol

K_h et K_v : Respectivement les accélérations horizontales et verticales exprimées comme une fraction de l'accélération de pesanteur 'g'.

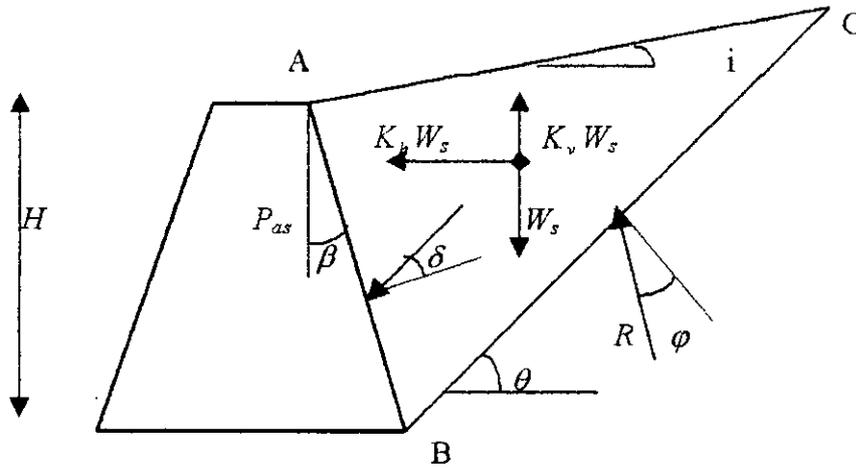
L'inclinaison de la surface de rupture est déterminée de façon à maximiser la pression des terres sur le mur comme dans la théorie de Coulomb, lorsque le sol se trouve dans un état d'équilibre de poussée active. Elle est déterminée à minimiser ces mêmes pressions lorsque le sol se trouve dans un état d'équilibre de butée.

L'étude de l'équilibre des forces s'exerçant sur le prisme ABC (voir figure 1.5a) lorsque le sol se trouve dans un état d'équilibre actif permet de déterminer la poussée dynamique totale P_{ad} , exercée par le sol sur un mur de hauteur H, soumis à des accélérations homogènes horizontales $K_h g$ et verticales $K_v g$. On obtient :

$$P_{ad} = \frac{1}{2} \gamma H^2 (1 - K_v) K_{ad} \quad (1.3)$$

Avec

$$K_{ad} = \frac{\cos^2(\varphi - \mu - \beta)}{\cos \mu \cos^2 \beta \cos(\delta + \beta + \mu) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - i - \mu)}{\cos(\delta + \beta + \mu) \cos(i - \beta)}} \right]^2} \quad (1.4)$$



Caractéristiques géométriques

H = Hauteur du mur.

i = Angle du terre-plein avec l' horizontale.

β = Angle du parement avec la verticale.

Caractéristiques du sol

φ = Angle de frottement interne du sol.

φ_b = Angle de frottement de la fondation sur le sol.

δ = Angle de frottement du sol sur le mur.

γ = Poids volumique du sol.

c = Cohésion du sol.

Coefficients de poussée

K_h = coefficient d'accélération horizontale

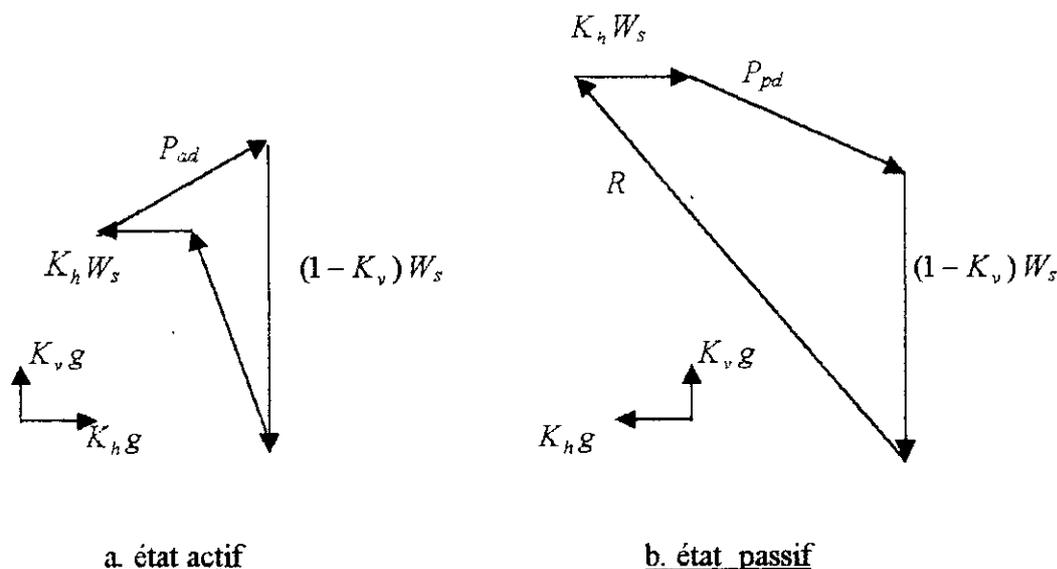
K_v = coefficient d'accélération verticale

K_{ad} = coefficient de poussée dynamique à l'état actif

K_{pd} = coefficient de poussée dynamique à l'état passif

$$\mu = \tan^{-1}\left(\frac{K_h}{1 - K_v}\right)$$

Figure 1.4 Notations et symboles : Théorie de Mononobé-Okabé



- P_{ad} = Module de la poussée dynamique exercée par le sol sur le mur à l'état actif
- P_{ps} = Module de la poussée dynamique exercée par le sol sur le mur à l'état passif
- W_s = Poids du massif de sol susceptible de glisser ABC.
- R = Réaction sol - sol sur BC dues au frottement interne.
- C = Réaction sol - sol due à la cohésion seule.
- $K_h W_s$ représente la composante horizontale de la force d'inertie
- $K_v W_s$ représente la composante verticale de la force d'inertie

Figure 1.5 Théorie de Mononobé-Okabé
Diagramme des forces pour un sol pulvérulent.

L'étude de l'équilibre des forces s'exerçant sur ce même prisme ABC lorsque le sol se trouve dans un état passif (butée : figure 1.5b) permet de la même manière de déterminer la pression dynamique totale et on obtient :

$$P_{pd} = \frac{1}{2} \gamma H^2 (1 - K_v) K_{pd} \tag{1.5}$$

Avec

$$K_{pd} = \frac{\cos^2(\varphi - \mu + \beta)}{\cos \mu \cos^2 \beta \cos(\delta - \beta - \mu) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi + i - \mu)}{\cos(\delta - \beta + \mu) \cos(i - \beta)}} \right]^2}$$

La méthode de *Mononobé - Okabé* ne permet de préciser (comme dans la méthode de *Coulomb*), que l'intensité de la force totale dynamique P_{ad} ou P_{pd} . La direction est supposée connue par choix adéquat de l'angle d'obliquité ' δ '. Mais cette méthode ne donne pas le

point d'application de cette force. Elle ne permet pas de déterminer la distribution des contraintes sur le parement du mur.

Mononobé et Okabé (ref.33 et ref.38) considèrent que la pression totale dynamique à une distribution hydrostatique et donc que le point d'application de la résultante se situe à une hauteur égale à $H/3$ par rapport à la base du mur.

Il convient d'être prudent dans l'évaluation de l'angle de frottement mur - sol, en tout cas de prendre des valeurs égales à celles prises en analyse statique (ref.16). Dans la pratique courante on prend :

$$\delta = \frac{\varphi}{3} \quad \text{voire} \quad \delta = 0 \text{ [Z-B1]}$$

La position du point d'application a fait et fait encore l'objet d'un certain intérêt lors de nombreuses recherches théoriques et expérimentales. Les essais effectués sur table vibrante notamment, montrent que sous l'action des excitations harmoniques la résultante des efforts s'exerce beaucoup plus haut. Nous reviendrons souvent sur ce point dans les paragraphes et chapitres qui suivent.

1.4 DIVERSES APPROCHES PSEUDO -STATIQUES

La méthode de Mononobé-Okabé s'est très vite largement répandue dans le monde. Elle a fait l'objet d'un nombre important d'étude, recherche, extension... etc., par différents chercheurs. Nous présenterons ici les principales études.

Kapila I. P. (ref.26, 1962), a proposé une méthode graphique pour l'évaluation du coefficient de poussée dynamique K_{ad} . Cette méthode a l'avantage de s'appliquer à un profil de sol quelconque de la surface du massif avec ou sans surcharges. Cette méthode est une modification de la méthode graphique de Culman couramment utilisée en statique, déduite de la méthode de Coulomb.

Prakash S. et Saran S. (ref.45,1966), ont repris la théorie de Mononobé -Okabé et l'ont étendu au cas des sols cohérents. Le massif de sol est supposé horizontal avec ou sans surcharges. Du fait de la cohésion une zone de fissuration est prise en compte à la surface du sol. Comme en statique la pression totale est la somme des trois composantes représentant :

- L'influence du poids propre.
- L'influence de la surcharge.
- L'influence de la cohésion.

Ils ont montré que la contribution de la cohésion à la pression totale est la même en statique et en dynamique.

Prakash S. et Basavanna M. (ref.43, 1969), ont fait une étude théorique pour déterminer la hauteur du point d'application de la résultante calculée selon la formule de Mononobé-Okabé. Ils ont montré qu'une distribution hydrostatique des contraintes derrière le mur n'était pas possible dans le cas d'un mur rugueux.

Ces auteurs ont montré également que l'accélération verticale ne modifie pas la distribution des contraintes derrière le mur. Par contre la rugosité ' δ ' du mur avait une grande influence sur cette distribution. Dans le cas d'un mur lisse, on retrouve une distribution hydrostatique.

Seed H. B. et Whitman R. V. (ref.48, 1970) ont fait l'étude paramétrique la plus approfondie à partir de la formule de *Mononobé-Okabé*. Leurs principales conclusions sont les suivantes :

- L'angle de frottement mur –sol ou la rugosité du mur à peu d'influence sur le coefficient K_{ad} et sur la composante horizontale de la pression dynamique totale $P_{ad} \cos \delta$. Ils recommandent de faire les calculs en pratique avec :

$$\delta = \frac{\varphi}{2}$$

- L'angle de frottement interne ' φ ' a une influence non négligeable. Dans un calcul de dimensionnement une sous estimation de ' φ ' dans le calcul du coefficient de poussée dynamique K_{ad} donne une valeur majorée des efforts dynamiques P_{ad} .
- L'inclinaison du remblai ' i ' est facteur important. Pour des valeurs croissantes de ce facteur, le coefficient de poussée K_{ad} augmente plus rapidement en fonction de l'accélération horizontale $K_h g$.
- L'accélération verticale K_{vg} peut être négligée tant que celle-ci reste très inférieure à l'accélération horizontale K_{hg} . Ils recommandent de faire les calculs en pratique avec K_v nul.

Considérant la décomposition :

$$K_{ad} = K_{as} + \Delta K_{ad}$$

avec K_{as} représentant le coefficient de poussée des terres au repos, *Seed* et *Whitman* montre en effet que l'on peut estimer le coefficient de l'incrément dynamique de poussée ΔK_{ad} par :

$$\Delta K_{ad} = \frac{3}{4} K_h$$

avec le signe + si l'accélération est dirigée vers le massif de sol
avec le signe - si l'accélération est dirigée vers l'extérieur du massif pour un mur vertical avec un remblai horizontal en négligeant l'accélération verticale.

En pratique, ils recommandent de considérer que le point d'application de la poussée statique P_{as} soit situé à une hauteur égale à $h/3$ par rapport à la base du mur, et celui de l'incrément de poussée dynamique ΔP_{ad} soit situé à une hauteur égale à $0.6 H$ par rapport à la base du mur.

Il y a aussi une version simplifiée de l'équation de *Mononobé-Okabé* pour des conditions passives. Une accélération dirigée vers l'extérieur du massif agit de telle sorte à réduire la force passive sous sa valeur statique. Une estimation approximative de cette réduction de la force par rapport à la poussée passive statique proposée par les auteurs est :

$$\Delta P_{pd} = 2.125 \gamma H^2 A$$

L'accélération horizontale étant $A g$ avec A positif si l'accélération est dirigée vers l'extérieur du massif et négatif dans le cas contraire.

Richards R. et Elms D.G. (ref.46, 1979) partant de l'analyse de *Mononobé et Okabé* pour estimer l'effort de poussée transmis par le remblai, proposent une méthode qui tient compte de l'inertie du mur. Ils ont montré que l'inertie du mur influence les résultats en terme égaux à l'inertie du prisme de sol, lorsque la rupture survient par glissement du mur sur sa base. Il faut noter que cette méthode est applicable seulement au mur en translation horizontal. Nous détaillerons cette méthode au paragraphe suivant.

Les mêmes auteurs (ref 47, 1991) étudient l'effet de :

- La variation de l'angle de frottement sur la surface de rupture avec la profondeur
- De la forme de la courbe contrainte - déformation sur la distribution des pressions des terres ainsi que sur la position du point d'application de la résultante et ce pour différents modes de déplacements du mur à savoir une de translation, une rotation par rapport à sa base et une rotation du mur par rapport à son sommet.

Pour étudier les effets de la variation de l'angle de frottement sur la surface de rupture avec la profondeur, ils reprennent les travaux effectués par *Dubrova* (1963) et *Harr* (1966) cités dans leur article pour des murs soutènements susceptible de subir une rotation et les appliquent en dynamique en reprenant le modèle de *Mononobé et Okabé*. Comme leurs référents les auteurs considèrent une variation linéaire entre deux points extrêmes de l'angle de frottement interne sur la surface de rupture.

$$\psi(z) = 2\varphi z / H - \varphi$$

avec

H = hauteur du mur

φ = angle de frottement interne du sol

ψ = angle de frottement sol - sol sur le plan de rupture.

Ils ont constaté que la variation de la position du centre de pression au-dessus du centre hydrostatique $H/3$ sur le mur dépend plus fortement de l'angle de frottement interne dans le cas d'une rotation par rapport au sommet que dans le cas d'une translation. Dans le cas d'une rotation par rapport à sa base, l'allure de la pression des terres est hydrostatique.

Pour étudier les effets de la forme de la courbe contrainte - déformation, les auteurs supposent une courbe typique classique contrainte - déformation pour un sol dense non cohésif (voir figure 1.6), à laquelle correspond une résistance de pic caractérisée par ' φ_p ' et une résistance résiduelle caractérisée par ' φ_r '. Ils considèrent sur la base d'observation faite sur modèle réduit que la surface de rupture prend initialement naissance au voisinage du mur à sa base et se propage progressivement jusqu'à la surface. Donc au début du mouvement ils reprennent les équations de *Mononobé et Okabé* avec l'angle de frottement sol - sol variable sur la surface de rupture avec $\varphi = \varphi_p$. Lorsque le plan de rupture s'est complètement développé, ils reprennent ces mêmes équations avec $\varphi = \varphi_r$. Ils constatent que :

- Excepté pour les grandes valeurs de l'accélération horizontale K_h , l'allure de la courbe donnant la variation de la position du centre de pression au-dessus du centre de pression hydrostatique $H/3$ en fonction de K_h pour une valeur donnée du rapport φ_p / φ_r est plate et ainsi cette variation avec K_h est faible.
- Une augmentation de 10 % du rapport φ_p / φ_r engendre un déplacement de 5 % de H du centre de pression.

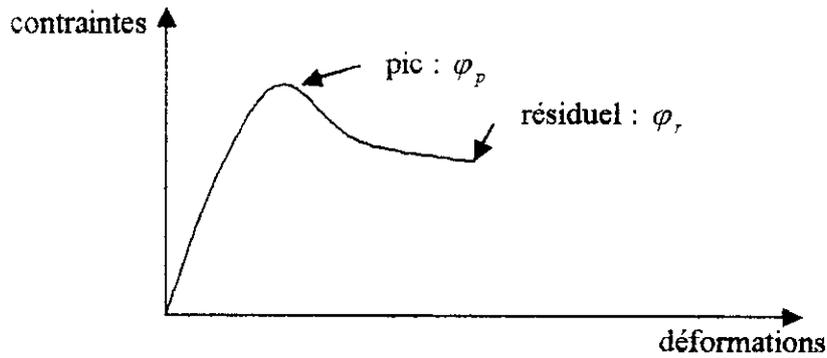


figure 1.6 Courbe classique contrainte – déformation (sol dense non cohésif)

Siddharthan R., Prakash K. G. et Gary M.N (ref.49, 1991), ont proposé un modèle semblable à celui de *Richards et Elms* dans le sens où le mouvement survient que si les forces et moments résistants sont dépassés, en tenant compte de la rotation du mur par rapport à un point de sa base. En d'autres mots, un comportement rigide-plastique est supposé pour le sol. Les mouvements sous conditions passives causés par le mur sont négligés quand celui-ci se déplace vers le massif, le mur se déplace alors progressivement vers l'extérieur chaque fois que la résistance limite est dépassée. Dans le modèle proposé, la translation et la rotation autour d'un point situé sur la base sont choisies comme inconnues.

Les facteurs tels que la résistance mobilisée par le sol de fondation contre la rotation, le moment d'inertie du mur et le moment appliqué, dépendent du centre de rotation. La sélection de ce centre affecte le déplacement du mur calculé. Dans la procédure proposée le centre de rotation est choisi avant le lancement de l'analyse dynamique. Le déplacement du mur ainsi que sa rotation autour de ce point sont alors calculés. De ces résultats on tire le déplacement du sommet du mur en fonction du temps. Ensuite en faisant varier la position du centre de rotation sur la base du mur, un certain nombre de déplacements finaux du sommet du mur sont calculés. La plus grande valeur obtenue pour le sommet du mur à la fin de l'excitation est considérée comme mode de déplacement du mur.

L'étude paramétrique sur un cas (figure 1.7) a montré que :

- La position sur la base du centre de rotation affecte grandement les modes de déplacements du mur et la grandeur du déplacement du sommet du mur. Si le centre de rotation est proche du talon du mur seul la translation est prépondérante. De plus le déplacement maximum du mur est obtenu lorsque le centre de rotation se trouve à une distance proche du talon du mur.
- La présence d'une composante verticale du séisme joue un rôle déstabilisant et accroît les déplacements du mur.
- L'angle de frottement interne sol – fondation du mur affecte fortement les résultats (contrairement à l'étude menée par *Richards et Elms* (ref.46) où il avait été constaté un faible influence de ce paramètre). Toute augmentation de la valeur de cet angle engendre comme attendue une diminution de la rotation.
- Le contenu fréquentiel et l'amplitude de l'accélérogramme utilisé affectent grandement la réponse du mur.

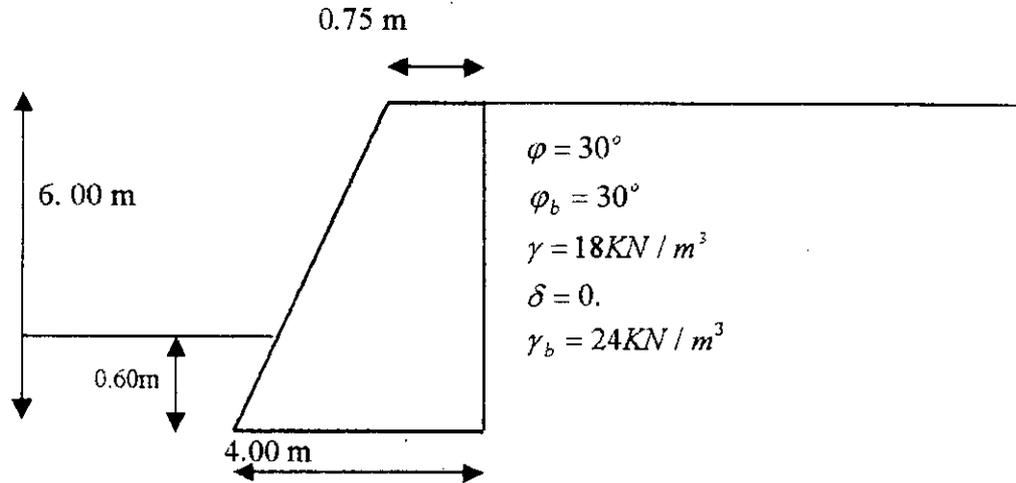


Figure 1.7 Mur de soutènement étudié (ref.49)

Dewaikar D. M.(ref.17, 1991) propose un modèle original pour l'étude de la pression dynamique des terres derrière un ouvrage de soutènement. Celui-ci utilise la méthode des tranches (verticales) pour déterminer la poussée dynamique et son point d'application. Le coin de sol susceptible de glisser est déterminé par la méthode de *Mononobé* et *Okabé*. Celui-ci est ensuite découpé en tranches verticales de même largeur (voir figure 1.8). Pour une tranche quelconque ' i ' les forces en présence sont le poids W_{si} de celle-ci, plus les actions des tranches de part et d ' autre (qui agissent sur les interfaces) F_{i-1} et F_i . Nous avons ensuite les forces dynamiques horizontales $K_h W_{si}$ et verticales $K_v W_{si}$ (dont la dernière se retranche ou s'ajoute au poids). Et enfin la réaction R_i du sol sur la surface de glissement.

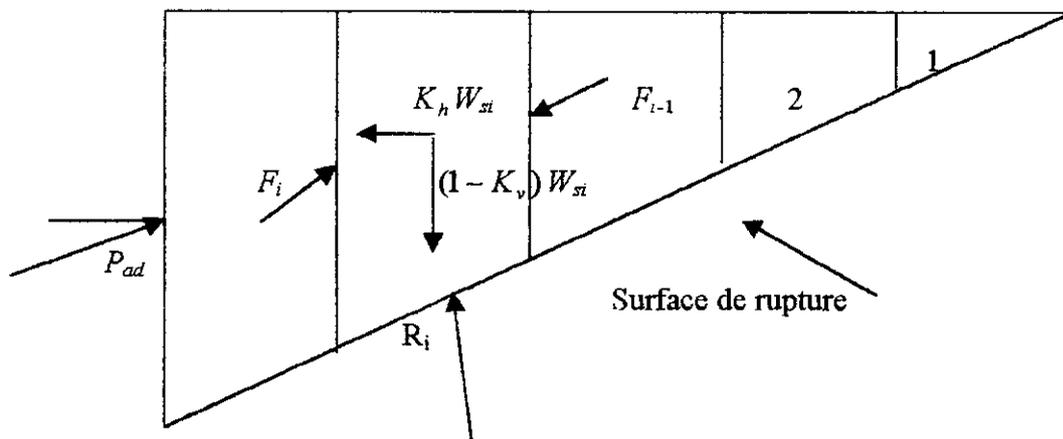


Figure 1.8 Méthode des tranches
représentation des forces s'exerçant sur une tranche

L'auteur suppose une variation progressive de l'inclinaison de la force s exerçant sur une interface de la tranche, de la valeur zéro pour la première face de la première tranche à l'extrémité du coin de sol opposé au mur, à la valeur du frottement mur – sol pour la dernière tranche en contact avec le mur. Cette variation est formulée en faisant apparaître un paramètre 'p' lequel est déterminé en recherchant à maximiser le renversement.

Une étude paramétrique de cette méthode a montré que :

- L'angle de frottement interne du sol, l'amplitude de l'accélération considérée influencent la position de la résultante des pressions dynamiques
- La présence d'une accélération verticale engendre un plus grand renversement du mur
- La distribution des pressions derrière le mur est non rectiligne.

Woodward P. K. et *Griffith D. V.* (ref.59, 1992) ont présenté un autre modèle original où le sol modélisé par éléments finis est considéré comme matériau parfaitement plastique et les accélérations sont supposées être appliquées de façon pseudo-statique.

Les résultats obtenus comparés avec ceux obtenus par la méthode de *Mononobé* et *Okabé* sont en bon accord.

1.5 METHODE DE RICHARDS ET ELMS.

Richards et *Elms* (ref.46, 1979) reprenant les hypothèses de *Mononobé* et *Okabé*, et évaluant la pression dynamique des terres selon la méthode de *Mononobé-Okabé* ; écrivent l'équilibre des forces agissant sur le mur en y incluant les forces d'inerties dues au champ d'accélération (figure 1.9).

Ils déterminent ainsi les composantes horizontales ' F ' et verticales ' N ' de la réaction à la base du mur.

$$N = (1 - K_v)W_m + P_{ad} \sin(\delta + \beta)$$

$$F = P_{ad} \cos(\delta + \alpha) + K_h W_m$$

Le mur commencera à glisser le long de sa base lorsque la composante horizontale de la réaction du sol F sera :

$$F = N \operatorname{tg} \varphi_b$$

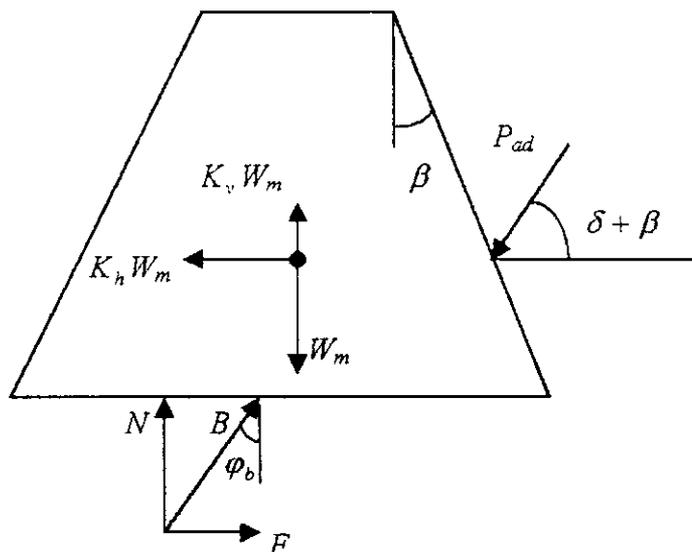
On déterminera ainsi le poids limite du mur ' W_m^l ' qui, soumis au champ d'accélération ($K_h g, K_v g$), peut résister sans se déplacer.

$$W_m^l = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_{ad} \left(\frac{\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \operatorname{tg} \varphi_b}{\operatorname{tg} \varphi_b - \operatorname{tg} \mu} \right) \quad (1.10)$$

Dans l'expression ci-dessus K_{ad} est donné par la méthode de *Mononobé-Okabé*. La valeur de W_m^l doit rester finie pour garder un sens physique, ce qui conduit à une condition restrictive sur les accélérations :

$$K_h < K_h^l \quad \text{avec} \quad K_h^l = (1 - K_v) \operatorname{tg} \varphi_b \quad (1.11)$$

Cette condition est indépendante de la géométrie du mur et du remblai. Connaissant le frottement sol – fondation du mur φ_b , elle nous indique si un mur poids peut être construit pour résister à un champ d'accélération $(K_h g, K_v g)$ donné sans se déplacer. La valeur limite K_h^l diminue lorsque φ_b diminue ou lorsque K_v augmente. L'influence de l'accélération verticale est plus sensible lorsque le frottement φ_b augmente.



W_m = Poids du mur

B = Réaction du sol de fondation sous l'ouvrage

N = Composante verticale de la réaction du sol

F = Composante horizontale de la réaction du sol

P_{ad} = Poussée dynamique du sol sur le mur calculé par la méthode de M-O

$K_h W_m$ représente la composante horizontale de la force d'inertie du mur

$K_v W_m$ représente la composante verticale de la force d'inertie du mur

φ_b représente le coefficient de frottement fondation du mur - sol de fondation

β représente angle du parement du mur du côté du massif de sol

δ représente le coefficient de frottement mur – sol

$$\mu = \tan^{-1} \frac{K_h}{1 - K_v}$$

Figure 1.9 Schéma et notations pour la Méthode de Richards et Elms.

L'expression (1.10) peut s'écrire de la façon suivante :

$$W_m^l = \frac{1}{2} \gamma H^2 (1 - K_v) K_{ad} C_{id} \quad (1.12)$$

avec

$$C_{id} = \frac{\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \operatorname{tg} \varphi_b}{(1 - K_v) \operatorname{tg} \varphi_b - K_h} \quad (1.13)$$

Si on désigne par W_s le poids du mur nécessaire à assurer la stabilité statique du mur vis à vis du glissement, on obtient une expression similaire à (1.12) avec les coefficients K_{as} et C_{is} correspondant respectivement à K_{ad} et C_{id} , obtenus en remplaçant dans ces derniers les coefficients relatifs aux accélérations K_h et K_v par zéro.

$$W_s = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_{as} C_{is} \quad (1.14)$$

A partir de ces différentes expressions, on peut définir trois facteurs de sécurité F_W, F_T, F_I ,

$$F_W = \frac{W_m^l}{W_s} = \left(\frac{(1 - K_v) K_{ad}}{K_{as}} \right) \left(\frac{C_{id}}{C_{is}} \right) = F_T F_I \quad \text{avec} \quad (1.15)$$

$$F_T = \frac{(1 - K_v) K_{ad}}{K_{as}} \quad \text{et} \quad F_I = \frac{C_{id}}{C_{is}} \quad (1.16)$$

Pour une sollicitation donnée $(K_h g, K_v g)$ qui respecte les conditions (1.12), le facteur F_W représente le rapport entre les poids du mur nécessaire à assurer la stabilité dynamique et la stabilité statique vis à vis du glissement. F_W est le produit de deux facteurs :

F_T relatif à la pression des terres

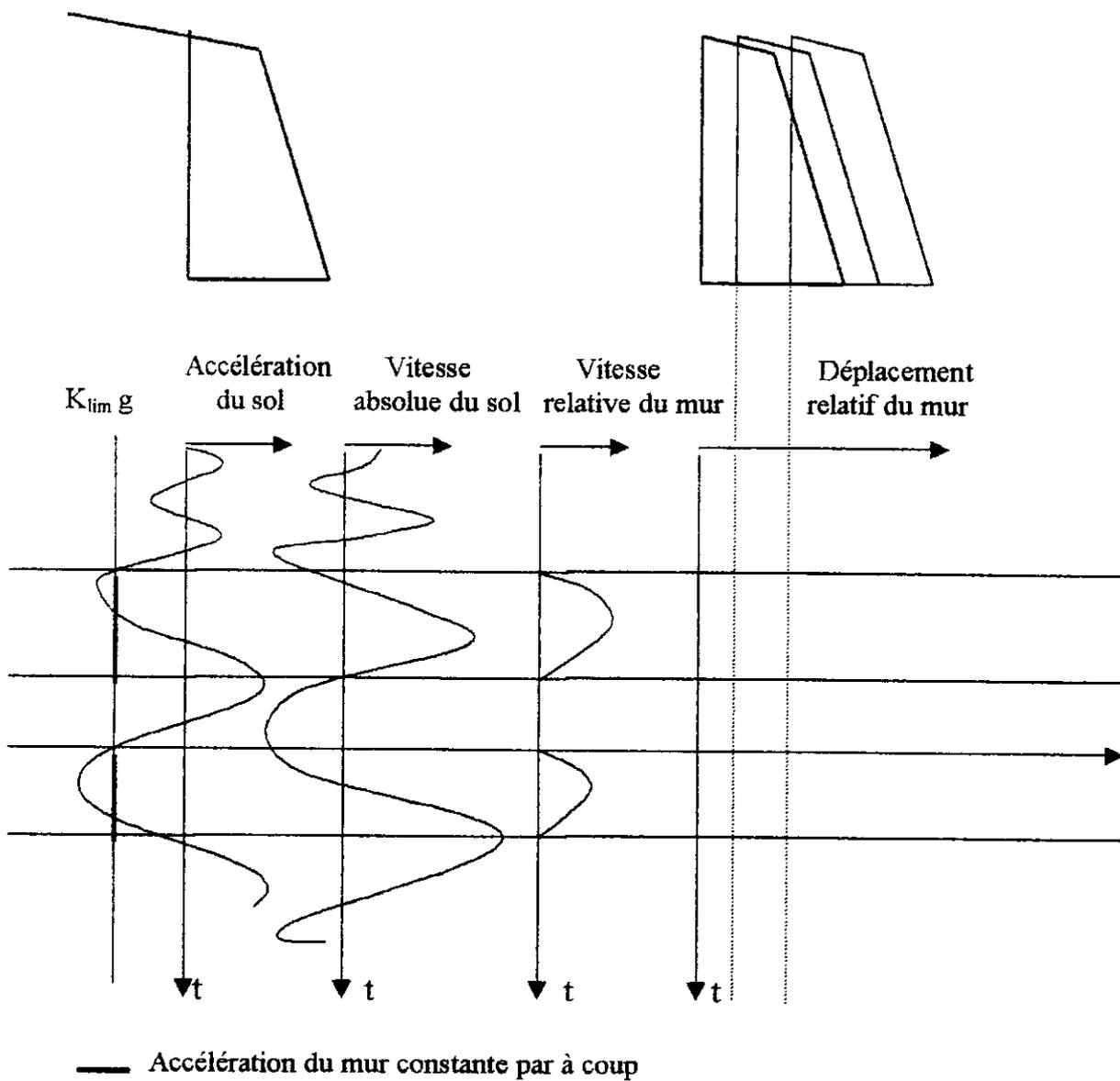
F_I qui traduit les effets de l'inertie du mur.

Richards et Elms ont montré que ces deux facteurs F_T et F_I sont du même ordre de grandeur. Les effets de l'inertie du mur ne doivent donc pas d'après les auteurs être négligés. L'étude de la variation de ces facteurs en fonction de l'accélération $(K_h g)$ a montré que le terme F_W croît plus rapidement que le terme F_T ou F_I pour des valeurs croissantes de K_h .

De plus on remarque que pour résister à une sollicitation $K_h = 0.3$ et $K_v = 0$, un mur doit être trois fois plus lourd que pour être statiquement stable. Et ce rapport doit être de douze pour un coefficient d'accélération $K_h = 0.5$. Ce qui n'est pas économique.

Inversement le facteur de sécurité F_W étant donné, connaissant la courbe de variation de F_W en fonction de K_h , on peut déterminer à quel séisme un mur poids peut résister. Cette courbe devient asymptotiquement infini pour un coefficient limite de l'accélération K_h^l . Par conséquent il devient difficile et même impossible (irréaliste) de construire un mur de soutènement gravitaire susceptible de résister à une accélération donnée proche de $K_h^l g$ sans se déplacer. Il n'est donc pas économiquement envisageable de dimensionner le mur pour

s'opposer à tout déplacement. On doit donc considérer un déplacement maximal admissible pour le mur, sans qu'il y ait endommagement de l'environnement immédiat.



*Figure 1.10 Méthode de Richards et Elms :
Déplacement incrémental d'un mur poids.*

Comme l'excitation dynamique est transitoire, *Richards* et *Elms* proposent de dimensionner le mur selon la même démarche que celle proposée par *Newmark* (ref.37, 1965) pour apprécier la stabilité des talus, pour un certain déplacement admissible. La méthode se base sur l'image de rupture progressive. On considère que lorsque l'accélération horizontale dépasse une valeur limite $K_{lim} g$ il y a déplacement relatif du mur par rapport au sol. Le mur

pendant son déplacement relatif par rapport au sol, a une accélération supposée constante $K_{lim} g$. La fin de ce déplacement survient lorsque les vitesses du sol et du mur redeviennent égales. Ceci est schématisé sur la figure 1.10.

On voit ainsi que le déplacement total d'un mur poids du à une sollicitation dynamique ne se produit pas en une seule fois mais par à coups c'est à dire en une série de petits déplacements chaque fois que l'accélération limite est dépassée. Pendant l'excitation lorsque la base est accélérée :

Soit l'accélération est dirigée vers l'extérieur du massif (aval du mur), les forces d'inerties agissent alors dans le sens inverse et créent une situation passive pour l'ensemble mur – sol. En tenant compte du fait que les forces nécessaires pour obtenir la rupture du sol à l'état passif sont très importantes, il est logique de considérer dans ce cas qu'il n'y a pas de déplacement relatif entre le mur et le sol.

Soit l'accélération est dirigée vers le massif de sol (amont du mur), alors les forces agissent dans le sens inverse et créent ainsi une situation active pour l'ensemble mur – sol.

Pratiquement, dans une première partie le sol et le mur se déplacent ensemble, lorsque l'accélération critique du mur est atteinte, le mur commence à se déplacer relativement par rapport au sol avec une accélération constante égale à l'accélération critique. La vitesse relative du mur croît régulièrement. Lorsque la vitesse relative du mur par rapport au sol s'annule, le système se remet à se déplacer ensemble jusqu'à ce que l'accélération retrouve sa valeur critique, ... etc. Ce procédé répété plusieurs fois crée l'image progressive des déplacements relatifs du mur, par 'pas discrets'.

On peut ainsi calculer le déplacement total d'un mur de poids W_m , soumis à un séisme donné $(K_h g, K_v g)$ et déterminer le seuil d'accélération à partir de l'équation obtenue en écrivant que la réaction horizontale est égale à sa valeur limite donnée par (1.9). On obtient ainsi le seuil K_{lim} donné par :

$$P_{ad}(K_{lim}) \cos(\delta + \beta) + K_{lim} W_m = [(1 - K_v) W_m + P_{ad}(K_{lim}) \sin(\delta + \beta)] \operatorname{tg} \varphi_b \quad (1.17)$$

Le déplacement final calculé par cette méthode peut être comparé au déplacement maximal admissible. Avec quelques itérations sur les calculs sus-décrits, on peut déterminer un poids optimum pour que le mur soumis à un séisme donné, se déplace au maximum de la valeur prescrite.

La méthode d'analyse de *Richards et Elms* conduit aux deux remarques suivantes :

- Un mur lourd résiste mieux qu'un mur plus léger à une sollicitation donnée. Le seuil K_{lim} est plus élevé lorsque le poids du mur augmente.
- Un séisme avec quelques pics d'accélération peut entraîner un déplacement total du mur moins important qu'un séisme moins violent mais pour lequel le seuil d'accélération serait plus souvent dépassé.

Ces deux remarques ne s'appliquent qu'aux murs susceptibles de se déplacer horizontalement sous l'effet d'une excitation dynamique, ce qui représente une limitation importante de cette méthode.

1.6 CONCLUSIONS

En général les méthodes pseudo-statiques pour la plupart sont basées sur la méthode de *Mononobé* et *Okabé* qui est une extension de la méthode de Coulomb. Déjà, la méthode de Coulomb (comme nous l'avons vue en 1.2) présente un certain nombre de limitations que l'on retrouve dans la méthode de *Mononobé* et *Okabé*. D'une manière générale l'on retrouve dans les méthodes pseudo-statiques :

- L'hypothèse d'une surface de rupture plane, inacceptable en butée. On remarquera que dans les méthodes pseudo-statiques les déplacements engendrés à l'état passif du système mur –sol sont négligés c'est à dire qu'une surface de rupture en butée n'est pas considérée.
- La nécessité d'une estimation de l'angle d'obliquité sur le parement. *Prakash* et *Basavanna* ont montré que la valeur de cet angle influe grandement sur la distribution des pressions dynamiques sur le mur. Ce qui est en contradiction avec l'étude paramétrique menée par *Seed* et *Whitman*.
- Que le sol est considéré comme un matériau rigide – plastique et par conséquent la déformation de celui-ci au voisinage du mur n'est pas considérée ainsi que la variation de ses caractéristiques physiques d'une part et de l'influence de l'aspect dynamique du chargement (par ex nombre de cycle) sur ces caractéristiques d'autre part.
- Que l'orientation de la surface de glissement est considérée constante durant la sollicitation.
- Que l'influence de la nature des couches de sol sous l'ouvrage n'est point considérée ainsi que la variabilité de leurs caractéristiques physiques.
- Que les accélérations dans le massif de sol sont considérées uniformes même pour des ouvrages de grande hauteur.
- Que les phénomènes d'interactions sol–structure sont ignorés. Ces méthodes appliquent généralement la mécanique des corps solides indéformables (pouvant se déplacer sur des surfaces de glissement).

Malgré ces limitations, ces méthodes se sont largement répandues à travers le monde . On ne peut sur la base de l'exposé d'une méthode rendre compte de son aptitude à représenter le comportement réel d'un ouvrage. Seule la comparaison de ces résultats avec l'expérimentation ou l'observation sur des ouvrages réels peut aboutir à des conclusions objectives. La présentation des principales études expérimentales fait l'objet du chapitre suivant et une comparaison des résultats est faite à la fin du chapitre.

CHAPITRE 2 :

APPROCHE EXPERIMENTALE

DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE

DES OUVRAGES DE SOUTÈNEMENT

2.1 INTRODUCTION

Les études expérimentales du comportement des ouvrages de soutènement aussi bien en statique qu'en dynamique ont été et restent une étape obligatoire pour acquérir une meilleure compréhension des différents phénomènes liés à leurs comportements. De plus ces études sont indispensables pour contrôler l'applicabilité :

- des différents modèles utilisés pour schématiser le système fluide - sol - structure en général
- des différentes méthodes utilisées pour l'évaluation des pressions dynamiques latérales.

Les expériences en grandeur nature, du fait de la difficulté à les réaliser, sont rares. Par contre, pour des raisons contraires, les expériences sur modèles réduits sont très courantes et ce sont principalement celles-ci que l'on trouve dans la littérature. Même les rapports concernant des sinistres pendant les tremblements de terres sont relativement rares. Généralement, seuls ceux ayant été spectaculaires (déplacements très importants) ont fait l'objet de rapport, ayant permis ainsi d'acquérir certaines données concernant les performances des ouvrages de soutènement. Mais généralement les informations ne sont pas suffisamment détaillées pour permettre des conclusions claires. De plus dans la plupart des cas, ces relevés ont été effectués pour des ouvrages de soutènement en présence d'eau (murs de quai, palplanches... etc.) pour lesquelles la rupture ne survient pas seulement à cause de l'augmentation des pressions latérales exercées sur la paroi avale de l'ouvrage, mais plutôt à cause d'une action combinée de cette augmentation des pressions avales, de la liquéfaction et de la diminution de la pression de l'eau sur les parois amonts. On citera

- Mur en palplanche à *Akita* au Japon en 1983 qui subit un déplacement résiduel de 1.5m
- Affaissement d'un mur poids et déplacement de 1m d'une paroi dans le port de *San Antonio-Chili* en 1985.
- Déplacements latéraux excessifs au port de *Oakland* en 1989 durant le tremblement de terre de *Loma Prieta*.

Pour les ouvrages de soutènement loin d'un front de mer, il y a remarquablement peu de documentations sur des déplacements significatifs. D'où l'importance et la nécessité d'étude expérimentale et pour les raisons suscitées au-dessus, sur des modèles réduits.

Dans ce chapitre, nous verrons tout d'abord les principales expériences effectuées sur modèles réduits, les résultats expérimentaux les concernant et finalement les comparaisons avec les modèles pseudo-statiques. Les comparaisons avec les modèles dynamiques

élastiques, viscoélastiques, et non linéaires seront mentionnées dans le chapitre après ou en même temps que la présentation du modèle dynamique.

Par la suite nous nous attarderons sur l'expérimentation de *Chouvet* (réf.12) ...etc. dont nous exploiterons les résultats afin de comparaison, validation... etc. avec les modèles théoriques examinés. Finalement nous clôturerons ce chapitre par une discussion-conclusion .

2.2 EXPERIENCES SUR MODELES REDUITS

Depuis le début du siècle les expérimentations sur modèles réduits se sont au fil des années perfectionnées. Les premiers étaient effectués à l'aide de caisse rigide rempli de matériau sol dont une des parois représentait un mur de soutènement fixe, celle-ci reposant sur une table vibrante. Puis des améliorations techniques ont été apportées à ce modèle pour pouvoir prendre en compte différents modes de mouvements comme la translation et la rotation. Puis la caisse rigide s'est transformée en cuve rigide à l'intérieur de laquelle on plaçait une maquette pouvant représenter soit un mur poids, soit un mur cantilever, soit une palplanche, soit une paroi moulée et le tout avec ou sans ancrage.

Mais ce type de modèle posait le problème de la similitude avec le modèle réel qu'il est sensé représenter. Entre le modèle réel et le modèle réduit, on assistait à une réduction des dimensions donc des efforts sans que l'on ait réduction des caractéristiques mécaniques. De ce fait pour palier à ce problème,

Ces dernières décennies ont vu se développer parallèlement les expérimentations en centrifugeuse qui pouvait engendrer des accélérations importantes pour ramener le niveau de sollicitation à un niveau similaire au niveau réel.

Dans ce qui suit nous rapporterons essentiellement les essais et principalement leurs résultats pour ceux effectués sur les murs poids, cantilevers, retenant un massif de sol pulvérulent sec. Les autres types d'ouvrages de soutènement tels que les parois moulées, palplanches... etc. retenant un massif de sol cohérent retenant un massif de sol partiellement ou totalement saturé avec ou sans surcharge, avec ou sans ancrage ne seront pas présentés du fait de l'objet de notre travail d'une part et de leur différence de comportement d'autre part.

On remarquera, que les principaux essais concernant ce type d'ouvrage rapportés dans la littérature commune. ont été effectués dans les décennies précédentes.

Parmi les premiers, *Mononobé et Matsuo* (1929) et *Jacobsen* (1939) cités par *Seed et Whitman* (réf.48) ont effectué des essais à l'aide de caisses rigides remplies de sable sec, et subissant des excitations harmoniques horizontales à l'aide d'une table vibrante. Les mesures des pressions dynamiques ont été effectuées sur une des parois latérales de la caisse rigide.

Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec la théorie de *Mononobé-Okabe* quant à l'amplitude de la pression dynamique totale, pour des accélérations inférieures à 0.4g . *Jacobsen* a trouvé que le point d'application de l'incrément dynamique de la force se situait à une hauteur de $2/3 H$ à partir de la base du mur et a mentionné également que la fréquence de vibration à un même niveau de l'accélération n'a pas d'influence sur leurs résultats expérimentaux.

Murphy V.A. (réf.34, 1960) a présenté des résultats obtenus sur modèles réduits pour un sable sec. Il est d'un intérêt tout à fait particulier pour la pratique de noter que les lignes de glissements observées pendant les essais dynamiques étaient considérablement moins inclinées par rapport à l'horizontale que celles observées pendant un essai statique (figure2.1).

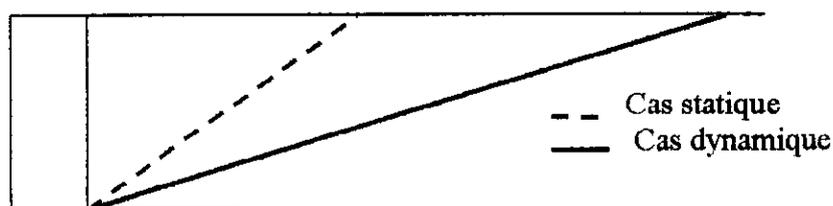


Figure 2.1 : Comparaisons des lignes de glissements

Ishii Y., Arai H. et Tsuschida H. (réf.24, 1960) ainsi que Matsuo H. et Ohara S. (réf.32, 1960) ont effectué des essais à l'aide des caisses rigides remplies de sables et montées sur des tables vibrantes. Les mesures des pressions dynamiques ont été faites comme précédemment sur une des parois latérales de la caisse, qui peut être fixe ou mobile appuyant sur des ressorts de rigidités différentes selon l'essai.

Matsuo et Ohara ont confirmé les résultats qu'ils ont obtenus par leur méthode analytiques (voir chapitre suivant), pour les murs fixes, en ce qui concerne l'amplitude de la force dynamique et de son point d'application, situé à mi - hauteur environ.

Ishii Arai et Tsuschida ont trouvé pour les murs fixes que la force totale dynamique est à peu près égale (un peu inférieure) à celle prédite par Mononobé et Okabé mais son point d'application se situe à $0.4 H$ à partir de la base du mur fixe. Ils ont constaté que les pressions résiduelles mesurées après la fin de la sollicitation dynamique sont plus importantes que les pressions statiques initiales. Leurs distributions apparaissent triangulaires tandis que celles des pressions dynamiques avaient une allure parabolique. Ils montrent également que pour des sollicitations inférieures à $0.5g$, les accélérations dans le massif sont sensiblement uniformes et presque égales à la sollicitation, ce qui confirme une des hypothèses de la méthode de Mononobé et Okabé et qui a été largement reprise par la suite. De plus les résultats des tests montrent l'importance du mode de mouvement et de la grandeur du mouvement du mur sur les pressions des terres.

Prakash S. et Nandakumaran P. (réf.44, 1973) ont effectué des essais analogues aux précédents sauf que dans ce cas une des parois latérales, convenablement réglée, pouvait se déplacer ou rester fixe durant l'excitation. Le réglage initial consistait à mettre le sol dans un état actif par rotation du mur sur sa base. Des essais pendant lesquels le mur est fixé à cette position active et d'autres pendant lesquels le mur était libre de se déplacer ont été effectués.

La distribution de l'incrément des pressions dynamiques pendant un essai, avec le mur fixe n'est pas hydrostatique. Dans le cas du mur mobile la distribution est analogue mais la résultante plus petite.

Ichihara M., Matsuzawa H. et Kawamura (réf. 23, 1975) ont comparé leurs résultats expérimentaux avec ceux obtenus par Mononobé et Okabé. Les essais effectués concernant la mobilisation et le développement des pressions dynamiques actives présentent la particularité de mesurer l'inclinaison ' δ ' de la résultante exercée sur l'écran considéré rigide et susceptible de se déplacer pendant l'excitation.

Il a été noté que lorsque l'accélération croît, la résultante des pressions dynamique croît, son inclinaison sur l'écran décroît et la hauteur de son point d'application croît légèrement.

Shibata T., Sato T. et Miura K. (réf.53, 1975) ont effectué aussi des essais à l'aide d'une caisse rigide remplie de sable et montée sur une table vibrante. Ils ont constaté comme attendu d'ailleurs que les caractéristiques de réponse de fréquence de la pression, suivent qualitativement la tendance classique des courbes de réponse.

Ils ont constaté qu'une augmentation de la déformation imposée, conduit à une diminution du module tangent et une augmentation de l'amortissement.

Lai C. S. (réf.30, 1979) a réalisé des expériences sur des modèles réduits libres de se déplacer durant les sollicitations. Le dispositif expérimental était constitué d'une cuve à sable rigide dans laquelle est disposée une maquette de mur poids sur une couche sable qui soutient un remblai de sable (figure 2.2)

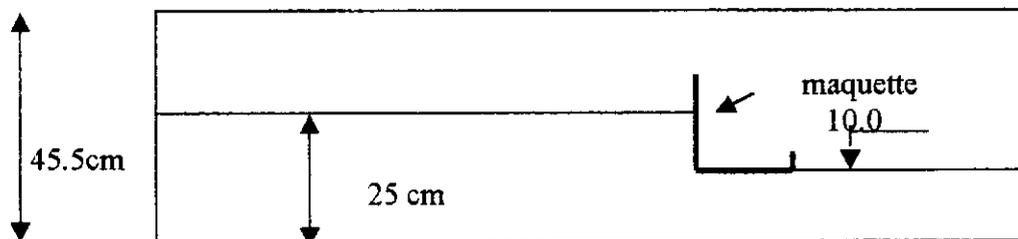


Figure 2.2 : Modèle expérimental de Lai

La sollicitation est donnée par une table vibrante sur laquelle repose la cuve de sable. Contrairement aux autres expériences, le mur étudié n'est pas relié directement à la table vibrante. Le mur étant dimensionné de telle sorte que sa cinématique soit essentiellement une translation horizontale. La sollicitation expérimentale étant un accélérogramme synthétique. Le mur expérimentalement se déplace par à coups correspondant aux pics de la sollicitation. Plusieurs murs de même géométrie et de masse différente ont été testés afin de mettre en évidence le rôle de l'inertie du mur. Il a été constaté que plus le mur est léger, plus le déplacement est grand. Ces expériences confirment certaines hypothèses de la méthode de Richards et Elms, des calculs effectués pour ces expériences avec cette méthode donnent des déplacements en accord avec les déplacements obtenus expérimentalement.

Sherif A., Ishibashi I. et Lee C. (réf.52, 1981) ont réalisé des expériences similaires à celles de Ichihara, Matsuzawa et Kawamura. Ils ont remarqué que si on définit l'état de rupture de poussée (état actif) par un déplacement du mur de $H/1000$, les pressions latérales dynamiques calculées par la méthode de Mononobé et Okabé correspondent avec les résultats expérimentaux. Ils ont noté également que l'accroissement de l'incrément dynamique des pressions agit à mi-hauteur.

Chouvet (réf.12, 1983) a réalisé des expériences sur modèles réduits dans le milieu bidimensionnel de Schneebeli. Une description détaillée est présentée plus loin. Il a utilisé deux maquettes de mur gravitaire de même géométrie et de masse différente et une maquette de mur cantilever, pouvant se déplacer librement dans le massif sans être liées directement à la base.

Il a été remarqué que les maquettes de murs poids ont un mouvement dans lequel la rotation joue un rôle très important, par contre le mur cantilever se déplace essentiellement horizontalement avec une très faible rotation au début de toutes les expériences.

Il a été constaté que pour des sollicitations, plus l'accélération est élevée, plus le mur se déplace.

Pour des sollicitations de type séisme (accélérogramme synthétique), il a été remarqué que les grands déplacements pour les trois maquettes surviennent aux mêmes instants, correspondants aux pics d'accéléérations de la sollicitation.

Un résultat supplémentaire obtenu par l'auteur est que le mur gravitaire le plus lourd résiste moins que le mur poids léger, ce qui met en évidence l'effet de l'inertie du mur pour ce type de mur. Ceci est en désaccord avec les prévisions de la méthode de Richards et Elms mais s'explique du fait que de la rotation des murs étudiés est importante et que la méthode de Richards et Elms n'en tient pas compte, ce qui en fait limite l'applicabilité de cette méthode qu'au mur en translation.

Ortiz L., Scott R. et Lee J. (réf.40, 1983) ont réalisé des expériences sur des modèles réduits dans une centrifugeuse. Ils ont étudié le cas d'un mur cantilever.

Ils ont remarqué que les prédictions obtenues avec la méthode de *Mononobé* et *Okabe* sont en bon accord avec les résultats de leurs expériences en ce qui concerne la résultante des pressions. Ils notent également comme *Ishii Arai* et *Tsuschida* que les pressions résiduelles après la sollicitation sont supérieures aux pressions statiques initiales et constituent une grande portion du maximum développé au cours de la sollicitation.

Musante H. et Ortigosa R. (réf.35, 1984) qui ont effectué des expériences sur des murs poids pivotant autour de l'extrémité aval de leur base ont aboutit à ces mêmes conclusions.

Sheriff A. et Fang (1984) mentionné par *Bakeer* et *Bathia* (réf.2, 1990), ont aussi trouvé, que la pression des terres pour un mur susceptible de se mouvoir qu'en rotation autour de son sommet n'est pas hydrostatique et que le point d'application de la résultante se trouve dans la région centrale du mur.

Bolton et Steedman (réf.5, 1985) ont effectué des expériences sur des modèles réduits en centrifugeuse. Les modèles considérés sont des murs cantilevers à base fixe et des murs poids (figure 2.3). Ils ont montré que pour les murs cantilevers une rotation de un degré (1°) du mur engendre une perte de 10 % de l'angle de frottement mobilisable.

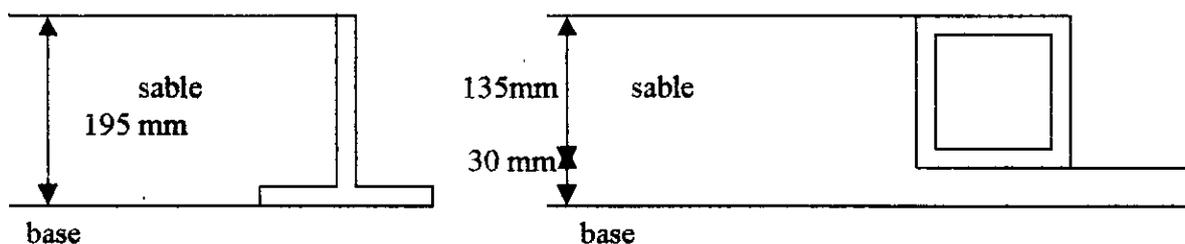


Figure 2.3 : Modèles réduits en centrifugeuse : mur cantilever et mur poids.

Pour les murs poids de masse différente dont la face en contact avec le remblai est lisse et pour lesquels la surface de fondation a été rendue rugueuse (par collage de granulé de sable). Les auteurs ont observé la formation des lignes de glissement à partir desquels ils ont évalué la valeur de l'angle de frottement mobilisable. Les murs poids librement déplaçables sur des sables denses sont fortement susceptibles d'engendrer un ramollissement à l'interface sol – fondation qui produirait une chute de l'angle de frottement interne ϕ à sa valeur critique.

Young (1985) et *Thurston* (1986, 1987) mentionné par *Cetin Soydemir* (réf.10) ont effectué un grand nombre d'essais à la table vibrante pour des murs rigides. L'objectif premier de ces tests était de valider, de comparer les résultats obtenus par la méthode analytique de *Wood* (1973, voir chapitre 3) avec les résultats expérimentaux. Le modèle de *Wood* a été adopté comme base pour le modèle sismique des murs de soutènement rigides par la 'NEW Zealand National Society for Earthquake Engineering'. Les pressions dynamiques engendrées par le sol sur le mur de soutènement ont été mesurées directement lorsque le pic de l'accélération augmentait de 0.6 g à 0.2 g par incrémentation de 0.05g.

Il a été observé que les résultats expérimentaux étaient en bon accord avec les prédictions obtenues par la méthode de *Wood*. De plus la poussée résultante mesurée s'exerçant sur l'écran rigide maintenu fixe était de deux à cinq fois supérieures à celles prédites par *Mononobé* et *Okabé* ou *Seed* et *Whitman*.

Ishibashi et Fang (réf.10, 1987) ont rapporté les résultats d'une série d'essais à la table vibrante, pour des modèles rigides fixes ou libres de se déplacer, de mur de soutènements. Les pressions dynamiques exercées par le sol sur le modèle réduit ont été mesurées pour différent mode de déplacement du mur. Il a été constaté que plus la rotation du mur par rapport à la base était possible, plus on se rapprochait de la solution de *Mononobé* et *Okabé*.

Kawamura M. et Kuribayashi F. (réf.27, 1987) ont effectué des essais à la table vibrante afin d'étudier le phénomène d'interaction sol – structure sur la pression dynamique des terres. Divers modes de mouvements et divers murs poids différents ont été envisagés ainsi que divers états de densité initiale.

Ils ont constaté que :

- Les caractéristiques de la pression des terres dynamiques sont complètement changés suivant le mode de mouvement du mur lequel est déterminé par le poids du mur et, la densité du remblai a une accélération constante.
- Dans le cas d'un mur léger où le mouvement du mur est inférieur à $H/100$, les observations effectuées correspondent bien avec celles calculées par la méthode de *Mononobé* et *Okabé*. La hauteur relative du point d'application de la force augmente de 0.35 à 0.37 suivant l'amplitude de l'accélération horizontale.
- Dans le cas des murs pesants (lourds) le mouvement du mur augmente soudainement après que l'accélération ait atteint 200 gal, le coefficient de pression des terres augmente et le point d'application de la résultante tombe à $H/3$ environ à cause du changement soudain du mouvement du mur.

Anderson (1991) Rapporté par *Withman R. V.* (réf.57) a effectué des essais en centrifugeuse pour des murs poids pouvant effectuer qu'une rotation autour de leur talon et s'appuyant sur des ressorts qui s'opposent à la rotation du mur, retenant un massif de sable sec (voir figure 2.4). Trois types de ressorts différents ont été utilisés.

Il a été constaté que la poussée exercée par le massif de sable sec était minimale lorsque la rotation du mur vers l'extérieur était maximale et n'était pas beaucoup plus grande que sa valeur initiale. Alors au moment où la rotation est maximale, la principale force dynamique

est la force d'inertie sur le mur lui-même et la composante dynamique de poussée contribue un peu à augmenter la rotation.

Le second résultat important est qu'une poussée résiduelle se développe. L'amplitude de cette poussée résiduelle est significative. Dans les essais, elle était proche de la poussée des terres au repos et se maintenait à cette valeur. Son point d'application est à environ $0.4H$. Le coefficient de poussée calculée théoriquement pour la poussée était à peu près de 0.6 . C'est une valeur limite que peut supporter un mur.

La poussée résiduelle était à peu près égale à celle obtenue par la méthode de *Mononobé* et *Okabé* et ce pour des rigidités différentes des ressorts.

La poussée des terres était maximale lorsque la rotation se faisait vers le remblai.

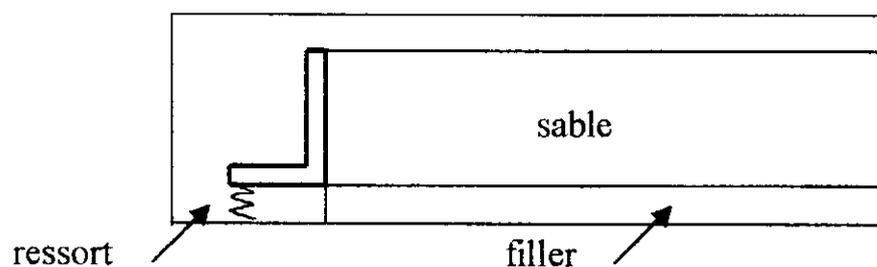


Figure 2.4 : Mur cantilever (Anderson)

Une autre série d'essais intéressants sur une longue table vibrante de 5.m à été effectué par *Budhu M., Neelarkantan et Richards R.* en (réf.9, 1993) sur un mur en aluminium retenant du sable sec mais avec ancrage. L'accélération provoquée horizontale de fréquence de 3hz passait progressivement de $0g$ à $0.6g$ puis à $0g$. Il est intéressant de constater que même pour un mur avec ancrage les résultats expérimentaux obtenus par les auteurs et les prédictions de la méthode de *Mononobé* et *Okabé* sont en bon accord en prenant pour le frottement mur sol une valeur de δ de $2/3\phi$.

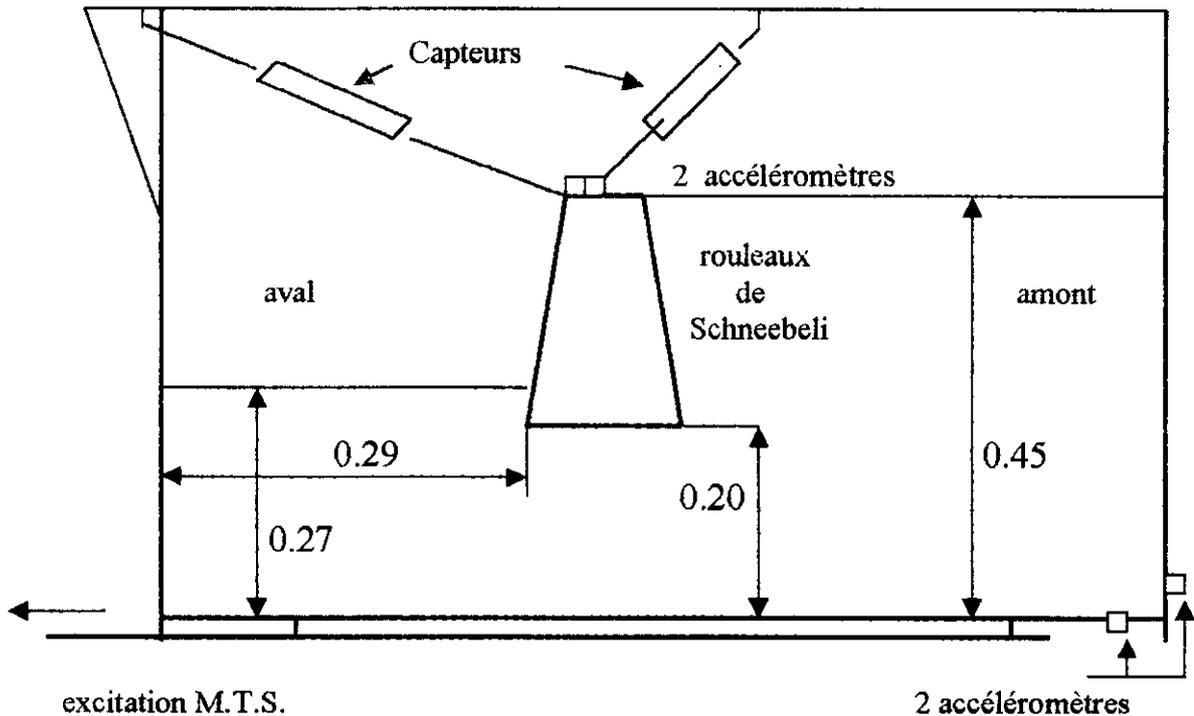
De même *Zeng et Steedman* (1993) rapporté par *Stamatopoulos et Constantine* ont effectué des essais en centrifugeuse pour des murs cantilevers avec ancrage retenant un massif de sable sec. Il est remarquable que même dans ce cas les résultats trouvés soient similaires à ceux de *Anderson et Al.*

2.3 APPROCHE EXPERIMENTALE DE CHOUVET

2.3.1 Dispositif expérimental

Un dispositif expérimental représenté sur la figure 2.5 a été utilisé par *Chouvet* (réf.12) avec comme matériau de remblai des rouleaux de duralumin dit matériau de *Schneebeili*. La base du bâti, reliée à un asservissement, permettait de le soumettre à des sollicitations dynamiques sinusoïdales à fréquence imposée. Deux murs poids de même géométrie mais de masses différentes, ainsi qu'un mur cantilever ont été testés. Les modèles de structure avaient un mouvement entièrement libre.

Qualitativement le matériau de Schneebeli possède des propriétés mécaniques voisines de celles des matériaux pulvérulents il est donc analogique. La caractéristique principale de ce matériau est d'être bidimensionnel, ce qui permet de traiter un problème plan en se libérant des phénomènes parasites dus aux frottements latéraux. Les rouleaux de duralumin sont de 3mm ou 5mm de diamètre et de 60mm de longueur. Les rouleaux de 3mm sont circulaires. Les rouleaux de 5mm sont soit circulaires soit aplatis suivant une génératrice, ces derniers permettant d'éviter toute régularité dans l'arrangement géométrique.



Mur poids

Base : 12 cm
 Largeur au sommet : 0.085
 Hauteur : 20 cm

Bâti

Longueur : 100 cm
 Hauteur : 60 cm

Figure 2.5 : Schéma descriptif du dispositif expérimental pour les murs poids.

Les deux murs poids ont la même géométrie et sont constitués de plaques d'acier et de bois assemblées rigidement. La densité du mur poids est de 3.10 dont le rapport à la densité du

matériau de Schneebeli est de 2.25, ce qui correspond au rapport des densités béton - sable sec. Le poids du mur léger est de 3.800 kgf et celui du mur lourd de 6.800 kgf

La configuration des murs dans le massif a été calculée par l'auteur de telle sorte que la stabilité statique soit assurée. L'auteur pour cela a utilisé la méthode de Nhiem. Les coefficients de sécurité ainsi déterminés sont de :

$F_s = 1.3$ pour le mur poids lourd.

$F_s = 1.4$ pour le mur poids léger.

$F_s = 2.4$ pour le mur cantilever.

Le matériau était mis en place avant chaque expérience par couche régulière de quelques centimètres d'épaisseur jusqu'à la hauteur de la base du mur, le mur était alors mis en place. Les remblais aval et amont étaient ensuite montés en couches régulières et symétriques jusqu'à la hauteur désirée (2cm) simultanément, ensuite le remblai amont était complété jusqu'au sommet du mur.

La sollicitation sinusoïdale imposée était à une fréquence de 13hz. La sollicitation appliquée à la base du cadre se traduisait par un mouvement horizontal et vertical du bâti, le mouvement horizontal restant toujours plus important que le vertical.

Pour suivre l'expérience, des capteurs d'accélération ont été placés à la base du cadre et en tête du mur. Le mouvement de la tête du mur est contrôlé par trois capteurs, deux en translation et un en rotation. Les mesures ont été faites toutes les 0.01s

2.3.2 Caractéristiques du soutènement dynamique

Les renseignements qu'ont livrés ces essais formulés par l'auteur sont de plusieurs ordres.

1) La cinématique constatée par l'auteur est différente selon le type de structure étudié. Le mur cantilever a un mouvement essentiellement de translation horizontale, un coin rigide de sol quasi indépendant de la sollicitation reste solidaire du mur durant la sollicitation. Il apparaît plus stable que les murs poids, sûrement entre autre à cause de la plus grande stabilité statique initiale. Par contre la rotation joue un rôle important dans le mouvement des murs poids. La cinématique d'ensemble de ces murs semble liée à un schéma de rupture profonde dans le massif. Une surface de glissement se crée à l'amont du mur, son inclinaison par rapport à l'horizontale, toujours plus faible que celle obtenue par une rupture statique est d'autant plus faible que le niveau de sollicitation est plus élevé. Lorsque la sollicitation devient importante le mur poids subit une forte rotation et suit le glissement observé dans le massif amont, la ruine de l'ouvrage est alors totale et il ne peut plus assurer sa fonction de soutènement.

2) L'inertie de la structure est un facteur important dans le comportement des murs poids soumis à une sollicitation dynamique. Pour une sollicitation à fréquence imposée, les courbes de déplacement du mur oscillent d'une courbe moyenne traduisant l'accumulation de la partie irréversible des déplacements. A un niveau de sollicitation comparable ces oscillations sont plus importantes pour le mur le plus lourd. De plus, globalement pour toutes les sollicitations étudiées, le mur poids lourd résiste moins bien que le mur poids léger. Il a été remarqué que l'influence de l'inertie de la structure est plus sensible lorsque la rotation du mur devient significative.

3) La réponse des trois murs à une sollicitation de type séisme est caractérisée par un déplacement incrémental qui se produit par à-coups. Lorsque la sollicitation dépasse un certain niveau, un déplacement significatif du mur se produit. Entre ces périodes de fortes sollicitations le mur reste pratiquement fixe par rapport au sol. Ainsi, seuls quelques cycles apparaissent être déterminant pour la réponse de ces ouvrages lors d'un séisme. Ceci recoupe les observations de Lai (ref 30)

2.3.3 Comparaison avec la méthode simplifiée de Richards et Elms.

Chouvet a effectué une comparaison de ces résultats expérimentaux avec les prédictions obtenues par la méthode de Richards et Elms . Cette dernière permet d'estimer le déplacement d'un mur poids soumis à un séisme en supposant que son mouvement est essentiellement une translation horizontale le long de sa base. Les calculs à partir de cette méthode ont donné des résultats plus concordant avec l'expérience dans le cas du mur poids léger que dans celui du mur poids lourd. Si comme le souligne l'auteur, l'on note par ailleurs que la rotation observée pour ce dernier est plus importante que pour le mur poids léger, il semble d'après l'auteur que l'hypothèse restrictive sur la cinématique du mur ne permette pas d'appliquer cette méthode pour un cas réel à moins de s'assurer à priori que seul le glissement soit possible pour l'ouvrage étudié. Le calcul de Richards et Elms a donné des résultats concordant avec l'expérience tant que la rotation du mur reste faible. Mais l'augmentation de l'inertie du mur conduit expérimentalement à une moins bonne résistance de la structure en favorisant sa rotation. De plus pour un mur donné, expérimentalement la rotation devient significative qu'à partir d'un certain niveau de sollicitation, ainsi l'auteur conclut que la méthode de Richards et Elms appliquée à un mur poids donne des résultats satisfaisants pour une sollicitation faible mais des résultats erronés pour une sollicitation plus forte.

2.4 CONCLUSIONS

En ce qui concerne la pratique du sujet, les constatations que l'on peut tirer de toutes ces expériences et des comparaisons avec les méthodes pseudo-statiques, montrent que :

- 1- Les pressions dynamiques totales qui sont plus grandes que les pressions que les pressions statiques, augmentent avec la sollicitation.
- 2- Le point d'application de la composante dynamique des pressions se trouve plus haut que celui de la composante statique (approximativement dans la partie centrale du mur).
- 3- Des pressions résiduelles importantes, supérieures aux pressions statiques, s'observent après la fin de la sollicitation.
- 4- L'inclinaison par rapport à l'horizontale de la surface de glissement observée en dynamique est considérablement plus petite que celle observée en statique et dépend de l'accélération imposée.
- 5- Les pressions dynamiques sont plus importantes dans le cas où l'écran ne pourrait pas se déplacer complètement ou partiellement pendant l'excitation.
- 6- L'inclinaison de la résultante exercée sur le mur (dans le cas actif), diminue avec l'accélération imposée.
- 7- Les caractéristiques de réponse de fréquence de la pression exercée par un sable, suit la tendance bien connue pour les sables, à savoir qu'une augmentation de la déformation conduit à une diminution du module tangent et une augmentation de l'amortissement.
- 8- La distribution des pressions derrière le mur n'a pas une allure hydrostatique.
- 9- Un déplacement minimum de la paroi est nécessaire pour qu'un état d'équilibre limite se développe dans le massif amont. Dans ce cas la méthode de Mononobé et Okabé donne une estimation correcte de la pression dynamique totale.
- 10- La méthode de Mononobé et Okabé ne tient pas compte de l'inertie du mur. Ce facteur important est pris en considération par la méthode de Richards et Elms qui ne s'applique qu'au cas de translation horizontale du mur. Cette méthode permet

de calculer le déplacement total du mur pour une sollicitation sismique et donne des résultats qualitativement intéressants. La limitation sur la cinématique du mur réduit beaucoup son domaine d'application

Le comportement des ouvrages de soutènement soumis à une sollicitation dynamique est un phénomène complexe d'interaction sol structure où de nombreux facteurs interviennent. Les méthodes pseudo-statiques semblent à première vue peu réalistes car en plus des remarques faites en conclusions du chapitre 1, elles traitent un problème dynamique comme un problème statique en négligeant les phénomènes d'interaction sol structure. La cinématique relative du sol et de la structure est ignorée, bien qu'elle influe beaucoup sur l'état de contrainte dans le sol qui est beaucoup plus complexe que celui supposé par Mononobé et Okabé.

Pourtant, les essais sur modèles réduits justifient la pratique de la méthode de Mononobé et Okabé compte tenu de la remarque 9 ci-dessus. Par sa grande simplicité cette méthode présente un intérêt et un avantage certain. Mais il faut tout de même être très prudent quant à son utilisation. Cette méthode s'avère être donc un bon outil de conception. Elle permet de vérifier si un mur donné est stable ou non en estimant l'effort exercé par le sol sur la structure au cours d'un séisme en choisissant des valeurs appropriées des coefficients d'accélération C_h et K_v . Les expressions approchées formulées par Seed et Whitman facilitent encore plus les calculs. Il est quand même important de noter que pour appliquer la méthode de Mononobé et Okabé de s'assurer qu'un état d'équilibre limite existe derrière le mur. Pour cela il est nécessaire que la structure se déplace d'une certaine quantité, même si celle-ci est relativement faible. Si on suppose que cette condition n'est pas réalisée, des mesures expérimentales (constations) donnent des efforts bien plus importants que ceux obtenus par ces méthodes.

Enfin, la méthode de Mononobé et Okabé ne permet pas de calculer le déplacement de la structure au cours d'un séisme, contrairement à la méthode de Richards et Elms qui prend en plus en considération l'inertie de la structure. L'importance de cette inertie a été fois mise en évidence expérimentalement. La méthode de Richards et Elms qui est un développement du modèle de Newmark de glissement d'un bloc rigide sur une surface plane fait l'hypothèse qui semble trop restrictive pour un cas réel que le mur est libre de se déplacer librement uniquement parallèlement à sa base. Cette méthode permet de donner une estimation du déplacement incrémental du mur (voir chapitre 1) au cours du séisme après avoir déterminé l'accélération limite de stabilité. Cette limite dépend des mêmes facteurs que la pression dynamique ainsi que de la masse du mur et du frottement fondation - sol. Sous réserves des hypothèses faites sur le déplacement du mur, ces auteurs ont montré d'une part qu'un mur poids résiste mieux qu'un mur léger pour une sollicitation donnée ce qui a été confirmé par Lai dont les murs étaient dimensionnés de telles sortes qu'ils ne se déplacent qu'en translation. Mais l'augmentation du poids du mur conduit à une moins bonne résistance du terrain d'assise en favorisant sa rotation qui n'est pas prise en compte par ce type de calcul. Cette rotation peut survenir lorsqu'un certain niveau de sollicitation est atteint. Ainsi pour ce type de mur la méthode de Richards et Elms donnent des résultats satisfaisants que lorsque ce niveau de rotation n'est pas atteint. Cette méthode doit donc être appliquée avec prudence car l'hypothèse sur la cinématique du mur est trop restrictive. Il faudrait s'assurer que la cinématique de glissement sera la seule possible pour l'ouvrage étudié.

Ces méthodes (pseudo-statiques) simplifiées ont de nombreuses limitations qui les rendent a priori inadéquates à reproduire la complexité du phénomène d'interaction sol - structure bien que pouvant donner globalement des résultats satisfaisants compte tenu des remarques qui ont été faites ci-dessus. Traitant un problème dynamique de façon pseudo-dynamique, elles ne permettent pas de mettre en évidence les phénomènes complexes qui se produisent

dans le sol ou aux interfaces et autres. Une tendance à une modélisation plus fine, où le phénomène d'interaction sol –structure ou l'influence de la sollicitation sur le comportement du sol... etc., s'avère nécessaire, ne serait-ce que pour avoir une meilleure compréhension de l'ensemble des facteurs intervenant dans ce phénomène d'interaction sol - structure.

De nombreuses approches ont été faites par différents auteurs. Toutes sortes de modélisation ont été envisagées. Mais il en demeure pas moins que l'approche expérimentale permet seule de valider un modèle et qu'un modèle ne sera retenu que s'il recoupe les constatations expérimentales (ne serait qu'une partie). De nombreux auteurs comme ceux mentionnés dans le chapitre suivant (chapitre 3), après avoir procédé à une expérimentation ont comparé leurs résultats avec un modèle théorique proposé. Généralement dans le cadre des hypothèses émises par ces auteurs et les conditions expérimentales vérifiant ces hypothèses, les résultats s'avèrent grossièrement satisfaisants. Seul le degré de précision varie d'une méthode à une autre (tant que les hypothèses sont respectées). Nous ne nous attarderons pas plus longtemps là-dessus puisque le prochain chapitre est entièrement consacré à la présentation de ces modèles dont les comparaisons avec l'expérimentation seront plus clairement détaillées.

CHAPITRE 3

APPROCHE DYNAMIQUE DE L'ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES OUVRAGES DE SOUTÈNEMENT

3.1 INTRODUCTION

Ces approches multiples utilisant des modèles, les plus simples aux plus sophistiqués ont pour but d'essayer soit de rendre compte de la variation du champ des contraintes dans le temps pour les points du mur et du sol, soit de simuler la variation du champ des déplacements des points du mur ou du sol, soit les deux à la fois.

Les modèles les plus simples utilisent pour le sol une modélisation généralement élastique. C'est le cas des premiers modèles que l'on trouve dans la littérature où les auteurs ont étudié le cas où les déplacements sont suffisamment petits pour que l'on puisse supposer un comportement élastique pour le sol. Cette hypothèse trop contraignante a amené les chercheurs à considérer des modèles anélastiques non linéaires.

Parmi les études menées, la méthode analytique initialement utilisée les premières années pour les modèles simples a été remplacée par la technique des différences finies ou la technique des éléments finis, pour simuler le comportement du massif derrière et sous le mur. Généralement, la nature exacte du modèle constitutif n'est pas toujours présentée de façon claire dans les références. Les modèles constitutifs et code de calculs utilisés par nombre d'auteurs ont généralement été développés dans un but plus général que l'étude des ouvrages de soutènements. Les codes de calculs tendent à être rapidement complexes, et il paraît difficile pour les intéressés autres que les auteurs à les mettre en pratique. Ils sont généralement utilisés pour permettre une meilleure compréhension ou explication du comportement général et d'explorer la limite de simple modèle et aussi de prédire dans certains cas les résultats de modèle expérimentaux et d'observation réelle. Actuellement, il y a très peu d'application dans les projets actuels pour les ingénieurs en bureau d'études, si ce n'est pour traiter un projet de taille non habituelle et important.

Nous signalerons en plus que nombre d'auteurs tel que *Veletsos A.S.* et *Younan A.H.* (réf. 54, 1994) ou *Wolf J.P.* (réf. 58, 1997), publient jusqu'à présent des travaux dont le but est d'affiner des modèles très simplifiés, utilisant une modélisation par masses concentrées, ressorts et amortisseurs pour représenter l'interaction sol - structure. Ces modèles du fait de leur simplicité s'avèrent très utiles pour étudier les aspects du comportement des ouvrages de soutènements.

Dans ce chapitre nous passerons en revue l'ensemble des modèles représentatifs de façon chronologique par mode de supposition de comportement pour les sols (élastique, viscoélastique, non linéaire) que nous trouvons dans la littérature avec une attention particulière pour les modèles que nous utiliserons. Une conclusion clôturera ce chapitre.

3.2 MODELES ELASTIQUES

Ishii Y., Arai M., Tsuchida H. (réf.24, 1960) et *Matsuo H., Ohara S.* (réf.32, 1960) ont présenté parmi les premiers des solutions théoriques dans le cas d'un sol homogène avec des propriétés élastiques constantes à partir de la théorie de la propagation des ondes dans un milieu élastique (figure 3.1), pour un mur fixe. Ils ont traité le cas d'un mur vertical rigide et fixe retenant un remblai horizontal, l'ensemble reposant sur un substratum rigide. Le remblai est considéré comme un milieu élastique homogène bidimensionnel semi - infini. Les déplacements verticaux y sont supposés négligeables. Une accélération verticale sinusoïdale est introduite à la base du modèle.

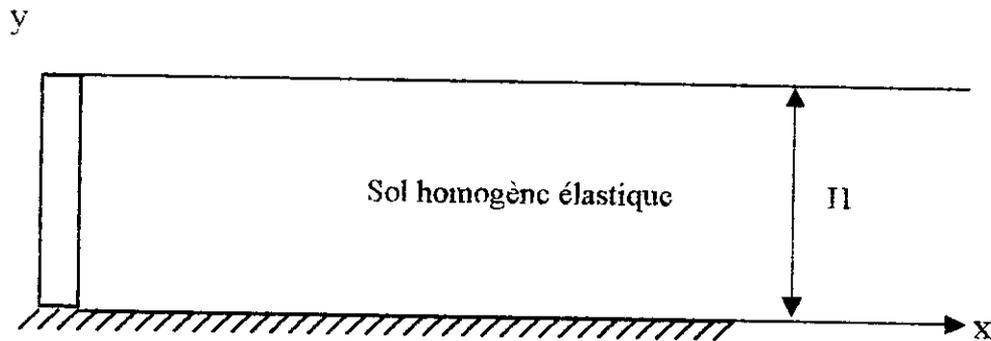


Figure 3.1 Modèle de Matsuo et Ohara

Soit λ et μ les coefficients élastiques de Lamé, l'équation de propagation des ondes conduit aux systèmes suivant :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K_h g \sin \omega t \quad (3.1)$$

avec les conditions limites et initiales

$$(u_{x=0}) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=H} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{y=0} = 0 \quad (3.2)$$

où u est le mouvement relatif d'un point du sol.
 (x,y) les coordonnées d'un point du sol
 K_h est le coefficient de l'accélération horizontale
 ω est la pulsation de l'accélération imposée à la base
 g est l'accélération de pesanteur

L'amplitude de la contrainte normale σ_x s'exerçant sur le mur se déduit de la solution du problème précédent, et on obtient :

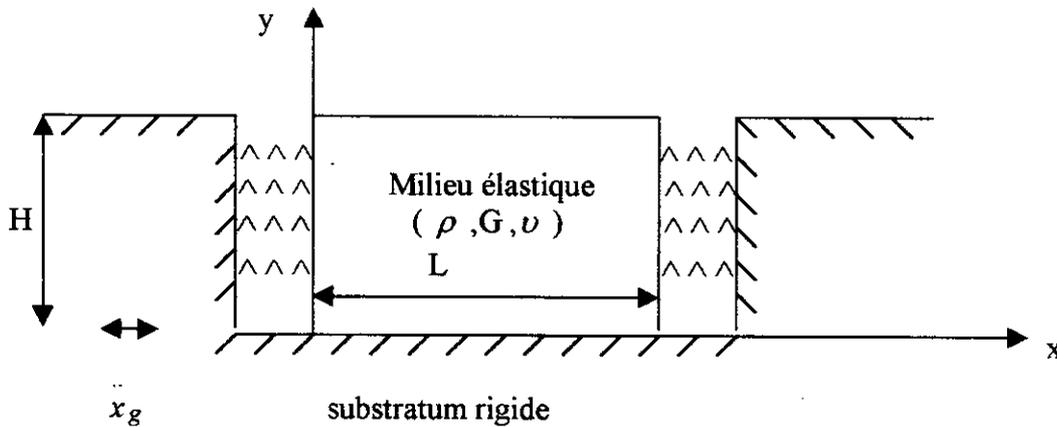
$$\sigma_x(y) = 4\rho g K_h H \sum_m \frac{\sin \frac{(m+1)\pi}{2H} y}{\pi(2m+1) \left[\frac{C_2^2}{C_1^2} \left(\frac{(2m+1)\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\omega H}{C_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.3)$$

où

$$C_1^2 = (\lambda + \mu) / \rho \quad \text{et} \quad C_2^2 = \mu / \rho \quad (3.4)$$

avec ρ représentant la masse volumique du matériau.

Scott (1973) mentionné par *Cétin Soydemir* (réf.10) a développé un modèle pour un mur de soutènement rigide, pivotant autour de sa base, retenant un remblai à surface libre horizontale. Dans son modèle (figure 3.2) le sol est traité comme une poutre bidimensionnelle, travaillant uniquement en cisaillement et en schématisant l'interface sol - mur et les conditions aux limites par des ressorts.



ρ masse volumique du sol.

G module d'élasticité transversal du sol.

ν Coefficient de Poisson du sol.

figure 3.2 Modèle de Scott

En considérant les propriétés du sol et les caractéristiques des ressorts homogènes, Scott a proposé une solution stationnaire pour laquelle il ne prend en compte que le premier mode propre du système libre. La fréquence propre fondamentale du système peut alors s'écrire :

$$\omega_1 = \frac{\pi V_s}{2H} \left[1 + \frac{64}{\pi^2} \left(\frac{H}{L} \right)^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right] \quad (3.5)$$

$$\text{où } V_s = \sqrt{\frac{\rho}{g}} \quad (3.6)$$

représente la vitesse de propagation des ondes de cisaillements dans le milieu.

La distribution des contraintes normales σ_x s'exerçant sur le mur est alors donnée par :

$$\sigma_x(y) = P_m \cos \frac{\pi y}{2H} \quad (3.7)$$

avec

$$P_m = \frac{3GS_v(1-\nu)}{\pi\omega_1 L(1-2\nu)} \quad (3.8)$$

où S_v représente la pseudo-vitesse correspondant à la fréquence ω_1 , déterminée après avoir choisi un spectre de réponse du sol pour le site considéré.

La contrainte normale est maximale en tête du mur. L'intégration de cette solution nous donne une estimation de l'incrément de pression dynamique ΔP_{ad}

$$\Delta P_{ad} = 2P_m \frac{H}{\pi} \quad (3.9)$$

Son point d'application est situé à $0.64H$ de la base du mur.

Cette méthode permet d'estimer les efforts dynamiques sur une paroi mais elle utilise de nombreuses simplifications. L'auteur précise que l'utilisation du mode fondamental seul, n'est justifiée que si le rapport L/H est compris entre 1 et 2.

L'application de ce modèle au milieu semi-infini est présentée sur la figure 3.3 (réf 3.10). La hauteur du mur et les propriétés des matériaux sont prises égales à ceux de la couche de sol. La rigidité du ressort K_s par unité de longueur et par unité de hauteur est :

$$K_s = \frac{8(1-\nu)G}{10(1-2\nu)H} = 0.4\chi_0 \frac{G}{H} \quad \text{avec} \quad (3.10)$$

$$\chi_0^2 = 2 \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \quad (3.11)$$

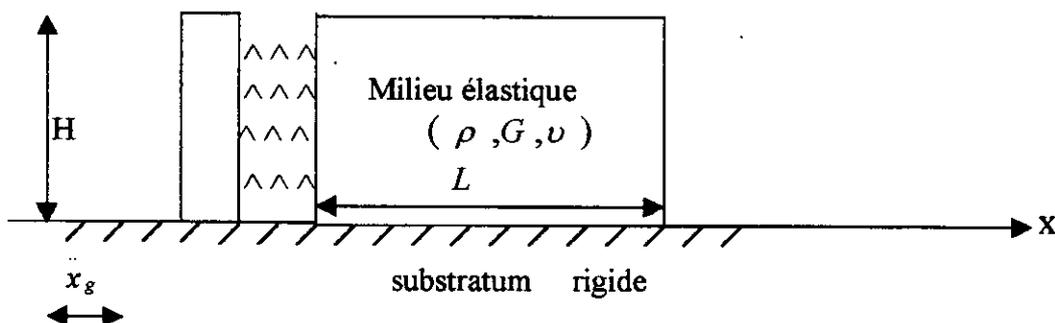


Figure 3.3 Modèle de Scott : Milieu semi-infini

Dans ce cas la poutre représente l'action du champ lointain. Pour obtenir la pression dynamique exercée sur le mur, on multiplie la réponse en champ lointain $u(y)$ par K_s .

Plusieurs remarques s'imposent pour ce modèle.

- L'estimation effectuée sur K_s est d'une précision incertaine et toute mauvaise estimation de K_s conduit à une erreur certaine sur l'évaluation des pressions dynamiques.
- Aucune allusion n'est faite de la participation du massif de sol proche du mur.
- Le modèle ne tient pas compte de l'amortissement par radiation. Il s'ensuit une surestimation de la réponse.

Pour la réponse en champ lointain pour une couche de sol assimilé à une poutre transversale la relation classique s'écrit (réf 3.10)

$$u(\eta) = -\frac{16}{\pi^3} \frac{\rho \ddot{x}_g H^2}{G} \sum_{n=1,3} \frac{1}{n^3} \frac{1}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \sin n \frac{\pi}{2} \eta \quad (3.12)$$

où

$$\eta = y / H$$

δ : facteur d'amortissement interne qui dans le cas élastique est nul.

$$\phi_n = \frac{1}{n} \frac{\omega}{\omega_1}$$

ω Fréquence d'excitation de la poutre transversale.

$$\omega_1 = \frac{\pi V_s}{2 H} \quad \text{où } V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad : \text{vitesse de propagation des ondes de cisaillements}$$

ω_1 fréquence propre fondamentale de la poutre transversale de sol

\ddot{x}_g accélération à la base du modèle.

La pression dynamique horizontale qui s'exerce sur le mur est :

$$\sigma_x(\eta) = -\frac{604 \chi_0^2}{\pi^3} \rho \ddot{x}_g H \sum_{n=1,3} \frac{1}{n^3} \frac{1}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \sin n \frac{\pi}{2} \eta \quad (3.13)$$

La résultante horizontale des pressions dynamique qui s'exerce sur le mur est par intégration des pressions sur la hauteur du mur :

$$Q_d = -\frac{12.8 \chi_0^2}{\pi^4} \rho \ddot{x}_g H^2 \sum_{n=1,3} \frac{1}{n^4} \frac{1}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \quad (3.14)$$

Et le moment résultant à la base :

$$M_d = \int_0^1 \sigma_x(\eta) H^2 \eta d\eta \quad (3.15)$$

$$M_d = -\frac{25.6\chi_0^2}{\pi^5} \rho x_g H^3 \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{-1^{\frac{n-1}{2}}}{n^5} \frac{1}{1-\phi_n^2 + i\delta} \quad (3.16)$$

Wood J.H. (1975) mentionné par Cetin Soydemir (réf.10) a considéré le modèle (figure 3.4) élasto-dynamique. Le massif de sol est supposé élastique, homogène et est limité par deux frontières verticales représentant des murs lisses et une frontière horizontale représentant un massif de sol rigide. La sollicitation est modélisée par une accélération uniforme sur les frontières. Une analyse modale est utilisée pour résoudre le problème.

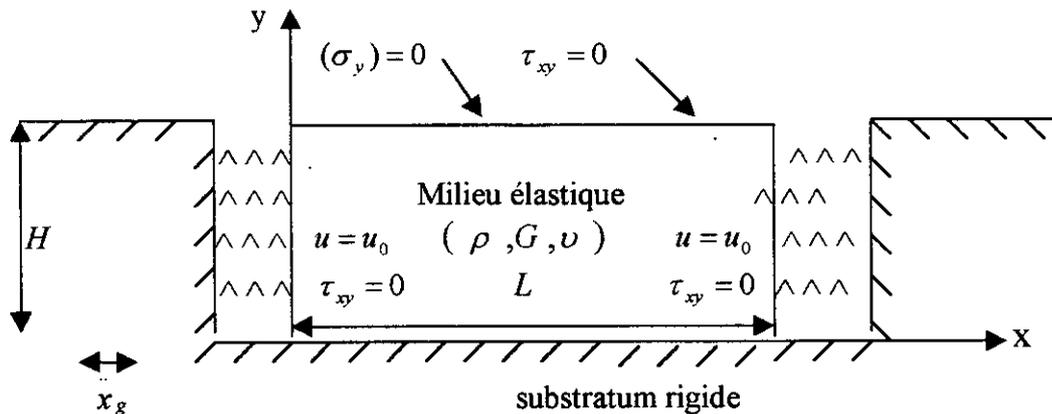


Figure 3.4 : Modèle de Wood

La distribution des contraintes normales sur l'écran est comparable à celles obtenues avec d'autres solutions élastiques.

3.3 MODELES VISCOELASTIQUES

Dans les modèles précédents, le comportement du sol est purement élastique, mais dans la réalité même pour des petites amplitudes de déformation on constate une déperdition d'énergie de deux natures différentes.

- La première dite géométrique correspond à l'atténuation des amplitudes des ondes en s'éloignant de la source par radiation. Elle est dite : amortissement géométrique ou radial.
- La deuxième correspond à l'amortissement engendré par la nature même du matériau. Il est dit amortissement interne. Ce dernier est généralement estimé par des essais en laboratoire sa détermination par des essais in situ étant généralement plus difficile.

Dans la pratique de l'étude des vibrations, plusieurs modèles mathématiques existent pour prendre en considération l'amortissement interne du matériau. Ces modèles les plus courants sont :

• Modèle d'amortissement de Coulomb (ou modèle frottement solide) : Le modèle analogique est composé d'un ressort en série avec un patin. L'énergie dissipée au cours d'un cycle est proportionnelle à l'amplitude de déformation.

Pour un système à un degré de liberté l'équation de mouvement s'écrit :

$$m \ddot{x} \pm F_R + kx = F_0 \sin \omega t$$

où m est le terme de masse, F_0 est l'amplitude de la force excitatrice, k la rigidité du ressort, et F_R la force de frottement (opposé au déplacement et proportionnelle à la masse m). Le degré de liberté de la masse $x = X \sin \omega t$

L'énergie dissipée par cycle est :

$$W = 4.F_R X$$

• Modèle de Kelvin-Voigt (ou modèle à amortissement visqueux). Le modèle analogique est composé de l'association en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur visqueux. Dans ce cas l'énergie dissipée est directement proportionnelle à la fréquence. Ce modèle de l'amortissement visqueux est introduit dans les études du sol surtout pour faciliter les calculs. Il ne fournit un modèle satisfaisant que dans certains cas particuliers.

Pour un système à un degré de liberté nous avons alors l'équation différentielle suivante :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

avec les notations précédentes où c est le coefficient d'amortissement visqueux.

L'amortissement critique (racine double (pour la pulsation de la réponse) pour l'équation homogène) est alors :

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \quad \text{ou encore} \quad c_{cr} = 2m\omega_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{la pulsation propre du système.}$$

Le rapport d'amortissement à l'amortissement critique est noté par :

$$\xi = c / c_{cr}$$

et l'énergie W dissipée par cycle de vibration (cas stationnaire) est alors (par intégration du travail élémentaire des forces d'amortissement sur un cycle) :

$$W = \pi.c.\omega.X^2$$

L'énergie élastique correspondante alors a un de cycle : est $V = 4\left(\frac{1}{2}kX^2\right)$

$$\text{Le facteur de perte est } \eta = \frac{W}{\pi V} = \frac{c.\omega}{2k} = \xi \frac{\omega}{\omega_0}$$

• Modèle d'amortissement dit hystérétique linéaire : Ce modèle est plus proche du comportement réel d'un sol dans le sens où l'énergie dissipée ne dépend pas de la vitesse de

déformation du sol mais plutôt du niveau de déformation. Dans le cas de l'amortissement hystérétique, l'énergie dissipée est considérée indépendante de la fréquence mais proportionnelle au carré de l'amplitude. Pour le moment, une équation différentielle significative n'est pas disponible pour représenter le modèle hystérétique. Une première écriture de l'équation de mouvement consiste à reprendre la précédente avec $c(\omega)$ au lieu de c .

Soit pour un système à un degré de liberté nous avons :

$$m\ddot{x} + c(\omega)\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad \text{avec} \quad c(\omega) = \frac{b}{\omega} \quad \text{où} \quad b \text{ est une constante} \quad b = 2k\eta$$

L'énergie dissipée par cycle est alors.

$$W = \pi \cdot b \cdot X^2$$

La validité de cette équation est sujette à controverse du fait de la définition de l'amortissement dans le domaine des fréquences et de la vitesse \dot{x} dans le domaine des temps. On définit de la même manière l'amortissement critique d'une part :

$$b_{cr} = c_{cr} \omega_0$$

et le rapport de l'amortissement à l'amortissement critique par :

$$\xi(\omega) = \frac{b}{b_{cr}} = \frac{c(\omega) \cdot \omega}{c_{cr} \cdot \omega_0} = \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = \eta$$

- Modèle d'amortissement hystérétique et non-linéaire : Celui-ci reproduit mieux les propriétés non-linéaires du sol dans la mesure où il est directement basé sur la courbe contraintes-déformations du sol.

Dans la pratique les modèles les plus répandus du fait de leur simplicité sont les modèles visqueux. Mais des modèles plus complexes composés d'un assemblage en série et en parallèle d'un nombre fini de ressorts, amortisseurs, pou représenter l'interaction sol-structure existent aussi. Nous nous limiterons ici à la présentation de deux types de modèle largement représentatifs. Le premier présenté par *Veletsos* et *Younan* en 1994 pour les ouvrages rigides et fixes. Ce modèle a été généralisé en 1997 pour les ouvrages flexibles susceptibles de subir des rotations. Puis nous verrons rapidement celui proposé par *Wolf*, lequel, plus complexe a été élaboré dans un cadre d'étude plus générale sur l'interaction sol-structure.

3.3.1 Modèle de Veletsos et Younan : mur fixe

Veletsos A.S. et *Younan A.H.* (réf.54, 1994) évalue la pression dynamique induite par une sollicitation dynamique, harmonique ou sismique, sur un mur de soutènement, droit, vertical, fixe retenant un massif de sol semi-infini viscoélastique (figure 3.5).

L'amortissement interne pour le milieu est considéré de type constant hystérétique.

Les propriétés du massif sont définies par sa densité, son module d'élasticité transversale, son coefficient de Poisson soit (ρ, G, ν) sans oublier son coefficient d'amortissement

interne δ , lequel est considéré indépendant de la fréquence d'excitation et identique pour les déformations axiales et transversales.

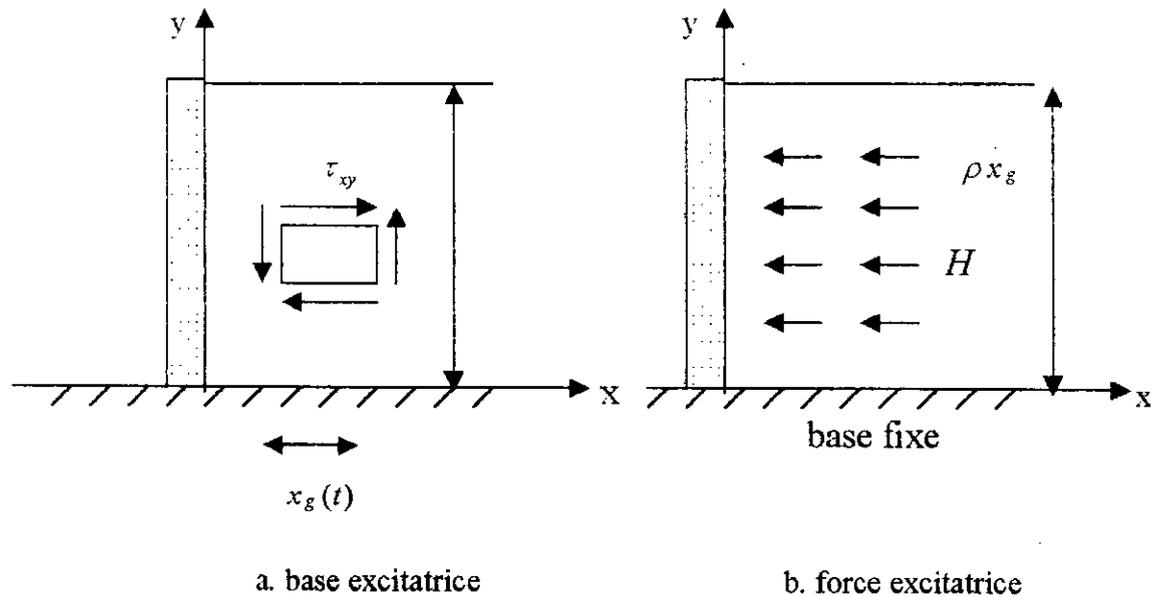


Figure 3.5 : Système considéré par Veletsos et Younan.

3.3.1.1 Hypothèses et équations de mouvements

Les équations d'équilibre indéfini de la mécanique des milieux continus appliqués aux systèmes donnent :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \eta} = \rho H \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho H x_g(t) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} = \rho H \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

où σ_x et σ_y sont les contraintes normales agissant sur des facettes verticales et horizontales au point considéré et τ_{xy} la contrainte tangentielle s'exerçant sur ces mêmes facettes. Et les déplacements relatifs horizontaux et verticaux sont (u, v) . De plus, on définit les paramètres sans dimensions

$$\varepsilon = \frac{x}{H} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y}{H} \quad (3.19)$$

La convention de signe utilisé pour les contraintes et déplacements sont ceux de la théorie d'élasticité.

Les relations contraintes et déformations pour le problème de déformation plane sont :

$$\sigma_x = (\lambda^* + 2G^*) \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \lambda^* \frac{1}{H} \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (3.20)$$

$$\tau_{xy} = G^* \frac{1}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) \quad (3.21)$$

$$\sigma_y = (\lambda^* + 2G^*) \frac{1}{H} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \lambda^* \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (3.22)$$

où G^* , λ^* sont les valeurs complexes des constantes de Lamé

$$G^* = G(1 + i\delta) \quad (3.23)$$

$$\lambda^* = -\frac{2\nu}{1-2\nu} G^* \quad (3.24)$$

Si on suppose qu'aucune contrainte verticale ne se développe alors $\sigma_y = 0$, d'où

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}$$

Après substitution de (3.25) dans (3.20), on obtient

$$\sigma_x = \psi_0 G^* \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \quad \text{avec}$$

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}$$

Ensuite substituons (3.20) et (3.21) dans (3.17) et utilisons les équations (3.24) et (3.25) on obtient l'équation d'équilibre des forces dans la direction xx soit :

$$\psi_c G^* \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} + G^* \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \rho H^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho H^2 \ddot{x}_g(t) \quad \text{avec}$$

$$\psi_c = \sqrt{\frac{2-\nu}{1-\nu}} \quad \text{et les conditions aux limites}$$

$$u_{\varepsilon=0} = 0$$

$$u_{\eta=0} = 0 \text{ s}$$

Une fois u connu, l'équation (3.26) donne la contrainte normale ' σ_x ', l'équation (3.25) donne par intégration le déplacement vertical ' v ', avec la condition limite

$$v_{\eta=0} = 0$$

Et la contrainte de cisaillement est donnée par l'équation (3.21)

On remarque que cette par cette approche l'équation (3.18) n'est pas satisfaite. Une autre conséquence est que la contrainte de cisaillement nulle à la surface libre n'est pas satisfaite aussi. Il a été montré que la prise en compte de la contrainte verticale influe très peu sur la pression dynamique mais complique grandement le problème.

Si on fait l'hypothèse que le déplacement vertical est nul au lieu de la contrainte verticale on doit alors remplacer ψ_0 et ψ_c par χ_0 donné par (3.11)

$$\chi_0 = \sqrt{2 \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}}$$

3.3.1.2 Réponse harmonique.

Pour un mouvement harmonique imposé à la base du système de la forme :

$$x_g(t) = X_g e^{i\omega t}$$

Le déplacement relatif peut s'exprimer de la manière suivante :

$$u(\varepsilon, \eta, t) = U(\varepsilon, \eta) e^{i\omega t}$$

Où $X_g(t)$ est l'amplitude de l'accélération

ω est la fréquence du mouvement imposé à la base.

$U(\varepsilon, \eta)$ est une valeur complexe de ε et η , et représente l'amplitude relative de déplacement.

La fonction $U(\varepsilon, \eta)$ peut être exprimée comme une combinaison linéaire des modes de vibration du milieu calculé en faisant l'hypothèse que le milieu se comporte comme une série de poutres transversales verticales cantilevers, c'est à dire que :

$$U(\varepsilon, \eta) = \sum_{n=1,3}^{\infty} U_n(\varepsilon) \sin n \frac{\pi}{2} \eta$$

où ' n ' est un ordre d'intégration.

Ecrivons \ddot{X}_g sous la forme :

$$\ddot{X}_g = \frac{4}{\pi} \ddot{X}_g \sum_{n=1,3}^{\infty} \sin n \frac{\pi}{2} \eta \quad (3.36)$$

En substituant (3.33) et (3.35) dans (3.28) et en utilisant (3.35), on trouve que U_n doit satisfaire l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \varepsilon^2} - \left(\frac{n\pi}{2\psi_c}\right)^2 \Lambda_n U_n = \frac{4\rho X_s'' H^2}{n\pi\psi_c^2 G^*} \quad (3.37)$$

Dans laquelle

$$\Lambda_n = 1 - \frac{\phi_n^2}{1 + i\delta} \quad (3.38)$$

$$\phi_n = \frac{1}{n} \frac{\omega}{\omega_1}$$

$\omega_1 = \frac{\pi V_s}{2 H}$ est la fréquence propre fondamentale de poutre cantilever avec :

$V_s = \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ représentant la célérité des ondes transversales dans le sol.

La solution de l'équation homogène de l'équation différentielle (3.37) est :

$$U_n^h(\varepsilon) = A_n e^{-\alpha_n \varepsilon} + B_n e^{\alpha_n \varepsilon} \quad \text{avec } A_n \text{ et } B_n \text{ des constantes d'intégration, et}$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{2\psi_c} (a_n + ib_n) = c_n + id_n \quad \text{où } a_n \text{ et } b_n \text{ sont des valeurs réelles positives.} \quad (3.42)$$

$$a_n = \sqrt{|\Lambda_n|} \cos \theta_n \quad (3.43a)$$

$$b_n = \sqrt{|\Lambda_n|} \sin \theta_n \quad \text{où} \quad (3.43b)$$

$$\theta_n = \frac{1}{2} \arg(\Lambda_n) = \frac{1}{2} \arctg \frac{\delta \phi_n^2}{1 - \phi_n^2 + \delta^2} \quad \text{représente la phase comprise entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}. \quad (3.44)$$

Pour un système dissipatif non amorti, $\theta_n = 0$ pour $\phi_n < 1$

$\theta_n = \frac{\pi}{2}$ pour $\phi_n > 1$. Dans les deux cas on a :

$$(a_n + ib_n) = \sqrt{1 - \phi_n^2}.$$

L'étude dans tous les cas détaillés de la solution homogène conduit à $B_n = 0$ sinon des situations impossibles se produisent.

La solution particulière de l'équation différentielle (3.37) est donnée par :

$$U_n^p(\varepsilon) = -\frac{16}{\pi^3} \frac{\rho \ddot{X}_g H^2}{G} \frac{1}{n^3} \frac{1}{1 - \phi_n^2 + i\delta}$$

Et la solution générale par :

$$U_n(\varepsilon) = A_n e^{-(c_n + id_n)\varepsilon} - \frac{16}{\pi^3} \frac{\rho \ddot{X}_g H^2}{G} \frac{1}{n^3} \frac{1}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \quad (3.46)$$

où la constante A_n est déterminée par les conditions limites (3.30), ce qui donne après détermination de A_n et remplacement dans (3.35) pour l'amplitude relative de déplacement :

$$U_n(\varepsilon, \eta) = -\frac{16}{\pi^3} \frac{\rho \ddot{X}_g H^2}{G} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1 - e^{-(c_n + id_n)\varepsilon}}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \sin \frac{n\pi}{2} \eta \quad (3.47)$$

La partie réelle de cette solution est en phase avec l'excitation alors que la partie imaginaire est en quadrature de phase avec l'excitation.

Deux facteurs contribuent à la partie imaginaire :

- amortissement interne
- amortissement géométrique ou radial

S'il y a un amortissement interne, lorsque $\varepsilon \rightarrow \infty$, le terme exponentiel de l'équation (3.47) tend vers zéro et on obtient :

$$U_n(\eta) = -\frac{16}{\pi^3} \frac{\rho \ddot{X}_g H^2}{G} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \sin \frac{n\pi}{2} \eta \quad (3.48)$$

On retrouve alors l'expression pour le cas d'une poutre transversale de même hauteur et de mêmes propriétés physiques excitées de la même manière.

Pour un matériau purement élastique l'équation (3.47) se ramène à :

$$U_n(\varepsilon, \eta) = -\frac{16}{\pi^3} \frac{\rho \ddot{X}_g H^2}{G} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1 - e^{-\frac{n\pi}{2\psi_c} \sqrt{1 - \phi_n^2} \varepsilon}}{1 - \phi_n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \eta \quad (3.49)$$

Il s'ensuit que :

- Pour les fréquences plus faibles que la fréquence propre fondamentale, les fonctions exponentielles dans la série sont toutes réelles et l'amplitude des déplacements varie de façon monotone de 0 pour $\varepsilon = 0$ à sa valeur maximale en champs libre. On n'a pas de dissipation radiale.
- Pour des fréquences plus grandes que la fréquence fondamentale propre du sol, la réponse en champ libre consiste en la superposition du mouvement de la poutre transversale (sol) et du mouvement dû à la radiation d'ondes issues du mur.
- Pour n'importe quelle fréquence égale à n'importe quelle fréquence propre du sol, la réponse du système devient infinie.

Déplacements verticaux

En substituant l'équation (3.47) dans (3.25) et en intégrant par rapport à η et en satisfaisant les conditions aux limites (3.32) le déplacement vertical est alors donné par :

$$v(\varepsilon, \eta, t) = V(\varepsilon, \eta)e^{i\alpha t} \quad \text{dans laquelle} \quad (3.50)$$

$$V(\varepsilon, \eta) = -\frac{16\psi_v}{\pi^3} \frac{\rho \ddot{X}_g H^2}{G} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{(a_n + ib_n)e^{-(c_n + id_n)\varepsilon}}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \eta\right) \quad \text{avec} \quad (3.51)$$

$$\psi_v = \frac{v}{\sqrt{(1-v)(2-v)}} \quad (3.52)$$

Contraintes normales et transversales :

Ces quantités peuvent être exprimées comme :

$$\sigma_x(\varepsilon, \eta, t) = \sigma(\varepsilon, \eta)e^{i\alpha t} \quad (3.53)$$

$$\tau_{xy}(\varepsilon, \eta, t) = \tau(\varepsilon, \eta)e^{i\alpha t}$$

En substituant (3.47) dans (3.26) et de la même façon (3.47) dans (3.21) on obtient :

$$\sigma(\varepsilon, \eta) = -\frac{8\psi_\sigma}{\pi^2} \rho \ddot{X}_g H^2 (1+i\delta) \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(a_n + ib_n)e^{-(c_n + id_n)\varepsilon}}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \sin \frac{n\pi}{2} \eta \quad \text{avec}$$

$$\psi_\sigma = \frac{\psi_0^2}{\psi_c} = \frac{2}{\sqrt{(1-v)(2-v)}} \quad (3.56)$$

$$(3.57)$$

$$\tau(\varepsilon, \eta) = -\frac{8}{\pi^2} \rho \ddot{X}_g H^2 \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{(1+i\delta)(1 - e^{-(c_n + id_n)\varepsilon})}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \cos \frac{n\pi}{2} \eta + \frac{v}{2-v} e^{-(c_n + id_n)\varepsilon} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \eta\right) \right]$$

Pression dynamique et résultante horizontale :

L'amplitude de la pression dynamique σ_x s'obtient de (3.55) avec $\varepsilon = 0$ en remarquant que :

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{2\psi_c} \sqrt{\Lambda_n} = \frac{n\pi}{2\psi_c} (a_n + ib_n) \quad \text{et en utilisant (3.38)} \quad (3.58)$$

$$a_n + ib_n = \sqrt{1 - \frac{\phi_n^2}{1 + i\delta}} \quad (3.59)$$

$$\sigma_x(\eta) = -\frac{8\psi_\sigma}{\pi^2} \rho \ddot{X}_g H^2 \sqrt{(1+i\delta)} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \phi_n^2 + i\delta} \sin \frac{n\pi}{2} \eta \quad (3.60)$$

La résultante horizontale des pressions dynamique sur le mur est :

$$Q_b = \int_0^1 \sigma_x(\eta) H d\eta$$

$$Q_b = -\frac{16\psi_\sigma}{\pi^3} \rho \ddot{X}_g H^2 \sqrt{(1+i\delta)} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{\sqrt{1 - \phi_n^2 + i\delta}}$$

et le moment résultant à la base du mur :

$$M_b = \int_0^1 \sigma_x(\eta) H^2 \eta d\eta$$

$$M_b = -\frac{32\psi_\sigma}{\pi^4} \rho \ddot{X}_g H^3 \sqrt{(1+i\delta)} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4} \frac{1}{\sqrt{1 - \phi_n^2 + i\delta}} \quad (3.62)$$

(le signe négatif signifie que ces forces correspondent à des pressions)

Si on fait l'hypothèse que le déplacement vertical est nul au lieu de la contrainte, dans ce cas on doit remplacer ψ_σ par χ_0 .

3.3.1.3 Modèle proposé par Veletsos et Younan.

Veletsos et Younan proposent trois modèle d'oscillateur simple (figure 3.6)

Pour déterminer la pression dynamique exercée par le massif de sol sur un mur fixe. Dans ce modèle la masse ' m^* ' est déterminée de telle sorte que la résultante horizontale dans des conditions statique soit égale à la valeur obtenue par l'analyse analytique précédente pour le cas statique avec donc $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\phi_n = 0$. Ceci implique que :

$$m^* = 0.543\psi_\sigma \rho H^2$$

Modèles avec paramètres constants ou indépendants de la fréquence.

Les auteurs proposent l'utilisation d'un modèle avec paramètres constants pour la rigidité du ressort k^* à considérer et pour l'amortissement c^* à prendre en compte.

La rigidité ressort k^* est déterminée de telle sorte que pour le système non amorti la fréquence propre du système soit égale à la fréquence propre fondamentale du massif de sol idéalisé comme une série de poutres cantilevers transversales verticales. Le résultat est :

$$k^* = m^* \frac{\pi^2}{4H^2} \frac{G}{\rho} = 1.339 \psi_\sigma G$$

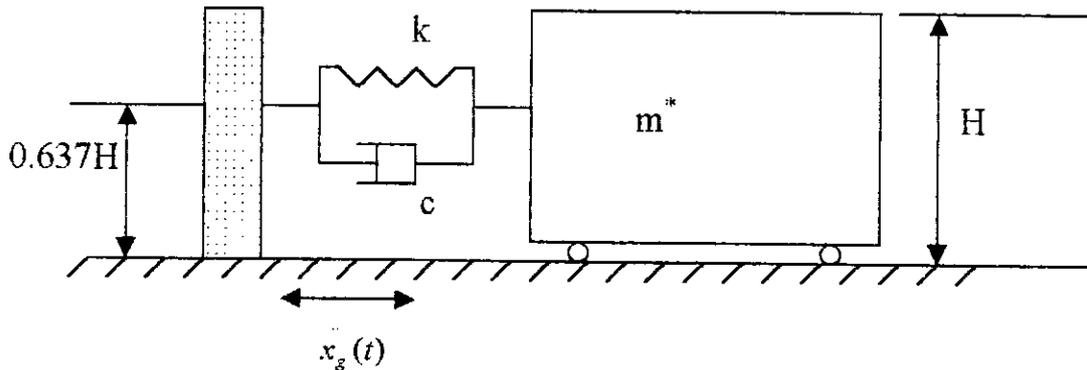


Figure 3.6 : Modèle proposé par Veletsos et Younan.

Finalement, le coefficient d'amortissement c^* à est déterminer de telle sorte que pour une excitation harmonique égale à la fréquence propre du modèle, la force totale s'exerçant sur le modèle et celle obtenue par la solution analytique soit égales. Ceci nécessite que l'amortissement du système défini par le rapport de l'amortissement à l'amortissement critique ζ^* soit défini par

$$\zeta^* = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|TR_1|^2 - 1}}$$

Dans lequel le facteur de transmission $|Tr_1|$ représente le rapport de l'amplitude réelle à $\omega = \omega_1$ à la force induite sous des conditions statiques.

Au lieu de définir un amortissement de type visqueux constant c^* , on peut aussi définir un amortissement de type hystérétique ou s'est plutôt le produit $c^* \omega$ qui est constant. Dans ce cas le facteur d'amortissement est inversement proportionnel à ω . Si on note par $\zeta^*(\omega)$ ce facteur on obtient :

$$\zeta^*(\omega) = \frac{\xi^*}{\omega / \omega_1}$$

En appliquant successivement la méthode analytique, le modèle proposé avec c^* constant et le modèle proposé avec $c^* \omega$ constant, les résultats obtenus pour $\nu = 0.3, \delta = 0.1$ sont quasi-indépendants de la forme d'amortissement considéré (réf.54).

Modèles avec paramètres modifiés indépendant de la fréquence :

Pour l'évaluation de la réponse transitoire dans le domaine des fréquences où l'utilisation de techniques tel que la transformée rapide de Fourier ou autre, les auteurs préconisent un modèle modifié, de telle sorte qu'au lieu de déterminer l'amortissement pour ajuster les réponses sous le mode fondamental seulement, un ajustement sur une plus large gamme de fréquence étendue de part et d'autre du pic fondamental peut être effectué entre la réponse analytique et la réponse du modèle.

Modèles avec des paramètres dépendant de la fréquence.

Les paramètres sont alors notés \bar{m} , \bar{k} , \bar{c} .

La masse de sol \bar{m} est définie dans ce cas comme précédemment.

Soit TR la valeur complexe de la transmittance dans le cas analytique à une fréquence arbitraire et TR_m la valeur correspondante au modèle. La transmittance exacte est déterminée par l'équation (3.61) en normalisant la valeur de Q_b par rapport sa valeur statique.

Avec la masse définie comme précédemment, les effets statiques pour les deux modèles (analytique et masse – ressort - amortisseur) sont identiques. L'égalité des effets dynamiques peut être satisfaite en égalisant les deux transmittances. Ce qui donne

$$TR_m = \frac{\bar{K}(\omega)}{\bar{K}(\omega) - m\omega^2}$$

où $\bar{K}(\omega)$ est une impédance complexe pour le modèle défini par :

$$\bar{K}(\omega) = \bar{k}(\omega) + i\omega\bar{c}(\omega)$$

Remplaçons TR_m par TR et résolvons pour ~~mmmmmmmmmm~~ $\bar{K}(\omega)$. On obtient :

$$\bar{K}(\omega) = \frac{TR}{TR-1} m\omega^2 \quad \text{ou sous la forme :}$$

$$\bar{K}(\omega) = \bar{k}_{st} \left(\bar{\alpha} + i2\bar{\xi} \frac{\omega}{\omega_1} \right) \quad \text{ou encore}$$

$$\bar{K}(\omega) = \bar{k}_{st} (\bar{\alpha} + i\bar{\beta})$$

Avec \bar{k}_{st} valeur de $\bar{K}(\omega)$ lorsque $\omega \rightarrow 0$ et $\bar{\xi}$ valeur du rapport de l'amortissement à l'amortissement. $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\bar{\xi}$ sont fonction de ω/ω_1 et de l'amortissement interne δ .

Dans le cas où seul le mode fondamental est considéré, on obtient en recalculant la masse \bar{m} en considérant dans la sommation que le premier terme :

$$\bar{m} = \frac{16\psi_\sigma}{\pi^3} \rho H^2$$

$$\bar{k}_{st} = \frac{8\psi_0}{\pi} G$$

3.3.1.5 Conclusions

A partir de l'expression analytique développée ici, la pression dynamique et la résultante dynamique horizontale associée peuvent être calculées aisément.

Le modèle proposé permet d'obtenir les mêmes résultats avec une précision suffisante. En particulier le modèle avec les paramètres constants peut être utilisé simplement pour obtenir les effets d'un séisme.

3.3.2 Autres modèles.

3.3.2.1 Modèle de Wolf : mur fixe

Wolf J.P. (réf.58, 1997) présente pour la pratique de l'analyse des vibrations de fondations, des modèles physiques simples avec un nombre limité de degré de liberté et un système composé d'un certain nombre limité de masse, ressorts, et d'amortisseurs de caractéristiques indépendantes de la fréquence d'excitations pour représenter l'interaction sol-structure. Plusieurs systèmes sont présentés pour divers types de problèmes classiques comme par exemple un disque rigide sur demi-espace homogène... etc. Pour le calcul de la pression dynamique sur un mur de soutènement fixe, rigide, vertical retenant un massif de sol semi-infini reposant sur un substratum rocheux soumis à un séisme (figure 3.7) Wolf propose le modèle présente sur la figure (3.8), avec :

$$m = 0.543 \frac{2}{\sqrt{(1-\nu)(2-\nu)}} \rho H^2$$

$$k_1 = 0.682\omega_1^2 m \quad c_1 = -0.658\omega_1 m$$

$$k_2 = 0.318\omega_1^2 m \quad c_2 = -0.344\omega_1 m$$

$$k_3 = 0.273\omega_1^2 m \quad c_3 = 0.232\omega_1 m$$

$$k_4 = 2\omega_1^2 m \quad c_4 = \omega_1 m$$

où $\omega_1 = \pi \frac{\sqrt{G/\rho}}{2d}$ est la fréquence propre fondamentale de la couche de sol avec 'd' étant l'épaisseur de cette couche. Q_b est la résultante des pressions dynamiques agissant à une hauteur de 0.637 H.

Le système présenté ici prend en compte l'amortissement radial mais par l'amortissement interne.

Les comparaisons effectuées dans ce cas par l'auteur avec la méthode de *Veletsos* et *Younan* décrites précédemment sont en très bon accord.

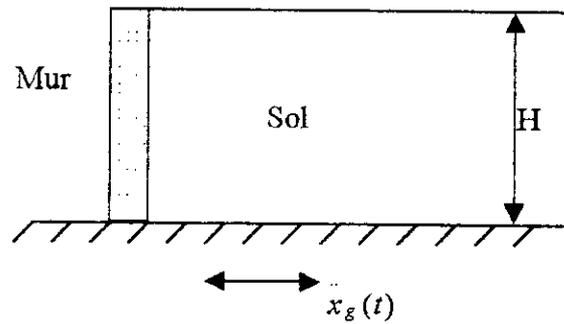


Figure 3.7 : Système sol-structure considéré par Wolf.

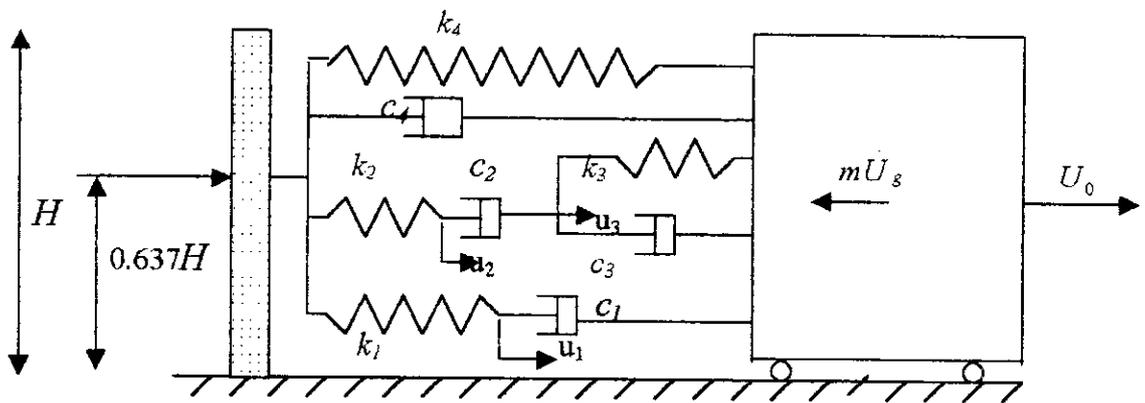


Figure 3.8 : Modèle proposé par Wolf (1997)

3.2.2 Modèle de Veletsos et Younan : mur flexible avec mode de rotation.

Veletsos et Younan (réf.55, 1997) étudient la réponse dynamique d'un mur cantilever. Le sol est considéré comme viscoélastique. Les effets de la flexibilité du mur et de la rotation du mur ont été présentés. Le système sol-structure considéré est présenté sur la figure (3.9).

L'étude analytique développée par les auteurs a abouti aux constatations suivantes :

- Réponse statique.

Pour le système excité statiquement, il apparaît que plus la flexibilité augmente ou plus la rotation du mur par rapport à sa base est grande, plus les pressions sur le mur sont faibles.

Pour un mur rigide la contribution des modes supérieures autre que la mode fondamentale est négligeable. Par contre pour les murs flexibles les autres modes d'ordres supérieurs au mode fondamental contribuent à la réponse.

Le point d'application de la résultante des pressions est d'autant plus haut que le mur est fixe.

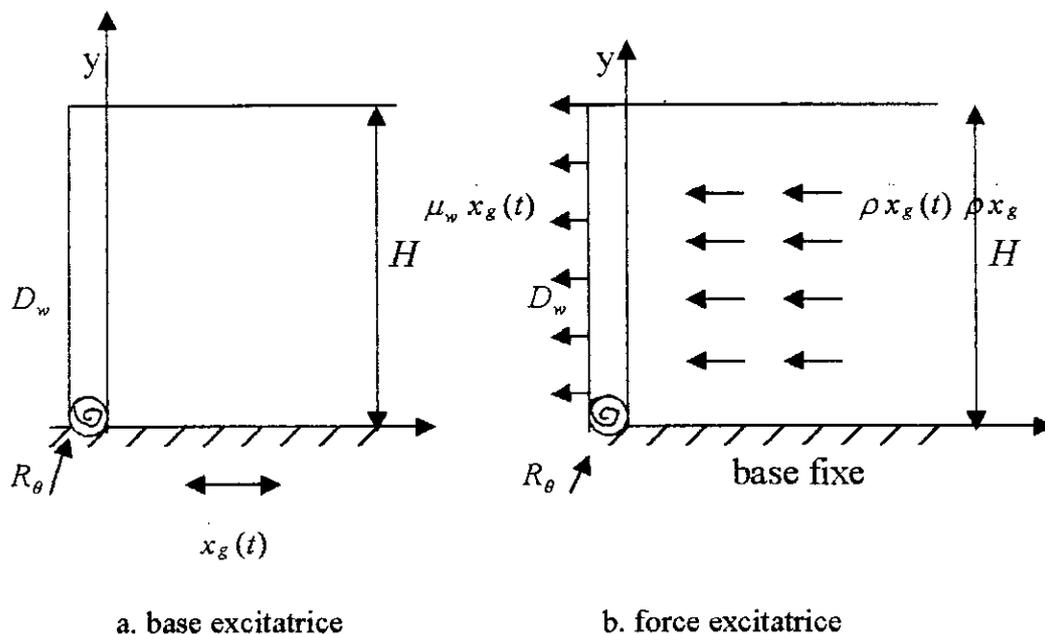


Figure 3.9 : Système considéré par Veletsos et Younan (1997)

• Réponse harmonique

Le facteur d'amplification pour la résultante dynamique horizontale des pressions fonction du rapport ω / ω_1 pour différentes rotations du mur est d'autant plus grande au niveau des pics de résonances que le mur est susceptible de rotation ou de flexibilité.

De plus, le facteur d'amplification pour les déplacements est plus grand que pour la résultante dynamique des pressions horizontales.

En conclusion *Veletsos* et *Younan* ont montré qu'aussi bien l'amplitude du mouvement du mur que l'amplitude de la résultante horizontale des pressions dynamiques sur le mur sont sensibles à la flexibilité du mur et de sa base.

3.4 MODELES NON-LINEAIRES

Ces modèles se sont développés ces deux dernières décennies grâce au développement des techniques de calcul sur ordinateur. Malgré cela ils n'en sont pas moins lourds à mettre en pratique et reste très dépendant de la recherche expérimentale ou de l'expérimentation seule apte à mettre en évidence les paramètres et leurs variations intervenant dans l'élaboration d'un code de calcul. Dans l'étude de l'interaction sol-structure, un des facteurs le plus important est le comportement du sol. Si, dans les études simplifiées celui-ci est trop souvent négligé, il est indispensable de le modéliser correctement dans une étude plus fine. Un modèle de la loi de comportement doit reproduire les propriétés caractéristiques du sol : la réponse du matériau dépend de l'état de contrainte et plus généralement de l'histoire des sollicitations antérieures

subies par ce matériau. Des déformations irréversibles apparaissent au-delà d'un niveau assez faible de déformation. Enfin deux notions importantes sont celles d'état critique et de dilatance. Ceci a conduit un grand nombre de chercheurs à des modèles élasto-plastiques ou élasto-visco-plastiques ou autres qui doivent correctement modéliser les courbes efforts – déformations, mais aussi les déformations volumiques (pour un essai drainé). Un autre souci important pour l'élaboration d'un modèle est qu'un modèle se doit, pour des raisons pratiques, comporter un nombre restreint de paramètres identifiables à partir d'essais de laboratoire, et un mme jeu de paramètre doit pouvoir reproduire le comportement du matériau pour une large gamme de sollicitations. De telles lois de comportement sont fortement non-linéaires et bien adaptées à une étude numérique par une méthode aux éléments finis.

Dans ce qui suit nous allons présenter les principaux modèles mentionnés dans la littérature et leurs résultats.

Nandkumaran (réf.42, 1974) parmi les premiers a présenté un modèle très simplifié pour prédire les déplacements d'un mur de soutènement ou il a utilisé la courbe force – déplacement classique pour un ouvrage de soutènement (figure 3.11a). Il a considéré un seul degré de liberté en translation comme le montre la figure 3.10. Le déplacement du mur a été (considéré comme déplacement total) compté à partir de la position originale d'équilibre du mur. La déformation du sol et le déplacement relatif entre le mur et le sol n'ont pas été considéré.

Un système à un seul degré de liberté, assimilé à un système masse –ressort –amortisseur, a été considéré (figure 3.10).

La masse ' m ' inclut la masse du mur et une partie de la masse de remblai associé à ce mur ou participant au mouvement du mur.

Le ressort de raideur constante comprend la résistance du sol due au déplacement du mur dans le massif de sol d'une part et à la base du mur d'autre part. Cependant pour l'analyse dynamique *Nandkumaran*, afin de reproduire la courbe force - déplacement (figure 3.11c), a adopté la courbe simplifiée figure 3.11d . Dans cette figure la relation force - déplacement est élasto-plastique.

Les amortisseurs représente l'énergie absorbée par le système. L'ordre de grandeur du rapport de l'amortissement à l'amortissement critique varie de 3% à 15%.

Un tel modèle qui à l'avantage de la simplicité ne permet pas de prendre en considération les autres modes de mouvement du mur tels que la rotation et le déplacement vertical.

Prakash et Al proposent pour la pratique de ce modèle en bureau d'étude une démarche à suivre. Celle-ci est détaillée dans la réf.42 .

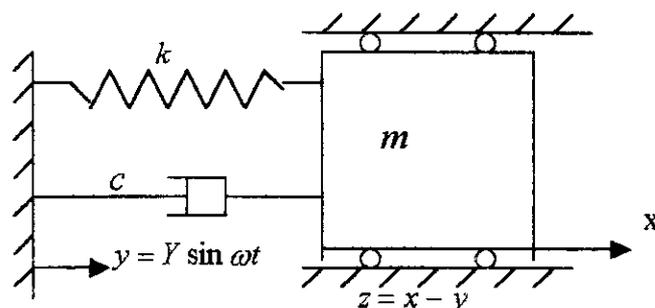


Figure 3.10 : Modèle de Nandkumaran(1974)

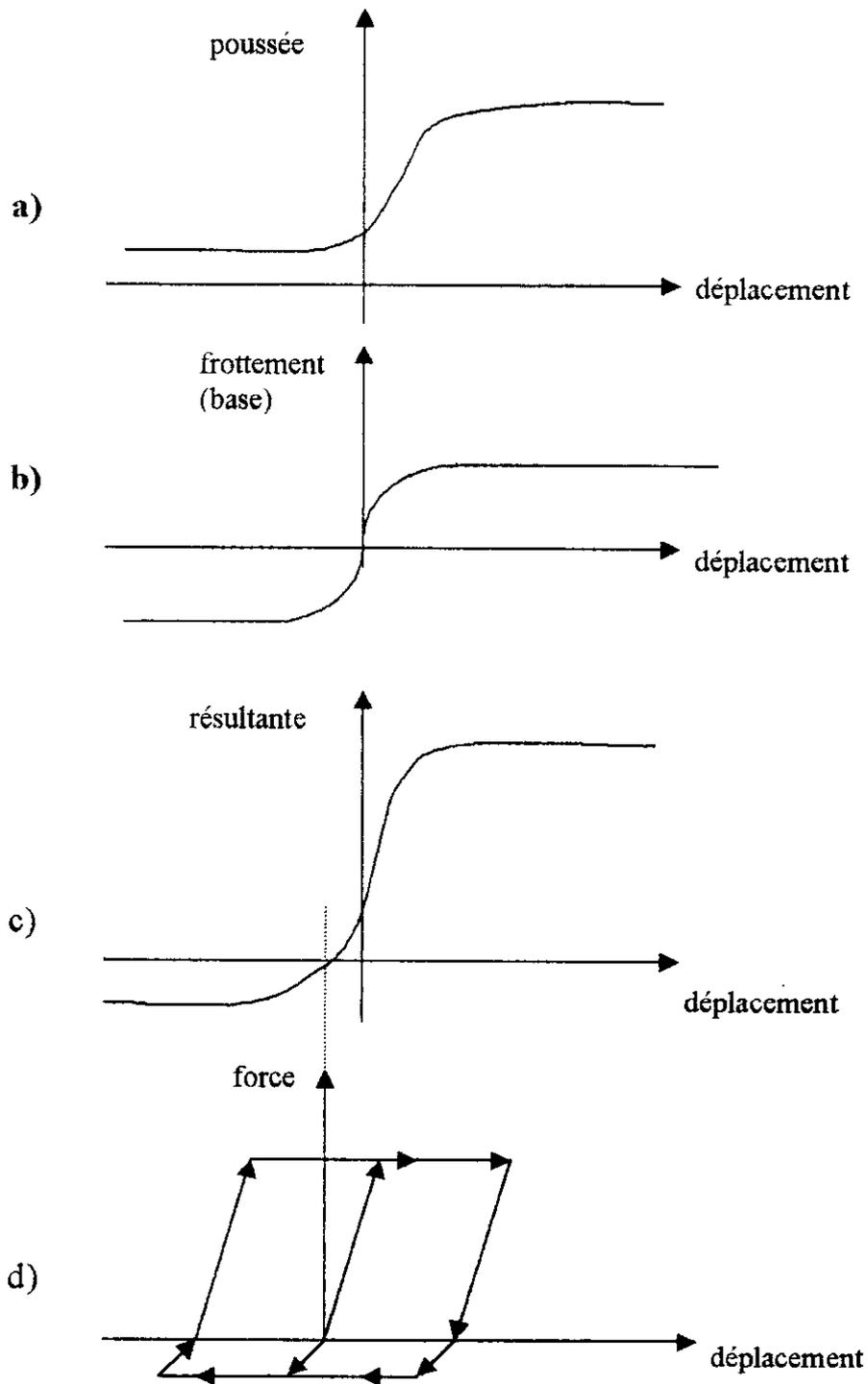


Figure 3.11 : Diagramme force –déplacement (pour un ouvrage de soutènement).

Zarrabi (réf.42, 1979) a effectué un calcul non linéaire en modélisant par éléments finis le sol et le mur par des blocs séparés par des éléments de glissements (figure 3.12). On remarque que la pente de la surface de rupture du sol est fixée à priori. *Zarrabi* a déterminé par la méthode graphique de *Poncelet* l'angle que fait avec l'horizontale la surface de rupture dans le remblai en statique. Il a extrapolé le calcul de la pente de la surface de rupture en dynamique et a obtenu l'angle θ :

$$\operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{-\operatorname{tg}(\varphi - i - \mu) \pm \sqrt{B}}{C} \quad (3.81)$$

$$B = \operatorname{tg}(\varphi - i - \mu) [\operatorname{tg}(\varphi - i - \mu) + \operatorname{tg}(\varphi - \beta - \mu)] [1 + \operatorname{tg}(\beta + \delta + \mu) \cot(\varphi - \beta - \mu)]$$

$$C = 1 + \operatorname{tg}(\beta + \delta + \mu) [\operatorname{tg}(\varphi - i - \mu) + \cot g(\varphi - \beta - \mu)]$$

Expressions dans lesquelles on a maintenu les notations de *Mononobé* et *Okabé* du chapitre 2.

Parmi les deux solutions de l'équation précédente on doit retenir celle qui satisfait l'inégalité :

$$(i + \mu) \leq \theta \leq (90 + \beta + \mu) \quad (3.82)$$

Les déplacements des murs calculés avec ce modèle sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de *Lai* lorsqu'ils sont appliqués aux modèles expérimentaux. Ils sont en meilleur accord que les déplacements calculés par la méthode de *Richards* et *Elms*, lesquels initialement en bon accord présente par la suite un écart d'autant plus grand que l'on avance dans le temps. Ce même phénomène est observable pour la méthode de *Zarrabi* mais bien beaucoup plus tardivement, mais reste beaucoup plus proche de l'observation expérimentale que celle de *Richards* et *Elms*.

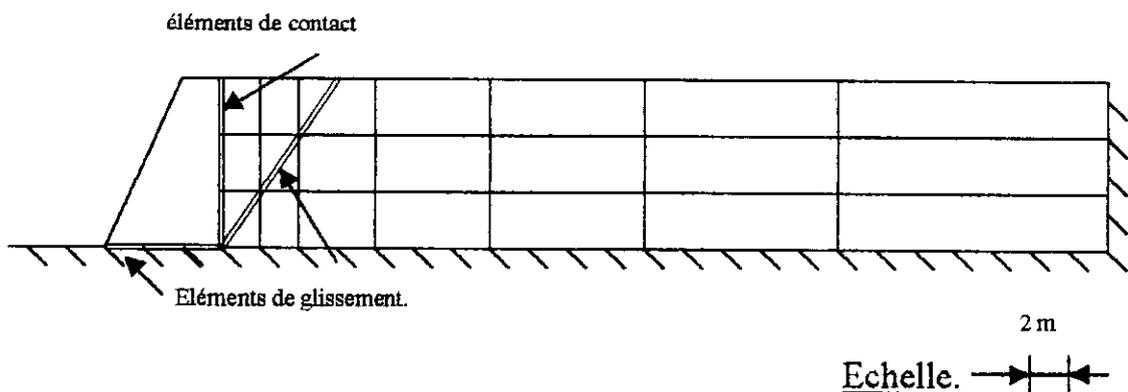


Figure 3.12 Modèle de Zarrabi

Nadim et Whitman (réf.35, 1983) ont modifié le modèle de *Zarrabi* afin de prendre en compte la rotation du mur, mais ils ne présentent des résultats que pour de très faibles rotations du mur. Le modèle utilise des éléments finis linéaires quadratiques isoparamétriques et des éléments de glissement dans le massif le long du plan de rupture et le long de l'interface sol – mur derrière le mur et à la base du mur. La méthode linéaire équivalente a été utilisée pour obtenir des modules de rigidité compatible avec la déformation ainsi qu'un rapport d'amortissement pour l'élément de sol. Lorsque la contrainte de cisaillement pour l'élément de glissement excède la contrainte limite de cisaillement donné par le critère de Mohr–Coulomb, des mouvements permanents surviennent.

Chouvet (réf.12, 1983) a effectué une modélisation par éléments finis pour des modèles réduits expérimentaux de l'ensemble remblai mur avec une loi de comportement élasto-plastique issu du Cam-Clay pour le remblai. Constitué d'un matériau de *Scneebeili*. Il a utilisé un schéma mixte implicite - explicite d'intégration pas à pas dans le temps qui lui a permis de prédire l'accumulation des déplacements irréversible du mur lors d'un séisme, ce qu'il avait observé au cours des expériences sur ces modèles réduits.

L'intensité de la résultante des efforts dynamiques calculés au cours d'une sollicitation sinusoïdale reste toujours supérieure à la résultante statique initiale et correspond avec celle calculée par la méthode de *Mononobé* et *Okabé*. La hauteur à la base du mur relative du point d'application de la résultante reste voisine de 1/3, par contre, l'inclinaison des contraintes sur la paroi amont (coté sol) du mur par rapport à l'horizontale oscille fortement en atteignant un maximum de $\varphi + \beta$.

Marciano E., Chameau J.L., Harr M.E. (réf.31,1985) ont proposé un modèle d'éléments finis pour déterminer les déplacements résiduels d'un mur de soutènement causés par une excitation sismique. Les équations de mouvements ont été résolues dans le domaine des temps en utilisant la méthode de Newmark. Les déplacements résiduels ont été calculés à partir d'un comportement réel hystérétique.

Un maillage typique sol–structure proposé est illustré sur la figure (3.13). Le sol est discrétisé par des éléments finis linéaires isoparamétriques à quatre nœuds. La structure est modélisée soit comme une structure rigide ou flexible. Des éléments à quatre nœuds ou des éléments de poutre peuvent être utilisés.

Le caractère non – linéaire du sol a été représenté par une loi hyperbolique. L'accélération est appliquée à la base du modèle. Comme la loi contrainte déformation du modèle est anélastique l'histoire des contraintes – déformations à n'importe quel point du sol est hystérétique, alors il en résulte un amortissement matériel pour le système sol – structure. Par conséquent la définition d'un terme d' amortissement artificiel visqueux généralement utilisé dans un modèle analytique n'est pas nécessaire.

Les auteurs présentent les résultats pour un mur de soutènement cantilever de 7.62m de hauteur ancrée sur le cinquième de sa hauteur. La largeur de la base est de 6.10m, symétrique par rapport au mur. L'élément fini à quatre nœuds a une hauteur de 1.52m et une longueur de 3.05m.

Le sol considéré est un sable dense.

Le mouvement de base est une portion d'un sismogramme synthétique. La durée est de 4 secondes. L'analyse a été faite pour une durée de 8 secondes. L'analyse a été effectuée en utilisant un pas de temps de 0.02 secondes.

Au-delà des 4 secondes les résultats montrent que les oscillations se font autour du déplacement permanent du mur.

Pour l'accélérogramme synthétique donné, il a été constaté qu'une variation de 10% de l'angle de frottement interne engendre une variation de 15% du déplacement résiduel pour le sommet du mur.

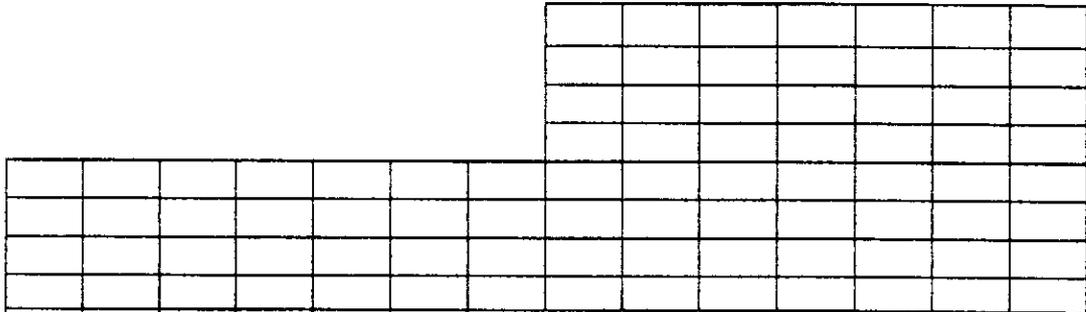


Figure 3.13 Maillage typique éléments finis (Marciano, Chameau, Harr)

Alampalli S., Elgamal A. (réf.1, 1990) proposent un modèle général pour l'étude du comportement des ouvrages de soutènement (figure 3.14 a et b), et analysent une version simplifiée de ce modèle (figure 3.14c).

Le modèle prend en compte pour le mur et le sol, l'interaction non linéaire sol – structure. Le mur peut subir simultanément une rotation et une translation. Le sol peut avoir des propriétés non linéaires.

La structure est représentée par une poutre pouvant glisser sur sa base ou tourner par rapport à cette base maintenue par un ressort de torsion.

Le sol est représenté par une poutre transversale bidimensionnelle. Le sol et la structure interagissent par le biais de ressort de type non-linéaire sans traction possible.

Le comportement non-linéaire du sol est représenté par un modèle hystérétique élasto-plastique dépendant du chemin de contrainte suivi.

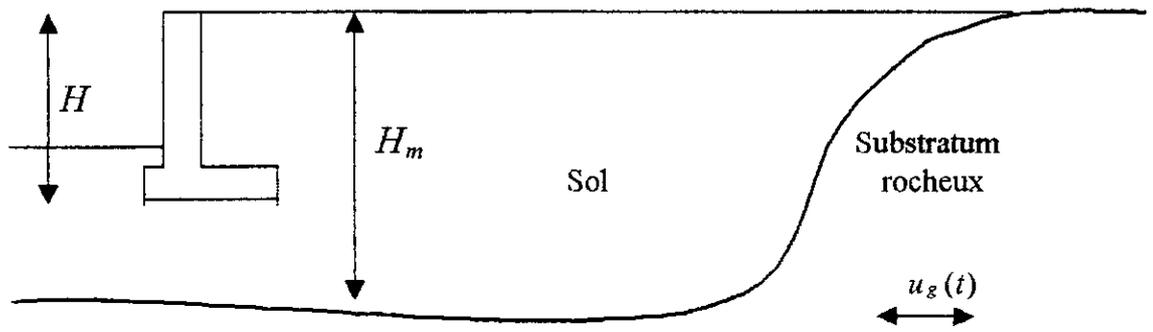
La réponse sismique d'un mur de 15m de hauteur et de 1.2m de large a été étudié en utilisant la modélisation simplifiée.

Un modèle élasto-plastique hystérétique dépendant du chemin de contrainte avec écrouissage a été adopté pour représenter le comportement du sol.

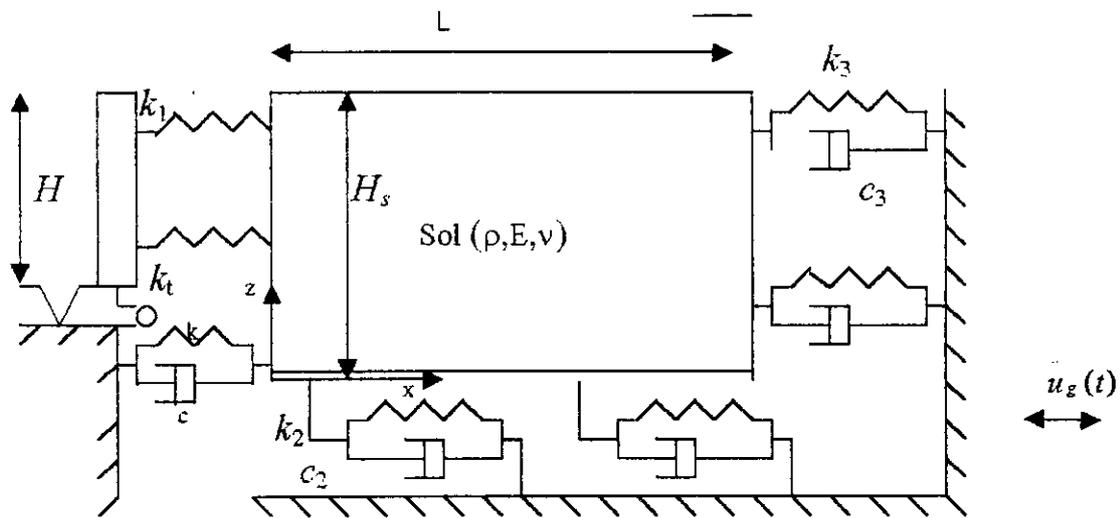
L'accélération imposée à la base du mur est l'accélérogramme d'El-Centro (1940) présentant une amplitude maximale de 0.6g.

Les résultats indiquent que:

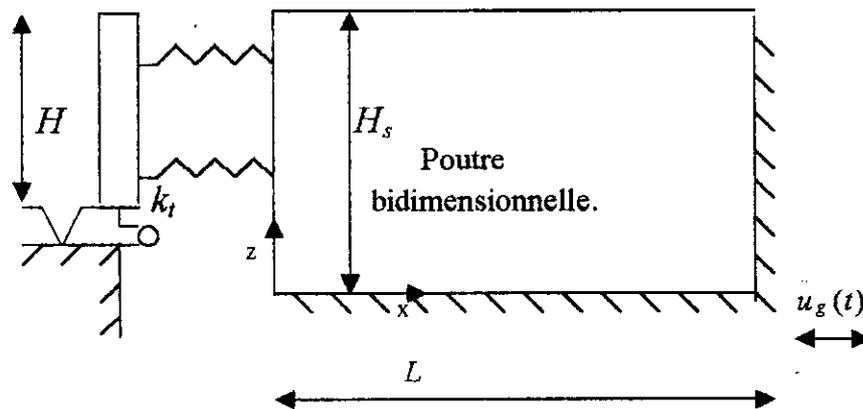
- Les murs de soutènement sont aussi bien vulnérables en rotation qu'en translation
- L'amplification du mouvement sismique s'effectue à travers le remblai.
- Pour les sols saturés des translations importantes irréversibles se développent dès les premières secousses.



a. Configuration mur-sol sur site.



b. Modèle général.



c. Modèle simplifié.

Figure 3.14 Modèle proposé par Alampalli et Algamal

Al-Homoud (1990) mentionné par *Whitman* (réf.57), étudie un mur poids librement déplaçable par la méthode des éléments finis en utilisant le code de calcul FLEX.

Ce code de calcul permet l'utilisation des frontières absorbantes pour les deux cotés du modèle. Le sol est modélisé comme un matériau élasto-plastique avec une loi d'écoulement. Ce programme était utilisé pour modéliser les essais d'Andersen et a donné des prédictions satisfaisantes. Le mur étudié par l'auteur est présenté sur la figure 3.15.

La sollicitation consiste en huit cycles d'un mouvement sinusoïdal ou de l'enregistrement d'un séisme actuel. Les résultats généraux concernant l'amplitude et le déphasage de la poussée sont en bon accord avec les résultats expérimentaux d'Andersen présentés au chapitre 2.

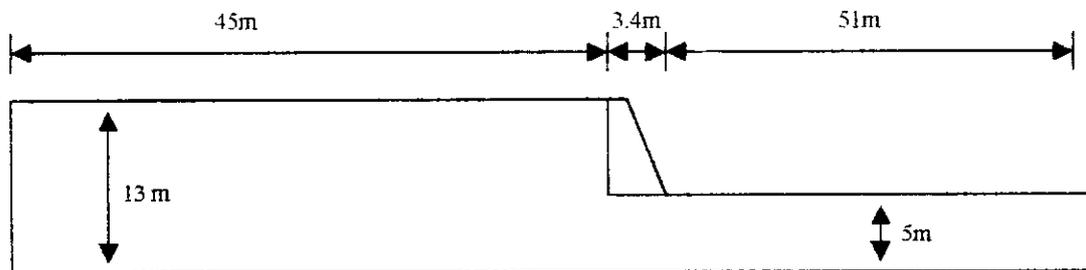


figure 3.15 Cas étudié par Al-Hamoud

Bakeer R. M. et *Bathia S.K.* (réf.2, 1990) étudient l'influence du mode de mouvement d'un mur de soutènement rigide sur la pression exercée par le massif de sol sur le mur.

Les modes considérés sont :

- Mur immobile
- Mur susceptible de subir un mouvement de translation
- Mur susceptible de subir une rotation

Pour cela ils ont utilisé la méthode des éléments finis. Le massif de sol considéré est constitué d'un sol sec sans cohésion. Le mur considéré est un mur poids de 5m de hauteur, dont la largeur, variant de 1m au sommet à 2.6m à sa base, a été dimensionné par la théorie de Coulomb.

Le maillage comprend des éléments élastiques isoparamétriques quadrilatéraux à 4 nœuds pour modéliser le mur et le sol.

L'interaction sol – mur est modélisée par deux ensembles d'éléments de frottement.

Des éléments de barres rigides sont utilisés pour connecter chacun des deux nœuds situés au même niveau sur les faces en amont et en aval du mur afin d'assurer un déplacement de mur rigide. Les nœuds sur la frontière du maillage sont bloqués. Le maillage s'étend sur une longueur de 6 H de chaque côté du mur vu que la profondeur du sol sous le mur est égale à la hauteur du mur.

Un enregistrement d'accélération digitalisé chaque 0.01seconde, est utilisé comme donné du mouvement le long de 'ab' (voir figure 3.16)

Un amortissement de 10% dans le modèle éléments finis a été considéré.

L'analyse est faite en déformation plane, dans le domaine des temps, pas à pas, avec un pas de 0.01s pour une durée de 2s.

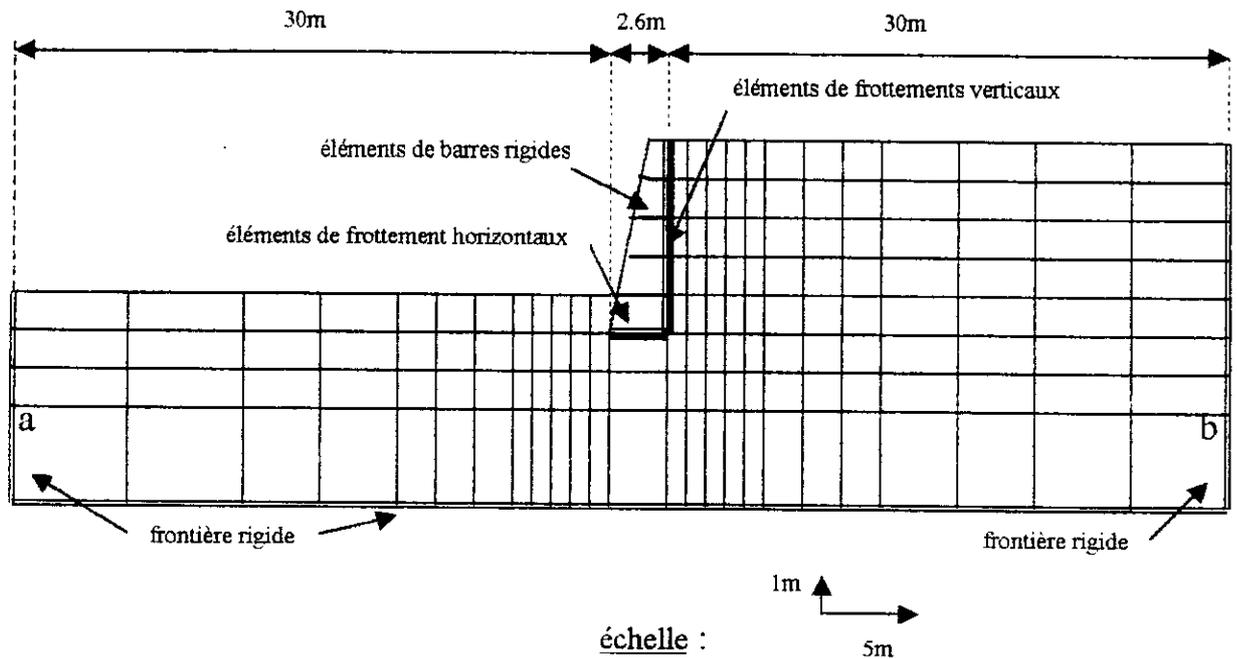


Figure 3.16 : Mur de soutènement étudié par Bakeer et Bathia (1990)

Résultats :

- La pression des terres augmente lorsque le mouvement du mur vers le sol augmente.
 - La pression des terres diminue lorsque le mouvement du mur est dirigé vers l'extérieur .
- Ces deux conditions ont une limite basse et haute pour les murs immobiles. Dans la plupart des tests aux laboratoires pour les murs se déplaçant horizontalement ou pouvant subir une rotation on observe ce comportement :
- Pour tous les modes de déplacement, la distribution des pressions des terres au repos est non hydrostatique.
 - La distribution des terres derrière le mur dépend du mode de déplacement du mur.
 - Les pressions les plus grandes se situent près de la base du mur pour un mur susceptible de subir une rotation vers l'extérieur, tandis qu'elles sont localisées autour du point situé au tiers de la hauteur pour un mur se déplaçant en translation.
 - Pour un déplacement vers le massif, les pressions les plus grandes se situent à mi-hauteur pour un mur en translation, et elles se situent autour du point situé au tiers de la hauteur pour un mur en rotation.
 - La grandeur de la pression des terres d'un mur se déplaçant en translation vers le massif est de beaucoup supérieure à celle d'un mur se déplaçant en rotation.
 - Pour un mur se déplaçant en rotation une différence de phase a été observé entre l'histoire de la réponse du mur et celle du coin de rupture. Cependant la pression des terres est maximale lorsque les deux corps vibrent en phase.
 - L'étude par la méthode des éléments finis de l'influence de la fréquence propre du système a été faite en faisant varier la densité du mur, du coin de rupture et la rigidité du

sol. Les résultats obtenus montrent que le coefficient de pression des terres est maximal lorsque la fréquence propre du système approche la fréquence du mouvement donné. Le point d'application de la résultante est peu influencé par la fréquence propre du système sol structure.

Comparaisons avec l'expérimentation :

Contrairement à la théorie de Mononobé et Okabé, la répartition de la pression des terres n'est pas hydrostatique.

Le point d'application de la résultante dépend du mode de déplacement du mur. Sa position culminante est située dans la plupart des cas entre $0.42H$ et $0.51H$, ce qui correspond en général avec l'observation expérimentale.

Le résultat obtenu par la méthode des éléments finis montre que le coin de rupture due à un mouvement sinusoïdal est plus large que le coin obtenu en statique à l'état actif mais moins large que le coin obtenu à l'état passif. Ces mêmes observations ont été constatées par *Murphy* (1960) et *Sheriff et Fang* (1984) (voir chapitre 2). L'angle obtenu pour le plan de rupture était de 35° ce qui correspondait à celui obtenu par *Murphy*. Par contre la taille du coin de rupture est plus mince que celui obtenu par *Sheriff et Fang*.

Le coefficient de pression des terres augmente avec l'augmentation du maximum du pic de l'accélération de l'enregistrement donné ce qui concorde avec les résultats expérimentaux obtenus par *Ishii et Al.*

Ortigosa P. et Musante H. (réf.39, 1991) présente une méthode cinématique simplifiée pour calculer la pression des terres dynamiques sur une structure dont les déplacements horizontaux sont restreints. L'ouvrage de soutènement est considéré avoir un comportement linéaire et le massif de sol peut avoir soit un comportement linéaire ou bien non-linéaire (voir figure 3.17). Le déplacement horizontal obtenu en champ libre est appliqué à la base du modèle et permet de calculer les pressions dynamiques sur le mur pour différentes accélérations maximales de champ libre.

La pression des terres est donnée par :

$$\sigma_x = k_x(\delta_z - \delta_{zx}) \quad (3.83)$$

où

δ_z représente le déplacement horizontal en champ libre maximal à la profondeur 'z'.

L'auteur pour sa détermination préconise une méthode simplifiée.

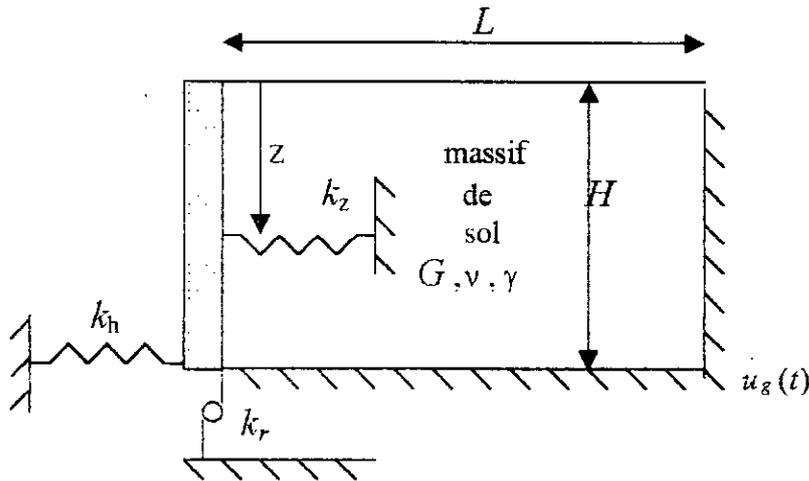
δ_{zx} représente le déplacement de la structure à la profondeur 'z'.

Pour des structures rigides sans déplacement horizontal retenant un massif de sol supposé avoir un comportement linéaire, les pressions dynamiques obtenues avec la méthode cinématique simplifiée (pour la détermination de la réponse en champ libre) ont été comparées avec les modèles élastiques de *Wood* et le modèle de *Nadim - Whitman* et autres.

Les résultats obtenus sont en très bon accord et le modèle donne une borne supérieure dans le cas simplifié ou le module d'élasticité transversal est supposé constant sur la hauteur de la couche. L'auteur en conclut que la méthode cinématique donne dans ce cas une bonne précision comparativement à des méthodes plus compliquées.

Pour des massifs de sol à comportement non-linéaire les résultats obtenus ont été comparés avec ceux obtenus en utilisant la modélisation par éléments finis utilisée par *Nadim-Whitman*.

Grossièrement, les résultats présentés pour des cas spécifiques sont en bon accord avec ceux obtenus par la méthode utilisée par *Nadim-Whitman*.



G = module d'élasticité transversal du sol

ν = coefficient de poisson

γ = poids volumique du sol.

k_h = rigidité du ressort horizontal modélisant l'interaction sol-structure.

k_z = module de réaction du sol à la profondeur z .

k_r = rigidité du ressort de torsion représentant l'interaction sol-structure.

$\ddot{u}_g(t)$ = accélération à la base .

Figure 3.17 : Méthode cinématique proposée par Ortigosa et Musante.

3.5 CONCLUSIONS.

Comme nous pouvons le constater, la littérature comporte un grand nombre de modèle. Même en considérant une modélisation des plus simples masses, ressorts, amortisseurs, plusieurs modèles existent suivant :

- la discrétisation qui est faite pour le système sol-structure
- les hypothèses relatives aux mouvements
- les hypothèses relatives aux comportements de chacun de ces éléments discrets
- les hypothèses relatives aux points de contacts entre ces éléments.

D'une manière générale la modélisation consiste

1) Tout d'abord à modéliser l'ouvrage, lequel est en général soit :

- Assimilable à un corps rigide : Dans le cas d'une modélisation par masse, ressort amortissement son mouvement est complètement déterminé par les translations de

son centre de gravité et des rotations du mur autour de ce centre. Dans le cas d'une modélisation par éléments finis celui-ci est décomposé en éléments finis rigides

- Un corps flexible : Dans le cas d'une modélisation masse ressort amortisseur celui-ci est assimilé à une poutre transversale verticale. Dans le cas d'une modélisation par éléments finis celui-ci est modélisé par des éléments de poutres ou par éléments finis déformables.

2) Ensuite à modéliser le sol, lequel est soit :

- Assimilable à deux corps rigides, dont l'un se déplace par rapport à l'autre sur le plan de rupture dans une modélisation par masse, ressort, amortisseur.
- Assimilable à deux corps déformables, dont l'un se déplace par rapport à l'autre sur le plan de rupture dans une modélisation par éléments finis.
- Assimilable à un corps rigide dans une modélisation par masse ressort amortisseur.
- Assimilable à un corps déformable dans une modélisation éléments finis

3) Modéliser l'interface sol-structure soit :

- Par la position des points de contacts entre éléments pour une modélisation par masse, ressort, amortisseur.
- Par l'introduction d'éléments d'interfaces tels que des éléments de contact ou de glissement ou de frottement ou autres pour une modélisation par éléments finis.

4) Modéliser les frontières du domaine soit :

- Généralement comme rigide, pour une modélisation par masse, ressort, amortisseur.
- Par des éléments infinis ou comme une frontière consistante ou comme une frontière absorbante ou simplement comme une frontière bloquée, pour une modélisation par éléments finis.

Si on ajoute à cela les hypothèses sur la nature des déformations (grandes ou bien petites), sur la nature des déplacements (grands ou bien petits, translations ou rotations), sur la nature de l'excitation, il en ressort compte tenu de l'ensemble des combinaisons possibles, une multitude de modèles.

La confrontation des expériences et des calculs semble être la seule manière de valider un code de calcul obtenu à partir d'un modèle. Toutes les méthodes pseudo-statiques classiques négligent de nombreux facteurs importants comme le caractère transitoire du phénomène, l'influence de la sollicitation sur le comportement du sol, la durée de la sollicitation... etc. Les modèles élastiques, viscoélastiques, non-linéaires et autres prennent en compte partiellement ou totalement ces éléments du problème.

Une comparaison des modèles élastiques entre eux (figure 3.18) montrent qu'ils sont tous comparables et donnent des valeurs supérieures aux modèles pseudo-statiques de *Mononobé* et *Okabé* schématisé par une distribution hydrostatique avec $\Delta k_{sd} = \frac{3}{4} k_h$, et de *Seed* et *Whitman* qui ont proposé que l'incrément des pressions agisse au $\frac{2}{3} H$ à partir de la base du mur avec une pression d'allure hydrostatique inversée.

La différence des résultats entre les méthodes élastiques et les méthodes pseudo-statiques peut être expliquée par le fait que les déplacements admis dans les méthodes élastiques sont plus petits et engendrent donc des pressions supérieures.

Une comparaison du modèle élastique de *Wood* avec des résultats expérimentaux effectués sur des murs fixes par *Young*(1986) et *Thurston*(1986,1987) (réf.10) a montré une bonne concordance entre les résultats. De plus, la solution de *Mononobé* et *Okabé* ou *Seed-Whitman* était inférieure de 2 à 2,5 fois. Ces mêmes observations expérimentales avaient été constatées par *Ishibashi* et *Fang* (1987) pour des murs rigides pour lesquels ils avaient constaté que plus la rotation du mur était faible plus on s'éloignait de la solution de *Mononobé* et *Okabé*.

Un inconvénient majeur des modèles élastiques est de, surestimer la réponse, dans le sens où, ces derniers ne prennent pas en compte l'amortissement interne et même radial dans bien des cas. Une étude comparative effectuée par *Veletsos* et *Younan* avec le modèle de *Scott*, a montré que ce dernier modèle surestime la réponse au voisinage du mode fondamental par rapport à la réponse analytique et sous-estime la réponse partout ailleurs. La différence s'explique par la sous estimation de la rigidité du sol d'une part et de l'amortissement d'autre part pour le modèle de *Scott*. Un problème majeur pour les modèles viscoélastiques est la détermination coefficient d'amortissement. *Veletsos* et *Younan* ont montré que le mode d'amortissement (visqueux ou hystérétique) influe peu sur les résultats pour un mur fixe pour un sol pulvérulent. Peut-on généraliser ce résultat ?

Par contre pour les modèles non-linéaires, l'amortissement interne dans les sols étant de nature hystérétique celui-ci peut être pris directement en compte au niveau de la relation contrainte-déformation pour le sol. Ces modèles sont généralement validés par une confrontation avec des résultats d'expérimentation spécifique (dans le sens où l'expérience vérifie les hypothèses du modèle).

Les modèles non-linéaires très nombreux ont permis de mettre en évidence la sensibilité des ouvrages de soutènement à la variation des paramètres introduits pour caractériser le modèle considéré et de poser de nouvelles questions sur la définition de ces paramètres eux-mêmes, leur variation, leur importance, leur rôle durant la vibration, sur l'influence du mode de mouvement considéré, sur l'influence de la sollicitation ainsi que de ces caractéristiques, sur l'influence de la durée de la sollicitation... etc. Ainsi ces modèles permettent, comparativement aux autres modèles théoriques une meilleure approche de l'interaction sol-structure et de la cinématique du sol et de la structure.

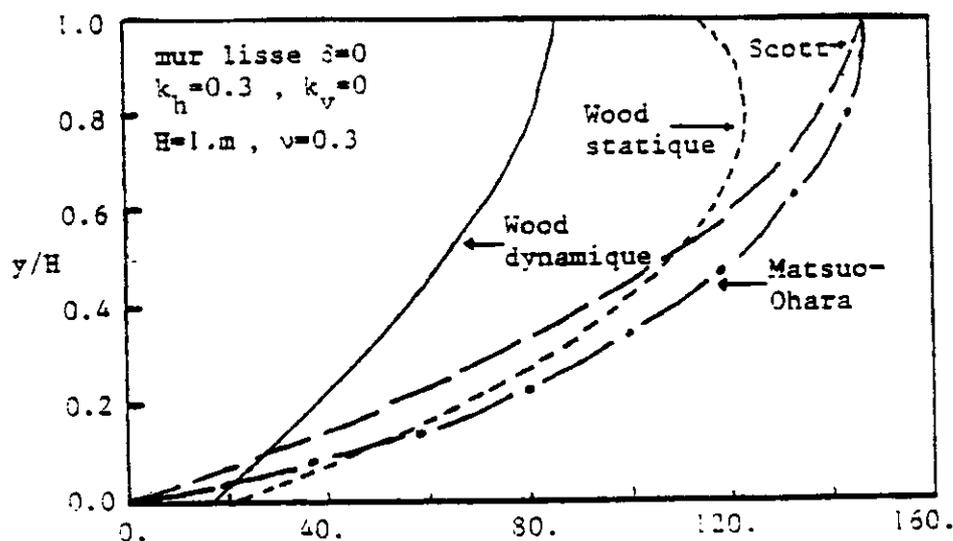


Figure 3.18 : Comparaison des modèles élastiques, pseudo-statiques.

CHAPITRE 4

LOIS DE COMPORTEMENT DES SOLS

4.1 INTRODUCTION.

Pendant très longtemps et encore de nos jours la mécanique des sols a été dominée par l'influence des travaux de *Terzaghi*. Ce n'est que vers le début des années 50 que nombre de chercheurs se sont penchés de façon plus aiguë sur la loi de comportement des sols. Ces quarante dernières années ont vu s'accélérer une révolution sur ce sujet due à l'avancée des recherches théoriques, des expérimentations en laboratoire ou sur site et des méthodes d'analyses numériques. Ces développements ont été si loin qu'ils ont remis en cause nombre de concepts et pratique préexistantes comme par exemple le nombre de paramètres nécessaires pour caractériser le comportement d'un sol... etc.

Le comportement d'un sol est complexe et dépend de :

- L'histoire complète de la couche géologique caractérisée par sa taille, sa forme, sa composition minéralogique, l'assemblage des particules.
- L'histoire des contraintes que la couche a subie.
- La présence de fluide dans les interstices du sol.
- La pression interstitielle
- ...etc. et bien d'autres facteurs encore.

De plus les propriétés elles-mêmes peuvent varier localement avec un degré significatif verticalement ou horizontalement à l'intérieur de la couche, compte tenu de la micro-structure du matériau et de son histoire.

Comparer avec les autres branches de l'ingénieur les propriétés du matériau en mécanique des sols doivent être mesurés au lieu d'être spécifiés par un fabricant ou autres. Ceci conduit naturellement à un comportement différent quant aux choix des facteurs de sécurité.

Le but de la recherche d'un modèle de loi de comportement est de fournir un outil pour résoudre les problèmes de l'ingénieur. Mais un autre but, moins pratique plus scientifique consiste à rechercher un modèle pour examiner de façon plus concise le comportement d'un sol. Dans ce dernier cas, les modèles deviennent vite très complexes et beaucoup sont présentés dans la littérature. Ils peuvent être utilisés en bureau d'étude si la précision requise pour le projet est importante.

L'idéal serait d'avoir un modèle le plus simple possible de telle sorte que :

- les caractéristiques du modèle soient obtenues à partir d'un nombre réduit d'essais.
- les procédures d'analyses existantes soient utilisables pour le modèle considéré.

Le modèle le plus simple est le modèle élastique. Mais même celui-ci peut donner naissance à divers modèles différents et très nombreux suivant l'hypothèse faite sur

- L'homogénéité du sol.
- L'isotropie du sol.
- La linéarité du sol.
- La compressibilité du sol.

Ainsi, peut-on avoir, dans le cas de l'élasticité dite parfaite (sol homogène, isotrope, linéaire, compressible) que deux paramètres pour définir la loi de comportement du sol

(E, ν ou G, K). Si on fait l'hypothèse d'incompressibilité, un seul paramètre G est nécessaire. Dans les autres cas nous avons un nombre de paramètre variable suivant les hypothèses effectuées, par exemple pour un sol pleinement anisotrope on a 21 paramètres.

Dans le cas général l'établissement d'une loi de comportement d'un sol nécessite la considération de deux types de quantités algébriques qui apparaissent dans la relation.

- Les premières sont relatives au matériau sol lui-même, constantes, qui le définissent, tel que le poids volumique, le module d'*Young* et le coefficient de Poisson en élasticité.
- Les secondes sont relatives à l'état du sol lui-même, variables avec la déformation du sol, qui permettent de définir l'état de contraintes à l'intérieur du matériau.

Suivant la modélisation effectuée une quantité constante pour une formulation peut être variable lors d'une autre formulation.

L'application de la mécanique des milieux continus aux sols permet l'analyse des contraintes – déformations du sol et nécessite une relation contrainte déformation. Ce qui n'est pas le cas en analyse limite ou l'application de la mécanique des solides aux sols est surtout utilisée, celle-ci ayant surtout affaire à des grandeurs vectorielles (forces). Une autre approche est celle de la mécanique des particules mais la formulation générale est très complexe et difficilement maniable. Par la suite c'est l'application de la mécanique des milieux continus que nous considérons.

La notion de contrainte, inévitable en mécanique des milieux continus à nécessité la notion de contrainte effective inhérente au caractère multi-phasique du sol. Celle-ci joue un rôle prépondérant en mécanique des sols. Pour un sol sec cette contrainte se confond avec la contrainte totale apparente obtenue en supposant le milieu continu. Pour un milieu parfaitement saturé, toute déformation du squelette solide doit s'accompagner d'un écoulement. En plus des contraintes effectives coexistent des pressions et surpressions interstitielle, les dernières se dissipant au fur à mesure que le drainage s'effectue. Dans ce dernier cas, le coefficient de perméabilité du sol joue un rôle déterminant, c'est ce qui explique cette scission entre les sols pulvérulents ayant un plus grand coefficient de perméabilité pour qui le drainage est quasi-instantané, et les sols fins pour qui ce drainage est très lent, donc fortement dépendant du temps.

Pour un sol fin imparfaitement saturé, les cas sont plus complexes, suivant la façon dont l'eau occupe les vides du sol. Pour un sol grenu le problème se pose moins son comportement étant peu affecté par la présence d'eau du fait de sa plus grande perméabilité.

De plus la composition minéralogique les sols fins est plus sensible à l'eau. Les interactions inter-granulaires sont modifiées du fait d'une présence plus ou moins importante d'eau dans le sol fin. Ainsi les paramètres définissant le comportement des sols fins dépendent fortement de leur teneur en eau. Par contre, les interactions inter-granulaires sont quasi inexistantes pour les sols grenus dont les grains ont un diamètre plus gros. D'où la nécessité de différencier le comportement des sols fin (argile) et celui des sols grenus (silt, limon, sable, grave). Pour les sols fins, on fait une distinction entre les paramètres relatifs au comportement du squelette solide et ceux relatifs au comportement du complexe sol.

Actuellement dans le cadre de la mécanique des milieux continus, il y a différents groupes de théories différentes pour le comportement des matériaux. Le comportement du squelette solide des sols est reconnu comme fortement non linéaire. Les principales approches les plus courantes qui existent pour décrire ces non-linéarités sont :

- L'élasticité non-linéaire.
- La théorie élasto-plastique.
- La théorie endochronique.

Pour un essai unidimensionnel, les allures des courbes contraintes – déformations sont représentées sur la figure 4.1 pour les trois théories pour un cycle de charge AB, décharge BC et rechargement CDE.

Une autre approche de modèle non linéaire sont les modèles hyperboliques type *Duncan* dont l'allure de la contrainte s'apparente à celle de la figure(4.1b) mais ce modèle comme nous le verrons par la suite n'a aucun rapport avec les modèles élasto-plastiques.

Les modèles élasto-visco-plastiques sont aussi une approche intéressante, comprenant :

- Le modèle rigide viscoplastique
- Le modèle élasto-viscoplastique.
- Le modèle élastovisco-plastique.
- ... etc

Ces modèles aux comportements plus complexes seront exposés brièvement par la suite.

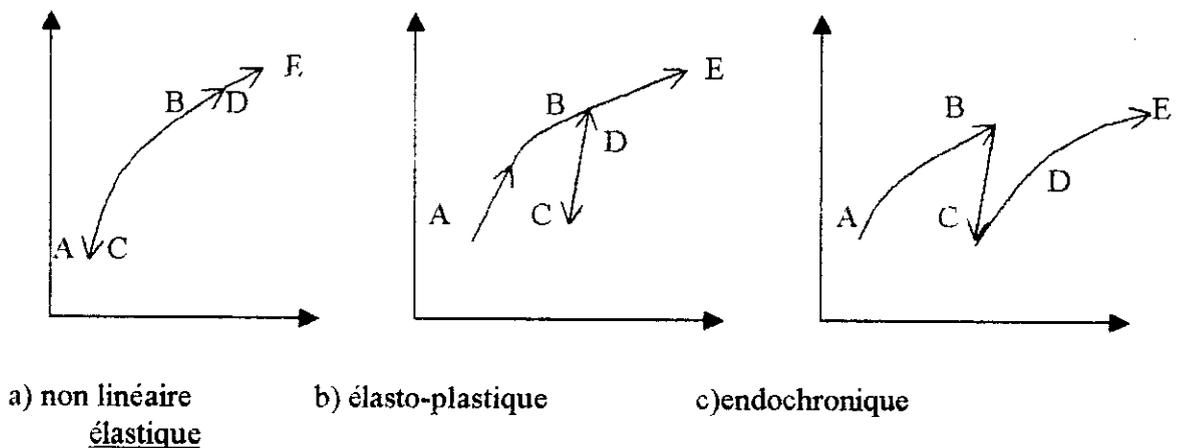


Figure 4.1 : Types courants de comportement pour un cycle de charge et décharge.

4.2 COMPORTEMENT ELASTIQUE.

4.2.1 Matériau homogène isotrope linéaire.

a) Relations entre tenseurs contraintes et tenseurs déformations.

Dans ce cas la relation contrainte déformation est donnée par la loi de *Hooke* généralisée. Celle-ci s'écrit (en notation indicielle :))

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^r \varepsilon_{kl} \quad \text{où :} \quad (4.1)$$

σ_{ij} est un élément du tenseur contrainte $[C]_{\sigma}$ d'ordre deux défini en un point M du milieu par rapport à un repère orthonormé . celui-ci s'écrit

$$[C]_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ et} \quad (4.2)$$

$$[C]_{\sigma} = [C]_{\sigma}^S + [C]_{\sigma}^D \quad (4.3)$$

où $[C]_{\sigma}^S$ est le tenseur contrainte sphérique responsable de la dilatation volumique et $[C]_{\sigma}^D$ est le tenseur contrainte déviatorique responsable de la scission et de l'écart des contraintes normales par rapport à la contrainte moyenne.

$$[C]_{\sigma}^S = p[I] \text{ et } [C]_{\sigma}^D = [C] - p[I] \text{ avec } p = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \text{ et } [I] \text{ la matrice unité.}$$

Un élément du tenseur déviatorique en contrainte $[C]_{\sigma}^D$ est noté ' s_{ij} '.

ε_{ij} est un élément du tenseur contrainte $[D]_{\varepsilon}$ d'ordre deux défini en un point M du milieu par rapport à un repère orthonormé. Celui-ci s'écrit

$$[D]_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$[D]_{\varepsilon} = [D]_{\varepsilon}^S + [C]_{\varepsilon}^D \quad (4.6)$$

où $[D]_{\varepsilon}^S$ est le tenseur déformation sphérique responsable de la dilatation volumique $\frac{\Delta V}{V}$ et $[D]_{\varepsilon}^D$ est le tenseur déformation déviatorique.

$$[D]_{\varepsilon}^S = \frac{(\varepsilon_{ii})}{3}[I] \text{ et } [D]_{\varepsilon}^D = [D]_{\varepsilon} - \frac{(\varepsilon_{ii})}{3}[I] \text{ et } [I] \text{ la matrice unité.}$$

$$\text{On a } \frac{\Delta V}{V} = (\varepsilon_{ii})$$

Un élément du tenseur déformation déviatorique est noté ' e_{ij} '

C_{ijkl}^r est un élément du tenseur d'ordre quatre de la matrice relation contrainte - déformation $[C^r]$ et δ_{ij} est un élément du tenseur de *Kronecker-Delta* d'ordre deux

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C_{ijkl}^r = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad (4.8)$$

E et ν sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson.

La relation déformation - contrainte équivalente à (4.1) s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}^r \sigma_{kl} \quad (4.9)$$

$$D_{ijkl}^r = \frac{(1-\nu)}{2E} \left[-\frac{2\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad (4.10)$$

Dans ce cas, les paramètres nécessaires pour définir complètement la relation contrainte sont E et ν . Mais en pratique, il est commode de séparer le comportement volumique et le comportement déviatorique. Dans ce cas, la paire G et K est utilisée où G est le module d'élasticité transversal et K est le module de déformation volumique (*Bulk modulus*).

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad \text{et} \quad s_{ij} = 2G e_{ij} \quad (4.11)$$

$K = \frac{p}{\varepsilon_{ii}}$ avec $p = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ dite contrainte octaédrale ou pression hydrostatique ou contrainte moyenne et $(\varepsilon_{ii}) = \frac{\Delta V}{V}$ la . soit :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.12)$$

b) Invariants des tenseurs contraintes et déformations.

L'utilisation des invariants des tenseurs contraintes rend plus commode la formulation de nombre de relations par la suite.

Pour le tenseur contrainte $[C]_{\sigma}$ défini dans un repère orthonormé $Mxyz$ les invariants sont :

$$I_1 = (\sigma_{ii}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.13b)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (4.13c)$$

Où le symbole ' $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ ' signifie déterminant.

Si le repère MXYZ est le repère principal. Soit σ_1 σ_2 σ_3 ces contraintes principales ordonnées dans l'ordre décroissant $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Alors ces invariants s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Pour le tenseur contrainte déviatorique $[C]_{\sigma}^D$ défini dans un repère orthonormé Mxyz les invariants sont comme précédemment avec les notations ' s_{ij} ' au lieu de ' σ_{ij} '. Le tenseur s'écrit dans un repère Mxyz

$$[C]_{\sigma}^D = \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

et ses invariants sont :

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= s_{ii} \\ &= s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_x + s_y + s_z \\ J_2 &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} \\ &= \frac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{13}^2 + 2s_{23}^2) \\ &= \frac{1}{2} (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2s_{xy}^2 + 2s_{yz}^2 + 2s_{xz}^2) \\ J_3 &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Dans le repère principal précédent MXYZ les contraintes principales du tenseur déviatorique sont s_1 s_2 s_3 avec

$$s_i = \frac{2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{3} \quad i \neq j \neq k, \quad \sigma_i \text{ étant la contrainte principale du tenseur}$$

contrainte $[C]_{\sigma}$, les deux tenseurs ayant les mêmes directions principales.

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= s_1 + s_2 + s_3 \\ J_2 &= \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\ J_3 &= s_1 s_2 s_3 \end{aligned} \right| \quad (4.17)$$

Pour les tenseurs déformations on a exactement les mêmes expressions pour les invariants notés alors $I'_1 I'_2 I'_3$ et $J'_1 J'_2 J'_3$ relatifs aux invariants respectifs $I_1 I_2 I_3$ et $J_1 J_2 J_3$; avec au lieu de σ_{ij} et s_{ij} respectivement ε_{ij} et e_{ij} ; au lieu des quantités principales σ_i et s_i respectivement les déformations principales ε_i et e_i relativement aux mêmes axes bien sûr.

c) Décomposition de la relation contrainte-déformation.

Une séparation logique existe entre la composante de réponse volumique (ou hydrostatique ou moyenne) et la composante de réponse transversale ou déviatorique.

Après introduction de la décomposition (4.3) (4.4) dans (4.1) et de (4.6) (4.7) dans (4.9) on obtient les relations suivantes où les effets de chacune des parties sont distincts:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9K} I_1 \delta_{ij} + \frac{1}{2G} s_{ij} \quad \text{avec } I_1 = p = \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (4.18)$$

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2G e_{ij} \quad (4.19)$$

Où I_1 est le premier invariant du tenseur contrainte $[C]_\sigma$ ou du tenseur sphérique.

Les premiers termes de gauche représentent l'effet de la partie sphérique ou octaédrique caractérisé par le paramètre K et les deuxièmes termes l'effet de la partie déviatorique caractérisé par le paramètre G .

4.2.2 Matériau isotrope non – linéaire.

a) Hyperélasticité , élasticité et hypoélasticité.

Dans ce cas pour un essai uniaxial par exemple (figure 4.2) la courbe contrainte déformation n'est plus linéaire. Dans ce cas, l'énergie de déformation par unité de volume est :

$$W(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \quad \text{et dans le cas multiaxial } W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (4.20)$$

et l'énergie complémentaire par unité de volume

$$\Omega(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \quad \text{et dans le cas multiaxial } \Omega(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (4.21)$$

on a $W + \Omega = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$

Il y a deux façons de décrire le comportement réversible du matériau en contrainte totale : la première consiste à dire qu'il y a une correspondance unique contrainte déformation de la forme :

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (4.22)$$

Cette forme implique que nous avons un matériau élastique de *Cauchy*.

La deuxième que les contraintes sont les gradients de l'énergie potentielle de déformation :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.23)$$

ou bien que les déformations sont les gradients de l'énergie de déformation complémentaire.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.24)$$

Dans ce cas le matériau est hyperélastique et est dit 'matériau élastique de Green'.

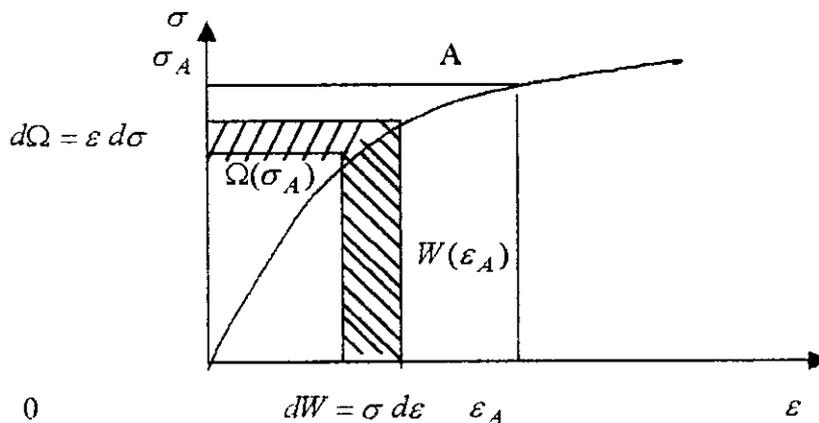


Figure 4.2 essai uniaxial pour un matériau isotrope élastique non-linéaire.

La différence entre ces deux formulations est que un matériau élastique de *Cauchy* peut violer les lois de la thermo-dynamique (énergie développée par un matériau élastique est une fonction d'état) ce qui n'est pas le cas d'un matériau hyperélastique (matériau de *Green*).

Une autre possibilité de décrire le comportement du matériau est d'utiliser une forme incrémentale de la relation contrainte-déformation. Dans ce cas le matériau est dit hypoélastique.

b) Formulation des relations contraintes – déformations à partir de l'énergie de déformation W ou l'énergie complémentaire Ω .

Dans ce cas il est pratique de définir l'énergie de déformation à partir des invariants choisis arbitrairement $\bar{I}'_1, \bar{I}'_2, \bar{I}'_3$ par suite, l'énergie de déformation s'écrit :

$$W = W(\bar{I}'_1, \bar{I}'_2, \bar{I}'_3) \quad \text{avec par exemple} \quad (4.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}'_1 &= \varepsilon_{ij} \\ \bar{I}'_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \\ \bar{I}'_3 &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{il} \varepsilon_{jl} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

A partir de (4.23) on obtient :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}'_1} \frac{\partial \bar{I}'_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}'_2} \frac{\partial \bar{I}'_2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}'_3} \frac{\partial \bar{I}'_3}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{soit après développement :} \quad (4.27)$$

$$\sigma_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{ij} + \alpha_3 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} \quad \text{où} \quad (4.28)$$

$$\alpha_i = \alpha_i(\bar{I}'_j) = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}'_i} \quad (4.29)$$

Les fonctions α_i compte tenu d'une dérivation de (4.29) peuvent être données par les trois équations :

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \bar{I}'_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial \bar{I}'_i} \quad (4.30)$$

d'une façon analogue en raisonnant à partir de l'énergie complémentaire on aurait trouvé :

$$\varepsilon_{ij} = \beta_1 \delta_{ij} + \beta_2 \sigma_{ij} + \beta_3 \sigma_{ik} \sigma_{jk} \quad (4.31)$$

en prenant des invariants correspondants en contraintes et en formulant l'énergie complémentaire sur la base de ces invariants $\Omega = \Omega(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3)$.

Les fonctions α_i compte tenu d'une dérivation de (4.24) peuvent être donné par les trois équations :

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial I_j} = \frac{\partial \beta_j}{\partial I_i} \quad (4.32)$$

Il est important de remarquer que dans ce cas le comportement d'un matériau formulé par les équations (4.23) et (4.26) est réversible et indépendant du chemin suivi.

c) Relation contrainte-déformation par modification du module élastique.

Une extension des relations généralisées de *Hooke*, peut être effectuée en prenant à la place des modules d'élasticité correspondants, des fonctions scalaires de l'état de contraintes au point considéré ou plus généralement des fonctions scalaires des invariants du tenseur contrainte au point considéré.

Les matériaux pour lesquels ce type de formulation sont des matériaux de type *Cauchy*.

Une autre façon de formuler la loi de *Hooke* équivalente à (4.9) est :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (4.33)$$

une extension de cette relation peut s'écrire :

$$\varepsilon_{ij} = (1+\nu)F(I_1, J_2, J_3) \sigma_{ij} - \nu F(I_1, J_2, J_3) \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (4.34)$$

Si on reprend (4.11) sous la forme :

$$p = K_s \varepsilon_{ii} \quad \text{et} \quad s_{ij} = 2G_s e_{ij} \quad \text{alors on a :} \quad (4.35)$$

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p \delta_{ij} = 2G_s e_{ij} + K_s \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (4.36)$$

où K_s et G_s sont des fonctions scalaires des contraintes principales au point considéré ou bien des invariants du tenseur contrainte. Afin d'assurer une indépendance par rapport au chemin suivi les fonctions K_s et G_s doivent vérifier certaine restriction. On montre que lorsque $K_s = K_s(I_1, I'_1)$ et $G_s = G_s(J_2, J'_2)$ l'indépendance est vérifiée.

d) Postulat de stabilité de Drucker

Celui-ci s'énonce comme suit :

Durant la variation de l'ensemble des forces extérieures appliquées au système considéré, le travail correspondant de ces forces est positif.

Sur un cycle chargement - déchargement le travail effectué par l'ensemble des forces externes est non-négatif.

Le premier postulat est appelé 'stabilité in small'.

Le deuxième postulat est nommé 'stabilité in cycle'.

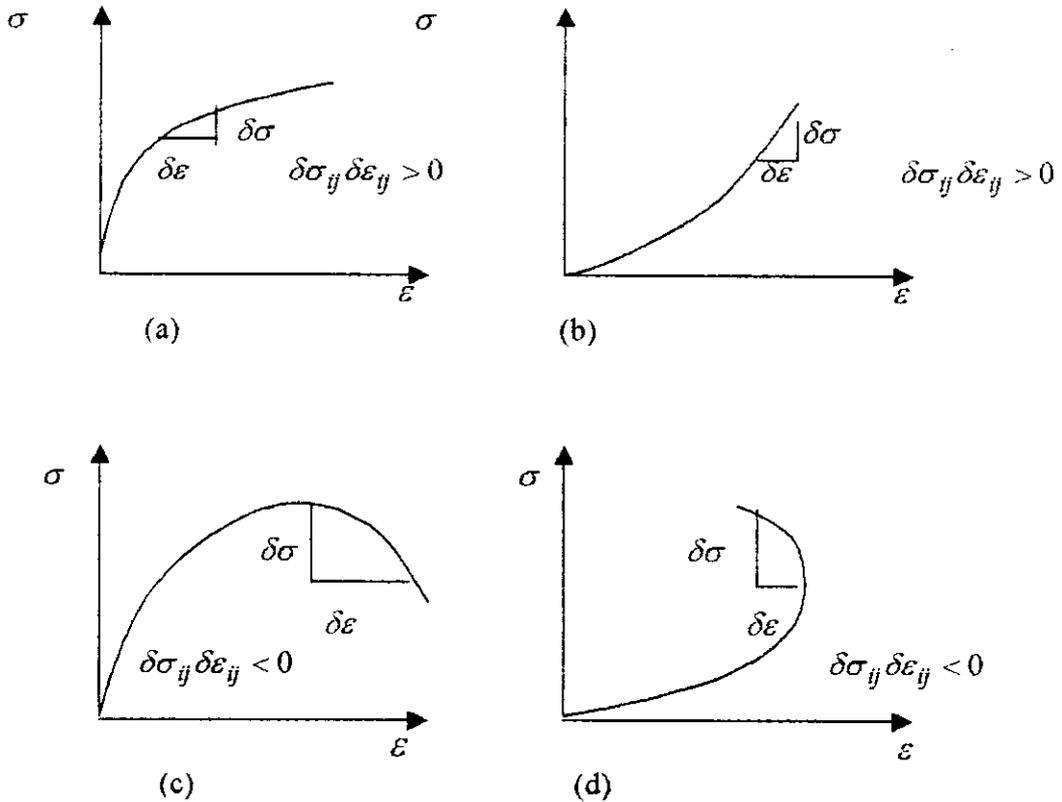
Compte tenu du principe des travaux virtuels ces postulats s'écrivent,

$$\delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} > 0 \quad \text{stabilité in small} \quad (4.37)$$

$$\oint \delta\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad \text{stabilité in cycle} \quad (4.38)$$

où le symbole \oint signifie intégration sur un cycle.

Dans ce cas la relation contrainte – déformation est bijective. Ceci est illustré sur la figure 4.3 où le postulat n'est pas vérifié pour les cas c) et d).



cas a et b : stable
cas b et c : instable

Figure 4.3 : Courbes contraintes-déformations : postulat de stabilité de Drucker

Pour un matériau parfaitement élastique alors le travail effectué par le système de forces extérieures sur un cycle est nul dans ce cas :

$$\oint \delta\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} = 0 \quad (4.39)$$

Si des déformations irréversibles se sont développées sur un cycle alors :

$$\oint \delta\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} > 0 \quad (4.40)$$

On en déduit de (4.39) que le deuxième postulat de *Drucker* implique pour un matériau élastique que l'énergie de déformation est une fonction d'état donc une différentielle totale exacte, c'est à dire que l'énergie de déformation du système est une fonction des déformations

seulement. Il en est de même pour l'énergie complémentaire laquelle alors est fonction des contraintes seulement. Soit,

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.41)$$

$$\Omega(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.42)$$

e) Normalité, convexité, unicité.

Normalité

Les équations (4.23) $\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}$ et (4.24) $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$ représente les conditions de

normalité dans l'espace particulier à neuf dimensions où chacun des axes correspond à une des neuf composantes du vecteur déformation pour la première condition ou bien du vecteur contrainte pour la deuxième condition. Dans le premier espace le vecteur contrainte $\{\sigma\} \equiv \sigma_{ij}$ est normal à la surface $W = \text{constante}$ au point $\{\varepsilon\} \equiv \varepsilon_{ij}$, et dans le deuxième le vecteur déformation $\{\varepsilon\} \equiv \varepsilon_{ij}$ est normal à la surface $\Omega = \text{constante}$ au point $\{\sigma\} \equiv \sigma_{ij}$.

Convexité

Compte tenu de (3.123) $\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}$ il s'ensuit que :

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} \quad (4.43)$$

le premier postulat de *Drucker* $d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0$ implique donc que :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} > 0 \quad (4.44)$$

(4.44) permet de conclure que la surface $W = \text{constante}$ est convexe.

On montrerait de même que la surface $\Omega = \text{constante}$ est forcément convexe d'après le premier postulat de *Drucker*.

Unicité

On montre aisément que pour une variation du système de force extérieure, il ne peut y avoir, compte tenu du premier postulat de *Drucker*, deux états finaux possibles car alors le passage d'un de ces états finaux à l'autre correspondrait à une variation nulle du système de force extérieur et l'application du principe des travaux virtuels, donnerait :

$$0 = \int_V (d\sigma_{ij}^a - d\sigma_{ij}^b)(d\varepsilon_{ij}^a - d\varepsilon_{ij}^b) dV \quad \text{Où les indices a et b correspondent aux états finaux 1 et 2.}$$

Le premier postulat de *Drucker* $d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0$ donnerait alors :

$$(d\sigma_{ij}^a - d\sigma_{ij}^b)(d\varepsilon_{ij}^a - d\varepsilon_{ij}^b) > 0$$

Ce qui conduit à une situation impossible. Par suite, on ne peut donc pas avoir deux états finaux possibles. D'où l'unicité.

f) Relation incrémentale contrainte-déformation.

Ce type de formulation est souvent utilisé pour décrire le comportement mécanique de matériaux pour lesquels l'état de contrainte dépend de l'état de déformation en cours ainsi que du chemin de Contrainte suivi pour atteindre cet état. En général, les relations incrémentale s'écrivent sous la forme :

$$\Delta\sigma_{ij} = F_{ij}(\Delta\varepsilon_{kl}, \sigma_{mn}) \quad (4.45)$$

Où $\Delta\sigma_{ij}$ et $\Delta\varepsilon_{kl}$ sont des tenseurs incréments contraintes et déformations et F_{ij} des fonctions de tenseurs.

Une autre formulation équivalente est :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^r(\sigma_{mn}) d\varepsilon_{kl} \quad (4.46)$$

Où le tenseur relationnel $C_{ijkl}^r(\sigma_{mn})$ est une fonction des composantes du tenseur contrainte appelé couramment tenseur(matrice) de rigidité tangente.

Le comportement décrit par l'équation (4.46) est incrémentalement réversible. Dans ce cas le matériau est minimalement élastique ou hypoélastique.

Le comportement d'un matériau hypoélastique dépend en général du chemin suivi c'est à dire de l'histoire des déformations ou contraintes. L'intégration de l'équation (4.46), pour des chemins différents et des états initiaux différents, aboutit à des relations contraintes - déformations différentes.

4.3 CRITERE DE PLASTICITE, FONCTION DE CHARGE.

Considérons un élément de volume dans un état initial donné. La notion de limite d'élasticité en traction ou en compression a cédé la place à celle de critère de plasticité pour les matériaux élastoplastiques. A partir de quels états de contraintes, correspondant à tous les modes de sollicitations, pourra-t-on atteindre le régime plastique? La réponse peut être donnée par la détermination d'une fonction $f(\sigma_{ij})$, à valeurs scalaires, du tenseur de contraintes, de telle sorte que par convention $f(\sigma_{ij})$ prenne des valeurs négatives tant que la réponse est élastique et s'annule à l'entrée dans le domaine plastique. La fonction $f(\sigma_{ij})$, dite *fonction de charge*, est alors utilisée pour formuler un critère de plasticité, à partir du signe de ses valeurs (le cas de valeur positive n'ayant pas de sens physique).

Considérons l'espace à six dimensions dont un point représente un tenseur contrainte (cas homogène, isotrope). L'équation $f(\sigma_{ij}) = 0$ définit une surface dite *surface de charge* ou *surface d'écoulement* qui délimite donc le domaine d'élasticité (intérieur à cette surface). A partir d'un point intérieur au domaine d'élasticité, la plastification peut être obtenue par une infinité de trajets de contraintes, au moment où ils atteignent un point quelconque de la surface de charge.

Dans la pratique, au lieu de considérer un espace contrainte à six dimensions, il est préférable d'utiliser un espace à trois dimensions. Pour cela l'espace de *Haigh-Westergaard* est plus commode. Un point de cet espace représente les contraintes principales du tenseur contrainte. Une conséquence de cette représentation est que un même point de cet espace représente tous les états de contraintes qui ne diffèrent seulement que par l'orientation de leurs directions principales.

Un point de la trisectrice représente un état de contrainte défini par un tenseur pour lequel les contraintes principales sont égales, c'est à dire un état de contrainte hydrostatique ou un tenseur sphérique.

Considérons un point état de contrainte représenté par un point P dans l'espace de *Haigh-Westergaard* (figure 4.4). Ce tenseur peut se décomposer en un tenseur sphérique et un tenseur déviatorique. On montre par des considérations géométriques que la projection du point sur la trisectrice donne un point N représentatif du tenseur sphérique, et que la projection sur le plan normal à la trisectrice passant par l'origine donne un point S représentatif du tenseur déviatorique dite aussi composante déviatorique du tenseur (puisque $s_1 + s_2 + s_3 = \text{constante} = 0$).

On définit :

$$\xi = ON = \sqrt{3}p \text{ et } \rho = OS = NP = \sqrt{2J_2} \quad (4.47)$$

Le plan d'équation $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ perpendiculaire à la trisectrice passant par l'origine est appelé '*plan π* '. Parfois il est plus commode de travailler sur le *plan π* qu'avec le tenseur déviatorique. Dans ce cas, les axes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont projetés en $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ (figure 4.5). On désigne par θ l'angle que fait la projection de la contrainte avec l'axe projeté majeur.

Alors un état de contrainte peut aussi bien être représenté par ses contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ que par le triplé (ξ, ρ, θ) .

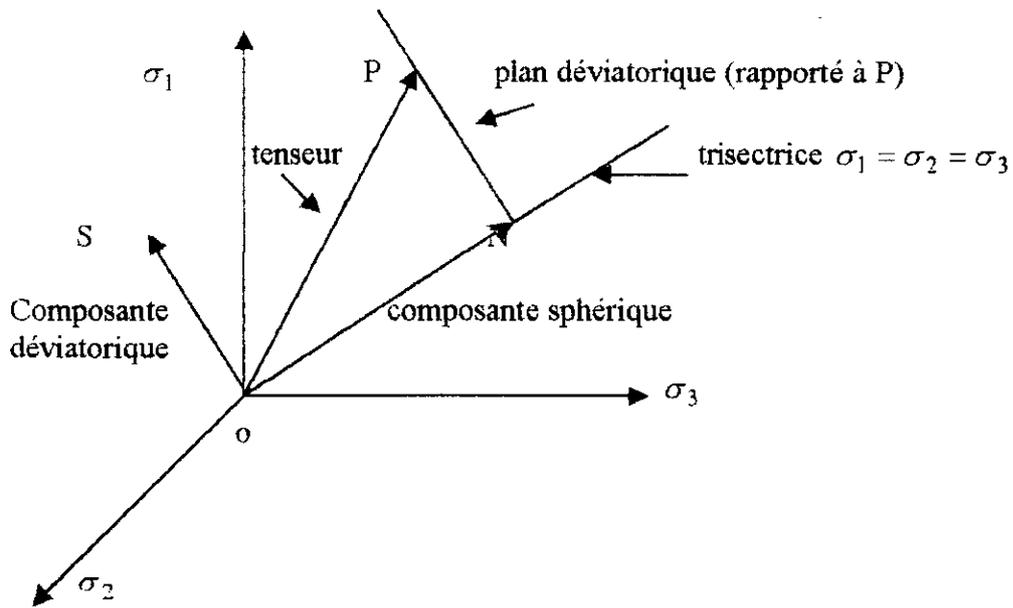


Figure 4.4 : Espace de Haigh-Westergaard. Représentation d'un tenseur.

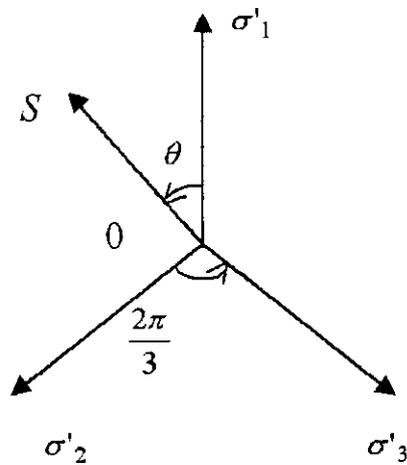


figure 4.5 Représentation de l'état de contrainte sur le plan π

4.3.1 Critère de plasticité indépendant du tenseur sphérique. (ou de la contrainte moyenne)

Historiquement le premier critère proposé pour un métal est celui de *Tresca* en 1864 (figure 4.6 et 4.7). Ce critère exprime que la contrainte tangentielle maximale

$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ne peut excéder une valeur limite k . Ce critère est donc indépendant du tenseur sphérique c'est à dire de la variable ξ ou du premier invariant I_1 .

Celui-ci s'écrit en fonction des variables (ξ, ρ, θ) :

$$f(\rho, \theta) = \sqrt{2\rho} \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - 2k \quad (4.48)$$

Où k est une constante (valeur critique de cisaillement) et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

Une autre expression peut être obtenue à partir des invariants :

$$f(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - 2k \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (4.49)$$

(Pour les autres secteurs correspondant à des intervalles de variation de 60° de θ on complète par symétrie.)

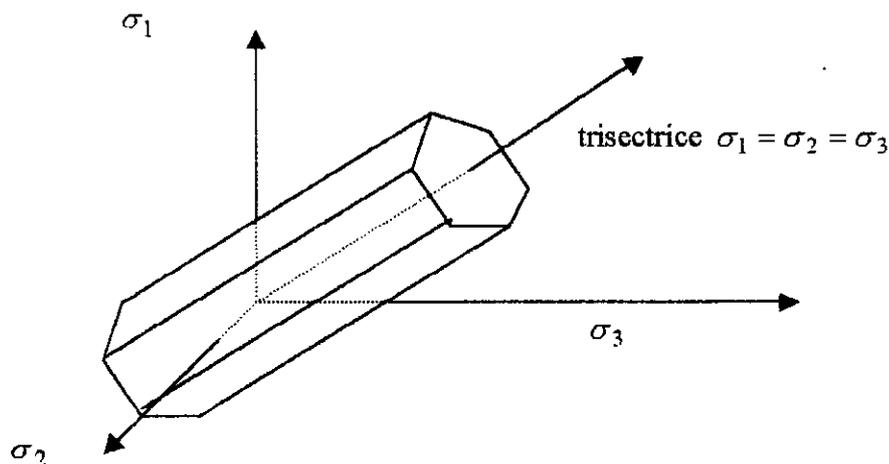


Figure 4.6 : Surface de charge : Critère de Tresca

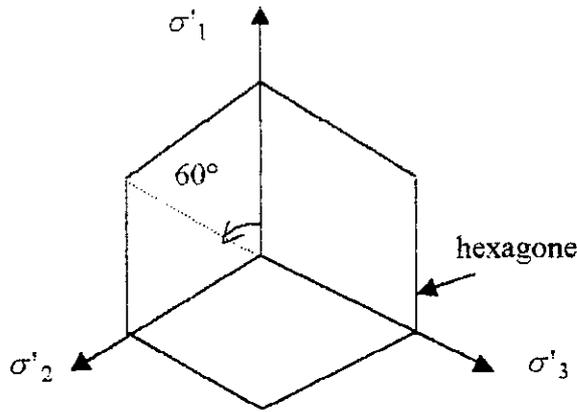


Figure 4.7 : Représentation du critère de Tresca sur le plan π

Un deuxième critère indépendant aussi du tenseur sphérique est le critère de *Von Mises* figure (4.8 et 4.9). Celui datant de 1913 exprime que la composante tangentielle de la contrainte octaédrique (contrainte s'exerçant sur un plan dont la normale a pour direction une des trisectrices du repère principal) ne peut excéder une valeur limite.

La contrainte octaédrique ayant pour composante $\sigma_{oct} = \frac{I_1}{3} = p$, $\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2}$, ce critère implique que le deuxième invariant du tenseur déviatorique ne peut excéder une valeur limite k^2 . Celui ci peut donc s'écrire sous la forme simple :

$$f(J_2) = J_2 - k^2$$

Le critère de Von Mises représente assez bien le comportement du complexe sol pour les sols fins parfaitement saturés.

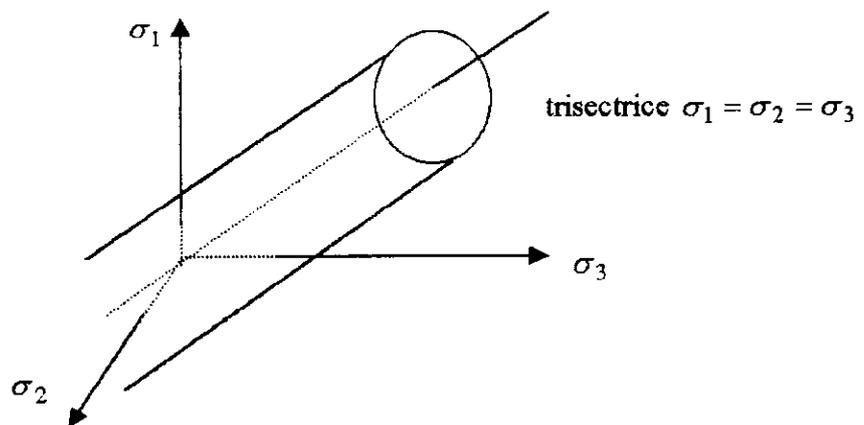


Figure 4.8 : Surface de charge ; Critère de Von Mises

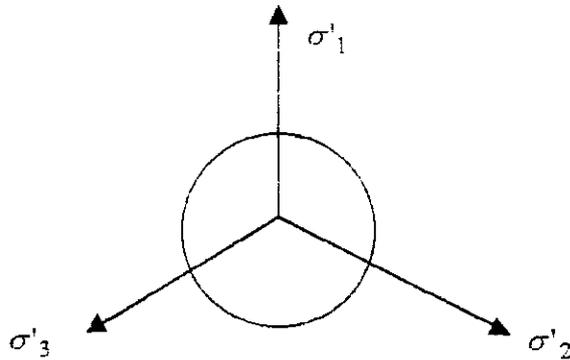


Figure 4.9 : Représentation du critère de Von Mises sur le plan π .

4.3.2 Critère de plasticité dépendant du tenseur sphérique.

La plupart des métaux, le critère de plasticité est surtout conditionné par le tenseur déviatorique indépendamment du tenseur sphérique. Par contre pour les matériaux tels que les bétons, les roches et les sols, le critère de plasticité dépend du tenseur sphérique.

Le critère de *Mohr-Coulomb* datant de 1900 peut être considéré comme une généralisation du critère de *Tresca*. Les deux supposent que la contrainte de cisaillement maximal est la seule cause d'une rupture. Tandis que *Tresca* considère que la valeur critique de la contrainte de cisaillement est constante, *Mohr* considère que pour un plan de coupe donné cette contrainte critique varie en fonction de la contrainte normale agissant sur ce plan.

$$\tau_{\text{critique}} = g(\sigma) \quad (4.50)$$

Le critère de Mohr en un point du milieu représente dans la représentation de Mohr (repère (σ, τ)) l'ensemble des états de contrainte à la rupture possible en ce point. Ce qui se traduit par la courbe enveloppe figure (4.10).

Le cas simple où, dans la représentation de Mohr la courbe enveloppe est une droite a été présenté par *Coulomb* en 1773 pour les sols (figure 4.11). Dans ce cas l'équation de la courbe enveloppe est :

$$|\tau_{\text{critique}}| = c - \sigma \tan \varphi \quad (4.51)$$

où c est la cohésion et φ l'angle de frottement interne.

La fonction de charge (figure 4.12 et 4.13) qui en découle s'écrit pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ à partir des invariants : (pour les autres intervalles de θ on complète par symétrie.)

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \varphi + \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \varphi - c \cos \varphi \quad (4.52)$$

ou bien à partir des variables (ξ, ρ, θ)

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2} \xi \sin \varphi + \sqrt{3} \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \varphi - \sqrt{6} c \cos \varphi \quad (4.53)$$

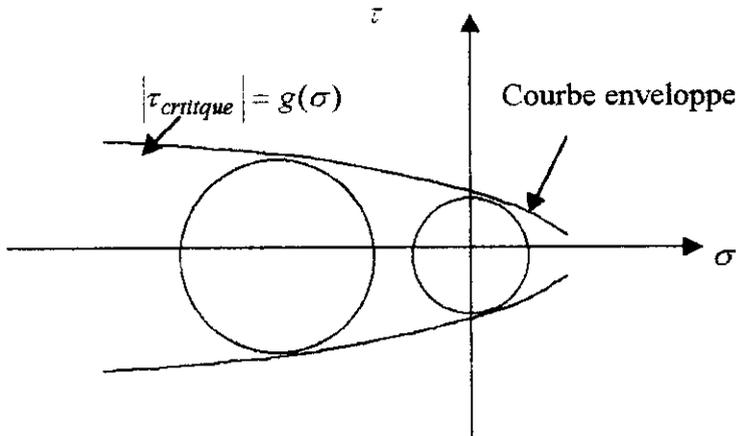


Figure 4.10 : Représentation du critère de Mohr

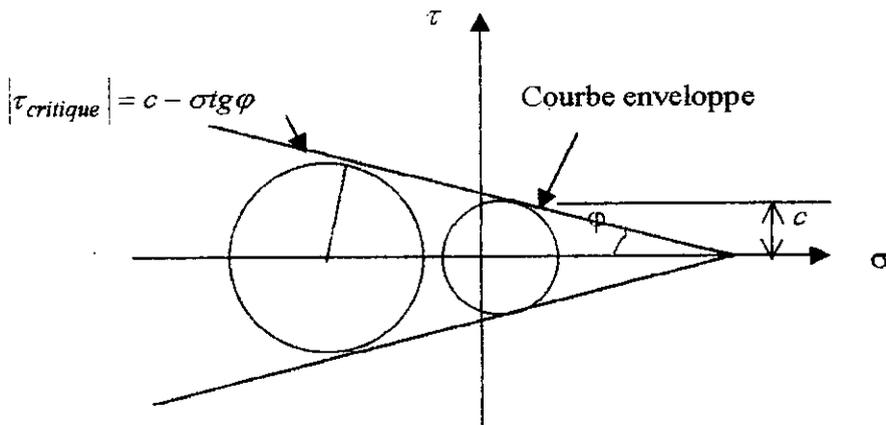


Figure 4.11 : Représentation du critère de Mohr-Coulomb

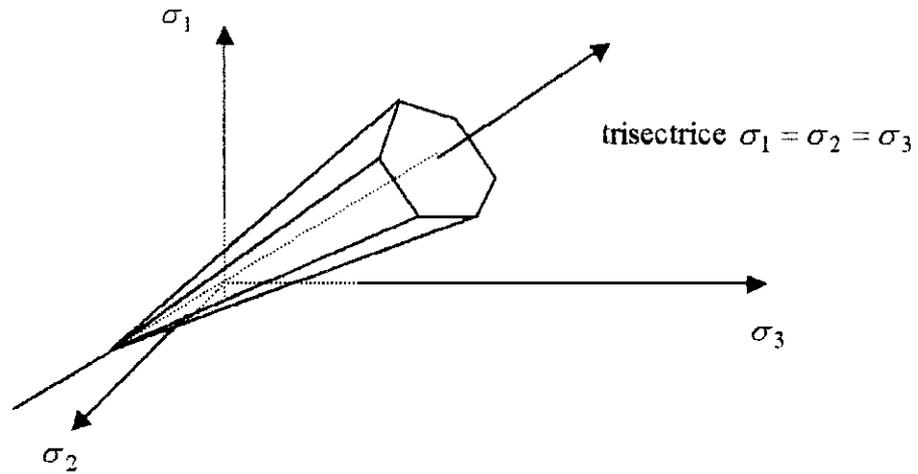


Figure 4.12 : Surface de charge : Critère de Mohr-coulomb

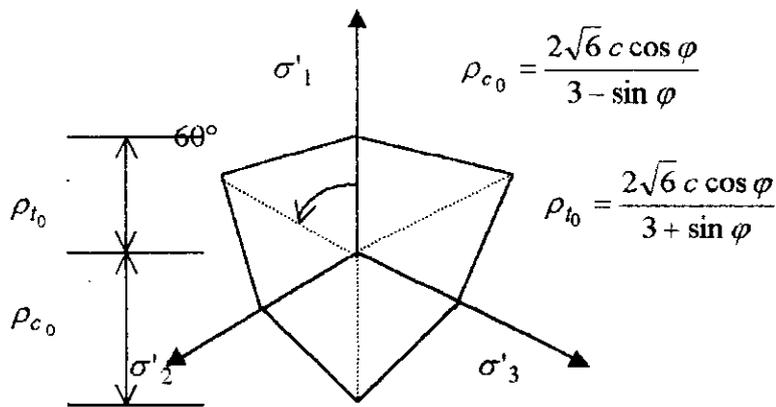


Figure 4.13 : Représentation du critère de Mohr-Coulomb sur le plan π

Le critère de *Drucker et Prager* formulé en 1952 peut être lui aussi considéré comme une généralisation du critère de *Von Mises* où l'influence du tenseur sphérique est introduit en ajoutant le terme αI_1 au critère de *Von Mises*. Il s'ensuit que la fonction de charge s'écrit à partir des invariants :

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \tag{4.54}$$

et à partir des variables (ξ, ρ, θ) :

$$f(\xi, \rho) = \sqrt{6} \alpha \xi + \rho - \sqrt{2} k$$

Le critère de Mohr – Coulomb n'est pas très pratique compte tenu de la forme anguleuse de la surface de charge correspondante. Les coins peuvent donner lieu à de grosses difficultés mathématiques, et amener un certain nombre de complications dans un processus numérique. Par contre le critère de Drucker-Prager ne pose aucun de ces problèmes la surface de charge étant conique (figure 4.14). Il est souvent utilisé à la place du critère de Mohr – Coulomb avec généralement la correspondance suivante (figure 4.15) .

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3} (3 - \sin \varphi)} \quad \text{et} \quad k = \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3} (3 - \sin \varphi)} \quad (4.56)$$

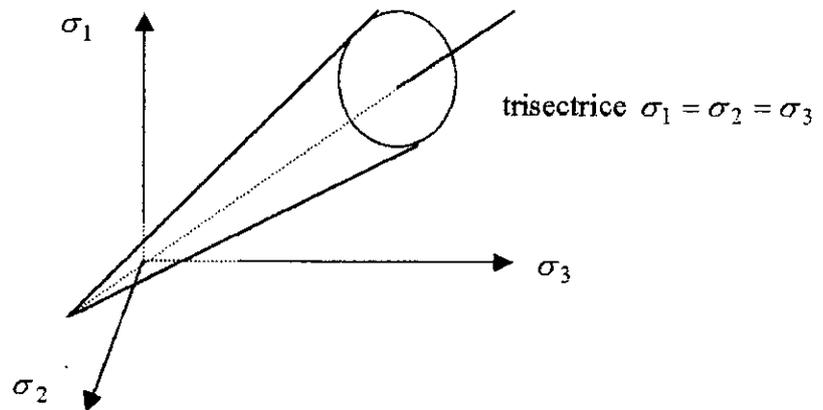


Figure 4.14 : Surface de charge : Critère de Drucker-Prager

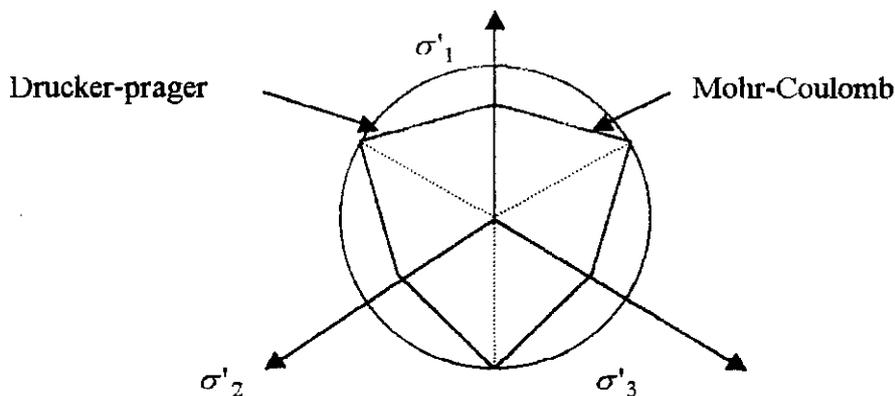


Figure 4.15 : Représentation du critère de Drucker-Prager sur le plan π .

4.3.3 Ecrouissage.

Les matériaux dont la surface de charge est fixe, sont les matériaux dits élasto-plastiques parfaits.

Pour les matériaux écrouissables, la surface de charge évolue au cours de l'écoulement plastique, le point de charge restant toujours sur la surface. Ceci nécessite de faire dépendre la fonction de charge d'autres variables que les seules composantes du tenseur de contraintes : il s'agira précisément des paramètres d'écrouissage, qui pourront être, suivant les cas, de nature scalaires, vectorielles ou tensorielles.

La relation contrainte –déformation relative à un cycle chargement – déchargement de la nouvelle surface de charge est dépendante du chemin de chargement ou dépendante de l'histoire de chargement.

Afin de développer ces relations, deux approches de bases sont utilisées :

1) La première approche est la théorie de déformation dans la forme de relation contrainte – déformation totale. Cette théorie suppose que l'état de contrainte détermine l'état de déformation d'une façon unique aussi longtemps que la déformation plastique se prolonge. Alors la plus générale forme de cette théorie durant le chargement peut être écrite comme suit:

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e = g(\sigma_{ij}) \quad (4.57)$$

Où ε_{ij}^e , ε_{ij}^p sont les tenseurs de déformations élastiques et plastiques, composants du tenseur de la déformation totale ε_{ij} et σ_{ij} le tenseur de contraintes.

Cette équation montre un comportement du chargement indépendant du chemin de contrainte suivi. Elle ne décrit pas de façon adéquate le phénomène associé avec un cycle de chargement – déchargement . Néanmoins, de telles théories sont utilisées en pratique du fait de leur simplicité.

2) La deuxième approche est la théorie incrémentale ou la théorie d'écoulement. Ce type de formulation donne l'incrément du tenseur de déformation plastique ' $d\varepsilon_{ij}$ ' en fonction du tenseur contrainte ' σ_{ij} ' et de l'incrément de ce tenseur ' $d\sigma_{ij}$ '. La plus simple théorie de l'écoulement est la théorie en plasticité parfaite. La différence fondamentale avec la théorie en plasticité parfaite est que maintenant la surface de charge n'est plus fixe. La réponse d'un matériau après la limite initiale est décrite par une nouvelle surface de charge dite 'surface de charge subséquente' et la loi qui définit cette nouvelle surface est dite 'loi d'écrouissage'.

Les hypothèses utilisées dans la théorie incrémentale sont :

- L'existence d'une surface initiale de charge qui définit la limite d'élasticité du matériau pour un état de contrainte multi-axiale.
- L'existence d'une loi d'écrouissage qui décrit l'évolution de cette surface de charge subséquente.
- La loi d'écoulement se rapporte à une fonction potentielle plastique et définit la direction du vecteur incrémental de déformation plastique dans l'espace de Haigh-Westergaard.

La détermination de la nature de la surface de charge subséquente est un problème majeur de la théorie d'écrouissage. La réponse d'un matériau après avoir atteint la surface de charge initiale diffère considérablement d'une théorie à l'autre. Un grand nombre de lois

d'écrouissage ont été proposées donnant la modification de la surface de charge à partir de la surface de charge initiale. Les plus largement répandues sont :

- Les lois d'écrouissage isotropes.
- Les lois d'écrouissage cinématiques.
- Les lois d'écrouissage mixte qui sont une combinaison des deux autres.

Une écriture générale de l'équation de la surface de charge limite est la suivante :

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) - k^2(\varepsilon_p) = 0 \quad (4.58)$$

Où $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ définit la forme de la surface chargée.

k^2 est relatif à la taille de la surface de charge.

ε_p est la déformation effective dépendant de l'histoire de chargement ou du chemin de déformation plastique. Celle-ci est définie de deux façons possibles

- La première définit l'incrément de la déformation effective plastique comme une combinaison des incréments de déformations plastiques comme par exemple :

$$d\varepsilon_p = c \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \text{ où } c \text{ est ajusté à partir des résultats d'un essai uniaxial.}$$

- La deuxième définit la déformation effective plastique à partir du travail plastique par unité de volume.

Pour un matériau parfaitement plastique alors $k^2(\varepsilon_p) = k^2 = \text{constante}$ et $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = F(\sigma_{ij})$ soit :

$$f(\sigma_{ij}, k) = F(\sigma_{ij}) - k^2 = 0 \quad (4.59)$$

Une loi isotrope est basée sur l'hypothèse que la surface de charge initiale s'étend uniformément sans distorsion et sans translation lorsque l'écoulement plastique se produit. La taille de la surface de charge est régie par k^2 , par conséquent pour un matériau à écrouissage isotrope l'équation de la surface de charge subséquente à l'allure générale :

$$f(\sigma_{ij}, k) = F(\sigma_{ij}) - k^2(\varepsilon_p) = 0 \quad (4.60)$$

par exemple si le critère de Von Mises est utilisé, alors $F(\sigma_{ij}) = J_2$ et l'équation de la surface de charge subséquente

$$f(\sigma_{ij}, k) = J_2 - k^2(\varepsilon_p) = 0 \quad (4.61)$$

La théorie de l'écrouissage isotrope donne une variation limite de la surface subséquente ce qui est en contradiction avec l'effet *Baushinger*.

Une loi d'écrouissage cinématique suppose que, durant les déformations plastiques, la surface de charge subséquente se déplace en translation sans rotation comme une surface rigide dans l'espace de Haigh - Westergaard, maintenant la taille, la forme et l'orientation de

la surface initiale. Cette loi due à Prager (1955) provient d'une simple interprétation de l'effet Baushinger.

Si la surface de charge initiale s'écrit de la forme (4.59), alors l'équation de la surface limite subséquente s'écrit :

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0$$

où $k = \text{constante}$ et α_{ij} le tenseur relatif au vecteur translation dans l'espace de Haigh-Westergaard.

Une manière simple de déterminer le paramètre tensoriel α_{ij} est de considérer une dépendance linéaire entre l'incrément du tenseur de déformation $d\varepsilon_{ij}$ et l'incrément du tenseur $d\alpha_{ij}$ engendrant une incrémentation du vecteur translation.

$$d\alpha_{ij} = cd\varepsilon_{ij}^p$$

Cette hypothèse est connue comme loi d'écroissage de Prager.

Une loi d'écroissage mixte est une combinaison de l'écroissage isotrope et de l'écroissage cinématique. Cette combinaison conduit compte tenu des équations (4.60) et (4.62) à une équation de la forme suivante pour la surface de charge subséquente.

$$f(\sigma_{ij}, k) = F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2(\varepsilon_p) = 0$$

Dans ce cas la surface de charge subséquente garde son allure initiale. Avec le modèle mixte différents degrés de l'effet Baushinger peuvent être simulés par simple ajustement des paramètres d'écroissage α_{ij} et k .

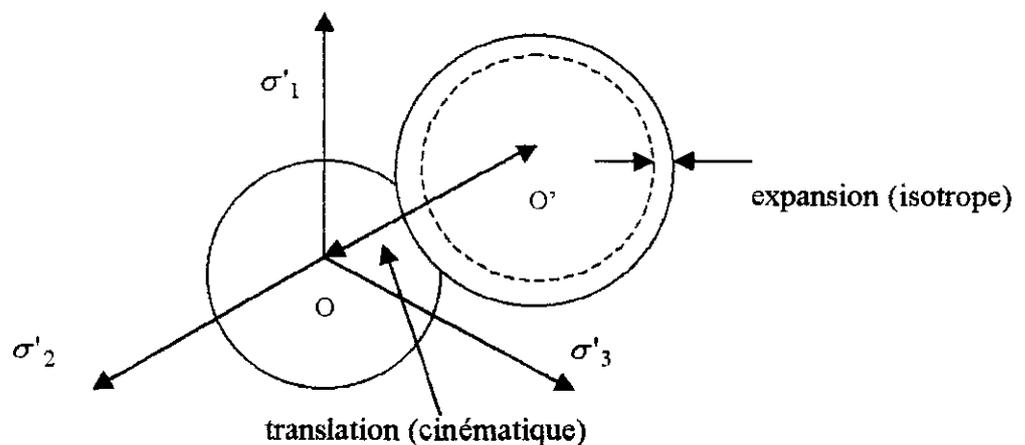


Figure 4.16 : Représentation du critère de Drucker-Prager avec écroissage mixte sur le plan π .

4.4 MODELES ELASTO-PLASTIQUES.

4.4.1 Modèle élasto-plastique parfait

Pour le modèle élasto-plastique parfait l'équation de la surface de charge s'écrit (4.59) :

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad k \text{ étant une constante} \quad (4.64)$$

ou bien en termes d'invariants (voir § 4.2.1b)

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (4.65)$$

L'incrément de déformation élastique lorsque la le tenseur contrainte est représenté par un point à l'intérieur de la surface de charge (état élastique $f(\sigma_{ij}) < 0$) est donné par (4.18), soit :

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{9K} I_1 d\delta_{ij} + \frac{1}{2G} ds_{ij} \quad (4.66)$$

Lorsque ce tenseur est représenté par un point sur la surface de charge (état plastique $f(\sigma_{ij}) = 0$), l'incrément de déformation est :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (4.67)$$

où $d\varepsilon_{ij}^e$ est l'incrément de déformation élastique donné par (4.66)

$d\varepsilon_{ij}^p$ est l'incrément de déformation plastique donné par la loi d'écoulement laquelle s'écrit :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.68)$$

Où q est une fonction potentielle plastique.
 $d\lambda$ est une fonction scalaire non négative.

Si $q = f$ c'est à dire que l'on prend pour la fonction potentielle plastique la fonction de charge alors la loi d'écoulement est dite associée au critère qui définit cette fonction de charge. Dans les cas contraires, la loi d'écoulement est dite non-associative.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \begin{cases} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & \text{si } f(\sigma_{ij}) = 0 \\ 0 & \text{si } f(\sigma_{ij}) < 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

Le modèle élasto-plastique parfait sera plus amplement détaillé au prochain chapitre 5.

La considération de la fonction de charge, de la loi d'écoulement et des relations contraintes – déformations en élasticité d'une part et de la condition de consistance :

$df(\sigma_{ij}) = 0$. permet d'aboutir à une relation contrainte déformation en élasto-plasticité de la forme générale.

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{r ep} d\epsilon_{kl} \quad (4.70)$$

$$C_{ijkl}^{r ep} = C_{ijkl}^r + C_{ijkl}^{r P} \quad (4.71)$$

Où C_{ijkl}^r est le tenseur relation contrainte-déformation élastique et $C_{ijkl}^{r P}$ est le tenseur relation contrainte-déformation plastique dépendant essentiellement du critère considéré.

4.4.2 Modèle élasto-plastique avec écoulement.

Pour un comportement uniaxial, les concepts de 'chargement' et 'déchargement' sont évident. Mais ce n'est pas le cas d'un état de contrainte multi-axiale où ces concepts doivent être clairement spécifiés.

Un écoulement plastique se produit dès que le point représentatif du tenseur contrainte parvient sur la surface de charge. Une incrémentation du tenseur $d\sigma_{ij}$ contrainte peut être représentée par un vecteur $\{d\sigma\}$.

$$\{d\sigma\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{xz} \\ d\tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\sigma_{12} \\ d\sigma_{13} \\ d\sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

Il en de même pour $\{d\epsilon\}$ vecteur représentatif du tenseur déformation. Pour un chargement a partir de ce point le vecteur est forcément orienté vers l'extérieur de la surface de charge et en même temps la surface de charge se transforme (écrouissage), pour un déchargement vers l'intérieur de la surface de charge(retour en élasticité), pour un chargement dit neutre il reste tangent à la surface de charge(pas d'écrouissage).

Soit $\{n\}$ un vecteur unitaire normal à la surface de charge considéré au point précédent. Alors :

$$\{n\} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}}} \quad (4.73)$$

Donc suivant la valeur du produit scalaire $\{d\sigma\} \{n\}$ on aura :

$$\{d\sigma\} \{n\} > 0 \quad \text{chargement} \quad (4.74a)$$

$$\{d\sigma\} \{n\} < 0 \quad \text{déchargement} \quad (4.74b)$$

$$\{d\sigma\} \{n\} = 0 \quad \text{chargement neutre (pas d'écrouissage)} \quad (4.74c)$$

La surface de charge subséquente est donnée dans le cas général par (4.63).

La loi d'écoulement s'écrit comme précédemment sous la forme (4.68) ou (4.69) dans le cas d'une loi associative avec la fonction potentielle dépendant non seulement de l'état de contrainte atteint mais aussi du niveau de déformation plastique développée et de la forme de la surface de charge subséquente.

La vérification du postulat de postulat Drucker (voir 4.2.2d) qui assure l'unicité de la réponse nécessite

- Que la surface de charge soit convexe .
- Que l'incrément de déformation plastique soit normal à la surface de charge. Ceci est implicitement vérifié par la forme de la loi d'écoulement.
- L'incrément de déformation plastique doit être linéaire lors d'un incrément de contrainte. Ceci implique que la loi d'écoulement s'écrive sous la forme

$$d\varepsilon_{ij}^p = \bar{G} df \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.75)$$

pour une loi associative. Où \bar{G} est une fonction scalaire qui peut dépendre de l'état de contrainte, de l'état de déformation, de l'histoire du chargement mais qui doit être indépendante de l'incrément du tenseur de contrainte $d\sigma_{ij}$.

- Que la condition de continuité soit vérifiée c'est à dire que pour tout chargement neutre il n'y ait pas de déformation plastique. Ceci est implicitement vérifié par (4.75) car si $df=0$ alors $d\varepsilon_{ij}^p = 0$.

La condition de consistance s'écrit ici :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (4.76)$$

Cette condition, avec la loi d'écrouissage, la loi d'écoulement, les relations contraintes déformations élastiques permettent d'obtenir la relation contrainte-déformation en cas de chargement ou chargement neutre :

$$C_{ijkl}^{r\ ep} = C_{ijkl}^r + C_{ijkl}^{r\ p} \quad (4.77)$$

avec

$$C_{ijkl}^{r\ p} = -\frac{1}{h} H_{kl}^* H_{ij}^* \quad (4.78)$$

qui représente la dégradation de la rigidité qui est due à l'écoulement, C_{ijkl}^r représentant le tenseur relation contrainte-déformation élastique.

$$d\varepsilon_p = c \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad \text{est la contrainte effective définie en (4.3.3)} \quad (4.79)$$

$$h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^r \frac{\partial q}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_p} c \sqrt{\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (4.80)$$

$$H_{kl}^* = \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \quad (4.81)$$

et le signe de $\{d\sigma\}\{n\}$ précisant si on est dans une situation de chargement ou chargement neutre ou déchargement est donné par le signe de L avec :

$$L = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^r d\varepsilon_{kl} \quad (4.82)$$

4.4.3 Modèle de Cam-Clay

Cam-Clay est le nom donné à un modèle de comportement élasto-plastique du sol. Ce modèle est souvent choisi pour décrire le comportement d'un sol moyennant un choix adéquat des paramètres.

L'état de contrainte en point peut être représenté par les paramètres (p', q, v) , souvent utilisé pour les essais triaxiaux, définis de la façon suivante :

$p' = p - u$ Où u est la pression interstitielle et $p = \frac{(\sigma_1 + 2\sigma_3)}{3}$ pour un essai triaxial, p étant la contrainte moyenne, sphérique.

$$q = \max(\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{est le déviateur maximal.} \quad (4.83)$$

$v = 1 + e$ est un paramètre sans dimension où e représente l'indice des vides.

Correspondant à ces variables en contraintes on a en déformation :

$$\begin{aligned} v &= \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 \\ \varepsilon &= 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / 3 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Ces variables sont très utiles pour exprimer l'incrément du travail, soit

$$dW = p' dv + q d\varepsilon \quad (4.85)$$

Dans le repère (p', q, v) la variation de l'état de contrainte en ce point ou plus précisément le chemin de contrainte est représenté par une série de point.

En plus de ces paramètres permettant de définir l'état de contrainte dans le sol, nous avons les paramètres constants $M, \Gamma, \kappa, \lambda$ qui sont des caractéristiques du sol, où M, Γ sont les paramètres relatifs à l'état critique du sol et κ, λ sont relatifs au comportement du sol dans le repère (p', v) .

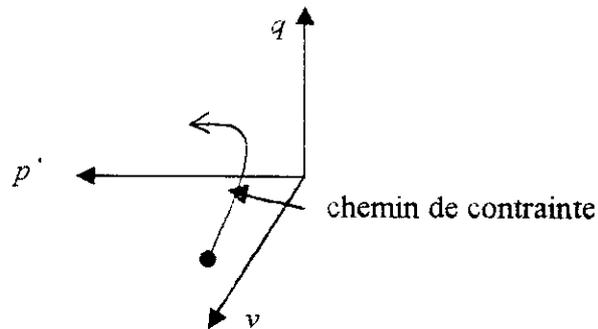


Figure 4.17 : Repère (p', q, v) : chemin de contrainte

Une courbe classique chargement-déchargement en compression isotrope du sol est représenté sur la figure (4.18 a et b)

Ces courbes caractéristiques se traduisent par les relations :

$$v = N - \lambda \text{Log}(p') \quad (4.86)$$

sur la ligne de pente λ (pour un sol de consolidation normale)

$$v = v_{\kappa} - \kappa \text{Log}(p') \quad (4.87)$$

sur la ligne de pente κ (pour un sol sur consolidé)

La valeur de v_{κ} dépend du niveau de consolidation du sol.

N étant un paramètre pour un chemin de contrainte isotrope. Pour un chemin de contrainte quelconque on prend en place v_{λ} (4.86) devient alors :

$$(4.88) \quad v = v_{\lambda} - \lambda \text{Log}(p')$$

Si v_{κ} et v_{λ} sont connus, on peut alors reconstituer la courbe (4.24b). Ils peuvent alors être considérés comme des paramètres du sol.

La ligne d'état critique (CLS) est le lieu des points représentatifs des états de contraintes critiques (figure 4.19). Ces états sont atteints lorsque toute augmentation du cisaillement n'engendre plus de déformation volumique. En projection sur les plans (p', q) et (p', v) les équations de cette ligne sont.

$$q = Mp' \quad \text{où } M \text{ est constant.} \quad (4.89)$$

$$v = \Gamma - \lambda \text{Log } p' \quad \text{où } \Gamma \text{ est constant.} \quad (4.90)$$

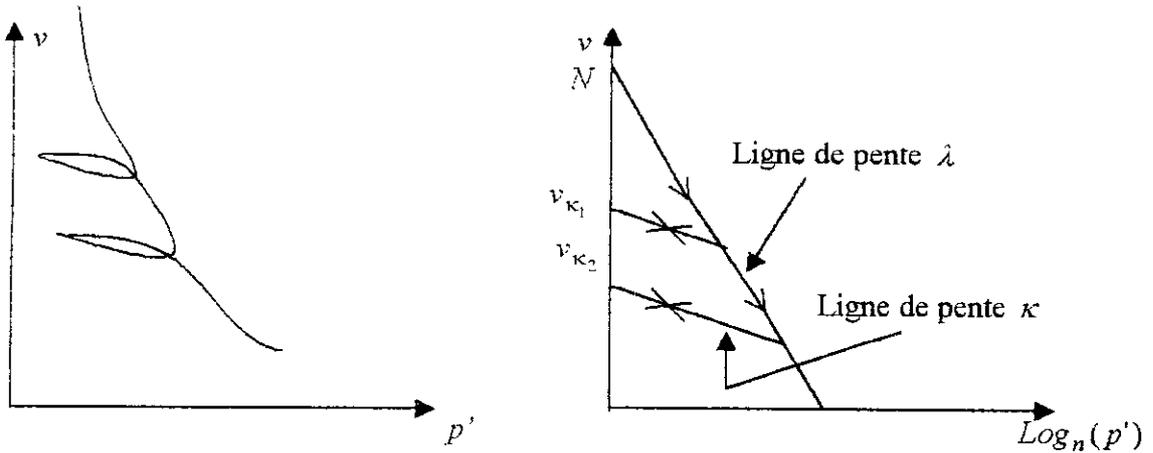


Figure 4.18 a et b : Courbe classique d'une consolidation isotrope chargement-déchargement.

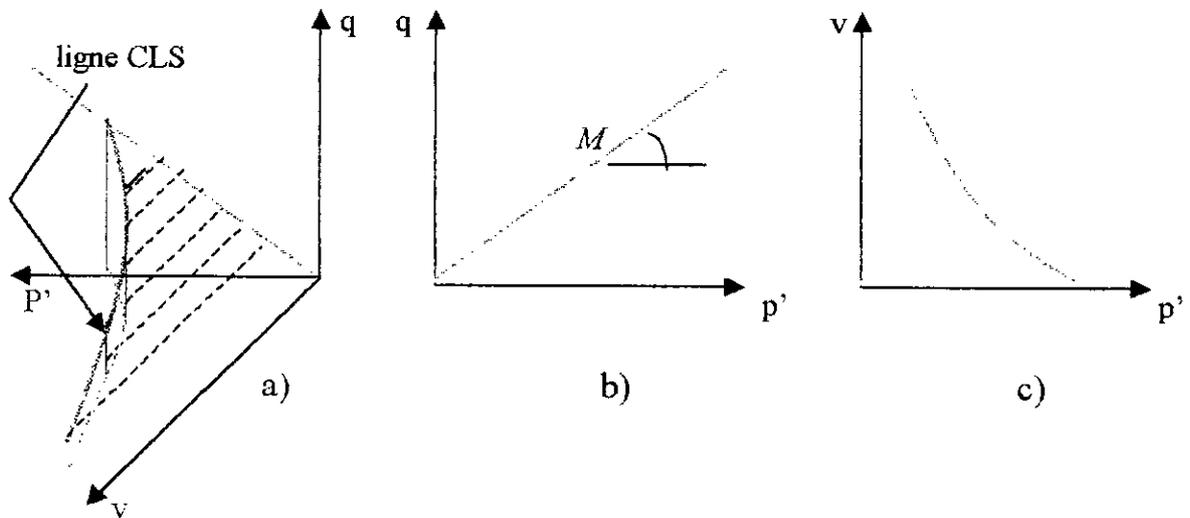


Figure 4.19 : a) ligne d'états critiques, b) projection sur (p', q), c) projection sur (p', v)

Le modèle de Cam-clay est basé sur les hypothèses suivantes résultantes d'observations expérimentales:

1) La ligne de consolidation normale isotrope pour un sol est donnée par l'équation :

$$v = \Gamma + \lambda - \kappa - \lambda \text{Log} p'$$

et une décompression et recompression par (4.87).

2) la déformation volumique élastique est donnée par la ligne de pente κ . Les déformations élastiques dues aux cisaillements sont nulles.

3) Lorsque l'écroûissage se produit, le travail plastique est donné par $Mp' d\varepsilon^P$

4) Le vecteur déformation incrémental plastique est normal à la surface de charge.

5) les tailles des courbes des points d'écroûissages sont fixées en spécifiant que l'intersection de ces courbes avec l'axe p' correspond à la ligne de consolidation normale isotrope.

Les hypothèses 3) et 4) permettent de formuler l'équation de la surface de charge, l'hypothèse 3) correspondant à la loi d'écoulement.

et l'hypothèse 3) donnent

$$p' \delta v^P + q \delta \varepsilon^P = m p' \delta \varepsilon^P \quad \text{soit en réarrangeant} \quad (4.91)$$

$$\frac{\delta v^P}{\delta \varepsilon^P} = M - \frac{q}{p'} = M - \eta \quad (4.92)$$

l'hypothèse 4) s'écrit :

$$\frac{\delta \varepsilon^P}{\delta v^P} \frac{\partial q}{\partial p'} = -1 \quad \text{qui exprime que la direction du vecteur déformation incrémental plastique}$$

est perpendiculaire à la tangente de la courbe des points d'écroûissage.

En combinant avec (4.92) et (4.93) devient :

$$\frac{dq}{dp'} = -M + \frac{q}{p'} \quad (4.94)$$

comme $\eta = \frac{q}{p'}$ alors $\frac{d\eta}{dp'} = (p' \frac{dq}{dp'} - q)/(p'^2)$ par suit (4.94) devient :

$$p' \frac{d\eta}{dp'} = -M \quad (4.95)$$

l'intégration de (4.95) donne compte tenu de l'hypothèse 5):

$$q = M p' \text{Log}\left(\frac{p_c'}{p'}\right)$$

La représentation de cette équation de la courbe des points d'écroûissage est faite sur la figure 4.20b

Pour un sol ayant atteint la valeur p' l'équation donnant v pour la situation en cours s'obtient à partir de l'hypothèse 1) en remarquant :

$v = v'_c + \kappa \text{Log}\left(\frac{p'_c}{p'}\right)$ où v'_c est la valeur de v correspondant à p'_c sur la ligne de pente κ issue de la valeur de v correspondant à p' .

Soit compte tenu de l'hypothèse 1)

$$v = \Gamma - \lambda - \kappa - \lambda \text{Log}(p'_c) + \kappa \text{Log}\left(\frac{p'_c}{p'}\right) \quad (4.98)$$

Soit en éliminant p'_c entre les équations (4.98) et (4.95) on obtient

$$q = \frac{Mp'}{(\lambda - \kappa)} (\Gamma - \lambda - \kappa - V - \lambda \text{Log}(p')) \quad (4.99)$$

Cette équation est l'équation de la surface des points d'écroûssages. Il n'y a pas en dehors de cette surface d'états de contrainte possible. On la nomme surface d'état limite stable SSBS (stable state boundary surface), figure 4.20. Une autre écriture de (4.99) est :

$$v_\lambda = \Gamma + (\lambda - \kappa)(1 - \eta/M) \quad (4.100)$$

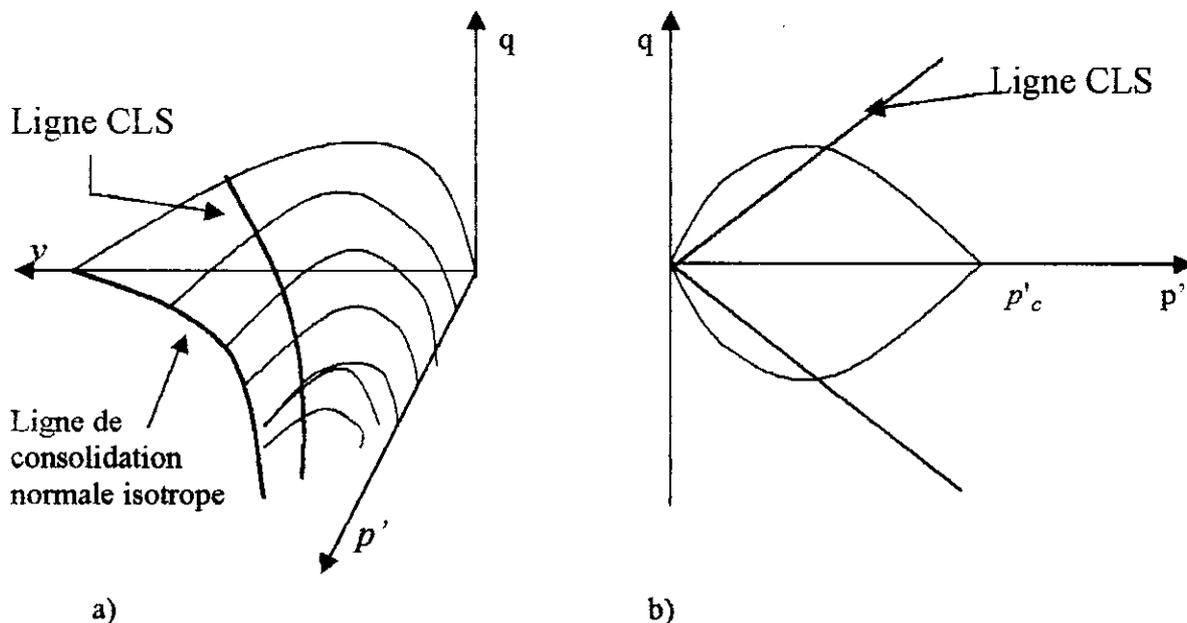


Figure 4.20 : a) La SSBS : modèle de Cam-Clay, b) courbe des points d'écroûssage.

4.4.5 Modèle de Cam-Clay modifié.

Le modèle modifié de Cam-Clay reconsidère l'hypothèse 3) du modèle original et la reformule de telle sorte que la courbe des points d'érouissage soit parfaitement elliptique (figure 4.1)

Dans ce cas l'hypothèse trois sur l'expression du travail plastique est :

$$dW = p' \sqrt{\delta v^{p^2} + (M \delta \varepsilon^P)^2} \quad (4.101)$$

par suite comme précédemment la loi d'écoulement devient :

$$\frac{\delta v^P}{\delta \varepsilon^P} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (4.102)$$

et par un développement semblable au cas précédent on obtient la courbe des points d'érouissage (figure 4.21) d'équation :

$$q^2 + M^2 p'^2 = M^2 p' p'_c \quad (4.103)$$

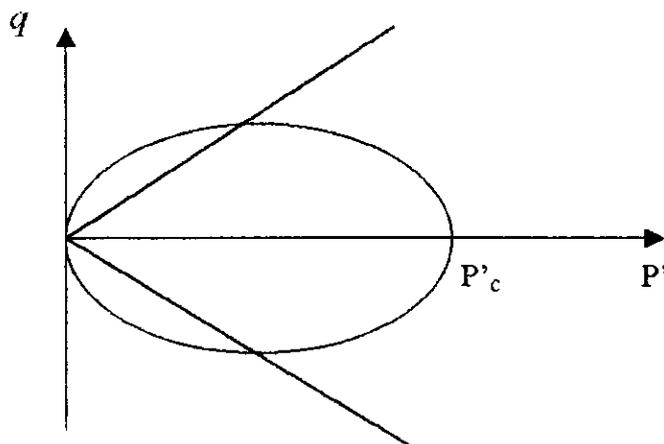


Figure 4.20 : Cam-Clay modifié : courbe des points d'érouissage

L'équation de la surface de la SSBS est alors :

$$v_\lambda = \Gamma + (\lambda - \kappa) \left(\text{Log}(2) - \text{Log}\left(1 + \left(\frac{\eta}{M}\right)^2\right) \right) \quad (4.104)$$

Ce modèle d'après *Wroth et Houlsby* (réf.60, 1985) semble reproduire avec succès dans de nombreux cas, la plupart des caractéristiques de déformation des argiles et exprimé en terme de contrainte effective de prédire les pressions interstitielles pour les argiles non-drainées .

D'autres modèles similaires au Cam-Clay ont été développés. Aux U.S.A. ces modèles sont appelés 'Cap models'. Tous sont basés sur les concepts du Cam-Clay. Cependant il y a

plusieurs variations entre eux, du fait que le modèle du Cam-Clay sous estime les déformations dues aux cisaillements et que les modèles qui ont suivi ont surtout tenté par divers moyens de remédier à cet inconvénient.

4.4.6 Les modèles Endochroniques.

L'idée fondamentale de cette théorie est l'introduction d'un 'temps intrinsèque' ζ , (d'où le nom de ce modèle), continuellement croissant, lié au tenseur déformation et défini par :

$$d\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} de_{ij} de_{ij}} = \sqrt{J'_2} \quad (4.105)$$

où e_{ij} représente un élément du tenseur déviatorique, et J'_2 est le deuxième invariant de ce tenseur (voir 4.2.1b).

Compte tenu de (4.47), on peut considérer à un coefficient près que $d\zeta$ représente la longueur de la projection sur le plan déviatoire, perpendiculaire à la trisectrice de l'espace des déformations incrémentales principales. Par suite ζ peut s'interpréter comme une fonction de la longueur du chemin suivi en projection sur le plan déviatoire de l'espace des déformations principales.

ζ est donc évidemment une fonction toujours croissante du temps et est introduit dans la formulation classique des lois visco-élastiques, qui se transforme alors en une relation constitutive pour matériau non visqueux .

Pour une formulation visco-élastique la relation s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}^r \sigma_{kl} + d_{ij} dt \quad (4.106)$$

Pour une formulation endochronique non - visqueuse la relation s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}^r \sigma_{kl} + d_{ij} d\zeta \quad (4.107)$$

Où D_{ijkl}^r est le tenseur élastique relation déformation-contrainte choisie isotrope, et fonction de la contrainte moyenne $P = \frac{I_1}{3}$. Son expression est formellement identique au tenseur de la loi de Hooke .

Le module de cisaillement G est pris égal à

$$G = g(e) \sqrt{p} \quad (4.108)$$

pour G en KN/m^2 . On peut prendre comme proposé par Darve (réf.15, 1984) :

$$g(e) = 6909 \frac{(.17 - e)^2}{1 + e} \quad (4.109)$$

Le module élastique E isotrope se déduit de G par (4.11), en prenant un coefficient de Poisson de 0.33.

Le tenseur d_{ij} est tel que sa partie déviatoire d_{ij}^d :

$$d_{ij}^d = \frac{s_{ij} - \alpha_{ij}}{2G} F_1 \quad (4.110)$$

Où s_{ij} est le tenseur contrainte déviatorique (voir 4.2.1) et α_{ij} est le paramètre tensoriel de l'érouissage cinématique, α_0 étant sa valeur initiale. La surface de charge étant la surface d'équation :

$$\frac{1}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ji} - \alpha_{ji}) + K_1(p - \alpha_0) - H_1 = 0 \quad (4.111)$$

Avec $K_1 = \frac{2G(F_2 - F_3)}{F_1}$ où F_1, F_2, F_3 sont trois fonctions scalaires qui dépendent analytiquement de l'indice des vides, de ζ , de certains invariants des états de contraintes et de déformations. Et H_1 est un paramètre qui définit la taille initiale de surface de charge.

4.5 LES MODELES VISCOPLASTIQUES.

La viscoplasticité a été introduite par des chercheurs pour décrire le comportement des matériaux pour lesquels les déformations plastiques se développent dans le temps, ce qui correspond à une plasticité étalée dans le temps contrairement à l'élasto-plasticité pour laquelle les déformations sont instantanées.

Rhéologiquement un tel comportement est schématisé par la figure (4.21) Composé d'un ressort en série avec deux amortisseurs en parallèle dont un de frottement et un autre visqueux. Le ressort donne la déformation élastique et les amortisseurs engendrent une déformation visqueuse que lorsqu'une certaine limite est dépassée.

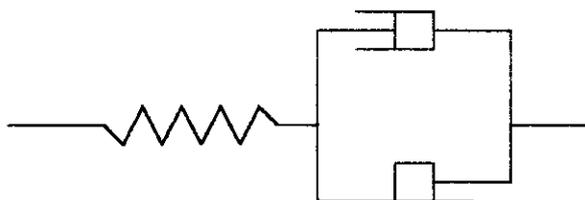


Figure 4.21 : Modèle rhéologique élasto-viscoplastique.

4.5.1 Les modèles Rigides-Viscoplastiques.

Dans un modèle rigide-viscoplastique, le matériau se comporte de façon rigide sans développer de déformation jusqu'à ce qu'une certaine limite en contrainte soit atteinte au-delà de laquelle la réponse est de nature visqueuse.

Pour un tel modèle, les relations contraintes – déformations s'écrivent :

$$s_{ij} = \frac{\delta e_{ij}}{2\lambda} + 2\eta\delta e_{ij} \quad (4.112)$$

Où s_{ij} est le tenseur déviatorique et δe_{ij} est le tenseur incrémental déviatorique de déformation, η est le coefficient de viscosité et λ un scalaire multiplicatif.

Si on considère par exemple le Critère de Von-Mises, celui ci s'écrit : $J_2 = k^2$ où J_2 est le deuxième invariant du tenseur déviatorique $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$.

(4.112) peut se mettre sous la forme :

$$s_{ij} = \left(\frac{1}{2\lambda} + 2\eta\right)\delta e_{ij} = 2\eta'\delta e_{ij} \quad (4.113)$$

Et en introduisant le second invariant J_2 :

$$2\eta' = 2\eta\left(1 + \frac{k}{2\eta\sqrt{J_2^*}}\right) = \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_2^*}} = \frac{2\eta}{1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}} \quad (4.114)$$

où $J_2^* = \frac{1}{2}\delta e_{ij}\delta e_{ij}$ est le deuxième invariant du tenseur déviatorique incrémentale de déformation où les indices prime et étoile se rapportent respectivement à la déformation et à l'incrémental.

Généralement $\eta' > \eta$ et $\eta' = \eta$ que lorsque $\sqrt{J_2} \rightarrow \infty$. De (4.114) on peut réécrire la relation contrainte déformation sous la forme :

$$s_{ij} = \frac{2\eta}{1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}} \quad \text{si } J_2 > k^2 \quad (4.115)$$

Par conséquent le travail incrémental durant la déformation plastique est :

$$dW = s_{ij}\delta e_{ij} = 2k\sqrt{J_2^*} + 4\eta J_2^* \quad (4.116)$$

Il s'ensuit que $dW > 0$ mais cependant lorsque $\sqrt{J_2} \rightarrow k^2$, $dW = 0$.

Le volume demeure incompressible durant la déformation ($\delta\varepsilon_{ii} = 0$). Pour $J_2 \leq k^2$ le corps est rigide.

4.5.2 Les modèles élasto-viscoplastiques.

Dans un modèle élasto-viscoplastique, le comportement du matériau est élastique tant qu'une certaine limite de contrainte n'a pas été dépassée. Au-delà de cette limite la réponse est visqueuse.

La relation contrainte déformation dans ce cas se compose d'une réponse élastique et d'une réponse viscoplastique. Soit :

$$\delta e_{ij} = \delta e_{ij}^e + \delta e_{ij}^{vp} \quad (4.117)$$

où le terme élastique δe_{ij}^e de la déformation incrémentale totale δe_{ij} est donné par la composante déviatorique de la relation contrainte-déformation en élasticité (4.19) et la partie viscoplastique δe_{ij}^{vp} par (4.113) soit :

$$\delta e_{ij} = \frac{\delta s_{ij}}{2G} + \frac{2\lambda}{1+4\eta} s_{ij} \quad (4.118)$$

Si par exemple on considère le critère de Von- Mises alors on peut remplacer la partie viscoplastique par (4.115), soit :

$$\delta e_{ij} = \begin{cases} \frac{\delta s_{ij}}{2G} + \frac{1}{2\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}\right) s_{ij} & \text{si } J_2 > k^2 \\ \frac{\delta s_{ij}}{2G} & \text{si } J_2 \leq k^2 \end{cases} \quad (4.119)$$

La déformation élastique volumique est donnée par $\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{kk}}{3K}$

Ce modèle peut être considéré comme une modification du modèle de Prandtl-Reuss pour introduire l'effet de la viscosité du matériau.

La condition de chargement peut être définie à partir des incréments de travaux $\delta W = \delta W^e + \delta W^{vp}$ où de gauche à droite on a respectivement les incréments de travaux totaux, élastiques, viscoplastiques, puisque :

$$\delta W = s_{ij} \delta e_{ij} = s_{ij} \delta e_{ij}^e + s_{ij} \delta e_{ij}^{vp} \quad \text{Soit en utilisant (4.119)}$$

$$\delta W = \frac{1}{2G} \left(\delta J_2 + 2 \frac{G}{\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}\right) J_2 \right) \quad (4.120)$$

Ou $\delta J_2 = s_{ij} \delta s_{ij}$. Par suite :

$$\delta W^e = \frac{1}{2G} \delta J_2 \quad \text{et} \quad \delta W^{vp} = \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}\right) J_2 \quad (4.121)$$

On remarque que $\delta W^{vp} > 0$ si $J_2 > k^2$.

On a chargement lorsque $\delta W > 0$ et $\delta W^{vp} > 0$. Suivant les valeurs de δW^e ou de δJ_2 on distingue :

le chargement total

Dans ce cas, $\delta J_2 > 0$ soit $\delta W^e > 0$ et $\delta W^{vp} > 0$.

Le chargement neutre.

Dans ce cas, $\delta J_2 = 0$ soit $\delta W^e = 0$ et $\delta W^{vp} > 0$.

le chargement partiel

si $\delta J_2 < 0$ et $\delta W = 0$. Soit $\delta W^{vp} = -\delta W^e$.

Dans ce cas, on a une relaxation pure

Le quasi-déchargement.

si $\delta J_2 < 0$ et $\delta W < 0$. Soit $\delta W^{vp} < -\delta W^e$.

Durant la relaxation à un niveau de déformation constante on a $\delta W = 0$. (4.120) donne pour un incrément l'équation :

$$\delta J_2 + 2 \frac{G}{\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}\right) J_2 = 0 \quad (4.122)$$

dont la solution est :

$$\sqrt{J_2}(t) = k + (\sqrt{J_2^0} - k) \exp\left(-\frac{G}{\eta}(t-t_0)\right) \text{ où } \sqrt{J_2^0} = \sqrt{J_2}(t_0) \quad (4.123)$$

et t_0 est le temps pris comme instant de référence à partir duquel le phénomène de relaxation débute.

De cette expression on constate que lorsque $t \rightarrow \infty$, le déviateur de contraintes se relaxe vers un point de la surface de chargement.

Perzyna (1963) a introduit plusieurs paramètres dans le modèle visco-plastique pour inclure les effets de l'écroutissage. Il a proposé une relation contrainte-déformation de la forme :

$$\delta e_{ij} = \begin{cases} \frac{\delta s_{ij}}{2G} + \gamma \phi(f) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} & \text{si } f > 0 \\ \frac{\delta s_{ij}}{2G} & \text{si } f \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta \varepsilon_{ii} = \frac{\delta \sigma_{ii}}{3K} \quad (4.124)$$

Où $f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \frac{g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)}{\bar{k}} - 1$ est la fonction de charge statique et g une fonction dépendant de l'état de contrainte et de l'état de déformation en cours et \bar{k} est le paramètre d'écrouissage (isotrope).

Ici l'incrément de déformation plastique est :

$$\delta e_{ij}^p = \gamma \phi(f) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{par suite} \quad (4.125)$$

$$\delta e_{ij}^p \delta e_{ij}^p = \gamma^2 (\phi(f) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}})^2 = 2J_2^{*P} \quad (4.126)$$

où J_2^{*P} est le deuxième invariant du tenseur déviatorique incrémentale de déformation plastique. Soit :

$$\phi(f) = \frac{2J_2^{*P}}{\gamma^2 \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} \quad \text{et alors} \quad (4.127)$$

$$f = \phi^{-1} \left(2J_2^{*P} / \left(\gamma^2 \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad \text{d'où}$$

$$g = \bar{k} \left(1 + \phi^{-1} \left(2J_2^{*P} / \left(\gamma^2 \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \quad (4.128)$$

pour $\phi(f)$ Perzyna propose plusieurs formes :

$$\phi(f) = f^\delta, \quad \phi(f) = f, \quad \phi(f) = \exp f - 1, \quad \phi(f) = \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha (\exp f^\alpha - 1), \quad \phi(f) = \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha f^\alpha$$

Hohenemer et Prager ont proposé une relation contrainte de la forme :

$$\delta e_{ij} = \gamma f_M \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{J_2} = k_0 \left(1 + \frac{J_2^{*P}}{\gamma} \right) \quad \text{où } \gamma \text{ est une constante du matériau.}$$

$$f_M = \frac{\sqrt{J_2}}{k_0} - 1$$

Rosenblatt(1970) a généralisé le modèle précédent sous la forme :

$\delta e_{ij} = \gamma \phi(f) \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}$. Dans ce cas la condition de normalité n'est plus forcément vérifiée.

4.5.3 Les modèles élastiques-viscoplastiques.

Dans ces modèles tant qu'une certaine limite n'a pas été dépassée le comportement du matériau est élastique. Au-delà le matériau présente des déformations instantanées plastiques avec des déformations différées visqueuses. Dans ce cas l'incrément du tenseur de déformation total δe_{ij} est donné par :

$$\delta e_{ij} = \delta e_{ij}^e + \delta e_{ij}^p + \delta e_{ij}^{vp} \quad (4.129)$$

où $\delta e_{ij}^e, \delta e_{ij}^p, \delta e_{ij}^{vp}$ sont respectivement les incréments des tenseurs déformations élastiques, plastiques, viscoplastiques.

Yannis F. Dafalias (réf.14, 1982) ont proposé des relations de la forme :

$$\delta e_{ij} = C_{ijkl}^r \delta \sigma_{kl} + P \left(\frac{1}{k_p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + P(\phi(\Delta \hat{\sigma})) R_{ij}^v \quad (4.130)$$

où p est défini de telle sorte que $P(X) = \begin{cases} X & \text{pour } X > 0 \\ 0 & \text{pour } X \leq 0 \end{cases}$

C_{ijkl}^r est le tenseur contrainte-déformation élastique.

$g(\sigma_{ij}, q_n^p) = 0$ est l'équation de la surface d'érouissage.

$\delta q_n^p = P \left(\frac{1}{k_p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} \right) r_n^p$ avec $k_p = - \frac{\partial g}{\partial q_n^p} r_n^p$ est le module plastique et r_n^p est une

fonction de l'état. $k_p > 0$ correspond aux états stables et $k_p < 0$ aux états instables.

$\Delta \hat{\sigma}$ est l'excédent de contrainte.

$R_{ij}^v = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ où $f(\bar{\sigma}_{ij}, q_n^p) = 0$ est la fonction de charge et avec la notation bar signifiant

pour les points sur la surface de charge et l'état de contrainte en cours étant dans ou sur cette surface de charge.

4.5.4 Les modèles viscoélastiques –plastiques

Dans ce type de modèle (réf.36, 1963), le tenseur de déformation déviatorique totale est la somme d'une composante viscoélastique et d'une composante plastique, soit :

$$\delta e_{ij} = \delta e_{ij}^{vp} + \delta e_{ij}^e \quad (4.131)$$

Où $\delta e_{ij}^{ve}, \delta e_{ij}^p$ sont respectivement les incréments des tenseurs déviatoriques de déformations viscoélastiques et plastiques.

La composante viscoélastique suit la loi de fluctuation classique de la théorie de viscoélasticité linéaire soit de la forme suivante :

$$e_{ij}^{ve}(t) = s_{ij}^0(x)F_1(t) + \int_0^t F_1(t-\tau) \frac{\partial s_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.132)$$

$$\varepsilon_{kk}^{ve}(t) = \sigma_{kk}^0(x)F_2(t) + \int_0^t F_2(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.133)$$

Où F_1, F_2 sont respectivement les fonctions de fluctuations en cisaillement et en compression ou dilatation l'indice supérieur zéro signifiant à $t=0$.

La réponse initiale du solide viscoélastique linéaire est supposée élastique soit :

$$e_{ij}^e = e_{ij}^{ve}(0) = \frac{s_{ij}}{2G} \quad (4.134)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{kk}^{ve}(0) = \frac{\sigma_{kk}}{3K} \quad (4.135)$$

Soit la fonction de charge $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_{ij}, \kappa_{ij})$, où χ_{ij}, κ_{ij} représente respectivement les effets de l'érouissage dus à l'histoire temporelle et l'effet de l'érouissage dû à l'histoire du chemin suivi.

On définit la fonctionnelle $\chi_{ij} = \chi_{ij}(\varepsilon_{kl}^v - \varepsilon_{kl}^e)$ et $\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p(\sigma_{kl}, \chi_{mn}, \kappa_{pq})$ où ε_{kl}^v représente le tenseur de déformation dépendant du temps et ε_{kl}^e le tenseur déformation élastique.

L'incrément de la fonction de charge pendant un incrément de temps est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} d\chi_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \kappa_{ij}} d\kappa_{ij} \quad (4.136)$$

les critères de chargement et déchargement sont les suivants :

$$\text{déchargement : } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} d\chi_{ij} < 0 \quad \text{et} \quad f < 0 \quad (4.137)$$

$$\text{chargement neutre : } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} d\chi_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad f = 0 \quad (4.138)$$

$$\text{chargement : } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} d\chi_{ij} > 0 \quad \text{et} \quad f = 0 \quad (4.139)$$

Pour obtenir la relation contrainte déformation plastique considérons par exemple la surface de charge de la forme plus simple $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi \quad (4.140)$$

avec la loi d'écoulement classique(4.69)

$$d\varepsilon_{ij}^p = \begin{cases} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & \text{si } f = 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \quad (4.141)$$

substituons (4.141) dans (4.140) et résolvons pour $d\lambda$ alors on obtient :

$$d\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (4.142)$$

remplaçons $d\lambda$ par sa valeur dans (4.141), on obtient alors :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \begin{cases} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & \text{si } f = 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \quad (4.143)$$

4.6 LE MODELE HYPERBOLIQUE.

Considéré comme un hybride de la théorie de plasticité et de la théorie endochronique, la relation contrainte déformation hyperbolique à été initialement proposée par *Kondner* (réf28, 1963) et ses coéquipiers et reprise par *Duncan* (réf.19, 1970) pour modéliser une relation contrainte déformation non-linéaire dans le sol.

La relation contrainte-déformation est une hyperbole de la forme

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon_a}{a + b\varepsilon_a}$$

Où $(\sigma_1 - \sigma_3)$ est le déviateur maximal et ε_a est la déformation axiale, a et b sont des paramètres déterminés expérimentalement et seront clairement spécifiés au chapitre 5 suivant.

CHAPITRE 5

MODELES CONSIDERES

5.1 MODELE DE DUNCAN

5.1.1 Méthode incrémentale non-linéaire.

Une procédure incrémentale est utilisée pour faire une approximation successive des états de contraintes dans le sol et du comportement du sol celui-ci dépendant de l'histoire des contraintes. Pour chaque incrément de chargement, le comportement du sol est supposé linéaire, caractérisé soit par un coefficient d'élasticité E et le coefficient de poisson ν , ou bien par le coefficient de déformation volumique K et le module d'élasticité transversal G . Les valeurs des modules utilisés sont réévaluées pour chaque incrément de l'élément en chaque point d'intégration (points de Gauss ou autres suivant la procédure numérique utilisée) suivant :

- L'état de contrainte dans l'élément au point considéré.
- L'historique des contraintes de l'élément au point considéré.

La relation contrainte-déformation pour un matériel isotrope pour un problème de déformation plane s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{3K}{3K-E} \begin{bmatrix} 3K+E & 3K-E & 0 \\ 3K-E & 3K+E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Où $\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_y$ sont respectivement les incréments des contraintes normales sur les plans de normale Mx et de normale My et $\Delta\tau_{xy}$ la contrainte tangentielle sur l'un de ces plans. $\Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y$ sont respectivement les incréments des déformations longitudinales et $\Delta\gamma_{xy}$ de la distorsion en ce point.

5.1.2 Le modèle original.

Le modèle initial (1980) suppose que la courbe contrainte-déformation pour un sol pour une pression de confinement (σ_3) peut être approximé par une hyperbole (figure 5.1) . Cette hyperbole peut être représentée par une équation de la forme :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{E_i} - \frac{\varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}} \quad (5.2)$$

Où E_i est le module tangent initial et $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ est la valeur asymptotique du déviateur de contrainte. Cette valeur de l'asymptote surestime de façon sensible la valeur du déviateur à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rupt}$. On relie ces deux valeurs par un coefficient R_f suivant la relation :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rupt} = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (5.3)$$

La contrainte déviatorique à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rupt}$ est donnée par le critère de Mohr-Coulomb qui s'écrit :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rupt} = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (5.4)$$

Où c est la cohésion du sol et φ l'angle de frottement interne du sol.

Le modèle prend en compte une variation de l'angle de frottement interne φ avec la contrainte principale mineure σ_3 .

$$\varphi = \varphi_0 - \Delta\varphi \log_{10} \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right) \quad (5.5)$$

où φ_0 est la valeur du frottement interne à la pression de confinement à $\sigma_3 = P_a$

$\Delta\varphi$ est la réduction de φ pour une augmentation dans un rapport de 10 de σ_3 .

P_a est la pression atmosphérique.

La pente instantanée de la courbe hyperbolique figure (5.1a) est le module tangent E_t , lequel est fonction de la pression de confinement σ_3 et du niveau de contrainte SL qui peut être défini de la manière :

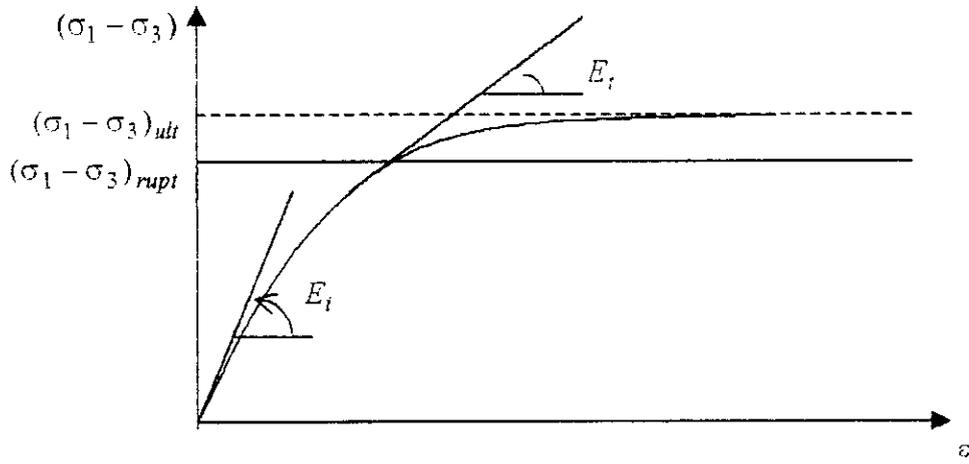
$$SL = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rupt}} \quad (5.6)$$

Si ce rapport tend vers zéro cela signifie que l'élément se trouve loin de la rupture et si ce rapport tend vers un cela signifie que l'on est proche de la rupture décrite par le critère de Mohr-Coulomb.

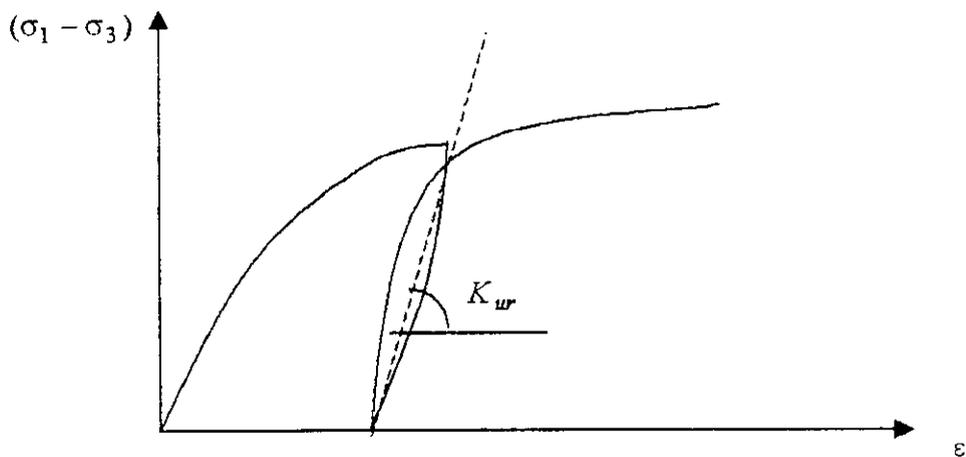
D'après l'équation de la courbe hyperbolique, la tangente en un point de la courbe après dérivation et arrangement est :

$$E_t = E_i \left(1 - R_f \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rupt}} \right)^2 \quad (5.7)$$

Duncan prend en considération l'influence de σ_3 sur la pente à l'origine pour l'incrément considéré et considère pour cette dernière une variation de la forme :



a) Courbe représentative de la relation hyperbolique : Chargement.



b) Courbe représentative de la relation hyperbolique : chargement-déchargement

Figure(5.1) Modèle hyperbolique de la relation contrainte-déformation.

$$E_t = K_{ch} P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n \tag{5.8}$$

Où K_{ch} et n sont des constantes du modèle pour un sol donné.

Finalement le module tangent s'écrit :

$$E_t = K_{ch} \cdot P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n (1 - R_f SL)^2 \quad (5.9)$$

Le module tangent modélisé par l'équation (5.9) croît avec une augmentation de la pression de confinement et décroît avec une augmentation du niveau de contrainte. Le modèle initial utilisait ce module tangent pour représenter le comportement du sol pour toutes situations parvenant à un niveau de contraintes égal ou supérieur à tous les niveaux de contraintes antérieurs.

Quand le niveau de contrainte en cours était inférieur au maximum des niveaux de contraintes antérieurs $SL < SL_{\max}^{passé}$, le modèle initial (1980) supposait que le sol n'était plus dans un état de chargement initial mais plutôt dans un état de déchargement – rechargement. Le module en déchargement – rechargement était considéré comme linéaire élastique (figure 5.1b). Le module de déchargement – rechargement était modélisé comme une fonction de la pression de confinement σ_3 seulement suivant la relation :

$$E_{ur} = K_{ur} \cdot P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (5.10)$$

Où K_{ur} est typiquement 1.2 à 3 fois plus grand que le module K_{ch} .

Le module de déformation volumique du sol est supposé être indépendant du niveau de contrainte et peut être exprimé comme une fonction de la pression de confinement σ_3 suivant la relation :

$$K = K_B \cdot P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^m \quad (5.11)$$

Où K_B et m sont des paramètres constants sans dimension. La modélisation du module de déformation ci-dessus comme étant indépendant du niveau de déformation résulte de la modélisation d'une augmentation du coefficient de Poisson ν avec une augmentation du niveau de contrainte car le module tangent décroît avec l'augmentation du niveau de contrainte, le coefficient de poisson pouvant s'exprimer sous la forme :

$$\nu = 1/2 - E_t / 6K \quad (5.12)$$

Le module de déformation volumique dans le modèle initial était à chaque incrément de temps contraint de telle sorte que :

$$\frac{E_t}{3} < K < 17E_t \quad (5.13)$$

Ce qui équivaut à contraindre le coefficient de poisson $0 < \nu < 0.49$.

Ensemble, le module E_t ou E_{ur} et le module de déformation volumique K définissent la relation contrainte déformation du matériau. Ce relativement simple et directe modèle hyperbolique peut être formulé et appliqué en terme de contrainte totale ou effective en utilisant des paramètres appropriés déterminés aux moyens d'essais triaxiaux.

5.1.3 Le modèle hyperbolique modifié.

Le modèle hyperbolique initial présenté en 6.2 pose deux problèmes sérieux relatifs aux déchargements-rechargements .

Le premier problème avec le modèle antérieur est que le critère simple basé sur le niveau de contrainte utilisé pour différencier un état de déchargement et un état de déchargement rechargement n'est pas très clair pour plusieurs raisons. La ligne de niveau de contrainte constant (figure 5.2a), d'après le modèle antérieur représente la division entre le chemin de chargement et celui de déchargement-rechargement en un point pour lequel le niveau de contrainte est maximal. Des investigations ont montré que le simple critère $SL < SL_{\max}^{passé}$ pour conclure qu'on est en déchargement rechargement doit être modifier pour tenir compte de la variation de la pression de confinement σ_3 ainsi que du niveau de contraintes. Le nouveau modèle proposé par Duncan(1984) fait alors la distinction entre chargement et déchargement-rechargement sur la base de l'état de contrainte défini par SS comme :

$$SS = SL \sqrt[4]{\frac{\sigma_3}{P_a}} \quad (5.14)$$

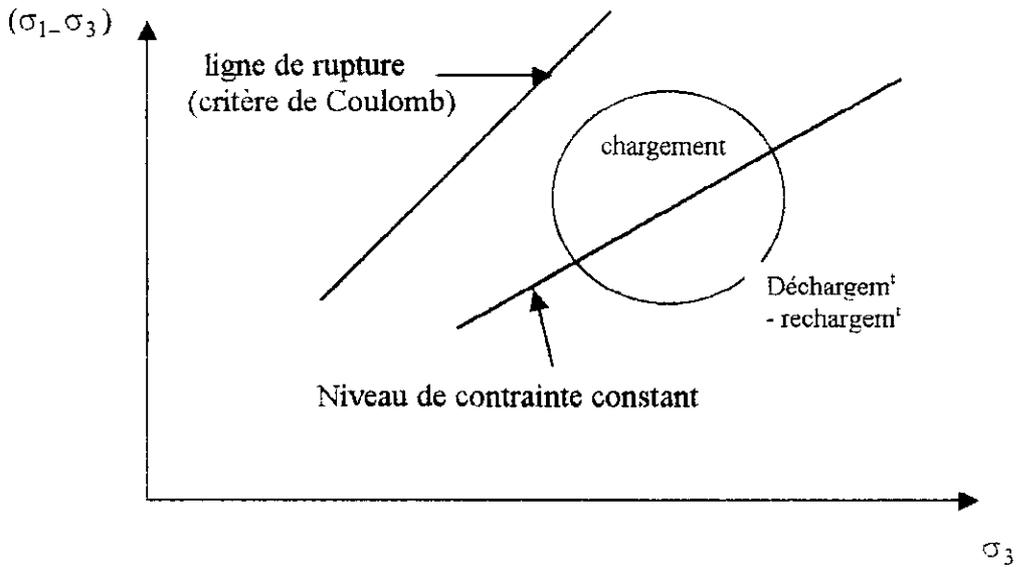
Le nouveau modèle suppose que le module tangent en chargement E_t est approprié quand l'état de contrainte est égal ou plus grand au maximum des états de contraintes antérieur, soit $SS \geq SS_{\max}^{passé}$, sinon on est en déchargement et alors le module approprié est E_{ur} . Sur la base de ce nouveau critère, le niveau de contrainte critique SL_{crit} au-delà duquel on se trouve en chargement est alors :

$$SL_{crit} = \frac{SS_{\max}^{passé}}{\sqrt[4]{\sigma_3 / P_a}} \quad (5.15)$$

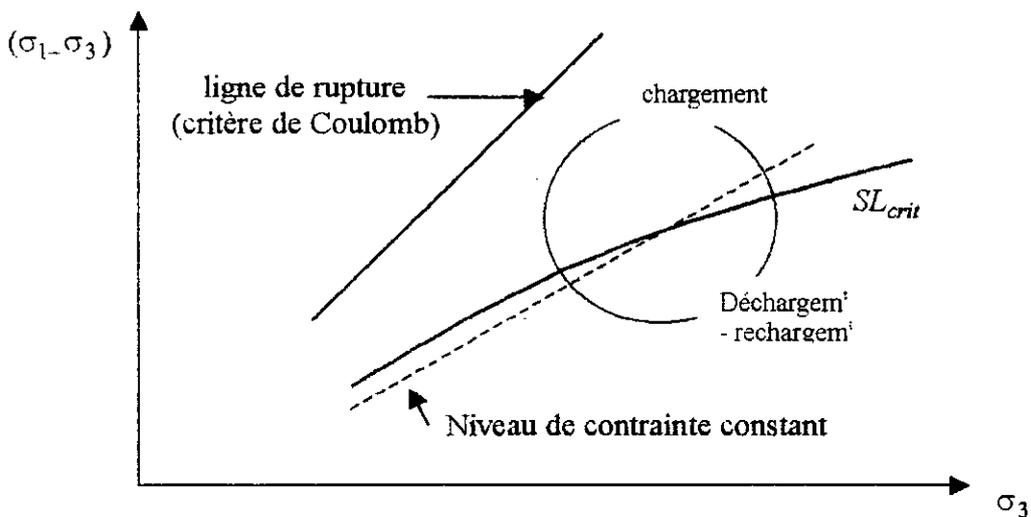
La figure(5.2b) illustre la division entre chemin de chargement et de déchargement-rechargement sur la base de ce nouveau critère pour les mêmes conditions initiales que la figure (5.2a). L'espace des contraintes est maintenant subdivisé par une ligne qui est légèrement concave vers le bas et incliné légèrement par rapport à la courbe de niveau de contraintes constantes.

Le second problème plus sérieux avec l'ancien modèle est qu'il peut conduire à une instabilité d'un processus numérique durant une incrémentation. La figure (5.3) illustre la variation du module approprié en fonction du niveau de contrainte. Pour tout niveau de contrainte plus grand ou égal à $SL_{\max}^{passé}$ le module E_t est appliqué, sinon c'est E_{ur} . La discontinuité de la courbe résulte d'une variation brusque avec un rapport de 10 à 20 des valeurs des modules pris en

compte de part et d'autre du point de discontinuité c'est à dire lorsque l'on passe d'un état de chargement à un état de déchargement ou lorsque l'on passe d'un état de rechargement à un état de chargement. Ceci peut conduire à une instabilité durant une incrémentation dans une analyse par élément fini ou une légère fluctuation des contraintes en un point considéré peut engendrer une grande variation du module à prendre en compte. En vue de minimiser ce type de problème, l'idée de décaler la limite dans le modèle initial à $0.95 SL_{max}^{passé}$ s'est avérée vaine.

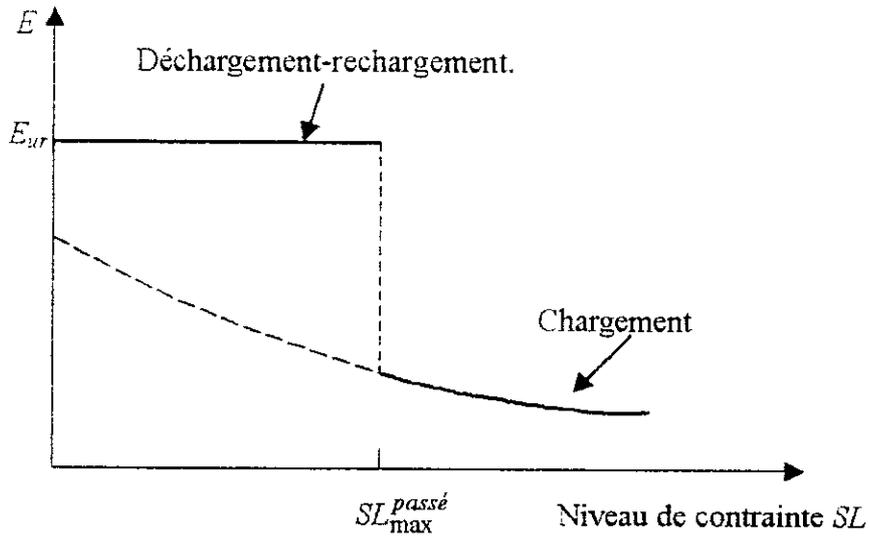


a) critère en niveau de contrainte

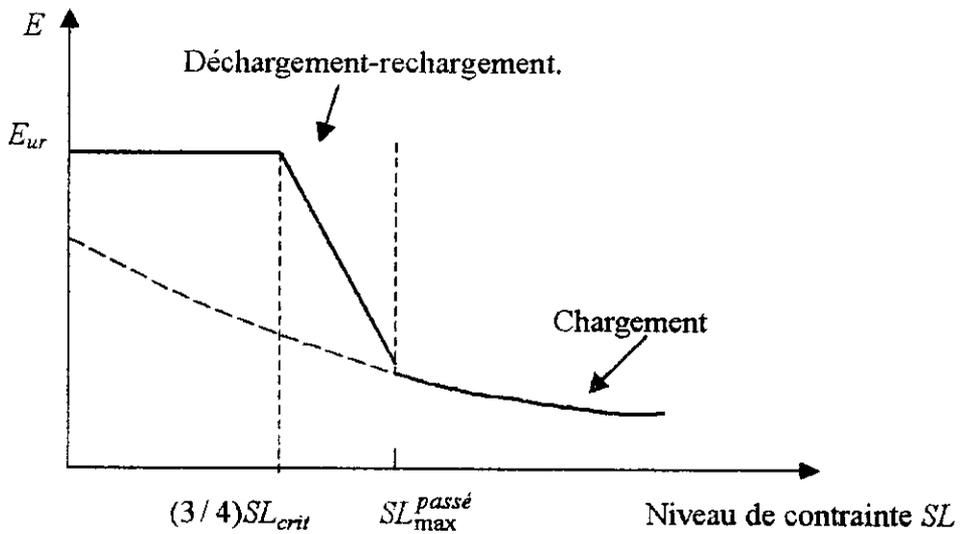


b) critère en état de contrainte

Figure 5.2 comparaisons entre les critères du modèle initial et du modèle modifié.



a) Modèle original : Transition chargement et déchargement-rechargement.



b) Nouveau modèle : Transition chargement et déchargement-rechargement.

Figure(5.3) Transition chargement et déchargement-rechargement.

Dans le but de se prémunir contre ce type de problème, le nouveau modèle propose une transition moins abrupte entre les modules à prendre en compte en chargement ou déchargement-rechargement comme illustrer sur la figure (5.3b) qui se traduit comme suit :

Le passage d'un état de déchargement-rechargement à un état de chargement est basé sur le critère en état de contrainte. La connaissance de l'état de contrainte $SS_{max}^{passé}$ qui définit la limite

entre chargement et déchargement-rechargement, permet d'obtenir à partir de (5.15) le niveau de contrainte critique SL_{crit} pour lequel on entre dans un état de chargement.

- Lorsque $SL > SL_{crit}$, le module E_t donné par l'équation (5.9) est utilisé.
- Lorsque $SL < \frac{3}{4}SL_{crit}$, le module de déchargement –rechargement déterminé par l'équation (5.10) est utilisé.
- Lorsque $\frac{3}{4}SL_{crit} < SL < SL_{crit}$ le module considéré est obtenu par interpolation linéaire entre respectivement E_{ur} et E_t (figure 5.3b)

Cette transition linéaire continue entre E_{ur} et E_t élimine le risque de la discontinuité soudaine. La conséquence de l'élimination de la source de l'instabilité est que le nouveau modèle sous-estime le module du sol durant la transition entre l'état de chargement à l'état de déchargement. Cette sous-estimation est cependant moins significative que l'instabilité du modèle antérieur.

Le modèle antérieur avait une certaine tendance sous certaine condition de sous-estimer le module de déformation volumique K , et ainsi de sous-estimer la contrainte principale mineure et par suite la rigidité du sol. Ce problème arrive plus fréquemment avec des éléments ayant un niveau de contraintes très bas et une contrainte de confinement très élevée. En vue de parer à cette tendance du module volumique de sous-estimer le coefficient de Poisson à un niveau bas de contrainte pour les sols, la contrainte inférieure imposée pour le module de déformation volumique dans l'ancien modèle a été modifiée dans le nouveau modèle de telle sorte que :

$$K_{min} > \left(\frac{E_t}{3}\right)\left(\frac{2 - \sin \varphi}{\sin \varphi}\right) \quad \text{pour } \varphi > 2.3^\circ$$

$$K_{min} = 17 E_t \quad \text{pour } \varphi \leq 2.3^\circ$$

Ceci remplace la condition dans le modèle antérieur $K_{min} > \frac{E_t}{3}$, laquelle imposait que le coefficient de Poisson ne peut être négatif. Pour $\varphi > 2.3^\circ$, le coefficient de Poisson tangent est alors pris égal à 0.49, ce qui est approprié pour un sol cohésif sous des conditions non-drainées. Pour $\varphi > 2.3^\circ$, la condition imposée pour K_{min} a pour effet de contraindre le coefficient de Poisson d'être supérieur à un minimum :

$$v_{min} = \frac{1 - \sin \varphi}{2 - \sin \varphi}$$

5.1.4 IMPLEMENTATION NUMERIQUE DU MODELE.

Durant chaque incrémentation, deux études sont effectuées où chaque point d'intégration de l'élément est contrôlé de façon à déterminer si ce point est dans un état de chargement, déchargement-rechargement, de rupture par tension, de rupture par cisaillement. La première

étude est effectuée avec les modules estimés à partir de l'état de contrainte ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) à la fin de l'incrément précédent. La deuxième étude est effectuée avec les modules estimés à partir de l'état de contraintes moyen calculé à partir de l'état de contrainte à la fin de l'incrément précédent et celui obtenu à la fin de la première étude.

chargement : le module de chargement est appliqué quand l'état de contrainte en cours d'un élément est supérieur à tous les états de contraintes et lorsque la contrainte mineure σ_3 est une contrainte de compression. Si la contrainte σ_3 est inférieure à $0.05P_a$ (0.05 fois la pression atmosphérique), la valeur du module est calculée avec $\sigma_3 = 0.05P_a$.

déchargement-rechargement. Comme décrit plus haut le module E_{ur} est utilisé moyennant les précautions relatives à la zone de transition.

Rupture de tension. C'est ce qui arrive lorsque σ_3 obtenu correspond à une traction. Dans ce cas dans la première étude, le module de déformation volumique est calculé en prenant σ_3 égal à un dixième de la pression atmosphérique et le module tangent à un dixième du module de déformation volumique. Si à la fin de cette étude une rupture par tension subsiste, alors la deuxième étude est faite avec les deux modules précédents réduits aux dixièmes de leur valeur précédente.

Rupture par cisaillement. C'est ce qui arrive quand le niveau de contrainte d'un élément excède les 95% de sa capacité de résistance au cisaillement. Le module tangent est alors estimé à partir de l'équation (5.9) en prenant pour le produit $SL.R_f$ la valeur de 0.95, ce qui donne un module tangent très faible.

5.1.5 FACTEURS QUI INFLUENT SUR LES PARAMETRES DE LA LOI DE DUNCAN.

Les paramètres de la loi de Duncan sont finalement :

C : la cohésion du sol

φ_0 : l'angle de frottement initial.

$\Delta\varphi$: la réduction relative de correspondant à une variation dans un rapport de 10 de la contrainte principale mineure.

K_{ch} : le coefficient pour le module de chargement.

K_{ur} : le coefficient pour le module de déchargement rechargement.

K_B : le coefficient pour le module de déformation volumique

R_f : le coefficient de rupture.

n : l'exposant relatif au module chargement ou déchargement –rechargement.

m : l'exposant relatif au module de déformation volumique

La détermination de ces paramètres est possible par des essais triaxiaux sous des conditions soit drainées soit non consolidées non drainées.

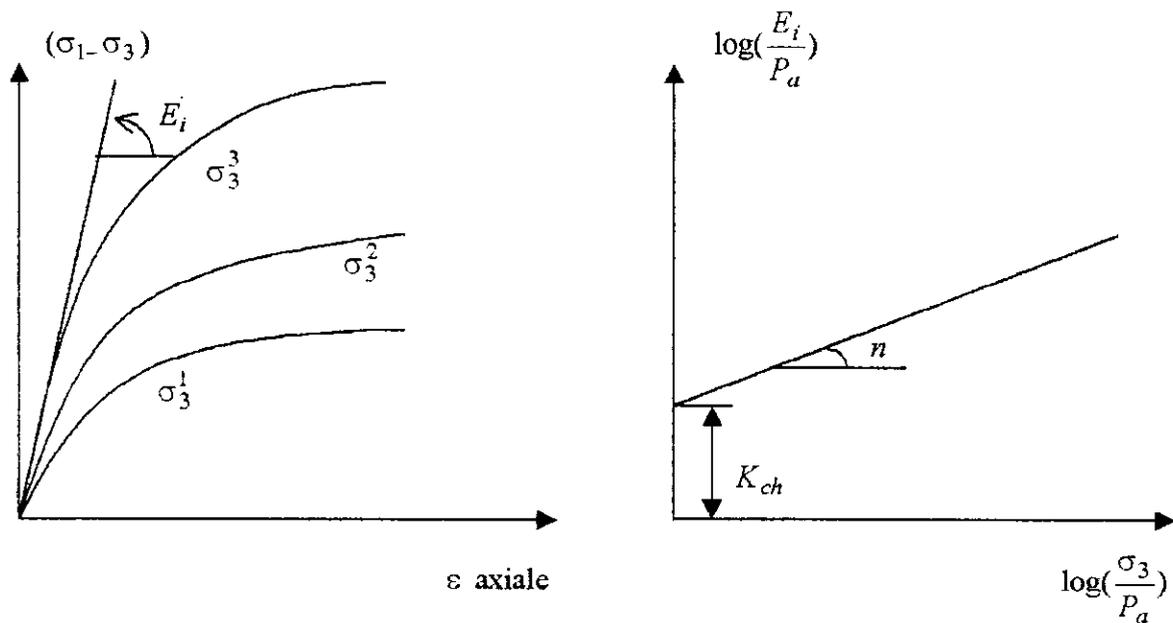
Par exemple pour déterminer K_{ch}, n, K_{ur} , on fait varier σ_3 ce qui donne la série des courbes (figure 5.4a). La pente de ces courbes permet de déterminer E_i en fonction de σ_3 . En reportant ces valeurs dans un système d'axe (log-log) (figure 5.4b), on obtient théoriquement une droite puisque :

$$\text{Log}\left(\frac{E_i}{P_a}\right) = \text{Log}(K_{ch}) + n \text{Log}\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)$$

L'ordonnée à l'origine et la pente de cette droite nous donnent respectivement K_{ch}, n et K_{ur} s'obtient par une procédure analogue.

Le tableau suivant donne un ordre de grandeur:

	K_{ch}	n	K_{ur}
Sable	600-1200	0.50	800-1600
Argile	100-400	0.85	100-500
Silt	400	0.6	500



a) Courbe contraintes-déformations

b) détermination des paramètres K_{ch} et n

Figure 5.4:

Les facteurs les plus importants qui influent sur la résistance des sols et leur comportement contraintes-déformations sous des conditions drainées sont les suivants:

Densité relative:

Pour les sols pulvérulents une augmentation de la densité relative conduit à:

- . une augmentation de la résistance (valeurs de φ plus élevées).
- . une augmentation de la rigidité (valeurs des K_i plus élevés)
- . une augmentation de la tendance à la dilatation pendant le cisaillement.

Graduation:

Les sols qui sont caractérisés par une graduation médiocre, ont en général des valeurs des coefficients des modules, des coefficients de Poisson, et une diminution de ces coefficients avec une augmentation σ_3 , plus importante que s'ils avaient une bonne graduation.

Les valeurs de l'angle de frottement initial φ_0 ainsi que de $\Delta\varphi$, n , R_f , ne sont pas tellement affectées par la graduation.

Forme des particules:

Les particules rondes présentent une meilleure résistance pendant le cisaillement que des particules angulaires. Par conséquent, les sols avec des particules plus ou moins arrondies ont en général des paramètres K_i , n plus grandes que celles de particules angulaires et par contre des valeurs de $\Delta\varphi$ plus petites.

La forme des particules n'a pas une influence significative sur les valeurs R_f et φ_0 .

Les facteurs les plus importants qui influent sur les paramètres de la loi de Duncan sous des conditions non-consolidées non-drainées:

- . structure du sol
- . densité
- . teneur

Ce sont les paramètres qui déterminent la pression interstitielle qui contrôlent actuellement le comportement contrainte-déformation et la résistance des sols.

Il est essentiel d'avoir des échantillons de haute qualité quand on veut déterminer les paramètres de la loi de Duncan pour les sols argileux sous des conditions non-consolidées, non-drainées.

Les valeurs des paramètres de la loi de Duncan peuvent varier énormément selon la densité et la teneur en eau de l'échantillon.

5.2 MODELE ELASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE

5.2.1 Introduction

C'est le cas général où l'effet d'écrouissage est négligeable c'est à dire lorsque le diagramme contrainte-déformation obtenu, lors d'un essai uniaxial, devient approximativement horizontal lorsque la contrainte limite est dépassée. Alors les déformations plastiques sont supposées se produire sous une contrainte constante (figure 5.5). Le comportement est dit 'comportement parfaitement plastique'. C'est une simplification énergique pour l'analyse d'un problème complexe.

La relation contrainte déformation a l'allure suivante dans le cas uniaxial.

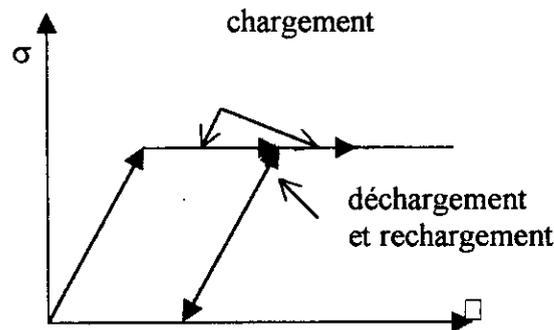


Figure 5.5 : Relation contrainte –déformation pour matériau élastique parfaitement plastique, cas uniaxial.

Cependant, le comportement général d'un matériau sous un état de contrainte complexe, n'est pas si directe, car il fait intervenir 6 contraintes (cas homogène isotrope) et 6 déformations. La question qui se pose est comment la relation simple contrainte –déformation observée lors d'un essai uni-axial peut-être généralisé pour prédire le comportement d'un matériau pour des états plus complexes.

5.2.2 Critère de chargement ou de déchargement.

Soit $F(\sigma_{ij}) = k$ l'équation de la surface de charge correspondante à la fonction de charge $f(\sigma_{ij})$ où k est un paramètre caractéristique du matériau (voir chapitre 4). Le problème qui se pose est de définir un critère de chargement une fois que l'état plastique à été atteint.

L'état plastique étant atteint, l'écoulement plastique se poursuit tant que l'état de contrainte se maintient sur la surface limite. Cette condition est appelée chargement. Par contre l'état de contrainte peut se déplacer dans l'espace des contraintes de Haigh-Westergaard vers l'intérieur de la surface de charge, dans ce cas on a plus de déformation plastique et toute déformation incrémentale est élastique. Cette deuxième situation est appelée déchargement.

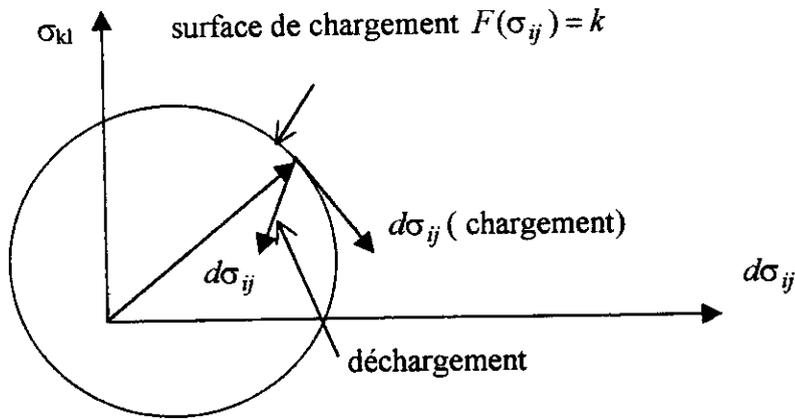


Figure 5.6: représentations des critère chargement et déchargement

Si on considère un élément dans l'état plastique caractérisé par le vecteur contrainte σ_{ij} dans l'espace Haigh-Westergaard. Si on applique un incrément de charge deux situations peuvent se produire pour l'incrément du vecteur contrainte $d\sigma_{ij}$.

Un écoulement plastique peut se produire, dans ce cas l'extrémité contrainte ne peut se déplacer en dehors de la surface de charge. Ceci implique alors que l'incrément additionnel $d\sigma_{ij}$ doit alors se déplacer tangentiellement à cette surface. Par conséquent la condition pour que l'écoulement plastique se produise, est :

$$f(\sigma_{ij}, k) = 0 \quad \text{et} \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (5.16)$$

Dans le cas contraire, on aura un déchargement et la condition correspondante est :

$$f(\sigma_{ij}, k) = 0 \quad \text{et} \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (5.17)$$

il en résulte que la fonction de charge $f(\sigma_{ij})$ sert :

- de critère de chargement lors de la phase plastique
- de critère de déchargement lors de la phase élastique

d'où son nom.

5.2.3 Tenseur incrémental de déformation élastique et plastique.

Le tenseur de déformation est supposé être la somme du tenseur incrémental élastique et plastique soit :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (5.18)$$

La loi de Hooke ou n'importe quelle autre loi élastique linéaire ou non linéaire peuvent être supposée pour établir les relations nécessaires contrainte-déformation entre l'incrément de variation de contrainte et l'incrément de variation des déformations correspondantes.

La relation contrainte-déformation pour un matériau plastique se ramène essentiellement à une relation évoquant essentiellement l'état de contrainte courant, la variation incrémentale de contrainte, et la déformation plastique comme nous le détaillerons plus loin.

5.2.4 Potentiel plastique et loi d'écoulement.

La loi d'écoulement est l'hypothèse cinématique nécessaire postulée pour les déformations plastiques ou l'écoulement plastique.

On peut obtenir les déformations élastiques par dérivation de l'énergie potentielle élastique par unité de volume (voir chapitre 4.2.2) . Soit en reprenant les équations (4.23) et (4.24) (matériau est hyper-élastique ' de Green ') :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.19)$$

où W et Ω sont respectivement l'énergie potentielle élastique et l'énergie complémentaire par unité de volume.

Von Mises (1928), a proposé le concept similaire de fonction potentiel plastique $g(\sigma_{ij})$, qui est une fonction des contraintes σ_{ij} . De la même manière que pour les déformations élastiques, Von Mises propose pour les déformations incrémentales plastiques.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.20)$$

Où $d\lambda$ est un scalaire, facteur de proportionnalité qui est différent de zéro que lorsqu'on est en présence de déformations plastiques.

L'équation $g(\sigma_{ij}) = \text{constante}$ définit une surface dite 'hypersurface' du potentiel plastique dans un espace à 9 dimensions de contraintes.

L'équation (5.20) implique que $d\varepsilon_{ij}^p$ est un vecteur normal à cette surface (figure 5.7).

Lorsque cette surface se confond avec la surface de chargement défini par $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ alors $g=f$ et

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.21)$$

Cette équation est dite ' loi d'écoulement associée '.

5.2.4.1 Loi d'écoulement associé avec la surface de charge de Von Mises.

La fonction de charge de Von-Mises est :

$$f(\sigma_{ij}, k) = J_2 - k^2 \quad \text{où } J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} \quad (5.22)$$

est le deuxième invariant du tenseur déviatorique de contrainte s_{ij} (voir chapitre 4.2.1b).

en appliquant 5.21, alors

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij} \quad \text{ou} \quad d\lambda = \frac{d\epsilon_{ij}^p}{s_{ij}} \quad i=1,3 \quad j=1,3 \quad (5.23)$$

$d\lambda$ est un facteur de proportionnalité avec

$$\begin{aligned} d\lambda = 0 & \quad \text{si } J_2 < k^2 \quad \text{ou } J_2 = k^2 \quad \text{mais } dJ_2 < 2. \\ d\lambda > 0 & \quad \text{si } J_2 = k^2 \quad \text{et } dJ_2 = 0 \end{aligned}$$

Les équations (5.23) sont connues sous le nom 'équations de Prandtl-Reuss'. Cette équation montre qu'un petit incrément de déformation plastique dépend seulement du tenseur déviatorique (voir chapitre 4.2.1a) et pas du tout de l'incrément de contrainte qui est nécessaire pour maintenir l'écoulement plastique. Par conséquent les directions principales des quatre tenseurs σ_{ij} , ϵ_{ij} , $d\sigma_{ij}$, $d\epsilon_{ij}$ coïncident.

Les équations 5.23 ne permettent pas d'obtenir les amplitudes absolues de déformations plastiques.

5.2.4.2 Loi d'écoulement associé avec la fonction de charge de Tresca.

Dans ce cas l'équation de la surface de charge s'écrit pour la situation où $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$f(\sigma_{ij}, k) = F(\sigma_{ij}, k) - k = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0 \quad (5.24)$$

dans le cas d'une loi d'écoulement associée à la fonction de charge de Tresca on a :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{soit :} \quad (5.25)$$

$$d\epsilon_1^p = d\lambda \quad d\epsilon_2^p = 0 \quad d\epsilon_3^p = -d\lambda \quad (5.26)$$

où $d\epsilon_i^p$ représente un des trois incréments principaux de déformation du tenseur incrémental de déformation principal.

Pour les autres situations on a des résultats analogues résumés sur la figure 5.7 .

Pour les coins tel que le cas $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ (point A sur la figure 5.7) la situation se complique car nous avons une valeur $d\epsilon_{ij}^p$ à droite et une autre à gauche. Pratiquement on suppose que pour une situation de ce type le tenseur déformation incrémental au point considéré est une combinaison linéaire des tenseurs incrémentaux de déformation à droite et à gauche de ce point.

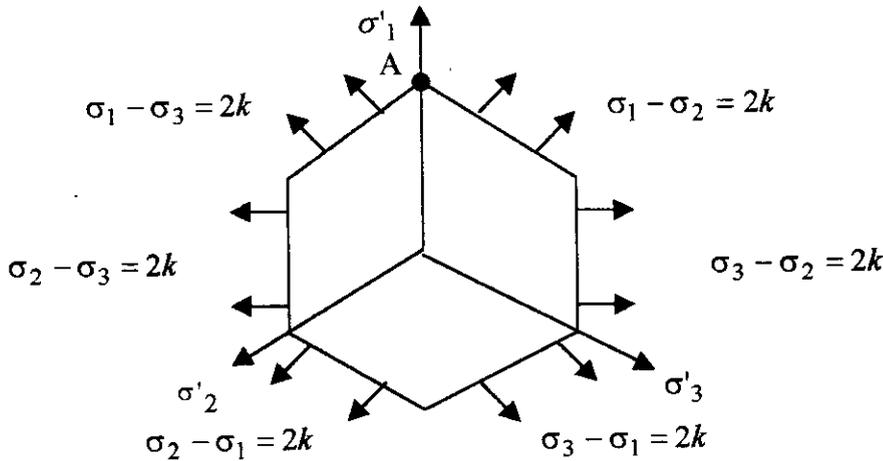


Figure 5.7: loi d'écoulement associé à la surface de charge de Tresca.

5.2.4.3 Loi d'écoulement associé avec la fonction de charge de Mohr - Coulomb.

Des matériaux tels que les sols peuvent être idéalisés comme parfaitement plastique obéissant au critère de Mohr-Coulomb. La surface de Mohr-Coulomb est une pyramide hexagonale irrégulière. Dans le plan déviatorique π , l'intersection avec la surface donne un hexagone irrégulier (voir figure 5. 8)

La fonction de charge s'écrit :

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \varphi}{2c \cos \varphi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \varphi}{2c \cos \varphi} = 1 \tag{5.27}$$

où c est la cohésion et φ l'angle de frottement interne. Au lieu de ces deux paramètres on peut utiliser m, f'_c définis comme :

$$f'_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad f'_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad m = \frac{f'_c}{f'_t} \tag{5.28}$$

on remarque alors que (5.27) s'écrit alors :

$$\frac{\sigma_1}{f'_t} - \frac{\sigma_3}{f'_c} = 1 \quad \text{pour } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (5.29)$$

Il apparaît clairement à partir de cette équation que f'_c, f'_t représente respectivement les contraintes limites à l'essai uniaxial de compression et de traction. Comme $f'_c > f'_t$, alors on a $m > 1$.

Finalement l'équation de la surface de charge est :

$$m\sigma_1 - \sigma_3 = f'_c \quad (5.30)$$

Pour déterminer le tenseur incrémental de déformation principal ou $d\epsilon_1^p, d\epsilon_2^p, d\epsilon_3^p$ trois cas peuvent être considérés séparément.

a) Premier cas :

La contrainte limite se trouve sur une surface plane de la pyramide par exemple dans la situation particulière $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ on a :

$$d\epsilon_1^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = m d\lambda, \quad d\epsilon_2^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0, \quad d\epsilon_3^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = -d\lambda \quad (5.31)$$

$$(d\epsilon_1^p, d\epsilon_2^p, d\epsilon_3^p) = (m, 0, -1) d\lambda \quad (5.32)$$

Pour les autres faces on procède de la même manière on obtient les résultats mentionnés sur la figure 5.8.

On remarque que, dans ce cas, la déformation volumique plastique est

$$d\epsilon_v^p = d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p + d\epsilon_3^p = (m-1)d\lambda \quad (5.33)$$

Comme $m > 1$ il s'ensuit que pour un matériau de type Mohr-Coulomb la loi associée engendre une déformation volumique sauf dans le cas $m=1$ qui nous ramène au critère de Tresca.

b) Deuxième cas.

La contrainte limite se trouve sur une des arêtes de la pyramide, soit par exemple le point A donc à l'intersection de deux surfaces. Pratiquement on généralise le procédé comme dans le cas du critère de Tresca c'est à dire :

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^2 d\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.34)$$

c) Troisième cas.

La contrainte limite coïncide avec le sommet de la pyramide. Pratiquement on généralise le procédé utilisé dans le cas du critère de Tresca c'est à dire en un point singulier, point de rencontre de n surfaces on a :

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^n d\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.35)$$

ici $n=6$.

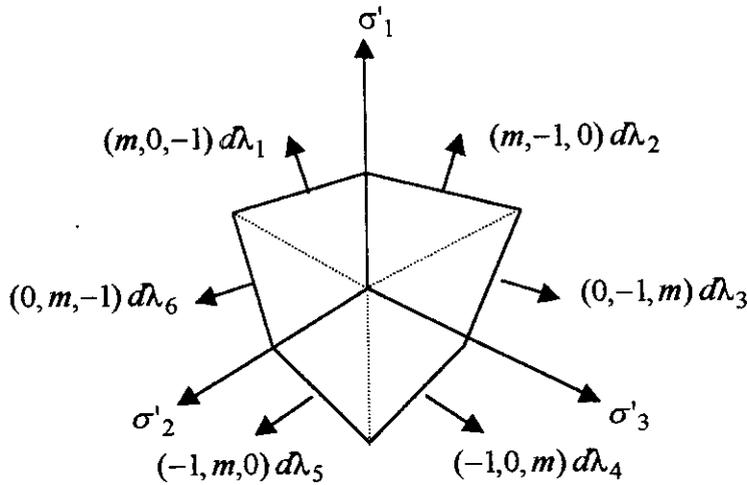


Figure 5.8: Loi d'écoulement associée à la surface de charge de Mohr-Coulomb sur le plan π .

5.2.4.4 Loi d'écoulement associée avec la fonction de charge de Drucker

Prager.

La surface de chargement pour le modèle de Drucker-Prager s'écrit :

$$f(I_1, \sqrt{J_2}) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = 0, \quad \alpha > 0 \text{ et } k > 0. \quad (5.36)$$

Où $I_1 = \sigma_{ii}$ et $J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji}$ sont respectivement le premier invariant du tenseur contrainte et le second invariant du tenseur déviatorique de contrainte.

Or on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.37)$$

soit en considérant (5.36)

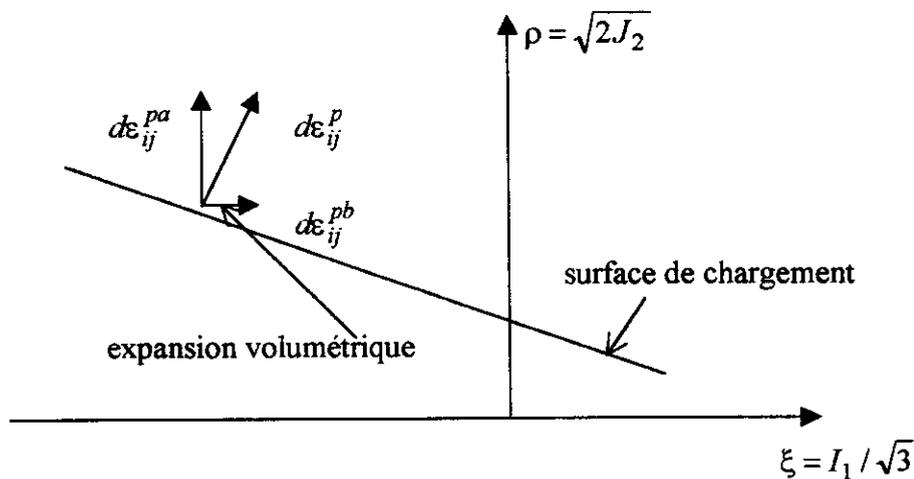
$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \alpha \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.38)$$

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left(\frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \alpha \delta_{ij} \right) \quad (5.39)$$

une conséquence importante de cette relation est que la dilatation cubique plastique est :

$$d\epsilon_{kk}^p = 3\alpha d\lambda \quad (5.40)$$

c'est à dire qu'une déformation plastique peut être accompagnée par une augmentation de volume si $\alpha \neq 0$. Cette propriété est connue comme 'dilatance'. Ceci est la conséquence directe de la dépendance du critère avec le premier invariant I_1 . C'est ce que l'on observe sur la figure 5.9 où on voit bien que compte tenu de la condition de normalité, le vecteur incrémental plastique représentatif du tenseur incrémental plastique $d\epsilon_{ij}^p$ est perpendiculaire à la surface de chargement au point P et ce vecteur a bien une composante non nulle parallèlement à l'axe octaédrique $d\epsilon_{ij}^{pb}$, ce qui signifie qu'il y a bien une déformation volumique non nulle et positive, ce qui correspond à une expansion.



$d\epsilon_{ij}^{pa}$: incrément de déformation déviatorique

$d\epsilon_{ij}^{pb}$: incrément de déformation sphérique c'est à dire l'incrément de variation de changement de volume.

Figure 5.9: expansion volumétrique plastique associée avec la surface de charge de Drucker-prager.

5.2.5 Convexité, normalité et unicité pour un matériau élastique parfaitement plastique.

On montrera que la condition d'irréversibilité des déformations plastiques implique que le travail fourni lors de la déformation plastique dans un cycle est positif, ce qui conduit à une surface chargement convexe et assure la normalité de l'écoulement plastique et l'unicité de la solution d'un problème de valeurs aux limites.

5.2.5.1 Convexité et normalité.

Si la déformation est irréversible, ceci implique que le travail fourni est donc positif. Considérons un volume unitaire (figure 5.10). Soit un état de contrainte σ_{ij}^* en un point A, qui se trouve sur ou à l'intérieur de la surface de chargement. Une sollicitation additionnelle engendre un déplacement des contraintes suivant ABC où C correspond à un état de contrainte σ_{ij} sur la surface de chargement et que cet état se maintient pendant un court instant. Un écoulement plastique se produit alors et seulement des travaux prennent place durant l'écoulement. Les sollicitations externes maintenant se relâchent et σ_{ij} revient à sa valeur précédente σ_{ij}^* . Toute l'énergie élastique est restituée.

Le travail plastique dans le cycle chargement-déchargement est :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^P \geq 0 \quad (5.41)$$

ceci doit être vérifié pour tout point A ce qui implique :

- la surface de chargement doit être convexe
- la déformation incrémentale plastique $d\epsilon_{ij}^P$ doit être normale à la surface de chargement et dans le cas d'un point d'intersection entre deux surfaces adjacentes, elle doit être entre les normales adjacentes à ce point de telle sorte que (5.50) soit vérifiée.

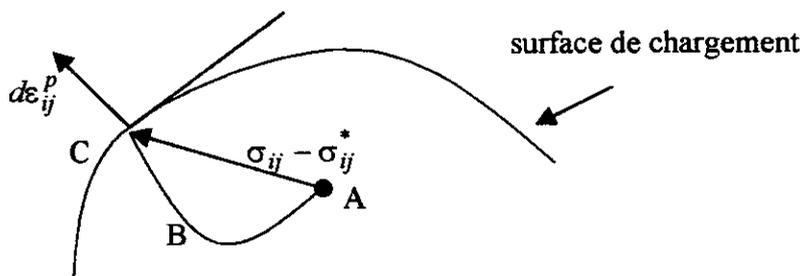


Figure 5.10: Convexité et normalité

Le caractère irréversible des déformations plastiques nécessite que l'incrément de travail plastique soit positif, c'est à dire

$$dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0 \quad (5.42)$$

étant donné la convexité de la surface de chargement

$$\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0 \quad \text{par suite il faut que} \quad (5.43)$$

$$d\lambda \geq 0 \quad (5.44)$$

5.2.5.2 Unicité.

Supposons que notre problème de valeurs aux limites admette deux solutions $(d\sigma_{ij}^a, d\varepsilon_{ij}^a)$ et $(d\sigma_{ij}^b, d\varepsilon_{ij}^b)$ sous l'action d'une variation dT_i, dF_i des sollicitations des forces de surfaces appliquées sur les limites du volume et des forces de volume.

L'application du principe des travaux virtuels à l'équilibre appliqués pour les deux états successivement donne après différentiation (le système de force externe étant identique) :

$$\int_V (d\sigma_{ij}^b - d\sigma_{ij}^a) (\varepsilon_{ij}^b - \varepsilon_{ij}^a) dV = 0 \quad (5.45)$$

soit :

$$\begin{aligned} \Delta d\sigma_{ij} &= d\sigma_{ij}^b - d\sigma_{ij}^a \\ \Delta d\varepsilon_{ij} &= d\varepsilon_{ij}^b - d\varepsilon_{ij}^a \\ \Delta d\varepsilon_{ij}^e &= d\varepsilon_{ij}^{eb} - d\varepsilon_{ij}^{ea} \\ \Delta d\varepsilon_{ij}^p &= d\varepsilon_{ij}^{pb} - d\varepsilon_{ij}^{pa} \end{aligned} \quad (5.46)$$

L'équation (5.45) implique que

$$dI = \Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij} = \Delta d\sigma_{ij} (\Delta d\varepsilon_{ij}^e + \Delta d\varepsilon_{ij}^p) = 0 \quad (5.47)$$

Si on montre que $dI \geq 0$ alors on aura d'après (5.45) forcément $\Delta d\sigma_{ij} = 0$ et $\Delta d\varepsilon_{ij} = 0$ donc l'unicité. Plusieurs cas sont à considérer :

Premier cas les solutions a et b sont toutes deux des solutions en chargement, alors $\Delta d\sigma_{ij}$ reste tangent à la surface de chargement par suite compte tenu de la normalité de $d\varepsilon_{ij}^p$ et de la convexité de la surface de chargement le produit $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}$ doit être non négatif

Deuxième cas les deux solutions a et b sont des solutions en déchargement, par voie de conséquence par sa définition même $dI = 0$ puisque $\Delta d\varepsilon_{ij} = 0$ dans ce cas.

Troisième cas. Une des solutions par exemple a est une solution en déchargement et l'autre b en chargement. Par suite $d\sigma_{ij}^b d\varepsilon_{ij}^{pb} = 0$ du fait de la normalité et $d\varepsilon_{ij}^{pa} = 0$. Par suite $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^p = (d\sigma_{ij}^b - d\sigma_{ij}^a)(d\varepsilon_{ij}^{pb} - d\varepsilon_{ij}^{pa}) = -d\sigma_{ij}^a d\varepsilon_{ij}^{pb}$ et comme $d\sigma_{ij}^a$ est dirigé vers l'intérieur de la surface de charge et $d\varepsilon_{ij}^{pb}$ est dirigé vers l'extérieur de cette surface alors leur produit est négatif et par conséquent $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^p = (d\sigma_{ij}^b - d\sigma_{ij}^a)(d\varepsilon_{ij}^{pb} - d\varepsilon_{ij}^{pa}) = -d\sigma_{ij}^a d\varepsilon_{ij}^{pb}$

De plus si on utilise les relations contraintes en élasticité on a $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^e \geq 0$. Etant donné (5.47) on a alors $dI \geq 0$

Dans tous les cas on a $dI \geq 0$ donc d'après (5.45) forcément $\Delta d\sigma_{ij} = 0$ et $\Delta d\varepsilon_{ij} = 0$ donc l'unicité.

5.2.6 Relation contrainte –déformation incrementale.

Dans l'analyse élasto-plastique par une approche numérique, la technique la plus commune est la méthode incrémentale utilisant une matrice tangente de rigidité reliant les éléments des tenseurs contraintes avec des éléments des tenseurs déformations placés dans des vecteurs $\{\sigma\}$ ou $\{\varepsilon\}$ et $\{\varepsilon\}$ ou $\{\varepsilon\}$.

Comme nous l'avons vu, le comportement parfaitement plastique multi-axial nécessite que le vecteur de l'incrément de contrainte soit tangent à la surface de charge, et que le vecteur de l'incrément de déformation soit normal à la surface de charge. En accord avec le concept de parfaitement plastique, l'amplitude de la déformation plastique est déterminée uniquement par l'état de contrainte courant σ_{ij} et l'incrément de contrainte $d\sigma_{ij}$. Cependant pour un état courant de contrainte σ_{ij} et un incrément de déformation $d\varepsilon_{ij}^p$ satisfaisant la loi d'écoulement, l'incrément de contrainte $d\sigma_{ij}$ peut être déterminé par la condition dite de consistance qui assure que l'état de contrainte se maintient à la surface limite.

5.2.6.1 Formulation générale.

Nous avons (5.18), soit : $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$

L'incrément de déformation élastique $d\varepsilon_{ij}^e$ est donné par (4.18), soit :

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{9K} I_1 d\delta_{ij} + \frac{1}{2G} ds_{ij} \quad \text{ou en écriture tensorielle} \quad (5.48)$$

Et $d\varepsilon_{ij}^p$ l'incrément de déformation plastique est donné par la loi d'écoulement:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} d\lambda = 0 \quad \text{si } f < 0 \quad \text{ou } f = 0 \text{ et } df < 0 \\ d\lambda > 0 \quad \text{si } f = 0 \text{ et } df = 0 \end{array} \quad (5.49)$$

finalement on obtient :

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{9K} I_1 d\delta_{ij} + \frac{1}{2G} ds_{ij} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.50)$$

L'équation de consistance s'écrit : $df = 0$ soit

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) + df = f(\sigma_{ij}) \quad (5.51)$$

compte tenu de (4.1) où C_{ijkl}^r est le tenseur relation contrainte déformation :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^r d\epsilon_{kl}^e = C_{ijkl}^r (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p)$$

soit compte tenu de (5.49)

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^r d\epsilon_{kl} - d\lambda C_{ijkl}^r \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad (5.52)$$

remplaçons dans (5.50) et résolvons pour $d\lambda$ on obtient :

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^r d\epsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu}^r \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}} \quad (5.53)$$

et finalement en remplaçant $d\lambda$ par son expression dans 5.52 :

$$d\sigma_{ij} = \left[C_{ijkl}^r - \frac{C_{ijmn}^r \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqkl}^r}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu}^r \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}} \right] d\epsilon_{kl} \quad (5.54a)$$

les coefficients du tenseur entre les parenthèses représentent le tenseur module tangent pour un matériau élastique parfaitement plastique.

$$C_{ijkl}^{r\ ep} = \left[C_{ijkl}^r - \frac{C_{ijmn}^r \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqkl}^r}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu}^r \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}} \right] \quad (5.54b)$$

Les relations 5.54a et b sont les formulations générales des relations contraintes-déformations pour un matériau élastique parfaitement plastique. Il apparaît clairement que l'incrément de

contrainte peut être déterminé uniquement par la fonction de charge $f(\sigma_{ij})$ et l'incrément de déformation $d\varepsilon_{ij}$. Si ces deux derniers sont connus, alors l'incrément de contrainte est donné par (5.54)

5.2.6.2 Matériau isotrope général.

La surface de charge est définie en termes d'invariants (voir 4.2.1b) I_1, J_2, J_3 par :

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (5.55)$$

le gradient $\frac{df}{d\sigma_{ij}}$ est

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = B_0 \delta_{ij} + B_1 s_{ij} + B_2 t_{ij} \quad \text{où} \quad (5.57)$$

$$B_0 = \frac{\partial f}{\partial I_1} \quad B_1 = \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \quad B_2 = \frac{\partial f}{\partial J_3}$$

δ_{ij} est le delta de Kronecker

s_{ij} est le tenseur déviatorique de contrainte.

$$t_{ij} = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ik} \delta_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij}$$

En fait nous avons pour le critère de Tresca (4.48b) :

$$f(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - 2k \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

pour le critère de Von-Mises (4.49) :

$$f(J_2) = J_2 - k^2$$

pour le critère de Mohr-Coulomb (4.52) :

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \varphi + \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \varphi - c \cos \varphi$$

pour le critère de Drucker-Prager (4.54) :

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k$$

à partir de 5.59 on voit que seul les coefficients B_i varient d'un critère à l'autre. Le tableau ci-dessous donne leur expression suivant le critère utilisé.

Surface de charge	B_0	B_1	B_2
Von-Mises	0	1	0
Tresca	0	$\frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{3})}{\sqrt{J_2}} \left[1 + \cot(\theta + \frac{\pi}{3}) \cos 3\theta \right]$	$-\sqrt{3} \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \frac{1}{3 J_2 \sin 3\theta}$
Mohr-Coulomb	$(\sin \varphi) / 3$	$\frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{3})}{2\sqrt{J_2}} \left[(1 + \cot(\theta + \frac{\pi}{3}) \cos 3\theta) + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} (\cot(\theta + \frac{\pi}{3}) - \cot 3\theta) \right]$	$\frac{1}{2J_2 \sin 3\theta} \left[\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \sin \varphi - \sqrt{3} \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \right]$
Drucker-Prager	α	$1/2\sqrt{J_2}$	0

Dans l'application de la méthode des éléments finis, la relation contrainte –déformation est précisée par le tenseur élasto-plastique $C_{ijkl}^{r ep}$, soit

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{r ep} d\epsilon_{kl} \tag{5.58}$$

$$C_{ijkl}^{r ep} = C_{ijkl}^r + C_{ijkl}^{r P} \tag{5.59}$$

où C_{ijkl}^r est le tenseur relation contrainte-déformation élastique et $C_{ijkl}^{r P}$ est le tenseur relation contrainte-déformation plastique dépendant essentiellement du critère considéré et de l'état de contrainte en cours.

soit en comparant avec 5.54 :

$$C_{ijkl}^{r P} = \frac{C_{ijmn}^r \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqkl}^r}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu}^r \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}} \tag{5.60}$$

Ce tenseur déformation plastique peut se mettre sous la forme :

$$C_{ijkl}^{r P} = -\frac{H_{ij} H_{kl}}{h} \text{ où} \tag{5.61}$$

$$h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} \text{ et } H_{ij} = C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \quad (5.62)$$

En fonction du module d'élasticité E et du coefficient de poisson ν le tenseur relation contrainte déformation est donnée par (4.8), soit :

$$C_{ijkl}^r = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad (5.63)$$

Après substitution de (5.63) et (5.57) dans (5.62) et dérivation on obtient :

$$h = 2G \left[3B_0^2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} + 2B_1^2 J_2 + \frac{2}{3} B_2^2 J_2^2 + 6B_1 B_2 J_3 \right] \text{ et} \quad (5.64)$$

$$H_{ij} = 2G \left[B_0 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} + B_1 \delta_{ij} + B_2 t_{ij} \right] \quad (5.65)$$

où G = module d'élasticité transversal

A l'écriture tensorielle ci-dessus, il est plus commode dans un programme d'éléments finis d'utiliser une écriture matricielle de la forme :

$$\{d\sigma_{ij}\} = [C^r]^{ep} \{d\varepsilon_{ij}\} \text{ avec} \quad (5.66)$$

$$[C^r]^{ep} = [C^r]_+ + [C^r]_p \quad (5.67)$$

Où de gauche à droite on a respectivement la matrice dite de rigidité élasto-plastique, la matrice de rigidité élastique, la matrice de rigidité plastique .

La relation (5.66) reliant les éléments des tenseurs contraintes avec des éléments des tenseurs déformations placés dans des vecteurs $\{d\sigma\}$ ou $\{d\sigma_{ij}\}$ et $\{d\varepsilon\}$ ou $\{d\varepsilon_{ij}\}$.

$$\begin{aligned} \{d\sigma_{ij}\}^T &= \langle d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\sigma_{xy}, d\sigma_{yz}, d\sigma_{xz} \rangle \\ &= \langle d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\tau_{xy}, d\tau_{yz}, d\tau_{xz} \rangle \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\{d\varepsilon_{ij}\}^T = \langle d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z, d\gamma_{xy}, d\gamma_{yz}, d\gamma_{xz} \rangle \quad (5.69)$$

dans ce cas on définit aussi :

$$\{H_{ij}\}^T = \langle H_x, H_y, H_z, H_{xy}, H_{yz}, H_{xz} \rangle \text{ avec} \quad (5.70)$$

$$H_x = 2G \left[B_0 \frac{1+\nu}{1-2\nu} + B_1 s_x + B_2 (s_x^2 + s_{xy}^2 + s_{xz}^2 - \frac{2}{3} J_2) \right], \dots \text{etc.} \quad (5.71)$$

$$H_{xy} = 2G \left[B_1 s_{yz} + B_2 (s_{xy} s_{xz} + s_y s_{yz} + s_{yz} s_z - \frac{2}{3} J_2) \right], \dots \text{etc} \quad (5.72)$$

en ramenant les écritures tensorielles sous la forme matricielle (5.72), on obtient :

$$[C^r] = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

ou K est le module de déformation volumique et G le module d'élasticité transversal.

$$[C^r]^P = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} H_x^2 & H_x H_{yy} & H_x H_z & H_x H_{xy} & H_x H_{yz} & H_x H_{xz} \\ & H_y^2 & H_y H_z & H_y H_{xy} & H_y H_{yz} & H_y H_{xz} \\ & & H_z^2 & H_z H_{xy} & H_z H_{yz} & H_z H_{xz} \\ & & & H_{xy}^2 & H_{xy} H_{yz} & H_{xy} H_{xz} \\ & & & & \text{SYM} & H_{yz}^2 \\ & & & & & & H_{xz}^2 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

D'autres écritures sont possibles où par exemple au lieu de K et G on utilise E et ν , ...etc.

5.2.6.3 Modèle de Drucker-Prager.

Pour un matériau isotrope on a (4.8), soit

$$C_{ijkl}^r = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right]$$

et en remplaçant dans 5.53 on obtient :

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} d\epsilon_{kk} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \delta_{rs} \right)^2} \quad \text{ou encore en fonction } G \text{ et } K, \quad (5.75)$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{3K-2G}{6G} d\epsilon_{kk} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} + \frac{3K-2G}{6G} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \delta_{rs} \right)^2} \quad (5.76)$$

soit en remplaçant (4.8) par sa valeur dans 5.52.

$$d\sigma_{ij} = 2G d\epsilon_{ij} + K d\epsilon_{kk} \delta_{ij} - d\lambda \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \delta_{mn} s_{ij} + 2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] \quad (5.77)$$

de plus on a en (5.38)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \alpha \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}}$$

soit en remplaçant (5.38) dans (5.76), on a

$$d\lambda = \frac{(G/\sqrt{2}) s_{mn} d\epsilon_{mn} + 3K \alpha d\epsilon_{kk}}{G + 9K\alpha^2} \quad (5.78)$$

Et de même en remplaçant (5.38) dans (5.77).

$$d\sigma_{ij} = 2G d\epsilon_{ij} + K d\epsilon_{kk} \delta_{ij} - d\lambda \left(\frac{G}{\sqrt{J_2}} s_{ij} + 3K\alpha \delta_{ij} \right) \quad (5.79)$$

où e_{ij} est le tenseur déviatorique de déformation et s_{ij} est le tenseur déviatorique de contrainte.

(5.78) et (5.79) permettent compte tenu de (5.58) ainsi que des expressions des éléments du tenseur déviatorique d'obtenir le tenseur relation contrainte-déformation $C_{ijmn}^{r\ ep}$:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{r\ ep} d\epsilon_{kl}$$

$$C_{ijmn}^{r\ ep} = 2G \delta_{im} \delta_{jn} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij} \delta_{mn} - \frac{(G/\sqrt{2}) s_{ij} + 3K\alpha \delta_{ij}}{G + 9K\alpha^2} \left(\frac{G}{\sqrt{J_2}} s_{mn} + 3K\alpha \delta_{mn} \right) \quad (5.80)$$

5.2.7 Implémentation numérique.

5.2.7.1 Procédure générale

L'implantation numérique nécessite pour un problème dynamique l'élaboration de deux algorithmes, en plus du choix de la méthode d'intégration pas à pas.

Le premier algorithme est relatif au caractère non-linéaire du problème. Pour celui-ci, divers algorithmes présents dans la littérature peuvent être considérés. Ces différents algorithmes sont présentés en annexe où une formulation des équations de mouvements est présentée. Nous avons souligné en annexe que pour un matériau élasto-plastique parfait, l'algorithme de Newton est le plus rapide et sans risque de singularité pour la matrice de rigidité modifiée pour un problème dynamique. L'expression de la matrice de rigidité modifiée dépend du choix de la méthode d'intégration pas à pas utilisée. Chaque pas de temps représentant un problème non-linéaire à résoudre. Pour chaque pas de temps (de la méthode d'intégration adoptée), une ou plusieurs incréments peuvent être effectués. Pour chacune des incréments, on effectue plusieurs itérations (de la méthode de Newton) jusqu'à obtenir la convergence désirée. A la suite de quoi, on passe à l'incrément ou au pas suivant.

A chaque itération 'i' du pas 'm+1' considérée, correspond en chaque point de Gauss, un état de contrainte. Ce dernier peut être calculé en utilisant une relation contrainte-déformation élasto-plastique incrémentale à partir de l'état de déformation. Cette étape nécessite l'élaboration d'un second algorithme.

En effet, les relations contraintes-déformations pour un matériau élasto-plastique sont relatives à des incréments infinitésimaux de contraintes et de déformations, correspondant à une histoire donnée de l'état de contrainte ou de déformation plastique. Cependant, dans une analyse par éléments finis, puisqu'un incrément de chargement est appliqué dans un pas de temps, celui-ci a une taille finie. Les relations contraintes déformations exprimées en incréments infinitésimaux doivent être intégrées numériquement. L'algorithme utilisé pour intégrer ces relations joue un rôle important et constitue le coeur de l'analyse par la méthode des éléments élasto-plastiques finis. Un algorithme impropre peut conduire à une divergence. Comme algorithme on peut utiliser n'importe quelle technique d'intégration numérique classique que l'on trouve dans la littérature. Ces techniques peuvent être implicites où explicites. Nous avons opté pour la méthode de Runge-Kutta qui est une technique d'intégration numérique explicite.

5.2.7.2 Procédure de calcul de la matrice de rigidité

Cette procédure relative au calcul de la matrice de rigidité dite tangente à la fin de l'itération 'i' de l'incrément 'm+1', comporte 7 étapes.

Etape1 : pour un élément donné en un point de Gauss donné :

Dans cette première étape, on calcule l'incrément de déformation et l'incrément de contrainte en supposant un comportement élastique.

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\varepsilon\}_i^{m+1} - \{\varepsilon\}_i^m \quad \text{où } \{\Delta\varepsilon\} \text{ représente le vecteur incrémental de déformation, } \{\varepsilon\}_i^{m+1}$$

est le vecteur déformation à la fin de l'itération et $\{\varepsilon\}_i^m$ le vecteur déformation à la fin de l'incrément (ou pas) précédent.

$\{\Delta\sigma\}^e = [C]\{\Delta\varepsilon\}$ où $\{\Delta\sigma\}^e$ est l'incrément de contrainte élastique obtenu en supposant que toute la déformation incrémentale est élastique. $[C]$ est la matrice relation contrainte-déformation pour l'élément considéré élastique.

Etape 2 : pour l'élément donné au point de Gauss donné

Déterminer l'état de chargement au point de Gauss.

Etat précédent : état élastoplastique

Calculer $L = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [C] \{\Delta\varepsilon\}$ où $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T$ est la transposée du vecteur contenant les dérivées de la fonction de charge par rapport aux composantes respectives du vecteur contrainte.

Si $L > 0$ alors $r = 0$: Chargement plastique

Si $L < 0$ ou $L = 0$ alors $r = 1$: Déchargement

Etat précédent : état élastique

Calculer la valeur de la fonction limite $f(\{\sigma^m\} + \{\Delta\sigma\}^e)$ où $\{\sigma^m\}$ est le vecteur contrainte considéré à la fin de l'incrément (ou pas) précédent.

Si $f(\{\sigma^m\} + \{\Delta\sigma\}^e) \leq 0$, on reste dans l'état élastique. Passer à l'étape 5

Si $f(\{\sigma^m\} + \{\Delta\sigma\}^e) > 0$, le point de Gauss considéré entre dans un état élasto-plastique, déterminer 'r' tel que $f(\{\sigma^m\} + r \{\Delta\sigma\}^e) = 0$ et dans ce cas :

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}^m + r \{\Delta\sigma\}^e$$

Etape 3 : pour l'élément donné au point de Gauss donné

Calculer les m sub-incréments de déformation.

$\{\Delta\varepsilon\}^- = \frac{1-r}{m} \{\Delta\varepsilon\}$ où m est un entier permettant une sous division de l'incrément de déformation élasto-plastique (sub-incrément).

Etape 4 : pour l'élément donné au point de Gauss donné pour $k=1, m$

Intégrer numériquement pour chacun des sub-incréments k

En déduire le sub-incrément de déformation plastique $\{\Delta\varepsilon\}^p$

$$\{\Delta\sigma\}^- = [C](\{\Delta\varepsilon\}^- - \{\Delta\varepsilon\}^p)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma\} + \{\Delta\bar{\sigma}\}$$

Contrôler la condition limite subséquente.

Si $f(\{\sigma\}) > \text{eps}$ où eps est une tolérance, alors une correction au vecteur contrainte doit être faite pour satisfaire la condition de consistance par l'addition d'un vecteur correcteur $\{\delta\sigma\}$ dans la direction normale à la surface limite.

$$\{\delta\sigma\} = \alpha \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\} \text{ où } \alpha \text{ est un scalaire déterminé de telle sorte que la condition limite soit}$$

satisfaite :

$$f(\{\sigma\} + \{\delta\sigma\}) = 0$$

C'est une équation linéaire en α

Etape 5 : pour l'élément donné au point de Gauss donné

Déterminer l'état de contrainte au point de Gauss à la fin de l'itération 'i'

$$\{\sigma\}_i^{m+1} = \{\sigma\}$$

Etape 6 : pour l'élément donné

A partir de la considération, l'ensemble des états de contraintes aux points de Gauss pour l'élément considéré, déduire la matrice élasto-plastique élémentaire.

Etape 7 :

A partir des matrices de rigidités élémentaires, construire par assemblage la matrice de rigidité globale.

CHAPITRE 6

APPLICATIONS DES CODES DE CALCULS ELABORES

6.1 INTRODUCTION

Pour des raisons de maniabilité évidente et afin de réduire les temps d'exécution, nous avons choisi la réalisation de deux codes de calculs non-linéaires. Ces deux codes se différencient simplement par le type de non-linéarité considéré. Pour le premier code nous avons mis en application le modèle de Duncan. Pour le second nous avons mis en application le modèle élasto-plastique parfait.

Pour ces deux méthodes, la résolution des équations de mouvements se fait par la méthode de Newmark, associée à d'autres techniques numériques relatives au type de non-linéarité considéré.

Pour le modèle élasto-plastique parfait (voir chapitre 5.2), à chaque pas de temps la résolution des équations de mouvement se fait par la méthode itérative de Newton-Raphson qui est (voir Annexe), la méthode qui converge le plus rapidement, sans risque d'obtention possible pour un problème dynamique d'une matrice singulière, contrairement au cas statique. De plus la deuxième technique itérative utilisée lors d'une itération de la méthode de Newton-Raphson, en chaque point de Gauss se trouvant dans un état de chargement plastique, afin de déterminer respectivement les incréments de déformations plastiques ainsi que l'incrément de contrainte au point de Gauss considérés est la méthode explicite de Runge-Kutta.

Pour le modèle de Duncan, la méthode utilisée spécifique à ce modèle est décrite au chapitre 5.1.

L'on constate que pour un incrément de temps, ces deux méthodes font appel à des techniques différentes d'où deux codes différents pour optimiser d'une part la mémoire et d'autre part le temps d'exécution lequel dans les deux cas est très long (plusieurs heures pour une seule étude) malgré la technique de stockage des matrices en 'ligne de ciel' qui a été utilisée.

Nous avons appliqué ces deux modèles d'une part sur les modèles réduits (mur poids léger et mur poids lourd) qui ont été présentés par Chouvet (réf.12) et d'autre part sur un mur réel qui a été étudié par Bakeer et Bathia (réf.2).

6.2 STRATEGIE DE CALCUL

Nous ne nous attarderons pas sur la méthodologie générale présentée en annexe, ainsi que sur l'implémentation numérique des modèles de Duncan et élasto-plastique présentés au chapitre 5. Nous présenterons surtout la stratégie utilisée pour surmonter les problèmes de convergences rencontrés lors de l'exécution des codes de calcul élaborés pour assurer une convergence de ces codes.

6.2.1 modèle de Duncan

Pour le modèle de Duncan, la prise en compte de la loi rhéologique nécessite un algorithme très élaboré. Le choix de telle ou telle technique dépend du type de problème envisagé, du type de sollicitations exercées, des conditions aux limites, des possibilités offertes par l'ordinateur.

De tous les paramètres de la loi de Duncan, les exposants n et m de la contrainte principale mineure (voir relation 5.8, 5.10, 5.11) sont les plus prépondérants. La valeur de ces paramètres influe fortement sur la dépendance de la loi rhéologique en fonction de la contrainte principale mineure. Plus ces paramètres sont élevés, plus la valeur du module tangent initial au pas de temps considéré variera en fonction de la contrainte principale mineure et pour un même pas de temps plus l'erreur induite par la méthode considérée sera grande. Par conséquent, il en découle, que le pas de temps devra être d'autant plus petit que ces paramètres seront d'autant plus grands. Pour des sols pulvérulents classiques la valeur de ces paramètres se situent autour de 0.5. Pour le matériau de Schneebeli nous avons $n=0.84$, ce qui pour un sol pulvérulent est grand. C'est ce qui explique que pour le modèle réduit nous avons du considérer un pas de temps très petit soit 5.10^{-5} s. Nous avons été tentés de prendre un pas de temps variable plus grand dans le domaine élastique et d'autant plus petit qu'on approche du domaine plastique. Mais vu d'une part le caractère oscillatoire de la sollicitation et d'autre part, qu'en deux points éloignés du sol on peut approcher le domaine plastique par compression ou bien par décompression, nous avons décider de considérer un pas de temps constant durant tout l'intervalle de temps considéré.

6.2.2 Modèle élasto-plastique parfait

a) Tests de convergence

Le schéma itératif de la méthode de Newton associé à chaque pas de la méthode de Newmark permet d'approcher la solution au cours des itérations. Pour juger de la qualité de l'approximation nous utilisons des tests de convergences

A la $i^{\text{ème}}$ itération de la méthode de Newton pour le pas k en cours de la méthode de Newmark on peut définir les critères suivants où $\{U\}^{k-1}$ est le déplacement à la fin de l'incrément $k-1$, et le symbole $\| \|$ représente la norme vectorielle Euclidienne :

Critère en déplacement :

$$(5.139) \quad \|\{\Delta U\}_i^k\| \leq \varepsilon_d \|\{U\}_i^k - \{U\}^{k-1}\|.$$

Critère en force :

$$(5.140) \quad \|\{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}_i^k)\{U\}_i^k]\| \leq \varepsilon_f \|\{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}^{k-1})\{U\}^{k-1}]\|$$

Où $\{U\}$ est le vecteur déplacement nodal et $\{\Delta U\}$ son incrément. $\{\bar{R}\}$ et $[\bar{K}]$, sont respectivement le vecteur force corrigé et la matrice de rigidité corrigée donnée par la méthode de Newmark. Les ε représentent les tolérances admissibles.

Généralement le test en déplacement est insuffisant dans le cas d'un problème non linéaire, comme nous l'avons constaté. En effet bien que la condition de convergence soit vérifiée en déplacement, la condition de convergence n'est pas forcément vérifiée en force. Le terme $\|\{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}_i^k)\{U\}_i^k]\|$ mesure le déséquilibre résiduel au pas considéré entre les efforts extérieurs et les efforts intérieurs obtenus à partir de la solution $\{U_i^k\}$. Ce déséquilibre résiduel

doit être le plus petit possible. Ce test en force est indispensable pour éviter l'accumulation et la propagation de ces déséquilibres au cours des pas.

Pour éviter de faire un trop grand nombre d'itération à chaque pas, nous avons été obligés d'adopter un processus simple d'accélération de la convergence.

A l'itération k de l'étape i nous avons $\{U\}_i^k = \{U\}_{i-1}^k + \{\Delta U\}_i^k$

Nous cherchons un facteur multiplicatif ρ tel que le déséquilibre résiduel correspondant au déplacement $\{U\}_i^k = \{U\}_{i-1}^k + \rho \{\Delta U\}_i^k$ sera minimal.

- Pour un facteur multiplicatif égal à 1, nous avons le déplacement résiduel obtenu à la fin de la résolution du système d'équation linéaire $[\bar{K}(\{U\}_{i-1}^k)]\{\Delta U\}_i^k = \{\bar{R}\}^k$.
- Pour un facteur multiplicatif égal à 0, nous avons le déplacement résiduel obtenu à la fin de l'itération précédente.

Nous testons entre l'itération en cours et l'itération précédente si nous avons une diminution du déséquilibre résiduel ou une augmentation. Dans le cas d'une diminution on pratique de la sur-relaxation et on détermine le déséquilibre résiduel pour une valeur du facteur multiplicatif pris arbitrairement à 1.8. Dans le cas d'une augmentation on pratique de la sous-relaxation et on détermine le déséquilibre résiduel pour un facteur pris à 0.1.

Finalement on dispose d'une suite de trois termes donnant le déséquilibre résiduel en fonction du facteur multiplicatif égal à 1, égal à 0, et égal à 1.8 ou bien 0.1. Pour déterminer le facteur multiplicatif on suppose que la courbe donnant le déséquilibre résiduel en fonction de ce facteur est une parabole, et on détermine alors la valeur du facteur multiplicatif correspondant au minimum de cette courbe.

On peut remarquer que ce procédé d'accélération de la convergence ne demande que très peu de calculs supplémentaires et nécessite aucune résolution de système d'équation linéaire.

b) Changement de pas de temps.

Les suites $\|\{\Delta U\}_i^k\|$ et $\|\{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}_i^k)]\{U\}_i^k\|$ ne sont pas toujours parfaitement monotones et peuvent présenter parfois des instabilités révélatrices de la divergence du schéma itératif. Ce phénomène est plus sensible avec la suite des déséquilibres résiduels en force qui peut devenir croissante. Dans ces cas là la discrétisation en temps n'est plus assez fine et on a intérêt à faire des sous étapes en diminuant le pas de temps.

Dans tous les cas nous privilégions le critère en déplacement. Celui-ci étant satisfait nous essayons de vérifier le critère en force. Ces deux critères doivent être vérifiés par la solution réelle.

Il nous faut définir un critère de changement de pas de temps.

Pour cela nous définissons pour un pas de temps donné une première valeur maximale d'itération 'niter'. Nous commençons à itérer en prenant soin de stocker la solution donnant le plus petit déséquilibre résiduel. Plusieurs cas peuvent se présenter.

- 1- La suite converge normalement
 - 2- La suite diverge.
 - 3- La suite commence à converger puis diverge.
 - 4- La suite commence à diverger puis converge.
 - 5- La suite oscille autour d'une certaine valeur.
 - 6- La suite converge et se met ensuite à osciller autour d'une certaine valeur.
- ... Etc.

Lors de nos premiers essais nous avons remarquer que généralement, on obtient plus rapidement une convergence en déplacement qu'en force. Les principaux cas de non-convergence rencontrés correspondaient au cas 6 et généralement pour la suite des déséquilibres résiduels.

Pour surmonter ce type de problème on a finalement après plusieurs tentatives adoptées la procédure suivante :

- 1) Fixer un nombre maximum d'itérations niter1.
- 2) Procéder aux itérations en prenant soin de conserver d'une part le déséquilibre résiduel initial et d'autre part la solution si celle-ci donne un déséquilibre résiduel minimal.
- 3) Au bout d'un certain nombre d'itération niter2 inférieur à niter1, vérifier si le déséquilibre résiduel en cours est supérieur à 10% du déséquilibre initial.
 - . Si oui on fait des sous étapes.
 - . Sinon on continue à itérer tant que le nombre d'itération n'est pas égal à niter1. On vérifie alors la convergence avec une tolérance plus faible en force. Si celle-ci n'est pas vérifiée, on fait des sous étapes.
- 4) Au cas où le nombre de sous étapes dépasserait une valeur limite fixée à priori, l'algorithme s'arrête.

6.3 ETUDE SUR MODELE REDUIT.

Nous avons appliqué les codes de calculs pour le mur poids léger soumis à une accélération sinusoïdale horizontale moyenne de 0.25g et une accélération sinusoïdale verticale moyenne de 0.10g. Nous avons essayer de reproduire autant que possible les accélérations enregistrées à la base du cadre présenté sur la figure 6.1.

6.3.1 Modélisation du modèle réduit.

1a) Modélisation du matériau de Schneebeli

Le matériau de Schneebeli a été utilisé couramment dans les expériences sur modèles réduits. Ce matériau est constitué de rouleaux en duralumin de différent diamètre et de 60 mm de longueur. Certains sont circulaires de 3mm ou 5mm de diamètres et d'autres de 5mm sont aplatis. Le milieu présente une forte anisotropie : suivant les génératrices son comportement est celui du duralumin, dans le plan perpendiculaire aux génératrices son comportement est identique a celui d'un milieu granulaire. C'est dans ce sens que ce matériau est dit analogique. Son comportement bidimensionnel est utilisé dans les expériences où aucun effort n'est exercé suivant les génératrices, on se rapproche dans ces conditions d'un problème plan qui peut être schématisé par une étude en contrainte plane.

- Expérimentalement, le matériau de Schneebeli a un comportement analogue à celui des sables secs. Il présente alors les particularités suivantes (voir figure 6.2 à 6.5 d'après Biarez (E.C.P.)) :
- Comportement élastique non linéaire.
- Dilatance en plasticité, cas des déformations isotropes quand l'échantillon est soumis à un déviateur de contrainte.
- Pic de la courbe contrainte-déformation correspondant à la dilatance.

- Comportement asymptotique de plasticité parfaite pour les grandes déformations si les conditions aux limites sont satisfaisantes

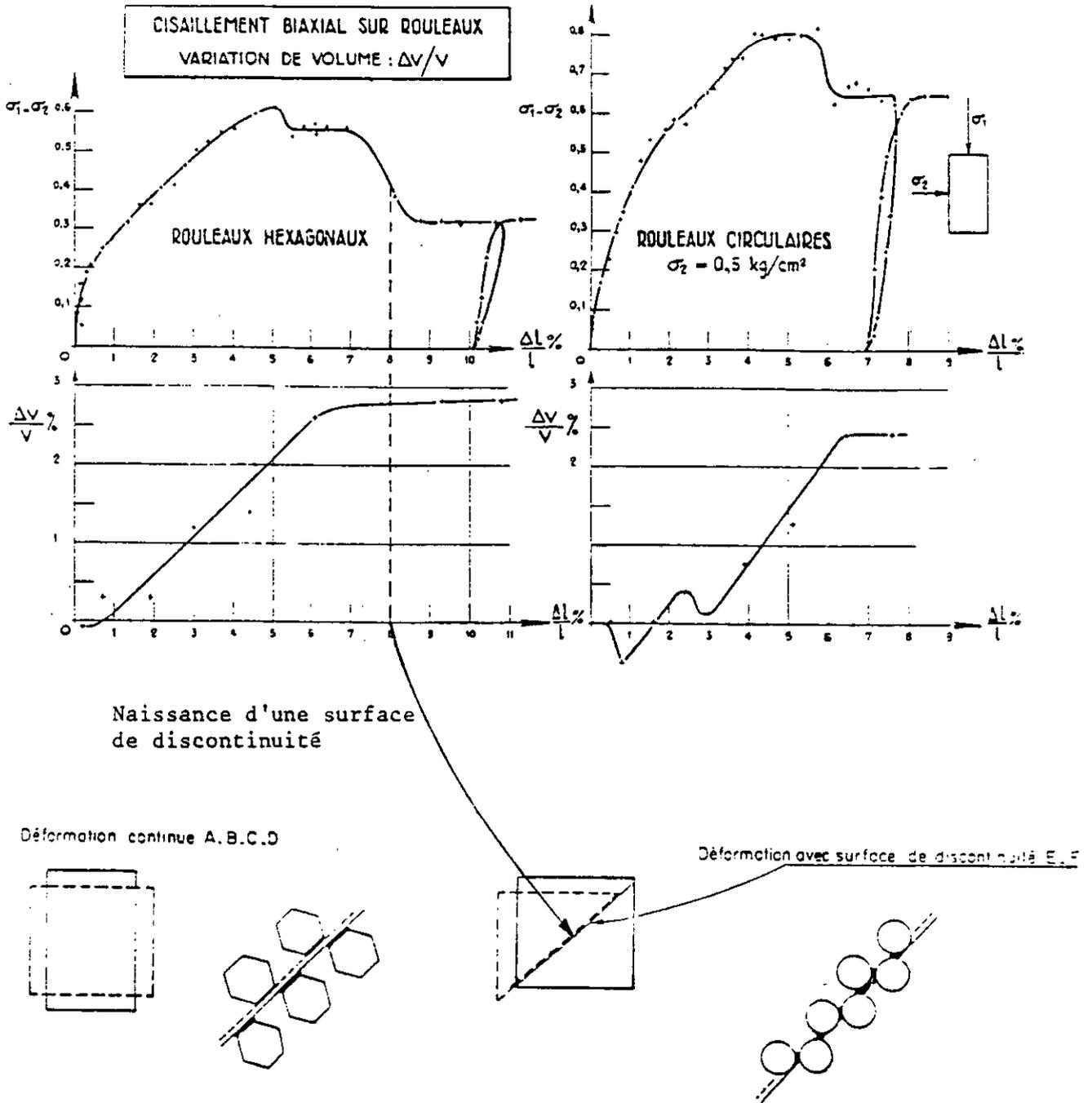


Fig. 6.2. Cisaillement biaxial sur rouleaux, d'après Biarez.

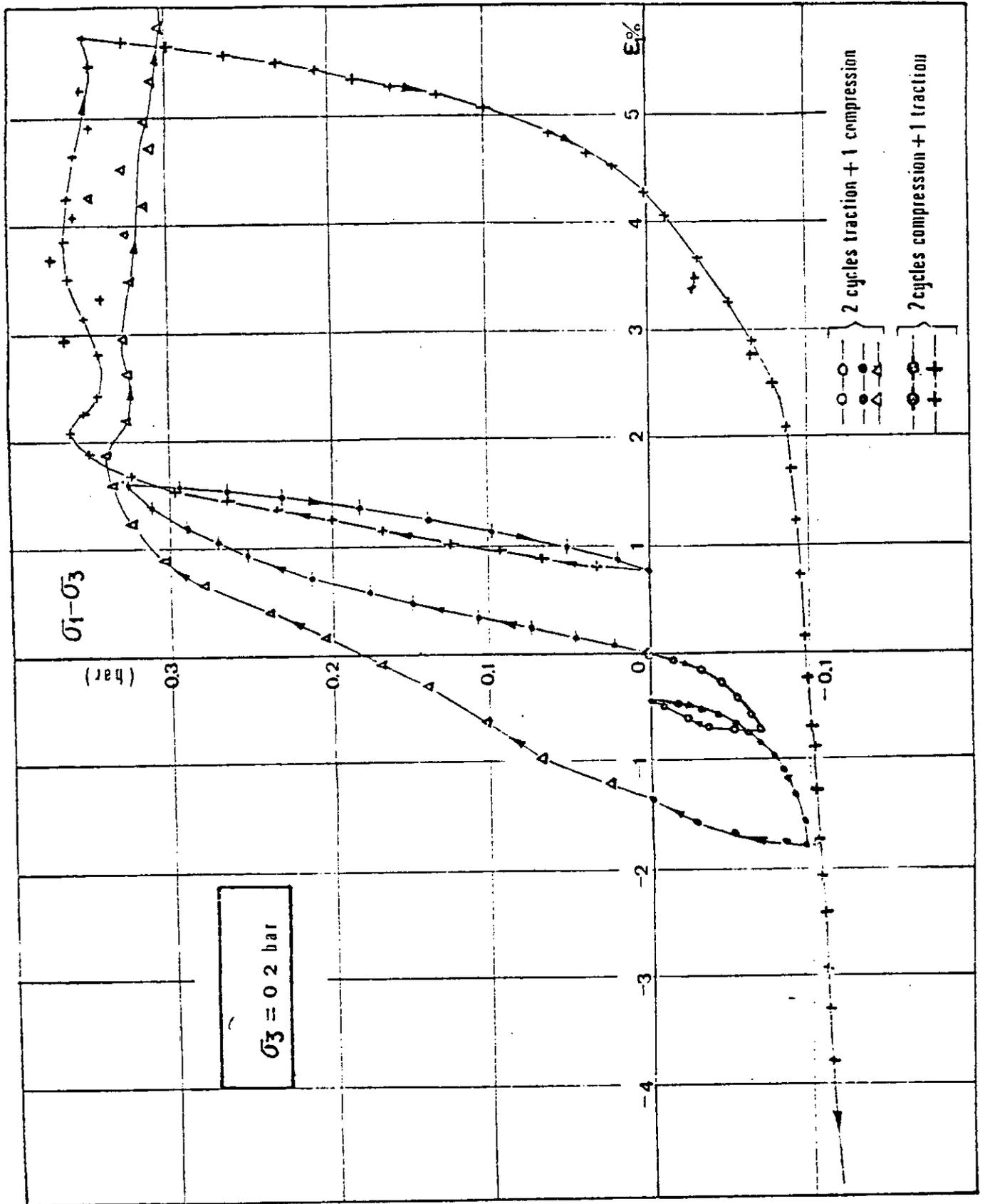


Fig. 6.3 Essais biaxiaux sur rouleaux (d' après Biarez)

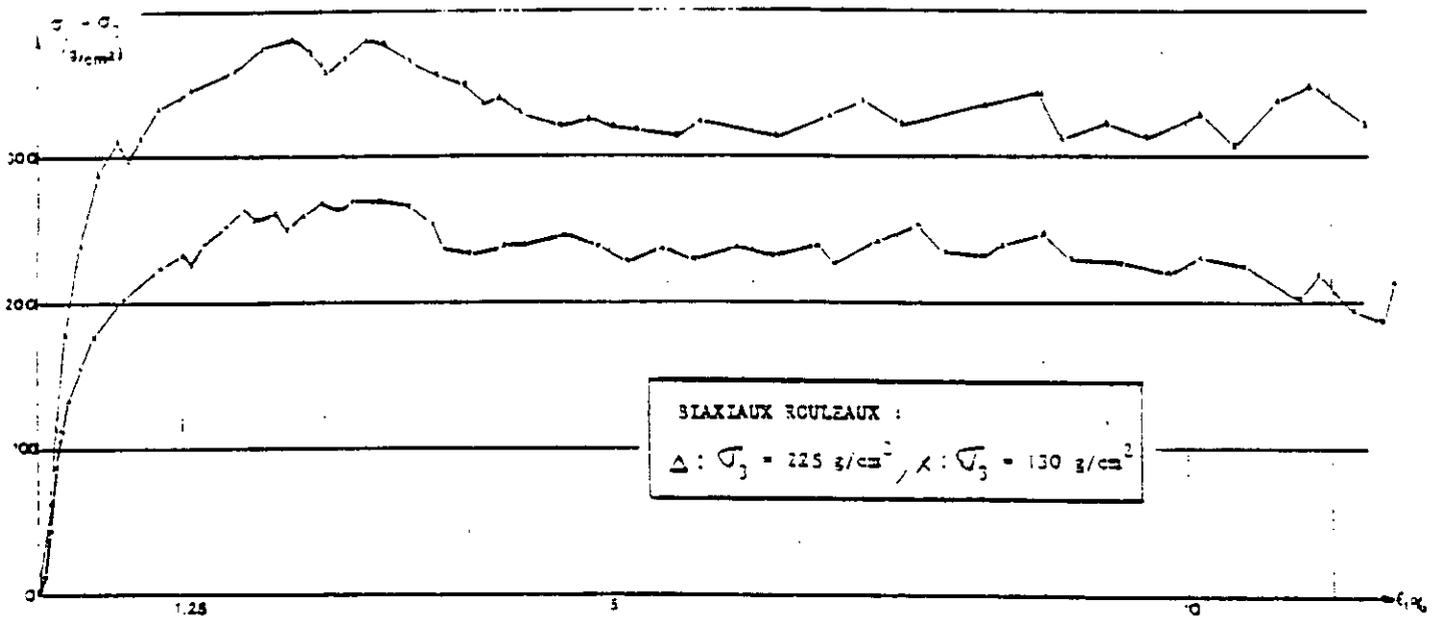


Fig. 6.4: Essai biaxial sur le matériau de Schneebeil.

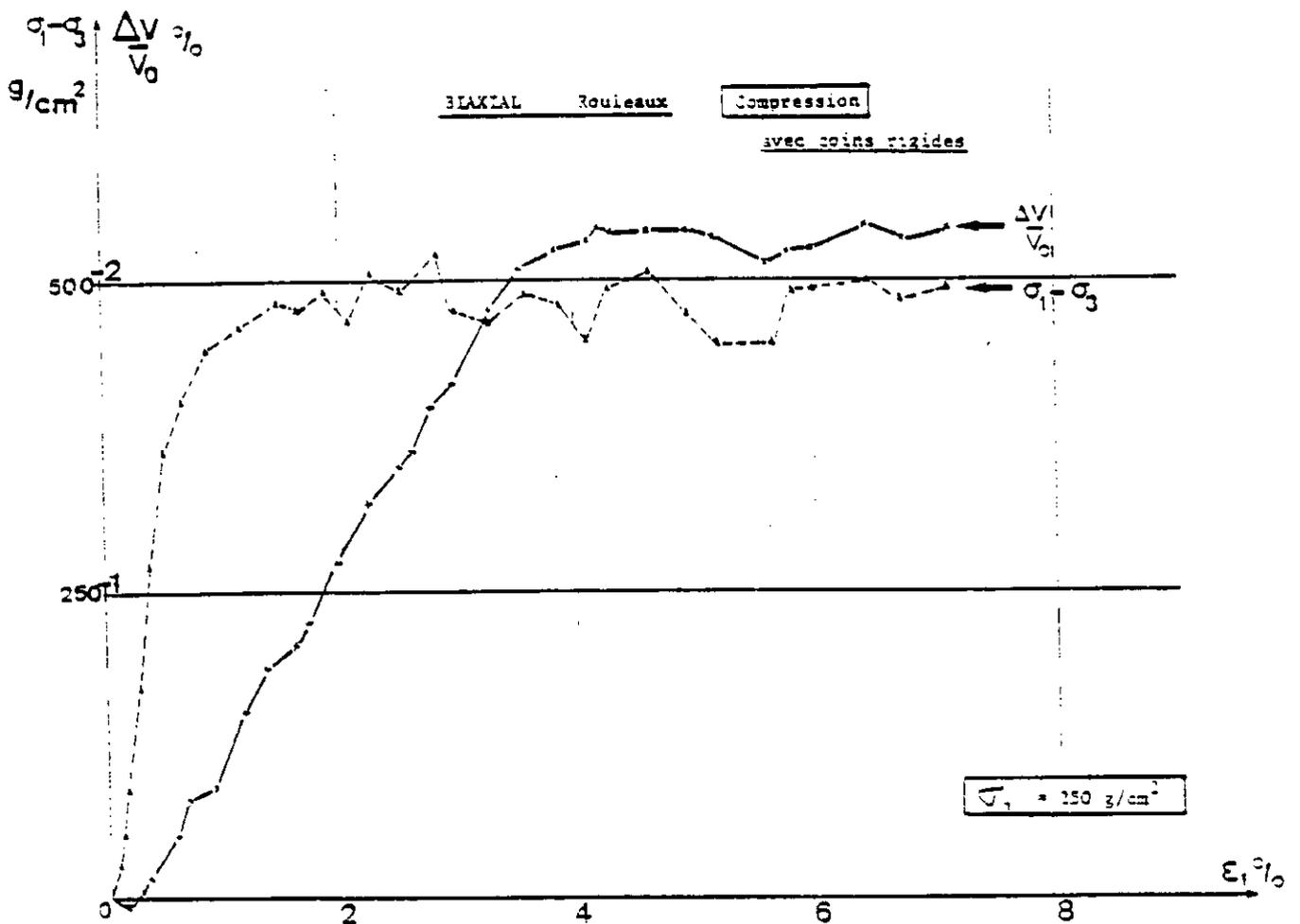
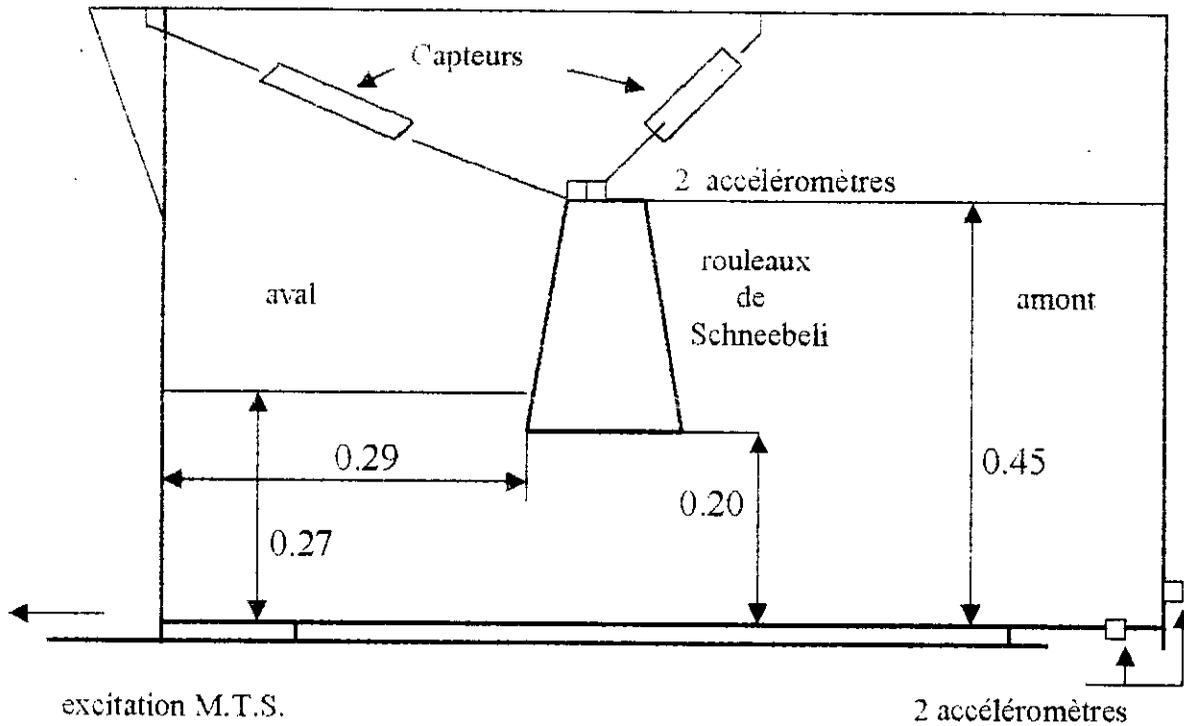


Fig. 6.5: Essai biaxial avec mesure de variation de volume



Mur poids

Base : 12 cm

Largeur au sommet : 8,5 cm.

Hauteur : 20 cm

Bâti

Longueur : 100 cm

Hauteur : 60 cm

Figure 6.7 : Schéma descriptif du dispositif expérimental pour les murs poids.

Les caractéristiques mécaniques, nécessaires pour la formulation de la loi hyperbolique sont déterminées à partir de nombreux résultats d'essais biaxiaux sur des échantillons du matériau : les résultats obtenus sont :

Coefficient de chargement	$K_{ch} = 460$
Coefficient de déchargement	$K_{ur} = 500$
Exposant de la loi de Duncan	$n = 0.84$
Angle de frottement résiduel	$\varphi_{cv} = 23^\circ$
Angle de frottement au pic	$\varphi_{pic} = 26^\circ$
Coefficient de rupture	$R_f = 0.86$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.9$
Densité	$G = 2.25$

Pour le comportement élastique du matériau de Schneebeli, les résultats obtenus sont les suivants :

Module d'élasticité $E = 10 \text{ Mpa}$

Coefficient de Poisson $\nu = 0.9$

Pour le modèle de Drucker-Prager en élasticité parfaite les paramètres du modèle sont déterminés à partir de l'angle de frottement interne donnés ci-dessus et de la cohésion ici nulle, compte tenu de la correspondance établie en 000 de ce modèle avec le modèle de Mohr-Coulomb.

1b) Modélisation géométrique

Pour la modélisation géométrique du modèle réduit figure(6.7) nous avons considéré plusieurs maillages possibles en éléments isoparamétriques quadrilatéraux à huit nœuds (voir figure 6.8). Nous avons constaté que les maillages avec les formes les plus régulières, sans variations brusque de section étaient les plus stables. Nous avons remarqué en plus que le fait de négliger la fine couche de '2cm' d'ancrage du mur de soutènement n'influençait pas du tous les résultats obtenus et qu'au contraire une meilleure stabilité dans le processus itératif était constatée. Nous avons aussi optimisé le nombre d'élément. C'est finalement le maillage de la figure 6.9 que nous avons adopté.

6.3.2 Approche élastique

Une première approche élastique à été effectuée. Les résultats concernant les déplacements horizontaux ou verticaux ainsi que les accélérations du sommet du mur, sont portés sur la figure 6.11 et 6.12. Les déplacements et les accélérations pour le mur sont nettement inférieurs à ceux observés (figure 6.10). Les déplacements obtenus en prenant un module d'élasticité variable sur la hauteur de la couche donnent de bien meilleur résultat que ceux obtenus avec un module constant. Le modèle élastique avec module constant donne des accélérations pour le mur nettement inférieur que le modèle avec module variable. Le modèle avec module variable donne des accélérations nettement plus grandes que celles observées avec le modèle à module constant. Ceci s'explique par la position de la fréquence propre des modèles considérés par rapport à la fréquence d'excitations.

6.3.3 Application du modèle de Duncan

1) Nécessité de redéfinir un module tangent minimum pour les faibles niveaux de contraintes

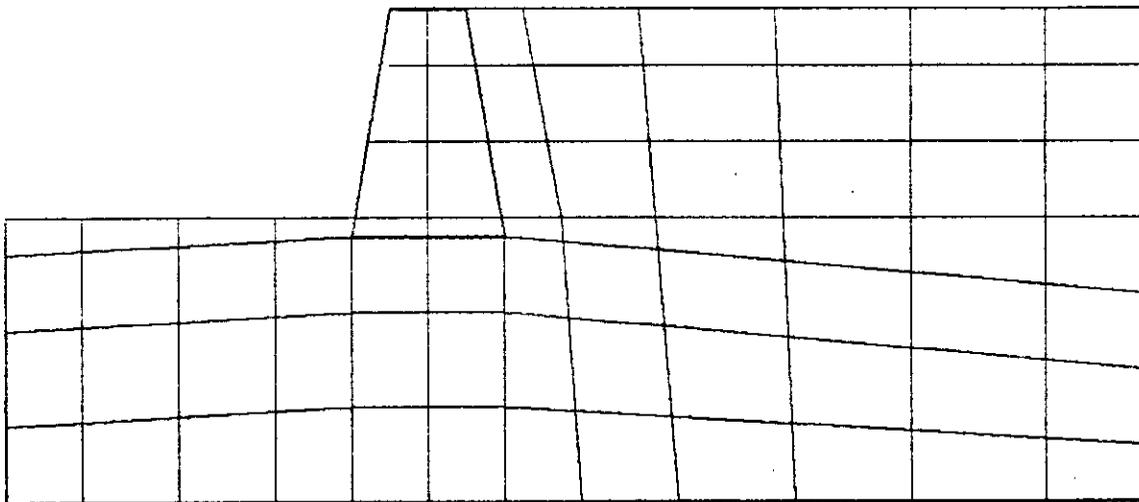
Le modèle de Duncan modifié recommandait en cas de faibles contraintes de limiter le module tangent initial à un minimum E_{min} égal à 5% de la pression atmosphérique P_{atm} . Or pour le modèle réduit à l'état statique ou dynamique toutes les contraintes dans le massif étaient inférieures à ce minimum. Si on applique au mot cette recommandation faite pour un modèle réel, on se retrouve automatiquement dans un cas élastique du fait de la réduction des contraintes quasiment proportionnel à la réduction des dimensions du modèle et par conséquent comme nous l'avons constaté précédemment, on a une sous estimation de la réponse en déplacement. Pour surmonter ce problème afin de tenir compte du fait que nous avons affaire à un modèle réduit, il a fallut reconsidérer cette limitation à la baisse et estimer ce minimum par un balayage de E_{min} . Nous avons constaté que plus sa valeur est grande, plus on se rapproche de la réponse élastique, avec des déplacements d'autant plus petit que E_{min} est grand. Le fait de prendre E_{min} nul conduit à une instabilité de la réponse qui se traduit généralement par une divergence. De plus nous avons préféré évaluer ce minimum non plus par rapport à la pression atmosphérique mais plus précisément par rapport au module tangent initial au point de Gauss considéré, ce qui

nous donne un module tangent minimum pour les faibles taux de contraintes variables avec les coordonnées du point. Nous avons considéré successivement les valeurs suivantes

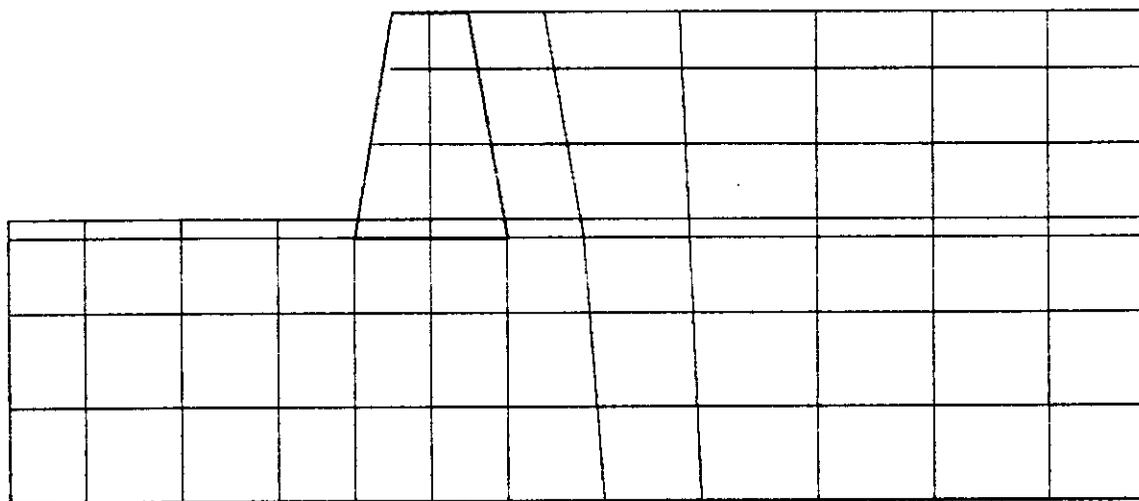
E_{min}	0.	$E_0/2$	$E_0/5$	$E_0/10$	$E_0/25$	$E_0/50$	$E_0/100$
-----------	----	---------	---------	----------	----------	----------	-----------

Nous présentons figure 6.13 les résultats obtenus pour les déplacements horizontaux dans l'intervalle pour $t < 0.7s$. Ce choix de l'intervalle de temps a été conditionné par le fait que nous avons les résultats du modèle pour cet intervalle de temps (figure 6.10) et aussi pour des considérations de temps de calcul.

Nous constatons que les cas $E_{min}=E_0/25$ et $E_{min}=E_0/50$ sont les plus conformes aux observations effectuées.

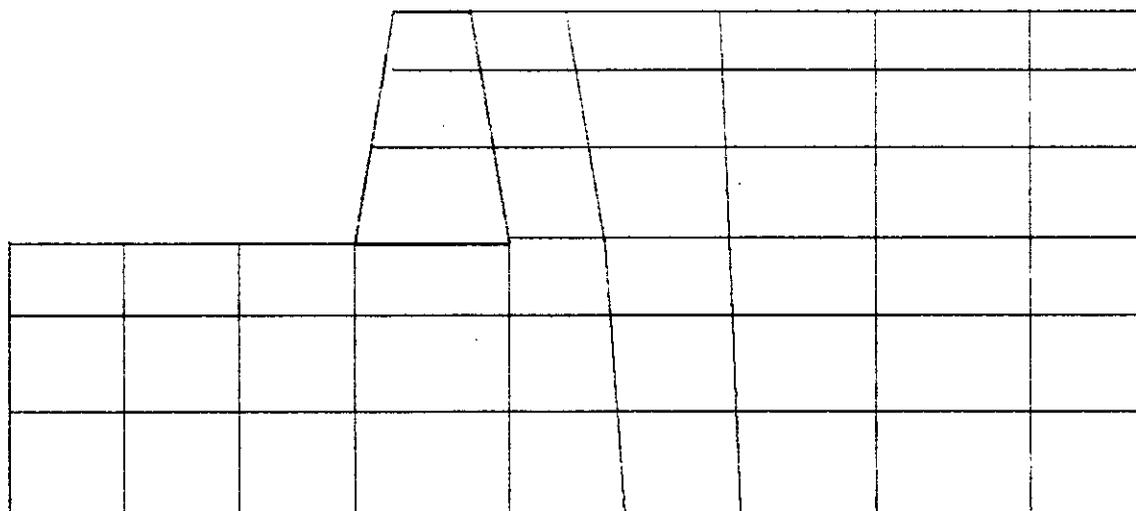


MAILLAGE 1



MAILLAGE 2

Figure 6.8 : Exemples de maillages testés (modèle réduit)



MAILLAGE 3

Figure 6.9 : Maillages (modèle réduit)

2 Effet de l'état initial

Dans tout calcul non linéaire, il est important d'avoir une bonne évaluation de l'état initial du matériau. Duncan recommande en statique de prendre pour champ de contrainte initiale celui du sol au repos obtenu en prenant pour la contrainte verticale la pression du au poids du sol et surcharges surmontant le point de Gauss considéré et pour la contrainte normale celle obtenu en multipliant la contrainte verticale par le coefficient de poussée des terres K . Ce dernier est déterminé à partir de l'angle de frottement interne du matériau et des limitations

$$K_a = \operatorname{tg}^2(\pi/4 - \varphi/2) \leq K \leq K_0 = 1 - \sin \varphi$$

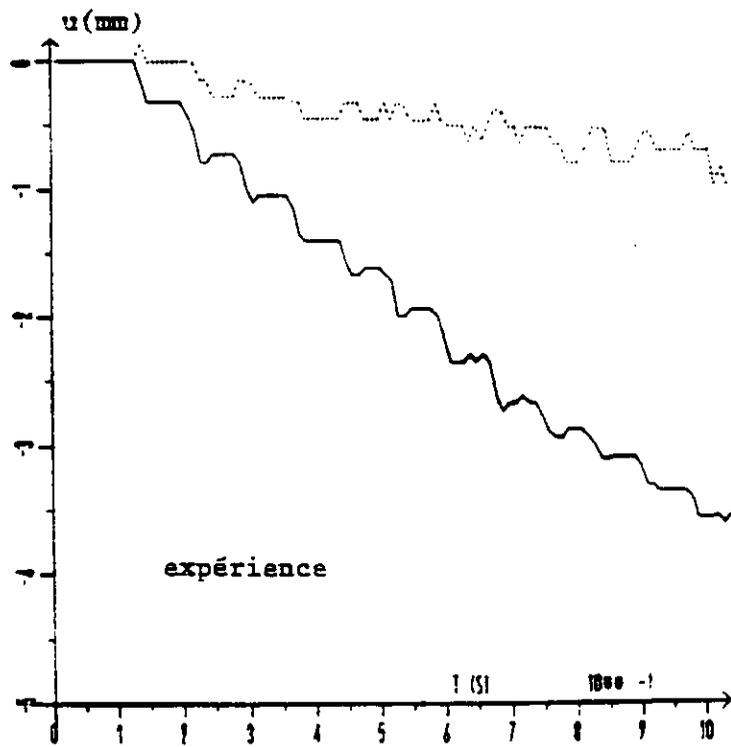
pour le matériau de Schneebeli, la valeur de φ est de 26° , ce qui impose

$$0.39 \leq K \leq 0.56$$

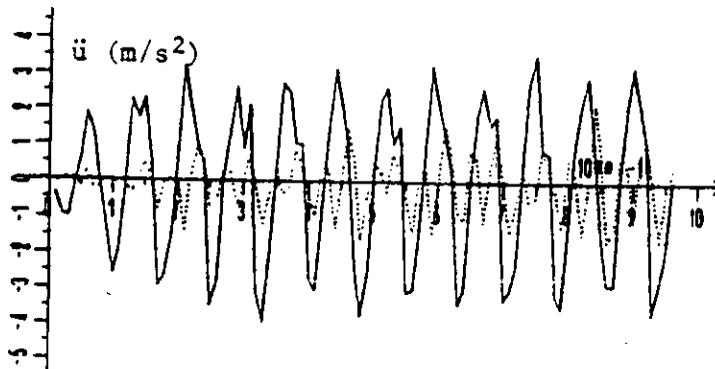
Nous avons fait les calculs avec :

K	0.4	0.45	0.5
---	-----	------	-----

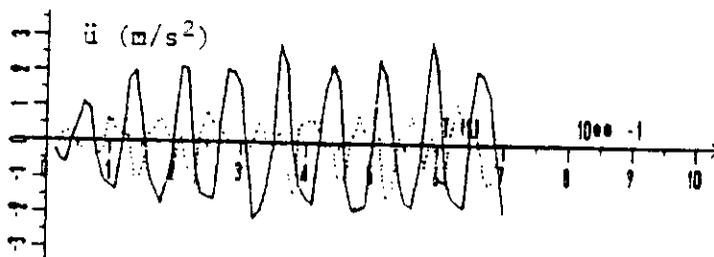
Nous présentons les résultats obtenus pour ces différentes valeurs de K sur la figure 6.14. On constate que l'état initial joue un rôle déterminant. Il influe fortement sur l'allure de la courbe de réponse en déplacement ainsi que sur l'amplitude de ce déplacement. L'évaluation de cet état initial par un calcul statique non linéaire en incrémentant la pesanteur par pas de $0.1g$ (souvent appliqué dans la pratique) semble donné des résultats plus conformes à ceux observé expérimentalement aussi bien pour l'allure de la courbe que pour la grandeur des déplacements observés.



(a) déplacements au sommet du mur



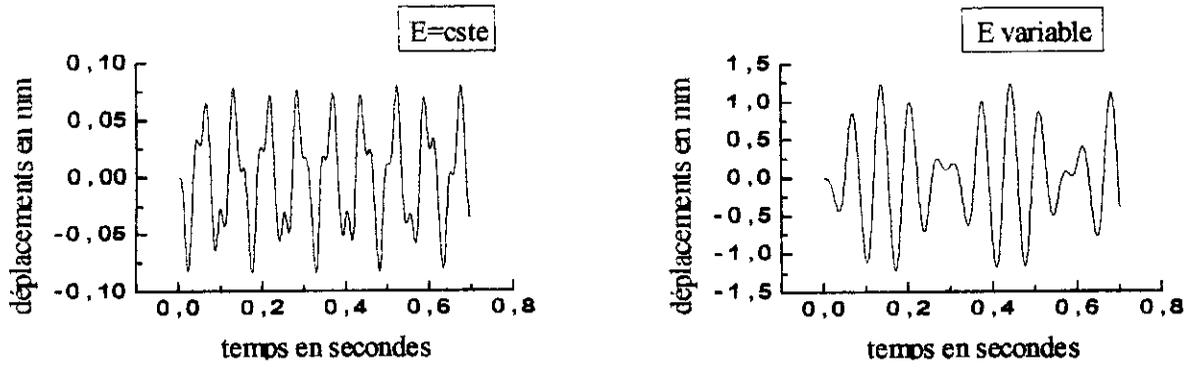
(b) Accélérations au sommet du mur



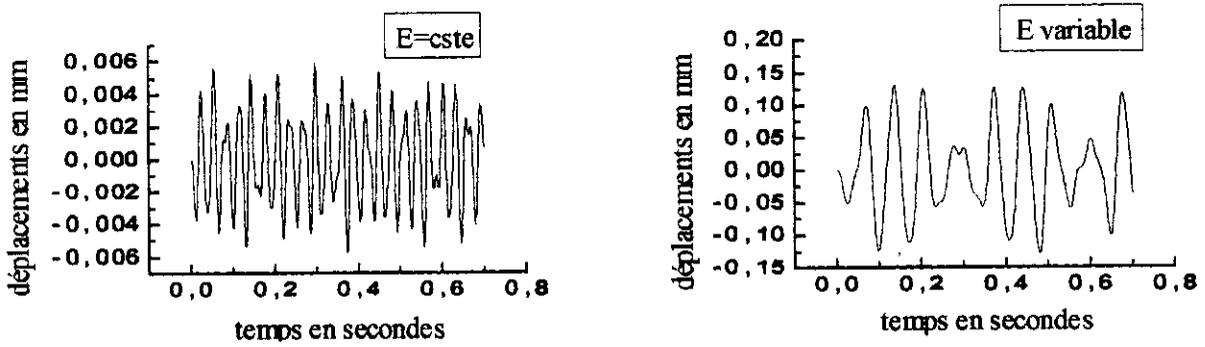
Expérience - Sollicitation à la base du cadre
Enregistrement expérimental

Figure 6.10 : résultats expérimentaux sur modèle réduit

(— horizontale , - - - verticale)

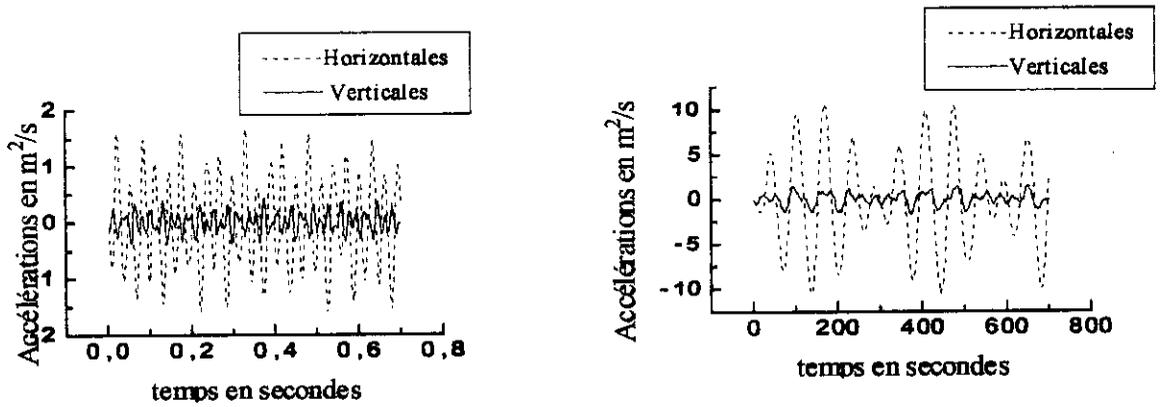


a) déplacements horizontaux



b) Déplacements verticaux

Figure 6.11 Déplacements du sommet du mur (modèle élastique)



a) E = constante

b) E = variable

Figure 6.12 Accélérations du sommet du mur (modèle élastique)

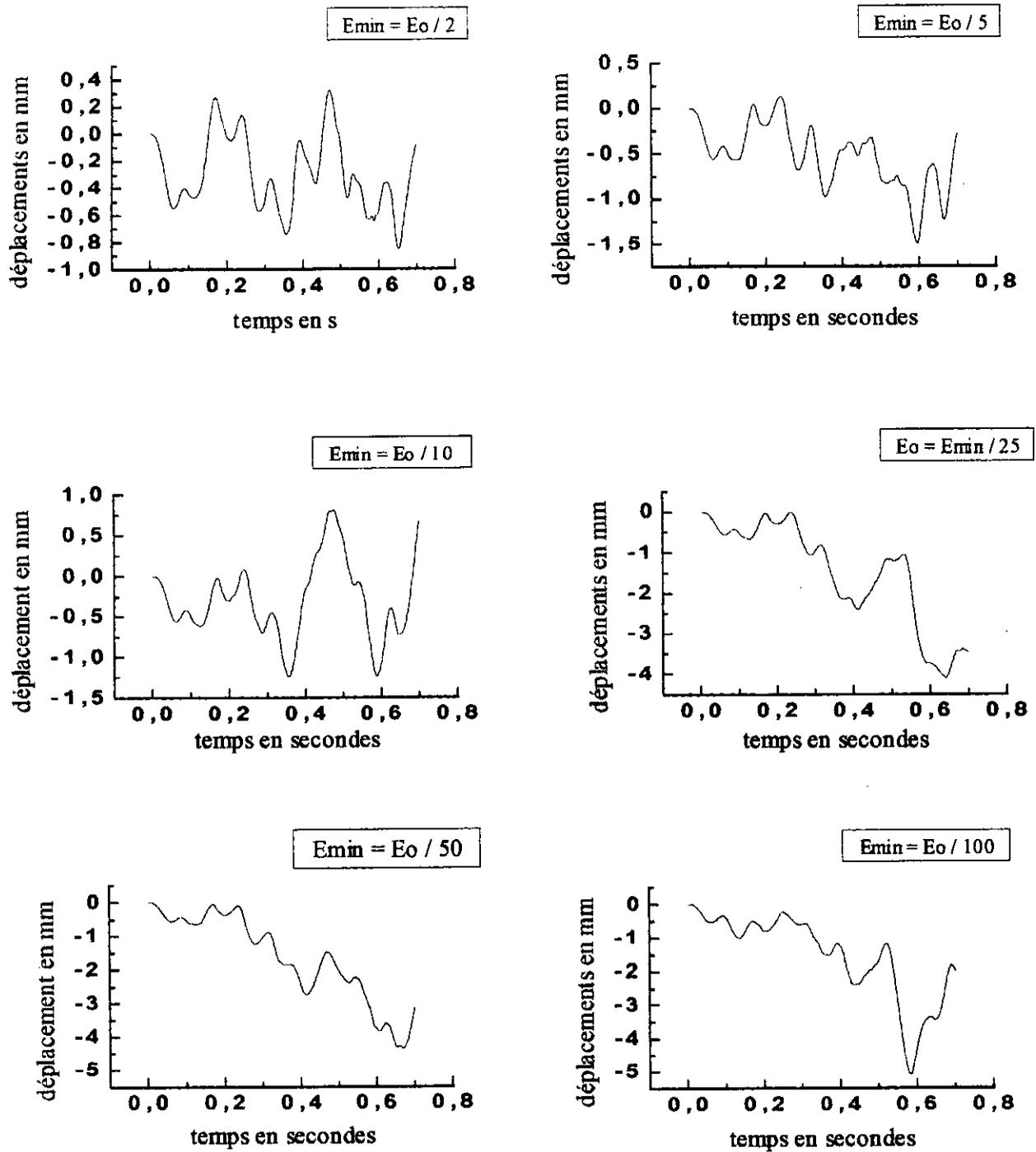
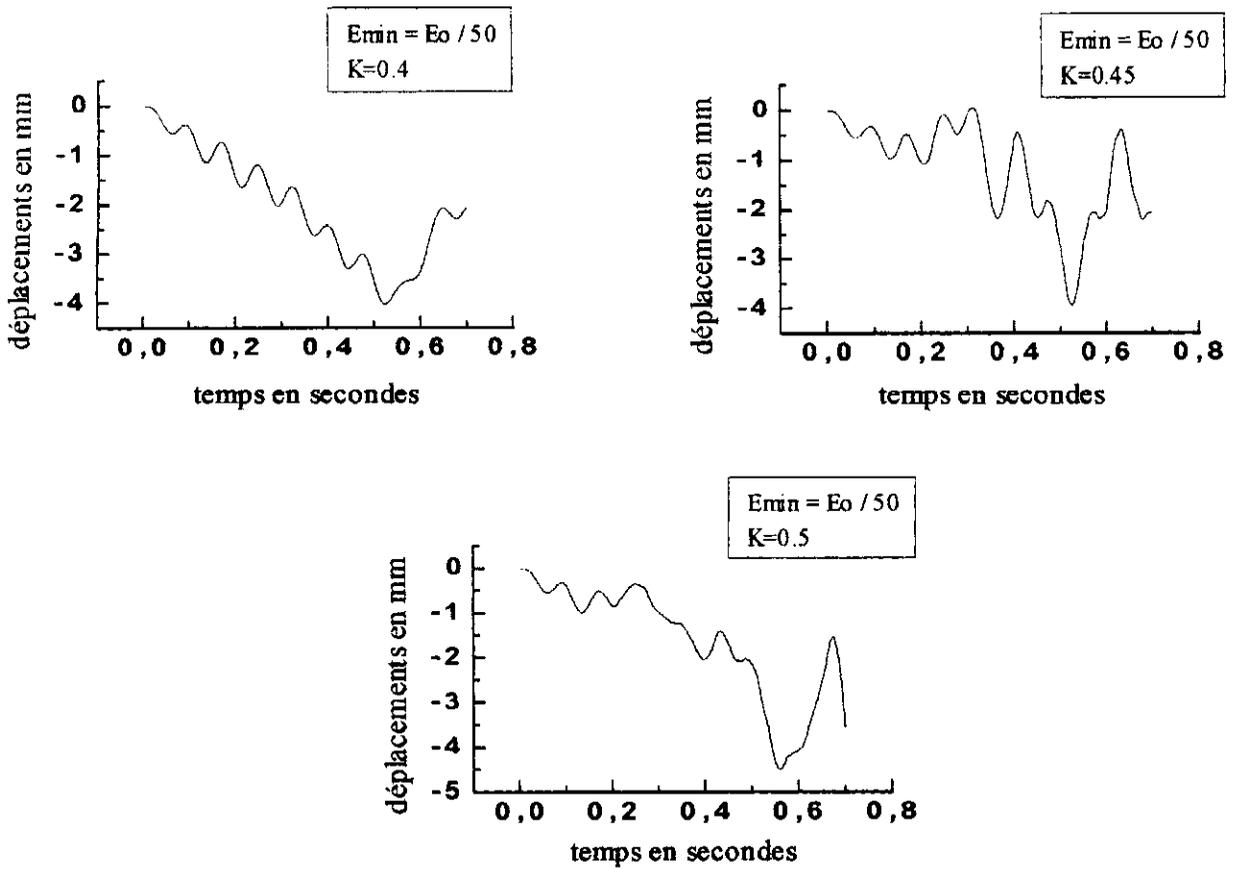
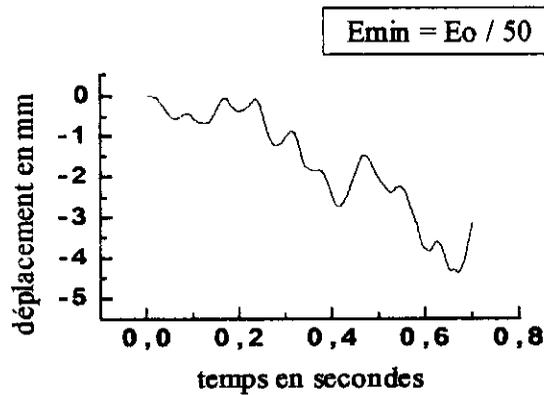


Figure 6.13 : Déplacements horizontaux du sommet du mur
Influence de la définition de E_{min}



a) Initialisation statique : $\sigma_x = K\sigma_z$ $\sigma_z = \gamma z + p$



b) Initialisation par incrémentation initiale de la pesanteur par pas de 0.1g.

figure6.14 influence de l'état initial : Déplacements horizontaux de la tête du mur.

3) Effets de l'accélération

Afin de mettre en évidence les effets de la grandeur l'accélération sur le modèle réduit nous avons effectué des calculs en prenant pour l'amplitude moyenne A de l'excitation les valeurs suivantes :

A	0.16g	0.25g	0.35g
-----	-------	-------	-------

Où g représente l'accélération de pesanteur

Les résultats obtenus pour le déplacement horizontal sont présentés sur la figure 6.15. On constate que plus l'amplitude de l'accélération est forte plus les déplacements horizontaux sont importants.

4) Effets de la masse du mur

Comme Chouvet l'avait constaté expérimentalement, il faut un certain laps de temps pour que le mur poids lourd se mette en mouvement. Durant ce laps de temps les déplacements du mur légers sont bien supérieurs à ceux du mur poids lourd. Expérience donnait pour ce laps de temps environ 1,8 s. Les déplacements finaux pour le mur poids lourd étaient bien supérieurs à ceux du mur poids léger.

Les résultats obtenus avec le modèle de Duncan présentés sur la figure 6.16 pour les déplacements horizontaux sont conformes aux résultats observés.

5) Déplacements verticaux

Contrairement aux déplacements horizontaux, les déplacements verticaux obtenus avec le modèle de Duncan sont généralement supérieurs à ceux observés et ont une tendance à se développer dans le sens de la décompression du terrain, sens dans lequel les modules tangents deviennent minimums du fait de la chute de la contrainte principale mineure (donc les déformations plus grandes).

La figure 6.17 illustre cette constatation.

6) Rotations du mur

La figure 6.18 représente la variation de la rotation du mur léger par rapport à son centre de gravité par rapport au temps. On constate que cette rotation est faible. C'est ce qui avait été constaté expérimentalement par Chouvet réf.12 sur cet intervalle de temps.

7) Accélérations

La figure 6.19 et 6.20 représente la variation des accélérations respectivement horizontales et verticales par rapport au temps du sommet du mur. L'état initial considéré influe sur la grandeur de cette variation. On constate que lorsque l'état initial est obtenu par incrémentation de la pesanteur de 0.1g, les résultats que l'on obtient sont plus conformes aux résultats expérimentaux.

6) Résultantes des contraintes normales sur le mur et points d'applications des résultantes.

Les figures 6.21 et 6.22 représente respectivement la variation de la résultante des forces horizontales des pressions dynamiques totales agissant sur le mur et la variation de la position du centre d'application de cette résultante par rapport à la base du mur.

On constate que la position du centre d'application se situe autour du centre du mur, avec des incursions dans la partie supérieure.

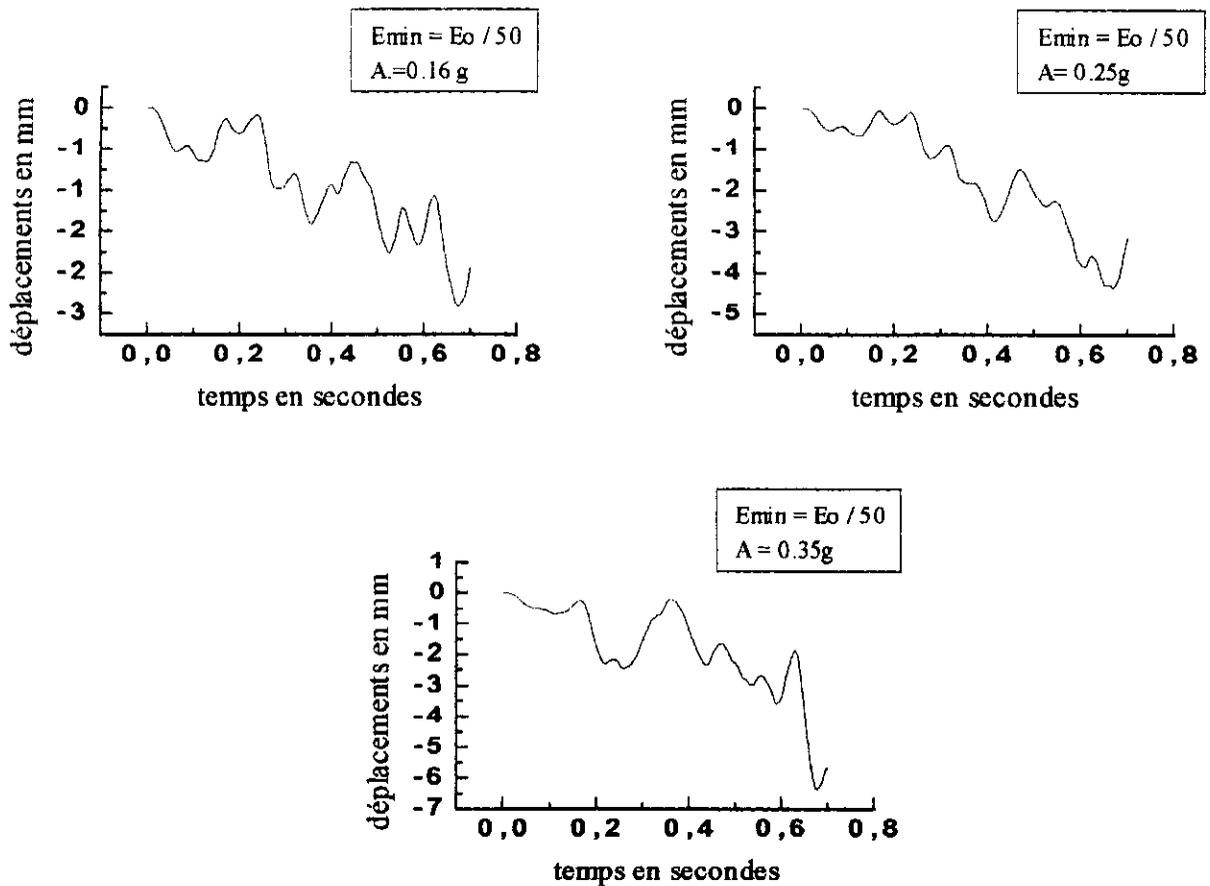


Figure 6.15 : Déplacements horizontaux du sommet du mur (modèle de Duncan) : Effets de l'amplitude de l'accélération

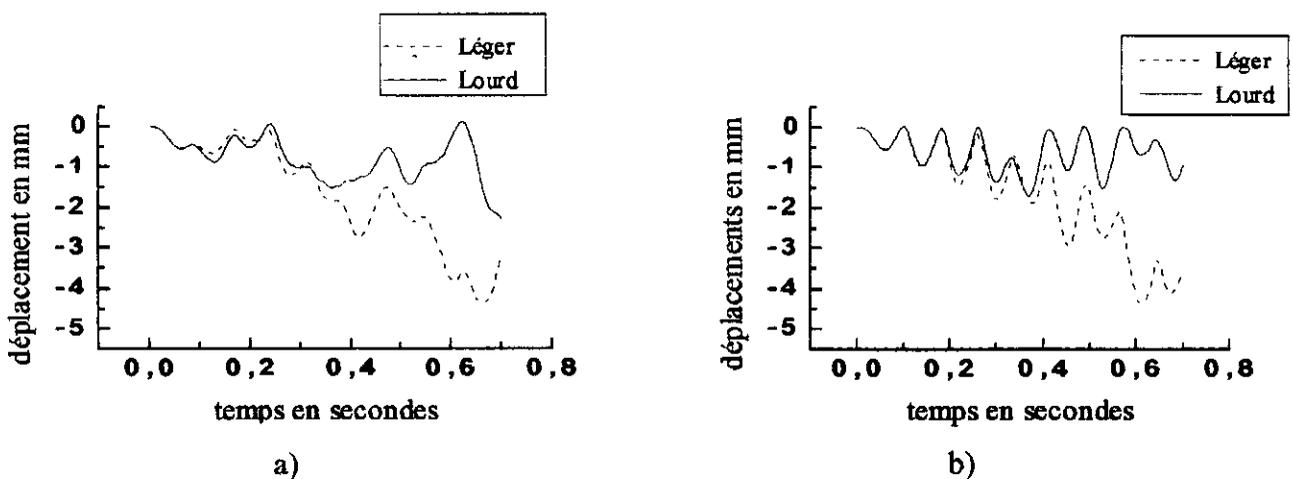
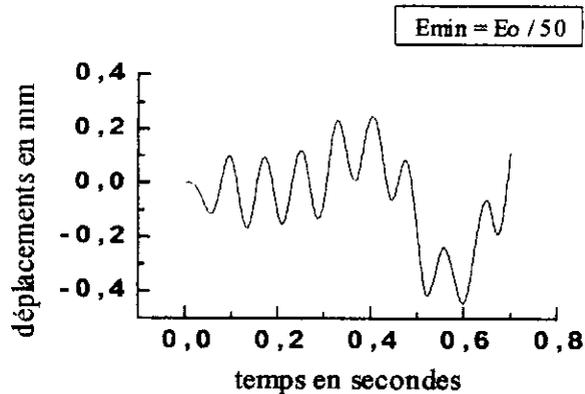
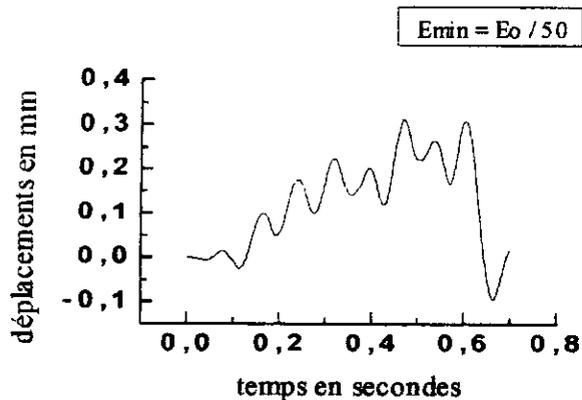
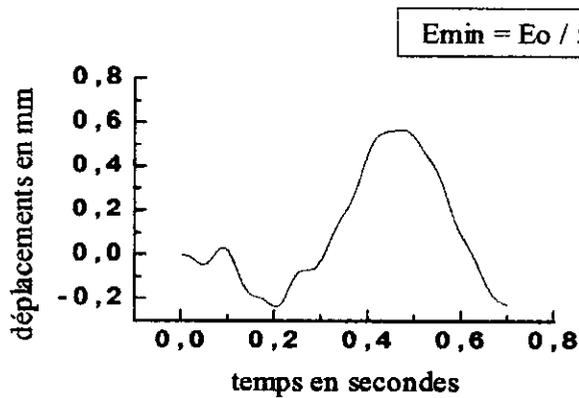


Figure 6.16 : Comparaison du déplacement a) de la tête du mur et b) de la base du mur, pour les murs poids lourds et légers (modèle de Duncan).



a) maillage 3 et état initial obtenu par incrémentation de 0.1g

b) maillage 3 et état initial $\sigma_x = K\sigma_z \quad \sigma_z = \gamma z + p$



c) maillage 1 et état initial obtenu par incémentation de 0.1g

Figure 6.17 : Déplacements verticaux (modèle de Duncan)

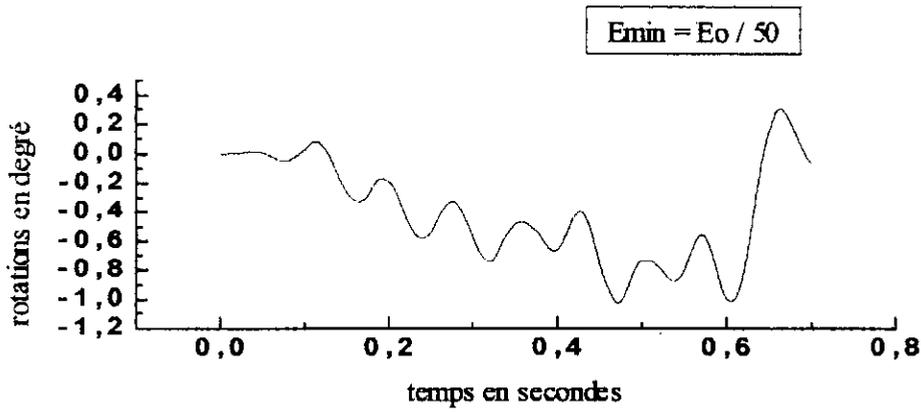
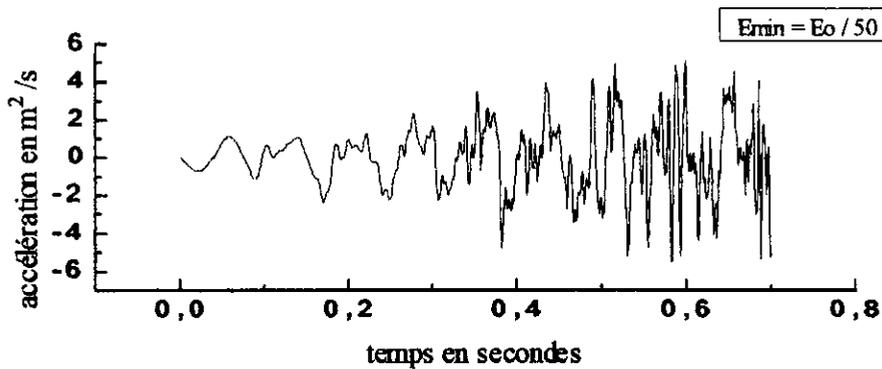
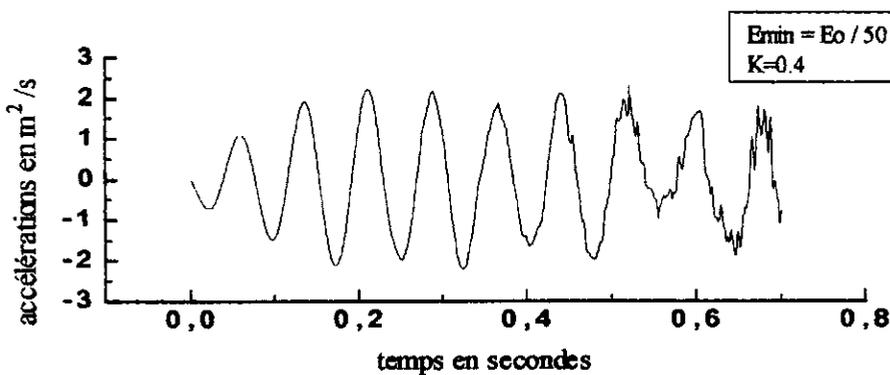


Figure 6.18 Rotation du mur par rapport à son C.D.G (sens positif : sens trigonométrique) (modèle de Duncan)



a)

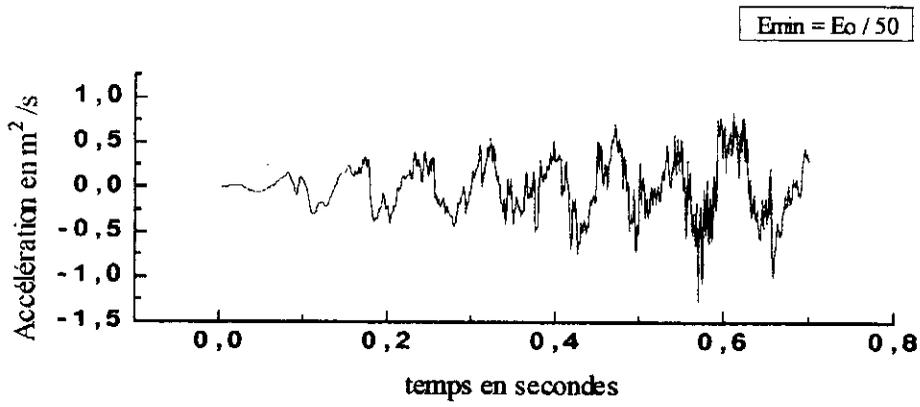


b)

Figure 6.19 accélérations horizontales de la tête du mur (modèle de Duncan) :

a) état initial par incrémentation de 0.1g

b) état initial : état de poussée



a)

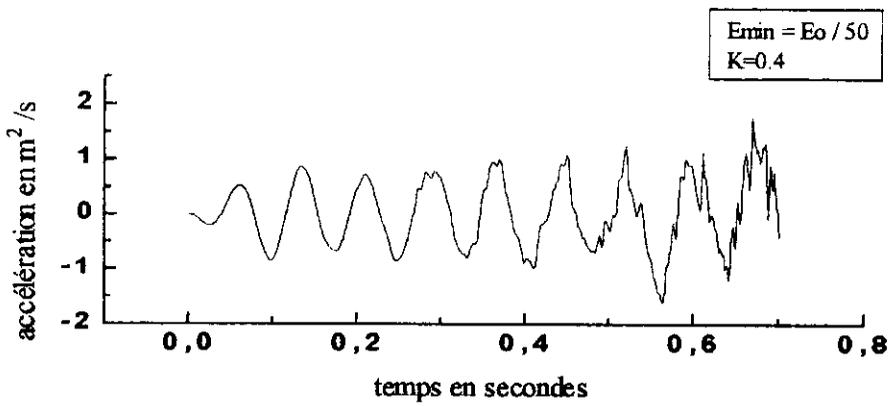


Figure 6.19 accélérations verticales de la tête du mur (modèle de Duncan) :

a) état initial par incrémentation de 0.1g

b) état initial : état de poussée

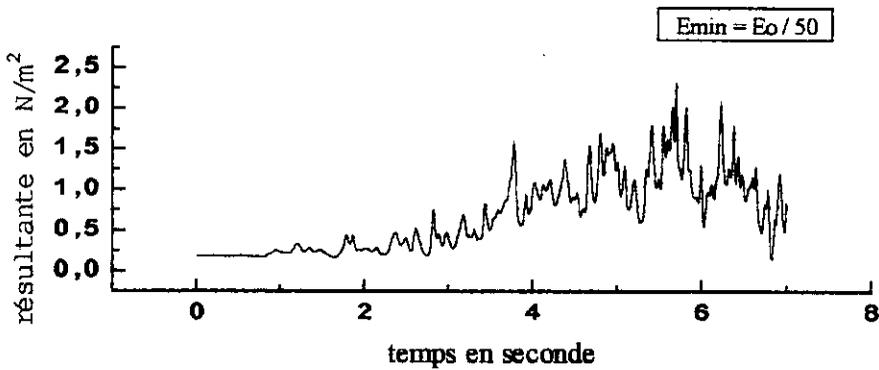


Figure 6.21 Résultantes des forces de pression sur le mur. (modèle de Duncan).

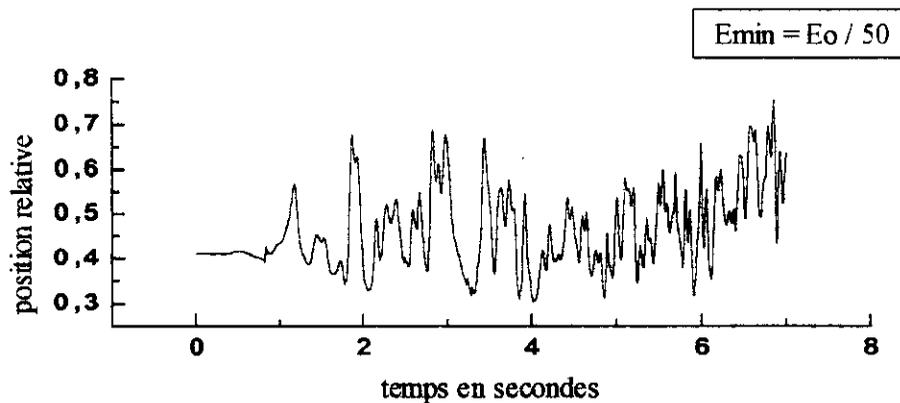


Figure 6.22 Position relative du point d'application de la résultante par rapport à la base du modèle (modèle de Duncan)

6.3.4 Application du modèle élasto-plastique.

Nous avons appliqué le modèle élasto-plastique en considérant tout d'abord pour module élastique celui donné dans la littérature pour le matériau de Schneebeli soit $E = 10000 \text{ KN/m}^2$. Avec une telle valeur pour le module on a constaté que la réponse du mur était très inférieure à la réponse observée expérimentalement et même à la réponse élastique. Ceci s'explique par l'amortissement introduit par le modèle d'une part et d'autre part par la variation permanente de la fréquence propre du système sol-structure du fait des variations de la matrice de rigidité du système.

On a alors effectué un d'autres calculs en prenant un module d'élasticité variable suivant, l'état de contrainte initial au point de Gauss considéré. Ces modules ont été estimés à partir du module tangent initial donné par Duncan. Leurs valeurs de ces modules sont nettement plus petites que dans le cas précédent d'où un assouplissement de la structure initialement. Nous avons effectué les calculs en considérant deux états initiaux différents. Le premier donné par un calcul élasto-plastique par incrémentation de $0.1g$. Le deuxième en prenant l'état initial des terres au repos avec le coefficient de pression des terres au repos K_0 pris égal à $(1 - \sin \varphi_0)$. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6.23 à 6.26. Ils n'en demeurent pas moins inférieurs aux résultats expérimentaux et même aux résultats obtenus pour un modèle élastique équivalent (même module élastique) pour des raisons citées plus haut.

Par conséquent, on a préféré ne pas donner de suite à ce modèle, lequel est d'autant plus, très instable du fait des variations brusques de rigidités lorsque l'on passe de l'état élastique à l'état plastique et du caractère dynamique de la sollicitation. De plus ce modèle ne représente pas dans l'intervalle de temps considéré le mode de déplacement du mur par à-coup.

6.3.5 Conclusions entre les comportements des différents modèles

Les différences principales entre les modèles de Duncan et élasto-plastique parfait sont que :

1) Dans le cas du modèle de Duncan toute décompression ou déchargement de l'état de contrainte au point de Gauss considéré s'accompagne d'une chute de la rigidité, vu que celle-ci est proportionnelle au coefficient de déchargement-rechargement et fonction de la contrainte principale mineure. Le coefficient en déchargement est voisin du coefficient en chargement :

Coefficient de chargement $K_{ch} = 460$

Coefficient de déchargement $K_{ur} = 500$

Exposant de la loi de Duncan $n = 0,84$

Par conséquent, celui-ci n'explique point la différence importante des comportements obtenus pour les deux modèles.

2) Par contre le fait que l'exposant de la loi de Duncan 'n' soit voisin de 1, fait que la rigidité varie dans le même sens que la contrainte principale mineure et par conséquent toute chute de cette dernière engendre une chute de la rigidité (nous rappelons que nous avons dû imposer une limite à cette chute par rapport à la valeur initiale E_0 au point considéré). On obtient par conséquent des déformations plus grandes.

Dans le cas du modèle élasto-plastique parfait en décompression nous retrouvons le comportement élastique initial et donc la valeur de la rigidité initiale E_0 , donc des déformations de beaucoup plus faibles que celles obtenues avec le modèle de Duncan.

3) Par contre en compression, pour les mêmes raisons, le modèle de Duncan donnera un module d'élasticité au point de Gauss inférieur au module initial E_0 , qui est le module utilisé dans le modèle élasto-plastique. Par conséquent le modèle de Duncan donnera des déplacements supérieurs à celui du modèle élasto-plastique parfait.

De plus sans pour une même variation de contrainte en compression ou décompression :

- Le modèle de Duncan donnera un déplacement plus important en décompression qu'en compression (au vu des rigidités largement plus faibles dans le cas de la décompression). Ce qui explique le déplacement du mur par à coup.
- Le modèle élasto-plastique pour cette même variation donnera un déplacement identique dans les deux cas. Ce qui explique que l'on n'obtient pas comme dans le modèle de Duncan un déplacement du mur par à coup.

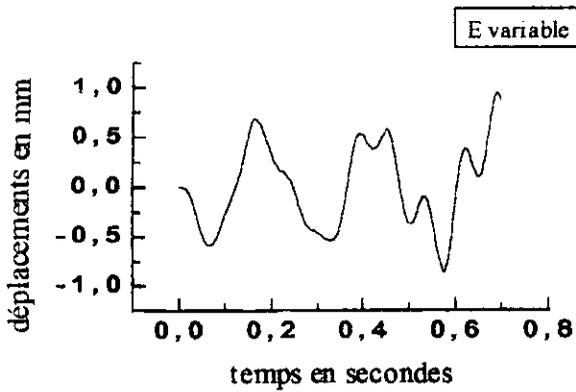
4) Au voisinage de la rupture par compression ou décompression, vu l'ordre des grandeurs de rigidité, les deux modèles donnent des ordres de grandeur en déplacements voisins.

Par contre, pour le modèle élastique le comportement est le même en compression ou décompression, le module d'élasticité ne variant pas au point de Gauss. Alors, la réponse sera principalement conditionnée par le rapport de la fréquence d'excitation à la fréquence propre du système sol-structure. Dans le cas élastique ce rapport est constant, ce qui n'est pas le cas pour les deux autres modèles non-linéaires, pour lesquels la fréquence propre du système varie continuellement.

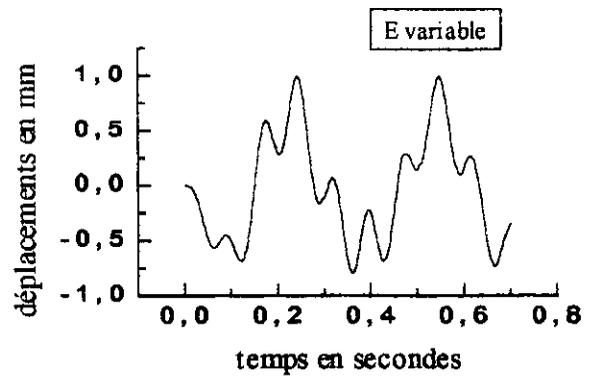
La considération simultanée de ces différents phénomènes fait que leurs effets peuvent parfois s'ajouter ou bien se compenser et ainsi donner des résultats tout à fait inattendus.

Au vu des résultats obtenus, il apparaît que le modèle de Duncan semble le plus conforme aux résultats obtenus pour les déplacements horizontaux du mur, ces derniers étant les plus prépondérants.

Nous n'avons pas présenté les résultats pour le modèle viscoélastique, ces derniers étant bien inférieurs à ceux obtenus avec le modèle élastique.

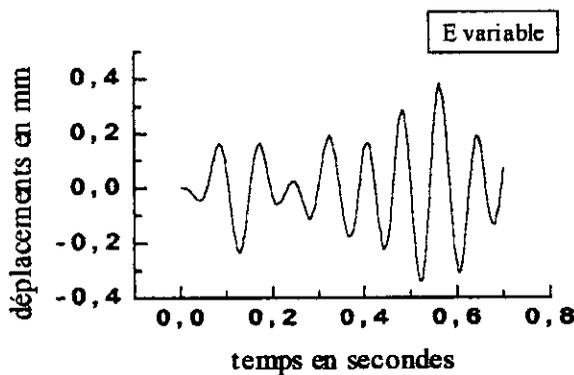


a) état initial des terres au repos

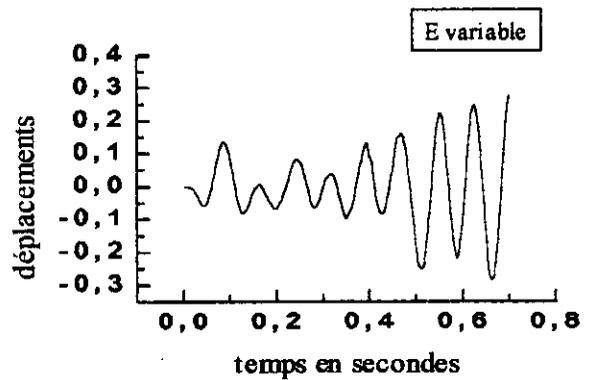


b) état initial par incrémentation de 0.1g

Figure 6.23 Déplacements horizontaux de la tête du mur (modèle élasto-plastique parfait)

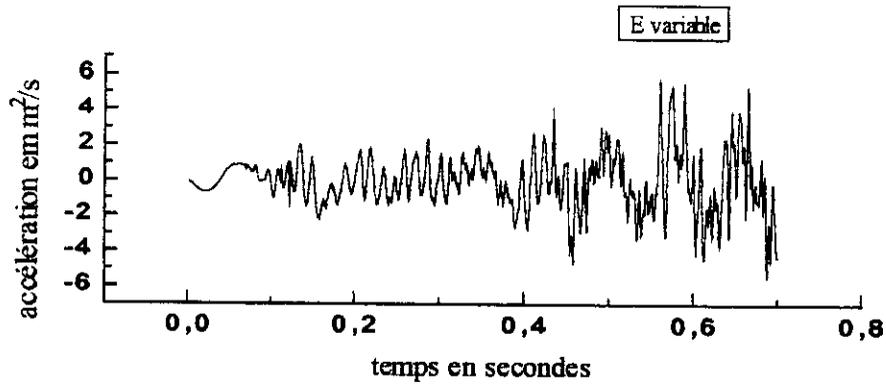


a) état initial des terres au repos

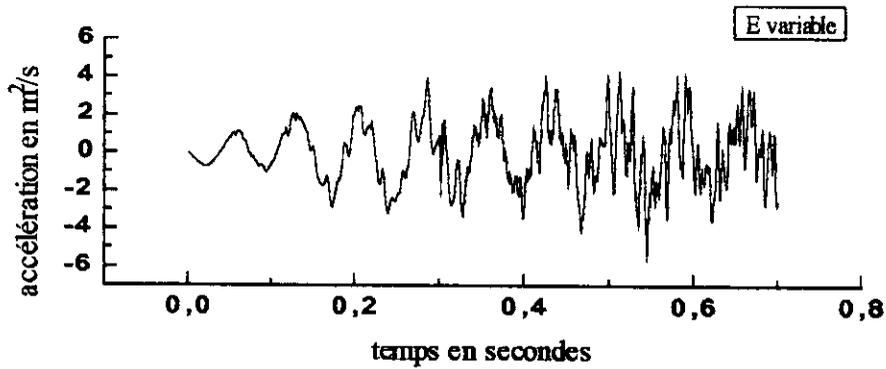


b) état initial par incrémentation de 0.1g

Figure 6.24 Déplacements verticaux de la tête du mur (modèle élasto-plastique parfait)

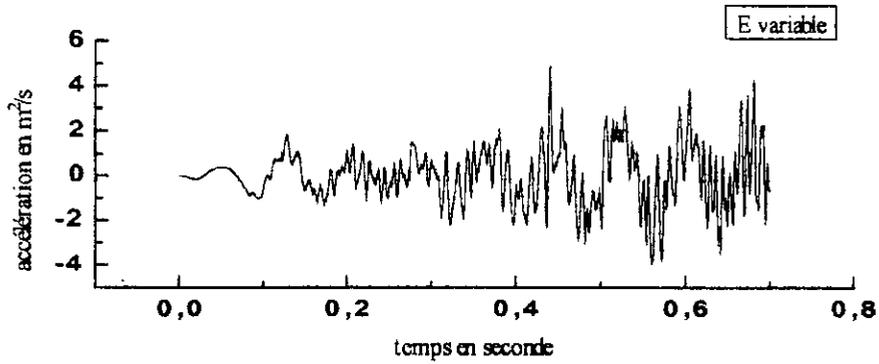


a) état initial des terres au repos

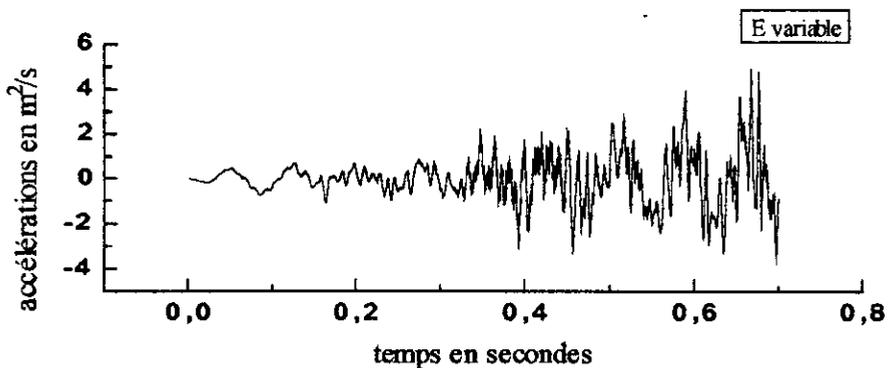


b) état initial par incrémentation de 0.1g

*Figure 6.25 Accélérations horizontales de la tête du mur
(modèle élasto-plastique parfait)*



a) état initial des terres au repos



b) état initial par incrémentation de 0.1g

*Figure 6.26 Accélérations horizontales de la tête du mur
(modèle élasto-plastique parfait)*

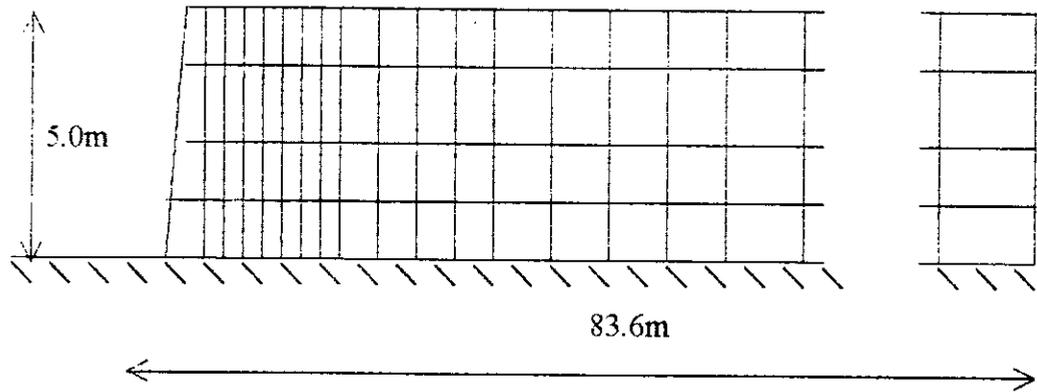
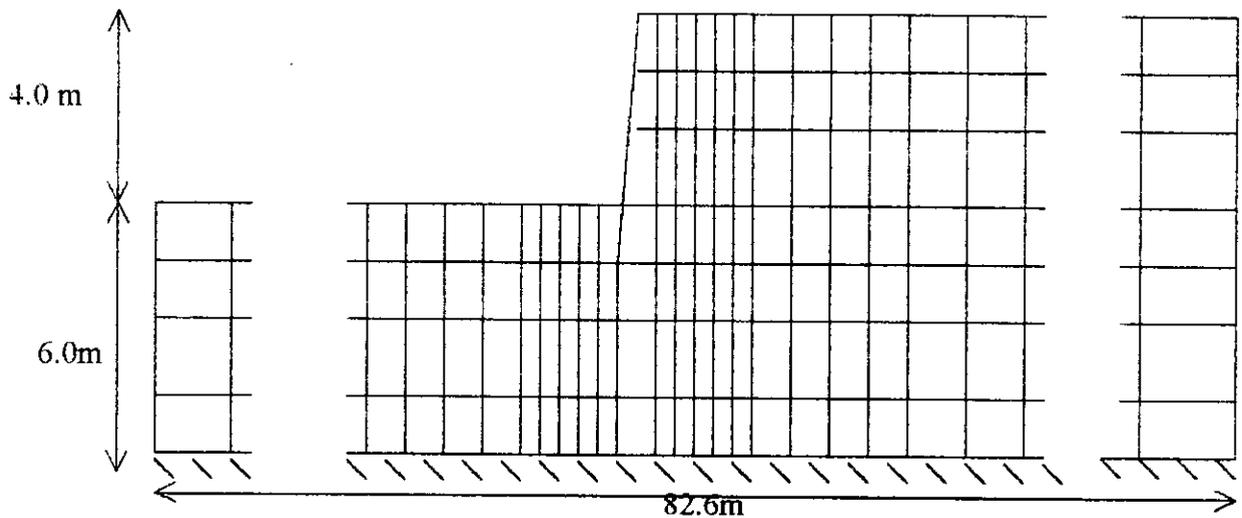
6.4 ETUDE SUR MODELE REEL

6.4.1 Présentation des modèles considérés

Pour le modèle réel nous avons repris exactement le mur de soutènement étudié par Baker et Bathia réf.2, présenté dans le chapitre au chapitre 3.4. nous avons considéré le même sol avec les mêmes caractéristiques soumis à une sollicitation dynamique de même nature, c'est-à-dire horizontale et sinusoïdale.

Ce mur a été tout d'abord considéré fixe puis capable de mobilité. Les modes de mouvements considérés pour le mur sont :

- 1) Mur libre pour lequel une étude de l'influence des paramètres de Duncan a été effectuée d'une part et de l'influence de l'amplitude de l'accélération et de la pulsation d'autres part.
- 2) Mur capable seulement de translation horizontale

*Mur réel fixe.**mur réel mobile**Figure 8.27 : Murs considérés*

La pulsation de la sollicitation choisie pour l'étude du mur mobile, est la pulsation propre du système sol - structure déterminée à partir des conditions initiales par la méthode d'itération du sous- espace. Nous avons pris dans tous les cas afin de comparaison la même pulsation déterminée à partir du cas 1) soit une pulsation égale à $\omega_0 = 22$. Pour le mur fixe le même type de choix donne une pulsation égale à $\omega_0 = 22$.

Le poids volumique du sol est pris constant et égal à 19 KN/m^3

Les paramètres courants (sauf dans le cas de l'étude de l'influence de ce paramètre) sont :

Coefficient de chargement $K_{ch} = 400$

Coefficient de déchargement	$K_{ur} = 600$
Exposant de la loi de Duncan	$n = 0.40$
Angle de frottement au pic	$\varphi_{pic} = 30^\circ$
Coefficient de rupture	$R_f = 0.9$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$

Le système sol structure est modélisé par éléments finis. Pour le mur fixe et pour le mur mobile les maillages sont représentés sur la figure 6.26. Pour le mur fixe le substratum est supposé être à la base du mur. Pour le mur mobile le substratum est supposé être à une profondeur égale à la hauteur du mur soit 5m. Dans les deux cas c'est à la base du modèle que l'on applique la sollicitation. Les éléments sont des éléments rectangulaires isoparamétriques à huit noeuds.

Pour le mur fixe, nous avons suivant la verticale 4 éléments répartis sur la hauteur et suivant la longueur 23 éléments dont la longueur varie graduellement de 1m au voisinage du mur à 8 m au frontière du modèle. Ce qui nous donne au total 92 éléments, soit 331 noeuds.

Pour le mur mobile nous avons suivant la hauteur du mur 4 éléments et suivant la hauteur restante 3 éléments. Suivant la longueur nous avons 21 éléments dont la largeur varie de 1m au voisinage du mur, à 8m au frontière du modèle. Ce qui nous donne au total 117 éléments, soit 408 noeuds.

6.4.2 Etude du mur fixe

a) application du modèle de Duncan : Effets des paramètres du modèle

Les figures 6.28, 6.29, 6.30 montrent les effets de l'exposant de la loi de Duncan 'n' ainsi que du coefficient de déchargement K_{ur} . Nous avons comparativement l'effet de l'accélération. Nous remarquons que dans ce cas les effets des paramètres de la loi sont faibles devant les effets de l'accélération. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans ce cas on n'a pas de déplacement du mur. Par conséquent on a donc une grande rigidité pour le sol comparativement au cas du mur mobile ou il y a de forte chute de rigidité en décompression.

Le fait que la fréquence propre du sol varie en permanence joue aussi un rôle déterminant.

b) Comparaisons avec les modèles pseudo-statiques et visco-élastiques.

Les figures 6.30 à 6.32 montrent les différences obtenues entre les différents modèles pour la résultante des pressions sur l'ouvrage de soutènement. Nous constatons dans tous les cas que le modèle de Duncan oscille entre des valeurs extrémales dont la moyenne est donnée par le modèle de Mononobé-Okabé ou Seed et Whitman, et ce pour $\omega = \omega_0$. Dans ce cas les modèles de Veletsos et Scott donnent une valeur bien inférieure par rapport aux modèles précédents. Par contre pour $\omega = 1.5 \omega_0$, on constate que tous les modèles sauf le modèle de Duncan donnent une même valeur voisine, le modèle de duncan donnant une valeur en moyenne deux fois plus grande.

Ces différences s'expliquent par le fait que pour le modèle de Duncan, la rigidité varie constamment, et la valeur de la pulsation propre initiale a été calculée sur la base des rigidités initiales données par le Modèle Duncan. Pour tous les autres modèles il a fallut prendre une

valeur de la rigidité fixe sur toute la hauteur de la couche, on a donc adopté une valeur moyenne qui automatiquement décalait la valeur de la pulsation propre pour ces autres modèles, d'où la différence constatée.

La figure 6.33 montre la variation de la position relative du point d'application par rapport à la base du mur. On constate que celle-ci se trouve en général dans la zone située entre le tiers inférieur et la demi hauteur du mur.

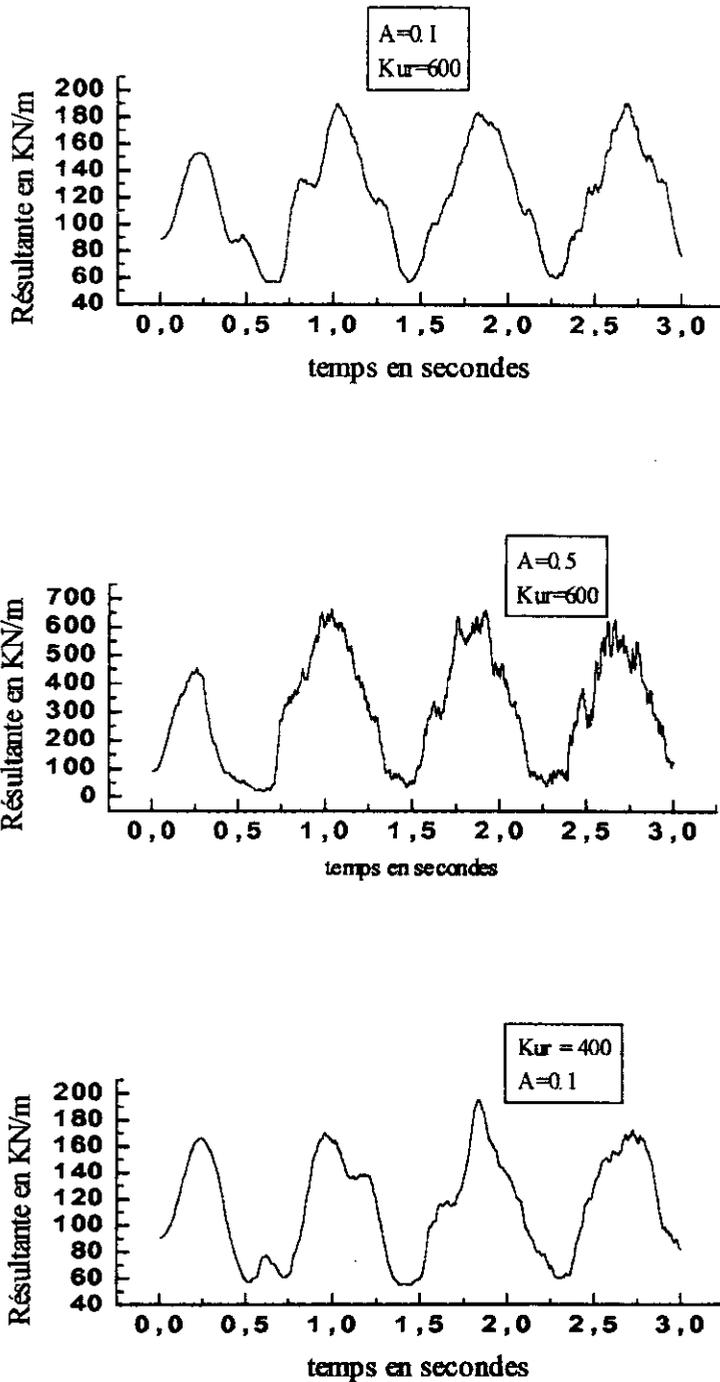


Figure 6.28 Mur fixe : Effets du coefficient de déchargement et de l'accélération.

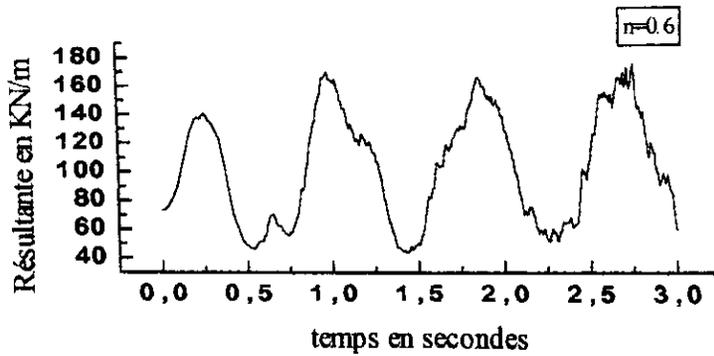
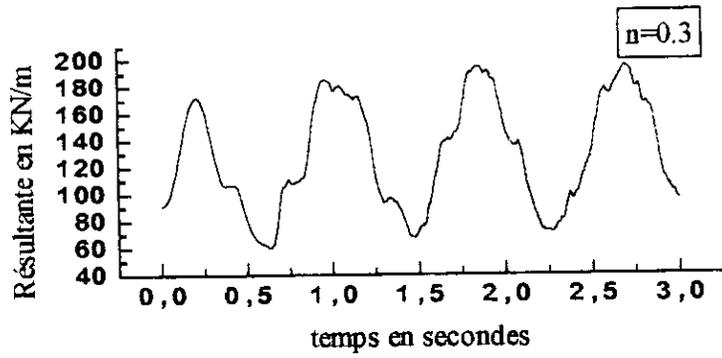


Figure 6.29 Effets de l'exposant de la loi de Duncan ($\omega = \omega_0$)

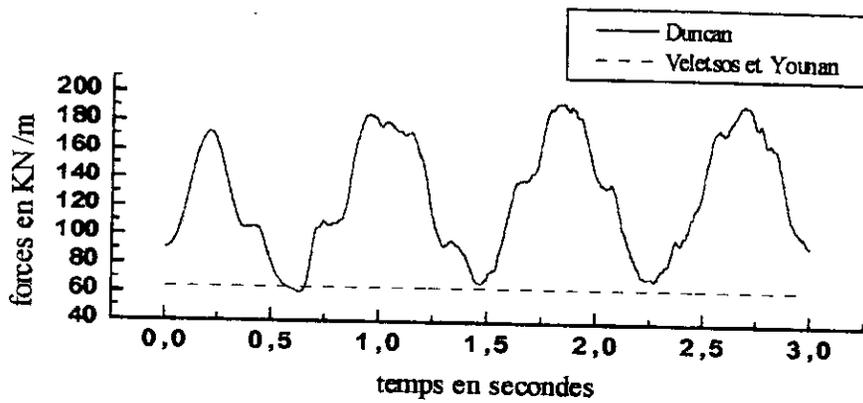


Figure 6.30 Comparaison des modèles de Duncan, Veletsos et younan : accélération de 0.1g (mur fixe, $\omega = \omega_0$)

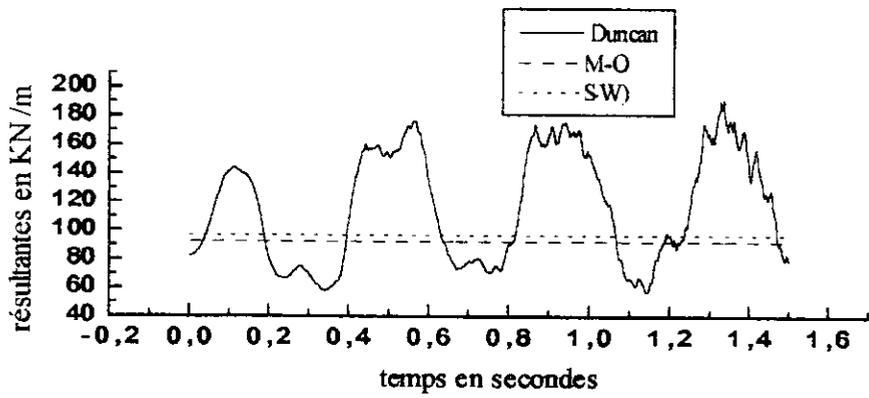


Figure 6.31. Comparaison des modèles de Duncan, Mononobé-Okabé, Seed-Whitman (mur fixe)

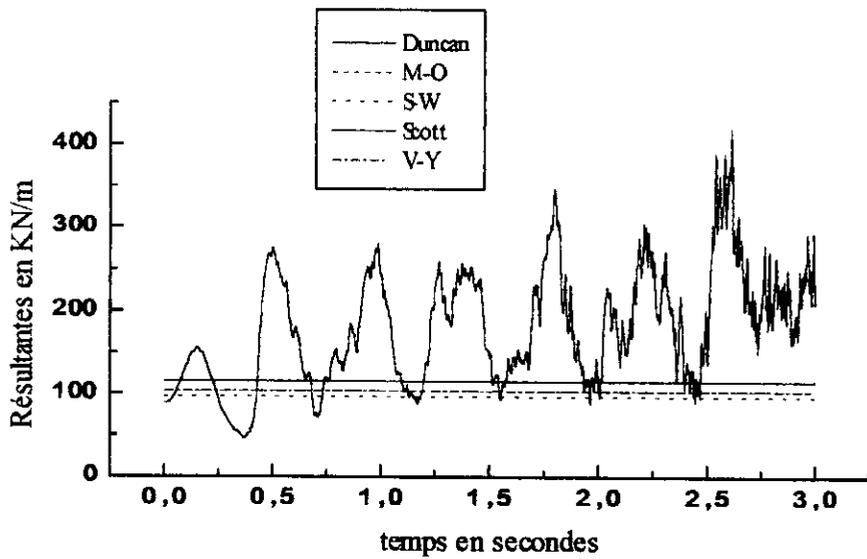


Figure 6.32 comparaison des différents modèles : $\omega = 1.5 \omega_0$

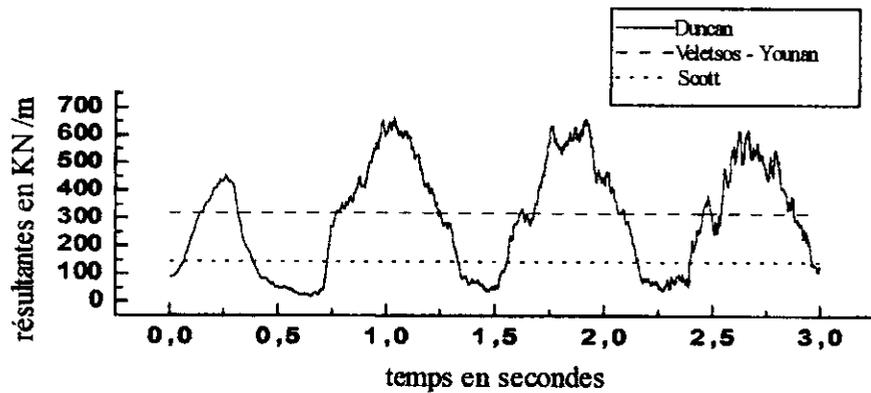


Figure 6.33 Comparaison des modèles de Duncan, Veletsos et Younan, Scott : accélération de 0.5g (mur fixe)

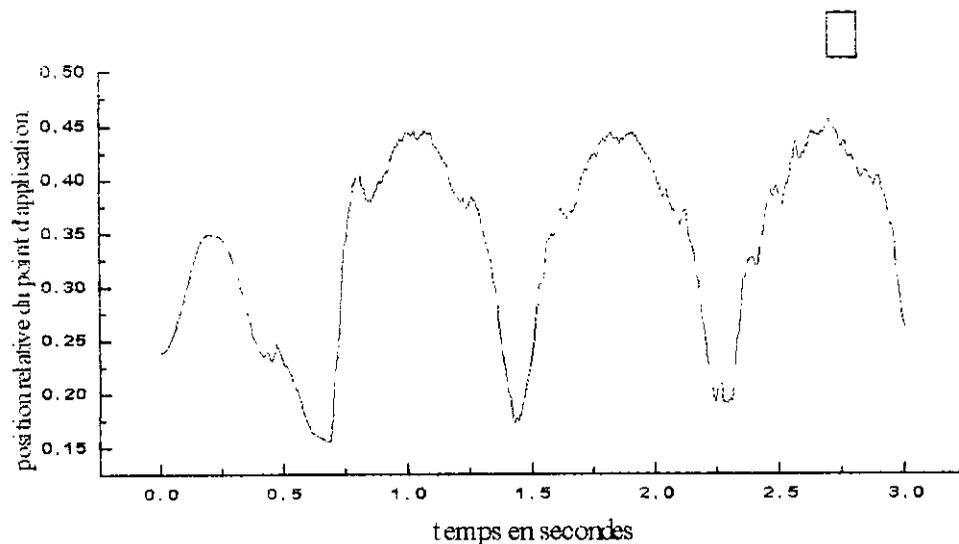


Figure 6.34 position relative du point d'application par rapport à la base du mur.

6.4.3 Mur mobile

a) Modèle de Duncan : Effets des paramètres.

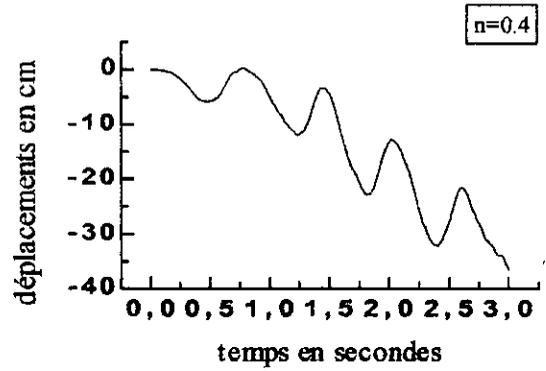
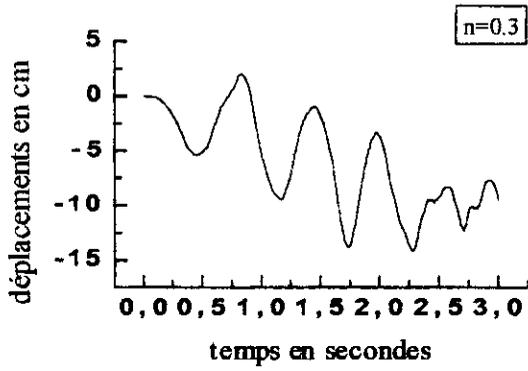
Les figures 6.35 et 6.37 représentent respectivement les effets du coefficient de rupture R_f , du coefficient de déchargement K_{ur} et de l'exposant 'n' de la loi de Duncan respectivement sur les déplacements de la tête et de la base du mur. De même les figures 6.36 et 6.38 représentent les effets de l'angle de frottement interne du sol et du coefficient de poisson. Les figures 6.39 et 6.40 représentent les effets de l'amplitude de la sollicitation sur les déplacements respectifs de la tête et de la base du mur. Finalement les figures 6.41 et 6.42 représentent les effets de la pulsation de la sollicitation sur les déplacements de la tête et de la base du mur

Contrairement au mur réel fixe les résultats montrent que la réponse est très sensible d'une part au paramètre de la loi de comportement et d'autre part à la pulsation ou à l'amplitude de l'excitation. En ce qui concerne les paramètres de la loi de Duncan, on constate que les déplacements horizontaux du sommet du mur augmentent de façon sensible avec l'augmentation de la valeur des paramètres, sauf pour le coefficient de Poisson. Pour les déplacements horizontaux de la base du mur, il en est de même, sauf pour le coefficient de déchargement-rechargement.

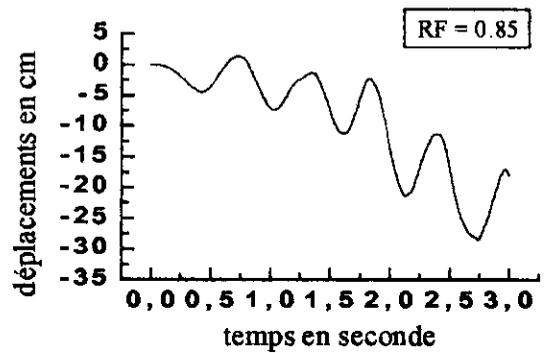
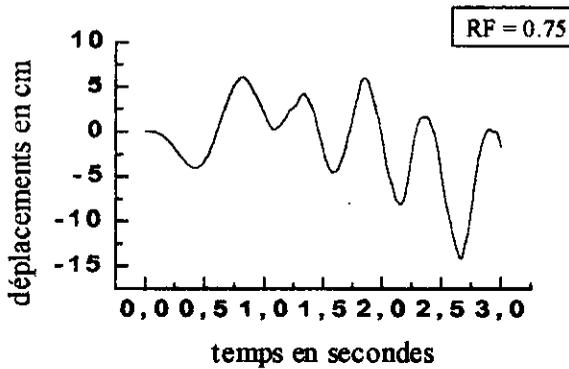
Dans le point d'application de la résultante des pressions dans le cas courant se situe au voisinage du tiers inférieur du mur (fig 6.43).

b) Comparaisons avec les modèles pseudo-statiques

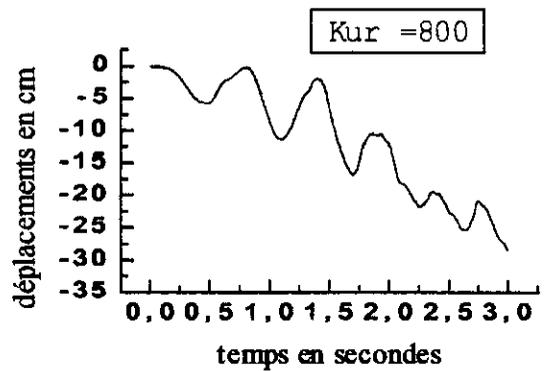
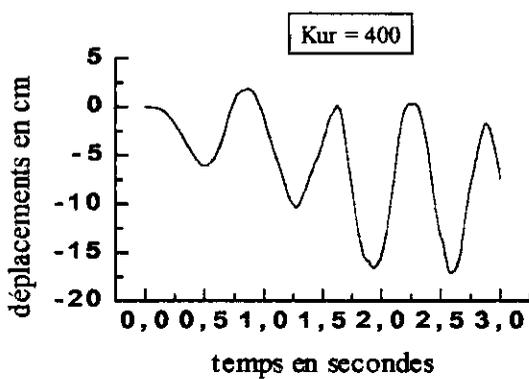
Une comparaison avec les valeurs maximales des poussées obtenues par les méthodes de Monobé et Okabé, Seed et Whitman montrent que le modèle de Duncan donne des valeurs généralement plus grande.



a) influence de l'exposant de la loi de Duncan

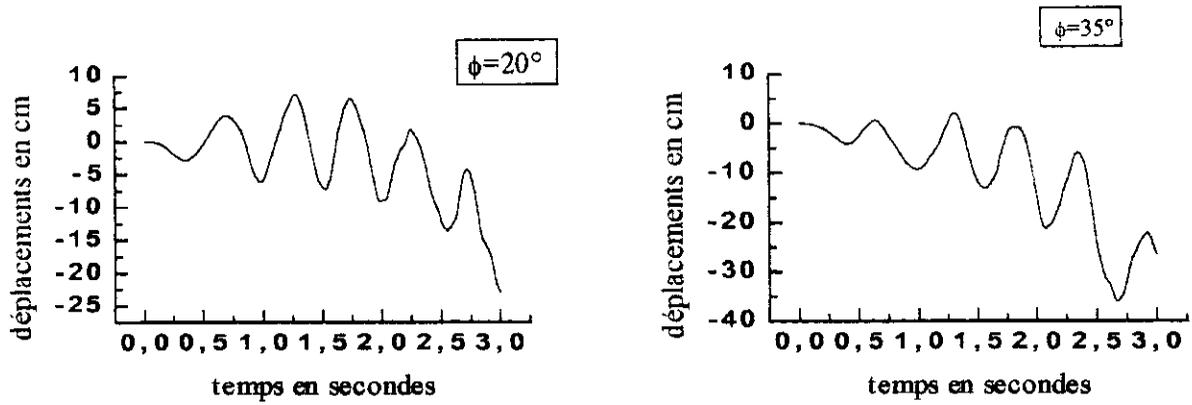


b) Influence du coefficient de rupture

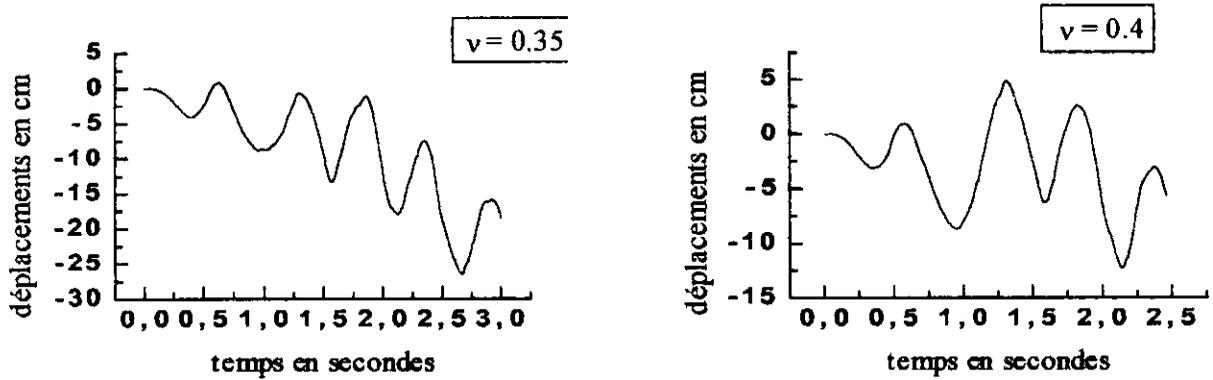


c) Influence du coefficient de déchargement-rechargement

Figure 6.35 : Déplacements horizontaux de la tête du mur

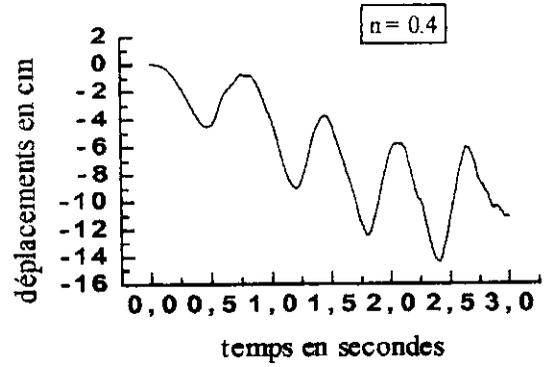
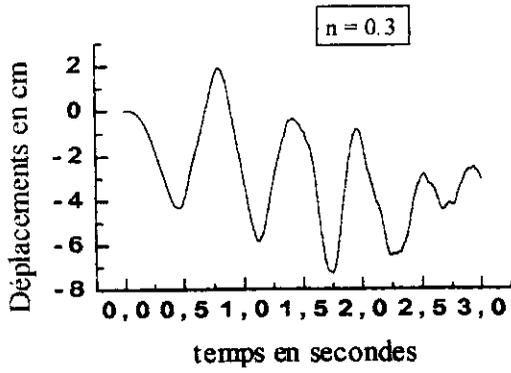


d) Influence de l'angle de frottement interne du sol

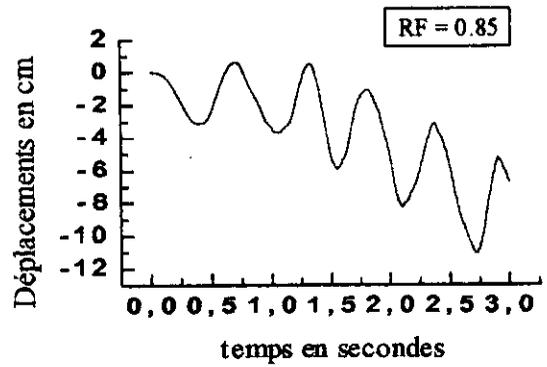
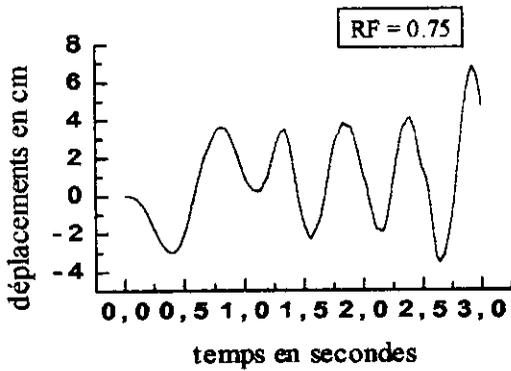


e) Influence du coefficient de poisson

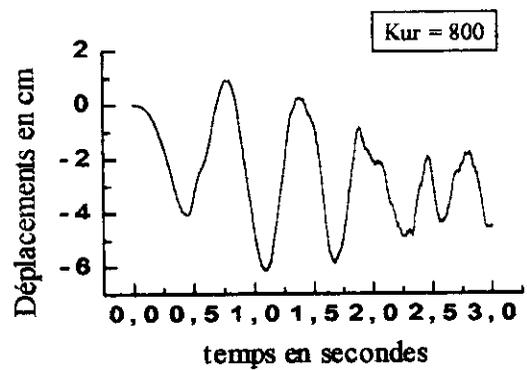
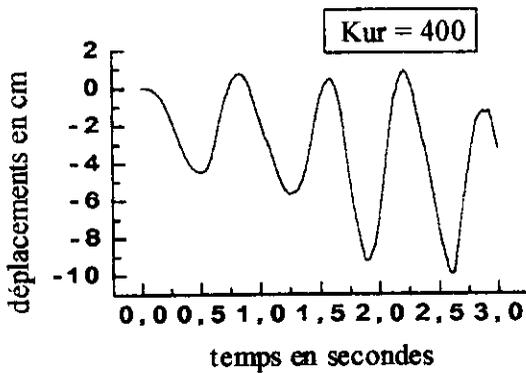
Figure 6.36 Déplacements horizontaux de la tête du mur



a) influence de l'exposant de la loi de Duncan

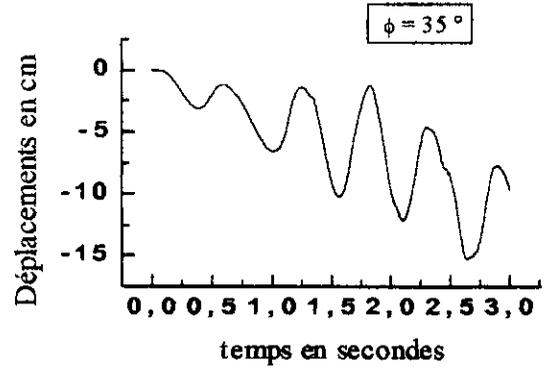
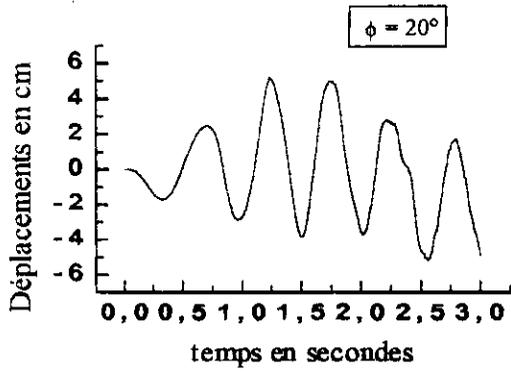


b) Influence du coefficient de rupture

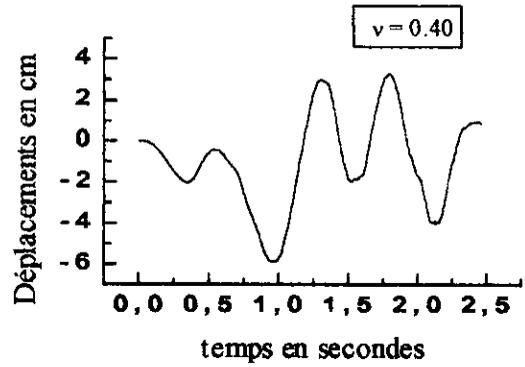
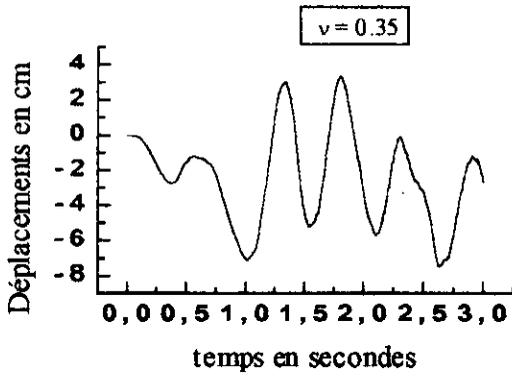


c) influence du coefficient de chargement-déchargement.

Figure6.37 : déplacement horizontal de la base du mur.



d) Figure Influence de l'angle de frottement interne du sol.



e) Influence du coefficient de poisson.

Figure 6.38 : Déplacements horizontaux de la base du mur.

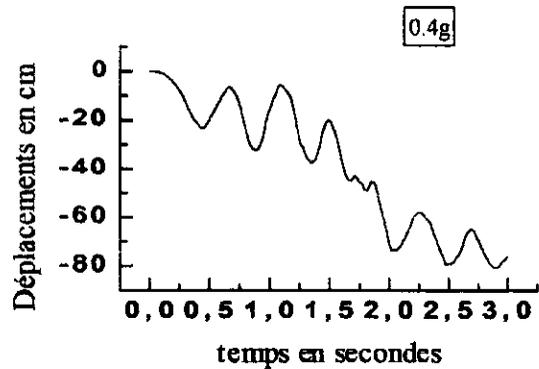
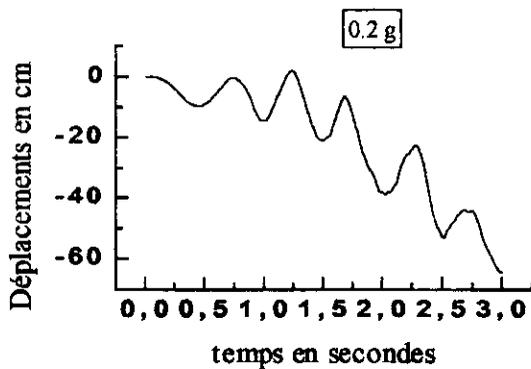


Figure 6.39 : Déplacements horizontaux de la tête du mur. Effet de l'amplitude de la sollicitation.

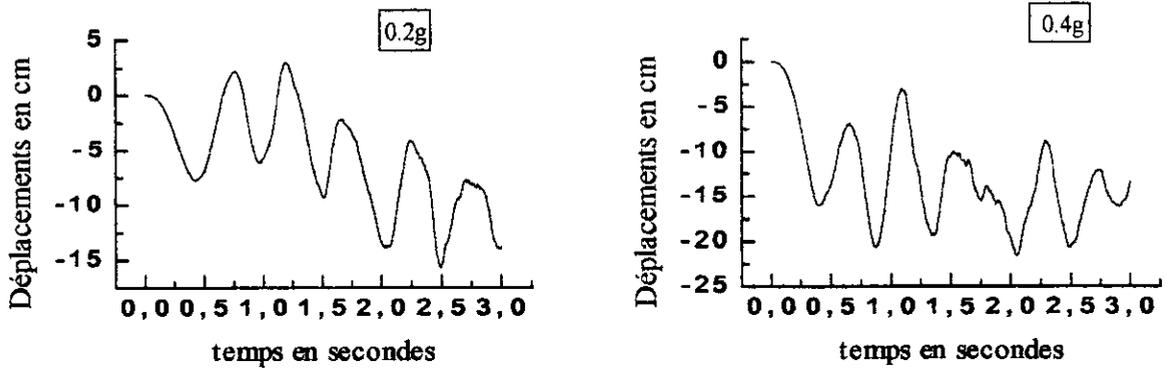


Figure 6.404 : Déplacements horizontaux de la base du mur. Effet de l'amplitude de la sollicitation.

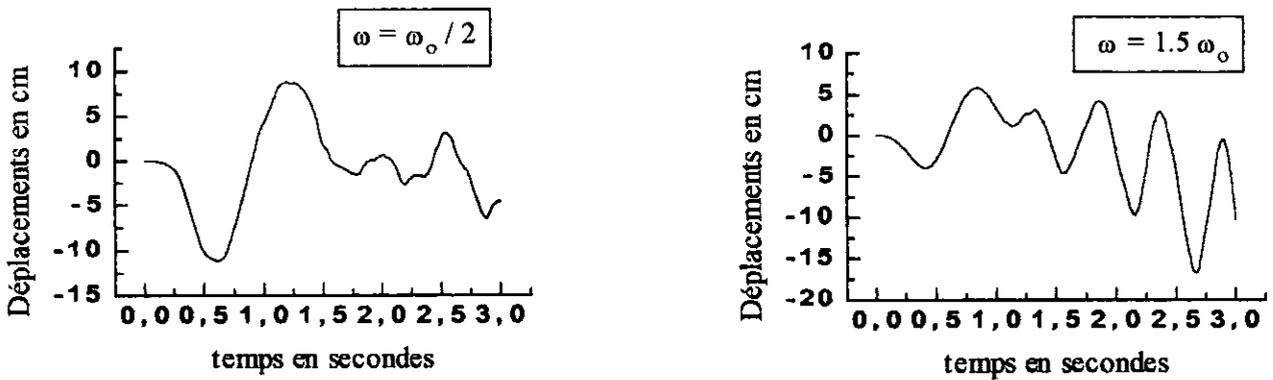


Figure 6.41 : Déplacement horizontal du sommet du mur. Influence de la pulsation de l'excitation.

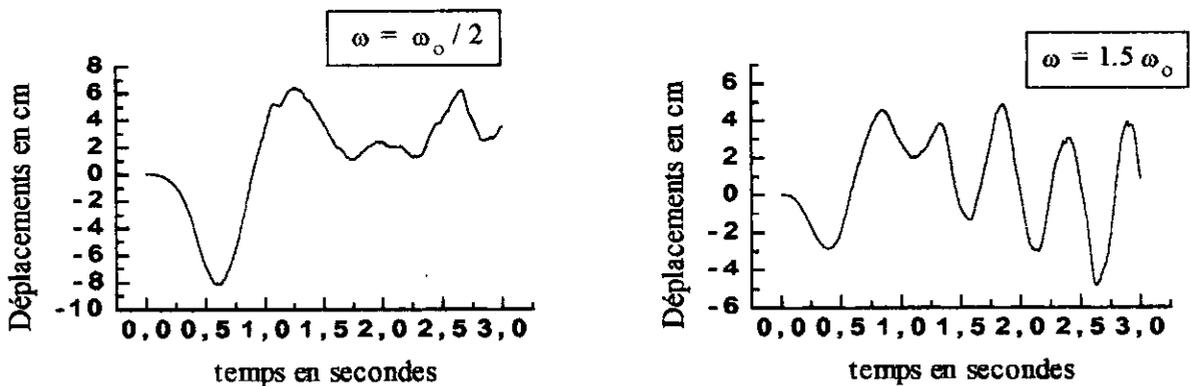


Figure 6.42 : Déplacement horizontal de la base du mur. Influence de la pulsation de l'excitation.

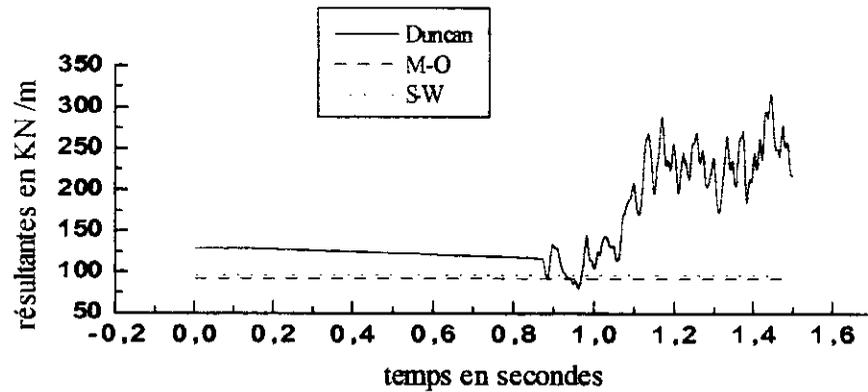


Figure 6.42 : Comparaison des modèles de Duncan, Mononobé-Okabé, Seed-Whitman (mur mobile)

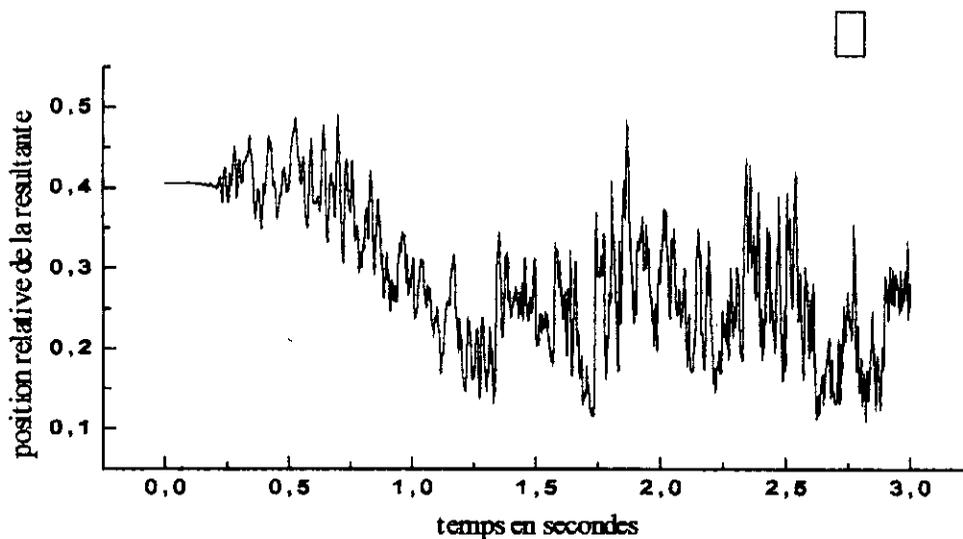


Figure 6.43 Position relative du point d'application de la résultante par rapport à la base.

c) Influence du mode de mouvement

Les figures 6.44 à 6.45 montrent les effets du mode de mouvement du mur lorsque celui est un mode de translation horizontale pure. On voit que la position de la résultante est située beaucoup plus haut que pour un mur libre, que les pressions sont sur le mur plus élevés et que les déplacements de la base du mur du même ordre de grandeur.

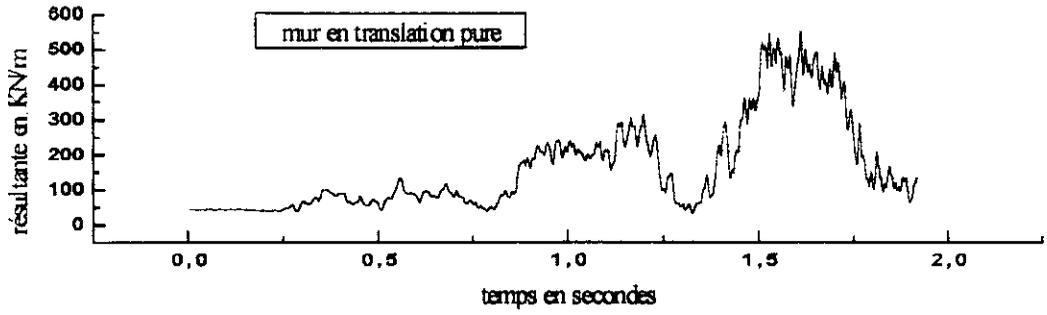


Figure 6.44 Résultante mode de translation horizontale pure

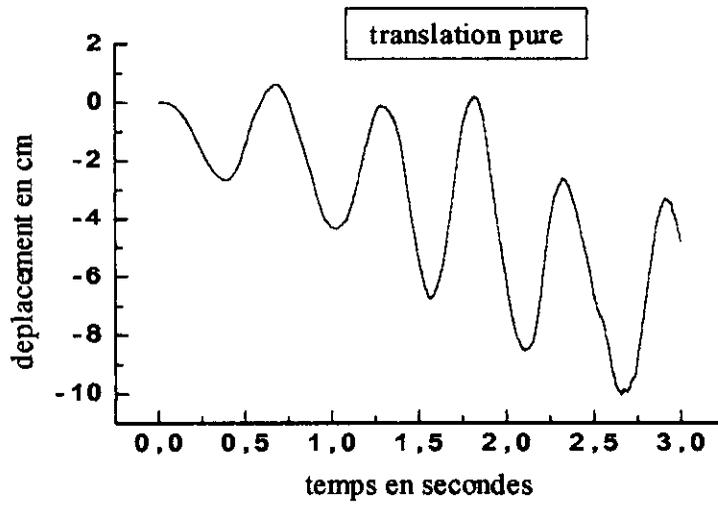


Figure 6.45 : Déplacement du mur, mode de translation horizontale pure.

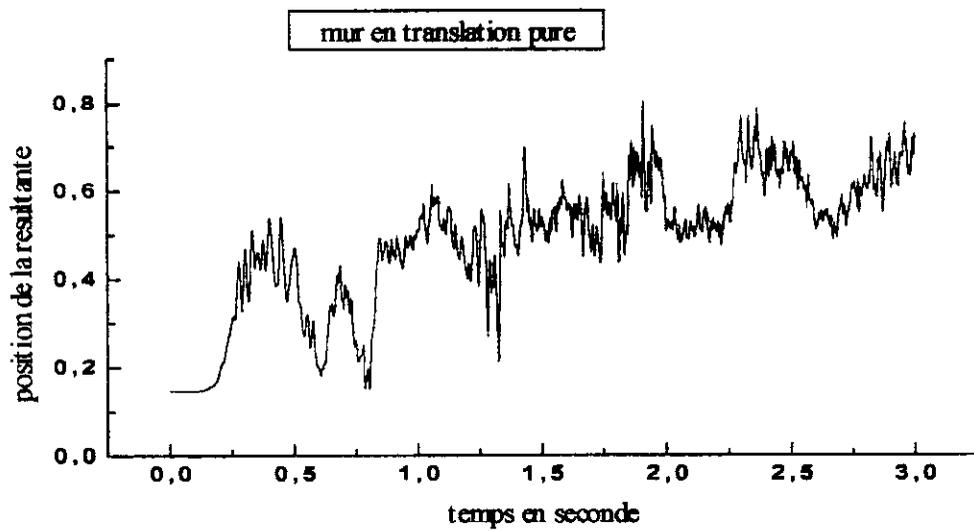


Figure 6.46 position du point d'application de la résultante : mode de translation pure

CONCLUSION

Cette étude nous a permis de mettre en évidence les différences principales entre le modèle élastique, le modèle de Duncan et le modèle élasto-plastique parfait à partir de l'étude sur modèle réduit. Nous avons constaté que le modèle de Duncan représentait le mieux le mode de comportement du mur observé expérimentalement et principalement le déplacement horizontal par à coup du mur. Le modèle élastique donne pour les déplacements verticaux et les déplacements horizontaux un ordre de grandeur convenable dans le cas où on considérerait pour le milieu analogique le module d'élasticité initial donné par la méthode de Duncan. Le modèle élasto-plastique parfait dans tous les cas donne un ordre de grandeur inférieur aux deux autres modèles et aux résultats expérimentaux.

L'application du modèle de Duncan à un mur réel fixe nous a permis de mettre en relief la difficulté posée par les lois de comportement non-linéaires à tirer des conclusions claires lorsque, nous voulons comparer ces modèles avec des modèles plus simples tels que les modèles de Scott et Veletsos et Younan. En effet, pour un modèle non linéaire appliqué aux sols, la rigidité du sol varie dans des proportions d'autant plus importantes que la sollicitation est grande et par conséquent, il en est de même pour la période fondamentale du sol. Par contre, cette période fondamentale pour des modèles plus simples est constante mais d'une importance capitale vu que c'est celle-ci qui va déterminer l'amplitude de la réponse. Le choix de la rigidité à injecter dans les modèles élastiques et viscoélastiques reste un problème délicat. Ainsi pour les murs réels fixes, les modèles de Scott et de Veletsos et Younan qui nécessitent un module constant en tout point du sol doivent être appliqués avec certaines précautions. Le choix d'une rigidité moyenne évaluée à partir des valeurs de rigidité initiale donnée par le Modèle de Duncan n'a pas été concluant. Par contre, les modèles pseudo-statiques de Mononbé-Okabé et Seed-Whitman, dans le cas du mur fixe donnent dans la plupart des cas une valeur moyenne des pressions obtenues par le modèle de Duncan.

Dans tous les cas, le modèle de Duncan, aussi bien pour le mur fixe que pour le mur mobile, donne une résultante maximale des pressions (exercées par le massif de sol sur le mur) supérieure, parfois de beaucoup, par rapport à celles obtenues par les méthodes classiques. Dans le cas du mur mobile le mode de mouvement du mur influe sur la grandeur de cette résultante. Ainsi on a obtenu une résultante plus importante pour un mur en translation horizontale pure que pour un mur susceptible de se mouvoir en translation et en rotation.

En ce qui concerne la position du point d'application, le modèle de Duncan se rapproche plus de la solution de Mononbé-Okabé pour le mur fixe et pour le mur mobile susceptible de se mouvoir en rotation et translation. Par contre pour le mur mobile susceptible de se mouvoir qu'en translation horizontale, le point d'application se situe beaucoup plus haut dans la zone centrale supérieure. Ce qui met encore en évidence le rôle important du mode de translation du mur.

Finalement l'étude paramétrique a montré que le comportement d'un ouvrage de soutènement est très sensible à la variation de la valeur des paramètres du modèle de Duncan. Cette sensibilité est d'autant plus aiguë que le mur est susceptible de se mouvoir librement.

Ce travail a permis de mettre en évidence l'importance de l'influence du modèle considéré sur la réponse dynamique d'un ouvrage de soutènement. Même pour un modèle donné, tel que le modèle de Duncan, le choix de la valeur à attribuer aux paramètres est d'une importance considérable sur la prédiction du comportement dynamique de l'ouvrage. Et ce choix est d'autant plus délicat que le modèle est simple.

Ce travail montre donc le rôle indispensable de l'approche expérimentale, seule apte à valider un modèle et ses hypothèses d'une part, et d'autre part seule capable de fournir les valeurs des paramètres à injecter au modèle, sans lesquels, toute prédiction serait vaine. Pour des ouvrages de soutènement sous dimensionnés ou pour les ouvrages dimensionnés à la limite, un comportement élastique ou viscoélastique est peu probable lors d'un tremblement de terre. Généralement, pour ce type d'ouvrage, un modèle non-linéaire est nécessaire.

Bibliographie

- 1- ALAMPALLI S., ELGAMAL A. W., 'Retaining Walls Computation of Seismically Induced Deformations'. Proc. 2^d International. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. March 11-15- 1991. St Louis Missouri, Paper n° 4.10.
- 2- BAKEER R. M., BATHIA S. K., 'Dynamic Earth Pressures with Various Gravity Wall Movements', Design and Performance of Earth Retaining Structures, Ed. P. C. Lambe & L. A. Hansen, GT Pub. 25, ASCE, NY, June 1990.
- 3- BATHE K. J., 'Finite Element Procedures in Engineering Analysis', Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- 4- BATHOZ J. L, DHATT G., 'Modélisation des Structures par Eléments Finis :Solides Elastiques'. Hermes, 1990.
- 5- BOLTON M.D, STEEDMAN R. S., 'Modelling the Seismic Resistance of Retaining Structures'. Proc of the eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering'. San Francisco. 1985
- 6- BOSCARDIN M. D., 'Hyperbolic Parameters for Compacted Soils'. Journal of Geotechnical Engineering, Vol 116, Jan.1990, N°1, pp.88-104
- 7- BOWLES J. E., 'Physical and Geotechnical Properties of Soils'. Mc Graw Hill Book Company 1984
- 8- BRITTO A.M, GUNN M. J., 'Critical State Soil Mechanics Via finite Elements'. Ellis Horwood Limited, 1987.
- 9- BUDHU M., NEELAKANTAN G., RICHARDS R., ' Balanced Seismic Design Improving the Seismic Efficiency of Anchored Retaining Walls. Retaining Structures. Thomas Telford, London 1993. p.140-147
- 10- CETIN SOYDEMIR. ' Seismic Design of Rigid Underground Walls in New England'. Proc. 2^d International. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. March 11-15- 1991. St Louis Missouri Paper n° 4.6
- 11- CHEN W. F., ' Plasticity for Structural engineers' Springer – Verlag ed., 1988
- 12- CHOUVET D., ' Interaction Sol-Structure. Application aux Ouvrages de Soutènement'. Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Centrale de Paris, 1983.
- 13- CONSTANTINE A., STAMATOPOULOS, ' Dynamic Modelling and Response of Soil-Wall Systems'. Journal of Geotechnical Engineering. July 1996, p.603-605.
- 14- DAFALIAS Y. F., 'An Elastoplastique-Viscoplastique Constitutive Modelling of Cohesive Soils'. International Symposium on Numerical Models in Geoméchanics, Zurich, 9/1982.
- 15- DARVE F, 'Etude de lois de Comportement '. Ecole d'Hivers de Cours de Rhéologie de Géomatériaux (1984). Institut de Mécanique de Grenoble.
- 16- DAVIDOVICI V., 'Génie Parasismique', Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées , p.759-788
- 17- DEWAIKAR D.M., ' Dynamic Earth Pressure Distribution Behind Retaining Walls'. . Proc. 2^d International. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. March 11-15- 1991. St Louis Missouri Paper n° 4.22
- 18- DHATT G., TOUZOLT G., 'Présentation de la Méthode des Eléments finis'. Maloine S.A Editeur, 1984.
- 19- DUNCAN J. M., CHANG C. Y., 'Nonlinear Analysis of Stresses and Strain in Soils'. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. Sept. 1970, vol 96, pp.1629-1651.

- 20- DUNCAN J. M., 'Geotechnical Engineering Research Report N° SU/GT/84-03'.
Departement of Civil Engineering. Stanford University. November, 1984.
- 21- FILLIAT G., 'La Pratique des Sols et Fondations', Moniteur, 1981
- 22- FRANCOIS D., PINEAU A., ZAOUI A., 'Elasticité et Plasti,cité', Hérmes, 1991-1992.
- 23- ICHIHARA M., MATSUSAWA H., KAWAMURA H., 'Active Earth Pressure During Earthquake'. Proc. of the fourth Japan Earthquake Engineering, Symposium, Tokyo, Nov. 1975.
- 24- ISHII Y., ARAY H., TSUSCHIDA H., 'Lateral Earth Pressure in an Earthquake'. Proc. 2nd World Conf. on Earthquake Engineering, Tokyo, 1960, Vol 1, pp.211-230.
- 25- JOHNSON W., MELLOR P.B., 'Engineering Plasticity'. Ellis Horwood Limited, 1986.
- 26- KAPILA I. P., 'Earthquake Resistant Design of Retaining Walls'. 2nd Symp. on Earthquake Engineering, 1962, Roorkee, India.
- 27- KAWAMURA M., KURIBAYASHI E., 'Effect of Interactions on Dynamic Active Earth Pressures'. Developments in Geotechnical Engineering vol. 43, Soil-Structure Interaction, pp.103-110.
- 28- KONDNER R. L., 'Hyperbolic Stress-Strain Response : Cohésive Soils'. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, February 1963, vol 89, pp.115-141.
- 29- KYUICHIRO WASHIZU, 'Variational Methods in Elasticity and Plasticity'. Pergamon Press, 1982.
- 30- LAI CHO SIM, 'Behaviour of Retaining Walls Under Seismic Loading', 1979, M. E. Report, Departement of Civil Engineering, University of Canterbury, New-Zealand.
- 31- MARCIANO E., CHAMEAU J. L., HARR M. E., 'Residual Déplacements of Retaining Structures Under Earthquake Loading. Proc of the eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering'. San Francisco. 1985.vol.6, pp.1861-1864.
- 32- MATSUO H., OHARA S., ' Lateral Earth Pressure and Stability of Quay Wall During Earthquakes'. Proc. 2nd World Conf. on Earthquake Engineering, Tokyo, 1960, Vol 1, pp.165-181.
- 33- MONONOBE N. et MATSUO H., 'On the Determination of Earth Pressures During Earthquakes ', Proc. World Eng. Conf., p. 176 vol. 9, 1929.
- 34- MURPHY V., A., ' The Effect of Ground Characteristics on The Aseismic Design of Structures'. Proc. 2nd World Conf. on Earthquake Engineering, Tokyo, 1960.
- 35- MUSANTE H., ORTIGOSA P., 'Seismic Analysis of Gravity Retaining Walls'. 8th World Conf. on Earthquake Engineering. San Francisco, 1984, Vol.1, pp.517-524.
- 36- NAGHDI P. M., MURSH S. A., ' On the Mechanical Behaviour of Viscoélastic, Plastic solids'. Journal of Applied Mechanics, ASME, pp.321-328, sept.1963.
- 37- NEWMARK M., ' Effect of Earthquake on Dams and Embakments'. Geotechnique, London, Vol.15, pp 139-160, 1965.
- 38- OKABE S., 'General Theory of Earth Pressure', Journal Japanese Society of Civil Engineer, Vol 12, N° 1, 1926.
- 39- ORTIGOSA P., MUSANTE H., 'Seismic Earthpressures Against Structures with Restrained Displacement'. Proc. 2^d International. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. March 11-15- 1991. St Louis Missouri Paper n° 4.8
- 40- ORTIZ L., SCOTT R., LEE J., 'Dynamic Centrifuge Testing of a Cantilever Retaining Wall'. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.11, pp.251-268, 1983.
- 41- PECKER A., 'Dynamique des sols '. Presses de l' Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1984.
- 42- PRAKASH S., ' Soil Dynamics'- Mc Graw Hill Book Company 1981, p.128-169.

- 43- PRAKASH S., BASAVANNA M., 'Earth Pressures Distribution behind Retaining Walls During Earthquakes'. Proc. 4th World Conf. on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, 1969.
- 44- PRAKASH S., NANDAKUMARAN P., 'Dynamic Earth Pressure Distribution on Rigid Walls' Symposium on Behaviour of Earth and Earth structure Subjected to Earthquakes and Other Loads'. Univ. Of Roorkee, India, March 1973.
- 45- PRAKASH S., SARAN S., 'Static and Dynamic Earth Pressures behind Retaining Wall During Earthquake'. Proc 3th Symp. on Earthquake Engineering, 1966, Roorkee, India.
- 46- RICHARDS R., ELMS D.G., 'Seismic Behaviour of Gravity Retaining Walls'. ASCE, Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1979, Vol. 105, pp 449-464.
- 47- RICHARDS R., ELMS D. G., 'Comparaison of Limit State Seismic Earth Pressure Theories'. Proc. 2^d International. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. March 11-15- 1991. St Louis Missouri Paper n° 4.9.
- 48- SEED H. B., WHITMANN R. V., 'Design of Earth Retaining Structure for Dynamic Loads'. Proc. ASCE Speciality Conf. on Lateral Stresses and Earth Retaining Structures. Cornell Univ. Ithaca N.Y. 1970, pp 103-147.
- 49- SIDDHARTHAN R., PRAKASH K. G., GARY M. N., 'Displacement Based Design of Retaining Wall'. Proc. 2^d International. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. March 11-15- 1991. St Louis Missouri Paper n° 4.15
- 50- SHAMES I. H., DYNN C. L., 'Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics'. Mc Graw Hill Book Company 1985
- 51- SCHNEEBELI G. 'Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion'. Comptes-rendus de l'Academie des sciences – Paris 1956 – Tome 243, p125
- 52- SHERIF A., ISHIBASHI I., LEE C., 'Dynamic Earth Pressures Against Retaining Structures'. Soil Engineering Research Report N° 21, 1981, Univ. of Washington, Seattle.
- 53- SHIBATA T., SATO T., MIURA K., 'Dynamic of Earth Pressure on Earth Retaining Structure'. Proc. of the fourth Japan Earthquake Engineering, Symposium, Tokyo, Nov. 1975, pp.187-194.
- 54- VELETSOS A. S., YOUNAN A.H., 'Dynamic Soil Pressures on Rigid Vertical Walls'. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.23, pp.275-301, 1994.
- 55- VELETSOS A. S., YOUNAN A.H., 'Dynamic Response of Cantilever Retaining Wall'. Journal of Geotechnical and geoenvironmental Engineering, February 1997, page 161-172
- 56- WHITMAN R. V., 'Seismic Design of Earth Retaining Structures', Proc. 2^d International. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. March 11-15- 1991. St Louis Missouri Paper n° SOA6.
- 57- WHITMAN R. V., 'Predicting Earthquake Induced-Tilt of Gravity Retaining Walls'. Retaining Structures. Thomas Telford, London 1993. p.750-758
- 58- WOLF J. P., 'Spring-Dashpot-Mass Models for Foundations Vibrations'. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 26, pp 931-944, 1997.
- 59- WOODWARD P.K., GRIFFITHS D.V., 'Dynamic Earth Pressure Analysis', International Symposium models in geomechanics /4/ Swansea / 92-88-24, NLD ; Rotherdam : A.A. Balkema, 1992, Vol.1, pp.403-410
- 60- WROTH C. P., HOULBY G. T., 'Soils Mechanics : Property Characterization et analysis procedures'. Proc of the eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering'. San Francisco. 1985, Vol1, pp.1-56
- 61- ZIENCKIEWICZ O. C. , 'The Finite Element Method', Vol.1 et Vol.2 ,4^{ième} Edition, Mc Graw Hill Book Company 1991.

ANNEXE

APPROCHE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

A.1 INTRODUCTION.

La méthode des éléments finis, contrairement aux méthodes analytiques ou simplifiées tels que les méthodes pseudo-statiques ou les modèles masses - ressorts – amortisseurs, a l'avantage de pouvoir considérer un nombre plus important de paramètres constants ou variables. Elle semble plus apte à pouvoir représenter d'une façon plus spécifique le comportement à la fois du sol et de la structure ainsi que du phénomène d'interaction sol-structure. L'acuité de cette méthode peut être poussée très loin compte tenu du développement important ces dernières décennies des techniques numériques sans lesquelles cette méthode n'aurait point pu s'imposer. Ces techniques numériques permettent de traiter des problèmes linéaires et non-linéaires avec des paramètres variables dans l'espace comme dans le temps.

Si, à première vue cette méthode paraît très efficace et très pratique, on s'aperçoit vite lors de l'élaboration d'un code de calcul, que celui-ci est très laborieux, très méticuleux, que de nombreux problèmes numériques tels que l'amortissement numérique pour les techniques de résolution de l'équation de mouvement dans le domaine des temps ou bien les problèmes de convergence dépendant fortement du modèle considéré... etc., surgissent et dont la résolution prend beaucoup de temps et alourdit le code de calcul et tend à rendre celui-ci quasiment incompréhensible pour une personne non initiée. Hormis cet inconvénient à priori majeur qui ralentit l'expansion et le développement de cet outil, cette méthode est l'un des meilleurs outils dont l'on dispose actuellement pour l'exploration dans des directions nouvelles. Elle est bien adaptée pour la résolution de problème statique ou dynamique non-linéaire.

C'est pour cette raison que l'on a opté pour ce type de formulation. Le code de calcul qui en découle que nous avons conçu permet la résolution aussi bien de problème statique linéaire ou non-linéaire que de problème dynamique élastique, viscoélastique ou non-linéaire. On voit ici le large champ d'utilisation ou la puissance d'une telle formulation, qui permet de traiter un problème à partir d'un même fichier de données pour des modes de comportements différents. Cette méthode est donc parfaitement adaptée au cadre de notre travail. Nous allons l'exposer brièvement dans les paragraphes qui vont suivre. On s'intéressera plus particulièrement à la formulation des équations régissant le problème considéré. Pour plus de détails on peut se référer aux ouvrages (réf.3,4,18,29,50,61) qui ont servi de base à l'étude théorique et à la mise en pratique de cette méthode.

A.2 PRESENTATION GENERALE DE LA M.E.F.

La méthode des éléments finis s'applique à un système physique continu, qui est caractérisé par un ensemble de variables qui peuvent dépendre des coordonnées d'espace et du temps. Cet ensemble de variables se divise en deux sous-ensembles : le premier constitué de variables connues comme les propriétés physiques, les dimensions géométriques... etc; le deuxième constitué de variables inconnues comme les déplacements, les pressions... etc.

Un modèle mathématique du système permet d'écrire des relations entre ces deux types de variables en utilisant des lois physiques. On obtient ainsi pour ces systèmes continus un système

d'équations algébriques qui est le plus souvent représenté par un système d'équations aux dérivées partielles intégral-différentielles associés à des conditions aux limites en espace et en temps. Ces équations des systèmes continus ne peuvent en général pas être résolues directement. Il est nécessaire de discrétiser ces équations, c'est à dire de les remplacer par des équations algébriques. La M.E.F. est une des méthodes qui peut être utilisée pour faire cette discrétisation.

Dans la pratique, divers types de problèmes peuvent se présenter. Les plus courants sont :

- Problème d'équilibre ou de valeurs aux limites.
- Problème de valeurs propres ou de valeurs critiques
- Problème de propagation ou de valeurs initiales.

Souvent le type de problème, le comportement d'un système continu peut être décrit par des équations aux dérivées partielles.

Pour un système réellement discret, les équations algébriques pour les divers types de problèmes s'écrivent :

Problème d'équilibre ou de valeurs aux limites.

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad \text{où} \quad (\text{A.1})$$

$[K]$ est la matrice caractérisant le système (matrice de rigidité en mécanique des solides)

$\{U\}$ sont les variables inconnues

$\{F\}$ sont les variables inconnues.

Problème de valeurs propres ou de valeurs critiques

$$[K]\{U\} = \lambda[M]\{U\} \quad \text{où} \quad (\text{A.2})$$

$[M]$ est la matrice de masse du système

λ est un paramètre dit valeur propre ou valeur critique.

Problème de propagation ou de valeurs initiales.

$$[M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{U\} + [C]\frac{\partial}{\partial t}\{U\} + [K]\{U\} = \{F(t)\} \quad \text{pour } t > t_0 \quad \text{où} \quad (\text{A.3})$$

avec les conditions initiales :

$$\{U\} = \{U\}_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t}\{U\} = \{\dot{U}\}_0 \quad \text{pour } t = t_0 \quad (\text{A.4})$$

$[C]$ est la matrice d'amortissement du système.

$\{F(t)\}$ est la sollicitation connue.

Un système discret est dit linéaire si les termes $[K]$, $[M]$, $[C]$ et $\{F\}$ sont des constantes indépendantes de $\{U\}$.

Le but de la méthode des éléments finis est sur la base de la discrétisation du milieu en éléments finis et sur la base de certaines approximations ou interpolations pour le champ des déplacements, de transformer un système d'équations intégrro-différentielles en un système d'équations algébriques de la forme (A.1) à (A.4) suivant le type de problème étudié.

L'utilisation de la méthode des résidus pondérés appliqués aux systèmes d'équations aux dérivées partielles permet la construction de formes intégrales, ou d'une fonctionnelle dont la première variation est la forme intégrale elle-même. Leur discrétisation par éléments finis aboutit à la définition des termes des matrices $[K]$, $[M]$, $[C]$, $\{F\}$, $\{F(t)\}$ et permet ainsi de créer un système d'équations algébriques de la forme (A.1) à (A.4) suivant la nature du problème étudié.

Une autre approche souvent utilisée en mécanique des solides s'appuie sur les principes variationnels de la mécanique et permet d'aboutir à une formulation identique. Généralement, on utilise le plus souvent le principe des travaux virtuels ou l'utilisation du principe du travail complémentaire ou encore l'extrémisation d'une fonctionnelle (fonction de fonction) telle que l'énergie potentielle totale ou l'énergie complémentaire totale. Dans le cas où, on utilise une fonctionnelle, son extrémisation nous ramène à une forme intégrale. L'utilisation du principe des travaux virtuels nous ramène à une forme intégrale directement.

Dans tous les cas la discrétisation peut porter :

- Soit sur la forme intégrale qui découle de l'équation aux dérivées partielles ou bien de l'application du principe des travaux virtuels ou bien de l'extrémisation d'une fonctionnelle. Dans ce cas, la discrétisation de la forme intégrale nous donne directement le système d'équations algébriques.
- Soit sur la fonctionnelle qui découle de l'application de l'énergie potentielle totale ou de l'énergie complémentaire totale ou de l'utilisation de la fonctionnelle Hellinger - Reissner ou bien de la construction de cette fonctionnelle à partir d'une forme intégrale. Dans ce dernier cas, l'obtention du système d'équation algébrique s'obtient après l'application de la méthode de Ritz comme nous le verrons plus loin.

L'utilisation de l'une ou l'autre forme de discrétisation conduit au même système d'équations algébriques.

A.3 FORMULATIONS DES EQUATIONS DE MOUVEMENT.

A.3.1 Formulations des équations différentielles aux dérivées partielles

Les équations d'équilibre indéfini de la mécanique des milieux continus relatives à l'étude de l'équilibre d'un élément infinitésimal s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_x = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{xy,z} + f_y = 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_z = 0 \end{cases} \text{ avec} \quad (\text{A.5})$$

$$[C]_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{ est le tenseur contrainte relatif à un repère orthonormé } x'x, y'y, z'z.$$

En notation indicielle ce tenseur est noté σ_{ij}

$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ Représente la résultante des forces volumiques par unité de volume ou en notation indicielle f_i .

Ces relations restent, en dynamique, valable à chaque instant. Il convient de distinguer ici plusieurs catégories de forces de volumes :

Forces de volumes réelles telles que les forces de champ donné a priori, telles que les forces de pesanteur notées $\vec{F}_R = \{F_R\}$ par unité de volume.

Les forces d'inertie résultant de l'accélération des particules par rapport à un repère fixe dit galiléen.

En notant par ρ la masse volumique du matériau au voisinage de l'élément considéré, la force d'inertie à l'instant t par unité de volume s'écrit :

$$\rho \vec{\gamma}_a = \rho \vec{\gamma}_r + \rho \vec{\gamma}_e + \rho \vec{\gamma}_c \quad (\text{A.6})$$

$\vec{\gamma}_a$ est l'accélération absolue de l'élément par rapport à un repère Galiléen.

$\vec{\gamma}_r$ est l'accélération relative par rapport à un repère lié au système.

$\vec{\gamma}_e$ est l'accélération d'entraînement du repère par rapport au repère Galiléen.

$\vec{\gamma}_c$ est l'accélération de Coriolis.

$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$ où \vec{V}_r est la vitesse relative et $\vec{\omega}$ est la vitesse de rotation instantanée du référentiel par rapport à un galiléen.

Les vitesses \vec{V}_r des particules restent toujours faibles, puisque ce sont les vitesses des petits mouvements autour d'un état d'équilibre. On peut donc prendre

$$\rho \vec{\gamma}_c = 0 \text{ si } \omega \text{ n'est pas grand.}$$

$$\vec{f} = \vec{F} - \rho \vec{\gamma}_r \quad (\text{A.7})$$

est donc la résultante des forces volumiques totales c'est à dire des forces volumiques données et des forces d'inerties relatives.

$$\vec{F} = \vec{F}_R - \rho \vec{\gamma}_e \quad (\text{A.8})$$

étant la résultante des forces des forces volumiques données, à savoir la résultante des forces de pesanteur et des forces d'inertie d'entraînement.

Avec ces conventions, l'équation vectorielle de l'équilibre local s'écrit :

$$\vec{F} - \rho \vec{\gamma}_r + \text{div}[\vec{C}]_\sigma = 0 \quad (\text{A.9 a})$$

Celle-ci correspond à l'équation aux dérivées partielles pour un milieu continu. Le système d'équations aux dérivées partielles qui en découle est :

$$\begin{cases} F_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \\ F_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} = 0 \\ F_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \tau_{xz,x} + \tau_{yz,z} + \sigma_{z,z} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9b})$$

L'introduction des relations contraintes-déformations de type visco-élastique linéaire dans ce système d'équations conduit aux équations bien connues de Navier qui sont les équations aux dérivées partielles à trois fonctions inconnues u , v , w de x , y , z et t .

En notation indicielle, les relations (A.9 a ou b) s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \gamma_{ri} = 0 \quad (\text{A.10})$$

les conditions aux limites sont :

- les déplacements imposés $u(x, y, z, t)$ sur la frontière S_u

- les contraintes imposées : $\vec{f}_S = \{\sigma_{ij} - n_j\}$ sur S_σ

en remarquant que $\vec{f}_S = [C]_\sigma \{n\}$ ou $\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$ avec n_j cosinus directeur suivant la direction

j du vecteur normal $\{n\}$ à la surface S

A.3.2 Forme intégrale de type Galerkinge.

La forme associée aux systèmes d'équations aux dérivées partielles (A.10) s'écrit en prenant des fonctions de pondération de type Galerkinge :

$$W = \int_V \langle \delta u \rangle \{ \sigma_{ij,j} + F_i - \rho \gamma_{ri} \} dV = 0 \text{ avec} \quad (\text{A.11})$$

$V = \sum_e V^e$ étant le volume total du système considéré.

(A.46) s'écrit encore en séparant les intégrations :

$$W = \sum_e \left[\int_{V^e} \langle \delta u \rangle \{ \bar{\sigma}_{ij,j} \} dV + \int_{V^e} \langle \delta u \rangle \{ F \}^e dV - \int_{V^e} \langle \delta u \rangle \{ \rho \gamma_r \} dV \right] = 0 \quad \text{où} \quad (\text{A.12})$$

$$\langle u \rangle = \langle u, v, w \rangle = \{ u \}^T = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^T \text{ est le vecteur déplacement en un point.}$$

$\{ F \}^e$ résultante des forces de volumiques données sur V^e .

$\{ \gamma_r \} = \vec{\gamma}_r$ est l'accélération relative.

$$\{ \sigma_{ij,j} \} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xj,j} \\ \sigma_{yj,j} \\ \sigma_{zj,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{xy,z} \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} \end{Bmatrix}$$

Soit W_1 le premier terme de W :

$$W_1 = \sum_e \int_{V^e} \langle \delta u \rangle \{ \sigma_{i,j} \} dV \quad (\text{A.13})$$

$$W_1 = \sum_e \int_{V^e} \delta u_i \sigma_{ij,j} dV \quad (\text{A.14})$$

Or comme

$$(\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} = \delta u_{i,j} \sigma_{ij} + \delta u_i \sigma_{ij,j} \quad (\text{A.15})$$

$$W_1 = \sum_e \left[\int_{V^e} (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} dV - \int_{V^e} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV \right] \quad (\text{A.16})$$

En appliquant le théorème de Gauss au premier terme de (A.16), on obtient :

$$W_1 = \sum_e \left[\int_{S^e} (\delta u_i \sigma_{ij}) n_j ds - \int_{V^e} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV \right] \quad \text{avec} \quad (A.17)$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \{n\} \text{ est le vecteur normal unitaire à } dS \text{ caractérisé par ces cosinus directeurs } n_j.$$

(A.17) est équivalente à (en faisant apparaître littéralement le tenseur contrainte)

$$W_1 = \sum_e \left[\int_{S^e} \langle \delta u \rangle [C]_{\sigma} \{n\} dS - \int_{V^e} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV \right] \quad (A.18)$$

Soit la transposée du vecteur $\{\sigma\}$ représentatif du tenseur contrainte et la transposée du vecteur $\{\varepsilon\}$ représentatif du tenseur déformation :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \{\sigma\}^T = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz} \rangle \\ &= \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{sy}, \tau_{uz}, \tau_{xz} \rangle \\ \langle \varepsilon \rangle &= \{\varepsilon\}^T = \langle \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz} \rangle \end{aligned} \quad (A.19)$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_i = u_{i,i} & \text{si } i = j \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Compte tenu de ces notations, A.18 devient :

$$W_1 = \sum_e \left[\int_{S^e} \langle \delta u \rangle [C]_{\sigma} \{n\} dS - \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\} dV \right] \quad (A.20)$$

En remplaçant dans l'expression (A.12) et en arrangeant on a finalement :

$$W = \sum_e \left[- \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\} dV + \int_{S^e} \langle \delta u \rangle [C]_{\sigma} \{n\} dS + \int_{V^e} \langle \delta u \rangle \{F\} dV - \int_{V^e} \langle \delta u \rangle \rho \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} dV \right] = 0 \quad (A.21)$$

On retrouve bien ici l'application du principe des travaux virtuels qui exprime que pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons du système, le travail des forces extérieures est égal aux travaux des forces intérieures. Soit :

$$W = W_e - W_i = 0 \quad (A.22)$$

$$W_i = \sum_e \left[\int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} dV \right] \text{ est le travail des forces intérieures.} \quad (\text{A.23})$$

$$W_e = \sum_e \left[\int_{S^e} \langle \delta u \rangle [C]_{\sigma} \{ n \} dS + \int_{V^e} \langle \delta u \rangle \{ F \} dV + \int_{V^e} \langle \delta u \rangle (-\rho) \{ \ddot{u} \} dV \right] \quad (\text{A.24})$$

est le travail des forces extérieures. On reconnaît que :

$$\{ F_S \} = [C]_{\sigma} \{ n \}$$

donc le premier terme de W_e représente le travail des forces extérieures appliquées sur la surface, le deuxième terme étant le travail des forces de volumes et le dernier terme le travail des forces d'inertie.

A.3.3 Approximation par éléments finis.

Le domaine V considéré est discrétisé par éléments finis isoparamétriques à n_e nœuds. On a alors pour chaque élément discrétisé en un point quelconque de l'élément de coordonnées (x^e, y^e, z^e) :

$$\begin{Bmatrix} x^e(\xi, \eta, \varsigma) \\ y^e(\xi, \eta, \varsigma) \\ z^e(\xi, \eta, \varsigma) \end{Bmatrix} = \langle N(\xi, \eta, \varsigma) \rangle \{ X \} \quad (\text{A.25})$$

où

$\{ X \}^T = \langle X \rangle = \langle x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_{n_e}, y_{n_e}, z_{n_e} \rangle$ est la transposée du vecteur des coordonnées des nœuds de l'élément.

$N_i(\xi, \eta, \varsigma)$ est la $i^{\text{ème}}$ fonction de transformation géométrique ou fonction d'interpolation.

Le déplacement u en un point de l'élément est approximé par :

$$\{ u(x, y, z) \} = \langle N(\xi, \eta, \varsigma) \rangle \{ U \}^e \quad \text{avec } (x, y, z) \in V^e \text{ où} \quad (\text{A.26})$$

$\{ U \}^e = \langle U \rangle^{eT} = \langle u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_{n_e}, v_{n_e}, w_{n_e} \rangle^T$ est le vecteur déplacement des nœuds de l'élément.

$$\langle N(\xi, \eta, \zeta) \rangle = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & \dots & N_{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & \dots & N_{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & \dots & N_{n_e} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

A.3.4 Equations de mouvements pour un problème élastique linéaire.

La relation contraintes-déformations pour un problème de ce type s'écrit :

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\} \quad \text{où} \quad (\text{A.28})$$

$$\{\sigma\} = [C^r]\{\varepsilon\} \quad \text{avec} \quad [C^r] = [\bar{D}]^{-1} \quad \text{est le tenseur relation contrainte déformation} \quad (\text{A.29})$$

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad \text{avec} \quad (\text{A.30})$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

(A.29) et (A.30) combinés donne :

$$\{\sigma\} = [C^r][L]\{u\} \quad (\text{A.32})$$

(A.23) devient compte tenu de (A.30) et (A.32)

$$W_i = \sum_e \int_{V^e} \delta\{u\}^T [L]^T [C^r][L]\{u\} dV$$

Compte tenu de (A.26), on a alors :

$$W_i = \sum_e \int_{V^e} \delta\{U\}^e \langle N \rangle^T [L]^T [C^r][L] \langle N \rangle \{U\}^e dV$$

Posons :

$$[B] = [L]\langle N \rangle \quad (\text{A.33})$$

$$[K]^e = \int_{V^e} [B]^T [C^r] [B] dV \text{ dite matrice de rigidité élémentaire} \quad (\text{A.34})$$

On a alors :

$$W_i = \sum_e \delta\{U\}^e [K]^e \{U\}^e \text{ de même, compte tenu que :}$$

$$\langle \delta u \rangle^e = \{\delta u\}^{eT} = \{\delta U\}^{eT} \langle N \rangle^{eT} \quad (\text{A.24}) \text{ devient :}$$

$$W_e = \sum_e \left[\int_{S^e} \{\delta U\}^{eT} \langle N \rangle^T [C]_{\sigma} \{n\} dS + \int_{V^e} \{\delta U\}^{eT} \langle N \rangle^T \{F\} dV + \int_{V^e} \{\delta U\}^{eT} \langle N \rangle^T (-\rho) \{\ddot{u}\} dV \right] \quad (\text{A.35})$$

On remarque que :

$$\{\ddot{u}\} = \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} = \langle N(\xi, \eta, \varsigma) \rangle \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right\}^e = \langle N(\xi, \eta, \varsigma) \rangle \{\ddot{U}\}^e$$

posons :

$$[M]^e = \int_{V^e} \rho \langle N \rangle^T \langle N \rangle dV \text{ est la matrice de masse élémentaire} \quad (\text{A.36})$$

$$\{R\}^e = \int_{S^e} \langle N \rangle^T [C]_{\sigma} \{n\} dS + \int_{V^e} \langle N \rangle^T \{F\} dV \quad (\text{A.37})$$

est le vecteur sollicitation élémentaire avec $\{F_S\} = [C]_{\sigma} \{n\}$ est la contrainte appliquée sur dS . Ceci signifie que les conditions aux limites en contrainte sont automatiquement prises en compte du fait de la décomposition par partie du premier de la forme intégrale W .

Compte tenu de (A.36) et (A.37), (A.35) devient :

$$W_e = \sum_e \{\delta U\}^{eT} (\{R\}^e - [M]^e \{\ddot{U}\}^e) \quad (\text{A.38})$$

Et la forme intégrale $W = W_e - W_i = 0$ s'écrit

$$W = \sum_e \left\{ \delta U^{eT} \right\} \left[-[M]^e \{\ddot{U}\}^e - [K]^e \{U\}^e + \{R\}^e \right] \quad (\text{A.39})$$

Cette sommation, par les techniques dites de l'assemblage est ensuite organisée sous la forme matricielle :

$$W = \{\delta U^T\} \left[-[M]\{\ddot{U}\} - [K]\{U\} + \{R\} \right] = 0 \quad (\text{A.40})$$

où : $[K]$ est la matrice de rigidité globale
 $[M]$ est la matrice masse globale
 $\{R\}$ est le vecteur sollicitation globale.
 $\{U\}$ est le vecteur contenant les déplacements ordonnés de tous les nœuds du système.

$\{\delta U\}$ est une première variation du vecteur déplacement

$\{\ddot{U}\}$ est le vecteur contenant les accélérations ordonnées de tous les nœuds du système.

Ces techniques d'assemblage sont généralement bien décrites dans la littérature (réf.4,18), Elles permettent de construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires obtenues relativement aux nœuds de l'élément par une expansion de l'expression de ces mêmes matrices relativement aux nœuds globaux et ensuite de procéder à une simple sommation.

Finalement on aboutit aux équations de mouvements pour un matériau élastique linéaire :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (\text{A.41})$$

Vu que la forme intégrale W doit être vérifiée sur l'ensemble des variations possibles. (U doit satisfaire les conditions aux limites sur C_u).

A.3.5 Equations de mouvement pour un problème viscoélastique linéaire.

Dans l'étude de la réponse dynamique des structures, l'introduction des forces volumiques d'amortissement est une première méthode commode pour prendre en compte l'énergie dissipée durant la vibration. Une deuxième méthode consiste à prendre en compte cette dissipation en considérant directement pour le matériau une loi de comportement viscoélastique.

a) Modèle utilisant les forces volumiques d'amortissement.

La formulation du système aux dérivées partielles pour un milieu continu déduite de (A.10) s'écrit :

$$\sigma_{ij,j} + F_i - F_{ci} - \rho\gamma_{ri} = 0 \quad (\text{A.42})$$

$\{F_c\}$ est la force volumique d'amortissement par unité de volume de composantes F_{ci} suivant la direction i .

La forme intégrale de type Galerkin qui en découle s'écrit pour un volume total $V = \sum_e V^e$ où V^e est le volume d'un élément. L'indice e signifie sur V^e

$$W = \sum_e \left[\int_{V^e} \langle \delta u \rangle \left\{ \sigma_{ij,j} + F_i^e - F_{ci}^e - \rho \gamma_{ri} \right\} dV = 0 \right] \quad (\text{A.43})$$

Par rapport au cas élastique linéaire précédent, on a le terme supplémentaire W_2 dans l'expression de la forme intégrale W .

$$W_2 = - \sum_e \int_{V^e} \langle \delta u \rangle \{F_c\} dV \quad (\text{A.44})$$

Après la discrétisation par éléments finis: $\langle \delta u \rangle = \{\delta u\}^T = \{\delta U\}^e \langle N \rangle^T$ on obtient :

$$W_2 = - \sum_e \int_{V^e} \{\delta U\}^e \langle N \rangle^T \{F_c\} dV \quad (\text{A.45})$$

posons :

$\{R_c\}^e = \int_{V^e} \langle N \rangle^T \{F_c\} dV$ la résultante élémentaire des forces d'amortissements. Alors,

$$W_2 = - \sum_e \{\delta U\}^e \int_{V^e} \langle N \rangle^T \{F_c\} dV = - \sum_e \{\delta U\}^e \{R_c\}^e \quad (\text{A.46})$$

et après expansion et sommation par les techniques d'assemblage, on obtient :

$W_2 = - \{\delta U\}^T \{R_c\}$ où $\{R_c\}$ est la résultante des forces d'amortissement sur V .

La forme intégrale W (A.43) s'écrit alors :

$$W = \{\delta U\}^T \left[[M]\{U\} - \{R_c\} - [K]\{U\} + \{R\} \right] = 0$$

D'où une première écriture pour les équations de mouvement d'un milieu viscoélastique :

$$[M]\{\ddot{U}\} + \{R_c\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (\text{A.47})$$

dans le cas d'un amortissement de type visqueux alors la force volumique d'amortissement pour un élément $\{F_c\}^e$ est proportionnelle à la vitesse et s'écrit :

$$\{F_c\}^e = c \cdot \{\dot{u}\} \quad \text{où } c \text{ est le coefficient d'amortissement considéré sur un élément .} \quad (\text{A.48})$$

et $\{\dot{u}\} = \langle N \rangle \{\dot{U}\}^e$ est la vitesse d'un point de l'élément.

$$\{R_c\}^e = \left[\int_{V^e} \langle N \rangle^T c \langle N \rangle dV \right] \cdot \{\dot{U}\}^e \quad (\text{A.49})$$

Posons :

$$[C]_a^e = \left[\int_{V^e} \langle N \rangle^T c \langle N \rangle dV \right] \text{ la matrice d'amortissement élémentaire.} \quad (\text{A.50})$$

Soit $[C]_a$ la matrice d'amortissement global obtenu par assemblage des matrices d'amortissements élémentaires $[C]_a^e$. L'équation (A.47) devient :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]_a\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (\text{A.51})$$

La définition de la matrice d'amortissement en pratique est difficile voire impossible. Dans le cas où c est considéré homogène (constant) sur un élément et pour tous les éléments.

Dans ce cas, du fait de définition de la matrice de masse (A.27), on obtient :

$$\begin{aligned} [C]_a^e &= \frac{c}{\rho} [M]^e \\ [C]_a &= \frac{c}{\rho} [M] = \alpha [M] \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

La matrice d'amortissement dans ce cas idéalisé (c constant) est alors directement proportionnelle à la matrice de masse.

b) Méthode utilisant une relation contraintes-déformations.

Au lieu de prendre en compte la dissipation de l'énergie par des forces d'amortissement volumique unitaire, celle-ci est prise en compte directement au niveau de la relation contrainte-déformation. Dans ce cas, la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^v \text{ pour un matériau visco-élastique} \quad (\text{A.53})$$

avec σ_{ij}^{el} représentant la contrainte élastique développée.

σ_{ij}^v représentant la contrainte visqueuse développée.

Ou bien $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{el}$ pour un matériau élastoplastique.

La loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma\}^{el} = [C^r] \{\varepsilon\}^{el} \quad \text{pour un matériau viscoélastique non-linéaire.} \quad (\text{A.54})$$

$$\{\sigma\}^v = [C]^v \{\varepsilon\}$$

$$\{\sigma\}^{el} = [C^r]^{ep} \{\varepsilon\} \quad \text{pour un matériau élasto - plastique}$$

Et $[C^r]$ est le tenseur relation contraintes - déformation élastique précédent.

$[C]^v$ est le tenseur relation contraintes - déformations visqueux.

$[C^r]^{ep}$ est le tenseur relation contraintes - déformations élasto - plastique.

Par la suite pour un problème élasto-plastique, il suffira de remplacer $[C]$, par $[C^r]^{ep}$ et annuler $[C]^v$

Dans ce cas, le premier terme de l'équation (A.21) de la forme intégrale W pour l'élément e s'écrit :

$$- \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\} dV = - \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\}^{el} dV - \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\}^v dV \quad (\text{A.55})$$

Le premier terme de droite de l'équation(A.55) correspondant au terme élastique devient après des manipulations identiques à celles effectuées en A.3.4.

$$- \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\}^{el} dV = - \langle \delta U \rangle^{eT} [K]^e \{U\}^e \quad (\text{A.56})$$

le second terme de droite de l'équation (A.55) correspond à l'énergie dissipée. Après des manipulations identiques à savoir :

$$\langle \varepsilon \rangle = \{\varepsilon\}^T = \{[L]\{u\}\}^T = \{[L]\langle N \rangle \{U\}\}^T = \{U\}^T \langle N \rangle^T [L]^T \quad (\text{A.57})$$

$$\{\sigma\}^v = [C]^v \{\varepsilon\} = [C]^v [L] \langle N \rangle \{U\}$$

$$- \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\}^v dV = - \langle \delta U \rangle^{eT} \left[\int_{V^e} \langle N \rangle^T [L]^T [C]^v [L] \langle N \rangle dV \right] \{\dot{U}\}^e \quad (\text{A.58})$$

$$\text{en posant } [B]^v = [L]^T [C]^v [L] \text{ on obtient :} \quad (\text{A.59})$$

$$- \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\}^v dV = - \langle \delta U \rangle^{eT} \left[\int_{V^e} \langle N \rangle^T [B]^v \langle N \rangle dV \right] \{\dot{U}\}^e \quad (\text{A.60})$$

Dans ce cas, le système d'équation qui régit le mouvement est donné par (A.51) avec tout d'abord,

$$[C]_a^e = \left[\int_{V^e} \langle N \rangle^T [B]^v \langle NdV \rangle \right] \quad (\text{A.61})$$

la matrice d'amortissement élémentaire, et par assemblage de ces matrices élémentaires, $[C]_a$ la matrice d'amortissement global.

Dans le cas particulier où le tenseur relation contraintes-déformations visqueux est proportionnel au tenseur relation contraintes-déformations élastique, et que le facteur de proportionnalité est constant sur V , on peut écrire :

$$[C]^v = \beta [C]^r \quad \text{ou encore} \quad [B]^v = \beta [B] \quad , \text{ce qui donne} \quad (\text{A.62})$$

$$[C]_a^e = \beta [K]^e \quad \text{pour un élément, et par assemblage} \quad (\text{A.63})$$

$$[C]_a = \beta [K] \quad (\text{A.64})$$

Dans ce cas très spécifique la matrice d'amortissement global est proportionnelle à la matrice de rigidité

Les deux cas sus - cités constituent deux cas particuliers d'obtention de la matrice d'amortissement. Si nous retenons ces deux mécanismes de dissipation d'énergie et si on fait l'hypothèse que c constant et $[C]^v = \beta [C]^r$, on peut généraliser l'obtention de $[C]_a$ de la manière suivante :

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (\text{A.65})$$

Ce type d'amortissement est appelé amortissement de type Rayleigh.

Comme la matrice $[C]$ est une combinaison linéaire des matrices $[K]$ et $[M]$ qui sont orthogonale par rapport à la base constituée des vecteurs propres il s'en suit que la matrice $[C]$ aussi.

L'écriture de la matrice d'amortissement sous une des formes sus-citées à donc une importance capitale lors de la résolution des équations de mouvement (A.51) car compte tenu des relations d'orthogonalité, elle permet de découpler les équations du système dans la base des vecteurs propres et de ramener ainsi l'étude d'un système à plusieurs degrés de libertés à l'étude de plusieurs systèmes à un degré de liberté.

Une forme plus générale d'une matrice d'amortissement vérifiant des propriétés d'orthogonalité a été développée par Caughey dont une forme simplifiée pratique est :

$$[C] = \left[M \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i ([M]^{-1} [K])^i \right]$$

où les coefficients constants α_i se déterminent à partir de la connaissance des N pourcentages d'amortissement ξ_i par rapport à l'amortissement critique des N modes individuels considérés.

Pour la construction d'une matrice de ce type, une procédure directe a été présentée par Clough et Panzien. Cette procédure a l'avantage d'éviter la détermination des coefficients α_i .

Les divers modes d'amortissement dans un problème de dynamique radial et interne et leurs prises en compte est une étape délicate de toute étude dynamique. Les modèles viscoélastiques linéaires sont des modèles simplifiés. Les modèles non-linéaires semblent prendre en compte d'une façon plus judicieuse l'amortissement interne dans les sols de façon hystérétique, par la considération des relations contraintes-déformations qui peuvent tenir compte :

- De l'effet de l'amplitude de déformation.
- De l'effet de la contrainte de confinement.
- De l'effet de l'indice des vides.
- De l'effet du cycle de chargement.
- De l'effet du degré de saturation.
- De l'effet de la fréquence.
- De l'effet des contraintes initiales de cisaillement
- De l'effet de l'histoire du sol.
- De l'effet du temps
- ...etc.

Il est à remarquer qu'un modèle non-linéaire simple qui prendrait en compte toutes les variations des effets sus-cités n'existe pas. Les modèles généralement complexes que l'on trouve dans la littérature sont d'une part difficile à mettre en oeuvre et d'autre part ils se rapportent à des sols spécifiques. Les modèles les plus couramment utilisés tels que les modèles hyperboliques ou les modèles élasto-plastiques, ...etc, prennent en général en considération qu'un nombre limité d'effets.

A.3.6 Equations de mouvement pour un problème non-linéaire.

Dans la formulation des équations de mouvement dans les cas précédant, on avait implicitement supposé que :

Les déplacements des points de l'éléments et les déformations en un point de l'élément étaient suffisamment faibles.

Le matériau considéré était linéaire et élastique

Les conditions aux limites demeurent inchangées durant l'application du chargement.

Si une des hypothèses citées n'est plus respectée alors le problème est non-linéaire.

Si la première hypothèse n'est pas vérifiée, on est en grands déplacements en petites ou grandes déformations suivant le cas. Dans ce cas, des termes non linéaires par rapport aux inconnues du problème, apparaissent dans les équations aux dérivées partielles tels que :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

Si la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée cela signifie que la relation contraintes-déformations est de type non-linéaire.

Si la troisième l'hypothèse n'est pas vérifiée, les conditions aux limites changent. C'est le cas par exemple des problèmes de contact.

Ici, on s'intéressera, au cas où la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée. Dans ce cas, la loi de comportement est de type non-linéaire. Celle-ci intervenant que dans l'expression du premier terme de la forme intégrale W (A.21) à savoir :

$$W = \sum_e \left[- \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} dV + \dots \right], \text{ les autres termes n'étant point affectés.} \quad (\text{A.66})$$

On a toujours : $\{ \varepsilon \} = [L] \{ u \}$. Ce qui donne :

$$W = \sum_e \left[- \int_{V^e} \langle \delta u \rangle^T [L]^T \{ \sigma \} dV + \dots \right] \quad (\text{A.67})$$

A l'instant t on peut considérer pour un système de chargement donné qui agit statiquement, c'est-à-dire sans développer des forces d'inerties, ou bien pour un système de chargement dynamique engendrant des forces d'inerties que, la contrainte en un point du milieu, se décompose sous la forme:

$$\{ \sigma \} = \{ \sigma(t) \}^{el} + \{ \sigma(t) \}^v \quad (\text{A.68})$$

où $\{ \sigma(t) \}^{el}$ est la contrainte élastique développée à l'instant t .

$\{ \sigma(t) \}^v$ est la contrainte visqueuse développée à l'instant t .

$$\begin{aligned} \{ \sigma \}^{el} &= [C^r(u)] \{ \varepsilon \}^{el} \\ \{ \sigma \}^v &= [C(u)]^v \{ \dot{\varepsilon} \} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad (\text{A.69})$$

$[C^r(u)]$ est le tenseur relation contrainte-déformation élastique précédent à l'instant t .

$[C(u)]^v$ est le tenseur relation contrainte-déformation visqueux à l'instant t .

$\{ \varepsilon \}^{el}$ et $\{ \dot{\varepsilon} \}$ étant respectivement la déformation élastique correspondante à l'instant t et la vitesse de déformation à cet instant, en un point du milieu.

Dans ce cas, la forme intégrale W devient

$$W = \sum_e \left[- \int_{V^e} \delta \{ u \}^T [L]^T [C^r(u)] [L] \{ u \} dV - \int_{V^e} \delta \{ u \}^T [L]^T [C(u)]^v [L] \{ u \} dV + \dots \right] \quad (\text{A.70})$$

Posons :

$$\begin{aligned} [B(u)] &= [L]^T [C^r] [L] \\ [B(u)]^v &= [L]^T [C]^v [L] \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

La forme intégrale s'écrit alors :

$$W = \sum_e \left[- \int_{V^e} \delta\{u\}^T [B(u)] \{u\} dV - \int_{V^e} \delta\{u\}^T [B(u)]^v \{u\} dV + \dots \right] \quad (\text{A.72})$$

Avec la discrétisation éléments finis : $\{u\} = \langle N \rangle \{U\}^e$ la forme intégrale s'écrit : (A.73)

$$W = \sum_e \left[- \{\delta U\}^{eT} \left[\int_{V^e} \langle N \rangle^T [B(\{U\})] \langle N \rangle dV \right] \{U\}^e - \{\delta U\}^{eT} \left[\int_{V^e} \langle N \rangle^T [B(\{U\})]^v \langle N \rangle dV \right] \{\dot{U}\}^e + \dots \right]$$

Soit en posant :

$$[K(\{U\})]^e = \left[\int_{V^e} \langle N \rangle^T [B(\{U\})] \langle N \rangle dV \right] \text{ matrice de rigidité élémentaire} \quad (\text{A.74})$$

$$[C(\{U\})]_a^e = \left[\int_{V^e} \langle N \rangle^T [B(\{U\})]^v \langle N \rangle dV \right] \text{ matrice d'amortissement élémentaire} \quad (\text{A.75})$$

$$W = \sum_e \left[- \{\delta U\}^T [K(\{U\})]^e \{U\} - \{\delta U\}^T [C(\{U\})]_a^e \{\dot{U}\} + \dots \right] \quad (\text{A.76})$$

Or $W = 0$ conduit aux systèmes d'équations, après assemblage :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C(\{U\})]_a \{\dot{U}\} + [K(\{U\})] \{U\} = \{R(t)\} \quad (\text{A.77})$$

Les matrices globales définies ci-dessus obtenus par assemblage des matrices élémentaires, sont du fait de leur définition symétriques, définies positives.

Dans ce cas, ces matrices sont variables dans le temps et dépendent entr' autre du niveau de sollicitations, lequel influe sur nombre de paramètres qui ont un effet sur la loi de comportement. Dans ces conditions une forme incrémentale de cette équation est parfois plus aisée en pratique.

A.4 RESOLUTION DES EQUATIONS D EQUILIBRES OU DE MOUVEMENTS.

A.4.1 Forme généralisée des équations d'équilibre ou de mouvements.

La résolution des équations d'équilibre ou de mouvement fait appel à des techniques numériques dont la technique utilisée dépend du type de problème étudié.

Dans le cas d'un problème statique, compte tenu de l'absence de forces d'inerties et d'amortissement, les équations d'équilibres déduites de (A.77) s'écrivent dans le cas général d'un matériau quelconque sous la forme du système d'équation :

$$[K(\{U\})]\{U\} = \{R\} \quad (\text{A.78})$$

ou bien encore sous la forme incrémentale suivante équivalente :

$$[K(\{U\})]\{\Delta U\} = \{\Delta R\} \quad (\text{A.79})$$

où $\{\Delta U\}$ représente la variation du déplacement global de tous les nœuds du système engendré par la variation de la sollicitation globale $\{\Delta R\}$.

Dans le cas d'un problème dynamique plus général, on a obtenu un système d'équations différentielles du second ordre de la forme (A.77)

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C(\{U\})]_a \{\dot{U}\} + [K(\{U\})]\{U\} = \{R(t)\} \quad \text{pour } t > t_0$$

avec les conditions initiales sur $\{U\}$ et $\{\dot{U}\}$ à $t=0$.

Il existe diverses méthodes d'intégration directe des systèmes d'équation de ce type qui se classent en deux grandes catégories :

- Méthodes explicites
- Méthodes implicites

Le principe de ces méthodes est que partant d'un état initial donné, et ayant estimé les champs de déplacements vitesse et accélération à l'instant t , de déterminer une approximation de ces mêmes champs à l'instant $t + \Delta t$.

Les méthodes explicites utilisent l'expression du système précédent (A.77) à l'instant t associé à une approximation des dérivées par différences finies centrées (par exemple la méthode des différences finies centrales).

Les méthodes implicites par contre utilisent l'expression du système (A.77) à l'instant $(t + \Delta t)$ associé à une approximation des dérivées par différences finies centrées à droite ou à un développement limité à $t + \tau$ où $\tau = \theta \cdot \Delta t$ (coefficient)

Ces méthodes sont bien détaillées dans la littérature (réf 3,4,18, etc.).

D'une manière générale, ces deux types de méthodes se ramènent à la résolution de système d'équation de même type que (A.78) et (A.79) de la forme

$$[\bar{K}(\{U\})]\{U(t + \tau_1)\} = \{\bar{R}(t + \tau_2)\} \quad \text{ou de la forme incrémentale :} \quad (\text{A.80})$$

$$[\bar{K}(\{U\})]\{\Delta U\} = \{\Delta \bar{R}\} \quad \text{et } U(t + \Delta t) = U(t) + \Delta U \quad (\text{A.81})$$

avec suivant la méthode :

Méthodes des différences centrales

$$\tau_1 = \Delta t \quad \tau_2 = 0$$

$$[\bar{K}] = [M] + \frac{\Delta t}{2} [C]_a$$

$$\begin{aligned} \{\bar{R}(t)\} &= \Delta t^2 \{R(t)\} + [M] \{2\{U(t)\} - \{U(t - \Delta t)\}\} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} [C]_a \{U(t - \Delta t)\} - \Delta t^2 [K] \{U(t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\Delta R}\} &= \Delta t^2 \{R(t)\} + [M] (\{U(t)\} - \{U(t - \Delta t)\}) + \frac{\Delta t}{2} [C]_a (-\{U(t)\} + \{U(t - \Delta t)\}) \\ &\quad - \Delta t^2 [K] \{U(t)\} \end{aligned}$$

$$\{U(t + \Delta t)\} = \{U(t)\} + \{\Delta U\}$$

Méthode de Houbolt

$$\tau_1 = \Delta t \quad \tau_2 = \Delta t$$

$$[\bar{K}] = 2[M] + \frac{11}{6} \Delta t [C]_a + \Delta t^2 [K]$$

$$\begin{aligned} \{\bar{R}(t + \Delta t)\} &= \Delta t^2 \{R(t + \Delta t)\} + [M] \{5\{U(t)\} - 4\{U(t - \Delta t)\} + \{U(t - 2\Delta t)\}\} \\ &\quad + \Delta t [C]_a \left(3\{U(t)\} - \frac{3}{2}\{U(t - \Delta t)\} + \frac{1}{3}\{U(t - 2\Delta t)\}\right) \end{aligned}$$

$$\{\bar{\Delta R}\} = \{\bar{R}(t + \Delta t)\} - [\bar{K}] \{U(t)\}$$

Les vecteurs nodaux vitesses et accélérations s'obtiennent à partir des déplacements :

$$\{\dot{U}(t + \Delta t)\} \approx \frac{1}{6\Delta t} (11\{U(t + \Delta t)\} - 18\{U(t)\} + 9\{U(t - \Delta t)\} - 2\{U(t - 2\Delta t)\})$$

$$\{\ddot{U}(t + \Delta t)\} \approx \frac{1}{\Delta t^2} (2\{U(t + \Delta t)\} - 5\{U(t)\} + 4\{U(t - \Delta t)\} - \{U(t - 2\Delta t)\})$$

Méthode de Newmark et de Wilson

$$[\bar{K}] = [M] + \tau.a.[C]_a + \tau^2.b.[K]$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(t+\tau) = & \frac{\tau^2}{2} b \{R(t+\tau)\} + [M] (\{U(t)\} + \tau \{U'(t)\} + \frac{\tau^2}{2} (1-b) \{U''(t)\}) \\ & + [C]_a (\tau a \{U(t)\} + \frac{\tau^2}{2} (2a-b) \{U'(t)\} + \frac{\tau^3}{2} (a-b) \{U''(t)\}) \end{aligned}$$

où a et b sont des paramètres.

Pour $b=0$ la méthode est explicite.

Les valeurs couramment utilisées sont $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$, qui revient à supposer une accélération constante entre.

Pour $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$ cette approximation consiste à supposer une accélération variant d'une façon linéaire entre.

$$\{\Delta \bar{R}\} = \{\bar{R}(t+\Delta t)\} - [K] \{U(t)\}$$

Les vecteurs nodaux vitesses et accélérations s'obtiennent à partir des déplacements :

$$\{\ddot{U}(t+\tau)\} \approx \frac{2}{b\tau^2} (\{U(t+\tau)\} - \{U(t)\}) - \frac{2}{b\tau} \{\dot{U}(t)\} - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \{\ddot{U}(t)\}$$

$$\{\dot{U}(t+\Delta t)\} \approx \{\dot{U}(t)\} + \Delta t ((1-a) \{\ddot{U}(t)\} + a \{\ddot{U}(t+\Delta t)\})$$

Pour la méthode de *Wilson*

$\tau_1 = \tau_2 = \tau = \theta \Delta t$ avec $\theta \geq 1$ et cette méthode est inconditionnellement stable pour $\theta = 1.4$

Pour la méthode de *Newmark*

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau = \Delta t$$

La méthode est inconditionnellement stable si :

$$a \geq \frac{1}{2} \text{ et } b \geq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$$

Lorsque $a = \frac{1}{2}$ une condition de stabilité s'écrit $\Delta t \leq (l/c) \sqrt{\frac{1}{1-2b}}$ avec l étant la dimension de l'élément et c la célérité des ondes dans le milieu.

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

En conclusion, dans tous les cas, on est ramené à la résolution d'un système d'équations de la forme généralisée :

$$[\bar{K}(\{U\})]\{U(t + \tau_1)\} = \{\bar{R}(t + \tau_2)\} \quad (\text{A.82a})$$

$$\text{avec } [\bar{K}(\{U\})] = [K(\{U\})] \text{ et } \tau_1 = \tau_2 = 0 \text{ en statique.} \quad (\text{A.82b})$$

On remarquera que le système d'équations (A.77) du second ordre peut toujours être transformé en un système d'équations du premier ordre. Cependant, cette opération est peu utilisée pour les grands systèmes car elle exige une réorganisation des matrices. Dans ce cas, toutes les méthodes d'intégration directe des systèmes de premier ordre de type explicite ou implicite restent applicables (méthode d'Euler, runge-kutta, ... etc.). Les équations d'équilibre ou de mouvements peuvent encore se mettre sous la forme (A.82), mais dans ce cas, en place de $\{U\}$ on a un généralement un vecteur plus général $\{\bar{U}\}$ comme on peut le constater sur l'exemple de transformation suivant.

$$\text{On a } [M]\{\ddot{U}\} + [C(\{U\})]_a \{\dot{U}\} + [K(\{U\})]\{U\} = \{R(t)\}$$

En posant $\{\dot{U}\} = \{V\}$ et en notant par $[I]$ la matrice unité, ces deux équations s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{U} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C(U)]_a & [K(U)] \\ -[I] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Ce qui correspond à un système}$$

différentiel du premier ordre avec le vecteur généralisé $\{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix}$

D'autres méthodes sont couramment utilisées dans la pratique notamment en travaillant dans le domaine des fréquences où l'utilisation de la transformée de Fourier permet surtout pour un problème linéaire élastique ou viscoélastique de simplifier grandement l'obtention de la solution. Dans le domaine des temps, la méthode de superposition modale permet aussi pour un problème linéaire élastique ou viscoélastique d'obtenir la réponse avec en plus de grande simplification, en ne considérant qu'un nombre limité de modes de vibration.

A.4.2 Résolution pour un milieu élastique linéaire

Dans le cas d'un milieu à comportement élastique linéaire, le système d'équation pour un problème statique est alors linéaire et s'écrit sous la forme simple :

$$[K]\{U\} = \{R\}$$

où la matrice de rigidité est constante.

La résolution de ce système classique peut se faire par une méthode classique (de type Gauss, newton-cotes... etc.) de résolution d'un système d'équation linéaire, le choix de la méthode dépendant de la nature du problème, de la précision recherchée, ... etc.

En dynamique, de nombreuses méthodes existent. La résolution des équations de mouvement peut se faire dans le domaine des temps ou dans le domaine des fréquences.

Dans le domaine des temps la résolution peut se faire par l'une des méthodes implicites ou explicites d'intégrations directes pas à pas des équations de mouvements comme celles citées ci dessus. D'autres méthodes classiques telle que la méthode de superposition modale sont utilisées dans la pratique. Dans ce cas, la détermination des modes propres de vibration du système est une étape importante. Le choix de la méthode utilisée pour la détermination des modes propres et valeurs propres dépend essentiellement de la taille des matrices, de la nature même du problème donc du nombre de mode de vibration à prendre en compte qui en découle. Pour les problèmes de grandes tailles ou un certain nombre de vecteurs propres sont nécessaires, la méthode d'itération de sous – espace peut être utilisée. Si seul le mode fondamental nous intéresse la méthode d'itération inverse peut être utilisée. Pour les problèmes de petites tailles de nombreuses méthodes existent comme la méthode de Jacobi si on recherche tous les modes ou bien la méthode de Stodola si on recherche que quelques modes propres... etc. Les valeurs propres et les vecteurs propres étant déterminés, ces derniers constituent une base, dans laquelle du fait des propriétés d'orthogonalités des matrices de masse et de rigidités, les équations de mouvement

prises sous la forme $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t)$ peuvent être découplées. La résolution dans cette base des équations découplées à partir de l'intégrale de Duhamel et le retour à la base vectorielle initiale par le biais de la matrice de passage constituée des vecteurs propres eux-mêmes, permettent d'obtenir la solution du système.

Dans le domaine des fréquences, la résolution s'effectue d'abord par la décomposition de la sollicitation en série de Fourier au moyen en général de l'utilisation d'une transformée rapide de Fourier (FFT), ensuite de la recherche de la sollicitation pour chacune des harmoniques et finalement en appliquant le principe de superposition de construire la solution. L'utilisation d'une fonction de réponse facilite grandement l'obtention de la réponse.

A.4.3 Problème linéaire viscoélastique.

Les méthodes pour les problèmes dynamiques décrites brièvement ci – dessous restent applicable dans le cas où la matrice d'amortissement vérifieraient les conditions d'orthogonalité. Pour des raisons de commodités, il est souvent préférable de travailler dans le domaine complexe.

A.4.4 Problème non-linéaire

La méthode des éléments finis conduit à une formulation discrétisée des problèmes non – linéaires qui peuvent s'écrire sous la forme généralisée (A.82), et pour les formulations où \mathbf{K} est une fonction de \mathbf{u} , sous la forme

$$\mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{A.83})$$

ou encore sous la forme incrémentale

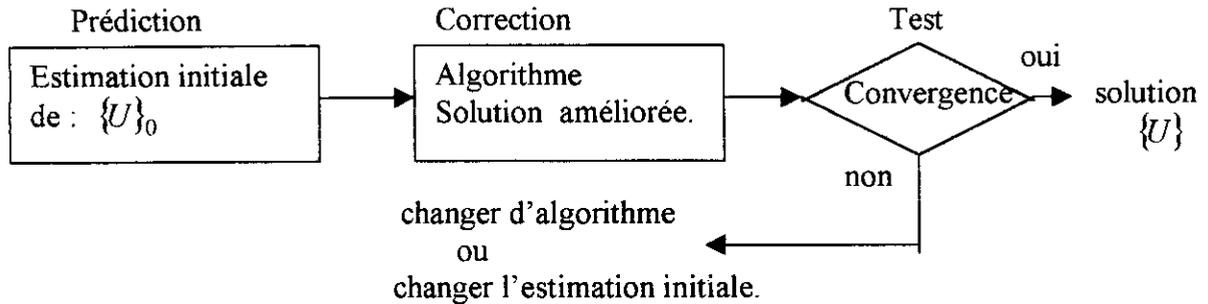
$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{K}(\mathbf{u}_T)\mathbf{u}_T \quad (\text{A.84})$$

la recherche de la solution $\{U\}$ à l'instant t pour un problème statique ou dynamique consiste à rechercher un vecteur $\{U\}$ qui rend le résidu

$$\{r(\{U\})\} = \{\bar{R}\} - [\bar{K}(\{U\})]\{U\} \quad (\text{A.85})$$

aussi proche que possible de zéro, la solution exacte rendant le résidu nul.

Cette recherche se fait de la manière itérative suivante :



La plupart des algorithmes utilisés dans la pratique conduit à la résolution de système linéaire à chaque itération. Le choix d'un algorithme de résolution doit tenir compte de plusieurs facteurs :

Le type de non – linéarité.

L'existence de une ou plusieurs solution.

La disponibilité d'obtenir une solution approchée.

La précision ou la rapidité d'obtenir la convergence désirée.

Le risque de divergence.

La stratégie de résolution doit s'adapter, par expérience au problème donné, en faisant appel à l'une des méthodes suivantes ou a une combinaison de ces méthodes :

La méthode de substitution.

La méthode de Newton – Raphson

La méthode incrémentale.

La méthode de quasi – Newton

Méthode de substitution.

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions

$$\{U\}_0, \{U\}_1, \dots, \{U\}_i$$

où $\{U\}_i$ à étape i est calculée à partir de $\{U\}_{i-1}$ en résolvant :

$$[\bar{K}(\{U\}_{i-1})]\{U\}_i = \{\bar{R}\} \quad (\text{A.86})$$

Ou bien sous la forme incrémentale :

$$\begin{aligned} [\bar{K}(\{U\}_{i-1})]\{\Delta U\}_i &= \{r(\{U\}_i)\} \\ \{U\}_i &= \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\}_i \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \{r(\{U\}_i)\} = \{\bar{R}\} - [\bar{K}(\{U\}_{i-1})]\{U\}_{i-1} \quad (\text{A.87})$$

$\{U\}_{i-1}$ étant connu, on construit $[\bar{K}(U)]_{i-1}$ à partir des matrices élémentaires obtenues à partir tenseurs relations contraintes- déformations considérées pour le matériau. La résolution d'un des systèmes précédents donne $\{U\}_i$. La figure (A.3) illustre cette procédure pour un système à un degré de liberté.

Méthode de Newton – Raphson

$\{U\}_{i-1}$ étant connu, on cherche $\{U\}_i$. Pour cela on décompose en série de Taylor le résidu en ne considérant que les deux premiers termes. Ce qui donne :

$$\{r(\{U\}_{i-1})\} + \frac{\partial r}{\partial U} \Big|_{\{U\}_{i-1}} (\{U\} - \{U\}_{i-1}) = 0 \quad (\text{A.88})$$

soit, compte tenu de (A.85)

$$[\bar{K}(\{U\}_{i-1})] \{U\}_{i-1} - \{R\} + [\bar{K}(\{U\}_{i-1})] \{\Delta U_i\} = 0 \quad (\text{A.89})$$

soit :

$$\begin{aligned} [\bar{K}(\{U\}_{i-1})] \{\Delta U_i\} &= \{R\} - [\bar{K}(\{U\}_{i-1})] \{U\}_{i-1} \\ \{U\}_i &= \{U\}_{i-1} + \{\Delta U_i\} \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

La méthode de Newton – Raphson converge de façon quadratique donc rapidement comme l'illustre la figure A.4 pour un système à un degré de liberté. Mais la matrice de rigidité doit être évaluée à chaque étape i de l'itération. De plus, en statique, pour un matériau parfaitement plastique ou capable de ramollissement, la matrice tangente $[K(\{U\})]$ peut devenir singulière ce qui peut engendrer des difficultés dans la procédure itérative. La méthode de Newton Raphson – modifiée permet de contourner ce type de difficulté. En dynamique ce problème de singularité ne se pose pas du fait de l'utilisation d'une matrice $[\bar{K}(\{U\})]$ au lieu de $[K(\{U\})]$ qui est une combinaison de plusieurs matrices structurelles.

Méthode de Newton – Raphson modifiée.

Une des modifications de la méthode de Newton –Raphson est de remplacer la matrice de rigidité tangentielle $[\bar{K}(\{U\}_{i-1})]$ par $[\bar{K}]_m$ qui est une matrice constante évaluée généralement un niveau d'un certain pas. Si celle-ci est évaluée initialement (au début du premier pas), la méthode est dite 'méthode aux contraintes initiales'.

Le schéma itératif de la méthode de Newton – Raphson modifié est alors :

$$\begin{aligned} [\bar{K}]_m \{\Delta U_i\} &= \{R\} - [\bar{K}(\{U\}_{i-1})] \{U\}_{i-1} \\ \{U\}_i &= \{U\}_{i-1} + \{\Delta U_i\} \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

Pour un système à un degré de liberté, le principe de cette méthode est présenté sur la figure (A.5). Comme on peut le constater, cette méthode converge linéairement, donc d'une façon nettement plus lente que la précédente notamment pour un matériau capable de ramollissement.

Un problème associé à cette méthode est que si l'accroissement de contrainte nous fait passer de l'état plastique à un état élastique (déchargement) cette méthode peut ne pas converger, à moins que la matrice de rigidité soit mise à jour pour cette situation. Ceci en fait complique la programmation.

Méthode quasi – Newton.

Cette méthode se trouve être un compromis entre la méthode de Newton – Raphson et la méthode de Newton – Raphson modifiée.

Cette méthode estime la matrice inverse sécante de la matrice de rigidité $[K_q(\{U\}_{i-1})]^{-1}$ par une méthode qui appartient à la classe des méthodes connues comme 'matrix updates methods'. La BFGS (Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno) méthode de rang 2 est communément utilisée avec la méthode quasi – Newton (réf.11). Une autre méthode couramment utilisée aussi est la méthode D.F.P.(Davidson, Fletcher, Powell) que nous ne détaillerons pas ici. Ces deux méthodes par rapport à d'autres ont l'avantage de préserver la matrice symétrique définie positive.

Définissons le déplacement

$$\{\delta\}_i = \{U\}_i - \{U\}_{i-1} \quad (\text{A.92})$$

Et le résidu :

$$\{r(\{U\}_i)\} = \{\bar{R}\} - [\bar{K}(\{U\}_i)]\{U\}_i \quad (\text{A.93})$$

Et son incrément positivement :

$$\{\Delta r\}_i = \{r(\{U\}_{i-1})\} - \{r(\{U\}_i)\} \text{ soit :} \quad (\text{A.94})$$

$$\{\Delta r\}_i = [\bar{K}(\{U\}_i)]\{U\}_i - [\bar{K}(\{U\}_{i-1})]\{U\}_{i-1} \quad (\text{A.95})$$

On définit la nouvelle matrice $[K_q]_i$ qui est une matrice sécante entre $\{F\}_{i-1}$ et $\{F\}_i$ avec $\{F\}_j = [\bar{K}(\{U\}_j)]\{U\}_j$. Par suite celle-ci vérifie :

$$[K_q]_i \{\delta\}_i = \{\Delta r\}_i \quad (\text{A.96})$$

Cette matrice dans la méthode BFGS est déterminée à l'étape $(i-1)^{\text{ième}}$ et elle est utilisée à la $i^{\text{ième}}$ étape pour déterminer.

Pour une matrice définie positive la formule de récurrence pour obtenir l'inverse d'une matrice s'écrit :

$$[K_q]_i^{-1} = [A]_{i-1}^T [K_q]_{i-1} [A]_{i-1} \quad \text{avec} \quad (\text{A.97})$$

$$[A]_{i-1} = [I] + \{V\}_{i-1} \{W\}_{i-1}^T \quad (\text{A.98})$$

où $[I]$ est la matrice unité, $\{V\}_{i-1}$ et $\{W\}_{i-1}$ sont des vecteurs qui s'expriment en fonction de $\{\delta\}$, $\{r\}$, $\{\gamma\}$ sont détaillés par la suite.

Il en découle la procédure suivante (illustrée pour un système à un degré de liberté par la figure (A.7)) :

Evaluation du déplacement $\{\Delta U\}_i$

$$\begin{aligned}\{\Delta U\}_i &= [K_q]_{i-1}^{-1} \{r(\{U\}_i)\} \\ &= [A]_{i-1}^T \dots [A]_1^T [K_q]_0^{-1} [A]_1 \dots [A]_{i-1} \{r(\{U\}_{i-1})\} \\ \{\delta\}_i &= \{\Delta U\}_i \\ \{U\}_i &= \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\}_i\end{aligned}\tag{A.99}$$

On remarque que le fait de prendre $\{\delta\}_i = \{\Delta U\}_i$, compte tenu de (A.96) revient à choisir $\{\delta\}_i$ ou $\{\Delta U\}_i$, de telle sorte que :

$$[K_q]_{i-1}^{-1} \{r(\{U\}_i)\} = [K_q]_i^{-1} \{\Delta r\}_i \text{ ou encore}$$

2) Calculer $[A]_i$ à partir des calculs de $\{V\}_i$ et $\{W\}_i$.

$$\{V\}_i = -c_i [K_q]_{i-1} \{\delta\}_i - \{\Delta r\}_i$$

en remarquant que $[K_q]_{i-1} \{\delta\}_i = \{r(\{U\}_{i-1})\}$ compte tenu de (5.129), soit

$$\{V\}_i = \{r(\{U\}_i)\} - (1 + c_i) \{r(\{U\}_{i-1})\} \quad \text{où}\tag{A.100}$$

$$c_i = \sqrt{\frac{\{\delta\}_i \{\Delta r\}_i}{\{\delta\}_i^T [K_q]_{i-1} \{\delta\}_i}}$$

$$\{W\}_i = \frac{\{\delta\}_i}{\{\delta\}_i^T \{\Delta r\}_i} = \frac{\{\delta\}_i}{G(0) - G(1)} \quad \text{avec}\tag{A.101}$$

$$G(x) = \{\Delta U\}_i^T [r(\{U\}_{i-1} + x\{\Delta U\}_i)]$$

on remarque alors que

$$c_i = \frac{G(0) - G(1)}{G(0)}\tag{A.102}$$

Une condition nécessaire pour éviter certains problèmes numériques liés aux produits matriciels effectués en (A.100) pour la mise à jour de $[K_q]^{-1}$ est que $c_i < 10^5$. Au cas où cette condition ne serait pas respectée la mise à jour n'est pas performante.

La matrice $[A]_i$ est ensuite obtenue par (A.98)

On remarquera le calcul de $\{F\}_i$ est nécessaire pour évaluer $\{\Delta r\}_i, \dots$

Le nombre d'itération de cette méthode est inférieur à celui de Newton – Raphson modifié mais supérieur à celle de Newton – Raphson.

De plus la matrice de rigidité ici joue un rôle moins important que dans les deux méthodes précédentes puisqu'on utilise une mise à jour progressive.

Pour les problèmes statiques, cette méthode est très performante même pour des matériaux parfaitement plastiques ou capables de ramollissement et ne pose aucun des problèmes posés par les autres méthodes.

Méthode incrémentale

Cette méthode consiste à résoudre l'équation (A.83) $[\bar{K}(\{U\})]\{U\} = \{\bar{R}\}$, en plusieurs étapes. Chaque étape correspondant à un pas, constitue un problème non linéaire qui est résolu par plusieurs itérations d'une des méthodes précédentes.

Dans le cas d'un problème statique, la sollicitation $\{R\}$ est décomposée en n sollicitations ($\{\Delta R\}^k, k=1, n$). Dans ce cas, on doit résoudre n problèmes non – linéaires successivement de la forme

$$[K(\{U\}^k)]\{U\}^k = \{\Delta R\}^k \quad k=1, n \quad (\text{A.103})$$

Il est évident que plus n est grand, plus le risque de divergence est petit, et cette méthode est la seule façon actuellement d'éviter les risques de divergences. Cette méthode associée à la méthode de Newton – Raphson est illustrée pour un système à un degré de liberté sur la figure (A.6).

Les incréments suivant le type de problème peuvent être choisis égaux à $\frac{1}{n}\{R\}$ ou bien variables en prenant de plus grand incrément lorsque $[K(\{U\})]\{U\}$ varie de façon monotone et des incréments d'autant plus petits que la variation $[K(\{U\})]\{U\}$ est d'autant moins monotone. Cette dernière solution avec un ajustement progressif du pas de temps réduit considérablement à convergence égale le nombre d'incrément à considérer.

Dans le cas d'un problème dynamique, chaque intervalle de temps de la méthode implicite ou explicite appliquée (différence centrale, Houbolt, Newmark, ... etc.), peut être considéré comme un seul incrément ou la somme de plusieurs incréments. Chaque incrément est alors résolu comme un problème statique et les remarques ci – dessus relatives au choix de l'incrément restent valable avec bien sûr $[\bar{K}]$ au lieu de $[K]$ et $\{\bar{R}\}$ au lieu de $\{R\}$. Dans le cas où chaque pas de temps serait considéré comme un incrément, ces remarques sont alors relatives au choix du pas de temps lorsque ce choix est possible. Si ce choix n'est pas possible alors il devient parfois nécessaire de subdiviser cet intervalle de temps en plusieurs incréments compte tenu de la façon dont varie la sollicitation.

Critère de convergence.

Il est bien évident que pour mettre fin à un processus itératif c'est à dire stopper une itération pour passer à la suivante, il faut définir un critère de convergence. Ce critère peut porter sur les déplacements ou sur les forces ou sur l'énergie interne (ici le ou n'est pas exclusif). A la $i^{\text{ème}}$ itération de l'incrément en cours k on peut définir les critères suivants où $\{U\}^{k-1}$ est le déplacement à la fin de l'incrément $k-1$, et le symbole $\| \|$ représente la norme vectorielle Euclidienne :

Critère en déplacement :

$$\| \{\Delta U\}_i^k \| \leq \varepsilon_d \| \{U\}_i^k - \{U\}^{k-1} \| \quad (\text{A.104})$$

Critère en force :

$$\| \{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}_i^k) \{U\}_i^k] \| \leq \varepsilon_f \| \{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}^{k-1}) \{U\}^{k-1}] \| \quad (\text{A.105})$$

Critère en énergie interne :

$$\{\Delta U\}_i^k (\{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}_i^k) \{U\}_i^k]) \leq \varepsilon_e \{\Delta U\}_i^k (\{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}^{k-1}) \{U\}^{k-1}]) \quad (\text{A.106})$$

Les ε sont les tolérances admises respectivement sur les déplacements.

Le critère en déplacement exprime un contrôle sur l'incrément de déplacement entre deux itérations successives relativement à l'incrément de déplacement évalué par rapport au déplacement initial du début de l'incrément de charge.

Le critère en force de la même façon contrôle le résidu non équilibré à l'itération en cours par rapport à l'incrément de charge en cours (peut être lui-même non parfaitement équilibré d'où $[\bar{K}(\{U\}^{k-1}) \{U\}^{k-1}]$ au lieu de $\{\bar{R}\}^{k-1}$).

Le critère d'énergie représente un contrôle sur l'énergie interne développée par le résidu non équilibré à l'itération en cours relativement à la valeur initiale de cette même énergie.

D'autres critères en déplacement, force ou énergie peuvent être considérés comme par exemple ceux de la forme

$$\| \{\Delta X\}_i^k \| \leq \varepsilon_x \| X_i^k \| \quad (\text{A.107})$$

où X peut être le vecteur déplacement nodaux par exemple.

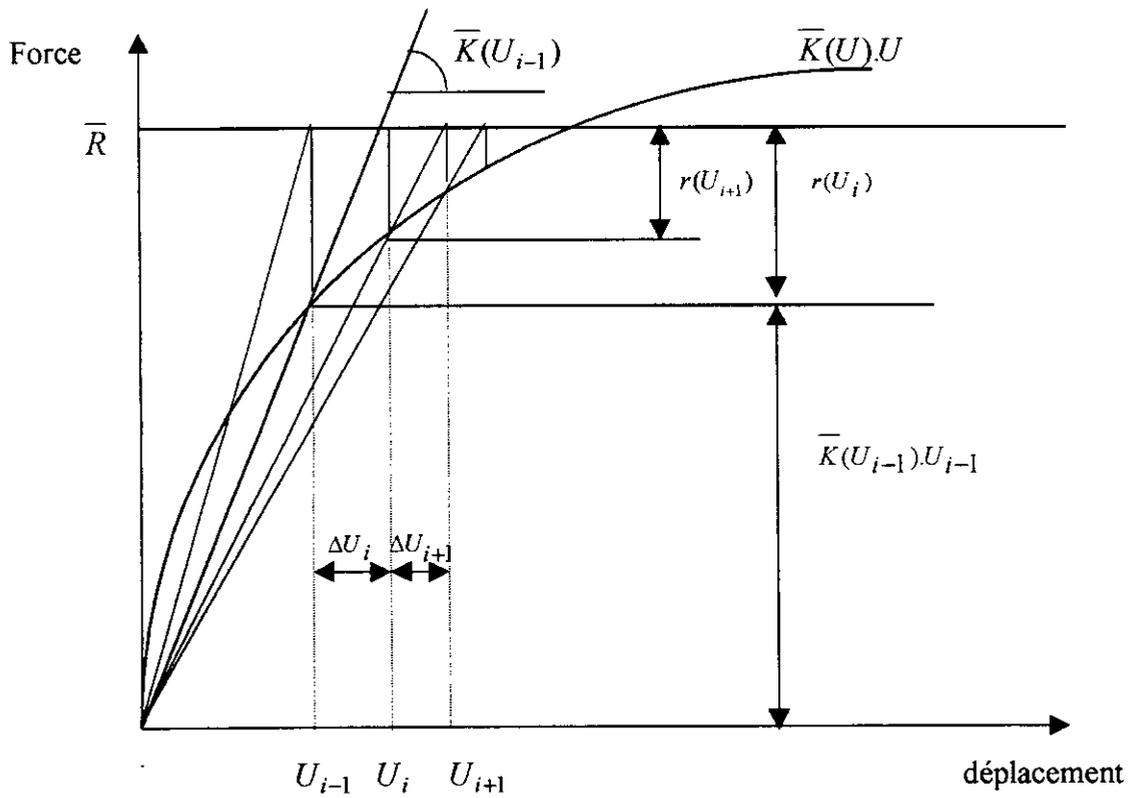


Figure (A.3) Méthode de substitution (système à un degré de liberté)

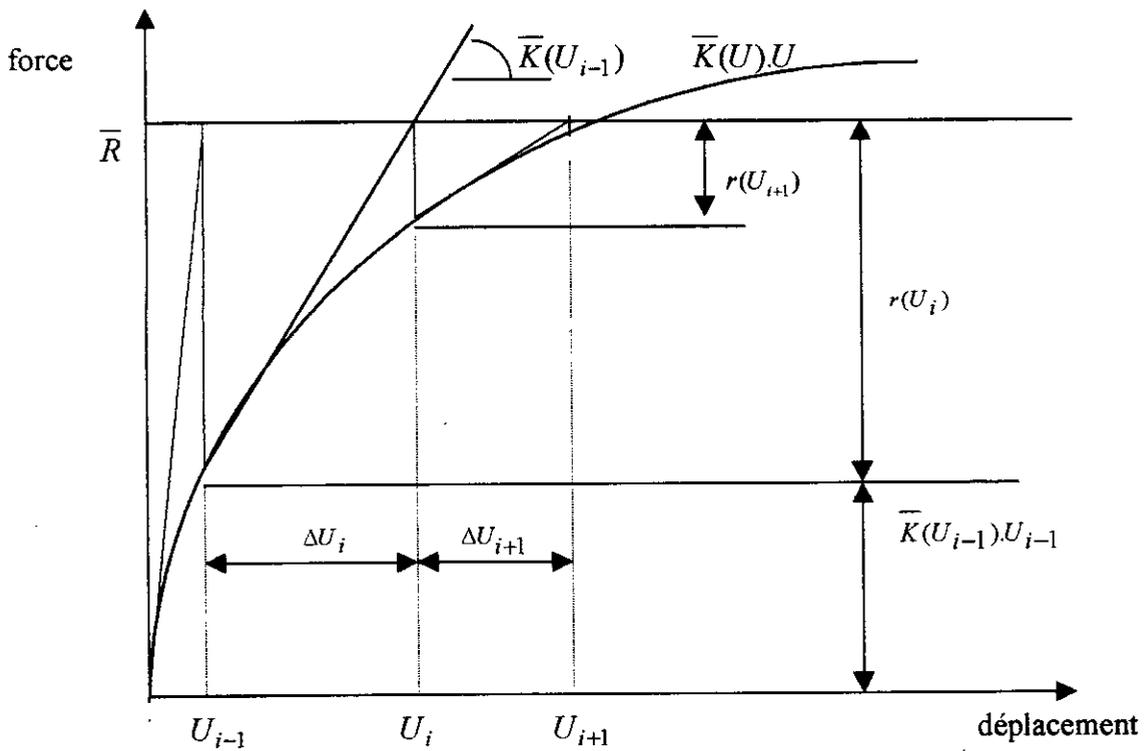


Figure (A.4) Méthode Newton – Raphson (système à un degré de liberté)

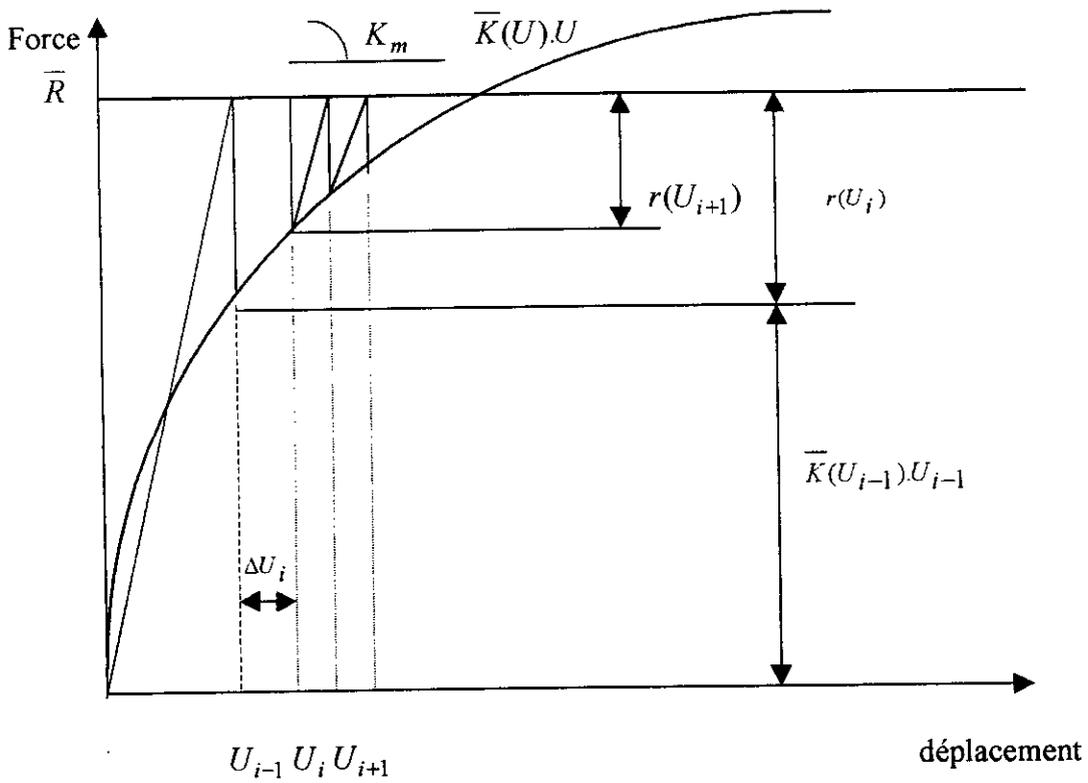


Figure A.5 : Méthode de Newton – Raphson modifié (système à un d.d.l.)

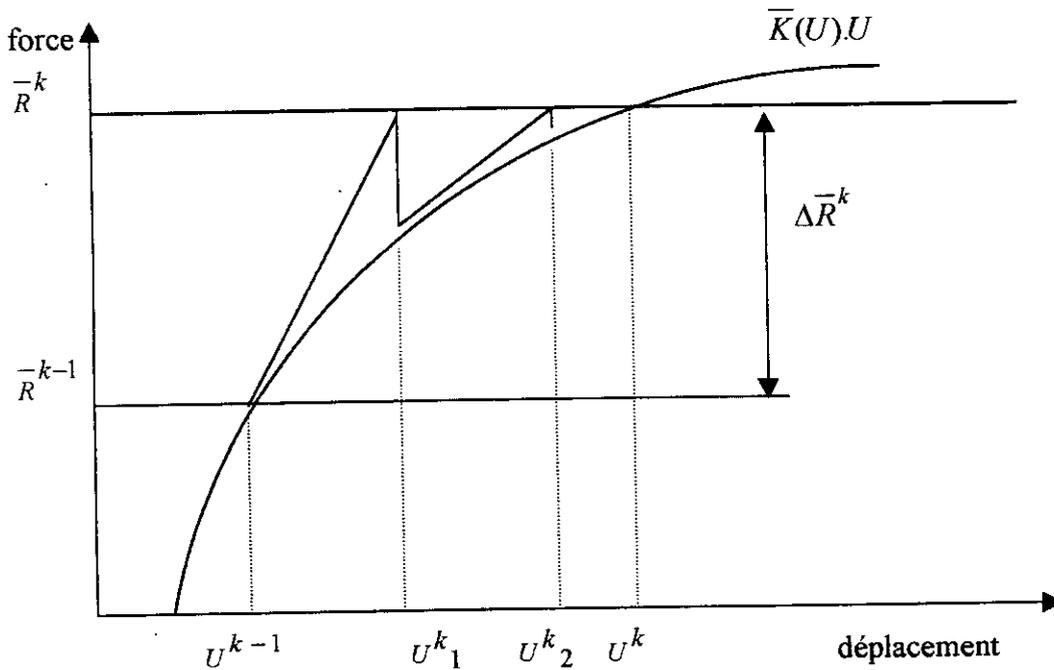


Figure A.6 : Méthode incrémentale associée à la méthode Newton – Raphson (système à un d.d.l, convergence en 3 itérations sur l'incrément k)

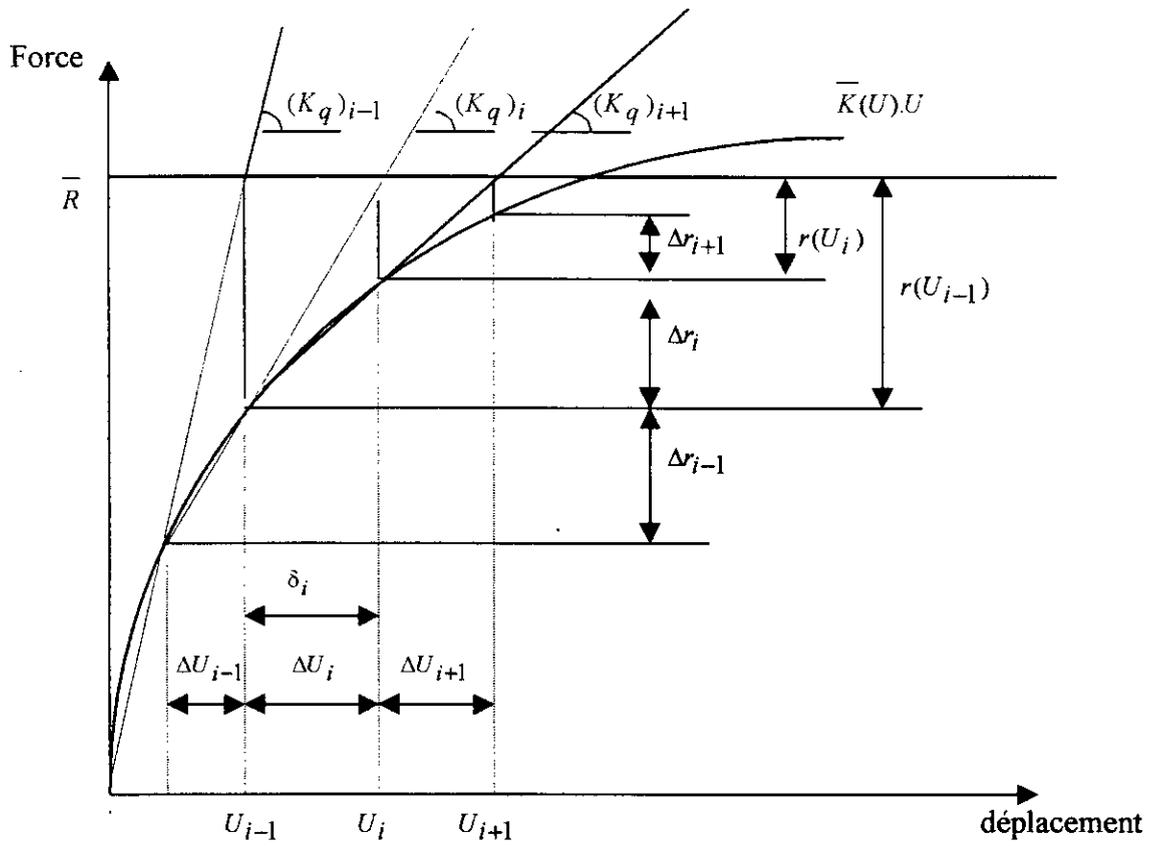


Figure (A.7) Méthode de quasi – Newton (système à un d.d.l.)