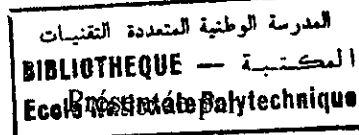


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Civil

THESE DE MAGISTER



Fatiha YENNOUNE

Ingénieur d'Etat en Génie Civil
de l'Ecole Nationale Polytechnique

Pour obtenir le titre de

MAGISTER

En GENIE CIVIL

THEME

**DIMENSIONNEMENT DES MURS DE SOUTÈNEMENT PAR
OPTIMISATION MULTICRITERE**

Soutenue publiquement le 14 juin 1998 devant le jury d'examen :

Président	: Mr A. BALI	Professeur	E.N.P
Rapporteur	: Mr K. SILHADI	Maître de Conférences	E.N.P
Examineurs	: Mr S. BELKACEMI	Maître de Conférences	E.N.P
	Mr M. ABBAS	Maître de Conférences	U.S.T.H.B
	Mr M. SLIMANI	Chargé de Cours	I.N.G.M

REMERCIEMENTS

*Je tiens à témoigner ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse Monsieur **Kamel SILHADI**, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique. En fait ce modeste travail n'aurait pu voir le jour sans son aide permanente, son encouragement et ses conseils fructueux.*

Je remercie vivement Messieurs le Président et les membres de Jury qui m'ont fait l'honneur de participer à la Commission d'examen:

*Monsieur **Abdelrahim BALI**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique,*

*Monsieur **Smain BELKACEMI**, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique,*

*Monsieur **Moncef ABBAS**, Maître de Conférence à l'Université des Sciences et de Technologie **HOUARI BOUMEDIENE**, et*

*Monsieur **Mohamed SLIMANI**, Chargé de cours à l'Institut National de Génie-Mécanique de Boumerdès.*

*Je tiens également à remercier chaleureusement et exprimer ma plus vive reconnaissance à Mesdemoiselles **Naima LEBIB**, **Cherifa CHERFA** et **Souad BOUDAA** pour leur soutien moral, et pour m'avoir toujours fourni un soutien amical par leur aide et leurs encouragements.*

Mes plus sincères remerciements s'adressent à tout le personnel du centre de calcul et de la bibliothèque pour leur permanente disponibilité.

Enfin, que tous ceux qui de près ou de loin, m'ont aidé et soutenu dans mon travail, trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

DEDICACES

À mon très cher regretté père,

à ma très chère mère,

à mes frères et soeurs,

à tous ceux qui me sont chers,

Je dédie ce modeste travail.

Fatiha.

اصبح تصميم جدران الشد باستعمال طرق التفضيل المتعددة المعايير يكتسي أهمية كبرى، لاسيما عندما يتعلق الأمر بإيجاد الأبعاد. في الواقع، إن الدراسة التقليدية لإيجاد الأبعاد تقتصر عموما على التأكد من تحقيق خاصية تثبيت الجدار بالنسبة لحل يعطى مسبقا من طرف مستعمل جهاز الحاسوب. لكن، غالبا ما تفشل هذه الطريقة التلمسية في إيجاد الحل الأمثل لأنها لا تعتبر بصفة معقولة وقياسية جميع معايير الاختيار. لهذا الغرض، أنجز هذا البحث لعرض طرق التفضيل المتعددة المعايير الأساسية وإقتراح نظام منهجي جديد لتصميم أفضل لجدران الشد، بإعتبار معايير متضاربة فيما بينها، بالأخص إنقاص وزن الجدار و زيادة تثبيته. عندئذ نتحصل على نموذج قراري بتعيين جملة من متغيرات قرارية ودوال المعايير و الضغوط الواجبة تحقيقها، و بالتالي يتم إيجاد مجموعة من الحلول تدعى حلول "بارتو" بالإضافة إلى حل أمثل باستعمال طريقة "أكبر-أصغر".

RESUME

L'importance de la conception des murs de soutènement, en particulier de leur dimensionnement, par l'intermédiaire des techniques d'optimisation multicritère est à présent indiscutable. En effet, l'approche conventionnelle de dimensionnement se limite généralement à la vérification de la stabilité d'une solution préalablement dimensionnée par l'utilisateur du système informatique. Souvent, cette démarche tâtonnante n'aboutit pas à une configuration optimale du mur de soutènement car elle ne se base pas vraiment sur un processus rationnel qui prendrait en compte tous les critères de choix d'une solution de dimensionnement. Dans cette optique, le présent travail a été réalisé afin d'exposer les principales méthodes d'optimisation multicritère (O.M.C.) et de proposer une démarche nouvelle s'appuyant sur un algorithme globale d'optimisation des murs de soutènement (de type cantilever et poids) sur la base de différents critères conflictuels, en particulier la minimisation du poids de la structure et la maximisation de la stabilité. Pour cela, l'analyse du problème d' O.M.C. de dimensionnement a permis d'établir un modèle décisionnel en définissant une série de variables de décision et de critères ainsi que des contraintes à vérifier. Cette analyse concrétisée par un programme informatique aboutit à un ensemble de solutions dites solutions de Pareto. Ensuite, une approche dite Min-Max est utilisée pour sélectionner la solution du meilleur compromis.

ABSTRACT

Actually, the design of retaining walls by using multicriterion optimization techniques becomes very important. Indeed, the conventional approach is generally limited to verification of stability solution previously dimensioned by the engineer. Often, this groping approach does not lead to an optimal shape of retaining wall because it is not considering rationally all criterions for choose of a dimensioning solution. Therefore, the purpose of this work, is to present the main multiobjective optimization method and to propose a new approach based on a global optimization algorithm of retaining walls (cantilever and gravity walls type) considering objectives functions which are mutually conflicting, particularly the minimisation of total weight of the wall and the maximisation of the structure stability. Then, a decisive model is established by defining a series of decision variables, objective and constraints functions. A set of Pareto optimum solutions is derived numerically and an a best compromise solution is obtained by using Min-Max approach.

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة-التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION	1
1. INTRODUCTION A LA FORMULATION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION MULTICRITERE	
Introduction	3
1.1 Variables de Décision	4
1.1.1 Définition	4
1.1.2 Exemple	4
1.1.3 Variables et Paramètres	5
1.1.4 Notation Formelle	6
1.2 Contraintes	6
1.2.1 Définition	6
1.2.2 Contraintes d'Inégalité	6
1.2.3 Contraintes d'Égalité	7
1.2.4 Exemple d'illustration	7
1.3 Fonctions critères	7
1.3.1 Définition	7
1.3.2 Notation Formelle	8
1.4 Espace des Variables de Décision et des Fonctions Critères	9
1.5 Formulation du problème intégral	11
1.6 Formes de Programmation Mathématique	12
2. PROBLEMES DE PROGRAMMATION MATHEMATIQUE MULTICRITERE	
2.1 Introduction	13
2.2 Formulation du Problème	14
2.2.1 Solution Idéale	16
2.2.2 Convexité	17
2.2.2.1 Ensembles Convexes	17
2.2.2.2 Fonctions convexes	17
2.3 Optimum de Pareto	18
2.3.1 Définition	19
2.3.2 Concept de "Non Infériorité"	19
2.3.3 Ensemble de Pareto	20
2.3.4 Exemple	21
2.4 Optimum Min-Max	22
2.5 Problème de Prise de Décision	26
3. METHODES D'OPTIMISATION BASEES SUR LA TRANSFORMATION DU PROBLEME MULTICRITERE EN UN PROBLEME MONO-CRITERE	
3.1 Introduction	28
3.2 Méthode Poids (Weighting objective Method)	28
3.2.1 Interprétation Géométrique de la Méthode	30
3.3 Méthode d'Hiérarchisation (Hierarchical Optimization Method)	32
3.3.1 Exemple	33
3.4 Méthode du Goal Programming	34
3.4.1 Particularités de la Méthode du Goal Programming	36
3.5 Méthode du critère Global (Global Criterion Method)	37
3.5.1 Autres Formes du Critère Global	39

3.6	Complications Issues de l'Utilisation des Méthodes Basées sur l'Analyse Mono-Critère	40
4.	METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES D' OPTIMISATION BASEES SUR L'APPROCHE MIN-MAX	
4.1	Introduction	44
4.2	Présentation des Algorithmes Pareto et Min-Max	44
4.2.1	Algorithme Pareto	45
4.2.2	Algorithme Min-Max	48
4.3	Introduction des Méthodes de Recherche de l'Optimum Min-Max	50
4.3.1	Méthodes d'exploration	50
4.3.1.1	Méthode de Monte Carlo 1	51
4.3.1.2	Méthode de Monte Carlo 2	51
4.3.2	Méthodes Séquentielles	52
4.4	Possibilités Supplémentaires de l'Approche Min-Max	53
4.4.1	Méthode Min-Max Poids	53
4.4.2	Méthode de Déplacement de la Solution Idéale	54
4.5	Mécanisme de Présentation de Résultats	54
5.	MURS DE SOUTÈNEMENT	
5.1	Introduction	57
5.2	Principaux Types des Murs de Soutènement	57
5.2.1	Le Mur en Béton Armé	58
5.2.2	Le Mur Poids	59
5.3	Calcul des Murs de Soutènement	59
5.3.1	Informations Générales	60
5.3.2	Caractéristiques du Sol	60
5.3.3	Dimensions des Murs de Soutènement	60
5.3.4	Etude de la Poussée des Terres	62
5.3.4.1	Définition	62
5.3.4.2	Méthodes de Calcul	63
5.3.5	Surcharges	66
5.3.5.1	Surcharge Uniforme	67
5.3.5.2	Surcharge Linéaire	67
5.3.5.3	Surcharge Distribuée Suivant une Bande	67
5.3.5.4	Surcharge Ponctuelle	68
5.3.6	Stabilité du Mur de Soutènement	70
5.4	Etude de la Stabilité Externe	70
5.4.1	Renversement	71
5.4.2	Glissement	71
5.4.3	Poinçonnement	73
5.4.4	Différents Effets Modifiant la Capacité Portante	77
5.4.4.1	Effets de l'Eau	77
5.4.4.2	Effets des Sols Compressibles	78
5.4.4.3	Effets de La Stratification du Sol	78
6.	ETUDE NUMERIQUE	
6.1	Introduction	79
6.2	Modélisation du Mur de Soutènement	80
6.2.1	Formulation Mathématique des Limites Supérieures et Inférieures des Variables de Décision	82
6.2.2	Formulation Mathématique des Fonctions Critères	85
6.2.3	Formulation Mathématique des Fonctions Contraintes	89
6.3	Outil Informatique	93
6.3.1	Objectif du Programme d'Optimisation	93

6.3.2 Structure du Programme	93
6.3.2.1 Données du programme	96
6.3.2.2 Variables de Sorties	97
7. DISCUSSION ET INTERPRETATION DES RESULTATS	
7.1 Introduction	99
7.2 Présentation de l'Ensemble de Pareto	101
7.2.1 Influence du Nombre de Points Générés sur La Constitution de l'Ensemble de Pareto	101
7.2.2 Présentation de l'Optimum Min-Max	108
7.3 Influence de la Profondeur de la Semelle D sur le Dimensionnement du Mur de Soutènement	112
7.3.1 Recherche de la Largeur Economique	117
7.4 Détermination du n-uple de Critères Prédominant du Point de Vue Mécanique	129
7.5 Phase Relative à l'Introduction du Critère "Minimisation de la largeur du talon"	135
7.6 Phase Relative à l'Introduction du Critère "Minimisation de la Profondeur de Fondation"	139
7.7 Réponse au Problème de Minimisation de la Stabilité Externe du Mur de Soutènement	144
7.8 Procédure d'Optimisation Retenue	146
7.9 Comparaison de la Méthode d'Optimisation Présentée à une autre Méthode ayant pour But la Conception du Mur de Soutènement Cantilever Basée sur la Minimisation du Coût	151
7.9.1 Présentation de la Méthode	152
7.9.1.1 Modèle	152
7.9.1.2 Optimisation	152
CONCLUSION	157
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	160

INTRODUCTION

L'approche conventionnelle de l'aide à la conception des murs de soutènement, et en particulier de leur dimensionnement se limite généralement aux calculs géotechniques et mécaniques de vérification de la stabilité d'une solution dimensionnée préalablement par l'utilisateur du système informatique. Dans cette vision, ce dernier est considéré plutôt comme un outil de calcul sans apporter d'aide réelle au dimensionnement. L'ingénieur l'utilise dans le cadre d'un processus itératif. Ainsi, il se propose une première hypothèse de dimensionnement, dont il vérifie la stabilité à l'aide d'un programme informatique. Dans le cas où les résultats sont infructueux, il doit modifier sa proposition initiale et recommencer le processus itérativement jusqu'à satisfaction. Souvent, cette démarche tâtonnante ne permet pas de réellement optimiser les dimensions car elle ne se base pas vraiment sur une démarche rationnelle qui prendrait en compte tous les critères de choix d'une solution de dimensionnement.

Pour cela, nous proposons une démarche nouvelle s'appuyant sur un algorithme global d'optimisation des murs de soutènement sur la base de différents critères à savoir le poids de la structure, la stabilité vis à vis du glissement, du renversement et du poinçonnement, et d'autres critères d'ordre géométrique.

Dans un premier chapitre, nous essayons de définir et d'illustrer les principales notions de base que requiert la formulation des problèmes d'optimisation multicritère à savoir les variables de décision, les contraintes et les critères. Le deuxième chapitre vise à préciser en quels termes est posé le problème d'optimisation multicritère, et d'exposer les différents concepts fondamentaux pour la recherche de la solution optimale.

Par ailleurs, les différentes méthodes et techniques de résolution sont traitées dans les chapitres 3 et 4. Nous distinguons les procédures destinées à transformer une famille de critères en un critère unique, et celles basées sur l'approche Min-Max.

Le cinquième chapitre traite des murs de soutènement, il expose les différentes étapes de calcul des murs les plus courants.

Le chapitre 6 présente la formulation mathématique du problème d'optimisation multicritère des murs de soutènement. Nous trouvons également une description détaillée du programme d'optimisation mis en oeuvre.

Le chapitre 7 est consacré à l'analyse numérique, il expose la démarche globale d'optimisation adoptée pour concevoir une configuration optimale des murs de soutènement les plus courants.

Enfin, nous achevons la présente thèse par des conclusions et suggestions pour les travaux futurs.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION A LA FORMULATION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION MULTICRITERES

L'apparition des problèmes d'optimisation, dans de nombreux et divers domaines d'ingénierie, a rendu nécessaire le développement de méthodes d'optimisation dont le but principal est d'aider l'ingénieur à prendre une meilleure décision dans les situations conflictuelles.

L'étude des problèmes d'optimisation multicritères, ainsi que la conception et la mise en oeuvre des algorithmes de résolution constitue l'objectif principal de la programmation mathématique. Cette dernière s'affirme aujourd'hui comme une branche particulièrement active des mathématiques appliquées, vu le nombre, la variété et l'importance de ses applications que ce soit dans les sciences de l'ingénieur, ou dans d'autres domaines des mathématiques appliquées [1]. Sans prétendre être exhaustifs, nous pouvons citer:

- En ingénierie: dimensionnement et optimisation des structures, conception optimale de systèmes techniques complexes tels que, systèmes informatiques, réseaux d'ordinateurs, réseaux de transport, réseaux d'assainissement, etc...

- En recherche opérationnelle: optimisation des systèmes technico-économique, problèmes de transport, d'ordonnancement, de gestion de stocks, etc...

- En analyse numérique: approximation, résolution de systèmes linéaires et non linéaires, méthodes numériques liées à la mise en oeuvre des méthodes d'éléments finis, etc...

Dans les problèmes complexes d'optimisation, il existe souvent plusieurs critères conflictuels qui doivent être considérés, cette situation est formulée comme un problème d'optimisation multicritère (O.M.C.) dans lequel le but est de minimiser et/ou maximiser non pas une simple fonction mais différentes fonctions simultanément. Par conséquent, l'objectif poursuivi se résumerait en

la détermination d'une ou de plusieurs solutions de meilleur compromis vis à vis d'un ou de plusieurs critères [2].

La formulation du problème d'optimisation multicritère consiste à construire essentiellement un modèle mathématique qui constitue l'interface inévitable entre phénomènes concrets et raisonnement abstrait [3]. Ce modèle doit se rapprocher le plus possible du comportement réel du système afin que la solution obtenue soit adéquate et utile.

Dans la programmation mathématique, cette formulation se définit comme suit:

"Trouver l'optimum des fonctions critères pour des variables de décision sujettes à des contraintes d'inégalité et d'égalité".

En effet, pour illustrer et préciser les concepts et les modèles, nous aurons recours à un certain nombre de définitions (variables de décision, contraintes et fonctions critères) qui apparaissent comme les matériaux de base d'une construction explicitée et formalisée.

1.1 VARIABLES DE DECISION

1.1.1 Définition

Dans la tâche d'optimisation, les quantités numériques dont il est question de déterminer les valeurs afin de résoudre le problème d'optimisation multicritère sont appelées: Les variables de décision.

Dans la formulation mathématique, ces quantités sont notées x_i , $i=1, \dots, n$ où x_i désigne la variable représentant la i ème quantité.

Afin d'illustrer le concept de variable de décision (V.D.D), nous considérons l'exemple suivant:

1.1.2 Exemple

Cet exemple consiste en un problème d'optimisation d'un système de trois barres numérotées 1,2 et 3 de longueurs respectives l_1 , l_2 , l_3 comme le montre la figure 1.1.

Le système est soumis au point D à une force horizontale F_x et à une force verticale F_y , qui produisent des efforts axiaux dans les barres 1,2 et 3 de valeurs respectives F_1 , F_2 et F_3 .

Il est demandé de minimiser le poids du système tout en ayant un rapport de

contrainte normale à la contrainte admissible très proche de l'unité: $\frac{\sigma_n}{\sigma_a} - 1$

Pour résoudre ce problème, il suffit de déterminer les valeurs de x_1, x_2, x_3 où:

x_1 : diamètre de la barre 1

x_2 : diamètre de la barre 2

x_3 : diamètre de la barre 3

Il s'en suit que les quantités inconnues représentent les variables de décision. Toutes les autres grandeurs s'expriment en fonction de ces trois variables indépendantes.

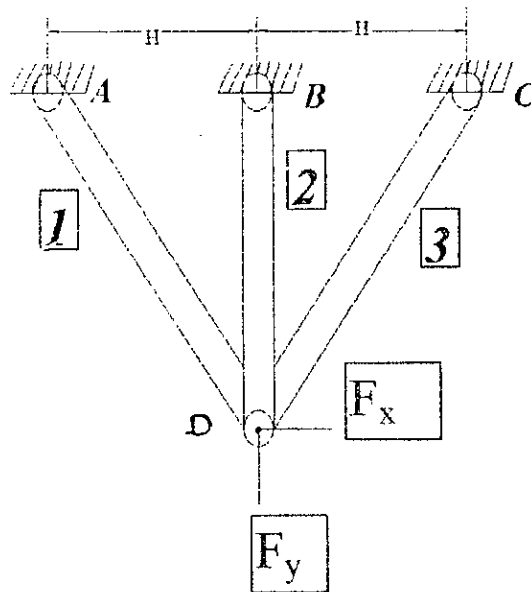


Fig. 1.1. Système de trois barres

1.1.3 Variables et Paramètres

Il est certain, que dans les problèmes d'optimisation multicritère (O.M.C), le choix du nombre et du type des variables est rarement simple [4].

Dans l'exemple traité ci-dessus, les longueurs respectives l_1, l_2, l_3 des trois barres sont supposées connues. Si elles n'étaient pas prédéterminées, elles seraient considérées alors comme des variables de décision supplémentaires x_4, x_5, x_6 .

Pour cette raison, il devient très important de décider lors de la construction du modèle d'optimisation multicritère, d'une part des quantités qui seront éventuellement traitées comme variables et d'autre part celles qui seront fixées. Nous soulignons que les quantités dont les valeurs sont fixées

s'appellent: paramètres.

D'ailleurs, ce sont les relations mathématiques entre les variables de décision et les paramètres qui constituent le modèle d'optimisation multicritère.

La désignation d'une quantité comme paramètre repose sur plusieurs raisons, telles que:

- La connaissance préalable (basée sur l'expérience) des valeurs particulières procurant, généralement, de bons résultats.

- Nécessité de ne pas changer de telles valeurs particulières.

Il est clair, qu'en début de construction d'un modèle, il est difficile de décider si une inconnue peut être considérée comme paramètre ou alors comme variable. Généralement, si les valeurs d'une inconnue peuvent être choisies librement, cette dernière devrait être traitée comme variable de décision.

Cependant, dans un but de simplification, lors du traitement d'un problème, on s'arroge le droit de considérer certaines inconnues comme paramètres, ainsi, le modèle devient plus facile à résoudre mais pas toujours proche de la réalité.

1.1.4 Notation Formelle

Pour représenter les variables de décision, nous pouvons nous reporter à un vecteur des variables de décision $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Soulignons, que l'ordre des composantes est arbitraire, mais une fois défini, cet ordre ne doit, en aucun cas, être changé.

1.2 CONTRAINTES

1.2.1 Définition

Manifestement, pour chaque projet d'ingénierie, il existe des restrictions, imposées par l'environnement, qui doivent être satisfaites afin d'obtenir une solution acceptable. Ces restrictions sont appelées contraintes [4] et décrivent des dépendances entre les variables et paramètres sous forme d'inégalités et souvent d'égalités mathématiques. L'exemple 1.2.4 illustre la formulation des contraintes dans un problème d'O.M.C.

1.2.2 Contraintes d'Inégalité

Dans les problèmes d'O.M.C., les fonctions d'inégalité s'écrivent comme

suit:

$$g_j(\bar{x}) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (1.1)$$

1.2.3 Contraintes d'Égalité

Pour certaines modélisations, nous pouvons aussi rencontrer la présence des contraintes d'égalité pouvant s'écrire sous la forme:

$$h_j(\bar{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \quad (1.2)$$

Il faut souligner que le nombre p des contraintes d'égalité doit être inférieur au nombre de variables de décision noté n .

Dans le cas où $p \geq n$, le problème est dit hypercontraint.

1.2.4 Exemple d'illustration

Avant d'entamer cet exemple simple, il semble utile de souligner qu'il sera cité au fur et à mesure des chapitres, chaque fois que cela est nécessaire, en vue d'illustrer et de préciser les concepts, les procédures et les méthodologies décrites dans cette thèse.

Soit à maximiser les fonctions suivantes:

$$\text{maximiser } \left\{ \begin{array}{l} f_1(\bar{x}) = 4x_1 + 5x_2 \\ f_2(\bar{x}) = x_1 \end{array} \right\}$$

sous les contraintes suivantes:

$$g_1(\bar{x}) = 200 - \frac{x_1}{4} - \frac{3}{4}x_2 \geq 0$$

$$g_2(\bar{x}) = 150 - x_2 \geq 0$$

$$g_3(\bar{x}) = 200 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g_4(\bar{x}) = x_1 \geq 0$$

$$g_5(\bar{x}) = x_2 \geq 0$$

1.3 FONCTIONS CRITERES

1.3.1 Définitions

Selon le dictionnaire LAROUSSE, le mot critère désigne couramment "un principe auquel on se réfère et qui permet de juger ou de comparer". Dans

un tel contexte, les jugements qu'il doit permettre d'établir sont des jugements de préférence en relation avec la décision [3].

En effet, dans le processus de sélection d'une bonne solution parmi toutes les solutions satisfaisant les contraintes imposées, il existe des critères permettant la comparaison de ces solutions. Prenant appui sur ce qui vient d'être cité, le critère se présente alors comme une qualité inhérente de chaque solution, destiné à porter un jugement, ayant trait au fait qu'une solution est meilleure ou pire qu'une autre solution quelconque (jugement relatif) [4].

Dans le modèle d'optimisation, ces critères sont exprimés par des fonctions des variables de décision, appelées fonctions critères, pouvant être en conflit les unes avec les autres [5]. Ces dernières sont désignées par:

$$f_1, f_2, \dots, f_k \text{ ou alors } f_1(\bar{X}), f_2(\bar{X}), \dots, f_k(\bar{X}) .$$

k étant le nombre des fonctions critères du problème.

Dans ce qui suit, considérons l'exemple 1.1.2 du système de trois barres, où deux fonctions critères conflictuelles sont à prendre en compte:

- Minimisation du poids total du système W_{TOT} .
- Maximisation du rapport des contraintes $\frac{\sigma_n}{\sigma_a} - 1$.

où σ_n indique la contrainte normale dans la barre i , alors que la désignation σ_a est relative à la contrainte admissible.

Ces dernières sont exprimées en fonction des variables de décision comme suit :

$$f_1(\bar{X}) = W_{TOT} = \rho \pi \frac{X_1^2}{4} l_1 + \rho \pi \frac{X_2^2}{4} l_2 + \rho \pi \frac{X_3^2}{4} l_3$$

$$f_2(\bar{X}) = \frac{\sigma_n^{(i)}}{\sigma_a} = 4 \frac{N^{(i)}}{\pi X_i^2 \sigma_a}$$

où: i : désigne le numéro de la barre.

$N^{(i)}$: effort axial dans la barre.

ρ : densité de l'acier.

X_1, X_2, X_3 : diamètres respectifs des barres 1,2,3.

l_1, l_2, l_3 : longueurs respectives des barres 1,2,3.

1.3.2 Notation Formelle

La famille des fonctions critères forment un vecteur fonction $\bar{F}(\bar{X})$ (tout comme le vecteur des variables de décision) . Ce dernier est noté:

$$\bar{f}(x) = [f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})]^T$$

où \bar{x} indique le vecteur des variables de décision (V.D.D).

Comme pour le vecteur des V.D.D \bar{x} , l'ordre des composantes du vecteur $\bar{f}(\bar{x})$ est arbitraire, cependant une fois choisi, cet ordre ne doit pas changer.

1.4 ESPACE DES VARIABLES DE DECISION ET DES FONCTIONS CRITERES

Le vecteur des variables de décision et celui des fonctions critères sont représentés dans deux espaces euclidiens E^n et E^k [5].

où: E^n désigne l'espace euclidien des variables de décision à n dimensions.

E^k désigne l'espace euclidien des fonctions critères à k dimensions.

Chaque point dans le premier espace représente une solution à laquelle est associée une image dans le second espace. Celle-ci détermine une qualité de cette solution en termes de valeurs des fonctions critères. Nous donnons ci-après une illustration graphique visant à représenter les deux espaces euclidiens dans un exemple. Pour cela, nous considérons l'exemple 1.2.4.

La figure 1.2 donne les représentations graphiques des deux espaces:

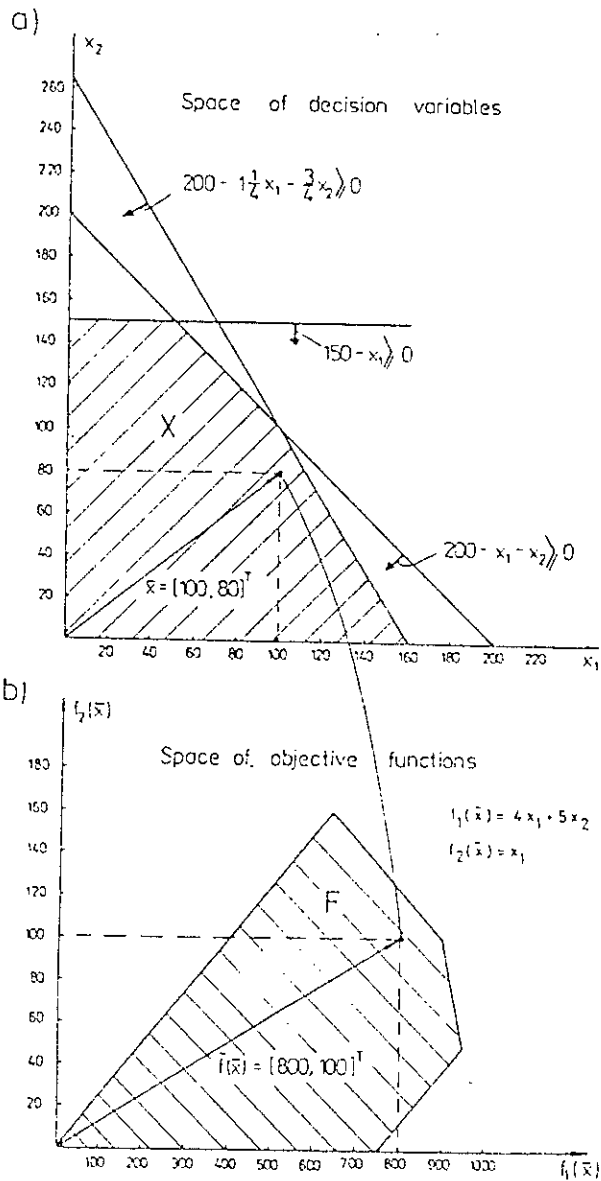


Fig. 1.2. (a) Espace des variables de décision
(b) Espace des fonctions critères

La région hachurée dans (a) définit l'ensemble des solutions admissibles (qui satisfait toutes les contraintes), désigné par l'ensemble X .

Pour tout vecteur \bar{x} de composantes (x_1, x_2) , appartenant à X , on détermine les composantes du vecteur \bar{f} : $f_1(\bar{x})$ et $f_2(\bar{x})$ en utilisant les formules données pour $f_1(\bar{x})$ et $f_2(\bar{x})$.

Par conséquent, tous les points appartenant à l'ensemble des solutions admissibles X , forment dans l'espace des fonctions critères, un ensemble de leurs images désigné par F et illustré sur la figure 1.2(b) par la région hachurée.

Ces illustrations graphiques sont possibles pour deux ou trois dimensions et peuvent aider à comprendre les méthodes de résolution des

problèmes d'optimisation discutés dans les chapitres subséquents. Toutefois, la représentation graphique devient difficile lorsque la dimension de l'espace est supérieure à trois, bien que la formulation du problème soit interprétée de la même manière.

1.5 FORMULATION DU PROBLEME INTEGRAL

Suite à l'émission des jugements appropriés et après définition des fonctions critères et des fonctions de contraintes nécessaires, vient la formulation du problème d'optimisation de la manière suivante [6]:

" Trouver le vecteur $\bar{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ qui satisfera les m contraintes d'inégalité:

$$g_j(\bar{x}) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.3)$$

les p contraintes d'égalité :

$$h_j(\bar{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (1.4)$$

et optimise (minimise ou maximise) le vecteur fonction :

$$f(\bar{x}) = [f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})]^T \quad (1.5)$$

où: $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ est le vecteur des V.D.D."

En d'autres termes, on souhaite déterminer parmi l'ensemble des vecteurs satisfaisant les équations (1.3) et (1.4), le vecteur particulier $\bar{x}^* = \{ x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^* \}$ qui assure l'optimisation des valeurs de toutes les fonctions critères.

Dans ce contexte, le terme 'optimiser' ne signifie pas simplement la détermination du maximum ou du minimum d'une fonction critère, comme cela est le cas dans un problème d'optimisation mono-critère, mais désigne plutôt la recherche de la 'meilleure' solution en considérant toutes les fonctions critères [5].

Dans les chapitres ultérieurs, nous présenterons l'approche permettant de distinguer une bonne solution d'une mauvaise, ainsi que la manière de déterminer "l'optimum".

Nous ne manquerons pas de rappeler que dans la formulation standard du problème donné ci dessus, nous remarquons non seulement la présence des contraintes d'inégalité mais aussi celle des contraintes d'égalité. Ceci n'exclut pas la possibilité de rencontrer d'autres types de problèmes pouvant se

présenter sous trois formes distinctes: soit seules les contraintes d'égalité figurent, soit seules les contraintes d'inégalité sont présentes, soit il s'agit seulement d'un problème d'optimisation sans contraintes.

Ce troisième cas dans lequel aucune restriction n'est imposée sur le vecteur \bar{X} , conduit à un ensemble des solutions admissibles X équivalent à l'ensemble Euclidien E^n en entier. Néanmoins, il convient de signaler à ce propos, que ce cas apparaît très rarement en pratique.

1.6 FORMES DE PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

La formulation du problème d'optimisation se réfère à la programmation mathématique pour laquelle on distingue les classes suivantes [1]:

1) Programmation linéaire dans laquelle les fonctions critères et les fonctions contraintes sont linéaires.

2) Programmation non linéaire dans laquelle, au moins une des fonctions critères ou contraintes n'est pas linéaire.

3) Programmation entière où il est exigé que la ou les solutions soient à valeurs entières.

A ce propos, il convient de noter que les méthodes numériques destinées à la résolution de tels problèmes sont complexes et moins développées que celles relatives à la programmation linéaire et non linéaire.

4) Programmation discrète où toutes les solutions sont choisies dans un ensemble de valeurs discrètes.

Cette dernière constitue en fait la programmation la plus complexe, et par conséquent la plus difficile à résoudre aussi bien dans les problèmes d'optimisation mono-critère que multicritère.

CHAPITRE 2

PROBLEMES DE PROGRAMMATION MATHEMATIQUE MULTICRITERE

2.1 INTRODUCTION

Après avoir fait référence aux principales notions de base nécessaires à la formulation d'un problème d'optimisation multicritère, nous tenterons dans ce chapitre de préciser en quels termes devra être posé le problème d'optimisation multicritère, et d'exposer les différents concepts fondamentaux afin d'orienter la recherche de la solution optimale.

En effet, le problème d'O.M.C. se formule de la façon suivante [5,7]: "Trouver un vecteur de variables de décision qui d'une part, satisfait les contraintes imposées et d'autre part, optimise le vecteur fonction dont les éléments représentent les fonctions critères". Ces dernières forment une description mathématique des critères qui sont généralement en conflit les uns avec les autres.

Le terme "optimiser" signifie par conséquent, trouver une solution procurant des valeurs acceptables pour toutes les fonctions critères [2]. A cet effet, la définition du terme "optimum Pareto" qui sera cité ci-après s'impose.

En fait, cet optimum conduit à un ensemble de solutions dites "non inférieures" autrement dit efficaces, et sont souvent qualifiées d'optimales au sens de Pareto [8,9].

Il est clair que la solution doit être choisie parmi cet ensemble, il n'en demeure pas moins que le choix demeure relativement grand. Ce qui nous amène à introduire la notion de l'optimum Min-Max. Ce dernier procure une solution dont les valeurs de toutes les fonctions critères sont aussi proches que possible de leur extremum (minimum ou maximum selon les exigences du problème d'O.M.C.) atteint séparément.

2.2 FORMULATION DU PROBLEME

Un problème d'optimisation multicritère destiné à la programmation mathématique peut se présenter sous la formulation suivante:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\bar{x}^*) &= \text{opt } \bar{F}(\bar{x}) \\ g_j(\bar{x}) &\geq 0 & j &= 1, \dots, m \\ h_j(\bar{x}) &= 0 & j &= 1, \dots, p < n \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ est un vecteur de variables de décision défini dans l'espace Euclidien des variables de décision à n dimensions E^n et $\bar{F}(\bar{x}) = [f_1(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})]^T$ est un vecteur fonction défini dans l'espace Euclidien des critères à k dimensions E^k .

$g_j(\bar{x})$, $h_j(\bar{x})$ et $f_i(\bar{x})$ sont des fonctions linéaires ou non linéaires des variables x_1, x_2, \dots, x_n .

La notation \bar{x}^* est adoptée pour indiquer la solution optimale (ou tout élément de l'ensemble des solutions optimales si éventuellement la solution n'est pas unique).

L'optimisation multicritère peut être adoptée [5,10]:

- 1) Soit pour minimiser toutes les fonctions critères.
- 2) ou alors pour maximiser toutes les fonctions critères.
- 3) ou enfin pour minimiser certaines et maximiser d'autres.

Par soucis de commodité, nous ramènerons la recherche du maximum d'une fonction f_i au problème de la minimisation par l'identité suivante:

$$\max (f_i(\bar{x})) = - \min (-f_i(\bar{x})) \quad (2.2)$$

De la même façon, les contraintes d'inégalité de la forme:

$$g_j(\bar{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

peuvent être converties à la forme (2.1) en multipliant par (-1) les membres de l'inégalité, pour obtenir:

$$-g_j(\bar{x}) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

En outre, les p contraintes d'égalité données par (2.1) peuvent toujours être remplacées par les $2p$ inégalités:

$$\begin{aligned} h_j(\bar{x}) &\geq 0 & j = 1, \dots, p \\ -h_j(\bar{x}) &\geq 0 & j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (2.5)$$

De manière plus simple, après les transformations évoquées précédemment, un problème d'optimisation multicritère peut être formulé comme suit:

$$\bar{F}(\bar{x}^*) = \underset{\bar{x} \in X}{\text{opt}} \bar{F}(\bar{x}) \quad (2.6)$$

où:

$$\begin{aligned} \bar{F} &: X \rightarrow E^k \\ X &= \{ \bar{x} \in E^n \mid \bar{g}(\bar{x}) \geq 0, \bar{h}(\bar{x}) = 0 \} \end{aligned}$$

Dans ce contexte, l'abréviation 'opt' signifie optimum du vecteur fonction. Il est important de noter que les situations conflictuelles entraînent l'absence d'une définition générale de cet optimum. Effectivement, s'il existe $\bar{x}^* \in X$ tel que pour tout i l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\forall \bar{x} \in X \quad f_i(\bar{x}^*) \leq f_i(\bar{x}) \quad i = 1, \dots, k \quad (2.7)$$

Il s'en suit que le vecteur \bar{x}^* est certainement une solution idéale ou utopique.

D'ailleurs, la figure 2.1 permet d'approfondir la portée de cette équation qui implique l'illustration d'une solution utopique pour un problème bidimensionnel.

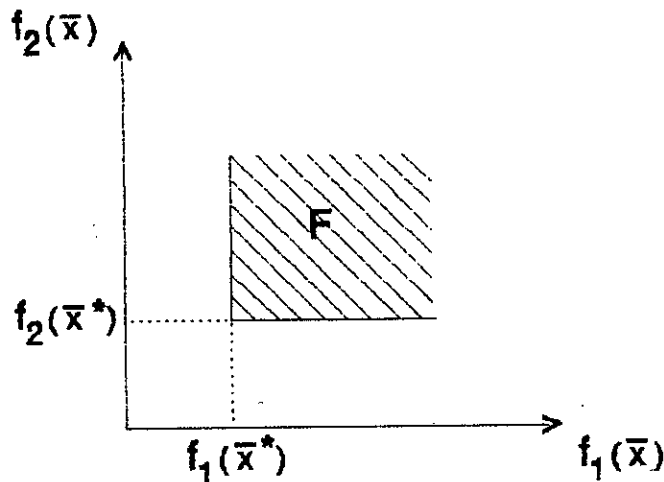


Fig. 2.1. Illustration graphique d'une solution utopique

Malheureusement, cette situation est très rare, car il est peu probable que les différentes fonctions $f_i(\bar{x})$ atteignent leur minimum en un même point \bar{x}^* d'où le dilemme.

En effet, nous nous trouvons confrontés à une problématique pouvant être formulée de la façon suivante: Comment convient-il, dans le cas d'une analyse multicritère, d'adopter une solution pour la déclarer bonne ou mauvaise, meilleure ou pire qu'une autre, ou optimale [5,11] ?

Avant de répondre à cette question, il semble nécessaire d'expliquer deux termes qui seront très utiles dans la résolution des problèmes d'optimisation multicritère en l'occurrence: la solution idéale et la convexité.

2.2.1 Solution Idéale

Pour trouver la solution idéale, il est nécessaire de déterminer au préalable le minimum atteint pour chaque fonction critère séparément [10].

On notera $\bar{x}^{0(i)} = [x_1^{0(i)}, \dots, x_n^{0(i)}]^T$, le vecteur des variables de décision qui minimise la i ème fonction.

En d'autres termes, on note $\bar{x}^{0(i)} \in X$ le vecteur tel que:

$$f_i(\bar{x}^{0(i)}) = \min_{\bar{x} \in X} f_i(\bar{x}) \quad (2.8)$$

Dans les chapitres suivants, nous désignerons la valeur minimale de la i ème fonction par f_i^0 , d'où l'expression du vecteur idéal:

$$\bar{f}^0 = [f_1^0, f_2^0, \dots, f_k^0]^T.$$

Nous désignerons par "solution idéale", le point \bar{x}^0 appartenant à E^n , tel que $f_i(\bar{x}^0) = f_i(\bar{x}^{0(i)}) \forall i = 1, 2, \dots, k$. Cette solution idéale est généralement utopique car il est impossible qu'elle minimise tous les critères simultanément en vérifiant l'ensemble des contraintes.

2.2.2 Convexité

Dans les problèmes d'optimisation multicritère, la notion de convexité joue un rôle primordial. En effet, pour la plupart des algorithmes utilisés dans la résolution, la convergence vers un optimum ne pourra être démontrée qu'avec des hypothèses de convexité, il nous semble donc utile d'émettre certaines définitions concernant les ensembles et les fonctions convexes.

2.2.2.1 Ensembles Convexes

Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe [1] si et seulement si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in F \\ \forall y \in F \\ \forall \lambda (0 \leq \lambda \leq 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in F \quad (2.9)$$

D'une façon équivalente, on peut dire que F est convexe si et seulement si pour deux points quelconques x et y pris dans F , le segment $[x,y]$ tout entier est contenu dans F .

2.2.2.2 Fonctions Convexes

Une fonction f , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble F est dite convexe si cette dernière vérifie l'inégalité suivante:

$$\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad (2.10)$$

Par ailleurs, f est dite strictement convexe si l'inégalité stricte est toujours vérifiée pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.

S'agissant des méthodes d'O.M.C., ce terme de convexité est souvent utilisé et se trouve fortement lié à la notion de l'ombre t-directionnelle relative au champs F des fonctions critères [5].

On note cette ombre par F^E et on la définit ainsi:

$$F^E = \{ y \in E^k \mid y = \bar{F} + \alpha \bar{t}, \bar{F} \in F, \alpha \geq 0, \alpha \in E^1 \} \quad (2.11)$$

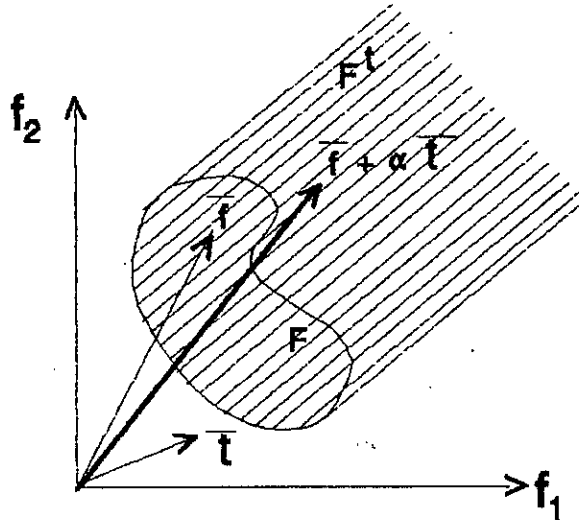


Fig. 2.2. Illustration graphique de l'ombre t -directionnelle du champ F .

On dira que le problème d'O.M.C. est convexe si F^E est convexe $\forall \bar{t} > 0$.

Il convient de noter que certaines méthodes exigent un problème d'O.M.C. convexe, car dans le cas contraire (problème non convexe) aucune solution ne peut être obtenue moyennant ces procédures. Le dilemme réside dans le fait qu'il n'existe aucun algorithme permettant de classer un problème comme étant convexe ou non convexe.

2.3 OPTIMUM DE PARETO

En raison du fait que les composantes du vecteur des fonctions critères sont mutuellement conflictuelles, il est en général impossible de trouver la solution idéale \bar{x}^{id} pour laquelle chaque $f_j(\bar{x}^{id}) = \min f_j(\bar{x})$. Pour cette raison, les problèmes d'optimisation multicritères sont usuellement résolus en deux étapes [11,12]:

- Recherche de l'optimum de PARETO
- Sélection d'une solution optimale satisfaisante appartenant à l'ensemble de Pareto en utilisant les méthodes de sélection des solutions préférables.

2.3.1 Définition

Le concept de l'optimum de Pareto a été formulé par *V. Pareto*, en 1896 et il constitue à nos jours la partie la plus importante de l'analyse multicritère.

Un point $\bar{x}^* \in X$ est optimum de Pareto si et seulement si [13,14]:

$$\begin{aligned} \forall \bar{x} \in X, \forall i \in I / f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{x}^*) \\ \text{ou} \\ \forall \bar{x} \in X, \exists i \in I / f_i(\bar{x}) > f_i(\bar{x}^*) \end{aligned} \quad (2.12)$$

où:

$$I = \{ 1, \dots, k \}, \quad X = \{ \bar{x} \in E^n \mid \bar{g}(\bar{x}) \geq 0, \bar{h}(\bar{x}) = 0 \}$$

Cependant, la recherche de l'optimum de Pareto conduit presque toujours à un ensemble de solutions dites "solutions non inférieures" et non pas à une solution unique, ce qui nous amène à introduire le concept de 'non infériorité'.

2.3.2 Concept de "Non Infériorité"

L'idée du concept de "non infériorité" est très similaire au concept de "non dominance". Pour être formel, ce concept peut être défini comme suit [15]:

Une solution admissible d'un problème d'O.M.C. est dite 'non inférieure' s'il n'existe aucune autre solution admissible qui entraîne une amélioration dans un critère sans causer une dégradation dans au moins un autre critère.

On note X^P , l'ensemble des solutions non inférieures, et F^P l'image de X^P dans l'espace des valeurs des fonctions critères.

Pour illustrer et préciser ce concept, nous aurons recours à cet exemple:

Supposons trois solutions dans un problème d'optimisation à deux critères (minimisation de $\bar{F}(f_1, f_2)$) données sur le tableau 2.1. Nous constatons que l'alternative C est dominée par A et B puisque:

$$\begin{aligned} f_1(C) > f_1(A) \quad \text{et} \quad f_2(C) > f_2(A) \\ f_1(C) > f_1(B) \quad \text{et} \quad f_2(C) > f_2(B) \end{aligned}$$

Une solution dominée de cette manière est appelée inférieure, inversement, celles qui ne sont pas dominées sont dites 'non inférieures'.

Alternative	f_1	f_2	Nature de l'alternative
A	10	11	non inférieure
B	12	10	non inférieure
C	13	12	inférieure

Tab. 2.1. Exemple de non infériorité.

2.3.3 Ensemble de PARETO

Dans le cas d'un seul critère, la solution optimale est procurée par la valeur minimale (ou maximale) en fonction du problème donné. S'agissant de plus de deux critères, il n'est plus question d'une solution optimale unique, mais d'un ensemble de ces solutions: c'est l'ensemble de Pareto. Cet ensemble est par conséquent constitué de l'ensemble des solutions "non inférieures".

Si le problème d'O.M.C. est à deux dimensions (deux critères), la représentation graphique procure un segment courbe comme le montre la figure 2.3. Dans le cas de trois critères, l'ensemble de Pareto sera à deux dimensions correspondant à une surface curviligne. En revanche, la visualisation de l'ensemble de Pareto devient délicate au delà de trois dimensions. Il convient de signaler, dans ce contexte, qu'il existe des techniques permettant de projeter ou de représenter cet ensemble de Pareto sur des plans [9,10].

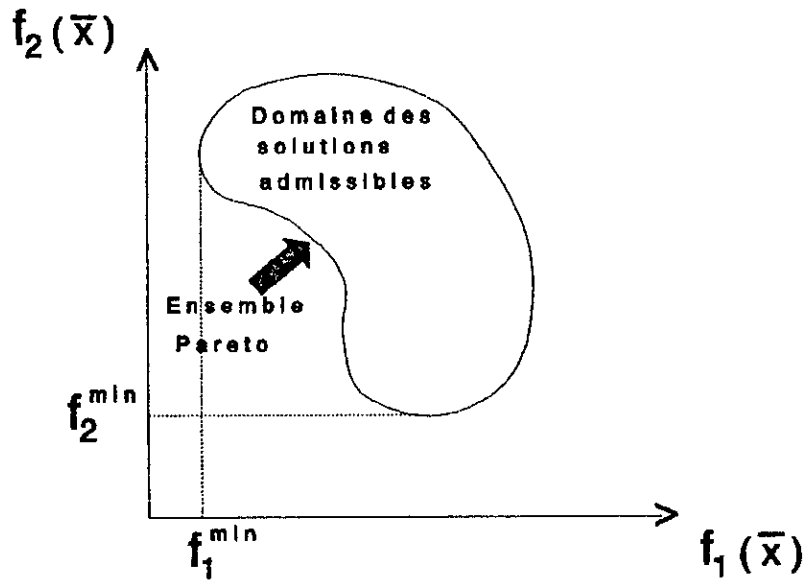


Fig. 2.3. Illustration graphique de l'ensemble de Pareto.

2.3.4 Exemple

Si on considère l'exemple 1.2.4, l'illustration graphique de X et F est donnée par la figure 2.4, les ensembles X^P et F^P sont représentés par les lignes grasses (en gras).

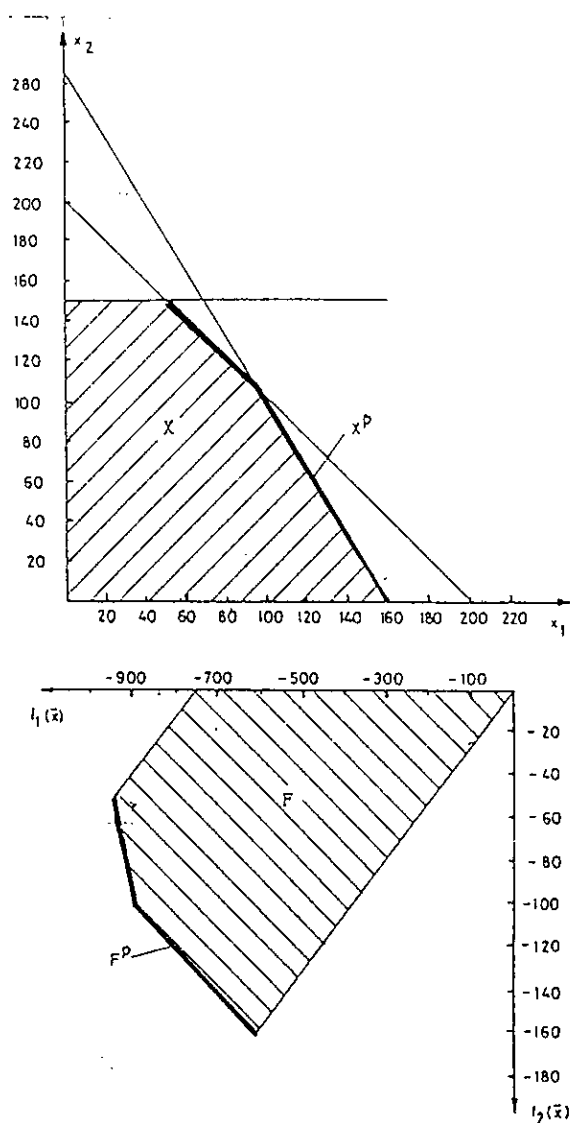


Fig. 2.4. Ensembles X^P et F^P de l'exemple 1.2.2

Enfin, il nous semble utile d'attirer l'attention sur le fait que la satisfaction de l'équation (2.12) conduit immédiatement à un ensemble F^P de fonctions critères (images des solutions non inférieures) dont la représentation graphique se situe toujours sur la frontière de celle relative à l'ensemble F .

En revanche, la représentation graphique de l'ensemble X^P peut se situer en dehors de la frontière de celle de X .

2.4 OPTIMUM MIN-MAX

L'idée d'appliquer l'optimum Min-Max aux problèmes d'optimisation multicritères provient de la théorie des jeux qui traitent de la résolution des situations conflictuelles.

L'approche Min-Max avec un modèle linéaire a été proposée par *Jutler*

[16] et *Solich* [17], et développée par la suite par *Osyczka* [18].

Cette méthode Min-Max compare les écarts relatifs par rapport au minimum atteint par chaque fonction critère séparément.

L'écart relatif à la i ème fonction peut être désigné par:

$$z'_i(\bar{X}) = \left| \frac{f_i(\bar{X}) - f_i^0}{f_i^0} \right| \quad (2.13)$$

ou

$$z''_i(\bar{X}) = \left| \frac{f_i(\bar{X}) - f_i^0}{f_i(\bar{X})} \right| \quad (2.14)$$

(On suppose que: $\forall \bar{X} \in X \quad \forall i \in I = \{1, \dots, k\} \quad f_i(\bar{X}) \neq 0$)
 où: f_i^0 désigne la valeur minimale de la i ème fonction.

Notons que $\bar{Z}(\bar{X}) = [z_1(\bar{X}), z_2(\bar{X}), \dots, z_k(\bar{X})]^T$ désigne le vecteur des écarts relatifs défini dans E^k , dont les composantes sont évaluées par le biais de la formule suivante:

$$\forall i \in I \quad z_i(\bar{X}) = \max \{ z'_i(\bar{X}), z''_i(\bar{X}) \} \quad (2.15)$$

Dans ce qui, suit l'optimum Min-Max sera défini ainsi:

Un point $\bar{X}^* \in X$ est un optimum Min-Max, si $\forall \bar{X} \in X$, la formule de récurrence suivante est satisfaite [5]:

Etape1:

$$v_1(\bar{X}^*) = \min_{\bar{X} \in X} \max_{i \in I} \{ z_i(\bar{X}) \} \quad (2.16a)$$

où:

$$X = \{ \bar{X} \in E^n \mid \bar{g}(\bar{X}) \geq 0, \bar{h}(\bar{X}) = 0 \}$$

$$I = \{ 1, 2, \dots, k \}$$

on note $I_1 = \{ i_1 \}$, où i_1 est l'indice pour lequel la valeur de $z_{i_1}(\bar{X})$ est maximale.

S'il existe un ensemble de solutions $X_1 \subset X$ qui satisfait l'étape 1 alors le recours à la seconde étape s'impose:

$$v_2(\bar{X}^*) = \min_{\bar{X} \in X_1} \max_{\substack{i \in I \\ i \notin I_1}} \{ z_i(\bar{X}) \} \quad (2.16b)$$

on note $I_2 = \{ i_1, i_2 \}$, où i_2 est l'indice pour lequel la valeur de $z_i(\bar{x})$ dans cette étape est maximale.

De même l'existence d'un ensemble de solutions $X_{r-1} \subset X$ qui satisfait la (r-1)ème étape nécessite le recours à l'étape suivante:

Etape r:

$$v_r(\bar{x}^*) = \min_{\bar{x} \in X_{r-1}} \max_{\substack{i \in I \\ i \notin I_{r-1}}} \{ z_i(\bar{x}) \}$$

et alors $I_r = I_{r-1} \cup \{ i_r \}$, où i_r est l'indice pour lequel la valeur de $z_i(\bar{x})$ dans la rème étape est maximale.

S'il existe un ensemble de solutions $X_{k-1} \subset X$ qui satisfait la (k-1)ème étape alors s'impose la dernière étape:

Etape k:

$$v_k(\bar{x}^*) = \min_{\bar{x} \in X_{k-1}} \max_{\substack{i \in I \\ i \notin I_{k-1}}} \{ z_i(\bar{x}) \} \quad (2.16c)$$

où $v_1(\bar{x}^*), \dots, v_k(\bar{x}^*)$ est l'ensemble des valeurs optimales des écarts relatifs.

Le point \bar{x}^* qui satisfait l'équation (2.16) peut être qualifié de solution offrant le meilleur compromis en considérant tous les critères simultanément et avec égale importance. Cette équation apparaît très compliquée, mais dans certaines applications, cette dernière peut être simplifiée.

Avant d'achever ce paragraphe, il semble utile d'attirer l'attention sur le fait qu'en présence d'un cas pour lequel le problème posé à l'origine nécessite que toutes les fonctions critères soient à minimiser, nous constatons que:

$$\forall i \in I \quad z'_i(\bar{x}) > z''_i(\bar{x})$$

ceci conduit à une reformulation de l'équation (2.16), il vient alors:

$$\forall i \in I \quad z_i(\bar{x}) = z'_i(\bar{x}) \quad (2.17)$$

De façon similaire, si le problème posé à l'origine nécessite que toutes les fonctions soient à maximiser, il vient:

$$\forall i \in I \quad z'_i(\bar{x}) < z''_i(\bar{x})$$

d'où:

$$\forall i \in I \quad z_i(\bar{x}) = z''_i(\bar{x}) \quad (2.18)$$

Enfin, si le problème initial fait intervenir une mixture de fonctions à maximiser et à minimiser, le vecteur \bar{z} fera intervenir aussi bien des z'_i que des z''_i .

Dans beaucoup de problèmes d'optimisation, l'optimum Min-Max est déterminé lors de la première étape de la formule de récurrence, comme illustré sur la figure (2.5a).

Soulignons que les problèmes pour lesquels on doit se référer aux étapes restantes de la formule de récurrence (2.16) (voir fig. 2.5b), sont très rares.

Par ailleurs, il importe de bien comprendre qu'il existe des problèmes pour lesquels, après considération de toutes les étapes de la formule de récurrence (2.16), le nombre de solutions obtenues est plus qu'un (voir fig. 2.5c). Ces dernières sont équivalentes en ce qui concerne l'optimum Min-Max. De tels problèmes sont rarement rencontrés en pratique [10] et caractérisent en fait, des situations (voir fig. 2.5b, 2.5c), ne pouvant se produire que pour des problèmes non convexes, et qui de surcroît sont plus fréquents pour des problèmes de programmation discrète ou entière [19].

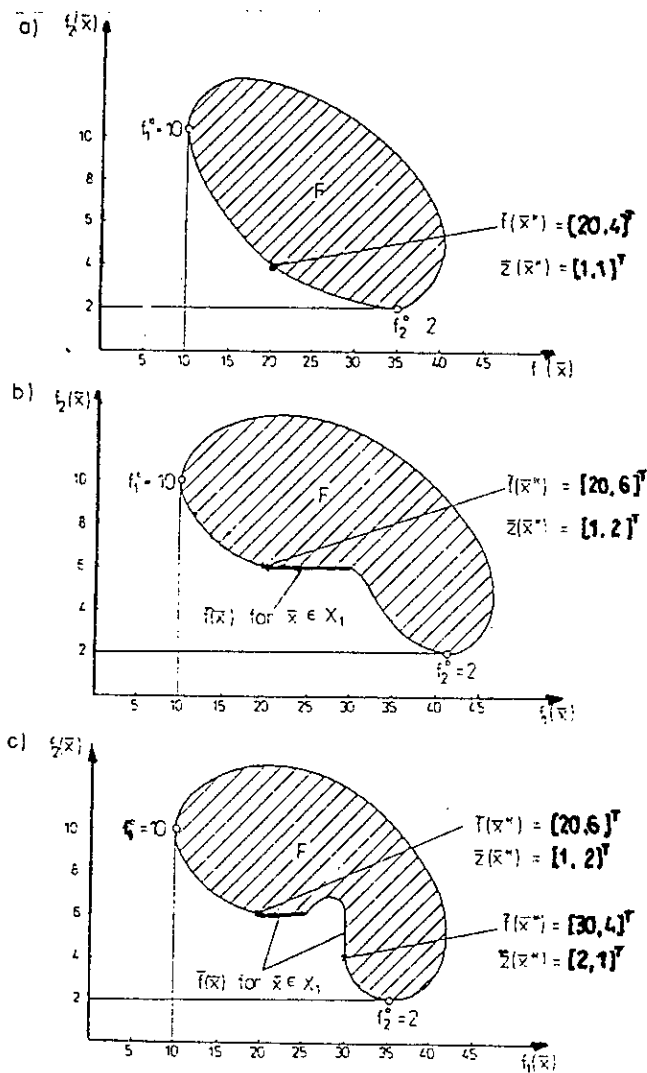


Fig. 2.5. Différents cas illustratifs de l'optimum Min-Max.

2.5 PROBLEME DE PRISE DE DECISION

Dés l'instant où le modèle nécessaire à la résolution du problème d'O.M.C est construit afin d'être identifié en tant que schéma, l'ingénieur chargé d'exploiter ce modèle en vue d'obtenir des éléments de réponse doit faire face à deux questions importantes qui se résument ainsi:

- Sur quelles techniques d'optimisation faut-il prendre appui pour résoudre le modèle?
- la solution finale obtenue sera-elle satisfaisante?

Avant de répondre, il convient de souligner que le succès de l'ingénieur (que l'on pourrait encore appeler le concepteur) dépend surtout de la manière

par laquelle il délimite le modèle, affine la problématique, contrôle les données et choisit l'approche opérationnelle.

De façon générale, deux types de méthodes de résolution des problèmes d'optimisation sont possibles:

- **Méthodes non préférentielles:** le décideur (l'ingénieur) doit choisir à posteriori une solution sur l'ensemble de Pareto.

- **Méthodes préférentielles:** le décideur doit formuler explicitement ses préférences afin de pouvoir décider des bases conceptuelles nécessaires pour leur description et leur formalisation de façon à réduire le nombre des solutions (généralement à une solution unique) dans une optique d'aide à la décision.

Pour pouvoir choisir parmi ces techniques, il pourrait être utile de prendre en compte le délicat problème de validation de toute méthode d'optimisation multicritère appliquée à un contexte donné. Il est en effet très intéressant de pouvoir évaluer les méthodes de chacune des catégories citées ci-dessus afin de pouvoir opter pour le meilleur choix. Cependant ceci ne pourra jamais être réalisé. Certaines méthodes semblent être plus appropriées pour certains problèmes mais leur mise en oeuvre présente souvent des difficultés d'ordre pratique. Ainsi, nous pouvons conclure que le choix d'une méthode dépend essentiellement du problème analysé et est fortement lié aux préférences des utilisateurs [10].

La seconde question qui implique l'acceptation d'une solution se rapporte au problème de prise de décision.

Il semble utile de savoir que l'optimum Min-Max ne confère pas toujours une réponse universelle au problème de prise de décision pour tous les modèles d'O.M.C., ce qui amène souvent le décideur à choisir une autre solution figurant dans l'ensemble de Pareto X^P .

Néanmoins, cet ensemble présente souvent un grand nombre de solutions qu'il est impossible d'étudier une par une. Il serait alors plus facile d'opérer sur X^P si les préférences reflétant l'importance des critères sont connues à priori. Cependant l'information ayant trait à ces préférences est généralement floue, incomplète et ne peut être exprimée de manière formelle ce qui incite rarement le décideur à accepter une solution obtenue moyennant ces méthodes.

Pour cette raison, de nombreuses méthodes s'appliquent à fournir un sous ensemble représentatif de X^P au sein duquel le décideur choisit la solution qui lui semble la plus satisfaisante.

CHAPITRE 3

METHODES D'OPTIMISATION BASEES SUR LA TRANSFORMATION DU PROBLEME MULTICRITERE EN UN PROBLEME MONO-CRITERE

3.1 INTRODUCTION

Le décideur pressé cherche fréquemment à faire l'économie d'une famille de critères qu'il cherche à expliciter d'emblée en un unique critère. Cette façon de faire s'insère dans le cadre d'une analyse mono-critère [3] constituant l'objectif principal du présent chapitre. Ce dernier se propose d'exposer les différentes méthodes qui transforment le vecteur des fonctions critères en un critère équivalent en vue d'obtenir une solution optimale ou un ensemble de telles solutions.

Il est à noter que la forme de transformation est étroitement liée à la méthode utilisée, et influe par voie de conséquence sur les résultats obtenus. Rappelons que chacune des méthodes décrites subséquemment, requiert certaines informations ayant trait, selon les cas, aux préférences du décideur et à l'importance relative des critères. De ce fait, les méthodes sous-citées entrent dans la catégorie des méthodes dites "Préférentielles".

Il convient de rappeler que les méthodes dont il sera question dans ce qui suit sont:

- Méthode Poids (Weighting Objective Method)
- Méthode d'Hiérarchisation (Hiarchical Optimization Method)
- Méthode du Goal Programming
- Méthode du Critère Global (Global Criterion Method)

3.2 METHODE POIDS

La méthode poids est la plus ancienne technique de résolution des problèmes d'optimisation multicritères. ZADEH [20] fût le premier auteur à recommander l'utilisation des coefficients poids pour trouver une approximation

de l'ensemble des solutions non inférieures. La méthode en question, consiste à additionner toutes les fonctions critères affectées de leur coefficient poids respectif et de trouver la valeur optimale (minimale ou maximale) de la fonction résultante. Ainsi, le problème d'optimisation multicritère (vecteur) se transforme en un problème d'optimisation mono-critère (scalaire) et ceci en créant une fonction de la forme [5,12] :

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(\bar{x}) \quad (3.1)$$

Dans ce mode de transformation, les coefficients w_i sont souvent appelés les coefficients poids qui représentent l'importance relative des critères. On supposera que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k w_i &= 1 \\ 0 &\leq w_i < 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

k étant le nombre de fonctions critères du problème.

Par ailleurs, étant donné que les résultats de résolution par un modèle d'optimisation basé sur l'équation (3.1) peuvent varier quand les valeurs des coefficients poids changent, s'ajoutant à cela la faible connaissance de l'ingénieur sur le choix de ces valeurs, il convient alors d'utiliser une approche capable de résoudre le même problème pour différentes valeurs de w_i . Il est à noter que les coefficients poids ne reflètent pas proportionnellement l'importance relative des critères mais, sont seulement des facteurs qui, une fois variés localisent des points sur l'ensemble de Pareto X^P . Pour certaines méthodes numériques, qui cherchent le minimum de (3.1), cette localisation des points de X^P dépend non seulement des valeurs de w_i , mais aussi des unités dans lesquelles sont exprimées les fonctions critères. Ainsi pour que w_i reflète aussi fidèlement que possible l'importance des critères, toutes les fonctions doivent être exprimées dans la même unité.

L'équation (3.1) s'écrira alors sous la forme:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(\bar{x}) c_i \quad (3.3)$$

où c_i sont des coefficients multiplicateurs désignés par:
 f_i^0 est la valeur minimale de la i ème fonction critère.

$$c_i = \frac{1}{f_i^0}$$

Dans ce cas, le vecteur des fonctions critères est normalisé. Il s'écrit alors:

$$\tilde{f}(\bar{x}) = [\tilde{f}_1(\bar{x}), \tilde{f}_2(\bar{x}), \dots, \tilde{f}_k(\bar{x})]^T \quad (3.4)$$

où:

$$\tilde{f}_i(\bar{x}) = \frac{f_i(\bar{x})}{f_i^0} \quad (f_i^0 \text{ est supposée non nulle})$$

3.2.1 Interprétation Géométrique de la Méthode

La méthode poids peut être interprétée géométriquement [10]. En vue d'une meilleure illustration de cette interprétation, nous considérons le problème d'optimisation à deux critères présenté sur la fig 3.1.

Dans l'espace des fonctions critères, nous pouvons tracer la droite (L) de pente $-w_1 / w_2$. L'ensemble L qui représente cette droite est régi par l'équation suivante :

$$w_1 f_1(\bar{x}) + w_2 f_2(\bar{x}) = C$$

où C est une constante.

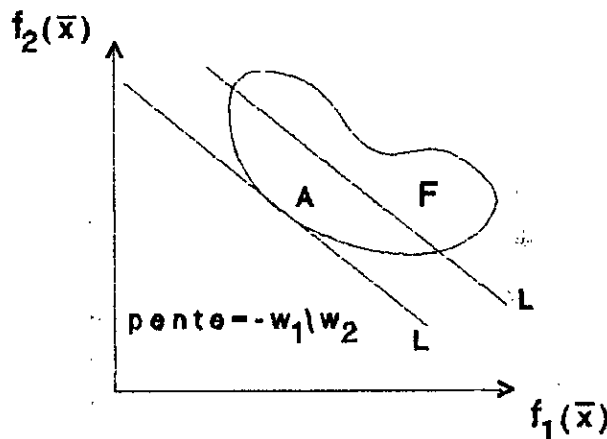


Fig. 3.1. Interprétation géométrique de la méthode poids

La minimisation de l'équation (3.1) peut être caractérisée par le déplacement

de la droite (L) avec w_1 et w_2 fixés, aussi près que possible de l'origine, dans une direction positive, tout en gardant l'intersection de l'ensemble L et celui des solutions admissibles F.

Le point A pour lequel L est tangente à la frontière de F est appelé minimum de l'équation (3.1). Cette procédure présente le mérite d'être claire, du moins en apparence, mais elle n'est cependant pas exempte de défauts. En effet, pour un problème où F n'est pas convexe, un grand nombre de solutions non inférieures peuvent être ignorées du fait qu'aucune valeur de w_i ne peut localiser les points dans une certaine région de l'image de l'ensemble de Pareto F^P .

La figure 3.2 représente le déplacement de la droite L_1 de pente $-w_1 / w_2$, dans une direction positive jusqu'à ce qu'elle soit tangente à F en B. Nous remarquons ainsi que pour ces valeurs attribuées aux coefficients poids w_i , le point A est ignoré bien qu'il constitue une solution non inférieure. L'usage d'autres valeurs de w_i conduit à la localisation du point C, différent de B, par le biais de la droite L_2 . Par conséquent, il devient clair de constater que pour ce problème, l'ensemble des solutions 'non inférieures' situé entre les points D et E ne peut jamais être obtenu. Cette conséquence découle du fait qu'il s'agit d'un problème non-convexe.

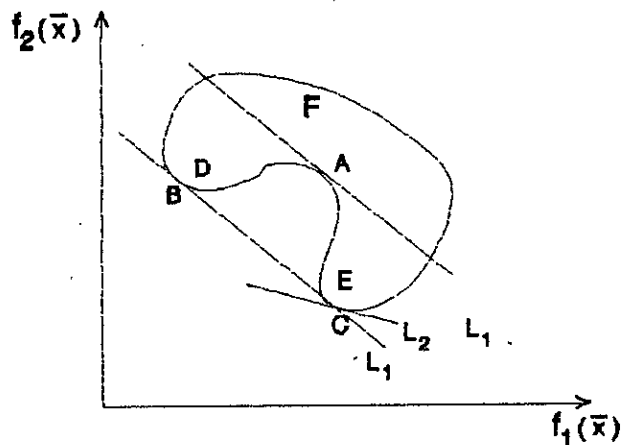


Fig. 3.2. Méthode Poids pour un problème non-convexe

S'agissant des problèmes linéaires (critères et contraintes linéaires), la condition de convexité est pleinement satisfaite ce qui permet une large utilisation de la méthode poids, en vue d'obtenir un ensemble complet de celui des solutions non inférieures. Toutefois, il importe de souligner qu'il est impossible de trouver un sous ensemble représentatif de X^P .

3.3 METHODE D'OPTIMISATION HIERARCHIQUE

Cette dernière, a été suggérée par *Walz* [21] et considère la situation dans laquelle les critères peuvent être classés par ordre d'importance en vue d'obtenir une solution unique.

Pour un vecteur fonction critère $\bar{f} (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x}))^T$ l'ordonnancement des critères de 1 à k signifie que le premier critère ($f_1(\bar{x})$) est le plus important, par contre le critère le moins important est le kième ($f_k(\bar{x})$).

En gardant cet ordonnancement, on minimise chaque fonction critère séparément, et à chaque étape de minimisation, on ajoute une contrainte qui limite les fonctions considérées précédemment.

Les étapes à suivre dans cette méthode se présentent comme suit [5]:

* Etape (1):

Trouver le minimum de la première fonction critère du vecteur \bar{f} ce qui revient à déterminer le vecteur $\bar{x}^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}]$ tel que:

$$f_1(\bar{x}^{(1)}) = \min_{\bar{x} \in X} f_1(\bar{x}) \quad (3.5)$$

Procéder à l'étape suivante en faisant varier l'indice 'i' de 2 jusqu'à k.

* Etape (2):

Trouver le minimum de la ième fonction critère par l'intermédiaire du vecteur $\bar{x}^{(i)} = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}]$ tel que:

$$f_i(\bar{x}^{(i)}) = \min_{\bar{x} \in X} f_i(\bar{x}) \quad (3.6)$$

avec les contraintes additionnelles:

$$f_{j-1}(\bar{x}) \leq (1 \pm \epsilon_{j-1}) f_{j-1}(\bar{x}^{(j-1)}) \quad j = 2, 3, \dots, i \quad (3.7)$$

où:

ϵ_{j-1} sont des coefficients donnés en pourcentage et qui désignent les incréments ou décréments des fonctions f_{j-1} .

Le signe '+' est utilisé pour les fonctions à minimiser et le signe '-' pour les fonctions à maximiser. Le point $\bar{x}^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T$ est l'optimum déterminé par cette méthode. D'une manière interactive, la méthode d'Hiérarchisation s'applique tout en interrogeant le décideur, dans la ième étape sur la valeur de ϵ_i qui ne peut être donné que sur la base du minimum

obtenu dans la $(i-1)^{\text{ème}}$ étape. Si après toutes les étapes, le résultat n'est pas satisfaisant, le processus de recherche est alors répété en prenant à chaque étape d'autres valeurs de ϵ_i .

Une méthode d'optimisation lexicographique suggérée par *Ben-Tal* [22] peut être considérée comme similaire à la méthode d'optimisation Hiérarchique. La seule différence réside dans la supposition qu'à chaque étape de recherche, la valeur de ϵ_i est égale à zéro.

3.3.1 Exemple.

Pour une meilleure illustration de la méthode d'Optimisation Hiérarchique, on rapporte l'exemple du paragraphe 1.2.4. Pour ce cas, on suppose que la fonction $f_1(\bar{x})$ est plus importante que $f_2(\bar{x})$ où il s'agit de :

$$\text{Maximiser } \begin{cases} f_1(\bar{x}) = 4x_1 + 5x_2 \\ f_2(\bar{x}) = x_1 \end{cases}$$

La première étape est de trouver $\bar{x}^{(1)} = [\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)}]$ tel que:

$$f_1(\bar{x}^{(1)}) = \min_{\bar{x} \in X} f_1(\bar{x})$$

En se référant à la fig.3.3, nous constatons que le vecteur des V.D.D. qui minimise la première fonction critère est:

$$\bar{x}^{(1)} = [50, 150]^T \text{ et } f_1(\bar{x}^{(1)}) = 950 \quad f_2(\bar{x}^{(1)}) = 50$$

La seconde étape consiste à trouver $\bar{x}^{(2)} = [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}]$ tel que:

$$f_2(\bar{x}^{(2)}) = \min_{\bar{x} \in X} f_2(\bar{x})$$

De manière à satisfaire la contrainte additionnelle:

$$f_1(\bar{x}) \leq (1-\epsilon_1) f_1(\bar{x}^{(1)})$$

On décide de prendre $\epsilon_1 = 8\%$ d'où après substitution, on obtient:

$$4x_1 + 5x_2 - 874 \geq 0$$

La solution est alors:

$$\bar{x}^{(2)} = [106, 90]^T, f_1(\bar{x}^{(2)}) = 874, f_2(\bar{x}^{(2)}) = 106$$

Une interprétation graphique de la méthode pour cet exemple est montrée sur la fig. 3.3.

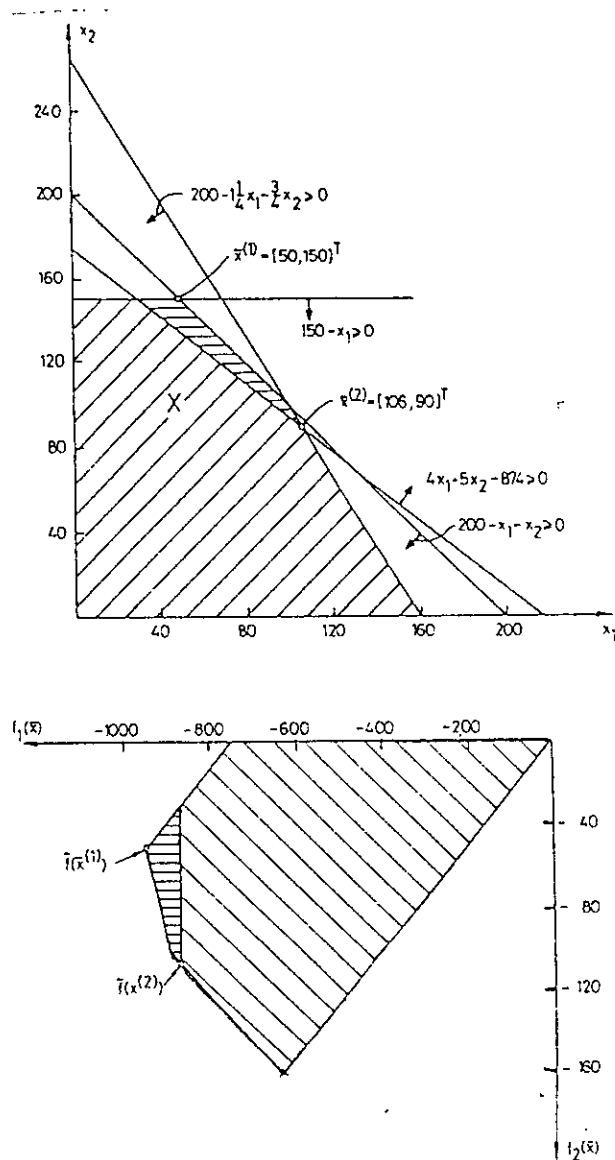


Fig. 3.3. Illustration graphique de la Méthode d'optimisation Hiérarchique

3.4 Méthode du Goal Programming

C'est la méthode d'optimisation multicritère la plus connue. Elle a été proposée, pour un modèle linéaire, par *Charnes et Cooper* [23] et *Ijiri* [24]. Elle consiste à spécifier les buts à atteindre pour chaque critère. Autrement dit, le décideur doit donner les valeurs souhaitées de chacune des fonctions

critères. Les buts, estimés quantitativement, sont considérés comme des contraintes additionnelles dans lesquelles, de nouvelles variables sont ajoutées en vue de représenter les écarts par rapport aux buts prédéterminés. La formulation de la méthode *Goal Programming* la plus usuelle se présente comme suit [4,5,10]:

Minimiser

$$\sum_{i=1}^k (d_i^+ + d_i^-) \quad (3.8)$$

sujette à:

$$\bar{x} \in X \quad (3.9)$$

$$f_i(\bar{x}) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.10)$$

$$(d_i^-, d_i^+ \geq 0) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.11)$$

où:

b_i est la valeur quantitative du ième but.

(d_i^-, d_i^+) s'interprètent respectivement par les variables de déviation négative et positive par rapport au ième but.

X est l'ensemble des solutions admissibles (vérifiant toutes les contraintes imposées).

Il semble clair de constater qu'à partir de l'équation (3.9), les variables de déviation positives et négatives par rapport au ième but sont ajoutées à cet ensemble d'équations en vue d'établir forcément l'égalité entre les buts désirés et les fonctions qui les définissent. L'attribution du signe (+) ou (-) à ces variables provient du fait que, pour une solution donnée \bar{x} si $f_i(\bar{x})$ est inférieur à b_i , nous avons alors moins que la quantité désirée du ième critère. Il s'agit donc d'un écart négatif d_i^- exprimé de la manière suivante:

$$d_i^- = b_i - f_i(\bar{x}) \quad \text{et} \quad d_i^+ = 0$$

En revanche, si $f_i(\bar{x})$ est supérieur à b_i , la valeur associée au but que l'on souhaite atteindre se trouve dépasser. Dans ce cas il s'agira d'écart positif d_i^+ défini par :

$$d_i^+ = f_i(\bar{x}) - b_i \quad \text{et} \quad d_i^- = 0$$

Face à une telle description, il devient facile de remarquer que les deux déviations ne seront jamais toutes les deux non nulles pour le même but, étant

donné qu'il s'agit d'une minimisation de l'ensemble des déviations requises par l'équation (3.8).

De surcroît, il convient de noter qu'il existe une multitude de modifications pouvant être incorporée à la formulation de base correspondant à l'équation (3.8), certaines de ces modifications portent sur le fait d'associer à chaque variable de déviation d_i , un coefficient poids reflétant l'importance que l'on souhaite accorder au critère i et les variables de déviation qui lui correspondent. Ces coefficients doivent simplement être d'autant plus élevés que le critère i est jugé plus important. L'équation (3.8) devient alors:

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{i=1}^k (w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-) \quad (3.12)$$

les équations (3.9)-(3.11) restent inchangées.

3.4.1 Particularités de la Méthode du Goal Programming

La méthode du Goal Programming a été principalement développée pour les modèles linéaires. Elle définit la solution idéale comme étant celle qui permet d'atteindre simultanément les buts imposés. Son utilisation présente néanmoins, un inconvénient qui consiste en ce que l'ensemble des buts choisi par le décideur, peut en général conduire à une solution inférieure [10].

A titre d'illustration, considérons la figure 3.6 qui montre un ensemble de solutions non inférieures pour un problème à deux critères. cet ensemble n'est pas connu par le décideur quand il impose b_1 et b_2 comme buts pour f_1 et f_2 respectivement. Par ailleurs, puisque le point qui a pour coordonnées (b_1, b_2) se trouve à l'intérieur de la zone des solutions admissibles, la solution à ce problème annulera toutes les variables de déviations correspondantes, les deux buts sont, par conséquent, atteints. Néanmoins, le point (b_1, b_2) définit une solution inférieure, qui une fois retenue, elle ne présentera aucun intérêt pour le décideur. il en découle ainsi, la définition suivante qui stipule qu'un ensemble de buts conduira à une solution non inférieure, si et seulement si, la solution idéale appartient à l'ensemble des solutions non inférieures ou à l'extérieur de la zone des solutions admissibles (à gauche de F).

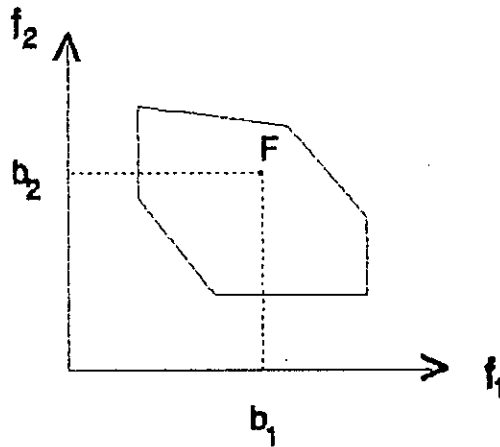


Fig. 3.4

3.5 METHODE DU CRITERE GLOBAL: (GLOBAL CRITERIA METHOD)

Dans cette méthode, la solution optimale correspond à un vecteur de variables de décision qui minimise le critère global. La fonction qui décrit ce critère est une mesure de la distance d_α séparant le point \bar{f} correspondant à une solution de Pareto du point \bar{f}^0 qui correspond à la solution idéale [11]. Par ailleurs Yu [25] et Zeleney [8,26] désignent la solution optimale par la meilleure solution compromis "best compromise- solution", et la définissent comme étant celle qui représente la distance minimale à partir de la solution idéale.

La forme la plus usuelle de la fonction est:

$$d_\alpha = \sum_{i=1}^k \left(\frac{f_i^0 - f_i(\bar{x})}{f_i^0} \right)^\alpha \quad (3.13)$$

Il importe de noter que la solution optimale dépend substantiellement du paramètre α . En effet, différentes valeurs de α ont été proposées par plusieurs auteurs dont nous citons Boychuk et Ovchinnikov [7] qui ont suggéré de prendre $\alpha=1$, alors que Salukvadze [27] a proposé d'utiliser $\alpha=2$, sans oublier de souligner que d'autres valeurs de α peuvent être utilisées.

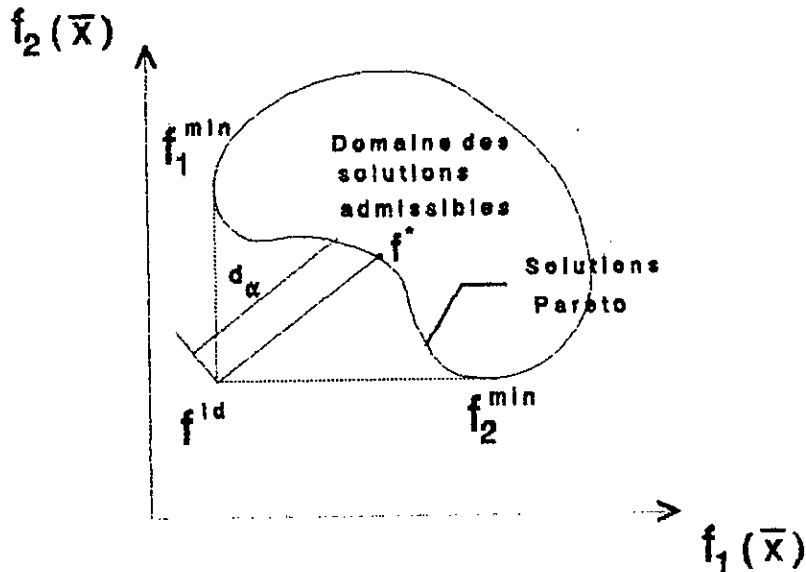


Fig. 3.5. Interprétation géométrique de d_α pour un problème d'optimisation à deux critères

Pour une meilleure illustration de l'équation (3.11), nous nous reportons à l'exemple du paragraphe 1.2.2. Pour ce problème, la référence à la figure 3.3 nous procure la valeur de la solution idéale qui se présente comme suit :

$$\bar{f}^0 = [-950, -160]^T$$

La substitution de $f_1(\bar{x})$ et $f_2(\bar{x})$ dans l'équation (3.11) pour $\alpha=1$ définit la fonction critère globale d_1 . Il vient alors:

$$d_1 = 2 - 0.01064 x_1 - 0.00526 x_2$$

Le minimum de cette fonction fournit le vecteur des V.D.D. $\bar{x} = [160, 0]^T$ pour lequel $\bar{f}(\bar{x}) = [-640, -160]^T$ (voir figure 4.6).

Si nous décidons de prendre $\alpha=2$, la fonction critère globale d_2 s'écrit donc :

$$d_2 = \left(\frac{-950 - (-4x_1 - 5x_2)}{-950} \right)^2 + \left(\frac{-160 - (-x_1)}{-160} \right)^2$$

Le minimum de cette fonction donne la solution $\bar{x} = [135.1, 41.4]$ pour laquelle $\bar{f}(\bar{x}) = [-747.4, -135.1]$. Compte tenu de ces résultats, il est clair que

la solution optimale varie en fonction du paramètre α .

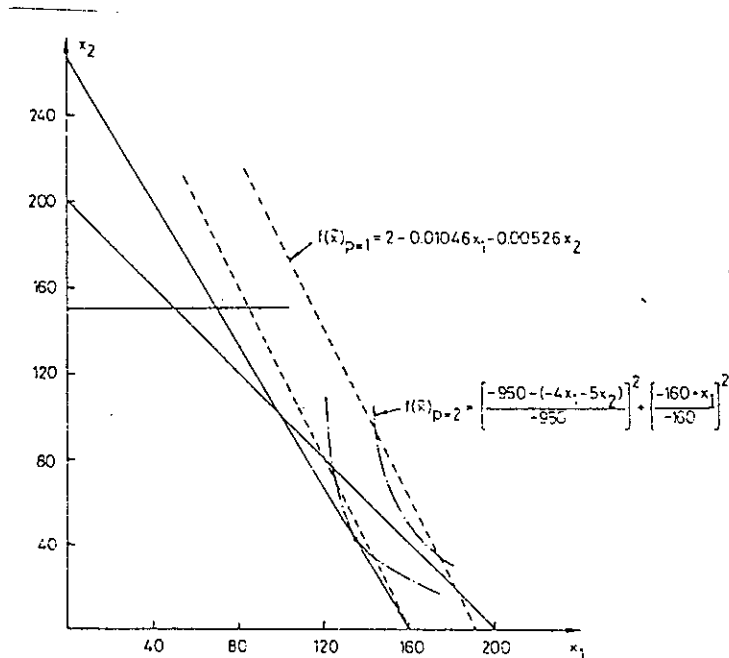


Fig. 3.6. Illustration Graphique de la méthode du critère Global

3.5.2 Autres Formes de la Méthode du Critère Global

Une autre possibilité de mesurer "la proximité à la solution idéale" est une famille de fonctions métriques $L_\alpha(f)$ définie comme suit:

$$L_\alpha(f) = \left(\sum_{i=1}^k |f_i^0 - f_i(x)|^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad 1 \leq \alpha \leq \infty \quad (3.14)$$

A titre d'exemple:

$$L_1(f) = \sum_{i=1}^k |f_i^0 - f_i(\bar{x})|$$

$$L_2(f) = \left(\sum_{i=1}^k |f_i^0 - f_i(\bar{x})|^2 \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

$$L_\infty(f) = \max_{i \in I} |f_i^0 - f_i(\bar{x})| \quad I = \{ 1, 2, \dots, k \}$$

Il importe de souligner que la minimisation de $L_2(f)$ conduit à la

minimisation de la distance euclidienne entre $\bar{x} \in X$ et la solution idéale. En outre, certains auteurs recommandent d'utiliser l'écart relatif à la place de l'écart algébrique, afin d'éviter l'hétérogénéité des unités dans lesquelles s'expriment les différentes fonctions critères [5].

La formule (3.14) devient alors:

$$L_{\alpha}(f) = \left(\sum_{i=1}^k \left| \frac{f_i^0 - f_i(\bar{x})}{f_i^0} \right|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \quad 1 \leq \alpha \leq \infty \quad (3.16)$$

Par ailleurs, Koski [13] suggère l'utilisation d'une famille de fonctions métriques moyennant un vecteur de fonctions critères normalisé qui s'écrit sous la forme:

$$\hat{f}_i(\bar{x}) = \frac{f_i(\bar{x}) - \min_{\bar{x} \in X} f_i(\bar{x})}{\max_{\bar{x} \in X} f_i(\bar{x}) - \min_{\bar{x} \in X} f_i(\bar{x})}$$

Dans ce cas, les valeurs de chaque fonction critère sont comprises dans l'intervalle [0,1].

Il convient de noter que lorsque $\alpha = \infty$, la formulation de la méthode du critère global conduit à une approche équivalente dite "méthode Min-Max", pour laquelle l'optimum \bar{x}^* est défini comme suit:

$$f(\bar{x}^*) = \min_{\bar{x} \in X} \max_{i \in I} \left| \frac{f_i^0 - f_i(\bar{x})}{f_i^0} \right| \quad I = \{ 1, 2, \dots, k \} \quad (3.17)$$

Signalons que cette procédure sera traitée en détail dans le chapitre subséquent.

Il est clair que l'utilisation de la méthode du critère global, permet d'obtenir une seule solution non inférieure, en dépit de cela, Yu [15] a démontré, qu'en général les solutions-compromis sont obtenues par la détermination du minimum de $L_{\alpha}(f)$ pour des valeurs de α comprises entre 1 et ∞ . L'ensemble des solutions ainsi généré, définit en fait une partie représentative de l'ensemble des solutions non inférieures.

3.6 COMPLICATIONS ISSUES DE L'UTILISATION DE CES METHODES.

Comme il a été montré dans ce chapitre, quatre méthodes de transformation du problème multicritère en un problème mono-critère ont été

présentées:

méthode Poids (Weighting Objective Method), méthode d'Hiérarchisation (Hierarchical Optimization Method), méthode du Goal Programming, méthode du Critère Global (Global Criterion Method).

Par une telle analyse mono-critère, son utilisateur parvient à réaliser une économie d'une famille de critères qu'il cherche à expliciter d'emblée en un unique critère. Cette économie est certes justifiée à propos de certains problèmes simples mais dès lors que le nuage des conséquences (effet financier, impact environnemental, délai d'exécution,...) est un tant soit peu complexe, cette analyse mono-critère ne procure au mieux qu'une chimérique satisfaction à certains esprits réductionnistes [3]. De surcroît, nous remarquons que ces méthodes s'apparentent souvent à des méthodes préférentielles étant donné que, dans la plupart des cas, elles reposent sur l'articulation explicite des préférences sous une forme directement utilisable dans un modèle. Ces dernières peuvent être exprimées de plusieurs manières dont nous citons: les coefficients poids reflétant l'importance relative des critères, l'imposition de contraintes additionnelles, précision de buts à atteindre, désignation de certains paramètres...etc. Au fait, ces approches possèdent un but commun qui se résume en l'identification de la solution de meilleur compromis.

Toutefois, le choix de cette solution implique le passage par un processus de génération afin de trouver une représentation exacte ou une approximation de l'ensemble des solutions non inférieures. Soulignons que ce passage fait inévitablement intervenir un processus de variation continue des données modélisant les préférences, il est abandonné une fois qu'un ensemble représentatif des solutions non inférieures ne soit identifiée et présenté au décideur, ce qui rend particulièrement ardue la tâche de l'homme d'étude et constitue la première complication liée à l'utilisation de ces techniques.

La deuxième difficulté réside dans l'informatisation lourde et onéreuse que peut produire la résolution d'un problème d'optimisation multicritère moyennant ces techniques. En effet, cette difficulté augmente en fonction de la taille du problème analysé (nombre de fonctions critères et contraintes, ainsi que les variables de décision) de manière qu'il est particulièrement coûteux d'atteindre un certain degré de satisfaction en présence d'un grand nombre de critères, car en pratique, il a été montré que le nombre des solutions non inférieures croît avec celui des critères.

En effet, chaque solution non inférieure requiert la résolution d'un

problème d'optimisation mono-critère. S'il existe n solutions à générer, n problèmes doivent être résolus.

De façon plus générale, les méthodes qui convertissent un problème d'O.M.C. en un problème mono-critère présentent une grande sensibilité au nombre de critères, ce qui constitue d'ailleurs leur principal point faible.

Lorsque le modèle ainsi élaboré fait intervenir trois critères ou davantage, il ressort une troisième difficulté caractérisée par la complexité de présentation des résultats, il importe toutefois de noter que cette complication est commune à toutes les méthodes procurant un ensemble de solutions non inférieures qu'elles soient préférentielles ou non préférentielles. Rappelons que le mécanisme de présentation des résultats sera introduit dans le chapitre suivant.

Pour achever ce paragraphe, il serait intéressant d'éclairer certaines spécificités ayant trait à chacune des méthodes traitées dans ce chapitre.

S'agissant de la méthode poids, l'attribution des coefficients poids à chacun des critères de manière respective représente la forme la plus simple dans laquelle les préférences peuvent être établies. De ce point de vue, elle peut être une approche intéressante par sa simplicité et est d'ailleurs généralement utilisée pour trouver une représentation approximative de l'ensemble des solutions non inférieures. Toutefois, elle perd son efficacité quand il est question de déterminer une représentation exacte de l'ensemble des solutions sus-cité.

En effet, le problème d'O.M.C. traité par cette méthode est résolu pour chaque nouvel ensemble de coefficients poids $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, ce qui rend la génération complète d'un ensemble de Pareto une tâche très lourde.

Concernant la méthode d'hierarchisation, l'ordonnancement des critères selon leur importance constitue la première phase faisant intervenir les préférences du décideur, la seconde phase se traduit par la suggestion d'incrémentes ou de décréments de fonctions e_i qui ne peuvent être déterminés qu'à la lumière du minimum des fonctions de la $(i-1)$ ième étape. De la même façon que la méthode décrite précédemment, cette approche permet de générer un ensemble de Pareto en faisant varier l'ensemble des paramètres $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ pour chaque solution, ce qui nous amène à prévoir les mêmes conséquences que celle décrites dans le cas de la méthode poids.

Dans la méthode du Goal Programming, les préférences du décideur diffèrent de celles dont il a été question dans les méthodes précédentes. Elles sont exprimées par l'estimation des valeurs des buts à atteindre. Généralement,

le nombre des solutions est égal à un, la génération d'un ensemble de solutions non dominées s'obtient moyennant la variation des coefficients poids utilisés dans l'équation (3.12). Toutefois, il importe de noter qu'en pratique, la méthode du Goal Programming est étroitement utilisée vu les difficultés tenant à la part d'arbitraire qui recouvre la prédétermination des buts (cf. § 3.4.1).

Enfin, bien que la méthode du critère global soit classée dans la catégorie des méthodes préférentielles, il semble important de signaler que la génération de l'ensemble des solutions-compromis par le biais de la variation du paramètre α entre 1 et ∞ , évite la spécification des préférences mais n'empêche pas leur utilisateur d'émettre son jugement à propos d'une valeur quelconque de α [10]. En effet, si une valeur de α est considérée plus appropriée qu'une autre, alors la meilleure solution-compromis sera directement considérée. Toutefois, il importe de savoir que la distinction entre les valeurs de ce paramètre n'est pas évidente.

CHAPITRE 4

METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES D'O.M.C. BASEES SUR L'APPROCHE MIN-MAX

4.1 INTRODUCTION

Après avoir présenté les concepts de l'optimum Pareto et l'optimum Min-Max évoqués précédemment, ce chapitre sera consacré aux méthodes utilisées dans le cadre de l'approche Min-Max. Contrairement à celles destinées à transformer une famille de critères en un critère unique, et qui sont basées sur des techniques de génération, ces méthodes sont fréquemment mises en avant car elles offrent à la fois l'ensemble des solutions optimum Pareto souhaitables et la solution du meilleur compromis quelle que soit la situation conflictuelle du problème considéré.

La détermination de ces solutions ainsi que la sélection de la solution optimum Min-Max se basent sur l'utilisation de deux algorithmes: Pareto et Min-Max, pratiquement effectifs pour toutes les méthodes d'optimisation multicritère, générant un ensemble de solutions admissibles (solutions satisfaisant les contraintes imposées).

4.2 PRESENTATION DES ALGORITHMES PARETO ET MIN-MAX

Comme toute approche de portée un peu générale, celle que nous proposons n'échappe pas à la règle selon laquelle on ne peut éviter de faire appel à une méthode de génération d'un ensemble de solutions admissibles à partir duquel il serait possible d'orienter l'investigation vers la mise en évidence d'un ensemble aussi restreint que possible, conçu pour éclairer directement le décideur sur la bonne décision.

De ce fait, nous supposons que l'on dispose d'une méthode qui génère un ensemble de solutions admissibles, et nous voulons sélectionner dans cet ensemble un sous ensemble contenant seulement les solutions "non inférieures" dont la solution Min-Max. Cette sélection est conditionnée par l'utilisation de

deux algorithmes Pareto et Min-Max permettant d'effectuer la comparaison des solutions préalablement citées.

4.2.1 Algorithme Pareto

Cet algorithme a été proposé par *Gerlach* [28] et se base sur le théorème de contact qui constitue l'un des principaux théorèmes de l'O.M.C.

Le théorème de contact est énoncé comme suit:

Un vecteur \bar{f}^* est une solution optimum Pareto du problème d'O.M.C. si et seulement si:

$$(C^- + \bar{f}^*) \cap F = \{\bar{f}^*\} \quad (4.1)$$

où C^- désigne le cône négatif défini comme étant l'ensemble dans E^K tel que:

$$C^- = \{\bar{f} \in E^K / \bar{f} \leq 0\} \quad (4.2)$$

Une illustration graphique de ce théorème pour un problème à deux critères est présenté sur la figure 4.1.

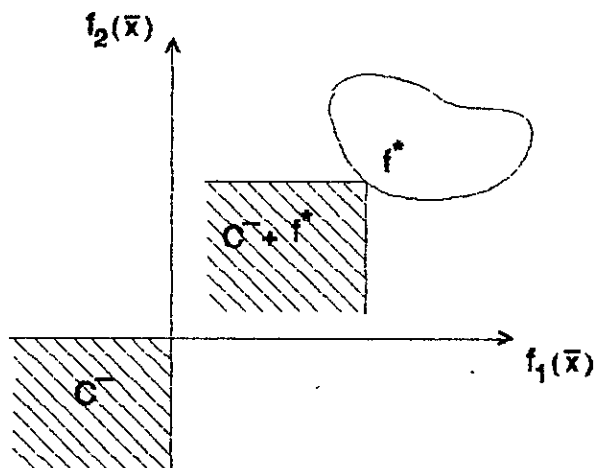


Fig. 4.1. Illustration graphique du théorème de contact

Pour une meilleure interprétation, considérons deux solutions $\bar{x}^{(1)}$ et $\bar{x}^{(2)}$ pour lesquelles deux cas spécifiques peuvent être obtenus:

$$(1) (C^- + \bar{f}(\bar{x}^{(1)})) \subset (C^- + \bar{f}(\bar{x}^{(2)})) \quad (4.3)$$

$$(2) (C^- + \bar{f}(\bar{x}^{(1)})) \supset (C^- + \bar{f}(\bar{x}^{(2)})) \quad (4.4)$$

Une illustration graphique de ces deux cas est présentée sur la figure 4.2.

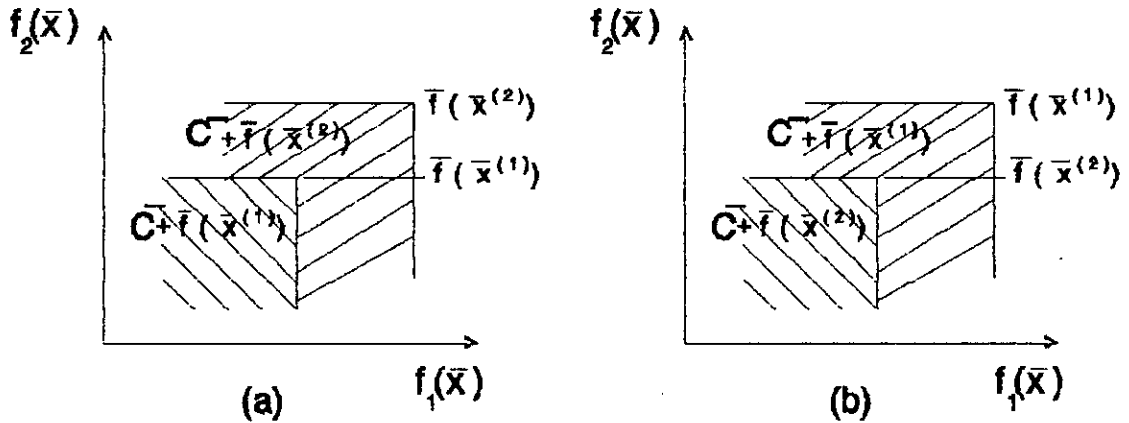


Fig. 4.2. Illustration graphique des formules (4.3) et (4.4).

On note:

$\bar{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T$: point quelconque de X

$\bar{f}(\bar{x}^{(0)}) = [f_1(\bar{x}_1^{(0)}), \dots, f_n(\bar{x}_n^{(0)})]^T$: vecteur fonction critère image du point $\bar{x}^{(0)}$

$\bar{x}_j^p = [x_{1j}^p, \dots, x_{nj}^p]$: jième solution optimum de Pareto

$\bar{f}_j^p = [f_{1j}^p, \dots, f_{nj}^p]$: vecteur fonction critère image du point \bar{x}_j^p

A ce stade, le problème consiste à choisir parmi un ensemble donné de solutions $L = \{1, \dots, l, \dots, l^a\}$, l'ensemble des solutions optimum de Pareto $J = \{1, \dots, j, \dots, j^a\}$.

Le concept principal de l'algorithme Pareto est le suivant:

Soit $\bar{x}^{(0)}$ une nouvelle solution à considérer. Si dans l'ensemble des solutions optimum Pareto, il existe une solution \bar{x}_j^p telle que:

- (i) $(C^- + \bar{f}(\bar{x}^{(0)})) \subset (C^- + \bar{f}(\bar{x}_j^p))$ alors $\bar{x}^{(0)}$ remplace \bar{x}_j^p (\bar{x}_j^p : solution dominée)
- (ii) $(C^- + \bar{f}(\bar{x}^{(0)})) \supset (C^- + \bar{f}(\bar{x}_j^p))$ alors $\bar{x}^{(0)}$ est écarté ($\bar{x}^{(0)}$: solution dominée)

4.2.2 Algorithme Min-Max

Son but est de choisir parmi un ensemble donné de solutions dont les numéros constituent l'ensemble $L = \{1, \dots, l^a\}$ la solution optimum Min-Max en supposant que le vecteur idéal \bar{f}^0 est connu.

Le concept principal de l'algorithme Min-Max est le suivant:

Un point \bar{x}^* est optimum Min-Max si et seulement si la formule de récurrence traduite par les équations (2.16a), (2.16b), (2.16c) est satisfaite.

Un organigramme illustratif de l'algorithme Min-Max est présentée sur la figure 4.4.

Rappelons que dans cet algorithme, la première étape consiste à lire les données propres au modèle, et définies dans le paragraphe précédent, ensuite pour chaque point généré \bar{x}^l vérifiant les contraintes délimitant le problème donné, le vecteur fonction critère $\bar{f}(\bar{x}^l)$ est déterminé permettant ainsi l'évaluation du vecteur des écarts relatifs $\bar{z}(\bar{x}^l)$ par le biais des formules (2.13), (2.14) et (2.15) en supposant, bien entendu, que le vecteur idéal \bar{f}^0 est connu.

L'étape suivante se réfère à l'examen des valeurs des composantes du vecteur $\bar{z}(\bar{x}^l)$. Deux cas peuvent se produire:

- Si $\bar{z}(\bar{x}^l)$ est nul alors le point \bar{x}^l sera considéré comme l'optimum Min-Max qui rend simultanément optimum chacune des fonctions critères, il serait incontestablement le meilleur.

- Dans le cas contraire, il faudrait évaluer pour le point \bar{x}^l , les valeurs v_r pour $r = 1, 2, \dots, k$ de la manière suivante:

$$v_1 = \max_{i \in I} \{ z_i(\bar{x}^l) \}$$

et $I_1 = \{ i_1 \}$ où i_1 représente l'indice pour lequel la valeur de $z_i(\bar{x}^l)$ est maximale.

$$v_2 = \max_{\substack{i \in I \\ i \notin I_1}} \{ z_i(\bar{x}^l) \}$$

$I_2 = \{ i_1, i_2 \}$ où i_2 représente l'indice pour lequel la valeur de $z_i(\bar{x}^l)$ est maximale.

$$v_r = \max \{ z_i(\bar{x}^l) \}$$

$$i \in I$$

$$i \notin I_r - 1$$

$$I_r = \{ I_r - 1, i_r \}$$

$$v_k = z_i(\bar{x}^l) \text{ pour } i \in I \text{ et } i \notin I_k - 1$$

La dernière étape consiste à comparer v_r (calculée pour \bar{x}^l) à v_r^* pour $r = 1, 2, \dots, k$ et retenir cette solution comme optimum si la condition suivante est satisfaite:

$$(v_1 < v_1^*) \vee ((v_s = v_s^*) \wedge (v_r < v_r^*))$$

$$s \in \{1, 2, \dots, r\} \quad r \in \{1, 2, \dots, k\}$$

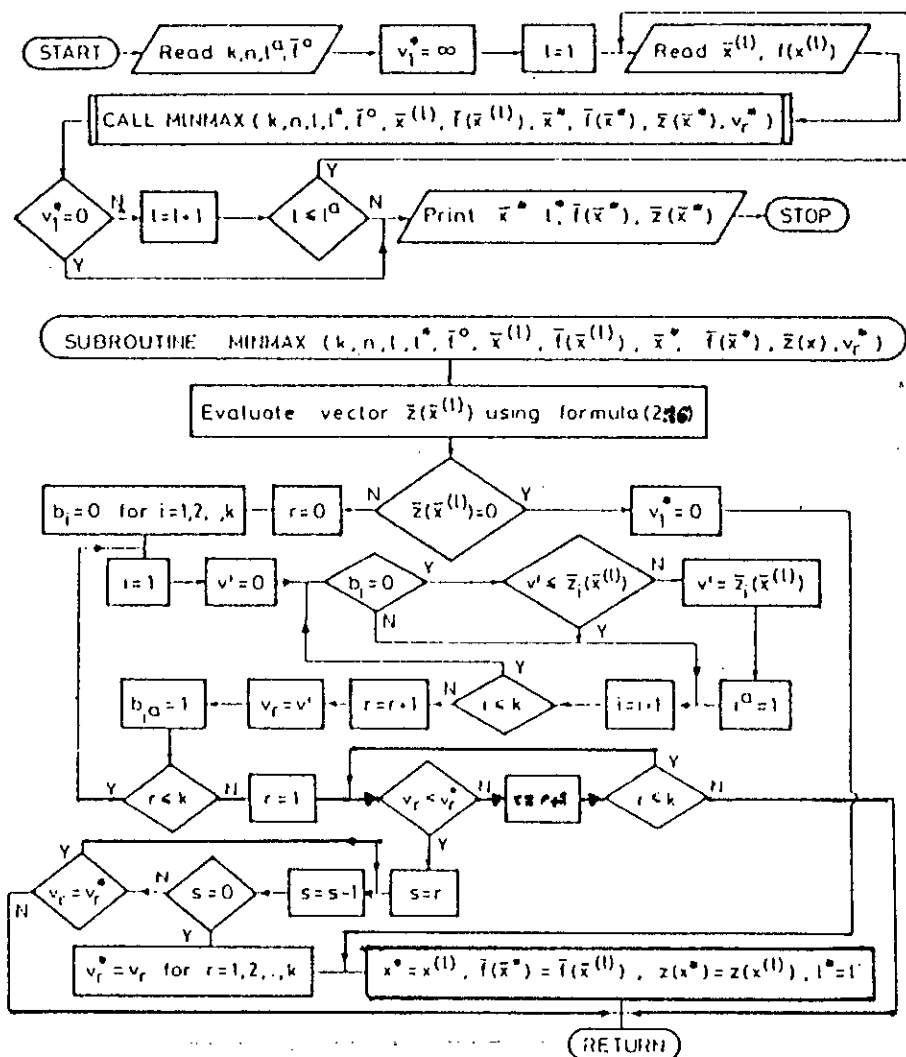


Fig. 4.4. Organigramme illustratif de l'algorithme Min-Max [5]

4.3 INTRODUCTION DES METHODES DE RECHERCHE DE L'OPTIMUM MIN-MAX

Dans le cadre de résolution des problèmes d'O.M.C. deux sortes de méthodes de minimisation de fonctions peuvent être distinguées:

- Méthodes d'exploration.
- Méthodes séquentielles.

4.3.1 Méthodes d'Exploration

S'agissant de cette catégorie de méthodes d'exploration, un point caractérisant le vecteur des V.D.D. est obtenu au moyen d'une règle négligeant totalement les solutions antérieures. Cette règle consiste en une méthode de recherche systématique, par le biais d'une grille constituée de points espacés entre eux, mais suffisamment proches, pour pouvoir trouver un minimum correct. Les valeurs des fonctions critères sont par la suite calculées pour chaque point de la grille moyennant leurs formules respectives.

Toutefois, il importe de noter que les méthodes d'exploration sont généralement destinées à résoudre les problèmes dont le nombre des V.D.D. n'est pas très élevé. Par ailleurs, elles permettent de traiter toutes sortes de problèmes de programmation non linéaire contrairement aux méthodes séquentielles.

Un exemple illustratif parmi l'ensemble de ces méthodes d'exploration est celle de *Monte Carlo*, qui consiste à générer un ensemble aléatoire de valeurs de variables de décision par l'intermédiaire de la formule suivante:

$$x_i = x_i^a + \delta_i (x_i^b - x_i^a) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

où

- x_i : valeur sélectionnée aléatoirement.
- x_i^a : Limite inférieure estimée ou donnée pour x_i
- x_i^b : Limite supérieure estimée ou donnée pour x_i
- δ_i : nombre choisi au hasard entre 0 et 1.

Il convient de souligner que l'incrément δ_i varie autant de fois que la variable de décision x_i .

Chaque point généré est ensuite testé afin de vérifier la satisfaction des contraintes imposées et interprétées par les équations (1.1) et (1.2).

Deux cas peuvent se présenter:

- 1- Si le point généré satisfait les équations sus-citées, alors il définit

une solution admissible qui requiert la détermination du vecteur fonction critère.

2- Si les équations (2.2) et (2.3) ne sont pas satisfaites, le point généré sera automatiquement éliminé.

Il est à remarquer que pour la mise en oeuvre de notre algorithme de recherche de l'optimum Min-Max, nous avons la possibilité d'utiliser deux variantes de la méthode de Monte Carlo [5]:

-Méthode de Monte Carlo 1

-Méthode de Monte Carlo 2

4.3.1.1 Méthode Monte Carlo 1

Cette méthode est basée sur une double exploration de l'aire de l'espace des V.D.D., tout d'abord, pour chercher le vecteur idéal \vec{f}^0 , ensuite pour la détermination de l'optimum Min-Max.

4.3.1.2 Méthode Monte Carlo 2

Cette Méthode se distingue de la première par le fait que l'espace des variables de décision n'est exploré qu'une seule fois. Durant cette exploration, un ensemble de solutions optimums Pareto est généré, de même que le vecteur idéal \vec{f}^0 . Enfin la détermination de l'optimum Min-Max est réalisée suite à l'examen de cet ensemble.

A titre de comparaison entre les méthodes Monte Carlo 1 et 2, il convient de signaler que la seconde méthode exige plus d'espace mémoire que la précédente, ceci en raison de la nécessité d'emmagasiner l'ensemble complet des solutions optimum Pareto, mais un temps moindre d'exécution vu que l'espace des V.D.D. n'est exploré qu'une seule fois.

Effectivement, le but est de prendre la bonne décision sur la base, bien entendu, de l'ensemble des solutions disponibles. En contre partie, l'inconvénient de ce procédé réside dans la difficulté d'examiner toutes les solutions, lorsque cet ensemble comporte un nombre élevé d'éléments.

D'ailleurs, nous pouvons procéder à sa réduction grâce à l'introduction de contraintes additionnelles de la forme:

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i^a \quad i = 1, \dots, k \quad (4.6)$$

Où les valeurs de f_i^a sont choisies par le décideur utilisateur.

Cette approche est similaire à la méthode de déplacement du vecteur idéal qui sera introduite subséquemment.

Pour toutes ces raisons, l'efficacité de la seconde méthode est apparente s'agissant de problèmes exigeant un nombre considérable de contraintes, ceci entraînant automatiquement la réduction du nombre des solutions optimales.

4.3.2 Méthodes Séquentielles

Dans les méthodes séquentielles, un point est déterminé sur la base des solutions obtenues antérieurement, il indique la situation probable du minimum ou la direction générale dans laquelle on le trouvera. la procédure est alors répétée et, à chaque séquence, le nouveau point ainsi établi est plus proche du minimum. Ces méthodes très efficaces sont destinées à résoudre uniquement les problèmes continus convexes.

L'utilisation des méthodes séquentielles est basée sur la minimisation de la fonction ayant la forme suivante:

$$v(\bar{x}) = \max \{ z_i(\bar{x}) \} \quad (4.7)$$

Le problème d'optimisation consiste alors à trouver $\bar{x}^* \in X$ tel que:

$$v(\bar{x}^*) = \min_{x \in X} \max_{i \in I} \{ z_i(\bar{x}) \} \quad (4.8)$$

Rappelons qu'il s'agit de la formule de récurrence (2.17a) qui, pour des problèmes convexes, définit toujours l'optimum Min-Max.

De façon générale, il convient de noter que la recherche du minimum de l'équation (5.7) peut être séquentiellement remplacée par [3]:

$$v(\bar{x}^*) = \min_{\bar{x} \in X} x_0 \quad \text{et} \quad x_0 = \max_{i \in I} \{ z_i(\bar{x}) \} \quad (4.9)$$

$$v(\bar{x}^*) = \min_{\bar{x} \in X} x_0 \quad \text{et} \quad x_0 \geq \max_{i \in I} \{ z_i(\bar{x}) \} \quad (4.10)$$

$$v(\bar{x}^*) = \min_{\bar{x} \in X} x_0 \quad \text{et} \quad x_0 \geq \{ z_i(\bar{x}) \} \quad (4.11)$$

où x_0 définit une variable additionnelle. Ainsi le problème de recherche de l'optimum Min-Max peut être transformé en problème de recherche du minimum

de x_0 sous les contraintes additionnelles suivantes:

$$x_0 \geq z_i(\bar{x}) \quad i=1, \dots, k \quad (4.12)$$

Par conséquent, la formulation du problème d'O.M.C s'interprétera comme suit:

trouver $\bar{x} = [x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*]^T$ tel que:

$$\begin{aligned} v(\bar{x}^*) = \min_{\bar{x} \in X} x_0 \quad \text{et} \quad x_0 \geq z_i(\bar{x}) \\ i \in I \end{aligned} \quad (4.13)$$

où $z_i(\bar{x})$ exprime la fonction suivante:

$$z_i(\bar{x}) = \left| \frac{f_i(\bar{x}) - f_i^0}{f_i^0} \right|$$

Achevons ce paragraphe en signalant que les méthodes d'exploration et les méthodes séquentielles peuvent être utilisées ensemble moyennant un programme interactif [29].

4.4 POSSIBILITES SUPPLEMENTAIRES DE L'APPROCHE MIN-MAX

Bien que l'optimum Min-Max caractérise une solution traitant tous les critères avec égale importance, l'approche Min-Max offre néanmoins d'autres possibilités pouvant rendre la recherche d'une solution satisfaisante très efficace

4.4.1 Méthode Min-Max Poids

Qu'il s'agisse de problèmes convexes ou non convexes, l'utilisation de l'approche Min-Max associée à la méthode poids procure une représentation très satisfaisante des solutions optimum Pareto. En effet, elle fait intervenir des coefficients poids attribués aux écarts relatifs des fonctions critères permettant ainsi la reformulation de l'équation (2.16) comme suit:

$$\begin{aligned} \forall i \in I \quad z_i(\bar{x}) = \max \{ w_i z'_i(\bar{x}), w_i z''_i(\bar{x}) \} \\ \sum_{i=1}^k w_i = 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Notons que les valeurs supposées de w_i reflètent exactement l'importance

relative des critères.

4.4.2 Méthode de Déplacement de la Solution Idéale

Cette méthode constitue une autre "dérivée" de l'approche Min-Max, elle consiste à déplacer la solution idéale \bar{f}^0 (cf. § 3.2.1) qui, pour un modèle donné, est considérée constante. En effet, le décideur vise dans cette approche à proposer l'adoption d'une solution idéale, différente de celle calculée et reflétant les buts qu'il veut essentiellement atteindre. Une telle transformation du vecteur idéal \bar{f}^0 trouve sa raison d'être si l'optimum Min-Max procure une solution aussi proche que possible des buts prédéterminés. Dans le cas contraire, deux opérations sont possibles:

1- Choisir un autre vecteur \bar{f}^0 qui soit au voisinage de la solution préférée.

2- Choisir des coefficients poids reflétant l'ordre prioritaire des buts, ensuite utiliser la formule (4.14) en vue de trouver l'optimum Min-Max.

Enfin, il semble utile de noter que le concept de déplacement de la solution idéale peut, d'une part être adopté par toute méthode utilisant le vecteur \bar{f}^0 , et d'autre part, permet au décideur de concentrer son choix sur un ensemble de Pareto très réduit.

4.5 MECANISME DE PRESENTATION DES RESULTATS

Pour une meilleure interprétation des résultats les plus pertinents (ensemble de Pareto) obtenus moyennant l'utilisation des différentes méthodes décrites ultérieurement (chapitre 4 et 5), ceux-ci doivent être transmis aux décideurs de manière à lui faire comprendre, sans aucune confusion, les conséquences de toutes les alternatives. Ceci permet de guider le processus de décision et d'élaborer des éléments de réponse au problème de prise de décision.

En effet, la perfection et l'exactitude requièrent qu'un ensemble entier de choix soit identifiée par le biais des valeurs de V.D.D. ainsi que leurs fonctions critères respectives à travers lesquelles une appréciation des possibilités de compensation ("trade-offs") entre "écarts positifs" et "écarts négatifs", tel qu'ils ressortent de la comparaison de deux solutions s et s' vis-à-vis desquelles certains critères sont favorables à s et d'autres sont favorables à s' , s'avère nécessaire. La notion de "trade-offs" est l'une de

celles sur lesquelles on peut prendre appui pour clarifier une telle idée de compensation, elle exprime le gain minimal nécessaire sur un critère pour compenser la perte d'une unité sur un autre critère.

S'agissant de deux ou peut-être trois critères, le mécanisme de présentation le plus expressif consiste en la représentation graphique des solutions non-inférieures dans l'espace des fonctions critères E^k . Ceci montre immédiatement, dans une forme très précise, les valeurs des fonctions critères pour chaque alternative ainsi que les trade-offs correspondants. Les valeurs des V.D.D. représentant chaque alternative sont ensuite transmises à travers des tableaux qui, le plus souvent, constituent un instrument de dialogue précieux pour le décideur.

Par contre, en présence de plus de trois critères, cette façon de faire doit être abandonnée. *Meisel* [30] suggère l'utilisation d'une approche de décomposition utilisant la projection des solutions non inférieures sur des plans formés par la combinaison des critères deux à deux: $f_1-f_2, f_1-f_3, \dots, f_1-f_k, f_2-f_3, \dots, f_{k-1}-f_k$, et à chaque point considéré dans le plan f_i-f_j est attribué l'ensemble des valeurs des $(k-2)$ fonctions critères manquantes ($(k-2)$ labels), permettant ainsi l'appréciation des trade-offs entre critères.

Cependant, la complexité de la représentation des résultats persiste pour des problèmes multicritères à grande dimension ($k > 3$) étant donné que $k(k-2)/2$ figures doivent être examinées en plus du fait que chaque point considéré doit être accompagné de $(k-2)$ labels ce qui embrouille et complique l'analyse des résultats.

Par ailleurs, une nouvelle méthodologie prometteuse a été développée par *Schilling* [31]. Elle fait usage de ce qu'on appelle les chemins de valeurs ou "value paths".

Pour une meilleure illustration, considérons l'ensemble de Pareto X^p pour j_0 solutions $\{\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^{j_0}\}$, chaque solution \bar{x}^i sera définie par un vecteur critère $\bar{f}(\bar{x}^i) = \{f_1(\bar{x}^i), f_2(\bar{x}^i), \dots, f_n(\bar{x}^i)\}$. Le chemin de valeurs de la solution \bar{x}^i sera tracé par une suite de segments reliant la position de son indice i sur chacun des axes représentant l'échelle associée à chaque critère, comme montré sur la figure 4.5.

Une telle technique trouve sa raison d'être dans le fait que la présentation des résultats, sans se soucier du nombre de critère, est concise bien qu'on peut noter l'apparition d'une certaine lourdeur de représentation, en présence de plusieurs solutions non inférieures, dans ce cas la densité des

chemins peut embrouiller le décideur.

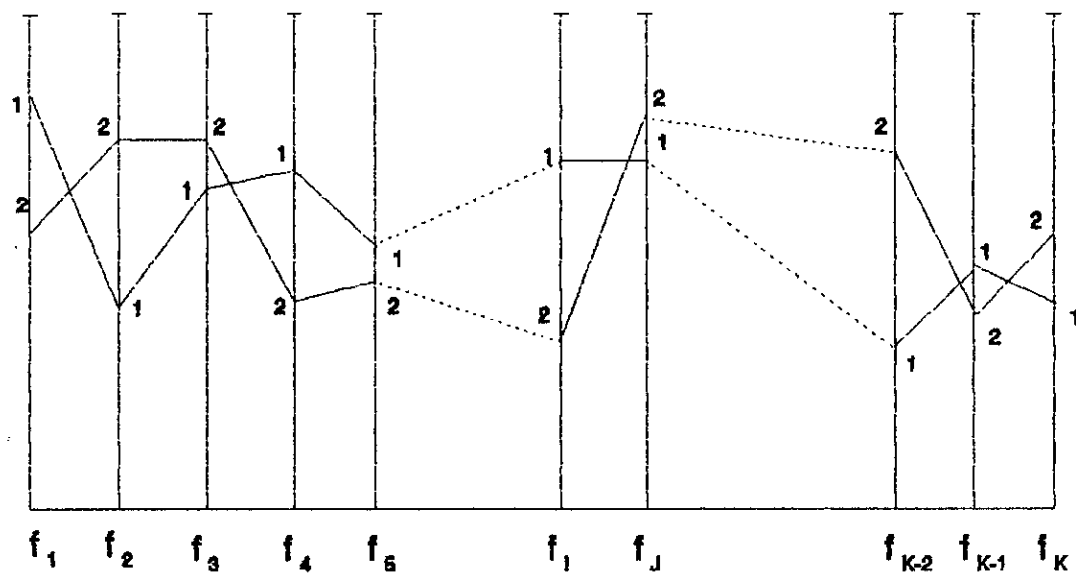


Fig. 4.5. Profils multicritères et tracé des chemins de valeurs

CHAPITRE 5

MURS DE SOUTÈNEMENT

5.1 INTRODUCTION

Les murs de soutènement sont des constructions qui constituent une importante application dans le domaine du génie civil. En effet, pour retenir un talus définitivement ou provisoirement, éviter un éboulement, construire un parking souterrain ou un silo, réaliser une fouille, la meilleure solution consiste souvent en la construction d'ouvrages de soutènement.

La stabilité qu'assurent ces ouvrages n'est possible que grâce aux éléments qui les constituent. Ces derniers sont en général, du moins pour les types courants, caractérisés par un élément vertical ou peu incliné qui soutient des terres pouvant être surchargées ou non. L'autre élément horizontal, ou légèrement incliné est en contact avec le sol de fondation et avec les terres à soutenir.

De ce contact avec le sol, découle l'énorme importance de ce dernier dans la tenue d'un mur construit et de la sécurité qu'il peut offrir.

Pour cette raison, nous consacrerons essentiellement ce chapitre à l'étude de la stabilité des types les plus courants des murs de soutènement, en plus d'une présentation des données nécessaires relatives aux deux configurations que peuvent prendre ces murs (murs cantilever en BA, et murs poids). Ceci aboutira à l'élaboration du modèle d'étude en vue de déterminer la configuration optimale du mur de soutènement considéré, sous les critères de stabilité et d'économie (poids).

5.2 PRINCIPAUX TYPES DE MURS DE SOUTÈNEMENT

Les murs de soutènement sont généralement classés en deux grandes catégories: ceux constitués d'un écran seulement et ceux constitués d'un écran et d'une semelle. Leurs modes de fonctionnement étant différents, il convient alors de considérer [32]:

- Les ouvrages de soutènement avec semelle.
- Les ouvrages de soutènement sans semelle.

Dans la première catégorie d'ouvrages de soutènement, nous distinguons:

- Les murs poids, parmi lesquels, nous pouvons rencontrer les murs poids mixtes (un faible pourcentage d'armatures en acier est employé en vue de réduire la consommation du béton).

- Les murs profilés (en béton armé), incluant aussi des murs à contreforts intérieurs ou extérieurs. Ces murs peuvent parfois être modifiés pour mieux les adapter aux conditions et réaliser ainsi un projet plus économique.

La seconde catégorie d'ouvrages est caractérisée par:

- Les palplanches
- Les parois moulées.

Notre étude s'intéressera uniquement à l'optimisation des murs avec semelle. Ainsi, nous décrirons les configurations les plus courantes relatives à ces murs afin de pouvoir formuler les limites extrêmes des variables de décision (cf § 4.3.1) nécessaires à l'établissement du modèle d'optimisation.

5.2.1 Le Mur en Béton Armé [33,34]

La forme la plus fréquente est le mur en té renversé constitué principalement du mur de front, le patin avant et le talon arrière (fig. 5.1), travaillant chacun comme une poutre console.

Ce type de mur reste économique pour des hauteurs n'excédant pas 5 à 6 mètres, dans le cas contraire ou lorsque les poussées sont trop élevées, des contreforts sont nécessaires pour raidir le voile. Enfin, la semelle peut être munie de raidisseurs d'extrémité appelés bèches (coulées sous la semelle à l'avant, à l'arrière ou dans le prolongement du voile). Ces dernières sont prévues pour amarrer le mur dans le sol de fondation et augmenter par là même la résistance au glissement.

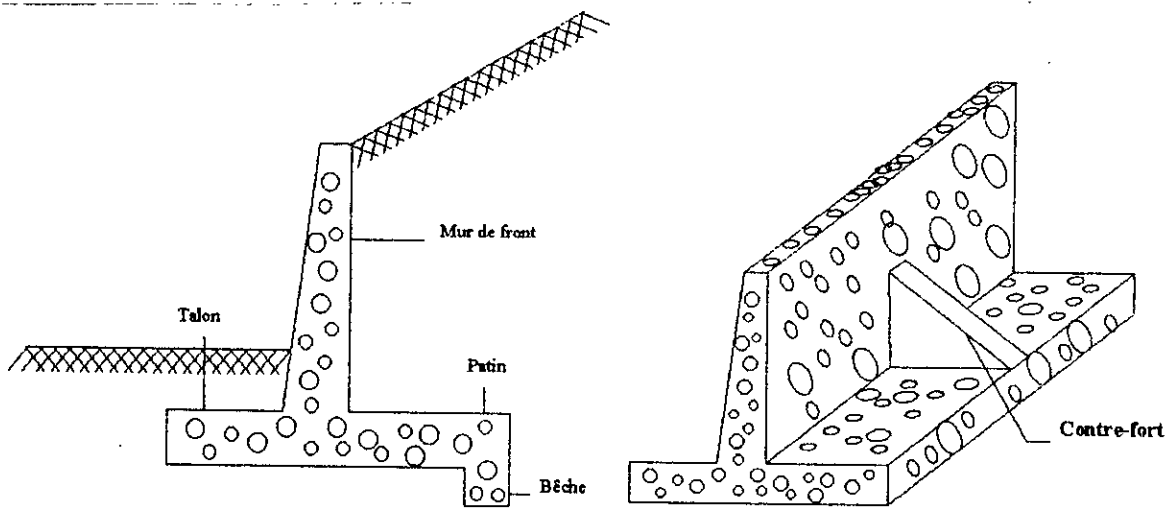


Fig. 5.1. Murs en béton armé

5.2.2 Le Mur Poids [33]

C'est un bloc monolithe en maçonnerie ou en béton d'où son poids important (fig. 5.2). Bien que ce dernier lui permette de résister aux efforts exercés par le terrain, il peut par contre, provoquer des tassements excessifs dans le cas de terrains ne présentant pas de bonnes caractéristiques mécaniques. Par ailleurs, l'absence de ferrailage fait que ce mur ne soit conçu que pour résister à la compression.

Enfin, il convient de noter que le mur poids n'est pas économique pour les murs de grande hauteur, toutefois, la facilité de son exécution fait la variété de sa géométrie (murs à redans, trapézoïdale...).

5.3 CALCUL DES MURS DE SOUTÈNEMENT

Différentes étapes de calcul dominant la pratique de la construction des murs de soutènement, nous citons [33,35]:

- 1- Rassemblement des informations générales : reconnaissance topographique, principales dimensions, etc.
- 2- Etude des caractéristiques du sol.
- 3- Détermination du type et des dimensions probables du mur.
- 4- Détermination des surcharges: voies ferrées, routes, immeubles ou autres ouvrages, etc.

- 5- Calcul de la poussée des terres et de la pression latérale due aux surcharges.
- 6- Etude de la stabilité de l'ouvrage et de la fondation.
- 7- Calcul des différents éléments de l'ouvrage.
- 8- Drainage du remblai.
- 9- Etude du tassement et des divers mouvements possibles du mur.

Il semble utile d'attirer l'attention sur le fait que les six premières étapes sont décrites ci-dessous, à cause de leur grande importance dans la construction du modèle mathématique et dans la formulation du problème d'optimisation multicritère. Les autres ne concerneront pas cette étude.

5.3.1 Informations Générales

Les informations générales dont la connaissance est nécessaire pour l'étude d'un mur de soutènement sont:

- Topographie du site, y compris l'importance des ouvrages existants.
- Dimensions principales : ce sont la côte du sommet du mur, la pente du terrain naturel après travaux et, si nécessaire, les limites de propriété.
- La profondeur de pénétration du gel.

5.3.2 Caractéristiques du Sol

La connaissance des caractéristiques du sol provient, en grande partie, des sondages et des essais réalisés en nombre suffisant afin de permettre :

- La détermination du type de fondation (semelles, pieux ou piles forées)
- L'étude de la stabilité : nécessité de connaître la résistance au cisaillement du sol.
- Etude des couches inférieures : possibilité d'un poinçonnement ou d'un tassement élevé par suite de la présence d'un sol de faibles caractéristiques à grande profondeur.

5.3.3 Dimensions des Murs de Soutènement

L'étude d'un mur de soutènement commence, comme pour beaucoup d'autres ouvrages, par celle d'un avant-projet; on analyse la stabilité et la résistance du profil défini pendant l'avant-projet, profil qui est

progressivement modifié de manière à l'adapter au mieux aux conditions existantes. Pour établir le prédimensionnement du mur, les informations générales suivantes pourront être utiles.

S'agissant des murs poids, les dimensions proposées sont les suivantes [36]:

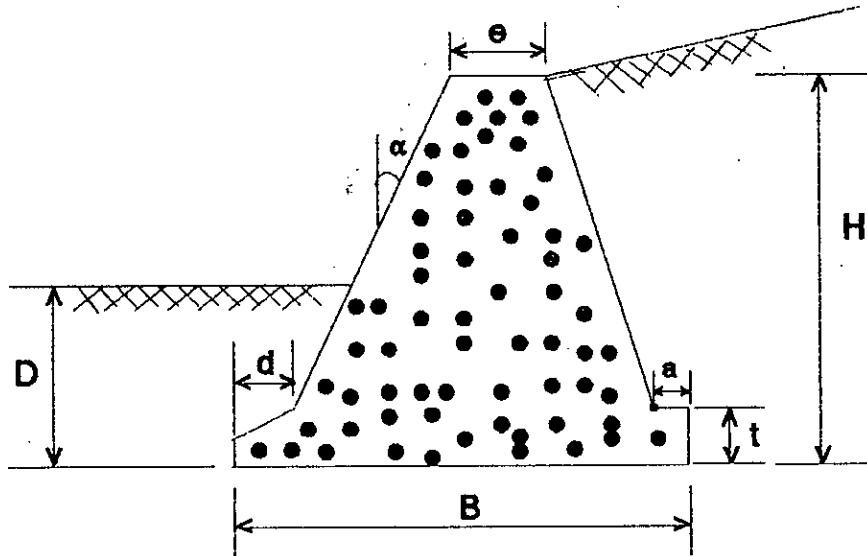


Fig. 5.2. Dimensions usuelles d'un mur poids

où:

$$e = h / 12 \quad e \geq 30 \text{ cm}$$

$$t \in [h / 8 ; h / 6]$$

$$d \in [t / 2 ; t]$$

$$B \in [h / 2 ; 2 h / 3]$$

$$a \in [10 ; 15 \text{ cm }]$$

$$\text{tg } \alpha \geq 0.02$$

Pour les murs en béton armé, les dimensions proposées sont définies comme suit [33]:

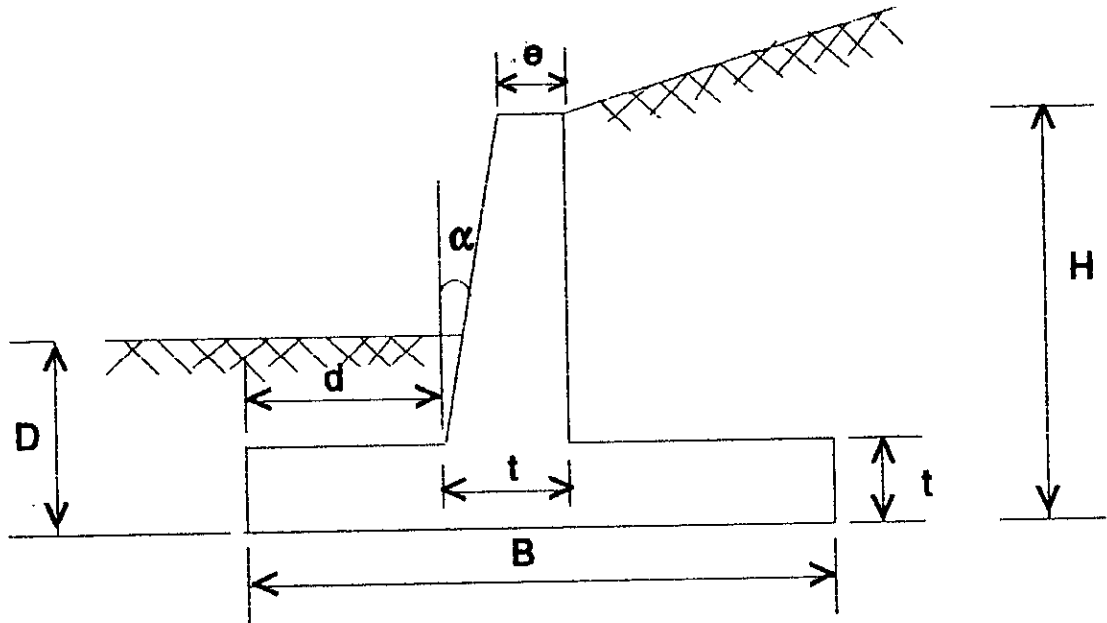


Fig. 5.3. Dimensions usuelles d'un mur profilé en béton armé

où:

$$e = H / 24 \quad e \geq 20 \text{ cm}$$

$$t \in [H / 12 ; H / 10]$$

$$d \in [H / 10 ; H / 8]$$

$$B \in [2 H / 5 ; 2 H / 3]$$

$$\text{tg } \alpha \geq 0.02$$

D désigne la profondeur de la semelle

Il semble utile de remarquer que les semelles doivent être fondées à une profondeur supérieure à la profondeur de pénétration du gel, il n'est pas recommandé de fonder à la surface du sol, même dans les zones où il ne gèle pas, car il faut tenir compte de la possibilité d'une érosion de surface. La profondeur minimale doit être de 60 cm pour des constructions lourdes tels que les ouvrages de soutènement [37,38].

5.3.4 Etude de la Poussée des Terres

5.3.4.1 Définition

C'est la pression exercée par le sol sur un mur ou écran, le coefficient des pressions est défini comme le rapport des contraintes horizontales σ_h avec les contraintes verticales σ_v . Soit: $K = \sigma_h / \sigma_v$.

Suivant le mode de déplacement de l'écran, trois états sont définis [39-43]:

- Pression des terres au repos : K_0

Dans cet état, l'écran est rigide, il ne peut pas se déformer, le sol est par conséquent dans son état naturel. Comme il est difficile de déterminer avec exactitude le coefficient de pression des terres au repos, des formules empiriques en fonction de l'angle de frottement des terres, sont proposées.

- Pression des terres active : K_a

S'agissant de ce cas, l'écran se déplace en dé comprimant le massif. Suite à cette décompression, la pression des terres décroît jusqu'à atteindre un état limite où l'intensité de la force de poussée est minimale. On donne à cette action le nom de poussée pour rappeler que le massif s'appuie sur l'écran.

- Pression des terres passive: K_p

Dans cet état, l'écran se déplace en comprimant le massif, on donne à cette action le nom de butée ou pression des terres passive. Cette pression augmente avec le déplacement de l'écran jusqu'à atteindre un état limite où l'intensité de la force de butée est maximale.

Il convient de souligner, que plusieurs méthodes sont proposées pour la détermination des coefficients K_a et K_p , dont les valeurs sont déterminées à partir du choix de l'une de ces méthodes.

5.3.4.2 Méthodes de Calcul

La mécanique des sols indique que pour des terres en place derrière un mur, il y a une infinité d'états d'équilibres possibles. Parmi ces états d'équilibre, deux sont caractéristiques: le premier, l'état d'équilibre limite inférieur, l'autre l'état d'équilibre limite supérieur. Nous désignons par état d'équilibre limite, l'état d'équilibre qui précède la rupture. Les théories basées sur cette notion sont nombreuses, elles sont classées en fonction des hypothèses de base [34]:

- Sol considéré comme milieu élastique
- Sol plastique
- Théories du coin de glissement
- Méthodes expérimentales

Les plus utilisées se résument en:

- A. Théorie du coin de glissement
- B. Théorie de Rankine
- C. Théorie de Boussinesq

A. Théorie du Coin de Glissement

C'est la théorie la plus ancienne, elle a été développée par *Coulomb*, ensuite elle a été généralisée par d'autres, entre autre, *Culmann*. Elle se base sur l'équilibre extérieur d'un coin de terre séparé du massif lors de la rupture. Il existe deux catégories dans cette théorie:

- Première catégorie: Les surfaces de glissement sont supposées planes (ex: théorie de Coulomb).
- Deuxième catégorie: Les surfaces de glissement sont prises curvilignes.

B. Théorie de Rankine

C'est une méthode basée sur la plasticité, elle admet que tout le massif derrière le mur est en équilibre plastique. Les hypothèses de cette théorie sont:

- Isotropie du sol.
- Tous les points situés sur un plan parallèle à la surface libre sont dans un même état d'équilibre.
- Frottement entre mur et sol nul.

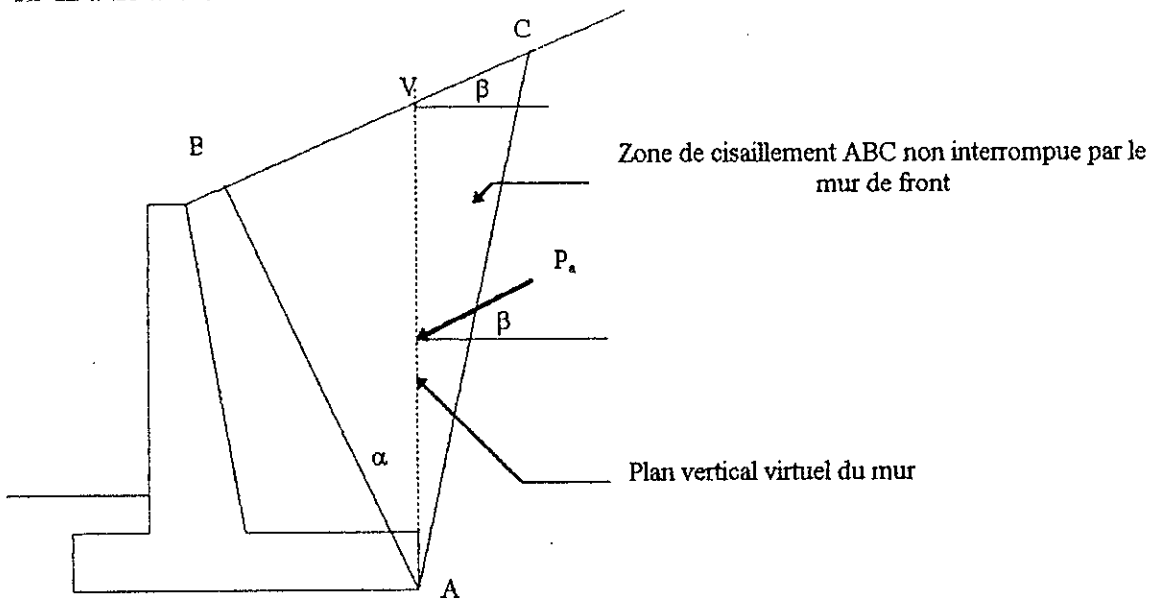
C. Théorie de Boussinesq

Contrairement à la théorie de Rankine, *Boussinesq* tient compte de la rugosité et du déplacement relatif des écrans.

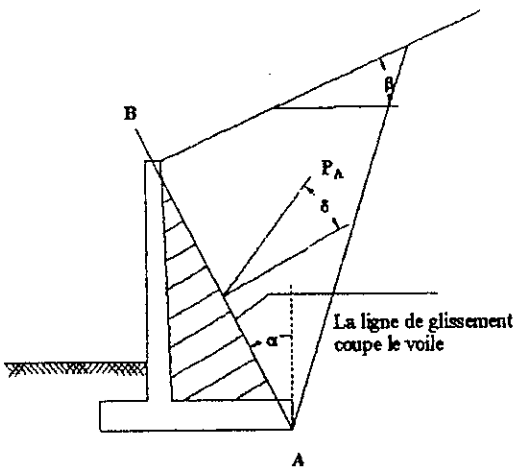
Pour la détermination des courbes de glissement, il élaborera des équations en se basant sur l'équilibre d'un prisme élémentaire, le système d'équations n'étant pas intégrable, des méthodes numériques sont nécessaires. Celles-ci demandent un traitement mathématique fastidieux. Les tables de *Caquot-Kerisel* sont alors utilisées.

D. Choix de la méthode:

Le choix d'une méthode de calcul qui traite tous les cas pouvant se présenter est pertinent, du fait qu'aucune ne soit pleinement satisfaisante. Dans cette étude, les méthodes retenues sont celles de Rankine et du Coin de glissement (Coulomb) en fonction des situations présentées ci dessous [33]:



(a) Rankine



(b) Coulomb

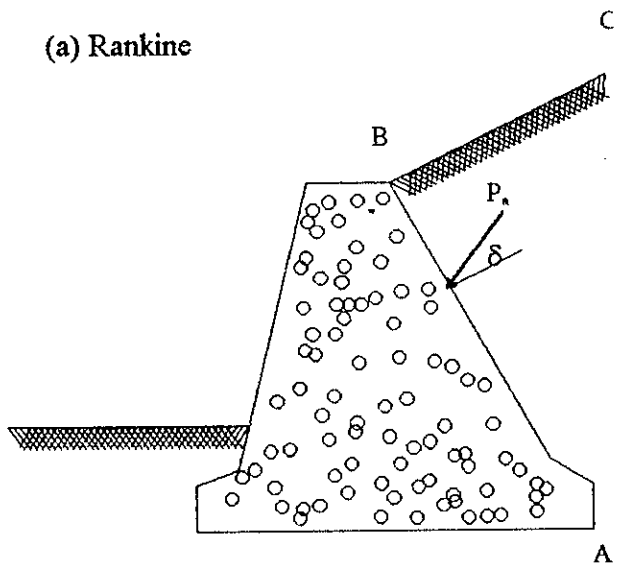


Fig. 5.4. Application des théories de la poussée des terres à l'étude d'un mur de soutènement: a) Rankine b) Coulomb.

où:

pour la fig. 5.4a, La théorie de Rankine est applicable.

pour la fig. 5.4b, La théorie du coin de glissement est applicable.

avec:

$$\alpha = \frac{1}{2} (90 - \phi) - \frac{1}{2} (e - \beta) \quad (5.1)$$

$$\text{où } e = \arcsin^{-1} \frac{\sin \beta}{\sin \phi}$$

ϕ : angle de frottement interne

δ : frottement mur-sol.

5.3.5 Surcharges.

Un mur de Soutènement peut être soumis à des surcharges agissant soit directement sur le mur, soit par l'intermédiaire du remblai. Ces surcharges provoquent un accroissement de la pression latérale qui dépend de la nature de la surcharge. Quatre cas de surcharges peuvent se présenter:

- Surcharge uniforme
- Surcharge distribuée suivant une bande
- Surcharge linéaire
- Surcharge ponctuelle

L'étude de l'influence d'une surcharge se fait en utilisant le principe de superposition des états d'équilibre. Il suffit donc de considérer la superposition de ces deux systèmes:

- Celui d'un massif pesant non surchargé
- Celui d'un massif non pesant surchargé

5.3.5.1 Surcharge Uniforme

Les contraintes de poussée ou de butée dues à cette surcharge sont constantes tout le long de l'écran et leur résultante est appliquée au milieu de l'écran (fig. 5.5(a)).

La pression due à une surcharge uniforme est égale à:

$$\sigma_q = q \cdot K_q \quad (5.2)$$

où q et K_q désignent respectivement la surcharge uniforme et le coefficient

de pression due à la surcharge.

5.3.5.2 Surcharge Linéaire

C'est le cas par exemple de la semelle filante de faible largeur, lorsqu'elle est parallèle à l'ouvrage de soutènement (fig. 5.5(b)).

Soient:

H : hauteur du mur

x : la position de la surcharge par rapport au mur ($x = m H$)

z : position du point considéré ($z = n H$)

La pression latérale, au point considéré a , due à la surcharge linéaire peut être calculée moyennant les équations empiriques suivantes [35,44]:

$$\sigma_h = 1.27 \frac{q}{H} \frac{m^2 n}{(m^2 + n^2)^2} \quad \text{si } (m > 0.4) \quad (5.3)$$

$$\sigma_h = 0.203 \frac{q}{H} \frac{n}{(0.16 + n^2)^2} \quad \text{si } (m \leq 0.4)$$

Ainsi que le montre la figure 5.5(b), la valeur de σ_h varie avec la profondeur.

5.3.5.3 Surcharge Distribuée Suivant une Bande

C'est généralement le cas d'une route, d'une voie ferrée ou d'une semelle filante, parallèles, à l'ouvrage de soutènement (fig. 5.5(c)).

Si nous nous reportons à cette figure, nous définissons:

σ_h contrainte latérale à un point donné a .

β angle en radian sous lequel on voit du point a la largeur de la bande chargée.

α angle de la verticale avec la bissectrice de β .

q densité de la surcharge

La pression latérale à un point donné a , due à cette surcharge s'exprime comme suit [33]:

$$\sigma_h = \frac{2q}{\pi} (\beta + \sin \beta) \sin^2 \alpha + \frac{2q}{\pi} (\beta - \sin \alpha) \cos^2 \alpha \quad (5.4)$$

Comme dans le cas précédent, la pression latérale varie avec la profondeur.

5.3.5.4 Surcharge Ponctuelle.

C'est le cas d'une roue, ou en général toute charge concentrée agissant sur une faible surface. Dans ce cas, la pression varie non seulement avec la profondeur (comme précédemment) mais également avec la distance horizontale de la charge (fig. 5.5(d)).

Soient:

H : hauteur du mur

x : la position de la surcharge par rapport au mur ($x = m H$)

z : position du point considéré ($z = n H$)

La pression latérale, au point considéré a , due à la surcharge linéaire peut être calculée en utilisant les équations empiriques suivantes [35,44]:

$$\sigma_h = 1.77 \frac{Q}{H^2} \frac{m^2 n^2}{(m^2 + n^2)^3} \quad \text{si } (m > 0.4) \quad (5.5)$$
$$\sigma_h = 0.28 \frac{Q}{H^2} \frac{n^2}{(0.16 + n^2)^3} \quad \text{si } (m \leq 0.4)$$

Pour tenir compte de la variation de la pression avec la distance horizontale, il suffit de prendre en considération la position du point, auquel nous voulons déterminer la contrainte σ'_h , par rapport à la surcharge ponctuelle, moyennant la formule suivante [38]:

$$\sigma'_h = \sigma_h \cos^2 (1.1 e) \quad (5.6)$$

Les notations utilisées dans cette équation sont explicitées sur la figure 5.5(d).

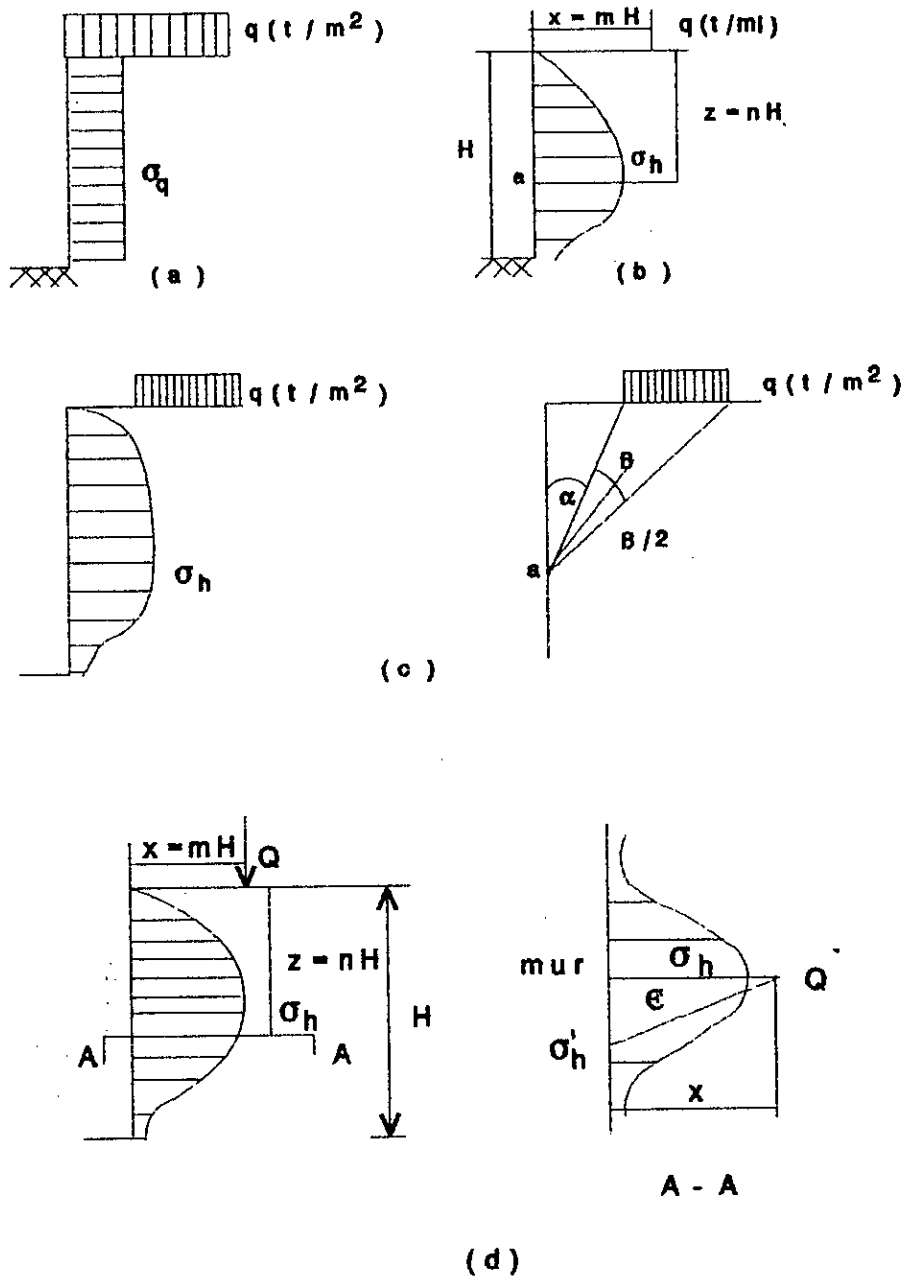


Fig. 5.5. Pression latérale due à (a) une charge uniforme (b) charge linéaire (c) charge distribuée suivant une bande (d) charge ponctuelle

5.3.6 Stabilité du Mur de Soutènement

La bonne tenue d'un mur de soutènement, repose essentiellement sur la vérification de la stabilité complète. Pour cela, nous considérons trois types de stabilité à vérifier:

- stabilité externe
- stabilité interne
- stabilité d'ensemble

La stabilité externe caractérise, en général, la stabilité du mur sur son support. Elle consiste en la vérification au renversement, glissement et poinçonnement. Par ailleurs, la stabilité interne exprime la capacité de résistance du mur grâce à ses efforts internes, ceci revient alors à déterminer les dimensions et le ferrailage de ce dernier. Le troisième type de stabilité à vérifier est la stabilité d'ensemble, équivalente à la stabilité de l'ensemble mur-support, ou stabilité des plans de glissement [33,36].

Notre étude se limite seulement à réaliser une configuration optimale du mur de soutènement par la prise en considération de deux situations conflictuelles caractérisées par la **maximisation de la stabilité externe** du mur et la **minimisation de son poids**. Pour cette raison, nous nous intéresserons aux coefficients de sécurité vis à vis du renversement, glissement et poinçonnement afin de pouvoir formuler le mieux possible les données (fonctions critères et contraintes) du problème d'optimisation multicritère.

5.4 ETUDE DE LA STABILITE EXTERNE

L'étude de la stabilité d'un ouvrage de soutènement requiert, en général, la détermination des différentes forces auxquelles il est soumis. Par conséquent, nous devons concevoir l'ouvrage de façon à ce qu'il résiste à ces forces, dont nous citons:

- Poussée des terres
- Butée des terres
- Poids propre du mur
- Pressions et sous-pressions d'eau
- Surcharges du terrain
- Pression de soulèvement
- Forces d'infiltration
- Forces dynamiques

Rappelons que l'étude de la stabilité externe consiste à vérifier cette dernière au renversement, glissement et poinçonnement.

5.4.1 Renversement

L'axe de rotation du mur est localisé au droit de l'arête extérieure de la fondation. Les moments par rapport à cet axe sont composés comme suit:

- d'une part la force stabilisante qu'est le poids du mur et celui du sol situé sur la semelle arrière (cas des murs profilés).

- d'autre part les forces renversantes qui sont la poussée des terres et la pression de l'eau.

Le rapport des moments est le coefficient de sécurité au renversement F_{SR} qui ne doit pas descendre en dessous de 1.5 [32-45].

$$F_{SR} = \frac{\sum \text{moments stabilisants}}{\sum \text{moments renversants}} \geq F_R \quad (5.7)$$

où:

F_R désigne le coefficient minimal de sécurité au renversement.

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1.5 \text{ pour les remblais pulvérulents} \\ 2.0 \text{ pour les remblais cohérents} \end{array} \right\}$$

5.4.2 Glissement

Le déplacement du mur par glissement sur le plan de sa fondation est la deuxième éventualité à envisager (fig. 5.6). Il faut comparer:

- La composante horizontale S de la résultante R dans le plan de la fondation (en général la composante horizontale de la somme des poussées).

- La résistance que le terrain de fondation est capable d'opposer au glissement, à savoir:

$$c_b B + N \operatorname{tg} \delta_b \quad (5.8)$$

B : est la largeur de la fondation

N : composante de R normale au plan de la fondation

c_b et δ_b sont les caractéristiques d'adhérence et de frottement au contact du terrain de fondation et de la semelle du mur. Le rapport de ces deux forces constitue le coefficient de sécurité au glissement F_{SG} qui ne doit pas

descendre en dessous de 1.5 [32,45].

$$F_{SG} = \frac{N \operatorname{tg} \delta_b + c_b B}{S} \geq F_G \quad (5.9)$$

F_G est le coefficient minimal de sécurité au glissement

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1.5 \text{ si } P_p = 0 \\ 2.0 \text{ si } P_p \neq 0 \end{array} \right\}.$$

où P_p est la pression de terre passive (butée) que l'on néglige le plus souvent.

Certaines auteurs admettent que les caractéristiques d'adhérence et de frottement à prendre en compte sont simplement la cohésion c et l'angle de frottement interne ϕ du terrain de fondation, d'autres sont plus circonspects; ils conseillent de négliger l'adhérence [36].

Afin de bien établir les critères de stabilité au glissement et renversement pour le problème d'optimisation multicritère, des expressions plus précises des facteurs de sécurité en fonction des forces auxquelles est soumis le mur de soutènement s'imposent [35,44] (fig. 5.6)

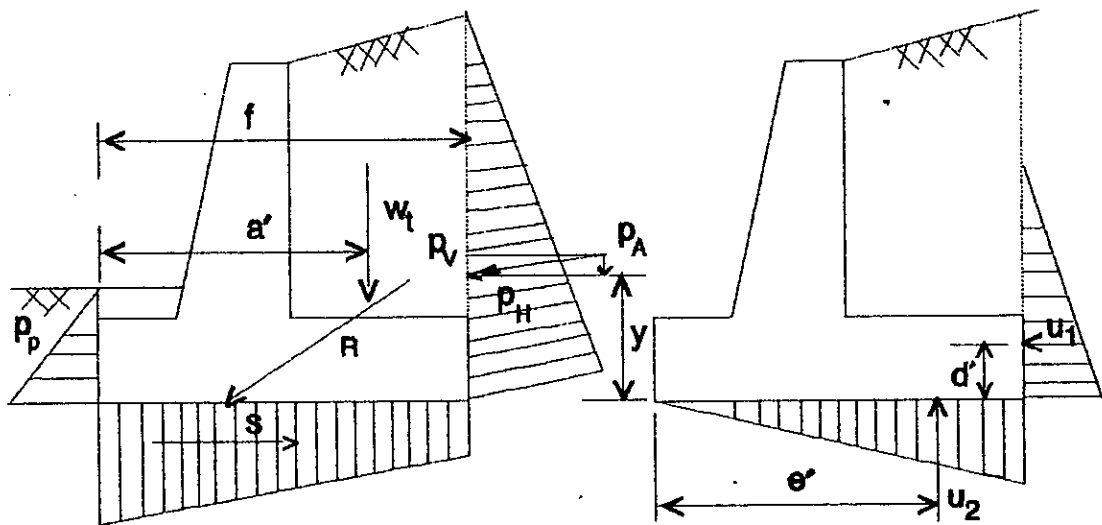


Fig. 5.6. Les différentes forces agissant sur un mur de soutènement

Un bilan des forces, conformément à la figure 5.6, permet de développer l'expression des coefficients de sécurité au glissement et renversement comme suit :

Stabilité vis à vis du glissement:

a) butée incluse:

$$F_{SG} = \frac{S + P_P}{P_H + U_1} \geq 2.0$$

b) butée négligée:

$$F_{SG} = \frac{S}{P_H + U_1} \geq 1.5$$

Avec:
$$S = (W_t + P_V - U_2) \tan \delta_b + c_b B$$

Stabilité vis à vis du renversement:

$$F_{SR} = \frac{\sum \text{moments stabilisants}}{\sum \text{moments renversants}} = \frac{M_s}{M_r}$$

Avec :

$$M_s = W_t \cdot a'$$

$$M_r = P_H \cdot y - P_V \cdot f + U_1 \cdot d' + U_2 \cdot e'$$

$$F_{SR} = \frac{W_t \cdot a}{(P_H \cdot y - P_V \cdot f) + (U_1 \cdot d + U_2 \cdot e)} \geq 1.5$$

où c_b , δ_b définissent les caractéristiques d'adhérence et de frottement au contact du terrain de fondation et de la semelle.

W_t inclut le poids du mur et celui du sol situé au dessus de la semelle (mur cantilever).

P_A : pression active sur le mur.

P_H , P_V : composantes horizontale et verticale de P_A .

U_1 , U_2 : pressions d'eau dues à la présence de la nappe phréatique.

a' , f , d' , e' , y : paramètres explicités sur la fig. 5.6.

5.4.3 Poinçonnement [45-50]

On s'intéresse ici à la résistance du sol de fondation aux efforts transmis par l'ouvrage de soutènement. Cette résistance fait appel à la notion de capacité portante définie comme étant la charge (ou pression) transmise au sol par la fondation sans risque de rupture ou de tassements excessifs. Deux sortes de fondations sont à distinguer:

- Fondations superficielles
- Fondations profondes

La méthode conventionnelle d'étude des fondations est basée sur le principe de la force portante ou taux de travail admissible du sol. Pour évaluer la force portante, on doit toujours utiliser les critères suivants:

- 1- Coefficient de sécurité adéquat par rapport à la rupture
- 2- Marge suffisante contre les tassements excessifs.

Dans la présente étude, seules les fondations superficielles seront prises en compte.

Il importe de souligner que dans le cas du mur de soutènement, la longueur de la semelle est nettement supérieure à sa largeur, ce type de semelle est désigné sous le nom de **semelles filantes**. L'étude se limitera alors au cas de semelles vérifiant la condition suivante:

$$\frac{L}{B} > 5 \text{ avec } D \leq B.$$

où:

L , B définissent respectivement la longueur et la largeur de la semelle
 D : profondeur de la semelle

Les théories relatives à la force portante ont été développées sur la base du calcul à la rupture (ou surface de glissement). S'agissant de semelles filantes, la rupture sous le sol de fondation est composée de trois zones, l'une sous forme de cône, située directement sous la fondation, où la semelle provoque le soulèvement des zones l'entourant. Lorsqu'il y a poinçonnement, ces dernières à leur tour se propagent extérieurement pour former une rupture suivant une spirale logarithmique.

Il convient de noter que, plusieurs théories se sont succédées ces dernières années en vue du calcul de la capacité portante. Néanmoins, seules trois d'entre elles sont très utilisées:

- Théorie de *Terzaghi*
- Théorie de *Meyerhof*
- Théorie de *Hansen*

La capacité portante q_{ult} , dans le cas le plus général, d'une fondation à base oblique, établie sur un sol en pente, et soumise à une charge inclinée et excentrée peut donc s'exprimer par la formule suivante [35,48]:

$$q_{ult} = \frac{Q}{B' L'} = c N_c S_c i_c t_c g_c + q N_q S_q i_q t_q g_q + 0.5 \gamma B' N_\gamma S_\gamma i_\gamma t_\gamma g_\gamma \quad (5.10)$$

Avec:

$$\begin{aligned}
 N_q &= e^{\pi \operatorname{tg} \phi} \operatorname{tg}^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right) \\
 N_c &= (N_q - 1) \operatorname{cotg} \phi \\
 N_\gamma &= 1.5 (N_q - 1) \operatorname{tg} \phi
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

N_γ , N_q , N_c représentent des facteurs addimensionnels de la capacité portante, ils dépendent de l'angle de frottement du sol.

q : surcharge effective $q = \gamma D \cos \beta$.

γ : poids volumique du sol si celui ci est hors d'eau ou poids volumique déjaugé si le sol est sous l'eau.

D : profondeur de la fondation.

B' : largeur fictive de la semelle.

L' : Longueur fictive de la semelle.

S : facteur de forme.

i : facteur d'inclinaison des charges.

t : facteur d'inclinaison de la base de fondation.

g : facteur d'inclinaison du terrain de fondation.

Les valeurs de ces facteurs sont données comme suit [35]:

Facteurs de forme:

$$\begin{aligned}
 S_\gamma &= 1 - 0.4 \frac{B}{L} \\
 S_q &= 1 + \frac{B}{L} \operatorname{tg} \phi \\
 S_c &= 1 + \frac{B}{L} \frac{N_q}{N_c}
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

Facteurs d'inclinaison des charges:

$$\begin{aligned}
 i_\gamma &= \left(1 - \frac{H}{V + B' L' c \operatorname{cotg} \phi} \right)^{m+1} \\
 i_q &= i_\gamma^{\frac{m}{m+1}} \\
 i_c &= i_q - \frac{1 - i_q}{N_c \operatorname{tg} \phi}
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

$$\text{où : } m = \frac{2 + \frac{B}{L}}{1 + \frac{B}{L}}$$

Facteurs d'inclinaison de la base de fondation

$$t_{\gamma} - t_q = (1 - \alpha \operatorname{tg} \phi)^2$$
$$t_c = t_q - \frac{1 - t_q}{N_c \operatorname{tg} \phi}$$
(5.14)

où $\alpha < \pi / 4$ et, est exprimé en radians.

Facteurs d'inclinaison du terrain de fondation.

$$g_{\gamma} - g_q = (1 - \operatorname{tg} \beta)^2$$
$$g_c = g_q - \frac{1 - g_q}{N_c \operatorname{tg} \phi}$$
(5.15)

où : $\beta < \pi / 4$, $\beta < \phi$.

Les différents paramètres utilisées sont définis comme suit:

L' : longueur fictive de la base ($L' = L - 2 e_l$).

B' : largeur fictive de la base ($B' = B - 2 e_b$).

e_l, e_b : excentricités de la charge dans les deux directions L et B

D : profondeur de la semelle.

c : cohésion du sol de fondation.

ϕ : angle de frottement interne du sol de fondation.

H, V : forces respectives horizontale et verticale revenant à la base.

α, β : inclinaisons respectives de la base de fondation et du talus par rapport à l'horizontale.

Limitations:

$$H \leq V \operatorname{tg} \phi + c. A' \quad (A' = L'. B')$$

Un mur de soutènement doit avoir des dimensions telles qu'il présente un coefficient de sécurité suffisant par rapport à la rupture du terrain de fondation . Un projet est correct lorsque la résistance au cisaillement de tous les terrains de fondation est suffisante pour supporter, avec un coefficient de sécurité convenable, les contraintes de cisaillement dues à la présence du mur et du remblai. D'ailleurs, le coefficient de sécurité vis à vis de la rupture par poinçonnement se traduit comme suit [33]:

$$F_{sp} = \frac{\text{Capacité portante du sol}}{\text{taux de travail admissible}} > F_p \quad (5.16)$$

où F_p désigne le coefficient minimal de sécurité vis à vis de la rupture par poinçonnement.

Il est égal à $\left\{ \begin{array}{l} 2.0 \text{ pour les remblais pulvérulents} \\ 3.0 \text{ pour les remblais cohérents} \end{array} \right\}$.

Il est à remarquer que ce facteur ne doit jamais être inférieur à 2.

Le taux de travail admissible est défini comme suit:

Pour les semelles rectangulaires:

$$q_{ad} = \frac{V}{A'} \quad (5.17)$$

Pour les semelles filantes:

$$q_{ad} = \frac{V}{B'} \quad (5.18)$$

où : $A' = L' B' = (L - 2 e_l) \cdot (B - 2 e_b)$

5.4.4 Différents Effets Modifiant la Capacité Portante

5.4.4.1 Effets de l'eau

La position de la nappe phréatique influe d'une manière significative sur la capacité portante du sol de fondation.

En pratique, trois cas peuvent être rencontrés:

- Quand la nappe phréatique se trouve au dessus ou au niveau de la base de la fondation, le poids volumique des terres est pris effectif.

- Si par contre la nappe est inférieure au coin de rupture qui présente une hauteur de valeur $h_c = 0.5 B \operatorname{tg} (45 + \frac{\phi}{2})$, l'effet de l'eau peut être ignoré.

- Si celle ci est à l'intérieur du coin, le poids volumique à prendre est le suivant [49,50]:

$$\gamma_e = \gamma_h \frac{(2h_c - z) z}{h_c^2} + \gamma' \frac{(h_c - z)^2}{h_c^2} \quad (5.19)$$

Avec:

h_c : hauteur du coin de rupture

z : profondeur de la nappe d'eau à partir de la base de la fondation

γ_h : poids volumique humide

γ' : poids volumique déjaugé

5.4.4.2 Effets des Sols Compressibles

Lorsque l'on se trouve en présence de sols très compressible, comme l'argile molle, le sable lâche...etc, il arrive fréquemment que les tassements constatés ne soient plus acceptables, bien avant qu'un état d'équilibre plastique n'ait pu se développer dans le massif. Pour tenir compte de ce phénomène, *Terzaghi* propose de prendre en compte un angle de frottement réduit ϕ_1 et une cohésion réduite c_1 tels que [33]:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \phi_1 &= \frac{2}{3} \operatorname{tg} \phi \\ c_1 &= \frac{2}{3} c \end{aligned} \tag{5.20}$$

où ϕ_1 et c_1 représentent respectivement la cohésion et l'angle de frottement modifiés.

5.4.4.3 Effets de la Stratification du Sol

En réalité, le sol est stratifié, il est même rare de trouver un sol homogène. Si les propriétés du milieu varient de façon aléatoire mais dans un intervalle limite (de l'ordre de 50%), on pourra calculer la force portante en utilisant des valeurs pondérées des caractéristiques géotechniques [36]. Si l'intervalle de variation est plus important, il conviendra d'être plus prudent car il est impossible de donner des règles plus précises et dans ce domaine l'expérience de l'ingénieur jouera un grand rôle.

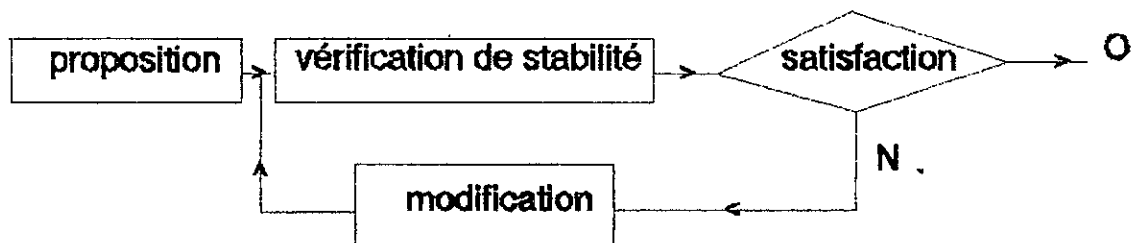
CHAPITRE 6

ETUDE NUMERIQUE

6.1 INTRODUCTION

L'approche conventionnelle de l'aide à la conception des murs de soutènement, et en particulier de leur dimensionnement se limite généralement aux calculs géotechniques et mécaniques de vérification de la stabilité d'une solution dimensionnée préalablement par l'utilisateur du système informatique.

Dans cette vision, ce dernier est considéré plutôt comme un outil de calcul sans apporter d'aide réelle au dimensionnement. L'ingénieur l'utilise dans le cadre d'un processus itératif:



Ainsi, il se propose une première hypothèse de dimensionnement, dont il vérifie la stabilité à l'aide d'un programme informatique. Dans le cas où les résultats sont infructueux, il doit modifier sa proposition initiale et recommencer le processus itérativement jusqu'à satisfaction. Souvent, cette démarche tâtonnante ne permet pas de réellement optimiser les dimensions car elle ne se base pas vraiment sur une démarche rationnelle qui prendrait en compte tous les critères de choix d'une solution de dimensionnement.

Pour cette raison, nous proposons une démarche nouvelle pour l'élaboration d'un système de Conception Assistée par Ordinateur dont le but est de calculer les dimensions optimales du mur de soutènement sur la base de différents critères tels que la stabilité vis à vis du glissement, du renversement, du poinçonnement et le poids minimal.

Ainsi, le présent chapitre se penchera sur l'étude du dimensionnement d'un mur de soutènement, en le considérant comme un problème d'optimisation multicritère. Pour ce faire, si l'on considère la solution idéale à ce problème, elle devra minimiser le poids du mur P , maximiser le facteur de sécurité au glissement F_{SG} , maximiser le facteur de sécurité au renversement F_{SR} , maximiser le facteur de sécurité au poinçonnement F_{SP} , et minimiser d'autres critères d'ordre géométrique qui apparaissent comme importants tout au long du processus d'optimisation.

6.2 MODELISATION DU MUR DE SOUTÈNEMENT

Dans la modélisation du mur de soutènement, nous avons considéré un certain nombre de points qui puissent suffisamment bien décrire la configuration géométrique du mur.

En effet, le mur de soutènement en béton armé, en forme de té renversé est modélisé grâce à un ensemble de points distincts A, B, C et D dont la position de chacun est définie par deux coordonnées (x_p, x_{p+1}) suivant un repère orthonormé, ce qui permet de réduire l'ensemble des dimensions à un vecteur de huit variables de décision $\bar{x}_i, i = 1, \dots, 8$ (fig. 6.1a).

De la même manière, la modélisation du mur poids réduit l'ensemble des dimensions à un vecteur de dix variables de décision $\bar{x}_i, i = 1, \dots, 10$ (fig. 6.1b).

Remarquons qu'il est souhaitable de placer les axes du repère orthonormé, pour les deux types du mur, conformément à la fig. 6.1 pour des raisons de simplification.

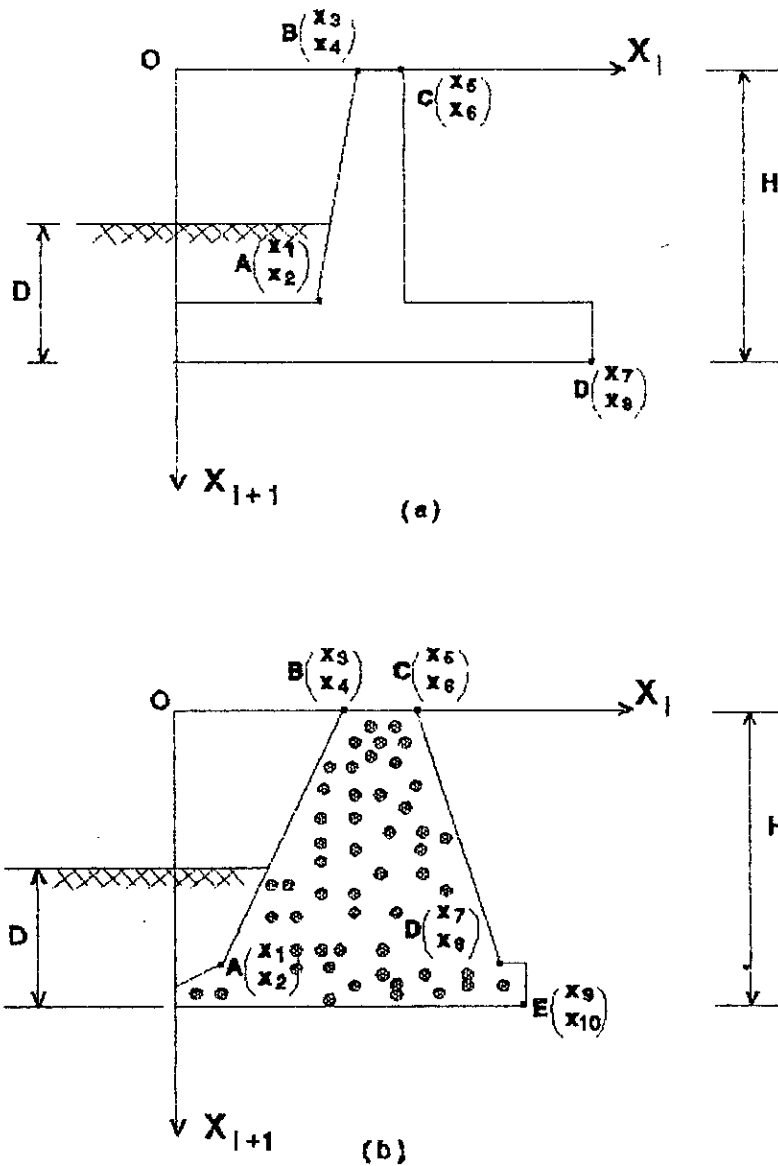


Fig. 6.1 Modélisation des murs de soutènement
 (a) Mur en béton armé cantilever (b) Mur poids.

La méthode d'optimisation multicritère que nous avons choisi de retenir est celle basée sur l'approche Min-Max, elle appartient à la catégorie des méthodes d'exploration destinées à traiter toutes sortes de problèmes de programmation non linéaire. Pour ce faire, l'utilisation de la méthode de *Monte Carlo* s'impose.

En s'appuyant sur le paragraphe 4.3.1, nous pouvons dire que l'usage de cette méthode permet de générer un ensemble de valeurs aléatoires des

variables de décision moyennant l'équation suivante:

$$x_i = x_i^a + \delta_i (x_i^b - x_i^a) \quad i = 1, \dots, n$$

Cette expression fait intervenir les variables x_i^a et x_i^b qui caractérisent respectivement les limites inférieures et supérieures estimées pour x_i , ceci nous amène alors à évaluer ces variables pour pouvoir générer un ensemble de solutions admissibles, à partir duquel il serait possible d'orienter l'investigation vers la mise en évidence d'un ensemble de Pareto.

6.2.1 Formulation Mathématique des Bornes Supérieures et Inférieures des Variables de Décision

La détermination de ces limites pour les variables de décision constitue un élément fondamental du programme d'optimisation. Elle conditionne en grande partie la qualité du résultat obtenu. Il en résulte, face à une telle situation, la nécessité de bien définir x_i^a et x_i^b . Nous avons choisi pour cela de faire usage des règles relatives au dimensionnement usuel du mur en béton armé et du mur poids, présentées au chapitre 5, pour servir de base à l'évaluation de ces limites.

Partant de cette hypothèse et en se référant à la fig. 5.3, nous déduisons les bornes inférieures et supérieures des domaines des variables de décision pour un mur en BA, en forme de té renversé (fig. 6.1a) comme suit:

$$\begin{aligned}
x_1^a &= d_{\min} = H/10 & ; & & x_1^b &= d_{\max} = H/8 \\
x_2^a &= H - t_{\max} = 9H/10 & ; & & x_2^b &= H - t_{\min} = 11H/12 \\
x_3^a &= d_{\min} + t_{\min} - e_{\max} = 11H/60 - e_{\max} & ; & & x_3^b &= d_{\max} + t_{\max} - e_{\min} = 9H/40 - e_{\min} \\
x_4^a &= 0 & ; & & x_4^b &= 0 \\
x_5^a &= d_{\min} + t_{\min} = 11H/60 & ; & & x_5^b &= d_{\max} + t_{\max} = 9H/40 \\
x_6^a &= 0 & ; & & x_6^b &= 0 \\
x_7^a &= B_{\min} = 2H/5 & ; & & x_7^b &= B_{\max} = 2H/3 \\
x_8^a &= H & ; & & x_8^b &= H
\end{aligned}
\tag{6.1}$$

où:

$$\begin{aligned}
e_{\max} &= \text{Max} (0.2, H/24) \quad (\text{mètre}) \\
e_{\min} &= 0.2 \quad (\text{mètre})
\end{aligned}$$

Nota: Dans le cas où il n'existe pas des solutions de Pareto, nous pouvons remplacer $e_{\max} = \text{Max} (0.2, H/24)$ par $e_{\max} = \text{Max} (0.2, H/12)$.

De la même manière, en se référant à la figure 5.2, nous déterminons celles relatives au mur poids (fig. 6.1.b) en posant:

$$\begin{aligned}
x_1^a &= d_{\min} = H/8 & ; & & x_1^b &= d_{\max} = H/6 \\
x_2^a &= H - t_{\max} = 5H/6 & ; & & x_2^b &= H - t_{\min} = 7H/8 \\
x_3^a &= x_1^a + 2\% x_2^a & ; & & x_3^b &= x_1^b + m x_2^b \quad (m > 2\%) \\
x_4^a &= 0 & ; & & x_4^b &= 0 \\
x_5^a &= x_3^a + e_{\min} = x_3^a + 0.3 & ; & & x_5^b &= x_3^b + e_{\max} = x_3^b + \max (H/12, 0.3) \\
x_6^a &= 0 & ; & & x_6^b &= 0 \\
x_7^a &= B_{\min} - a_{\max} = H/2 - 0.15 & ; & & x_7^b &= B_{\max} - a_{\min} = 2H/3 - 0.1 \\
x_8^a &= x_2^a & ; & & x_8^b &= x_2^b \\
x_9^a &= B_{\min} = H/2 & ; & & x_9^b &= B_{\max} = 2H/3 \\
x_{10}^a &= H & ; & & x_{10}^b &= H
\end{aligned}$$

(6.2)

H représente la hauteur du mur de soutènement.

Il semble utile de souligner que la détermination des variables de décision permet la résolution du problème d'O.M.C. et par la suite l'évaluation des dimensions des différents éléments du mur (épaisseur du mur, largeur de la base, largeur du talon,...). Cependant, la pratique a montré que ces dimensions peuvent souvent être aberrantes et ne présentent aucune signification réelle (cas des valeurs négatives), étant donné que la génération d'un ensemble de solutions admissibles est inévitablement empreinte d'une grande part d'arbitraire. Pour cette raison, nous sommes amenés à introduire obligatoirement des contraintes restrictives d'ordre géométrique, étroitement liées aux intervalles de dimensionnement usuel.

Par ailleurs, la modélisation du mur de soutènement nécessite la formulation mathématique des différentes fonctions critères à considérer dans le processus d'optimisation multicritère. Elles doivent caractériser deux situations conflictuelles: la minimisation du poids de la structure de soutènement, et la maximisation de la stabilité.

6.2.2 Formulation Mathématique des Fonctions Critères

Initialement, nous avons considéré quatre fonctions critères jugées importantes. Le premier critère auquel nous avons attribué le nom de fonctions poids consiste à minimiser le poids de la structure de soutènement. L'expression mathématique de cette fonction est formulée comme suit:

a) Pour le mur de soutènement cantilever en forme de té renversé (mur profilé) (fig. 6.1a):

$$f_1(\bar{x}) = \left(\frac{x_2}{2} (2x_5 - x_3 - x_1) + x_7 (x_8 - x_2) \right) \gamma_b \quad (6.3)$$

b) Pour le mur poids (fig. 6.1b):

$$f_1(\bar{x}) = \left(x_1 (x_{10} - x_2) \frac{(r+1)}{r} + x_2 (x_5 - x_3 + x_7 - x_1) + 2 (x_{10} - x_8) (x_9 - x_1) \right) \frac{\gamma_b}{2} \quad (6.4)$$

où:

r peut prendre une valeur quelconque de l'intervalle $[1, 2]$.

γ_b représente la masse volumique du béton armé.

x_i désigne la i ème composante du vecteur des variables de décision.

Le second critère caractérise la maximisation de la stabilité au glissement, l'expression de sa fonction est intimement liée à celle du facteur de sécurité au glissement. Relativement au paragraphe 5.4.2 (fig. 5.6), nous pouvons écrire:

$$f_2(\bar{x}) = F_{SG} = \frac{S + P_p}{P_h + U_1} \quad (6.5)$$

avec:

$$S = (W_t + P_v - U_2) \tan \delta_b + c_b B$$

où:

P_p représente la butée

w_t englobe le poids de la structure de soutènement, celui du remblai situé sur la semelle arrière (talon), et la résultante des surcharges sur le terre plein. Pratiquement, il pourra suffire de prendre en compte une part seulement des charges au droit de la semelle: 70 à 80% par exemple.

P_h, P_v représentent respectivement la composante horizontale et verticale (que l'on néglige la plupart du temps) de la poussée active.

U_1, U_2 représentent respectivement les pressions d'eau dues à la présence de la nappe phréatique.

c_b, δ_b sont les caractéristiques d'adhérence et de frottement au contact du terrain de fondation et de la semelle du mur.

Compte tenu de la complexité de l'expression des fonctions critères relatives à la stabilité, pour des murs soumis à différents cas de chargement (charges linéaires, localisées...), présentant un remblai à structure multicouche, en plus de la présence d'une nappe phréatique, nous avons préféré introduire un ensemble d'hypothèses simplificatrices. Pour cela, nous nous limitons au cas d'un mur soumis à un chargement uniformément réparti, avec absence de la nappe phréatique, tout en négligeant l'influence de la cohésion. Il en résulte alors:

a) Pour le mur profilé:

$$S = \left(\left(\frac{x_2}{2} (2x_5 - x_3 - x_1) + x_7 (x_8 - x_2) \right) \gamma_b + (x_7 - x_2) (\gamma_r x_2 + q) \right) \operatorname{tg} \delta_b \quad (6.6)$$

$$P_p = \frac{1}{2} k_p \gamma_r (x_8 - h_a)^2 \quad (6.7)$$

$$P_h = \frac{1}{2} k_a \gamma_r x_8^2 + k_q q x_8 \quad (6.8)$$

b) Pour le mur poids:

$$S = \left[\left(x_1 (x_{10} - x_8) \frac{(r+1)}{r} + x_2 (x_5 - x_3 + x_7 - x_1) + 2 (x_{10} - x_8) (x_9 - x_1) \right) \frac{\gamma_b}{2} + q (x_9 - x_5) + x_8 (2x_9 - x_7 - x_5) \frac{\gamma_r}{2} \right] \operatorname{tg} \delta_b \quad (6.9)$$

$$P_p = \frac{1}{2} k_p \gamma_r (x_{10} - h_a)^2 \quad (6.10)$$

$$P_h = \frac{1}{2} k_a \gamma_r x_{10}^2 + k_q q x_{10} \quad (6.11)$$

où:

γ_r représente le poids volumique du remblai.

q représente la surcharge uniforme.

h_a représente la hauteur apparente du mur de soutènement.

Nota: Pour le mur poids, les coefficients k_a , k_a et k_q sont calculés en fonction des variables de décision vu l'inclinaison du parement intérieur du mur par rapport à la verticale.

De façon similaire, le troisième critère correspond à la maximisation de la stabilité au renversement. L'expression de sa fonction critère est dépendante du facteur de sécurité correspondant:

$$f_3(\vec{x}) = F_{SR} = \frac{\sum M_S}{\sum M_R} \quad (6.12)$$

Les moments sont calculés par rapport à l'axe de rotation localisé au droit de l'arête extérieure de la fondation.

Les expressions des moments stabilisants ($\sum M_S$) et renversants ($\sum M_R$) en fonction des variables de décision sont établis comme suit:

a) Pour le mur profilé:

$$\sum M_S = \gamma_b \left(\frac{x_2}{2} (x_5^2 - x_3^2) + \frac{x_2}{6} (2x_3^2 - x_1^2 - x_3 x_1) + \frac{x_7^2}{2} (x_8 - x_2) \right) + (x_7^2 - x_5^2) (\gamma_r x_2 + q) \quad (6.13)$$

$$\sum M_R = k_a \gamma_r \frac{x_8^3}{6} + k_q q \frac{x_8^2}{2} \quad (6.14)$$

b) Pour le mur poids:

$$\begin{aligned} \sum M_S = & \frac{\gamma_b}{6} [x_1^2 (x_{10} - x_8) \frac{(2r+1)}{r} + x_2 (x_5^2 + x_7^2 - x_1^2 - x_3^2 + x_7 x_5 - x_3 x_1) \\ & + 3(x_9^2 - x_1^2) (x_{10} - x_8)] + (x_9^2 - x_5^2) \frac{q}{2} + \frac{\gamma_r}{6} x_8 (3 x_9^2 - x_7^2 - x_5^2 - x_5 x_7) \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\Sigma M_R = k_a \gamma_r \frac{x_{10}^3}{6} + k_q q \frac{x_{10}^2}{2} \quad (6.16)$$

Enfin, le quatrième critère représente la maximisation de la stabilité vis à vis du poinçonnement, nous exprimons la fonction critère $f_4(\bar{x})$ en utilisant l'équation (5.16) relative au coefficient de sécurité considéré.

Nous aurons alors:

$$f_4(\bar{x}) = F_{SP} = \frac{\text{Capacité portante du sol}}{\text{Taux de travail admissible}} = \frac{q_{ult}}{q_{ad}} \quad (6.17)$$

En respectant les hypothèses simplificatrices citées précédemment, et en substituant les équations (5.11) à (5.15) dans (5.10), on aboutit à:

$$q_{ult} = \left(\gamma_r D \cos\beta N_q \left(1 - \frac{H}{V}\right)^2 + 0.5 \gamma B N_\gamma \left(1 - \frac{H}{V}\right)^3 \right) (1 - \alpha \operatorname{tg}\phi)^2 (1 - \operatorname{tg}\beta)^2 \quad (6.18)$$

où:

N_γ et N_q représentent les facteurs de capacité portante.

D désigne la profondeur de la semelle.

α et β représentent respectivement les inclinaisons de la base de fondation et du talus par rapport à l'horizontale.

H et V désignent respectivement les forces horizontales et verticales.

revenant à la base, elles s'expriment comme suit:

a) Pour le mur en forme de té renversé:

$$H = \frac{1}{2} k_a \gamma_r x_8^2 + k_q q x_8 \quad (6.19)$$

$$V = \left(\frac{x_2}{2} (2x_5 - x_3 - x_1) + x_7 (x_8 - x_2)\right) \gamma_b + (x_7 - x_5) (\gamma_r x_2 + q) \quad (6.20)$$

b) Pour le mur poids:

$$H = \frac{1}{2} k_a \gamma_r x_{10}^2 + k_q q x_{10} \quad (6.21)$$

$$V = \left((x_1 (x_{10} - x_8) \frac{(r+1)}{r}) + x_2 (x_5 - x_3 + x_7 - x_1) + 2 (x_{10} - x_8) (x_9 - x_1) \right) \frac{\gamma_b}{2} + q (x_9 - x_5) + x_8 (2 x_9 - x_7 - x_5) \frac{\gamma_r}{2} \quad \text{tg} \delta_b \quad (6.22)$$

Par ailleurs, le taux de travail admissible est défini par l'équation suivante:

$$q_{ad} = \frac{V}{B'} \quad (6.23)$$

avec

$$B' = B - 2 e$$

B' représente la largeur fictive de la semelle

e représente l'excentricité de la charge dont l'expression peut être écrite comme suit:

$$e = \frac{\sum M_S - \sum M_R}{V} - \frac{B}{2} \quad (6.24)$$

Son expression en fonction des variables de décision s'obtient moyennant les équations (6.13); (6.14); (6.20) pour le mur profilé, et les équations (6.15); (6.16); (6.22) pour le mur poids.

Suite à l'établissement des fonctions critères nécessaires, nous remarquons qu'il s'agit d'un problème d'optimisation multicritère, où le critère de stabilité doit être maximisé contrairement au critère poids de la structure.

Ainsi, par soucis de commodité, la recherche du maximum des fonctions f_i avec $i = 2, 3, 4$ sera ramené au problème de minimisation en utilisant l'équation (2.2) tel que:

$$\max f_i(\bar{x}) = - \min (- f_i(\bar{x})) \quad i = 2, 3, 4$$

6.2.3 Formulation Mathématique des Fonctions Contraintes

Parallèlement à la détermination des fonctions critères, nous sommes amenés à définir ainsi qu'à satisfaire les restrictions imposées par le problème. Ces restrictions appelées contraintes sont destinées d'une part, à imposer une limite inférieure à tous les facteurs de sécurité considérés (contraintes d'ordre mécanique), à limiter les dimensions du mur, conformément aux intervalles de

prédimensionnement proposés par les règlements empiriques afin d'éviter l'obtention de valeurs erronées des dimensions du mur (contraintes d'ordre géométrique) et d'autre part à respecter les conditions issues des informations générales concernant la topographie du site, y compris l'implantation des ouvrages existants (contraintes d'ordre topographique).

Avant d'entamer la formulation mathématique des contraintes, il semble utile de rappeler que la résolution du problème d'O.M.C exige que toutes les contraintes soient présentées comme suit (cf. § 2.2):

$$g_j(\bar{x}) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

où m désigne le nombre de fonctions contraintes considérées.

Conformément à cette représentation, nous avons exprimé à travers les contraintes d'ordre mécanique, trois restrictions sur les facteurs de sécurité F_{SG} , F_{SR} et F_{SP} visant à spécifier la valeur minimale admissible pour chacun d'entre eux. Nous remarquons que pour chaque contrainte imposée sur un facteur de sécurité, l'expression mathématique de $g_j(\bar{x})$ avec $j = 1, 2, 3$ est composée essentiellement de la différence de deux termes dont l'expression du premier est équivalente à celle de la fonction critère relative au facteur de sécurité correspondant, le second terme est égal au coefficient de sécurité minimal adopté par le concepteur. Nous aurons alors:

a) Contrainte relative à la stabilité au glissement:

$$g_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x}) - (F_{SG})_{\min} \quad (6.25)$$

avec:

$$(F_{SG})_{\min} = \left\{ \begin{array}{ll} 1.5 & \text{si } P_p = 0 \\ 2 & \text{si } P_p \neq 0 \end{array} \right\}$$

b) Contrainte relative à la stabilité au renversement:

$$g_2(\bar{x}) = f_3(\bar{x}) - (F_{SR})_{\min} \quad (6.26)$$

avec:

$$(F_{SR})_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 1.5 \text{ pour les remblais pulvérulents} \\ 2.0 \text{ pour les remblais cohesifs} \end{array} \right\}$$

c) Contrainte relative à la résistance au poinçonnement:

$$g_3(\bar{x}) = f_4(\bar{x}) - (F_{SP})_{\min} \quad (6.27)$$

avec:

$$(F_{SP})_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 2.0 \text{ pour les sols pulvérulents} \\ 3.0 \text{ pour les sols cohésifs} \end{array} \right\}$$

Remarquons que la satisfaction de ces trois contraintes permet la vérification des 3 inégalités relatives à la stabilité de la semelle qui stipulent que:

- 1- L'angle α que fait la résultante des forces R (fig. 5.6) avec la normale au plan de contact de la semelle avec le sol doit être suffisamment petit pour que la semelle ne glisse pas sous l'influence de la composante horizontale de R , soit $\alpha < \phi$.
- 2- Le point d'application de la résultante R (fig. 5.6) doit être situé dans le tiers central de la semelle.
- 3- La contrainte maximale sous la semelle, doit pouvoir être équilibrée par le massif sous jacent.

Par ailleurs, d'autres contraintes d'ordre géométrique existent. celles là peuvent être établies en respectant le prédimensionnement usuel des murs en BA introduit dans le chapitre 5. Ainsi, en se référant aux figures 5.2 et 5.3, nous pouvons écrire:

a) Pour le mur profilé:

$$\begin{aligned} g_4(\bar{x}) &= x_5 - x_3 - 0.2 \quad (m) \\ g_5(\bar{x}) &= x_5 - x_1 - x_9/12 \\ g_6(\bar{x}) &= x_1 - x_5 + x_9/10 \\ g_7(\bar{x}) &= x_3 - x_1 - 0.02 x_2 \\ g_8(\bar{x}) &= 11/12 x_8 - x_2 \\ g_9(\bar{x}) &= x_2 - 9/10 x_8 \\ g_{10}(\bar{x}) &= D - x_8 + x_2 \end{aligned} \quad (6.28)$$

où:

La contrainte $g_4(\bar{x})$ impose une épaisseur minimale sur le sommet du mur. Les contraintes $g_5(\bar{x})$ et $g_6(\bar{x})$ satisfont l'intervalle de prédimensionnement proposé pour l'épaisseur t de la base du mur, tel que: $t \in [H/12 ; H/10]$.

La contrainte $g_7(\bar{x})$ satisfait la condition suivante:

$$tg\alpha = \left(\frac{x_3 - x_1}{x_2} \right) \geq 2\%$$

Les contraintes $g_8(\bar{x})$ et $g_9(\bar{x})$ sont relatives à l'intervalle de prédimensionnement proposé pour l'épaisseur e_f de la semelle telle que: $e_f = t \in [H/12 ; H/10]$.

La contrainte $g_{10}(\bar{x})$ implique que l'épaisseur de la semelle ne doit pas dépasser sa profondeur D d'enfouissement dans le sol de fondation.

b) Pour le mur poids:

$$\begin{aligned} g_4(\bar{x}) &= x_5 - x_3 - 0.3 \quad (m) \\ g_5(\bar{x}) &= x_3 - x_5 + x_{10}/12 \\ g_6(\bar{x}) &= x_9 - x_7 - 0.1 \\ g_7(\bar{x}) &= x_7 - x_9 + 0.15 \\ g_8(\bar{x}) &= x_{10} - x_2 - x_{10}/8 \\ g_9(\bar{x}) &= x_2 - x_{10} + x_{10}/6 \\ g_{10}(\bar{x}) &= x_7 - x_5 \\ g_{11}(\bar{x}) &= x_3 - x_1 - 0.02 x_2 \\ g_{12}(\bar{x}) &= D - x_{10} + x_8 \end{aligned} \quad (6.29)$$

où:

Les contraintes $g_4(\bar{x})$ et $g_5(\bar{x})$ imposent une épaisseur minimale et maximale sur le sommet du mur.

Les contraintes $g_6(\bar{x})$ et $g_7(\bar{x})$ imposent des valeurs limites pour la valeur a (fig. 5.2) selon l'intervalle de prédimensionnement proposé dans [33].

Les contraintes $g_8(\bar{x})$ et $g_9(\bar{x})$ sont relatives à l'intervalle de prédimensionnement proposé pour l'épaisseur e_f de la semelle telle que: $e_f = t \in [H/8 ; H/6]$.

La contrainte $g_{10}(\bar{x})$ assure que le mur présente un fruit amont.

La contrainte $g_{11}(\bar{x})$ satisfait la condition suivante:

$$tg\alpha = \left(\frac{x_3 - x_1}{x_2} \right) \geq 2\%$$

La contrainte $g_{12}(\bar{x})$ implique que l'épaisseur de la semelle ne doit pas dépasser

sa profondeur D d'enfouissement dans le sol de fondation.

Enfin, il semble utile de souligner que, lors du processus d'optimisation, le concepteur peut apporter certaines améliorations au programme de résolution, sous forme d'ajouts pouvant être aussi bien des contraintes que des critères, visant ainsi à fournir la solution la plus économique.

6.3 OUTIL INFORMATIQUE

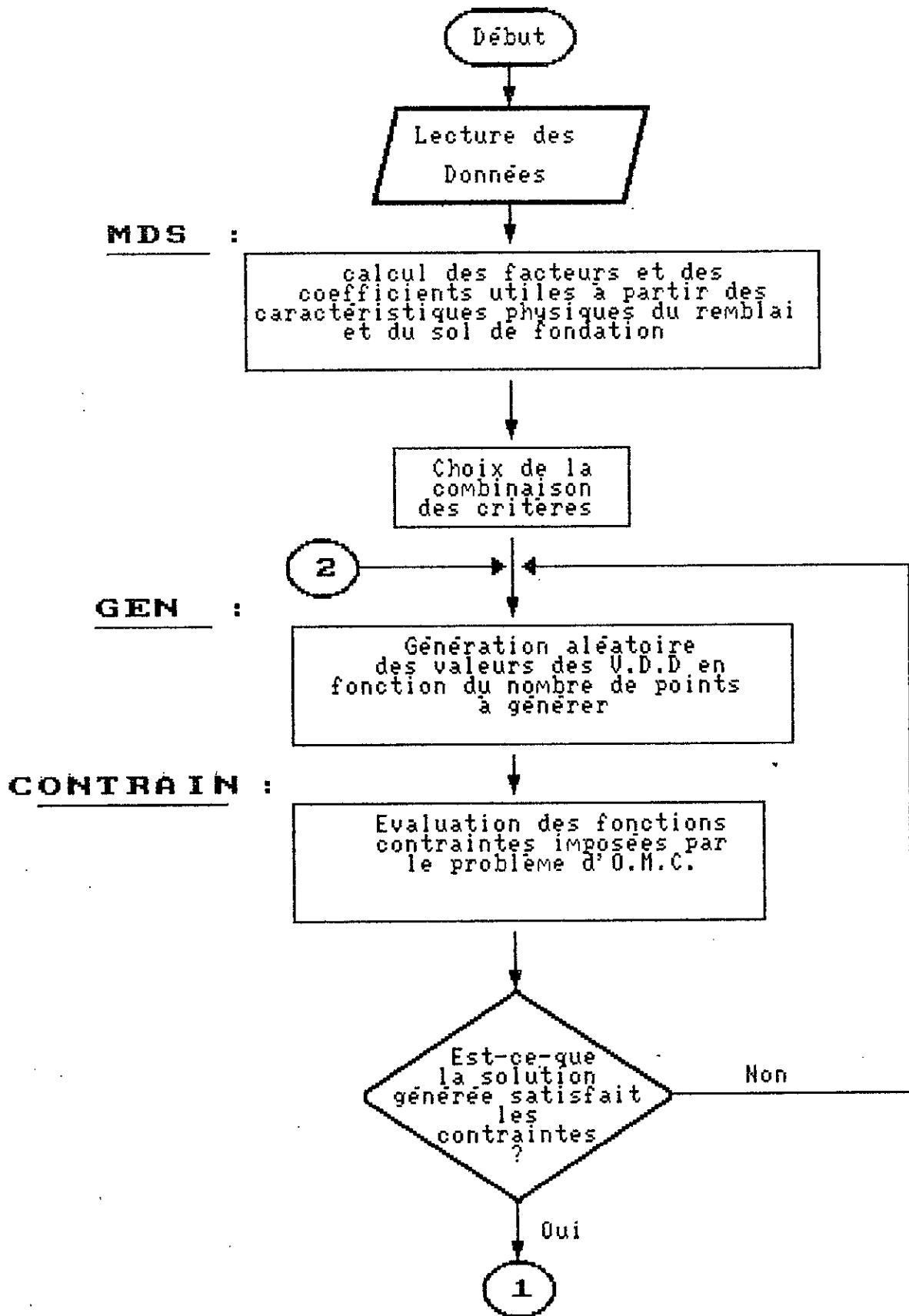
6.3.1 Objectif du Programme d'Optimisation

Le programme informatique que nous avons appelé OPTIM, est un outil d'aide au dimensionnement des murs de soutènement en béton armé (en forme de té renversé) et des murs poids. Il est basé sur l'optimisation des critères de poids et de stabilité externe du mur considéré.

L'objectif du programme est tout d'abord de trouver les solutions de Pareto à partir d'une génération aléatoire des valeurs des variables de décision (V.D.D) par la méthode de Monte Carlo. Chaque solution ainsi générée doit satisfaire toutes les contraintes imposées par le problème d'O.M.C. pour former l'ensemble des solutions admissibles. Grâce à une exploration de cet ensemble, les solutions optimums de Pareto sont ensuite recherchées. De surcroît, pendant cette même recherche, le vecteur idéal \vec{f}^p est aussi déterminé, il comprend le minimum des valeurs de chaque fonction critère pour l'ensemble de Pareto. Enfin, dans un dernier temps, le programme déduit la solution Min-Max suite à l'examen de l'ensemble des solutions Pareto.

6.3.2 Structure du Programme

Le programme conçu est constitué d'un programme principal et de sept sous-routines: GEN, MDS, CONTRAIN, CRITER, PARETO, INCREM, MINMAX, DIMENS. L'organigramme suivant montre la structure générale du programme et fait apparaître les étapes essentielles du travail:



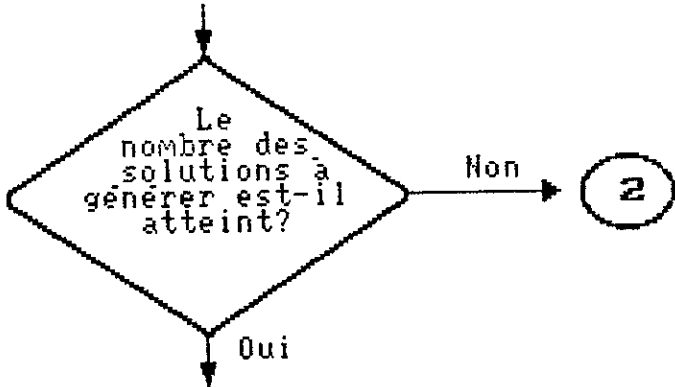
1

OBJEC :

Calcul du vecteur des fonctions
critères et recherche du
vecteur idéal \bar{f}^e

PARETO :

Construction de l'ensemble de
Pareto par comparaison des
solutions entre-elles



INCREM :

Calcul des vecteurs des écarts
relatifs de toutes les solutions
de Pareto

MIN-MAX :

Recherche de la solution
Min-Max

DIMENS :

Calcul des dimensions optimales
du mur de soutènement

Impression
des
résultats

FIN

Ainsi, le programme principal organise les données d'entrée et de sortie, permet de choisir une combinaison de critères, définit les solutions admissibles et recherche le vecteur idéal \vec{f}^0 .

1) La subroutine **MDS** permet le calcul des coefficients et des facteurs nécessaires au calcul des fonctions contraintes et critères à partir des caractéristiques physiques du remblai et du sol de fondation introduits dans le programme.

2) La subroutine **GEN** génère les valeurs aléatoires des variables de décision, en considérant un nombre de points à tirer **IGE**, donné en début du programme.

3) Les subroutines **CONTRAIN** et **CRITER** introduisent le problème d'optimisation en permettant l'évaluation de toutes les fonctions contraintes et critères évoquées dans ce chapitre, pour chaque solution générée admissible.

4) La subroutine **PARETO** recherche l'ensemble des solutions Pareto à partir de l'ensemble des solutions admissibles.

5) La subroutine **INCREM** calcule les écarts relatifs des fonctions critères pour la subroutine **MINMAX**.

6) La subroutine **MINMAX** sélectionne l'optimum Min-Max de l'ensemble des solutions Pareto. Elle compare les écarts relatifs des fonctions critères pour chaque solution de Pareto avec une précision 10^{ICA} où **ICA** est donné par l'utilisateur.

7) La subroutine **DIMENS** calcule les dimensions optimales du mur de soutènement telles que la largeur du talon et du patin, l'épaisseur du sommet et de la base du rideau, l'épaisseur de la semelle et enfin la profondeur de fondation, pour chaque solution de Pareto trouvée.

6.4.2.1 Données Du Programme

Il existe deux fichiers de données, le premier fichier appelé **DON1** introduit celles relatives au problème d'optimisation considéré telles que:

n : nombre de variables de décision.

m : nombre de contraintes d'inégalités.

k : nombre de fonctions critères.

IGE : nombre de points générés.

ICA : précision pour comparer les incréments relatifs.

MET : numéro désignant la méthode Monte Carlo adoptée.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \text{méthode Monte Carlo 1} \\ 2 = \text{méthode Monte Carlo 2} \end{array} \right\}$$

ISTAB : nombre allant de 1 à 9, permettant le choix de la combinaison des critères à optimiser. ex: **ISTAB** = 1 consiste à maximiser la stabilité au glissement et à minimiser le poids de la structure.

Le second fichier de données appelé DON2 comprend les caractéristiques physiques du remblai et du sol de fondation. Il s'agit d'introduire:

HA : hauteur apparente du mur.

Pr , **Pf** : poids volumique du remblai et du sol de fondation.

Phir , **Phif** : angle de frottement interne du remblai et du sol de fondation.

fr , **ft** : adhérence mur-terrain du remblai, et mur-sol de fondation.

beta , **Amda** : inclinaison du talus par rapport à l'horizontale et du parement du mur par rapport à la verticale.

q : valeur de la charge uniforme.

D : profondeur du sol de fondation (quand elle n'est pas prise en tant que critère).

6.3.2.3 Variables de Sortie

Le programme d'optimisation multicritère stocke les résultats dans deux fichiers différents, le premier appelé RES1 affiche:

1) Les valeurs de toutes les composantes du vecteur idéal \bar{f}^0 (minimum de chaque fonction critère prise séparément) ainsi que les vecteurs des variables de décision qui correspondent à chacune d'entre elles.

2) Les solutions optimales de Pareto, c'est-à-dire leur nombre **ja** , le numéro affecté à chaque solution, les valeurs des composantes du vecteur des variables de décision \bar{x}^* , des fonctions critères $\bar{f}(\bar{x}^*)$, des contraintes d'inégalité $\bar{g}(\bar{x}^*)$, et des écarts relatifs de chacune des solutions de Pareto $\bar{z}(\bar{x}^*)$.

3) Les dimensions du mur de soutènement calculées pour chaque solution de Pareto:

D, H, B : désignent respectivement la profondeur du sol de fondation, la hauteur du mur et la largeur de la base de fondation.

Es, Eb : épaisseur du rideau au sommet et à la base.

Lt, Lp : largeur du talon et largeur du patin.

Ef : épaisseur de la semelle.

Par ailleurs, le second fichier appelé RES2 comprend les résultats intermédiaires tels que: le coefficient de pression active et le coefficient de pression dû à la surcharge: AK et QK , et les facteurs adimensionnels de la capacité portante: ANQ et ANG . Ils servent à l'évaluation des fonctions critères et contraintes.

Enfin, il semble utile de souligner que ce programme permet de traiter n'importe quel type de mur de soutènement à condition de trouver la formulation mathématique adéquate des limites des variables de décision, des fonctions critères et contraintes. Le programme OPTIM nous a aidé à prescrire une démarche globale d'optimisation des murs de soutènement, dont l'élaboration est conditionnée par le passage par plusieurs phases. La naissance de chacune des phases est étroitement liée à l'étude des conséquences de la phase précédente.

CHAPITRE 7

DISCUSSION ET INTERPRETATION DES RESULTATS

7.1 INTRODUCTION

L'étude numérique porte essentiellement sur la recherche de la configuration optimale du mur de soutènement cantilever en forme de té renversé de même que celle du mur poids, soumis à l'ensemble de contraintes de type géométrique et mécanique énumérées dans le paragraphe précédent. Cette recherche est conditionnée par le passage par plusieurs étapes dûes principalement à l'ignorance ou à l'incertitude qui enveloppe les conséquences des décisions possibles, ainsi qu'à la sensibilité des valeurs des V.D.D au choix du n-uplet des critères à adopter dans la prise de décision. Ces étapes sont essentiellement illustrées tout au long de ce chapitre par des tableaux, qui le plus souvent, constituent un instrument de dialogue précieux pour le décideur.

Les décisions qu'il s'agit de guider concernent le dimensionnement de ces deux types de murs en se basant sur la considération de deux objectifs conflictuels:

- Minimiser le poids de la structure (afin de minimiser le coût de la construction)
- Maximiser la stabilité externe du mur

Pour cette raison, nous envisageons le cas d'un mur profilé (fig. 6.1.a) qui est probablement le type de mur de soutènement le plus couramment utilisé. Toutes les données nécessaires au calcul sont présentées ci-dessous. Les caractéristiques du sol et celles du remblai sont supposées connues et font partie des données.

Nous avons donc considéré un remblai avec terre plein horizontal, constitué de sable et de gravier tout-venant présentant (fig. 7.1):

- Un poids volumique $\gamma_r = 1.76 \text{ t/m}^2$.
- Un angle de frottement interne $\phi = 34^\circ$.
- L'adhérence sol-mur $f_t = 0.55$.
- Une hauteur apparente du mur $h_a = 4.8 \text{ m}$, sachant que la profondeur de

- la semelle est considérée comme variable, ne devant pas dépasser $D = 1.2 \text{ m}$.
- Le sol de fondation est de même nature que celui du remblai.

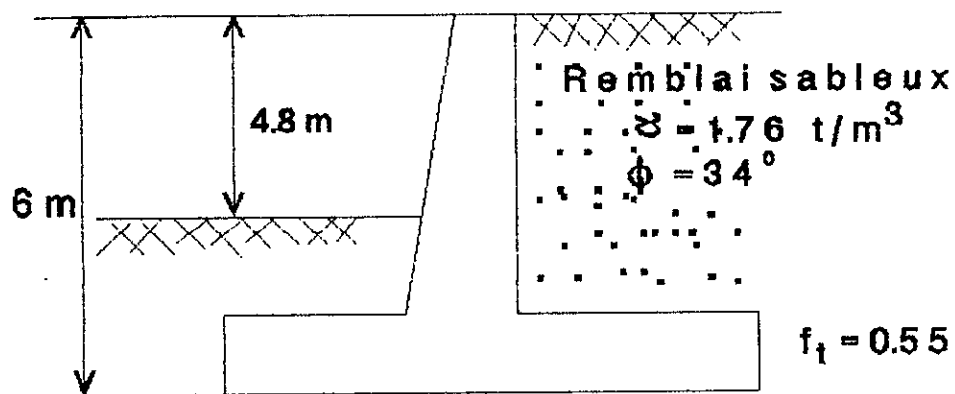


Fig. 7.1

Avant d'entamer l'étude proprement dite, il semble utile de souligner que nous avons traité en première phase d'étude trois optimisations différentes en prenant trois couples de critères indépendants. Ceci nous a permis d'examiner les variations de l'ensemble de Pareto d'un cas à l'autre. Ces trois cas sont:

- La minimisation du poids et la maximisation de la stabilité au glissement. Soit:

$$\text{Minimiser } \left\{ \begin{array}{l} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) = -F_{SG}(\bar{x}) \end{array} \right\}$$

- La minimisation du poids et la maximisation de la stabilité au renversement. Soit:

$$\text{Minimiser } \left\{ \begin{array}{l} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) = -F_{SR}(\bar{x}) \end{array} \right\}$$

- La minimisation du poids et la maximisation de la résistance au poinçonnement. Soit:

$$\text{Minimiser } \left\{ \begin{array}{l} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) = -F_{SP}(\bar{x}) \end{array} \right\}$$

où $f_1(\bar{x})$, $F_{SG}(\bar{x})$, $F_{SR}(\bar{x})$ et $F_{SP}(\bar{x})$ sont définies par les équations (6.1) à (6.24) présentées dans le chapitre précédent.

Ces problèmes sont soumis à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'inéquations illustrées par les formules (6.25) à (6.28) que doivent vérifier les variables de décision.

7.2 PRESENTATION DE L'ENSEMBLE DE PARETO

7.2.1 Influence du Nombre de Points Générés sur la Constitution de l'Ensemble de Pareto

Pour résoudre le problème ainsi formulé, nous utilisons dans un premier temps une procédure de génération aléatoire (Méthode de Monte Carlo) d'un nombre l_a de points vérifiant les contraintes imposées. Le nombre l_a le plus intéressant permettant d'une part, d'affiner l'ensemble de Pareto et d'autre part, de conduire la recherche des solutions optimales pour chaque étape considérée le long de cette étude, n'est pas connu a priori. Pour

cette raison, nous avons débuté avec une valeur initiale $l_a = 100$ et nous l'avons ensuite augmentée jusqu'à atteindre le nombre l_a optimal.

Les figures 7.2, 7.3, 7.4 et 7.5 visent à illustrer l'influence du nombre l_a de générations sur la qualité des résultats. En effet, elles représentent les ensembles des solutions Pareto obtenus pour 100, 300, 600 et 1000 points générés. Qu'il s'agisse de maximiser la stabilité au glissement ou la stabilité au renversement ou la résistance au poinçonnement, nous retrouvons dans chaque figure le facteur de sécurité correspondant en fonction du poids de la structure. La solution idéale est celle qui procure la valeur minimale du poids et la valeur maximale du facteur de sécurité. Par ailleurs, il est utile de faire intervenir dans la représentation des ensembles de Pareto une numérotation de certaines solutions générées permettant d'identifier chaque solution de telle sorte que tout ce qui la différencie des autres (au regard du problème) soit formellement mis en évidence.

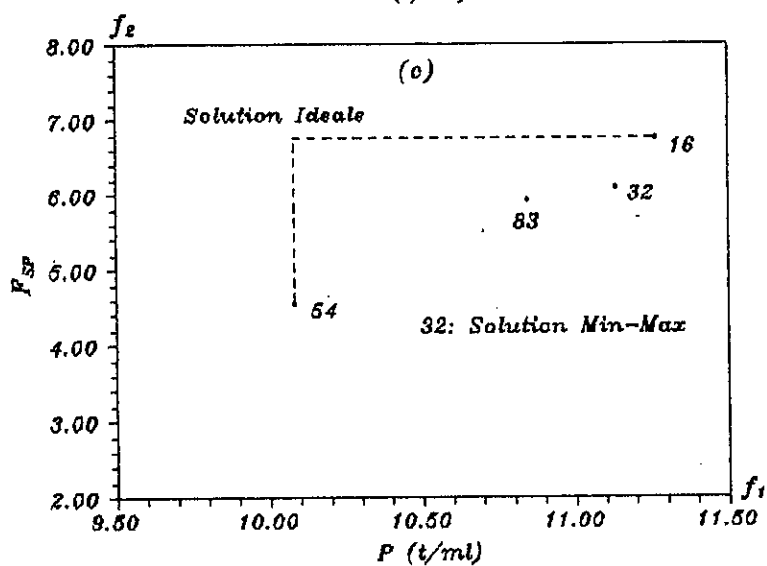
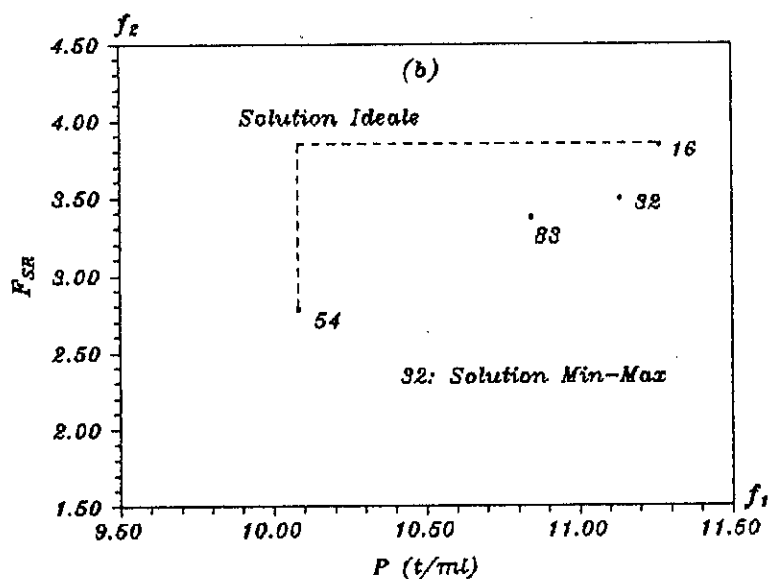
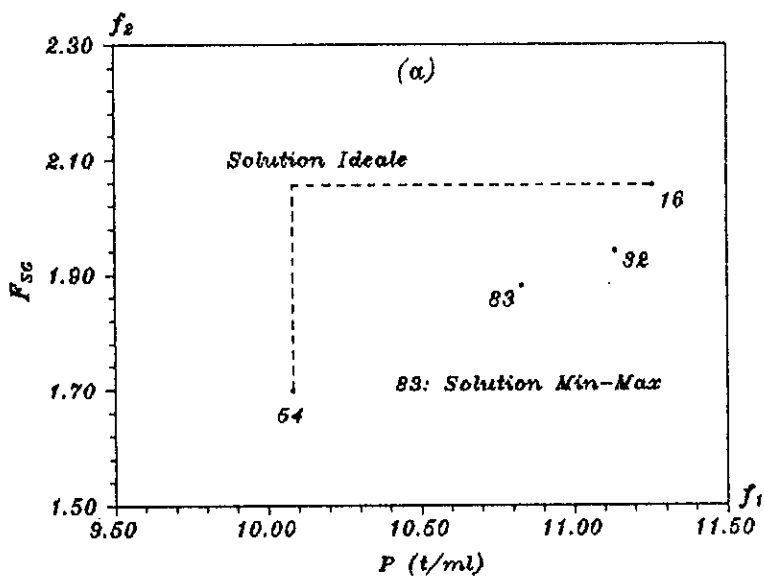


Fig. 7.2 (a),(b),(c) Presentation des ensembles de Pareto pour 100 points generes

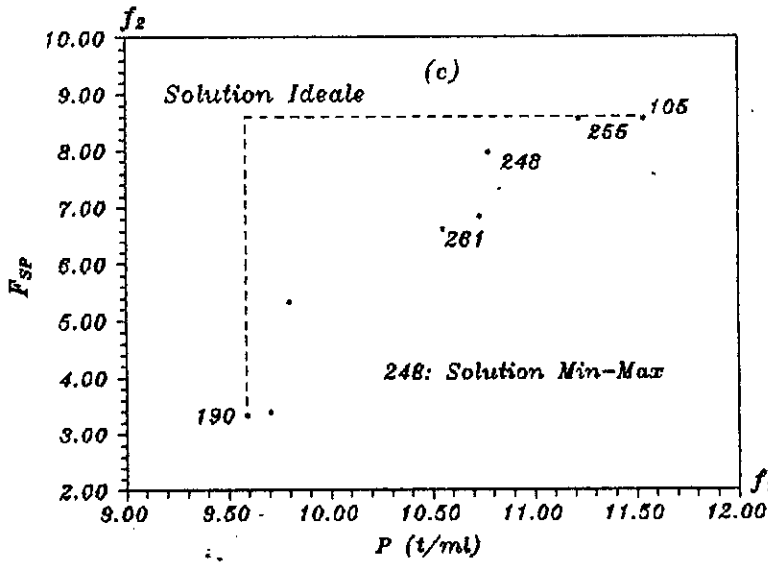
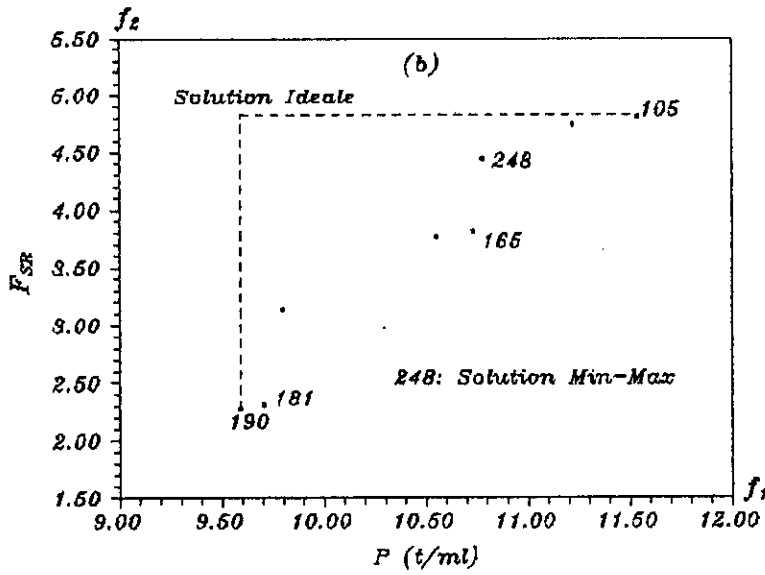
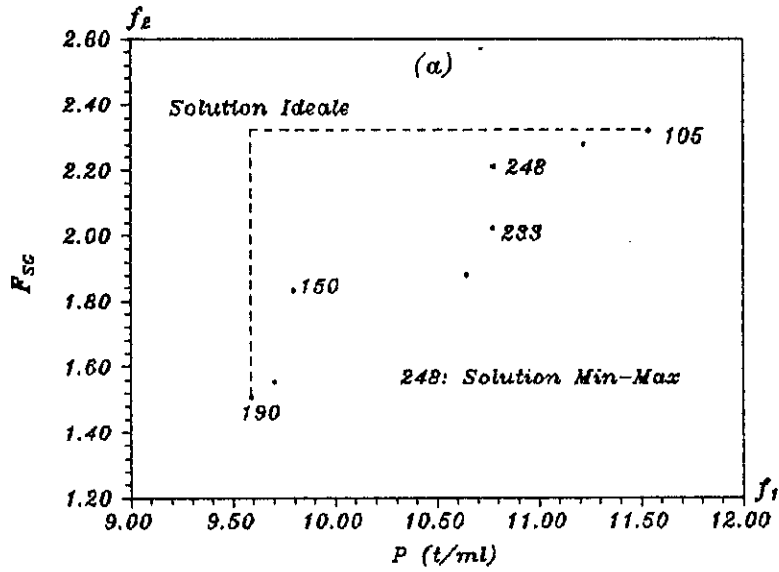


Fig. 7.3 (a),(b),(c) Presentation des ensembles de Pareto pour 300 points generes

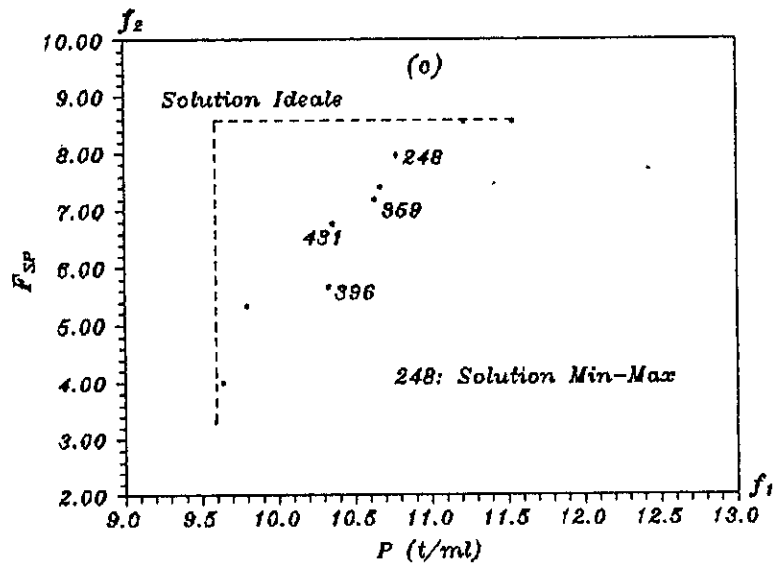
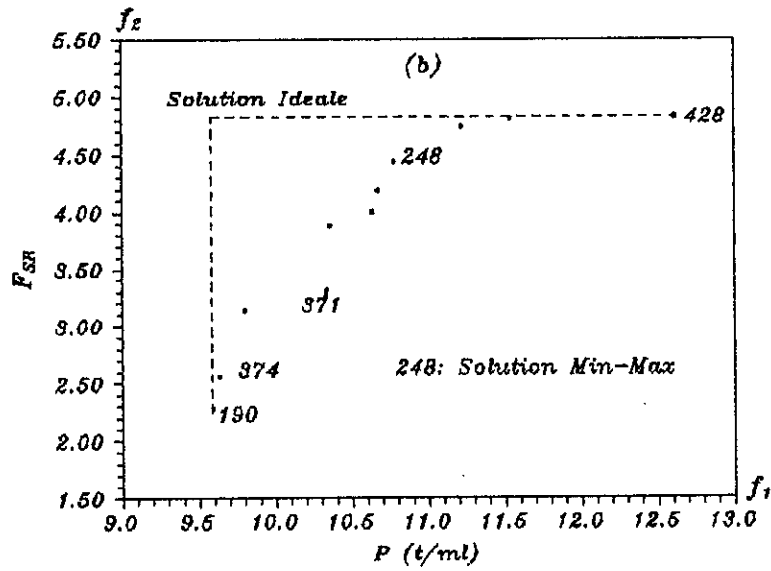
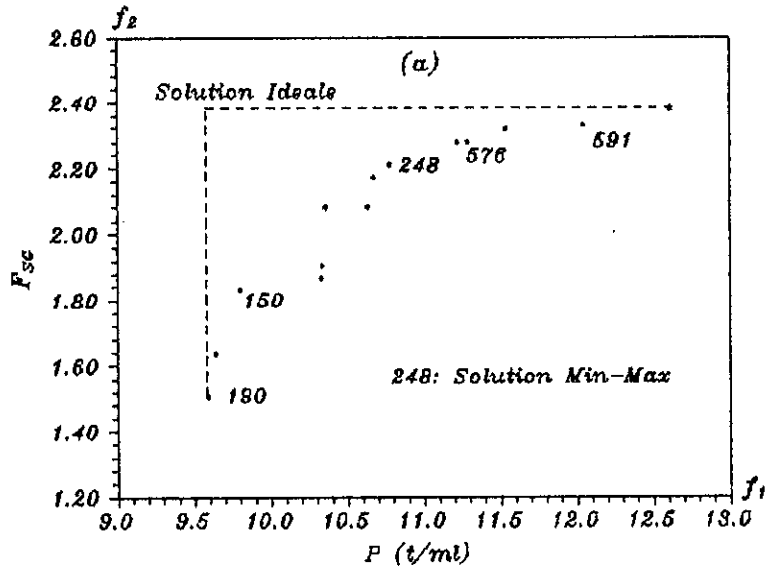


Fig. 7.4 (a),(b),(c) Presentation des ensembles de Pareto pour 600 points générés

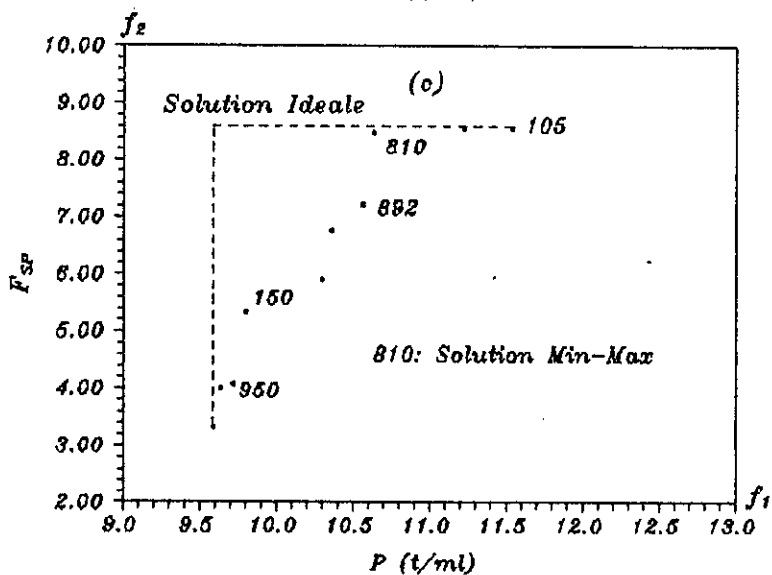
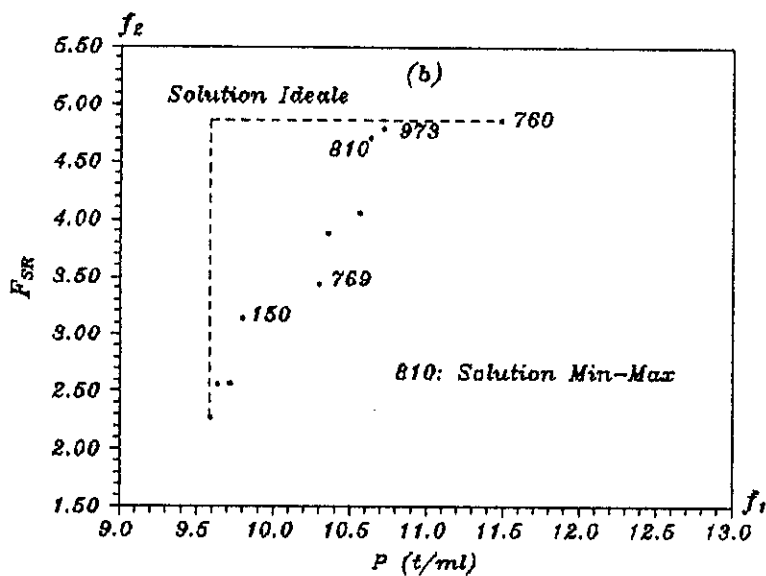
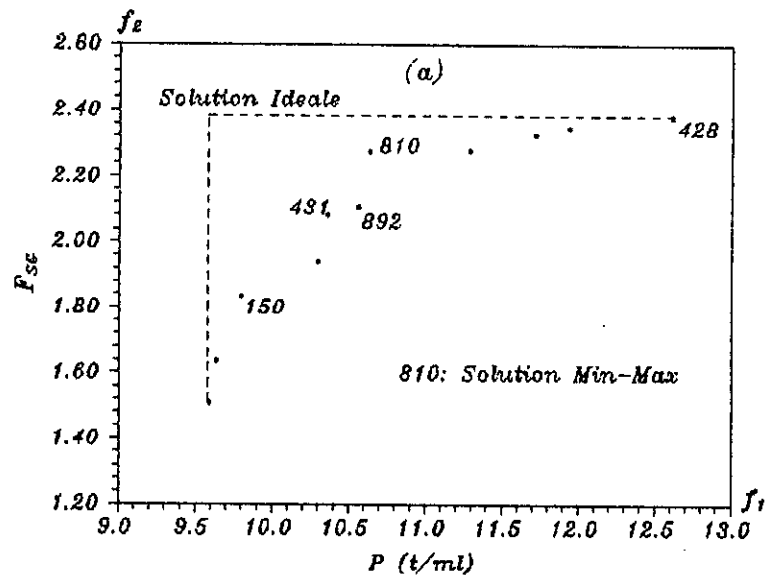


Fig. 7.5 (a),(b),(c) Presentation des ensembles de Pareto pour 1000 points generes

Pour 100 points générés (fig. 7.2), nous retrouvons le même nombre de solutions de Pareto dans les trois cas de maximisation considérés ainsi que les solutions idéale et Min-Max. La solution Min-Max \bar{f}^* à laquelle est attribuée le numéro 83 présente les coordonnées suivantes:

$$P^* = 10.845 \text{ t/ml}$$

$$F_{SG}^* = 1.8791$$

$$F_{SR}^* = 3.3685$$

$$F_{SP}^* = 5.9375$$

De la même manière, la solution idéale f^0 est représentée comme suit:

$$P^0 = 10.082 \text{ t/ml}$$

$$F_{SG}^0 = 2.059$$

$$F_{SR}^0 = 3.820$$

$$F_{SP}^0 = 6.796$$

Comme le montre la figure 7.3, la génération de 300 points nous procure un ensemble de Pareto plus important qu'auparavant dans les trois cas considérés. De plus, dans cet ensemble nous pouvons constater à travers les numéros attribués aux solutions, l'absence complète des solutions de Pareto identifiées dans le cas de 100 points générés. De ce fait, nous pouvons qualifier ces nouvelles solutions de Pareto comme meilleures par rapport aux précédentes qui se trouvent être entièrement dominées. Quant aux solutions Min-Max et idéale, nous constatons qu'elles sont encore une fois communes aux trois cas envisagés et présentent les coordonnées suivantes:

$$P^* = 10.777 \text{ t/ml}$$

$$F_{SG}^* = 2.209$$

$$F_{SR}^* = 4.439$$

$$F_{SP}^* = 7.966$$

$$P^0 = 9.589 \text{ t/ml}$$

$$F_{SG}^0 = 2.318$$

$$F_{SR}^0 = 4.812$$

$$F_{SP}^0 = 8.568$$

Il est clair de constater, sur la base d'une simple comparaison des deux figures 7.2 et 7.3, qu'une diminution du poids accompagnée d'une augmentation sensible des valeurs des coefficients de sécurité est mise en évidence, ce qui nous permet de déduire la bonne évolution de l'ensemble de Pareto dans la recherche de meilleures solutions (minimiser le poids et maximiser la stabilité).

En prenant 600 points générés, l'ensemble de Pareto devient encore plus important (fig. 7.4). L'examen rapide des ensembles de Pareto montre la présence de certaines solutions qui existaient aussi avec la génération de 300 points. Globalement, ici aussi, la solution Min-Max est commune aux trois cas de maximisation de stabilité et se présente comme équivalente à celle obtenue pour $l_a = 300$. Par contre, la solution idéale n'est pas définie de la même manière comme le montre la figure 7.4. En effet, relativement à la maximisation de la stabilité au glissement et au renversement, elle correspond à :

$$P^0 = 9.589 \text{ t/ml}$$

$$F_{SG}^0 = 2.380$$

$$F_{SR}^0 = 4.825$$

alors que dans la maximisation de la résistance au poinçonnement, elle est analogue à celle obtenue pour $l_a = 300$. A savoir :

$$P^0 = 9.589 \text{ t/ml}$$

$$F_{SP}^0 = 8.568$$

Dans la figure 7.5 correspondant à $l_a = 1000$, l'évolution des ensembles de Pareto est très nette. Nous constatons, en effet, la présence de plusieurs nouvelles solutions. De façon similaire aux figures précédentes, la solution Min-Max est la même dans les trois cas d'optimisation envisagés, elle est définie par :

$$P^* = 10.632 \text{ t/ml}$$

$$F_{SG}^* = 2.275$$

$$F_{SR}^* = 4.711$$

$$F_{SP}^* = 8.494$$

Comparée à celle relative à $l_a = 600$, elle est encore meilleure qu'elle. Par contre, la solution idéale diffère d'un cas à l'autre.

Enfin, l'augmentation du nombre de génération au delà de 1000 points (2000, 3000, ...10000) montre que les ensembles de Pareto demeurent pratiquement analogues à ceux correspondants à 1000 points générés. Dans ces conditions, nous avons préféré retenir $l_a = 10000$ comme étant une valeur fixe pour toute la suite de cette étude.

7.2.2 Présentation de l'Optimum Min-Max

Les figures 7.6 et 7.8 ont pour but principal l'illustration graphique du concept de l'optimum Min-Max dans les trois cas d'optimisation considérés. Rappelons que cet optimum compare les écarts relatifs par rapport au minimum atteint par chaque fonction critère séparément. Conformément au paragraphe 2.4, nous désignons les écarts relatifs par:

$$\forall_i \quad z_i(\bar{x}) = \max \{ z_i'(\bar{x}), z_i''(\bar{x}) \} \quad I = \{ 1, 2, \dots, k \}$$

avec

$$z_i'(\bar{x}) = \left| \frac{f_i(\bar{x}) - f_i^0}{f_i^0} \right|$$

et

(7.1)

$$z_i''(\bar{x}) = \left| \frac{f_i(\bar{x}) - f_i^0}{f_i(\bar{x})} \right|$$

Ici, soulignons seulement que, devant prendre en considération dans la première phase d'étude deux critères d'optimisation uniquement, la formule de récurrence (2.16) permettant de donner l'expression de l'optimum Min-Max se réduit alors à une seule étape.

$$v(\bar{x}^*) = \min_{\bar{x} \in X} \max_{i \in I} \{ z_i(\bar{x}) \} \quad (7.2)$$

où:

$$X = \{ \bar{x} \in E^n \mid \bar{g}(\bar{x}) \geq 0, \bar{h}(\bar{x}) = 0 \}$$

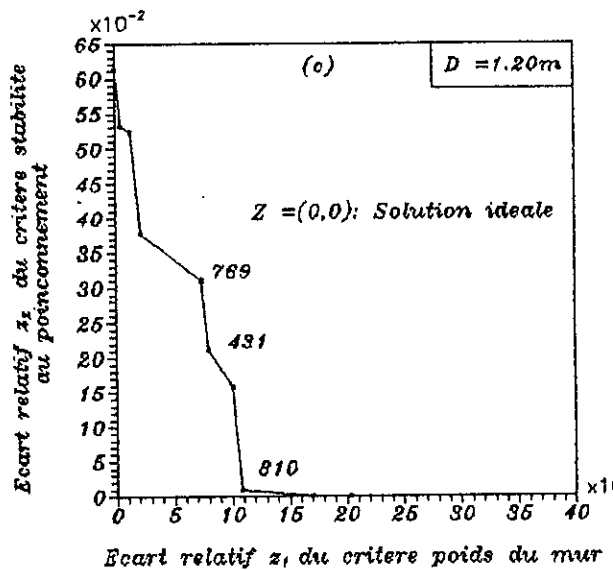
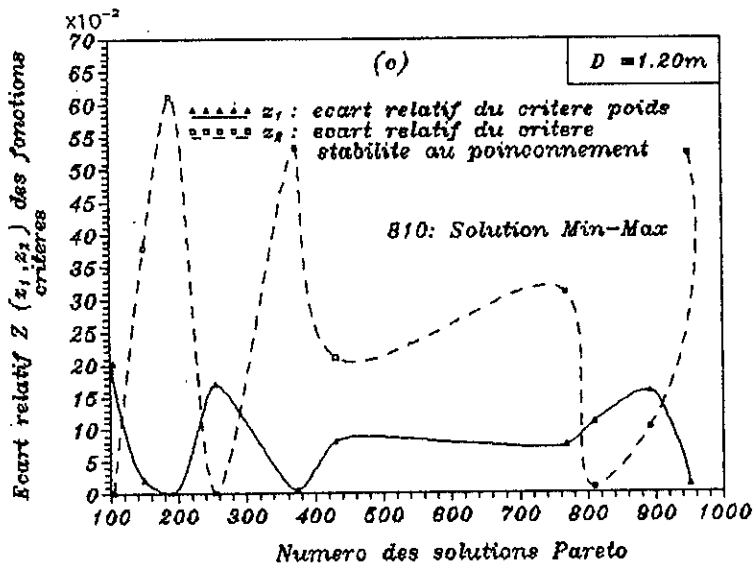
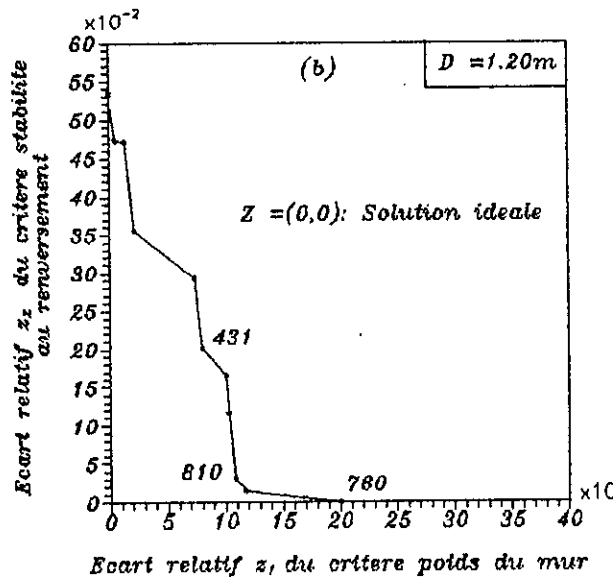
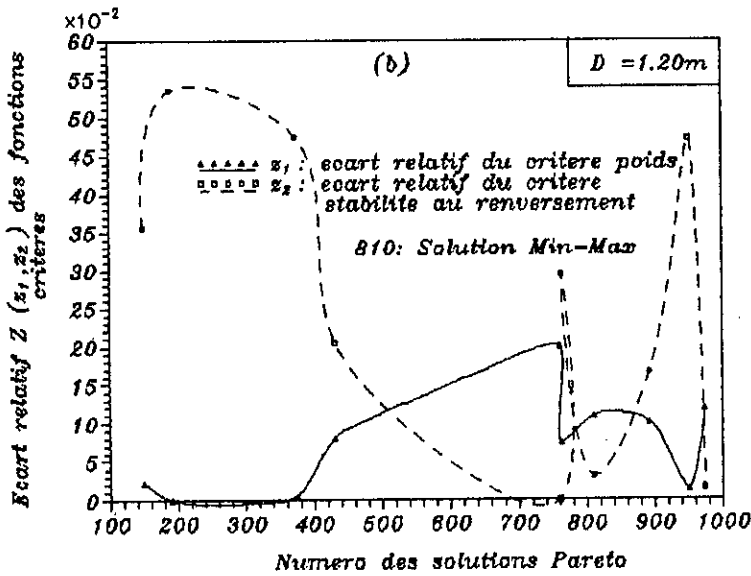
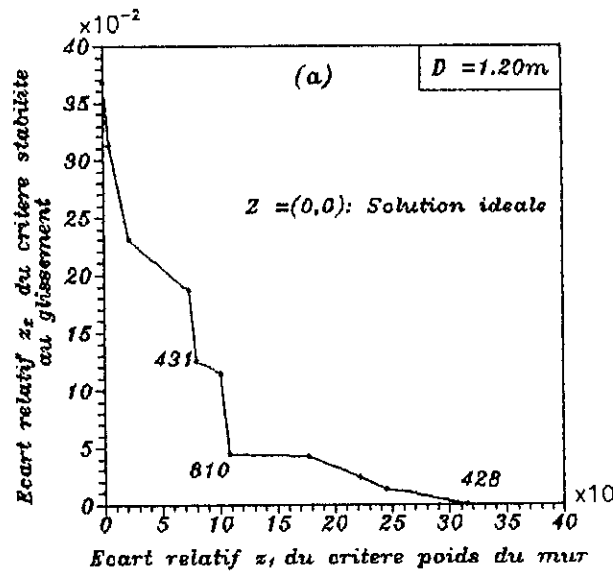
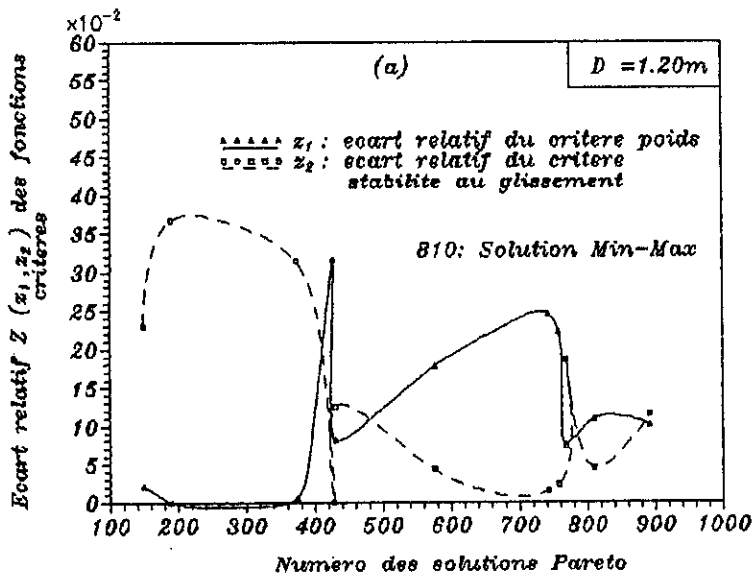


Fig. 7.6 Illustration de la methode relative la recherche de la solution Min-Max

Fig. 7.7 Determination de la solution optimale en fonction de la distance minimale a partir de la solution ideale

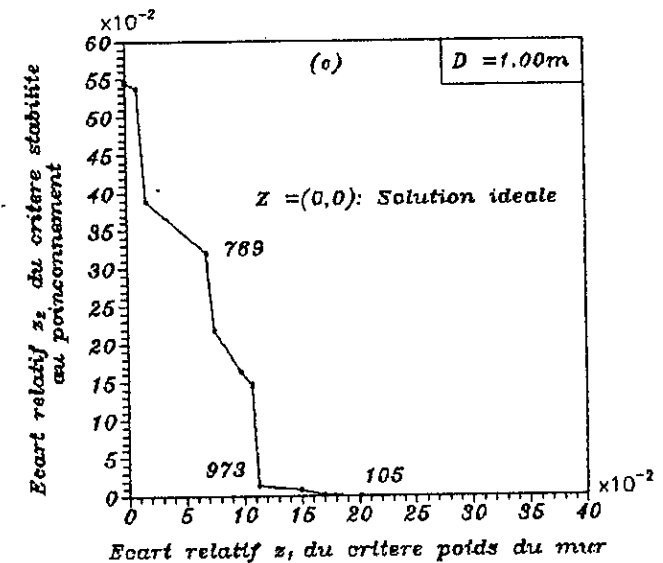
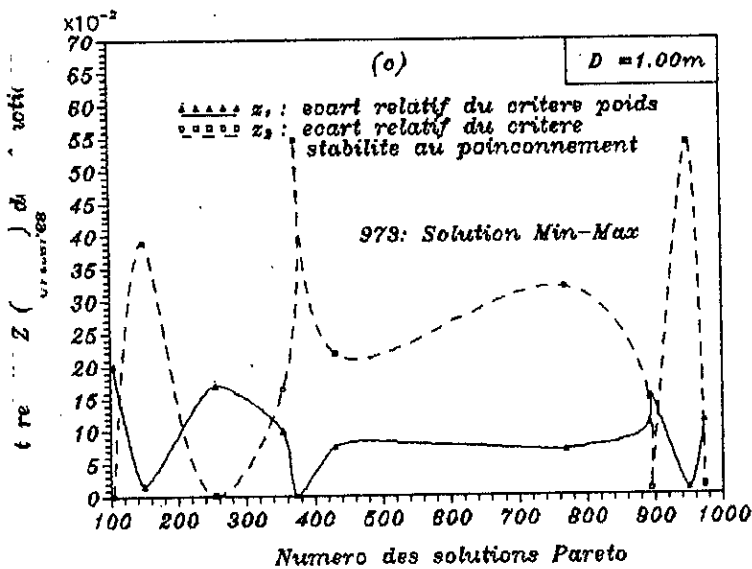
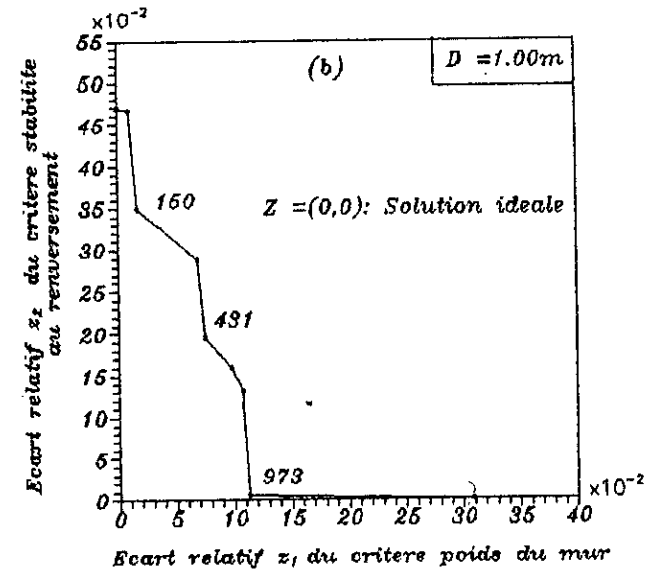
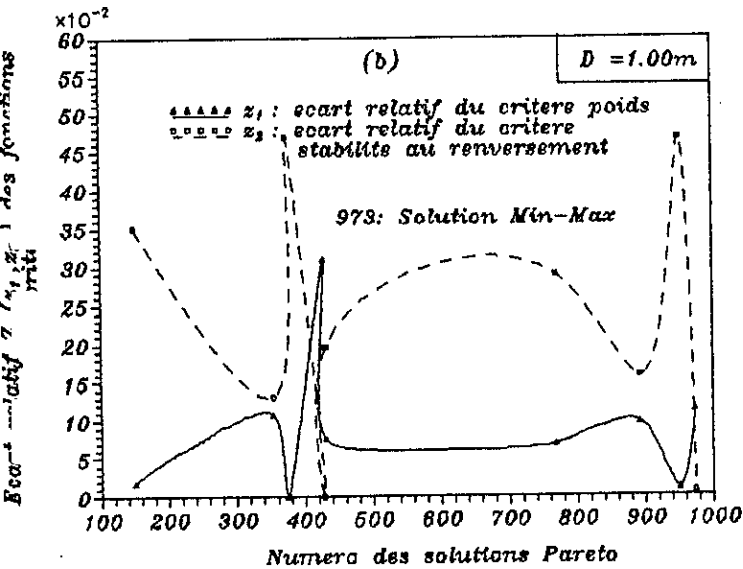
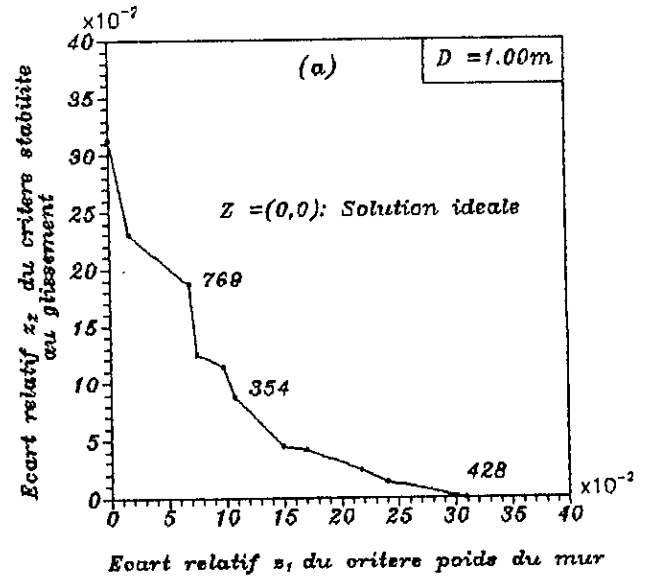
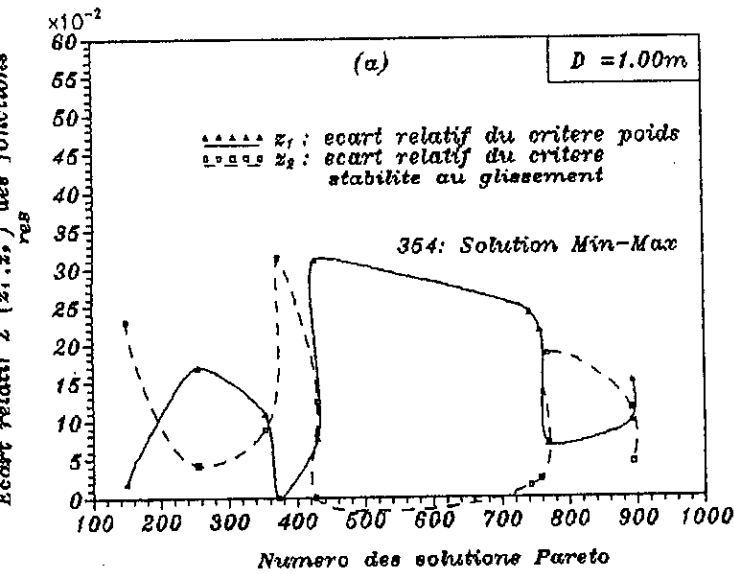


Fig. 7.8 Illustration de la méthode relative la recherche de la solution Min-Max

Fig. 7.9 Détermination de la solution optimale en fonction de la distance minimale à partir de la solution idéale

Ainsi, ces figures représentent les composantes du vecteur des écarts relatifs $\bar{z}(\bar{x}) = [z_1(\bar{x}), z_2(\bar{x})]^T$ pour chaque solution considérée dans l'ensemble des solutions Pareto, et à laquelle est attribuée un numéro indiquant sa position dans l'ensemble des solutions générées. Elles permettent, en outre, de mettre en évidence la procédure de recherche de la solution Min-Max. Tout d'abord, nous comparons $z_1(\bar{x})$ et $z_2(\bar{x})$ pour chaque solution Pareto afin de choisir celui qui présente la plus grande valeur. Ensuite, une fois rassemblés tous les écarts relatifs maximums, nous procédons à la sélection du minimum de cet ensemble pour le déclarer enfin comme solution Min-Max, offrant le meilleur compromis en considérant tous les critères simultanément et avec égale importance. A cet effet, un examen des ensembles de Pareto relatifs à la figure 7.6 (respectivement 7.8) nous permet d'identifier rapidement la solution affectée du numéro 810 (respectivement 973) comme optimum Min-Max dans les trois cas d'optimisation.

Par ailleurs, il importe de savoir que la considération en début de comparaison, du maximum des composantes du vecteur des écarts relatifs et non pas le minimum bien qu'il s'agit d'un problème de minimisation, nous évite sûrement d'obtenir l'une des solutions caractérisées par la présence d'un écart relatif nul dans son vecteur \bar{z} , autrement dit celle qui procure l'un des minimums atteint par les fonctions critères prises séparément. Certes, cette solution peut être qualifiée d'idéale vis-à-vis de l'un des critères puisqu'elle le minimise complètement, mais sa position vis-à-vis du second critère n'est pas toujours satisfaisante.

Parallèlement à cette approche, nous avons jugé utile, étant donné que nous sommes en présence d'un problème d'optimisation à deux critères, de comparer la solution Min-Max à celle trouvée moyennant une procédure basée sur la recherche de la distance minimale séparant une solution Pareto de la solution idéale. Pour cela, nous avons représenté la figures 7.7 visant principalement à mesurer la distance euclidienne d pour chaque solution Pareto définie par le vecteur des écarts relatifs $\bar{z}(\bar{x}) = [z_1(\bar{x}), z_2(\bar{x})]^T$, à partir de la solution idéale caractérisée par le vecteur \bar{z} nul (origine). La distance d peut être formulée comme suit:

$$d = \left(\sum_{i=1}^2 \left| \frac{f_i^0 - f_i(\bar{x})}{f_i^0} \right|^2 \right)^{1/2} \quad (7.3)$$

Sur cette base, il convient de rappeler que cette équation est strictement équivalente à l'équation (3.16) pour $\alpha = 2$, établie dans le cadre de la méthode du critère global (Global Criterion Method). Sur la figure 7.7, il s'avère que pour chaque cas d'optimisation considéré, la solution qui procure la distance minimale à partir de l'origine est celle affecté du numéro 810, strictement identique à la solution Min-Max relative à la figure 7.6. Ce résultat nous a rapidement amener à nous interroger sur l'équivalence de la méthode du critère global et l'approche Min-Max pour un problème d'optimisation à deux critères quand $\alpha = 2$. Pour cela, nous avons considéré le même problème en faisant varier la profondeur de la semelle, en prenant $D = 1.00 \text{ m}$ puis $D = 0.80 \text{ m}$ et enfin $D = 0.60 \text{ m}$ (variable non constante dans le problème d'optimisation) pour tester la constance de ce résultat.

En effet, à partir des différents cas étudiés dont nous avons préféré représenter uniquement la figure 7.9 illustrative du cas $D = 1.00 \text{ m}$, nous remarquons, une fois encore, moyennant les numéros affectés aux solutions de Pareto que la solution Min-Max est confondue avec celle qui fournit la distance minimale mesurée à partir de la solution idéale.

De ce fait, compte tenu de ces résultats et sachant que les deux méthodes (Min-Max et critère global) sont similaires quand $\alpha = \infty$, nous pouvons admettre que pour un problème d'optimisation à deux critères, la solution Min-Max peut être assimilée à celle qui minimise la distance euclidienne définie par l'équation (7.3). Toutefois, nous ne permettrons pas de généraliser cette conclusion quand le problème à étudier présente plus de deux critères.

7.3 INFLUENCE DE LA PROFONDEUR DE LA SEMELLE D SUR LE DIMENSIONNEMENT DU MUR DE SOUTÈNEMENT

Etant donné que la profondeur de la semelle D n'a pas été fixée de façon précise dans le problème d'optimisation, il semble nécessaire de procéder à une variation continue de cette inconnue afin d'examiner son influence sur

la qualité des résultats obtenus. Pour cela, nous établissons la figure 7.10 qui représente l'évolution de l'ensemble de Pareto en fonction de la profondeur de la semelle D .

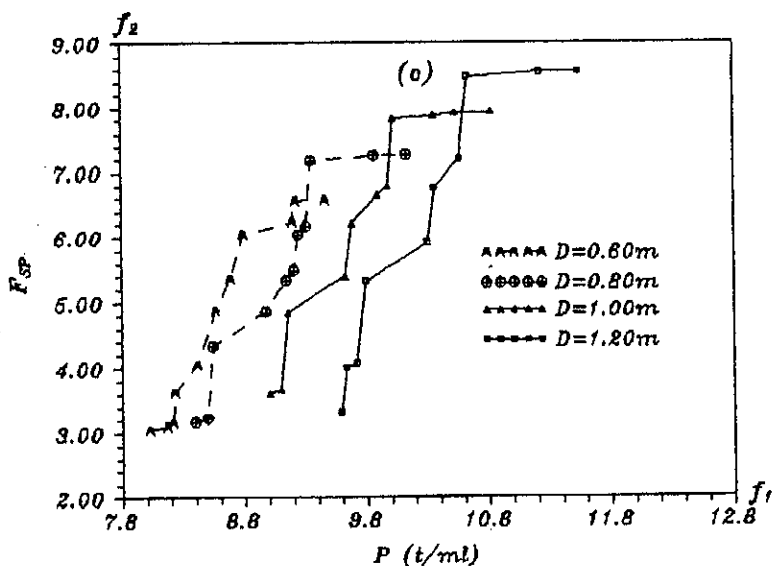
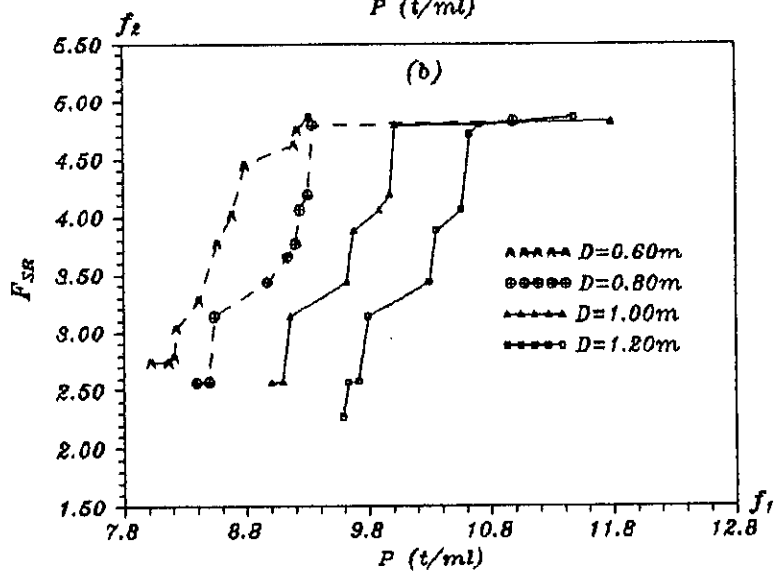
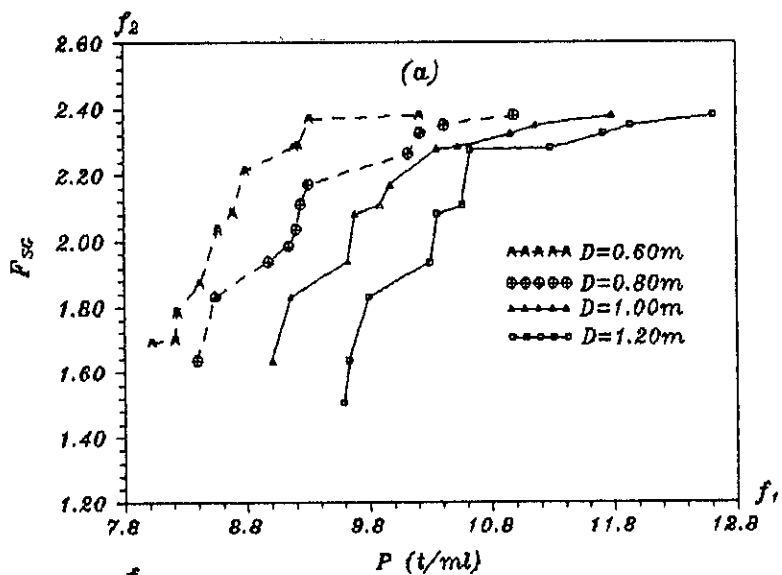


Fig. 7.10 (a),(b),(c) Evolution de l'ensemble de Pareto en fonction de la variation de la profondeur de fondation (absence de contrainte limitative sur la largeur du talon)

Globalement sur cette figure nous pouvons:

- tout d'abord remarquer que les coefficients de sécurité présentent des valeurs plus ou moins éloignées des valeurs limites (seuils) qui leur sont attribuées, notamment dans les cas concernant la maximisation de la stabilité au renversement et de la résistance au poinçonnement (les valeurs de F_{SR} et F_{SP} sont respectivement comprises dans les intervalles de [2,3,5] et [3,8,5]).

- mettre en évidence l'amélioration sensible des solutions Pareto quand la profondeur de la semelle diminue. En effet, relativement à la figure 7.10(a) et 7.10(b), nous constatons que la diminution de la profondeur entraîne un abaissement significatif du poids de la structure tout en gardant les valeurs des coefficients de sécurité presque inchangées, ce qui permet de satisfaire largement le problème d'optimisation considéré (minimisation du poids et maximisation de la stabilité). Toutefois, ce résultat n'est pas entièrement conservé dans la figure 7.10(c), nous y constatons d'ailleurs pour chaque valeur considérée de D , un ensemble de Pareto renfermant des solutions qui présentent une diminution aussi bien dans le poids de la structure que dans le coefficient de sécurité F_{SP} (les valeurs de F_{SP} sont comprises dans l'intervalle [3,5,8,5] pour $D = 1.2m$ et [3,0,6,5] pour $D = 0.6m$). Seulement cet abaissement n'influe en aucun cas sur la qualité des solutions de Pareto, puisque les valeurs des coefficients de sécurité demeurent toujours très élevées par rapport aux valeurs seuils.

- Enfin, nous remarquons que la variation de la profondeur D ne présente pas une influence notable sur le nombre des solutions de Pareto.

Par ailleurs, afin d'illustrer ce qui a précédé, les tableaux 7.1(a), (b) et (c) présentent pour chaque valeur de D , la solution Min-Max à laquelle sont attribuées les dimensions des différents éléments du mur, ce qui constitue le but principal du problème d'optimisation considéré. Néanmoins, avant d'entamer la représentation des tableaux, il semble utile de désigner les différentes variables évoquées:

f_1 : Valeur de la solution Min-Max attribuée à la fonctions critère "poids de la structure".

f_2 : Valeur de la solution Min-Max attribuée à la fonctions critère "stabilité de la structure (suivant le cas: glissement, renversement ou poinçonnement).

l_t : Largeur du talon.

l_p : Largeur du patin.

e_s : Epaisseur du sommet du rideau.

e_b : Epaisseur de la base du rideau.

e_f : Epaisseur de la fondation.

$D^{(m)}$	f_1^*	f_2^*	F_{SR}	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
1.20	10.632	2.275	4.711	8.494	2.694	0.736	0.303	0.520	0.503
1.00	9.977	2.170	4.192	6.778	2.440	0.639	0.311	0.514	0.505
0.80	9.307	2.171	4.191	6.171	2.356	0.617	0.302	0.494	0.487
0.60	8.792	2.214	4.443	6.047	2.323	0.670	0.310	0.456	0.473

(a)

$D^{(m)}$	f_1^*	f_2^*	F_{SG}	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
1.20	10.632	4.711	2.275	8.494	2.694	0.736	0.303	0.520	0.503
1.00	10.020	4.795	2.330	7.831	2.686	0.671	0.314	0.484	0.4902
0.80	9.348	4.796	2.200	7.182	2.594	0.648	0.304	0.468	0.475
0.60	8.792	4.443	2.214	6.047	2.323	0.670	0.310	0.456	0.473

(b)

$D^{(m)}$	f_1^*	f_2^*	F_{SG}	F_{SR}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
1.20	10.632	8.494	2.275	4.711	2.694	0.736	0.303	0.520	0.503
1.00	10.02	7.831	2.330	4.795	2.686	0.671	0.314	0.484	0.4925
0.80	9.348	7.182	2.200	4.796	2.594	0.648	0.304	0.468	0.475
0.60	8.792	6.047	2.214	4.443	2.323	0.670	0.310	0.456	0.473

(c)

Tab. 7.1 Présentation des solutions Min-Max

en fonction de la variation de la profondeur de la semelle D

(a) Dans le cas de la stabilité au glissement, (b) Dans le cas de la stabilité au renversement, (c) Dans le cas de la résistance au poinçonnement

Il est à noter en premier lieu, qu'effectivement la comparaison des solutions Min-Max, permet de constater que lorsque D diminue, la solution Min-Max considérée s'améliore tant pour le critère poids que pour le critère

stabilité. En effet, tandis que le poids diminue, les coefficients de sécurité ont tendance à rester presque inchangés (Tab. 7.1(a),(b)), ou à diminuer (Tab. 7.1(c)) lorsque ces derniers sont surestimés par rapport à leurs valeurs seuils: ($F_{SP} \approx (3F_{SP})_{\text{minimal}}$ pour $D = 0.6m$).

En second lieu, un examen approfondi des dimensions du mur montre des largeurs de talons très élevées ($l_t > 2.5m$) pour une telle hauteur. Ceci procure une solution qui nous apparaît comme non économique, en raison du fait que le coût total de la construction d'un mur de soutènement tient compte non seulement du prix du mur lui-même, mais aussi de celui du remblai derrière le mur.

En effet, lorsque la largeur du talon est importante, il est clair que cette solution occasionne une dépense globale élevée, puisque le volume des déblais à extraire puis à remettre en place suite à la construction du mur de soutènement, devient grand. Ainsi, il serait indispensable de prévoir une largeur du talon à la fois suffisante et économique.

7.3.1 Recherche de la Largeur Economique (Minimale) du Talon

La figure 7.11 met en évidence la relation entre la largeur du talon et le critère poids, pour chaque solution de Pareto relative aux deux cas illustratifs $D = 1.2m$ et $D = 0.6m$. Ceci permet de déterminer la largeur minimale du talon pour l'ajouter ensuite dans le problème d'optimisation sous forme de contrainte, ayant pour but l'amélioration des solutions de Pareto.

A partir de cette figure, nous pouvons globalement constater que la largeur minimale est procurée par la solution à laquelle est attribuée la valeur minimale du poids de la structure et qui est plus ou moins équivalente à $l_t = 1.7m$, ce qui nous permet d'envisager la contrainte:

$$g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.7 \quad (7.4)$$

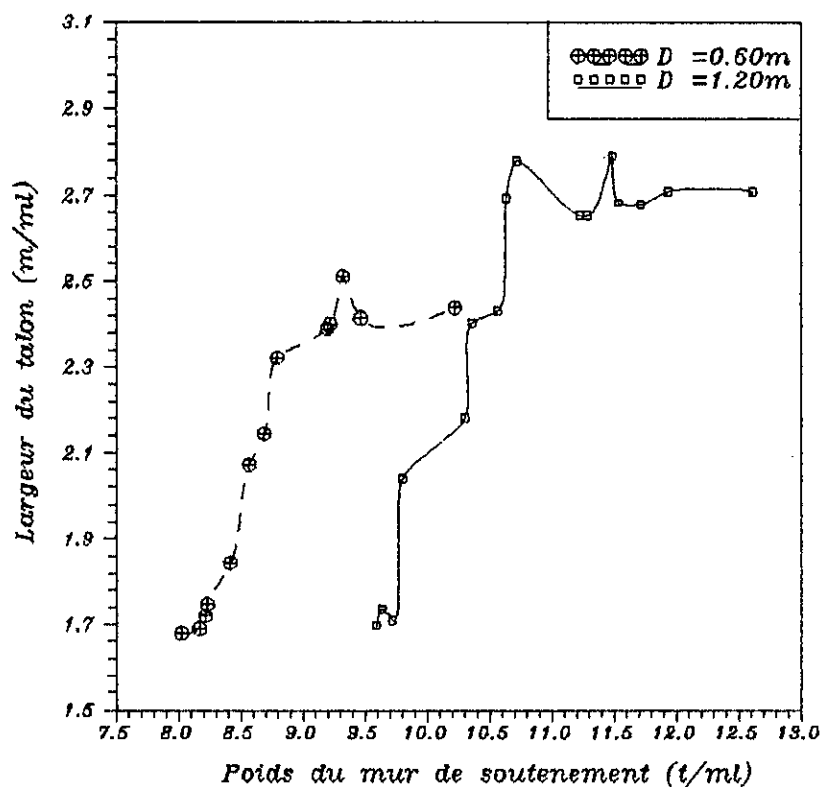


Fig. 7.11 Recherche de la largeur minimale du talon a partir des solutions Pareto (absence de contrainte limitative sur la largeur du talon)

Nous précisons que cette expression n'est pas définitive, en raison du fait que la recherche de la largeur minimale susceptible de fournir des solutions satisfaisantes est étroitement liée à l'examen du nouvel ensemble de Pareto.

En effet, La figure 7.12 qui découle de la prise en compte de la contrainte exprimée par l'équation (7.4) représente l'évolution de l'ensemble de Pareto en fonction de la variation de la profondeur de la semelle.

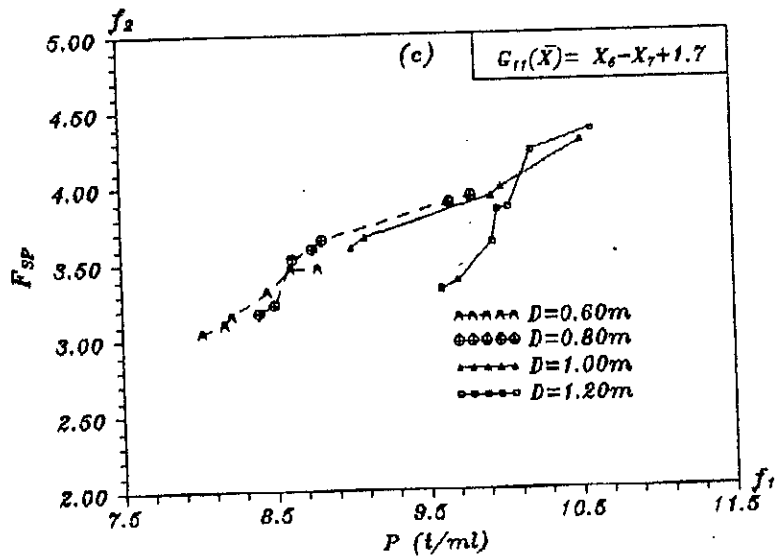
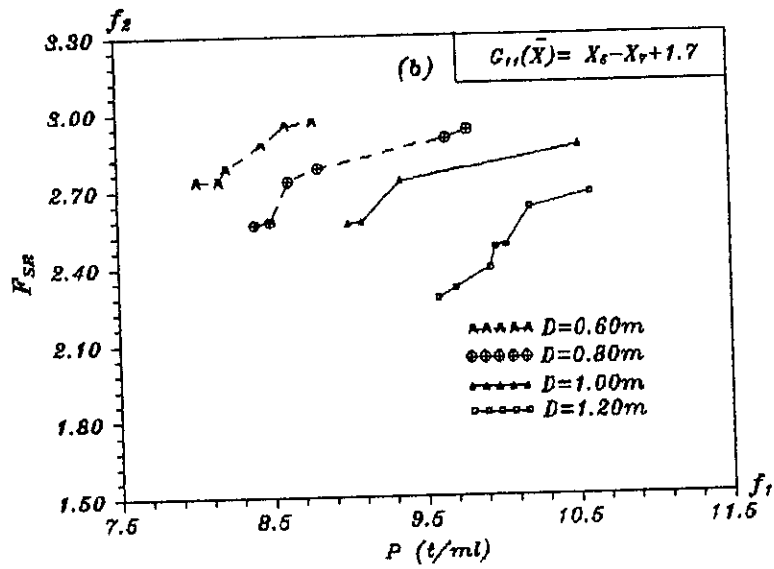
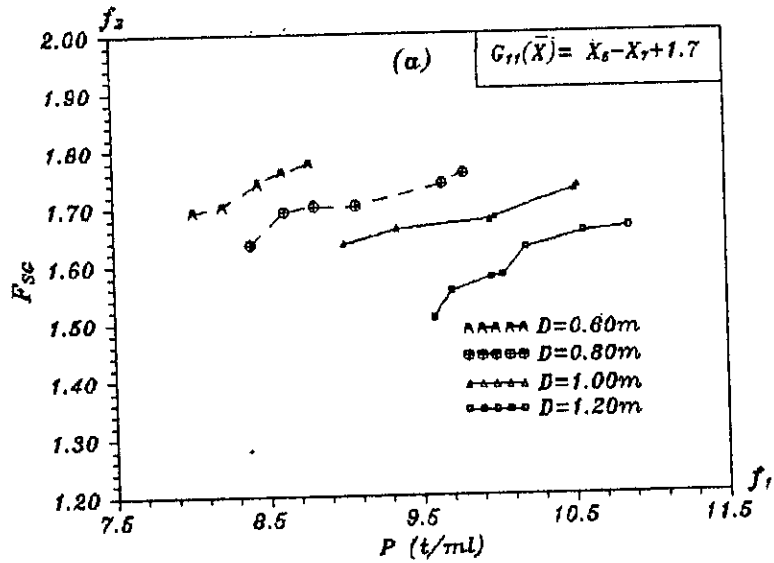


Fig. 7.11 (a),(b),(c) Evolution de l'ensemble de Pareto en fonction de la variation de la profondeur de fondation (optimisation avec contrainte G_{11} sur la largeur du talon)

Sa comparaison avec la figure 7.10, montre que la considération d'une contrainte additionnelle limitant la largeur du talon entraîne un abaissement du poids de structure accompagné d'une diminution significative des valeurs des coefficients de sécurité (notamment dans le cas de la stabilité au glissement). Nous pouvons également constater à partir des figures 7.12(a),(b), qu'au fur et à mesure que la profondeur de la semelle **D** diminue, les solutions Pareto s'améliorent toujours, aussi bien pour le critère poids que pour le critère stabilité. S'agissant de la figure 7.12(c), nous retrouvons la même remarque que celle relative à la figure 7.10(c) concernant les solutions présentant une diminution aussi bien dans le poids de la structure que dans le coefficient de sécurité au poinçonnement. De surcroît, le tableau 7.2 a été dressé afin de récapituler les résultats les plus caractéristiques venant confirmer les constatations précédentes.

$D^{(m)}$	f_1^*	f_2^*	F_{SR}	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
1.20	10.040	1.578	2.473	3.850	1.596	0.748	0.402	0.528	0.508
1.00	9.353	1.660	2.728	4.064	1.685	0.722	0.328	0.513	0.521
0.80	8.620	1.692	2.731	3.534	1.680	0.628	0.322	0.502	0.476
0.60	8.214	1.701	2.781	3.160	1.626	0.634	0.304	0.475	0.504

(a)

$D^{(m)}$	f_1^*	f_2^*	F_{SG}	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
1.20	10.194	2.621	1.626	4.228	1.657	0.710	0.353	0.590	0.502
1.00	9.353	2.728	1.660	4.064	1.685	0.722	0.328	0.513	0.5215
0.80	8.815	2.779	1.699	3.654	1.686	0.657	0.313	0.492	0.523
0.60	8.450	2.873	1.740	3.316	1.659	0.623	0.315	0.493	0.506

(b)

$D^{(m)}$	f_1^*	f_2^*	F_{SG}	F_{SR}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
1.20	10.194	4.228	1.626	2.621	1.657	0.710	0.353	0.590	0.502
1.00	9.353	4.064	1.660	2.728	1.685	0.722	0.328	0.513	0.5215
0.80	8.815	3.654	1.699	2.779	1.686	0.657	0.313	0.492	0.523
0.60	8.450	3.316	1.740	2.873	1.659	0.623	0.315	0.493	0.506

(c)

Tab. 7.2 Présentation des solutions Min-Max en fonction de la variation de la profondeur de la semelle avec prise en compte de la contrainte $g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.7$

(a) Dans le cas de la stabilité au glissement, (b) Dans le cas de la stabilité au renversement, (c) Dans le cas de la résistance au poinçonnement

L'observation des valeurs des solutions Min-Max sur le tableau 7.2 amène les conclusions suivantes:

- L'introduction d'une contrainte limitative sur la largeur du talon

entraîne une diminution considérable des valeurs des coefficients de sécurité par rapport à ceux du Tab.7.1, variant de 22 à 30% pour F_{SG} (Tab. 7.2(a)), de 35 à 45% pour F_{SR} (Tab. 7.2(b)) et de 45 à 50% pour F_{SP} (Tab. 7.2(c)), accompagnée bien entendu d'un abaissement du poids de la structure.

- La largeur du talon des différentes solutions Min-Max est comprise entre 1.6 et 1.7 mètres, ce qui confirme la bonne qualité des solutions par rapport à celle du Tab. 7.1.

- Pour chaque nouvelle valeur inférieure de D décrite dans le Tab. 7.2 la solution Min-Max considérée est strictement préférée à la précédente que ce soit du point de vue poids ou stabilité.

De plus, un examen rapide des dimensions du mur notamment la largeur du talon (provenant de toutes les solutions Pareto), révèle la présence de certaines solutions auxquelles est attribuée une largeur du talon nettement inférieure à $l_t = 1.7m$, ce qui nous conduit à effectuer une fois de plus, la recherche d'une largeur de talon plus restrictive en vue de remplacer la contrainte limitative précédente par une autre plus intéressante.

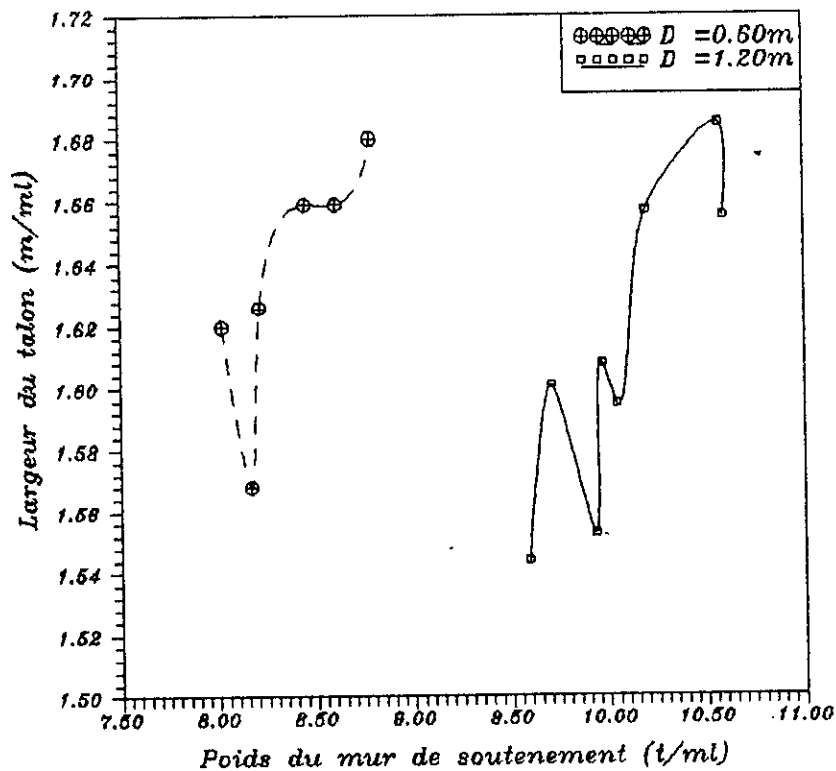


Fig. 7.13 Recherche de la largeur minimale du talon à partir des solutions Pareto (avec la contrainte $G_{11}(\bar{X}) = X_5 - X_7 + 1.7$)

De la même manière, à partir de la figure 7.13, une largeur minimale du talon $l_t = 1.5m$ peut être aisément trouvée. Cette dernière permettra de corriger l'ancienne contrainte $g_{11}(\bar{x})$. Nous avons alors:

$$g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.5 \quad (7.5)$$

La figure 7.14 et le tableau 7.3 présentent les résultats obtenus avec cette nouvelle contrainte exprimée par l'équation (7.5).

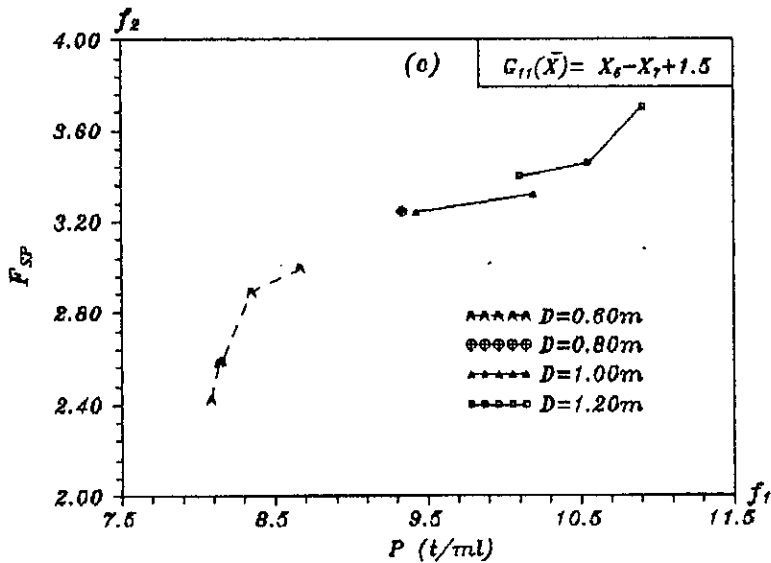
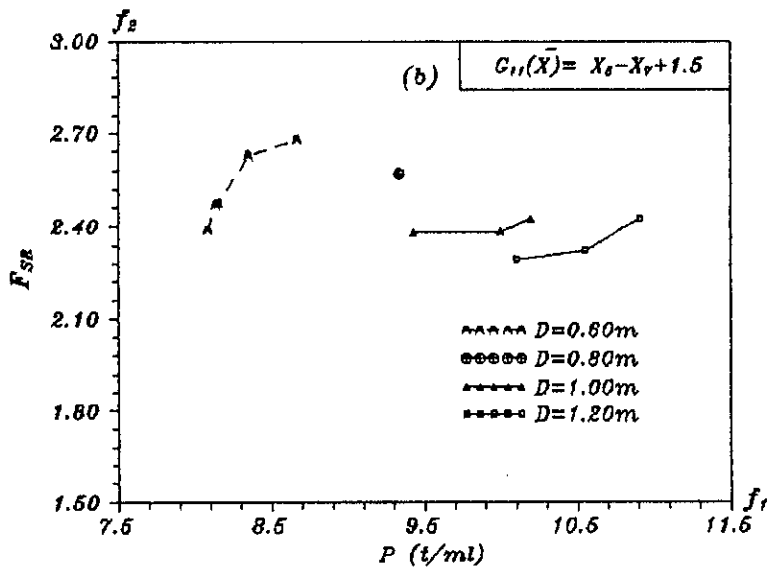
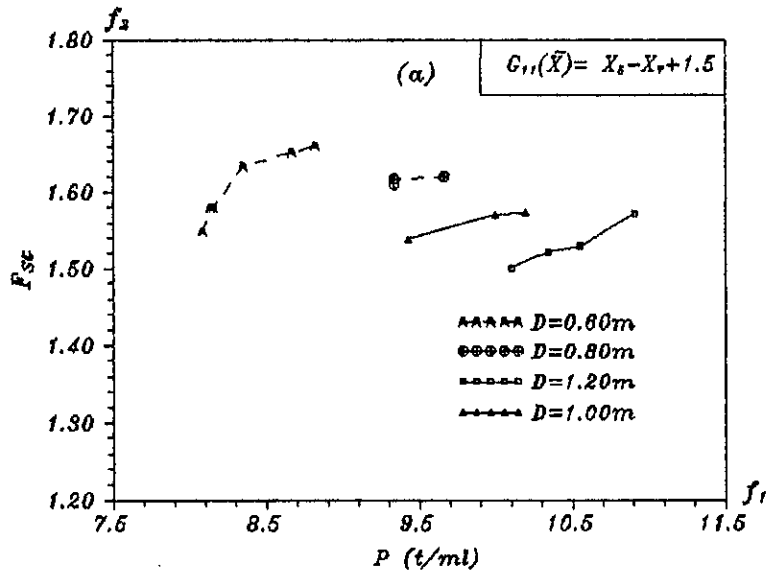


Fig. 7.12 (a),(b),(c) Evolution de l'ensemble de Pareto en fonction de la variation de la profondeur de fondation (optimisation avec contrainte G_{11} sur la largeur du talon)

$D^{(m)}$	f_1^*	f_2^*	F_{SR}	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
1.20	10.343	1.522	2.279	3.330	1.471	0.708	0.424	0.569	0.514
1.00	9.430	1.538	2.380	3.242	1.484	0.705	0.344	0.536	0.534
0.80	9.339	1.617	2.557	3.199	1.498	0.664	0.353	0.555	0.527
0.60	8.348	1.633	2.626	2.888	1.492	0.639	0.332	0.531	0.452

(a)

$D^{(m)}$	f_1^*	f_2^*	F_{SG}	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
1.20	10.552	2.323	1.529	3.456	1.464	0.726	0.426	0.586	0.521
1.00	9.430	2.380	1.538	3.242	1.484	0.705	0.344	0.536	0.534
0.80	9.336	2.569	1.610	3.243	1.491	0.697	0.357	0.538	0.537
0.60	8.348	2.626	1.633	2.888	1.492	0.639	0.332	0.531	0.452

(b)

$D^{(m)}$	f_1^*	f_2^*	F_{SG}	F_{SR}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
1.20	10.552	3.456	1.529	2.323	1.464	0.726	0.426	0.586	0.521
1.00	9.430	3.242	1.538	2.280	1.484	0.705	0.344	0.536	0.534
0.80	9.336	3.243	1.610	2.569	1.491	0.697	0.357	0.538	0.537
0.60	8.348	2.888	1.633	2.626	1.492	0.639	0.332	0.531	0.452

(c)

Tab. 7.3 Présentation des solutions Min-Max en fonction de la variation de la profondeur de la semelle avec prise en compte de la nouvelle contrainte $g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.5$.

(a) Dans le cas de la stabilité au glissement, (b) Dans le cas de la stabilité au renversement, (c) Dans le cas de la résistance au poinçonnement.

Nous remarquons également pour ce cas, une amélioration des solutions Pareto quand la profondeur D diminue.

Par conséquent, la conclusion qui paraît s'imposer est qu'il serait plus

économique (surtout du point de vue poids) de positionner les fondations en de faibles profondeurs du terrain de fondation .

De plus, la comparaison de ces résultats avec ceux illustrés par la figure 7.12 et le tableau 7.2 montre que, pour chaque profondeur de semelle considérée, l'ajout d'une contrainte plus stricte limitant la largeur du talon fait décroître les valeurs des coefficients de sécurité au glissement, au renversement et au poinçonnement de manière à avoisiner leurs valeurs seuils, et surtout réduit fortement le nombre des solutions Pareto ($N \leq 5$). Ce constat est illustré par les figures 7.15 et 7.16 qui montrent une comparaison des ensembles de Pareto déduits de la variation de la contrainte sur la largeur du talon aussi bien pour $D = 1.2 m$ que pour $D = 0.6 m$. Par contre, nous remarquons dans ce cas (fig. 7.15, 7.16) une faible variation du poids de la structure . Ceci peut être attribué au fait que la réduction de la largeur du talon de presque la moitié induit une diminution inévitable de l'ensemble des forces stabilisantes (résultantes du remblai), il en découle ainsi une minimisation accentuée des coefficients de sécurité devant naturellement être compensée par une augmentation du poids de la structure, aussi faible soit-elle, afin d'éviter l'absence de solutions optimales.

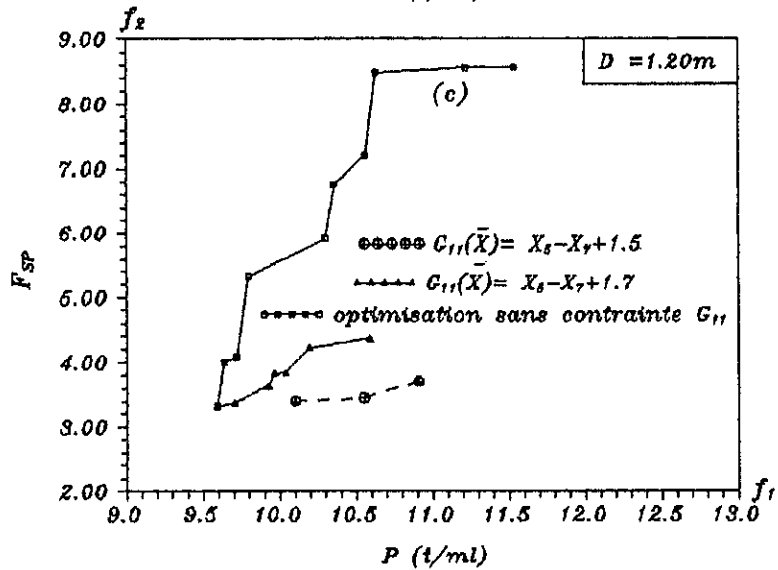
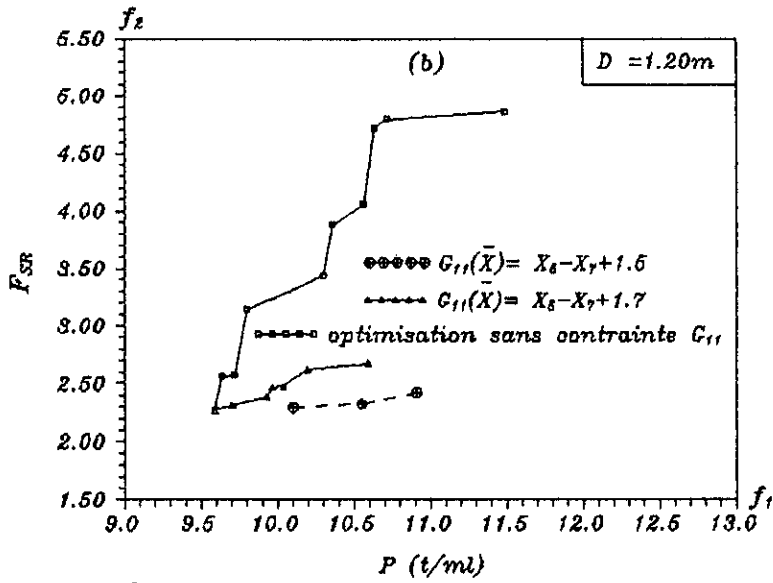
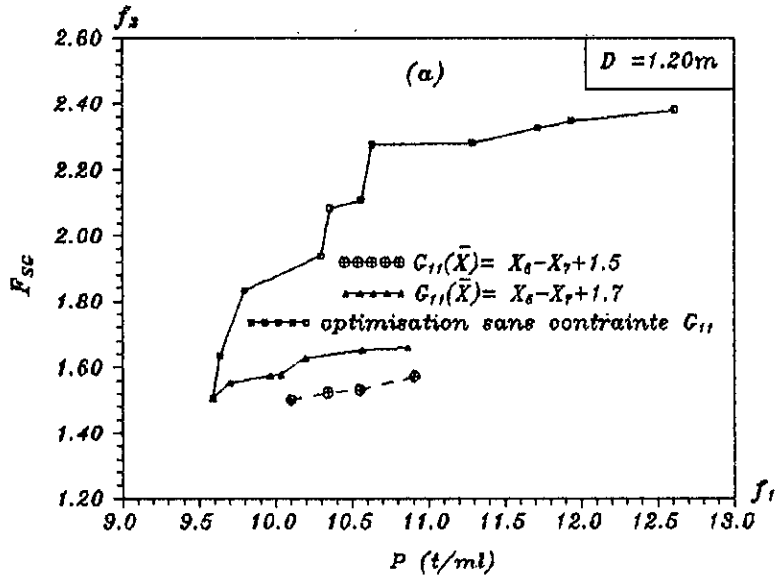


Fig 7.13 (a),(b),(c) Comparaison des ensembles de Pareto deduits de la variation de la contrainte sur la largeur du talon ($D = 1.20m$)

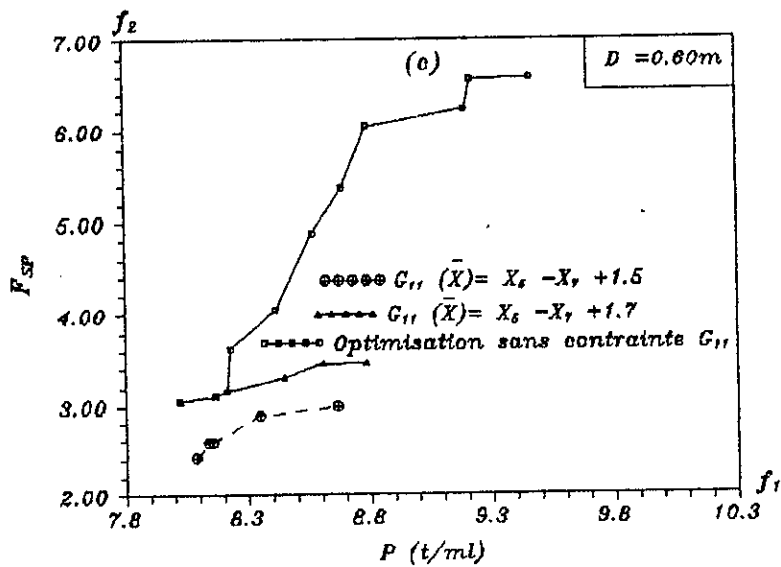
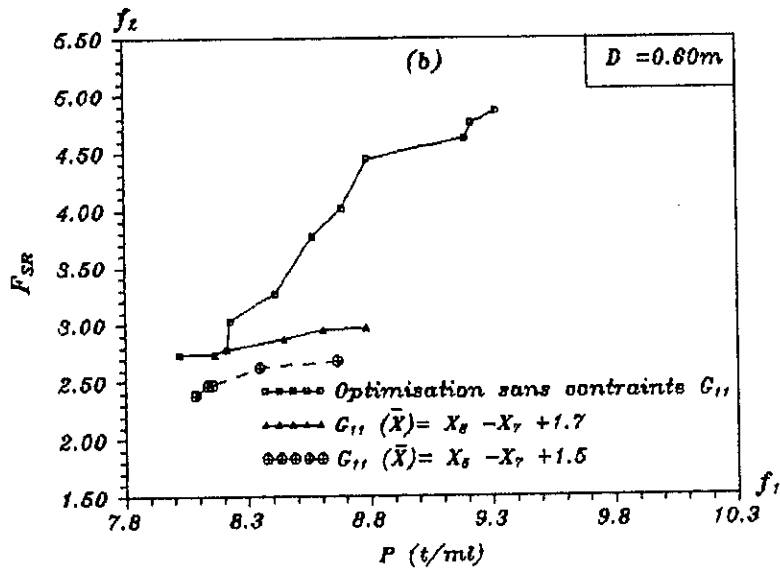
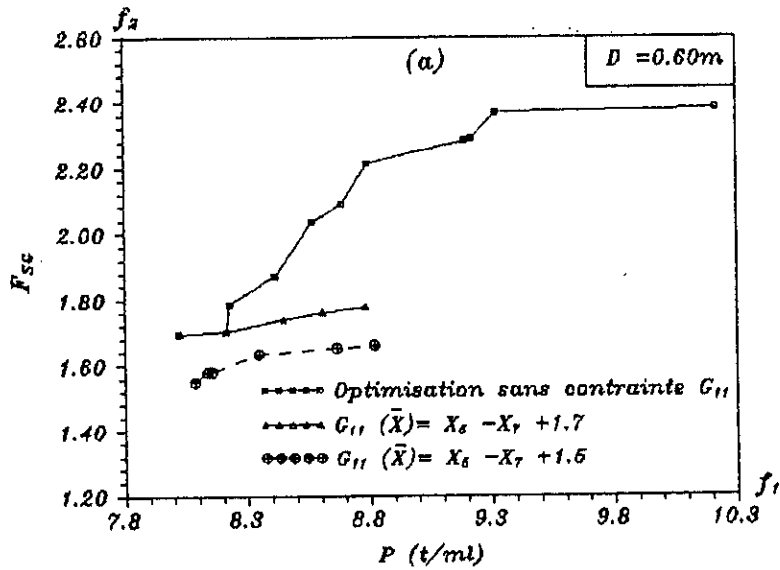


Fig 7.14 (a),(b),(c) Comparaison des ensembles de Pareto deduits de la variation de la contrainte sur la largeur du talon ($D = 0.60m$)

Enfin, il semble utile de souligner que l'on ne peut mettre une contrainte géométrique plus restrictive ($l_1 < 1.5m$) sur la largeur du talon car l'ensemble de Pareto devient vide. L'aboutissement à cette conséquence ne peut en aucun cas signifier l'absence d'autres solutions plus avantageuses permettant de fournir avec les mêmes conditions de poids et de stabilité des largeurs de talons autrement dit des largeurs de semelles plus économiques.

Ainsi, il s'avère que l'obtention d'une configuration optimale du mur de soutènement est basée sur un processus itératif ayant pour but la restriction de la largeur du talon, moyennant une contrainte additionnelle identifiée à la suite de l'examen des dimensions minimales du mur obtenues à chaque étape d'optimisation. Bien entendu, il est évident que la recherche de la contrainte la plus satisfaisante, affecte le déroulement du processus d'optimisation d'une lourdeur inévitable, ce qui nous a amené à entreprendre une nouvelle phase d'optimisation destinée à ajouter au problème sous analyse un nouveau critère caractérisé par la minimisation de la largeur du talon.

Néanmoins, ceci ne peut être rigoureusement réalisé que si nous déterminons de façon précise le n-uple de critères mécaniques qui s'impose comme prioritaire (dominant), afin d'éviter la prise en compte séparément des trois cas de maximisation de la stabilité.

7.4 DETERMINATION DU N-UPLE DE CRITERES PREDOMINANT DU POINT DE VUE MECANIQUE

Lors de la première phase d'étude, le déroulement du processus d'optimisation s'est caractérisé par la considération de trois couples de critères, traités séparément par le programme informatique, dont les composantes de chacun sont représentées:

- soit par le critère poids et le critère stabilité au glissement.
- soit par le critère poids et le critère stabilité au renversement.
- soit par le critère poids et le critère résistance au poinçonnement.

Bien entendu, ce procédé semble loin d'être pratique puisque conduisant automatiquement à consulter trois ensembles de Pareto simultanément au lieu d'un seul, ce qui embrouille sans doute le décideur dans le choix de la solution optimum. Ainsi, il apparait nécessaire de combiner plus de deux critères en même temps.

Pour cela et dans ce qui suit, nous désignons par:

f_1 : La fonction critère poids.

f_2 : La fonction critère stabilité au glissement.

f_3 : La fonction critère stabilité au renversement.

f_4 : La fonction critère résistance au poinçonnement.

Nous aurons dans ce cas sept n-uples de combinaisons de critères possibles: (f_1, f_2) ; (f_1, f_3) ; (f_1, f_4) ; (f_1, f_2, f_3) ; (f_1, f_2, f_4) ; (f_1, f_3, f_4) et enfin (f_1, f_2, f_3, f_4) parmi lesquels nous sélectionnerons la combinaison la plus intéressante pour une optimisation globale d'un mur de soutènement.

Ainsi, dans le cadre de cette phase, cinq situations ont été envisagées en fonction de la profondeur de fondation et de la contrainte sur la largeur du talon à savoir:

$D = 1.2m$, $D = 0.8m$, $D = 0.6m$ avec $g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.5$
et $D = 1.1m$, $D = 0.9m$, $D = 0.7m$ avec $g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.7$

Pour illustrer cela, nous avons retenu de ne présenter ici que les résultats relatifs aux deux cas suivants étant donné la similitude des conséquences pour les autres cas:

$D = 1.2m$ et $g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.5$
 $D = 0.7m$ et $g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.7$

Les tableaux 7.4 et 7.5 décrivent les ensembles de Pareto ainsi obtenus:

$f_1^{(0)}$	f_2	F_{SR}	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
10.102	1.500	2.291	3.402	1.473	0.747	0.365	0.548	0.562
*10.343	1.522	2.280	3.331	1.471	0.708	0.424	0.569	0.515
10.552	1.530	2.323	3.456	1.464	0.726	0.426	0.586	0.521
10.909	1.572	2.425	3.706	1.492	0.750	0.481	0.589	0.502

(a)

$f_1^{(0)}$	F_{SG}	f_3	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
10.102	1.500	2.291	3.402	1.473	0.747	0.365	0.548	0.562
*10.552	1.530	2.323	3.456	1.464	0.726	0.426	0.586	0.521
10.909	1.572	2.425	3.706	1.492	0.750	0.481	0.589	0.502

(b)

$f_1^{(0)}$	F_{SG}	F_{SR}	f_4	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
10.102	1.500	2.291	3.402	1.473	0.747	0.365	0.548	0.562
*10.552	1.530	2.323	3.456	1.464	0.726	0.426	0.586	0.521
10.909	1.572	2.425	3.706	1.492	0.750	0.481	0.589	0.502

(c)

Tab. 7.4 Présentation des solutions Pareto en optimisant différents couples de critères (f_1, f_k) pour $D = 1.2m$ et $g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.5$.

(a) (f_1, f_2) , (b) (f_1, f_3) , (c) (f_1, f_4) .

Nota:

- Les solutions de Pareto relatives à la maximisation de la stabilité au glissement et au renversement (f_1, f_2, f_3) , au glissement et au poinçonnement (f_1, f_2, f_4) , et enfin au glissement, au renversement et au poinçonnement (f_1, f_2, f_3, f_4) , sont similaires à celles du tableau 7.4(a). Par contre, pour la maximisation de la stabilité au renversement et au poinçonnement (f_1, f_3, f_4) , nous obtenons le même tableau que tab. 7.4(b) ou (c). Il suffit pour ces cas, de remplacer les facteurs de sécurité considérés

par les fonctions critères f_i $i = 2, 3, 4$.

- Les solutions repérées par le symbole * représentent les solutions Min-Max.

Nous remarquons sur le tab. 7.4 que les ensembles de Pareto issus de l'optimisation des couples de critères (f_1, f_3) et (f_1, f_4) (tab. 7.4(b),(c)) sont strictement identiques entre eux et constituent en plus une partie de l'ensemble de Pareto résultant de l'optimisation du couple (f_1, f_2) (tab.7.4(a)). Ce résultat obtenu justifie, peut être, l'aboutissement à l'ensemble de Pareto relatif au couple (f_1, f_2) lorsque nous optimisons les triplets (f_1, f_2, f_3) et (f_1, f_2, f_4) , et l'ensemble de Pareto relatif au couple (f_1, f_3) (ou (f_1, f_4)) suite à l'optimisation du triplet (f_1, f_3, f_4) . Il s'ensuit encore que la prise en compte de tous les critères simultanément représentée par le quadruplet (f_1, f_2, f_3, f_4) fournit également le même ensemble de Pareto que celui identifié par le couple (f_1, f_2) .

Dans ces conditions, il serait alors intéressant de se demander si l'optimisation d'un n-uple de fonctions critères (f_1, f_2, \dots, f_n) conduit à un ensemble de Pareto global réunissant tous les sous-ensembles de Pareto issus de la considération de (n-1) couples à deux critères, exprimés sous la forme de (f_i, f_j) pour $i = 2, \dots, n$.

En vue d'illustrer clairement ce qui précède, nous dressons le tableau 7.5 introduisant le cas: $D = 0.7m$ et $g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.7$

$f_1^{(n)}$	f_2	F_{SR}	F_{SP}	$I_i^{(m)}$	$I_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
*8.318	1.692	2.731	3.295	1.650	0.616	0.316	0.493	0.468
8.512	1.700	2.780	3.410	1.656	0.645	0.309	0.483	0.513
8.757	1.739	2.870	3.573	1.689	0.634	0.320	0.502	0.515
8.800	1.740	2.850	3.550	1.670	0.645	0.339	0.485	0.525
8.917	1.760	2.945	3.729	1.690	0.637	0.340	0.536	0.477

(a) Maximisation de la stabilité au glissement et minimisation du poids.

$f_1^{(0)}$	F_{SG}	f_2	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
8.097	1.636	2.561	2.950	1.591	0.600	0.302	0.481	0.476
8.318	1.692	2.731	3.295	1.650	0.616	0.316	0.493	0.468
*8.512	1.700	2.780	3.410	1.656	0.645	0.309	0.483	0.513
8.757	1.739	2.872	3.573	1.689	0.634	0.320	0.502	0.515
8.917	1.760	2.947	3.729	1.690	0.637	0.340	0.536	0.477
9.296	1.750	2.950	3.719	1.660	0.675	0.353	0.540	0.520

(b) maximisation de la stabilité au renversement et minimisation du poids.

$f_1^{(0)}$	F_{SG}	F_{SR}	f_2	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
8.097	1.636	2.561	2.950	1.591	0.600	0.302	0.481	0.476
8.318	1.692	2.731	3.295	1.650	0.616	0.316	0.493	0.468
8.455	1.662	2.731	3.356	1.597	0.685	0.318	0.486	0.494
8.512	1.700	2.780	3.410	1.656	0.645	0.309	0.483	0.513
*8.757	1.739	2.872	3.573	1.689	0.634	0.320	0.502	0.515
8.917	1.760	2.947	3.729	1.690	0.637	0.340	0.536	0.477

(c) Maximisation de la stabilité au poinçonnement et minimisation du poids.

$f_1^{(0)}$	f_2	f_3	F_{SP}	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
8.097	1.636	2.561	2.950	1.591	0.600	0.302	0.481	0.476
8.318	1.692	2.731	3.295	1.650	0.616	0.316	0.493	0.468
*8.512	1.700	2.780	3.410	1.656	0.645	0.309	0.483	0.513
8.757	1.739	2.872	3.573	1.689	0.634	0.320	0.502	0.515
8.800	1.740	2.850	3.550	1.670	0.645	0.339	0.485	0.525
8.917	1.760	2.947	3.729	1.690	0.637	0.340	0.536	0.477
9.296	1.750	2.950	3.719	1.660	0.675	0.353	0.540	0.520

(d) Maximisation de la stabilité au glissement et au renversement et minimisation du poids.

$f_1^{(0)}$	f_2	F_{SR}	f_3	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
8.097	1.636	2.561	2.950	1.591	0.600	0.302	0.481	0.476
8.318	1.692	2.731	3.295	1.650	0.616	0.316	0.493	0.468
8.455	1.662	2.731	3.356	1.597	0.685	0.318	0.486	0.494
8.512	1.700	2.780	3.410	1.656	0.645	0.309	0.483	0.513
*8.757	1.739	2.872	3.573	1.689	0.634	0.320	0.502	0.515
8.800	1.740	2.850	3.550	1.670	0.645	0.339	0.485	0.525
8.917	1.760	2.947	3.729	1.690	0.637	0.340	0.536	0.477

(e) Maximisation de la stabilité au glissement et au poinçonnement et minimisation du poids

$f_1^{(0)}$	F_{SG}	f_2	f_3	$l_t^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
8.097	1.636	2.561	2.950	1.591	0.600	0.302	0.481	0.476
8.318	1.692	2.731	3.295	1.650	0.616	0.316	0.493	0.468
28.455	1.662	2.731	3.356	1.597	0.685	0.318	0.486	0.494
8.512	1.700	2.780	3.410	1.656	0.645	0.309	0.483	0.513
*8.757	1.739	2.872	3.573	1.689	0.634	0.320	0.502	0.515
8.917	1.760	2.947	3.729	1.690	0.637	0.340	0.536	0.477
9.296	1.750	2.950	3.719	1.660	0.675	0.353	0.540	0.520

(f) Maximisation de la stabilité au renversement et au poinçonnement et minimisation du poids.

Tab. 7.5(a), (b), (c), (d), (e), (f) Présentation des solutions Pareto pour tous les n-uples de critères possibles pour $D = 0.7m$ et $g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.7$.

Nota: l'ensemble de Pareto relatif à la considération du quadruplet (f_1, f_2, f_3, f_4) est formé par la réunion des tab.7.5(a), (b), et (c).

Nous remarquons que, contrairement au Tab. 7.4, les ensembles de Pareto obtenus pour les couples (f_1, f_2) (tab.7.5(a)), (f_1, f_3) (tab.7.5(b)) et (f_1, f_4) (tab.7.5(c)) sont légèrement différents entre eux. Ceci peut être attribué au fait que certaines solutions figurant dans une situation de

maximisation de stabilité donnée peuvent facilement être dominées dans une autre. En outre, l'optimisation des triplets (f_1, f_2, f_3) , (f_1, f_2, f_4) , (f_1, f_3, f_4) et du quadruplet (f_1, f_2, f_3, f_4) nous permet d'obtenir quatre ensembles de Pareto respectivement représentés par les tableaux 7.5(d), 7.5(e), 7.5(f), 7.5(g) pour lesquels nous remarquons que:

- Chaque ensemble de Pareto identifié suite à la considération d'un n-uple de critères (f_1, f_2, \dots, f_n) est déduit de la réunion de (n-1) sous ensembles correspondants à l'optimisation des couples à deux critères de la forme (f_i, f_j) pour $i = 2, \dots, n$.

- La solution Min-Max de l'ensemble global peut coïncider avec l'une des solutions Min-Max relatives aux ensembles de Pareto des (n-1) couples de critères (f_i, f_j) .

- Les ensembles de Pareto diffèrent très légèrement d'un couple de critères à un autre.

- Le temps d'exécution du programme informatique est quasiment identique quelque soit le nombre de fonctions critères à considérer. Il est de toute manière très court sur un micro-ordinateur compatible PC 80486DX2.

Compte tenu de toutes ces remarques qui se sont continuellement répétées lors du traitement des cinq situations citées en début du paragraphe et de la marge d'ignorance qui empreint la connaissance du mode de rupture prédominant dans le calcul de la stabilité, nous préférons conclure qu'il serait souhaitable d'optimiser les quatre critères simultanément. Cette conclusion peut être d'ailleurs considérée comme définitive car elle est dictée par la prudence.

7.5 PHASE RELATIVE A L'INTRODUCTION DU CRITERE "MINIMISATION DE LA LARGEUR DU TALON"

Tel qu'il a été signalé dans le paragraphe 7.3, nous consacrons la phase suivante à la considération du cinquième critère d'optimisation à savoir la minimisation de la largeur du talon. L'introduction de ce critère permet de mieux optimiser les coûts de réalisation du mur de soutènement. Nous comparerons les nouveaux résultats ainsi obtenus avec ceux de la première phase (tab. 7.1, 7.2 et 7.3) afin de décider par la suite du choix d'un n-uple de critères indiscutable dans tous les cas. La formulation mathématique caractérisant ce critère s'écrit comme suit:

$$f_5(\bar{x}) = x_7 - x_5 \quad (7.6)$$

Remarquons seulement que pour illustrer l'étude de cette phase, nous n'avons considéré que les deux cas correspondants aux deux valeurs limites de la profondeur d'enfouissement de la semelle: $D = 1.2m$ et $D = 0.6m$.

En premier lieu, aucune contrainte n'a été imposée sur la largeur du talon, ce qui a conduit à un ensemble de Pareto très grand (127 éléments pour une profondeur $D = 1.2m$, et 80 éléments pour $D = 0.6m$). Ceci pose le problème de la difficulté de son exploration, étant entendu que l'idéal serait de pouvoir n'en conserver qu'une seule solution s'imposant comme étant au moins aussi bonne que toutes les autres, et qui paraisse être la plus satisfaisante aux yeux de l'ingénieur.

Nous avons sélectionné quelques solutions les plus illustratives sur le tab. 7.6.

$f_1^{(0)}$	f_2	f_3	f_4	f_5	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$	nature
9.589	1.506	2.269	3.323	1.698	0.537	0.303	0.518	0.586	f_1^0
10.552	1.530	2.323	3.456	1.464	0.693	0.354	0.531	0.508	f_3^0
11.135	1.940	3.489	6.097	2.107	0.688	0.336	0.597	0.565	f^*
11.484	2.368	4.864	8.439	2.790	0.668	0.331	0.533	0.562	f_3^0
11.539	2.319	4.813	8.569	2.682	0.700	0.325	0.599	0.523	f_4^0
12.613	2.381	4.825	8.239	2.709	0.656	0.400	0.597	0.593	f_2^0

(a)

$f_1^{(0)}$	f_2	f_3	f_4	f_5	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$	nature
8.021	1.692	2.732	3.050	1.680	0.605	0.311	0.484	0.459	f_1^0
8.580	1.532	2.324	2.286	1.317	0.653	0.389	0.528	0.469	f_3^0
8.998	1.956	3.533	4.506	1.917	0.672	0.367	0.482	0.493	f^*
9.460	2.327	4.820	6.577	2.414	0.630	0.311	0.539	0.471	$f_2^0 f_3^0 f_4^0$

(b)

Tab. 7.6 Présentation des solutions de Pareto après l'introduction du critère "minimisation de la largeur du talon" (a) cas pour $D = 1.2m$ (b) cas pour $D = 0.6m$.

Nota:

- f_1^0 désigne la solution donnant le critère f_1 le plus petit sur l'ensemble de Pareto.
- f^* correspond à la solution Min-Max.

Bien que nous ayons pris en compte la largeur du talon en tant que critère, il s'avère que l'ensemble des résultats obtenus renferme beaucoup de solutions assez proches de celles présentées dans le Tab. 7.1 (voir les solutions Min-Max à titre d'exemple), cas où beaucoup de solutions étaient jugées non économiques et qui nécessitaient l'introduction de contraintes restrictives sur la largeur du talon. Ce résultat nous a amené ici aussi à envisager la considération d'une contrainte limitative sur la largeur du talon dont l'évaluation dépend fortement des valeurs minimales sur l'ensemble de Pareto et données au tableau 7.6. En effet, nous y voyons que sur l'ensemble de Pareto, la solution donnant la plus faible largeur du talon correspond à la valeur: $l_t = 1.464m$ pour $D = 1.2m$. Alors que pour $D = 0.6m$, la valeur la plus petite de l_t sur l'ensemble de Pareto est: $1.317m$. En conséquence, nous proposons une nouvelle contrainte:

$$g_{11}(\bar{x}) = x_3 - x_7 + 1.5$$

Il semble utile de souligner que lors de la première phase d'optimisation, nous sommes parvenus à la même expression de la contrainte mais ceci n'était possible qu'après un premier essai sur une contrainte moins stricte. Ainsi, l'introduction du critère "minimisation de la largeur du talon" semble permettre éviter le passage répétitif par certaines étapes intermédiaires lors de la recherche de la contrainte convenable.

Le tableau 7.7 représente les résultats obtenus après introduction de la contrainte $g_{11}(\bar{x})$.

$f_1^{(i)}$	f_2	f_3	f_4	f_5	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
10.102	1.500	2.291	3.4022	1.473	0.747	0.365	0.548	0.562
10.343	1.522	2.279	3.331	1.471	0.708	0.424	0.569	0.515
*10.552	1.530	2.323	3.456	1.464	0.726	0.426	0.586	0.521
10.909	1.572	2.425	3.706	1.492	0.750	0.481	0.589	0.502

(a)

$f_1^{(i)}$	f_2	f_3	f_4	f_5	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
8.086	1.548	2.388	2.421	1.398	0.655	0.343	0.487	0.468
8.136	1.579	2.471	2.582	1.447	0.650	0.320	0.486	0.495
8.155	1.580	2.474	2.589	1.435	0.673	0.366	0.476	0.457
8.227 †	1.542	2.383	2.415	1.382	0.657	0.329	0.499	0.497
8.309 †	1.567	2.400	2.425	1.404	0.608	0.331	0.528	0.476
8.348	1.633	2.626	2.882	1.492	0.637	0.332	0.531	0.452
8.352 †	1.600	2.508	2.645	1.448	0.651	0.359	0.499	0.473
8.380 †	1.522	2.279	2.190	1.324	0.637	0.382	0.512	0.463
8.580	1.532	2.324	2.286	1.317	0.653	0.389	0.528	0.469
*8.666	1.651	2.680	2.994	1.489	0.668	0.361	0.529	0.475
8.843 †	1.572	2.425	2.479	1.343	0.675	0.434	0.530	0.452

(b)

Tab. 7.7 Présentation des solutions de Pareto après l'introduction du critère "minimisation de la largeur du talon" et la contrainte

$$g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.5. \quad (a) \text{ cas pour } D = 1.2m \quad (b) \text{ cas pour } D = 0.6m .$$

Nous constatons rapidement que cette contrainte a, d'une part, considérablement réduit le nombre de solutions, et d'autre part, affecté sensiblement les valeurs des coefficients de sécurité qui deviennent très proches de leurs valeurs minimales (notamment les coefficients de sécurité au

glissement). Ceci nous amène à écarter la possibilité d'imposer d'autres contraintes plus restrictives car nous risquons de nous trouver sans aucune solution de Pareto.

Par ailleurs, la comparaison des résultats du Tab.7.7 avec ceux correspondants à la fig. 7.22(a),(b),(c) qui présente le cas où l'on ne prend pas en compte la largeur du talon comme critère mais comme contrainte, pour $D = 1.2m$ et $D = 0.6m$ montre que:

- Relativement au tab.7.7(a), nous retrouvons les mêmes solutions optimales à la même profondeur($D = 1.2m$).

- Relativement au tab.7.7(b), des solutions nouvelles repérées par le symbole(#), viennent s'ajouter à celles que l'on avait déjà rencontrées à la profondeur $D = 0.6m$. Certaines d'entre elles peuvent être jugées préférables aux autres puisqu'elles présentent des largeurs de talon encore plus économiques ($l_t = 1.317m$) sans pour autant entraîner une modification significative du poids de la structure et des coefficients de sécurité.

Ainsi, nous admettrons que l'ajout du critère 'minimisation de la largeur du talon' accompagné de l'introduction d'une contrainte limitative sur cette même largeur s'impose en vue d'assurer la bonne évolution du processus d'optimisation des murs de soutènement. De plus, l'expression de la contrainte dépend étroitement de la valeur minimale trouvée pour la fonction critère (minimisation de la largeur du talon) lors de l'étape d'optimisation sans contrainte.

Enfin, il est clair que la procédure d'optimisation qu'il s'agit de mettre au point, a nécessité jusqu'ici la considération de différentes valeurs de profondeurs de la semelle puisque les données du problèmes sous analyse n'ont pas défini de façon précise ce paramètre important. Aussi, pour cette raison, nous avons envisagé d'entreprendre une nouvelle et dernière phase d'étude introduisant le critère "minimisation de la profondeur de la semelle", en se fixant bien entendu, un intervalle de valeurs pour la profondeur d'enfouissement de la semelle.

7.6 PHASE RELATIVE A L'INTRODUCTION DU CRITERE "MINIMISATION DE LA PROFONDEUR DE FONDATION"

Avant d'entamer l'étude de cette phase, il semble utile de souligner que la considération du critère dont il est question requiert l'introduction de certaines modifications aussi bien dans la formulation des variables de décision

limites (inférieures et supérieures) que dans celle des fonctions contraintes et critères. L'expression des limites des V.D.D. est déduite de celle définie au paragraphe 6.2, il convient alors d'écrire:

$$\begin{aligned}
 x_1^a &= (h_a + 0.6)/10 & ; & & x_1^b &= (h_a + 1.2)/8 \\
 x_2^a &= 9 (h_a + 0.6)/10 & ; & & x_2^b &= 11 (h_a + 1.2)/12 \\
 x_3^a &= 11 (h_a + 0.6)/60 - e_{\max} & ; & & x_3^b &= 9 (h_a + 1.2)/40 - e_{\min} \\
 x_4^a &= 0 & ; & & x_4^b &= 0 \\
 x_5^a &= 11 (h_a + 0.6)/60 & ; & & x_5^b &= 9 (h_a + 1.2)/40 & (7.7) \\
 x_6^a &= 0 & ; & & x_6^b &= 0 \\
 x_7^a &= 2 (h_a + 0.6)/5 & ; & & x_7^b &= 2 (h_a + 1.2)/3 \\
 x_8^a &= h_a + 0.6 & ; & & x_8^b &= h_a + 1.2 \\
 x_9^a &= x_8^a - h_a & ; & & x_9^b &= x_8^b - h_a
 \end{aligned}$$

Avec:

$$\begin{aligned}
 e_{\max} &= \text{Max} (0.2, (h_a + 1.2)/24 \text{ ou } (h_a + 1.2)/12) \\
 e_{\min} &= 0.2 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

h_a désigne la hauteur apparente du mur de soutènement (fig. 7.1).

La variable de décision x_9 représente la profondeur de fondation D . Nous considérons que D reste inclus dans l'intervalle $[0.6 \text{ m}, 1.2 \text{ m}]$.

Par ailleurs, relativement aux fonctions contraintes et critères, toutes les équations (6.3)-(6.29) décrites dans le chapitre subséquent ont été préservées en substituant au paramètre D la variable x_9 . De surcroît, nous avons aussi ajouté une nouvelle fonction critère à minimiser décrivant la profondeur de la semelle:

$$f_6(\bar{x}) = x_9 - h_a \quad (7.8)$$

Le tableau 7.8 donne les solutions de Pareto résultant de l'optimisation des six fonctions critères, à savoir la minimisation du poids, la maximisation de la stabilité (glissement, renversement et poinçonnement), la minimisation de la largeur du talon sans soumettre ce critère à aucune contrainte restrictive

(dans cette nouvelle phase, on suppose ignorer la valeur minimale économique devant être attribuée à la largeur du talon) et enfin la minimisation de la profondeur de la semelle.

$f_1^{(0)}$	f_2	f_3	f_4	$f_5^{(m)}$	$f_6^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
8.243	1.540	2.378	2.544	1.418	0.664	0.669	0.321	0.479	0.513
8.551	1.505	2.294	2.451	1.350	0.708	0.685	0.345	0.503	0.515
8.658	1.600	2.508	2.872	1.475	0.700	0.663	0.364	0.508	0.482
9.040	1.526	2.298	2.422	1.321	0.695	0.707	0.441	0.496	0.508
9.339	1.617	2.557	3.199	1.498	0.801	0.664	0.353	0.555	0.527
9.355	1.790	3.019	4.101	1.754	0.795	0.669	0.378	0.521	0.491
9.430	1.538	2.380	3.242	1.484	1.040	0.705	0.343	0.536	0.534
9.698	1.634	2.640	3.875	1.628	1.013	0.746	0.362	0.499	0.563
10.007	1.619	2.542	3.368	1.499	0.912	0.709	0.418	0.543	0.556
*10.132	1.907	3.457	5.474	1.971	0.954	0.724	0.351	0.552	0.521
10.149	2.241	4.370	6.440	2.409	0.820	0.661	0.382	0.470	0.534
10.356	2.229	4.299	7.024	2.550	1.069	0.626	0.350	0.494	0.512
10.817	2.475	5.186	7.542	2.651	0.799	0.647	0.445	0.541	0.468
11.017	2.163	4.148	6.343	2.253	0.885	0.694	0.409	0.542	0.566
11.690	2.134	4.066	6.945	2.318	1.135	0.699	0.409	0.592	0.548

Tab. 7.8 Présentation des solutions Pareto après l'introduction du critère "minimisation de la profondeur de la semelle".

La comparaison de ce tableau avec celui résultant du cas caractérisant la prise en compte de cinq critères (phase précédente) sans imposer de contraintes sur la largeur du talon (tab. 7.6) nous permet de réaliser que l'ajout du critère "minimisation de la profondeur" implique les conséquences suivantes:

- Le nombre des solutions Pareto a fortement diminué.

- La minimisation de la fonction critère "largeur du talon" prise séparément (c-à-d f_3^0) procure une valeur du même ordre de grandeur que celle rencontrée dans le tab. 7.6(b) où il s'agit du cas d'introduction du critère "minimisation de la largeur du talon" sans imposer de contrainte sur cette largeur ($l_t = 1.32m$ dans tab.7.8 et $l_t = 1.317m$ dans tab.7.6(b)).

- Pour des profondeurs de semelle très rapprochées (presque égales), nous pouvons observer une variation excessive dans les valeurs des différentes fonctions critères considérées. Par exemple, s'agissant de la profondeur au voisinage de 1.00 mètre, nous distinguons cinq solutions dont deux illustrent fortement cette remarque. En effet, si nous désignons ces deux solutions par:

S_1 ($f_1 = 9.430$, $f_2 = 1.538$, $f_3 = 2.38$, $f_4 = 3.242$, $f_5 = 1.484$, $f_6 = 1.040$)
 et S_2 (11.690 , 2.134 , 4.066 , 6.945 , 2.318 , 1.135), elles présentent en effet une grande variation relativement au poids de la structure (allant jusqu'à 2 tonnes), à la largeur du talon (d'environ 0.8 mètres) ainsi qu'aux coefficients de sécurité.

Ceci signifie que pour des profondeurs de semelle avoisinantes, il est possible de trouver des solutions beaucoup plus favorables sur tous les plans que les autres. Dans cette situation, la sélection des solutions économiques nous conduit vers un ensemble de Pareto encore plus réduit, permettant un choix plus aisé d'une solution préférable aux autres quand la solution Min-Max ne s'impose pas. Toutefois, quand l'ensemble de Pareto est très grand, cette sélection ne peut être facilitée que par l'ajout de contraintes limitatives sur la largeur du talon, sur la profondeur de fondation de la semelle et même sur le poids de la structure quand cela est nécessaire.

Dans notre cas, le nombre des solutions de Pareto n'étant pas élevé, nous pouvons facilement détecter les solutions économiques. Cependant, afin d'examiner les conséquences résultant de l'ajout des contraintes relatives à la profondeur de la semelle et la largeur du talon, nous avons considéré le cas introduisant les contraintes suivantes:

$$\begin{aligned} g_{11}(\bar{x}) &= x_5 - x_7 + 1.5 \\ g_{12}(\bar{x}) &= 0.8 - x_9 \end{aligned} \quad (7.9)$$

$g_{11}(\bar{x})$ et $g_{12}(\bar{x})$ désignent respectivement les contraintes sur la largeur du talon et la profondeur d'enfouissement de la semelle.

Nous remarquons uniquement la présence de toutes les solutions du tab. 7.8 satisfaisant les deux contraintes d'inégalité, ce qui vient corroborer les

constatations sur l'inclusion des ensembles de Pareto issus de l'optimisation avec contraintes d'inégalité dans ceux correspondants à la même optimisation (même critères) sans contraintes.

A la lumière de ce qui a été remarqué, nous pensons que lorsque la profondeur D constitue une variable de décision, le processus d'optimisation doit considérer dans ces conditions tous les critères abordés dans cette phase d'étude accompagnés des différentes contraintes à savoir les contraintes sur les critères de stabilité, sur les différents éléments du mur considéré en respectant les règles relatives au dimensionnement usuel, sur la largeur du talon et la profondeur d'enfouissement de la semelle en fonction du but économique visé par l'ingénieur, et enfin les contraintes d'ordre environnementales quand elles existent.

En général, une fois le tableau des résultats fournis, le décideur se trouve confronté à deux situations:

- Soit il accepte la solution Min-Max, ou choisit une autre solution qui lui paraît plus convaincante à ses yeux.

- Soit il préfère se situer au voisinage d'une solution optimale (appartenant à l'ensemble de Pareto). Dans ces conditions, il peut choisir une valeur fixe de la profondeur de la semelle déduite à partir du tableau des résultats, et la soumettre ensuite à une seconde étape d'optimisation en ne considérant que cinq critères (c'est-à-dire en supprimant le critère sur la profondeur). Dans ce dernier cas, l'introduction de contraintes restrictives sur la largeur du talon et même sur le poids de la structure quand cela est nécessaire s'impose. Leurs expressions résultent des valeurs de la largeur du talon et du poids de la structure attribuées à la profondeur de la semelle fixée précédemment pour conduire l'optimisation de cinq critères.

Nous verrons plus clairement cette façon de faire à travers le tableau 7.9 qui résulte du fait de vouloir situer nos solutions au voisinage de celle qui présente les composantes suivantes (voir tab. 7.8):

$$S (f_1 = 8.658 , f_2 = 1.600 , f_3 = 2.508 , f_4 = 2.872 , f_5 = 1.475 , f_6 = 0.700)$$

c'est-à-dire se conformer aux conditions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} D = 0.70m \\ g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + 1.475 \end{array} \right\}$$

	$f_1^{(0)}$	f_2	f_3	f_4	$f_5^{(m)}$	$l_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
S_1	8.201	1.547	2.380	2.450	1.391	0.729	0.318	0.481	0.492
S_2	8.248	1.551	2.402	2.470	1.402	0.705	0.323	0.478	0.502
S_3	9.351	1.533	2.330	2.418	1.320	0.793	0.450	0.498	0.530

Tab. 7.9

Compte tenu des trois solutions optimales dont on dispose, il est normal qu'on affiche une préférence d'une solution par rapport aux autres. Pour ce qui est de la comparaison entre S_1 et S_2 , on reconnaît sans difficulté que les écarts sont très peu significatifs, ce qui permet de justifier leur équivalence. La comparaison entre S_1 (ou S_2) et S_3 est en revanche peu délicate. En effet, le critère poids est favorable à S_1 (ou S_2) puisque nous économisons 1t/ml de béton si nous optons pour S_1 (S_2), tandis que le critère "minimisation de la largeur du talon" est légèrement favorable à S_3 étant donné que nous aurons presque un volume de 0.55 m³/ml de terrain à ne pas déblayer et ensuite remblayer si nous optons pour S_3 , et enfin pour ce qui est du critère stabilité, nous avons tendance, en raison du faible écart des coefficients, à placer S_1 (ou S_2) et S_3 sur le même plan de préférence puisque nous sommes dans les deux cas au delà du seuil de la sécurité. Dans ces conditions, le décideur doit alors disposer de suffisamment d'informations sur les coûts du béton, temps et coût de réalisation d'un m³/ml de déblaiement et remblaiement pour pouvoir calculer les coûts exacts de chaque solution, et faire une comparaison uniquement du point de vue économique.

7.7 REPONSE AU PROBLEME DE MINIMISATION DE LA STABILITE EXTERNE DU MUR DE SOUTÈNEMENT

Avant d'achever notre étude sur le choix des critères et des contraintes, nous aimerions attirer l'attention sur le fait que dans le cadre des différentes phases abordées, toutes les solutions optimales jugées économiques fournissent des coefficients de sécurité très proches de leurs valeurs limites bien qu'il s'agisse dans la formulation du problème d'optimisation d'une maximisation de la stabilité. Cette constatation nous a poussé à nous poser la question suivante: " Que se passerait-il si nous procédons à la minimisation

de tous les critères y compris les coefficients de sécurité, sans imposer aucune contrainte additionnelle ni sur la largeur du talon, ni sur la profondeur de fondation de la semelle?". La réponse à cette question apparaît nettement sur le tableau 7.10 où nous remarquons la présence de deux solutions de Pareto uniquement. Celles-ci ont été rencontrées précédemment parmi les solutions obtenues dans le cas considérant l'optimisation des six critères (tab. 7.8), et représentent en plus les valeurs minimales des fonctions critères f_1 , f_5 , f_6 prises séparément dans le tableau 7.8. La comparaison de ces solutions avec celles obtenues dans le tableau 7.9 (cas où l'on supprime le critère sur la profondeur de la semelle en le remplaçant par des contraintes établies afin de se situer au voisinage d'une solution convaincante aux yeux du décideur) ne montre guère de différence significative qui nous permettrait de les écarter. Elles peuvent au contraire être considérées comme des solutions très satisfaisantes qui méritent d'être analysées en vue de la recherche d'une configuration optimale du mur de soutènement.

$f_1^{(n)}$	f_2	f_3	f_4	$f_5^{(m)}$	$f_6^{(m)}$	$i_p^{(m)}$	$e_s^{(m)}$	$e_b^{(m)}$	$e_f^{(m)}$
8.243	1.540	2.378	2.544	1.418	0.664	0.669	0.321	0.479	0.513
9.040	1.526	2.298	2.422	1.321	0.695	1.321	0.707	0.496	0.508

Tab. 7.10 Présentation des solutions de Pareto obtenues par la minimisation de tous les critères

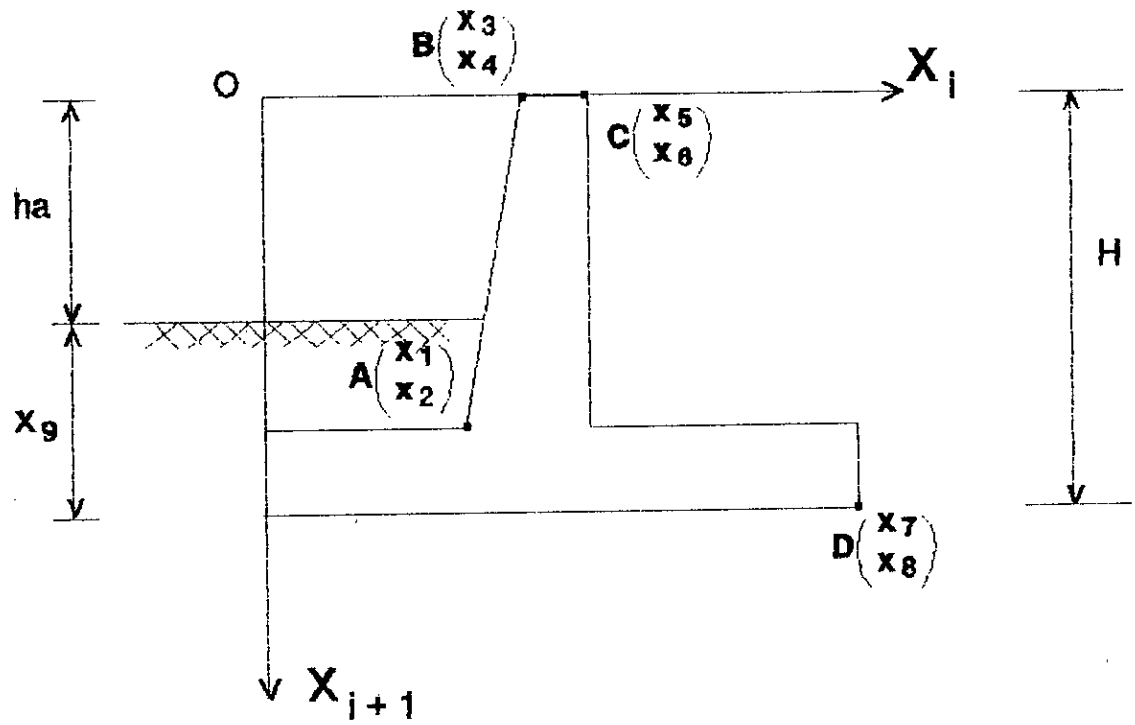
Ajoutons encore que par cette procédure, nous obtenons dès le début du processus d'optimisation un ensemble de Pareto très réduit qui ne requiert l'établissement d'aucune contrainte limitative ni sur la largeur du talon, ni sur la profondeur de la semelle du fait que les résultats fournis se situent à la limite de la sécurité. Ainsi, sur la base de ces constatations, nous pensons qu'il serait légitime de procéder à une minimisation de tous les critères y compris les facteurs de sécurité afin d'éviter le passage obligatoire par certaines étapes nécessaires dans le cas de la maximisation de la stabilité. Cependant, l'adoption de cette procédure d'optimisation signifie que l'aspect sécurité caractérisant principalement la qualité d'un mur de soutènement perd nettement de son importance, et n'est plus considéré que comme une contrainte (valeur minimale de F_s). Ceci peut paraître parfois peu prudent surtout

lorsqu'on sait que la détermination de l'ensemble des calculs de stabilité pour l'étude d'un mur de soutènement est empreint d'une grande part d'incertitude, celle-ci est accentuée encore par ce qui se passe derrière l'élément vertical du mur qui fait "soutènement des terres". Là, les phénomènes sont d'une infinie complexité. Le nombre des facteurs qui interviennent pour définir l'interaction terres-mur étant grand, la connaissance de la plupart de ces facteurs n'est pas encore assez bonne malgré les études fort nombreuses. Les résultats qu'on obtient en faisant des calculs de stabilité, si savantes que soient les méthodes qu'on emploie, ne sont en fait que des approximations basées sur des formules empiriques. Par conséquent, le corollaire immédiat établit la nécessité de ne pas sacrifier la sécurité, il faut prévoir large. C'est cette sécurité que l'on essaie de mesurer au moyen de ce que l'on appelle le coefficient de sécurité dont le seul but est au fond de pouvoir considérer comme fiables des calculs qui ne sont pas exacts [51]. Pour cette raison, en dépit du faible intervalle d'écart entre les résultats obtenus par les deux démarches évoquées dans ce chapitre, nous jugeons nécessaire d'adopter celle qui procède à une maximisation des critères de stabilité, minimisation des critères poids, de la largeur du talon et de la profondeur de fondation de la semelle, accompagnées bien entendu des contraintes nécessaires et additionnelles proposées tout au long de ce chapitre, visant ainsi à apprécier la qualité du mur en cours de dimensionnement.

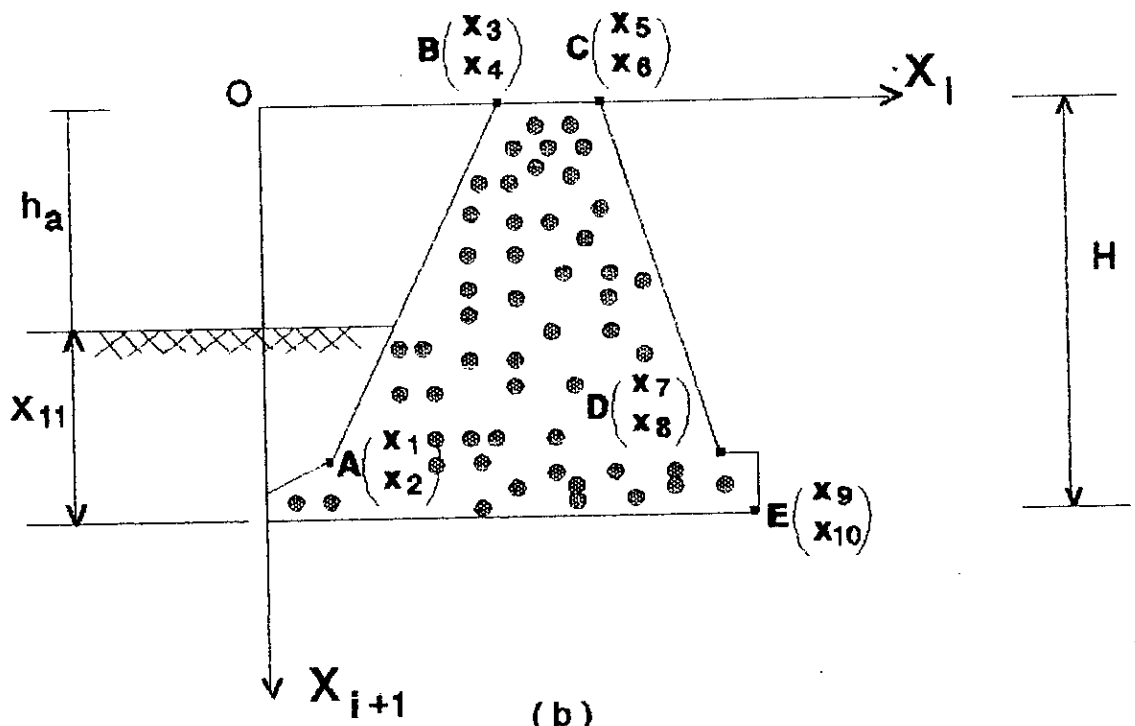
7.8 PROCEDURE D'OPTIMISATION RETENUE

Pour résumer ce qui précède, nous proposons de suivre la démarche suivante:

- 1) Modéliser le mur de soutènement en considérant un ensemble de variables de décision x_i avec $i = 1,2,\dots,9$ pour le mur profilé, et $i = 1,2,\dots,11$ pour le mur poids comme le montre la figure 7.15.
- 2) Choisir un nombre de génération très élevé.
- 3) Exprimer les bornes limites des variables de décision du problème d'O.M.C (pour les équations qui viennent, nous considérons seulement l'exemple du mur de soutènement en forme de té renversé):



(a)



(b)

Fig. 7.15

$$\begin{aligned}
x_1^a &= (h_a + D_a)/10 & ; & & x_1^b &= (h_a + D_b)/8 \\
x_2^a &= 9 (h_a + D_a)/10 & ; & & x_2^b &= 11 (h_a + D_b)/12 \\
x_3^a &= 11 (h_a + D_a)/60 - e_{\max} & ; & & x_3^b &= 9 (h_a + D_b)/40 - e_{\min} \\
x_4^a &= 0 & ; & & x_4^b &= 0 \\
x_5^a &= 11 (h_a + D_a)/60 & ; & & x_5^b &= 9 (h_a + D_b)/40 \\
x_6^a &= 0 & ; & & x_6^b &= 0 \\
x_7^a &= 2 (h_a + D_a)/5 & ; & & x_7^b &= 2 (h_a + D_b)/3 \\
x_8^a &= h_a + D_a & ; & & x_8^b &= h_a + D_b \\
x_9^a &= x_8^a - h_a & ; & & x_9^b &= x_8^b - h_a
\end{aligned}$$

Avec:

$$\begin{aligned}
e_{\max} &= \text{Max} (0.2, (h_a + D_b)/24 \text{ ou } (h_a + D_b)/12) \\
e_{\min} &= 0.2 \quad (m)
\end{aligned}$$

Nota: Pour le mur poids, il suffit de se référer à l'équation (6.2) afin d'établir les valeurs limites des v.d.d en substituant D par x_{11} .

D_a et D_b désignent respectivement les valeurs limites (minimale et maximale) de la profondeur de fondation.

4) Optimiser simultanément les critères suivants: $f_1(\bar{x})$ (minimiser le poids du mur), $f_2(\bar{x})$, $f_3(\bar{x})$, $f_4(\bar{x})$ (maximiser respectivement la stabilité au glissement, au renversement et au poinçonnement), $f_5(\bar{x})$ (minimiser la largeur du talon) et enfin $f_6(\bar{x})$ (minimiser la profondeur d'enfouissement de la semelle). L'expression mathématique de chacune des fonctions critères s'écrit comme suit:

$$f_1(\bar{x}) = \left(\frac{x_2}{2} (2x_5 - x_3 - x_1) + x_7 (x_8 - x_2) \right) \gamma_b \quad (\text{pour le mur profilé})$$

Pour le mur poids:

$$f_1(\bar{x}) = (x_1 (x_{10} - x_8 + b) + x_2 (x_5 - x_3 + x_7 - x_1) + 2 (x_{10} - x_8) (x_9 - x_1)) \frac{\gamma_b}{2}$$

$$f_2(\bar{x}) = -F_{SG}(\bar{x}) \quad (\text{se référer aux équations 6.5-6.11})$$

$$f_3(\bar{x}) = -F_{SR}(\bar{x}) \quad (\text{se référer aux équations 6.12-6.16})$$

$$f_4(\bar{x}) = -F_{SP}(\bar{x}) \quad (\text{se référer aux équations 6.17-6.24})$$

$$f_5(\bar{x}) = x_7 - x_5 \quad (\text{pour le mur profilé})$$

$$f_5(\bar{x}) = x_9 - x_5 \quad (\text{pour le mur poids})$$

$$f_6(\bar{x}) = x_8 - h_a \quad (\text{pour le mur profilé})$$

$$f_6(\bar{x}) = x_{10} - h_a \quad (\text{pour le mur poids})$$

5) Etablir les fonctions contraintes $g_1(\bar{x})$, $g_2(\bar{x})$, $g_3(\bar{x})$ sur les critères de stabilité, et $g_4(\bar{x})$, $g_5(\bar{x})$, ..., etc sur les dimensions du mur conformément aux intervalles de prédimensionnement usuel des murs en béton armé. Dans notre cas, nous avons:

$$g_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x}) - (F_{SG})_{\min}$$

$$g_2(\bar{x}) = f_3(\bar{x}) - (F_{SR})_{\min}$$

$$g_3(\bar{x}) = f_4(\bar{x}) - (F_{SP})_{\min}$$

Pour le mur profilé:

$$g_4(\bar{x}) = x_5 - x_3 - 0.2 (m)$$

$$g_5(\bar{x}) = x_5 - x_1 - x_9/12$$

$$g_6(\bar{x}) = x_1 - x_5 + x_9/10$$

$$g_7(\bar{x}) = x_3 - x_1 - 0.02 x_2$$

$$g_8(\bar{x}) = 11/12 x_8 - x_2$$

$$g_9(\bar{x}) = x_2 - 9/10 x_8$$

$$g_{10}(\bar{x}) = x_9 - x_8 + x_2$$

Pour le mur poids, se référer à l'équation (6.29) en substituant D par x_{11} .

Dans ces conditions, l'ensemble de Pareto est souvent très grand, et offre des valeurs minimales intéressantes pour les fonctions critères relatives à la largeur du talon, à la profondeur de fondation de la semelle et au poids

de la structure, ce qui permet d'effectuer une seconde optimisation en ajoutant les contraintes suivantes (pour le mur profilé à titre d'exemple):

$$g_{11}(\bar{x}) = f_1^m - \left(\frac{x_2}{2} (2x_5 - x_3 - x_1) + x_7(x_8 - x_2) \right) \gamma_b$$

$$g_{12}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + f_5^m$$

$$g_{13}(\bar{x}) = f_6^m - x_9$$

où f_1^m , f_5^m et f_6^m dépendent étroitement des valeurs minimales des fonctions critères $f_1(\bar{x})$, $f_5(\bar{x})$ et $f_6(\bar{x})$ établies lors de l'optimisation précédente, ainsi que du choix du décideur.

Enfin, si le décideur préfère se situer au voisinage d'une solution optimale (du point de vue poids, largeur du talon, profondeur de la semelle), il doit alors procéder à une autre optimisation en ne considérant que cinq critères. Dans ce cas, il supprime le critère caractérisant la profondeur de la fondation, substitue la variable de décision x_9 par D dans les équations précédentes et considère les contraintes additionnelles suivantes:

$$g_{11}(\bar{x}) = x_5 - x_7 + f_5^s$$

$$g_{12}(\bar{x}) = f_1^s - \left(\frac{x_2}{2} (2x_5 - x_3 - x_1) + x_7(x_8 - x_2) \right) \gamma_b$$

$$D = f_6^s$$

où f_1^s , f_5^s et f_6^s désignent respectivement les valeurs attribuées au poids de la structure, à la largeur du talon et à la profondeur de la semelle de la solution au voisinage de laquelle veut se situer le concepteur.

Pour terminer ce paragraphe, nous présentons les résultats obtenus pour le mur poids (nous gardons toujours les mêmes caractéristiques du remblai et du sol de fondation données pour le mur profilé) en appliquant la démarche d'optimisation adoptée. A cet effet, nous obtenons un ensemble de Pareto ne contenant qu'une seule solution offrant la configuration géométrique du mur poids la plus optimale:

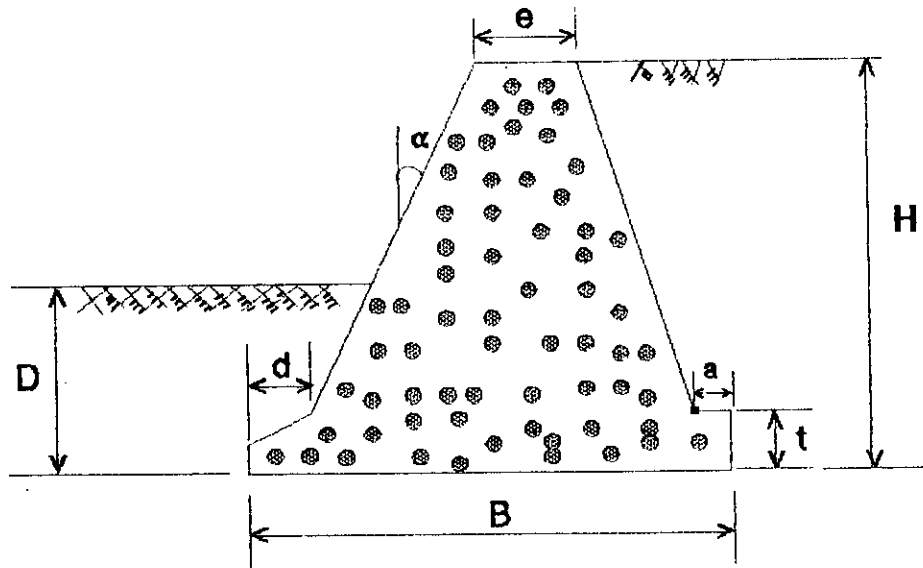


Fig. 7.16 Configuration du mur poids obtenu

$P^{(o)}$	F_{so}	F_{SR}	F_{SP}	$D^{(m)}$	$t^{(m)}$	$d^{(m)}$	$e^{(m)}$	$B^{(m)}$	$a^{(m)}$	$tg\alpha$
20.233	1.909	2.191	2.080	0.900	0.882	0.877	0.473	2.978°	0.150	4.577

7.9 COMPARAISON DE LA METHODE D'OPTIMISATION PRESENTEE A UNE AUTRE METHODE AYANT POUR BUT LA CONCEPTION DU MUR DE SOUTÈNEMENT CANTILEVER BASEE SUR LA MINIMISATION DU CÔÛT

Le présent paragraphe a pour but de présenter une procédure intéressante d'optimisation des murs de soutènement cantilever [52], différente de celle utilisée dans notre travail en vue d'une simple comparaison des résultats issus de l'utilisation des deux méthodes. Celle-ci vise surtout à satisfaire non seulement les critères de résistance et de stabilité du mur, mais aussi celui du coût minimal. En effet, cette méthode repose sur l'utilisation d'un programme d'aide à la conception devant considérer des règles empiriques issues des ouvrages et règlements techniques ainsi que d'une étude statistique des pratiques par des experts dans le domaine afin de

concevoir des murs situés dans l'intervalle de 5% du coût minimal absolu.

7.9.1 Présentation de la Méthode

7.9.1.1 Modèle

Le modèle mathématique utilisé est représenté par un mur en forme de té renversé (fig. 7.1) comportant un terre plein horizontal, soumis à un chargement uniforme et dont la pression active du sol exercée sur le mur est calculée par la méthode de Rankine. Cette approche permet également l'utilisation d'autres méthodes de détermination des coefficients de poussée et peut facilement être adaptée à d'autres formes géométriques du mur de soutènement présentant un talus incliné et soumis à d'autre cas de chargement.

Par ailleurs, le calcul de stabilité des murs de soutènement traités par cette méthode est effectué de la même manière (utilise les mêmes hypothèses simplificatrices) que celle évoquée dans notre étude.

7.9.1.2 Optimisation

Bien qu'un mur de soutènement puisse se rompre sous différents modes de rupture tel que:

- Rupture par glissement sur son plan de fondation
- Rupture par renversement
- Rupture du terrain de fondation
- Rupture des différents éléments constitutifs du mur suite à une résistance insuffisante.

Le mode de rupture par glissement est écarté de l'analyse d'optimisation entreprise ici. Les auteurs justifient cela du fait de l'utilisation soit d'une semelle large, soit d'une semelle munie de bèches prévues pour bien amarrer le mur dans le sol de fondation. Les autres modes de rupture sont pris en considération sous forme de contraintes.

Cette méthode d'optimisation comporte deux étapes essentielles intimement liées. La première consiste à déterminer les dimensions les plus intéressantes au sens économique du terme. Il s'agit en effet d'optimiser les dimensions du mur (largeur du talon l_t , épaisseur de la base du rideau e_b , épaisseur de la semelle de fondation e_s , largeur du patin l_p) par l'intermédiaire d'une recherche intense qui repose sur la variation de la largeur l_t du talon suivant

un pas prédéfini telle que pour chaque l_i considérée, les dimensions e_s et l_p sont calculées si les contraintes sur les coefficients de sécurité par rapport à la rupture sont satisfaites. Celles ci imposent une valeur de F_s égale au minimum (c-à-d 1.5). L'épaisseur e_b est évaluée en procédant à la recherche du minimum de la fonction coût C_x d'une section armée (coût du béton + coût du ferrailage) propre au rideau. Dans ces conditions, il suffit de résoudre l'équation $\frac{\partial C_x}{\partial e_b}$.

Il est à noter que la profondeur de la semelle de fondation n'est pas optimisée, elle est prise égale à 0.9 mètres durant toute cette étude. Ainsi, la variation de la largeur du talon entraîne automatiquement celle des dimensions de la semelle de fondation, et permet par conséquent la représentation de la courbe coût en fonction de la largeur du talon. La fonction coût dépend du coût de la semelle calculé à partir du volume du béton et du tonnage d'acier (utilisé dans le ferrailage) nécessaires à la réalisation de la base de fondation. La seconde étape de cette procédure d'optimisation consiste à évaluer la largeur du talon économique procurant un coût du mur avec un écart positif de 5% du coût minimal absolu. Les auteurs proposent de déterminer cette largeur par l'intermédiaire d'une étude statistique très large en vue d'établir une formule mathématique qui fait intervenir cinq variables: la hauteur du mur H , l'angle de frottement interne ϕ , le poids volumique du remblai γ , la surcharge uniforme q_0 , la pression admissible du sol p_{am} .

Une étude complète exigerait la représentation du rapport addimensionnel $\frac{b}{H}$ en fonction de ces cinq paramètres pour plusieurs murs analysés afin qu'il soit possible d'aboutir à la formule mathématique recherchée, permettant ainsi de déterminer la largeur du talon nécessaire à procurer un dimensionnement des murs de soutènement situé dans l'intervalle de 5% du coût minimal absolu. Les auteurs définissent cette largeur en utilisant la relation suivante:

$$l_{opt} = 0.27 A_\phi A_\gamma A_{q_0} H \quad (7.10)$$

Avec:

$$\begin{aligned} A_\phi &= 1.66 - 0.022 \phi \\ A_\gamma &= 1.0 \\ A_{q_0} &= 0.89 + 0.0011 q_0 \end{aligned}$$

l_{opt} est exprimée en foot ($1ft = 0.305m$)

q est exprimé en psf ($100 psf = 0.479 t/m^2$)

γ est exprimé en pcf ($100 pcf = 1.570 t/m^3$)

Ce résultat nous a incité à effectuer une comparaison entre la largeur optimale obtenue moyennant cette formule, et la largeur découlant de notre programme d'optimisation pour un certain nombre de murs utilisés dans le cadre de la recherche de la formule 7.10.

$$1 \text{ ft} = 0.305 \text{ m}, \quad 100 \text{ psf} = 0.479 \text{ t/m}^2, \quad 100 \text{ pcf} = 1.57 \text{ t/m}^3$$

H (ft)	ϕ^0	γ (pcf)	q (psf)	P^0	F_{SG}	F_{SR}	F_{SP}	$l_{opt}^{(m)}$	$l_t^{(m)}$	$D^{(m)}$	$P\%$
12.5	30	100	100	4.510	1.605	2.714	2.280	1.029	1.312	0.785	27.50
15	30	100	00	6.450	1.623	2.677	2.049	1.099	1.401	0.800	27.48
15	30	100	100	6.583	1.735	3.088	2.352	1.235	1.601	0.860	29.63
15	30	100	200	6.740	1.821	3.396	2.310	1.370	1.781	0.900	30
15	30	80	100	6.581	1.852	3.178	2.276	1.235	1.602	0.742	29.71
15	30	120	100	6.015	1.582	2.875	2.021	1.235	1.593	0.710	29
15	35	80	00	5.516	1.740	2.385	3.141	0.978	0.995	0.730	1.74
15	35	100	100	5.513	1.816	1.917	2.080	1.099	1.203	0.730	9.46
17.5	30	100	100	8.146	1.607	2.828	2.020	1.440	1.846	0.795	28.2
20	30	100	100	11.340	1.681	3.000	2.100	1.647	2.01	0.857	22

Tab. 7.12

Nous désignons par:

- P : la valeur optimale du poids de la structure
- F_{SG} , F_{SR} , F_{SP} : les valeurs des coefficients de sécurité respectivement au glissement, au renversement, et au poinçonnement.
- D : la profondeur de la semelle de fondation.
- $P\%$: le pourcentage d'écart entre l_{opt} et l_i^* où:

$$P\% = \frac{l_i^* - l_{i(opt)}}{l_{i(opt)}} \quad (7.11)$$

A partir du tableau 7.12, nous constatons d'une part que toutes les largeurs du talon calculées à partir des solutions Pareto sont supérieures à celles obtenues moyennant l'équation 7.10, elles sont donc moins économiques. Les coefficients de sécurité F_{SG} , F_{SR} et F_{SP} sont nettement supérieurs à leurs valeurs minimales (=1.5), ce qui offre une meilleure sécurité. La profondeur de la semelle de fondation est comprise entre 0.7 et 0.9 mètre.

D'autre part, nous observons que pour notre méthode d'optimisation, la variation du poids volumique du remblai γ n'a pas d'influence sur la largeur du talon (voir le cas $H = 15ft$, $\phi = 30^\circ$, $q = 100 psf$, $\gamma = 80, 100, 120 pcf$) ce qui est confirmée par la seconde procédure d'optimisation où $A_\gamma = 1$. Enfin, les pourcentages varient de 1.74% à 30%. Un pourcentage faible (respectivement élevé) n'est pas forcément lié à des coefficients de sécurité faibles (respectivement élevés).

Ceci ne nous permet pas d'établir une conclusion définitive concernant le rapprochement ou l'éloignement des résultats car les hypothèses des deux procédures sont assez différentes. En effet, dans cette procédure d'optimisation, la stabilité au glissement est ignorée, les stabilités au renversement et au poinçonnement ne sont pas considérées en tant que critères mais en tant que contraintes seulement, où les valeurs de F_{SR} et F_{SP} doivent être égales à 1.5, la profondeur de la semelle est fixée à $D = 0.9m$. Par conséquent, nous pouvons conclure que le dimensionnement des murs de soutènement par optimisation multicritère dépend fortement de la procédure d'optimisation adoptée. Il serait alors indispensable de mener une recherche des méthodes d'optimisation multicritère les plus appropriées.

CONCLUSION

A travers ce travail, nous avons pu montrer l'intérêt des méthodes d'optimisation multicritère pour des problèmes de conception en génie civil, en particulier le dimensionnement des murs de soutènement. En effet, ces méthodes se basent sur une démarche rationnelle qui aide l'ingénieur à déterminer la meilleure réponse au sens économique pour le problème de dimensionnement en présence de situations conflictuelles à savoir la minimisation du critère poids et la maximisation des critères de stabilité.

Ainsi, plusieurs auteurs proposent différentes méthodes pour aider l'ingénieur dans cette démarche [3][5][10]. Nous pouvons citer parmi celles-ci:

- Les méthodes d'agrégation des critères qui consistent à donner un poids à chaque critère, visant à réduire les situations d'incomparabilité.
- La méthode Min-Max qui consiste à chercher la solution la plus proche du vecteur idéal des critères.

Pendant, pour le dimensionnement des murs de soutènement, il est difficile de retenir une méthode préférentielle car les critères autre que le poids sont des facteurs de sécurité tous d'égale importance. Quand au poids, il nous a semblé tout aussi important que les autres critères. L'approche Min-Max paraît donc bien adapté.

L'étude numérique présentée dans la présente thèse montre les limites actuelles de notre travail. Les principales conclusions et constatations auxquelles nous avons abouti sont résumées dans les paragraphes subséquents.

Ainsi, la bonne réponse au problème de dimensionnement repose sur deux points essentiels:

- 1- La modélisation du mur considéré en un certain nombre de points, qui puissent suffisamment bien décrire sa configuration géométrique et qui sont représentés par un vecteur de variables de décision (V.D.D.).
- 2- Une formulation mathématique adéquate des valeurs limites des variables de décision des fonctions contraintes et des fonctions critères.

Notons que la formulation mathématique des valeurs limites des variables de décision n'est pas évidente et est empreinte d'une grande part d'incertitude, ce qui influe considérablement sur la qualité des résultats. Pour

cela, le champ de contraintes devrait être appliqué sur l'espace des V.D.D. et sur celui des critères. Il devrait aussi être élargi pour permettre d'une part, de réduire progressivement l'ensemble des solutions de Pareto et d'autre part de faciliter la recherche d'un aspect plus économique à ces solutions.

Les critères jugés principalement intéressants sont le poids et les trois critères de stabilité de la structure (au glissement, au renversement et au poinçonnement). Nous avons traité toutes les combinaisons possibles entre le poids et les différentes composantes de la stabilité afin de déterminer le n-uple de critères satisfaisant. Ceci nous a mené à conclure qu'il serait souhaitable d'optimiser les quatre critères simultanément surtout lorsqu'on sait que la connaissance du mode de rupture prédominant dans le calcul de la stabilité est empreint d'une grande marge d'ignorance. A cela, s'ajoutent d'autres critères de type géométrique en vue d'affiner les solutions de Pareto telles que la minimisation de la largeur du talon de la semelle et la minimisation de la profondeur de fondation. Donc, nous retiendrons les six critères établis lors du processus d'optimisation, accompagnés bien entendu des contraintes imposées sur chacun de ces critères et sur le champ des variables de décision.

Par ailleurs, le programme ainsi réalisé permet de générer rapidement les solutions de dimensionnement. Grâce aux performances des nouveaux microprocesseurs, nous avons pu facilement travailler avec des ensembles comptant jusqu'à 10000 solutions générées par la méthode de Monte Carlo. Seulement les solutions vérifiant les contraintes imposées sont admissibles. Et à partir de celles-ci est formé l'ensemble des solutions non dominées ou plus précisément l'ensemble des solutions de Pareto. En fait, l'essentiel du problème de dimensionnement réside dans l'assistance à la sélection de l'une des solutions de Pareto. Pour cela, l'approche Min-Max offre une solution optimum Min-Max. Toutefois, cet optimum ne confère pas toujours une réponse satisfaisante à l'ingénieur, ce qui l'amène souvent à choisir une solution figurant dans l'ensemble de Pareto ou se situant au voisinage d'une solution acceptable à ses yeux.

Au niveau de la représentation, la méthode est limitée par le nombre de critères ($n \geq 3$), ce qui nous a conduit à recourir à l'utilisation des tableaux pour une meilleure interprétation des résultats les plus pertinents.

Enfin, la méthode utilisée dans la présente thèse pourrait être étendue au cas des murs complexes du point de vue configuration géométrique, chargement du terre plein, structure multicouche du terrain de fondation et

du remblai et considération de l'interaction sol-structure afin de rendre les résultats plus pratiques bien qu'un investissement important de temps, moyens humains et matériels s'impose.

Par conséquent, plusieurs pistes sont ouvertes et doivent être poursuivies simultanément. Celle de l'enrichissement des logiciels de calcul existant en automatisant le dimensionnement, celle de la recherche de l'existence et de la pertinence des critères, celle de l'intégration des interfaces graphiques pour des problèmes à plusieurs dimensions afin de visualiser les ensembles de Pareto et enfin celle de la recherche de méthodes d'optimisation multicritère plus appropriées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] *M. Minoux*, 'Programmation Mathématique: Théorie et Algorithmes', Edition Dunod, Paris, 294 p., 1983.
- [2] *J. Koski*, 'Multicriterion Optimization in Structural Design', Proceedings of International Symposium on Optimum Structural Design, University of Arizona, Tucson; Arizona, 1981.
- [3] *B. Roy*, 'Méthodologie Multicritère d'Aide à La Décision', Collection Gestion, Economica, 1985.
- [4] *M.E.M. El Sayed, B.J. Ridgely and E. Sandgren*, 'Non Linear Structural Optimization Using Goal Programming', Computers & Structures, Vol.32, No.1, p.69-73, 1989.
- [5] *A.Osyczka*, 'Multicriterion Optimzation in Engineering', Series Ellis Horwood Limited, England, 1984.
- [6] *G.V. Reklaitis, A.Ravindran and K.M. Ragsdell*, 'Engineering Optimization Methods and Applications', John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [7] *L.M. Boychuk, V.O. Ovchinikov*, 'Principal Methods of Solutions Multicriterial Optimization Problems (Survey)', Soviet Automatic Contröl, Vol.6, p.1-4, 1973.
- [8] *M. Zeleny*, 'A Concept of Compromise Solutions and The Method of the Displaced Ideal', Computers and Operations Research, Vol.1, No.4, p.479-496, 1974 (b).
- [9] *M. Slimani*, 'Méthode pour L'évaluation de La Qualité d'un Projet d'Aménagement', Thèse de Docteur-Ingénieur, INSA Lyon, Janvier 1983.
- [10] *J.L. Cohon*, 'Multiobjective Programming and Planning', Mathematics In Science and Engineering, Vol.140, Academic Press, 1978.
- [11] *S. Jendo, W.Marks*, 'Foundations of Structural Multicriteria Optimization', Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Warsaw, poland.
- [12] *E. Borrelly, G. Fuhrmann*, 'Méthodes et Méthodologie d'Aide à la Décision' Laboratoires Méthodes, INSA Lyon, Génie Civil et Urbanisme, 1982.
- [13] *J. Koski, R. Silvennoinen*, 'Pareto Optima of Isostatic Trusses', Comp. Methods in Applied Mech. and Eng., Vol.31, p.256-279, 1980.
- [14] *D.G. Carmichael*, 'Computation of Pareto Optima in Structural Design', Int. j. Numer. Methods Eng., Vol.15, No.6, p.925-929, 1980.
- [15] *P.L. Yu, M. Zeleny*, 'The set of All Nondominated Solutions in Linear Cases

- and a Multicriteria Simplex Method', *J. Math. Anal. Appl.*, Vol.49, No.2, p.430-460, 1975.
- [16] H. Jutler, 'Liniejnaja model z nieskolkimi celevymi funkcjami (linear Model with Several objective functions)', *Ekonomica i matematiceckije Methody*, Vol.3, No.3, p.397-406, 1967.
- [17] R. Solich, 'Zadanie programowania liniowego z wieloma funkcjami celu (Linear Programming Problem with Several Objective Functions)', *Przeglad statystyczny*, Vol.16, p.24-30, 1969.
- [18] A. Osyczka, 'An Approach to Multicriterion Optimization Problems for Engineering Design', *Comp. Methods in Applied Mech. and Eng.*, Vol.15, p.309-333, 1978.
- [19] U. Passy, Y. Levanon, 'Manpower Allocation with Multiple Objectives- The Min-Max Approach in Multiple criteria Making Theory and Application', G. Fandel & T. Gal (eds.), Springer-Verlag, New York, 1980.
- [20] L.A. Zadeh, 'Optimality and Non Scalar Valued Performance Criteria', *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-8, 59 p., 1963.
- [21] F.M. Walz, 'An Engineering Approach : Hierarchical Optimization Criteria', *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-12, 179 p., 1967.
- [22] A. Ben-tal, 'Characterization of Pareto and Lexicographic Optimal Solutions. In Multiple criteria Decision Making Theory and Application', G.Fandel & T.Gal (eds.), Springer-Verlag, New York, 1980.
- [23] A. Charnes, W.W. Cooper, 'Management Models and Industrial Applications of Linear Programming', Chapter 6, Appendix B, Basic Existence Theorems and Goal Programming, Vol.1, Wiley, New York, 1961.
- [24] Y. Ijiri, 'Management goals and Accounting for Control', North-Holland Publi., Amesterdam, 191 p., 1965.
- [25] P.L. Yu, 'A Class of Decisions for Group Decision Problems', *Management Sci.*, Vol.19, 1973.
- [26] M. Zelenely, 'Linear Multiobjective Programming', Springer-Verlag, Berlin and New York, 220 p., 1974 (a)
- [27] M.E. Salukvadze, 'On The Existence of Solution in Problems of Optimization under Vector Valued Criteria', *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.12, No.2, p.203-217, 1974.
- [28] Z. Gerlach, 'Optymalizacja podstawowych parametrow konstrukcyjnych ruchowych przemstowych skraplaczy ziebnych chtodzonych woda (Optimization of Basic Parameters of Water-cooled Condensers', ph.D. Thesis, University of Cracow, Cracow, 1980.
- [29] J.N. Sidall, 'Analytical Decision-Making In Engineering Design', Prentice Hall, Englowd cliffs, New York, 1972.
- [30] W. Meisel, 'Tradeoff Decisions in Multiple Criteria Decision Making', (J.

- Cohrane and M. Zelenely texts), Univ. of South Carolina Press. Columbia, p.461-476, 1973.
- [31] *D. Schilling*, 'Multiobjective and Temporal Considerations in Public Facility Location', Ph.D. Thesis, Dep. of Geog. and Environ. Engrg., Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 118 p., 1976.
- [32] *M. Arockiamy, G. Sreenivasan, K. Shen*, 'Knowledge-Based Expert System for Selecting and Design of Retaining Structures', Contract Report; ITL-92-2, Department of Ocean Engineering, Florida Atlantic University, Boca Raton, Florida 33431, 345 p., september, 1992.
- [33] *W.C. Teng*, 'Calcul des Fondations et Murs de Soutènement', Edition Eyrolles, Paris, 560 p., 1966.
- [34] *A. Guerrin*, 'Traité de Béton Armé, Tome VII: Murs de Soutènement et Murs de Quai', 2^{ème} édition, Dunod, Paris, 329 p., 1976.
- [35] *Geotechnical Control Office*, 'Guide to Retaining Wall Design', Geoguide 1, Engineering Development Department, Hong Kong, 153 p., July, 1982.
- [36] *J.C. Sanglerat*, 'Cours Pratique de Mécanique de Sols. Tome II: Calcul des Soutènement et des Fondations, Stabilité des Pentes', Edition Dunod, Paris, 272 p., 1983.
- [37] *Ministry of Works and Development*, 'Retaining Wall Design Notes', Ministry of Works and Development, Civil Division Publication CDP 702/C, New Zeland, 43 p., 1973.
- [38] *A.H. Nilson, G. Winter*, 'Design of Concrete Structures', McGraw-Hill Book Co., New york, p.488-509, 1986.
- [39] *M. Reimbert*, 'Murs de Soutènement', Edition Eyrolles, Paris, 363 p., 1969.
- [40] *W.C. Huntington*, 'Earth Pressure and Retaining Walls', John Wiley and Sons, New York, 534 p., 1961.
- [41] *J.P. Gould*, 'Lateral pressures on Rigid Permanent Structures', Proceedings of the Speciality Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Retaining Structures, Ithica, New York, p.219-270, 1970.
- [42] *T.W. Lambe, R.V. Withman*, 'Soil Mechanics', John Wiley & Sons, New york, 553 p., 1969.
- [43] *Z. Davidan*, 'Poussée des Terres et Stabilité des Murs de Soutènement', Edition Eyrolles, Paris, 165 p., 1966.
- [44] *NAVFAC*, 'Design Manuel-Foundations and Earth Structures', DM7.2, Department of the Navy, Naval Facilities Engineering Command, Washington, 244 p., May, 1982.
- [45] *G.P. Tschebotarioff*, 'Foundations, Retaining and Earth Structures', 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, 1973.

- [46] *G.A. Leonard, 'Les Fondations'*, Edition Dunod, Paris, 1106 p., 1968.
- [47] *Canadian Geotechnical Society, 'Shallow Foundations'*, Canadian Foundation Engineering Manual, Part 2, Montreal, Canada, 1978.
- [48] *A.S. Vesic, 'Bearing Capacity of Shallow Foundations'*, Foundation Engineering Handbook, Winterkorn and Fang eds., Van Nostrand Reinhold Company, New York, p.121-147, 1975.
- [49] *J.E. Bowles, 'Foundation Analysis and Design'*, McGraw-Hill Book Co., New York, 750 p., 1977.
- [50] *G.G. Meyerhof, 'Influence of Roughness of Base and Ground Water Condition on the Ultimate Bearing Capacity of Foundations'*, Geotechnique, 1955.
- [51] *J.VERDOYEN, 'Mécanique des Sols et Fondations'*, Edition Eyrolles, Paris, 579 p., 1952.
- [52] *E.J. Rhomberg, W.M. Street, 'Optimal Design of Retainings Walls'*, ASCE, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol.107, No.st5, p.992-1001, May 1981.