

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique

Département Automatique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique



Mémoire de Magistère en Automatique

Option : Automatique des Systemes Industriels

Présenté par : **AMGHAR Bilal**
Ingénieur d'état en Automatique de l'ENP



**Commande avec observateur par mode de
glissement généralisée des systèmes complexes**

Application : Double pendule inversé

	<i>Nom</i>	<i>Prénom</i>	<i>Etablissement</i>
<i>Président</i>	<i>Djamel</i>	<i>BOUKHETALA</i>	<i>Professeur à l'ENP</i>
<i>Rapporteur</i>	<i>Farès</i>	<i>BOUDJEMA</i>	<i>Professeur à l'ENP</i>
<i>Examineurs</i>	<i>Mohamed</i>	<i>TADJINE</i>	<i>Professeur à l'ENP</i>
	<i>Boualem</i>	<i>HEMICI</i>	<i>Maître de Conférences A l'ENP</i>

Laboratoire de Commande des Processus, ENP
E.N.P.10, Avenue Pasteur Hassen-Badi, EL-HARRACH, ALGER.
ANNEE 2010

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE	5
Chapitre 1 :	
RAPPELS SUR LA COMMANDE ET L'OBSERVATION DES SYSTÈMES NON-LINÉAIRES	8
Introduction :	9
1.1 Quelques définitions sur les systèmes non-linéaires :	9
1.1.1 Système autonomes - Système non autonome:	9
1.2 Notions de stabilité :	10
1.2.1 Stabilité asymptotique :	11
1.2.2 Stabilité exponentielle :	12
1.2.3 Stabilité locale - Stabilité globale :	12
1.2.4 Méthode indirecte de Lyapunov	12
1.2.5 Théorème principal	13
1.2.6 Méthode directe de Lyapunov	13
1) Fonction définie positive, semi-définie positive	13
2) Fonction de Lyapunov	14
1.2.7 Théorèmes de stabilité	15
1.3 Approche des modes glissants.	15
1.3.1 Théorie de la commande par mode de glissement	15
1.3.2 Conception de la commande	16
1.3.2.1 Système à structure variable	16
1.3.2.2 Conception de la commande par mode de glissement	17
1.3.2.3 Choix de la surface de glissement	18
1.3.2.4 Condition de convergence et d'existence	19
a) La fonction discrète de commutation	19
b) La fonction de LYAPUNOV	20
1.3.2.5 Calcul de la commande	20
1.4 Théorie des observateurs a modes glissants :	22
1.4.1 Introduction :	22
1.4.2 Principes de fonctionnement de l'observateur modes glissants :	23
1.4.3 Étapes de dimensionnement de l'observateur	23
Conclusion :	26

Chapitre 2 :

STABILISATION ASYMPTOTIQUE DES SYSTÈMES MULTI-VARIABLES NON-LINÉAIRES 27

Introduction :	28
2.1 Commande par mode de glissement des systèmes non-linéaires à grande dimension	28
2.1.1 La forme entrée sortie d'un système complexe	28
2.1.2 Condition d'attractivité	29
2.2 La commande par mode de glissement Asymptotiquement stable	30
2.2.1 Calcul de la commande	30
2.2.2 Stabilité du système avec la commande	31
a) <i>Stabilité des systèmes triangulaire</i>	32
2.3 Application de la commande sur le double pendule inversé	33
2.3.1 Modélisation du double pendule inversé	33
Le simple pendule inversé	
2.3.2 Coordonnées généralisées	35
2.3.3 Lagrangien du système	36
2.3.4 Equations du mouvement	36
2.3.5 Représentation d'état du système	36
2.3.6 Calcul de la commande	37
Étape 1 : Écriture du système sous la forme input/output différentiel équations	
Étape 2 : Choix de la surface de glissement	
Étape 2 : Choix de la condition d'attractivité des modes glissants découplés:	
2.4 Résultats de simulation	39
Conclusion :	

Chapitre 3 :

OBSERVATEUR MODE GLISSANT D'ORDRE 2 APPLIQUÉ À UN DOUBLE PENDULE INVERSÉ. 43

Introduction :	44
3.1. Quelques définitions sur l'observabilité :	44
3.2. Observateur par Modes de glissement « Super Twisting »	45
3.2.1. Observateur Mode glissant d'ordre 2 :	45
3.2.2. Synthèse de l'observateur pour le double pendule inversé :	51
3.3. Résultats de simulations :	53
Conclusion :	57

Chapitre 4 :

IMPLÉMENTATION DE LA COMMANDE GÉNÉRALISÉE ET L'OBSERVATEUR MODE GLISSANT D'ORDRE 2	58
Introduction :	59
4.1 Synthèse d'une loi de commande avec l'observateur :	59
4.1.1 Stabilité des systèmes triangulaires :	59
4.1.2 Synthèse de l'Observateur Mode glissant d'ordre 2 et la commande généralisée :	61
4.1.3 Synthèse de l'observateur et de la commande pour le double pendule inversé :	63
4.2 Résultats de simulations :	66
Conclusion :	69
 CONCLUSION GÉNÉRALE	 70

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La commande à structure variable est une commande non linéaire, localement caractérisée par le mouvement glissant. Celui-ci peut exister, chaque fois que la trajectoire d'état du système traverse, sous l'influence de cette commande, une surface de commutation dite surface de glissement [Bühler, 94].

Dans une commande à structure variable, certains paramètres varient d'une manière discontinue. Ainsi, ils prennent deux valeurs possibles. La commutation d'une valeur à l'autre s'effectue de façon à obliger la trajectoire du système à évoluer sur la surface glissante.

Selon la forme de la commande choisie, le mouvement glissant peut exister séparément sur chacune des surfaces choisies ou sur l'intersection de celles-ci. Le mouvement de premier cas, est appelé par [Zinob86] régime glissant. Alors, que celui du deuxième cas, ce même auteur, l'appelle mode glissant.

Quand la trajectoire du système est contrainte d'évoluer le long de la surface de glissement choisie, la dynamique du système plonge dans l'état d'un autre système de dimension inférieure. Ce système réduit est appelé système équivalent.

Le mouvement transitoire de la trajectoire du système, se compose de deux mouvements différents. Le premier est un mouvement rapide, il permet d'atteindre la surface de glissement. Le deuxième est un mouvement lent, dont le rôle est de maintenir la trajectoire d'état sur la surface glissante.

Les nouvelles lois de commande sont distinguées par l'introduction de nouvelles approches dans la commande non linéaire, ces approches sont basées sur les concepts de la géométrie différentielle. Elles connaissent plusieurs domaines d'utilisation tels que le découplage, la linéarisation et la stabilisation des systèmes non linéaires par retour d'état continu ou discontinu. L'insensibilité aux variations des paramètres et aux perturbations externes de ce type de commande leurs donne une place privilégiée dans divers domaines comme l'électronique de puissance (Boudjema and Abatut 1990), (Barbot and all 2002) et les robots manipulateurs (Boukhetala and all 2003 ; Leung and all., 1991)

A cause de la complexité des modèles dynamiques et le grand nombre de variables impliquées dans la synthèse de la commande et la surface de glissement. Le choix de la surface de glissement reste un défi pour les automaticiens. La forme de la surface de glissement est souvent une combinaison linéaire des variables d'état des formes canoniques du système [Slot83]. Pendant les deux dernières décennies plusieurs variétés de la forme de la surface de glissement sont développées spécifiquement pour certaines classes de systèmes non-linéaires (Boukhetala and all., 2003).

Dans ce travail, nous aborderons la stabilisation des systèmes non linéaires par une commande par mode de glissement stabilisante asymptotiquement. La commande est proposée par [spurg98], elle se base sur un choix d'une surface de glissement incluant la partie non linéaire du système. Cette surface permet de réduire le système non linéaire à un système linéaire d'ordre 1. Dans la suite de ce mémoire en basant sur le même principe on a proposée une surface de glissement décentralisé qui permet de répondre aux besoins des systèmes multi-variable qui présentent des termes d'interconnexion. Pour tester les performances de la commande vis-à-vis des perturbations sur les mesures nous avons synthétisé un observateur mode glissant d'ordre 2 pour estimer les variables d'états non-mesurable. Comme exemple d'application, nous prendrons le double pendule inversé.

Le premier chapitre est un rappel du concept fondamental de la commande à structure variable, des observateurs modes glissants, des régimes glissants et des notions de stabilité et robustess. Une partie est consacrée à présenter quelques définitions sur les systèmes non linéaires.

Le deuxième chapitre est destiné à présenter la commande par mode de glissement stabilisante asymptotiquement et proposons en utilisant le même principe une nouvelle surface de glissement locale non linéaire pour chaque sous système. La stabilité de la commande est garantie par la condition d'existence de régime glissant. Une modélisation de double pendule inversé est présentée pour servir comme exemple d'application. Le but de la commande est de ramener les deux angles de double pendule inversé à l'origine.

Dans le troisième chapitre, un observateur par mode de glissement d'ordre 2 'Super-twisting' sera présenté. Ce type d'observateur permet l'élimination de chattering qui apparaît au voisinage de la surface de glissement. La stabilité de l'observateur est démontrée en employant des inclusions différentielles.

L'objet de dernier chapitre est la synthèse de la commande et l'observateur non linéaire, la stabilité globale de la commande avec l'observateur est démontrée on utilisant la théorie de Lyapunov et les inclusions différentielles [Bühler, 94].

Des essais de simulation au double pendule inversé sont effectués dans les chapitres 2, 3 et 4 afin de vérifier la robustesse de la commande décentralisée proposée. Les deux lois de commande garantissent pour chaque pendule la stabilité du système globale. L'apparition de la dérivée de la commande dans les calculs surmonte le phénomène de broutement.

Chapitre 1 : Rappels sur la Commande et l'observation des systèmes non-linéaires

Introduction :

Ce chapitre est destiné à introduire les éléments théoriques nécessaires à la compréhension du fonctionnement des commandes et les observateurs non-linéaires. En premier quelques définitions et lois d'analyse existantes dans le domaine non linéaire seront présentées pour servir dans l'étude et la synthèse de la commande et l'observateur par mode de glissement. La théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés a fait l'objet d'études détaillées au cours des trente dernières années. Dans la suite de ce chapitre, nous rappellerons les relations de base des modes glissants dans le but de synthétiser une commande et un observateur par mode de glissement d'ordre 2.

1.1 Quelques définitions sur les systèmes non-linéaires :

1.1.1 Système autonomes - Système non autonome

Un système non linéaire peut être représenté de manière générale par le système différentiel Suivant :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande et $f(\dots)$ est une fonction non linéaire à valeur dans \mathbb{R}^n est n comme en linéaire l'ordre du système. Un cas particulier sont les systèmes linéaires de la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (2)$$

avec $A(t)$ et $B(t)$ matrices de dimensions appropriées. On peut faire une première classification entre les systèmes qui ne dépendent pas explicitement du temps et ceux qui en dépendent.

Définition 1 :

Le système (1) est dit autonome si f ne dépend pas explicitement de t . Dans ce cas on l'écrira

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3)$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome [Utki77], [Sira94]. Tous les systèmes sont non autonomes. On peut également noter qu'un système autonome peut devenir non autonome si la commande dépend explicitement du temps, c'est à dire si par exemple $u = g(x, t)$:

La grande différence entre systèmes autonome et non autonome est que les trajectoires d'un système autonome ne dépendent pas de l'origine des temps alors que celles d'un système non autonome en dépendent.

Souvent dans les problèmes de commande, on peut écrire la commande comme une fonction de l'état, soit $u = g(x)$; dans ce cas le système (3) devient

$$\dot{x} = f(x, u) = f(x, g(x)) \quad (4)$$

que nous écrirons par abus d'écriture

$$\dot{x} = f(x) \quad (5)$$

Par la suite, comme cela n'entraîne aucune perte de généralité, nous considérerons le système.

Dans un premier temps, nous allons considérer les systèmes autonomes décrits par :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

Une notion qui est primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion de point d'équilibre.

Définition 2 : L'état x_e est appelé état d'équilibre ou point d'équilibre pour le système (6) si lorsque $x(t_0) = x_e$ alors $x(t) = x_e \forall t \geq t_0$,

Mathématiquement : x_e vérifie l'équation $f(x_e) = 0$.

Certaines fois, on peut être amené à étudier le comportement pour une trajectoire d'équilibre. ce problème peut se ramener à la notion de point d'équilibre d'un système non autonome [Utki93].

1.2 Notions de stabilité :

Le concept de stabilité est très intuitif dans le contexte des systèmes [4] mécaniques. Considérons, par exemple, une bille sur une surface non plane (voir Figure 1.1)). Une position

d'équilibre sera dite stable si, après toute perturbation suffisamment petite sur la position de la bille, celle-ci reste à jamais arbitrairement proche de cette position d'équilibre.



Fig.1.1 – Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

Définition 3 : Le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable si $\forall \rho > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$\text{si } \|x(0)\| < r \text{ alors } \|x(t)\| < \rho, \quad \forall t \geq 0$$

Sinon le point d'équilibre est instable.

1.2.1 Stabilité asymptotique :

Définition 4 : Le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable si :

- Il est stable
- Il existe $r > 0$ tel que

$$\text{si } \|x(0)\| < r \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \rightarrow 0$$

$B(r)$ est un domaine de stabilité. [Sira94]

Le domaine d'attraction est l'ensemble maximal des conditions initiales pour lesquelles la stabilité asymptotique est obtenue.

$B(r)$ est inclus dans le domaine d'attraction.

1.2.2 Stabilité exponentielle :

Définition 5 :

Le point d'équilibre $x_e = 0$ est exponentiellement stable s'il existe deux scalaires strictement positifs k et α tels que

$$\forall t \geq 0, \quad \|x(t)\| < k\|x(0)\|e^{-\alpha t} \quad (7)$$

dans une boule $B(r)$ autour de l'origine.

1.2.3 Stabilité locale - Stabilité globale :

Dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie de manière locale puisque reliée à la notion de voisinage.

En utilisant les définitions précédentes, il n'est pas possible a priori de prédire le comportement du système pour une condition initiale prise loin du point d'équilibre [Sira93].

Définition 6 :

Si un système est stable asymptotiquement (exponentiellement) pour n'importe quelle condition initiale dans \mathbb{R} , on dira que le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement (Exponentiellement) stable au sens large. On dira aussi qu'il est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.

Remarque : Les concepts de stabilité locale ou globale n'ont pas d'intérêt en linéaire.

1.2.4 Méthode indirecte de Lyapunov

La méthode indirecte de Lyapunov utilise la linéarisation du système et peut dans certains cas, apporter une réponse au problème de stabilité locale [Bühler, 94].

Le système (6) ($\dot{x} = f(x)$) est linéarisé autour de x_e (en général $x_e = 0$) en utilisant un développement en série:

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x + R(x) \quad (8)$$

où $R(x)$ contient les termes en x d'ordre supérieur à 2.

1.2.5 Théorème principal

Théorème 1 :

Si le système linéarisé est asymptotiquement stable (Toutes les valeurs propres de $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$ sont dans le demi-plan complexe gauche) alors le point d'équilibre du système non linéaire est asymptotiquement stable.

Si le système linéarisé est instable (Au moins une des valeurs propres de A est dans le demi-plan complexe droit) alors le point d'équilibre du système non-linéaire est instable.

Si le système linéarisé est en limite de stabilité (Toutes les valeurs propres de A sont dans le demi-plan complexe gauche et au moins une d'entre elles est sur l'axe imaginaire) alors on ne peut rien conclure sur la stabilité du système non-linéaire [Bühler, 94].

1.2.6 Méthode directe de Lyapunov

Pour s'affranchir de la connaissance des trajectoires, on utilise la méthode directe de Lyapunov. L'idée est d'étudier les variations d'une fonction scalaire pour conclure quant à la stabilité du système.

1) Fonction définie positive, semi-définie positive

Définition 7 :

La fonction $V(x)$ est dite localement définie positive si

- $V(0) = 0$
- Il existe $\rho > 0$ tel que $V(x) > 0, \forall x \neq 0, x \in B(\rho)$.

Définition 8 : La fonction $V(x)$ est dite globalement définie positive ou définie positive si

- $V(x) = 0$
- $V(x) > 0, \forall x \neq 0$

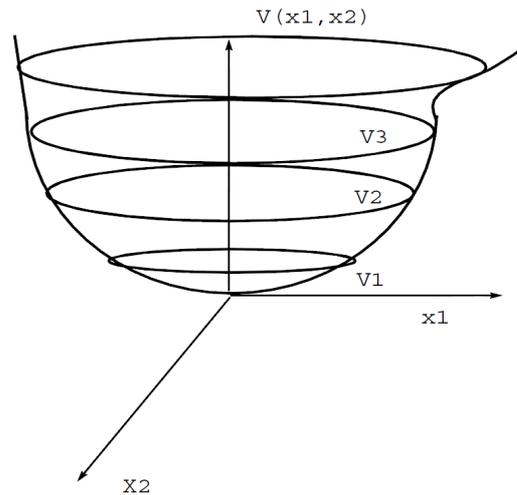


Fig.1.2 – Illustration de la définition intuitive de la stabilité en sens de Lyapunov.

$V(x)$ définit une hyper-surface dans l'hyper-espace de dimension n . Si maintenant on s'intéresse aux courbes définies par $V(x) = \alpha$, $\alpha > 0$, on obtient des contours surplombant l'origine, que l'on appelle "courbes de niveau" [Bühler, 94].

La fonction $V(x)$ sera dite définie négative si $-V(x)$ est définie positive.

$V(x)$ sera semi-définie positive si $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ pour $x \neq 0$ et semi-définie négative si $V(x)$ est semi-définie positive.

Dans ces derniers cas, la semi-définie positivité ou négativité signifient que $V(x) = 0$ pour des $x \neq 0$.

2) Fonction de Lyapunov

Définition 9 :

Supposons que dans la boule $B(\rho)$, la fonction $V(x)$ est définie positive et possède des dérivées partielles continues. Si la dérivée de $V(x)$ le long des trajectoires du système est telle que

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (10)$$

alors $V(x)$ est une fonction de Lyapunov pour le système.

Notons que $\dot{V}(x) = \frac{\partial V'}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V'}{\partial x} f(x, u, t)$ (produit scalaire).

1.2.7 Théorèmes de stabilité

Théorèmes de Stabilité locale et globale.

Théorème 2 :

(Stabilité locale) Si dans une boule $B(\rho)$ il existe une fonction scalaire $V(x)$ dont les dérivées partielles d'ordre un sont continues, et telle que

- $V(x)$ est définie positive dans $B(\rho)$
- $V(x)$ est semi-définie négative dans $B(\rho)$

alors le point d'équilibre est stable. Si $\dot{V}(x)$ est localement définie négative dans $B(\rho)$ alors le point d'équilibre est stable asymptotiquement [Bühler, 94].

Remarque : Difficultés. Choix de la fonction $V(x)$.

1.3 Approche des modes glissants.

Un modèle mathématique constitue souvent une description approchée de la réalité physique, et la loi de commande ne pourrait être construite que sur ce dernier. Ainsi la commande choisie devra être robuste dans le sens où elle devra garantir une faible sensibilité aux erreurs et aux incertitudes sur les paramètres, à leurs variations et aux perturbations.

Notre choix s'est porté sur la commande par modes de glissement qui n'est autre qu'un cas particulier de la théorie des systèmes à structure variable et multifonctions. Basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à second membre discontinu[Utki78].

1.3.1 Théorie de la commande par mode de glissement

Les lois de commande classique du type PID donnent de bons résultats dans le cas des systèmes linéaires à paramètres constants. Pour des systèmes non linéaires ou ayant des paramètres non constants, ces lois de commande classique peuvent être insuffisantes car elles sont non robuste surtout lorsque les exigences sur la précision et autres caractéristiques dynamiques du système sont strictes.

On doit faire appel à des lois de commande insensibles aux variations de paramètres, aux perturbations et aux non linéarités. Les lois de commande dite à structure variable constituent une bonne solution à ces problèmes. La commande à structure variable (CSV) est par nature une commande non linéaire.

La caractéristique principale des systèmes à structure variable est que leur loi de commande se modifie d'une manière discontinue. Les commutations de la commande s'effectuent en fonction des variables d'état, utilisées pour créer une "variété" ou

"hypersurface" dite de glissement dont le but est de forcer la dynamique du système de correspondre avec celle définie par l'équation de l'hypersurface.

Quand l'état est maintenu sur cette hypersurface, le système est dit en régime glissant. Ainsi, tant que les conditions de glissement sont assurées, la dynamique du système reste insensible aux variations des paramètres du processus, aux erreurs de modélisation (dans une gamme qui reste plus large par rapport à celle des approches classiques de l'automatique), et à certaines perturbations.

Ce type de commande (CSV) présente plusieurs avantages tels que robustesse, précision importante, stabilité et simplicité, temps de réponse très faible. Ceci lui permet d'être particulièrement adaptée pour traiter les systèmes qui ont des modèles mal connus, soit à cause de problèmes d'identifications des paramètres, soit à cause de simplification sur le modèle du système.

1.3.2 Conception de la commande

1.3.2.1 Système à structure variable

Un système à structure variable est un système dont la structure change pendant son fonctionnement. Il est caractérisé par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation. Ce choix permet au système de commuter d'une structure à une autre à tout instant. De plus, un tel système peut avoir de nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure.

Dans la commande des systèmes à structure variable par mode de glissement, la trajectoire d'état est amenée vers une surface. Puis à l'aide de la loi de commutation, elle est obligée de rester au voisinage de cette surface. Cette dernière est appelée surface de glissement et le mouvement le long de laquelle se produit est appelé mouvement de glissement.

La trajectoire dans le plan de phase est constituée de trois parties distinctes :

- Le mode de convergence –MG- : c'est le mode durant lequel la variable à régler se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase, et tend vers la surface de commutation $S(x, y) = 0$. Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.

- Le mode de glissement –MG- : c'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement $S(x, y) = 0$.
- Le mode du régime permanent –MRP- : Ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine du plan de phase), il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande.

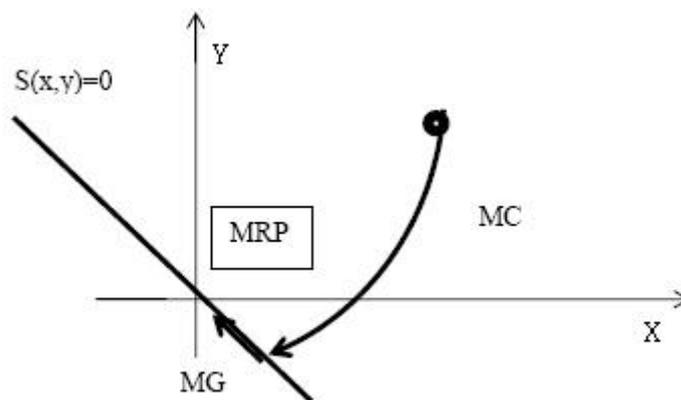


Fig.1.3 Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase

1.3.2.2 Conception de la commande par mode de glissement

Les avantages de la commande par mode glissant sont importantes et multiples, la haute précision, la bonne stabilité, la simplicité, l'invariance, la robustesse...etc. Ceci lui permet d'être particulièrement adapté pour les systèmes ayant un modèle imprécis. Dans ce cas, la structure d'un contrôleur comporte deux parties : une partie continue représentant la dynamique du système durant le mode glissant et notre discontinue représente la dynamique du système durant le mode de convergence. Cette dernière est importante dans la commande non linéaire car elle a pour rôle d'éliminer les effets d'imprécision et des perturbations sur le modèle.

La conception de la commande peut être effectuée en trois étapes principales très dépendantes l'une de l'autre.

- Choix de la surface.

- L'établissement des conditions d'existence.
- Détermination de la loi de commande.

1.3.2.3 Choix de la surface de glissement

Le choix de la surface de glissement concerne le nombre et la forme des fonctions nécessaires. Ces deux facteurs dépendent de l'application et l'objet visé.

Pour un système défini par l'équation (1.11), le vecteur de surface σ à la même dimension que le vecteur de commande u .

$$\dot{x} = A(x,t)x + B(x,t)u \quad (1.11)$$

La surface de glissement est une fonction scalaire telle que la variable à régler glisse sur cette surface et tend vers l'origine du plan de phase.

La forme non linéaire est une fonction de l'erreur sur la variable à régler x , elle est donnée par [Slot83], [Sira88] :

$$S(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{r-1} e(x) \quad (1.12)$$

avec :

$e(x)$: est l'écart entre la variable à régler et sa référence

λ : est une constante positive.

r : est un degré relatif, il présente le nombre de fois qu'il faut dériver la surface pour faire apparaître la commande.

L'objectif de la commande est de maintenir la surface à zéro. Cette dernière est une équation différentielle linéaire dont l'unique solution est $e(x) = 0$ pour un choix convenable du paramètre, ceci revient à un problème de poursuite de trajectoire qui est équivalent à une linéarisation exacte de l'écart tout en respectant la condition de convergence.

1.3.2.4 Condition de convergence et d'existence

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation. Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence [Sira88].

a) La fonction discrète de commutation

C'est la première condition de convergence, elle est proposée et étudiée par EMILYANOV et UTKIN. Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro. Elle est donnée par :

$$\dot{S}(x) > 0 \text{ si } S(x) < 0 \quad (1.12)$$

$$\dot{S}(x) < 0 \text{ si } S(x) > 0$$

Cette condition peut être formulée comme suit :

$$\dot{S}(x)S(x) < 0 \quad (1.13)$$

b) La fonction de LYAPUNOV

La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive ($V(x) > 0$) pour les variables d'état du système. La loi de commande doit faire décroître cette fonction c-à-d $\dot{V}(x) < 0$. L'idée est de choisir une fonction scalaire $S(x)$ pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence et de concevoir une commande u tel que le carré de la surface correspond a une fonction de Lyapunov .

Nous définissons la fonction de LYAPUNOV comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad (1.14)$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\dot{V}(x) = S(x) \cdot \dot{S}(x) \quad (1.15)$$

Pour que la fonction $V(x)$ puisse décroître, il suffit d'assurer que sa dérivée soit négative. Ceci n'est vérifié que si (1.14) est vérifiée [Sira88].

L'équation (1.15) explique que le carré de la distance entre un point donné du plan de phase et la surface de glissement exprimé par $S^2(x)$ diminue tout le temps. Contraignant la trajectoire du système à se diriger vers la surface à partir des deux cotés de cette dernière. Cette condition suppose un régime glissant idéal ou la fréquence de commutation est infinie, [Sira88].

1.3.2.5 Calcul de la commande

Lorsque le régime glissant est atteint, la dynamique du système est indépendante de la loi de commande qui n'a pour but de maintenir les conditions de glissement (l'attractivité de la surface), c'est pour cette raison que la surface est déterminée indépendamment de la commande. Maintenant, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire d'état vers la surface de glissement.

L'obtention d'un régime de glissement suppose une commande discontinue. La surface de glissement devrait être attractive des deux cotés. De ce fait, si cette commande discontinue est indispensable, il n'empêche nullement qu'une partie continue lui soit ajoutée.

La partie continue en effet amener à réduire autant que nous voulons l'amplitude de la partie discontinue. En présence d'une perturbation, la partie discontinue a essentiellement pour but de vérifier les conditions d'attractivité. Dans ce cas, la structure d'un contrôleur par mode de glissement est constituée de deux parties, une concernant la linéarisation exacte (U_{eq}) et l'autre stabilisante (U_n) [Utki78].

$$u = u_{eq} + u_n \quad (1.16)$$

→ u_{eq} correspond donc à la commande proposée par FILIPOV, elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $S(x) = 0$. La commande équivalente est déduite en considère que la surface est nulle $\dot{S}(x) = 0$. Elle peut être interprétée comme étant un retour d'état particulier jouant le rôle d'un signal de commande appliqué sur le système à commander. Elle peut être aussi interpréter autrement comme étant une valeur moyenne que prend la commande lors de la commutation rapide entre les valeurs u_{max} et u_{min} .

→ u_n est déterminée pour vérifier la condition de convergence.

Pour mettre en évidence le développement précédent, nous considérons un système défini dans l'espace d'état par l'équation (1.10). Il s'agit de trouver l'expression analogique de la commande u , [4].

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \quad (1.17)$$

en remplaçant (1.10) et (1.16) dans (1.17), nous trouvons :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot (f(x, t) + B(x, t)u_{eq}) + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot B(x, t)u_n \quad (1.18)$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle, et par conséquent, sa dérivée et la partie discontinue sont aussi nulles. D'où nous déduisons l'expression de la commande équivalente :

$$u_{eq} = - \left(\frac{\partial S}{\partial x \cdot B(x, t)} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot f(x, t) \quad (1.19)$$

Pour que la commande équivalente puisse prendre une valeur finie, il faut que $\frac{\partial S}{\partial x} \cdot B(x,t) \neq 0$. Durant le mode de convergence, et en remplaçant la commande équivalente par son expression dans (1.18), nous trouvons la nouvelle expression de la dérivée de la surface :

$$\dot{S}(x,t) = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot B(x,t) \cdot u_n \quad (1.20)$$

et la condition d'attractivité exprimée par (3.4) devient :

$$S(x,t) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot B(x,t) \cdot u_{eq} \quad (1.21)$$

Afin de satisfaire cette condition, le signe de u_n doit être opposé à celui de $S(x,t) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot B(x,t)$. La forme la plus simple que prend la commande discrète est celle d'un relais de la figure(1.11).

$$u_n = K \text{sign}(S(x,t)) \quad (1.22)$$

Le signe de K doit être différent de celui de $\frac{\partial S}{\partial x} \cdot B(x,t)$.

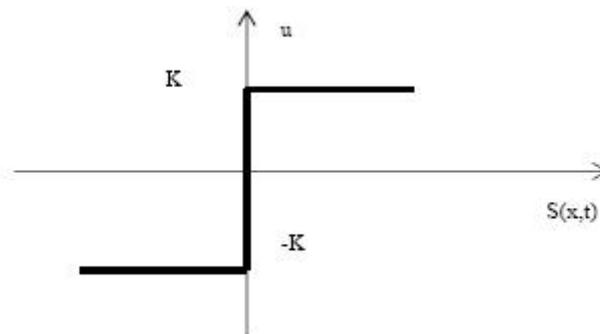


Fig.1.4 Représentation de la commande discontinue

1.4 Théorie des observateurs a modes glissants :

1.4.1 Introduction :

Un observateur est un moyen de mesure " informatique " qui permet de retrouver tous les états d'un système industriel en disposant du minimum d'informations sur ces états. Ce minimum d'information est obtenue à l'aide d'un capteur. Un observateur permet donc d'optimiser le nombre de capteurs dans une application industrielle ; d'où son intérêt économique dans l'industrie. Durant les dernières décennies beaucoup de travaux en automatique ont été menés sur la conception d'observateurs. Une manière brute d'observer les états d'un système consiste à dériver numériquement l'information mesurée grâce aux capteurs. L'expérience a montré que cette méthode à l'inconvénient de donner des résultats erronés à cause de l'amplification du bruit due aux imperfections des mesures.

Pour remédier à ce problème, Kalman-Bucy ont introduit en 1961 une solution pour les systèmes linéaires stochastiques. Leur résultat est connu actuellement par le filtre de Kalman. Ce filtre donne aussi de bons résultats pour les systèmes déterministes. En 1964-1971, Luenberger a fondé la théorie d'un observateur qui porte son nom " Observateurs de Luenberger ". Son idée est d'ajouter au modèle mis sous la forme canonique compagnon (Brunovsky) une correction à l'aide de la mesure fournie par les capteurs.

Pour les systèmes non linéaires les ingénieurs utilisent le filtre de Kalman étendu qui malheureusement ne présente pas de bonnes propriétés de convergence. Pour cette raison la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires est un problème où les travaux de recherche restent très intenses.

En 1983 Kerner-Isidori [Isid95] ont fourni des conditions nécessaires et suffisantes pour une linéarisation de l'erreur de l'observation des modèles non linéaires afin de leur appliquer l'observateur de Luenberger. Cependant, leurs résultats ne s'appliquent qu'à une classe réduite de systèmes non linéaires. A la même époque Fliess et Kupka fournissent des conditions suffisantes et nécessaires pour une linéarisation exacte des systèmes non linéaire en mettant en évidence le concept de l'immersion. Un autre résultat dû à Krener et Repondek viennent pour élargir la classe des systèmes dynamiques étudiés par Krener-Isidori en se permettant un difféomorphisme sur la sortie.

1.4.2 Principes de fonctionnement de l'observateur modes glissants :

Le principe des observateurs à modes glissants consiste à contraindre, à l'aide de fonctions discontinues, les dynamiques d'un système d'ordre n à converger vers une variété s de dimension $(n - p)$ dite surface de glissement (étant la dimension du vecteur de mesure). L'attractivité de cette surface est assurée par des conditions appelées conditions de glissement. Si ces conditions sont vérifiées, le système converge vers la surface de glissement et y évolue selon une dynamique d'ordre $(n - p)$ [Slot86].

Dans le cas des observateurs à modes glissants, les dynamiques concernées sont celles des erreurs d'observation ($\tilde{x} = \hat{x} - x$). A partir de leurs valeurs initiales $\tilde{x}(0)$, ces erreurs convergent vers les valeurs d'équilibre en 2 étapes:

→ Dans une première phase, la trajectoire des erreurs d'observation évolue vers la surface de glissement sur laquelle les erreurs entre la sortie de l'observateur et la sortie du système réel (les mesures) : $\tilde{y} = \hat{y} - y$, sont nulles. Cette étape, qui généralement est très dynamique, est appelée mode d'atteinte (ou reaching mode).

→ Dans la seconde phase, la trajectoire des erreurs d'observation glisse sur la surface de glissement, définie par $\tilde{y} = 0$, avec des dynamiques imposées de manière à annuler le reste de l'erreur d'observation. Ce dernier mode est appelé mode de glissement (ou sliding mode).

1.4.3 Étapes de dimensionnement de l'observateur

Les différentes étapes de synthèse d'un observateur à modes glissants sont connues et clairement identifiées par J.-J.E. Slotine, J.K. Hedrick et E.A. Misawa [SLO][SLO2]. Ces dernières sont rappelées ci-dessous.

Considérons un système d'état non linéaire affine d'ordre n :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.23)$$

ainsi qu'un vecteur de mesure d'ordre p associé au vecteur d'état du système :

$$y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}^p \quad (1.24)$$

L'observateur à modes glissants est défini avec la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) - \Lambda \Gamma_s \quad (1.25)$$

Pour toutes ces équations, les variables considérées sont:

- ✓ $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'estimée du vecteur d'état x ;
- ✓ Est le vecteur de commande ;
- ✓ $f(\hat{x}, u, t)$ est l'estimée de la fonction $f(x, u, t)$ à l'aide des $\hat{x}_{j,j=1,\dots,n}$;
- ✓ Λ est une matrice $n.p$ contenant les gains correctifs de l'observateur ;
- ✓ Est le vecteur de dimension $p.1$ défini tel que

$$\Gamma_s = [\text{sign}(\hat{y}_1) \text{sign}(\hat{y}_2) \dots \text{sign}(\hat{y}_p)]^T$$

avec $\tilde{y}_i = \hat{y}_i - y_i$ et $i = 1, \dots, p$.

La Figure Fig.1.6 présente le schéma fonctionnel de l'observateur à modes glissants. Définissons également les vecteurs relatifs aux erreurs d'observation :

pour le vecteur de mesures :

$$s = \tilde{y} = \hat{y} - y$$

Pour le vecteur d'état :

$$\tilde{x} = \hat{x} - x$$

La combinaison des équations (1.24) et (1.25) permet de déduire la dynamique des erreurs d'observation :

$$\dot{\tilde{x}} = \Delta f - \Lambda \Gamma_s$$

Pour laquelle : $\Delta f = f(\hat{x}, u, t) - f(x, u, t)$.

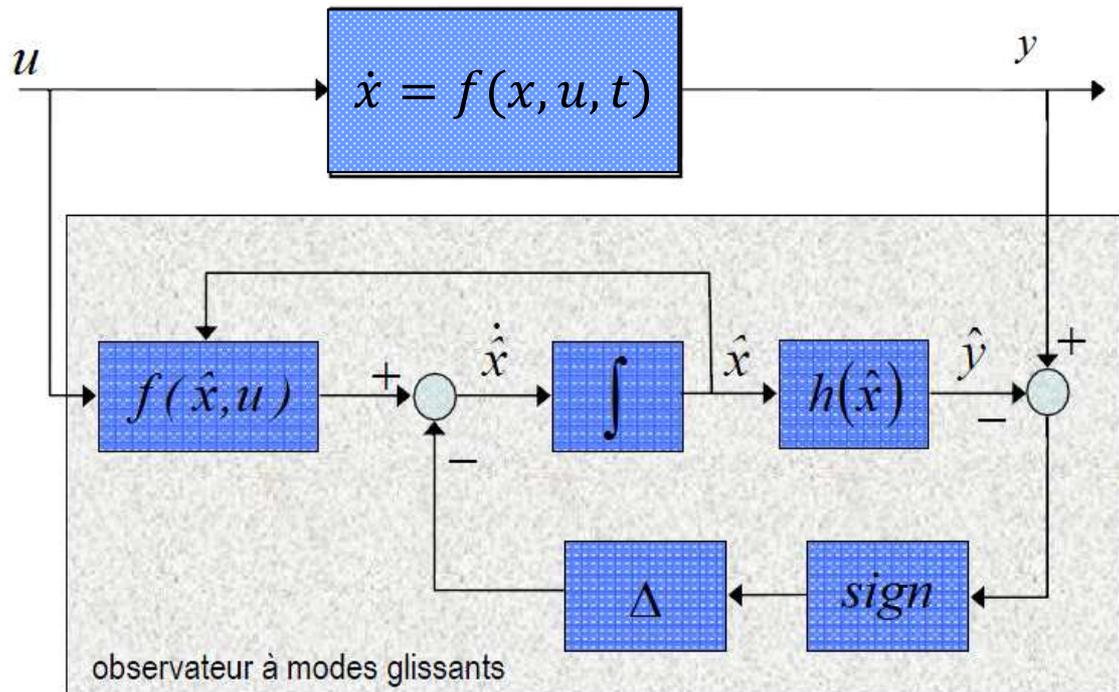


Fig.1.6 Schéma fonctionnel de l'observateur à modes glissants.

L'observateur à modes glissants doit respecter deux conditions[Sira94]: La première concerne le mode d'atteinte et garantit l'attractivité de la surface de glissement

$s(x) = 0$ de dimension p . Cette dernière est attractive si la fonction de Lyapunov :

$$V(x) = s^T \times s$$

vérifie :

$$V(x) < 0, \quad \text{quand } s \neq 0$$

Durant le mode de glissement, les termes correctifs de (Eq. VI-3) agissent de sorte à satisfaire les conditions d'invariance suivantes :

$$\begin{cases} \dot{s}(x) = 0 \\ s(x) = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Durant ce mode, les dynamiques du système sont réduites : le système d'ordre n devient un système équivalent d'ordre $(n - p)$.

Ces critères permettent la synthèse de l'observateur à modes glissants et déterminent son fonctionnement.

Conclusion :

Ce chapitre est un rappel de la théorie des systèmes non-linéaires et des modes glissants associés en vue de l'application à la commande et l'observation des systèmes non-linéaires. L'utilisation des notions de base des systèmes non linéaires permettra la synthèse de la loi de commande non linéaire pour des systèmes qui présente des non linéarités dans leurs modèles. La partie observateur par mode de glissement d'ordre 2 donne des notions indispensables à la synthèse d'un observateur non linéaire. Nous avons rappelé le principe fondamental des observateurs non linéaires et leurs configurations de base les plus utilisées.

Chapitre 2 : Stabilisation asymptotique des systèmes multi- variables non-linéaires

Introduction :

Dans ce chapitre, la commande non linéaire par mode de glissement généralisée proposé par S. Spurgeon, a été modifiée et adaptée aux systèmes décentralisés. La méthode utilise une nouvelle surface de glissement qui permet la linéarisation asymptotique du système non-linéaire sous sa représentation différentielle (*input/output représentation*) [Spurg98]. La stabilité asymptotique de l'ensemble du système (le système avec la commande) qui est sous une forme canonique avec un feedback dynamique, est analysée avec une approche généralisée de Lyapunov au voisinage de l'origine. Pour valider les résultats théoriques, la synthèse de la commande a été appliquée à un double pendule inversé.

2.1 Commande par mode de glissement des systèmes non-linéaires à grande dimension :

Dans notre travail on s'intéresse à la commande des systèmes non-linéaire de la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, u, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Tel que $x \in R^n$, $u \in R^m$ et $f(x, u, t)$ et $h(x, u, t)$ des champs de vecteurs.

2.1.1 La forme entrée sortie d'un système complexe :

On peut faire un changement de variable pour récrire le système (2.1) sous une autre forme appelée « *differential I-O system* » Représentation différentielle entrée- sortie :

Le système peut être représenté sous la forme suivante [Spurg98]

:

$$\begin{aligned} y_1^{(n_1)} &= \varphi_1(\hat{y}, \hat{u}, t) \\ &\dots\dots\dots \\ y_p^{(n_p)} &= \varphi_p(\hat{y}, \hat{u}, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Tel que $\hat{u} = (u_1, \dots, u_1^{(\beta_1)}, \dots, u_m, \dots, u_m^{(\beta_m)})$, et $\hat{y} = (y_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_p, \dots, y_p^{(n_p-1)})$

avec $n_1 + \dots + n_p = n$

Remarque :

Noter qu'une grande classe de systèmes non linéaires, en particulier les systèmes mécaniques, sont naturellement sous cette forme. En outre, ils peuvent être dans une combinaison de ce formulaire et un compensateur dynamique qui, dans le cas le plus simple est une série d'intégrateurs. La méthode dans le présent document est basée sur des systèmes sous une représentation entrée/sortie.

2.1.2 Condition d'attractivité

La deuxième étape pour concevoir une commande par mode de glissement est la condition d'attractivité des modes glissant qui assure la convergence de système vers l'état désirée. Ils existent plusieurs possibilités de la condition d'attractivité, dans ce qui suit quelques unes :

→ La condition attractivité générale de la commande par mode de glissement est représentée par l'équation suivante : $\dot{s} = -\gamma(k, s)$

Tel que $s = [s_1, \dots, s_m]^T$ et $k = [k_1, \dots, k_l]^T$ pour k fixe

$\gamma(k, s) = [\gamma_1(k, s), \dots, \gamma_m(k, s)]^T$ satisfait :

- (1) $\gamma(k, 0) = 0$;
- (2) $\gamma(k, s)$ est C^1
- (3) $\dot{s} = -\gamma(k, s)$ est asymptotiquement stable [Spurg98]

→ On trouve aussi d'autre conditions d'attractivité comme la condition d'attractivité découplé donné par :

$$\dot{s}_i = -\gamma_i(k, s_i) ;$$

Tel que $k = [k_1, \dots, k_l]^T$ pour k fixe et $i = 1, \dots, m$

- (1) $\gamma_i(k, 0) = 0$;
- (2) $\gamma_i(k, s_i)$ est C^1 si $s_i \neq 0$;
- (2) $\gamma_i(k, s_i)$ est bornée ;
- (3) $s_i \gamma_i(k, s_i) > 0$ si $s_i \neq 0$

2.2 La commande par mode de glissement Asymptotiquement

stable :

Après avoir rappelé les notions de base nécessaires pour le développement théorique de la commande, la commande par mode de glissement généralisée des systèmes complexes est synthétisée.

Considérant le système (2.1) représenté par sa forme canonique :

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1^{(1)} &= \xi_2^{(1)} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \dot{\xi}_{n_1-1}^{(1)} &= \xi_{n_1}^{(1)} \\
 \dot{\xi}_{n_1}^{(1)} &= \varphi_1(\xi, \hat{u}, t) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \dot{\xi}_1^{(m)} &= \xi_2^{(m)} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \dot{\xi}_{n_m-1}^{(m)} &= \xi_{n_m}^{(m)} \\
 \dot{\xi}_{n_m}^{(m)} &= \varphi_m(\xi, \hat{u}, t)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tel que $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_{n_i}^{(i)}) = (y_1, \dots, y_i^{(n_i-1)})$, $i = 1, \dots, m$ and $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})^T$

2.2.1 Calcul de la commande :

Etape 1 : Choix de la surface de glissement :

On choisie la surface de glissement sous la forme suivante :

$$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_j^{(i)} \xi_j^{(i)} + \varphi_i(\xi, \hat{u}, t), i = 1, \dots, m$$

Ou $\sum_{j=1}^{n_i+1} a_j^{(i)} \lambda^{j-1}$ est un polynôme de Hurwitz avec $a_{n_i+1}^{(i)} = 1, i = 1, \dots, m$

Etape 2 Choix de la condition de l'attractivité voir condition d'attractivité

Etape 3 A partir du choix de la surface de glissement et la condition de l'attractivité
 les dérivées de la commande peut être représentées par les équations suivantes :

$$u_i^{(\beta_i+1)} = p_i(\xi, \hat{u}, t), i = 1, \dots, m$$

Cette dynamique de la commande peut être représentée sous la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^{(1)} &= z_2^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_{\beta_1}^{(1)} &= z_{\beta_1+1}^{(1)} \\ \dot{z}_{\beta_1+1}^{(1)} &= p_1(\xi, \hat{z}, t) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_1^{(m)} &= z_2^{(m)} \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_{\beta_m}^{(m)} &= z_{\beta_m+1}^{(m)} \\ \dot{z}_{\beta_m+1}^{(m)} &= p_m(\xi, \hat{z}, t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Avec

$$\hat{z}^{(i)} = (z_1^{(i)}, \dots, z_{\beta_i+1}^{(i)}) = (u_i, \dot{u}_i, \dots, u_i^{(\beta_i)}), i = 1, \dots, m \text{ and } \hat{z} = (\hat{z}^{(1)}, \dots, \hat{z}^{(m)})^T$$

Pour la résolution de ce système d'équation le choix des conditions initiales de la commande a une influence très importante sur la commande et la stabilité du système

2.2.2 Stabilité du système avec la commande :

Pour la stabilité de la commande on peut la démontrer à l'aide d'un changement de variable vers un système triangulaire stable. Le choix de la fonction de Lyapunov est dépendant de l'écriture du système triangulaire. Les conditions initiales de la commande influence beaucoup sur la stabilité du système [Spurg98]

Le système avec la commande peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A\zeta + Ds \\ \dot{s} &= -\gamma(k, Ks) \\ \dot{z} &= q(\zeta, s, z, t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\text{Avec } q(\zeta, s, z, t) = (q_1(\zeta, s, z, t), \dots, q_m(\zeta, s, z, t))^T$$

Remarque : intuitivement la condition $s_i \gamma_i(k, Ks) > 0$ if $s \neq 0$ force $s \rightarrow 0$ en un temps fini (ou asymptotiquement). Le système (2.5) devienne sous une forme triangulaire suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A\zeta \\ \dot{z} &= q(\zeta, 0, z, t)\end{aligned}\quad (2.6)$$

La stabilité de système (2.6) revient à étudier la stabilité des systèmes triangulaires.

a) Stabilité des systèmes triangulaire :

Considérant le système triangulaire variant dans le temps (2.7).

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= F_1(t, \omega_1) \\ \dot{\omega}_2 &= F_2(t, \omega_1, \omega_2)\end{aligned}\quad (2.7)$$

Avec $t \in R_+, \omega_i \in R^{n_i}, i=1,2$. Si le système 2 est un système découplé, il peut être représenté par deux sous systèmes :

$$\dot{\omega}_1 = F_1(t, \omega_1) \quad (2.8)$$

$$\dot{\omega}_2 = F_2(t, 0, \omega_2) \quad (2.9)$$

Supposant pour $i = 1,2$

(A1) F_i est continue et $F_i(t, 0) = F_2(t, 0, 0) = 0, t \geq 0$

(A2) Il existe une constante c tel que

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{\|\omega_i\| \leq c} \|\nabla_{\omega_i} F_i(t, \xi_i)\| < \infty, i=1,2.$$

Avec $\xi_1 = \omega_1, \xi_2 = [\omega_1^T, \omega_2^T]^T$

Noter que si le système (2.7) est autonome et si F_i est uniformément continue et différentiable au voisinage de l'origine (A2) est satisfaite.

Théorème : Si on suppose que (A1) et (A2) vérifiées. $\omega = 0$ est un point d'équilibre du système (2.7) si seulement si $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$ est un point d'équilibre du système (2.8) respectivement (2.9)

Supposant pour $i = 1,2$

(A1') F_i est continue si $\omega_i = 0$ et $F_i(t, 0) = F_2(t, 0, 0) = 0, t \geq 0$

(A2') Il existe une constante c tel que

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{\|\omega_i\| \leq c} \|\nabla_{\omega_i} F_i(t, \omega_1, \omega_2)\| < \infty, i = 1, 2.$$

Théorème : Supposant que (A1') et (A2') sont vérifiées et (2.9) est uniformément asymptotiquement stable ; si il existe une fonction définie positive $V_1(\omega_1, t)$ tel que :

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|\omega_1\|) &\leq V_1(\omega_1, t) \leq V_1(\|\omega_1\|) \\ \dot{V}_1|_{(2.6)} &\leq -\gamma_3(\|\omega_1\|) \end{aligned}$$

Avec $\gamma_i(\cdot), i = 1, 2, 3$ sont des fonctions de classe C , le système (2.7) est asymptotiquement stable

2.3 Application de la commande sur le double pendule inversé :

2.3.1 Modélisation du double pendule inversé

Nous avons tous essayé au moins une fois de maintenir en équilibre un grand bâton de bois sur notre index. Afin d'éviter la chute de celui-ci, nous devons déplacer notre doigt de façon à contrecarrer en permanence son basculement. C'est exactement le même principe que propose le banc d'essai des pendules inversés. Alors que cet exercice semble assez simple et instinctif pour l'homme, il sera nécessaire de définir des stratégies précises pour assurer le maintien automatique du pendule inversé. Bien évidemment, les performances obtenues grâce à un système automatique sont de loin supérieures à celles qui seraient obtenues par l'homme.

Le pendule inversé est un outil didactique puissant utilisé en automatique depuis maintenant plus de 50 ans. Nous pouvons d'ailleurs retrouver une vaste littérature à son sujet, puisque de nombreux services universitaires d'automatique ou de mécatronique ont créé leur propre pendule inversé. [Ahmad00].

Ce système consiste en un chariot mobile en translation supportant un pendule en rotation libre, cette plate-forme devant permettre une rotation du pendule de 360. autour de ses articulations et devant être suffisamment flexible (voir par exemple figure Fig.2.1).

Le simple pendule inversé

ce système consiste en un chariot qui peut se déplacer horizontalement et librement sur un rail de guidage . l'aide d'un moteur d'entraînement, supportant un pendule fixé tout en permettant la rotation libre de ce dernier autour de son articulation, comme l'indique la figure F.2.1 suivante :

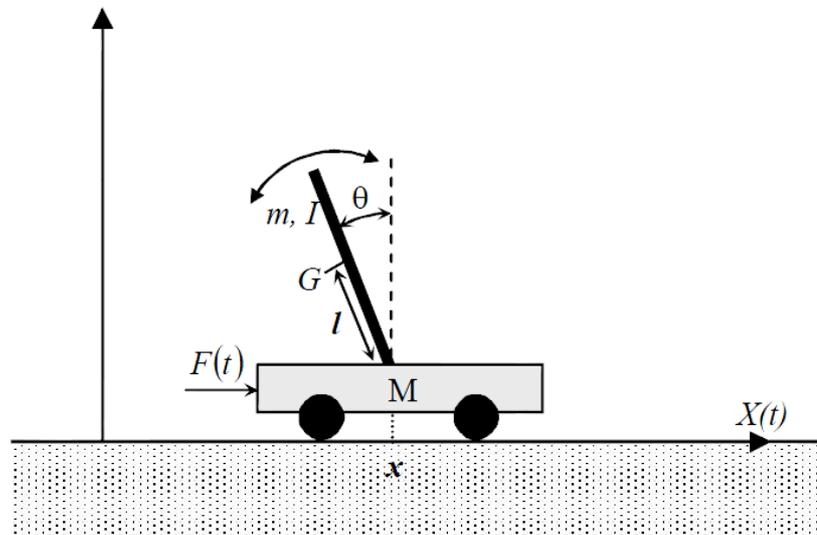


Fig.2.1 Le simple pendule inversé

Quand le moteur tourne avec un couple et une vitesse quelconques, cela engendre une force $F(t)$ appliquée sur le chariot, ce qui entraîne un déplacement $x(t)$ par rapport à l'origine choisie et une déviation du pendule par rapport à la verticale d'un angle $\theta(t)$. Ceci constitue un système à deux degrés de liberté. Il existe d'autres modèles du pendule inversé simple. On peut citer, par exemple, celui avec un chariot en mouvement circulaire autour d'un axe vertical comme l'indique la figure I-2 suivante [Anderson89].



Fig.2.2 Le pendule inversé simple rotatif en rotation

Le double pendule inversé :

Le double pendule inversé est une association de deux simple pendule inversé, ils sont couplés par un ressort de raideur K . Ce couplage donne naissance à un système non linéaire multi-variable Fig.2.3.

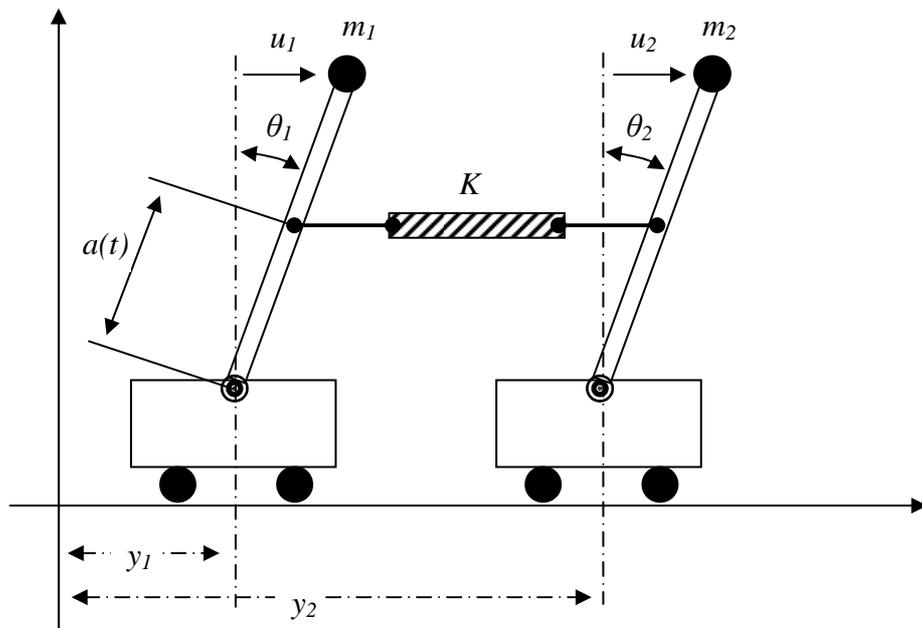


Fig.2.3. Le double pendule inversé

Établissons maintenant les grandes lignes du développement théorique d'un double pendule inversé. Pour ce faire, nous utiliserons les techniques de résolution lagrangienne.

2.3.2 Coordonnées généralisées :

Le problème rencontre deux degrés de liberté ce qui impose l'existence de deux coordonnées généralisées $q_i ; i = 1; 2$.

Ces coordonnées généralisées sont :

$$\begin{cases} q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \end{cases}$$

Calculons de suite les dérivées temporelles de ces coordonnées q_i

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{q}_2 = \dot{\theta}_2 = \omega_2 \end{cases}$$

Connaissant l'expression des vecteurs positions en fonction des q_i , on peut déterminer l'expression des énergies cinétiques T_i des deux masses en fonction des mêmes coordonnées

q_i . Et de même exprimons les énergies potentielles gravifiques $V_{g,i}$ des deux masses à l'aide des q_i [2].

2.3.3 Lagrangien du système

Vu tout ce qui a été calculé, il est facile de déterminer le lagrangien L du système :

$$L = T - V$$

A condition de prendre :

$$\begin{cases} T = T_1 + T_2 \\ V = V_{g,1} + V_{g,2} \end{cases}$$

2.3.4 Equations du mouvement

Afin de connaître les deux équations de mouvement $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ il faut résoudre le système d'équation dit de Lagrange [Ahmad00] :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

Donc au total, les équations à résoudre sont :

$$\ddot{\theta}_1 = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) \theta_1 + \frac{1}{cml^2} u_1 + \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \theta_2 - B_1 \dot{\theta}_1^2 - \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_1 - y_2)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) \theta_2 + \frac{1}{cml^2} u_2 + \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \theta_1 - B_1 \dot{\theta}_2^2 + \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_1 - y_2)$$

2.3.5 Représentation d'état du système :

On pose $x = [x_{1,1} \ x_{1,2} \ x_{2,1} \ x_{2,2}] = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_2]$ on aboutira à la représentation d'état des deux sous systèmes S1 et S2 :

Sous Système 1 :

$$S1: \begin{cases} \dot{x}_{1,1} = x_{1,2} \\ \dot{x}_{1,2} = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) x_{1,1} + \frac{1}{cml^2} u_1 + \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} x_{2,1} - B_1 x_{1,2}^2 - \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_1 - y_2) \end{cases}$$

Sous Système 2 :

$$S1: \begin{cases} \dot{x}_{2,1} = x_{2,2} \\ \dot{x}_{2,2} = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) x_{2,1} + \frac{1}{cml^2} u_2 + \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} x_{1,1} - B_2 x_{2,2}^2 - \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_2 - y_1) \end{cases}$$

2.3.6 Calcul de la commande :**Etape 1 : Ecriture du système sous la forme input/output différentiel équations :**

On remarque que le système est sous sa forme input/output [Bond85] :

On pose $\xi_{i,j} = x_{i,j}$ $i, j = 1, 2$

$$S1: \begin{cases} \dot{\xi}_{1,1} = \xi_{1,2} \\ \dot{\xi}_{1,2} = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) \xi_{1,1} + \frac{1}{cml^2} u_1 + \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \xi_{2,1} - B_1 \xi_{1,2}^2 - \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_1 - y_2) \end{cases}$$

$$S2: \begin{cases} \dot{\xi}_{2,1} = \xi_{2,2} \\ \dot{\xi}_{2,2} = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) \xi_{2,1} + \frac{1}{cml^2} u_2 + \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \xi_{1,1} - B_2 \xi_{2,2}^2 - \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_2 - y_1) \end{cases}$$

Etape 2 : Choix de la surface de glissement :

$$S_1 = a_{11} \xi_{1,1} + a_{12} \xi_{1,2} + \varphi_1$$

$$S_2 = a_{21} \xi_{2,1} + a_{22} \xi_{2,2} + \varphi_2$$

Avec

$$\varphi_1 = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) \xi_{1,1} + \frac{1}{cml^2} u_1 + \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \xi_{2,1} - B_1 \xi_{1,2}^2 - \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_1 - y_2)$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) \xi_{2,1} + \frac{1}{cml^2} u_2 + \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \xi_{1,1} - B_2 \xi_{2,2}^2 - \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_2 - y_1)$$

Et $(a_{11}, a_{12}, 1) = (10, 30, 1)$ et $(a_{21}, a_{22}, 1) = (20, 25, 1)$

Etape 3 : Choix de la condition d'attractivité des modes glissants découplés:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -\kappa_{11} S_1 - \kappa_{11} \text{sign}(S_1) \\ \dot{S}_2 = -\kappa_{21} S_2 - \kappa_{21} \text{sign}(S_2) \end{cases}$$

On pose

$$f(t) = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2} \right)$$

$$f_c = \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2}$$

$$\omega(t) = \frac{k(a(t) - cl)}{cml^2} (y_2 - y_1)$$

Calculant \dot{S}_i $i = 1, 2$

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \dot{\xi}_{1,1} + \frac{1}{cml^2} \dot{u}_1 + \left(\frac{d}{dt} f_c(t) \right) \dot{\xi}_{2,1} - 2B_1 \xi_{1,2} \dot{\xi}_{1,2} - \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right) \\ \dot{S}_2 = \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \dot{\xi}_{2,1} + \frac{1}{cml^2} \dot{u}_2 + \left(\frac{d}{dt} f_c(t) \right) \dot{\xi}_{1,1} - 2B_2 \xi_{2,2} \dot{\xi}_{2,2} + \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right) \end{cases}$$

On remplace $\dot{\xi}_{i,j}$ $i, j = 1, 2$ par leurs expressions on trouve :

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \dot{\xi}_{1,2} + \frac{1}{cml^2} \dot{u}_1 + \left(\frac{d}{dt} f_c(t) \right) \dot{\xi}_{2,2} - 2B_1 \xi_{1,2} \left(f(t) \xi_{1,1} + \frac{1}{cml^2} u_1 + f_c(t) \xi_{2,1} - B_1 \xi_{1,2}^2 - \omega(t) \right) \\ - \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right) \\ \dot{S}_2 = \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \dot{\xi}_{2,2} + \frac{1}{cml^2} \dot{u}_2 + \left(\frac{d}{dt} f_c(t) \right) \dot{\xi}_{1,2} - 2B_2 \xi_{2,2} \left(f(t) \xi_{2,1} + \frac{1}{cml^2} u_2 + f_c(t) \xi_{1,1} - B_2 \xi_{2,2}^2 + \omega(t) \right) \\ + \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right) \end{cases}$$

Après identification avec la condition d'attractivité on aboutira au système d'équations représentant la dynamique de la commande :

$$\begin{cases} \frac{1}{cml^2} \dot{u}_1 = \kappa_{11} S_1 + \kappa_{11} \text{sign}(S_1) \\ - \left[\left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \dot{\xi}_{1,2} + \frac{1}{cml^2} \dot{u}_1 + \left(\frac{d}{dt} f_c(t) \right) \dot{\xi}_{2,2} - 2B_1 \xi_{1,2} \left(f(t) \xi_{1,1} + \frac{1}{cml^2} u_1 + f_c(t) \xi_{2,1} - B_1 \xi_{1,2}^2 - \omega(t) \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right) \right] \\ \frac{1}{cml^2} \dot{u}_2 = \kappa_{21} S_2 + \kappa_{22} \text{sign}(S_2) \\ - \left[\left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \dot{\xi}_{2,2} + \frac{1}{cml^2} \dot{u}_2 + \left(\frac{d}{dt} f_c(t) \right) \dot{\xi}_{1,2} - 2B_2 \xi_{2,2} \left(f(t) \xi_{2,1} + \frac{1}{cml^2} u_2 + f_c(t) \xi_{1,1} - B_2 \xi_{2,2}^2 + \omega(t) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right) \right] \end{cases}$$

Pour trouver la commande u on fait la résolution numérique du système d'équations précédent.

2.4 Résultats de simulation :

Résultats de simulation après implémentation de régulateur par mode de glissement :

La figure Fig.2.4. Montre le système avec les deux commandes u_1 et u_2 :

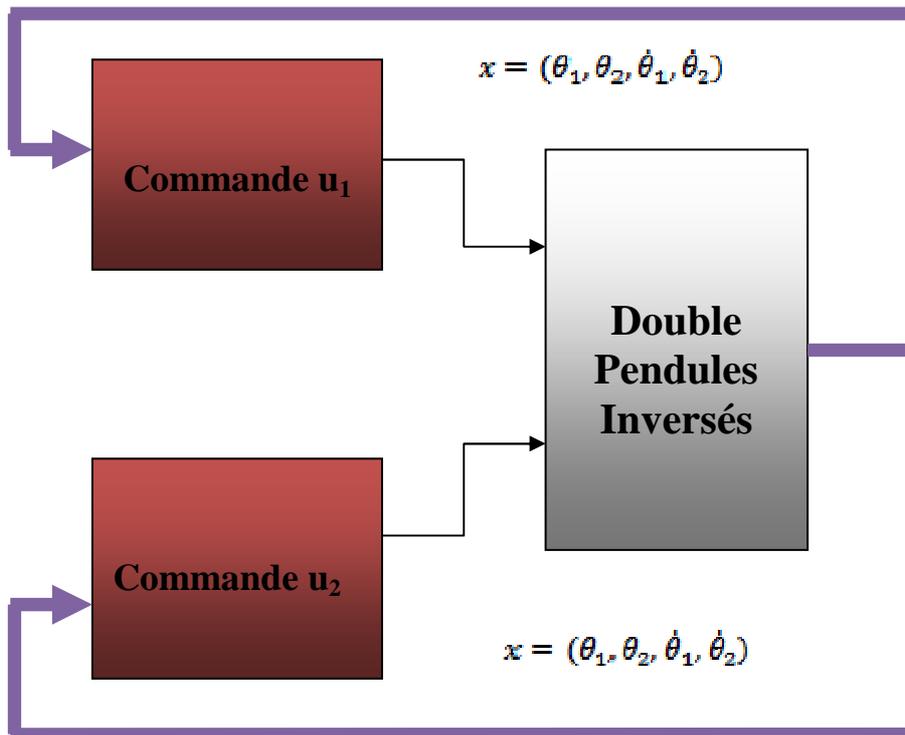
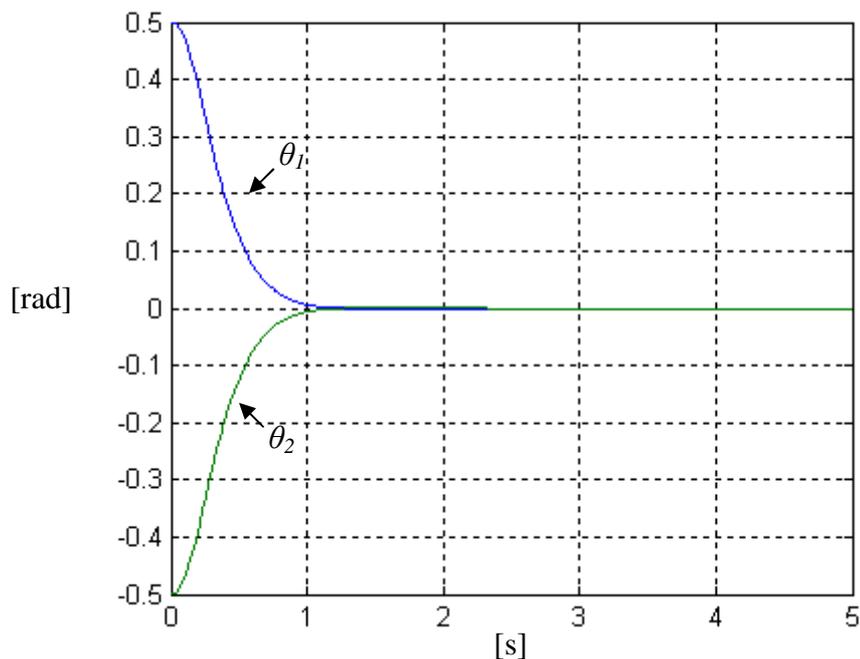


Fig.2.4. Blocs de simulation de système avec régulateur

Paramètres	Unité	Description	Valeurs numériques
m_1	Kg	masse de pendule 1	2
m_2	Kg	masse de pendule 2	2.5
b	m	la distance entre les deux pendules	0.4
l	m	longueur du ressort au repos	0.5
k	N/m	constante de raideur du ressort	100
r	m	longueur de chaque pendule	0.5
g	m/s^2	constante de la gravitation terrestre	9.81
$\theta_1(t), \theta_2(t)$	rad	position angulaire de chaque pendule	-
$u_1(t), u_2(t)$		commandes appliquées au système	-

Tableau des paramètres du modèle de doubles pendules inversés :

**Fig.2.5.** Les sortie $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ du double pendule inversé

La figure Fig.2.5 montre une convergence rapide des deux sorties $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ vers l'origine le temps de réponse est de 1.1s. On remarque bien que le système répond comme un système d'ordre 2 et c'est dû à la linéarisation asymptotique par un feedback.

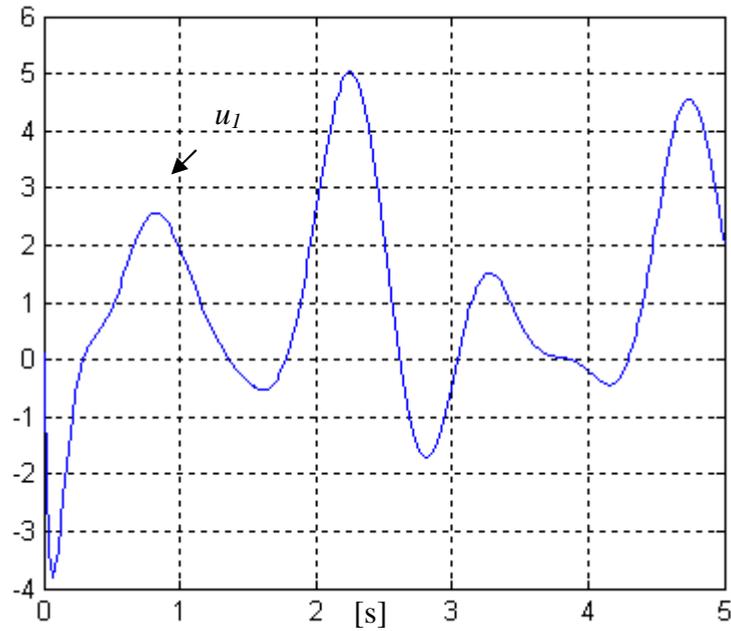


Fig.2.6. La sortie du régulateur u_1

Les figures Fig.2.6. et Fig.2.7. montrent la commande appliquée à ce système, on remarque bien que la commande ne présente pas de chattering à cause de mode glissant qu'on peut considérer comme un mode glissant d'ordre 2. La symétrie du double pendule inversé et le choix des paramètres identiques des deux pendules nous permettent de voir la symétrie des deux commandes.

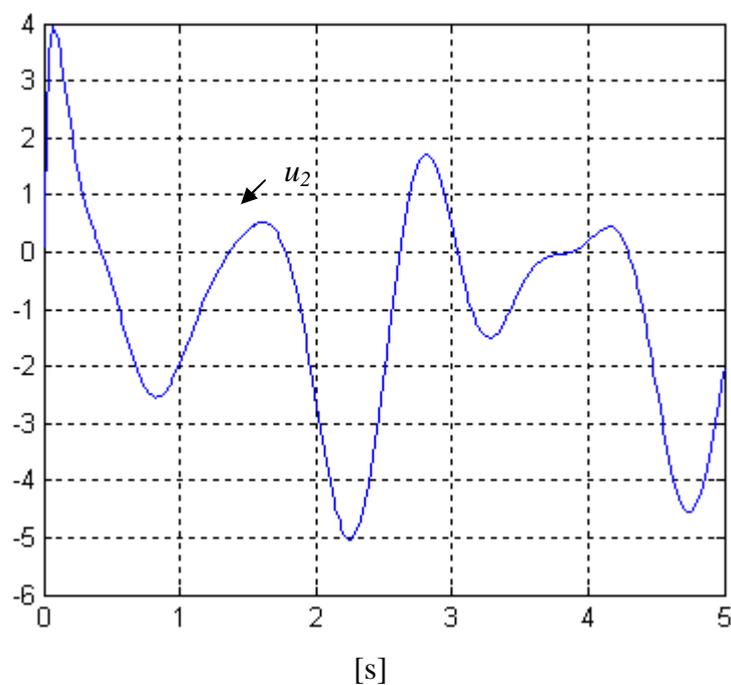


Fig.2.4.4. La sortie du régulateur u_2

Conclusion :

La commande non linéaire mode glissant généralisée synthétisée à partir du modèle du double pendule inversé, donne de grandes performances et une bonne robustesse vis-à-vis des perturbations externes. Le choix de la surface de glissement découplée n'a pas d'influence majeure sur la convergence et la stabilité du système non-linéaire. Néanmoins après calcul de la commande, certain couplage entre les deux sous-systèmes apparaissent, mais sans influence sur les performances de la commande.

Chapitre 3 : Observateur mode glissant d'ordre 2 appliqué à un double pendule inversé.

Introduction :

Dans cette section, nous proposons la synthèse d'observateurs pour le double pendule inversé basée sur des modes glissants d'ordre supérieur. Avant de mettre en place ces méthodes d'estimation, nous offrons une brève description de ces techniques, et de l'algorithme du Super Twisting que nous utiliserons en particulier [Leva99].

3.1. Quelques définitions sur l'observabilité :

On considère le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, u, t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Tel que $x \in R^n$, $u \in R^m$ et $f(x, u, t)$ et $h(x, u, t)$ des champs de vecteurs.

3.1.1 Définition 1 : (*distinguabilité*)

Deux états initiaux x et x' sont dits indistinguables (notés xIx') si pour tout $t \geq 0$, les sorties $y(t)$ et $y'(t)$ sont identiques pour toute entrée $u(t)$ admissible. Ils sont dits distinguables sinon. L'indistinguabilité est une relation d'équivalence. Notons $I(x)$ la classe d'équivalence de x .

3.1.2 Définition 2 (*observabilité globale*)

Le système est dit observable en x si $I(x) = \{x\}$ et il est observable si $I(x) = \{x\}$ pour tout x . Ainsi le système est observable si pour tous les états initiaux x et x' , il existe une entrée admissible u qui distingue x et x' , c'est à dire telle que $y(t) \neq y'(t)$ pour au moins un temps $t \geq 0$ (injectivité).

3.1.3 Définition 3 (*observabilité locale en temps et en espace*)

L'état x est localement observable, si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout voisinage U de x , il existe $\eta > 0$ plus petit que ε et un voisinage V de x contenu dans U , tel que pour tout $x' \in V$, il existe une entrée $[0, \eta]: t \rightarrow u(t)$ qui distingue x et x' , i.e. telle que $y(\eta) \neq y'(\eta)$. Le système est localement observable s'il l'est pour tout x .

Le système est localement observable si on peut instantanément distinguer chaque état de ses voisins en choisissant judicieusement l'entrée U .

3.2. Observateur par Modes de glissement « Super Twisting »

Les modes glissants sont très utilisés dans le cadre de l'observation et la commande robustes des systèmes non linéaires. L'objectif est de contraindre le système à converger en temps fini et à rester sur une surface (appelée surface de glissement), sur laquelle la dynamique est celle souhaitée par le cahier des charges, le tout grâce à une commande discontinue. Les modes glissants d'ordre supérieur permettent d'avoir une précision de convergence accrue, et d'effacer les problèmes de discontinuités de la commande qu'engendrent les modes glissants d'ordre 1 (sous certaines conditions liant le degré relatif du système par rapport à la variable de glissement S et l'ordre choisi du mode glissant). On peut maintenant trouver une littérature relativement importante concernant l'observation et la commande par mode glissants d'ordre deux avec des applications dans les domaines de la mécanique, la robotique ou les machines électriques.

3.2.1. Observateur Mode glissant d'ordre 2 :

On considère la classe de système non linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, u, t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Où $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, et y est la sortie du système, La dynamique du système est représentée par la fonction $f(x_1, \dots, x_{n-1}, u, t)$, Nous supposons que f est Lebesgue - mesurables dans une région compacte de X .

Définition :

Un ensemble Lebesgue-mesurable (qu'on abrège souvent en mesurable) est une partie de l'espace \mathbb{R}^n dont la mesure de Lebesgue peut être définie, le concept pouvant être étendu à toute variété différentiable M . On appelle tribu de Lebesgue l'ensemble des parties Lebesgue-mesurables de M [Luen71].

On considère le cas $n=2$, la méthode de conception peut être étendue au cas vectoriel facilement. En outre, il est facile de voir que le rapport degré de u à y est de deux. Par souci de concevoir et d'analyser un observateur, ce qui suit justifie sont utilisation.

Hypothèse 3.1. Il existe deux constantes positives k_1 et k_2 tels que

$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2, u, t) - f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u, t)| &\leq k_1 |x_1 - \hat{x}_1| \\ \left| \frac{df(x_1, x_2, u, t) - df(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u, t)}{dt} \right| &\leq k_2 |x_2 - \hat{x}_2| \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sur la base de la dynamique de système (3.2) l'observateur mode glissant d'ordre 2 est représentée comme ce qui suit [Sira88]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + z_1 & \hat{x}_1(0) &= x_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2, u) + z_2 & \hat{x}_2(0) &= 0 \\ \hat{y} &= \hat{x}_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

où x_1 et x_2 sont les estimations des état du système, z_1 et z_2 sont les variables de correction, qui sont définis comme ce qui suit :

$$\begin{cases} z_1 = \lambda_1 |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) + v_1 \\ v_1 = \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) \end{cases} \quad (3.5)$$

Avec

$$\begin{cases} z_2 = 0 & \text{if } \dot{\tilde{x}}_1 \neq 0, \tilde{x}_1 \neq 0 \\ = \lambda_2 |z_1|^{1/2} \text{sign}(z_1) + v_2 & \text{if } \dot{\tilde{x}}_1 = 0, \text{ and } \tilde{x}_1 = 0 \\ \dot{v}_2 = \alpha_2 \text{sign}(z_1) \end{cases} \quad (3.6)$$

Tel que $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$, et sign est la fonction discontinue

Dans l'observateur mode glissant d'ordre deux ci-dessus (3.4), une structure des observateur à été utilisé pour éliminer les chattering où \hat{x}_1 et \hat{x}_2 atteignent la surface d'attraction, de manière récursive.

Après remplacer la dynamique de l'observateur peut être écrite sous forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \lambda_1 |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) - v_1 \\ \dot{v}_1 = \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = F(t, x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2, u) \end{cases} \quad (3.7)$$

Avec $F(t, x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2, u) = f(t, x_1, x_2, u) - f(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2, u)$ basant sur l'hypothèse 3.1 on aura :

$$\begin{cases} |F(t, x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2, u)| < k_1 |x_1 - \hat{x}_1| \\ \left| \frac{dF(t, x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2, u)}{dt} \right| < k_2 |x_2 - \hat{x}_2| \end{cases} \quad (3.8)$$

pour toutes les possibilités de $x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2$ et u . La convergence d'un observateur super-twisting a été étudiée par Davila et al. Dans [Meh99], dans laquelle $F(x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2)$ est bornée par une constante f^+ . Ici, nous allons utiliser la même approche pour étudier la convergence de l'observateur mode glissant d'ordre où $F(\cdot)$ ne satisfait que la condition (3.8)

Théorème 3.1 : Les premières paires variable $(\hat{x}_1, \dot{\hat{x}}_1)$ convergent vers (x_1, \dot{x}_1) en temps fini, si la condition (3.8-a) est vérifiée pour le système (3.2), et les paramètres de l'observateur (3.4) sont choisis selon les critères suivants:

$$\alpha_1 > k_1 \tilde{x}_{1Max} \quad \text{ou} \quad \alpha_1 > \sqrt{k_1} \dot{\tilde{x}}_{10} \quad (3.9)$$

$$\lambda_1 > \frac{4\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1}}$$

Preuve : De (3.7) et (3.8-a), les erreurs d'estimation d'état \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 satisfassent l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \lambda_1 |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) - v_1 \\ \dot{v}_1 = \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 \in [-k_1 |\tilde{x}_1|, k_1 |\tilde{x}_1|] \end{cases} \quad (3.10)$$

Ici et dans la partie suivante, toutes les inclusions différentielles sont définies dans le sens Filippov. Utilisant l'identité $d|x|/dt = \dot{x} \text{sign}(x)$, on peut obtenir $\ddot{\tilde{x}}_1$ avec $\tilde{x}_1 \neq 0$ comme suit :

$$\ddot{\tilde{x}}_1 \in [-k_1 |\tilde{x}_1|, k_1 |\tilde{x}_1|] - \frac{1}{2} \lambda_1 \frac{\dot{\tilde{x}}_1}{|\tilde{x}_1|^{3/2}} - \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) \quad (3.11)$$

L'inclusion (3.11) est une description mathématique de la courbe bornée représentée dans la figure 1. Les valeurs initiales de l'observateur sont définies comme suit $(x_1, x_2) = (x_1, 0)$.

La trajectoire entre le demi-plan $\tilde{x}_1 > 0$ avec une valeur initiale positive $\dot{\tilde{x}}_{10} = \tilde{x}_2$ et le demi-plan $\tilde{x}_1 < 0$ avec une valeur négative de \tilde{x}_2 .

Dans le quadrant 1 ($\tilde{x}_1 > 0, \dot{\tilde{x}}_1 > 0$) la trajectoire est enfermée entre la droite $\tilde{x}_1 = 0, \dot{\tilde{x}}_1 = 0$ et la courbe d'équation $\ddot{\tilde{x}}_1 = k_1 \dot{\tilde{x}}_1 - \alpha_1 = 0$. Définissant $\dot{\tilde{x}}_{10}$ comme l'intersection de cette courbe avec la droite $\tilde{x}_1 = 0$, et soit \tilde{x}_{1M} l'intersection de cette courbe avec la droite $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$. Avec la résolution de l'équation différentielle, on peut vérifier que

$$\left(\tilde{x}_{1M} - \frac{\alpha_1}{k_1} \right)^2 + \left(\frac{\dot{\tilde{x}}_{10}}{\sqrt{k_1}} \right)^2 = \left(\frac{\alpha_1}{k_1} \right)^2 \quad (3.12)$$

et la courbe bornée dans le quadrant 1 est décrite par une équation elliptique suivante :

$$\left(\tilde{x}_1 + \frac{\alpha}{k_1} - x_{1M} \right)^2 + \left(\frac{\dot{\tilde{x}}_{10}}{\sqrt{k_1}} \right)^2 = \left(\frac{\alpha}{k_1} \right)^2 \quad (3.13)$$

Avec $\tilde{x}_1 > 0$, $\dot{\tilde{x}}_1 > 0$.

A partir de l'analyse qui précède, le maximum de \tilde{x}_1 , \tilde{x}_{1M} peut être retrouvé facilement.

Par conséquent, avec (3.9) et (3.11), pour $\tilde{x}_1 > 0$, $\dot{\tilde{x}}_1 > 0$.

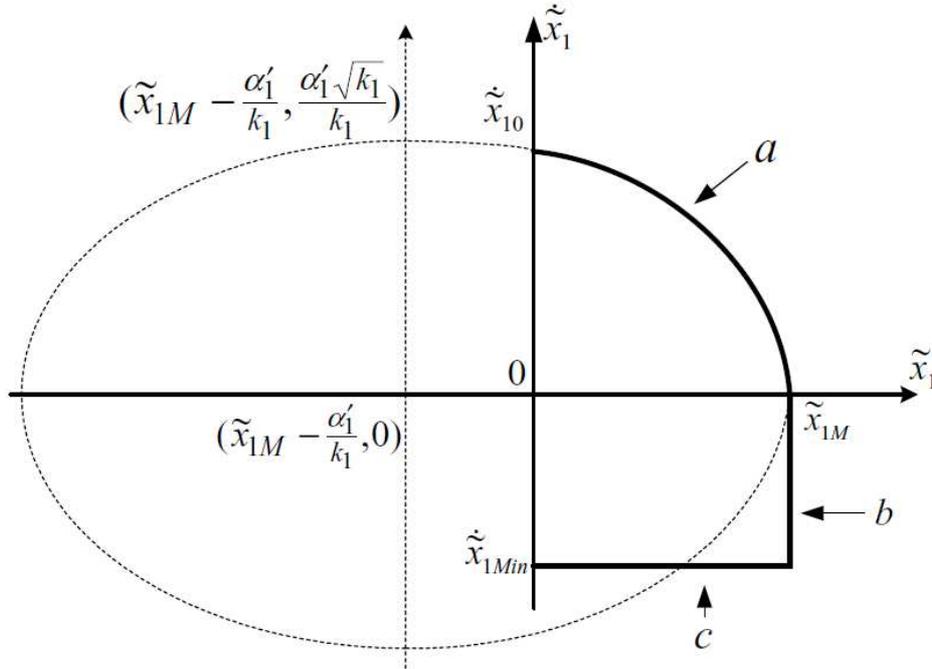


Fig 3.1 La courbe représentative de la convergence de \tilde{x}_1

$$\ddot{\tilde{x}}_1 \leq k_1 \tilde{x}_1 - \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) - \frac{1}{2} \lambda_1 \frac{\dot{\tilde{x}}_1}{|\tilde{x}_1|^{1/2}} < 0 \quad (3.14)$$

Par conséquent, la trajectoire rejoint l'axe $\tilde{x}_1 = 0$, et entre dans le quatrième quadrant.

Ensuite, considérons la courbe bornée dans le quadrant 4 ($\tilde{x}_1 > 0$, $\dot{\tilde{x}}_1 < 0$) lorsqu'elle vérifie la condition (3.14), $\dot{\tilde{x}}_1$ continue à diminuer jusqu'à ce que $\ddot{\tilde{x}}_1$ s'annule venant d'une valeur négative. Par conséquent, la courbe bornée est composée de deux parties.

La première partie converge de $(\tilde{x}_{1M}, 0)$ vers $(\tilde{x}_{1M}, \dot{\tilde{x}}_{1Min})$ dont $\ddot{\tilde{x}}_{1Min} = 0$ implique $\dot{\tilde{x}}_{1Min}$ atteint la plus petite valeur de $\dot{\tilde{x}}_1$ [voir Fig. 3.1, (b)].

Si le membre droit de l'équation (3.11) est nul dans le pire des cas, nous avons

$$\tilde{x}_{1Min} = -\frac{2}{\lambda_1}(k_1\tilde{x}_{1M} + \alpha_1)x_{1M}^{1/2}.$$

Etant donné que dans le quadrant 4, $\dot{\tilde{x}}_1 < 0$, la trajectoire atteint la droite $\tilde{x}_1 = 0$. Ainsi, la deuxième partie de la courbe dans le quatrième quadrant est la trajectoire horizontale de $(\tilde{x}_{1M}, \dot{\tilde{x}}_{1Min})$ vers $(0, \dot{\tilde{x}}_{1Min})$ [Voir la figure 1, la ligne (c)].

Basant sur les équations (3.8), (3.9) et (3.12) on peut obtenir :

$$|\dot{\tilde{x}}_{1Min}| < |\dot{\tilde{x}}_{10}| \quad (3.15)$$

Si nous définissons $x_{1Min} = x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1i}, \dots$ points d'intersection du système (9) (la trajectoire qui part du point $(0, \dot{\tilde{x}}_{10})$ avec la droite $\tilde{x}_1 = 0$), l'inégalité (3.15) assure la convergence en temps fini de l'état $(0, \dot{\tilde{x}}_{1i})$ vers $\tilde{x}_1 = \dot{\tilde{x}}_1 = 0$.

Remarque 1.

La courbe est constitué de segments (a), (b) et (c) est le «pire» cas de la trajectoire. En effet, $(\tilde{x}_1, \dot{\tilde{x}}_1)$ se déplace le long de la direction de (a), (b), (c) dans la courbe borné [Sira88].

Remarque 2.

Le choix des α_1 et λ_1 dépend de l'incertitude et la valeur initiale de l'erreur d'estimation d'état. Le résultat théorique est conforme à celle que lorsque la limite de $F(\cdot)$ est connue. Dans les applications, une valeur assez grande de α_1 est préféré afin de satisfaire (3.9) et (13).

Considérons la convergence en temps fini de \tilde{x}_2 , évidemment, quand \tilde{x}_1 atteint la zone de glissement multiples, c'est à dire, $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$, $z_1 = \tilde{x}_2$, la dynamique de l'erreur d'estimation \tilde{x}_2 devient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 &= F(t, x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2) - \lambda_2 |\tilde{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_2) - v_2 \\ \dot{v}_2 &= \alpha_2 \text{sign}(\tilde{x}_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

De même on peut calculer de la dérivée de \tilde{x}_2 avec $x_2 \neq 0$ nous obtenons :

$$\dot{\tilde{x}}_2 \in \left[-k_2|\tilde{x}_2|, k_2|\tilde{x}_2| \right] - \frac{1}{2}\lambda_2 \frac{\tilde{x}_2}{|\tilde{x}_2|^{1/2}} - \alpha_2 \text{sign}(\tilde{x}_2). \quad (3.17)$$

Etant donné (3.17) a une forme similaire à (3.11), la convergence en temps fini de \tilde{x}_2 peut être prouvé d'une manière similaire à celle du Théorème 1.

3.2.2. Synthèse de l'observateur pour le double pendule inversé :

Comme il a été illustré pour le double pendule inversé au paragraphe 4.4, le modèle du système comporte deux parties couplées : chaque partie est un pendule inversé simple.

En toute généralité, le modèle du processus est sous la forme I/O differential equation.

Les équations de l'observateur décrit précédemment sont représentés dans le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{1,1} &= \hat{x}_{1,2} + z_{1,1} \\ \dot{\hat{x}}_{1,2} &= \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) \hat{x}_{1,1} + \frac{1}{cml^2} u_1 + \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \hat{x}_{2,1} - B_1 \hat{x}_{1,2}^2 - \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_1 - y_2) + z_{1,2} \\ \hat{y}_1 &= \hat{x}_{1,1} \\ \hat{x}_{1,1}(0) &= x_{1,1} \\ \hat{x}_{1,2}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_{1,1} = \lambda_{1,1} |\tilde{x}_{1,1}|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_{1,1}) + v_{1,1} \\ v_{1,1} = \alpha_{1,1} \text{sign}(\tilde{x}_{1,1}) \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} z_{1,2} = 0 & \text{if } \dot{\tilde{x}}_{1,1} \neq 0, \tilde{x}_{1,1} \neq 0 \\ = \lambda_{1,2} |z_{1,1}|^{1/2} \text{sign}(z_{1,1}) + v_{1,2} & \text{if } \dot{\tilde{x}}_{1,1} = 0, \text{ and } \tilde{x}_{1,1} = 0 \\ \dot{v}_{1,2} = \alpha_{1,2} \text{sign}(z_{1,1}) \end{cases}$$

Tel que $\tilde{x}_{1,1} = x_{1,1} - \hat{x}_{1,1}$, $\tilde{x}_{1,2} = x_{1,2} - \hat{x}_{1,2}$, et sign est la fonction discontinue

$$\dot{\hat{x}}_{2,1} = \hat{x}_{2,2} + z_{2,1}$$

$$\dot{\hat{x}}_{2,2} = \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2} \right) \hat{x}_{2,1} + \frac{1}{cml^2} u_2 + \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2} \hat{x}_{1,1} - B_2 \hat{x}_{2,2}^2 + \frac{k(a(t) - cl)}{cml^2} (y_1 - y_2) + z_{2,2}$$

$$\hat{y}_2 = \hat{x}_{2,1}$$

$$\hat{x}_{2,1}(0) = x_{2,1}$$

$$\hat{x}_{2,2}(0) = 0$$

$$\begin{cases} z_{2,1} = \lambda_{2,1} |\tilde{x}_{2,1}|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_{2,1}) + v_{2,1} \\ v_{2,1} = \alpha_{2,1} \text{sign}(\tilde{x}_{2,1}) \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} z_{2,2} = 0 & \text{if } \dot{\tilde{x}}_{2,1} \neq 0, \tilde{x}_{2,1} \neq 0 \\ = \lambda_{2,2} |z_{2,1}|^{1/2} \text{sign}(z_{2,1}) + v_{2,2} & \text{if } \dot{\tilde{x}}_{2,1} = 0, \text{ and } \tilde{x}_{2,1} = 0 \\ \dot{v}_{2,2} = \alpha_{2,2} \text{sign}(z_{2,1}) \end{cases}$$

Tel que $\tilde{x}_{2,1} = x_{2,1} - \hat{x}_{2,1}$, $\tilde{x}_{2,2} = x_{2,2} - \hat{x}_{2,2}$, et sign est la fonction discontinue

3.3. Résultats de simulations :

La figure Fig.3.2 Montre le système avec les deux commandes u_1 et u_2 :

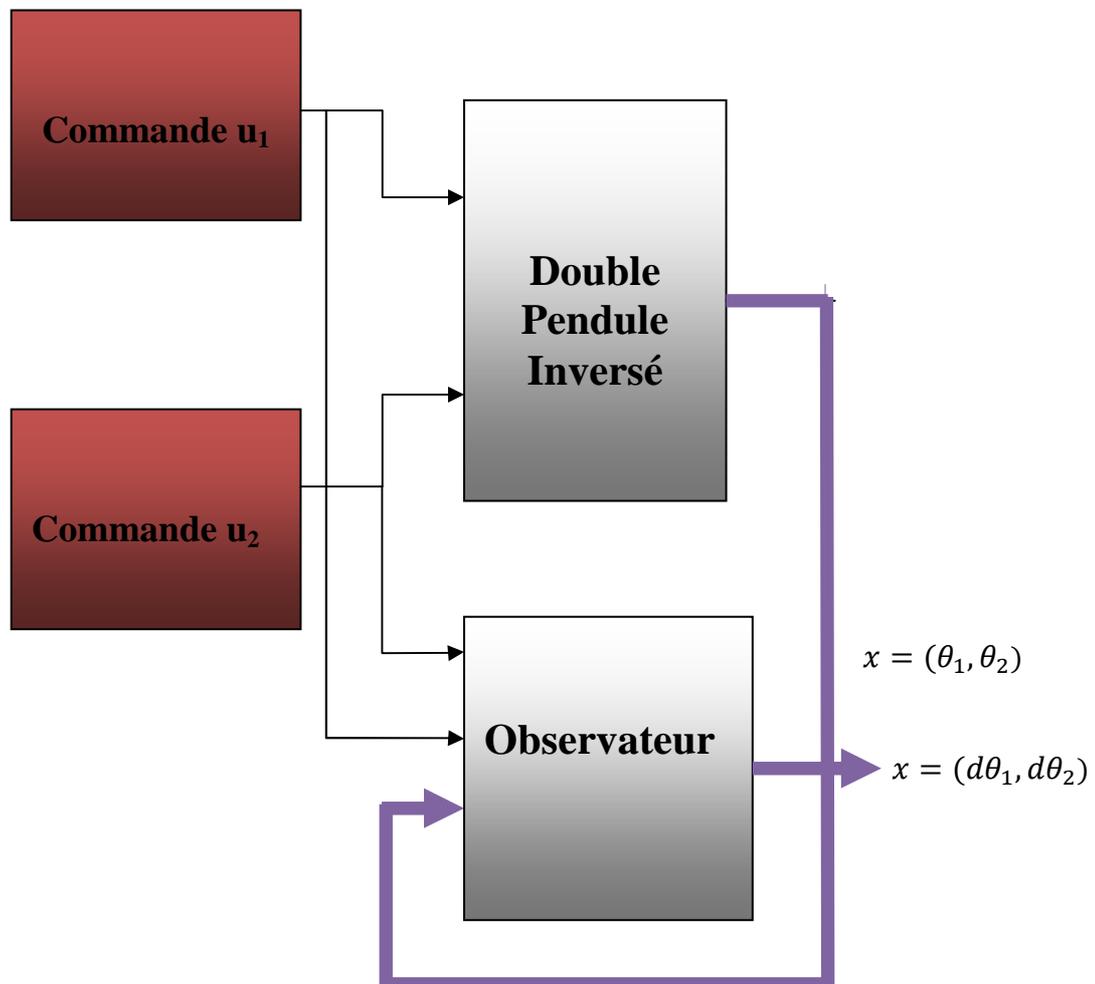


Fig.3.2. Blocs de simulation de système avec L'observateur

Tableau des paramètres de modèle de doubles pendules inversés :

Paramètres	Unité	Description	Valeurs numériques
m_1	Kg	masse de pendule 1	2
m_2	Kg	masse de pendule 2	2.5
b	m	la distance entre les deux pendules	0.4
l	m	longueur du ressort au repos	0.5
k	N/m	constante de raideur du ressort	100
r	m	longueur de chaque pendule	0.5
g	m/s^2	constante de la gravitation terrestre	9.81
$\theta_1(t), \theta_2(t)$	rad	position angulaire de chaque pendule	-
$u_1(t), u_2(t)$	N	commandes appliquées au système	-

Les états et les variables reconstruites par chaque observateur sont présentées dans les figures 3 et 4. D'après ces figures, nous constatons la convergence plus rapide et plus précise de l'observateur à modes glissants, dues à la convergence en temps fini de celui-ci, et nous remarquons bien que le chattering sur l'erreur d'observabilité est réduite par rapport aux observateur d'ordre 1. On remarque bien que les deux états $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ convergent en un temps fini vers les états réels du système. Dans toutes les simulations les courbe en couleur rouge représentent les variable réelles du système, et ceux en couleur bleu représentent les estimations.

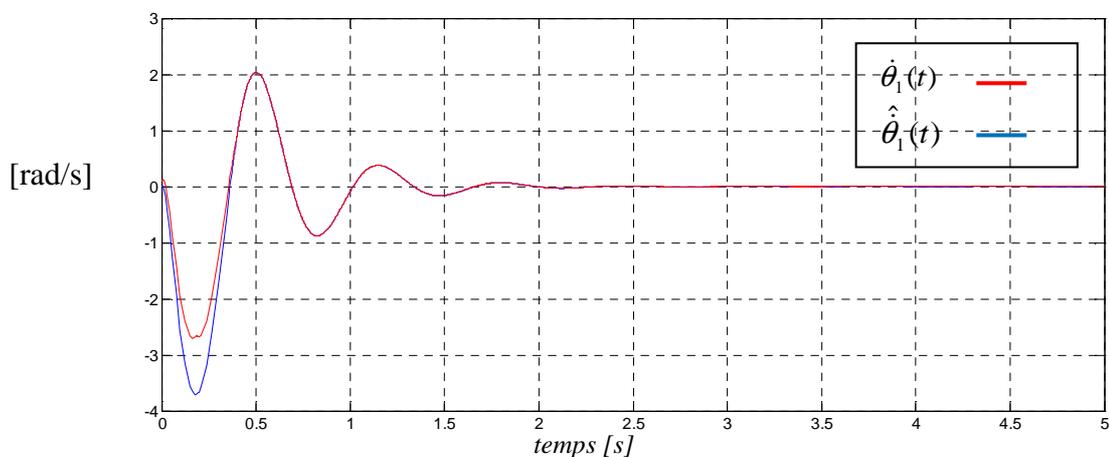


Fig.3.3. Courbe représentative de $\dot{\theta}_1(t)$ et son estimation $\hat{\dot{\theta}}_1(t)$

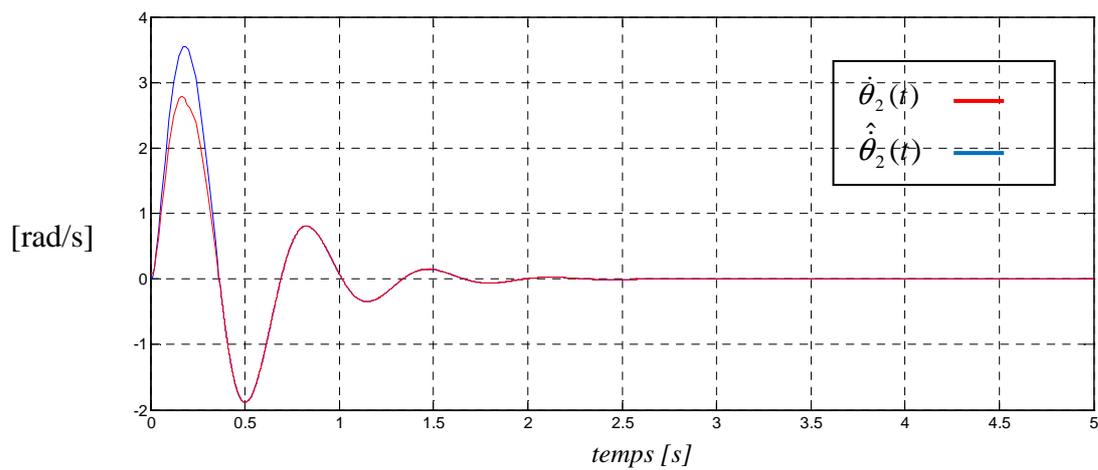


Fig.3.4. Courbe représentative de $\dot{\theta}_2(t)$ et son estimation $\hat{\theta}_2(t)$

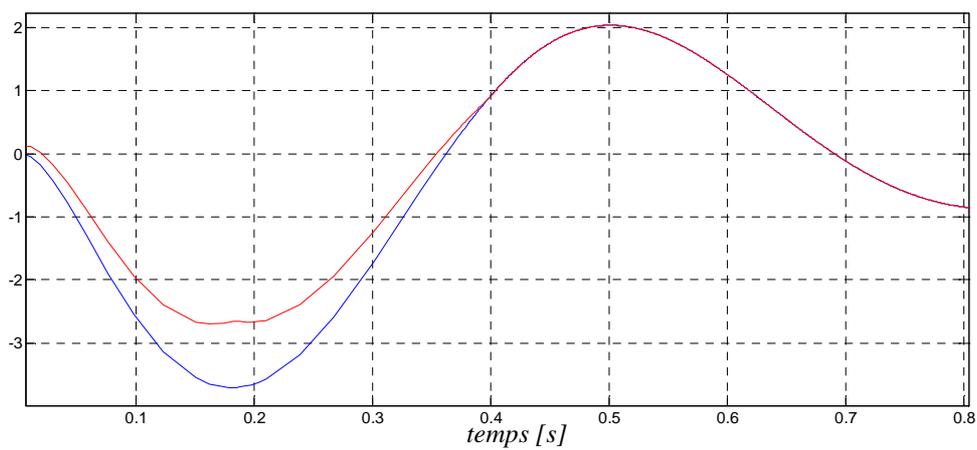


Fig.3.5. Zoom courbe représentative de $\dot{\theta}_1(t)$ et son estimation $\hat{\theta}_1(t)$

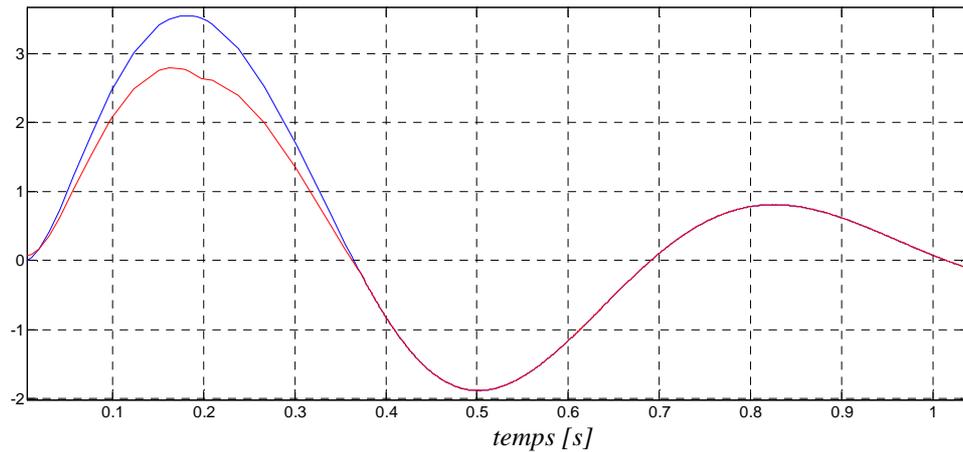


Fig.3.6. Zoom courbe représentative de $\dot{\theta}_2(t)$ et son estimation $\hat{\dot{\theta}}_2(t)$

L'erreur d'observabilité dépend de la dynamique de l'observateur on remarque que le temps de convergence de l'observateur est 0.4s. A cause de la perturbation et le ressort qui relier les deux pendules. L'erreur d'observation oscille autour d'une valeur proche de zéros. Les deux valeurs sont complémentaires.

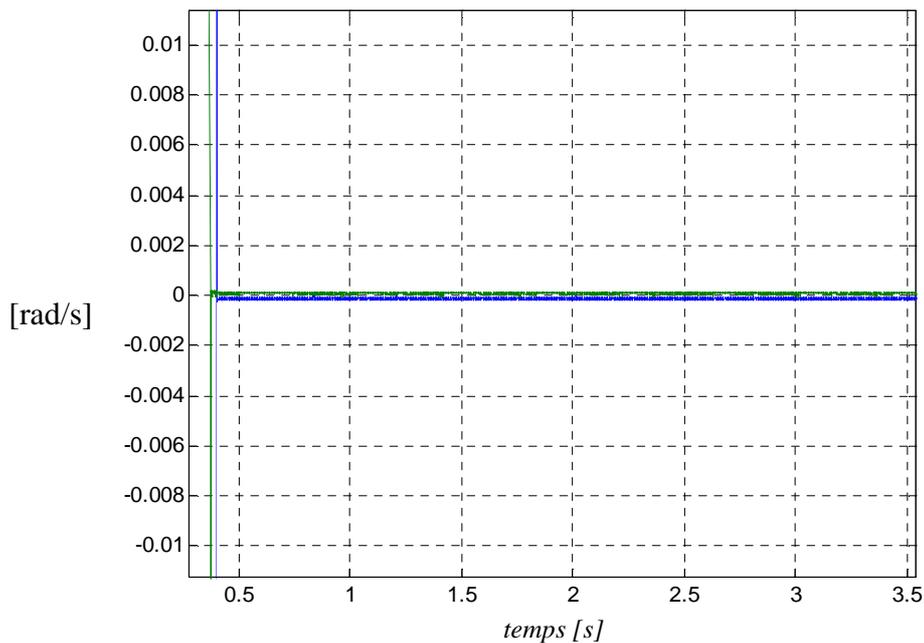


Fig.3.7. Courbe représentative de $e_1(t) = \dot{\theta}_1(t) - \hat{\dot{\theta}}_1(t)$ et $e_2(t) = \dot{\theta}_2(t) - \hat{\dot{\theta}}_2(t)$.

Il est démontré que les trajectoires du système évoluent après un temps fini vers une surface de glissement S qui est dans notre cas l'erreur d'estimation. Les dynamiques équivalentes sur cette surface /Utkin, 1992/ fournissent directement une estimation en

continu, sans recours à aucun filtrage (inconvenient du mode glissant d'ordre 1 /Drakunov et al, 1995/).

Conclusion :

Dans cette contribution, nous avons proposé un observateur de type Mode glissant d'ordre 2 (Super-twisting algorithm) pour une classe de systèmes non-linéaires généralisée. Cette classe inclut toutes les classes de systèmes considérées jusqu'ici et pour lesquelles toutefois, beaucoup d'autres systèmes uniformément observables n'appartiennent pas à cette classe et nous travaillons pour élargir la synthèse de l'observateur à de tels systèmes non-linéaires générale.

Chapitre 4 : Synthèse de la
commande généralisée avec observateur
mode glissant d'ordre 2 à un double
pendule inversé couplé

Introduction :

Dans cette partie nous avons proposé une implémentation de la commande généralisée et l'observateur mode glissant d'ordre 2. En premier un test de la stabilité globale de la commande avec l'observateur est vérifié, la démonstration de la stabilité globale est similaire à la démonstration de la commande asymptotique du système avec la commande. Dans cette démonstration l'erreur d'estimation est considérée comme variable d'état asymptotiquement stable, le théorème de la convergence des systèmes triangulaires nous assure la stabilité globale du système avec la commande et l'observateur [Djem97], [Djem99].

4.1 Synthèse d'une loi de commande avec l'observateur :

Avant de synthétiser la commande et l'observateur on définit le système sous sa forme I/O

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, u, t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Tel que $x \in R^n$, $u \in R^m$ et $f(x, u, t)$ des champs de vecteurs.

4.1.1 Stabilité des systèmes triangulaires :

Pour étudier la stabilité de l'ensemble du système avec l'observateur et la commande on est appelé à définir quelques forme de système dont leurs stabilité a été déjà prouvé de [22].

Considérons le système triangulaire variant dans le temps (4.2)

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= F_1(t, \omega_1) \\ \dot{\omega}_2 &= F_2(t, \omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Avec $t \in R_+$, $\omega_i \in R^{n_i}$, $i = 1, 2$.

Si le deuxième sous-système est déconnecté, deux sous-systèmes sont obtenus

$$\dot{\omega}_1 = F_1(t, \omega_1) \quad (4.4)$$

Et

$$\dot{\omega}_2 = F_2(t, 0, \omega_2) \quad (4.5)$$

Supposons que pour $i = 1, 2$

4.1.1.1 Hypothèse 1

F_i est continue et $F_1(t, 0) = F_1(t, 0, 0) = 0$, $t \geq 0$.

4.1.1.2 Hypothèse 2

Il existe une constante β tel que :

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{\|\omega_i\| \leq \beta} \|\nabla_{\omega_i} F_i(t, \xi_i)\| < \infty, i = 1, 2.$$

Avec $\xi_i = \omega_i$, $\xi_2 = [\omega_1^T, \omega_2^T]^T$.

Notez que si (4.2) est autonome et si F_i est continûment différentiable par rapport à tous ses arguments dans un voisinage de l'origine, l'hypothèse 2 est satisfaite.

4.1.1.3 Théorème 1:

Supposons que les deux hypothèses 1 et 2 sont satisfaites puis $\omega = 0$ est un point d'équilibre asymptotique de (4.2) si et seulement si $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$ sont deux point asymptotiquement stable de (4.4) et (4.5) respectivement [Edwa96] [Emel67] [Emel86]..

4.1.1.4 Remarque 1

La discontinuité de la fonction F2 nous oblige à modifier la première hypothèse en remplaçant la condition de continuité en n'importe quelle point a une continuité exclusive du cas $\omega = 0$.

4.1.1.5 Hypothèse 3 :

$$F_1(t,0) = F_1(t,0,0) = 0, \quad t \geq 0.$$

F_1 est continue et F_2 est continu si $\omega_1 \neq 0$

4.1.1.6 Théorème 2 :

Supposons que les deux hypothèses sont vérifiées et (4.5) est uniformément asymptotiquement stable.

Si il existe une fonction définie positive $V_1(\omega_1, t)$ tel que :

$$\gamma_1(\|\omega_1\|) \leq V_1(\omega_1, t) \leq \gamma_1(\|\omega_1\|)$$

$$\dot{V}_1|_{(2.6)} \leq -\gamma_3(\|\omega_1\|)$$

Avec $\gamma_i(\cdot)$, $i = 1,2,3$, est la classe de fonction uniformément asymptotiquement stable.

4.1.2 Synthèse de l'Observateur Mode glissant d'ordre 2 et la commande généralisée :

On considère la classe de système non linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, u, t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Où $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^m$ est l'état du système, et y est la sortie du système, La dynamique du système est représentée par la fonction $f(x_1, \dots, x_{n-1}, u, t)$, Nous supposons que f est Lebesgue - mesurables dans une région compacte de X.

Sur la base de la dynamique du système (3.2) l'observateur mode glissant d'ordre 2 est représentée comme ce qui suit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + z_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2, u) + z_2 \quad \hat{x}_1(0) = x_1 \\ \hat{y} &= \hat{x}_1 \quad \hat{x}_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

où x_1 et x_2 sont les estimés des état du système, z_1 et z_2 sont les variables de correction, qui sont définis comme ce qui suit :

$$\begin{cases} z_1 = \lambda_1 |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) + v_1 \\ v_1 = \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) \end{cases} \quad (4.8)$$

Avec

$$\begin{cases} z_2 = 0 & \text{if } \dot{\tilde{x}}_1 \neq 0, \tilde{x}_1 \neq 0 \\ = \lambda_2 |z_1|^{1/2} \text{sign}(z_1) + v_2 & \text{if } \dot{\tilde{x}}_1 = 0, \text{ and } \tilde{x}_1 = 0 \\ \dot{v}_2 = \alpha_2 \text{sign}(z_1) \end{cases} \quad (4.9)$$

Tel que $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$, et sign est la fonction discontinue

Dans l'observateur mode glissant d'ordre deux ci-dessus (3.4), nous avons utilisé une structure pour éliminer le chattering où \hat{x}_1 et \hat{x}_2 atteignent la surface d'attraction, de manière récursive (3.8).

Basant sur la dynamique du système et sa forme I/O la synthèse de la commande est représentée dans ce qui suit :

Posant

$$S_i = a_1^i x_1^i + \sum_{j=2}^{n_i} a_j^{(i)} x_j^{(i)} + f_i(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, u, t), i = 1, \dots, m \quad (4.10)$$

Où $\sum_{j=1}^{n_i+1} a_j^{(i)} \lambda^{j-1}$ est un polynôme de Hurwitz avec $a_{n_i+1}^{(i)} = 1, i = 1, \dots, m$

En remplaçant $f_i(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, u, t)$ dans le système 1 on aura le système globale suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^i &= x_1^i \\
&\vdots \\
\dot{x}_n^i &= -a_1^i x_1^i - \sum_{j=2}^{n_i} a_j^{(i)} \hat{x}_j^{(i)} + S_i \\
y^i &= x_1^i
\end{aligned} \tag{4.11}$$

On prend le cas ou $n=2$ le système devient :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^i &= x_2^i \\
\dot{x}_2^i &= -a_1^i x_1^i - a_2^i \hat{x}_2^i + S_i \\
y^i &= x_1^i
\end{aligned} \tag{4.12}$$

On a $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$ donc $\hat{x}_2 = x_2 - \tilde{x}_2$

Après remplacement de la variable estimée les équations du système global deviennent
comme ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^i &= x_2^i \\
\dot{x}_2^i &= -a_1^i x_1^i - a_2^i x_2^i + a_2^i \tilde{x}_2^i + S_i \\
y^i &= x_1^i
\end{aligned} \tag{4.13}$$

On pose $\chi_i = a_2^i \tilde{x}_2^i + S_i$ qui est une fonction asymptotiquement stable. La condition d'attractivité assure la convergence de la surface de glissement vers l'origine et les conditions de convergence du l'observateur mode glissant d'ordre 2 assurent la convergence de l'erreur d'estimation vers l'origine.

Le système devient un sous une forme triangulaire pour l'étude de la convergence voir

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^i &= x_2^i \\
\dot{x}_2^i &= -a_1^i x_1^i - a_2^i x_2^i + \chi_i \\
y^i &= x_1^i
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.1.3 Synthèse de l'observateur et de la commande pour le double pendule inversé :

Le modèle du système est constitué de deux parties couplées : chaque partie est un pendule inversé simple.

Les équations de l'observateur décrit précédemment sont représentées dans le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{1,1} &= \hat{x}_{1,2} + z_{1,1} \\ \dot{\hat{x}}_{1,2} &= \left(\frac{g}{cl} - \frac{k a(t)(a(t)-cl)}{cm\ell^2} \right) \hat{x}_{1,1} + \frac{1}{cm\ell^2} u_1 + \frac{k a(t)(a(t)-cl)}{cm\ell^2} \hat{x}_{2,1} - B_1 \hat{x}_{1,2}^2 - \frac{k(a(t)-cl)}{cm\ell^2} (y_1 - y_2) + z_{1,2} \\ \hat{y}_1 &= \hat{x}_{1,1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{1,1}(0) &= x_{1,1} \\ \hat{x}_{1,2}(0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_{1,1} = \lambda_{1,1} |\tilde{x}_{1,1}|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_{1,1}) + v_{1,1} \\ v_{1,1} = \alpha_{1,1} \text{sign}(\tilde{x}_{1,1}) \end{cases} \quad (4.15)$$

avec

$$\begin{cases} z_{1,2} = 0 & \text{if } \dot{\tilde{x}}_{1,1} \neq 0, \tilde{x}_{1,1} \neq 0 \\ = \lambda_{1,2} |z_{1,1}|^{1/2} \text{sign}(z_{1,1}) + v_{1,2} & \text{if } \dot{\tilde{x}}_{1,1} = 0, \text{ and } \tilde{x}_{1,1} = 0 \\ \dot{v}_{1,2} = \alpha_{1,2} \text{sign}(z_{1,1}) \end{cases} \quad (4.16)$$

Tel que $\tilde{x}_{1,1} = x_{1,1} - \hat{x}_{1,1}$, $\tilde{x}_{1,2} = x_{1,2} - \hat{x}_{1,2}$, et sign est la fonction discontinue

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{2,1} &= \hat{x}_{2,2} + z_{2,1} \\ \dot{\hat{x}}_{2,2} &= \left(\frac{g}{cl} - \frac{k a(t)(a(t)-cl)}{cm\ell^2} \right) \hat{x}_{2,1} + \frac{1}{cm\ell^2} u_2 + \frac{k a(t)(a(t)-cl)}{cm\ell^2} \hat{x}_{1,1} - B_2 \hat{x}_{2,2}^2 + \frac{k(a(t)-cl)}{cm\ell^2} (y_1 - y_2) + z_{2,2} \\ \hat{y}_2 &= \hat{x}_{2,1}\end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{2,1}(0) &= x_{2,1} \\ \hat{x}_{2,2}(0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_{2,1} = \lambda_{2,1} |\tilde{x}_{2,1}|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_{2,1}) + v_{2,1} \\ v_{2,1} = \alpha_{2,1} \text{sign}(\tilde{x}_{2,1}) \end{cases} \quad (4.18)$$

Avec

$$\begin{cases} z_{2,2} = 0 & \text{if } \dot{\tilde{x}}_{2,1} \neq 0, \tilde{x}_{2,1} \neq 0 \\ = \lambda_{2,2} |z_{2,1}|^{1/2} \text{sign}(z_{2,1}) + v_{2,2} & \text{if } \dot{\tilde{x}}_{2,1} = 0, \text{ and } \tilde{x}_{2,1} = 0 \\ \dot{v}_{2,2} = \alpha_{2,2} \text{sign}(z_{2,1}) \end{cases}$$

Tel que $\tilde{x}_{2,1} = x_{2,1} - \hat{x}_{2,1}$, $\tilde{x}_{2,2} = x_{2,2} - \hat{x}_{2,2}$, et sign est la fonction discontinue

Les deux observateurs prennent la même forme que ceux utilisés dans le chapitre 2.

Pour la commande on fait le même calcul que le deuxième chapitre on remplace la variable $x_{i,2}$ par son estimation $\hat{x}_{i,2}$. Les équation de la dynamique de la commande sont représentées dans les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{cmf} \dot{u}_1 = \kappa_{11} \hat{S}_1 + \kappa_{11} \text{sign}(\hat{S}_1) \\ - \left[\left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \hat{x}_{1,2} + \frac{1}{cmf} \dot{u}_1 + \left(\frac{d}{dt} f_c(t) \right) \hat{x}_{2,2} - 2B_1 \hat{x}_{1,2} \left(f(t)x_{1,1} + \frac{1}{cmf} u_1 + f_c(t)x_{2,1} - B_1 \hat{x}_{1,2}^2 - \omega(t) \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right) \right] \\ \frac{1}{cmf} \dot{u}_2 = \kappa_{21} \hat{S}_2 + \kappa_{22} \text{sign}(\hat{S}_2) \\ - \left[\left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \hat{x}_{2,2} + \left(\frac{d}{dt} f_c(t) \right) \hat{x}_{1,2} - 2B_2 \hat{x}_{2,2} \left(f(t)x_{2,1} + \frac{1}{cmf} u_2 + f_c(t)x_{1,1} - B_2 \hat{x}_{2,2}^2 + \omega(t) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right) \right] \end{cases}$$

Pour qu'on calcule la commande u on fait la résolution numérique du système précédent.

Avec

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \left(\frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \right) \\
 f_c &= \frac{ka(t)(a(t)-cl)}{cml^2} \\
 \omega(t) &= \frac{k(a(t)-cl)}{cml^2} (y_2 - y_1)
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

4.2 Résultats de simulations :

La figure **Fig.4.1** représente le système avec l'observateur et les deux commandes u_1 et u_2 :

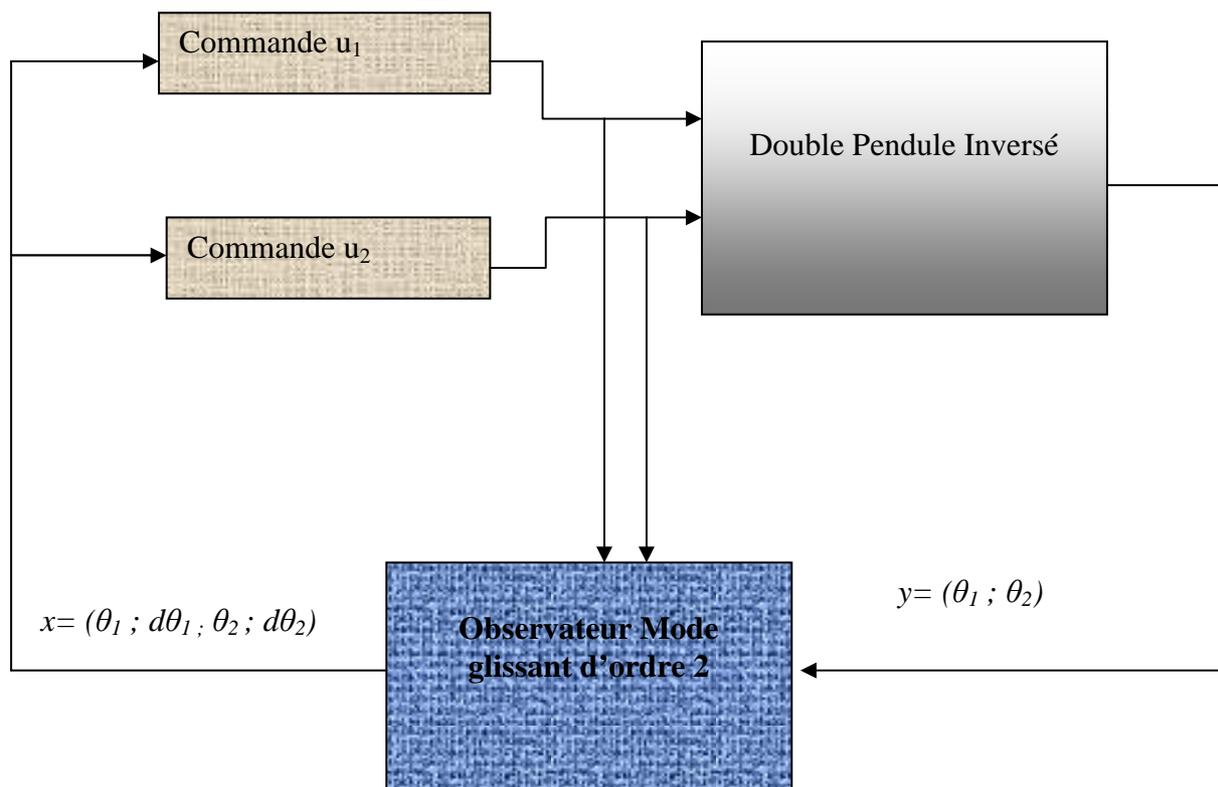


Fig.4.1. Blocs de simulation de système avec L'observateur et la commande

Les résultats de simulation sont obtenus en utilisant les mêmes paramètres du système on a juste modifié les gains de la commande asymptotique généralisée pour assurer la convergence et la stabilité du système.

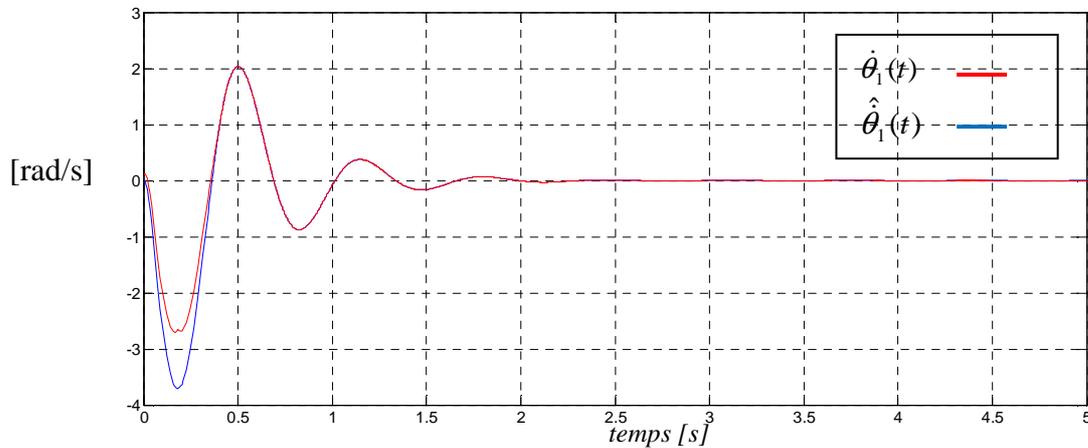


Fig.4.2. Courbes représentatives de $\dot{\theta}_1(t)$ et son estimation $\hat{\theta}_1(t)$

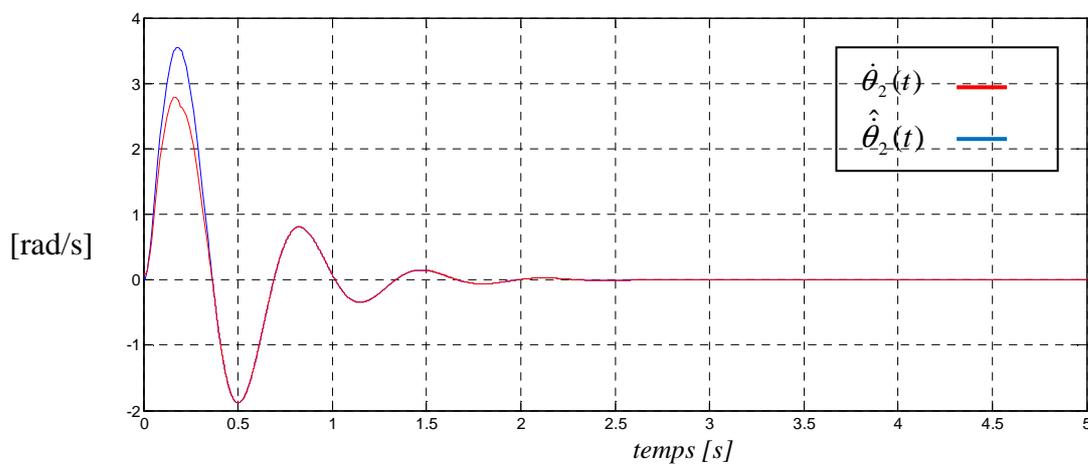


Fig.4.3. Courbes représentatives de $\dot{\theta}_2(t)$ et son estimation $\hat{\theta}_2(t)$

A partir des figures **Fig.4.2** et **Fig.4.3** on remarque que les états estimés convergence vers les états du système. L'utilisation de l'observateur mode glissant d'ordre 2 a permet l'élimination de oscillations des modes glissants (Chattering). La convergence de la dynamique de l'erreur est une meilleur solution pour laisser une commande ou un observateur mode glissant.

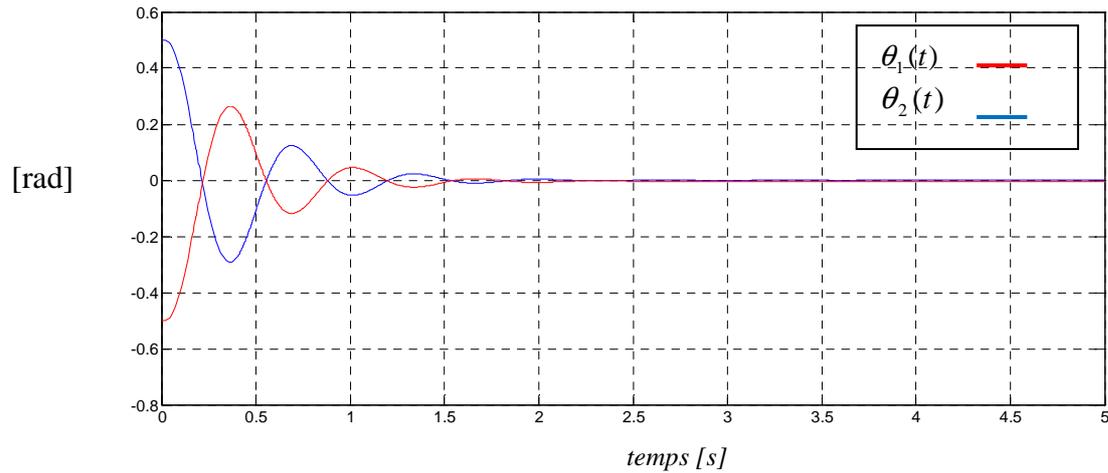


Fig.4.5. Courbes représentatives de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$

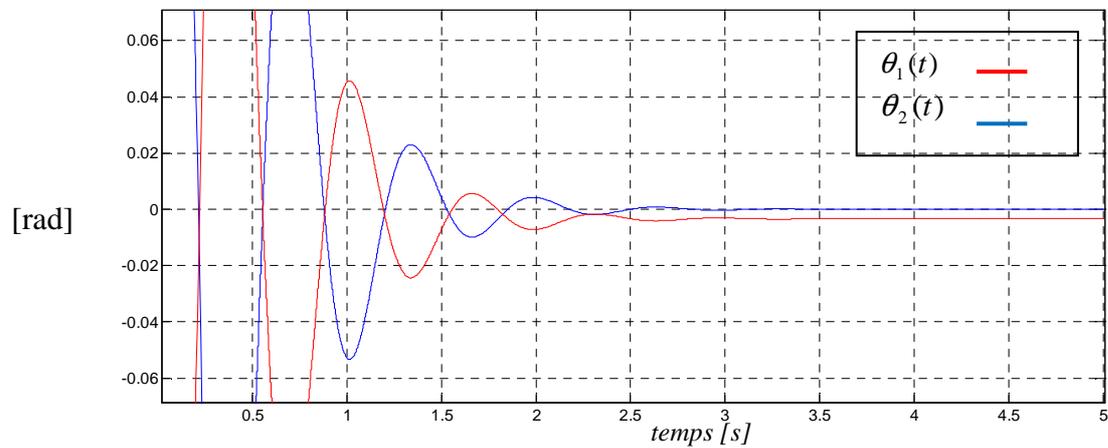


Fig.4.6. Zoom courbes représentatives de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$

Après implémentation de la commande et l'observateur le système converge mais on constate une apparition des oscillations qui sont les résultats de la dynamique de l'erreur d'observation. La commande asymptotique généralisé assure la convergence de la surface de glissement vers l'origine par contre la commande généralisée avec observation assure la convergence du la surface de glissement en tenant compte de l'erreur d'observation. Les oscillations sont dues à l'augmentation des gains du régulateur.

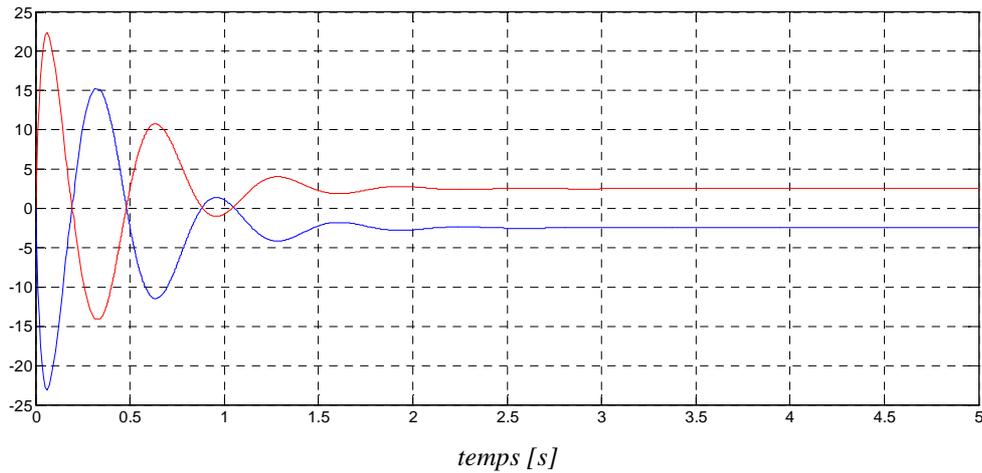


Fig.4.7. Courbes représentatives de $u_1(t)$ et $u_2(t)$

Conclusion :

Dans cette partie de travail une commande par mode glissant généralisée avec un observateur mode glissant d'ordre 2 ont été implémentées sur un double pendule inversé. Les résultats de simulation ont montré les performances de la commande vis-à-vis des perturbations sur le système (ressort relié entre les deux pendules qui oscille avec une sinusoïde). Malgré la complexité du système la commande par mode glissant généralisée a assuré une stabilité et une convergence du système en temps fini. L'apparition de la dérivée première de la commande dans les calculs a surmonté le phénomène des broutements qui apparaissent dans la commande. La même chose pour l'observateur mode glissant d'ordre 2.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté dans ce mémoire est l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaire par la technique du régime glissant, qui permet un bouclage discontinu. Des notions fondamentales de cette technique, sont présentées puis une modification de la commande asymptotiquement stable proposée par Spurgeon est présentée pour l'adapter aux systèmes multi-variables non linéaires.

Notre étude est basée essentiellement sur les trois points fondamentaux de l'automatique : La modélisation, synthèse de la commande et l'observateur, démonstration de la stabilité et des simulations pour valider les résultats théoriques.

Le premier chapitre est consacré à une étude des régimes glissants, des notions de bases liées à cette technique et leurs variétés. Dans les dernières années les modes glissants intéressent beaucoup de laboratoires de recherches. L'approche développée est la décentralisation de la surface de glissement en utilisant le même principe de la commande asymptotiquement stabilisante. Le choix de la surface de glissement a permis de linéariser asymptotiquement le système non linéaire au voisinage de la surface de glissement.

La dernière étape de cette technique est le calcul de la commande qui est une solution d'un système différentiel d'ordre 1. Les simulations ont montré que la commande n'est pas influencée par le phénomène de broutement souvent caractérisant les modes glissants.

En utilisant les inclusions différentielles un observateur super-twisting a été proposé pour estimer les dérivées des sorties du système. La démonstration de la convergence de l'observateur est traitée par la théorie des inclusions différentielles. L'implémentation de l'observateur sur le système a donné de très bonnes performances et une robustesse vis-à-vis des perturbations externes.

Le dernier chapitre est une fusion des deux approches, l'observateur mode glissant d'ordre 2 et la commande asymptotiquement stabilisante. La démonstration de la stabilité globale du système avec l'observateur et la commande est étudiée en utilisant les inclusions différentielles et le principe de changement de variable étudié par Spurgeon.

Les résultats de simulation ont montré l'efficacité de la technique des modes glissants pour commander des systèmes qui présentent des non linéarités complexes dans leurs modèles mathématiques.

Enfin des perspectives nous mènent à penser à élargir le principe pour une éventuelle utilisation des surfaces déjà connues en gardant le même principe : trouver des lois de commandes générales stabilisant des systèmes non linéaires sous leurs formes générales.

Références bibliographiques

- [Ahmad00] S. M. Ahmad, A. J. Chipperfield et M. O. Tokhi, "Dynamic Modelling of a Two Degree-of-Freedom Twin Rotor Multi-Input Multi-output System," *Proc. IEE United Kingdom Automatic Control Conference (UKACC2000)*, Cambridge, UK, 2000.
- [Anderson89] C.W. Anderson, "Learning to control an inverted pendulum using neural networks," *IEEE Control Systems Magazine*, vol 9, pp 31-37, 1989.
- [Astr89] K. J. Astrom and B. Wittenmark. Adaptive control. Addison-Wesley, 1989.
- [Alao07a] C. Alaoui, J. Boumhidi and M. Mrabti. "DC Motor Velocity Sliding Mode Control For the Combined Pumping Load DC Motor Buck Converter". SEI&TI-07 Mohammédia, Morocco, pp 146-151, Janvier, 2007.
- [Alao07b] C. Alaoui, J. Boumhidi and M. Mrabti. "Sliding Surface Design Based On the Linear Matrix Inequalities with Control Application of the Two-Link Robot". Conference System and Control CSC 07. Marakech Maroc, 16-17-18 Mai 2007.
- [Alao07c] C. Alaoui, J. Boumhidi and M. Mrabti. "Sliding Surface Controller Design Based On the LMIs with Application to a Two Links Robot" International Journal Of Science and techniques of Automatic Control and computer Engineering IJ. STA, Special issue, CSC, pp 300-311, December 2007.
- [Alao08] C. Alaoui, J. Boumhidi and M. Mrabti "Application of H-infinity Synthesis and Sliding Mode Control for Robust Control of DC Motor Type Buck Converter" Les 6èmes Journées d'Optique et de Traitement de l'Information 17 et 18 avril, FST- Mohammédia – Maroc 2008.
- [Bond85] A. G. Bondarev, S. A. Bondarev, N. E. Kosteleva and V. I. Utkin. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Automation and remote control*, 46(6):49-64. 1985.
- [Boudj91] F. Boudjema. "Commande par mode de glissement, application aux convertisseurs électrique". Thèse de doctorat de l'université de Paul Sabatier, Toulouse 1991.
- [Boudj90] F. Boudjema. And J.L. abatut "Sliding mode a new way to control series resonant converters". In Proc. IEEE Conf. Ind Electron. Society, pacific Grove, California, USA, pp. 938-943.
- [Boudj89] F. Boudjema. And P. Bidan, J.C Marpinard, M. Valentin and J. L. Abatut "VSS approach to a full bridge buck converter used for AC sine voltage generation." In Proc. IEEE 1989 Conf. Ind Electron. Society, Philadelphia, USA, pp. 82-88.
- [Boukh04] D. Boukhetala, F. Boudjema. - Approche adaptative de commande décentralisée par mode de glissement des systèmes articulés 2004, 4, CIFA'04
- [Boukh93] D. Boukhetala, "commande décentralisée des systèmes structurés Thèse de magistère ENP 1993.

- [Boukh03] D. Boukhetala, F. Boudjema, T. Madani, M.S. Boucherit and N.K. M'Sirdi "A new decentralized variable structure control for robot manipulators" International journal of robotics and automation , Vol 18, N°1 pp 28-40
- [Bühler, 94] H. Bühler," Réglage par logique floue," *Presses polytechniques et universitaires romandes*, Lausanne, 1994.
- [Boum04] J. Boumhidi and M. Mrabti. " Sliding Mode Controller for Robust Force Control of Hydraulic Servo-Actuator ". ISEE 2004, IEEE International Symposium on Electrical Engineering, pp 27-33, Targoviste, Romania 2004.
- [Boum05] J. Boumhidi and M. Mrabti.."Sliding Mode Controller for Robust Force Control of Hydraulic Actuator with environmental Uncertainties ". Colombian Journal of Computation. Vo. 6, n° 1, pp 25-34. June 2005.
- [Bouk97]. T. Boukhobza. " Observateurs à modes glissants et formes d'observabilité et analyse et synthèse des commandes par ordres supérieurs". PhD thesis, Université de Paris-Sud Orsay, Laboratoire des Signaux et Systèmes, 1997.
- [Canu90] C. Canudas De Wit, K. J. Astrom, and N. Fixot." Computed torque control via a nonlinear observer". Int. Jour. of Adap. Cont. and Sig. Proc, pages443.452, 1990.
- [Canu91] C. Canudas de Wit and J. J. E. Slotine.Sliding observers in robot manipulators. *Automatica*, 27(5) :859.864, 1991.
- c Cherrid, H. " Commande et observateur par modes glissants d'ordre un et deux: Application aux systèmes robotisés". Thèse présentée à l'Université de Versailles Saint Quentin, 19 Décembre 2001
- [Choi03] Choi, H.H.: An LMI-Based Switching Surface Design Method for a Class of Mismatched Uncertain Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 48(2003) 1634-1638.
- [Drak92] S.V. Drakunov." Sliding mode observer based on equivalent control method". In *IEEE Conf. on Dec. and Cont.*, pages 2368.2369, 1992.
- [Djem97] M. Djemai, N. Manamani, T. Boukhobza, and N.K. M'Sirdi. ." Non linear sliding observer for a pneumatique robot leg". *IEEE-Syst, Men and Cyber. IMACS, CESA 98, Hamamat, Tunisia*.1997.
- [Djem99] M. Djemai, J.P. Barbot, and T. Boukhobza. ." Some comments on higher order sliding modes". *Proc. of the Euro. Cont. Conf. Karlsruhe, Germany* , 1999.
- [Edwa96] C. Edwards and S. Spurgeon. "Robust output tracking using a sliding mode Controller observer scheme". *Int. Jour. of Cont.*, 64(5). pp 967.983, 1996.
- [Emel67] S.V. Emelyanov. *Variable structure control systems*. Moscow Nauka, 1967.
- [Emel86]. S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, and L.V. Levantovsky. Drift algorithm in control of uncertain processes. *Problems of Control and Information Theory*, 15(6):425.438, 1986.

- [Eme193] S. V. Emelyanov, S.K. Korovin, and A. Levant. Higher-order sliding modes in control systems. *Differential Equation*, 29(11):1627-1647, 1993.
- [Fill 60] A. F.Fillipov. Differential equations with discontinuous right-hand side. *Amer.Math. Soc.Trans.* 62. p:199-231, 1960.
- [Frid02] L. Fridman and A. Levant. Higher-Order Sliding Mode in Sliding mode control in Engineering, Editeurs : W. Perruquetti and J.P. Barbot. Marcel Dekker 2002.
- [Isid95] A. Isidori. Nonlinear control system. Springer Verlag, Berlin, third edition. 1995.
- [Kren83] A. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Syst. & Cont. Lett.*, 3 :47.52, 1983.
- [Peau00] Peaucelle D, Arzelier D, Bachelier O, Bermussou J. “A New Robust Dstability condition for Real Convex Polytopic Uncertainty”. *System & Control Letters*. Vol.40, pp 21-30. 2000.
- [Leva99] A. Levant. Controlling output variable via higher order sliding modes. *Proc. Of the Euro. Cont. Conf.*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [Luen71] DG. Luenberger. An introduction to observers . *IEEE Trans. On Auto. Const*; 16(6), 1971.
- [Lina04] J. Linares-Flores and H. Sira.Ramirez. “DC motor velocity control through a DC-to-DC power converter”. 43rd IEEE conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, pp 5297-5302, December 14-17, 2004.
- [Sira88] H. Sira-Ramirez. Differential geometric methods in variable structure control.*Int.J of control.*, 48(4) :1359-1390, 1988.
- [Sira92] H. Sira-Ramirez. On the sliding mode control of nonlinear systems. *Syst. & Cont.Lett.*, 19 :303.312, 1992.
- [Sira93] H. Sira-Ramirez. On the dynamical sliding-mode control of nonlinear systems.*Int. Jour. of Cont.*, 57 :1039.1061, 1993
- [Sira94] H. Sira-Ramirez and S.K. Spurgeon. On the robust design of sliding observers for linear systems. *Syst. & Cont. Lett.*, 23 : 9.14, 1994.
- [Slot83] J.J. Slotine and S.S. Sastry. Tracking control of nonlinear system using sliding surface, with application to robotic manipulators.*Int. Jour. of Cont.*, 38:465.492, 1983.
- [Slot84] J.J.E. Slotine. Sliding controller design for nonlinear systems. *Int. Jour. of Cont.*, 40(2) : 421.434, 1984.
- [Slot86]. J.J.E. Slotine, J.K. Hedrick, and E.A. Misawa. Nonlinear state estimation using sliding observers. In *Proc. of 25th IEEE Conf. on Dec. and Cont.*, pages 332.339, Greece.1986.
- [Slot87] J.J.E. Slotine and W. Li. On the adaptive control of robot manipulators. *Int. Jour.of Robot. Research*, 6(3): 49.59, 1987.

[Sira94] H. Sira-Ramirez and S.K. Spurgeon. On the robust design of sliding observers for linear systems. Syst.& Cont. Lett. 23 : 9.14, 1994.

[Spurg98]

[Utk77] V. I. Utkin. Variable structure systems with sliding mode. IEEE Trans. On Auto.Cont, 26(2) :212-222, 1977.

[Utki78] V. I. Utkin. Sliding mode and their application in variable structure systems Mir, Moscou, 1978.

[Utk92] V. I. Utkin. 'Sliding modes in control optimisation.' Springer-Verlag, 1992.

[Utki93] V. I. Utkin. 'Sliding mode control design principles'. IEEE Trans. on Industr. Electron., 40 :23.36, 1993.

[Utki95] V. I. Utkin and S. Drakunov. 'Sliding mode observer'. tutorial. IEEE Conf.On Dec.and Cont., pages 3376.3378, 1995.

[Meh99] Mehrdad Saif, Weitian Chen, and Qing Wu. 'High Order Sliding Mode Observers and Differentiators–Application to Fault Diagnosis Problem'. tutorial. Vancouver, British Columbia V5A 1S6 Canada

الملخص:

العمل المقدم في هذه الأطروحة يتعلق بدراسة تحليلية لتقنية التحكم اللاخطي لمجموعة من الأجهزة اللاخطية العامة في البداية قمنا بتذكير عن التحكم في الوضع الإنزلاقي للأجهزة اللاخطية في هذه الدراسة قمنا بتغيير تقنية طورت من طرف Spurgeon لكي تلائم الأجهزة المعقدة.

لبحث مدى فعالية التحكم قمنا بتطبيقه على جهاز ذو نواسين بسيطين مربوطين بواسطة نابض لتمكين التحكم من قراءة المتغيرات بدون جهاز قمنا بوضع جملة مراقبة المتغيرات.

وأخيرا تم تطبيق النظام والمراقب, وأظهرت النتائج أداء وقوة مراقبة للاختلافات والاضطرابات الخارجية.

كلمات مفتاحية : التحكم اللاخطي, التحكم في الوضع الإنزلاقي, جملة مراقبة المتغيرات.

Abstract :

The work presented in this report concerns the study and analysis of a sliding mode control of complex system. In the first reminders and theoretical definitions of nonlinear field are presented. The general approach proposed by Spurgeon is suitable for nonlinear interconnected systems. To test the performance of the control, an application to the double inverted pendulum is achieved. Then a sliding mode observer of order 2 is applied to the same system, the demonstration of convergence is studied using the theory of differential inclusions. Finally, a merger of the control and the observer are applied to the system chosen, the simulation results showed the performance and robustness of the control in spite of parameter variations and external disturbances.

Key words : Sliding mode control, nonlinear control, nonlinear observer, asymptotic stability.

Résumé :

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude et l'analyse d'une commande par mode de glissement généralisé des systèmes complexes. Dans un premier lieu des rappels théoriques et des définitions dans le domaine non-linéaire sont présentées. L'approche généralisée proposé par Spurgeon est adaptée pour les systèmes non linéaires couplés. Pour tester les performances de la commande, une application sur le double pendule inversé et couplé est réalisé. Ensuite un observateur mode glissant d'ordre 2 est appliqué au même système, la démonstration de la convergence est étudié en utilisant la théorie des inclusions différentielles. Enfin une fusion de la commande et l'observateur sont appliquées sur le système choisi, les résultats de simulation ont montré les performances et la robustesse de la commande vis-à-vis des variations des paramètres et les perturbations externes.

Mots clés : Commande non linéaire, mode glissant, observateur non linéaire, stabilité asymptotique.