

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Projet de fin d'études intitulé:

Techniques d'analyse et de synthèse de réseaux micro-ondes passifs

Proposé par : D^r A. ZERGUERRAS

présenté par : MM. ANTRI-BOUZAR Riad
LEHOUIDJ Bachir

En vue de l'obtention du diplôme d' :

INGENIEUR D'ETAT EN ELECTRONIQUE

Résumé :

Le sujet traité dans ce présent mémoire porte sur l'étude de certaines techniques d'analyse de réseaux micro-ondes passifs.
Une application typique de quelques unes de ces méthodes aux obstacles sera faite.

The subject of this memory is the study of microwave networks analysis technics.
An application of typical methods to some problems will be done.

موضوع هذا البحث هو دراسة بعض الطرق المستعملة لتحليل المسائل المتعلقة بشبكات الموجات القصيرة (موجات يفوق تردددها 10.3⁶ هرتز).
تطبيقات توضيحية لخصائص هذه الطرق ستقام على أمثلة نموذجية.

REMERCIEMENTS

Nous voudrions tout d'abord remercier notre directeur de thèse le Dr A. ZERGUERRAS pour sa patience et ses précieux conseils qui nous ont permis d'arriver à terme. Qu'il trouve ici notre profonde reconnaissance.

Nous remercions aussi M. Le Président et les membres du jury d'avoir bien voulu examiner notre travail.

Nos remerciements vont aussi à MM. M. ANTRI-BOUZAR, T. SATOR ainsi que Z. DJAIDIR et T. BERBAR pour leur aide tout au long de notre projet.

Nous sommes reconnaissant envers nos professeurs qui ont contribué à notre formation ainsi que Mlle H. GUENDOZ.

A tous ceux qui nous sont chers et qui nous ont soutenus par leur amitié, qu'ils trouvent un témoignage de nos vifs remerciements.

DEDICACES

A la mémoire de mon père

À ma mère

A mes frères

A mes grands parents

A mes amis

Bachir

A mes parents pour leur confiance et leur soutien moral

A mon frère

A ma soeur

A la mémoire de ma grand-mère

A mes grands parents

A toute ma famille

Riad

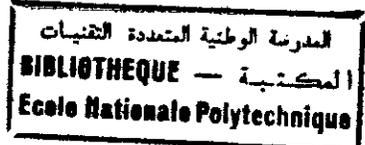


TABLE DES SYMBOLES

k_c : Nombre d' onde de coupure .

λ_c : Longueur d'onde de coupure .

f_c : Frequence de coupure .

μ : Permeabilite .

$\hat{\mu}$: Permeabilite complexe .

ε : Permittivite .

$\hat{\varepsilon}$: Permittivite complexe .

c : Vitesse de propagation dans le vide .

η : Impedance d'onde du vide .

ψ : Fonction d'onde .

Q : Facteur de qualite .

\Re : Resistance intrinseque du metal .

Γ : Temps de relaxation de la resonance .

λ_g : Lambda g : Longueur d'onde du guide.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I : LIGNES DE TRANSMISSION	3
I-1- LIGNE MICRO-RUBAN.....	4
I-1-1 - DIFFERENTS TYPES DE LIGNES MICRO-RUBAN.....	4
I-1-2- CARACTERISTIQUES DES LIGNES MICRO-RUBAN.....	5
I-1-3 - DOMAINE D'UTILISATION.....	5
I-2- GUIDES D'ONDES.....	5
I-2-1 - DIFFERENTS TYPES DE GUIDES D'ONDES.....	5
I-2-1-1 - Guide d'ondes de surface.....	5
I-2-1-2 - Guide en H.....	6
I-2-1-3 - Guide d'ondes rectangulaire.....	6
I-2-1-4 - Guide d'ondes circulaire.....	11
I-2-2- CARACTERISTIQUES GENERALES DES GUIDES D'ONDES.....	14
I-2-3- DOMAINE D'UTILISATION.....	15
I-3 - CONCEPT DE RESEAU.....	16
I-3-1- DEFINITION.....	16
I-3-2 - ETUDE D'UN RESEAU.....	16
I-3-3- RESEAU A DEUX PARTIES.....	17
CHAPITRE II : TECHNIQUES D'ANALYSE	20
II-1- INTRODUCTION.....	21
II-2 -METHODE DES MOMENTS.....	21
II-2-1- RAPPEL MATHEMATIQUE.....	21
II-2-2- ENONCE DE LA METHODE.....	22
II-2-3- TECHNIQUES SPECIALES.....	24
II-2-3-1- Point matching.....	24
II-2-3-2- Méthode des sous-sections.....	24
II-2-3-3 - Opérateur étendu.....	24
II-2-3-4 - Opérateur approximatif.....	24
II-2-4 -METHODE DES PERTURBATIONS.....	25
II-2-5- INTERPRETATION VARIATIONNELLE.....	25
II-3- LES FONCTIONS DE GREEN.....	26
II-3-1- DEFINITION.....	26
II-3-2 - SENS PHYSIQUE.....	28
II-3-3- FONCTIONS DE GREEN SCALAIRES.....	28
II-3-4 - PROPRIETES FONDAMENTALES DE G.....	29
II-3-5 - FONCTION DE GREEN EN ESPACE LIBRE.....	30
II-3-6 - FONCTION DE GREEN MODIFIEE.....	31
II-3-6-1- Méthode des images.....	31
II-3-6-2 - Série d'images.....	32
II-3-7 - EXPANSION DES FONCTIONS DE GREEN EN FONCTIONS PROPRES.....	33
II-3-8 - LES FONCTIONS DE GREEN DYADIQUES.....	34
II-3-8-1- Rappel sur le calcul dyadique.....	34
II-3-8-2 - Fonction de Green dyadique en espace libre.....	37
II-3-8-3 - Fonction de Green dyadique modifiée.....	38
II-4 - TECHNIQUES VARIATIONNELLES.....	39

II-4-1- INTRODUCTION	39
II-4-2 - ASPECT MATHEMATIQUE	40
II-4-3 - PRINCIPE VARIATIONNEL POUR LES PROBLEMES A VALEURS PROPRES	42
II-5- METHODE DES DIFFERENCES FINIES	43
II-5-1- INTRODUCTION	43
II-5-2- DEVELOPPEMENT EN SERIE DE TAYLOR	43
II-5-3- DEVELOPPEMENT POLYNOMIAL	44
II-5-4- EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES	45
II-5-5- APPROXIMATION PAR LES DIFFERENCES FINIES DES DERIVES PARTIELLES MIXTES	46
II-5-5-1 - Développement en série de Taylor	46
II-5-5-2- Approximation de chaque dérivée à part	48
CHAPITRE III : OBSTACLES DANS LES LIGNES DE TRANSMISSION	50
III-1 - INTRODUCTION	51
III-2- ANALYSE D'OBSTACLES	51
III-3- TIGES DANS LES GUIDES	56
III-3-1- DEFINITION	56
III-3-2- ETUDE DES TIGES INDUCTIVES PAR LA METHODE DES MOMENTS	56
III-3-2-1 - Calcul de la matrice \bar{Z}	61
III- 4 - DIAPHRAGME DES LES GUIDES	63
III-4-1 - INTRODUCTION	63
III-4-2- ANALYSE DES DIAPHRAGMES PAR LA METHODE DES MOMENTS	64
III-4-3- EVALUATION DE LA MATRICE [Y]	65
III-4-4- EVALUATION DU VECTEUR D'EXCITATION	66
III-4-5- DETERMINATION DU CIRCUIT EQUIVALENT	66
III-4-6- ANALYSE DES DIAPHRAGMES PAR LA METHODE VARIATIONNELLE	67
III-5 - INTERPRETATION DES GRAPHES	69
III-5-1- CAS DES TIGES	69
III-5-2- CAS DES IRIS	80
CHAPITRE IV : ALIMENTATION DES GUIDES D'ONDES	88
IV - 1- ALIMENTATION PAR SONDE	89
IV - 2- ALIMENTATION PAR OUVERTURE	94
CHAPITRE V : LES CAVITES	98
V-1- INTRODUCTION	99
V-2- CAVITE RECTANGULAIRE	99
V-3- CAVITE CYLINDRIQUE	104
V-4- COUPLAGE DES CAVITES	106
V-4-1- SCHEMA EQUIVALENT DE LA CAVITE	106
V-4-2- LES DISPOSITIFS DE COUPLAGE	107
V-4-2-1- Boucle inductive	108
V-4-2-2 - Sonde capacitive	108
V-4-2-3- Ouverture	108
V-4-2-4- Faisceaux d'électrons	109
V-4-3- EXPENSION MODALE DANS LES CAVITES	109
V-4-4- SONDE DANS LES CAVITES	111
V-4-5- COUPLAGE D'UNE CAVITE PAR UNE OUVERTURE	114
V-5- UTILISATION DES CAVITES	116
V-5-1- BOITE A ECHO	117
V-5-2- DESCRIMINATEUR A CAVITES	117

CONCLUSION	119
ANNEXE	121
REFERENCES	123

INTRODUCTION

La gamme des hyperfréquences (micro-onde) est de plus en plus utilisée dans une grande variété d'application pratique, tels que communication par satellite, aide à la navigation aérienne...

Ceci est due aux importantes caractéristiques que possèdent cette gamme de fréquence pouvant se résumer en une faible puissance d'émission, adaptation aux canaux de transmission...

Le traitement des signaux en hyperfréquences nécessite des lignes de transmission qui sont de différents types lignes micro-ruban, guide d'ondes, câbles coaxiaux

Cette étude analyse les réseaux micro-ondes et plus particulièrement ceux formés par les guides d'ondes, pour cela nous traiterons plusieurs méthodes mathématiques.

Dans une première étape nous donnerons un brève aperçu sur les différents types de lignes de transmission dont les guides d'ondes, en décrivant leurs caractéristiques et en précisant le concept de réseau.

Le chapitre II présente diverses techniques d'analyse de réseau. Certaines d'entre elles seront appliquées dans les chapitre suivants.

CHAPITRE I

LIGNES DE TRANSMISSION

Dans cette gamme de fréquence, les circuits sont à constantes réparties en général. Le circuit type est la ligne de transmission réalisable de différentes manières.

I-1 - LIGNE MICRO-RUBAN :

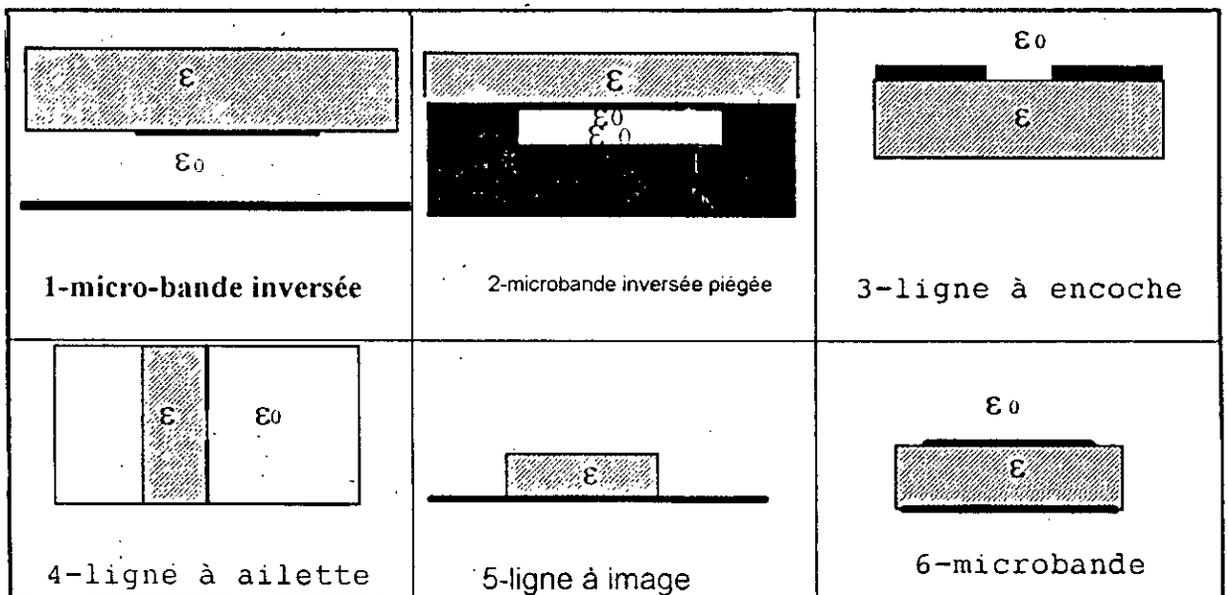
Le développement des circuits imprimés planaires permet de réaliser des lignes de transmission, des filtres, des coupleurs, des adaptateurs, des résonateurs etc.

Tout circuit passif ainsi que des dispositifs actifs sont réalisables avec ce moyen.

I-1-1- DIFFERENTS TYPES DE LIGNE MICRO-RUBAN :

Les différentes types de ligne micro-ruban sont résumés dans le tableau suivant :

Type de ligne	Bande de fréquence	Impédance Caractéristique
1- micro-ruban inversée	jusqu'à 60GHz	(25-130)ohm
2- micro-ruban inversée piégée	supérieur à 95GHz	(30-140)ohm
3- Ligne à encoche	jusqu'à 100GHz	(60-200)ohm
4 - Ligne à ailette	jusqu'à 100GHz	(10-400)ohm
5- Ligne image	à 100GHz	(226)ohm
6- Ligne micro-ruban (micro-strip)	à 60GHz	(20-125)ohm



Fig(II-2) : Structure de lignes transmis

I-1-2 - CARACTERISTIQUES DES LIGNES MICRO-RUBAN :

Les différentes caractéristiques sont :

- 1 - Très faibles encombrements.
- 2 - Faible coût de fabrication.
- 3 - Facilité de fixation des éléments semi-conducteurs à cette structure.
- 4 - Pertes plus élevées par suite au rayonnement important.

I-1-3 - DOMAINE D'UTILISATION :

Les lignes micro-ruban trouvent leur utilisation dans la transmission des ondes T.E.M pour lesquelles les guides d'ondes ne peuvent servir de support et aussi dans l'alimentation des antennes plaques dont la technologie de fabrication et la technique d'études dérivent de celles des lignes micro-ruban

I-2- GUIDES D'ONDES [1] :

Le guide d'ondes est d'usage courant en micro-ondes. Ce tube conducteur creux à en général une section droite de forme rectangulaire ou circulaire .

On l'emploie jusqu'à plus de 100Ghz. On a ainsi été amené à développer des séries de composantes en guide d'ondes; la propagation dans un guide d'ondes est généralement assurée par des réflexions multiples, soit sur des parois métalliques, soit sur des surfaces séparant des milieux dits électrique.

I-2-1 - LES DIFFERENTS TYPES DE GUIDE D'ONDES :**I-2-1-1 - Guide d'ondes de surface :**

Cette structure permet de guider les ondes de surface, le champ électromagnétique y est essentiellement extérieur et le domaine de propagation s'étend à l'infini. On distingue :

A - Guide de Goubau :

Il propage le mode fondamental T.M, et est utilisé comme ligne de transmission longue avec une bande utile de 80 à 300 Mhz pour l'alimentation des antennes.

B - Guide diélectrique :

Il est peu utilisé pour les ondes centimétriques mais il trouve une application récente aux fréquences optiques sous la forme de fibres optiques. Il propage le mode fondamental T.M.

C - Guide unifilaire :

Il est d'usage assez courant et est de réalisation simple et économique. Il s'emploie dans les gammes VHF et UHF. Il propage le mode fondamental T.M

1-2-1-2 - Guide en H :

Utilisé dans la région d'ondes millimétriques 60 à 100 Ghz, les pertes dans de tels guides, à 100 Ghz, sont inférieurs en ordre de grandeur à celle du mode dominant du guide rectangulaire.

1-2-1-3 - Guide d'ondes rectangulaire [1] :

On considère un guide d'ondes dont la section droite est un rectangle de largeur a et de hauteur b avec $a > b$. Les parois du guide sont en métal, supposés parfaitement conducteur dans l'approximation sans pertes.

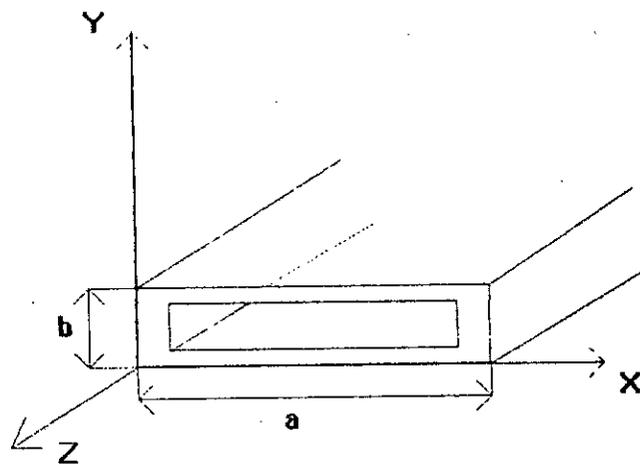


Fig 2-2 : Guide d'ondes rectangulaire

La propagation des ondes à l'intérieur du guide est régie par l'équation de Helmholtz qui est:

$$H(\Psi) = 0 \quad \text{avec} \quad H \equiv \Delta + k^2 \quad (I-1)$$

$$\text{ou } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{I-2})$$

en coordonnées cartésiennes.

La résolution générale de (I-1) n'est pas toujours aisée. Quand cela est possible la méthode de séparation des variables se trouve indiquée pour le cas du guide rectangulaire,

posons donc:

$$\Psi = X(x)Y(y)Z(z) \quad (\text{I-3})$$

On substitue cette représentation dans l'équation précédente, on obtient:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (\text{I-4})$$

A partir de cette équation, on remarque que chaque coordonnée peut varier indépendamment l'une de l'autre. Ce qui nous amène à remplacer l'équation (I-4) par le système de trois équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I-5})$$

avec

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (\text{I-6})$$

Cette équation est dite équation de séparation.

Les trois équations du système (I-5) sont identiques, leur résolution est connue, donnée sous forme de combinaison linéaire de fonctions élémentaires telles que: $h(k_x)$, $h(k_y)$, $h(k_z)$

$$\sin(k_x x), \cos(k_x x), \exp(+jk_x x), \exp(-jk_x x)$$

Chaque paire d'équations élémentaires est linéairement indépendante. L'équation (I-6) montre que deux seulement des constantes k_x , k_y , k_z peuvent être choisies indépendamment donc une solution générale de l'équation de Helmholtz peut être une sommation infinie de termes correspondants aux différentes valeurs prises par ces deux équations.

$$\Psi = \sum_{k_x} \sum_{k_y} B_{k_x k_y} \Psi_{k_x k_y k_z} \quad (I-7)$$

$$\Psi_{k_x k_y k_z} = h(k_x x) h(k_y y) h(k_z z)$$

On classe par convention les modes se propageant dans un guide d'ondes rectangulaire en mode T.E à z et T.M à z.

1-Mode T.E :

Pour ce mode, le champ électrique se propageant à l'intérieur du guide ne peut avoir que deux composantes $E_x, E_y, (E_z=0)$. Les conditions aux limites fixant les constantes k_x, k_y , sont donnés par :

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ sur la paroi}$$

n : normale à la paroi.

On choisie donc $\Psi = H_z$ dans ce cas et la solution aura la forme de :

$$\Psi = (A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x))(C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)) \quad (I-8)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0} \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \Big|_{y=0}$$

$$\forall y \quad \forall x$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y))(-A k_x \sin k_x x + B k_x \cos k_x x)$$

Pour $x=0$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y))(B k_x) = 0 \forall y \Rightarrow B = 0$$

Pour $x=a$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y))(-A k_x \sin(k_x a)) = 0 \quad \forall y$$

$$\Rightarrow \sin(k_x a) = 0 \Rightarrow k_x a = m\pi \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = (A \cos(\frac{m\pi}{a} x))(-C k_y \sin(k_y y) + D k_y \cos(k_y y)) = 0$$

$$y=0: \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} = A \cos(\frac{m\pi}{a} x)(D k_y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow D=0$$

$$y=b: \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} = (A \cos(\frac{m\pi}{a} x))(-C k_y \sin(k_y b)) = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \sin(k_y b) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$H_z = (A \cos(\frac{m\pi}{a} x))(C \cos(\frac{n\pi}{b} y))$$

$$H_z = A' \cos(\frac{m\pi}{a} x) \cos(\frac{n\pi}{b} y)$$

A' : depend de la puissance de la source

(I-9)

$$\text{Nombre d'onde: } (k_{cmn})^2 = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2$$

(I-10)

$$E_y = -j\eta \frac{k_x}{k_c} \frac{f}{f_c} A' \sin(k_x x) \cos(k_y y)$$

(I-11)

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{TE}} \quad H_y = \frac{E_x}{Z_{TE}}$$

$$\lambda_{cmn} = \frac{2\pi}{k_{cmn}} = \frac{2ab}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}}$$

$$f_{c_{nm}} = \frac{k_{c_{nm}}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{I-12})$$

Les modes se propageant dans un guide sont ceux ayant une fréquence de coupure inférieure à celle d'alimentation.

Le mode ayant la fréquence de coupure la plus basse est dit mode dominant.

l'équation (I-10) montre que le mode dominant pour un guide rectangulaire à la fréquence de coupure

$$f_{c_{10}} = \frac{k_{c_{10}}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \text{ avec } k_{c_{10}} = \frac{\pi}{a} \quad a > b \Rightarrow m=1, n=0$$

$$\Rightarrow f_{c_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{2a}$$

L'impédance d'onde caractéristique pour chaque mode TE_{mn} est donnée par :

$$Z_{mn}^{TM} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \eta [1 - (f_c/f)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad f > f_c \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

2 - Mode TM :

Le champ magnétique a seulement deux composantes H_x, H_y ($H_z = 0$) Les conditions aux limites sont :

$$E_z|_{\text{parois}} = 0$$

Le même développement donne :

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (\text{I-13})$$

$$E_x = -E_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_y = -E_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_x = E_0 \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_y = -E_0 \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$Z_{\text{in}}^{\text{TM}} = \frac{E_y}{H_x} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \eta \left[1 - (fc/f)^2\right]^{1/2}$$

Atténuation due aux pertes dans le diélectrique [1] :

$$\alpha_d = \frac{\omega\epsilon''\eta}{2} \sqrt{1 - (fc/f)^2}$$

Atténuation due aux conducteurs imparfaits [1] :

$$\alpha_c = \frac{\mathfrak{R}}{a\eta\sqrt{1 - (fc/f)^2}} \left(1 + \frac{2a}{b}(fc/f)^2\right)$$

I-2-1-4 - Guide d'ondes circulaire : [1]

On considère un guide d'ondes dont la section droite est un cercle de rayon a :

L'équation de Helmholtz devient en coordonnées cylindrique :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (\text{I-14})$$

La séparation des variables permet de donner :

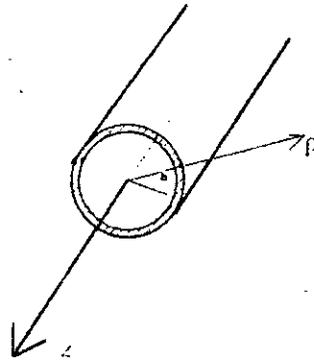


Fig (II-3) Guide d'ondes circulaires

$$\psi = R(\rho)F(\phi)Z(z) \quad (\text{I-15})$$

Substituons (I-15) dans (I-14) et divisons par ψ on aura :

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (\text{I-16})$$

Le troisième terme est indépendant de ρ et ϕ , il dépend uniquement de z donc on peut écrire $-k_z^2 = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$

Etant donné que l'équation (I-16) est vérifiée quelque soit Z ($kz = \text{cte}$). L'équation (I-16) devient :

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0 \quad (\text{I-17})$$

Le second terme est indépendant de ρ et z et les autres termes sont indépendants de ϕ donc ce deuxième terme est constant car l'équation (I-17) est vérifiée $\forall \phi$ on pose :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -n^2 \quad \text{ou } (n = \text{cte})$$

L'équation précédente devient :

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - n^2 + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0 \quad (\text{I-18})$$

L'équation est à présent séparée, posons $k^2 - k_z^2 = k_\rho^2$ ce qui donne le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \right) + ((k_\rho \rho)^2 - n^2) \mathcal{R} &= 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I-19})$$

La deuxième et la troisième équation de ce système sont des équations harmoniques identiques, leur résolution est connue, similaire à celle du guide rectangulaire $h(k_z z)$ $h(n\phi)$.

Tandis que la première équation est une équation de Bessel d'ordre n pour laquelle la solution sera notée par : $B_n(k_\rho \rho)$ qui peut être une combinaison de deux fonctions linéairement indépendantes parmi les fonctions suivantes : $J_n(k_\rho \rho)$, $N_n(k_\rho \rho)$, $H_n^{(1)}(k_\rho \rho)$, $H_n^{(2)}(k_\rho \rho)$. La solution de l'équation totale sera :

$$\Psi_{k_\rho, n, k_z} = B_n(k_\rho \rho) h(n\phi) h(k_z z)$$

Comme pour le guide rectangulaire nous aurons la solution générale de l'équation de Helmholtz :

$$\Psi = \sum_{n,k_z} \sum_{\substack{n \\ C_{n,k_z} = \text{cte}}} C_{n,k_z} \Psi_{k_\rho, n, k_z} \quad (\text{I-20})$$

1 - Mode TE :

La composante de \vec{E} suivant z est nul ce qui implique $E_z = 0$. La fonction d'ondes Ψ est donnée sous la forme :

$$\Psi = J_n(k_\rho \rho) \begin{bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{bmatrix} \exp(-jk_z z) \quad (\text{I-21})$$

Les deux fonctions $\sin(n\phi)$ et $\cos(n\phi)$ sont deux solutions possibles. Les conditions aux limites sont données par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0 \Big|_{\rho=a}^{\text{paroi}} \Rightarrow J_n'(k_\rho a) = 0 \quad (I-22)$$

On notera les zéros de la fonction $J_n'(x)$ x'_{np} , alors (I-22) donne $k_\rho = \frac{x'_{np}}{a}$ ce qui entraîne :

$$H_z = \Psi_{np}^{TE} J_n\left(\frac{x'_{np}}{a} \rho\right) \left[\frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \right] \exp(-jk_z z)$$

Les composants du champs électromagnétiques sont donnés par :

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} & H_\rho &= \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial z} \\ E_\phi &= \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} & H_\phi &= \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial z} \\ E_z &= 0 & H_z &= \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Psi \end{aligned} \quad (I-23)$$

Le nombre d'onde est donné par : $k_{cnp}^{TE} = \frac{x'_{np}}{a}$

$$\text{La fréquence de coupure donnée par : } f_{cnp}^{TE} = \frac{k_{cnp}^{TE}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \lambda_{cnp}^{TE} = \frac{2\pi a}{x'_{np}}$$

L'impédance d'onde caractéristique du guide est :

$$(Z_0)^{TE} = \frac{-E_\rho}{H_\phi} = \frac{E_\phi}{H_\rho} = \frac{\omega\mu}{k_z} \quad k_z^2 = k^2 - k_{cnp}^{2TE}$$

2 - Mode TM :

La fonction d'onde est donnée comme précédemment par :

$$\Psi = J_n(k_\rho \rho) \left[\frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \right] \exp(-jk_z z)$$

Mais pour ce cas, c'est la composante Hz qui est nulle et donc les conditions aux limites sont données par : $E_z = 0 \Big|_{(\rho = a)}^{\text{paroi}} \Rightarrow J_n(k_\rho a) = 0$ (I-24)

On notera les zéros de la fonction de Bessel $J_n(x)$ x_{np} alors (I-24) donne $k_\rho = \frac{x_{np}}{a}$ ce qui entraîne :

$$E_z = \Psi_{np} = J_n\left(\frac{x_{np}}{a} \rho\right) \begin{bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{bmatrix} e^{x p(-jk_z z)}$$

Les composantes du champ électromagnétique sont données par :

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{\hat{y}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial z} & H_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \\ E_\phi &= \frac{1}{\hat{y} \rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial z} & H_\phi &= \frac{-\partial \Psi}{\partial \rho} \\ E_z &= \frac{1}{\hat{y}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Psi & H_z &= 0 \\ k_{cnp}^{TM} &= \frac{x_{np}}{a} & f_{cnp}^{TM} &= \frac{k_{cnp}^{TM}}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}} \end{aligned} \quad (I-25)$$

L'impédance d'onde caractéristique du guide est donnée par : $(Z_0)^{TM} = \frac{k_z}{\omega\epsilon}$

Les fréquences de coupure des différents modes sont proportionnelles aux x_{np} pour les modes T.M et aux x'_{np} pour les modes TE. A partir des tableaux [Annexe A], on remarque que ces zéros se classent par ordre ascendant comme suit : $x'_{11}, x_{01}, x'_{21}, x_{11}, x'_{01}, \dots$

Donc le mode dominant dans un guide cylindrique sera le TE₁₁.

La fréquence de coupure de ce mode est donnée par :

$$f_{c11}^{TE} = \frac{k_{c11}^{TE}}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{x'_{11}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$$

1-2-2 - CARACTERISTIQUES GENERALES DES GUIDES D'ONDES :

Elles peuvent se résumer comme suit :

1- Coût élevé : cela est dû à la technologie poussée de fabrication et à la grande précision exigée pour avoir des parois parfaitement lisses.

2 - Difficulté de fixation d'éléments semi-conducteur.

3 - Difficulté de manipulation comparée aux câbles coaxiaux par exemple.

4 - Guide rectangulaire :

Grande atténuation (10 db/m à 150 Ghz) croit rapidement avec la fréquence.

5 - Guide circulaire :

Grande dimension par rapport aux longueurs d'ondes

Très faibles pertes (quelques db/km)

1-2-3 - DOMAINES D'UTILISATION :

Les guides d'ondes trouvent une utilisation très variée car en plus de la transmission d'ondes, ils sont utilisés pour la réalisation d'éléments de circuits tels que filtres et autres.

Ils servent aussi à l'alimentation des antennes cornets et paraboliques et à l'excitation des cavités, de plus on envisage actuellement de transmettre de l'information hyperfréquence par guide d'ondes circulaires, en effet dans ces guides, les modes TE_{0n} , présentent des pertes dont l'importance décroît à fréquences croissantes ce qui est une propriété extrêmement intéressante. Une liaison expérimentale à Lannion en France d'une dizaine de kilomètres de long permet de transmettre dans un guide circulaire de 5cm de diamètre 135 000 voies téléphoniques entre 32 et 52 Ghz (sont encore 1440 canaux de visiophones ou 108 canaux de télévision en couleur).

I-3 - CONCEPT DE RESEAU [1]:

I-3 -1 - DEFINITION :

Similairement à la théorie des circuits en basses fréquences, on peut définir un réseau micro-ondes comme étant la connexion d'un certains nombres de lignes de transmission uniformes. Les lignes de connexion sont supposées sans pertes. Un seul mode, le mode dominant, peut se propager sur chacune des lignes, ce qui implique par conséquent un choix de leurs dimensions et de la fréquence de fonctionnement. Un réseau micro-ondes est donc un système pour lequel on peut trouver une surface fermée le séparant du reste de l'espace tels que $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ sur cette surface, sauf sur une ou plusieurs sections du guide (n : vecteur unitaire normal à la surface).

I-3-2- ETUDE D'UN RESEAU :

On définit pour chaque ligne connectée une onde de tension et une onde de courant liées aux

champs électromagnétiques par :

$$E = e.V$$

$$H = h.I \quad \text{où } (e,h) \text{ sont des fonctions de modes normalisées}$$

Pour le mode TE on a :

$$\vec{e}_t^c = \vec{u}_z \times \vec{\nabla}_T \psi^c = \vec{h}^c \times \vec{u}_z$$

$$\vec{V}^c = Z^c$$

$$\vec{h}_t^c = -\vec{\nabla}_T \psi^c = \vec{u}_z \times \vec{e}^c$$

$$I^c = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{dZ^c}{dz}$$

Pour le mode TM

$$\vec{e}^m = -\vec{\nabla}_T \psi^m = \vec{h}^m \times \vec{u}_z \quad \vec{V}^m = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{d\vec{z}^m}{dz}$$

$$\vec{h}^m = -\vec{u}_z \times \vec{\nabla}_T \psi^m = \vec{u}_z \times \vec{e}^m \quad \vec{I}^m = \vec{Z}^m$$

La tension dans chaque ligne connectée au réseau s'exprime en fonction des courants dans toutes les lignes, ce qui nous amène à caractériser le réseau par une matrice impédance qui est :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix}$$

Ou n est le nombre de dipôles ,ce nombre peut être quelconque ,mais pour notre étude on se limitera au réseau à deux portes (quadripôle) .

1-3-3-RESEAU A DEUX PORTES :

L'utilité primaire d'un réseau à deux portes en micro-onde est de :

- 1- Transmettre de l'énergie d'un point à un autre .
- 2- Filtrer un signal d'un point à un autre .

Ce réseau est représenté par la matrice impédance :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

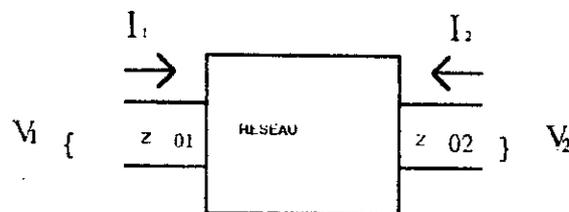
Ou par une matrice admittance $|Y| = |Z|^{-1}$

Il convient souvent de caractériser de tels réseaux par d'autres matrices mettant mieux en évidence le caractère guide d'ondes du réseau, car dans chaque guide la tension et le courant se divise en une onde incidente et une onde réfléchie.

$$V_1 = V_1^I + V_1^R$$

$$I_1 = I_1^I + I_1^R = \frac{1}{Z_0}(V_1^I - V_1^R)$$

De même pour la porte 2.



Déjà une matrice possible pour décrire le réseau à deux portes serait la matrice de transfert qui est définie de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} V_2^R \\ V_2^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^R \\ V_1^I \end{pmatrix}$$

On peut définir aussi une autre matrice qui est la matrice de dispersion qui caractérise l'adaptation d'impédance :

$$\begin{pmatrix} V_1^R \\ V_1^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^R \\ V_2^I \end{pmatrix}$$

S_{11} est le coefficient de réflexion vue par la porte 1 quand la porte 2 est adaptée inversement pour S_{22} . Ces différentes matrices sont liées par des relations connues on

$$|S| = |Z - Z_0| |Z + Z_0|^{-1} \quad |Z_0| = \begin{vmatrix} Z_{01} & 0 \\ 0 & Z_{02} \end{vmatrix}$$

$$|T| = \begin{vmatrix} S_{21} - \frac{S_{22}S_{11}}{S_{12}} & \frac{S_{22}}{S_{12}} \\ -\frac{S_{11}}{S_{12}} & \frac{1}{S_{12}} \end{vmatrix} \Leftrightarrow |T| = \frac{1}{S_{12}} \begin{vmatrix} -\Delta & S_{22} \\ -S_{11} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det|T| = 1 \quad (\text{cas } S_{12} = S_{21})$$

Notre but principal à présent à travers cette étude est d'obtenir un circuit équivalent aux différents réseaux micro-ondes tels que : obstacles dans un guide, jonction de guide etc. ...

CHAPITRE II

TECHNIQUES D'ANALYSE

II-1-INTRODUCTION :

Les applications nombreuses et variées de l'électrodynamique de Maxwell et Lorentz posent des problèmes analytiques de plus en plus ardues tant en radiophysique (électronique nucléaire , laser ...) qu'en radioélectricité (radar , télécommunication par faisceaux hertziens).

L'on est en effet amené à résoudre des équations aux dérivées partielles ou intégrales liées à des conditions aux limites fort compliquées ,or,de par leur nature même ,ces équations n'admettent pas de solution rigoureuses aisément accessibles ;aussi se voit on contraint et forcé de faire appel à des méthodes approchées pour mener a bonne fin la résolutions de ces problèmes . Parmi ces méthodes on s'intéressera ici à :

-La méthode des moments.

-Au principe variationnel .

-Aux différences finies .

Ces techniques nécessitent une connaissance approprié de manipulation des calculs numériques car elles aboutissent toutes à des équations matricielles.

II-2-METHODE DES MOMENTS[4]:

II-2-1-RAPPEL MATHEMATIQUE:

La méthode des moments est une procédure générale pour convertir une formulation analytique d'un problème de champ en une formulation numérique sous forme d'équation matricielle. Cette procédure de production d'un système d'équation linéaire étant commune à divers méthodes , chaque application spécifique possède son trait particulier .

La méthode des moments est généralement appliquée pour la résolution d'équation intégrales , elle a été souvent utilisés pour résoudre des problèmes de discontinuités dans les lignes micro-strip . Cette méthode est actuellement reconnue comme la plus puissante approche pour l'analyse de configuration d'antennes plaques et pour caractériser les phénomènes de radiation et de couplage dans les discontinuités des circuits imprimés.

La formulation analytique d'un problème de champ se présente souvent sous la forme du problème déterministe suivant :

$$L(f)=g \quad (\text{II-1})$$

ou L : est un opérateur linéaire

g : étant une fonction connue(excitation ou source)

f : est la réponse (champ ou autre) fonction inconnue.

Le passage de cette formulation à un système d'équation exige souvent la définition d'un produit intérieur : $\langle f, g \rangle$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

$$\langle f^*, f \rangle > 0 \quad \text{si } f \neq 0$$

$$\langle f^*, f \rangle = 0 \quad \text{si } f = 0$$

α et β étant des constantes scalaires .

Le domaine d'un opérateur est l'ensemble des fonctions auxquelles il s'applique , le rang d'un opérateur est l'ensemble des fonctions résultantes .

On définit l'opérateur adjoint(L^a) de l'opérateur(L) comme suit: $\langle L(f), g \rangle = \langle f, L^a(g) \rangle$

(L) est dit auto-adjoint si $L^a = L$ et le domaine de (L^a) est celui de (L).

Un opérateur est défini positif si $\langle f^*, Lf \rangle > 0$, pour tout $f \neq 0$ du domaine de (L)

Si une unique solution existe au problème (II-1), on peut définir un opérateur inverse (L^{-1}) :

$$f = L^{-1}(g)$$

II -2-2 - ENONCE DE LA METHODE :

Considérons le problème donné par l'équation (II-1), ou (f) est une fonction inconnue à déterminer pour cela exprimons cette fonction sous forme d'une combinaison linéaire de fonction (f_n) appartenant au domaine de (L)

$$f = \sum_n \alpha_n f_n^2 \tag{II-2}$$

α_n étant des constantes.

Les fonction f_n sont dites fonctions de base. Pour une solution exacte la somme devrait être infinie, alors les (f_n) forment une base complète, pratiquement pour le calculateur, une solution approximative est obtenue par une sommation d'un nombre fini de fonction (f_n)

Substituons l'équation (II-2) dans (II-1) et utilisons le fait que (L) soit linéaire. On obtient l'égalité suivante :

$$g = \sum_n \alpha_n L(f_n) \tag{II-3}$$

On choisit maintenant des fonctions de test W_1, W_2, \dots connues et on fait le produit intérieur de ces fonctions par les membres de (II-3) on aura :

$$\sum_n \alpha_n \langle W_m, L(f_n) \rangle = \langle W_m, g \rangle \tag{II-4}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

L'équation (II-4) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$[I_{mn}][\alpha_n] = [g_m] \tag{II-5}$$

où les différents éléments sont définis par

$$[I_{mn}] = \begin{vmatrix} \langle W_1, L(f_1) \rangle & \langle W_1, L(f_2) \rangle & \dots & \dots \\ \langle W_2, L(f_1) \rangle & \langle W_2, L(f_2) \rangle & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, [\alpha_n] = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{vmatrix}, [g_n] = \begin{vmatrix} \langle W_1, g \rangle \\ \langle W_2, g \rangle \\ \dots \\ \langle W_n, g \rangle \end{vmatrix}$$

Les fonctions de base (f_n) étant connues reste à déterminer les coefficients $[\alpha_n]$ de la combinaison (II-2). Ceci est obtenue par :

$$[\alpha_n] = [I_{mn}]^{-1} [g_m] \tag{II-6}$$

Bien entendu, on supposera que $[l_{mn}]$ est non singulière et donc $[l_{mn}]^{-1}$ existe, et on déterminera de cette manière la fonction inconnue (f). L'exactitude de la solution dépend à la fois des choix des fonctions (f_n) et celui des fonctions (W_m).

Le choix particulier $W_m = f_n$ se ramène à la méthode de Galerkin.

II-2-3 - TECHNIQUES SPECIALES :

La nécessité d'utilisation de la méthode des moments n'apparaît que dans l'opérateur (L) est relativement complexe, ce qui est souvent le cas dans les problèmes de champs électromagnétiques. Le choix des fonctions de base (f_n) et les fonctions de test (W_n) s'en retrouve relativement délicat. Voici ici quelques techniques facilitant le calcul des éléments des différentes matrices.

II-2-3-1 - Point matching (point accordant) :

L'intégration exigée dans le calcul de $l_{mn} = \langle W_m, Lf_n \rangle$ se révèle souvent difficile, une façon simple d'obtenir une solution approximative serait de dire que l'équation (II-3) est vérifiée en quelques points discrets seulement d'où le nom de point matching. En terme de méthode des moments ceci est équivalent à utiliser des fonctions de Dirac comme fonction de test.

II-2-3-2 - Méthodes des sous sections :

Cette technique simplificatrice utilise des fonctions de base (f_n) chacune d'elles existant uniquement sur une sous section du domaine (f), donc chaque coefficient (α_n) n'affectera l'approximation de (f) que sur une sous section. Cette procédure simplifie souvent le calcul et, où la forme de la matrice $[l_{mn}]$ et peut s'employer en même temps que la première.

II-2-3-3- Opérateur étendu :

Un opérateur est défini par une opération, plus un domaine d'application, en cas de nécessité, ce domaine peut être étendu en redéfinissant l'opération à des fonctions nouvelles n'appartenant pas au domaine d'origine sans que cela ne change l'opération dans son domaine d'origine, ceci permet d'utiliser une plus grande classe de fonction pour une solution par la méthode des moments et c'est particulièrement important dans les problèmes multivariables (champs en espace multidimensionnel) où il n'est pas toujours aisé de trouver des fonctions simples dans le premier domaine.

II-2-3-4- Opérateur approximatif :

Il convient parfois, dans les problèmes complexes, d'approximer l'opérateur pour avoir une solution. Pour les opérateurs intégraux, un opérateur approximatif peut être obtenu en approximant le noyau de l'opérateur.

II-2-4- METHODE DES PERTURBATIONS :

Un problème sous certaines considérations peut être légèrement différent du problème pouvant se résoudre exactement à une solution du premier ordre au problème perturbé; peut être obtenu en utilisant la solution du problème non perturbé comme base à la méthode des moments.

Des solutions d'ordre supérieurs peuvent être obtenues en utilisant la solution non perturbée, plus des termes de correction dans la méthode des moments .

II-2-5-INTERPRETATION VARIATIONNELLE:

Nous donnerons d'abord une interprétation de la méthode des moments en terme d'espace. Soit $S(Lf)$ dénote le rang de L , $S(Lf_n)$ dénote l'espace engendré par Lf_n et $S(W_n)$ dénote l'espace engendré par W_n . La méthode des moments permet d'égaliser la projection de Lf sur $S(W_n)$ à la projection de l'approximation de Lf sur $S(W_n)$. La différence entre Lf réel et Lf approximé est l'erreur qui est orthogonal à $S(W_n)$ à cause de cette orthogonalité un changement du premier ordre dans cette projection projecte produit un changement du second ordre de l'erreur.

Dans la méthode de Galérkin $S(W_n)=S(f_n)$ et la distance entre Lf approximé et Lf exacte est minimisée, mais en général la méthode des moments ne permet pas de minimiser la distance prescrite précédemment sauf dans certain cas spéciaux .

L'approche variationnel de ce problème est comme suit : on pose l'équation d'opérateur suivante $Lf = g$ et on désire déterminer la fonctionnel de f par :

$$\rho(f) = \langle f, h \rangle \quad (\text{II-7})$$

Ou h est une fonction continue connue et $\rho(f)$ est une fonctionnel linéaire connue

On définit la fonction adjointe f^a par :

$$L^a f^a = h \quad (\text{II-8})$$

Ou L^a est l'opérateur adjoint de L .

par le calcul variationnel il est possible de voir que :

$$\rho = \frac{\langle f, h \rangle \langle f^a, g \rangle}{\langle Lf, f^a \rangle} \quad (\text{II-9})$$

(II-9) est une formule stationnaire quand f est une solution de $Lf = g$ et f^a est une solution de l'équation (II-8).

Pour une évaluation approximative de ρ on va substituer l'équation suivante :

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad f^a = \sum_m \beta_m W_m \quad (\text{II-10})$$

c'est-à-dire (II-10) dans l'équation (II-9) et on applique les conditions de Rayleigh - Ritz : $\frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \rho}{\partial \beta_i} = 0$ pour tout i , il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que ρ soit stationnaire est l'équation (II-4).

Désormais la méthode des moments est identique à la méthode variationnelle de Rayleigh - Ritz. Souvent la méthode des moments est appelée méthode directe contrairement à l'approche variationnelle qui est assez détournée.

II-3 - LES FONCTIONS DE GREEN [6], [3] :

II-3-1 - DEFINITION :

Une des applications les plus importantes de la théorie de la fonction δ est la construction des fonctions de Green. Celles-ci, en plus de leur sens physique, qu'on exposera plus loin, ont un intérêt mathématique majeur qui est celui de l'obtention d'équations intégrales à partir d'équation différentielles.

Soit L un opérateur différentiel et $\rho(x)$ une fonction continue, x peut être considéré comme un vecteur à n composants x_1, x_2, \dots, x_n et soit alors à trouver la fonction (f) qui vérifie l'équation différentielle inhomogène :

$$Lf(x) = -\rho(x) \quad (\text{II-11})$$

Liée à certaines conditions aux limites.

La solution de l'équation (II-11) peut se mettre symboliquement sous la forme

$$f(x) = -\mathcal{L}^{-1} \rho(x) \quad (\text{II-12})$$

Si on représente le second membre de l'équation (II-11) à l'aide de la fonction δ sous la forme :

$$\rho(x) = \int \rho(x') \delta(x'-x) dx' \quad (\text{II-13})$$

Et si nous tenons compte de ce que l'opérateur \mathcal{L} n'agit que sur les coordonnées non primés on obtient à la place de l'équation (II-12) :

$$f(x) = -\int \rho(x') \mathcal{L}^{-1} \delta(x'-x) dx' \quad (\text{II-14})$$

donc la solution de (II-11) prend la forme :

$$f(x) = \int \rho(x') G(x',x) dx' \quad (\text{II-15})$$

G : s'appelle la fonction de Green de l'équation (II-11). On peut donc relier la fonction de Green à la distribution δ par l'équation symbolique suivante :

$$G(x',x) = -\mathcal{L}^{-1} \delta(x'-x) \quad (\text{II-16})$$

Si on multiplie à gauche par l'opérateur \mathcal{L} , on obtient :

$$\mathcal{L}G(x',x) = -\delta(x'-x) \quad (\text{II-17})$$

Rigoureusement parlant la division par un opérateur ne représente pas une opération univoque, c'est pourquoi on peut ajouter au second membre de (II-16) une expression non singulière G_0 assujettie seulement à être solution de l'équation homogène

$$\mathcal{L} G_0 = 0$$

$$G(x',x) = -\mathcal{L}^{-1} \delta(x'-x) + G_0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} G(x',x) = -\delta(x'-x) + \mathcal{L}G_0 = -\delta(x'-x)$$

Cette expression résulte des conditions supplémentaires telles que les conditions aux limites, conditions initiales...

De ce qui précède, l'équation (II-16), on remarque qu'il y a une fonction de Green pour chaque opérateur permettant ainsi une résolution intégrale de plusieurs problèmes à opérateur différentiel

II-3-2 - SENS PHYSIQUE :

Pour obtenir le champ causé par une distribution de source ou de charge, on calcul l'effet de chaque portion élémentaire de source et on somme sur toutes les portions. Si $G(r/r_0)$ est le champ au point d'observation (r) causé par le point (r_0) de la source, alors le champ total crée par la source est l'intégral de G sur tous les points (r_0) possible. La fonction G est appelée fonction de Green.

Soit à résoudre les équations de propagation des potentiels V et \vec{A} données par :

$$(D + k^2) V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (a) \quad (II-18)$$

$$(D + k^2) \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad (b)$$

Conditions aux limites.

Où (\vec{j}) et (ρ) sont les termes de source. On appelle fonction de Green (G) la solution (II-18) avec comme source une distribution ponctuelle représentée mathématiquement par une fonction de dirac δ . On notera que $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ satisfait à l'équation

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{si } \vec{r}_0 \text{ est dans } V \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Il est clair qu'à partir de l'équation (II-18) la résolution de cette équation en V conduit à une fonction de Green (G) scalaire, alors que la résolution en \vec{A} conduit à une fonction de Green dyadique \vec{G} .

II-3-3- FONCTIONS DE GREEN SCALAIRES :

Les conditions aux limites sur V sont généralement : V connu sur S_1 , $\frac{\partial V}{\partial n}$ connu sur S_2 ,

ou $S_1 + S_2$ formant une surface fermée S . En considérant l'identité de Green :

Le deuxième membre de l'équation précédente est nulle car $G(r/r_1)$ et $G(r/r_2)$ sont nulles sur S_1 et leur dérivé normale est nulle sur S_2 ainsi :

$$G(r_1/r_2) = G(r_2/r_1) \quad (\text{II-22})$$

II-3-5- FONCTIONS DE GREEN EN ESPACE LIBRE (SANS CONDITION AUX LIMITES) :

Soit une source ponctuelle, on considère d'abord

$$\Delta G = -\delta(M - M_0) \text{ la solution est : } G = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi |\vec{M_0M}|}$$

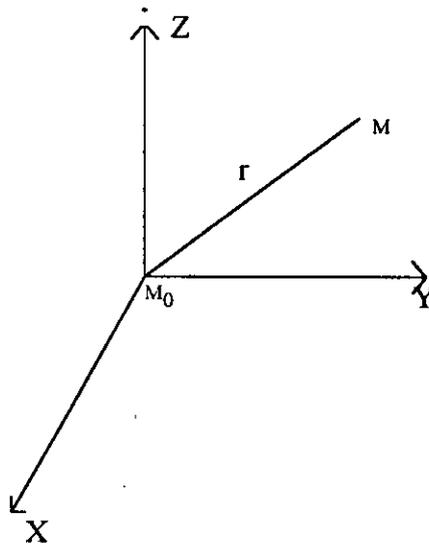


Fig (II-1) : source ponctuelle

En effet :

$$\begin{aligned} \int_v -\delta dv &= \int_v \text{div}(\vec{\text{grad}}) G dv = \int_s \vec{\text{grad}} G \cdot \vec{ds} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{-\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{ds} = \frac{-1}{4\pi} \int d\Omega = -1 \end{aligned}$$

Maintenant on peut considérer l'équation

$(\Delta + k^2)G = -\delta$ pour laquelle la solution est :

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (\text{II-24})$$

La forme e^{-jkr} représente une onde s'éloignant de M_0 .

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \frac{\nabla e^{-jkr}}{r} &= \frac{1}{4\pi} \left(2 \operatorname{grad} \frac{1}{r} \operatorname{grad} e^{-jkr} + \frac{1}{r} \Delta e^{-jkr} + e^{-jkr} \Delta \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(j \frac{2k}{r^2} + \frac{2}{r^3} - \frac{k^2}{r} \right) e^{-jkr} \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{e^{-jk r}}{r^p} \right) = \frac{e^{jkr}}{r^p} \left(-k^2 + j \frac{k}{r} (n-1-2p) + \frac{p^2 - np + 2p}{r^2} \right)$$

Pour $n=3, p=1$ on a :

$$\Delta \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) = \frac{e^{jkr}}{r(-k^2)}$$

Ce qui donne :

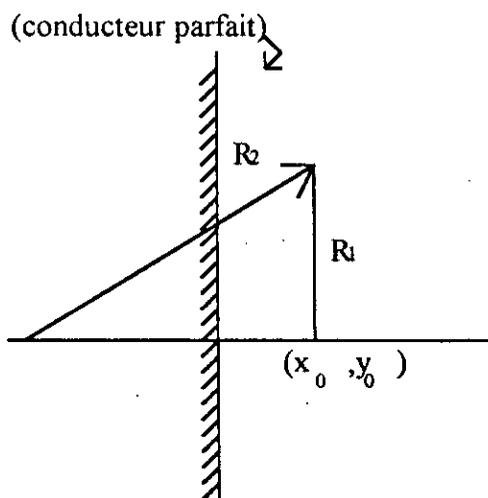
$$\Delta \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} + \frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} = e^{-jkr} \Delta \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = -\delta$$

II-3-6- FONCTION DE GREEN MODIFIEE :

L'étude des ondes guides impose des conditions aux limites à satisfaire, ce qui nous amène à définir une fonction de Green adéquate que nous appellerons "fonction de Green modifiée". L'obtention de cette fonction peut s'effectuer par divers méthodes parmi lesquelles nous exposerons celles des images.

II-3-6-1- Méthode des images :

Soit une source ponctuelle localisée par les coordonnées (x_0, y_0) , en présence d'un plan conducteur infini. Le potentiel à la surface du plan conducteur doit être nul, donc la fonction de Green doit satisfaire les conditions de Dirichlet comme montré sur la fig (II-2)



Fig(II-2)

La méthode des images introduit une charge virtuelle de signe opposé au point symétrique de celui où est placé la charge rayonnante, ce qui va permettre de tenir compte de la réflexion sur le plan conducteur infini. Ayant l'équation (II-24) la fonction de Green appropriée est donné par :

$$G = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} - \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} \right] \tag{II-25}$$

Pour le cas des deux plans conducteurs infinis entre lesquelles existe une charge rayonnante

(x_0, y_0) , fig (II-3). Il faudra utiliser le principe des images successives

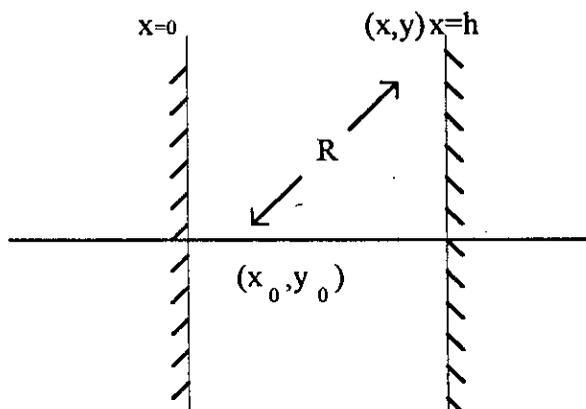


Fig (II-3)

II-3-6-2- Série d'image: [8]

Symétriquement au point (x_0, y_0) par rapport au plan $x=0$, on a une charge au point $(-x_0, -y_0)$ et par rapport au point $x=h$, on a une charge au point d'abscisse $(2h-x_0)$.

Par réflexion successive chacune des deux images précédentes va donner naissance à d'autres images et ceci d'une manière indéfinie comme vue sur la figure (II-4)

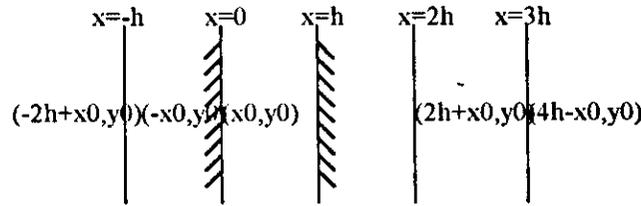


Fig (II-4)

La fonction de Green Appropriée est donnée par :

$$G = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\exp(-jk\sqrt{(x-(2nh+x_0))^2+y^2})}{\sqrt{(x-(2nh+x_0))^2+y^2}} - \frac{\exp(-jk\sqrt{(x-(2nh-x_0))^2+y^2})}{\sqrt{(x-(2nh-x_0))^2+y^2}} \right) \right] \quad (II-26)$$

II-3-7-EXPANSION DES FONCTIONS DE GREEN EN FONCTIONS PROPRES:

Considérons les fonctions propres ψ_n satisfaisant à l'équation propre :

$$\nabla^2 \psi_n + k^2_n \psi_n = 0 \quad (II-27)$$

Où k^2_n sont les valeurs propres correspondantes

Ces fonctions forment une base orthonormée c'est à dire :

$$\int \psi_n \psi_m \, d v = \delta_{mn} \quad (II-28)$$

Où δ_{mn} est le symbole de Kroneker

L'intégrale est effectuée sur une région bornée par la surface sur laquelle ψ_n vérifie les conditions aux limites .La fonction de Green $G(r/r_0)$ vérifiant les même conditions aux limites que les fonctions ψ_n et vue que ces dernières forment une base complète on peut donc écrire :

$$G(r/r_0) = \sum_n A_n \psi_n(r) \quad (II-29)$$

On introduit (II-29) dans l'équation

$$D^2 G + k^2 G = -4\pi\delta(r - r_0) \quad (II-30)$$

On obtient

$$\sum A_n(k^2 - k_n^2)\psi_n(r) = -4\pi\delta(r - r_0) \quad (\text{II-31})$$

Des équations (II-28) et (II-30) il découle :

$$A_n = \frac{4\pi\psi_n(r_0)}{k_n^2 - k^2}$$

D'où

$$G(r/r_0) = 4\pi \sum \frac{\psi_n(r_0)\psi_n(r)}{k_n^2 - k^2} \quad (\text{II-32})$$

II-3-8 - LES FONCTIONS DE GREEN DYADIQUES :

Comme signalé précédemment la résolution d'équations différentielles (ou aux dérivés partielles) avec des variables vectorielles ne peut être assurée par des fonctions de Green scalaires, donc on aura besoin d'un autre type de fonction de Green dite dyadique :

II-3-8-1 - Rappel sur le calcul dyadique

A) Définition de la dyade :

On appelle dyade le produit formel de deux vecteurs qui n'est ni le produit scalaire indiqué par (\cdot) , ni le produit vectoriel indiqué par (\wedge) .

Soit les deux vecteurs a et b :

$$a = \sum_{i=1}^3 a_i u_i \quad , \quad b = \sum_{i=1}^3 b_i u_i \quad u_i, i=1, \dots, 3 \text{ vecteurs de bases}$$

On définit la dyade $\theta = ab$ comme le produit :

$$\theta = ab = (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3)(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)$$

$$\theta = \begin{vmatrix} a_1u_1 \\ a_2u_2 \\ a_3u_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1u_1 & b_2u_2 & b_3u_3 \end{vmatrix} \quad (3,1)(1,3) = (3,3)$$

Soit

$$\theta = ab = u_1u_1a_1b_1 + u_1u_2a_1b_2 + u_1u_3a_1b_3$$

$$+ u_2u_1a_2b_1 + u_2u_2a_2b_2 + u_2u_3a_2b_3 + u_3u_1a_3b_1 + u_3u_2a_3b_2 + u_3u_3a_3b_3$$

La dyade θ est donc caractérisée par une matrice carrée d'ordre 3

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$$

On peut donc écrire $\theta = \sum_{ij} \theta_{ij} \vec{u}_i \vec{u}_j$

B) Produit intérieur et produit extérieur d'une dyade par un vecteur :

On appelle multiplication par la droite ou post multiplication l'opérateur $\theta.p$ et $\theta \wedge p$ et multiplication par la gauche ou pré multiplication l'opérateur $p.\theta$ et $p \wedge \theta$, p étant un vecteur ($p=(p_1,p_2,p_3)$)

Soit le produit intérieur ou scalaire :

$$\theta.p = \theta.(p_i u_i)$$

$$\begin{aligned} \theta.p &= \theta_{11} p_1 u_1 + \theta_{21} p_1 u_2 + \theta_{31} p_1 u_3 \\ &+ \theta_{12} p_2 u_1 + \theta_{22} p_2 u_2 + \theta_{32} p_2 u_3 \\ &+ \theta_{13} p_3 u_1 + \theta_{23} p_3 u_2 + \theta_{33} p_3 u_3 \end{aligned}$$

c'est manifestement un vecteur

D'une façon analogue on obtient :

$$\begin{aligned} p.\theta &= \theta_{11} p_1 u_1 + \theta_{12} p_1 u_2 + \theta_{13} p_1 u_3 \\ &+ \theta_{21} p_2 u_1 + \theta_{22} p_2 u_2 + \theta_{23} p_2 u_3 \\ &+ \theta_{31} p_3 u_1 + \theta_{32} p_3 u_2 + \theta_{33} p_3 u_3 \end{aligned}$$

Pour le produit extérieur ou vectoriel, on a :

Si le terme de source : $\mu_0 \vec{j}$ est remplacé par la distribution

$$(a \vec{x} + b \vec{y} + c \vec{z}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

\vec{x}, \vec{y} et \vec{z} étant des vecteurs unitaires . La solution serait :

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} (a \vec{x} + b \vec{y} + c \vec{z})$$

Le sens de la distribution choisie est de décomposer \vec{A} en composantes, donc de résoudre trois équations scalaires , autrement dit , pour calculer \vec{A} on calcule A_x en intégrant j_x et de même pour A_y, A_z . Si \bar{I} est la dyade, la distribution $I \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ conduit à la fonction de Green dyadique .

$$\bar{G} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \bar{I}$$

Ceci nous permet d'écrire la solution générale sous une autre forme :

$$\vec{A} = \mu_0 \int_{v_0} \bar{G}(M/M_0) \vec{J}(M_0) d v_0$$

la fonction \bar{G} vérifie toujours la propriété : $\bar{G}(M/M_0) = \bar{G}(M_0/M)$

II-3-8-3-Fonction de Green dyadique et modifiée :

Le problème consiste à résoudre l'équation : $(\Delta + k^2)\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ avec les conditions aux limites .

Examinons le cas d'une surface parfaitement conductrice : les conditions aux limites seront alors :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = 0$$

comme :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - j\omega \vec{A}$$

Il vient

$$\vec{n} \wedge \vec{A} = 0$$

$$\vec{n} \wedge \text{grad } V = 0$$

Cette dernière équation montre que la surface est équipotentielle c'est à dire $V = \text{constante}$, on peut prendre $V=0$, d'où on a par la condition de Lorentz : $\text{div } \vec{A} = 0$.

Pour résoudre cette équation, on écrit l'identité de Green en \vec{A} et \vec{G} :

$$\int_V (\vec{A} \cdot \Delta \vec{G} - \Delta \vec{A} \cdot \vec{G}) dv = - \int_S [(\vec{n} \wedge \vec{A}) \cdot \text{rot } \vec{G} + (\vec{n} \wedge \text{rot } \vec{A}) \cdot \vec{G} + \vec{n} \cdot \vec{A} \cdot \text{div } \vec{G} - \vec{n} \cdot \vec{G} \cdot \text{div } \vec{A}] ds$$

Le terme dans l'intégrale triple s'écrit :

$$\vec{A}(\Delta \vec{G} + k^2 \vec{G}) - (\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A}) \cdot \vec{G} = \vec{A}(-I\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)) - (-\mu_0 \vec{J}) \cdot \vec{G} = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{A} + \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{G}$$

Compte tenu des conditions aux limites, le premier et le dernier terme de l'expression sous l'intégrale double sont nuls. pour annuler les autres on doit poser :

$$\vec{n} \wedge \vec{G} = 0 \quad \text{div } \vec{G} = 0$$

$$\vec{A} = \mu_0 \int_V \vec{j} \cdot \vec{G} (M/M_0) dv_0$$

$$\text{ou } \vec{G} \text{ est la solution de : } (\Delta + k^2) \vec{G} = -\delta \vec{I} \quad \text{avec } \vec{n} \wedge \vec{G} = 0 \quad \text{div } \vec{G} = 0 \quad \text{sur } S$$

II-4: TECHNIQUE VARIATIONNELLE : [3] [1]

II-4-1-INTRODUCTION :

Les problèmes aux limites de l'électrodynamique se présentent la plupart du temps sous la forme d'équations différentielles linéaires dont on recherche la solution assujettie à des conditions aux limites prescrites sur des surfaces données. Ainsi, l'annulation de la

composante tangentielle du champ électrique E sur des surfaces conductrices représente une condition aux limites de ce genre. Il arrive cependant souvent qu'au lieu de s'intéresser à la configuration du champ électromagnétique dans toute son étendue, on désire calculer une seule grandeur scalaire telle que la capacité d'un condensateur, l'impédance caractéristique d'une ligne, ou la fréquence propre d'une cavité.

La méthode variationnelle est utilisée pour déterminer justement ces grandeurs scalaires. La procédure variationnelle donne une approximation de la quantité désirée sans avoir à résoudre l'équation différentielle elle-même et elle diffère des autres méthodes d'approximation par le fait qu'elle engendre une formule stationnaire autour de la solution correcte, ceci veut dire qu'elle est relativement insensible aux variations du champ considéré autour du champ correct. Si la quantité cherchée est réelle, la formule variationnelle doit être une limite inférieure ou supérieure pour celle-ci. Dans le cas d'un champ développé sur un jeu de fonctions de base complet il est possible d'avoir une solution du moins impossible.

II-4-2-ASPECT MATHEMATIQUE :

Ceci étant, posons nous le problème suivant : trouver une fonction $\psi(x)$ sommable telle que :

$$f(x) = \int_0^a \psi(x)K(x,t)dx \quad 0 \leq x \leq a \quad (\text{II-33})$$

Où $f(x)$ et le noyau $K(x,t)$ sont des fonctions connues, ce dernier étant une fonction de x sommable. Supposons la fonction $K(x,t)$ symétrique en x et en t , et $f(x)$ intégrable ; alors le problème précédent se ramène à cet autre : déterminer $\psi(t)$ de manière que la variation première de :

$$J[\psi] = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \psi(x)\psi(t)K(x,t)dxdt - \int_0^a f(t)\psi(x)dx \quad (\text{II-34})$$

Soit nulle. Un problème de ce genre se réduit dans bien des cas à celui de la détermination des extrémal de J . En fait, par le calcul des variations, il vient

$$\delta J = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \delta\psi(x)\psi(t)K(x,t)dxdt + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \delta\psi(t)\psi(x)K(x,t)dxdt - \int_0^a f(t)\delta\psi(t)dt$$

$$= \int_0^a \delta\psi(t) \left[\int_0^a \psi(x)K(x,t)dx - f(t) \right] dt$$

Et pour que $\delta J=0$, il faut, puisque les $\delta\psi$ sont arbitraires, que la partie dans le crochet soit nulle et l'on écrit :

$$\int_0^a \psi(x)K(x,t)dt - f(t) = 0 \tag{II-35}$$

On peut également étendre cette méthode de la manière suivante :

$$J[\psi] = \iint_{D,D} \psi(t)K(s,t)\psi(s)dsdt + \int_D [\psi(s)]^2 ds - 2 \int_D \psi(s)f(s)ds \tag{II-36}$$

Où $K(s,t)$ est une fonction symétrique continue des variables s, t dans le pavé D ($a \leq s \leq b, a \leq t \leq b$)

$f(s)$ est une fonction continue donnée de s (onde incidente dans un problème de diffusion) et $\psi(s)$ la fonction continue recherchée, on donnera la valeur extrémale de (II-36) pour cela, on posera un opérateur H qui correspond au noyau $K(s,t)$:

$$H = \int_D K(s,t) \{ \dots \} ds$$

Et on met (II-36) sous la forme :

$$J[\psi] = (\psi, H\psi) + (\psi, \psi) - 2(\psi, f) \tag{II-37}$$

D'où :

$$\delta J = 2(\delta\psi, H\psi) + 2(\delta\psi, \psi) - 2(\delta\psi, f) = 2(\delta\psi, H\psi + \psi - f) \tag{II-38}$$

La condition d'extremum $\delta J=0$ fournit l'équation d'Euler de l'équation intégrale (II-36).

$$\psi(t) = f - H\psi = f(t) - \int_D K(s,t)\psi(s)ds \tag{II-39}$$

Soit $\psi = (1 + H)^{-1}f$, l'opérateur $(1 + H)$ possède un inverse, on est alors conduit à une fonctionnelle analogue à (II-36) :

II-4-3-PRINCIPE VARIATIONNEL POUR LES PROBLEMES A VALEURS PROPRES :

Dans la plupart des cas, le problème original peut être réduit à un problème à valeurs propres, ces valeurs propres étant alors les quantités à déterminer. Les équations sont du type:

$$\mathcal{L}f = \gamma Mf \quad (\text{II-40})$$

où \mathcal{L} et M sont des opérateurs différentiels ou intégraux scalaires ou vectoriels.

Il est aisé de démontrer que le principe variationnel pour γ revêt la forme :

$$[\gamma] = \frac{\int \phi \mathcal{L}f dv}{\int \phi Mf dv} \quad \text{ou} \quad \gamma = \text{V.S.} \frac{\int \phi \mathcal{L}f dv}{\int \phi Mf dv} \quad (\text{II-41})$$

V.S : valeur stationnaire de

et où le signe [] tient compte du caractère approché de γ lorsque f n'est pas la fonction exacte. Supposons ϕ arbitraire. L'intégration est effectuée sur le domaine de définition des variables indépendants.

On voit immédiatement en multipliant (II-40) par ϕ et intégrant, que si f vérifie (II-40), γ vérifie (II-41)

Si (II-41) est vérifié, nous aurons :

$$[\gamma] \int \phi Mf dv = \int \phi \mathcal{L}f dv;$$

En effectuant la variation sur ϕ et γ aux deux membres

$$\delta[\gamma] \int \phi Mf dv + [\gamma] \int \delta\phi Mf dv = \int \delta\phi \mathcal{L}f dv$$

si $[\gamma] = 0$

$$\int \delta\phi [\mathcal{L}f - \gamma Mf] dv = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}f - \gamma Mf = 0$$

en vertu du caractère arbitraire de ϕ

II - 5 - METHODE DES DIFFERENCES FINIES : [7]**II - 5 -1- INTRODUCTION :**

Les dérivations apparaissant dans les équations aux dérivés partielles doivent être exprimée sous forme d'expression approximée, pour permettre le calcul numérique d'une solution. Deux méthodes d'approximation peuvent être utilisées.

II-5-2 - DEVELOPPEMENT EN SERIE DE TAYLOR :

Etant donné la fonction $f(x)$ analytique, alors sa valeur au point $(x + \Delta x)$ peut être exprimé par la série de Taylor comme suit :

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + (\Delta x) \frac{(\partial f)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (\text{II-42})$$

on tire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{\partial x^3} + \dots \quad (\text{II-43})$$

Rassemblant tout les termes contenant Δx en un terme que nous noterons $O(\Delta x)$ on obtient donc:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{II-44})$$

Ce qui est une approximation de la première dérivée partielle de f par rapport à x . Cette équation est appelée l'approximation progressive de $\frac{\partial f}{\partial x}$ d'ordre de Δx .

Considérons maintenant la valeur de f en $(x - \Delta x)$:

$$\begin{aligned} f(x - \Delta x) &= f(x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pm \frac{(\Delta x)^n}{n!} \right] \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \quad \begin{array}{l} + : \text{pour } n \text{ pair} \\ - : \text{pour } n \text{ impair} \end{array} \end{aligned} \quad (\text{II-45})$$

On tire :

$$= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pm \frac{(\Delta x)^n}{n!} \right] \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

+ : pour n pair
- : pour n impair

On tire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - D x)}{D x} + O(D x) \tag{II-46}$$

(II-46) est appelée "approximation régressive de $\frac{\partial f}{\partial x}$ de l'ordre de Δx ."

On soustrait de (II-42) l'équation (II-45) et on obtient:

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

On tire alors:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + D x) - f(x - D x)}{2 D x} + O(D x)^2 \tag{II-47}$$

Cette équation est dite "l'approximation centrée de $\frac{\partial f}{\partial x}$ de l'ordre de $(\Delta x)^2$ ".

De la même manière que précédemment, une forme approchée de dérivations d'ordre supérieur peut être donnée pour l'ordre 2 on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \tag{II-48}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x) + 2f(x) - f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \tag{II-49}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \tag{II-50}$$

Ces trois équations représentent respectivement une approximation progressive, centrée et régressive de $\frac{\partial^{2r}}{\partial x^2}$ de l'ordre de Δx , $(\Delta x)^2$ et Δx .

II - 5 - 3 - DEVELOPPEMENT POLYNOMIALE :

Une seconde procédure pour l'approximation des dérivés, est de représenter la fonction f sous forme polynomiale. Les coefficients du polynôme sont calculés à partir d'un certain nombre de points qu'on choisit dépendaient du degré du polynôme d'approximation. Considérons par exemple le polynôme du second ordre suivant :

$$f(x) = Ax^2+Bx + C \tag{II-51}$$

Choisissons alors trois points , $x_i = 0, x_{i+1} = \Delta x, x_{i+2} = 2\Delta x$ où la fonction prend les valeurs $f(x_i) = f_i, f(x_{i+1}) = f_{i+1}, f(x_{i+2}) = f_{i+2}$ alors :

$$f_i = Ax_i^2 + Bx_i + C = C$$

$$f_{i+1} = Ax_{i+1}^2 + Bx_{i+1} + c = A(\Delta x)^2 + B(\Delta x) + C$$

$$f_{i+2} = Ax_{i+2}^2 + Bx_{i+2} + C = A(2\Delta x)^2 + B(2\Delta x) + C.$$

d'où on C = f_i

$$B = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2(\Delta x)}$$

$$A = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{2(\Delta x)^2}$$

En faisant la première dérivée de f suivant x on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + B$$

au point $x_i = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = B$

$$\text{donc } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2\Delta x} \tag{II-52}$$

Ce qui est identique à une précision du second ordre de l'expression progressive obtenue par développement en série de Taylor. De même la dérivée seconde de f , peut être approximée :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2}$$

II-5-4- EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES :

Les approximations aux différences finies traitées précédemment sont utilisées pour remplacer les dérivées apparaissant dans les équations aux dérivées partielles.

Considérons un exemple contenant une dérivée en fonction du temps et des dérivées en fonction de deux variables spatiales x et y de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad \alpha = \text{cte} \quad (\text{II-53})$$

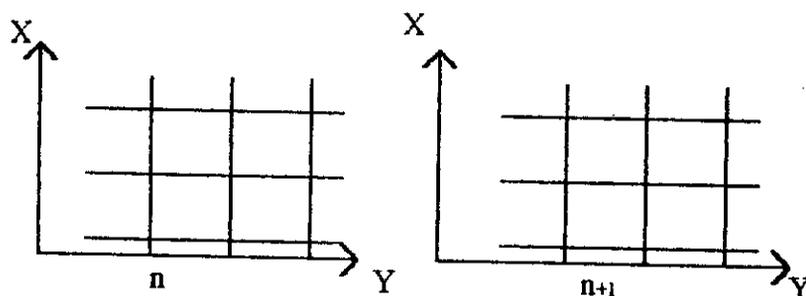
Il est nécessaire d'approximer cette équation par une équation aux différences finies.

Les indices i et j sont utilisés pour représenter les coordonnées cartésiennes x et y , et l'exposant n est mis pour représenter le temps.

La valeur de f , à l'instant n est connue, et celle à l'instant $(n+1)$ est recherché.

Pour la formulation explicite une résolution directe peut être obtenue, vue qu'une seule inconnue est mise en jeu, pour chaque point de la grille (voir fig II-5). Alors que pour la formulation implicite nous devons écrire une équation aux différences finies pour tout les points de la grille pour obtenir le même nombre d'équation que d'inconnues et les résoudre simultanément.

Evidemment la solution par formulation explicite est plus simple que celle par formulation implicite, cependant cette dernière est plus stable que la première :



Fig(II-5)

II-5-5- APPROXIMATION PAR LES DIFFERENCES FINIES DES DERIVEES PARTIELLES MIXTES :

L'approximation des dérivées partielles mixtes peut être obtenue de deux manières différentes :

II-5-5-1 - Développement en série de Taylor :[DST]

Considérons le terme $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, le développement de f en série de Taylor pour les 2 variables est :

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\Delta x \Delta y}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O((\Delta x)^3, (\Delta y)^3)$$

Utilisant les indices (i) et (j) pour représenter le point de grille xy on a

$$f_{i+1, j+1} = f_{i, j} + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O((\Delta x)^3, (\Delta y)^3)$$

Similairement on obtient:

$$f_{i-1, j-1} = f_{i, j} - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O((\Delta x)^3, (\Delta y)^3)$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} - \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O((\Delta x)^3, (\Delta y)^3)$$

L'équation (II-53) peut donc être exprimé séparément aux instants (n) et (n+1) ce qui fait que deux formulations sont possibles. D'abord considérons l'équation (II-53) à l'instant (n) pour ce cas une approximation progressive sur la variable temps est utilisée :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{II-54}$$

De l'équation (II-49) on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2$$

D'où découle la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] \\ + O(\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2) \end{aligned} \tag{II-55}$$

Pour un deuxième cas, considérons l'équation (II-53) à l'instant (n+1) pour cela une approximation régressive en temps est utilisée et on obtient de la même manière que précédemment la formulation

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] \\ + O(\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2) \end{aligned} \tag{II-56}$$

les équations aux différences finies (II-55) et (II-56) ainsi obtenues représentent des formulations explicite et implicite respectivement, une évidente distinction entre ces deux équations est le nombre d'inconnus apparaissant dans chaque équation, il est aisé de

remarquer que (II-55) ne contient qu'une inconnue. (f_{ij}^{n+1}) alors que (II-56) en contient cinq donc les procédures de résolution basées sur les deux formulations sont différentes et :

$$f_{i-1,j+1} = f_{ij} - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} - \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O((\Delta x)^3, (\Delta y)^3)$$

Toutes ces équations nous amènent à écrire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} + O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$$

Une approximation d'ordre plus élevée peut être obtenue en suivant la même démarche

II-5-5-2 - Approximation de chaque dérivée à part :

Considérons de nouveau la dérivée :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

En utilisant l'approximation centrale de l'ordre de

$(\Delta y)^2$ pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ on peut écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) + O(\Delta y)^2 = \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{j+1} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{j-1} \right) + O(\Delta y)^2$$

Appliquons maintenant l'approximation centrale pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ de l'ordre $(\Delta x)^2$:

CHAPITRE III

OBSTACLES DANS LES LIGNES DE TRANSMISSION

III-1 - INTRODUCTION :

Dans un guide, à la fréquence de travail, certains modes se propagent d'autres au contraire s'ils existent sont évanescents.

La notion théorique de lignes uniformes peut s'appliquer aux guides. Les causes de non uniformité sont multiples. L'obstacle perturbe en général l'uniformité de la ligne.

Seul le mode dominant se propagerait en son absence. Tout obstacle engendrera des modes d'ordre supérieurs, puisque sa présence impose des conditions limites supplémentaires auxquelles devront satisfaire les champs électromagnétiques. Les caractéristiques du mode dominant sont déterminées par des conditions aux limites indépendantes de l'obstacle.

Les modes d'ordre supérieurs créés par l'obstacle devront satisfaire les nouvelles conditions aux limites. La symétrie éventuelle et la géométrie de l'obstacle caractériseront aussi les modes ainsi engendrés. Divers types intéressants d'obstacles seront étudiés.

III - 2 - ANALYSE D'OBSTACLES : [1]

Tout obstacle peut être représenté par un quadripôle. La figure (III-1-a) montre un obstacle symétrique par rapport à la section T. La figure (III-1-b) montre le schéma équivalent de cet obstacle. Dans le cas d'un objet symétrique, les Z_b sont différents, il est alors préférable de choisir deux plans de référence et pour le cas d'obstacles sans pertes, les impédances Z se réduisent à des réactances jX .

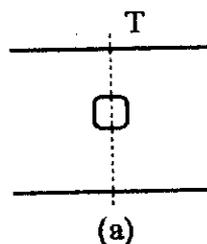


Fig (III-1-a) - Obstacle symétrique dans un guide d'ondes

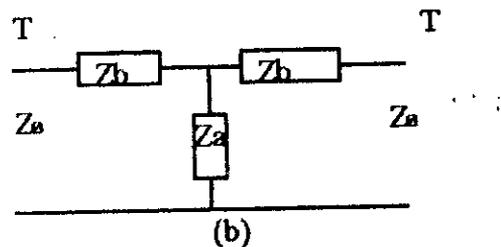


Fig (III-1-b) - Circuit équivalent de l'obstacle

Il est alors nécessaire de définir les excitations et de donner les formules des champs correspondant. Ces excitations sont assurées par des sources de courant électrique ou magnétique.

Pour une excitation du mode dominant du côté des $Z < 0$ les champs électriques et magnétiques sont donnés par :

$$\begin{aligned}\vec{E}t^{(1)} &= A e^{-j\beta z} \vec{e} \\ \vec{H}t^{(1)} &= \frac{A}{Z_0} e^{-j\beta z} \vec{h}\end{aligned}\quad (\text{III-1})$$

Si un conducteur magnétique parfait est placé à travers une section ($Z=0$) une réflexion totale du champ incident donne (III-2) :

$$\begin{aligned}\vec{E}t^{(1)} &= A(e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z})\vec{e} = 2A \cos(\beta z)\vec{e} \\ \vec{H}t^{(1)} &= \frac{A}{Z_0}(e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z})\vec{h} = \frac{2A}{jZ_0} \sin(\beta z)\vec{h}\end{aligned}\quad (\text{III-2})$$

Le symbole (1) dénote la région ($-l < Z < 0$) et dans la région (2) ($Z < -l$) on a :

$$\begin{aligned}\vec{E}t^{(2)} &= B e^{+j\beta z} \vec{e} \\ \vec{H}t^{(2)} &= -\frac{B}{Z_0} e^{+j\beta z} \vec{h}\end{aligned}$$

La continuité du champ E à $Z=-l$ donne : $2A \cos(\beta l) = B e^{-j\beta l}$ est la condition aux limites sur H est :

$$\begin{aligned}\vec{u}_z \times (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}) &= \vec{J}_s \\ \text{donc } \vec{J}_s &= -\frac{2A}{Z_0} e^{j\beta l} \vec{e}\end{aligned}$$

La réaction propre du courant d'excitation à $Z=-l$ est donc :

$$\langle s, s \rangle = \iint \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{2A^2}{Z_0} (1 + e^{2j\beta l}) \tag{III-3}$$

Nous définissant une excitation du guide par deux ondes incidentes, identiques venant l'une de $Z < 0$ et l'autre de $Z > 0$ de l'obstacle, tels que E_t soit maximum et $H_t = 0$ à $Z=0$. Vu la symétrie même le champ magnétique diffracté par l'obstacle est nul à $Z=0$ donc un conducteur magnétique peut être placé au niveau du plan $Z=0$, sans changer la valeur des champs. Ce qui divise le problème en deux parties séparées dont l'une sera représentée par la figure (III-2-a).

L'excitation provient de la source du mode dominant J_s . La figure (III-2-b) représente le circuit équivalent de la figure (III-2-a). Le conducteur magnétique est équivalent à un circuit ouvert et J_s est équivalent à une source de courant I .

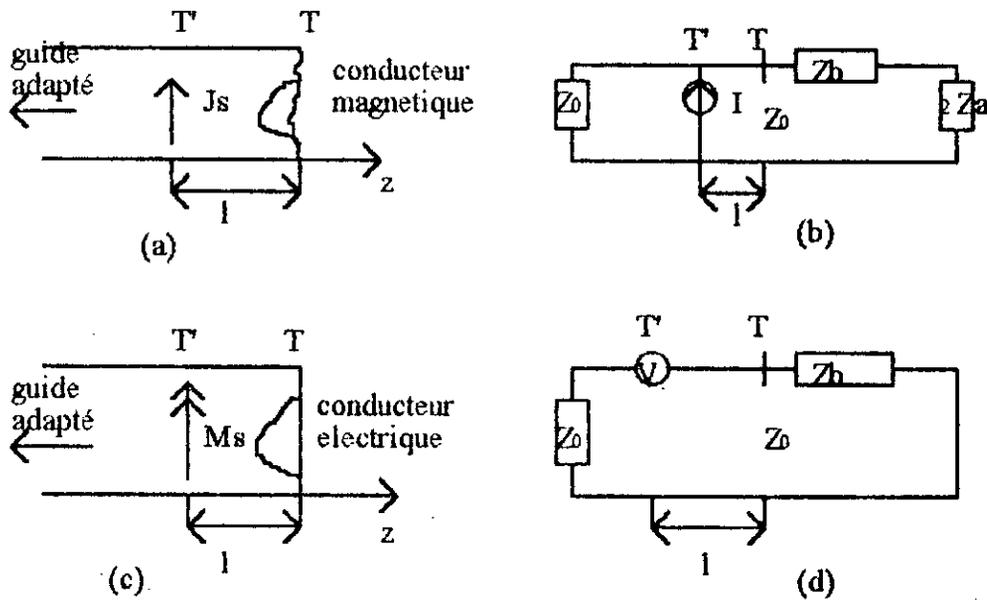


Fig (III-2) a - Excitation (source électrique) , b - Circuit équivalent.

c - Excitation (source magnétique) , d - Circuit équivalent

Le mode dominant devient une onde purement stationnaire dans la région $-l < Z < 0$ de la figure (III-2-a). Si J_s est localisée ou $E_t = 0$, donc avec les formules usuelles de lignes de transmission on a :

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{Z_b + 2Z_a}{Z_0} = -j \tan \beta l \tag{III-4}$$

Pour une source placée à une distance (l) quelconque la réaction totale sur J_s est :

$$\text{Réaction} = \iint \vec{E} \cdot \vec{J} \, ds = \iint (\vec{E}^s + \vec{E}^c) \cdot \vec{J}_s \, ds = \langle s, s \rangle + \langle c, s \rangle \quad (\text{II-5})$$

Où E^s est le champ électrique de J_s seul et E^c est le champ du courant sur l'obstacle seul. Les 2 rayonnants dans le guide d'onde terminent par la paroi magnétique en $Z=0$.

Si on prend (l) tels que la source soit dans une section où $E_t = 0$ alors la réaction précédente s'annule et l'on aura :

$$\langle c, s \rangle = - \langle s, s \rangle = \frac{2A^2}{Z_0} (1 + \exp(2j\beta l)) \quad (\text{III-6})$$

A : est l'amplitude de l'onde incidente.

Prenant A réel et d'après l'équation (III-3) on a :

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle c, s \rangle &= \frac{2A^2}{Z_0} (1 + \cos(2\beta l)) \\ \text{Im} \langle c, s \rangle &= \frac{2A^2}{Z_0} (\sin(2\beta l)) \end{aligned}$$

En utilisant l'identité : $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

L'équation (III-4) devient : $\frac{X_b + 2X_a}{Z_0} = - \frac{\text{Im} \langle c, s \rangle}{\text{Re} \langle c, s \rangle}$ (III-7)

Ici nous avons remplacés Z_a et Z_b par jX_a et jX_b respectivement. Par réciprocity on a :

$$\langle c, s \rangle = \langle s, c \rangle = \iint_{\text{obstacle}} \vec{E} \cdot \vec{J} \, ds \quad (\text{III-8})$$

E^c est le champ créé par la source et J^c le courant dans l'obstacle qui peut être conducteur et diélectrique non magnétique, ou un diélectrique magnétique :

(dans ce dernier cas $-\int H^s \cdot dM^c$ doit s'ajouter à l'expression (III-4) donnant $\langle s,s \rangle [1]$.

Dans le cas où l'objet conducteur est parfait, le courant sur l'obstacle est un courant surfacique J_s^c et $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ sur ces limites, donc : $\vec{n} \times \vec{E}^s = -\vec{n} \times \vec{E}^c$ et :

$$\langle s,c \rangle = -\langle c,c \rangle = -\iint \vec{E}^c \cdot \vec{J}^c \cdot ds \quad (\text{III-9})$$

Où $\langle c,c \rangle$ représente la réaction propre du courant induit sur l'obstacle donc on obtient :

$$\frac{X_b + 2X_a}{Z_0} = -\frac{\text{Im} \langle c,c \rangle}{\text{Re} \langle c,c \rangle} \quad (\text{III-10})$$

Pour avoir une formule stationnaire, on suppose les courants \vec{J}_s^a sur l'obstacle et calculons $\langle a,a \rangle$ sujet à des contraintes :

$$\langle a,a \rangle = \langle c,a \rangle = \langle a,c \rangle \quad (\text{III-11})$$

Sachant que $\vec{n} \times \vec{E}^s = -\vec{n} \times \vec{E}^c$ sur la surface de l'obstacle on a :

$$\langle c,a \rangle = -\langle s,a \rangle \quad (\text{III-12})$$

La formule stationnaire de $\langle c,c \rangle$ devient :

$$\langle c,c \rangle \approx \frac{\langle s,a \rangle^2}{\langle a,a \rangle} \quad (\text{III-13})$$

En assemblant cette équation avec l'équation (III-10) on obtient une représentation de la solution variationnelle du problème. Si le courant d'essai est pris réel alors $\langle s,a \rangle$ est réel, car \vec{E}^s est réel, l'équation (III-13) peut s'écrire :

$$\langle c,c \rangle \approx \left| \frac{\langle s,a \rangle}{\langle a,a \rangle} \right|^2 \langle a,a \rangle \quad (\text{III-14})$$

$$\text{Et l'équation (III-10) devient } \frac{X_b + 2X_a}{Z_0} \approx \frac{\text{Im} \langle a,a \rangle}{\text{Re} \langle a,a \rangle} \quad (\text{III-15})$$

Cette formule est appliquée uniquement lorsque J_s^a est réel, ce qui est usuellement le cas.

Le changement de signe de l'équation (III-10) à l'équation (III-15) est due au fait que \vec{J}_s^c est non réel pour le \vec{E}^s considéré mais il a généralement une phase constante.

Le calcul de X_a et X_b du circuit équivalent de la figure (III-1-b) ne peut être assuré par l'équation (III-13) à elle seule. On a donc besoin d'une seconde équation qu'on déterminera de la manière suivante.

Définissons pour cela une autre excitation du guide par deux ondes incidentes identiques l'une venant de $Z < 0$ et l'autre de $Z > 0$ de l'obstacle, mais cette fois elles seront phasées de manière à ce que \vec{E}_t soit nul et \vec{H}_t soit maximale à $Z=0$. Vue la symétrie, même le champ électrique total diffusé par l'obstacle est nul à $Z=0$, donc un conducteur électrique peut être placé au niveau du plan $Z=0$, sans changer la valeur des champs ce qui divise le problème en deux parties séparées dont l'une sera représentée sur la figure (III-2-c), l'excitation provient de la source du mode dominant M_s qui avec, le conducteur électrique, couvrant la section $Z=0$ et dual à celle de la figure (III-2-a).

Le conducteur électrique est équivalent à un court-circuit. L'analyse du circuit équivalent (III-2-c) se fait de la même manière qu'en (III-2-a). Nous avons pour la source de champ dans la région $-l < Z < 0$:

$$\begin{aligned} \vec{H}_t^s &= 2C \cos(\beta z) \vec{h} \\ \vec{E}_t^s &= -\frac{2C}{jY_0} \sin(\beta z) \vec{e} \end{aligned} \quad (\text{III-16})$$

ou $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ qui est l'admittance caractéristique du mode dominant.

En dualité avec l'équation (III-10) on obtient :

$$\frac{j}{Y_0 Z_b} = \frac{1}{Y_0 X_b} = \frac{\text{Im} \langle c, c \rangle}{\text{Re} \langle c, c \rangle} \quad (\text{III-17})$$

$\langle c, c \rangle$ représente la réaction propre du courant d'obstacle en présence du conducteur électrique au niveau de $Z=0$. Finalement pour obtenir une solution variationnelle, le courant J_s^a sera supposé sur l'obstacle et sa propre réaction sera calculée. Si J_s^a est réel, on a :

$$\frac{1}{Y_0 X_b} \approx \frac{-\text{Im} \langle a, a \rangle}{\text{Re} \langle a, a \rangle} \quad (\text{III-18})$$

III-3- TIGES DANS LES GUIDES :[1]

III-3-1-DEFINITION :

Une forme bien connue et très importante d'obstacles est la tige qui a un obstacle cylindrique d'une certaine section pouvant être placée de différentes manières dans le guide. Chaque disposition de la tige impose des conditions aux limites spécifiques, définissant la nature de l'obstacle (inductif, capacitif).

III-3-2-ETUDE DE TIGES INDUCTIVES PAR LA METHODE DES MOMENTS :[9]

Soit une tige inductive T à l'intérieur d'un guide rectangulaire

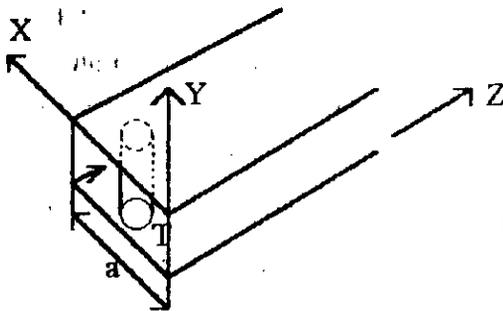
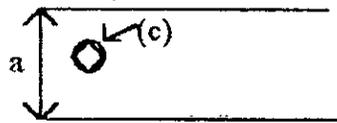


Fig (III-3)



Fig(III-4)

Cette tige prise parfaitement conductrice est uniforme dans la direction (oy). le guide est alimenté à gauche suivant le mode fondamental TE10 , le champ électrique incident sur la tige a donc une seul composante.

$$E_y^i = \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp(-\gamma_1 Z) \quad \text{(III-20)}$$

où

$$\gamma_1 = j \frac{2\pi}{\lambda_{10}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2} \quad \text{(III-21)}$$

$a < \lambda < 2a$ (seul le mode dominant se propage)

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ étant le nombre d'ondes du guide rempli avec un matériau ϵ, μ linéaire, homogène, isotrope et sans pertes (μ et ϵ sont donc réels). Vu la disposition de la tige et son uniformité et la configuration du champ incident, les seuls modes d'ordre supérieurs excités sont (TE_{m0}) qui n'ont eux aussi qu'une composante suivant (y), donc le courant induit dans la tige aura aussi une composante suivant (y). Le champ réfléchi par la tige en fonction de ce courant est donné en utilisant les fonctions de Green comme suit :

$$E_y^s = \sum_{t=1}^p \int_C G(x, z/x', z') J^t(x', z') \cdot dl' \quad \text{(III-21)}$$

Où $G(x, z/x', z') = -\frac{j\omega\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x'\right) e^{-\gamma_n |z-z'|}}{\gamma_n} \quad 0 \leq x \leq a \quad \text{(III-22)}$

et $\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2}$, $dl' = \sqrt{(dx')^2 + (dz')^2} \quad \text{(III-23)}$

J^t étant le courant induit dans la tige t , l'intégrale dans (III-21) étant prise le long de chaque contour C^t de la section transverse de la tige t , $1 \leq t \leq p$ chaque tige étant parfaitement conductrice, on doit avoir la condition de bord.

$$E_y^i + E_y^s = 0 \quad \text{sur } \bigcup_{t=1}^p C^t \quad \text{(III-24)}$$

(III-24) est une équation intégrale pour le courant induit, pour laquelle une solution exacte est rarement possible. Une solution approximative peut être obtenue en remplaçant chaque contour (C^t) par un polygone $\sum = \{s^t_1, s^t_2, \dots, s^t_n\}$ fig (III-4) pour lequel chaque segment est le siège d'un courant constant à déterminer, l'équation intégrale devient donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\exp(-\gamma_1 z) + \sum_{t=1}^p \sum_{u=1}^{g^t} \alpha^t_{1i} \int_{s_i} G(x,z/x',z') dl' = 0 \quad (\text{III-25})$$

$$(x,y) \in \bigcup_{t=1}^p \sum_{i=1}^{g^t} s_i \quad J^t = \sum_{u=1}^{g^t} \alpha^t_{1u}$$

(α^t_{1i}) de (III-25) étant le courant constant inconnu du i ème segment de (\sum^t) la sommation est effectuée le long de s^t_i avec $1 \leq i \leq g^t$, $1 \leq t \leq p$.

L'équation (III-25) doit se vérifier sur l'ensemble des points :

$$M^t = \left\{ (x^t_{v+1/2}, z^t_{v+1/2}) : \left(\frac{x^t_{v+1} + x^t_v}{2}, \frac{z^t_{v+1} + z^t_v}{2} \right) \quad 1 \leq v \leq g^t \right\}$$

$$\text{et } (x^{g^t+1}, z^{g^t+1}) = (x^1, z^1)$$

Nous obtenons pour cela l'équation matricielle du problème :

$$\vec{Z} \vec{I}_1 = \vec{V}_1 \quad (\text{III-26})$$

\vec{Z} étant la matrice $P \times P$ blocs. Ou le bloc (rs) est une matrice $g^r \times g^s$ avec :

$$B^{rs} = \left[- \int_{S^s_u} G(x^r_{v+1/2}, z^r_{v+1/2} / x', z') dl' \right] \quad (\text{III-27})$$

$[I_1]$ et $[V_1]$ sont des vecteurs de (P) segments. Les éléments de (s) et (r) sont donnés par :

$$\vec{I}_1^s = [\alpha_{1u}^s] \quad (\text{III-28})$$

$$\vec{V}_1^s = [\phi_{1v}^s] = \left[\sin\left(\frac{\pi}{a} x^s_{v+1/2}\right) e^{-\gamma_1 z^s_{v+1/2}} \right] \quad (\text{III-29})$$

La résolution de l'équation matricielle (III-26) détermine les courants (α_i) induits dans chaque segments. Cette solution approchée par la méthode des moments utilise les fonctions δ comme fonction de test. Les modes d'ordre supérieurs étant évanescents exponentiellement avec la distance z depuis la tige à une distance suffisamment grande. On ne retrouve que le mode dominant pour lequel à partir des équations (III-21), (III-22) et (III-26) on évalue le coefficient de réflexion à $z=0$ comme suit :

$$\Gamma_1 = -\frac{j\omega\mu}{a\gamma_1} \sum_{l=1}^p \sum_{u=1}^{g'} \alpha'_{1u} \int_{S_u'} \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right) \exp(-\gamma_1 z') dl' \quad (\text{III-30})$$

Le coefficient de transmission du mode dominant est aussi donné à $z=0$ par :

$$T_1 = 1 - \frac{j\omega\mu}{a\gamma_1} \sum_{l=1}^p \sum_{u=1}^{g'} \alpha'_{1u} \int_{S_u'} \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right) \exp(+\gamma_1 z') dl' \quad (\text{III-31})$$

Supposons maintenant le guide alimenté par la droite par le mode TE₁₀ d'amplitude unité le champ incident aura une composante suivant y donnée par :

$$E_y^i = \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp(+\gamma_1 z) \quad (\text{III-32})$$

De la même manière que précédemment on approxime la section de la sonde par un polygone (\sum') dont chaque segment est siège d'un courant (α_{2i}) constant à déterminer. On obtient donc l'équation matricielle :

$$\vec{Z} \vec{I}_2 = \vec{V}_2 \quad \text{avec } E_y^i + E_y^s = 0 \text{ à la sommation suivante.} \quad (\text{III-33})$$

\vec{Z} étant une matrice à $p \times p$ bloc donné par (III-27), \vec{I}_2 et \vec{V}_2 sont des vecteurs définis par :

$$\vec{I}_2^s(i) = [\alpha_{2i}] \quad (\text{III-34})$$

$$V_x(i) = \sin\left(\frac{\pi}{a} x_{v+1/2}^i\right) e^{\gamma_1 z_{v+1/2}^i} \quad (\text{III-35})$$

La résolution de (III-33) détermine le courant induit dans chaque segment d'où on peut tirer le coefficient de réflexion et le coefficient de transmission à $z=0$ comme suit :

$$\Gamma_2 = -\frac{j\omega\mu}{a\gamma_1} \sum_{u=1}^{g'} \sum_{l=1}^p \alpha'_{2u} \int_{S_u'} \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right) \exp(+\gamma_1 z') dl' \quad (\text{III-36})$$

$$T_2 = 1 - \frac{j\omega\mu}{a\gamma_1} \sum_{u=1}^{g'} \sum_{l=1}^p \alpha'_{2u} \int_{S_u'} \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right) \exp(-\gamma_1 z') dl' \quad (\text{III-37})$$

L'effet de la tige sur le mode dominant peut donc être décrit par la matrice de dispersion comme suit :

$$S = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & T_2 \\ T_1 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \quad (\text{III-38})$$

Pour la procédure de Galerkin avec des fonctions rectangulaires utilisées aussi bien comme fonctions de base que comme fonctions de test, il est facile de montrer que la matrice \bar{Z} est symétrique, T_1 et T_2 sont dans ce cas donnés par :

$$T_1 = 1 - \frac{j\omega\mu}{ay_1} I_1^T V_2$$

$$T_2 = 1 - \frac{j\omega\mu}{ay_1} I_2^T V_1$$

L'exposant T indique des vecteurs transposés par conséquent T_1 et T_2 sont égaux, ceci n'est pas le cas quand la procédure (point - matching) est utilisé pour satisfaire les conditions limites. Cependant le module de la différence des coefficients de transmission est très petit donc un coefficient moyen peut être défini comme suit :

$$T_{\text{moy}} = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad \text{d'où la matrice de dispersion de la tige devient :}$$

$$S = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & T_{\text{moy}} \\ T_{\text{moy}} & \Gamma_2 \end{vmatrix}$$

et on peut alors calculer la matrice impédance des tiges pour le mode TE₁₀ relativement à z par :

$$Z = \left(\frac{j\omega\mu}{y_1} \right)_{10} (U + S)(U - S)^{-1} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{vmatrix} \quad (\text{III-39})$$

U étant la matrice identité. Pour un milieu sans pertes et des tiges parfaitement conductrices les éléments de [Z] sont purement imaginaires. Mais le caractère approché de la méthode de calcul fait que les (Z_{ij}) peuvent avoir une partie réelle très faible, et on considère donc seulement la partie imaginaire. Un circuit équivalent correspondant à l'équation (III-39) peut être donnée par :

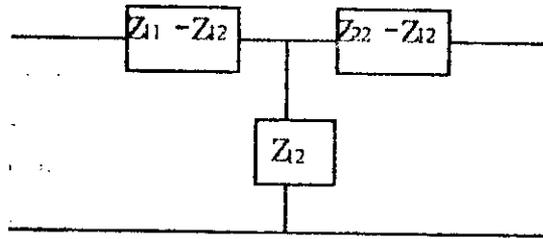


Fig (III-5) : Circuit équivalent d'une tige inductive

III-3-3-CALCUL DE LA MATRICE $\bar{\bar{Z}}$:

Le calcul des éléments de la matrice $\bar{\bar{Z}}$ de (III-26) et (III-33) constitue une partie importante de la solution par la méthode des moments. Leur évaluation efficiente est donc déterminante pour sa réussite. Un élément typique de la matrice $\bar{\bar{Z}}$ est donné par (III-27) :

$$B(r,s) = - \int_{S_0^2} G(x_v, z_v / x', z') dl' \quad (x_v', z_v') = (x_v + 1/2 l', z_v + 1/2 l')$$

Tout d'abord commençons par mettre la fonction de Green dynamique en terme de la fonction de Green statique dont la forme analytique est connue à laquelle on ajoute un terme correctif il vient en posant

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2} = j \frac{\pi}{a} \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - 1} = j \frac{\pi}{a} \beta_1 \\ \gamma_n &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2} = j \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 - \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2} = \frac{\pi}{a} \beta_n \quad (n \geq 2) \end{aligned} \tag{III-40}$$

$$-G(x_v, z_v / x', z') = \frac{\omega\mu}{\pi\beta_1} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_v\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j\left(\frac{\pi}{a}\right)|z_v - z'| \beta_1} + \frac{j\omega\mu}{\pi} G' \tag{III-41}$$

$$G' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{a} x_v\right) \sin\left(n \frac{\pi}{a} x'\right) e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)|z_v - z'| \beta_n}}{\beta_n}$$

$$G' = -\sin\left(\frac{\pi}{a}x_v\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x'\right)e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)|z_v-z'|} - \frac{\pi}{\mu}G^{St} + G'' \quad (\text{III-42})$$

G^{St} est la fonction de Green statique donnée par :

$$G^{St}(x_v, z_v/x', z') = -\frac{\mu}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x_v\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)|z_v-z'|} \quad (\text{III-43})$$

qui peut être obtenue en posant $k=0$ et en supprimant le facteur $(j\omega)$ dans l'équation (III-29) et G'' est un terme de correction donné par :

$$G'' = \sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x_v\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right) \left[\frac{e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)|z_v-z'|\beta_n}}{\beta_n} - \frac{e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)|z_v-z'|}}{n} \right] \quad (\text{III-44})$$

La somme infinie dans l'équation (III-43) est calculée pour donner :

$$-\frac{\pi}{\mu}G^{St} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\log \left(\frac{1 - e^{-\frac{\pi}{a}(j|x_v+x'|+|x_v-x'|)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}(j|x_v-x'|+|x_v-x'|)}} \right) \right] \quad (\text{III-45})$$

Le terme correctif G'' est dominé par une série convergente due à son terme général positif tendant exponentiellement vers zéro. En combinant les équations (III-41), (III-43) et (III-44) on obtient une nouvelle forme de G :

$$\begin{aligned}
 -G(x_v, z_v/x', z') &= \frac{\omega\mu}{\pi\beta_1} \sin\left(\frac{\pi}{a}x_v\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x'\right)e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)|z_v-z'|} \beta_1 \\
 &+ \frac{j\omega\mu}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{a}x_v\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x'\right)e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)|z_v-z'|} \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)(j|x_v'+x'|+|z_v'-z'|)}}{1 - e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)(j|x_v'-x'|+|z_v'-z'|)}} \right) + G'' \right) \quad \text{(III-46)}
 \end{aligned}$$

L'intégration est maintenant calculée numériquement avec G donné par (III-46). A part le terme $(j\omega G^{st})$ l'intégration des termes composants G se fait sans difficulté et n'importe quelle règle d'intégration peut être utilisée, cette règle d'intégration donnée est donnée par :

$$\int_{sv} T dl \approx \frac{L^s_v}{2} \sum_{i=1}^N q_i T(x'_v, z'_v) (1 - p_i)x^s_{v,i} + p_i x^s_{v,i+1} (1 - p_i)z^s_{v,i} + p_i z^s_{v,i+1} \quad \text{(III-47)}$$

$$\text{avec } L^s_v = \sqrt{(x^s_{v,i+1} - x^s_{v,i})^2 + (z^s_{v,i+1} - z^s_{v,i})^2} \quad \text{(III-48)}$$

N est l'ordre de la règle d'intégration Gauss-Radau ie celui de la sommation, les q_i sont les coefficients et les p_i localisent leurs abscisses . T peut prendre n'importe quel terme de l'équation (III-46) excepté $(j\omega G^{st})$.

Les paramètres d'une règle d'intégration Gauss de 8 points.

Tableau (III-1)

	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.0	0.06412993	0.20414991	0.39535039	$1-p^4$	$1-p^3$	$1-p^2$	$1-p^1$
q_i	0.03571428	0.21070422	0.34112270	0.41245880	q^4	q^3	q^2	q^1

Pour tout élément en dehors de la diagonale de la matrice \bar{Z} , le terme $j\omega G^{st}$ peut être intégré via (III-46) alors les éléments de la diagonale nécessitent une plus grande attention car ils présentent une singularité logarithmique au point (x'_v, z'_v) dans un petit voisinage $((x'_v - \delta x, z'_v - \delta z), (x'_v + \delta x, z'_v + \delta z))$, $\delta x, \delta z > 0$ autour (x'_v, z'_v)

L'approximation suivante est validée.

$$\operatorname{Re}(\log(1 - e^{-\frac{\pi}{a}(|x_v' - x'| + |z_v' - z'|)})) \approx \operatorname{Re}(\log(\frac{\pi}{a}(|x_v' - x'| + |z_v' - z'|))) = \log(\frac{\pi}{a})\rho \quad (\text{III-49})$$

ou

$$\rho = \sqrt{(x_v' - x')^2 + (z_v' - z')^2} \quad (\text{III-50})$$

L'intégrale de la fonction singulière $j\omega G^{S^1}$ peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{S_s^u} j\omega G^{S^1} dl' &= -\frac{1}{2} \int_{S_s^u} \log_e \left(\frac{\pi}{a} \rho\right) dl' + \int_{S_s^u} \left(j\omega G^{S^1} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{a} \rho\right)\right) dl' \\ &= -\frac{L_s^u}{2} \left(\log\left(\frac{\pi}{a} \frac{L_s^u}{2}\right) - 1\right) + \int_{S_s^u} \left(j\omega G^{S^1} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{a} \rho\right)\right) dl'. \end{aligned}$$

Cette intégrale ne présente aucune singularité en (x_v', z_v') et peut donc se calculer.

III-4-DIAPHRAGMES DANS LES GUIDES :

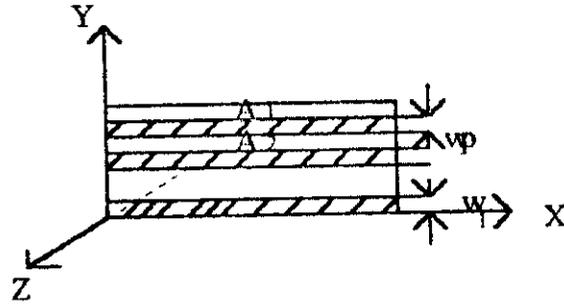
III-4-1- INTRODUCTION :

Un autre type d'obstacle aussi important à étudier que les tiges est l'obstacle mince ou diaphragme. C'est une plaque métallique parfaitement conductrice placée dans un plan transverse du guide. La disposition de cette lame désigne le type d'obstacle. Une lame verticale forme un obstacle inductif, par contre une lame horizontale forme un obstacle capacitif.

III-4-2- ANALYSE DES DIAPHRAGMES PAR LA METHODE DES MOMENTS:

[10]

La figure (III-6) représente des diaphragmes capacitifs à l'intérieur d'un guide rectangulaire, ils peuvent être de largeur quelconque. Le guide est supposé sans pertes et ne propage que le mode dominant TE₁₀.



Fig(III-6) : Diaphragmes capacitifs dans un guide rectangulaire

Le théorème d'équivalence est utilisé pour diviser le problème en deux parties différentes fig (III-7). Les ouvertures sont fermées par un conducteur électrique parfait où un courant magnétique surfacique équivalent $+M(x,y)$ circule à $z=0$, il est donné par :

$$\vec{M} = \hat{Z} \times \vec{E} \quad (III-51)$$

\hat{Z} étant un vecteur unitaire normale à l'ouverture E le champ électrique dans les ouvertures du problème original pour conserver la continuité du champ électrique à $z=0$, un courant $-M(x,y)$ doit exister à $z=0^+$. La condition aux limites sur le champ magnétique transverse à $z=0$ donne :

$$H_t^{(1)}(M) + 2H_t^{inc} = H_t^{(2)}(-M) \quad \text{sur } A \quad (III-52)$$

(1): désigne le région (1) $z < 0$

(2): désigne la région (2) $z > 0$

$$A = \bigcup_{i=1}^q A_i$$

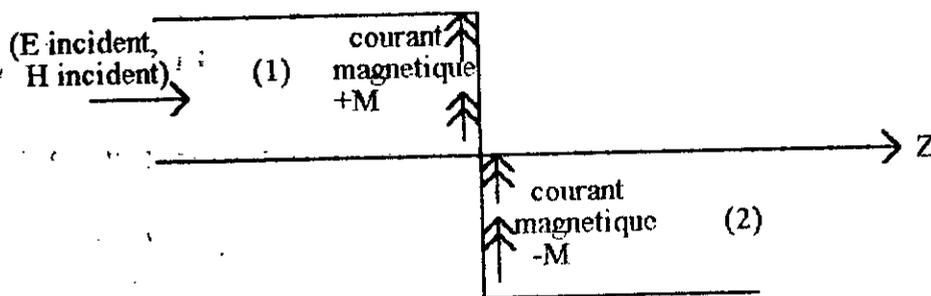


Fig (III-7)

$H_t^{(1)}$ représente le champ magnétique créé par le courant $+M$ alors que $H_t^{(2)}(-M)$ représente le champ magnétique créé par le courant $(-M)$.

Les régions (1) et (2) étant identique. L'équation (III-52) devient :

$$H_t(M) + H_t^{inc} = 0 \text{ sur } A \tag{III-53}$$

Cette dernière équation peut être résolue numériquement en utilisant la méthode des moments :

$$M = \sum_{j=1}^N V_j M_j \tag{III-54}$$

Où les (V_j) sont les coefficients complexes à déterminer et les M_j sont des fonctions de base du développement.

Les fonctions de test (W_i) seront choisi comme étant des impulsions de Dirac (Point Matching) c'est-à-dire que l'équation doit être vérifiée en un certain nombre de points pour pouvoir trouver les coefficients (V_j) . Nous aboutissons donc à un système d'équation représenté par l'équation matricielle suivante :

$$[Y] \vec{V} = \vec{I} \tag{III-55}$$

$$\text{Où } [Y] = [\langle -W_i, H_t(\pi_j) \rangle] \tag{III-56}$$

$$\vec{I} = [\langle W_i, H_t^{inc} \rangle] \tag{III-57}$$

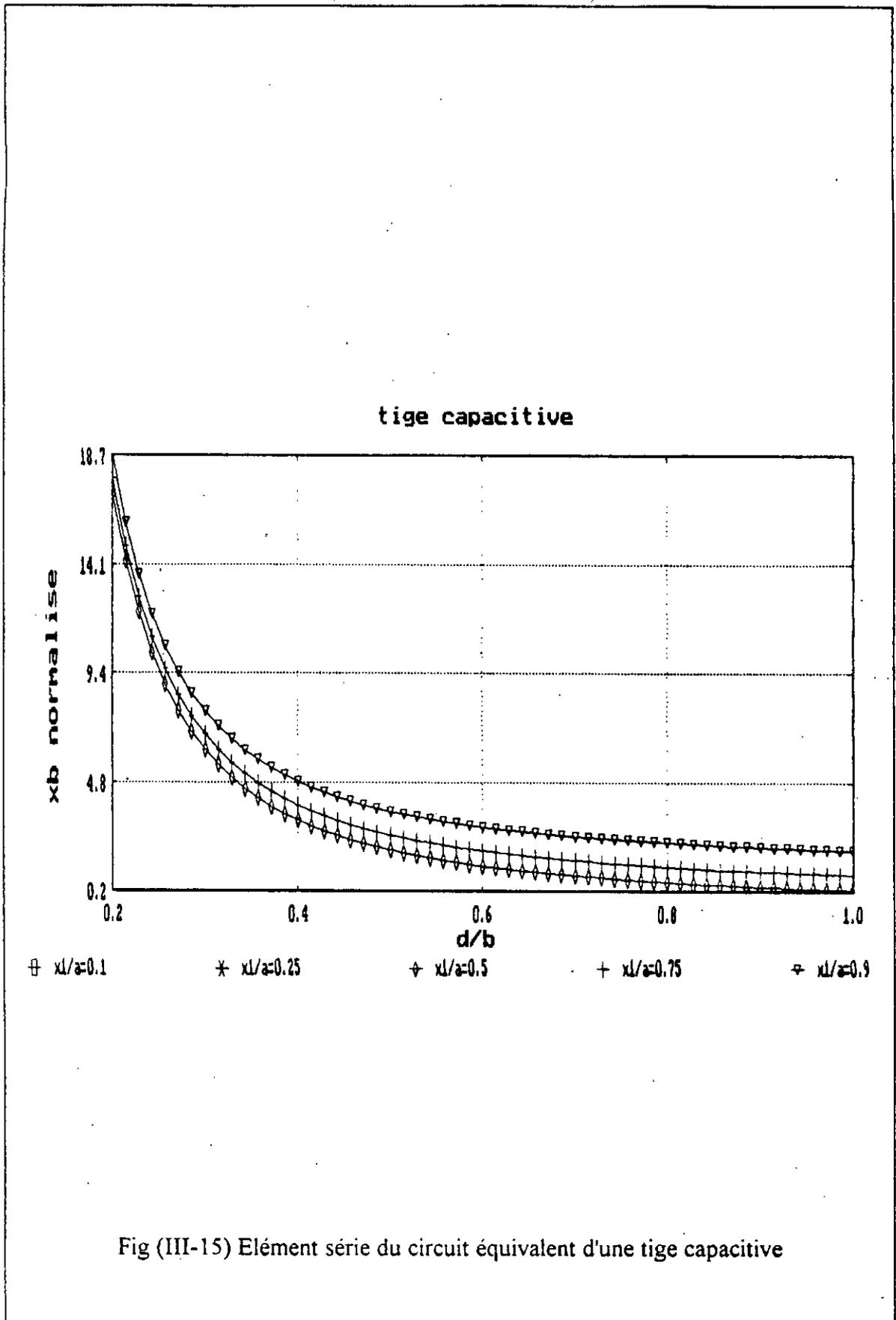
$$\vec{V} = [V_j]_{N \times 1} \tag{III-58}$$

La solution du système (III-55) donne le courant équivalent M

III-4-3- EVALUATION DES ELEMENTS DE LA MATRICE $[Y]$:

Les composantes transverses du champ produit par une fonction de base simple du développement (M_j) peut être donné par : (écrit dans la forme modale suivante)

$$E_t(\pi_j) = \sum_{s=1}^N C_{js} e^{k_s z} e_s \tag{III-59}$$



III-5-1-CAS DES IRIS :

Les figures (III-16) et (III-17) montrent les courbes de variation de la susceptance équivalente normalisée par rapport à l'admittance caractéristique du mode dominant d'un iris capacitif symétrique et asymétrique respectivement en fonction de la largeur normalisée de l'iris par rapport à la longueur a du guide. Ces courbes obtenues par la méthode variationnelle concordent assez bien avec celles données par [10]. Elles mettent clairement en évidence le caractère capacitif de ces obstacles, en effet la valeur de la susceptance augmente proportionnellement avec la fréquence.

Aussi, on remarque que des cas particuliers sont vérifiés par ces courbes, par exemple pour ($d/b=0$) l'obstacle est équivalent à un court-circuit, alors que pour ($d/b=1$) il est équivalent à un circuit ouvert dans le schéma équivalent donné (absence de conducteur transverse), ceci est confirmé par les courbes obtenues qui donnent b tend vers l'infini pour ($d/b=0$) et $b=0$ pour ($d/b=1$). L'iris horizontal est donc capacitif et par calcul [5] on trouve :

$$b \approx \left(\frac{4b}{\lambda g}\right) \ln \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi d}{2b}\right)$$

L'iris horizontal asymétrique donne :

$$b \approx \left(\frac{8b}{\lambda g}\right) \ln \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi d}{2b}\right)$$

Cette même méthode (variationnelle) appliquée aux iris inductifs symétriques et asymétriques donne des résultats très satisfaisants, ceci est montré par les figures (III-18), (III-19), (III-20), (III-21) et (III-22). Pour ce cas, on remarque que la susceptance équivalente diminue avec l'élévation de la fréquence, donc l'obstacle est bien inductif. L'influence de la position du centre de l'iris est montré dans les figures précédentes (III-19), (III-20) et (III-21) correspondant respectivement à $\frac{x_1}{a} = 0.4$, $\frac{x_1}{a} = 0.3$, $\frac{x_1}{a} = 0.2$.

La susceptance b normalisée vue sur la figure (III-18) est donnée par : [5]

$$b \cong -\left(\frac{\lambda g}{a}\right) \cot^2\left(\frac{\pi d}{2a}\right)$$

Pour un iris vertical asymétrique figure (III-19), (III-20) et (III-21) on a :

$$b \cong -\frac{\lambda g}{a} \cot^2\left(\frac{\pi d}{2a}\right) \left[1 + \sec^2\left(\frac{\pi d}{2a}\right) \cot^2\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\right]$$

Lorsque l'ouverture a a un côté commun avec la paroi cette relation devient :

$$b \cong -\frac{\lambda g}{a} \cot^2\left(\frac{\pi d}{2a}\right) \left[1 + \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi d}{2a}\right)\right]$$

$$H_z(r, j) = \sum_{s=1}^K C_{js} Y_s e^{-\gamma_s z} \vec{e}_s \times \vec{e}_r \tag{III-60}$$

K étant le nombre de modes utilisés pour approximer le champ. C_{js} sont les amplitudes modales, \vec{e}_s sont les vecteurs modes normalisés... sont les constantes de propagation et Y_s les admittances caractéristiques modales. A partir des équations (III-57) et (III-49) les amplitudes C_{js} sont données par :

$$C_{js} = \iint \vec{H}_j \cdot \vec{z} \times \vec{e}_s \, ds \tag{III-61}$$

Ce qui détermine le champ $H(M_j)$ par l'équation (III-60) et donc les éléments de la matrice $[Y]$ par l'équation (III-56) soit $Y_{ij} =$ où les coefficient B_{is} sont données par (III-61) avec M_j remplacée par W_i

III-4-4- EVALUATION DU VECTEUR D'EXCITATION [I] :

Supposons que seul le mode dominant d'amplitude unite est incident en $Z=0$ le champ magnétique transverse pour l'onde incidente s'écrit :

$$\tag{III-62}$$

En injectant l'équation (III-61) dans (III-56) on obtient directement les éléments du vecteur $[I]$ $I_i = Y_0 B_{i0}$

III-4-5- DETERMINATION DU CIRCUIT EQUIVALENT :

Il est intéressant de représenter l'obstacle par un circuit équivalent à éléments localisés. Cette classe d'obstacle peut être représentée simplement par une susceptance normalisée shunt sur une ligne de transmission.

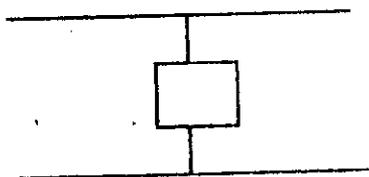


Fig (III-8) Circuit équivalent

Cette susceptance shunt normalise se calcule par :

$$j\bar{B} = -\frac{2\Gamma_0}{1+\Gamma_0} \quad (\text{III-63})$$

Γ_0 étant le coefficient de réflexion du mode dominant à $z=0$ donné par :

$$\Gamma_0 = -1 + \sum_{j=1}^N V_j C_{j0} \quad (\text{III-64})$$

Le circuit équivalent est donc déterminé et on peut étudier le comportement de la discontinuité la fonction est maintenant caractérisée par la matrice de dissipation

$$[S] = \begin{vmatrix} \Gamma_0 & 1+\Gamma_0 \\ 1+\Gamma_0 & \Gamma_0 \end{vmatrix}$$

La méthode présentée a été appliquée à divers problèmes et le résultat comparé avec les données existantes. Une procédure de GALERKIN a été utilisée avec des fonctions triangles (en toit) pour le développement et le test

III-4-6- ANALYSE DES DIAPHRAGMES PAR LA METHODE VARIATIONNELLE [1]

En utilisant le développement fait précédemment dans (III-2) la susceptance de l'élément shunt peut être donnée par la formule stationnaire :

$$\frac{B}{2Y_0} \approx \frac{\text{Im} \langle a, a \rangle_m}{\text{Re} \langle a, a \rangle_m} \quad (\text{III-65})$$

L'indice (m) indique que le produit $\langle a, a \rangle_m$ est pris pour un courant magnétique équivalent (M) dans l'ouverture remplie par le conducteur on a fig(III-9)

$$\langle a, a \rangle_m = -\iint H^2 \cdot M_s^a ds \quad (\text{III-66})$$

$$M_s^a \text{ étant relié au champ } E \text{ tangentielle par la relation : } M_s^a = \hat{u}_z \times E \quad (\text{III-67})$$

L'équation (III-64) est donc une formulation en champ.

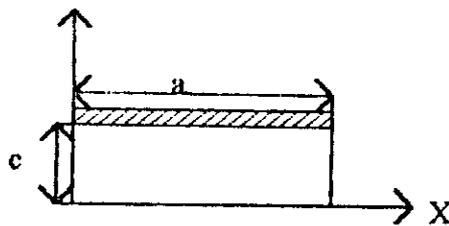


Fig (III-9) Diaphragme capacitif dans un guide rectangulaire.

de (III-66) et (III-67) on a :

$$\langle a, a \rangle_m = - \iint H^2 \cdot M_s^2 ds = \iint -E \times H \cdot u_z ds = (- \iint E \times H^* \cdot u_z ds)^* = p^*$$

(E est réel)

$$\text{Si on pose } E y^2 |_{z=0} = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) & y < c \\ 0 & y > c \end{cases}$$

Dans l'ouverture l'équation précédente devient :

$$\langle a, a \rangle_m = p^* = |V|^2 Y_a = |V|^2 \left(Y_0 \frac{a}{2b} + jB_a \right)$$

ou Y_a est l'admittance d'ouverture. En remplaçant ceci dans l'équation (III-65) nous obtenons :

$$\frac{B}{Y_0} \approx \frac{4b}{a} \frac{B_a}{Y_0} = \frac{8b}{\lambda g} \left(\frac{\lambda g B_a}{2a Y_0} \right) \quad (\text{III-68})$$

B_a étant la partie imaginaire de Y_a donné par :

$$B_a = \frac{2a}{\lambda g Z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi c}{b}\right)}{\left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2 \sqrt{n^2 - \left(\frac{2b}{\lambda g}\right)^2}} \quad (\text{III-69})$$

Z_0 impédance caractéristique du mode dominant.

Un traitement plus général du problème se fait comme suit : Le champ tangentiel peut être donné sous la forme de :

$$E_y^2 \Big|_{z=0} = \begin{cases} f(y) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & y < c \\ 0 & y > c \end{cases} \quad \text{(III-70)}$$

ce qui donne le produit intérieur suivant :

$$\langle a, a \rangle_m = P^* = \frac{ab}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_n} (Y_0)_{1n} |E_{1n}|^2$$

ou (E_{1n}) sont des coefficients de Fourier donné par :

$$E_{1n} = \frac{\epsilon_n}{b} \int_0^c f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Où $\epsilon_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n>0 \end{cases}$ Nombre de Neuman

Les admittances caractéristiques $(Y_0)_{1n}$ des modes TE_{1n} sont :

$$(Y_0)_{1n} = \frac{j2bY_0}{\lambda g \sqrt{n^2 - \left(\frac{2b}{\lambda g}\right)^2}}$$

Y_0 et λg correspondent au mode dominant (impédance caractéristique réelle car il est le seul susceptible de se propager) de là l'équation (III-65) devient :

$$\frac{B}{2Y_0} \approx \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |Y_0|_{1n} |E_{1n}|^2}{2Y_0 |E_{10}|^2}$$

qui peut être écrite sous une forme plus développée comme suit :

$$\frac{B}{Y_0} = \frac{8b}{\lambda g} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - (\frac{2b}{\lambda g})^2}}}{\left[\int f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \right]} \left[\int f(y) dy \right]^2$$

qui est une formule stationnaire en terme de champ d'ouverture pour le diaphragme capacitif. Cette solution sera exacte pour un bon choix de $f(y)$ (la solution donnée par l'équation (III-61) a été obtenu pour le choix $f(y) = 1$) qui donner un champ quasi-statique. Une approximation meilleure de B/y_0 peut être obtenue en choisissant mieux $f(y)$ ou en appliquant la procédure de RITZ. Une solution quasi-statique du problème est :

$$f(y) = \frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi c}{2b}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi y}{2b}\right)}} \quad \text{qui possède un point singulier en } y=c$$

III-5- INTERPRETATION DES GRAPHES :

III-5-1-CAS DES TIGES :

La méthode des moments, appliquée à une tige inductive centrée, aboutie à des résultats similaires à ceux obtenus par l'application de la méthode variationnelle et concordent bien avec ceux donnés par [9]. Ces résultats sont montrés par les figures (III-10), (III-11) pour la méthode des moments et (III-12), (III-13) pour la méthode variationnelle.

La figure (III-12) donne la variation de l'élément shunt du circuit équivalent en fonction du diamètre normalisé de la tige. Des courbes correspondantes à plusieurs positions de cette dernière montrent la symétrie de son comportement par rapport au centre du guide. L'élément série de ce même circuit est donné par la figure (III-13).

La figure (III-10) montre l'influence de la fréquence sur la valeur de l'élément shunt (x_a) d'un circuit équivalent d'une tige centrée (tout en restant dans des fréquences où seul le mode dominant se propage). On peut remarquer que la variation de fréquence dans des intervalles relativement réduits n'apporte qu'un très petit changement sur la valeur de (x_a), ceci est confirmé par la figure (III-11) qui donne l'influence de la fréquence sur la

valeur de l'élément série (x_b) du circuit équivalent. Pour trois fréquences différentes, les courbes sont confondues jusqu'au point d'abscisse ($d/a=0.35$) au delà de cette valeur, une légère séparation apparaît.

Les courbes des figures (III-12) et (III-13) sont obtenues à partir des équations suivantes : [5]

$$\bar{x}_b = \frac{a}{\lambda g} \left(\frac{\pi d}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{d^2}{16x_1^2} \right)^{-1} \sin^2(\theta)$$

$$\bar{x}_a = \bar{x}_0 + \frac{\bar{x}_b}{2} - \left(\frac{a\pi^2 d^2}{8\lambda g} \right) \operatorname{cosec}^2 \theta \left\{ \frac{1}{\lambda_0^2} + \left(\frac{\operatorname{scot} \theta - s'}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{d^2}{16x_1^2} \right)^{-1} \right\}$$

$$\text{où } \bar{x}_0 = \frac{as}{2\lambda g} \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$s = \ln \left[\frac{4a}{\pi d} \sin \theta \right] - 2 \sin^2 \theta + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin^2(m\theta)}{m} \left(\left(1 - \left(\frac{2a}{m\lambda_0} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 \right)$$

$$s' = \frac{1}{2} \cot \theta - \sin 2\theta + \sum_{m=2}^{\infty} \sin(2m\theta) \left(\left(1 - \left(\frac{2a}{m\lambda_0} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 \right)$$

$$\frac{a}{\lambda g} = \left(\left(\frac{2a}{\lambda_0} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi x_1}{a}$$

Ces formules sont d'une précision de quelques pourcents pour $d/a < 0.1$ et $0.2 < x_1/a < 0.8$. Ce qui explique la différence des courbes pour des positions symétriques par rapport au centre du guide d'onde figure (III-13) (pour $d/a > 0.2$).

Ceci montre un avantage très précieux de la méthode des moments qui n'a pratiquement pas de limitation sur le diamètre de la tige. Des tiges épaisses peut être traitées par cette méthode.

La figure (III-14), (III-15) donnent les éléments shunt et série du circuit équivalent d'une tige capacitive. Ces courbes sont obtenues par l'application des formules suivantes [5]:

celle-ci supposant $d \ll b$

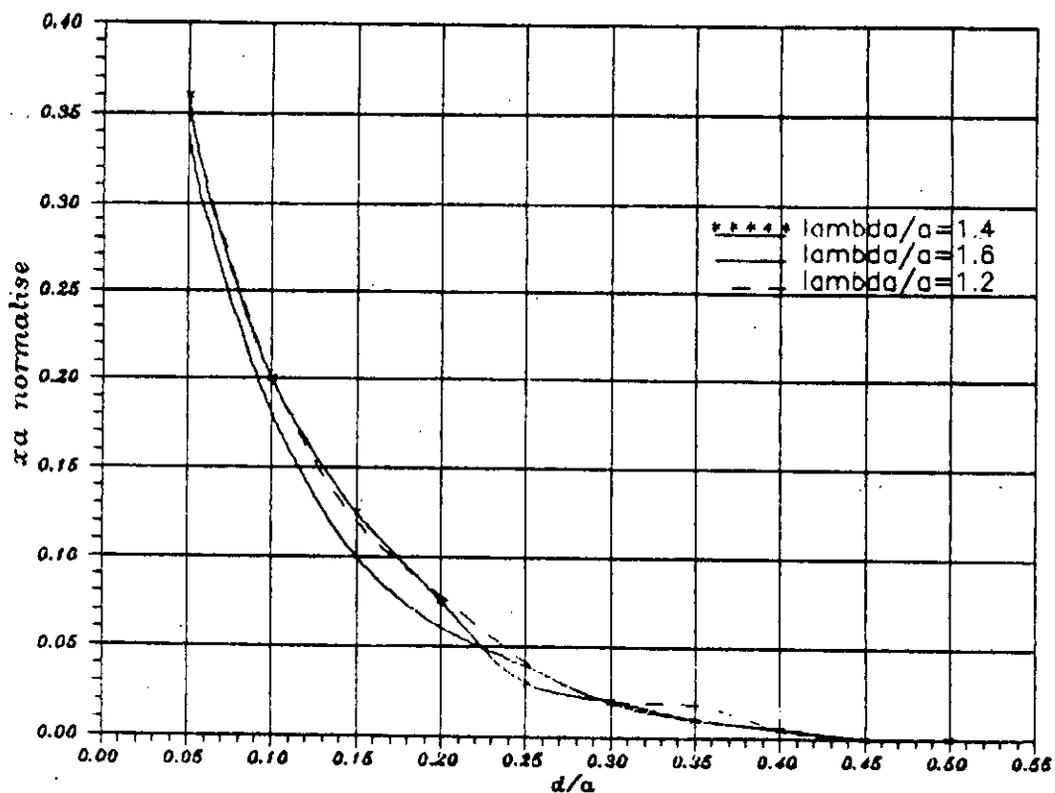


Fig (III-10) Elément du circuit équivalent d'une tige inductive centrée

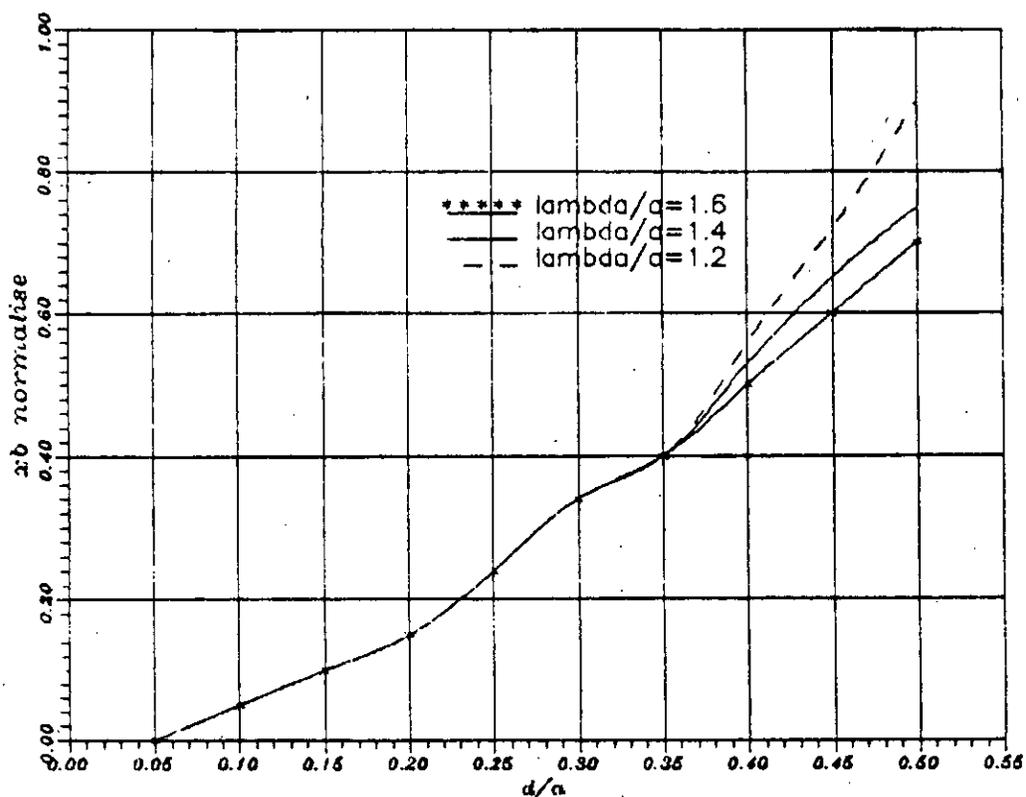


Fig (III-11) Élément du circuit équivalent d'une tige inductive centrée

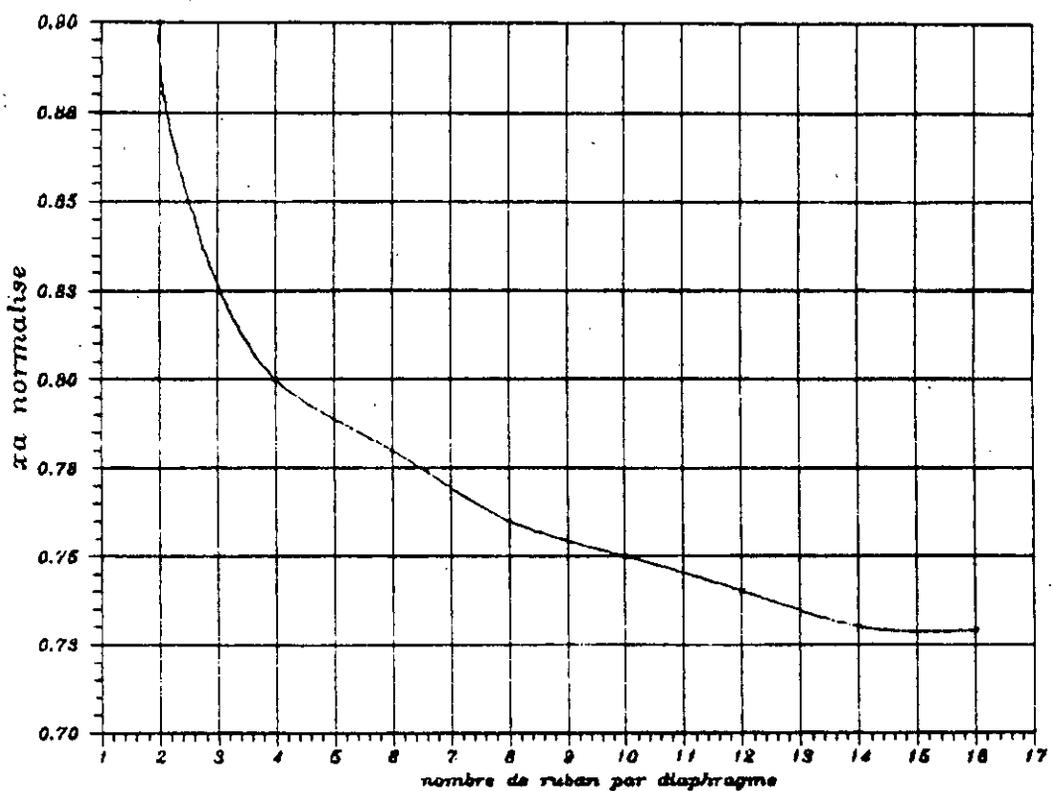
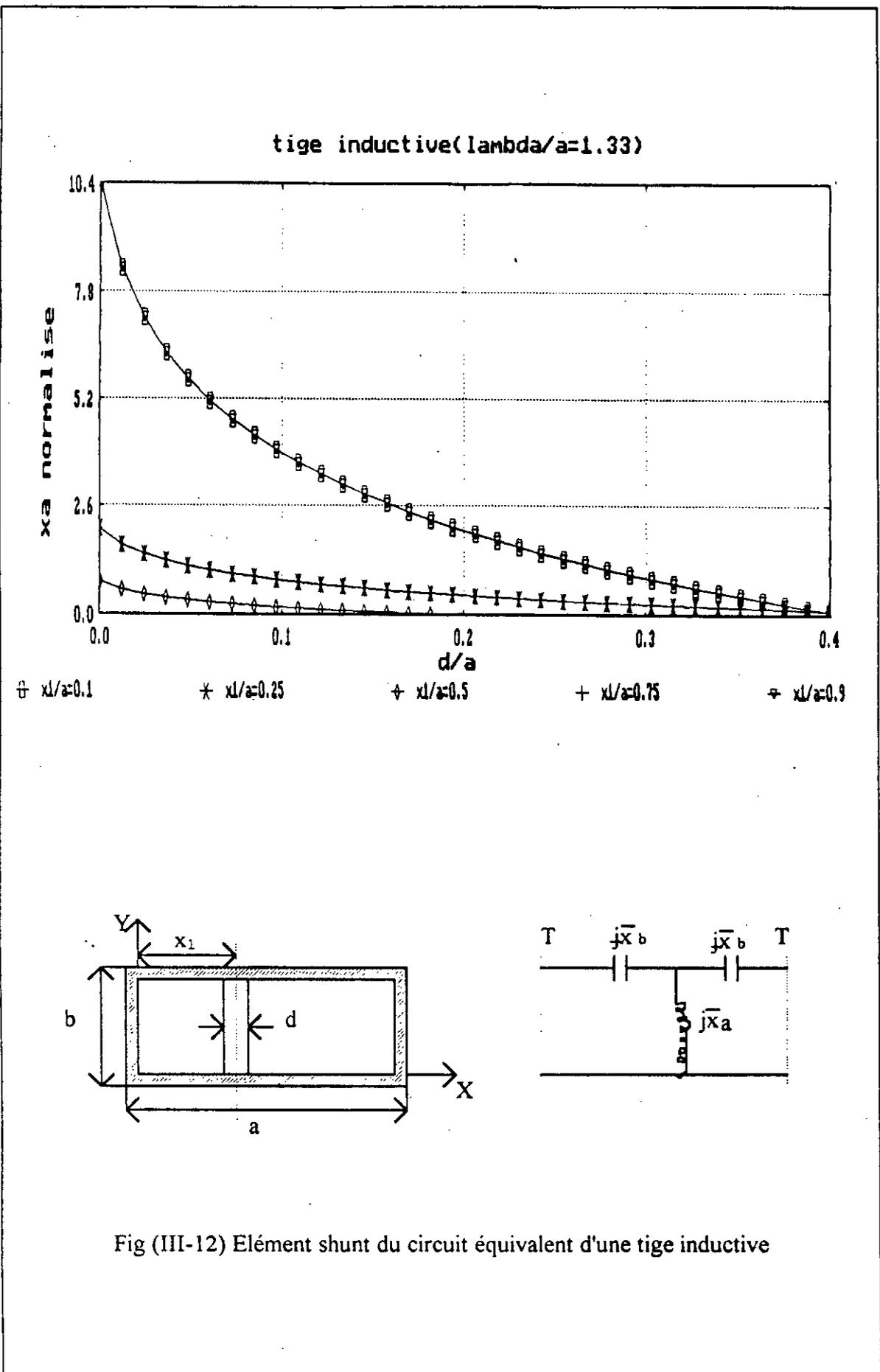


Figure : Réactance d'un diaphragme asymétrique ($a/\lambda=0.8$)



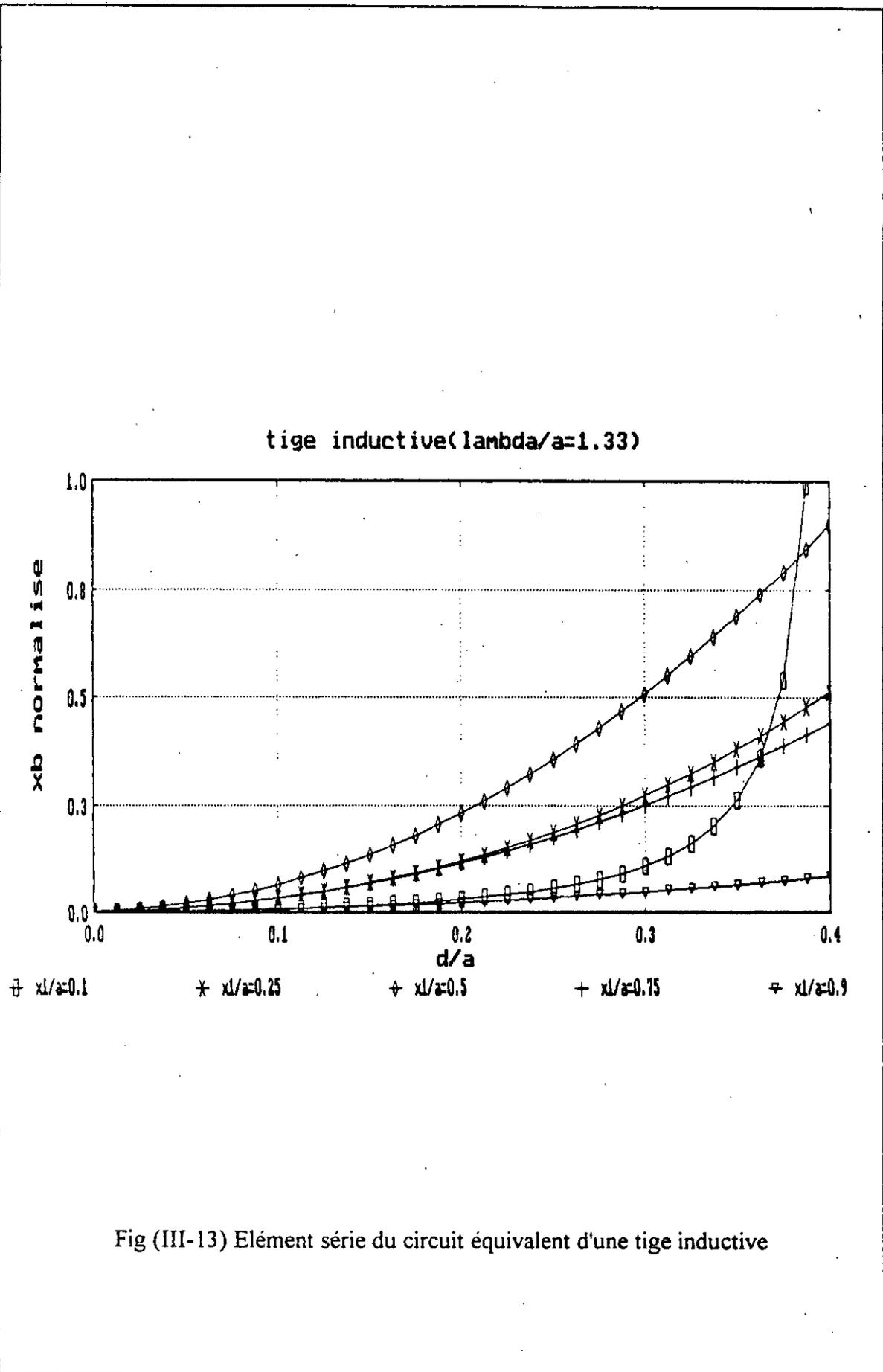
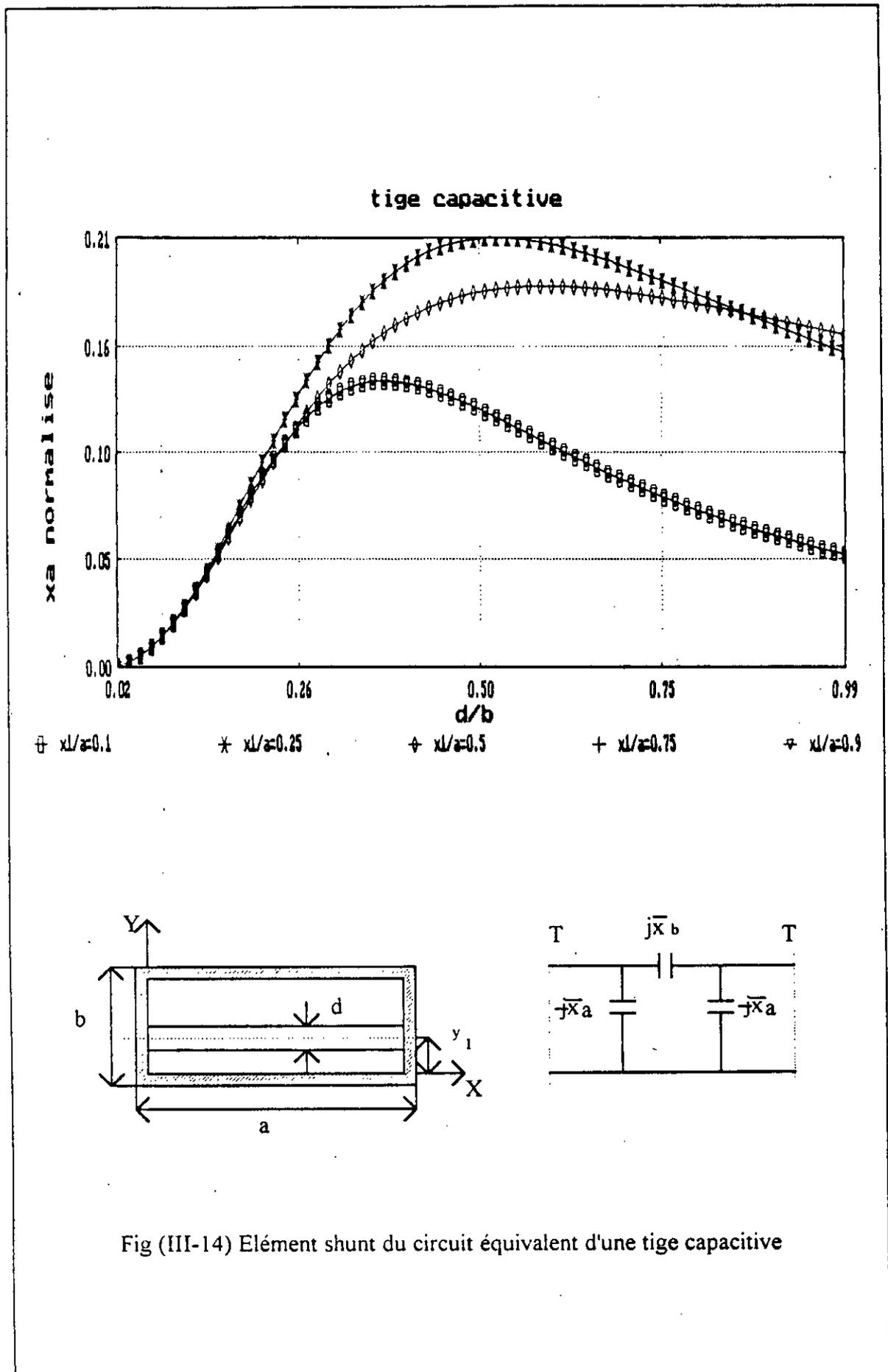


Fig (III-13) Elément série du circuit équivalent d'une tige inductive



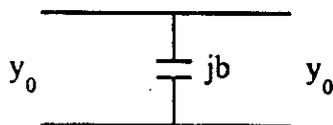
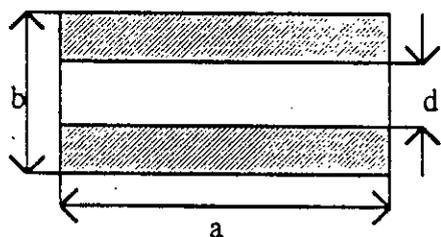
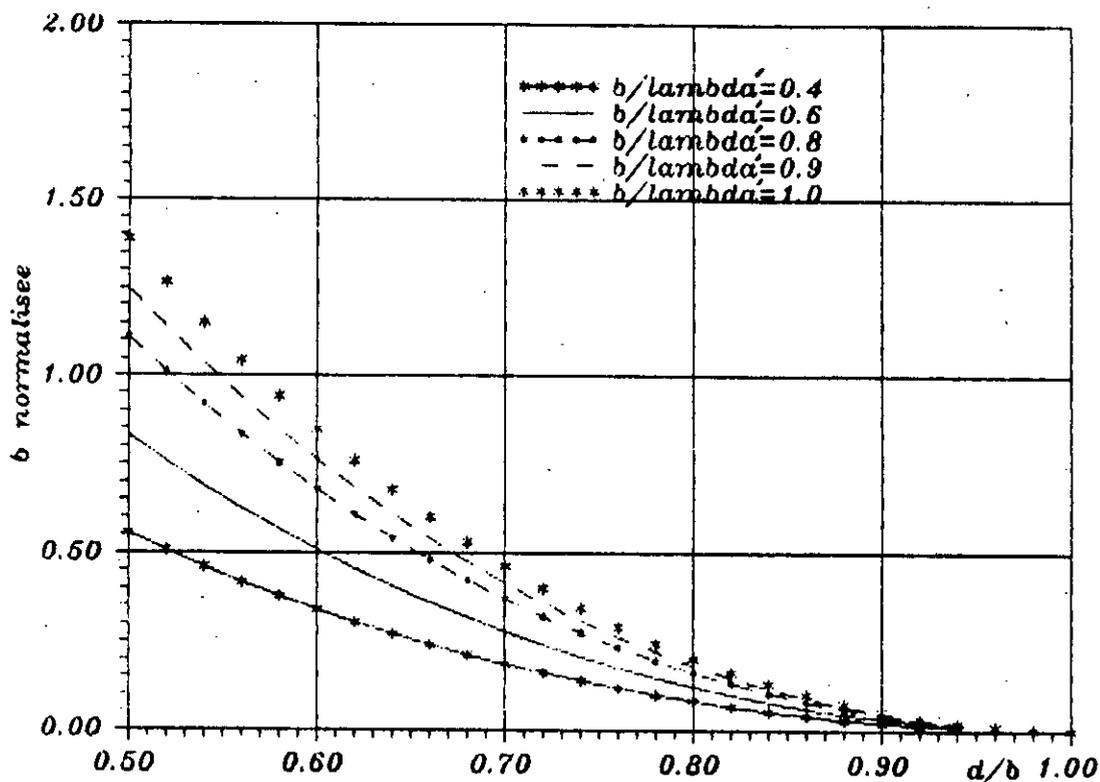


Fig (III-16) Elément du circuit équivalent d'un iris capacitif symétrique

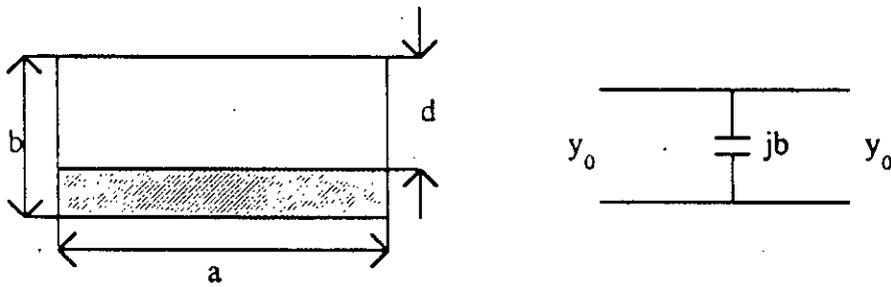
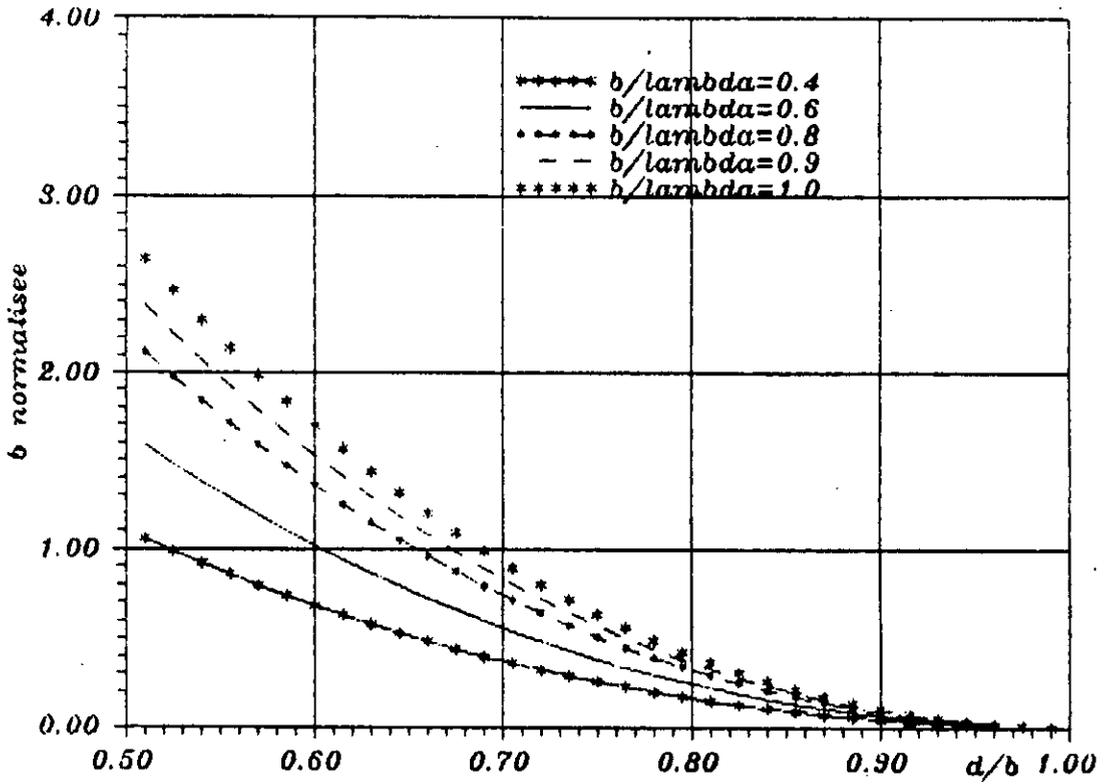


Fig (III-17) Elément du circuit équivalent d'un iris capacitif asymétrique

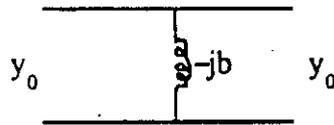
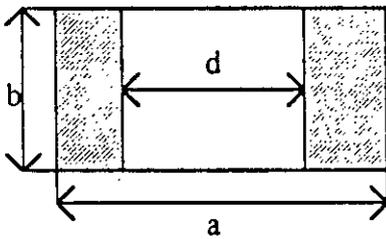
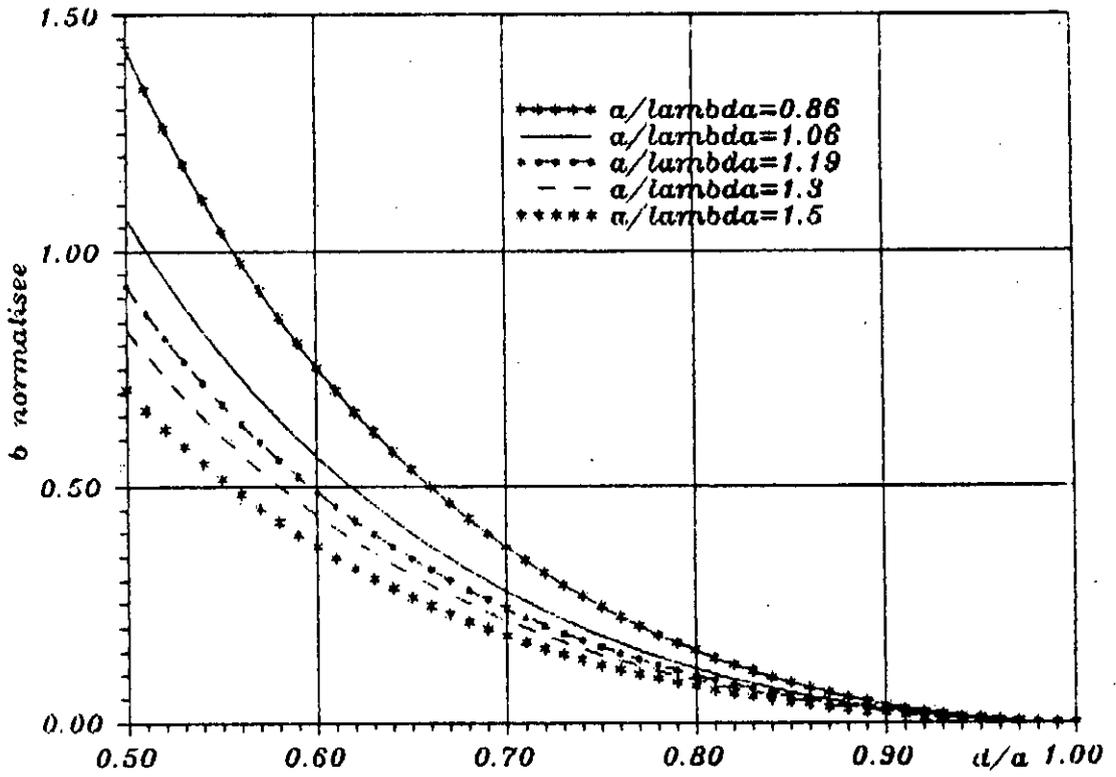
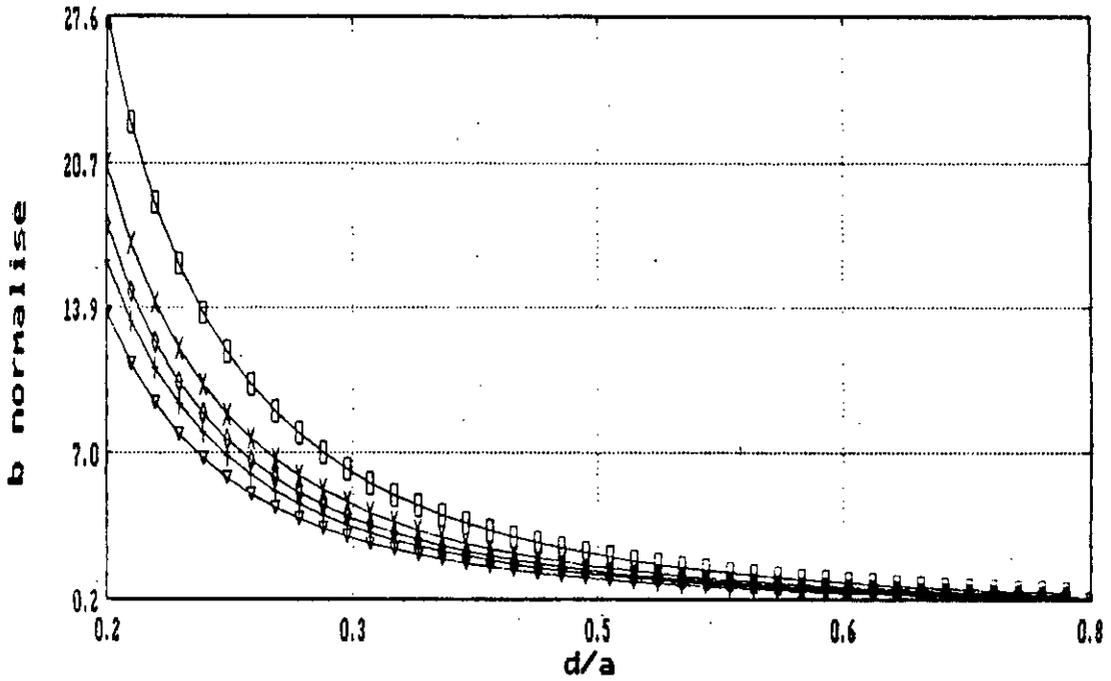


Fig (III-18) Elément du circuit équivalent d'un iris inductif symétrique



\oplus $a/\lambda = 0.86$ \ast $a/\lambda = 1.06$ \oplus $a/\lambda = 1.19$ \oplus $a/\lambda = 1.30$ \oplus $a/\lambda = 1.5$

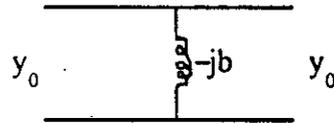
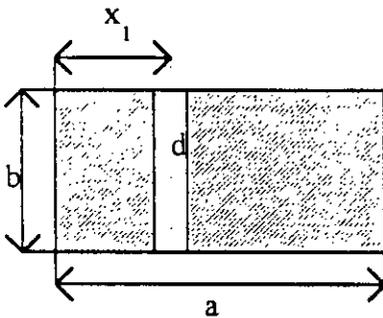


Fig (III-19) Elément du circuit équivalent d'un iris inductif asymétrique(cas $x_1/a=0.4$)

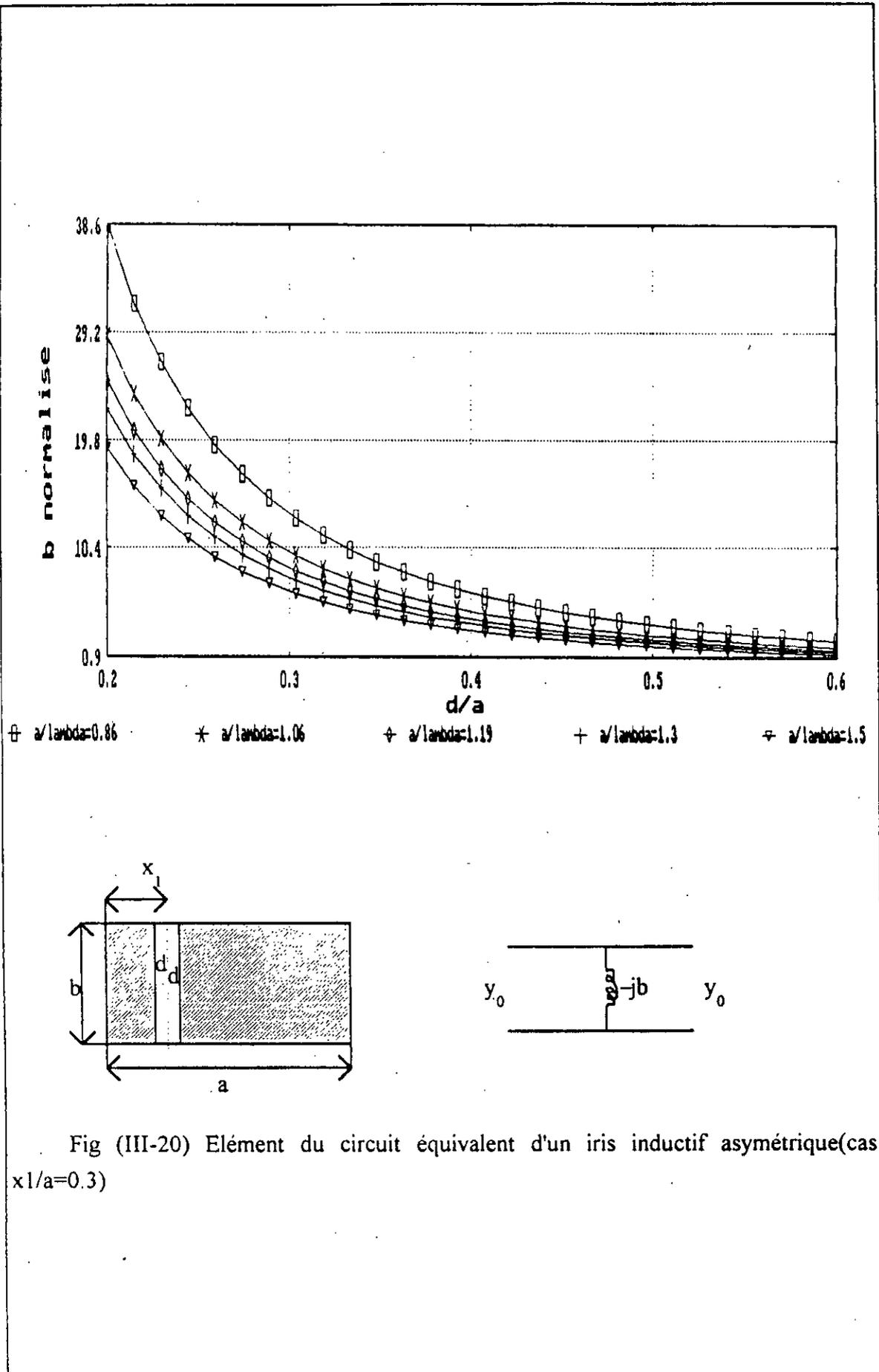
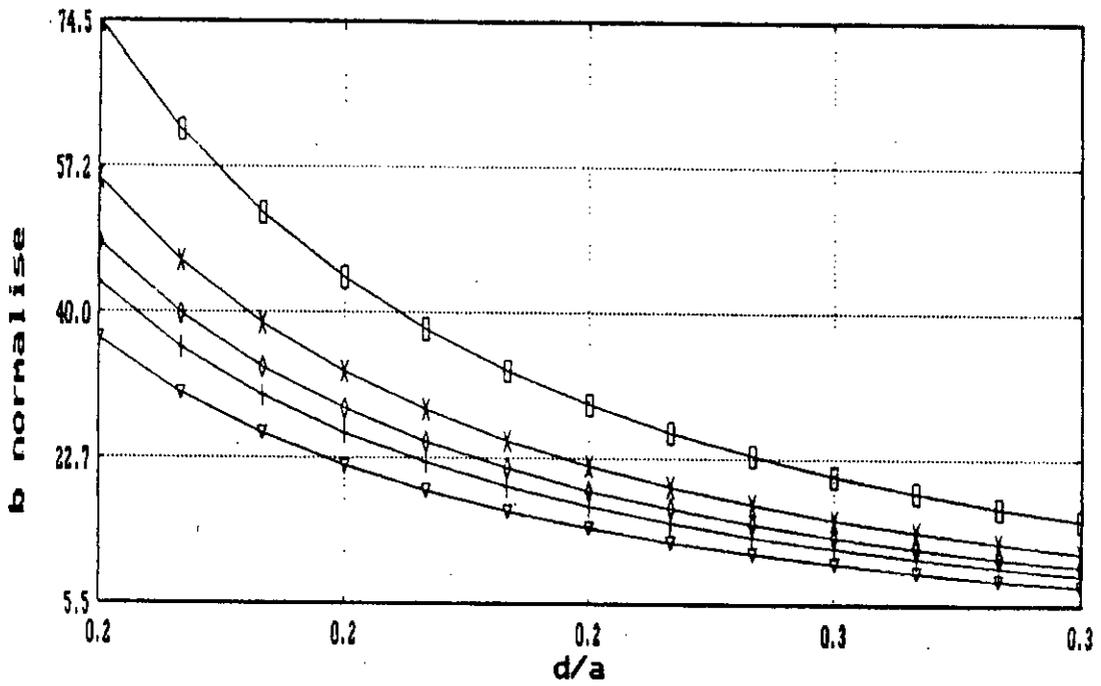


Fig (III-20) Elément du circuit équivalent d'un iris inductif asymétrique(cas $x_1/a=0.3$)



⊕ $a/\lambda=0.86$ * $a/\lambda=1.06$ ⊕ $a/\lambda=1.19$ + $a/\lambda=1.3$ ⊕ $a/\lambda=1.5$

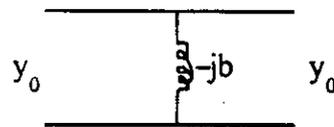
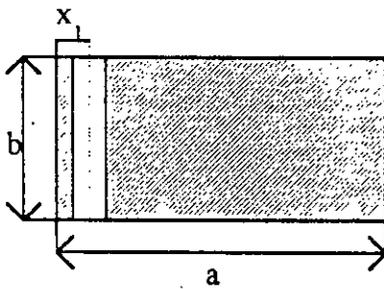


Fig (III-21) Elément du circuit équivalent d'un iris inductif asymétrique(cas $x_1/a=0.2$)

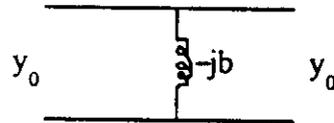
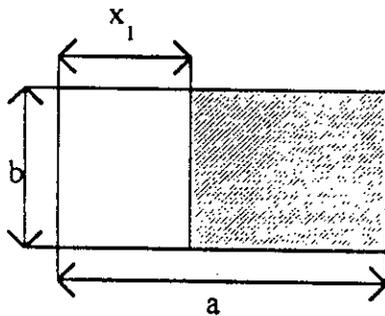
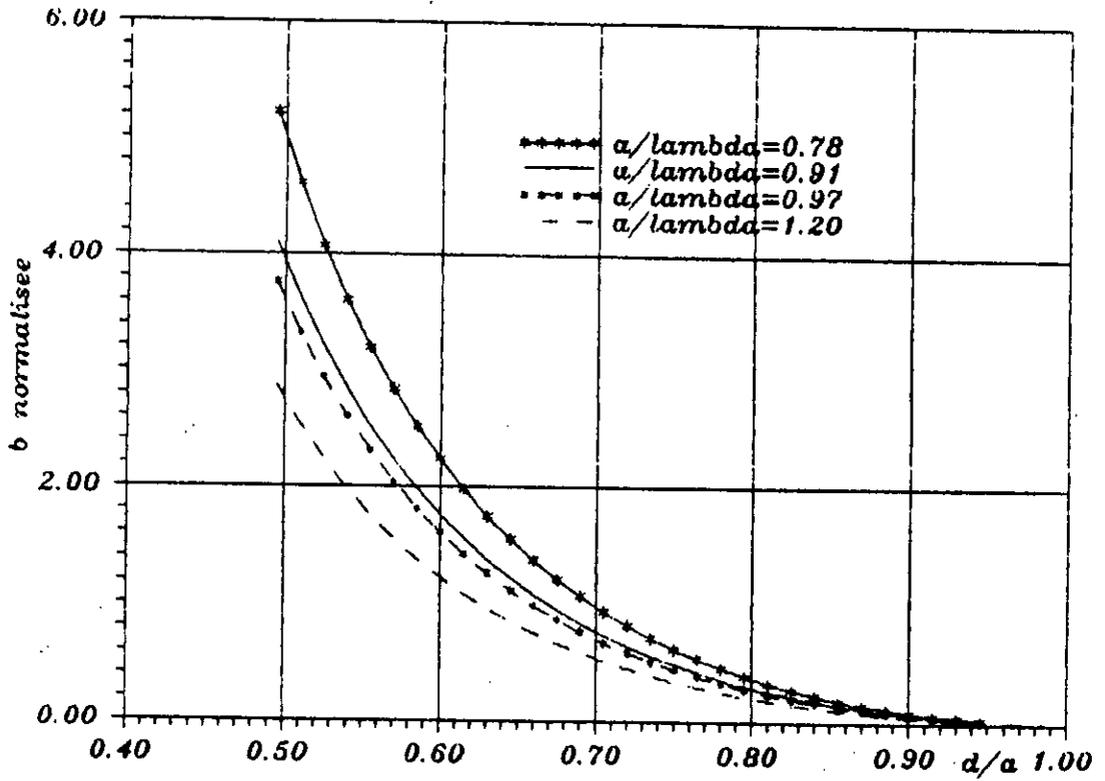


Fig (III-22) Élément du circuit équivalent d'un iris inductif asymétrique
Ouverture côté commun à la paroi

CHAPITRE IV

ALIMENTATION DES GUIDES D'ONDES

L'alimentation (excitation) d'un guide d'ondes peut être effectuée de deux manières différentes :

Alimentation par ouverture (jonction) et alimentation par sonde, la seule différence entre ces deux excitations est que la première exige une connaissance du champ électrique tandis que la deuxième exige une connaissance de la discontinuité du champ magnétique (courant). Les principes d'équivalence et de dualité peuvent être utilisés pour transformer le problème d'excitation par l'ouverture en un problème d'alimentation par courant et vice-versa.

IV-1-ALIMENTATION PAR SONDE:[1]

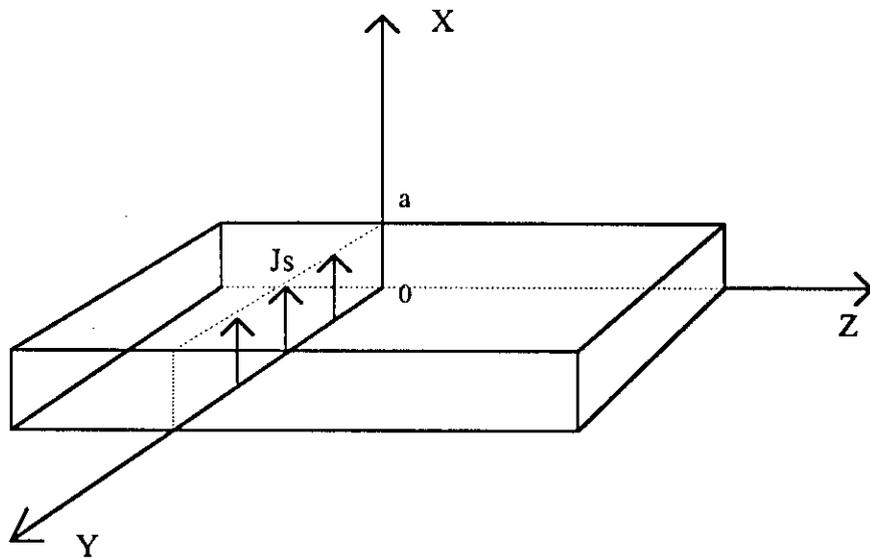


Fig (IV-1) lame de courant dans un guide rectangulaire

Considérons un guide d'ondes rectangulaire avec une lame de courant électrique dirigée suivant l'axe (ox), la distribution de courant $J_s = f(x,y)$ peut être arbitraire Fig (IV-1). Supposons que le guide soit adapté de part et d'autre de la section de l'excitation ($Z=0$) et au niveau de laquelle nous devons avoir continuité des composantes \vec{E}_x , E_y et H_x du champs. De plus H_x doit être antisymétrique autour de cette section, donc elle doit être identiquement nulle. La superposition des modes possibles s'écrit :

$$\psi^+ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^+ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(-\gamma_{mn} z) \quad z > 0 \tag{IV-1}$$

$$\psi^- = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^- \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(+\gamma_{mn} z) \quad z < 0$$

Les signes (+) et (-) indiquent les parties $z > 0$ et $z < 0$ respectivement et les composantes des champs électromagnétiques sont données par les équations :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\hat{y}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \psi & H_x &= 0 & \hat{y} &= j\omega \hat{\epsilon} \\ E_y &= \frac{1}{\hat{y}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) & H_y &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ E_z &= \frac{1}{\hat{y}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) & H_z &= - \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned} \tag{IV-2}$$

La continuité des composantes E_x et E_y donne :

$$B_{mn}^+ = B_{mn}^- = B_{mn}$$

Alors que la condition aux limites sur H_y s'écrit comme suit :

$$J_x = (H_y^- - H_y^+)_{z=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2\gamma_{mn} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{IV-3}$$

J_x a la forme d'une double série de Fourier (en cosinus sur x et sinus sur y) donc $2\gamma_{mn} B_{mn}$ sont les coefficients de Fourier donnés par :

$$2\gamma_{mn} B_{mn} = J_{mn} = \frac{2\epsilon_m}{ab} \int_0^a dx \int_0^a dy J_x \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{IV-4}$$

Ceci complète donc la détermination du champ si J_x est connue. Si le courant se trouve diriger suivant l'axe oy , J_y , une solution serait seulement une rotation d'axe dans la solution précédente et si J_x et J_y existent simultanément, on fait la superposition des deux cas et $x=0$ et $J_y = 0$. Il serait intéressant de trouver la puissance fournie par le courant au guide on a :

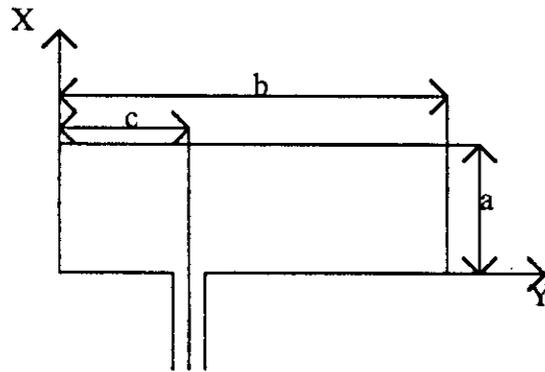
$$P = - \iint_{Z=0} E \cdot J^* ds = - \int_0^a dx \int_0^a dy J_x^* E_x|_{z=0}$$

En remplaçant J_x et E_x par leur expression, et tenant compte de l'orthogonalité des fonctions modes cette équation devient :

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (Z_0)_{mn} |J_{mn}|^2 \frac{ab}{4\epsilon_m} \tag{IV-5}$$

$(Z_0)_{mn}$ étant l'impédance d'ondes du mode correspondant . Dans un guide sans perte, la puissance associée à un mode susceptible de se propager est réelle et celle associée à un mode ne pouvant pas se propager est imaginaire.

Considérons comme exemple l'alimentation par sonde la figure (IV-2)



Fig(IV-2) Alimentation par sonde coaxiale.

Dans le cas d'une sonde modifiée le courant aura approximativement une distribution sinusoïdale et comme la sonde touche la paroi opposée on a un courant maximum en $x=a$, on a donc :

$$I(x) \approx \cos K(a - x) \tag{IV-6}$$

J_x prendra donc la forme:

$$J_x = I(x)\delta(y - c) \tag{IV-7}$$

Les coefficients de Fourier sont donc donnés par :

$$J_{mn} = \frac{2\epsilon_{mn} K a \sin(Ka) \sin(\frac{n\pi c}{b})}{b((Ka)^2 - (m\pi)^2)} \tag{IV-8}$$

$\epsilon_m = 1$ si $m=0$ et $\epsilon_m = 2$ pour $m>0$ (nombres de Neuman)

Calculons alors l'impédance d'entrée du guide par la sonde :

$$Z_i = \frac{P}{|I_i|^2} = R_i + jX_i$$

Où $I_i = \cos Ka$.

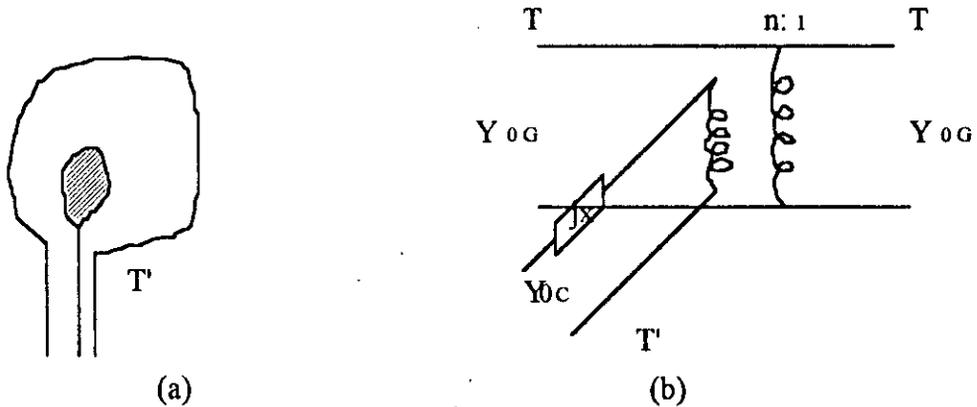
Si les dimensions du guide sont telles que seul le mode dominant se propage ceci entraîne :

$$R_i = \frac{ab}{4} \left| \frac{J_{01}}{I_i} \right|^2 (Z_0)_{01} = \frac{a}{b} (Z_0)_{01} \left(\frac{\text{tg}(Ka)}{Ka} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi c}{b} \right) \tag{IV-10}$$

Les termes correspondants aux modes évanescents forme la partie imaginaire X_i de l'impédance .

Un cas plus générale de présence de mésadaptation peut être considère .

Soit l'alimentation suivante :



Fig(IV-3)

La Fig (IV-3) étant le schéma équivalent d'une telle alimentation . Dans ce cas nous avons :

pour $Z > 0$:

$$E^+_i = \sum_i \frac{V_i}{1 + G^+_i} (\exp(-\gamma_i z) + G^+_i \exp(+\gamma_i z)) e_i \tag{II-11}$$

$$H^+_i = \sum_i \frac{V_i}{1 + G^+_i} (\exp(-\gamma_i z) - G^+_i \exp(+\gamma_i z)) h_i$$

G^+_i étant le coefficient de réflexion du côté $(+z)$ du $i^{ème}$ mode ramené au plan $z=0$.

Similaire ment pour $z < 0$:

$$E^-_i = \sum_i \frac{V_i}{1+G^-_i} (\exp(+\gamma_i z) + G^-_i \exp(-\gamma_i z)) e_i$$

$$H^-_i = - \sum_i \frac{V_i}{1+G^-_i} Y_i (\exp(+\gamma_i z) - G^-_i \exp(-\gamma_i z)) h_i$$
(IV-12)

Γ^-_i étant le coefficient de réflexion du côté (-z) du $i^{ème}$ mode ramené au plan $z=0$.
La condition au limite sur H est :

$$J_s = u_z \times (H^+_i - H^-_i)|_{z=0} = \sum_i V_i Y_i \left(\frac{1-G^-_i}{1+G^-_i} + \frac{1-G^+_i}{1+G^+_i} \right) u_z \times h_i$$
(IV-13)

En multipliant cette équation par (e_i) et en intégrant sur la section du guide , on obtient :

$$V_i Y_i \left(\frac{1-\Gamma^-_i}{1+\Gamma^-_i} + \frac{1-\Gamma^+_i}{1+\Gamma^+_i} \right) = - \iint J_s \cdot e_i \cdot ds$$
(IV-14)

Le champ est donc totalement déterminé si les (Γ_i) et J_s sont connus . L'impédance d'entrée vue par le coaxial est donnée par la formule stationnaire suivante :

$$Z_{in} = - \frac{1}{I_{in}^2} \iint E \cdot J_s \cdot ds |_{z=0}$$
(IV-15)

I_{in} étant le courant de référence T'

En injectant les équations (IV-11) et (IV-13) dans (IV-15) on obtient :

$$Z_{in} = \frac{1}{I_{in}^2} \sum_i V_i^2 Y_i \left(\frac{1-\Gamma^-_i}{1+\Gamma^-_i} + \frac{1-\Gamma^+_i}{1+\Gamma^+_i} \right)$$
(IV-16)

En substituant (V_i) à partir de (IV-14), l'équation (IV-16) devient :

$$Z_{in} = \frac{1}{I_{in}^2} \sum_i \frac{Z_i}{(1-\Gamma^-_i)(1+\Gamma^-_i) + (1-\Gamma^+_i)(1+\Gamma^+_i)} \left(\iint J_s \cdot e_i \cdot ds \right)^2$$
(IV-17)

Z_i étant l'impédance caractéristique du $i^{ème}$ mode .L'équation (IV-17) peut être simplifiée en utilisant une impédance ramenée au plan $Z=0$.

$$\hat{Z}_i = Z_i \frac{1+\Gamma_i}{1-\Gamma_i}$$

Ce qui donne :

$$Z_{in} = \frac{1}{I_{in}^2} \sum_i \left(\iint J_s \cdot e_i \cdot ds \right)^2 \frac{\hat{Z}_i^+ - \hat{Z}_i^-}{\hat{Z}_i^+ + \hat{Z}_i^-} \tag{IV-18}$$

Ce qui montre que les deux guides $Z > 0$ et $Z < 0$ sont vus en parallèles. Si seul le mode dominant se propage on a :

$$Z_{in} = n^2 Z_0 \left(\frac{1 - \Gamma_0^-}{1 + \Gamma_0^-} + \frac{1 - \Gamma_0^+}{1 + \Gamma_0^+} \right) + jX$$

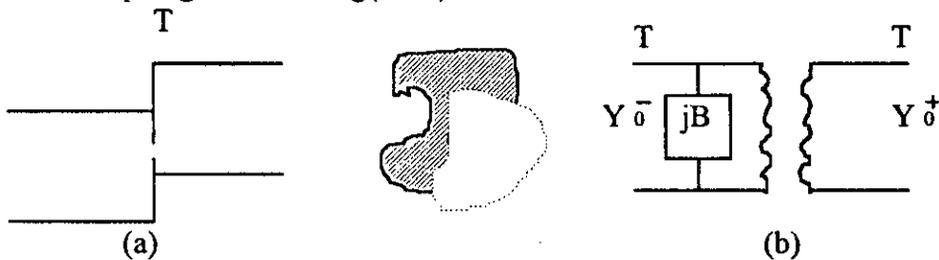
$$Z_{in} = n^2 \frac{\hat{Z}_0^+ - \hat{Z}_0^-}{\hat{Z}_0^+ + \hat{Z}_0^-} + jX \tag{IV-19}$$

Avec $n^2 = \frac{1}{I_{in}^2} \left(\iint J_s \cdot e_0 \cdot ds \right)^2$ $jX = \frac{1}{2I_{in}^2} \sum_{i \neq 0} Z_i \left(\iint J_s \cdot e_i \cdot ds \right)^2$

Ce qui détermine les éléments du schéma équivalent de la figure(IV-3-b)

IV-2-ALIMENTATION PAR OUVERTURE : [1]

Ici on exposera la deuxième possibilité d'alimentation d'un guide d'onde , l'alimentation par ouverture . Considérons la jonction de deux guides cylindriques avec un éventuel diaphragme à $Z=0$:Fig(IV-4):



Fig(IV-4): Jonction de guide d'onde avec schéma équivalent.

La condition aux limites d'où découle une solution complète dans les deux guides est donnée par :

$$\iint_{z=0} E^+ \times H^+ \cdot ds = \iint_{z=0} E^- \times H^- \cdot ds \tag{IV-20}$$

Les signes plus et moins désignant les régions $Z > 0$ et $Z < 0$ respectivement .Les admittances caractéristiques des lignes de transmission équivalentes sont les admittances

d'ondes caractéristiques des guides , et le transformateur idéal ,dans la figure(IV-4-b) représente le changement d'admittance . L'excitation étant prise à $Z=-\infty$, on a dans la région $Z<0$:

$$E^-_i = (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{+j\beta z}) \frac{V_0}{1+\Gamma} e_0 + \sum_i V_i e^{\alpha_i z} e_i$$

$$H^-_i = Y^-_0 (e^{-j\beta z} - \Gamma e^{+j\beta z}) \frac{V_0}{1+\Gamma} h_0 - \sum_i Y_i V_i e^{\alpha_i z} h_i$$
(IV-21)

Où e_i , h_i sont les vecteurs modes ,les α_i sont les constantes d'atténuation , Y_i sont les admittances caractéristiques et (Γ) est le coefficient de réflexion du mode dominant , le guide de droite étant à $Z=\infty$, on a dans la région $Z>0$:

$$E^+_i = \hat{V}_0 e^{-j\hat{\beta} z} \hat{e}_0 + \sum_i \hat{V}_i e^{-\hat{\alpha}_i z} \hat{e}_i$$

$$H^+_i = Y^+_0 \hat{V}_0 e^{-j\hat{\beta} z} \hat{h}_0 + \sum_i \hat{Y}_i \hat{V}_i e^{-\hat{\alpha}_i z} \hat{h}_i$$
(IV-22)

Où l'accent circonflexe distingue les paramètres de la partie $Z>0$ de ceux de la partie $Z<0$. L'application de l'équation (IV-20) aux champs donnés par les équations (IV-21) et (IV-22) donne : $Y_0 + \hat{V}_0^2 + \sum_i \hat{Y}_i \hat{V}_i^2 = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} Y^-_0 V^2_0 - \sum_i Y_i V_i^2$ (IV-23)

L'admittance relative vue par le guide de gauche est donc donnée par :

$$\frac{Y}{Y^-_0} = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} = \frac{G}{Y^-_0} + j \frac{B}{Y^-_0}$$
(IV-24)

Sachant que Y_0 est réel et Y_i pour $i \neq 0$; est imaginaire (elle correspond à des modes évanescents) nous obtenons à partir des équations (IV-23) et (IV-24) :

$$\frac{jB}{Y^-_0} = \frac{\sum_i Y_i V_i^2 + \sum_i \hat{Y}_i \hat{V}_i^2}{Y^-_0 V^2_0}$$
(IV-25)

$$\frac{G}{Y^-_0} = \frac{Y^+_0 \hat{V}_0^2}{Y^-_0 V^2_0}$$

Le circuit équivalent de la figure (IV-4-b) avec la condition d'adaptation à $Z = \infty$ il est évident que:

$$\frac{G}{Y^-_0} = n^2 \frac{Y^+_0}{Y^-_0} \text{ d'où } n^2 = \frac{\hat{V}_0^2}{V^2_0} \tag{IV-26}$$

Finalement pour obtenir les V_i et \hat{V}_i nous utilisons les équations (IV-21) et (IV-22) et l'orthogonalité des fonctions modes ce qui donne :

$$V_i = \iint_{\text{ouverture}} \vec{E}_i \cdot \vec{e}_i \, ds \quad \hat{V}_i = \iint_{\text{ouverture}} \vec{E}_i \cdot \vec{\hat{e}}_i \, ds \tag{IV-27}$$

L'intégration se fait seulement à travers l'ouverture car le champ est nul sur le conducteur. Pour illustrer cette théorie, considérons la jonction du guide rectangulaire suivante :

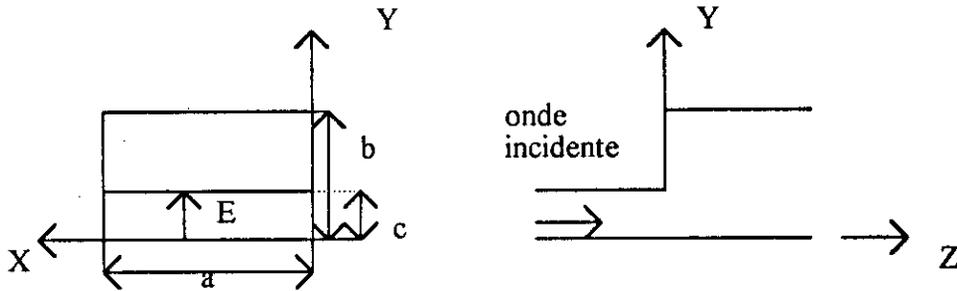


Fig (IV-5) : Jonction capacitive du guide rectangulaire

Les vecteurs modes du mode dominant sont donnés par :

$$\vec{e}_0 = \vec{U}_y \sqrt{\frac{2}{ac}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \vec{\hat{e}}_0 = \vec{u}_y \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Le champ d'ouverture est donné par :

$$\vec{E}_i^* = \vec{U}_y f(y) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Ce qui donne à partir des équations (IV-26) et (IV-27) : $n^2 = \frac{c}{b}$

Vue le caractère stationnaire des formules précédentes faisant le choix suivant : $f(y) = 1$ la première sommation du numérateur de l'équation (IV-25) disparaît alors et la seconde est liée à la susceptance d'ouverture par :

$$\sum \hat{Y}_i \hat{V}_i^2 = j|V|^2 B_a = jc^2 B_a$$

Mais pour $f(y) = 1$ on a $V_0^2 = \frac{ac}{2}$ ce qui donne par l'équation (IV-25)

$$\frac{B}{Y_0} = \frac{2c^2 Ba}{acY_0} = \frac{4c}{\lambda g} \left(\frac{\lambda g Z_0}{2a} Ba \right)$$

Cette solution approximative offre une précision de l'ordre de 10% comme montré par le tableau (IV-1)

Tableau (IV-1)

$b/\lambda g$	$\frac{\lambda g B}{C y_0}$	
	exacte	approximative
0	1.57	1.63
0.2	1.69	1.84
0.3	1.93	2.10
0.4	2.44	2.67

CHAPITRE V

LES CAVITES

V-1 - INTRODUCTION :

A basse fréquence, on constitue un circuit résonnant d'une inductance et d'une capacité. L'énergie électrique est emmagasinée dans la capacité, l'énergie magnétique dans l'inductance est l'énergie totale oscille entre ces deux extrêmes, à la fréquence d'excitation du circuit. L'énergie est maximum lorsque le circuit est excité à sa fréquence de résonance.

De même, aux hyperfréquences, on réalise des cavités résonantes, le champ électromagnétique est confiné dans une boîte dont les parois sont constituées d'un bon conducteur. L'énergie électrique est emmagasinée dans le champ électrique et l'énergie magnétique est emmagasinée dans le champ magnétique. L'énergie est maximum lorsque la fréquence d'excitation est une des fréquences de résonance de la cavité. Une cavité a pour circuit équivalent un nombre infini de circuits résonants.

Le facteur de qualité d'une cavité hyperfréquence peut être de l'ordre de 1000 à 10000. Il est donc notablement plus élevé que celui d'un circuit résonant basse fréquence, il est tel qu'on réalise et qu'on utilise les cavités hyperfréquence comme fréquencesmètre.

V-2- CAVITE RECTANGULAIRE:[1] [2]

Une cavité rectangulaire n'est qu'une portion de guide d'ondes de même forme, d'une certaine longueur dont on court-circuite les deux côtés. On aura donc à vérifier les conditions aux limites sur six parois au lieu de quatre. Cette cavité devient le siège d'ondes stationnaires qui, dans le cas de conducteurs et diélectriques sans pertes, continueront à subsister indéfiniment.

Une source (excitation) à la fréquence de résonance est nécessaire pour maintenir l'oscillation dans le cas d'existence de pertes. Ces ondes stationnaires ne peuvent exister dans une cavité que pour un ensemble discret de fréquence ne dépendant que des dimensions de la cavité dites fréquences propres de la cavité.

Le traitement fait précédemment pour les guides d'ondes rectangulaires et les conditions aux limites à satisfaire sur les deux parois transversales nous amène à écrire :

$$\psi^{TM}_{mnp} = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \quad (V-1)$$

$$\psi^{TM}_{mnp} \equiv E^{mnp}_z$$

avec $m=1,2,3,\dots$; $n=1,2,3,\dots$; $p=0,1,2,\dots$

L'équation (I-6) devient donc :

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 = k^2 \quad (\text{V-2})$$

Le champ du mode TM_{mnp} est donné par substitution de l'équation (V-1) dans les équations suivantes :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} & H_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ E_y &= \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} & H_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ E_z &= \frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi & H_z &= 0 \end{aligned}$$

Pour le mode TE on a :

$$\psi^{\text{TE}}_{mnp} = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \quad (\text{V-3})$$

$$\psi^{\text{TE}}_{mnp} \equiv H^{mnp}_z$$

Avec $m=1,2,3,\dots$, $n=1,2,3,\dots$; $p=0,1,2,\dots$ Le cas $m=n=0$ est à éliminer.

Le champ du mode TE_{mnp} est donné par substitution de l'équation (V-3) dans les équations suivantes :

$$E_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$H_x = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}$$

$$E_y = +\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$H_y = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}$$

$$E_z = 0$$

$$H_z = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi$$

$$\text{ou } \hat{y} = j\omega \hat{\epsilon}$$

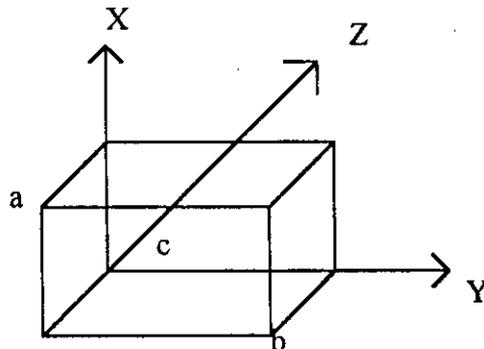
$\hat{\epsilon}$: permittivité complexe

$$\hat{\epsilon} \hat{\mu} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \epsilon, \mu$$

$$\hat{z} = j\omega \hat{\mu}$$

$\hat{\mu}$: perméabilité complexe

Le troisième indice p, figurant dans les expressions (V-1) et (V-3) indique le nombre de demi-longueurs d'ondes sur la longueur de la cavité.



Fig(V-1) Cavité rectangulaire

A partir de l'équation (V-2) et ayant :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon}$$

Nous pouvons déduire la fréquence de résonance des différents modes par :

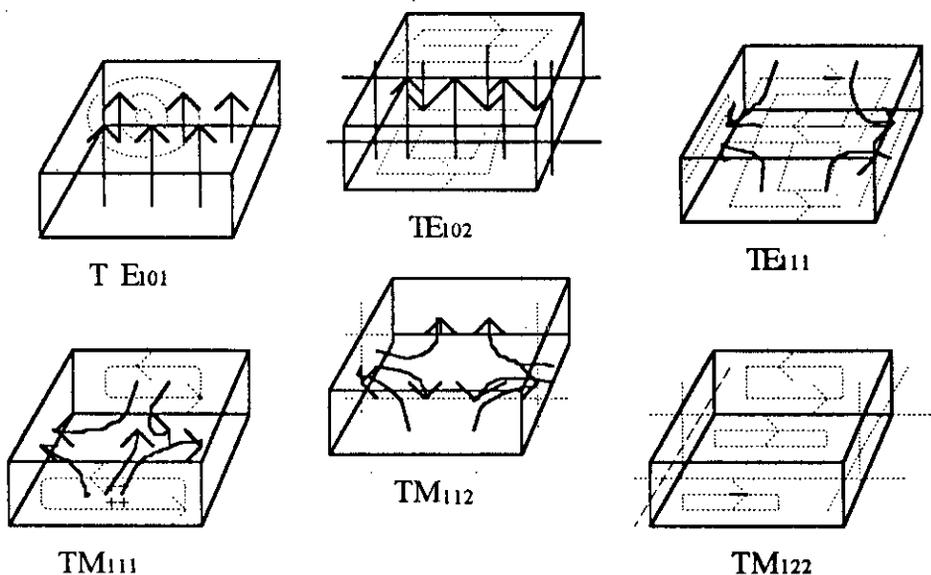
$$(f_r)_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \tag{V-4}$$

Pour $a < b < c$ le mode dominant est le mode donnée par les constantes $m=0, n=1, p=1$ TE₀₁₁. Le tableau (V-1) donne le rapport $\frac{(fr)_{mnp}}{(fr)_{011}}$ pour différentes dimensions de la cavité [1]:

TABLEAU(V-1)

b/a	c/a	TE ₀₁₁	TE ₁₀₁	TM ₁₁₀	TM ₁₁₁ TE ₁₁₁	TE ₀₁₂	TE ₀₂₁	TE ₂₀₁	TE ₁₀₂	TM ₁₂₀	TM ₂₁₀	TM ₁₁₂ TE ₁₁₂
1	1	1	1	1	1.22	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	1.73
1	2	1	1	1.26	1.34	1.26	1.84	1.84	1.26	2.00	2.00	1.55
2	2	1	1.58	1.58	1.73	1.58	1.58	2.91	2.00	2.00	2.91	2.12
2	4	1	1.84	2.00	2.05	1.26	1.84	3.60	2.00	2.53	3.68	2.19
4	4	1	2.91	2.91	3.00	1.58	1.58	5.71	3.16	3.16	5.71	3.24
4	8	1	3.62	3.65	3.66	1.26	1.84	7.20	3.65	4.03	7.25	3.82
4	16	1	3.88	4.00	4.01	1.96	1.96	7.76	3.91	4.35	7.83	4.13

La figure suivante présente quelques modes de ce type de cavité.



Fig(V-2): Distribution des champs dans les cavités rectangulaires.

L'intégration du flux du vecteur de Poyting sur la surface , parfaitement conductrice , limitant le résonateur montre que les moyennes , dans le temps des énergies magnétiques :

$$\frac{\mu}{4} \int H_p H_p^* dv \quad \text{et électrique} \quad \frac{\mu}{4} \int E_p E_p^* dv \quad \text{sont égales [11]}$$

Ainsi la moyenne temporelle des énergies magnétiques électriques est :

$$\overline{w_m} = \overline{w_e} = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{\text{cavité}} |E|^2 dz = \frac{\epsilon}{8} |E_0|^2 \text{ a.b.c} \quad (V-5)$$

Nous savons aussi à partir du principe de conservation que l'énergie totale à l'intérieur du résonateur, est indépendante du temps en présence des pertes, on définit un facteur de qualité donné par :

$$Q = \omega \times \frac{\text{Energie moyenne stockée dans la cavité}}{\text{Puissance moyenne dissipée}}$$

$$Q = \omega \times \frac{W}{P_d} \quad (V-6)$$

avec

$$W = 2\overline{W_e} = \frac{\epsilon}{4} |E_0|^2 \text{ a.b.c.}$$

Deux sortes de pertes sont à envisager, les pertes diélectriques pour lesquels on définit le facteur de qualité Qd :

$$Q_d = \frac{\omega \epsilon' \iiint |E|^2 d\tau}{\omega \epsilon'' \iiint |E|^2 d\tau} = \frac{\overline{\epsilon'}}{\epsilon''}$$

Ceci est vrai pour n'importe quels modes et des pertes dues aux conducteurs imparfaits pour lequel on définit de même un facteur de qualité Qc :

donné par [1]

$$Q_c = \frac{\pi \eta}{2R} \frac{a(b^2 + c^2)^{3/2}}{bc(b^2 + c^2) + 2a(b^3 + c^3)}$$

R : Résistance intrinsèque du métal

Dans le cas où les deux types de pertes sont considérés à la fois, le facteur de qualité de résonateur est donné par :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_c}$$

V-3-CAVITE CYLINDRIQUE [1]

Si une portion de guide d'ondes circulaire est fermée par des conducteurs parfaits. Nous obtenons un résonateur cylindrique.

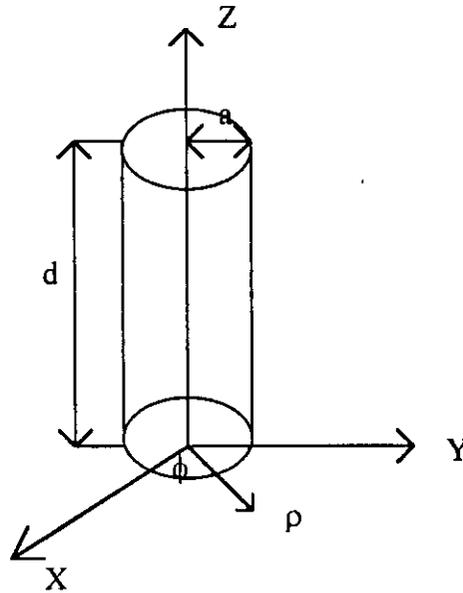


Fig (V-3) Cavité circulaire

Il est simple de modifier, les fonctions modes du guide d'ondes circulaire pour satisfaire les conditions aux limites rajoutées par l'annulation de la composante tangentielle du champ E à z=0 et z=d. Le résultat pour le mode TM est :

$$\psi_{npq}^{TM} = J_n\left(\frac{X'_{np}\rho}{a}\right) \left| \begin{matrix} \sin n\phi \\ \cos n\phi \end{matrix} \right| \sin\left(\frac{q\pi}{d} z\right) \tag{V-7}$$

ou n=0,1,2,...; p=1,2,3,...et q=0,1,2.....

Les champs sont donnés par les équations (1-25). Pour les modes TE on a :

$$\psi_{npq}^{TE} = J_n\left(\frac{X'_{np}\rho}{a}\right) \left| \begin{matrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{matrix} \right| \sin\left(\frac{q\pi}{d} z\right) \tag{V-8}$$

ou n = 0,1,2,...; p=1,2,3... et q=1,2,3....;

Les champs sont donnés par les équations (I-23).

Nous aurons aussi :

$$\left(\frac{x_{np}}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2 = k^2 \quad ; \quad \left(\frac{x'_{np}}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2 = k^2.$$

respectivement pour le mode TM et TE.

Les fréquences des résonances sont :

$$(fr)_{npq}^{TM} = \frac{1}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{x_{np}^2 + \left(\frac{q\pi a}{d}\right)^2}$$

$$(fr)_{npq}^{TE} = \frac{1}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{x'^2_{np} + \left(\frac{q\pi a}{d}\right)^2}$$

Le facteur de qualité de la cavité circulaire peut se calculer en suivant la même démarche que pour la cavité rectangulaire. On a :

$$E_z = \frac{k^2}{j\omega\epsilon} J_0\left(\frac{x_{01}\rho}{a}\right)$$

$$H_\phi = \frac{x_{01}}{a} J_1\left(\frac{x_{01}\rho}{a}\right)$$

Pour le mode TM_{010} (mode dominant pour le d petit). Nous calculons alors pour ce même mode l'énergie emmagasinée dans la cavité :

$$W = 2\overline{We} = \epsilon \iiint |E|^2 d\tau = \frac{k^4}{\omega^2\epsilon} 2\pi d \int_0^a \rho J_0^2\left(\frac{x_{01}\rho}{a}\right) ds$$

Après calcul de l'intégral [12], nous obtenons

$$w = \frac{\pi k^4 d a^2}{\omega^2 \epsilon} J_1^2(x_{01}).$$

La puissance dissipée est approximativement :

$$\overline{Pd} = \Re \iint |H|^2 ds = \Re \left(\frac{x_{01}}{a} \right) 2\pi [ad J_1^2(x_{01}) + 2 \int_0^a \rho J_1^2\left(\frac{x_{01}\rho}{a}\right) d\rho]$$

Le calcul de l'intégrale d'après [12] donne :

$$\overline{P_d} = \Re \left(\frac{x_{01}}{a} \right)^2 2\pi a(d+a) J_1^2(x_{01})$$

Le facteur de qualité de cette cavité est donné donc par :

$$Q = \frac{\omega W}{P_d} = \frac{k^4 da^3}{2\omega \epsilon \Re x_{01}^2 (d+a)} \quad (\text{V-10})$$

V-4-COUPLAGES DES CAVITES :

Une cavité totalement fermée est parfaitement inutile. Son emploi rend indispensable un couplage avec un ou des circuits extérieurs. Pour pouvoir analyser l'ensemble couplé, il est indispensable de connaître le schéma équivalent de la cavité.

V-4-1 - SCHEMA EQUIVALENT DE LA CAVITE :

La première et la deuxième équation de Maxwell peuvent être combinées pour donner :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \nabla \times \vec{H} = -j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)\vec{E} = k^2 \vec{E}$$

Où on définit le nombre d'ondes k comme suit :

$$k^2 = -j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)$$

équation que nous devons résoudre pour trouver la pulsation propre de chaque mode donnée par :

$$\omega_p = \frac{j\sigma}{2\epsilon} + \sqrt{\frac{k^2}{\epsilon\mu} - \left(\frac{\sigma}{2\epsilon}\right)^2} \quad (\text{V-11})$$

k étant réel.

En présence de perte dans le milieu remplissant la cavité et dans le conducteur, ω_p est complexe.

Pour trouver ce que représente pratiquement une pulsation complexe, on développe ω_p en partie réelle et partie imaginaire :

$$\omega_p = \omega_{pr} + j\left(\frac{1}{\tau}\right) \quad (\text{V-12})$$

τ : temps de relaxation de la résonance.

Le champ peut être donné en fonction du temps par :

$$\vec{E}(r,t) = \text{Re}[\sqrt{2} \vec{E}(r) \exp(j\omega_p t)]$$

$$\vec{E}(r,t) = \sqrt{2} \vec{E}(r) \exp(-\frac{t}{\tau}) \cos(\omega_p t + \varphi(r))$$

Ce qui peut être représenté par la courbe suivante :

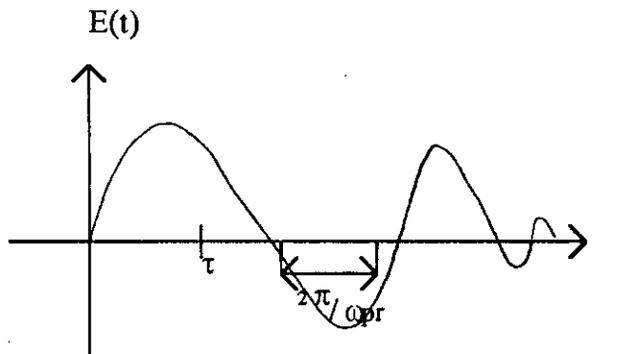


Fig (V-4) : Variation du champ électrique en fonction du temps pour une cavité fermée avec pertes

A partir de la figure (V-4) et de l'équation (V-11) on peut représenter une cavité par le schéma équivalent suivant :

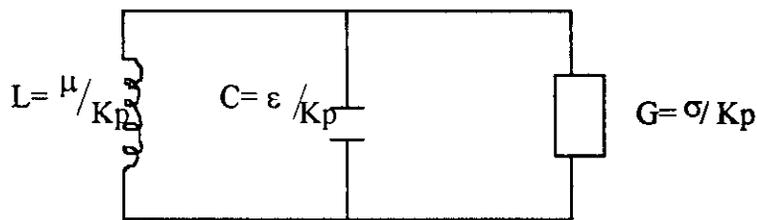


Fig (V-5) : Schéma équivalent pour un mode de résonance de la cavité non chargée

V-4-2-LES DISPOSITIFS DE COUPLAGE :

Le circuit extérieur charge évidemment le circuit équivalent de la cavité. Donc pour qu'un champ électromagnétique existe à l'intérieur d'une cavité, il faut pouvoir injecter dans celle-ci un signal électromagnétique en provenance d'un circuit extérieur.

Les dispositifs de couplage peuvent être de simples ouvertures, des sondes ou encore un courant d'électrons.

V-4-2-1 - BOUCLE INDUCTIVE :

Une boucle inductive assurant le couplage avec un champ électrique dont les lignes sont perpendiculaires au plan de la boucle; elle est placée en général à l'endroit où ce champ électrique est maximum

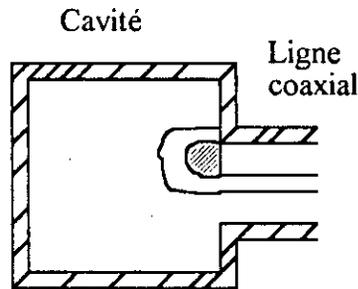


Fig (V-6) : Cavité couplée par une boucle inductive

V-4-2-2- SONDE CAPACITIVE :

Un autre moyen de couplage est la sonde capacitive, le conducteur se termine par une ligne ouverte, il est couplé au champ électrique dont les lignes lui sont parallèles. Le couplage sera maximale si la sonde est placée dans la position du maximum du champ électrique du mode.

Les modes dont le champ électrique est nulle à cet endroit ne sont pas excités

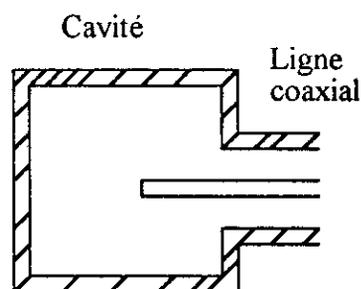
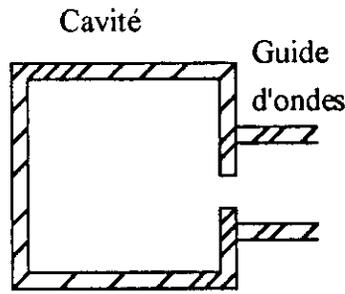


Fig : (V-7) Cavité couplée au moyen d'une sonde capacitive

V-4-2-3- OUVERTURE :

Une fente, iris ou trou disposé dans une paroi commune à la cavité et à la ligne d'alimentation, d'une façon que telle qu'une composante de champ du mode dans la cavité a la même direction qu'une composante de champ du mode dans la ligne



Fig(V-8) : Cavité couplée par une ouverture

V-4-2-4- FAISCEAU D'ELECTRONS :

Lorsqu'un faisceau d'électron circule dans une cavité, il donne naissance à un champ électrique parallèle à la direction du faisceau. Ce type de couplage sert à générer des signaux hyperfréquences dans des tubes tels que les magnétrons et les klystrons.

V-4-3-EXPENSION MODALE DANS LES CAVITES :[1]

Considérons une cavité formée par un conducteur parfait renfermant un milieu diélectrique chaque mode doit satisfaire les équations :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = -j\omega_i \mu \vec{H}_i \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H}_i = -j\omega_i \epsilon \vec{E}_i \qquad (V-13)$$

L'indice (i) indiquant le mode . La combinaison de ces deux équations donne :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\mu^{-1} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}_i) - \omega^2_i \epsilon \vec{E}_i &= 0 \\ \vec{\nabla} \times (\epsilon^{-1} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}_i) - \omega^2_i \mu \vec{H}_i &= 0 \end{aligned} \qquad (V-14)$$

Chacune des équations de (V-14) couplée aux conditions aux limites :

$$\vec{n} \times \vec{E}_i = \vec{n} \times (\epsilon^{-1} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}_i) = 0 \qquad \text{sur } s \qquad (V-15)$$

n étant la normale à la surface s. On souhaite maintenant normaliser les vecteurs modes, on écrit alors :

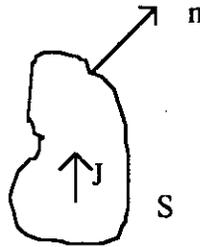
$$\iiint \epsilon \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j^* d\tau = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (V-16)$$

Ce qui normalise aussi les (Hi) car :

$$\iiint \epsilon |\vec{E}_i|^2 d\tau = \iiint \mu |\vec{H}_i|^2 d\tau \qquad (V-17)$$

L'équation (V-17) traduit l'égalité des moyennes temporelles des énergies magnétiques et électriques. On a donc :

$$\iiint \mu \vec{H}_i \vec{H}_j^* d\tau = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$



Fig(V-9)

Supposons maintenant une source électrique, à l'intérieur d'une cavité comme montré par la figure (V-9). Les équations des champs sont:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = +j\omega\epsilon \vec{E} + \vec{J}$$

Et l'équation d'onde est :

$$\vec{\nabla} \times (\mu^{-1} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}) - \omega^2 \epsilon \vec{E} = -j\omega \vec{J} \tag{V-18}$$

Puisque les (E_i) forment une base complète on peut décomposer E comme suit :

$$\vec{E} = \sum_i A_i \vec{E}_i \tag{V-19}$$

Substituons l'équation (V-19) dans l'équation (V-18) on obtient :

$$\sum_i A_i [\vec{\nabla} \times (\mu^{-1} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}_i) - \omega^2 \epsilon \vec{E}_i] = -j\omega \vec{J}$$

Tenant compte des équations (V-14) cette dernière devient :

$$\sum_i A_i (\omega_i^2 - \omega^2) \epsilon \vec{E}_i = -j\omega \vec{J}$$

Faisant à présent le produit scalaire de chaque terme de l'équation précédente par (\vec{E}_j^*) , et intégrons sur le volume de la cavité, alors tous les termes $i \neq j$ s'annulent à cause de l'orthogonalité, et on obtient :

$$(\omega_i^2 - \omega^2)A_i = -j\omega \iiint \vec{J} \vec{E}_i^* d\tau \quad (\text{V-20})$$

Ce qui détermine les A_i , l'équation (V-19) devient donc :

$$\vec{E} = \sum_i \frac{j\omega E_i}{\omega^2 - \omega_i^2} \iiint \vec{J} \vec{E}_i^* d\tau$$

Le champ magnétique s'écrit par conséquent :

$$\vec{H} = \sum_i \frac{j\omega_i H_i}{\omega^2 - \omega_i^2} \iiint \vec{J} \vec{E}_i^* d\tau \quad (\text{V-21})$$

Notons que les champs deviennent extrêmement élevés quand (ω) approche la pulsation de résonance . En effet le champ devient infini s'il n'y avait pas de pertes, ce qui est impossible, réellement il existe toujours des dissipations, donc les ω_i sont complexes . Alors le champ est très élevé mais fini à n'importe quelle fréquence de résonance réelle.

V-4-4-SONDE DANS LES CAVITES:

Mathématiquement, on peut représenter une sonde dans une cavité par une source électrique comme montré dans la figure (V-9) . L'impédance d'entrée vue par la sonde peut être calculé par la formule stationnaire :

$$Z_{in} = -\frac{1}{I^2} \iiint \vec{E} \vec{J}^a d\tau \quad (\text{V-23})$$

Où \vec{J}^a est le courant dans la sonde, et (I) est le courant d'entrée . Le champ produit par \vec{J}^a , s'exprime en fonction des (E_i) par l'équation (V-21) qui injectée dans (V-23) donne :

$$Z_{in} = -\frac{j\omega}{I^2} \sum_i \frac{a_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \quad (\text{V-24})$$

$$\text{Ou } \omega_i = \iiint \vec{E} \vec{J}^a d\tau \quad (\text{V-25})$$

L'analyse néglige l'effet de l'ouverture, qui souvent est très petit . S'il n'y a pas de pertes, l'impédance sera purement réactive , cependant si la cavité introduit des pertes mais avec un facteur de qualité élevé, l'effet de la dissipation peut être introduit au niveau de la fréquence de résonance qui devient complexe :

$$\omega_i^2 = \omega_r^2 \left(1 + \frac{j}{Q}\right) \tag{V-25bis}$$

Q étant le facteur de qualité

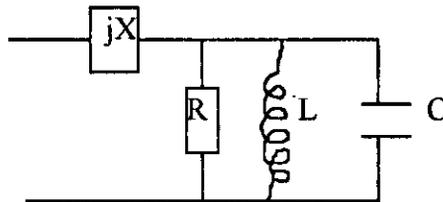
Au voisinage d'une fréquence de résonance (ω_0) l'équation (V-24) est approximée par:

$$Z_{in} = jX - \frac{j\omega \left(\frac{a_0}{I}\right)^2}{\omega^2 - \omega_0^2 \left(1 + \frac{j}{Q}\right)} \tag{V-26}$$

Où X est la réactance due à tous les modes excepte celui correspondant à $i=0$:

$$X = -\frac{\omega}{I^2} \sum_{i \neq 0} \frac{a_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \tag{V-27}$$

Un circuit équivalent traduisant l'équation (V-26) est montré à la figure(V-10) :



Fig(V-10) : circuit équivalent d'une cavité alimentée par sonde au voisinage de la résonance

Pour déterminer les éléments R, L et C on a seulement besoin de comparer l'équation (V-26) à la formule de l'impédance d'un circuit RLC parallèle :

$$Z = -\frac{j\omega}{\omega^2 - \omega_0^2 \left(1 + \frac{j}{Q}\right) C}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad Q = \frac{R}{L\omega} \approx \frac{R}{\omega_0 L}$$

D'où il est évident que :

$$R = \frac{Q}{\omega_0} \left(\frac{a_0}{I}\right)^2 \quad L = \left(\frac{a_0}{I\omega_0}\right)^2 \quad C = \left(\frac{I}{a_0}\right)^2$$

a_0 étant donné par l'équation (V-25)

Pour illustrer ce qui précède, considérons une sonde dans une cavité rectangulaire .
Fig (V-11).

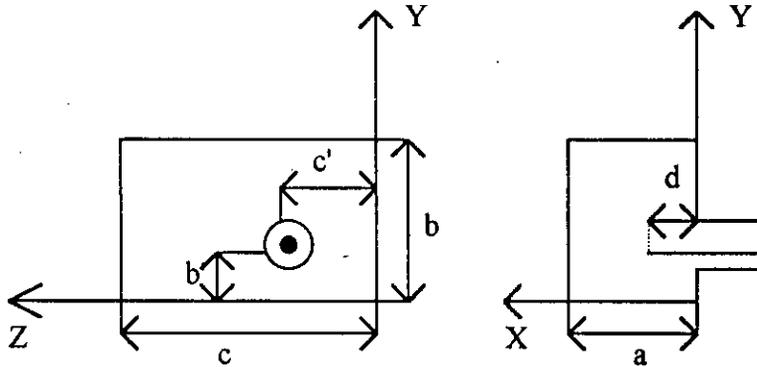


Fig (V-11) : Sonde dans un cavité rectangulaire.

Le vecteur mode normalisé du mode dominant est :

$$\vec{E}_0 = \vec{u}_x \frac{2}{\sqrt{\epsilon abc}} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$

Le courant dans la sonde est choisi :

$$J_x^a = \begin{cases} 0 & x > d \\ I \frac{\sin K(d-x) \delta(g-b') \delta(y-c')}{\sin Kd} & x < d \end{cases} \quad (V-28)$$

L'équation (V-25) donne alors :

$$\frac{a_0}{I} = \frac{2}{K \sqrt{\epsilon abc}} \operatorname{tg}\left(K \frac{d}{2}\right) \sin\left(\pi \frac{b'}{b}\right) \sin\left(\pi \frac{c'}{c}\right)$$

Les autres paramètres nécessaires à la détermination de R, L et C sont la fréquence de résonance :

$$f_r = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2bc} \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{\epsilon \mu}}$$

Le facteur de qualité :

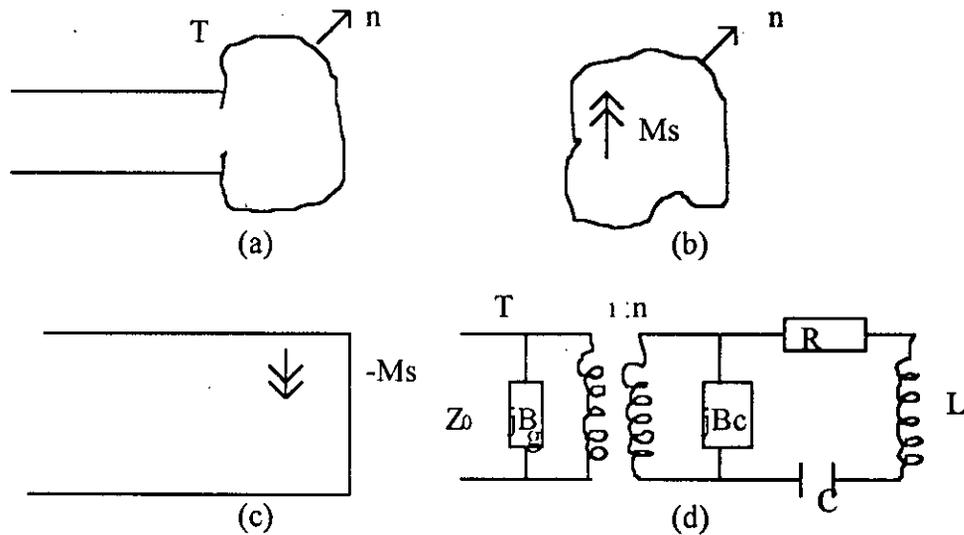
$$Q_c = \frac{\pi \eta}{2 \Re} \frac{a(b^2 + c^2)^{3/2}}{bc(b^2 + c^2) + 2a(b^3 + c^3)}$$

L'évaluation de la réactance série X, est plus difficile. On ne peut évidemment pas utiliser le courant (filaire) de l'équation (V-28) car le X résultant serait infini, le diamètre réel de la sonde doit être considéré.

V-4-5- COUPLAGE D'UNE CAVITE PAR UNE OUVERTURE :

Le couplage d'un guide à une cavité par une ouverture est représenté à la fig (V-12). En vue d'un traitement variationnel on suppose un champ d'ouverture \vec{E}_t^a , pour le problème de couplage on écrira la condition de continuité au niveau de l'ouverture :

$$\iint_{\text{ouverture}} (\vec{E}_t^a \times \vec{H}^a) ds_{\text{guide}} = \iint_{\text{ouverture}} (\vec{E}_t^a \times \vec{H}^a) ds_{\text{cavité}} \tag{V-29}$$



**Fig (V-12) : (a) couplage d'un guide à une cavité par une ouverture
 (b) partie cavité du problème , (c) partie guide du problème
 (d) circuit équivalent au voisinage d'une fréquence de résonance**

Notons que pour un \vec{E}_t^a donné, chaque membre de l'équation (V-29) peut être considéré séparément , ce qui divise le problème en deux parties comme montré à la figure (V-12 b et c).

Le courant équivalent dans la cavité $\vec{M}_s^a = \vec{n} \times \vec{E}_t^a$ est le système de la partie guide du problème.

Le 1er membre de l'équation (V-29) peut être donné par :

$$\iint_{\text{ouverture}} (\vec{E}_t^a \times \vec{H}^a) ds_{\text{guide}} = -YV_0^2 + \sum_{n \neq 0} Y_n V_n^2$$

Où les V_n sont les les tensions de mode, Y_n les admittances caractéristiques de mode.

Y est l'admittance vue par le mode dominant, d'où on peut écrire l'équation (V-29) comme suit :

$$\frac{Y}{Y_0} = jB_g - \frac{1}{Y_0 V_0^2} \iint_{\text{ouverture}} (\vec{E}_t^a \times \vec{H}^a \cdot d\vec{s})_{\text{cavité}} \quad (V-30)$$

Y_0 étant l'admittance caractéristique du mode dominant et :

$$B_g = -j \sum_{n \neq 0} \frac{Y_n}{Y_0} \left(\frac{V_n}{V_0} \right)^2$$

B_g est la susceptance shunt introduite par la partie guide du problème.

Pour la partie cavité du problème le champ est donné par :

$$\vec{H}^a = \sum_i \frac{j\omega H_i}{\omega^2 - \omega_i^2} \iint \vec{E}_t^a \times \vec{H}_i \cdot d\vec{s}$$

Le membre de droite de l'équation (V-29) peut donc être donné par :

$$\iint_{\text{ouverture}} (\vec{E}_t^a \times \vec{H}^a \cdot d\vec{s})_{\text{cavité}} = \sum_i \frac{j\omega b_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2}$$

Où $b_i = \iint \vec{E}_t^a \times \vec{H}_i \cdot d\vec{s}$

Au voisinage d'une fréquence de résonance, on tient de nouveau compte des pertes par les équations (V -25bis) et (V-30) peut être écrite :

$$\frac{Y}{Y_0} \approx jB_g - \frac{j\omega}{Y_0 V_0^2} \left[\sum_{i \neq 0} \frac{b_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2} + \frac{b_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 (1 + \frac{j}{Q})} \right]$$

Le premier terme en crochets représente la susceptance due à tous les mode non résonant dans la cavité, et le deuxième terme donne l'effet du mode résonant, on peut donc écrire :

$$\frac{Y}{Y_0} \approx jB_g + \frac{n^2}{Y_0} \left[jB_c - \frac{j\omega \left(\frac{b_0}{V} \right)^2}{\omega^2 - \omega_0^2 (1 + \frac{j}{Q})} \right]$$

ou :

$$B_c = -\frac{\omega}{V^2} \sum_{i=0} b_i^2 \frac{1}{\omega^2 - \omega_i^2}$$

Le rapport de transformation du transformateur idéal est alors : $n^2 = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2$

On peut finalement représenter le dernier terme de l'équation (V-30) sous forme de circuit RLC série figure (V-12-d). Les éléments de ce circuit sont de manière similaire que précédemment et sont donnés par :

$$\frac{1}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \left(\frac{b_0}{V}\right)^2 \quad C = \left(\frac{b_0}{V\omega_0}\right)^2 \quad L = \left(\frac{V}{b_0}\right)^2$$

b_0 étant donné précédemment par b_i

V-5- UTILISATION DES CAVITES :

Les cavités sont très utilisées dans le domaine des hyperfréquences et ceci est due à leurs capacités d'emmagasiner de l'énergie car au voisinage d'une fréquence de résonance le champ est très important (infini dans le cas idéal sans pertes). On citera plusieurs exemples d'utilisation des cavités qui sont comme suit :

- * Fréquence mètre (voit TP micro-ondes)
- * Boite à écho
- * Discriminateur....

V-5-1- BOITE A ECHO :

Pour comparer les possibilités de détection des matériaux de radar, on utilise un écho fictif produit par une cavité résonante de haute surtension qu'on appelle boîte à écho.

Cette cavité est couplée à un petit dipôle placé à une courte distance de l'antenne fig(V-14).

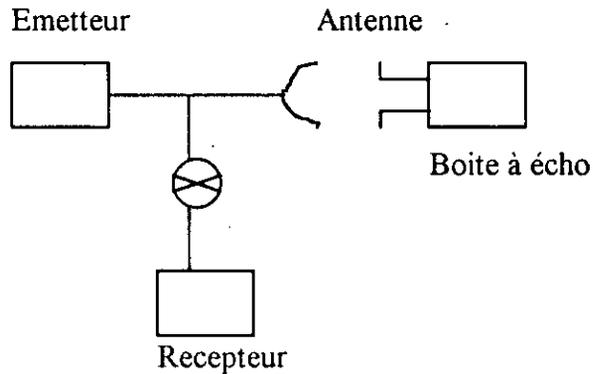


Fig (V-14) : boîte à écho

Lorsque l'émetteur envoie une impulsion, la cavité, accordée sur la fréquence d'émission, emmagasine une fraction de l'énergie de cette impulsion, cette énergie est ensuite rayonnée vers l'extérieur par le dipôle et décroît exponentiellement avec une constante de temps proportionnelle au coefficient de surtension en charge de la cavité. Le récepteur reçoit donc un écho à décroissance exponentielle. Grâce aux dispositifs de balayage on peut mesurer le temps τ qui caractérise l'efficacité d'ensemble du matériel, il est en effet fonction à la fois de la puissance d'émission de l'antenne et de la sensibilité du récepteur.

V-5-2- DISCRIMINATEUR A CAVITES :

On sait qu'un discriminateur est un dispositif qui fait correspondre à une variation de fréquence Δf d'une onde porteuse de fréquence moyenne f_0 une variation d'amplitude Δv proportionnelle à Δf . Cet appareil est décrit à la figure (V-15) on y remarque qu'autour de f_0 , la tension de sortie est proportionnelle à l'écart entre f et f_0 .

Elle peut être utilisée en contre réaction pour stabiliser la fréquence d'un oscillateur.

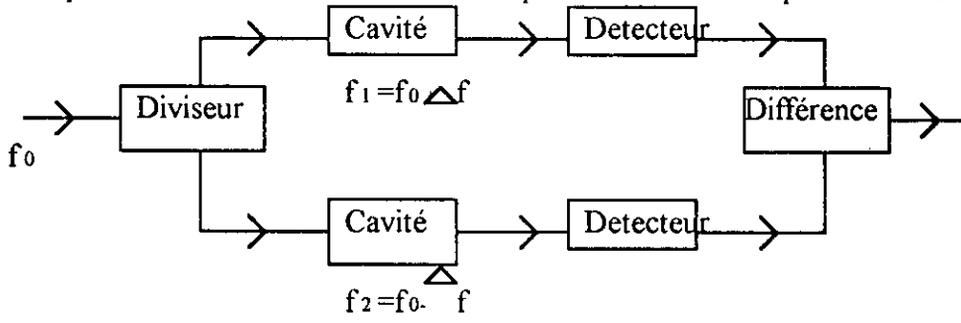


Fig (V-15) Discriminateur

CONCLUSION

L'objectif de ce travail consistait à examiner les problèmes rencontrés dans certaines structures micro-ondes, à faire l'étude de plusieurs méthodes d'analyse et à appliquer quelques unes pour la résolution de ces problèmes.

Cette étude nous a permis de constater qu'une solution analytique exacte ne peut être trouvée que dans des cas très rares, la méthode des moments malgré son caractère approchée offre des résultats satisfaisants (coïncidant avec ceux donnés par W.G.H.B), néanmoins, elle présente l'inconvénient de nécessiter un temps d'exécution très lent, ce qui exige des machines relativement puissantes. Aussi les fonctions de base doivent être appropriées aux problèmes étudiés car un choix quelconque de ces fonctions pourraient provoquer la divergence de la méthode.

La méthode variationnelle quant à elle présente l'avantage de fournir des expressions stationnaires. Cette méthode aboutie aussi à des résultats très précis sans nécessiter un temps de calcul exagéré. Seulement le choix inadéquat des fonctions d'essai peut aboutir à des résultats d'une précision de l'ordre de 20% sans que la méthode ne diverge.

Nous espérons enfin que notre modeste travail servira de support à d'autres études.

ANNEXE

TABLEAU(1) : les zeros x_{np} des fonctions de Bessel $J_n(x)$

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.372	
4	11.792	13.324	14.796			

TABLEAU(2) : les zeros x'_{np} des fonctions de Bessel $J'_n(x')$

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
1	3.832	1.841	3.054	4.201	5.317	6.416
2	7.016	5.331	6.706	8.015	9.282	10.520
3	10.173	8.536	9.969	11.346	12.682	13.987
4	13.324	11.706	13.170			

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ROGER. F. HARRINGTON.
"Time- Harmonic Electronic Fields ".
Mc GRAW-HILL, 1961.
- [2] A. VANDER VOST.
"Les Hyperfréquences".
CABAY, 1982.
- [3] T. KAHAN.
"Techniques Variationnelles en Radio Electrecite".
MONOGRAPHIE DUNOD, 1962.
- [4] ROGER. F. HARRINGTON.
"Matrix Methods For Field Problems".
IEEE vol n°55 Fév 1967
- [5] K.C. GUPTA.
"Computer Aided design of microwave circuits".
ARTECH HOUSE, INC NORWOOD, 1981.
- [6] P. LEFEVRE.
"Technique des micro-ondes"
1980
- [7] KLAUS .A. HOFFMAN.
"Computational Fluid Dynamics for Engineers".
PUBLICATION OF ENGINEERING EDUCATION SYSTEM.
The University of Texas at Austin, 1989
- [8] PHILIP.M. MORSE AND HERMAN FESH
"Methods of theoretical physics".
MC GRAW-HILL, 1953
- [9] HESHAM AUDA AND ROGER.F. HARRINGTON
"Inductive Post and Diaphragms of Arbitrary Shape and Number in Rectangular Waveguide"
IEEE Juin 1984
MTT vol 32 n° 6 - juin 1984 p 606 à 613.
- [10] SACHENDRA N. SINHA
"Analysis of Multiple-Ship discontinuity in a Rectangular Waveguide."
MEMBER IEEE 1986 MTT vol 34, n° 6 juin 1986 pages 696 à 700
- [11] C. VEYRES
"Circuits pour Hyperfréquence"
TECHNIQUES DE L'INGENIEUR E.620/12-1976
- [12] E. JAHNKE AND F. EMDE.
"Tables of Functions"
DOVER PUBLICATION P.146 NEW-YORK, 1945
- [13] G. Machiarella, GB Stracca, L. Migliole
"D'interpretation pour un circuit équivalent des lignes dans les guides d'ondes"
"Microwave journal"
Mai 1987 pages 287 à 297 123