

وزارة الجامعات والبحث العلمي  
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT

ELECTRONIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

*ANALYSE ET SYNTHÈSE DE CONTROLÉURS  
ADAPTATIFS A MODELE DE REFERENCE :*

*-CAS DETERMINISTE*

*-CAS DE STRUCTURES A PARAMETRES  
VARIABLES*

Proposé par :

M<sup>c</sup>. F. CHIGARA

Etudié par :

M. BOURI  
M. RACHEDI

Dirigé par :

. CHIGARA

PROMOTION

JUIN 92

DEDICACES:

Je dedie ce modeste travail à:

Mon cher père

Ma chère mère

Mes frères et soeurs

Mes chères nièces Anissa et Amira-Menel

Tous mes ami(e)s.

M. Rachedi

Je dedie ce modeste travail à:

Ma très chère mère

Mon brave père

Toute ma famille

M. Bourj

Nous dedions ce travail à tous nos enseignants

REMERCIEMENTS :

Nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidé, de près ou de loin pour la finalisation de ce travail

et plus particulièrement :

- . notre promoteur pour nous avoir proposé le sujet et pour la confiance qu'il nous a témoigné
- . les membres du laboratoire d'Automatique, notamment ,  
M<sup>rs</sup> M. Taghi et I. Kacha
- . M<sup>r</sup> S. Bouras pour nous avoir permis de travailler avec son ordinateur.
- . Les personnes qui nous ont aidé dans la frappe de la thèse ,  
notamment , M<sup>me</sup> N. Benmohammed et M<sup>rs</sup> Mstefaoui
- . La boîte microinformatique ALPHAE pour le tirage de la thèse
- . M<sup>r</sup> R. Fridi pour l' aide qu'il nous a apporté.

pour tous, nous prions DIEU qu'il les bénisse

**S O M A I R E :**

INTRODUCTION .....	1
<b>P R E M I E R E   P A R T I E :</b>	
1 . LES SYSTEMES DE COMMANDE ADAPTATIVE AVEC MODELE DE REFERENCE ( M R A C ) .....	2
1.1 Introduction .....	3
1.2 Notions de systèmes de commande adaptative avec modèle de référence .....	3
1.3 Synthèse des systèmes à MRAC .....	5
1.3.1 Description mathématique des systèmes à MRAC parallele ...	7
1.3.2 Formulation du problème de synthèse des systèmes à MRAC...	9
1.3.3 Synthèse	
1.3.3.1 Utilisation des fonctions de Lyapunov .....	10
1.3.3.2 Utilisation des concepts d'hyperstabilité et de positivite .....	12
Conclusions .....	17
2. SYNTHESE D'UN CONTROLEUR ADAPTATIF AVEC POURSUITE DU MODELE (AMFC) .....	18
2.1 Introduction .....	19
2.2 Equations et conditions de la poursuite non adaptative .....	20
2.3 Synthèse d'un contrôleur adaptatif avec poursuite du modèle.	22
3. SYNTHESE D'UN CONTROLEUR ADAPTATIF MINIMAL .....	25
3.1 Généralites .....	26
3.2 Particularités .....	26

3.3 Synthèse du contrôleur minimal (MCS) .....	27
Conclusions .....	37
4. APPLICATIONS .....	38
4.1 Commande de vitesse d'un moteur à C.C .....	40
4.2 Commande d'un système du deuxième ordre .....	42
4.3 Commande d'un système instable d'ordre 2 .....	45
Résultats de simulation .....	46
4.4 Commande d'un bras manipulateur classe 1 à	
3 degrés de liberté .....	58
Etude et modélisation .....	58
A - Energies du système .....	59
B - Autres représentations .....	62
4.4.1 Réponse en boucle ouverte .....	66
4.4.2 Réponse au contrôleur linéaire avec poursuite	
du modèle .....	67
4.4.3 Réponse au SFCIE .....	68
4.4.4 Synthèse d'un régulateur mixte (LMFC - SFCIE) .....	71
4.4.5 Application du MRAC .....	73
4.4.6 Application du MCS .....	79
 <b>DEUXIEME PARTIE :</b>	
1 . GENERALITES .....	84
2 . ADAPTATION DE L' ALGORITHME .....	85
2.1 Poursuite linéaire compensée .....	87

## INTRODUCTION :

Les contrôleurs conventionnels à contre réaction étant peu efficace aux changements dynamiques des procédés, il a été introduit depuis ces dernières décennies un nouveau type de contrôleur appelé: contrôleurs adaptatifs. Ces derniers sont destinés à assurer des performances acceptables, particulièrement lorsque les paramètres du procédé sont inconnus ou variables dans le temps. Plusieurs techniques de commande adaptative ont été développées, parmi lesquelles, la commande adaptative avec modèle de référence (MRAC). Cette approche proposée par WHITAKER en (1958) a vu ses premières applications en aéronotique dans les années 70, depuis, cette technique s'est largement répandue à d'autres domaines industriels.

Le travail développé dans cette étude fait l'analyse et la synthèse de trois contrôleurs adaptatifs basés sur les propriétés d'hypérestabilité [16][12]. Les applications développées mettent en relief les différentes propriétés des algorithmes considérés. Dans une première partie, les contrôleurs MRAC et MCS, sont appliqués à des processus à paramètres inconnus et constants, la stabilité, la convergence et la robustesse de ces algorithmes sont particulièrement étudiées. Les particularités de chacun d'eux sont aussi exposées. Dans un deuxième temps, en s'inspirant du MRAC, une approche est proposée pour la synthèse d'un contrôleur adaptatif appliqué à des systèmes à paramètres variables. Le même type de test vu précédemment lui a été soumis pour vérifier ses particularités.

Des applications sur différentes classes de système ont été considérées.

PREMIERE PARTIE :  
CHAPITRE 1

# 1) Les Systemes de commande Adaptative avec modele de référence (MRAC)

## 1.1) Introduction:

La commande adaptative avec modèle de référence est l'une des techniques les plus utilisées dans les systèmes industriels. Les performances souhaitées sont spécifiées dans un système idéal appelé "Modèle de référence". La détermination d'une loi de commande adaptative adéquate permet à la réponse du système de suivre celle du modèle même en présence de perturbations (paramétriques) agissant sur les performances dynamiques du système.

La figure (1-1) présente une configuration fondamentale des systèmes de commande avec modèle:

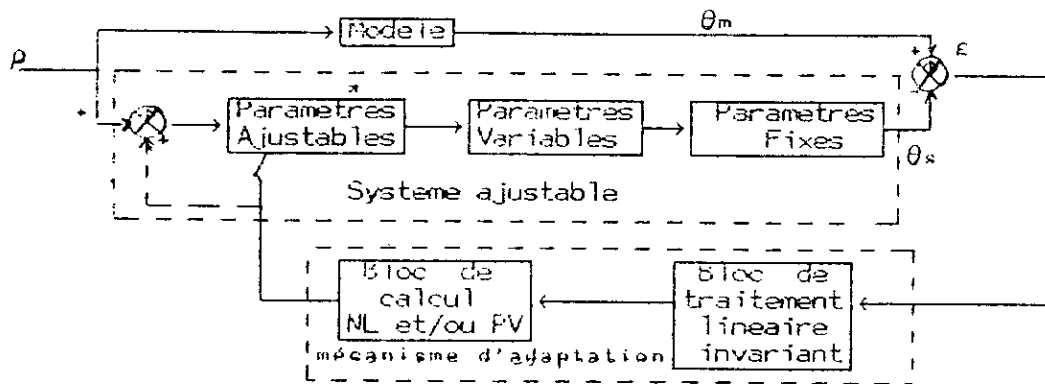


Fig (1-1) -schéma d'un système adaptatif avec modèle de référence

## 1.2) Notions de systèmes de commande adaptative avec modèle de référence (MRAC)

La figure (1-1) permet d'introduire quelques définitions sur les systèmes à MRAC

Le système ajustable est un ensemble de blocs comportant le procédé à commander. La réponse est spécifiée par le modèle et l'indice de performance est donné sous forme explicite.



Le système ajustable ( procédé + régulateur ) est décrit par :

$$\dot{y} = A_s(t) y + B_s(t) u \quad (1-1)$$

et sa sortie :

$$\theta_s = C y \quad (1-2)$$

Le modèle de référence est donné par :

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m \quad (1-3)$$

et sa sortie par :

$$\theta_m = C_m x_m \quad (1-4)$$

L'erreur d'état généralisée et l'erreur de sortie auront pour expressions respectives:

$$e = x_m - y \quad (1-5)$$

$$y = \theta_m - \theta_s \quad (1-6)$$

Le mécanisme d'adaptation comporte un ensemble de blocs linéaires ou non linéaires et variant ou invariants dans le temps (I.V.T). Les différents schémas des système à (M R A C) se classent selon:

1) leurs structures :

a) système adaptatif avec modèle "parallèle" représenté dans la figure (1-2-a).

b) système adaptatif avec modèle "série parallèle" représenté dans la figure (1-2-b-c).

c) système adaptatif avec modèle "série" représenté dans la figure (1-2-d).

2) leurs principes d'adaptation:

a) par ajustement des paramètres du système ajustable (figure 1-3-a).

b) par signaux superposés à l'entrée du système ajustable (figure 1-3-b).

a) leurs modes d'adaptation:

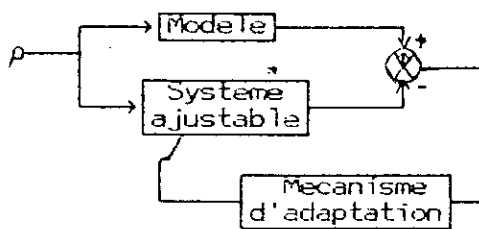
a) avec signaux de test

- Sur l'entrée du système (figure 1-4-a).
- Sur les paramètres (figure 1-4-b).

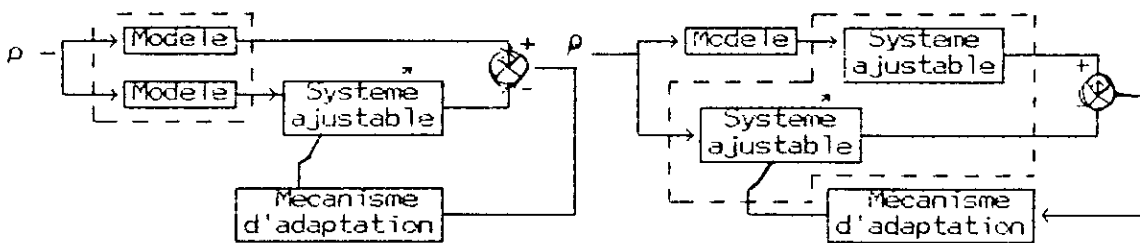
b) Sans signaux de test ( en utilisant les excitations déjà existants dans le système.

1.3) Synthèse des système à M R A C

La synthèse du mécanisme d'adaptation s'avère être le principal problème qui se pose lors de la réalisation des systèmes adaptatifs en général.

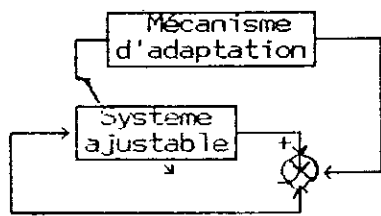


a) MRAC parallèle



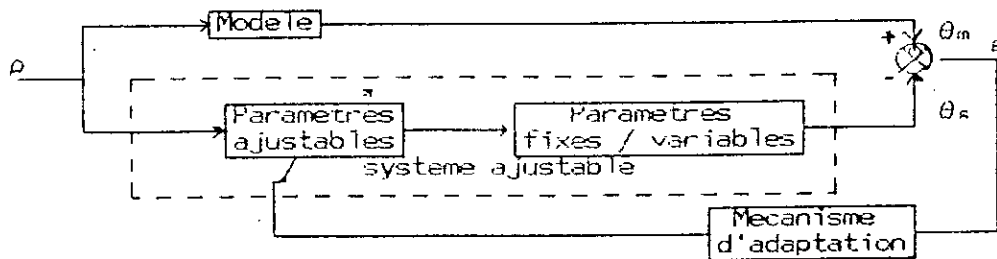
b,c) MRAC Serie.parallèle.

fig (1.3 b,c)

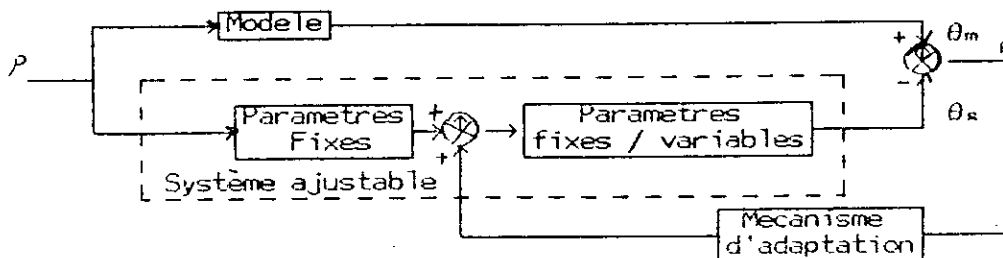


d) MRAC serie

Fig(1-2) Les differentes structures des systemes MRAC

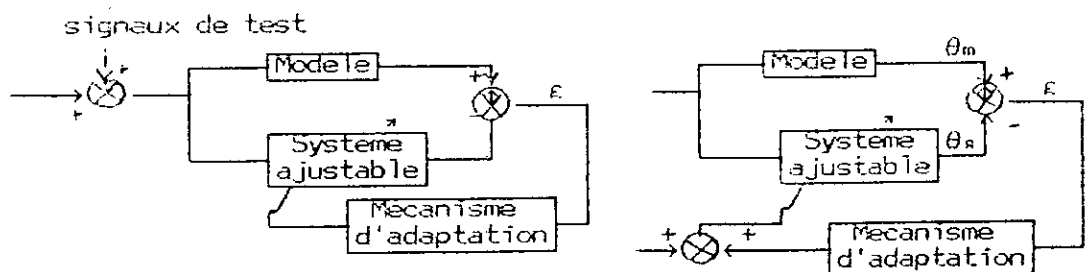


a) adaptation parametrique



b) adaptation par signal de commande.

fig(1-3) principe d'adaptation des MRAC



c) signaux de test sur l'entree d) signaux de test sur les parametres

Fig (1-4) Mode d'adaptation des MRAC

Plusieurs études théoriques ont été développées dans le but de fournir des méthodes de synthèse pour ce mécanisme, chacune faisant appel aux théories de base de l'automatique [11] [12] [15].

L'approche de synthèse se résume à ramener les systèmes adaptatifs à une forme structurellement proche des problèmes déjà traités par cette dernière.

EX :- le régulateur optimal à variables d'état.

- la stabilité des systèmes non linéaires à contre réaction.

La deuxième méthode sera utilisée pour le choix du mécanisme d'adaptation.

Les raisons de ce choix seront justifiées ultérieurement.

### 1.3.1) Description mathématique des systèmes à M R A C parallèle dans l'espace d'état:

La description mathématique des M R A C que nous allons présenter sera maintenue dans la suite du travail.

Le modèle de référence est défini par l'équation d'état (1-3) :

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m \quad (x(0) = x)$$

$x_m$  est un vecteur d'état de dimension  $n$

$u_m$  est le vecteur d'entrée de dimension  $m$

$A_m$  et  $B_m$  sont des matrices constantes de dimensions respectives  $(n \times n)$  et  $(n \times m)$

Le modèle de référence est stable et complètement contrôlable.

Le système ajustable (procédé + régulateur) est décrit par l'équation (1-1).

$$\dot{y} = A_s(e, t)y + B_s(e, t) u$$

$$y(0) = y_0, \quad A_s(0) = A_{s0} \quad \text{et} \quad B_s(0) = B_{s0}$$

où  $y$  est le vecteur d'état de dimension  $n$

$A_s$  et  $B_s$  sont des matrices variables dans le temps de dimension respectives  $(n \times n)$  et  $(n \times m)$ .

Elles dépendent de l'erreur d'état généralisée et d'autres variables.

Dans le cas où on introduit un signal de commande supplémentaire on aura :

$$\dot{y} = A_s y + B_s u + u_a(e, t) \quad (1-7)$$

$$y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad u_a(0) = u_{a0}$$

$A_s$  et  $B_s$  sont des matrices constantes, et le signal d'adaptation  $u_a$  dépend du vecteur  $e$ .

Le vecteur d'erreur d'état généralisée est donné par l'équation (1-5):

$$e = x_m - y$$

L'objectif d'une adaptation paramétrique serait de trouver une loi d'adaptation qui calcule  $A_s(e, t)$  et  $B_s(e, t)$  de sorte que l'erreur d'état généralisée tende vers zéro pour toute entrée de référence.

Afin que les paramètres ajustés à un instant  $t$  dépendent des paramètres déjà calculés aux instants précédents ( $0 \leq \tau \leq t$ ) la loi d'adaptation suivante sera proposée:

$A_s(e, t) = F(e, \tau, t) + A_s(0)$	$0 \leq \tau \leq t$	(1-8)
$B_s(e, t) = G(e, \tau, t) + B_s(0)$	$0 \leq \tau \leq t$	(1-9)

On dit que le mécanisme d'adaptation est à mémoire

Dans le cas d'un signal de commande supplémentaire la loi d'adaptation sera :

$u_a(e, t) = u(e, \tau, t) + u_a(0)$	$0 \leq \tau \leq t$	(1-10)
--------------------------------------	----------------------	--------

### 1.3.2) Formulation du problème de synthèse des contrôleurs adaptatifs avec modèle de référence

Le problème de synthèse des systèmes adaptatifs avec modèle peut être formulé comme suit :

trouver une loi d'adaptation indépendante des écarts initiaux  $(A_m - A_s(0))$ ,  $(B_m - B_s(0))$ , et de l'erreur d'état généralisée initiale  $e(t_0) = x_m(t_0) - y(t_0)$ , pouvant assurer une adaptation asymptotique parfaite caractérisée par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (1-11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (A_s(t) - A_m) = 0 \quad (1-12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (B_s(t) - B_m(t)) = 0 \quad (1-13)$$

Le problème de l'adaptation asymptotique parfaite peut être ramené à un problème de stabilité de l'erreur, de sorte à réaliser la condition (1-11).

Pour assurer la poursuite des paramètres du modèle par les paramètres du système ajustable, et de ce fait, minimiser l'écart  $e(t)$ , plusieurs stratégies ont été développées, certaines sont basées sur la stabilité de  $e(t)$  (convergence asymptotique vers zéro) et d'autres sont propres au concepteur (ex : stratégies basées sur le contrôle optimale).

La stabilité asymptotique de l'écart  $e(t)$  fut en premier lieu étudiée à l'aide des fonctions de Lyapounov, mais on porta après l'attention sur des propriétés de stabilité plus générales, en considérant en dehors de la stabilité asymptotique, la propriété d'Entrée Bornée - Sortie Bornée et certaines propriétés d'hyper-stabilité [11][12][15].

### 1.3.3) Synthèse:

Nous aborderons les deux approches déjà introduites

ie :

- Synthèse par utilisation des fonctions de Lyapounov.
- Synthèse par utilisation du concept d'hyperstabilité.

#### 1.3.3.1) Utilisation des fonction de Lyapounov:

Le modèle est donné par l'eq.(1-3) :

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m$$

Le système ajustable est donné par l'eq.(1-1)

$$y = A_s(e, t) y + B_s(e, t) u$$

La méthode consiste à stabiliser l'erreur au sens de Lyapounov (2<sup>ème</sup> Méthode de Lyapounov) et d'en déduire  $A_s(e, t)$  et  $B_s(e, t)$ .

L'évolution dynamique de l'erreur est donnée par l'équation :

$$\dot{e} = A_m e + (A_m - A_s(e, t)) y + (B_m - B_s(e, t)) u \quad (1-14)$$

On choisira une fonction de Lyapounov  $V$  positive sous une forme quadratique de toutes les erreurs et écarts pouvant se produire (erreurs paramétriques et erreur généralisée).

$$\begin{aligned} \text{Soit } V = & e^T P e + \text{tr} \left( [A_m - A_s(e, t)]^T F \bar{A}^{-1} [A_m - A_s(e, t)] \right) \\ & + \text{tr} \left( [B_m - B_s(e, t)]^T F \bar{B}^{-1} [B_m - B_s(e, t)] \right) . \end{aligned} \quad (1-15)$$

Les matrices  $P$ ,  $F \bar{A}^{-1}$ ,  $F \bar{B}^{-1}$  étant définies positives, leur choix déterminera l'algorithme d'adaptation.

La dérivée de  $V$  s'écrira :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e^T (A_m^T P + P A_m) e + 2 \text{tr} \left( [A_m - A_s(e, t)]^T [P e y^T - F \bar{A}^{-1} \dot{A}_s(e, t)] \right) \\ & + 2 \text{tr} \left( [B_m - B_s(e, t)]^T [P e u^T - F \bar{B}^{-1} \dot{B}_s(e, t)] \right) \end{aligned} \quad (1-16)$$

La matrice  $A_m$  étant une matrice d'Hurwitz, il vient :

$$A_m^T P + P A_m = -Q$$

où  $Q$  est une matrice arbitraire semi-définie positive qui permettra de calculer  $P$ .

L'eq (1-16) s'écrira :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + 2 \operatorname{tr} \left\{ [A_M - A_s(e,t)]^T [P e y^T - F_A^{-1} \dot{A}_s(e,t)] \right\} \\ & + 2 \operatorname{tr} \left\{ [B_M - B_s(e,t)]^T [P e u^T - F_B^{-1} \dot{B}_s(e,t)] \right\} \end{aligned} \quad (1-17)$$

$V$  doit être négative pour satisfaire la condition suffisante de stabilité au sens de Lyapounov.

Le premier terme du second membre de l'équation (1-17) est négatif pour tout  $e \neq 0$ , les deux autres termes seront nuls si l'on choisit des lois d'adaptation des matrices  $A_s(e,t)$  et  $B_s(e,t)$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A}_s(e,t) = F_A (P e) y^T \quad (1-18) \\ \dot{B}_s(e,t) = F_B (P e) u^T \quad (1-19) \end{array} \right.$$

Par intégration de (1-18) et (1-19) on obtient les lois d'adaptation suivantes :

$A_s(e,t) = \int_0^t F_A (P e) y^T dt + A_s(0) \quad \dots \dots (1-20)$
$B_s(e,t) = \int_0^t F_B (P e) u^T dt + B_s(0) \quad (1-21)$

Il y'aura stabilité asymptotique pour toute matrice de gain  $F_A$  et  $F_B$  définies positives et pour toute fonction vectorielle  $u$  continue par morceaux.



Les fonctions de Lyapounov peuvent être utilisées avec succès pour la synthèse des systèmes adaptatifs avec modèle de référence stable, mais leur utilisation est parfois limitée car on ne sait pas comment choisir la classe des fonctions de Lyapounov convenable conduisant à des lois d'adaptation autres que celles décrites précédemment : (1-20) et (1-21)

### 1.3.3.2) Utilisation des concepts d'hyperstabilité et de positivité:

La stratégie de poursuite basée sur l'hyperstabilité consiste à choisir des paramètres ajustables de façon à ce que le système adaptatif soit hyperstable. ( annexe [8] )

L'hyperstabilité est la stabilité globale asymptotique d'une classe de systèmes ayant la forme de la figure (1.5), ils sont formés d'un bloc linéaire positif dans la chaîne directe en contre réaction avec un bloc non linéaire obéissant à l'inégalité de Popov :

$$\int_0^{t_1} v^T w dt \geq -\gamma_0^2 \quad \forall t_1 \geq 0 \quad (1-22)$$

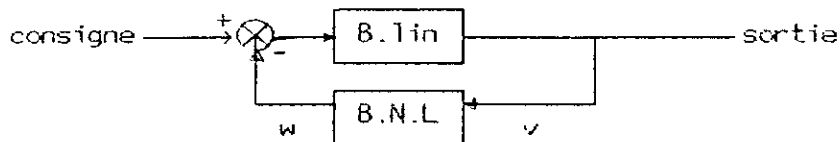


fig 1.5

Pour l'utilisation de cette approche, il a déjà été développé une méthodologie simple, et structurée de synthèse de la loi d'adaptation remplissant les exigences requises.

Nous devons passer par 4 étapes élémentaires [12], dont la première revient à mettre le système considéré sous forme d'un bloc linéaire en contre réaction avec un bloc non linéaire comme dans la fig (1.5).

1<sup>ère</sup> Étape : Evolution dynamique de l'erreur :

étant donné que l'erreur  $e = x_m - x$  est la principale information qui existe entre le système ajustable et le modèle, on va commencer par tirer son équation dynamique afin de la représenter

sous la forme de la fig (1.5).

En combinant les équations (1-1), (1-3) et (1-5) on obtient :

$$\dot{e} = A_m e + (A_m - A_s(\sigma) - F(e, \tau, t))y + (B_m - B_s(\sigma) - G(e, \tau, t))u_m \quad (1-23)$$

L'eq (1-23) montre que l'évolution dynamique de l'erreur est équivalente au système à contre réaction non linéaire suivant:

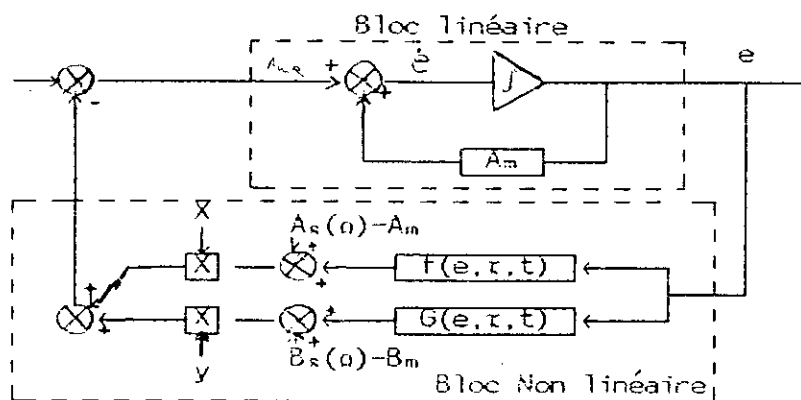


Fig (1.6) Représentation de l'évolution dynamique de l'erreur.

Notre but est d'assurer une convergence asymptotique globale de l'erreur vers la consigne Zero :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Nous verrons dans les étapes qui suivront comment modifier le bloc linéaire afin qu'il soit positif, et nous déterminerons les lois d'adaptation qui satisferont à l'Inégalité de Popov.

2<sup>ème</sup> Etape: Positivité du bloc linéaire :

soit le système linéaire représenté par la figure (1,7)

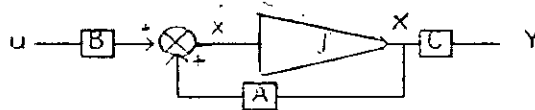


Fig (1.7)

ses équations d'état sont données par le système suivant :

$$\dot{x} = A x + B u \quad (1-24)$$

$$Y = C x \quad (1-25)$$

$$H(s) = C (s I - A)^{-1} B \quad (1-26)$$

Un tel système est positif et sa fonction de transfert  $H(s)$  est réelle positive s'il existe une matrice  $P$  définie positive tel que

$$C = B^T P \quad (1-27)$$

$P$  solution de l'équation de Lyapounov

$$P A + A^T P = -Q \quad (1-28)$$

$Q$  étant une matrice semidéfinie positive.

pour assurer la positivité du bloc linéaire de la fig (1.6) et de vérifier la 1<sup>ère</sup> condition du théorème d'hyperstabilité (Annexe B), il faudrait rajouter un compensateur linéaire à la chaîne directe ie :

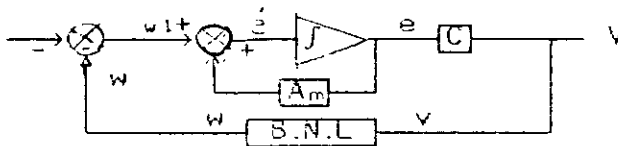


Fig (1.8) evolution dynamique de l'erreur avec compensateur linéaire

avec  $v=Ce$ ,  $C$  étant solution de l'équation de Lyapounov suivante

$$P A_m + A_m^T P = -Q \quad (1-29)$$

Le système régissant l'évolution de l'erreur devient

$$\begin{cases} \dot{e} = A_m e + I w_1 & (1-30) \\ v = C e & (1-31) \end{cases}$$

$$w_1 = -w = (A_m - A_s(\rho) - F(v, \tau, t)) y + (B_m - B_s(\rho) - G(v, \tau, t)) u_m \quad (1-32)$$

Nous travaillerons par la suite avec l'erreur  $u$ , dite aussi erreur améliorée.

3<sup>ème</sup> Etape: Vérification de l'Inégalité de Popov:

dans cette troisième étape on commencera par proposer des solutions plus explicites pour les paramètres ajustables et on choisira une loi d'adaptation du type Proportionnel + Intégral de sorte que l'Inégalité de Popov soit vérifiée.

L'action Proportionnel permettra d'accélérer le processus de convergence (adaptation) et l'action intégrale assurera la propriété de mémoire du mécanisme d'adaptation.

Les lois d'adaptation (1-3) et (1-3) deviendront :

$$A_s(e, t) = A_s(v, t) = \int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) + A_s(a) \quad (1-33)$$

$$B_s(e, t) = B_s(v, t) = \int_0^t \psi_1(v, t, \tau) d\tau + \psi_2(v, t) + B_s(a) \quad (1-34)$$

où  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des matrices variables dans le temps à déterminer, leur détermination se fera par la résolution de l'intégralité de Popov.

dans [ 12 ] on commença par proposer des solutions  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  et on démontra qu'elles conduisaient bien à une vérification de l'inégalité de Popov.

Ces Solutions Sont :

$\phi_1 = F_A(t-\tau) v(\tau) [G_A y(\tau)]^T$	(1-35)
$\phi_2 = F_A(t) v(t) [G_A(t) y(t)]^T$	(1-36)
$\psi_1 = F_B(t-\tau) v(\tau) [G_B u_m(\tau)]^T$	(1-37)
$\psi_2 = F_B(t) v(t) [G_B(t) u_m(t)]^T$	(1-38)

où  $v=Ce$  est l'erreur améliorée.

$F_A(t-\tau)$  et  $F_B(t-\tau)$  sont des matrices noyaux définies positives dont les matrices de transfert sont réelles positives avec un pôle en  $s = 0$ .

$G_A$  et  $G_B$  sont des matrices définies positives .  
 et  $F_A(t)$ ,  $G_A(t)$ ,  $F_B(t)$ ,  $G_B(t)$  sont Semie définies positives.

Cas particuliers :

1 \* Les matrices précédentes sont toutes constantes :

$$F_A(t-\tau)=F_A, F_B(t-\tau)=F_B, F_A'(t)=F_A', \dots$$

2 \* on considère que les matrices ci dessus sont toutes égales à un scalaire que multiplie une matrice Identité :

$$F_A=f_a I, F_B=f_b I, F_A'=f_a' I, F_B'=f_b' I$$

$$G_A=g_a I, G_B=g_b I, G_A'=g_a' I \text{ et } G_B'=g_b' I$$

Les lois d'adaptation deviennent :

$$\dot{\phi}_1 = f_a V(\tau) [g_a y(\tau)]^T = f_1 V(\tau) y^T(\tau), \quad (1-39)$$

$$\dot{\phi}_2 = f_a' V(t) [g_a' y(t)]^T = f_2 V(t) y^T(t), \quad (1-40)$$

$$\dot{\psi}_1 = f_b V(\tau) [g_b u_m(\tau)]^T = f_3 V(\tau) u_m^T(\tau), \quad (1-41)$$

$$\dot{\psi}_2 = f_b' V(t) [g_b' u_m(t)]^T = f_4 V(t) u_m^T(t), \quad (1-42)$$

où  $f_1, f_2, f_3, f_4$  sont des scalaires  $> 0$

L'avantage de cette simplification est que nous avons à choisir 4 scalaires  $> 0$  au lieu de 8 matrices  $(n \times n)$  définies positives.

Remarque : Toutes les solutions vues précédement sont suffisantes et non nécessaire à la condition d'hyperstabilité.

4<sup>ème</sup> Etape: Dans cette étape on explicite les lois d'adaptation et on implante le régulateur adaptatif.

conclusions:

1 \* Une comparaison tres brève prévoit l'efficacité du régulateur obtenu à partir du concept de l'hyperstabilité qui est du type proportionnel integral alors que le régulateur issu de la stabilité au sens de Lyapounov est du type integral uniquement.

2 \* La remarque precedente ne fait aucune reproche à la stabilité ainsi définie par Lyapounov mais sousentend la difficulté du choix de la nature de la loi d'adaptation car son utilisation revient à tirer des lois d'adaptation à partir d'une fonction de Lyapounov fixe, par contre dans l'utilisation du concept de l'hyperstabilité on verifie que les solution proposées remplissent les conditions d'hyperstabilité sinon on fait les modifications nécessaires.

3 \* Nous proposons la procédure de synthèse suivante :

a) choix d'une structure de système ajustable:

- choix de la régulation non adaptative
- voir si on dispose d'entrées auxilliaires du système à contrôler
- voir si on dispose de gains ajustables.
- opter pour une structure d'adaptation  
(en agissant sur les gains, sur les entrées, ou sur le deux).

b) Expliciter les parties ajustables et les parties non ajustables du système global.

c) Expliciter l'équation régissant l'évolution dynamique de l'erreur

d) choix de la methode à utiliser afin d'assurer la stabilité de l'erreur (fonctions de Lyapounov ou hyperstabilité).

Dans notre etude nous presenterons trois régulateurs adaptatifs synthétisés à la base du concept d'hyperstabilité à cause des avantages apportés par la nature des solutions (Adaptation PI).

PREMIERE PARTIE :  
CHAPITRE 2

2.2) Equations et conditions de la poursuite non adaptative (LMFC) :

Les equation du systéme de la fig 2.1 (le L M F C) se présentent comme suit :

- Modéle :  $\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m$  (2-1)

- procédé à contrôler :  $\dot{y} = A_p y + B_p u_p$  (2-2)

- commande :  $u_p = -K_p y + K_m x_m + K_u u_m$  (2-3)

$y$ : vecteur d'état du procédé (dimension  $n$ )

$u_m$ : vecteur d'entrée du modéle (dimension  $m$ )

$u_p$ : vecteur d'entrée du procédé (dimension  $m$ )

$A_m, B_m, A_p, B_p, K_m, K_p$  et  $K_u$  sont des matrices constantes aux dimensions appropriées.

- le vecteur d'erreur  $e = x_m - y$  (2-4)

En combinant ces différentes équations on obtient :

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_m) e + [A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] y + [B_m - B_p K_u] u_m$$

(2-5)

Pour avoir une poursuite parfaite du modéle, on doit assurer pour toute entrée de référence  $u_m$  continue par morceaux, et un  $e(0) = 0$ :

$$\forall t > 0 \quad e(t) = x_m - y = 0 \quad \text{et} \quad \dot{e} = \dot{x}_m - \dot{y} = 0.$$

Nous concluons immédiatement que ceci peut être réalisé si

$$[A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] y + [B_m - B_p K_u] u_m = 0$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, u_m \in \mathbb{C}^m \quad (2-6)$$

Et en plus le système définis par :

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_m) e \quad (2-7)$$

doit être asymptotiquement stable . ce qui implique que la matrice  $(A_m - B_p K_m)$  doit être une matrice d'Hurwitz.

L'équation (3-6) donne :

$$\forall y, u_m \quad B_p (K_m - K_p) = A_m - A_p \quad (2-8)$$

$$B_p K_u = B_m \quad (2-9)$$



## 2.2) Equations et conditions de la poursuite non adaptative (LMFC) :

Les equation du système de la fig 2.1 (le L M F C) se présentent comme suit :

- Modèle :  $\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m$  (2-1)

- procédé à contrôler :  $\dot{y} = A_p y + B_p u_p$  (2-2)

- commande :  $u_p = -K_p y + K_m x_m + K_u u_m$  (2-3)

$y$ : vecteur d'état du procédé (dimension  $n$ )

$u_m$ : vecteur d'entrée du modèle (dimension  $m$ )

$u_p$ : vecteur d'entrée du procédé (dimension  $m$ )

$A_m, B_m, A_p, B_p, K_m, K_p$  et  $K_u$  sont des matrices constantes aux dimensions appropriées.

- le vecteur d'erreur  $e = x_m - y$  (2-4)

En combinant ces différentes équations on obtient :

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_m) e + [A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] y + [B_m - B_p K_u] u_m \quad (2-5)$$

Pour avoir une poursuite parfaite du modèle, on doit assurer pour toute entrée de référence  $u_m$  continue par morceaux, et un  $e(0) = a$ :

$$\forall t > 0 \quad e(t) = x_m - y = 0 \quad \text{et} \quad \dot{e} = \dot{x}_m - \dot{y} = 0.$$

Nous concluons immédiatement que ceci peut être réalisé si

$$[A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] y + [B_m - B_p K_u] u_m = 0 \quad (2-6)$$

$\forall y \in \mathbb{R}^n; u_m \in \mathbb{C}^m$

Et en plus le système définis par :

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_m) e \quad (2-7)$$

doit être asymptotiquement stable . ce qui implique que la matrice  $(A_m - B_p K_m)$  doit être une matrice d'Hurwitz.

l'équation (3-6) donne :

$$\forall y, u_m \quad B_p (K_m - K_p) = A_m - A_p \quad (2-8)$$

$$B_p K_u = B_m \quad (2-9)$$

Cherchons les conditions d'existence des solutions des équations (3-8) et (3-9)

ce problème n'est pas facile à résoudre, car  $B_p$  peut-être une matrice rectangulaire et / ou singulière.

Utilisant les résultats concernant l'existence de la solution pour l'équation matricielle suivante :

$$M X = N \quad (2-10)$$

$$\text{la solution existe si } \text{rang}(M) = \text{rang}(M, N) \quad (2-11)$$

dans notre cas on aura :

$$\text{rang } B_p = \text{rang}[B_p, (A_m - A_p)] = \text{rang}[B_p, B_m] \quad (2-12)$$

cela veut dire que la solution existe si les vecteurs colonnes de  $(A_m - A_p)$  et  $B_p$  sont linéairement dépendants des vecteurs colonnes de la matrice  $B_p$ .

Soit la matrice  $B_p^+ = (B_p^T B_p)^{-1} B_p^T$

$$\text{avec } B_p^+ B_p = I$$

$B_p^+$  est la pseudo inverse gauche de  $B_p$  qui existe si  $B_p^T B_p$  est une matrice non singulière.

Si  $B_p^+$  existe on aura :

$$\begin{cases} K_m - K_p = B_p^+ (A_m - A_p) & (2-13) \\ K_u = B_p^+ B_m & (2-14) \end{cases}$$

On remplaçant (2-13) et (2-14) dans (2-8) et (2-9) nous aurons

$$\begin{cases} (I - B_p B_p^+) (A_m - A_p) = 0 & (2-15) \\ (I - B_p B_p^+) B_m = 0 & (2-16) \end{cases}$$

Les conditions (2-15) et (2-16) sont connues sous le nom de Conditions d'Erzberger's pour une poursuite parfaite du modèle.

Si les conditions (2-15) et (2-16) sont satisfaites on calculerait  $K_m$ ,  $K_p$  et  $K_u$  à partir (2-13) et (2-14)

- Si  $B_p$  est une matrice carrée non singulière  $B_p^+ = B_p^{-1}$   
les équations (2-15) et (2-16) sont toujours vérifiées.
- Si  $B_p$  est une matrice singulière ou rectangulaire  $B_p B_p^+ \neq I$ ,  
(2-15) et (2-16) seront vérifiées si  $(I - B_p B_p^+)$  est orthogonale à  $B_m$  et  $(A_m - A_p)$ .

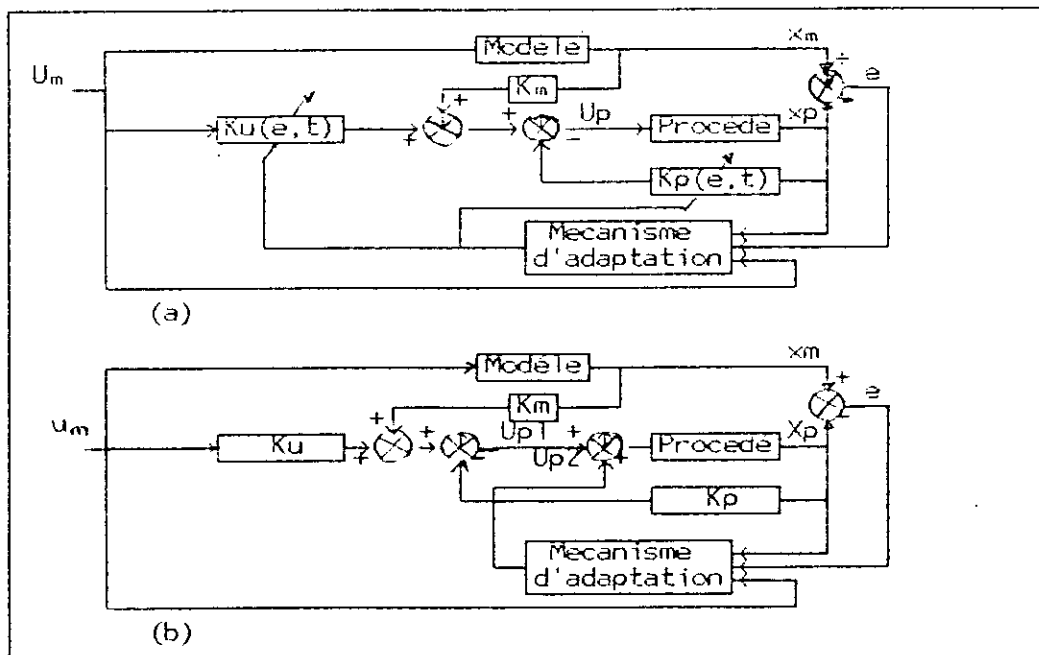


Fig (2-2) Systèmes MRAC parallèles

- (a) avec disponibilité de régulateurs ajustables
- (b) avec disponibilité de d'entrée auxiliaire

Il pourra être conclu que les conditions (2-15) et (2-16) sont essentiellement liées à la structure de  $A_m$ ,  $A_p$ ,  $B_m$  et  $B_p$  et non pas aux valeurs de leurs éléments.

### 2.3) Synthèse d'un contrôleur adaptatif avec poursuite du modèle (AMFC):

une modification très simple peut se faire sur le contrôleur précédent (LMFC) afin qu'il soit adaptatif (AMFC) et cela en ajoutant un bloc d'adaptation qui pourra agir sur:

(1) les gains  $K_u$  et  $K_p$  (Fig 2-2-a)

(si on dispose de gains ajustables)

(2) sur l'entrée du procédé par signaux

superposés à l'ancienne commande ( $U_p$ ) (fig 2-2-b)

- D'après la fig (2-2-a) on peut exprimer la commande du procédé par :

$$u_p = -K_p(e,t)y + K_u(e,t)u_m + K_m x_m \quad (2-17)$$

$$K_p(e,t) = K_p - \Delta K_p(e,t) \quad (2-18)$$

$$K_u(e,t) = K_u + \Delta K_u(e,t) \quad (2-19)$$

- D'après la fig (2-2-b) on a :

$$u_p = u_{p1} + u_{p2} \quad (2-20)$$

$$\text{avec } u_{p1} = -K_p y + K_m x + K_u u_m \quad (2-21)$$

$$u_{p2} = \Delta K_p(e,t)y + \Delta K_u(e,t)u_m \quad (2-22)$$

Dans le cas de disponibilité d'entrées auxiliaires (fig 2-2-b), il vient que :

$$\dot{x} = A_m x + B_m u_m$$

$$y = A_p y + B_p u$$

$$\Rightarrow y = A_p y + B_p u_{p1} + B_p u_{p2} \quad (2.23)$$

$$e = x - y$$

$$\text{avec } u_{p1} = K_p y + K_m x + K_u u_m$$

$$u_{p2} = \Delta K_p(e,t)y + \Delta K_u(e,t)u_m$$

Le mécanisme d'adaptation va générer les deux matrices  $\Delta K_p(e,t)$  et  $\Delta K_u(e,t)$  de sorte que l'erreur  $e$  tend vers zéro sous certaines conditions.

En remplaçant les expressions de  $u_{p1}$  et  $u_{p2}$  dans l'équation (2-2) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{y} = & [ A_p - B_p K_p + B_p \Delta K_p(e,t) + B_p K_m ] y \\ & + B_p [ K_u + \Delta K_u(e,t) ] u_m + B_p K_m e \end{aligned}$$

En identifiant cette équation avec l'équation d'un système ajustable [12] définis par l'équation suivante ;

$$y = A_s(v, t)y + B_s(v, t)u + Ke \quad (2.24)$$

On aura :

$$A_s(v, t) = A_p - B_p K_p + B_p K_m + B_p \Delta K_p(e, t) \quad (2-25)$$

$$B_s(v, t) = B_p [K_u + \Delta K_u(e, t)] \quad (2-26)$$

avec  $v = De = B_p^T P$  (2-27)

$$A_s(v, t) = B_p \left[ \int_0^t \phi_1'(v, t, \tau) + \phi_2'(v, t) \right] + A_s(0) \quad (2-28)$$

$$= \int_0^t \phi_1'(v, t, \tau) + \phi_2'(v, t) + A_s(0)$$

$$B_s(v, t) = B_p \left[ \int_0^t \psi_1'(v, t, \tau) + \psi_2'(v, t) \right] + B_s(0) \quad (2-29)$$

$$= \int_0^t \psi_1'(v, t, \tau) + \psi_2'(v, t) + B_s(0)$$

$$A_s(0) = A_p + B_p [-K_p + K_m + \Delta K_p(0)] \quad (2-30)$$

$$B_s(0) = B_p [K_u + \Delta K_u(0)] \quad (2-31)$$

En introduisant (2-28) et (2-29) dans (2-25) et (2-26) on obtient :

$$\Delta K_p(e, t) = \Delta K_p(v, t) = \int_0^t \phi_1'(v, t, \tau) + \phi_2'(v, t) + \Delta K_p(0) \quad (2-32)$$

$$\Delta K_u(e, t) = \Delta K_u(v, t) = \int_0^t \psi_1'(v, t, \tau) + \psi_2'(v, t) + \Delta K_u(0) \quad (2-33)$$

$\phi_1$  et  $\psi_1$  assurent la mémoire du mécanisme d'adaptation

$\phi_2$  et  $\psi_2$  sont des termes transitoires, ils s'annulent à la fin du processus d'adaptation

$\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$  ont la même expression que dans (2-35) à (2-42)

PREMIERE PARTIE :  
CHAPITRE 3

### 3) Synthèse d'un contrôleur Adaptatif minimal

#### 3.1) Généralités :

Un contrôleur minimal devrait se présenter comme suit :

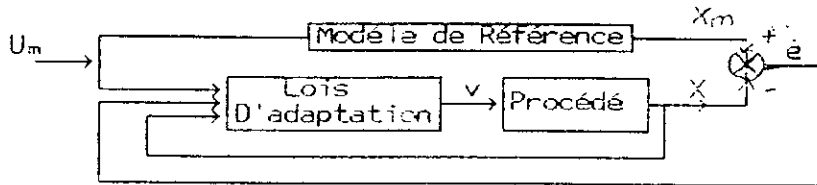


Fig 3.1 Implantation du Contrôleur Minimal

C'est un contrôleur dans lequel la commande provient totalement du mécanisme d'adaptation et ne suppose aucune implantation préalable d'un quelconque contrôleur non adaptatif et cela afin de minimiser toutes les informations prérequises sur le système

L'objectif :

Le but est de synthétiser un contrôleur avec seulement la connaissance de l'ordre du système (Ses états étants accessibles)

Sur une idée originale apparue dans [4] en 1990, le Contrôleur Minimal a été proposé sous le nom de M.C.S (Minimal Controller Synthesis) en posant  $K_m=K_p=K_u=0$ .

( $K_m$ ,  $K_p$  et  $K_u$  sont les gains du L M F C).

#### 3.2) Particularités:

Landau [12] a montré que la poursuite du modèle aura lieu même en partant de gains  $K_u$ ,  $K_p$  et  $K_m$  ne satisfaisant pas aux conditions d'Erzberger's à condition qu'il existe des gains  $K_u^0$ ,  $K_p^0$  et  $K_m^0$  les vérifiant

Le contrôleur minimal devrait avoir les particularités suivantes :

1) une connaissance minimale sur le système :  
 ie nombre d'entrées - sorties à condition que les états  
 soient accessibles.

2) ne suppose aucune implantation préalable d'un quelconque  
 régulateur :

Il est très économique

3) Surpasse les condition d'Erzberger's.

### 3.3) Synthèse du contrôleur Minimal (M.C.S):

Procédons à la synthèse du Contrôleur Minimal à modèle de  
 référence avec la même méthode utilisée précédemment :

ie:

- Tirer l'évolution dynamique de l'erreur
- Faire sortir les deux blocs linéaire et non linéaire  
 régissant l'évolution de l'erreur .
- Chercher des solutions de même nature que ceux proposées au  
 (§1 et §2) afin de satisfaire la condition d'hyperstabilité
- Voir en parallèle les limites de choix des solutions.

Les équations du procédé à contrôler et du modèle sont données  
 par :

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m \quad (3-1)$$

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u_p \quad (3-2)$$

La commande est donnée par l'équation

$$u_p = \Delta K_p(e, t) x_p(t) + \Delta K_u(e, t) u_m(t) \quad (3-3)$$

L'erreur  $e = x_m - x_p$  est régie par :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_m x_m - A_p x_p + B_m u_m - B_p (\Delta K_p x_p + \Delta K_u u_m) \\ \Rightarrow \dot{e} &= A_m e + [(A_m - A_p - B_p \Delta K_p) x_p + (B_m - B_p \Delta K_u) u_m] \quad (3-4) \end{aligned}$$



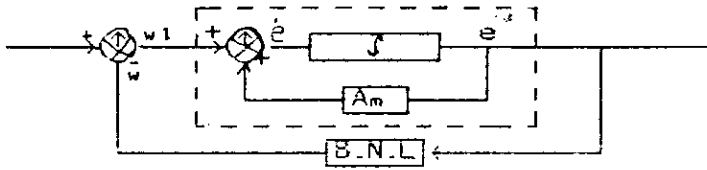


Fig 3.2 Evolution dynamique de l'erreur

Le système régissant l'évolution dynamique de l'erreur est donné par les équations (3-5) et (3-6):

$$\begin{cases} \dot{e} = A_m e + [W]w_1 & (3-5) \\ w_1 = -w = (A_m - A_p - B_p d K_p) x_p + (B_m - B_p d K_u) u_m & (3-6) \end{cases}$$

pour assurer l'hyperstabilité du système défini par les eq.(3-5) et (3-6), nous devons vérifier le théorème d'hyperstabilité (annexe B) ie vérifier

- 1) la positivité du bloc linéaire directe
- et 2) Inégalité de Popov pour le bloc non linéaire

Afin que (1) soit vérifiée nous rajouterons un compensateur linéaire et travaillerons avec l'erreur améliorée v.

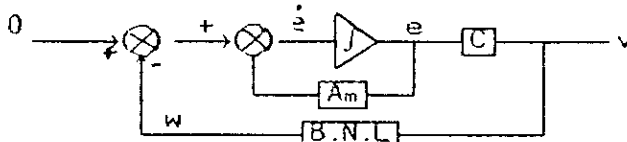


Fig 3.3

Evolution dynamique de l'erreur

avec bloc direct: positif

$$v = C e \quad (3-7)$$

$$\text{t.q: } C = P \quad (3-8)$$

P étant solution de l'équation de Lyapounov:

$$A_m P + P A_m^T = -Q \quad P > 0 \text{ et } Q \geq 0 \quad (3-9)$$

Le système [ (3-5) et (3-6) ] devient

$$\begin{cases} \dot{e} &= A_m e + I w_1 \\ v &= C e \\ w_1 &= -W = (A_m - A_P - B_P dK_P) x_P + (B_m - B_P dK_u) u_m \end{cases}$$

Il reste à déterminer le bloc non linéaire ( ie :  $\Delta K_P$  et  $\Delta K_u$  ) de sorte que l'inégalité de Popov soit vérifiée .

1<sup>ère</sup> Approche:

Une première approche serait de tirer l'analogie avec les solutions proposées dans le chapitre 1 en identifiant  $A_s(v, t)$  et  $B_s(v, t)$ .

Explicitons  $x_P$  :

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= A_P x_P + B_P u_P = A_P x_P + B_P (\Delta K_P x_P + \Delta K_u u_m) \\ \dot{x}_P &= (A_P + B_P \Delta K_P) x_P + B_P \Delta K_u u_m \end{aligned} \quad (3-10)$$

Identifions avec l'équation (1.1)

$$\dot{y} = A_s(v, t) y + B_s(v, t) u_m$$

qui est l'équation du système globale (procédé + régulateur).

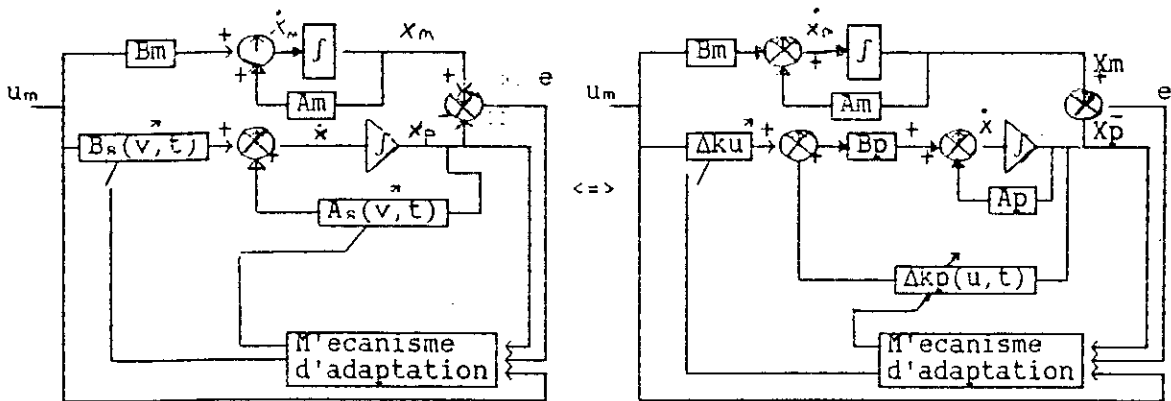


fig 3.4 structure d'équivalence

Il vient que :  $A_s(v, t) = A_P + B_P \Delta K_P(v, t) = \int_0^t \phi_1 + \phi_2 + A_s(\alpha)$  (3-11)

et  $B_s(v, t) = B_P \Delta K_u(v, t) = \int_0^t \psi_1 + \psi_2 + B_s(\alpha)$  (3-12)

Sachant que les solutions proposées pour  $A_s(v, t)$  et  $B_s(v, t)$  (chap 1) vérifient l'Inégalité de Popov, il suffirait de poser :

$$B_P \Delta K_P(u, t) = \int_0^t \phi_1 dt + \phi_2 + A_s'(\alpha) \quad (3-13)$$

$$B_P \Delta k_u(u, t) = \int_0^t \psi_1 d\tau + \psi_2 + B_s'(a) \quad (3-14)$$

$$A_s'(a) = A_s(a) - A_P \quad (3-15)$$

pour aboutir aux lois d'adaptation suivante :

$$\Delta k_P(v, t) = B_P^+ \int_0^t \phi_1 d\tau + B_P^+ \phi_2 + \Delta k_P(a) \quad (3-16)$$

$$\Delta k_u(v, t) = B_P^+ \int_0^t \psi_1 d\tau + B_P^+ \psi_2 + \Delta k_u(a) \quad (3-17)$$

$\phi_1, \phi_2, \psi_1$  et  $\psi_2$  sont donnés par les eq. ( 1.35 ) à ( 1.42 )

$$\text{et} \quad \Delta k_P(a) = B_P^+ A_s'(a) \quad (3-18)$$

$$\Delta k_u(a) = B_P^+ B_s(a) \quad (3-19)$$

conclusion :

Ce type de solution nécessiterait la connaissance totale de  $B_P$  et l'existence de sa pseudo inverse ce qui limite l'utilisation de ce contrôleur et ne remplit pas les objectifs souhaités (§ 4.1 et § 4.2)

2<sup>ème</sup> Approche:

La deuxième approche consiste à former l'intégrale entrée - Sortie de Popov défini pour le bloc non linéaire et à voir pour quelles conditions l'inégalité (3-20) serait-elle vérifiée .

$$\eta(a, t_1) = \int_0^{t_1} v^T w dt \geq - \gamma_0^2 \quad \gamma_0: \text{cte positive finis} \quad (3-20)$$

le bloc non linéaire  $w=f(v)$  qui régit l'évolution de l'erreur est

donné par l'eq.(3-6)

$$w = ( B_P \Delta k_P(v, t) + A_P - A_m ) x_P + ( B_P \Delta k_u - B_m ) u_m$$

nous commencerons par proposer des solutions de même nature que (2.32) et (2.33).

ie :

$$\Delta k_p(v, t) = \int_a^t \xi_1 d\tau + \xi_2 + \Delta k_p(a) \quad (3-21)$$

$$\Delta k_u(u, t) = \int_a^t \rho_1 d\tau + \rho_2 + \Delta k_u(a) \quad (3-22)$$

$\xi_1, \xi_2, \rho_1$  et  $\rho_2$  étant de même forme que ( 1.35) à ( 1.42):

$$\xi_1 = k_1 v(\tau) x_p^T(\tau) \quad (3-23)$$

$$\xi_2 = k_2 v(t) x_p^T(t) \quad (3-24)$$

$$\rho_1 = R_1 v(\tau) u_m^T(\tau) \quad (3-25)$$

$$\rho_2 = R_2 v(t) u_m^T(t) \quad (3-26)$$

$K_1, K_2, R_1$  et  $R_2$  sont des matrices ( $m \times n$ ) à déterminer pour satisfaire l'inégalité (3-20)

posons:

$$1) w = (B_p \Delta k_p(v, t) + A_o) x_p + (B_p \Delta k_u + B_o) u_m \quad (3-27)$$

$$\text{avec } A_o = A_p - A_m \quad (3-28)$$

$$\text{et } B_o = -B_m \quad (3-29)$$

$$\text{et } 2) B_p k_1 = F_1 \quad (3-30)$$

$$B_p k_2 = F_2 \quad (3-31)$$

$$B_p R_1 = G_1 \quad (3-32)$$

$$B_p R_2 = G_2 \quad (3-33)$$

L'eq.(3.27) devient :

$$w = (F_1 \int_a^t v(\tau) x_p^T(\tau) + F_2 v(t) x_p^T(t) + A_o) x_p(t) + (R_1 \int_a^t v(\tau) u_m^T(\tau) + R_2 v(t) u_m^T(t) + B_o) u_m(t) \quad (3-34)$$

On peut ainsi diviser le problème de la résolution de l'inégalité (3-17) en 4 sous-problèmes. Ceci en posant :

$$\eta_i(a, t_1) = \eta_{i1}(a, t_1) + \eta_{i2}(a, t_1) + \eta_{i3}(a, t_1) + \eta_{i4}(a, t_1) \quad (3-35)$$

et il suffirait que

$\forall i=1..4$

$$\eta_i(a, t_1) \geq -\gamma_i^2 \quad \gamma_i : \text{constante finis positive} \quad (3-36)$$

Les  $\eta_i(a, t_1)$  sont donnés par :

$$\eta_1(a, t_1) = \int_0^{t_1} v^T (F_1 \int_0^t v(\tau) x_p^T(\tau) d\tau + A_0) x_p(t) dt \quad (3-37)$$

$$\eta_2(a, t_1) = \int_0^{t_1} v^T (F_2 v(t) x_p^T(t)) x_p(t) dt \quad (3-38)$$

$$\eta_1(a, t_1) = \int_0^{t_1} v^T (R_1 \int_0^t v(\tau) u_m^T(\tau) d\tau + B_0) u_m(t) dt \quad (3-39)$$

$$\eta_1(a, t_1) = \int_0^{t_1} v^T (R_2 v(t) u_m^T(t)) u_m(t) dt \quad (3-40)$$

Le problème devient ainsi similaire à celui traité dans [ 12 ] et les résultats et lemmes proposés peuvent directement être appliqués( Annexe C ).

Une remarque importante doit être signalée :

la structure de  $B_0$  doit être connue ( distribution et signe des éléments ).

Le but est de déterminer  $K_i$ ,  $K'_i$ ,  $R_i$  et  $R'_i$  tel que  $F_i$ ,  $F'_i$ ,  $G_i$  et  $G'_i$  obéissant aux caractéristiques suivantes (Annex D) :

- 1) Les éléments de  $F_i$ ,  $F'_i$ ,  $G_i$  et  $G'_i$  doivent être positifs ou nuls .
- 2) Il doit y'avoir au moins un élément non nul dans chaque matrice.

Cas SISO:

$$[K_i] = [R_i] = (1, n) \quad i = 1, 2 \quad (3-41)$$

Nous remarquons aisément que les  $\xi_i$  et  $\rho_i$  sont respectivement fonctions des produits  $K_i v$  et  $R_i v$  et que  $v$  dépend des  $e_i = x_{m_i} - x_{p_i}$

$$\text{par la relation } v = P e \quad (3-42)$$

$$\text{et } v_i = \sum_{k=1}^m P_{ik} e_k \quad (3-43)$$

Puisque chaque  $v_i$  est fonction de tous les  $e_k$  (ou presque tous), il suffirait de prendre des matrices  $K_i$  et  $R_i$  ne contenant qu'un

element positif et cela afin d'optimiser les calculs et faciliter la recherche des  $K_i$  et  $R_i$ .

La position de l'élément choisi depend de la résolution des equation (3-30) à (3-33) avec  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $G_1$  et  $G_2$  obeissent au caractéristiques (1) et (2).

#### Cas MIMO:

$$[K_i] = [R_i] = (m, n)$$

Le cas multivariable (MIMO: Multiinput - Multioutput) étant une juxtaposition de sous systeme, plusieurs cas se presentent suivant que les sous système soient de même ordre ou non, suivant le nombre de sous systèmes et le nombre des entreés .

prenons le cas où le nombre des sous système est egale au nombre d'entreés.

L'eq.(3-42) est  $v=Pe$

$P$  étant solution de L'equation de Lyapounov :

$$PA_m + A_m^T P = -Q \quad P > 0 \text{ et } Q \geq 0$$

pour un modèle découplant les sous systémes ,  $P$  aura donc pour forme :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

avec  $[P_{ii}] = n_i^2$  et  $\sum_{i=1}^m n_i = n$ .

$n$  est l'ordre du système global ,  $n_i$  l'ordre de chaque sous systèmes , et  $m$  est le nombre de sous-systémes.

Dans le calcul des gains d'adaptation  $v=Pe$  est multiplié par  $K_i$  ou  $R_i$ . Si nous appliquons ce qui a été remarqué dans le cas SISO, il suffirait de dire que  $K_i$  et  $R_i$  sont des Matrices de  $m$  vecteurs ligne , chacun de dimension  $n_i$  avec des zeros autour

Afin de découpler les erreurs des sous système entre elles  $K_i$  et  $R_i$  s'ecriront comme suit :

$$K_i = \text{diag}[k_1^1(u_1), k_1^2(n_2), \dots, k_1^n(n_m)]$$

$$R_i = \text{diag}[k_1^1(n_1), k_1^2(n_2), \dots, k_1^n(n_m)]$$

Les vecteurs  $k_1^j(n_j)$  et  $R_1^j(n_j)$  sont tous de dimensions  $(1, n_j)$  de même nature que les gains décrits dans le cas monovarié.

Synthèse du contrôleur minimal pour une structure particulière:

La synthèse du contrôleur minimal dépend du système considéré. La détermination des lois d'adaptation nécessite la connaissance de la structure de  $B_p$ .

Considérons les systèmes évoluant dans l'espace de phase, c'est à dire ceux dont l'équation d'état régissant leur évolution est donnée par:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u$$

avec 
$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_m \end{bmatrix} \text{ et } B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

Rq: Le cas multivariable sera considéré ultérieurement.

pour ce type de systèmes on a proposé des lois d'adaptation assurant l'hyperstabilité du système régissant l'évolution de l'erreur et la robustesse du contrôleur [4] [5].

ces lois sont :

$\Delta k_p = \alpha \int_0^t v(\tau) x_p^T(\tau) d\tau + \beta v(t) x_p^T(t) \quad (3-50)$
$\Delta k_u = \alpha \int_0^t v(\tau) u_m^T(\tau) d\tau + \beta v(t) u_m^T(t) \quad (3-51)$
$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \quad \alpha_n > 0 \quad (3-52)$
$\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m] \quad \beta_m > 0 \quad (3-53)$

Ces solutions sont de même nature que (2.32) et (2.33).

Preuve :

En choisissant des matrices  $F_1$ ,  $F_1'$ ,  $G_1$  et  $G_1'$  répondant aux caractéristiques vues précédemment comme suit :

$$F_1 = G_1 = \begin{bmatrix} a & . & a & . & a \\ \dot{a} & : & \dot{a} & : & \dot{a} \\ \ddot{a} & : & \ddot{a} & : & \ddot{a} \\ & & & & \dot{f}_n \end{bmatrix} \text{ et } F'_1 = G'_1 = \begin{bmatrix} a & . & a & . & a \\ \dot{a} & : & \dot{a} & : & \dot{a} \\ \ddot{a} & : & \ddot{a} & : & \ddot{a} \\ & & & & \dot{f}_n \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

$f_n$  et  $\dot{f}_n$  des scalaire positifs .

Il suffirait de poser :

$$k_1 = R_1 = \alpha = [a, a \dots \alpha_n] \quad (3-55)$$

$$\text{et } k_2 = R_2 = \beta = [a, a \dots \beta_n] \quad (3-56)$$

pour verifier les eq.(3-30) a (3-33)

ie:

$$B_P k_1 = B_P R_1 = \begin{bmatrix} a & . & a & . & a \\ \dot{a} & : & \dot{a} & : & \dot{a} \\ \ddot{a} & : & \ddot{a} & : & \ddot{a} \\ & & & & b\alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & . & a & . & a \\ \dot{a} & : & \dot{a} & : & \dot{a} \\ \ddot{a} & : & \ddot{a} & : & \ddot{a} \\ & & & & \dot{f}_n \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

$$\text{et } B_P k_2 = B_P R_2 = \begin{bmatrix} a & . & a & . & a \\ \dot{a} & : & \dot{a} & : & \dot{a} \\ \ddot{a} & : & \ddot{a} & : & \ddot{a} \\ & & & & b\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & . & a & . & a \\ \dot{a} & : & \dot{a} & : & \dot{a}_1 \\ \ddot{a} & : & \ddot{a} & : & \ddot{a} \\ & & & & \dot{f}_n \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

Pour que (3-57) et (3-58) soient vrais il faut choisir des scalaires  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  positifs (si  $b > 0$ ): ce qui justifie les solutions proposées.

cas multivaiable:

L'equation qui regit l'evolution des systemew multivariables dans l'espace de phase est donnee par:

$$\dot{X}_P = A_P X_P + B_P U_P$$

avec

$$A_P = \begin{bmatrix} A_{11} & . & . & . & A_{1n} \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ A_{m1} & . & . & . & A_{mn} \end{bmatrix} \text{ et } B_P = \begin{bmatrix} B_{11} & . & . & . & B_{1m} \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ B_{n1} & . & . & . & B_{nm} \end{bmatrix} \quad (3-59)$$

ou  $m$  est le degre de liberte du systeme.

Rq: On suppose que le nombre de commande est egale au nombre de sous systeme

Les  $A_{ij}$  sont donnees par :



$$A_{ii} = \begin{bmatrix} a_{ii1} & a_{ii2} & \dots & a_{iini} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{ij1} & a_{ij2} & \dots & a_{ijn_i} \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

$$B_{ii} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_{iij} \end{bmatrix}, B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -b_{ij} \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

où  $n_i$  est l'ordre de chaque sous système

$$\sum_{i=1}^m n_i = n \quad (3-62)$$

$$\text{et } x_p^T = [x_{11} \dots x_{1n_1}, x_{21} \dots x_{2n_2}, \dots, x_{m1} \dots x_{m_{n_m}}] \quad (3-63)$$

Les lois d'adaptation qu'on a proposé [4] [5] pour cette classe de systèmes sont :

$\Delta k_n = \alpha \int_0^t v(\tau) x_p^T(\tau) dt + \beta v(t) x_p^t(t)$	(3-64)	
$\Delta k_u = \beta \int_0^t v(\tau) u_m^T(\tau) dt + \beta v(t) x_p^t(t)$	(3-65)	
$\alpha = \text{diag}[(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{ni})]$	$[\alpha] = (m, n) \quad \alpha_{ni} > 0$	(3-66)
$\beta = \text{diag}[(\beta_{11}, \dots, \beta_{ni})]$	$[\beta] = (m, n) \quad \beta_{ni} > 0$	(3-67)

preuve :

La preuve des lois proposées sera faite de la même manière que dans le cas monovarié.

Les matrices  $F_1, F_1', G_1, G_1'$  proposées seront écrites de la forme suivante :

$$F_1 = G_1 = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{ni} \end{bmatrix} \right) \text{ et } F_1' = G_1' = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{ni}' \end{bmatrix} \right) \quad (3-68)$$

$f_{ni}, f_{ni}' > 0 \quad \forall i=1, m$   
 et il suffira de poser :

$$\text{et } k_1 = R_1 = \alpha \quad (3-69)$$

$$\text{et } k_2 = R_2 = \beta \quad (3-70)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont donnés par (3-66) et (3-67)

cela dans le but de vérifier les équations (3-30) à (3-33)

ie :

$$B_p k_1 = B_p R_1 = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{ni} b_{iini} \end{bmatrix} \right) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{ni} \end{bmatrix} \right) \quad (3-71)$$

$$B_p k_2 = B_p R_2 = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta_{n_i} b_{i_i} \end{bmatrix} \right) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & f_{n_i}' \end{bmatrix} \right) \quad (3-72)$$

pour que (3-71) et (3-72) soient vrais il faut que les scalaires  $\alpha_{n_i}$  et  $\beta_{n_i}$  soient positifs (si  $b_{i_i} > 0$ ) : Ce qui justifie les solutions proposées.

### Conclusions:

Les solutions proposées pour la synthèse du contrôleur Minimal sont particulières pour chaque classe de systèmes.

Le traitement de chaque classe se fait d'une manière différente et la généralisation n'est alors pas possible.

Si on veut utiliser les contrôleurs synthétisés précédemment (cas monovariante/cas multivariante) pour des systèmes dont les dérivées de la / des sorties ne sont pas accessibles, on peut introduire un observateur pour observer ces dernières. (fig 3-5)

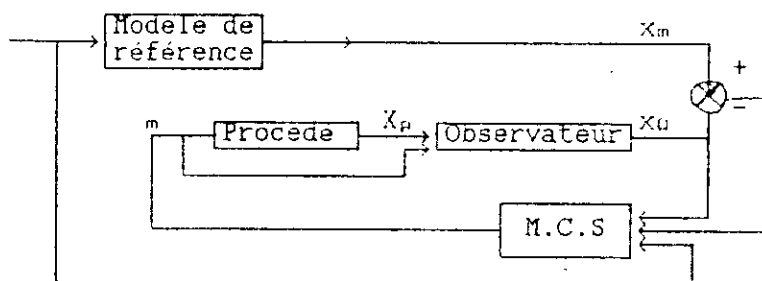


Fig (3-5) Introduction d'un observateur avec le MCS

L'inconvénient dans cette approche est qu'on est bien en présence du MCS mais la structure n'est pas minimale (Introduction de l'observateur).

PREMIERE PARTIE :  
CHAPITRE 4

#### 4.Applications:

Pour tester les performances des régulateurs adaptatifs traités dans les chapitres précédents (MRAC et MCS) nous avons considéré 4 systèmes issus de de classes différentes :

- commande de vitesse d'un moteur à C.C .
- commande d'un système du deuxième ordre
- commande d'un système instable du deuxième ordre: le Beam and Ball.
- commande d'un système multivariable non linéaire :  
un Bras Manipulateur à 3 degrés de libertés de classe 1.

Dans chaque cas, différents tests ont été fait pour mieux voir l'efficacité et l'avantage des contrôleurs précédents.

Rque : les deux contrôleurs étudiés sont à modèle de référence mais pour faire la distinction entre le premier contrôleur étudié où la poursuite est initialement basée sur une poursuite du LMFC, et le contrôleur minimal ; nous noterons toujours le premier par 'MRAC'.

Les lois d'adaptation avec lesquelles nous avons travailler dans le cas du MRAC sont ceux données par les équations (2.32) et (2.33) , les gains P+I sont donés par les équations (1.39) à (1.42) en prenant :

$$f_1 = f_3 = \alpha \quad \text{et} \quad f_2 = f_4 \quad \text{des scalaires positifs comme dans [4].}$$

Pour le MCS les lois d'adaptations sont celles données par les equations (3.50) à (3.53) pour le cas monovisible et (3.64) à (3.67) pour le cas multivariable.

#### 4.1 Commande de vitesse d'un moteur à C.C :

le moteur considéré est celui traité dans [4] . Sa fonction de transfert est la suivante :

$$H(s) = \frac{W}{U} = \frac{3.833}{(s + 5)}$$

$W$  et  $U$  sont respectivement les transformées de Laplace de la vitesse de rotation  $\omega$  en (tr/mn) et de la commande  $u$  .

La sortie est disponible sur capteur de vitesse (2.8V/tr/mn).

La représentation dans l'espace d'état de l'évolution de vitesse est donnée par :

$$\dot{x} = A x + B u$$

où  $A = -5$  et  $B = 3.833$

$x = \omega$  et  $u$  est la commande à l'entrée .

la sortie considérée pour nos tests sera celle du capteur .

La sortie boucle ouverte est caractérisée par un settling time de 0.8 s (temps à 2% du régime permanent).

Le modèle de référence sera choisis de tel sorte à réaliser un gain statique unitaire avec un settling time de 0.4s, et un permanent de 1000 tr/mn.

Ce dernier aura par conséquent l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m$$

où  $A_m = -10$  et  $B_m = 10$

et  $u_m = 2.8$  est l'entrée du modèle.

Pour la synthèse du MRAC , on doit commencer par faire la synthèse du LMFC .

Les gains  $K_u$  et  $K_p$  du LMFC calculés par les relations (2.13) et (2.15) sont les suivants :

$$K_u = 2.608 \text{ et } K_p = 1.304.$$

$B$  étant carée non singulière (1 X 1), il n'y'a aucune difficulté

pour vérifier les conditions d'Erzberger's (équations (2.15) et (2.16)).

Ceci dit, un autre bloc d'adaptation sera rajouté.

#### Détermination de l'erreur améliorée:

En choisissant  $Q = 1$ ,  $P$  solution de l'équation de Lyapounov sera égale à 0.05.

L'erreur améliorée  $y_e$  est calculée différemment pour les deux contrôleurs MRAC et MCS :

$$\text{cas MRAC : } y_e = B^T P x_e = C_e x_e \quad \longrightarrow \quad C_e = B^T P = 0.1917$$

$$\text{cas MCS : } y_e = P x_e = C_e x_e \quad \longrightarrow \quad C_e = P = 0.05$$

#### Choix des gains $\alpha$ et $\beta$

pour le MRAC le choix des scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  sera choisi comme suit :  $\alpha = 4$  et  $\beta = 1$ .

Pour le MCS il a été très difficile de trouver les scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  qui donnent de bons résultats et qui sont  $\alpha = 200$  et  $\beta = 60$ .

Remarque : pour le MCS,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des scalaires par ce qu'on est en cas monovarié.

Les tests ont respectivement été faits sous MRAC, LMFC et MCS dans les deux cas suivants :

- sans perturbations .
- ajout d'une perturbation échelon de 3 sur la sortie du moteur.

#### Tests sans perturbations :

Les figures (4.1.1) à (4.1.3) montrent que les trois contrôleurs donnent pratiquement le même résultat, c'est à dire une bonne poursuite .

La commande  $u$  issue du contrôle par le MCS présente un pic au transitoire : c'est l'un des inconvénients du contrôleur

minimal et dont on parlera d'une manière plus détaillée dans les prochains exemples. Ce pic est dû au fait que les conditions initiales de la commande sont nulles pour un état initial et

des entrées du modèle de référence nuls :

$$u = \Delta K_p x + \Delta K_u u_m$$

Tests avec perturbation:

En introduisant une perturbation échelon de la manière suivante :

$$\dot{x} = -A x + B u + d$$

Avec  $d = 3$

Le MCS a donné de bons résultats ( fig 4.1.9 ) par rapport au MRAC (fig 4.1.7) et LMFC (fig 4.1.8) , mais des résultats meilleurs ont été obtenus en changeant  $\alpha$  et  $\beta$  tel que :

$$\alpha = 40 \text{ et } \beta = 10.$$

#### 4.2 Commande d'un système du deuxième ordre :

L'exemple traité a pour fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{4.5}{s^2 + 0.75s + 2.25}$$

Le modèle de référence choisi est un modèle du deuxième ordre stable ( $\omega_n = 1$  et  $\xi = 1$ ), sa fonction de transfert est la suivante:

$$H_m(s) = \frac{Y_m(s)}{u_m(s)} = \frac{4.5}{s^2 + 2s + 1}$$

Le signal d'entrée  $u_m(t)$  considéré est un signal carré d'amplitude unité et de période 14 s.

Leurs matrices respectives d'évolution et de commande sont les suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.25 & -0.75 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

et

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les gains du LMFC calculés sont les suivants :

$$K_p = [ -0.28 , 0.28 ] \text{ et } K_u = [ 0.22 ]$$

La vérification des conditions d'Erzberger's se fait sans difficultés :

$$B^* = (B^T B)^{-1} B^T = [ 0 \quad 1/B(2,1) ] = [ 0 \quad 1/b ]$$

$$B B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (I_2 - B B^*) B_m = 0 \text{ ( 1^{ère} condition )}$$

$$A - A_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} - A_{21m} & A_{22} - A_{22m} \end{bmatrix} \Rightarrow (I_2 - B B^*) (A - A_m) = 0 \text{ ( 2^{ème} condition )}$$

Détermination de l'erreur améliorée :

La matrice Q a été choisie comme suit :  $Q = 10 I_2$

La matrice P obtenue est :  $P = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

- cas du MRAC :  $y_a = B^T P x_a$

- cas du MCS :  $y_a = P x_a$

Les valeurs des gains P I  $\alpha$  et  $\beta$  choisis sont les suivants :

$$\alpha = 0.2 \quad \text{et} \quad \beta = 0.5 \quad \text{dans le cas du MRAC}$$

$$\text{et } \alpha = [ 0 \quad 0.5 ] \quad \text{et} \quad \beta = [ 0 \quad 1.5 ] \quad \text{dans le cas du MCS}$$

Les tests suivants ont été fait :

Test 0: Alignement initial avec le modèle de référence

Ce test est un test parfait parcequ'il a donné des courbes de réponse quasiment confondues avec celle du modèle de référence , et cela pour les trois contrôleurs MRAC, LMFC et MCS .

Test 1: Sous MRAC / désalignement initial avec le modèle :

$$y_m - y = -0.5$$

Il y' eu une bonne poursuite (fig 4.2.1 à 4.2.3)

Test 2: Sous MRAC / désalignement initial avec le modèle :



$$y_m - y = 1$$

La réponse réelle rattrape toujours la courbe du modèle avec une certaine constante de temps .

Test 3: Sous MRAC / gains initiaux différents du LMFC :

Ce test a pour objectif de montrer l'effet d'une condition initiale différente sur les gains différents des gains du LMFC .

Les gains  $K_p$  et  $K$  seront choisis comme suit :

$$K_p = [ -1 \quad 1 ] \text{ et } K = [ 1 ]$$

l'effet de ce changement est montré dans les figures (4.2.5 & 4.2.6) on remarque la bonne poursuite avec un léger dépassement au démarrage sans oublier l'apparition de pics plus raides dans la commande générée: ceci peut être désagréable.

Test 4 : Sous LMFC / désalignement initiale avec le modèle :

$$y_m - y = 1$$

les résultats de ce test sont montrés dans les figures (4.2.7 à 4.2.9) . la poursuite a eu lieu d'une manière moins rapide que celle obtenue grâce au MRAC ( voir fig 4.2.9 ), quoi que la commande a la même allure .

Test 5: Sous LMFC / présence d'un bruit  $d(t)$  :

nous avons considéré la présence d'un bruit blanc uniforme  $d(t)$  variant entre 0 et 5 et de moyenne (1/500) influant de la manière suivante :

$$\dot{x} = A x + B u + d(t)$$

La poursuite obtenue par le LMFC est très mauvaise : présence d'une composante continue et sortie très bruitée .

Test 6: Sous MRAC / présence d'un bruit  $d(t)$  :

Le même bruit précédent a été considéré et on voit bien (fig

4.2.11 à 4.2.13 ) que la poursuite est pratiquement très satisfaisante .

Test 7 : Sous MCS / désalignement initial avec le modèle :

Les résultats de ce test sont montrés dans les figures ( 4.2.14 à 4.2.16) bien que la poursuite apparait parfaite ( avec une certaine constante de temps ) , on remarque facilement le pic très élevé

obtenu au transitoire de la commande : la commande arrive à 5.4 unités en une moyenne de 3 périodes d'échantillonnage . Ceci est dû au fait que les conditions initiales sur la commande générée par le MCS sont nulles . Le transitoire précédent peut être désagréable pour des systèmes n'acceptant pas de telles commandes où ne pouvant pas générer une telle énergie.

Test 8 : Sous MCS / présence d'un bruit  $d(t)$  :

Ce test a donné des résultats semblables à ceux obtenus par le MRAC bien que subsiste le problème du transitoire (figures 4.2.17 à 4.2.19 ) .

#### 4.3 Commande d'un système instable : le Beam & Ball

La représentation d'état du système instable considéré est la suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.495 & 0.09 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 \\ 2.9 \end{bmatrix} + u$$

Le système a les poles suivants :

$$s_{1,2} = 0.045 \pm \sqrt{0.47}$$

L'un des poles est alors instable et on va essayer de stabiliser le système par application respective du MRAC et MCS . la procédure de synthèse est identique à celle de l'exemple précédent et la matrice Q n'a pas été changé.

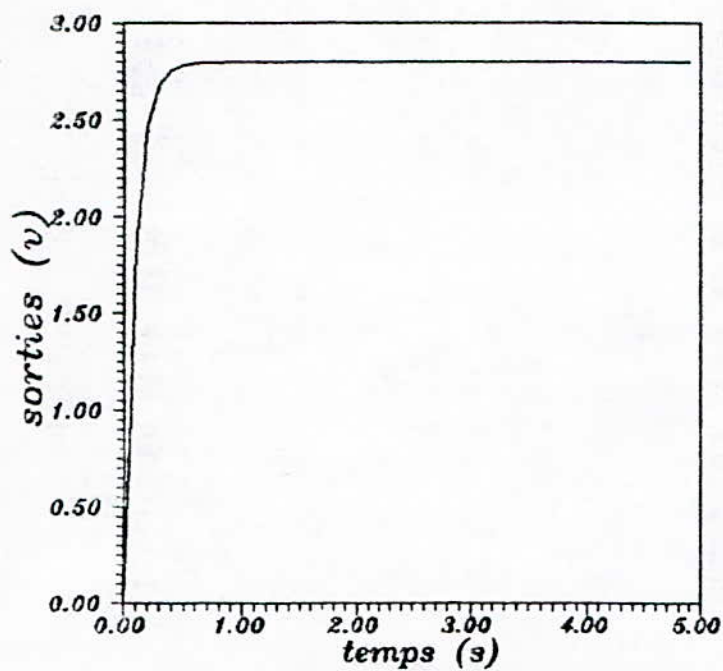


fig 4.1.1 moteur sous MRAC

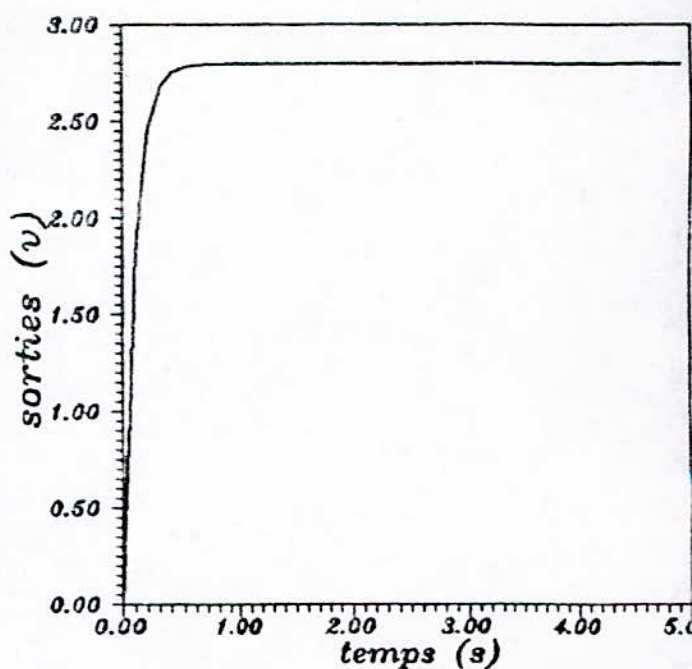


fig 4.1.2 moteur sous LMFC

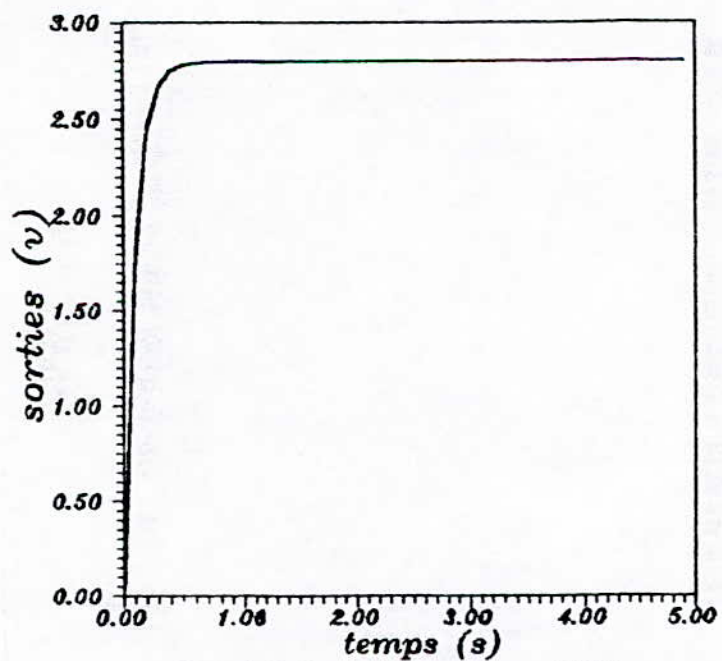


fig 4.1.3 moteur sous MCS

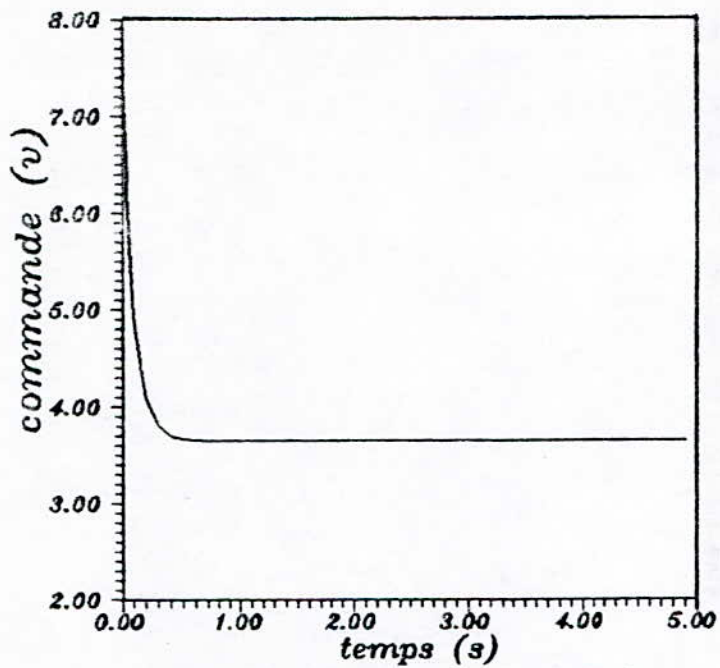


fig 4.1.4 moteur sous MRAC

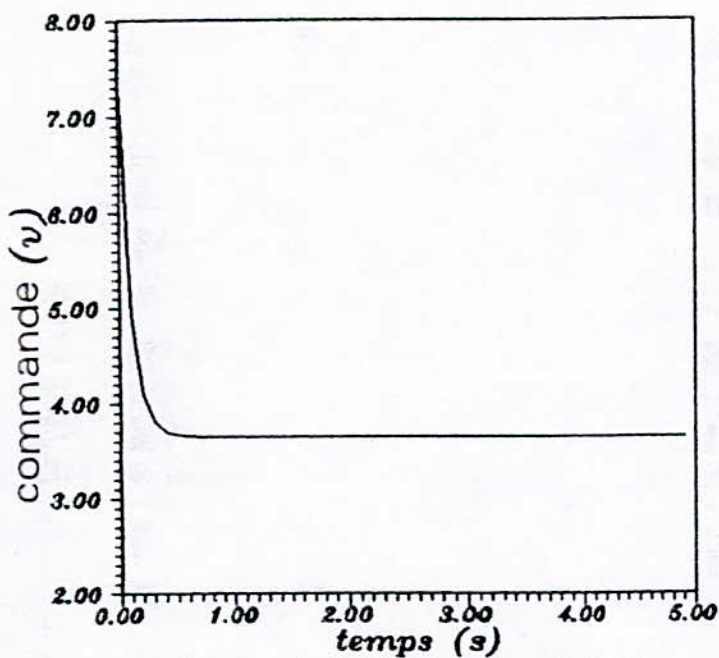


fig 4.1.5 moteur sous LMFC

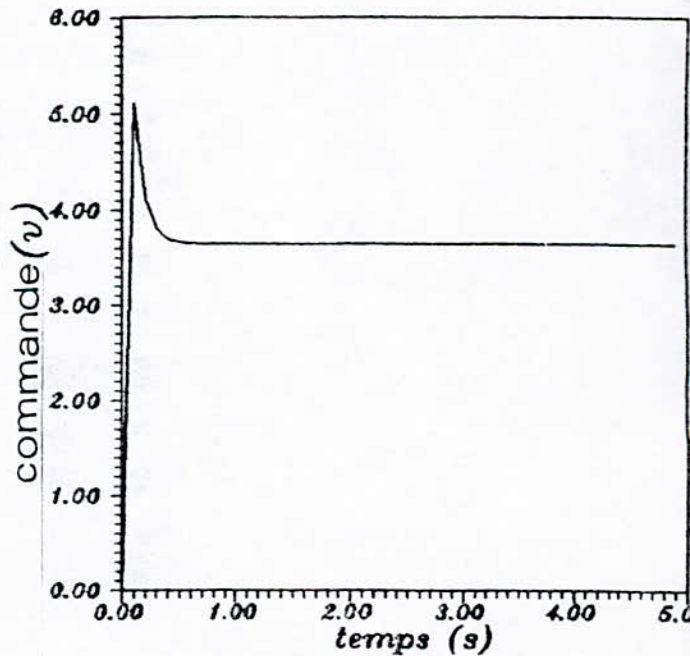


fig 4.1.6 moteur sous MCS

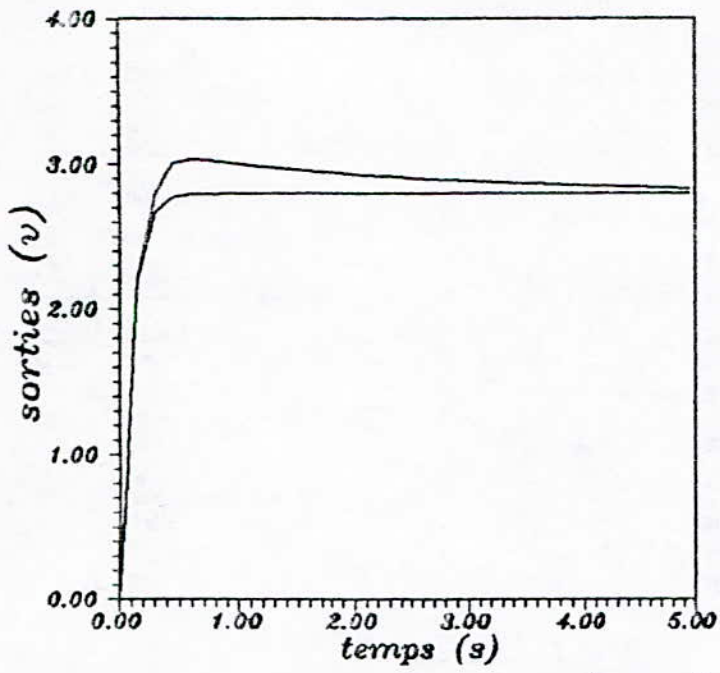


fig 4.1.7 moteur sous MRAC(+bruit)

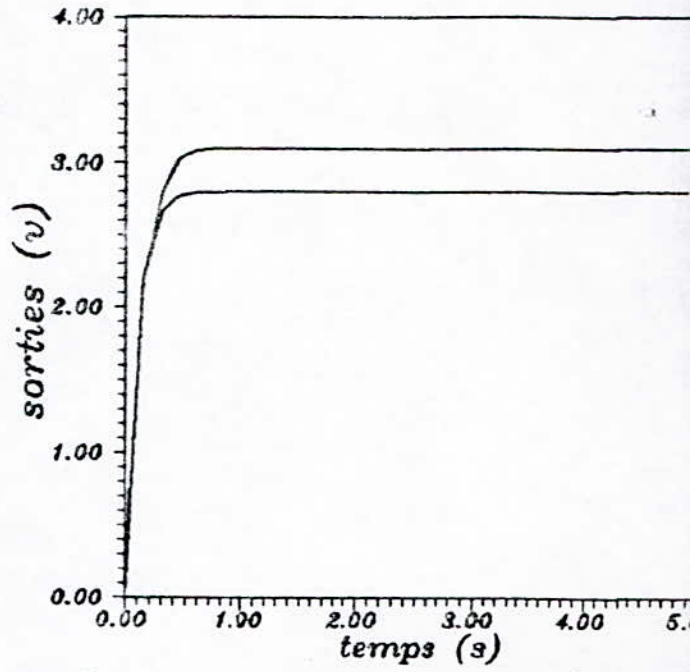


fig 4.1.8 moteur sous LMFC(+bruit)

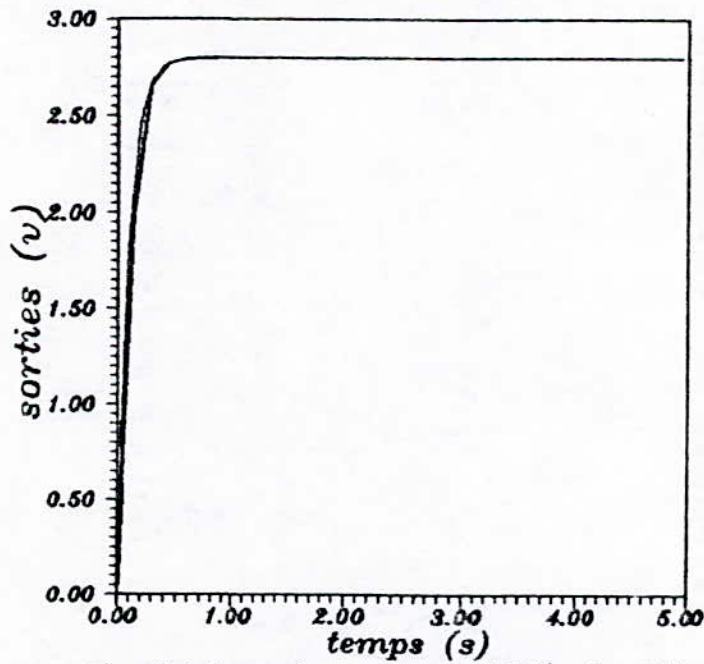


fig 4.1.9 moteur sous MCS(+ bruit)

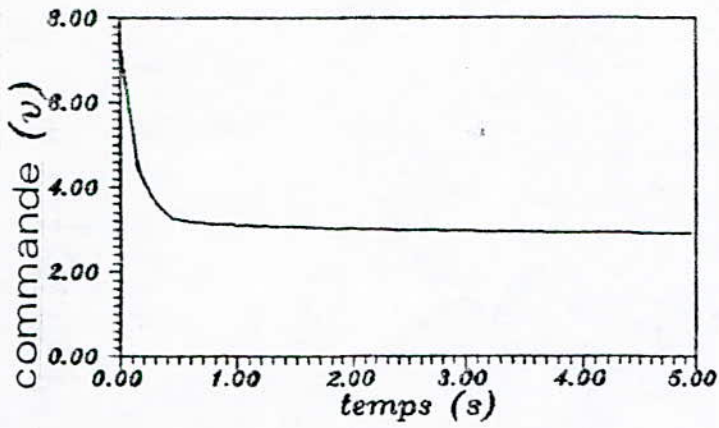


fig 4.1.10 moteur sous MRAC(+bruit)

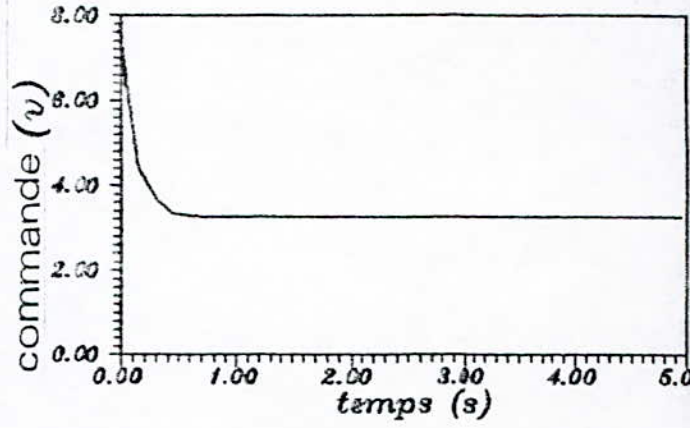


fig 4.1.11 moteur sous LMFC

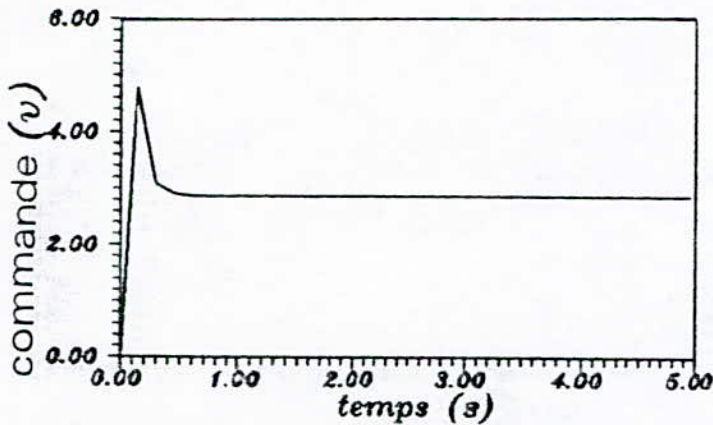


fig 4.1.12 moteur sous MCS(+bruit)

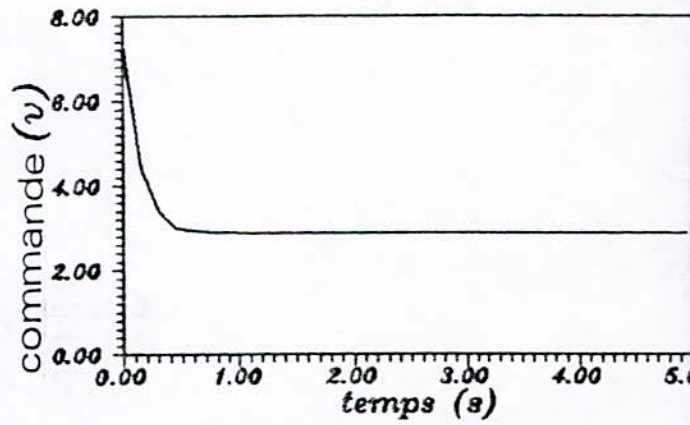


fig 4.1.14 moteur sous MRAC(+bruit)

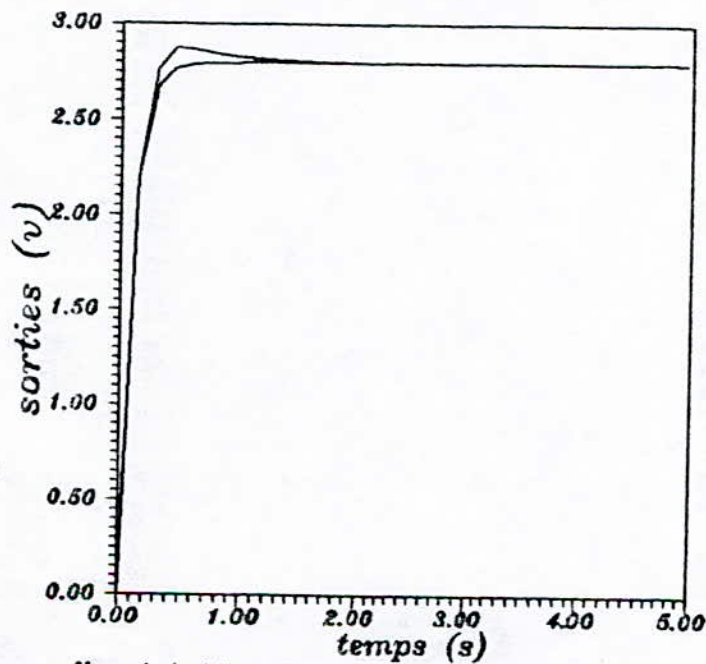


fig 4.1.13 moteur sous MRAC(+bruit)  
sorties de  $e_1$  et  $e_2$

TEST 1 : Desalignement initiale

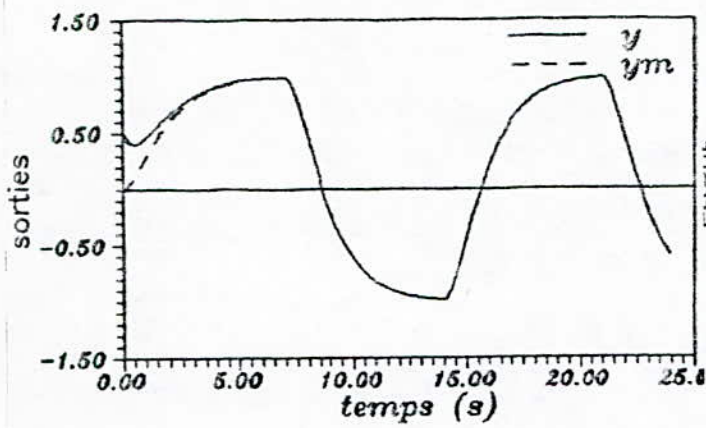


fig 4-2-1

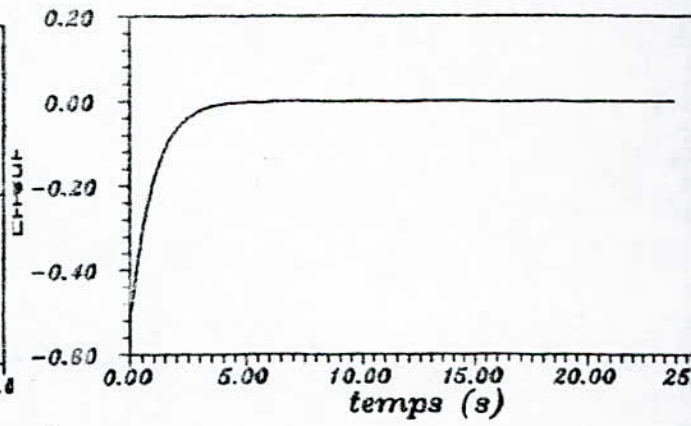


fig 4-2-2

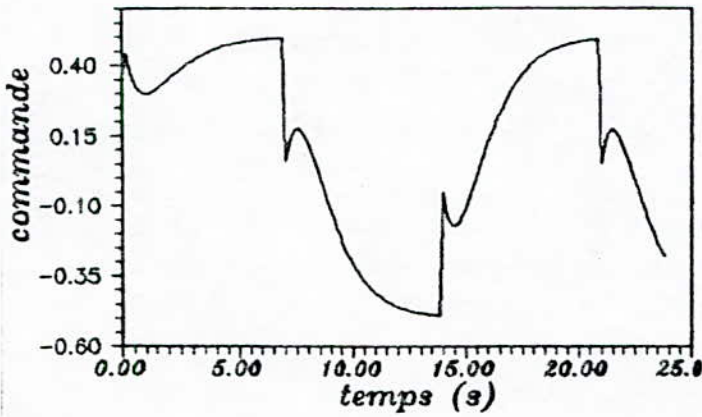


fig 4-2-3

TEST 2 : Desalignement initiale

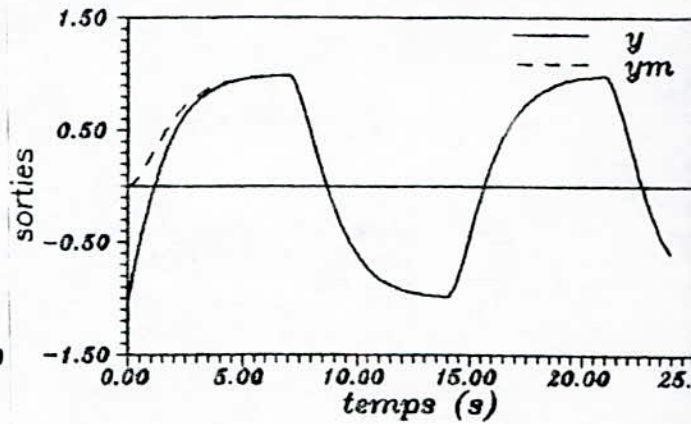


fig 4-2-4

TEST 3 : Gains initiaux differents des gains du LMFC

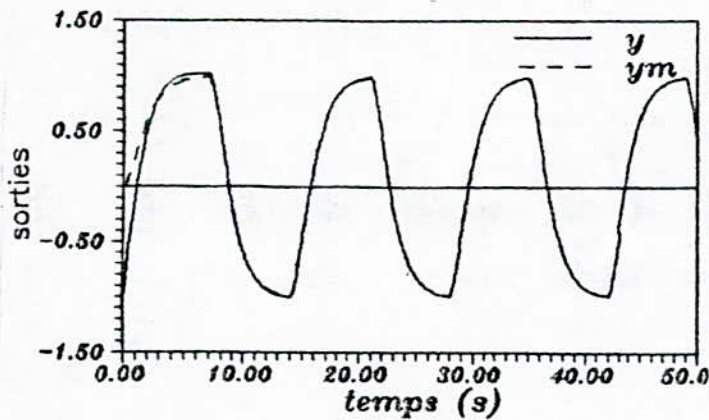


fig 4-2-5

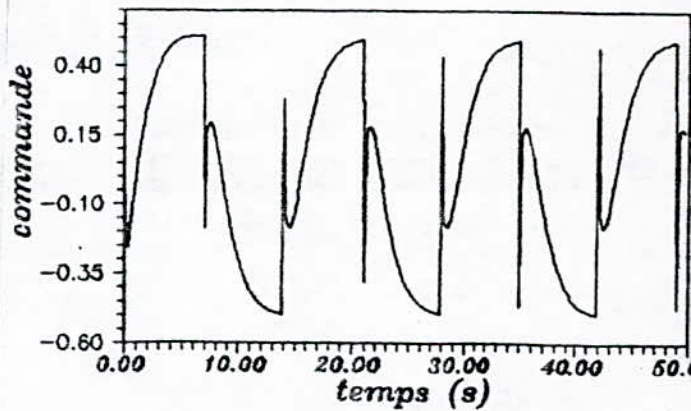


fig 4-2-6

TEST 4: test sous LMFC

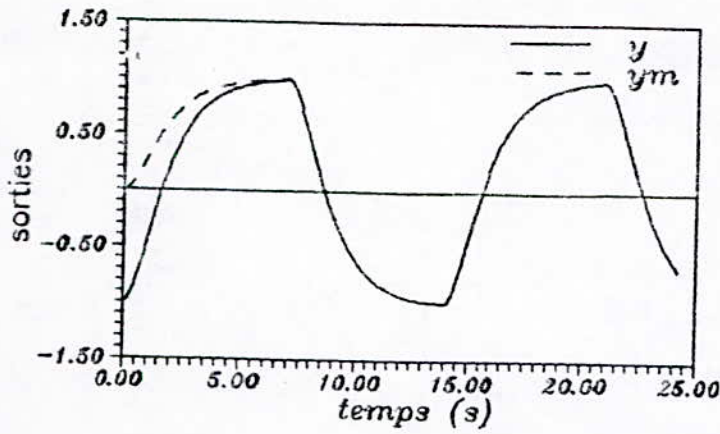


fig 4-2-7

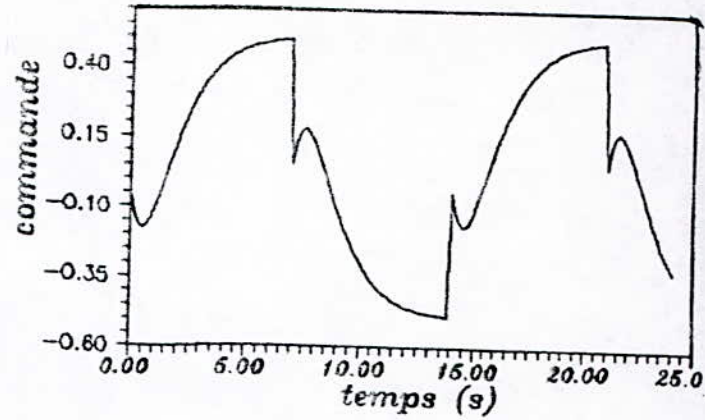


fig 4-2-8

Comparaison des ecart (MRAC/LMFC)  
 $y_e - \text{MRAC}$  ,  $y_e' - \text{LMFC}$  .

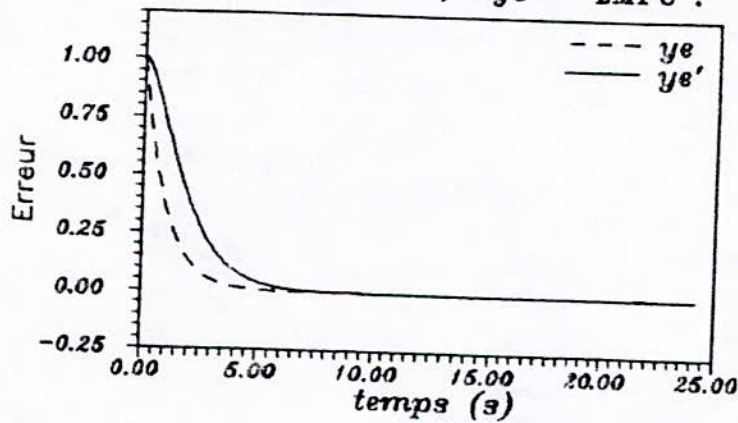


fig 4-2-9

TEST 5: test sous LMFC/ presence de perturbations

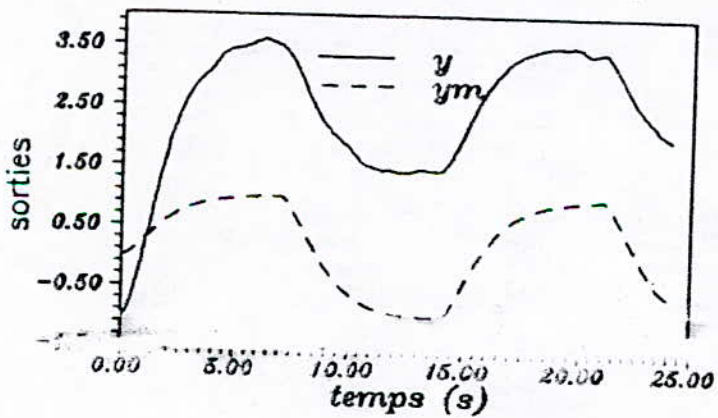


fig 4-2-10



TEST 6 :MRAC /presence de perturbations

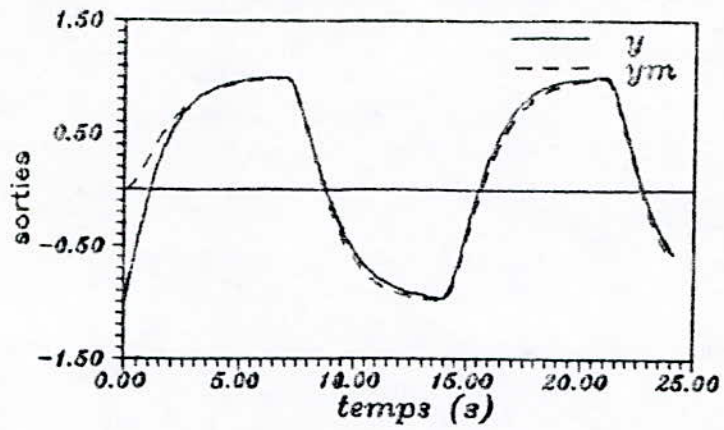


fig 4-2-11

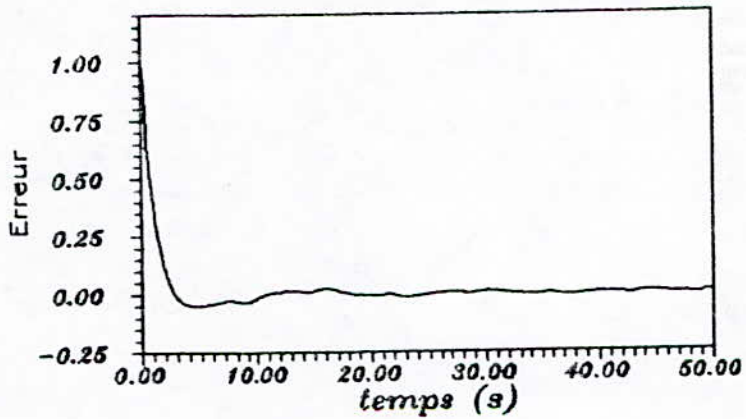


fig 4-2-12

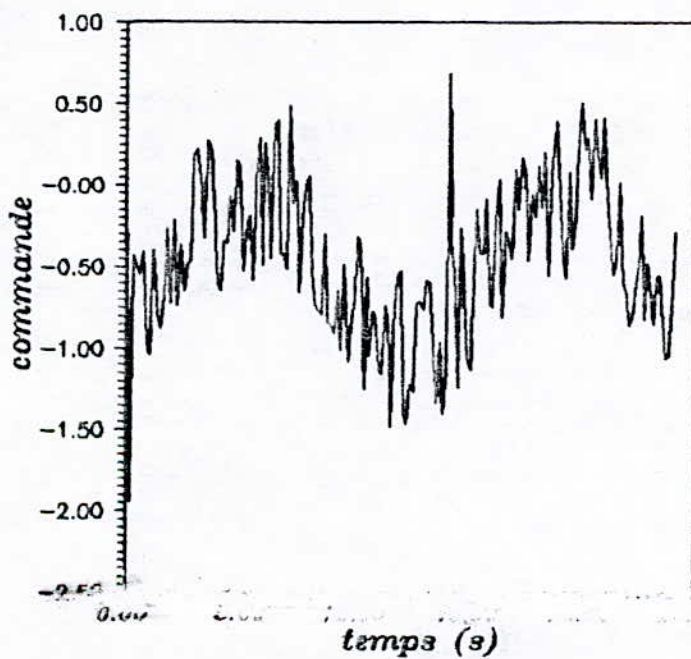


fig 4-2-13

TEST 7 :MCS /Desalignement initiale

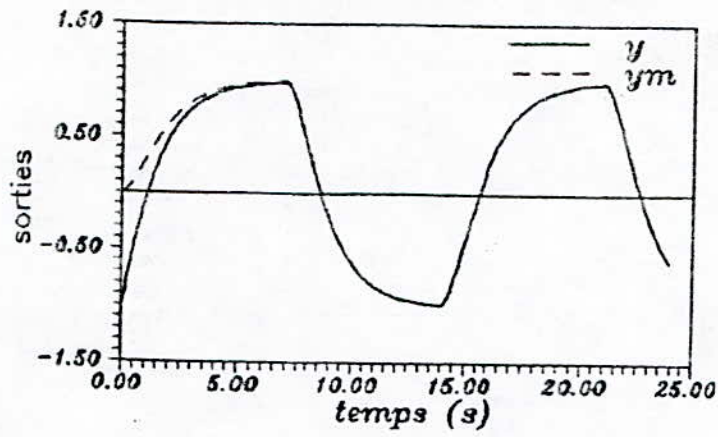


fig 4-2-14

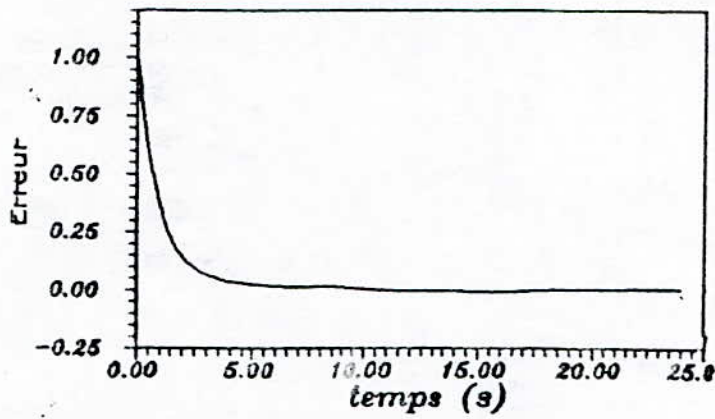


fig 4-2-15

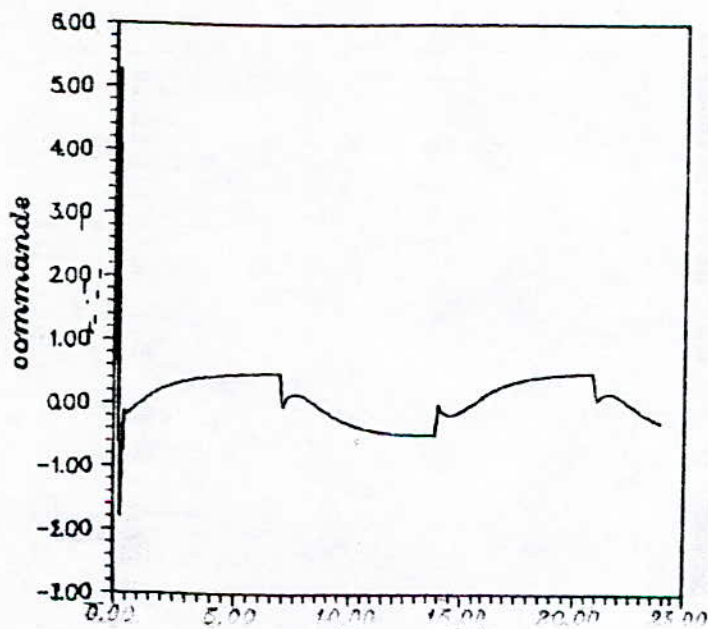


fig 4-2-16

TEST 8 :MCS /Presence de perturbations

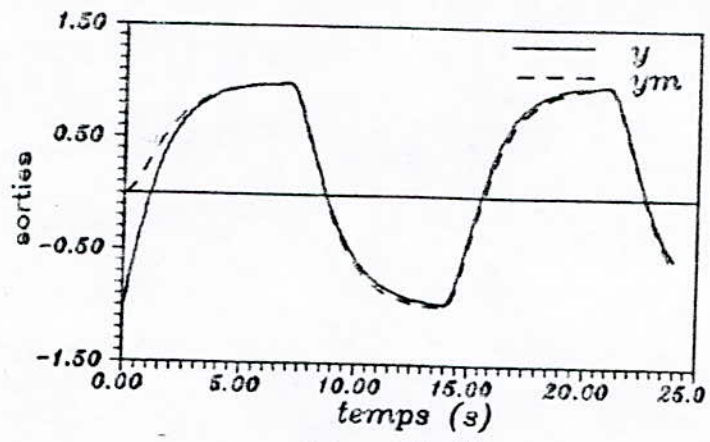


fig 4-2-17

Comparaison des ecartes MRAC/MCS en presence de bruit :  $y_e$ /MRAC'  $y_e$ /MCS

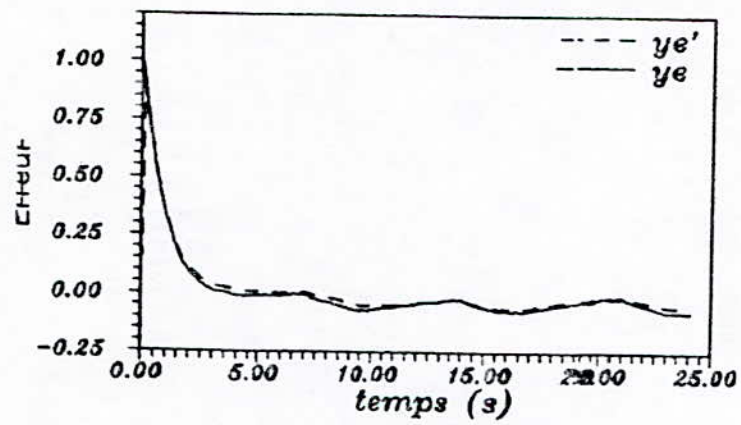


fig 4-2-18

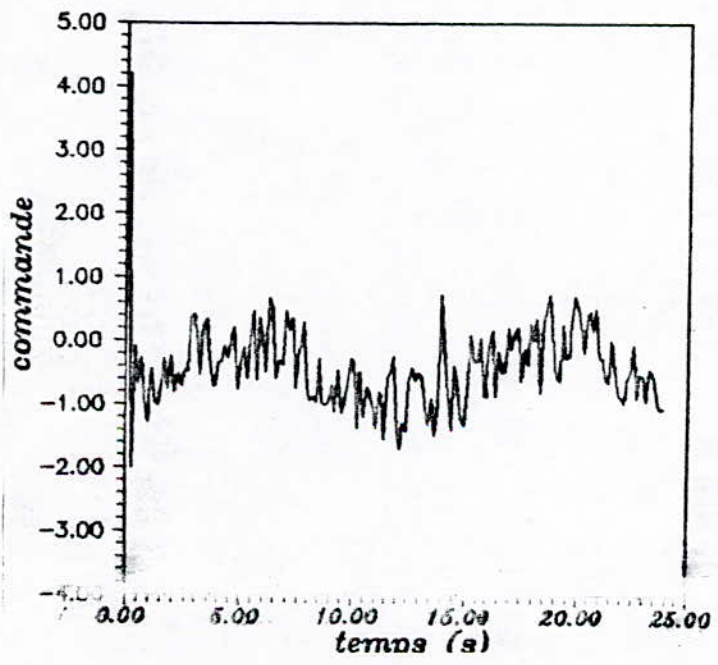


fig 4-2-19

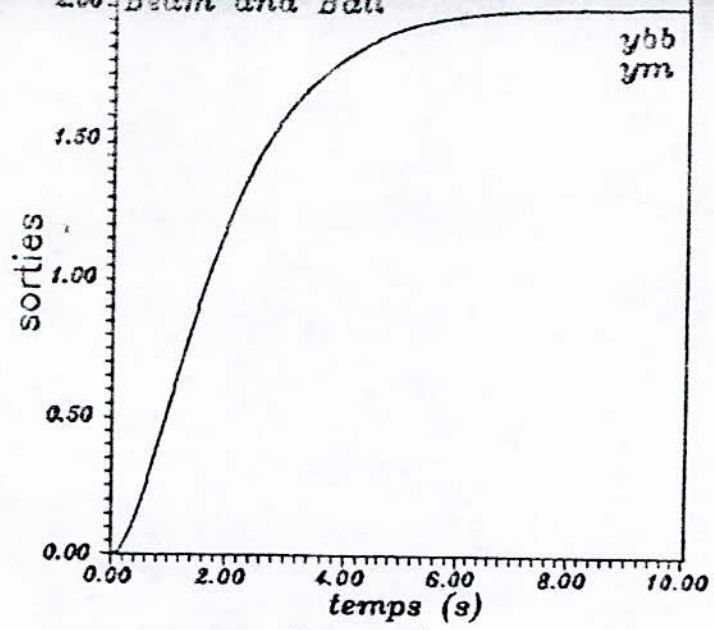


fig 4-3-1

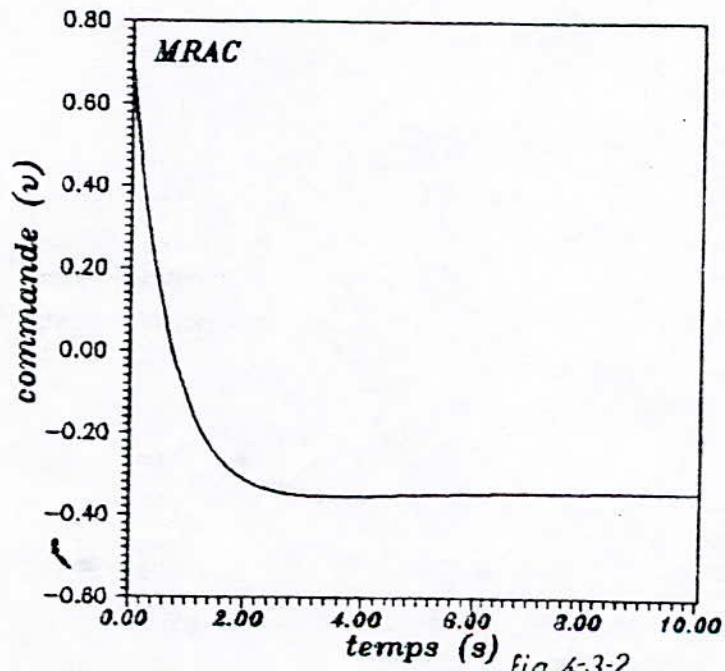


fig 4-3-2

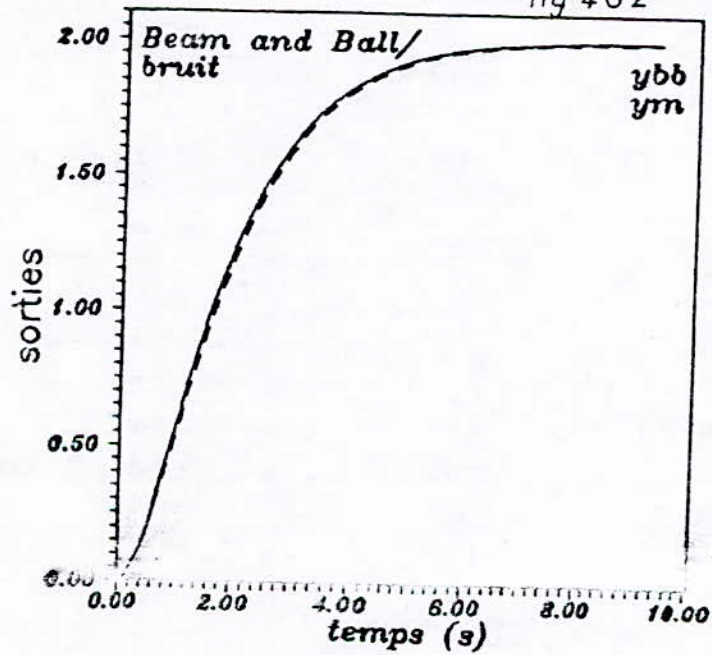


fig 4-3-3

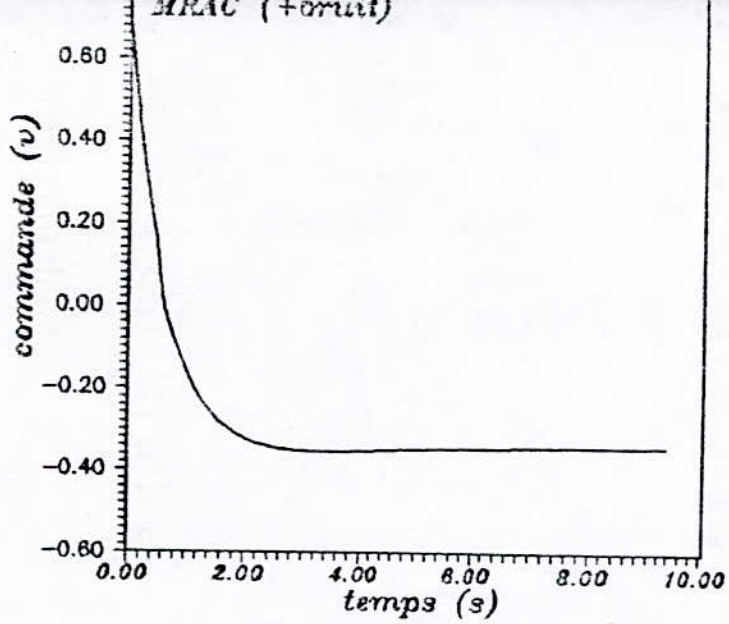


fig 4-3-4

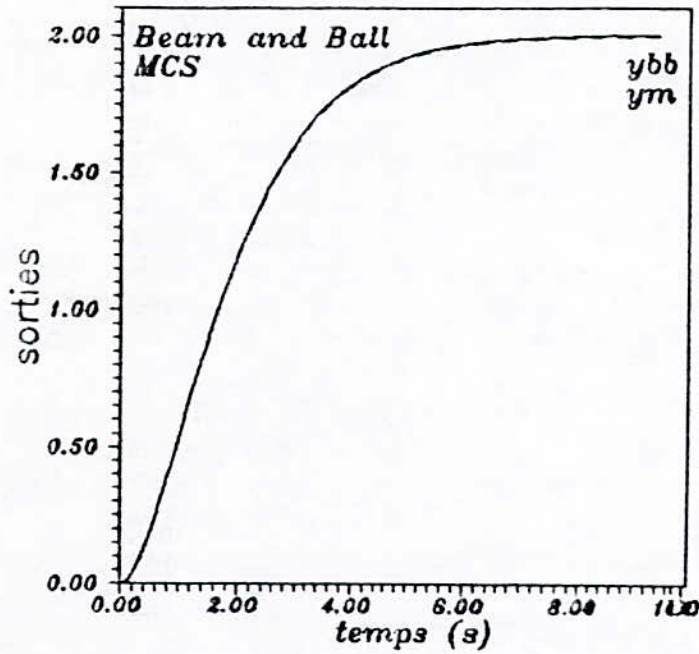


fig 4-3-5

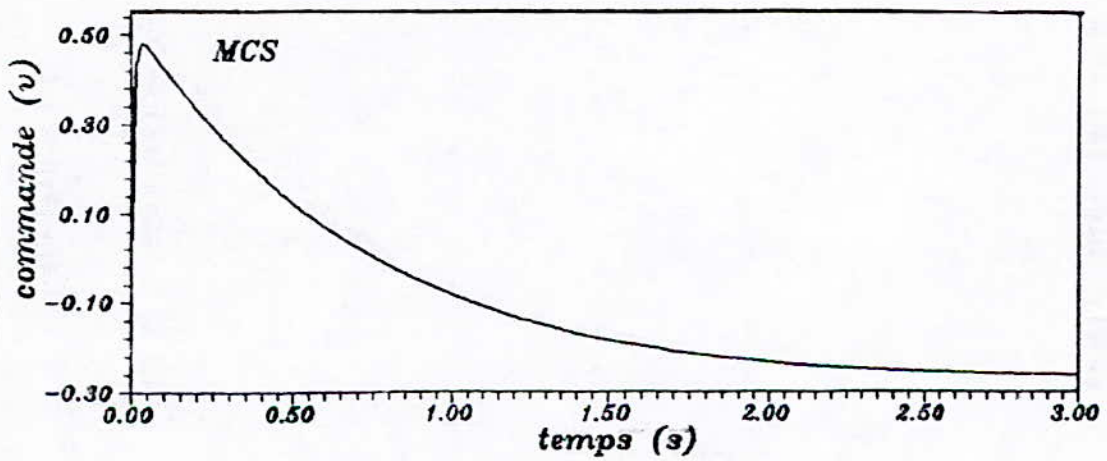


fig 4-3-6

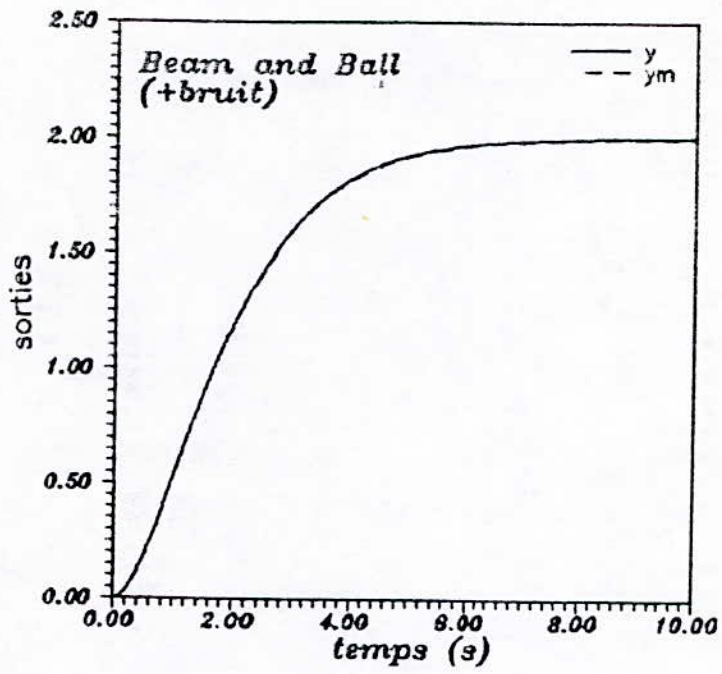


fig 4-3-7

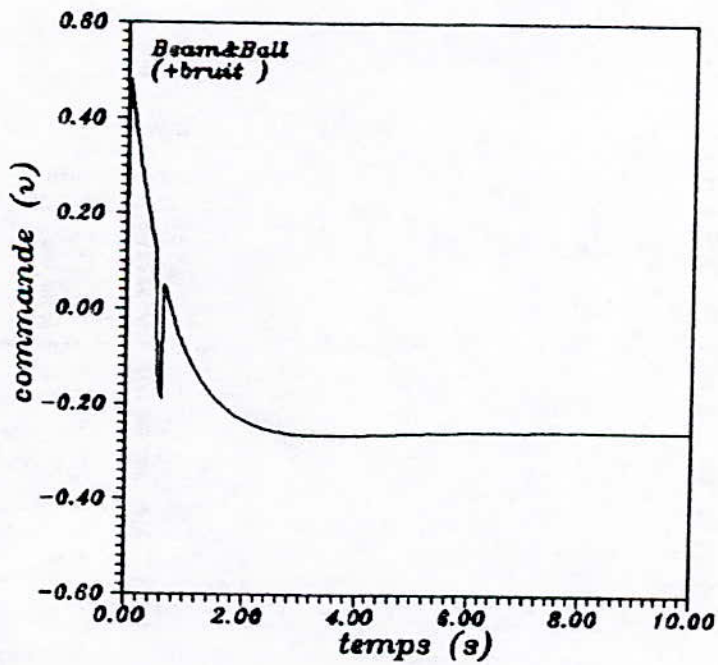


fig 4-3-8

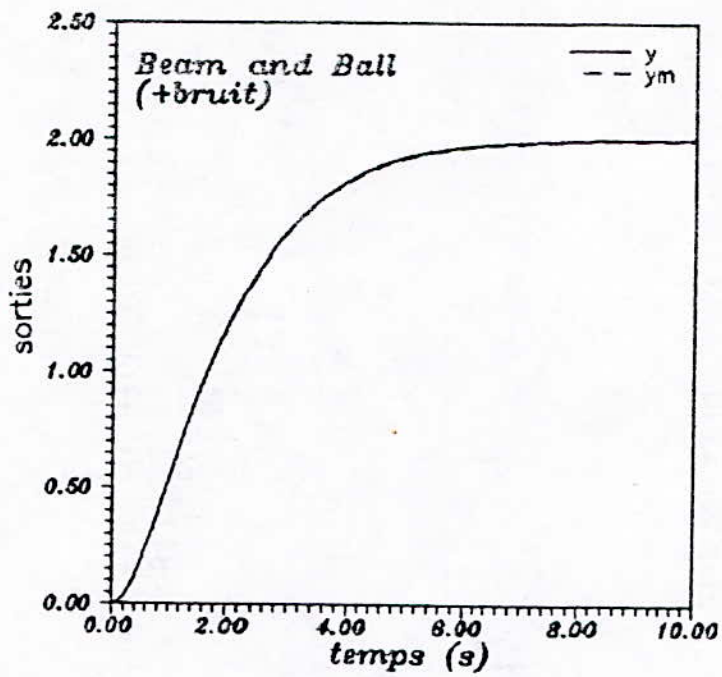


fig 4-3-7

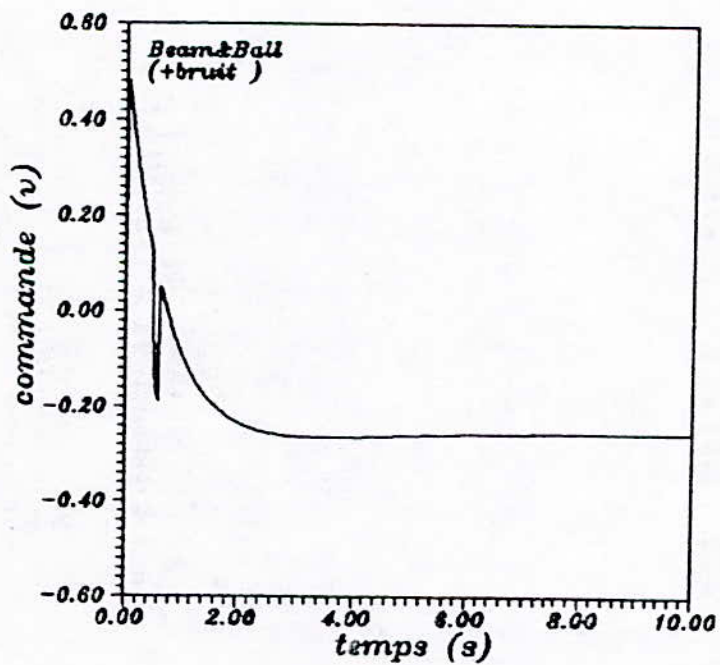


fig 4-3-8

le signal de référence considéré est un signal échelon de deux unités .

les gains du LMFC sont les suivants :

$$K_p = [ 0.515 \quad 0.7206 ] \text{ et } K_u = [ 0.3448 ]$$

les gains  $\alpha$  et  $\beta$  ont été choisis comme suit :

-  $\alpha = 0.001$  et  $\beta = 0$  dans le cas du MRAC

-  $\alpha = [ 0 \quad 0.001 ]$  et  $\beta = [ 0 \quad 1.5 ]$

les résultats du MRAC et du MCS sont satisfaisants (respectivement figures 4.3.1 et 4.3.5) quoique la commande regis du MCS présente un pic au transitoire .

L' introduction d'un perturbation échelon  $d(t)$  de la même manière que dans les exemples précédents entre 0.5s et 0.6s a pratiquement provoqué un léger changement dans la sortie dans les les deux cas MRAC et MCS .

Cette perturbation s'est traduite par l'apparition d'un pic au niveau de la commande issue du controleur minimal , ce qui n'est pas le cas du MRAC supporte par le LMFC .

#### 4.4- Commande d'un bras manipulateur classe 1

##### Etude et modélisation

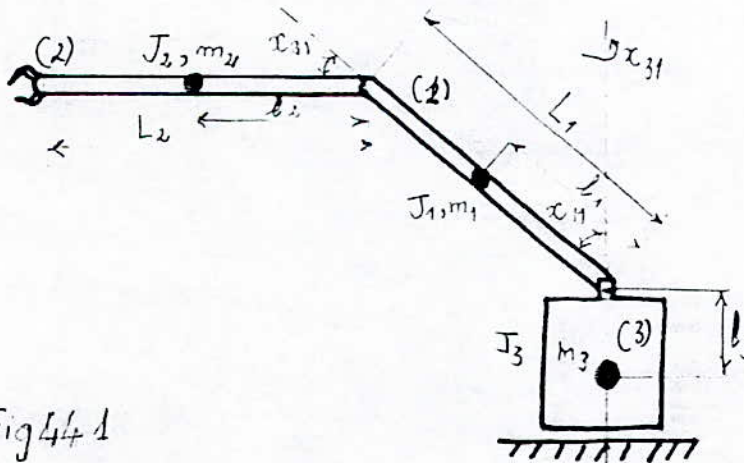


Fig 4.4.1

Le bras manipulateur à étudier est un bras à 3 degrés de libertés de classe 1, c'est à dire qui comporte 3 rotations [17] chaque link "i" a une masse  $m_i$  et un moment d'inertie



$J_i$  par rapport à son propre centre de gravité.

L'étude cinématique et dynamique qui suivra se fera en deux parties, une première partie qui consiste à tirer les énergies potentielles et cinétiques des composantes du système et une deuxième partie où nous tirerons les équations cinématiques qui régissent l'évolution du bras manipulateur (B.M) dans l'espace.

Notation adoptée

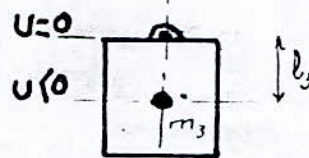
$\theta_i, x_{i1}$  : angle de rotation de chaque articulation,

$\dot{\theta}_i, \dot{x}_{i2}$  : vitesse angulaire de chaque articulation,  $i = 1, 2, 3$

#### A- Energies du système

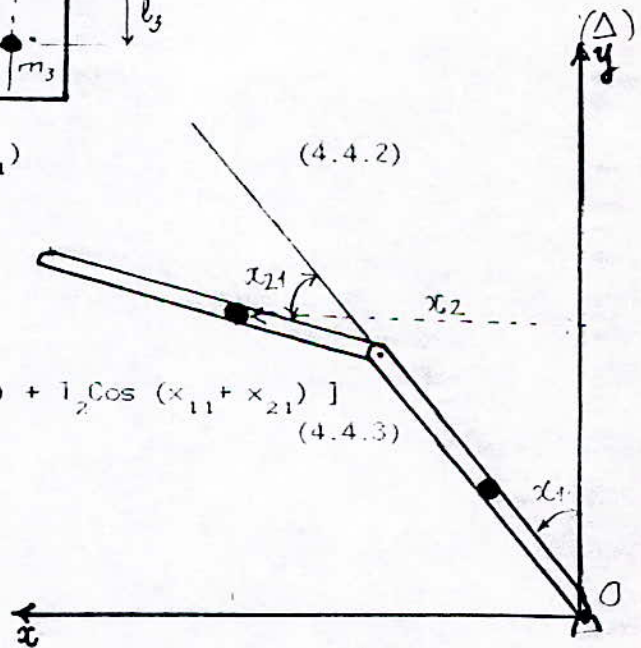
##### A.1- Energie potentielle de chaque composante du B.M

a-  $u_3 = m_3 g l_3$   $u > 0$  (4.4.1)



b-  $u_1 = + m_1 g l_1 \cos(x_{11})$  (4.4.2)

c-  $u_2 = m_2 g [L_1 \cos(x_{11}) + l_2 \cos(x_{11} + x_{21})]$  (4.4.3)



##### A.2- Energie cinétique de chaque composante

a-  $\omega_1$  a une rotation du support de masse ( $m_3$ ) autour de l'axe  $\Delta_1$

$T_3$  : Energie cinétique de rotation de (3)

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{x}_{32}^2 = \frac{1}{2} J_3 \dot{x}_{32}^2 \quad (4.4.4)$$

$J_3$  : moment cinétique polaire  
 $\dot{x}_{32}$  : vitesse angulaire de (3) /  $\Delta_1$

b- Le link "1" subit 2 rotations,

l'une autour de 0 ( $x_{11}$ ) et une autour  $\Delta_1$  ( $x_{31}$ ).

L'énergie cinétique du 1<sup>er</sup> link / 0 sera :

$$T_{10} = \frac{1}{2} (J_1 + m_1 l_1^2) \dot{x}_{12}^2 = \frac{1}{2} J_{x1} \dot{x}_{12}^2 \quad (4.4.5)$$

$$J_{x1} = J_1 + m_1 l_1^2 \quad : \text{moment d'inertie de (1) / 0}$$

L'énergie cinétique du 1<sup>er</sup> link /  $\Delta_1$  sera :

$$T_{1\Delta} = T_{11} + T_{12} + T_{13} \quad (4.4.6)$$

où  $T_{11}$  est l'énergie cinétique du link 1 par rapport à un axe parallèle à  $\Delta_1$  et passant par son centre de gravité.

$T_{12}$  est l'E.C du centre de gravité du link 1, tournant par rapport à  $\Delta_1$ .

$T_{13}$  est l'EC de pivotation de '1' tournant /  $\Delta_1$

$$T_{11} = \frac{1}{2} (J_1 \sin^2(x_{11}) \dot{x}_{32}^2) \quad ; \quad (4.4.7)$$

$$T_{12} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \sin^2(x_{11}) \dot{x}_{32}^2 \quad ; \quad (4.4.8)$$

$$T_{13} = \frac{1}{2} (J_{1p} \sin^2(x_{11}) \dot{x}_{32}^2) \quad ; \quad (4.4.9)$$

$$T_{1\Delta} = \frac{1}{2} (J_1 \sin^2(x_{11}) \dot{x}_{32}^2) + m_1 l_1^2 \sin^2(x_{11}) \dot{x}_{32}^2 + T_{13} J_{1p} \cos^2(x_{11}) \dot{x}_{32}^2 \quad (4.4.10)$$

et donc

$$T_1 = T_{10} + T_{1\Delta} = \frac{1}{2} J_{x1} \dot{x}_{12}^2 + \frac{1}{2} (J_{x1} \sin^2(x_{11}) + J_{1p} \cos^2(x_{11})) \dot{x}_{32}^2 \quad (4.4.11)$$

Le link 2 subit trois rotations, l'une autour de 0, autour de 0' et l'autre autour de ( $\Delta_1$ ).

Nous commencerons par calculer l'EC de rotation du centre de gravité de (2) / à 0.

$$T_{21} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J_2 (\dot{x}_{12} + \dot{x}_{22})^2 \quad (4.4.12)$$

Explications  $x_2$  et  $y_2$

$$x_2 = L_1 \sin(x_{11}) + l_2 \sin(x_{11} + x_{21}) ; \quad (4.4.13)$$

$$y_2 = L_1 \cos(x_{11}) + l_2 \cos(x_{11} + x_{21}) ; \quad (4.4.14)$$

$$\dot{x}_2 = L_1 \dot{x}_{12} \cos(x_{11}) + l_2 (\dot{x}_{12} + \dot{x}_{22}) \cos(x_{11} + x_{21}) \quad (4.4.15)$$

$$\dot{y}_2 = -L_1 \dot{x}_{12} \sin(x_{11}) - l_2 (\dot{x}_{12} + \dot{x}_{22}) \sin(x_{11} + x_{21}) \quad (4.4.16)$$

Après developpement on trouve :

$$T_{21} = \frac{1}{2} (J_{x2} + m_2 L_1^2 + 2m_2 L_1 l_2 \cos(x_{21}) x_{12}^2 + (J_{x2} + m_2 L_1 l_2 \cos(x_{21})) x_{12} x_{22} + \frac{1}{2} (J_{x2}) x_{22}^2) \quad (4.4.17)$$

L'énergie cinétique de rotation par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) sera :

$$T_{22} = \frac{1}{2} \left[ J_2 (\sin^2(x_{11} + x_{21})) x_{32}^2 + \frac{1}{2} m_2 x_{32}^2 + \frac{1}{2} J_{2p} \cos^2(x_{11} + x_{21}) \right] x_{32}^2 \quad (4.4.18)$$

Après developpement

$$T_{22} = \frac{1}{2} \left[ J_{x2} \sin^2(x_{11} + x_{21}) + m_2 L_1^2 \sin^2(x_{11}) + 2m_2 L_1 l_2 \sin(x_{11} + x_{21}) + J_{2p} \cos^2(x_{11} + x_{21}) \right] x_{32}^2 \quad (4.4.19)$$

L'énergie cinétique du link 2 sera égale à :

$$T_2 = T_{21} + T_{22} \quad (4.4.20)$$

$T_{21}$  et  $T_{22}$  sont donnés par (4-4-17) et (4-4-19)

Le lagrangien du systeme mecanique étudié est donné par :

$$L = \sum_{i=1}^3 (T_i - U_i) \quad , \quad T_i \text{ et } U_i \text{ sont les energies calculés précédemment.}$$

Si on prend les coordonnées  $x_{i1}$  comme étant nos coordonnées généralisés l'équation de mécanique de lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{i1}} = q_i \quad \text{avec } (x_{i2} = \dot{x}_{i1}) \quad (4.4.21)$$

$$q_i \text{ étant la force généralisée : } q_i = k_i u_i - c_i x_{i2}$$

Après développement le système pourra s'écrire sous la forme suivante [17]:

$$M \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + D \dot{\theta}^2 + E \dot{\theta}_{i1} + F g = K_L u \quad (4.4.22)$$

$$\text{où } \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T = (x_{11}, x_{21}, x_{31})^T \quad (4.4.23)$$

$$\dot{\theta} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)^T = (x_{12}, x_{22}, x_{32})^T \quad (4.4.24)$$

$$\dot{\theta}^2 = (\dot{\theta}_1^2, \dot{\theta}_2^2, \dot{\theta}_3^2)^T = (x_{12}^2, x_{22}^2, x_{32}^2)^T \quad (4.4.25)$$

$$\dot{\theta}_{i1} = (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3)^T = (x_{12} x_{22}, x_{12} x_{32}, x_{22} x_{32})^T \quad (4.4.26)$$

Avec :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad E = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{31} \end{bmatrix}$$

et le vecteur de gravitation :

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de commande :

$$K_L = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

Pour la composition de chaque matrice voir annexe D .

### B- Autres représentations

L'écriture (4-4-22) est insuffisante pour la simulation du système

et le choix d'un régulateur approprié pour le B.M : nous passerons donc à 2 écritures qui nous permettront par la suite de :

- 1- simuler le système (B.M)
  - 2- faciliter le choix d'un régulateur.
- 1- Ecriture du système différentiel régissant l'évolution dynamique de chaque rotation sous la forme  $\dot{x} = f(x,t)$

l'eq (4.4.22) s'écrit :

$$M \ddot{\theta} = - C\dot{\theta} - fg - D\dot{\theta}^2 - E\dot{\theta}_{i,j} + K_L u \quad (4.4.27)$$

$$\ddot{\theta} = - M^{-1}C \dot{\theta} - M^{-1}fg - M^{-1}D \dot{\theta}^2 - M^{-1}E \dot{\theta}_{i,j} + M^{-1}K_L u \quad (4.4.28)$$

On passera de l'équation (4-4-28) à une représentation avec les coordonnées d'état  $x$  formés comme suit :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1 & , & & x_2 &= \dot{\theta}_1 \\ x_3 &= \theta_2 & , & & x_4 &= \dot{\theta}_2 \\ x_5 &= \theta_3 & , & & x_6 &= \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

soit

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^{ere} \text{ articulation} \\ 2^{eme} \text{ articulation} \\ 3^{eme} \text{ articulation} \end{array} \quad (4.4.29)$$

(4.4.27) s'écrit :

$$M \ddot{\theta} = - C \dot{\theta} + K_L u + NL - F g \quad (4.4.30)$$

où  $NL = - D\dot{\theta}^2 - E\dot{\theta}_{i,j}$  (non linéarités de la partie droite) (4.4.31)

Nous obtiendrons

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & 0 & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{21} & 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 u_1 \\ 0 \\ k_2 u_2 \\ 0 \\ k_3 u_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{NL_1}{0} \\ 0 \\ \frac{NL_2}{0} \\ 0 \\ NL_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f_1 g}{0} \\ 0 \\ \frac{f_2 g}{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.32)$$

$$NL_1 = -d_{12} x_2^2 - d_{13} x_6^2 - e_{11} x_2 x_4 ; \quad (4.4.33)$$

$$NL_2 = -d_{21} x_2^2 - d_{23} x_6^2 ; \quad (4.4.34)$$

$$NL_3 = -e_{32} x_2 x_6 - e_{33} x_4 x_6 ; \quad (4.4.35)$$

Le système devient

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & m_{11} \dot{x}_2 + m_{12} \dot{x}_4 &= (-c_1 x_2 + k_1 u_1 + NL_1) = \sigma_1 ; \\ \dot{x}_3 &= x_4 & m_{21} \dot{x}_2 + m_{22} \dot{x}_4 &= (-c_2 x_4 + k_2 u_2 + NL_2) = \sigma_2 ; \\ \dot{x}_5 &= x_6 & m_{33} \dot{x}_6 &= (-c_3 x_6 + k_3 u_3 + NL_3) = \sigma_3 . \end{aligned}$$

$$\det = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12}$$

Ce qui donne :

$$x_1 = x_2 \quad (4.4.36)$$

$$x_2 = (\sigma_1 m_{22} - \sigma_2 m_{12}) / \det \quad (4.4.37)$$

$$x_3 = x_4 \quad (4.4.38)$$

$$x_4 = (\sigma_2 m_{11} - \sigma_1 m_{21}) / \det \quad (4.4.39)$$

$$x_5 = x_6 \quad (4.4.40)$$

$$x_6 = \sigma_3 / m_{33} \quad (4.4.41)$$

N.B : cette écriture est nécessaire pour la simulation de l'évolution dynamique des sorties du bras en fonction de l'entrée.

2- Pour le choix d'un régulateur qui asservira les sorties du B.M, nous sommes obligés de passer d'une autre écriture : une écriture où l'on place les termes linéaires ensemble et les termes non linéaires dans un vecteur d(t).

$$\dot{x} = A x + B u + d(t) \quad (4.4.42)$$

$$\text{où } d(t) = NLC + g_t \quad (4.4.43)$$

A et B sont des matrices qui ne contiennent que des termes constants.

NLC : contient des non linéarités et des couplages entre les 3 sorties.

$g_t$  : est le terme de gravitation.

Nous procéderons comme suit :

Sachant que chaque  $m_{ij}$  s'écrit sous la forme d'un terme constant et d'un terme variable, nous ferons passer tous les termes variables de  $M$ , multipliés par les composantes de  $x$ , de l'autre côté de l'équation (4-4-30) et par la suite nous les introduirons avec le vecteur de termes variables NL.

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_{t1} + j_{x2} & & 0 & j_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & j_{x2} & & 0 & j_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & j_3 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^1}{2} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \alpha_2 \end{array} \right| x =$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & -c_3 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{c} 0 \\ k_1 u_1 \\ 0 \\ k_2 u_2 \\ 0 \\ k_3 u_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 0 \\ NL_1 \\ 0 \\ NL_2 \\ 0 \\ NL_3 \end{array} \right| \quad (4.4.44)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_{t1} + j_{x2} & & 0 & j_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & j_{x2} & & 0 & j_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & j_3 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & -c_3 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{c} 0 \\ k_1 u_1 \\ 0 \\ k_2 u_2 \\ 0 \\ k_3 u_3 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} 0 \\ f_1 g \\ 0 \\ f_2 g \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| + NL' \quad (4-4-45)$$

La resolution du systeme precedent donne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & B & B_{33} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ g_{t1} \\ 0 \\ g_{t2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ NLC_1 \\ 0 \\ NLC_2 \\ 0 \\ NLC_3 \end{pmatrix} \quad (4-4-46)$$

Avec :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c_1/j_{t1} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2/j_{t1} \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c_1/j_{t1} \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c_2(j_{t1}^{-1} + j_{x2}^{-1}) \end{pmatrix}, \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c_3/j_3 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1/j_{t1} \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2/j_{t1} \end{pmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_1/j_{t1} \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2(j_{t1}^{-1} + j_{x2}^{-1}) \end{pmatrix} \text{ et } B_{33} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3/j_3 \end{pmatrix}.$$

$$g_{t1} = (f_1 g - f_2 g)/j_{t1}, \quad g_{t2} = (1/j_{t1} + 1/j_{x2}) f_2 g - f_1 g/j_{t1}$$

Pour NLC1 , NLC2 et NLC3 voir annexe D.

#### 4.4.1- Réponse en boucle ouverte

Afin de prédire le comportement du bras manipulateur nous avons simulé sa réponse en boucle ouverte à un échelon  $u(t) = [0.25, 0.25, 0.25]$ .

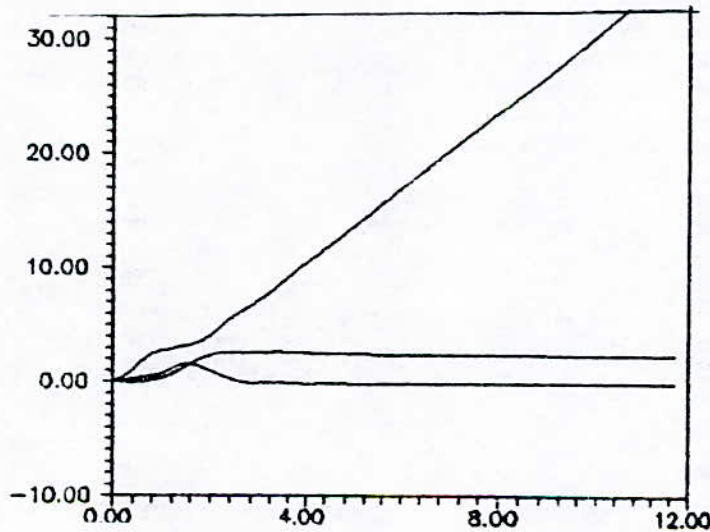


fig (4.4.2)

Réponse en boucle ouverte du robot



Il est facile de voir l'instabilité au niveau de la 3<sup>ème</sup> articulation (rotation autour de l'axe Z), chose que l'on va

#### 4.4.2- Réponse au contrôleur linéaire avec poursuite du modèle (LMFC):

La représentation donnée par l'éq.(4.4.42) sera utilisée pour la synthèse du contrôleur linéaire. Cela supposera la partie restante comme étant une perturbation devant être éliminée par la régulation.

Les gains du LMFC seront calculés par les relations(2.13), (2.14) et K sera choisi nul.

L'évolution dans l'espace du B.M est donné par l'équation :

$$\dot{x} = A x + B u \quad (4.4.43)$$

avec :

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.7692 & 0 & 0.7692 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.7692 & 0 & -4.4026 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \quad (4.4.49)$$

$$\text{et } B = \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 3.0769 & -1.538 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ -3.0769 & 3.2051 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{array} \quad (4.4.50)$$

#### Choix du modèle de référence

Le modèle de référence est décrit par l'équation (1-3):

$$\dot{x}_m = A_m x + B_m u_m$$

avec:

$$A_m = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & -8 \end{array} \quad \text{et } B_m = \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{array}$$

C'est un modèle linéaire avec des sorties découplées, chacune en relation avec l'entrée correspondante par une équation du second ordre ( $\xi=1$ ,  $\omega_n=1$ ).

L'entrée de référence choisie sera  $u_m = [0.5, 1, 1.5]$

Les gains du LMFC calculés par les relations (2.13) et (2.14)

sont donnés par :

$$K_P = \begin{pmatrix} 6.4000 & 1.3250 & 1.2000 & 0.6000 & 0 & 0 \\ 2.4000 & 1.2000 & 2.4000 & 0.7200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.1750 \end{pmatrix} \quad (4.4.51)$$

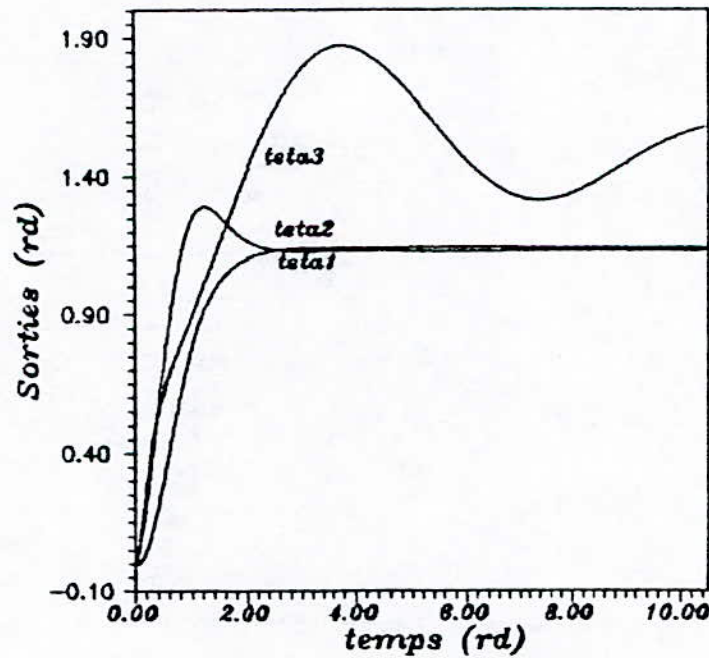
et

$$K_u = \begin{pmatrix} 6.4000 & 1.2000 & 0 \\ 2.4000 & 2.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 \end{pmatrix} \quad (4.4.52)$$

Les conditions d'Erzberger's (2.15) et (2.16) sont vérifiées.

La réponse du B.M piloté par le LMFC est donnée dans la fig

(4.4.3)



**Reponse du Robot au LMFC**

fig 4.4.3

Cette approche de linéarisation est par conséquent, insuffisante pour la poursuite du modèle.

#### 4.4.3 Reponse au SFCIE

Le SFCIE (state feed back control with intégration of error) est un contrôleur à retour d'état avec intégration de l'erreur de sortie, sa synthèse se fait par le placement des poles de la matrice du transfert boucle fermée du système [7].

L'évolution du robot étant décrit par l'équation (4.4.46)

$$\dot{x} = A x + B u + g_t + NLC$$

Les sorties  $\theta(t)$  sont données par :

$$\theta(t) = C x(t)$$

avec

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.54)$$

L'écart de sortie est donné par :  $e(t) = r(t) - \theta(t)$  (4.4.55)

La commande sera choisie de la forme :

$$u = -k x + k_1 \int_0^t e(\tau) d\tau - B^+ g_s \quad (4.4.56)$$

Où  $g_s$  est le terme de gravitation stationnaire (car on ne pourra pas utiliser  $g_1(t)$  qui est fonction des positions du B.M).

La combinaison des 4 équations précédentes (4.4.53) à (4.4.56) permet de passer à un état augmenté  $z = (x, e)^T$ .

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_1 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (4-4-57)$$

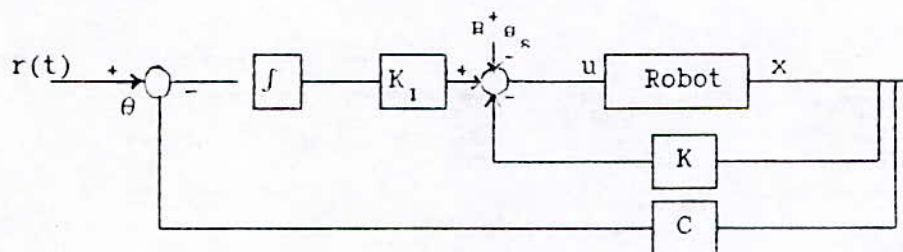


fig 4-4-4 implantation du SFCIE

$K$  et  $K_1$  sont choisis en fixant les valeurs propres de la matrice de transfert boucle fermée  $\bar{A} - \bar{B} \bar{K}$

Avec:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{K} = [K, -K_1] \quad (4-4-58)$$

La fonction macro "place" disponible sur Matlab peut être utilisée pour la recherche de  $\bar{K}$  assurant les valeurs propres désirées.

Pour nos tests nous avons utilisés les mêmes poles proposés dans [4].

Les valeurs propres de la matrice boucle fermée  $\bar{A} - \bar{B} \bar{K}$  choisies son -4 partout.

Le vecteur des valeurs propres  $v_p$  sera donné par :

$$v_p = [-4, -4, -4 \quad -4]$$

Les gains  $k$  et  $k_i$  calculés à partir du vecteur propre précédent sont :

$$K = \begin{bmatrix} 19.2 & 2.925 & 3.593 & 0.8991 & 0 & 0 \\ 7.2 & 1.800 & 7.197 & 1.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0.275 \end{bmatrix}$$

et

$$K_i = \begin{bmatrix} 25.6 & 4.786 & 0 \\ 9.6 & 9.594 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix}$$

Les résultats du test obtenus pour une période d'échantillonnage de 10 ms sont donnés par la fig (4.4.5)

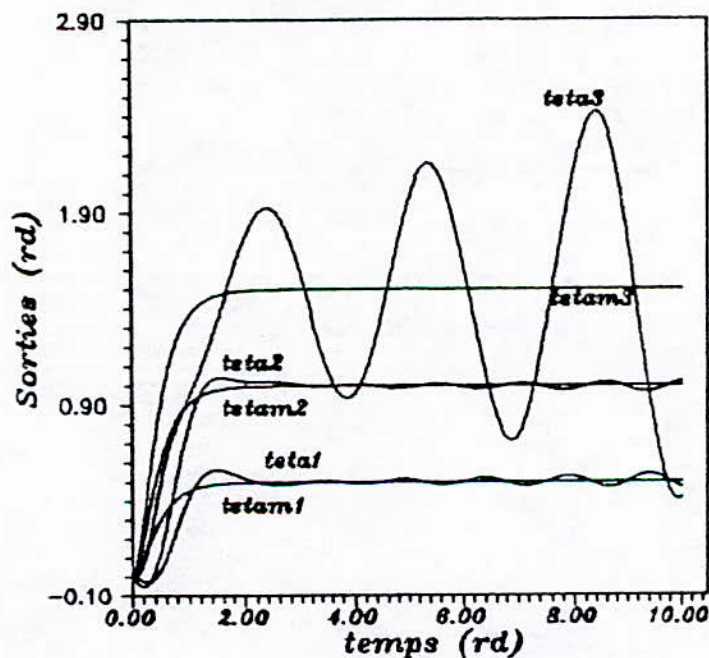


Fig 445 **Reponse au contrôleur SFCIE**

Il y'a une instabilité plus importante au niveau de la 3<sup>ème</sup> articulation et il faudra envisager un autre procédé de régulation (voire § 4.4.4) .

4.4.4- Synthèse d'un régulateur mixte (SFCIE - LMFC)

Ayant vue qu le LMFC provoquait surtout une erreur statique permanente et que le 'SFCIE' provoquait une instabilité plus importante au niveau de la sortie  $\theta_3$ , nous avons adopté la synthèse d'un régulateur mixte :

- par intégration de l'erreur pour les link 1 et 2
- par poursuite du modèle (sans intégration de l'erreur) au niveau de la 3<sup>ème</sup> articulation.

La commande u sera synthétisée en deux parties :

$u_1$  et  $u_2$  prises en charge par le SFCIE

$u_3$  prise en charge par le LMFC

La structure sera la suivante :

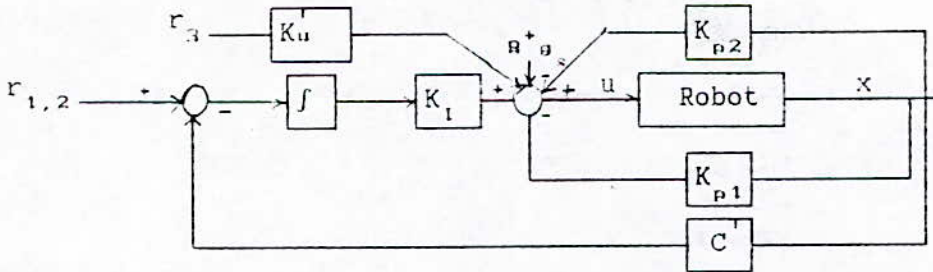


fig 4-4-6 Structure du controleur mixte LMFC-SFCIE

avec

$K'_{P2}, K_{P2}$  : respectivement les gains d'action et de réaction calculés par la synthèse du LMFC pour l'articulation 3

$K'_I, K_{P2}$  : respectivement les gains d'intégration et de réaction calculés par la synthèse du SFCIE pour les articulations (1) et (2).

$C'$  : est la matrice des sorties  $\theta_1$  et  $\theta_2$

$$K'_u = 0.400 \quad \text{et} \quad K_{P2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.175 \end{bmatrix}$$

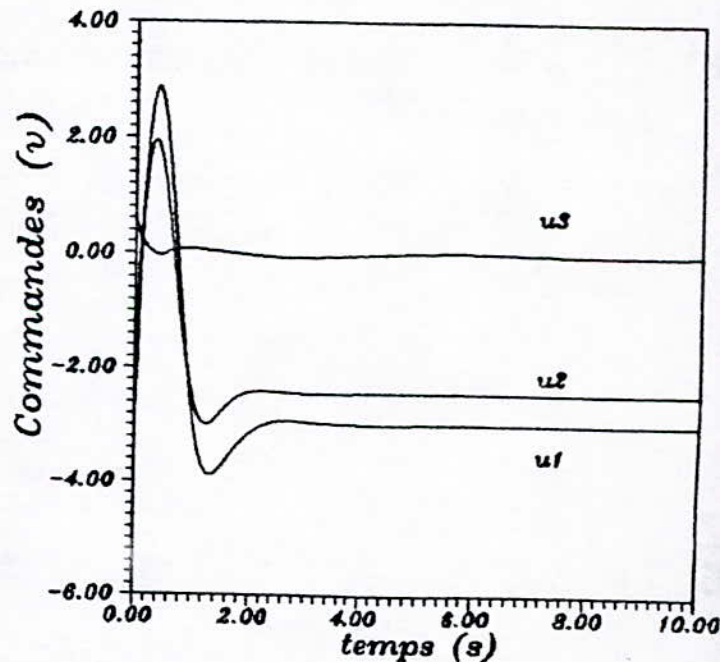
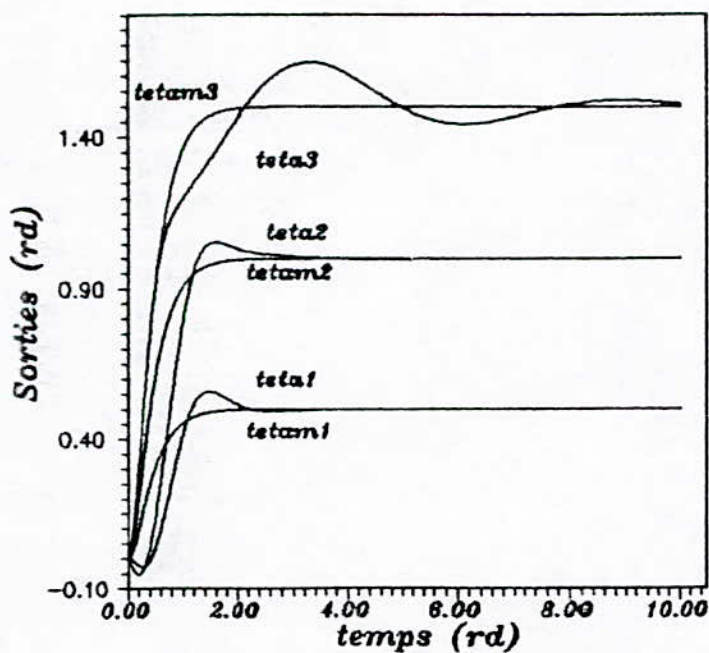
$K_{p1}$  est égal à  $K$  calculé au (S 4-4-3) avec les zéros dans la 3<sup>ème</sup> ligne, 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> colonnes.

$K^I$  est égal à  $K$  calculé au (S 4-4-3) avec les zéros dans la 3<sup>ème</sup> ligne et la 3<sup>ème</sup> colonne.

Les résultats sont nettement plus meilleurs que les 2 essais précédents, il y'a stabilité des sorties et des commandes mais les performances obtenues peuvent être améliorées en changeant les gains et le modèle à suivre.

Pour des performances désirées, il est difficile de choisir un régulateur classique (tatonnement sur les gains modèle à suivre).

D'autres tests seront fait avec des régulateurs adaptifs (MRAC et MCS).



Reponse au controleur mixte LMFC-SFCIE

#### 4.4.5 Application du MRAC

la synthèse du MRAC porte sur deux étapes :

- synthèse du LMFC (calcul des gains du LMFC)
- choix des coefficients des actions proportionnel et intégral

Après quoi les résultats de simulation seront visualisés pour une éventuelle comparaison des performances.

Les lois d'adaptation avec lesquelles nous allons travailler sont de la même forme que ceux des exemples précédents :

$$dK_p = \alpha \int_0^t y_p(\tau) x^T(\tau) d\tau + \beta y_p(t) x^T(t)$$

$$dK_u = \alpha \int_0^t y_p(\tau) u_m^T(\tau) d\tau + \beta y_p(t) u_m^T(t)$$

$y_p$  étant l'erreur améliorée donnée par l'équation (2.26)

$$y_p = c_p x_p = B^T P (x_m - x) \quad (4.4.59)$$

La matrice  $Q$  sera choisie comme :

$$Q = \text{diag}(Q_i) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \right) \quad (4.4.60)$$

$i=1..3$

La matrice  $P$  solution de l'équation de Lyapounov est donnée par

$$P = \text{dig}(P_i) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 3.3125 & 0.2813 \\ 0.2313 & 3.8125 \end{bmatrix} \right) \quad (4.4.60)$$

$i=1..3$

$C_p$  est donnée par :

$$C_p = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0.865 & 0.301 & -0.865 & -0.3 & 0 & 0 \\ -0.433 & -0.15 & 2.32 & 0.802 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 11.3 & 3.91 \end{array} \right] \quad (4.4.62)$$

## Test 1

Les données de ce test sont :

$$\alpha = 100$$

$$\beta = 1$$

$$dte = 1ms \text{ (période d'échantillonnage)}$$

$$m_p = 0 \text{ (masse à l'extrémité du link 2)}$$

Q, P et  $C_p$  sont respectivement données par les équations (4.4.60) à (4.4.62).

Les résultats sont données par les figures (4.4.9 à 4.4.12).

Il y a eu une bonne poursuite avec de faibles oscillations autour des sorties du modèle.

Les normes des gains de chaque articulation sont montrées dans la fig 4.4.10 et on voit bien que les gains convergent.

### NOTATION

ffni : la norme du "feed forward gain" de l'articulation 'i'

fbni : la norme du "feed back gain" de l'articulation 'i'

### Augmentation de la période d'échantillonnage

Nous avons augmenté la période d'échantillonnage à 10 ms avec les mêmes données précédentes ( $\alpha$ ,  $\beta$ , Q, P et  $C_p$ )

les gains d'adaptation (calculés par le mécanisme d'adaptation) divergent très rapidement.

Nous avons observé l'évolution de  $y_p$  (erreur améliorée intervenant directement dans le calcul des gains) et avons remarqué que l'erreur au niveau de la 3<sup>ème</sup> articulation divergeait d'une manière nettement plus rapide que les deux autres et les couplages existants provoquent ainsi la divergence de ces dernières.

Sachant que  $y_p$  est calculée par l'équation (4.4.59) :

$$\text{ie: } y_p = C_p x_p = B^T P x_p$$



Il est facile de voir la non uniformité existante dans la matrice  $C_{e3}$  donnée par (4.4.62) car le bloc intervenant pour la troisième articulation est d'un ordre de grandeur plus élevée :

$$C_{e3} = [11.3 \quad 3.91]$$

$C_{e3}$  est non uniforme parce que B est non uniforme : B (6.3) est égal à 40 qui est nettement plus élevé par rapport aux autres éléments de la matrice.

La procédure suivie est de choisir une matrice Q non uniforme avec des valeurs assez faibles au niveau du bloc intervenant pour la troisième articulation.

La matrice Q choisie est :

$$Q = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{array} \right] \quad (4.4.63)$$

Avec laquelle nous aboutissons à la matrice P suivante :

$$P = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 3.8125 & 0.2813 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2813 & 0.0977 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3.8125 & 0.2813 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2813 & 0.0977 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0.38125 & 0.02813 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02813 & 0.00977 \end{array} \right] \quad (4.4.64)$$

La matrice  $C_e$  désirée est de la forme :

$$C_e = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} c_{e^{11}} & c_{e^{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{e^{23}} & c_{e^{24}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & c_{e^{35}} & c_{e^{36}} \end{array} \right] \quad (4.4.65)$$

et cela afin de découpler l'influence des écarts entre eux.

La matrice  $C_e$  donnée par la matrice P précédente est :

$$C_p = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0.865 & 0.301 & -0.865 & -0.3 & 0 & 0 \\ -0.433 & -0.15 & 2.32 & 0.802 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1.13 & 0.391 \end{array} \right]$$

Une dernière modification peut être apportée en trouvant la matrice P qui annule les tenues C<sub>13</sub>, C<sub>14</sub>, C<sub>21</sub> et C<sub>22</sub> (à condition qu'elle soit définie positive).

La matrice P donnant C<sub>p</sub> de la forme (4.4.65) est :

$$P = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 3.8125 & 0.2813 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2813 & 0.0977 & 3.8125 & 0.2813 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3.8125 & 0.2813 & 0 & 0 \\ 0.0527 & 0.0183 & 0.2813 & 0.0977 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0.38125 & 0.02813 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02813 & 0.00977 \end{array} \right] \quad (4.4.64)$$

Et la matrice C<sub>p</sub> obtenue est :

$$C_p = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0.703 & 0.244 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.375 & 0.651 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1.13 & 0.391 \end{array} \right]$$

Test 2 : figures (4.4.13 à 4.4.18)

Les données de ce test sont :

$$dte = 1 \text{ ms} .$$

$$\alpha = 100 .$$

$$\beta = 1 .$$

C<sub>p</sub> est donnée par (4.4.66)

L'observation de la courbe de sortie peut laisser croire qu'il n'y'a pas de problèmes de divergence et que l'écart n'est pas important, mais les courbes d'erreurs montrent bien que l'écart augmente de plus en plus avec le temps.

Les gains au niveau de la 3<sup>eme</sup> articulation divergent plus rapidement cela est dû au fait que la modification a été apportée à ce niveau (modification de P et Q) : il faudra donc diminuer la période d'échantillonnage.

Test 3 : figure (4.4.19 à 4.4.23)

Dans ce test nous avons pris :  $dte = 5 \text{ ms}$

$$\alpha = 100$$

$$\beta = 1$$

$$C_p \text{ donnée par (4.4.66)}$$

Les résultats du test sont satisfaisants : il y a une convergence des gains avec de légères oscillations des courbes de sorties autour des courbes du modèle.

Une brève comparaison entre les courbes d'erreurs où  $dte = 5 \text{ ms}$  et  $dte = 1 \text{ ms}$  montre que les performances n'ont pratiquement pas changé, si ce n'est que les erreurs au niveau des deux articulations (1) et (2) ont diminué au detriment de l'erreur au niveau du link (3) (à cause de la modification apportée).

**Comparaison des différents écarts ( $x_m - x$ )**  
 $x_{ei}$  : pour  $dte=1\text{ms}$  .  $x_{ei}'$  : pour  $dte=5\text{ms}$ .

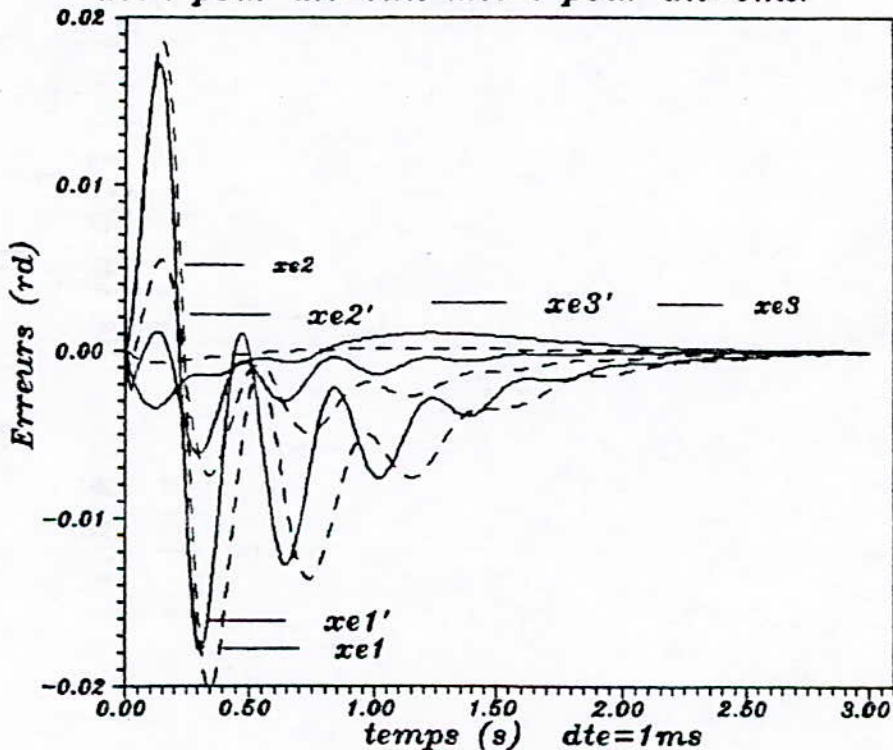


fig 4-4-19

### Influence de la charge

Introduisons une masse au niveau de l'extrémité du link 2 et observons son influence sur le comportement du robot piloté par le MRAC (voire annexe D pour les modifications apportées au niveau des équations).

#### Test 4 :

Les données de ce test sont :  
dte,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $C_p$  donnés dans le test 1  
et  $m_p = 1 \text{ kg}$

Les résultats sont montrés dans les figures ((4.4.24 à 4.4.27) une comparaison des performances entre les tests en charge et sans charge (dte = 1 ms) (fig 4.4.25 à 4.4.27) montre qu'il n'y a pas une grande différence et que les erreurs convergent toujours vers zéro.

#### Tests 5, 6 et 7

Afin de voir l'influence de la charge sur les performances, ces tests ont été fait :

- test 5 :  $m_p = 1 \text{ kg}$
- test 6 :  $m_p = 2 \text{ kg}$
- test 7 :  $m_p = 5 \text{ kg}$

La période d'échantillonnage choisie est 5ms  $\alpha, \beta$  et  $C_p$  sont ceux du test 3.

Les écarts des sorties réelles avec le modèle augmentent de plus en plus mais ils convergent toujours vers zero fig ( 4.4.28 à 4.4.33).

Des oscillations apparaissent au niveau du link 3 (écarts, gains

et commandes) ; cela est dû au fait que c'est, l'articulation la plus sensible (voire tests précédents).

Les gains d'adaptation changent dans chaque cas de valeur permanente, c'est l'un des objectifs de l'adaptation : identification implicite de la charge  $m_a$ . La commande devient plus

importante avec la charge parce qu'on doit à chaque fois, fournir plus d'énergie.

La charge maximale qu'on ne peut pas dépasser est limitée par :

- les capacités mécaniques du bras de saisie
- les capacités énergétiques des organes d'action
- d'autres contraintes mécaniques ( présence de jeux par exemple)
- limitation de l'algorithme de contrôle.

Ignorant les capacités réelles du bras étudié, nous avons évité de passer à des masses plus importantes.

### Test 8

Dans ce test, nous avons provoqué une perturbation brusque lors de l'évolution du robot en faisant tomber la masse  $m_a = 1 \text{ kg}$  après 0,5 s, c'est à dire au régime transitoire .

Les résultats sont satisfaisant , il y'a eu convergence des gains et aucune perturbation brusque dans les sorties fig (4.4.40 à 4.4.43 )

#### 4.4.6- Application du MCS

La synthèse du contrôleur minimale est très simple.

La commande  $u$  est donnée par :

$$u = dk_p x + dk_u u_m$$

$dk_p$  et  $dk_u$  sont données comme suit

$$dk_p = \alpha \int_0^t y_e(\tau) x^T(\tau) d\tau + \beta y_e(t) x^T(t)$$

$$dk_u = \alpha \int_0^t y_e(\tau) u_m^T(\tau) d\tau + \beta y_e(t) u_m^T(t)$$

TEST1 : Robot Sous MRAC  
dte=1ms .

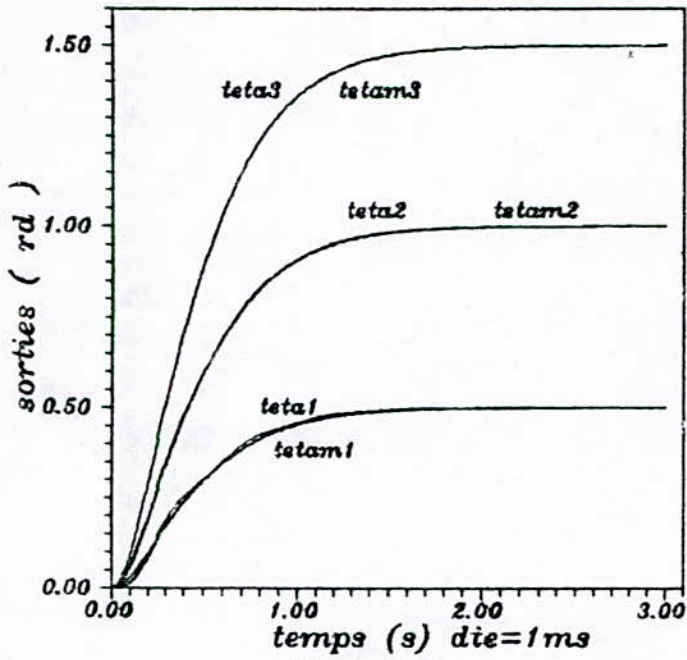


fig 4-4-9

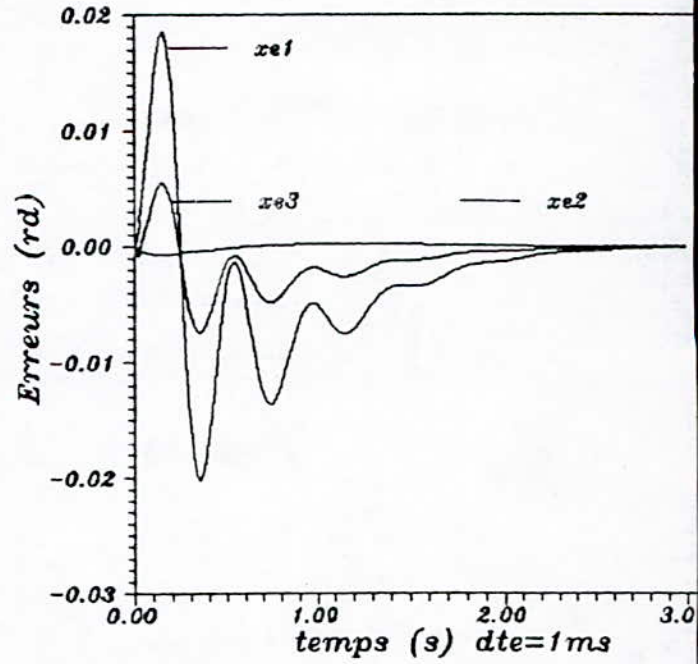


fig 4-4-10

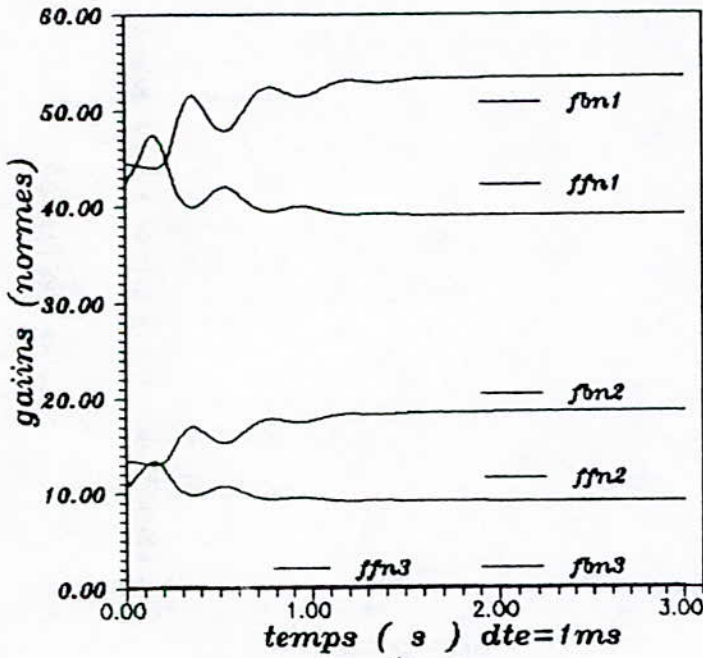


fig 4-4-11

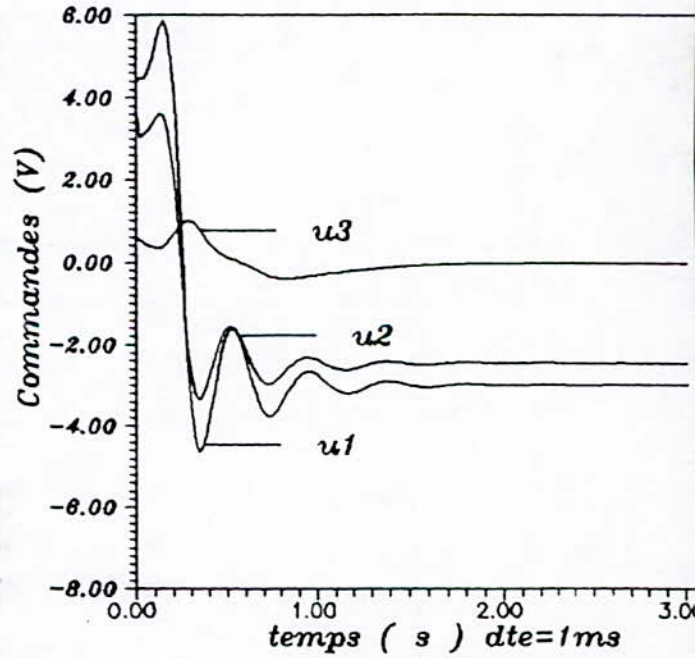


fig 4-4-12

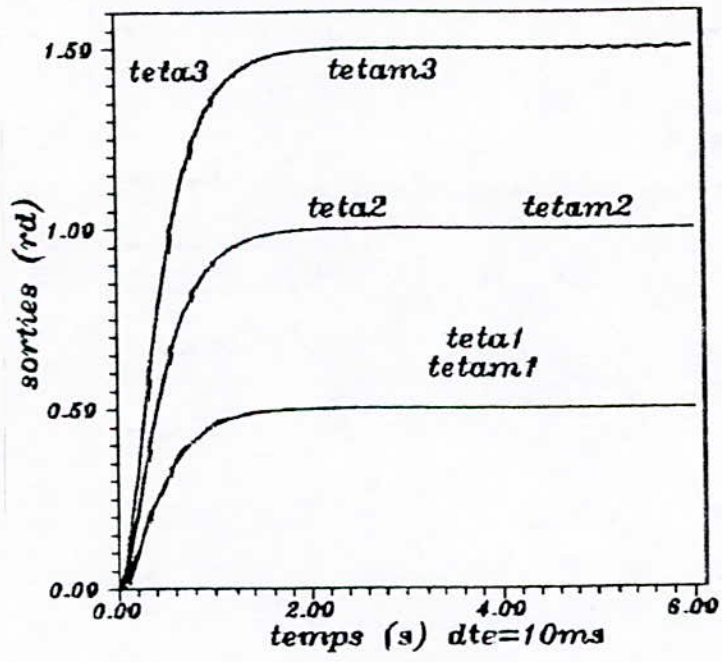


fig 4-4-13

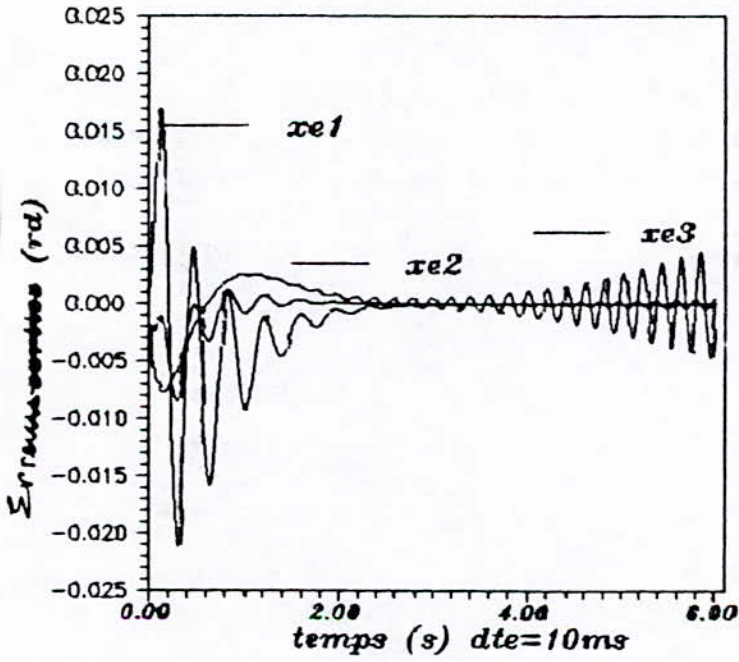


fig 4-4-14

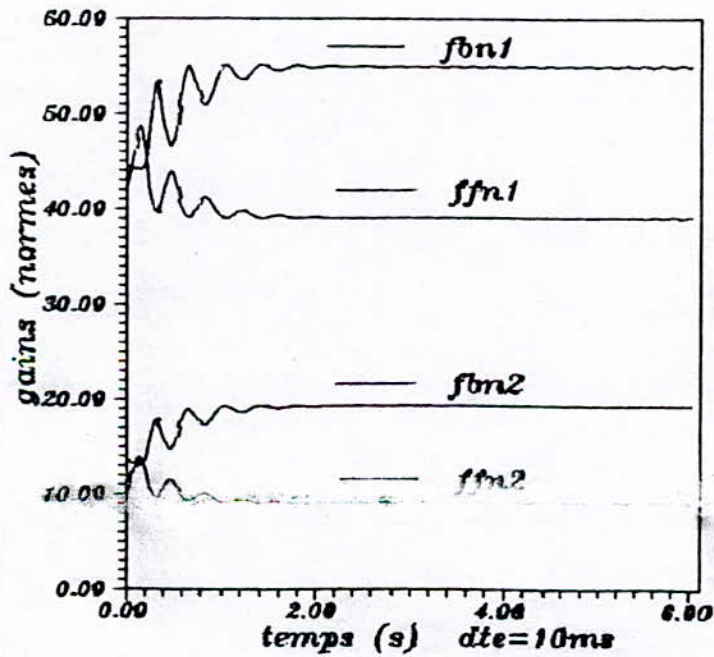


fig 4-4-15

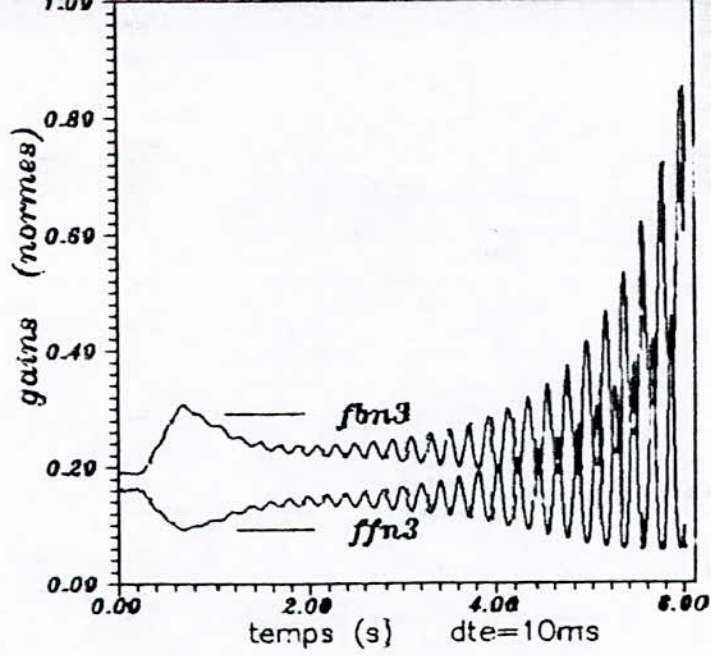


fig 4-4-16

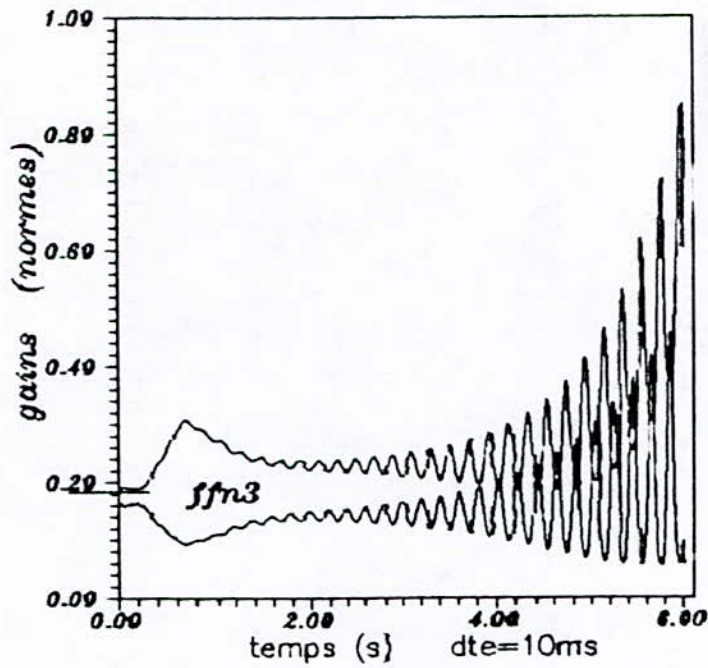


fig 4-4-17

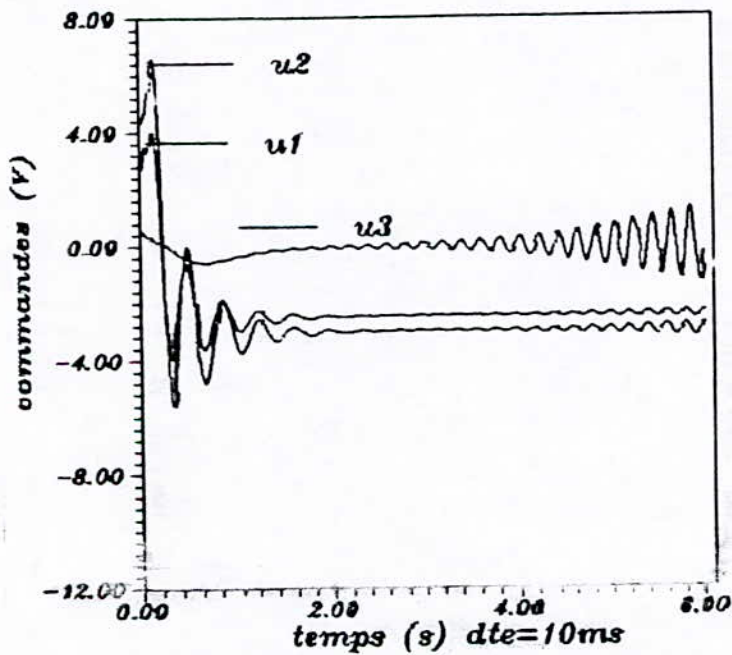


fig 4-4-18



TEST 3: Robot sous MRAC  
 $dte=5ms$   $me=0$

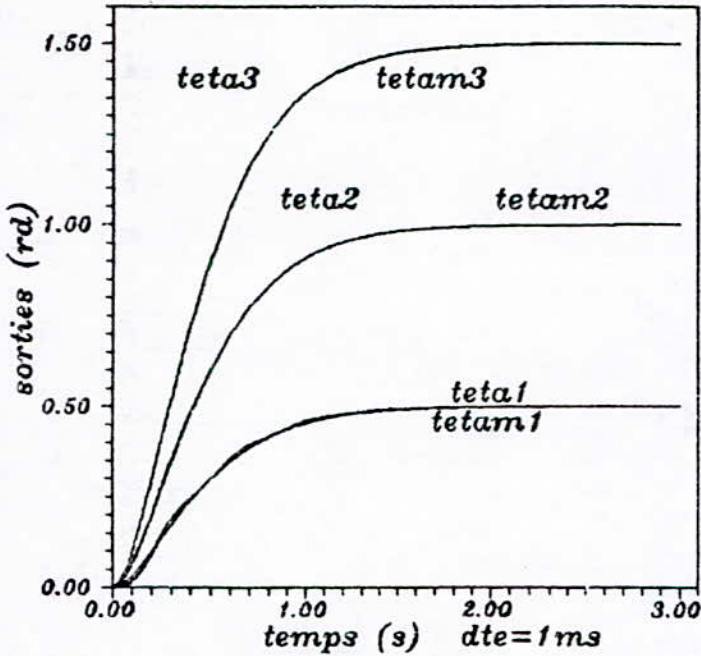


fig 4-4-20

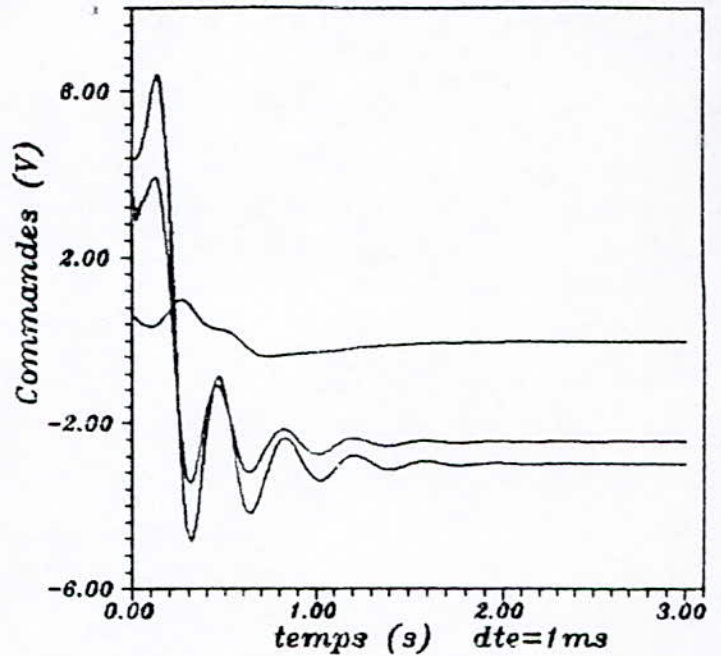


fig 4-4-21

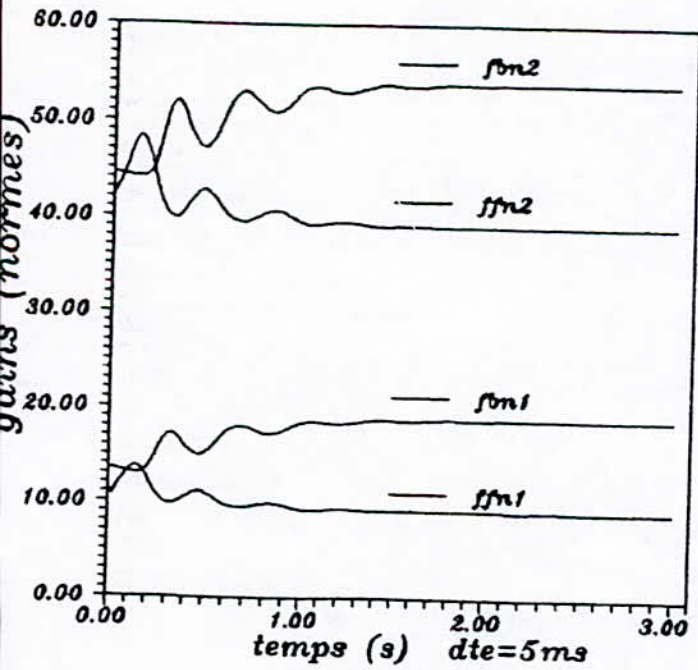


fig 4-4-22

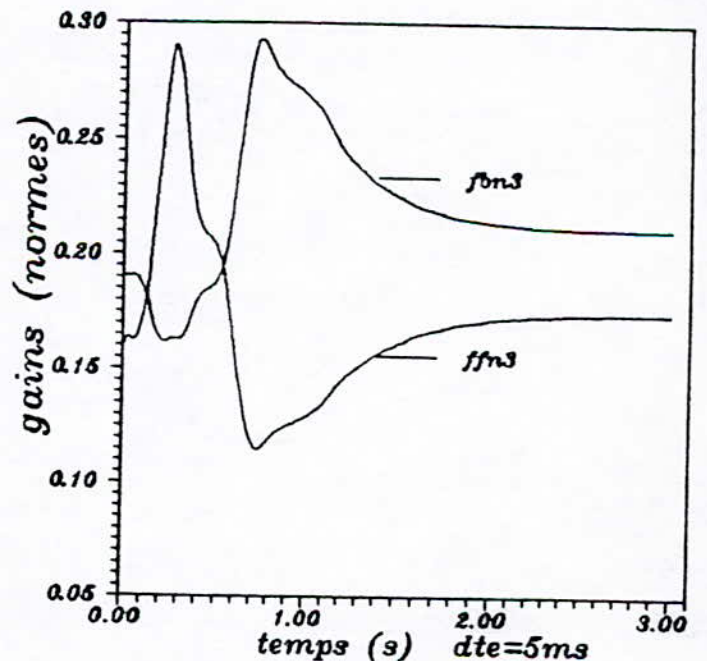


fig 4-4-23

TEST4 : Robot Sous MRAC  
 $dte=1ms$  ,  $me=1kg$  .

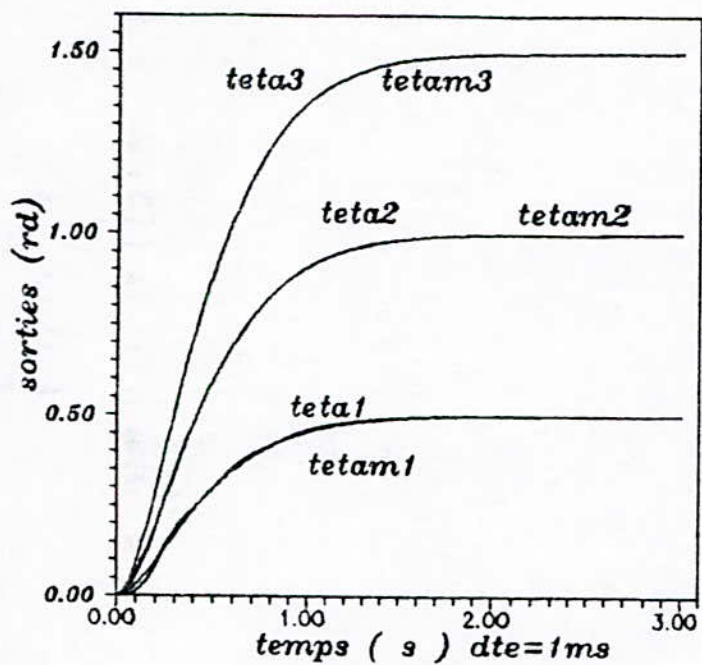


fig 4-4-24

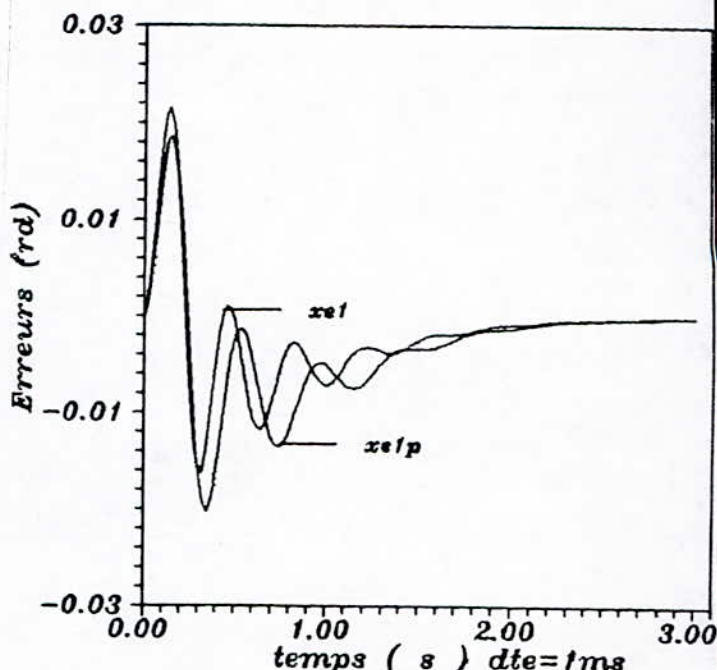


fig 4-4-25

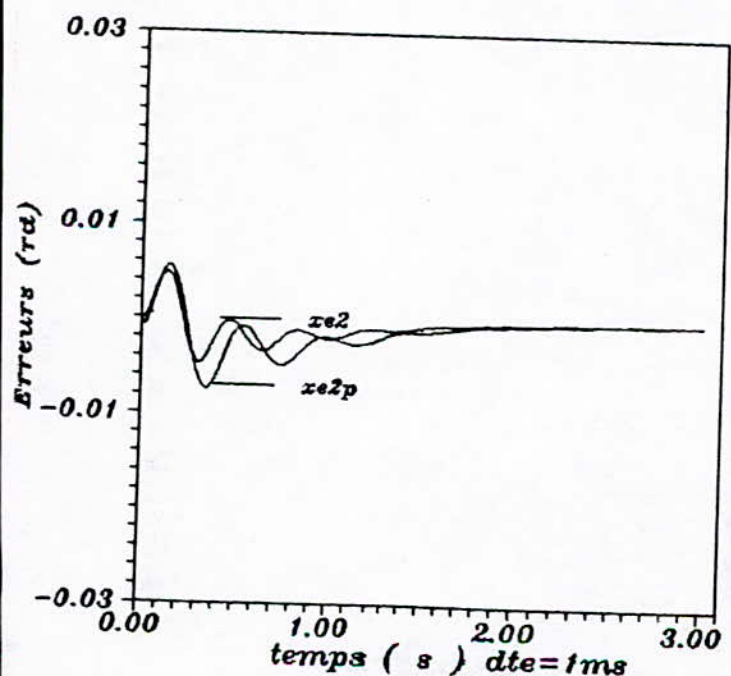


fig 4-4-26

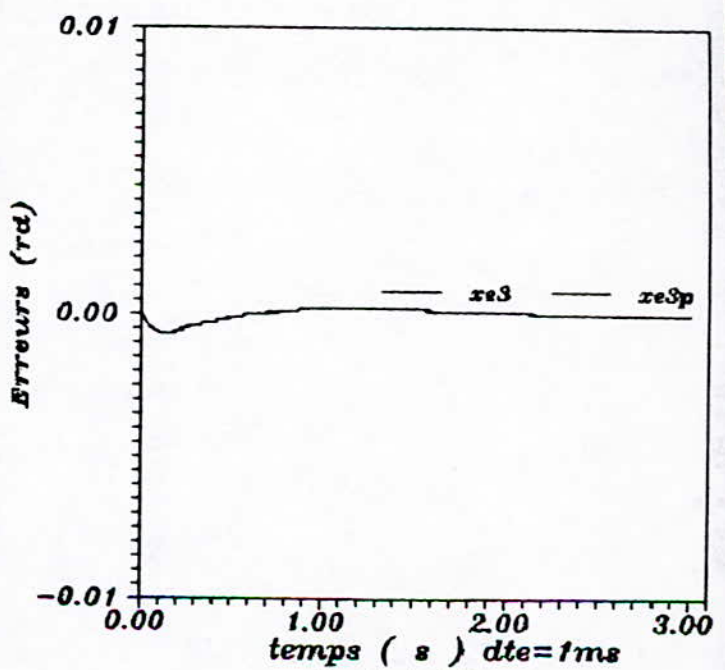


fig 4-4-27

TEST5 : Robot Sous MRAC  
 $dte=5ms$  /  $me=1kg$ .

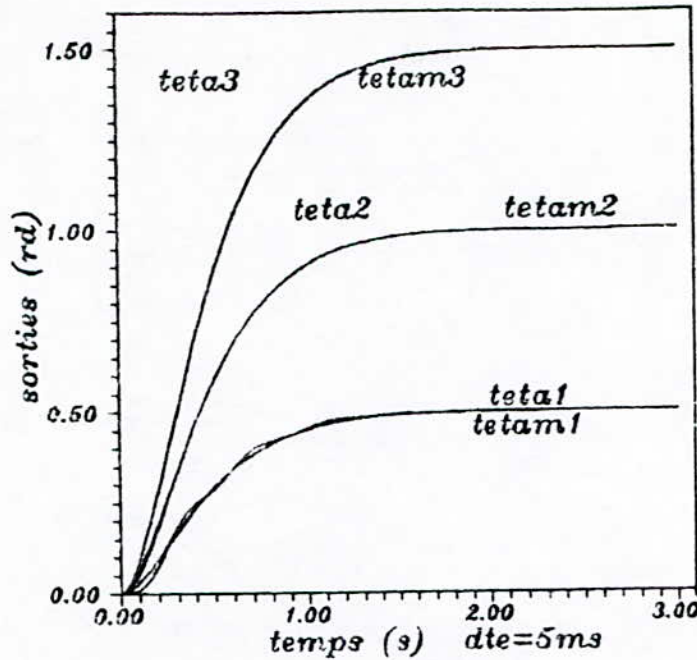


fig 4-4-28

TEST6 : Robot Sous MRAC  
 $dte=5ms$  /  $me=2kg$ .

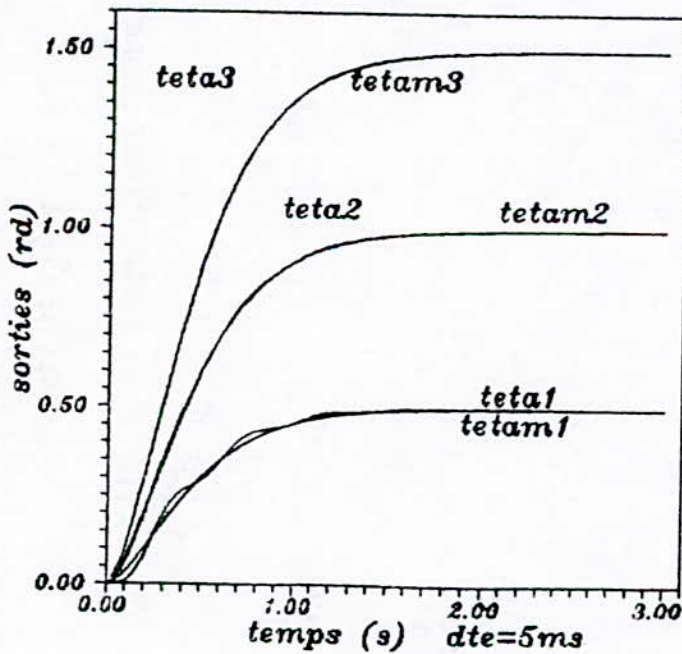


fig 4-4-29

TEST7 : Robot Sous MRAC  
 $dte=5ms$  /  $me=5kg$ .

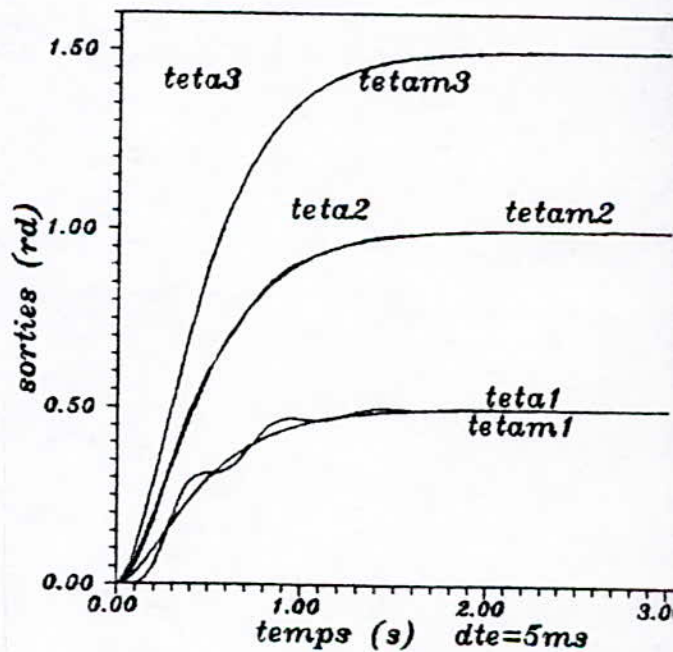


fig 4-4-30

Objet de la charge sur l'écart ( $x_m - x$ )  
 $x_{e1}$  :  $m_e=0$ ,  $x_{e1p}$  :  $m_e=1\text{kg}$ ,  $x_{e1p'}$  :  $m_e=2\text{kg}$ ,  $x_{e1p''}$  :  $m_e=5\text{kg}$ .

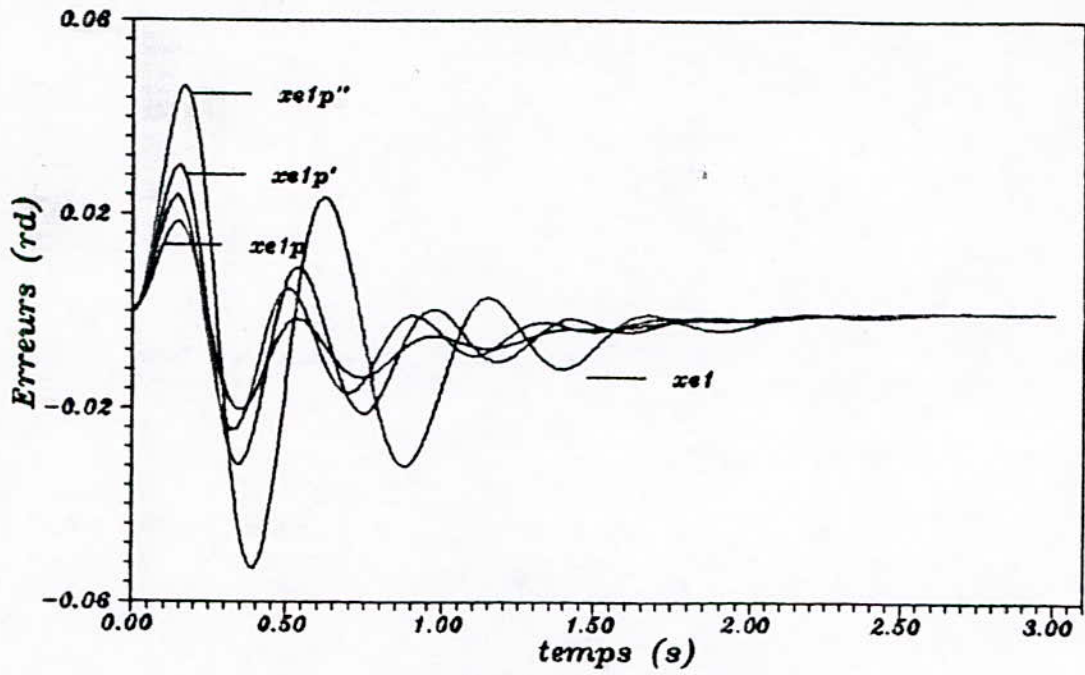


fig 4-4-31

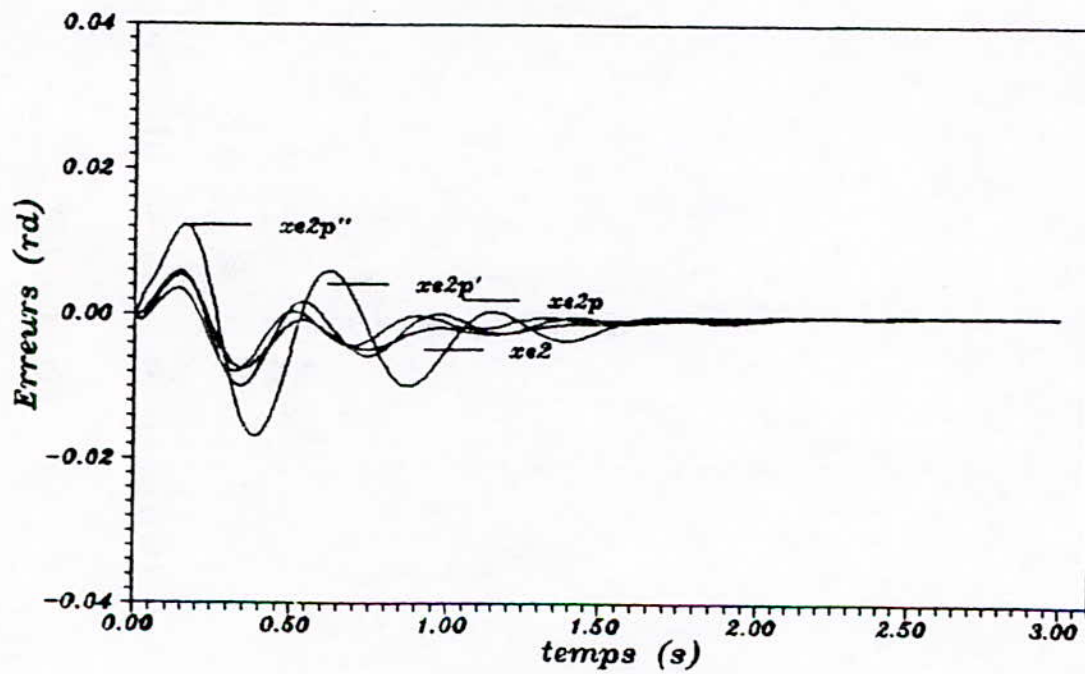
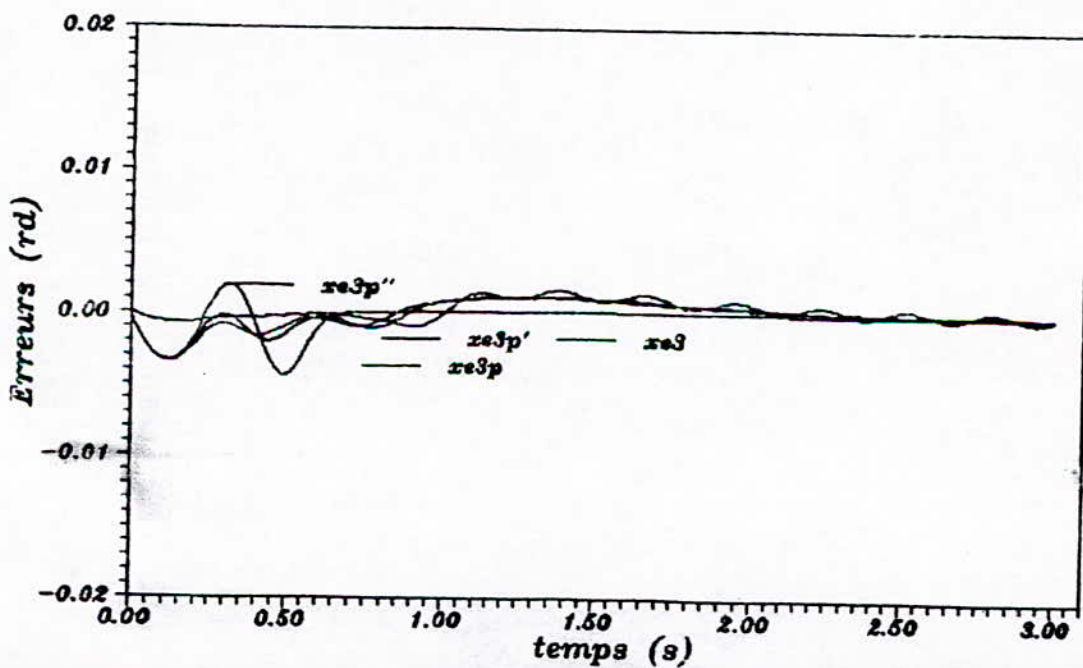


fig 4-4-32



$ffn1, fbn1 : me=1kg$   
 $ffn1', fbn1' : me=2kg$   
 $ffn1'', fbn1'' : me=5kg$

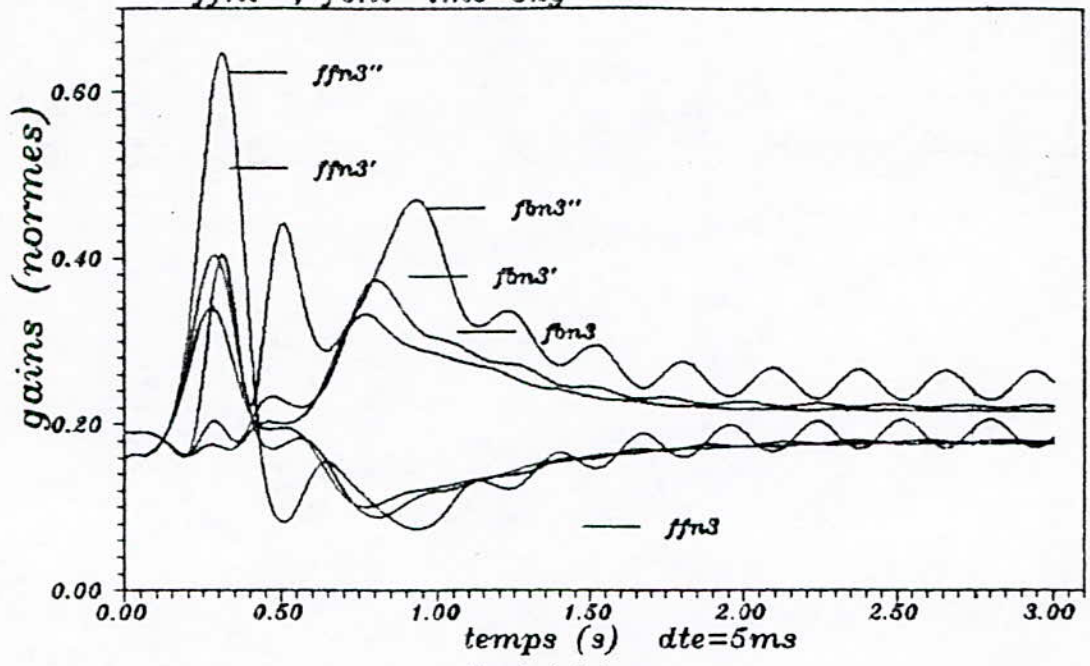


fig 4-4-34

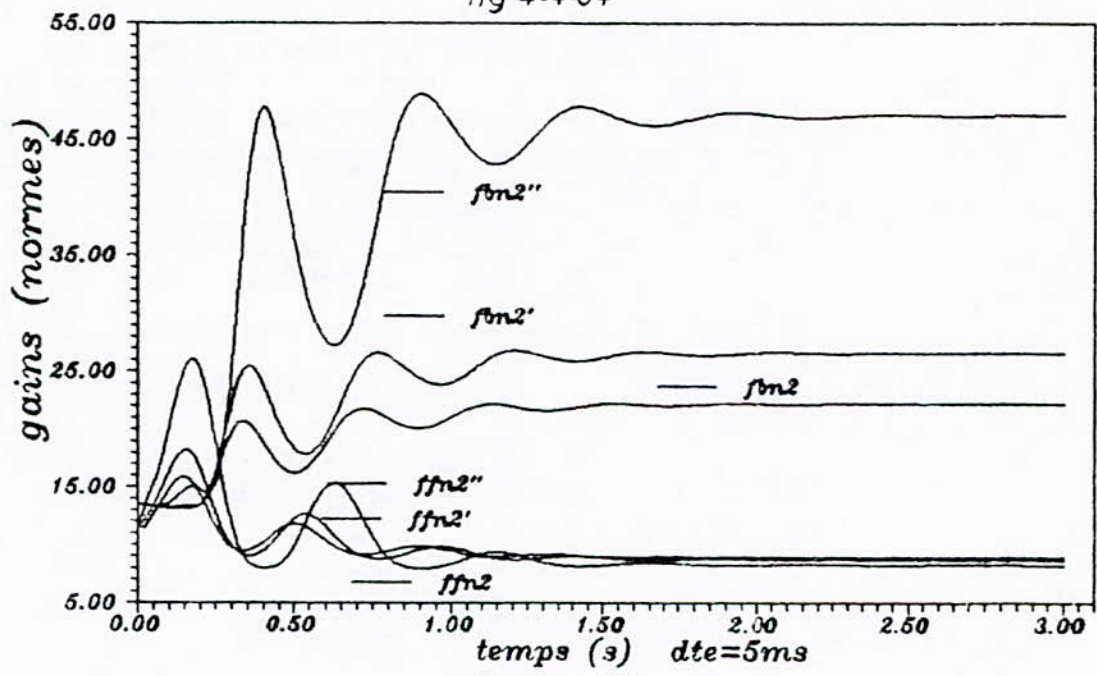


fig 4-4-35

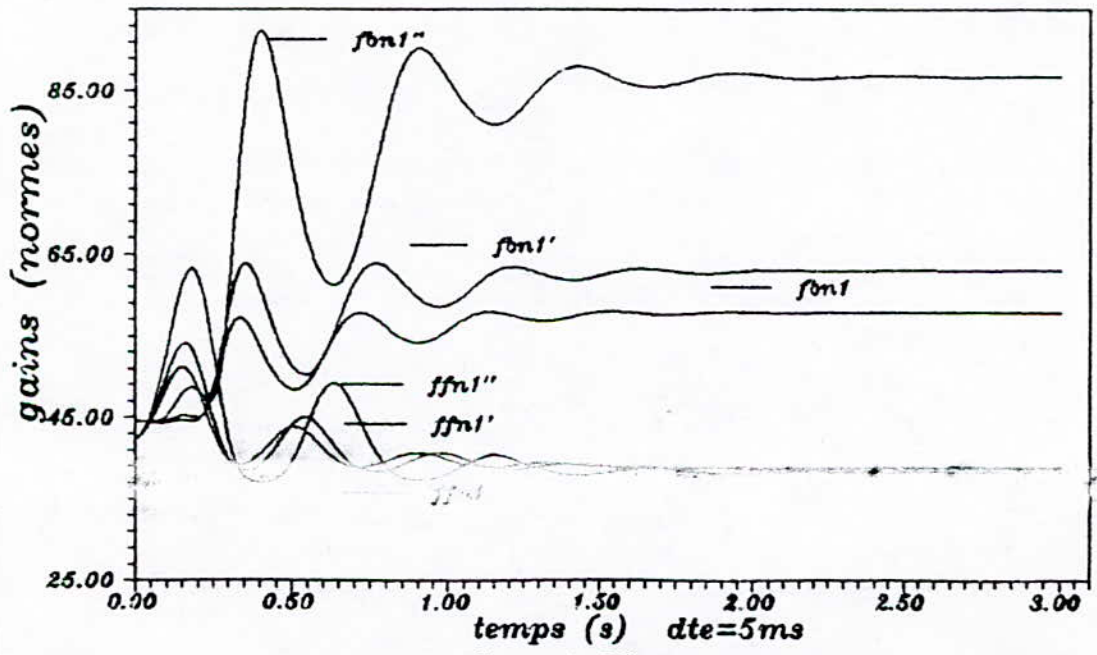


fig 4-4-36

MRAC : Effet de la charge sur la commande generee  
 $u_i$  :  $m_e=1\text{kg}$  /  $u_i'$  :  $m_e=2\text{kg}$  /  $u_i''$  :  $m_e=5\text{kg}$  .

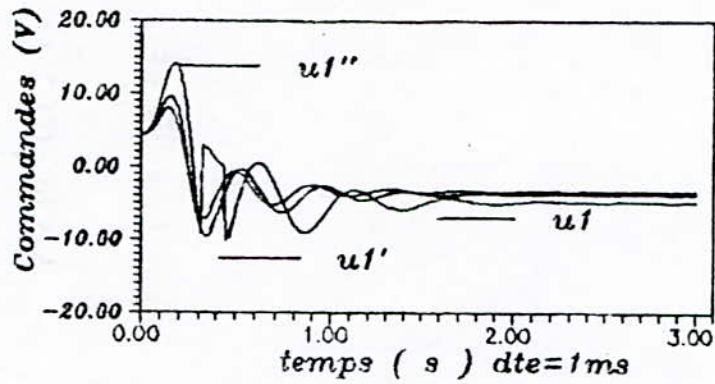


fig 4-4-37

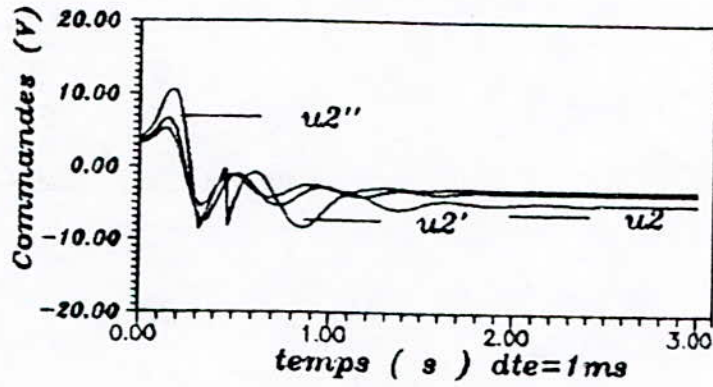


fig 4-4-38

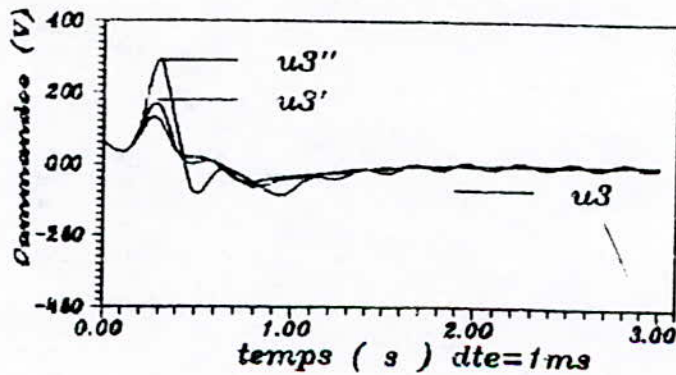
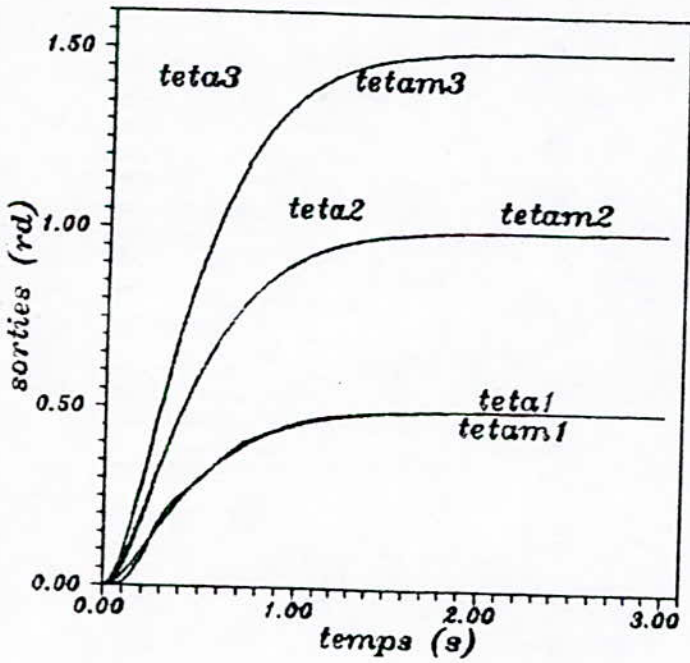
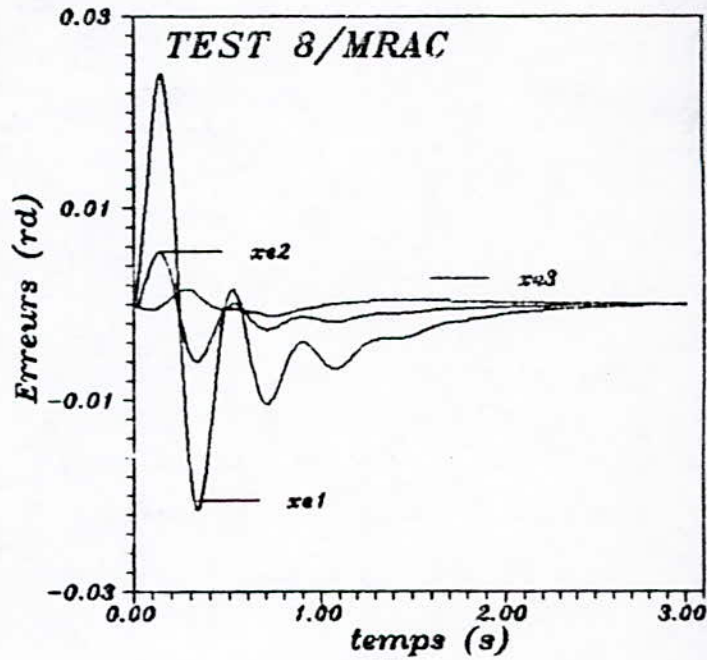


fig 4-4-39

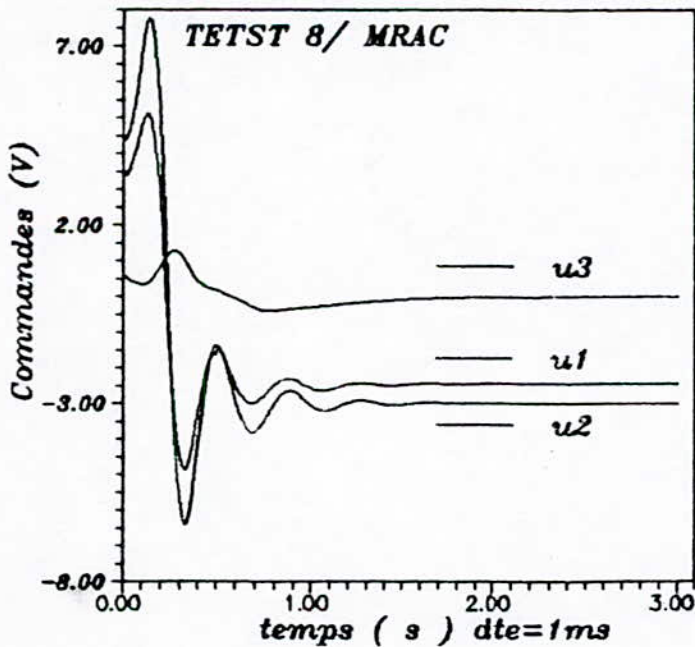
**TEST8 : Robot Sous MRAC**  
 $dte=1ms/me=1kg$  lache apres 0.5 s.



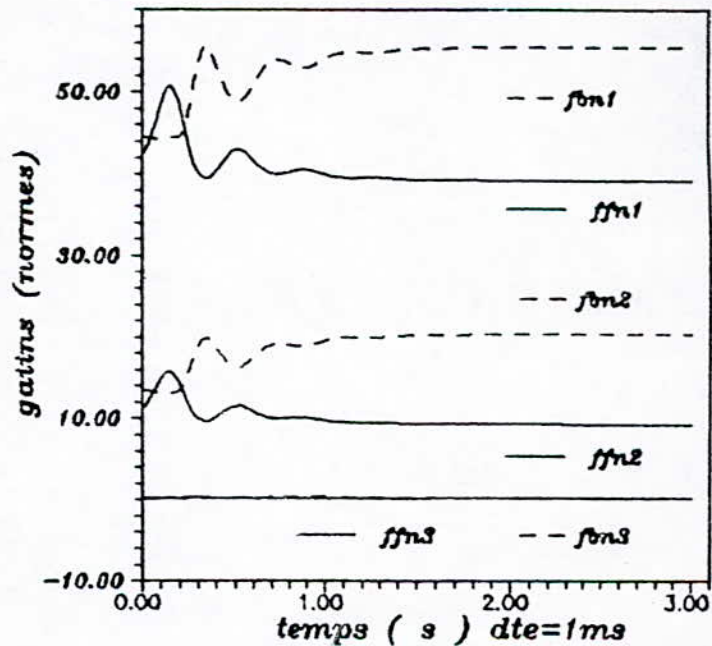
4-4-40



4-4-41



4-4-42



4-4-43

Avec :

$$Y_r = C_r x_r = P x_r$$

P sera choisi identique à celle avec laquelle nous avons travaillé au (§4.4.5 test 1).

( $\alpha$  et  $\beta$ ) sont tout deux de dimension (3,6) et sont données par :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^1 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^1 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Test 9 (fig (4.4.44 à 4.4.4 et 4.4.50)

$\alpha$  et  $\beta$  sont choisis égaux à :

$$\alpha = \text{diag} [0, \alpha_1] = \text{diag} [0, 100]$$

et

$$\beta = \text{diag} [0, \beta_1] = \text{diag} [0, 1]$$

Il y'a eu des oscillations au niveau des sorties et l'adaptation n'est pas très bonne.

La commande est donnée par (la fig 4.4.50) . Pour améliorer les résultats nous avons changé les matrices  $\alpha$  et  $\beta$ .

Test 10 figures (4.4.47 à 4.4.49 et 4.4.54)

Nous avons augmenté le gain du proportionnel  $\beta_1$  agissant au niveau du link 3 à 20 et les 2 autres  $\beta_2$  et  $\beta_3$  à 10, on voit que les résultats sont nettement plus meilleurs que le précédent :

les erreurs en (fig 4.4.48) sont plus faibles et moins oscillantes et les commandes en (fig 4.4.54) aussi convergent plus rapidement et sont moins importante : on a ainsi obtenu de meilleurs résultats avec moins d'énergie fournie.

Test 11 : Augmentation de la période d'échantillonnage:

Ayant augmenté la période d'échantillonnage à  $dte = 5$  ms il y'a eu convergence des gains, sorties et commandes et les performances n'ont pas changé (fig 4.4.51 à 4.4.54).

Une comparaison entre les courbes d'erreurs (fig 4.4.51) et les commandes (fig 4.4.54) pour  $dte = 5$  ms et  $dte = 1$  ms montre que



les performances n'ont pas échangé.

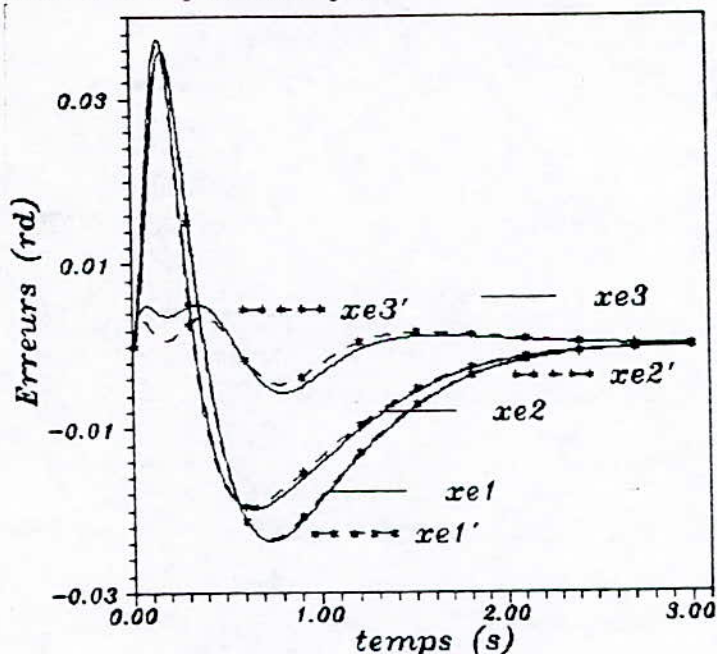


fig 4.4.51 Influence du changement de dte sur les performances  
 $xei'$  : pour dte = 5ms ,  $xei$  : pour dte=1ms.

#### Influence de la charge sur les performances

La même manière que dans les tests du MRAC, nous allons revoir les différents tests en charge : (dte = 1ms,  $m_p = 1kg$ ) , (dte = 5ms  $m_p = 1kg$ ), (dte = 5 ms,  $m_p = 2kg$ ) et ( dte = 5 ms,  $m_p = 5kg$ ).

#### Test 12

$m_p = 1kg$  dte = 1 ms

Il n'y'a pas eu de perturbation sur la convergence des gains et les erreurs sont pratiquement identiques à celles où dte = 1 ms (fig 4.4.57).

#### Test 13, 14, 15

Respectivement pour  $m_p = 1, 2$  et  $5 kg$  et dte = 5 ms.

Les figures (4.4.55 à 4.4.77) montrent la comparaison entre les différentes grandeurs (erreurs, gains et commandes).

Les gains changent à chaque fois de valeur permanente pour

TEST 9 : Robot sous MCS  
 $dte=1ms$   $me=0$ .

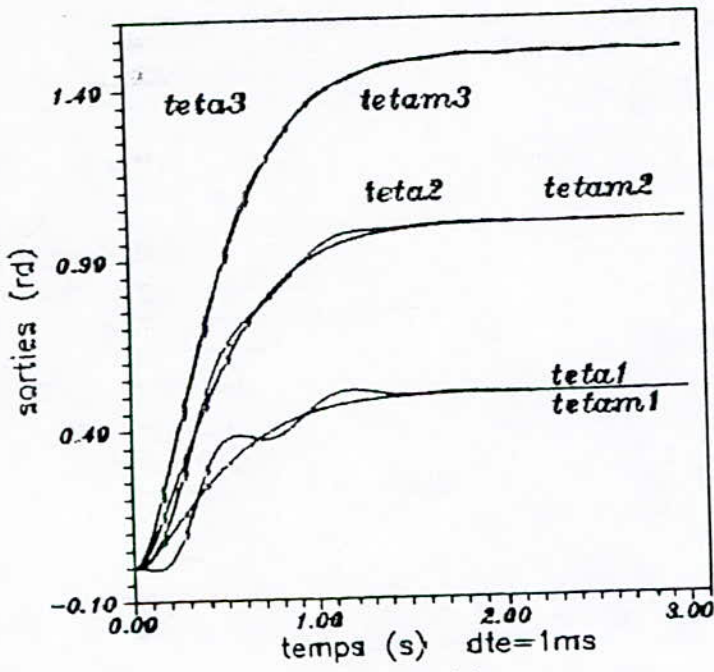


fig 4-4-44

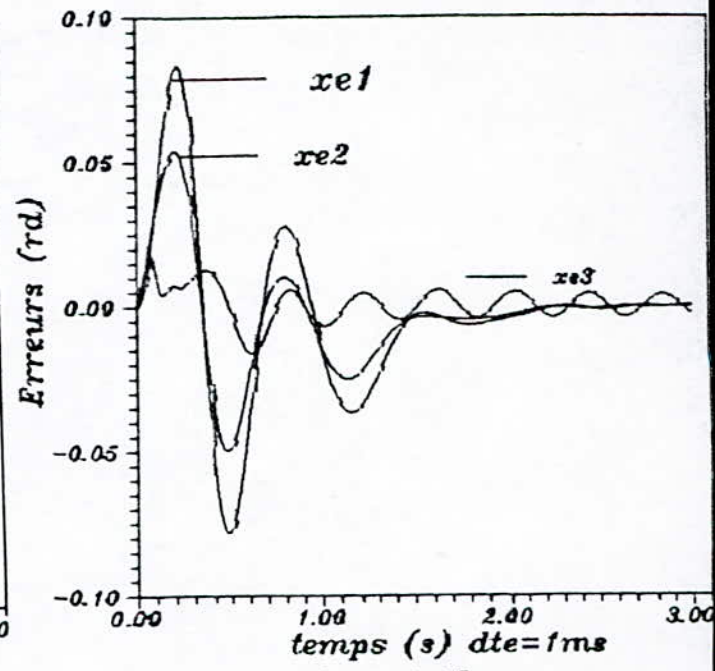


fig 4-4-45

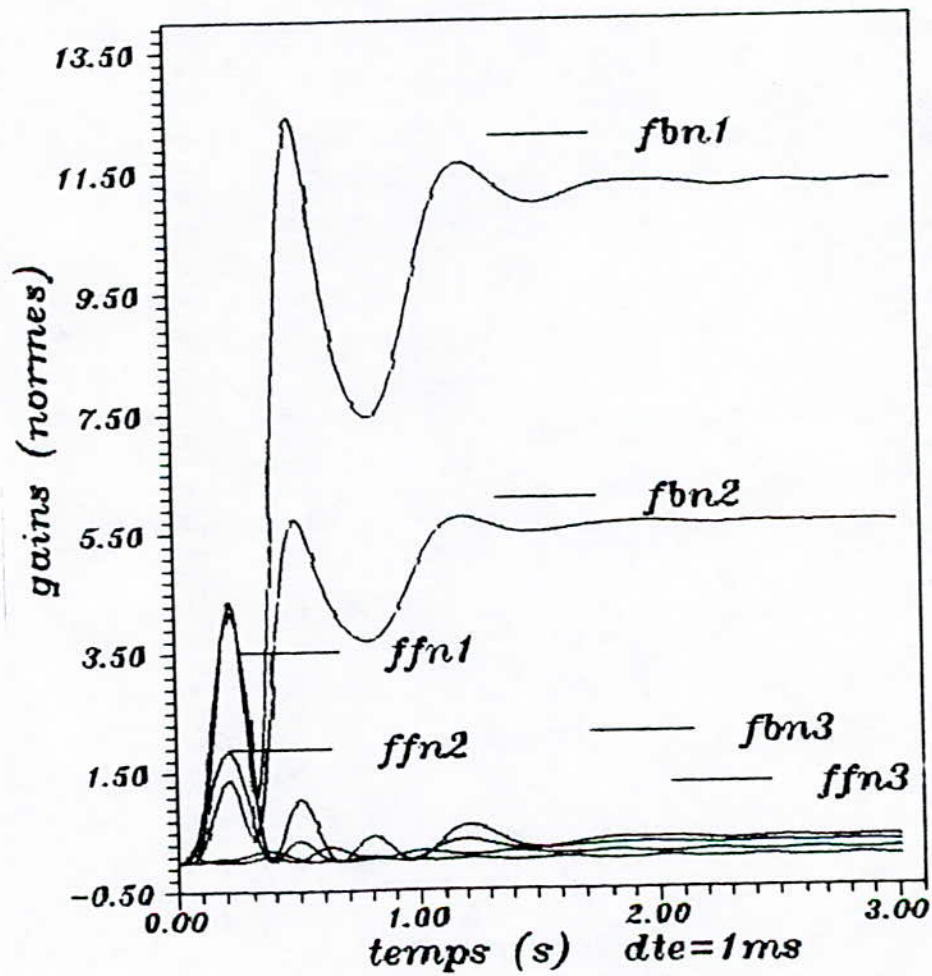


fig 4-4-46

TEST 10 : Robot Sous MCS  
 $dte=1ms$   $me=0$

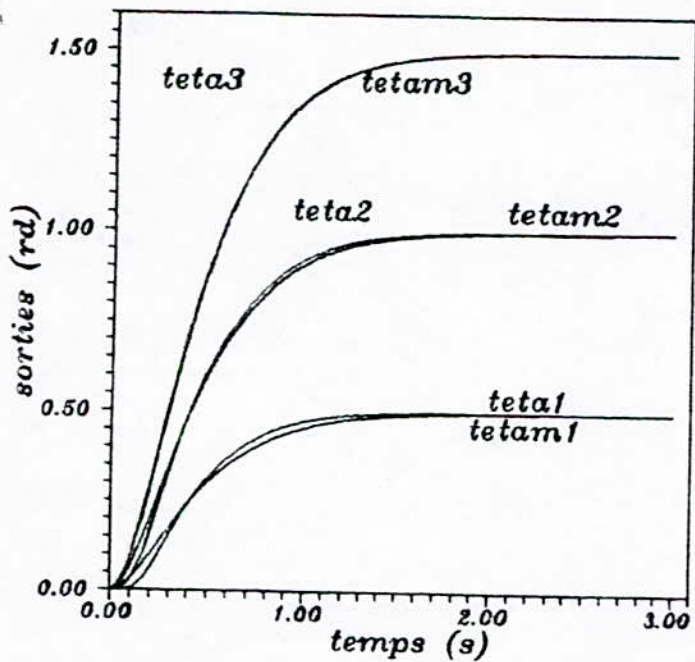


fig 4-4-47

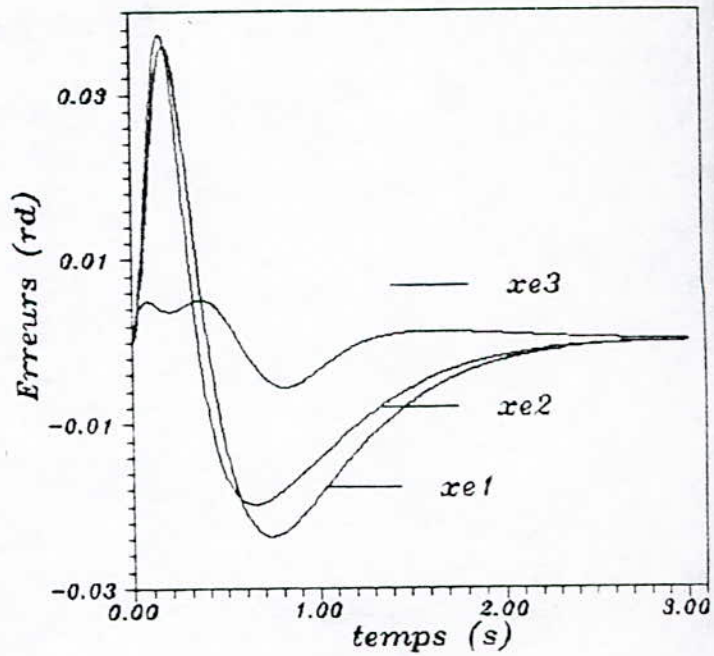


fig 4-4-48

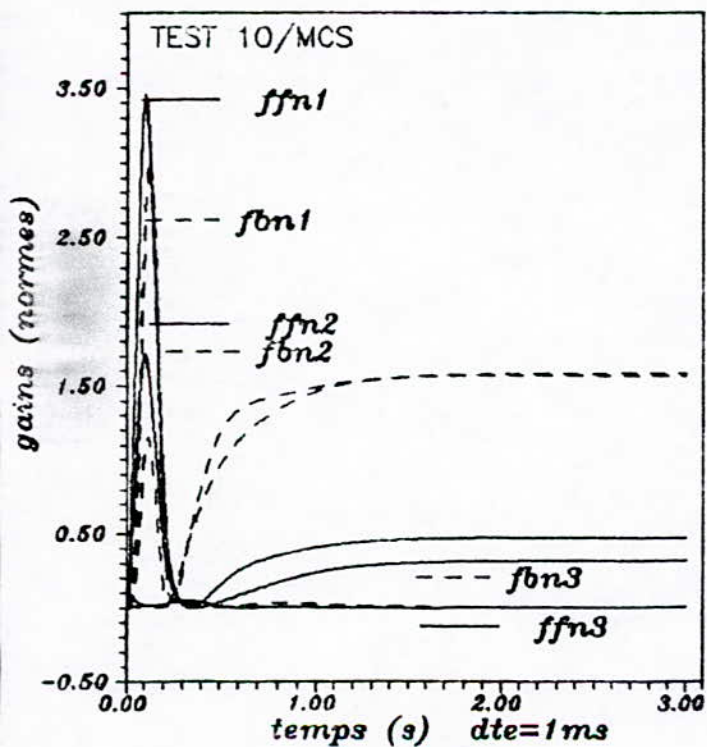


fig 4-4-49

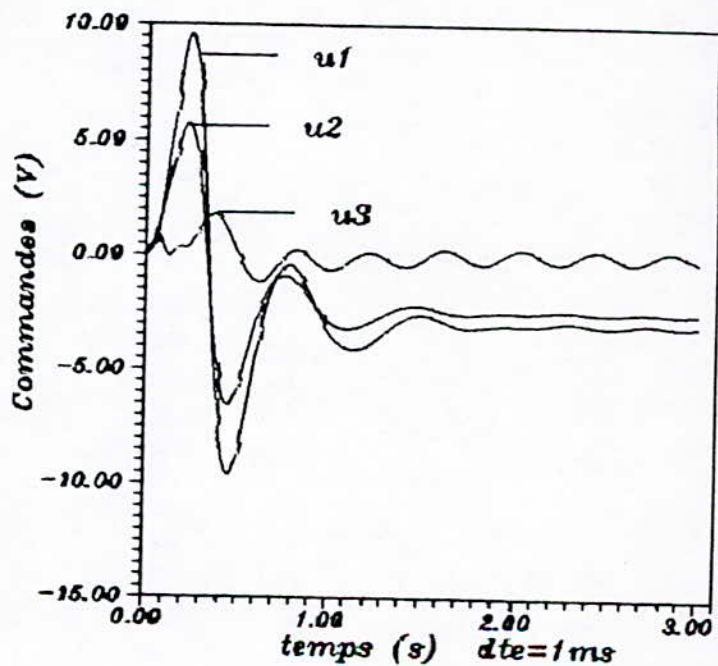


fig 4-4-50

TEST 11 : Robot Sous MCS  
 $dte=5ms$   $me=0$

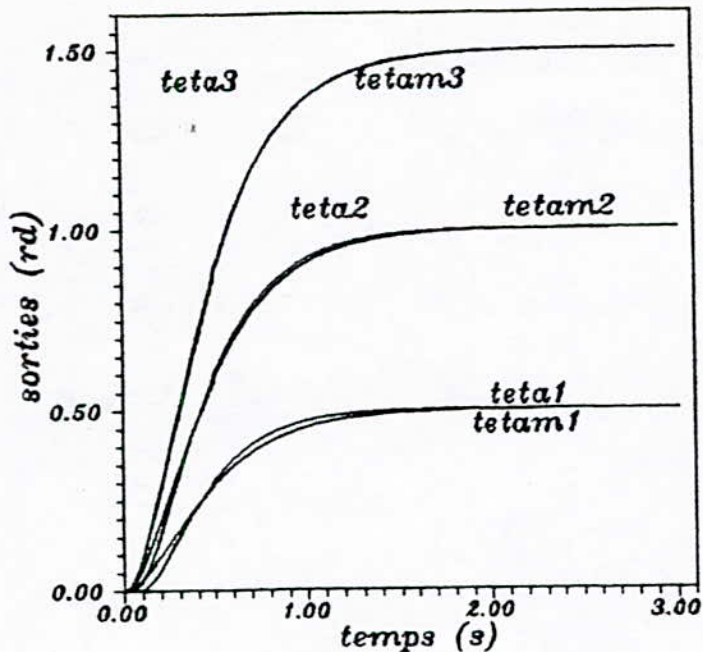


fig 4-4-52

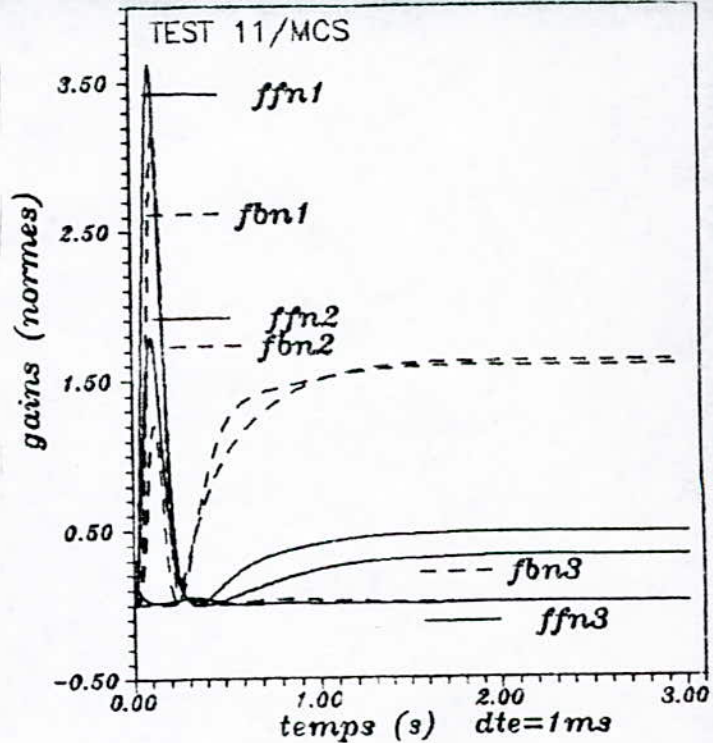


fig 4-4-53

MCS : Effet de  $dte$  sur la commande generee  
 $u_i$  :  $dte=1ms$  /  $u_i'$  :  $dte=5ms$ .

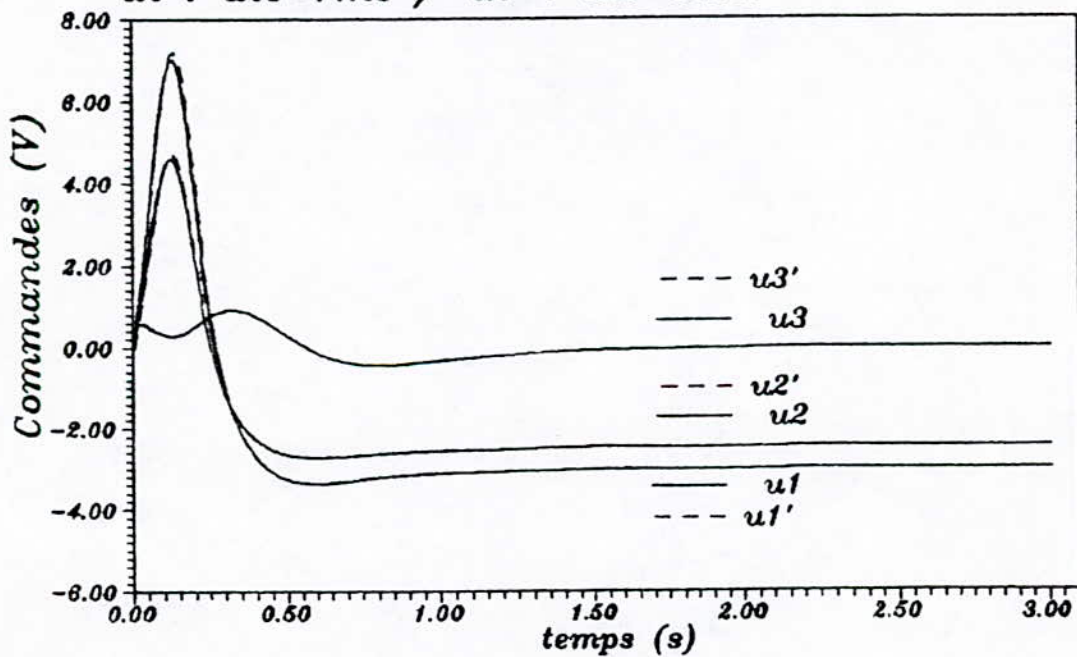


fig 4-4-54

TEST 12 : Robot Sous MCS  
 $dte=1ms/me=1kg.$

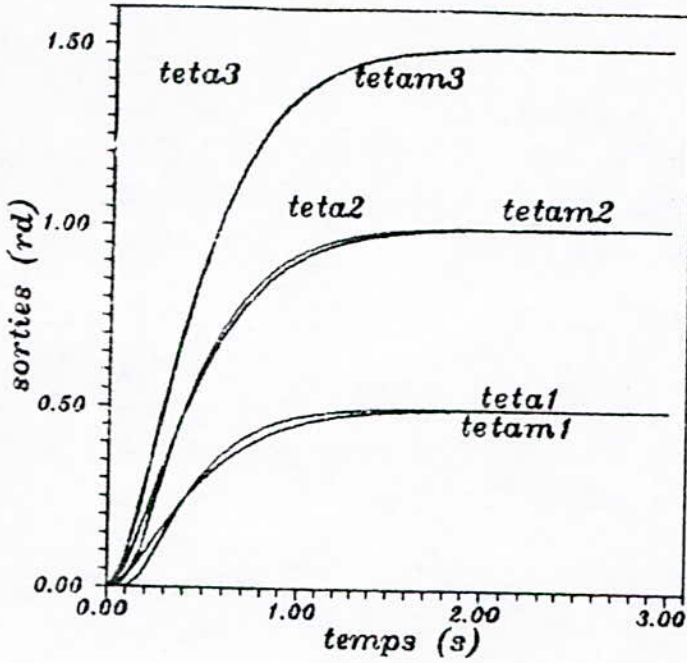


fig 4-4-55

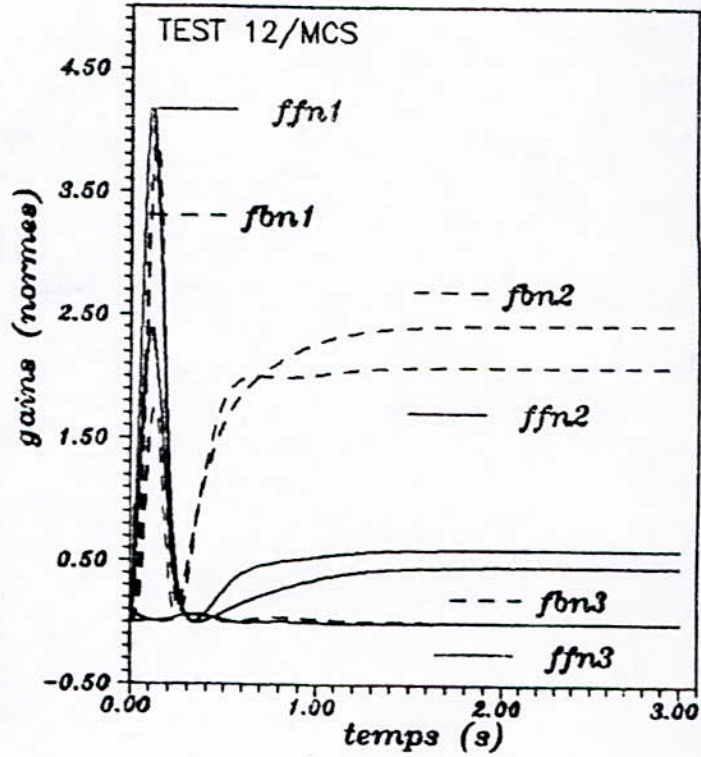


fig 4-4-56

Comparaison des differents ecart/m<sub>e</sub>=1kg:  
 $xe_i$  : pour  $dte=1ms$  /  $xe_i'$  : pour  $dte=5ms$ .

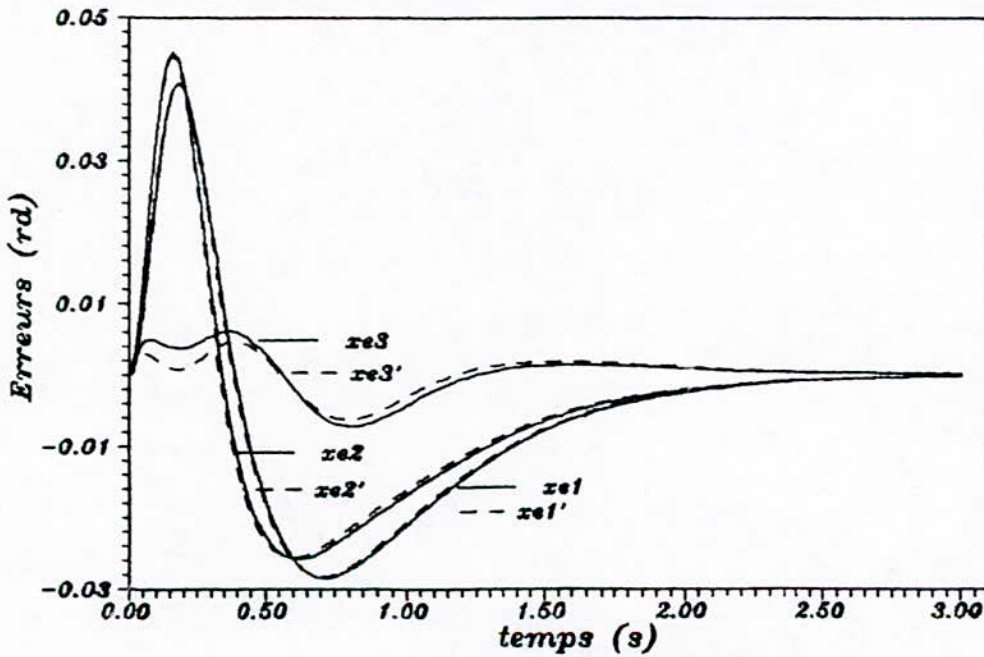


fig 4-4-57

**TEST 13 : Robot Sous MCS**  
*dte=5ms me=1kg .*

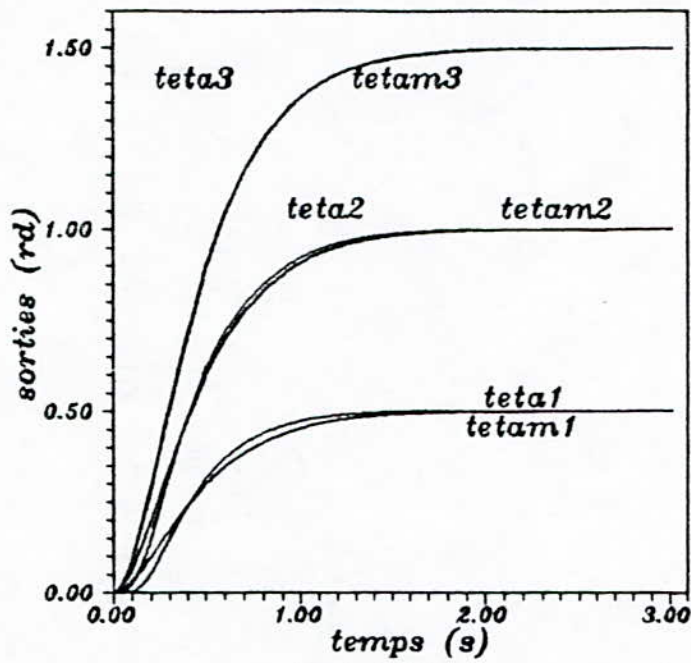


fig 4-4-58

**TEST 14 : Robot Sous MCS**  
*dte=5ms me=2kg .*

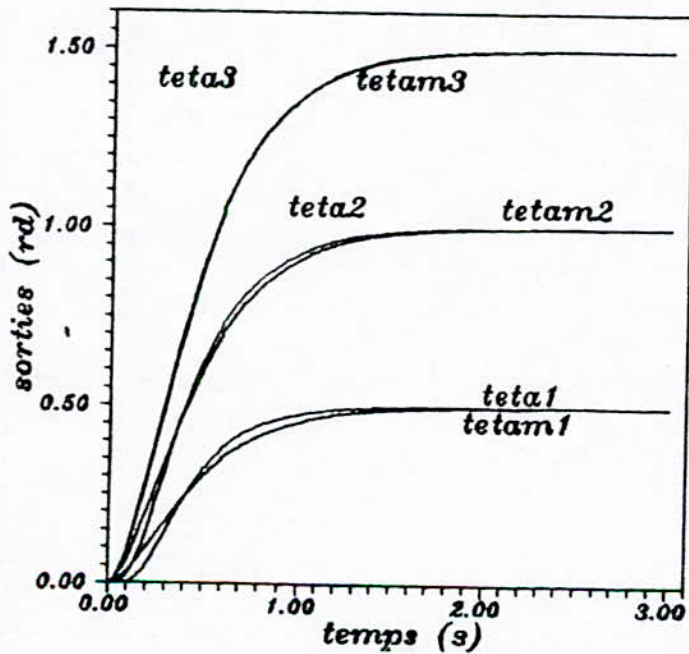


fig 4-4-59

**TEST 15 : Robot Sous MCS**  
*dte=5ms me=5kg*

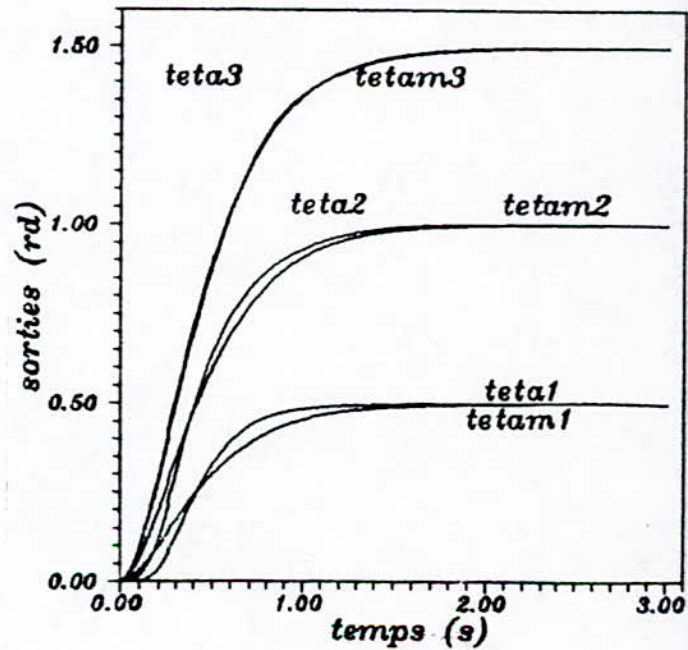


fig 4-4-60

MCS : Comparaison des differents tests en charge  
 $x_{e1} : m_e=0$ ,  $x_{e1p'} : m_e=1\text{kg}$ ,  $x_{e1p''} : m_e=2\text{kg}$ ,  $x_{e1p'''} : m_e=5\text{kg}$ .

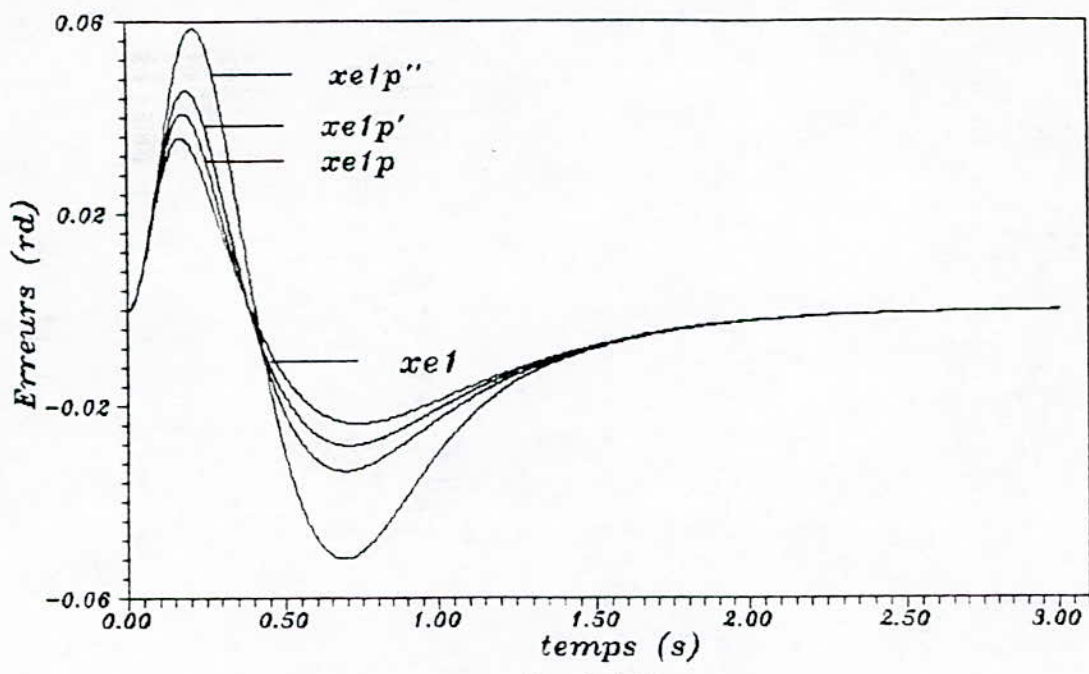


fig 4-4-61

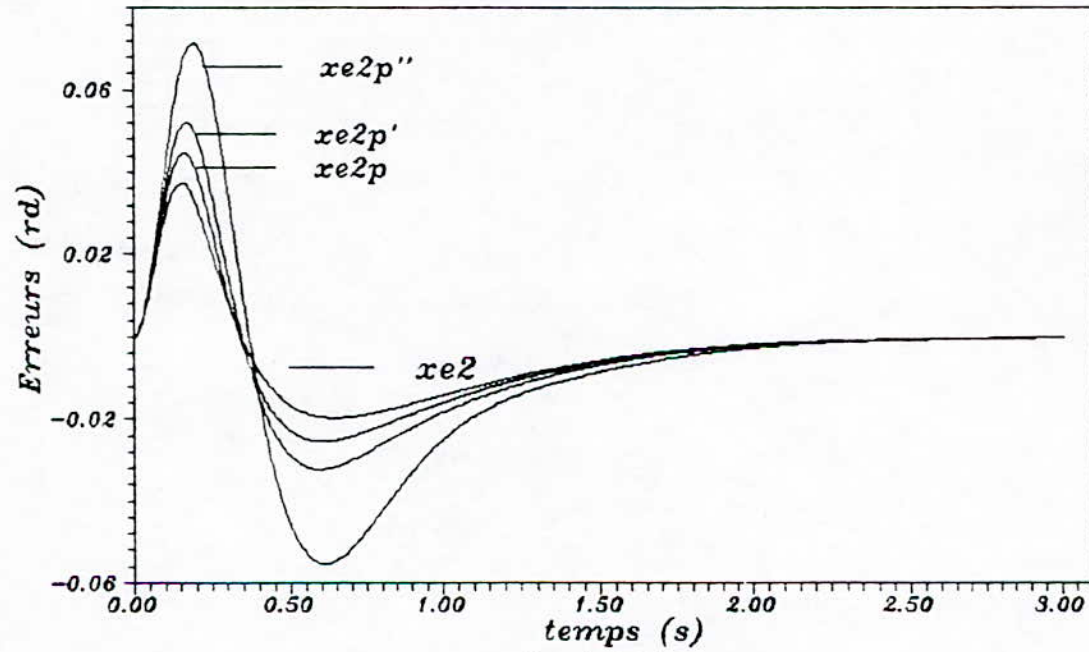


fig 4-4-62

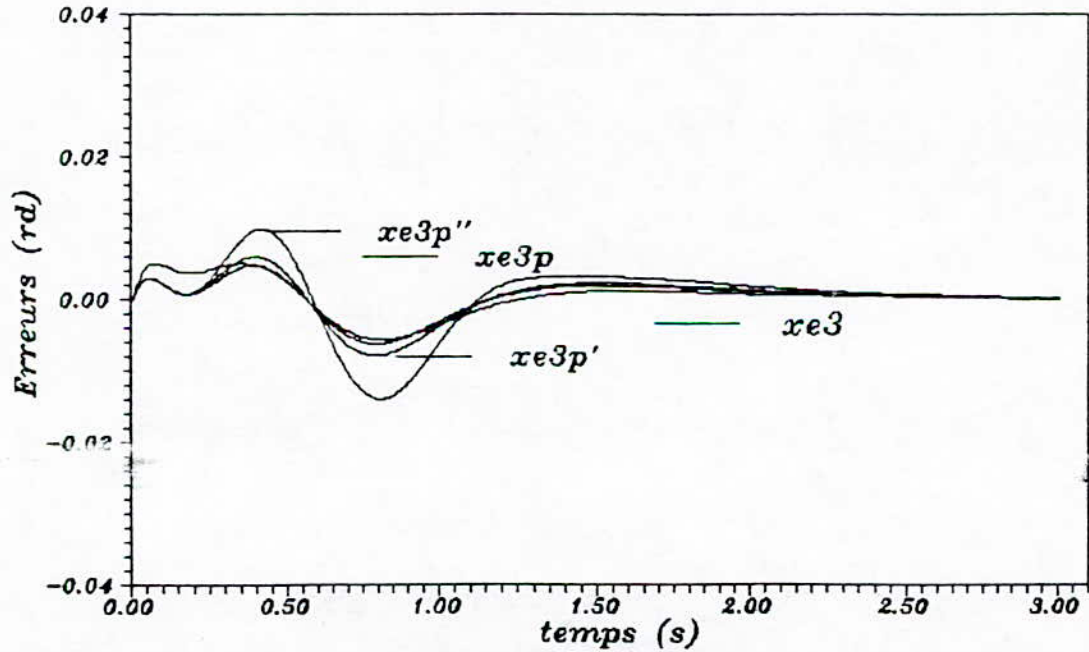


fig 4-4-63

MCS : Comparaison des differents gains en charge.  
f<sub>bn1</sub>: m<sub>e</sub>=1kg, f<sub>bn1'</sub>: m<sub>e</sub>=2kg, f<sub>bn1''</sub>: m<sub>e</sub>=5kg.

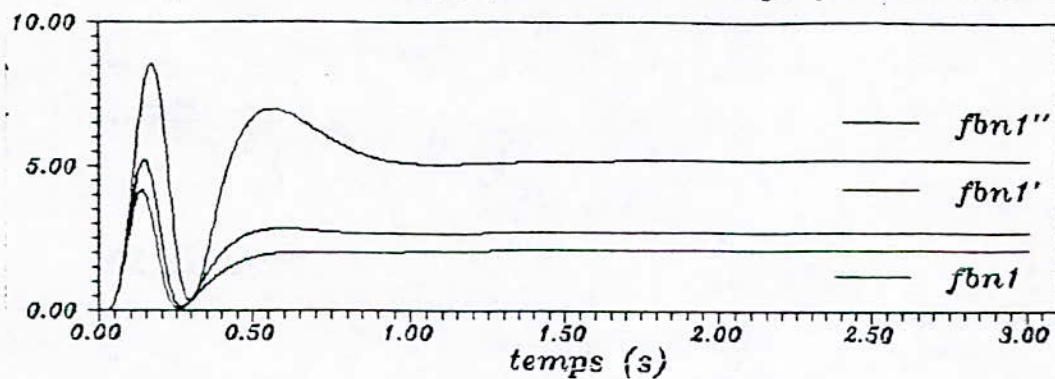


fig 4-4-64

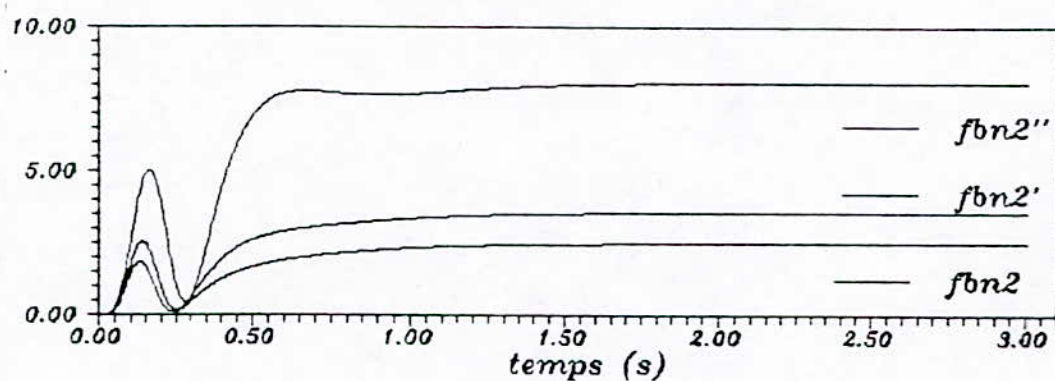


fig 4-4-65

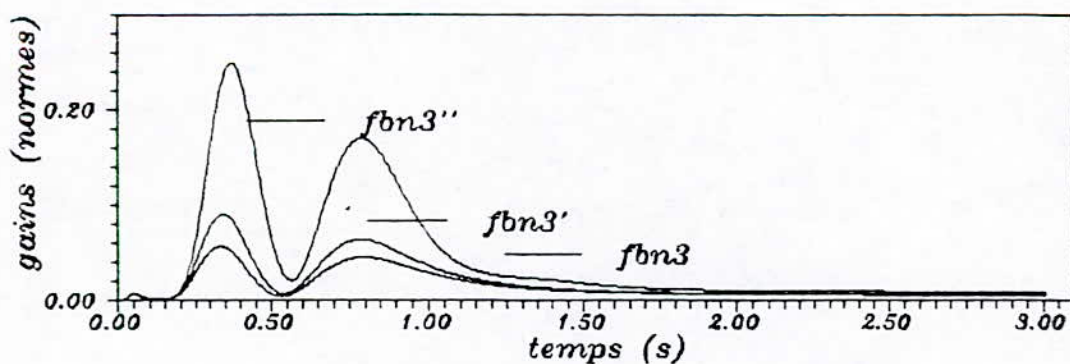


fig 4-4-66



MCS : Comparaison des differents gains en charge.  
 $ffn1$ :  $m_e=1\text{kg}$ ,  $ffn1'$ :  $m_e=2\text{kg}$ ,  $ffn1''$ :  $m_e=5\text{kg}$ .

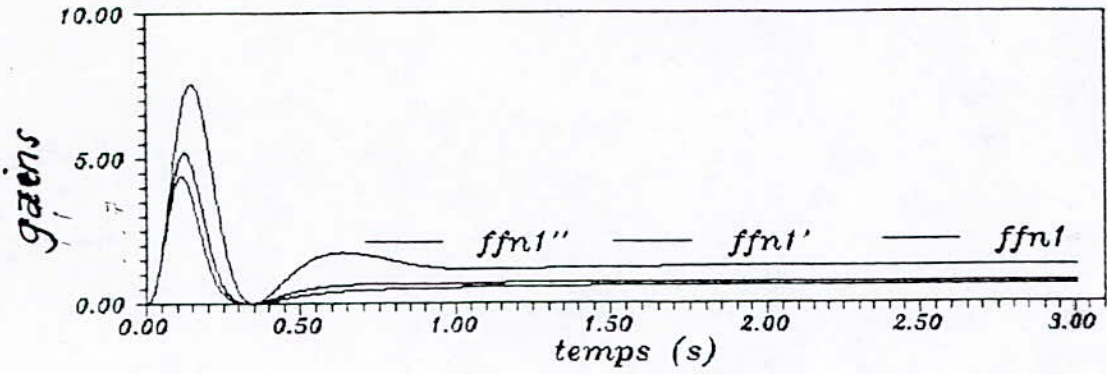


fig 4-4-67

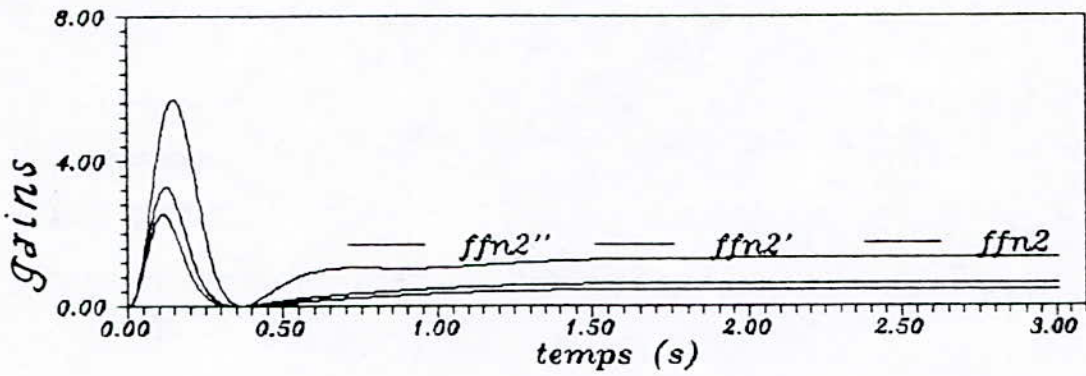


fig 4-4-68

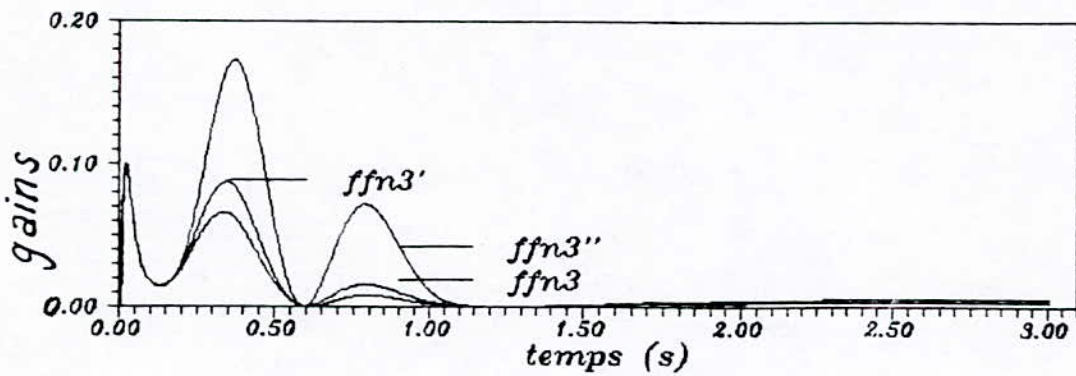


fig 4-4-69

MCS : Effet de la charge sur la commande generee  
 $u_i$  :  $m_e=1\text{kg}$  /  $u_i'$  :  $m_e=2\text{kg}$  /  $u_i''$  :  $m_e=5\text{kg}$  .

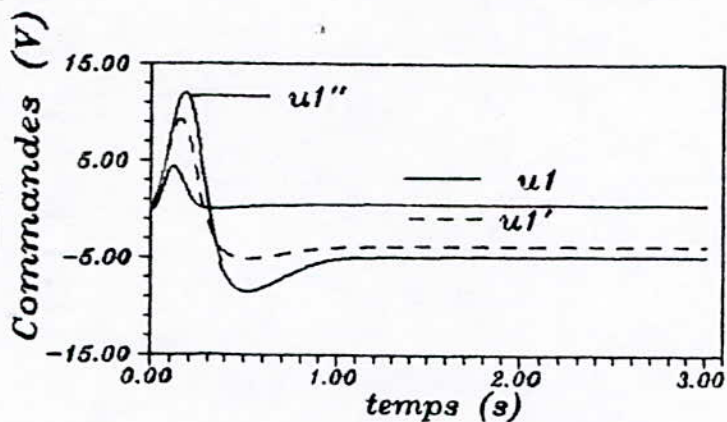


fig 4-4-70

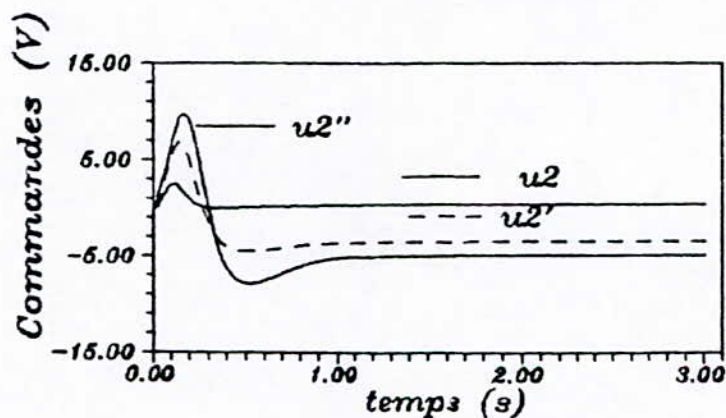


fig 4-4-71

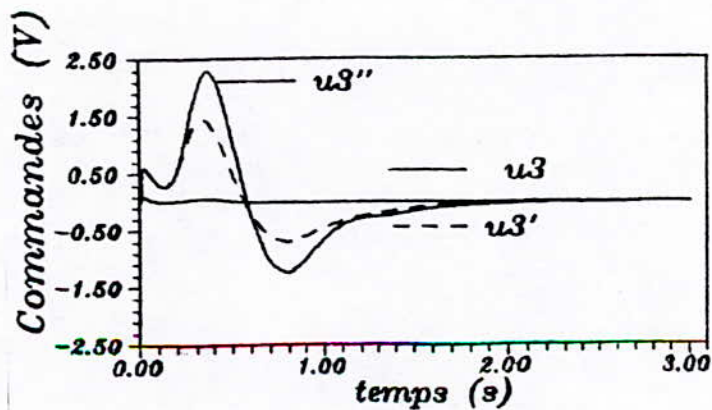


fig 4-4-72

TEST 16 : ROBOT 3 axes MCS  
 $dte=1ms$   $me=1kg$  lache apres 0.5 s.

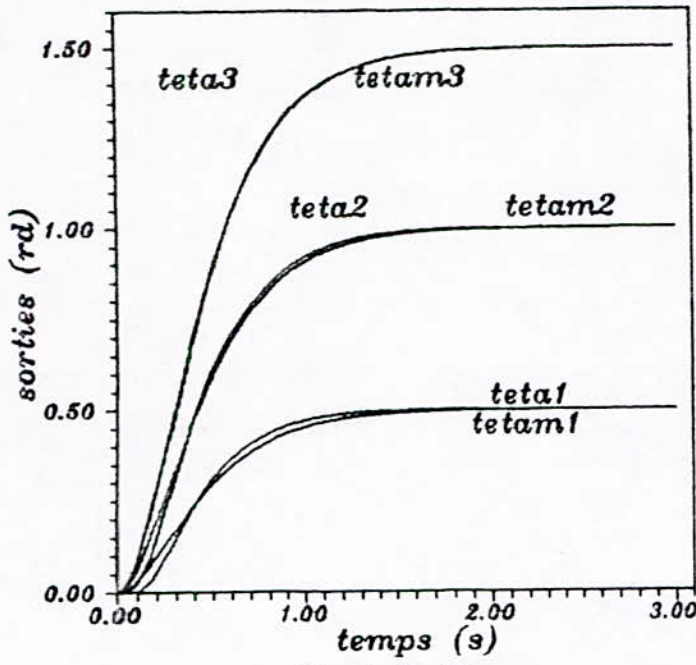


fig 4-4-73

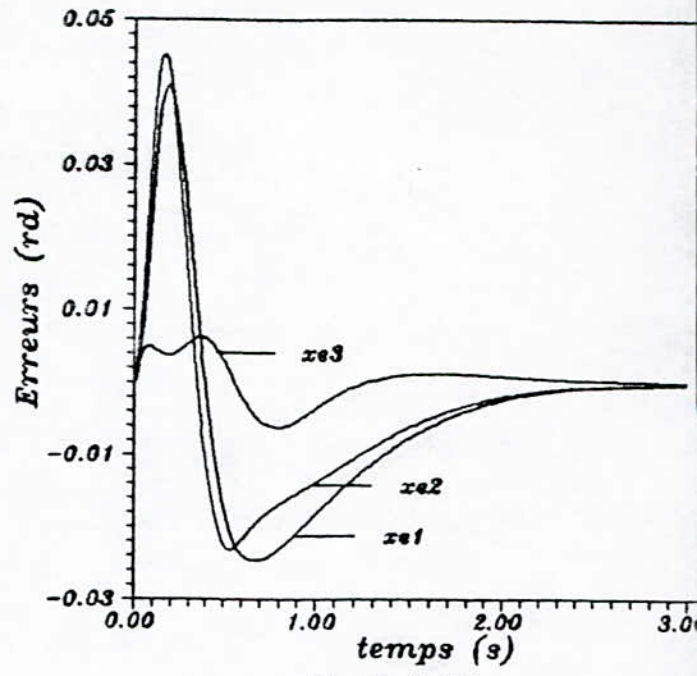


fig 4-4-74

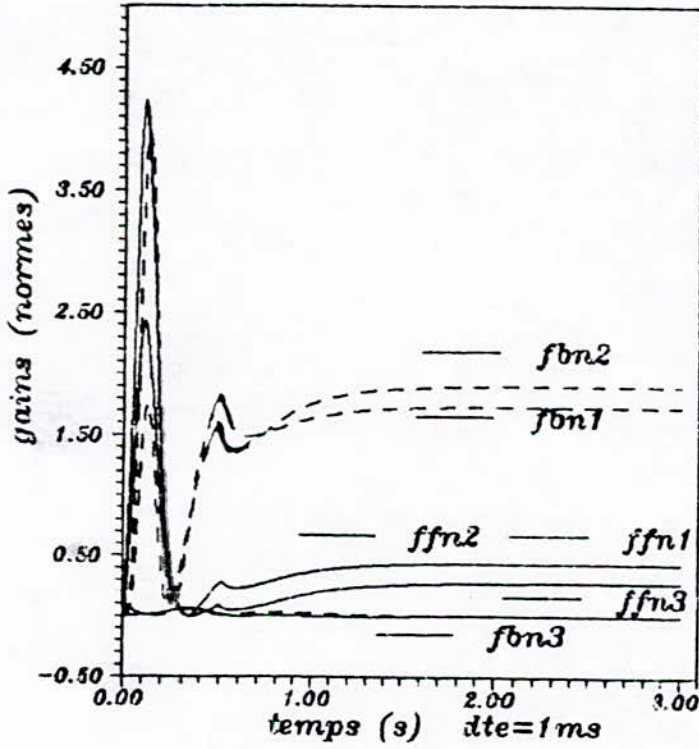


fig 4-4-75

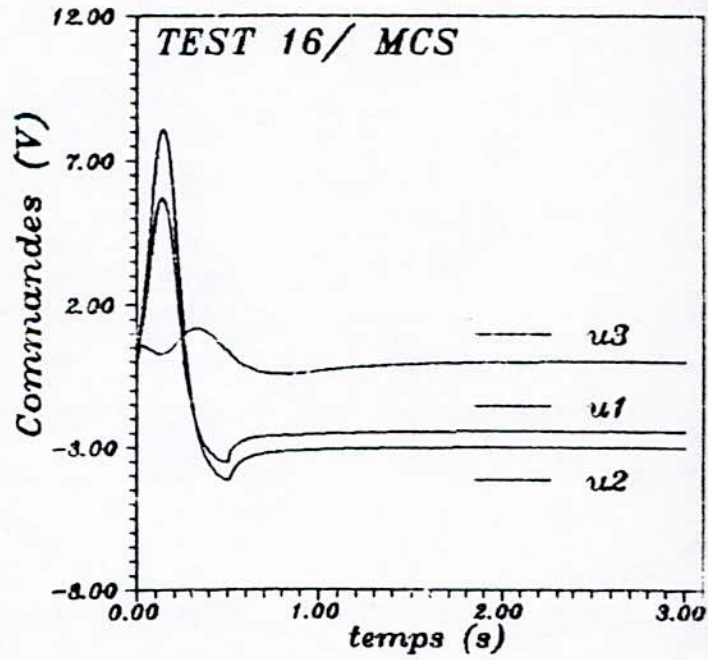


fig 4-4-76

remédier à l'introduction de la masse : identification implicite des nouveaux paramètres.

La commande devient de plus en plus importante ce qui est tout à fait évident : fournir plus d'énergie pour un effort plus élevé.

Test 16 : fig ( 4.4.73 à 4.4.75)

Le test 16 est identique au test 8. En provoquant une perturbation brusque sur les paramètres ( $m_p = 1\text{kg}$  lâché après 0,5s) on voit que cela n'a pas affecté la convergence des erreurs vers zéro, néanmoins il y a eu de légers pics dans les commandes générées sans danger pour le système.

#### 4.4.7- CONCLUSION

Dans cette conclusion nous aborderons quelques comparaisons entre les performances du MRAC et MCS appliqués au B.M.

Il n'est pas facile de comparer les performances du MRAC et du MCS car il est généralement possible de choisir des gains  $\alpha$  et  $\beta$  dans chaque cas réalisant des performances plus ou moins semblables. Néanmoins nous pourrions toujours commenter pour ce qui est des tests réalisés avec les  $\alpha$ ,  $\beta$  données.

- . La réponse donnée par le MCS est moins oscillante bien que les valeurs maximales de l'erreur sont à chaque fois plus importantes.
- . Le régime transitoire de la commande dans le cas du MCS est plus rapide ce qui provoque des tensions transitoires plus importantes bien que la commande en permanent soit la même.
- . Le MCS réagit plus efficacement à la présence de charge par l'absence d'oscillation dans la commande bien que subsiste le problème de transitoire.

DEUXIEME PARTIE :  
CHAPITRE 1

*-CAS DE STRUCTURES A PARAMETRES  
VARIABLES*

## 1) Generalités

Dans les premières années de son apparition, le contrôle adaptatif avec modèle de référence était devenu une des procédures les plus efficace pour commander les procédés à paramètres inconnus (ou partiellement connus). Quelques années plus tard l'intérêt fut porté sur les procédés à paramètres variables dans le temps. Plusieurs méthodes ont été proposées, certains ont considéré que la variation est faible par rapport aux valeurs nominales fixées, et d'autres ont supposé que cette dernière tendrait exponentiellement vers zéro, et dans certains ouvrages, la variation fut traitée comme de faibles perturbations variantes dans le temps. Dans [18][19] des résultats ont été obtenus pour les systèmes à paramètres variables, la variation a été supposée lente et bornée. Nous allons présenter notre propre approche pour traiter les systèmes à paramètres variables en s'inspirant des études précédentes.

DEUXIEME PARTIE :  
CHAPITRE 2

## 2) Adaptation de l'algorithme:

Malgré la robustesse des contrôleurs adaptatifs précédents (MRAC, MCS), on peut toujours leur apporter quelques modifications et ce, pour les appliquer aux systèmes à paramètres variables.

Notre approche consiste à identifier les variations des paramètres, et d'agir en conséquence par réajustement des gains de la poursuite linéaire.

deux adaptations seront donc faites :

- Une adaptation directe déjà utilisée dans les systèmes à MRAC
- Une adaptation indirecte prenant en compte les variations des paramètres identifiés.

La figure (2-1) explicite cette approche

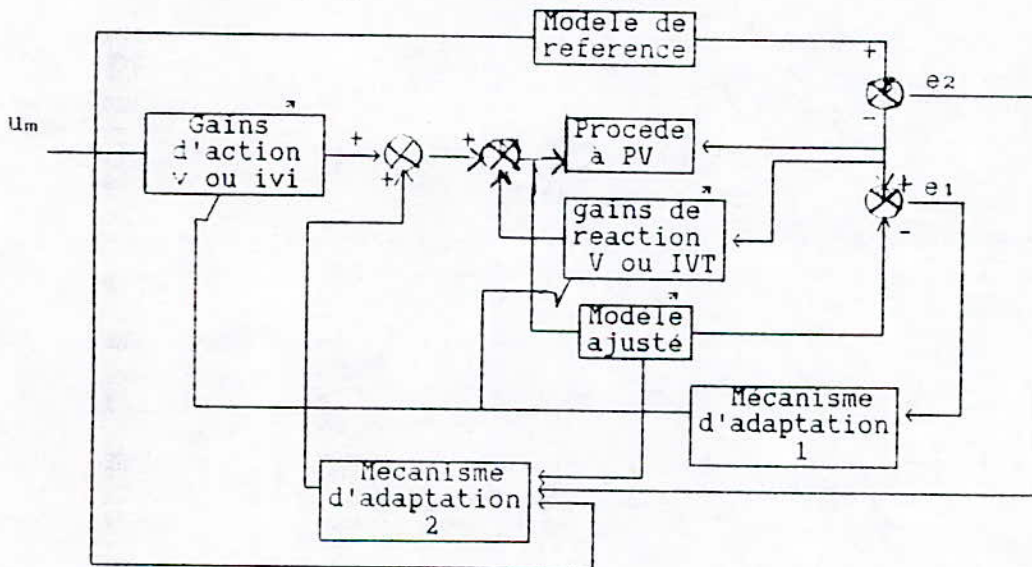


fig (2-1) Schéma de commande adaptative pour des systèmes à paramètres variables.

Des hypothèses et des contraintes seront imposées dans le but de respecter les conditions d'hyperstabilité. Pour aboutir à la formulation des lois d'adaptation, les mêmes étapes vues dans le chapitre 2 de la partie 1 seront suivies avec une légère



modification au niveau de la poursuite linéaire ( considération de la variation des paramètres ).

### 2.1) Poursuite linéaire compensée:

La représentation d'état d'un système à paramètres variable dans le temps est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{y} = A_p(t) + B_p(t)u_p \quad (2-1-1)$$

On impose aux paramètres  $A_p(t)$  et  $B_p(t)$  la forme suivante :

$$A_p(t) = A_p(0) + \Delta A_p(t) \quad (2-1-2)$$

$$B_p(t) = B_p(0)R(t) = B_p(0)(R + \Delta R(t)) \quad (2-1-3)$$

$R(t)$  est une matrice carré inversible.

$A_p(0)$ ,  $B_p(0)$  et  $R$  sont des matrices constantes supposées connues, alors que les variations  $\Delta A_p(t)$  et  $\Delta R(t)$  sont inconnues.

L'expression (2-1-3) a été utilisée par I.Landau [12] et par A. Balestrino [3].

L'équation d'état du modèle est :

$$\dot{x} = A_m x + B_m u_m \quad (2-1-4)$$

L'égalité suivante  $B_m = B_p(0)$  sera imposé [12].

La commande est donnée par :

$$u(t) = -k_p(t)y + k_u(t)u_m \quad (2-1-5)$$

à cause de la variation présente dans les paramètres du système, les gains d'action et de réaction ne sont plus supposés constants

$$k_p(t) = k_p + \Delta k_p^0(t) \quad (2-1-6)$$

$$k_u(t) = k_u + \Delta k_u^0(t) \quad (2-1-7)$$

$\Delta k_p^0(t)$  et  $k_u^0(t)$  sont les réajustements dus à la variation des paramètres.

les équations (2-1-1) à (2-1-7) nous permettent d'écrire:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{y} = A_m x + B_m u_m - [A_p(0) + \Delta A_p(t)]y - [B_p(0)(R + \Delta R(t))] [- (k_p + \Delta k_p^0(t))y + (k_u + \Delta k_u^0(t))u_m]$$

<==>

$$\dot{e} = A_m e + [A_m - A_p(\alpha) - \Delta A_p(t) + B_p(\alpha)(R + \Delta R(t))(k_p + \Delta k_p^0(t))] y + [B_m - B_p(\alpha)(R + \Delta R(t))(k_u + \Delta k_u(t))] u_m$$

Pour que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$  et respectivement  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{e}(t) = 0$  il faut que:

$$\begin{cases} A_m - A_p(\alpha) - \Delta A_p(t) = -B_p(\alpha)(R + \Delta R(t))(k_p + \Delta k_p^0(t)) \\ B_m = B_p(\alpha)(R + \Delta R(t))(k_u + \Delta k_u^0(t)) \end{cases} \quad (2-1-8)$$

Pour réaliser la condition (2-1-8) il suffit de prendre :

$$B_p(t) \Delta k_p^0(t) = \Delta A_p(t) - B_p(\alpha) \Delta R(t) k_p \quad (2-1-9)$$

$$B_p(t) \Delta k_u^0(t) = -B_p(\alpha) \Delta R(t) k_u \quad (2-1-10)$$

$$B_p(t) R k_p = A_p(\alpha) - A_m \quad (2-1-11)$$

$$B_p(\alpha) R k_u = B_m \quad (2-1-12)$$

(2-1-11) et (2-1-12) impliquent :

$$\begin{cases} k_p = R^{-1} B_p^+(\alpha) (A_p(\alpha) - A_m) & (2-1-13) \\ k_u = R^{-1} B_p^+(\alpha) B_m & (2-1-14) \end{cases}$$

$B_p^+(\alpha)$  étant la pseudo inverse de  $B_p(\alpha)$

En remplaçant (2-1-13) et (2-1-14) dans (2-1-11) et (2-1-12) on aura :

$$(I - B_p(\alpha) B_p^+(\alpha)) (A_m - A_p(\alpha)) = 0 \quad (2-1-15)$$

$$(I - B_p(\alpha) B_p^+(\alpha)) B_m = 0 \quad (2-1-16)$$

C'est les conditions d'Erzberger's vues dans la première partie.

A partir de (2-1-9) et (2-1-10) nous aurons :

$$\Delta k_p^0(t) = (R + \Delta R(t))^{-1} B_p^+(\alpha) (\Delta A_p(t) - B_p(\alpha) \Delta R(t) k_p) \quad (2-1-17)$$

$$\Delta k_u^0(t) = -(R + \Delta R(t))^{-1} \Delta R(t) k_u \quad (2-1-18)$$

Les gains du LMFC sont donnés par les équations (2-1-13), (2-1-14), (2-1-17) et (2-1-18), mais le calcul de  $\Delta k_p^0(t)$  et  $\Delta k_u^0(t)$  exige la connaissance des variations  $\Delta A_p(t)$  et  $\Delta R(t)$  ce qui pose un problème.

## 2.2) Adaptation directe et MRAC:

Dans la synthèse du mécanisme adaptatif direct, l'hyperstabilité du système représentant l'évolution de l'erreur sera exigée, pour cela nous prendrons en compte lors de la synthèse du contrôleur les modifications faites sur la poursuite linéaire.

Dans les gains ajustables  $k_p(t)$  et  $k_u(t)$  seront introduits d'autres termes adaptatifs calculés par le mécanisme d'adaptation direct.

Les expressions de  $k_p(t)$  et  $k_u(t)$  deviennent alors :

$$k_p(t) = [k_p + \Delta k_p^0(t)] - \Delta k_p(t) \quad (2-2-1)$$

$$k_u(t) = [k_u + \Delta k_u^0(t)] + \Delta k_u(t) \quad (2-2-2)$$

$$u_p = u_{p1} + u_{p2}$$

$$u_{p1} = (-\Delta k_p^0(t) + \Delta k_p(t)) y + (\Delta k_u(t) + \Delta k_u^0(t)) u_m$$

Les gains variants dans le temps sont :

$$\begin{cases} \Delta k_p^0(t) = \Delta k_p(t) - \Delta k_p^0(t) \\ \Delta k_u^0(t) = \Delta k_u(t) + \Delta k_u(t) \end{cases}$$

Calcul de  $\Delta k_p(t)$  et  $\Delta k_u(t)$ :

$$\dot{x} = A_m x + B_m u_m$$

$$\dot{y} = A_p(t) + B_p(t) [u_{p1} + u_{p2}]$$

$$\Leftrightarrow \dot{y} = [A_p(a) + \Delta A_p(t)] y + [B_p(a)(R + \Delta R(t))] x$$

$$[-(k_p + \Delta k_p^0(t) - \Delta k_p(t)) y + (k_u + \Delta k_u(t) + \Delta k_u^0(t)) u_m]$$

l'équation (2-3-1) s'écrit :

$$\dot{e} = A_m e + B_p(0) [k^0 + (\Delta R(t) + R)(k_p + \Delta k_p^0(t) - \Delta k_p(t))] y +$$

$$B_p(0) [I - (\Delta R(t) + R)(k_u + \Delta k_u^0(t) + \Delta k_u(t))] u_m - \Delta A_p(t) u_m$$

Le système à contre réaction équivalent sera décrit dans ce cas par :

$$\dot{e} = A_m e + B_p(0) w_1 + z(t) \quad (2-3-2)$$

$$\text{avec } z(t) = -\Delta A_p(t) y \quad (2-3-3)$$

$$v = D e \quad (2-3-4)$$

$z(t)$  peut être considéré comme une entrée externe appliquée au système libre.

La figure (2-2) représente le système équivalent à contre réaction avec l'entrée libre  $z(t)$ .

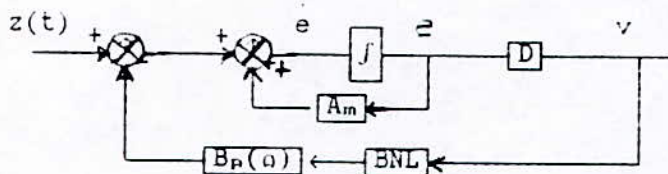


Fig (2-2) Schéma équivalent du MRAC dans le cas de paramètres du système variables.

Le système libre représenté par la figure (2-2) devient asymptotiquement hyperstable si :

$$a) D = B_p^T(0) P$$

$P$  : étant la solution de l'équation de Lyapounov :  $P A_m + A_m^T P = -Q$ .

b)  $A_m$  est une matrice définie positive

$$c) \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0 \quad \text{si } y \neq 0$$

$$\text{ce qui implique } \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta A_p(t) = 0$$

Dans le cas où on a  $\|z(t)\| < a$ , on utilise la propriété d'hyperstabilité : Entrée bornée - sortie bornée [16].

On assurera alors seulement  $\|v(t)\| < b$  et par conséquent

$$\|e(t)\| < c$$

$$\text{or } \|z\| < a \text{ ssi } \begin{cases} \|\Delta A_p(t)\| < \alpha \quad \forall t \geq 0 \\ \|\gamma\| < \sigma \end{cases} \quad (2-3-5)$$

$a, b, c, \alpha$  et  $\sigma$  : constantes finies positives.

donc la variation du paramètre  $A_p$  doit être bornée.

Vérifiant l'inégalité de Popov c'est à dire:

$$\int_0^t v^T w \geq -\gamma^2 \quad (w = -w_1)$$

$$w_1 = -w = [k^0 + (\Delta R(t) + R)(k_p + \Delta k_p^0(t) - \Delta k_p(t))] \gamma + [I - (\Delta R(t) + R)(k_u + \Delta k_u^0(t) + \Delta k_u(t))] u_m$$

$$w_1 = [k^0 + Rk_p + \Delta R(t)k_p + (\Delta R(t) + R)\Delta k_p^0(t) - (\Delta R(t) + R)\Delta k_p(t)] \gamma + [I - (Rk_u + \Delta R(t)k_u + (\Delta R(t) + R)\Delta k_u^0(t) + (\Delta R(t) + R)\Delta k_u(t))] u_m \quad (2-3-6)$$

En utilisant les équations (2-1-9), (2-1-10) et (2-2-7), l'équation (2-3-6) deviendra :

$$w_1 = [k^0 + Rk_p + B_p^*(0)\Delta A_p(t) - (\int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) + \Delta k_p(0))] \gamma + [I - Rk_u + (\int_0^t \psi_1(v, t, \tau) d\tau + \psi_2(v, t) + \Delta k_u(0))] u_m$$

$$\int_0^t v^T w = \int_0^t (-v^T \left\{ \begin{array}{l} [k^0 + Rk_p + B_p^*(0)\Delta A_p(t) - (\int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) + \Delta k_p(0))] \gamma + \\ [I - Rk_u + (\int_0^t \psi_1(v, t, \tau) d\tau + \psi_2(v, t) + \Delta k_u(0))] u_m \end{array} \right\} dt) \geq -\gamma^2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_0^t 1 - v^T \left\{ \begin{array}{l} k^0 + Rk_p - (\int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) + \Delta k_p(0))] \gamma + \\ I - Rk_u + \int_0^t \psi_1(v, t, \tau) d\tau + \psi_2(v, t) + \Delta k_u(0) u_m \end{array} \right\} dt \geq \gamma^2 \\ \text{et } \int_0^t 1 - v^T B_p^*(0)\Delta A_p(t) \gamma \geq -\gamma^2 \end{array} \right. \quad (2-3-7)$$

$$(2-3-8)$$

On a déjà vu que (2-3-7) est vérifié pour :

$$\phi_1(v, t, \tau) = F_A(t-\tau)v(t) [G_A \gamma(t)]^T \quad \tau < t$$

$$\phi_2(v, t) = F_A^1(t)v(t) [G_A^1(t)\gamma(t)]^T$$

$$\psi_1(v, t, \tau) = F_B(t-\tau)v(t) [G_B u(t)]^T \quad \tau \leq t$$

$$\psi_2(v, t) = F_B^1(t)v(t) [G_B^1(t)u(t)]^T$$

(2-3-8) implique :

$$\int_0^{t_1} v^T B_p^+(a) \Delta A_p(t) y dt \leq \int_0^{t_1} \|v^T\| \cdot B_p^+(a) \cdot \|\Delta A_p(t)\| \cdot \|y\| dt \leq$$

$$\int_0^{t_1} b B_p^+(a) \alpha \sigma \Delta t = \alpha b \sigma B_p^+(a) t_1$$

Donc il suffit de prendre  $\gamma_2^2 = \alpha b \sigma B_p^+(a) t_1$  pour vérifier (2-3-8)

et par conséquent vérifier l'inégalité de Popov

DEUXIEME PARTIE :  
CHAPITRE 3

3) L'algorithme MRAC indirect:

3.1) Introduction :

L'étude précédente a montré qu'il était nécessaire d'introduire une identification des paramètres variables, à fin de calculer certains termes utilisés par la loi l'adaptation. Explicitons l'algorithme MRAC modifié avec ses contraintes pour le comparer à l'ancien algorithme .

$$\dot{y} = A_p(t)y + B_p(t)u_p \quad (3-1-1)$$

$$A_p(t) = A_p(0) + \Delta A_p(t) \quad (3-1-2)$$

$$B_p(t) = B_p(0)(R + \Delta R(t)) \quad (3-1-3)$$

$$\| \Delta A_p(t) \| < a \quad (3-1-4)$$

$$\| \Delta B_p(t) \| < b \quad (3-1-5)$$

$$\dot{x} = A_m x + B_m u_m \quad (3-1-6)$$

$$B_m = B_p(0) \quad (3-1-7)$$

$$u_p = -(k_p + \Delta k_p^0(t) - \Delta k_p(t))y + (k_u + \Delta k_u^0(t) + \Delta k_u(t))u_m \quad (3-1-8)$$

$$k_p = R^{-1} B_p^*(0) (A_p(0) - A_m) \quad (3-1-9)$$

$$k_u = R^{-1} B_p^*(0) B_m \quad (3-1-10)$$

$$\Delta k_p^0(t) = (R - \Delta R(t))^{-1} B_p^*(0) (\Delta A_p(t) - B_p(0) \Delta R(t) k_p) \quad (3-1-11)$$

$$\Delta k_u^0(t) = -(R + \Delta R(t))^{-1} \Delta R(t) k_u \quad (3-1-12)$$

$$\Delta k_p(t) = (R + \Delta R(t))^{-1} [\int_0^t \phi_1(v, t, \tau) d\tau + \phi_2(v, t) + \Delta k_p(0)] \quad (3-1-13)$$

$$\Delta k_u(t) = (R + \Delta R(t))^{-1} [\int_0^t \psi_1(v, t, \tau) d\tau + \psi_2(v, t) + \Delta k_u(0)] \quad (3-1-14)$$

Ces équations montrent que les variations des paramètres sont compensées par la commande  $u_p$  grâce aux termes  $\Delta k_p^0(t)$  et  $\Delta k_u^0(t)$ , pour calculer ces termes on introduit une identification des variations en temps réel, ce qui conduit à un schéma de commande adaptative indirecte [13]:

La fig (3-1) représente les différentes modifications apportées aux systèmes MRAC, elle est constituée de trois blocs différents  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  qui sont respectivement la représentation d'état :

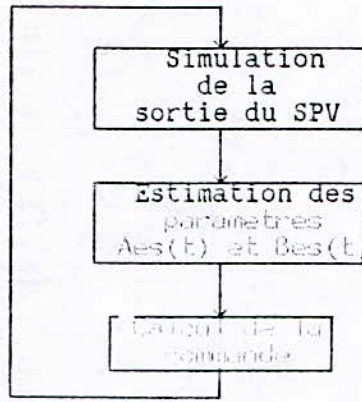


- du modèle de référence (MR)
- du système à paramètres variables (SPV)
- du modèle estimé ME ( $\dot{y}_m = \hat{A}_{es}(t)y_m + \hat{B}_{es}(t)u_m$ )

L'erreur d'état généralisée  $e_1$  représente la différence entre les états du SPV et du ME, elle est utilisée par le mécanisme d'adaptation (MA1) pour ajuster :

- Les paramètres  $\hat{A}_{es}(t)$  et  $\hat{B}_{es}$  du ME
- les gains  $\Delta k_p^o(t)$  et  $\Delta k_u^o(t)$  de la poursuite linéaire.

$-e_2$  : est la différence entre le vecteur d'état du MR et le vecteur d'état du SPV, elle sert avec la contribution du MA1 à calculer la commande adaptative générée par le mécanisme d'adaptation direct MA2.



A ce stade là, il nous reste plus qu'à choisir un algorithme d'identification bien adapté aux différents systèmes à identifier (variables à mesurer, limites, etc.).

### 3.3) Choix d'un algorithme d'identification

#### 3-2-1) Généralités

L'identification est une opération qui détermine les caractéristiques dynamiques d'un procédé dont la connaissance est nécessaire pour la conception et la mise en oeuvre d'un système performant de régulation [14]

Des algorithmes d'identification performants ayant une formulation récursive adaptée aux problèmes d'identification temps-reel et à leur mise en oeuvre sur micro-ordinateur ont été développés, le principe de l'estimation des paramètres des modèles échantillonnés est illustré dans la figure (3-2).

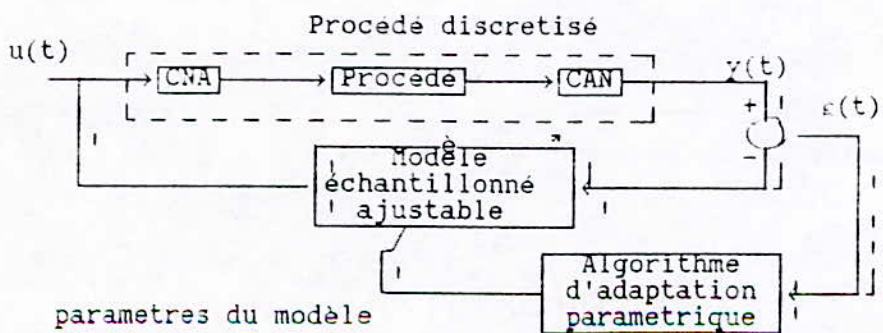


fig 2-2) Principe de l'estimation des paramètres

Les algorithmes d'adaptation paramétrique ont tous la structure ci

$$\begin{bmatrix} \text{nouvelle estimée} \\ \text{des paramètres} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{estime précédente} \\ \text{des paramètres} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Gain d'adaptation} \\ \text{(matrice)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{Fonctions des} \\ \text{mesures} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{Fonction de} \\ \text{l'erreur de} \\ \text{prédiction} \end{bmatrix}$$

- Les composantes du vecteur des paramètres sont les différents paramètres qui doivent être ajustés.

- Le vecteur des fonctions des mesures correspond à la valeur des observations.

Il existe plusieurs algorithmes d'identification récursifs [ MCR, MCE, MVR, ESMPE. ect.. ] [14], ce qui les différencie les uns des autres c'est leurs façons de procéder pour éliminer le biais sur les paramètres estimés (les erreurs d'identification dus aux perturbations aléatoires et aux bruits de mesure ).

pour notre cas, le problème du biais ne se pose pas, car on travaille avec des systèmes à paramètres variables non bruités, nous étudierons donc un seul algorithme d'identification récursif.

### 3-2-2) Identification des systèmes SISO (MCR)

Soit  $y(t+1)$  la sortie du procédé discretisé à l'instant  $t+1$ .

$$y(t+1) = -\sum_{i=1}^n a_i y(t+1-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(t-i) = \theta^T \phi(t) \quad (3-2-1)$$

$$\text{où } \theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m] \quad (3-2-2)$$

est le vecteur des paramètres du modèle du procédé et

$$\phi^T(t) = [-y(t), \dots, -y(t+1-n), u(t), \dots, u(t-m)] \quad (3-2-3)$$

est le vecteur des mesures.

le modèle de prédiction ajustable sera décrit par :

$$\hat{y}^o(t+1) = -\sum_{i=1}^n \hat{a}_i(t) y(t+1-i) + \sum_{i=0}^m \hat{b}_i(t) u(t-i) = \hat{y}(t+1 / \hat{\theta}(t)) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (3-2-4)$$

où  $\hat{y}^o(t+1)$  est la prédiction "à priori" dépendant des paramètres estimés à l'instant  $t$ .

$$\text{et } \hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_n(t), \hat{b}_o(t) \dots \hat{b}_m(t)] \quad (3-2-5)$$

La sortie "à posteriori" du prédicteur sera donnée par:

$$\hat{y}(t+1) = \hat{y}(t+1 / \hat{\theta}(t+1)) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad (3-2-6)$$

On définit une erreur de prédiction "à priori":

$$\varepsilon^o(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) \quad (3-2-7)$$

et une erreur de prédiction "à posteriori":

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad (3-2-8)$$

et on cherche un algorithme d'adaptation paramétrique récursif et avec mémoire de la forme:

$$\hat{\theta}(t+1) = f(\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon^o(t+1)) \quad (3-2-9)$$

qui réduira l'erreur par le procédé modèle au sens d'un certain critère à définir.

L'algorithme d'adaptation paramétrique MCR a comme objectif de minimiser un critère quadratique décrit par:

$$J(t) = \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)]^2 \quad (3-2-10)$$

Le terme  $\hat{\theta}(t)^T \phi(i-1) = \hat{y}(i / \hat{\theta}(t))$  correspond à une prédiction de la sortie à l'instant  $i$  (ist) basée sur l'estimation des paramètres à partir de  $t$  mesures.

La valeur de  $\hat{\theta}(t)$  qui minimise le critère (3-2-10) s'obtient en cherchant la valeur de  $\hat{\theta}(t)$  qui annule:

$$\frac{\delta J(t)}{\delta \hat{\theta}(t)}$$

La formulation mathématique de l'algorithme d'adaptation

paramétrique des MCR [14] est la suivante:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \eta(t) \varepsilon(t) \phi(t) \quad (3-2-11)$$

$$F(t+1)^{-1} = F(t)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T \quad (3-2-12)$$

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (3-2-13)$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{y(t+1) - \theta(t)^T \phi(t)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (3-2-14)$$

$F(t)$  étant le gain d'adaptation matriciel.

L'algorithme des MCR est un algorithme à gain d'adaptation décroissant (eq.(3-2-12)) il donne de moins en moins de poids aux nouvelles erreurs de prediction donc aux nouvelles mesures. En conséquence ce type de variation du gain d'adaptation ne conviendra pas pour l'estimation des paramètres variables dans le temps.

On généralise la formule de l'inverse du gain d'adaptation  $F(t+1)^{-1}$  donnée par l'équation (3-2-12) en introduisant deux séquences de pondération  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$ .

(3-2-1) devient alors :

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1(t)F(t)^{-1} + \lambda_2(t)\phi(t)\phi(t)^T$$

$$0 < \lambda_1(t) \leq 1 ; 0 \leq \lambda_2 < 2 ; F(0) > 0 \quad (3-2-15)$$

$$\text{et } F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \left[ F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\lambda_1(t) + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \right] \quad (3-2-16)$$

Un gain d'adaptation à trace constante est souvent utilisé pour l'identification des systèmes à paramètres variables dans le temps [14].

Pour l'obtenir il suffit de choisir  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$  automatiquement à chaque pas de façon à avoir

$$\text{tr } F(t+1) = \alpha \text{tr } F(t) - \alpha \mu \text{tr } F(t) - \mu \alpha \quad (3-2-17)$$

$$F(\alpha) = \begin{bmatrix} GI & \alpha \\ \alpha & GI \end{bmatrix} \quad (3-2-18)$$

Par cette technique on se déplace à chaque pas dans la direction optimale des MCR, mais on maintient le gain approximativement constant

En fixant le rapport  $\alpha(t) = \lambda_1(t) / \lambda_2(t)$ , on détermine les valeurs de  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$  à partir de l'équation :

$$\begin{aligned} \text{tr } F(t+1) &= \frac{1}{\lambda_1(t)} \text{tr} \left[ F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\alpha(t) + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \right] = \\ &= \text{tr } F(t) = \text{tr } F(\alpha) = n \text{ GI} \end{aligned} \quad (3-2-19)$$

On peut donc formuler l'algorithme des MCR à trace constante comme suit:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)\varepsilon(t+1) \quad (3-2-20)$$

$$\alpha(t) = \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} \quad (3-2-21)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \left[ F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\alpha(t) + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \right] \quad (3-2-22)$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t)}{\alpha(t) + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (3-2-23)$$

$$\lambda_1(t) = \frac{n \text{ GI}}{\text{tr} \left[ F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\alpha(t) + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \right]} \quad (3-2-24)$$

Nous utiliserons par la suite cet algorithme d'identification pour estimer les paramètres variables d'un système SISO (Single Input, Single Output).

### 3.3) Calcul de la commande:

l'estimation, de la variation des paramètres du système à chaque pas d'échantillonnage nous permet de calculer la commande et de

l'appliquer au système. Mais avant de la calculer, nous devons transformer les paramètres discrets  $\hat{\theta}(t)$  en des paramètres continus  $((\hat{A}_e(s), \hat{B}_e(s)))$ , car le régulateur que nous avons conçu est continu. Nous utiliserons alors une approximation qui permet le passage du domaine Z au domaine S (de la transformé en z a la transformé de Laplace ).

Pour une période d'échantillonnage assez faible (l'ordre des ms) l'approximation Zohd est souvent utilisé.

$$\frac{1}{s} = \frac{T_e z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (3-3-1)$$

$T_e$  : période d'échantillonnage.

ZOHD : bloqueur d'ordre zéro

Nous nous servons de cette même approximation pour discrétiser notre algorithme :

$$y(k+1) = (I + T_e A_p(k)) y(k) + T_e B_p(k) u_p(k) \quad (3-3-2)$$

$$x(k+1) = (I + T_e A_m) x(k) + T_e B_m r(k) \quad (3-3-3)$$

$$u_p(k) = -(k_p + \Delta k_p^o(k) - \Delta k_p(k)) y(k) + (k_u + \Delta k_u^o(k) - \Delta k_u(k)) r(k) \quad (3-3-4)$$

$$\Delta k_p^o(k) = (R + \Delta R(k))^{-1} B_p^+(o) (\Delta A_p(k) - B_p(o) k_p \Delta R(k)) \quad (3-3-5)$$

$$\Delta k_u^o(k) = -(R + \Delta R(k))^{-1} \Delta R(k) k_u \quad (3-3-6)$$

Discrétisation de  $\Delta k_p(t)$  et  $\Delta k_u(t)$ :

Les expressions de  $\Delta k_p(t)$  et  $\Delta k_u(t)$  en continu sont données par les équations suivantes:

$$B_p(t) \Delta k_p(t) = B_p(0) \int_0^t \alpha v(\tau) y^T(\tau) d\tau + B_p(0) \beta v(t) y^T(t) + B_p(0) \Delta k_p(0) \quad (3-3-7)$$

$$B_p(t) \Delta k_u(t) = B_p(0) \int_0^t \alpha v(\tau) r^T(\tau) d\tau + B_p(0) \beta v(t) r^T(t) + B_p(0) \Delta k_u(0) \quad (3-3-8)$$

$$\Delta k_p(0) = \Delta k_u(0) = 0$$

(3-3-7) implique :

$$(R + \Delta R(t)) \Delta k_p(t) = \int_0^t \alpha v(\tau) y^T(\tau) d\tau + \beta v(t) y^T(t) .$$

$$\frac{d}{dt} ((R + \Delta R(t)) \Delta k_p(t)) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^t \alpha v(\tau) y^T(\tau) d\tau \right) + \beta \frac{d}{dt} (v(t) y^T(t))$$

en utilisant l'approximation (3-3-1) on obtient :

$$\frac{(R + \Delta R(k)) \Delta k_p(k) - (R + \Delta R(k-1)) \Delta k_p(k-1)}{T_e} = \alpha v(k-1) y^T(k-1) + \beta \frac{v(k) y^T(k) - v(k-1) y^T(k-1)}{T_e}$$

<==>

$$(R + \Delta R(k)) \Delta k_p(k) = (R + \Delta R(k-1)) \Delta k_p(k-1) + \beta v(k) y^T(k) + \sigma v(k-1) y^T(k-1) \quad (3-3-9)$$

avec  $\sigma = T_e \alpha - \beta$

(3-3-9) devient

$$\Delta k_p(k) = (R + \Delta R(k))^{-1} ((R + \Delta R(k-1)) \Delta k_p(k-1) + \beta v(k) y^T(k) + \sigma v(k-1) y^T(k-1)) \quad (3-3-10)$$

De la même manière on discrétise  $\Delta k_u(k)$ , on trouve :

$$\Delta k_u(k) = (R + \Delta R(k))^{-1} ((R + \Delta R(k-1)) \Delta k_u(k-1) + \beta v(k) r^T(k) + \sigma v(k-1) r^T(k-1)) \quad (3-3-11)$$



DEUXIEME PARTIE :  
CHAPITRE 4

#### 4) Analyse des resultats

L'algorithme MRAC résultant de notre approche étant explicite, nous validerons son efficacité par des exemples d'application. La difficulté de trouver dans la réalité des procédés à paramètres variables obéissants à toutes les contraintes imposées, nous pousse à choisir des exemples théoriques. Nous appliquerons sur ces exemples les contrôleurs précédents (MRAC et/ou MCS) et les résultats seront comparés.

##### 4-1) Exemple 1

L'exemple choisi est un système de premier ordre, la variation considérée des paramètres est sinusoidale.

L'équation d'état du système est:

$$\dot{y} = A_p(t) y + B_p(t) u_p \quad (4-1-1)$$

avec  $A_p(t) = A_0 + \Delta A_p(t)$  (4-1-2)

$$B_p(t) = B_0 ( R + \Delta R(t) ) \quad (4-1-3)$$

Pour une première application on prend:

$$A_0 = -5$$

$$B_0 = 10$$

$$R = 0.38336$$

Periode d'échantionnage choisie:  $dte = 5ms$

$$\Delta A_p(t) = 0.5 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) \quad ( T_1 = 7 dte ) \quad (4-1-4)$$

$$\Delta R(t) = 0.01 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t\right) \quad ( T_2 = 4 dte ) \quad (4-1-5)$$

Comme nous pouvons le remarquer, les variations choisies sont assez lentes avec des amplitudes très faibles.

$$\begin{aligned} |\Delta A_p(t)| &< 0.5 \\ |\Delta R(t)| &< 0.01 \end{aligned}$$

L'équation du modèle est:

$$\dot{x} = -10x + 10r \quad (4-1-6)$$

Pour  $Q = 1$ , la solution de l'équation de Lyapounov donne  
 $P=0.05$

Appliquons au système (4-1-1) les trois contrôleurs étudiés (MRAC, MCS et le MRAC modifié) et comparons les résultats obtenus.

Pour les MRAC:

$$\alpha = 4$$

$$\beta = 1$$

Pour le MCS:

$$\alpha = 50$$

$$\beta = 10$$

Les résultats de la simulation sont représentés par les courbes suivantes :

MRAC non modifie

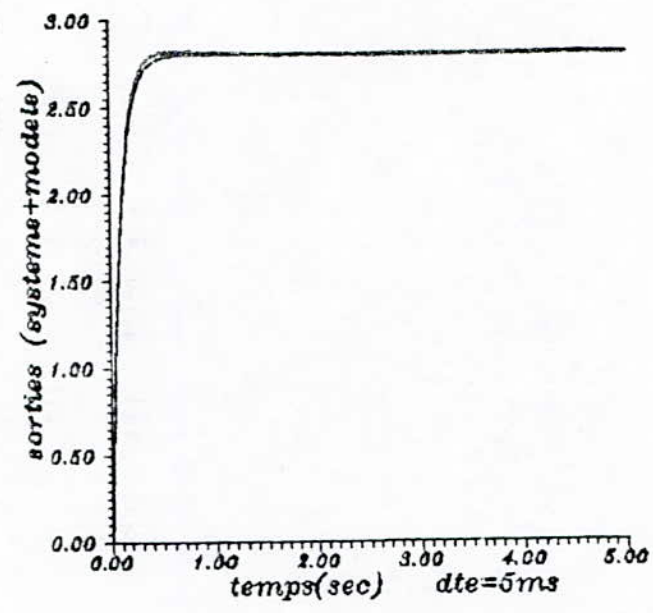


fig 4.1.1 (a) reponse du systeme

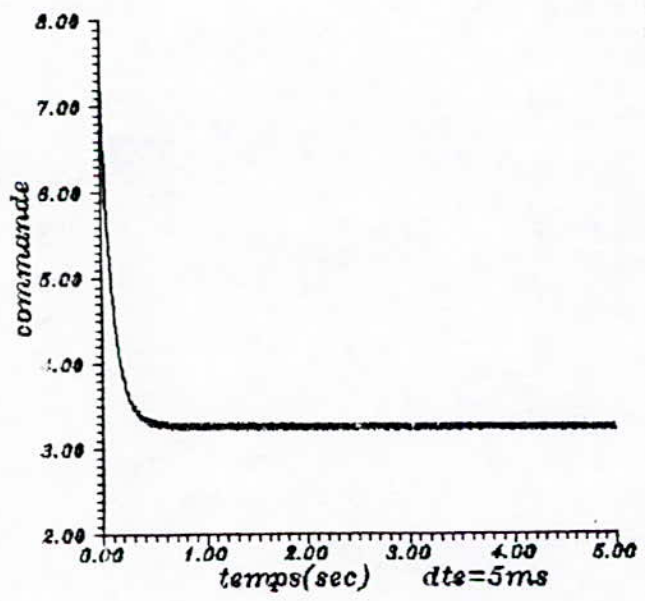


fig 4.1.1 (b) La commande

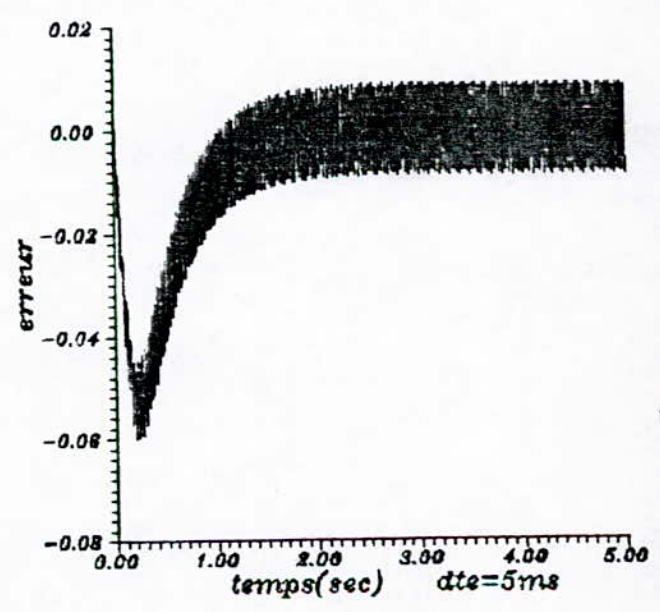


fig 4.1.1 (c) Evolution de l'erreur

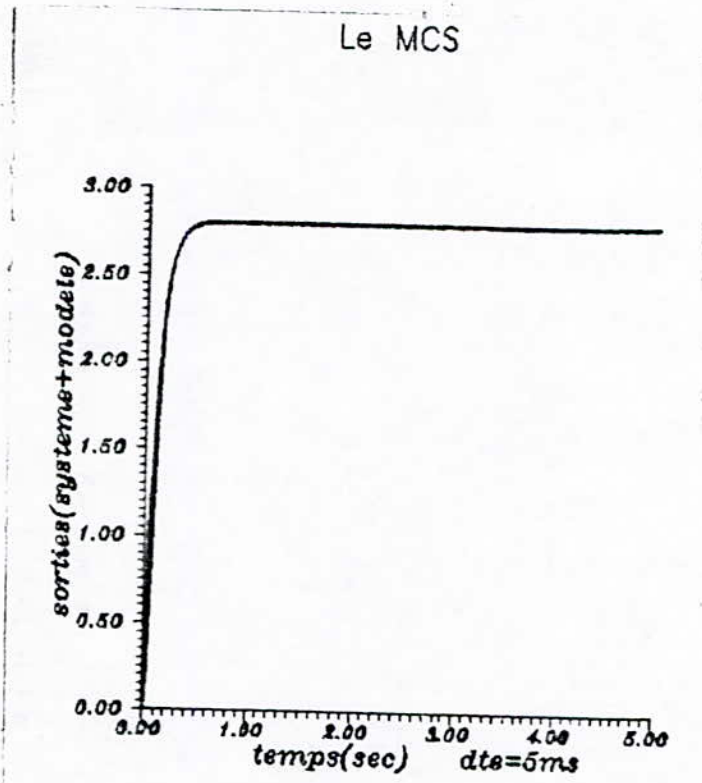


fig 4.12 (a) Reponse du systeme

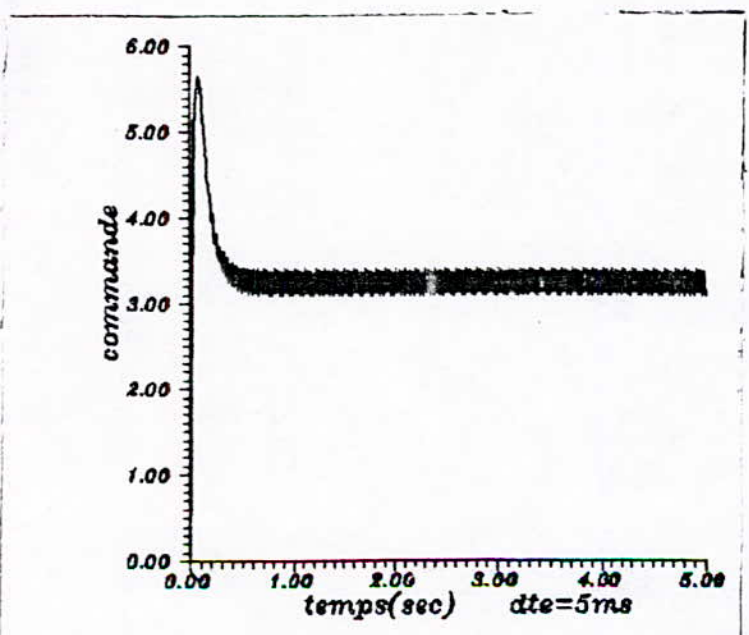


fig 4.12 (b) Le commande

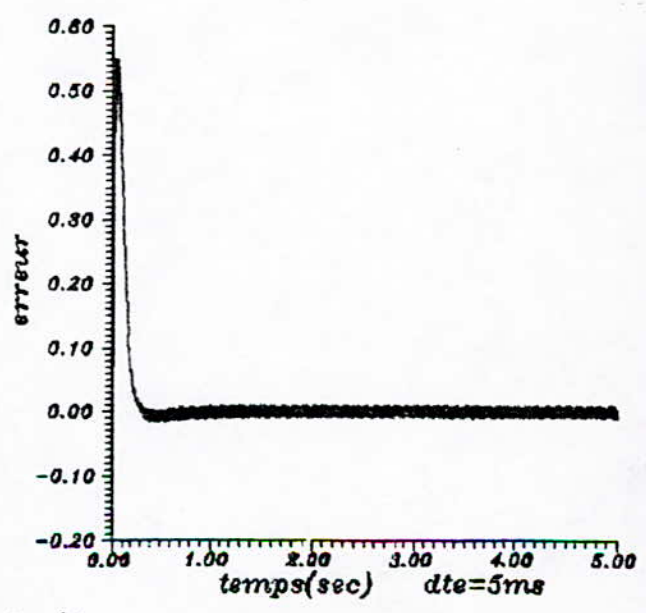


fig 4.12 (c) Evolution de l'erreur

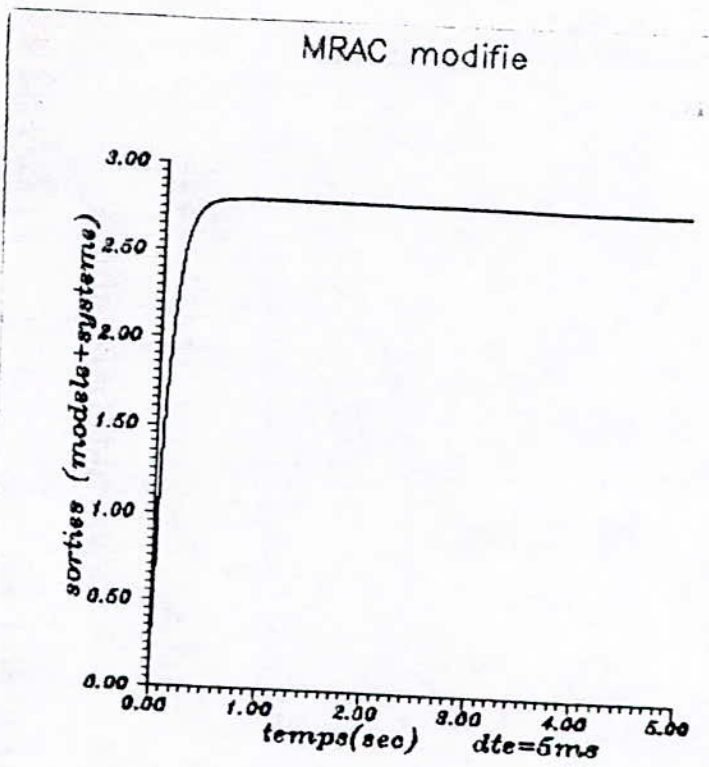


fig 4.13(a) Reponse du systeme

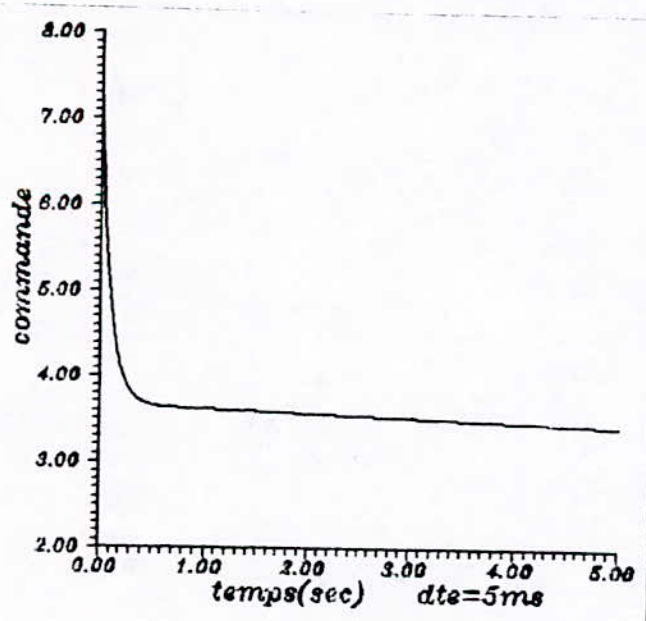


fig 4.13(b) La commande

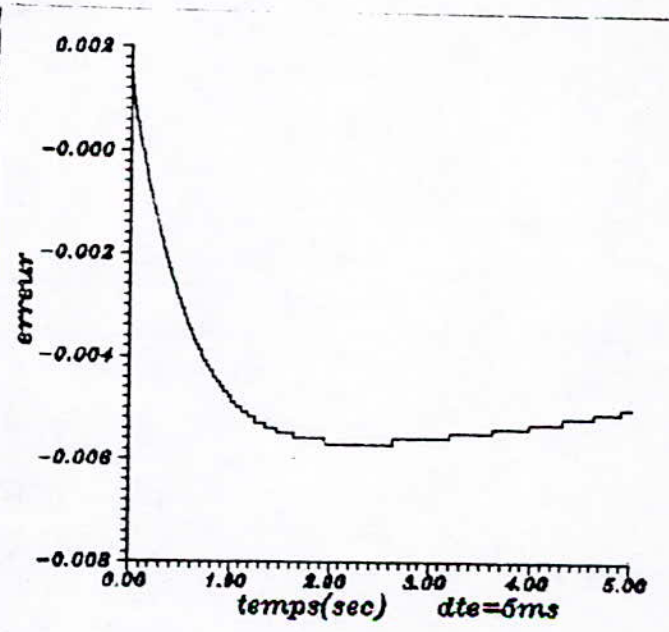


fig 4.13 (c) Evolution de l'erreur

Les résultats de la simulation ont bien confirmé ce que nous avons dit auparavant, c'est à dire que la robustesse des contrôleurs MRAC et MCS est remarquable. Malgré la variation des paramètres du système l'adaptation est toujours réalisée, ceci est explicité par les courbes de reponse fig(4-1-1a) et fig(4-1-2a). Néanmoins, on peut encore remarquer qu'une légère oscillation de faible amplitude (ordre  $10^{-2}$ ) est présente sur les courbes d'erreur fig(4-1-1c,4-1-2c), elle est due à la variation sinusoidale des paramètres (pour le MCS l'oscillation n'est pas visible car l'erreur maximale atteint la valeur 0.55). On observe le même phénomène sur les commandes représentées par les courbes fig(4-1-1b,4-1-2b). Cependant, une poursuite parfaite du modèle est obtenue par le système sous MRAC modifié, l'erreur est pratiquement 1/10 fois plus petite que celles du MCS et du MRAC fig (4-1-3a, 4-1-3c). Ces résultats ne nous permettent pas de conclure rapidement sur l'efficacité de l'algorithme MRAC modifié, car les contrôleurs précédents ont été pratiquement insensibles à la variation infligée aux paramètres du système ( amplitude de la variation très faible). Nous allons augmenter l'amplitude de la variation et observer l'effet qu'elle va produire sur la reponse du système commandé par les différents contrôleurs. La période d'échantonnage choisie dans ce cas est de 10ms. En jouant aussi sur les périodes de variation des paramètres, les expressions de  $\Delta A_p(t)$  et  $\Delta R(t)$  deviennent :

$$\Delta A_p(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T'_1} t\right) \quad (T'_1 = 10dte) \quad (4-1-7)$$

$$\Delta R(t) = 0.1 \sin\left(\frac{2\pi}{T'_2} t\right) \quad (T'_2 = 20dte) \quad (4-1-8)$$

La simulation a donné les résultats suivants:

MRAC non modifie

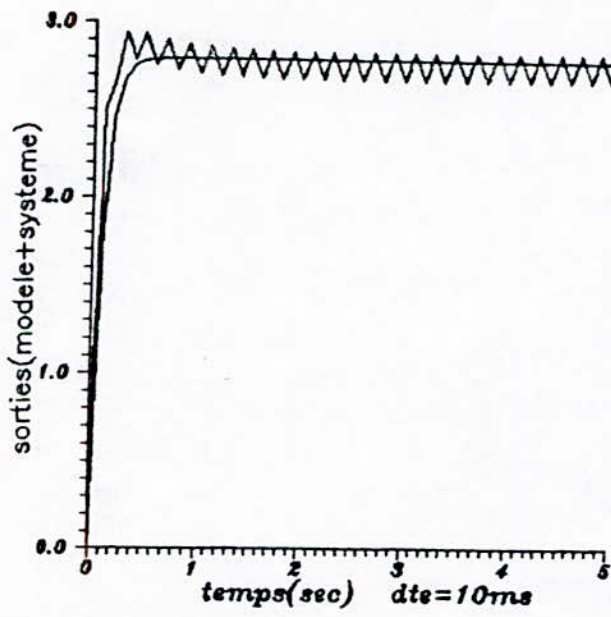


fig 414a Reponse du systeme

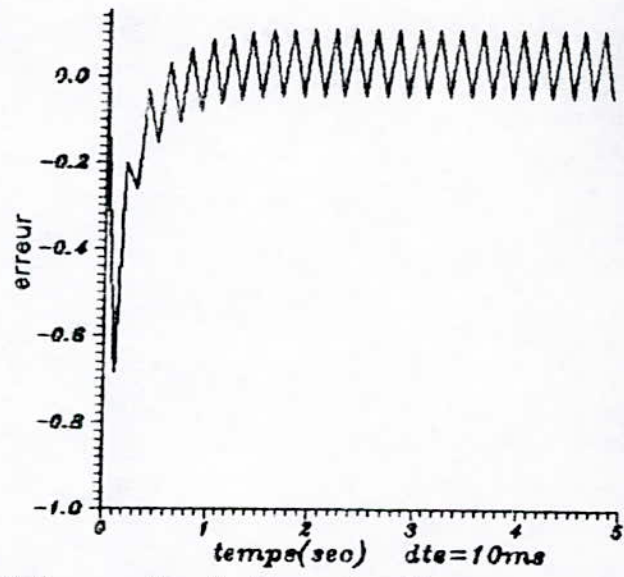


fig 414b Evolution de l'erreur

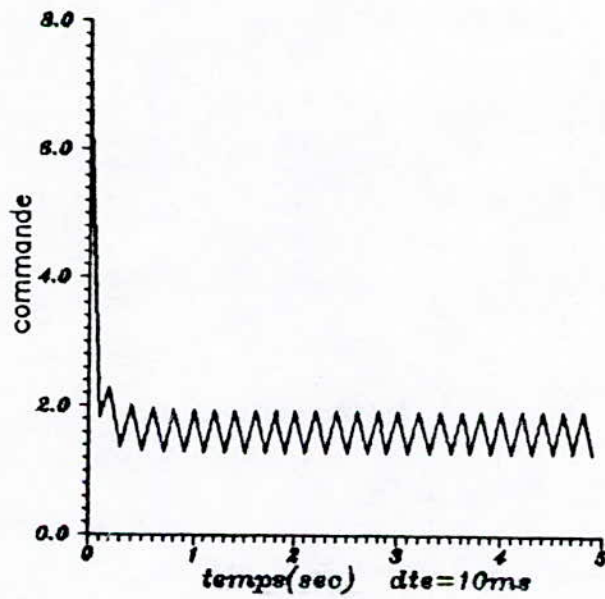


fig 414c La commande



Le MCS

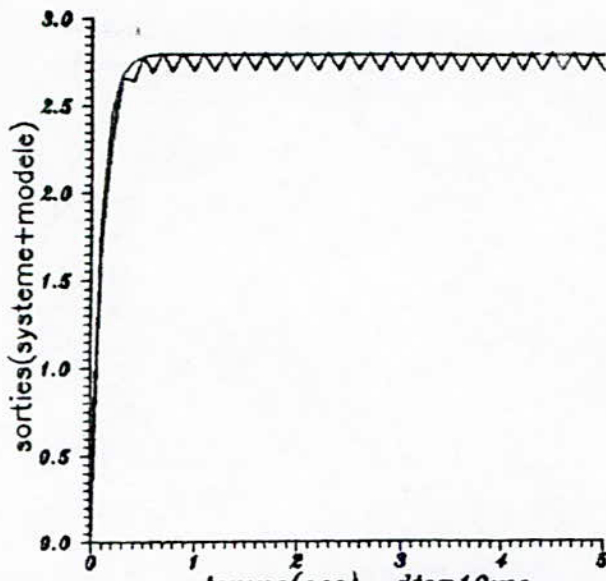
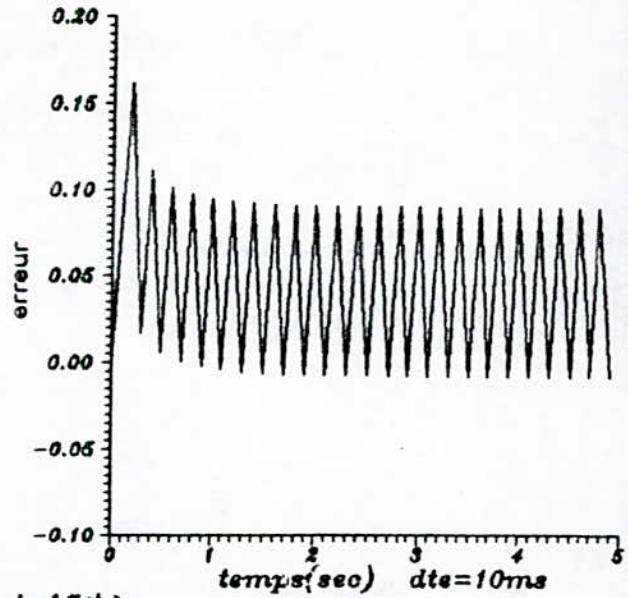


fig 4.15(a)

Reponse du systeme



4.15(b) Evolution de l'erreur

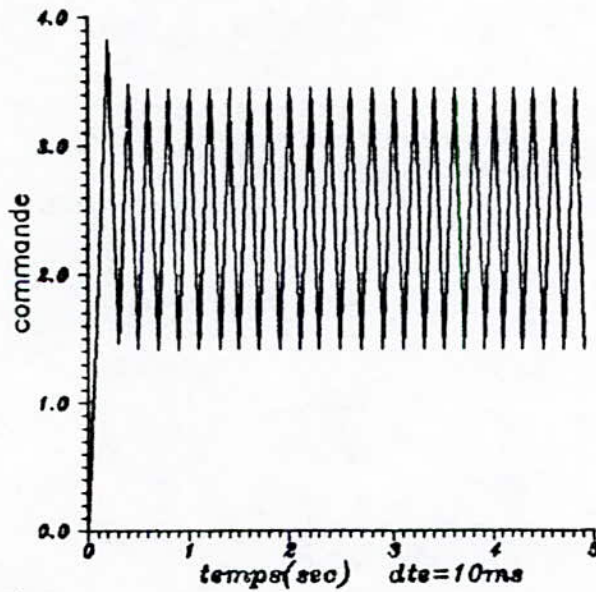
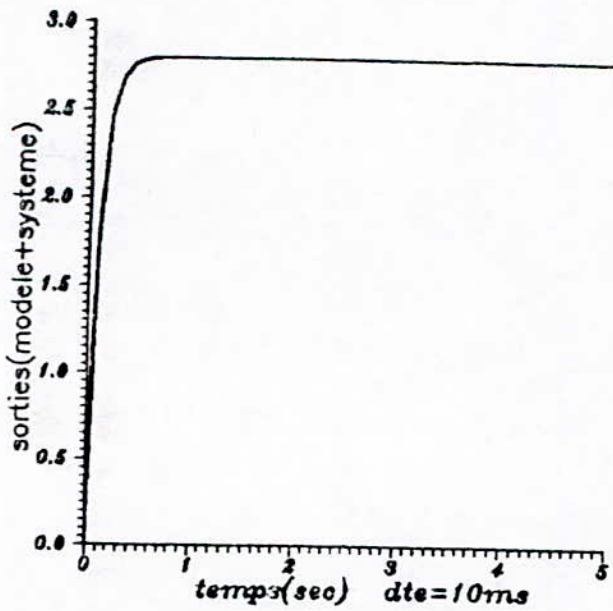


fig 4.15(c) La commande

MRAC modifie



4-1-6(a) Reponse du systeme

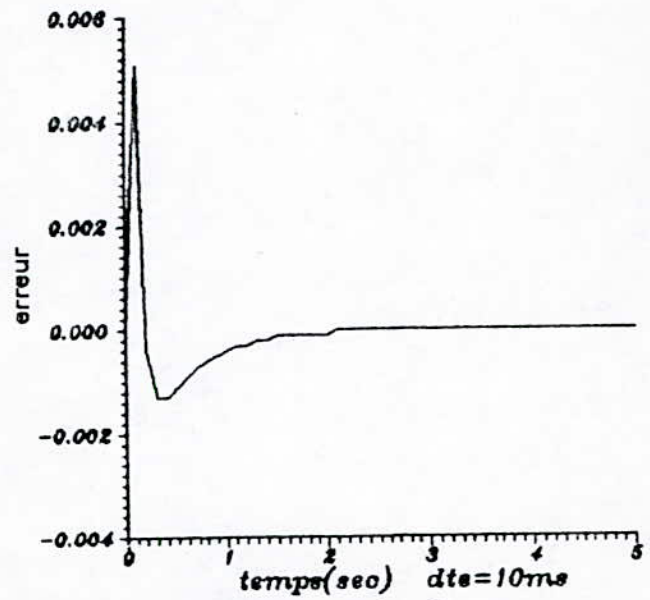


fig 4-1-6 (b) Evolution de l'erreur

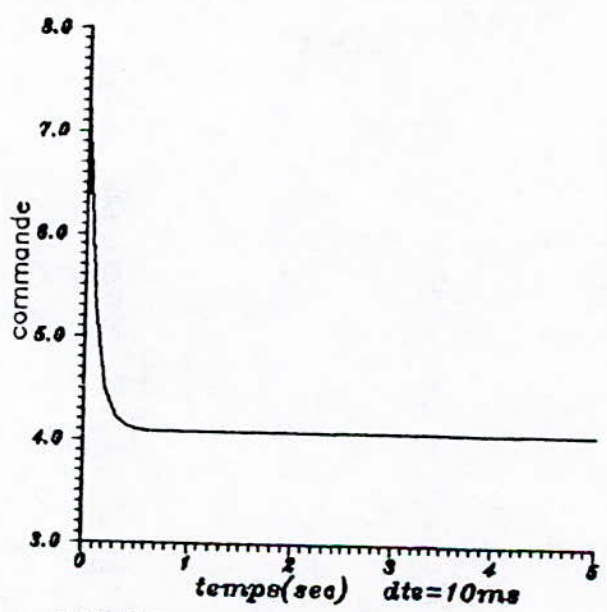


fig 4-1-6(c) La commande

Contrairement au cas précédent, on remarque ici que la sortie du système commandé par le MRAC ou le MCS oscille autour de la sortie du modèle fig(4-1-4a,4-1-5a), l'erreur modèle-système est importante. On observe des pics sur les courbes de commande fig(4-1-4b,4-1-5b), ces pics sont généralement déconseillés dans les commandes des systèmes automatiques car ils consomment une grande énergie. Pour le MRAC modifié l'adaptation est toujours réalisée, l'erreur modèle-système est très faible. Malgré l'augmentation de l'amplitude de la variation, le contrôleur arrive toujours à la compenser.

#### 4-2) Exemple 2 [1]

Un procédé inconnu est décrit par une équation différentielle du second ordre:

$$(p^2 + a_1 p + a_0) y(t) = b_0 u(t) \quad (4-2-1)$$

Le modèle considéré par:

$$(p^2 + 2p + 1) x(t) = r(t) \quad (4-2-2)$$

Les variations des paramètres  $a_0, a_1, b_0$  sont inconnues, mais on connaît leurs bornes supérieures et inférieures:

$$1.2 < a_0 < 2.8 \quad (4-2-3)$$

$$0.7 < a_1 < 1.5 \quad (4-2-4)$$

$$3 < b_0 < 6 \quad (4-2-5)$$

représentation d'état du système (4-2-1) et du modèle (4-2-2) donne:

$$\dot{y} = A_p y + B_p u \quad (4-2-6)$$

avec

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

avec  $\dot{x} = A_m x + b_m r(t)$  (4-2-7)

$$A_m = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

et  $B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nous posons alors

$$a_0 = a_{00} + \Delta a_0$$

$$a_1 = a_{10} + \Delta a_1$$

$$b_0 = b_{00} + \Delta b_0$$

avec  $a_{00} = 1.2$

$$a_{10} = 0.7$$

$$b_{00} = 3$$

Les variations  $\Delta a_0$ ,  $\Delta a_1$  et  $\Delta b_0$  sont aleatoires mais bornées.

$$0 < \Delta a_0 < 1.6$$

$$0 < \Delta a_1 < 0.8$$

$$0 < \Delta b_0 < 3$$

La periode d'echantionnage choisie pour la simulation est de 10ms.

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 0.1$$

Pour la variation des parametres nous avons utilisé la procedure Random (Turbo-Pascal 5.5). Le signal de reference est un signal carré de période 14s. En appliquant au système (4-2-1) les deux contrôleurs (MRAC et MRAC modifié) nous obtenons les courbes suivantes:

Nous remarquons d'après les résultats précédents que pour les deux contrôleurs (MRAC et MRAC modifié) on assiste à une poursuite parfaite du modèle. (fig. 4-2-1, 4-2-2)

MRAC non modifie

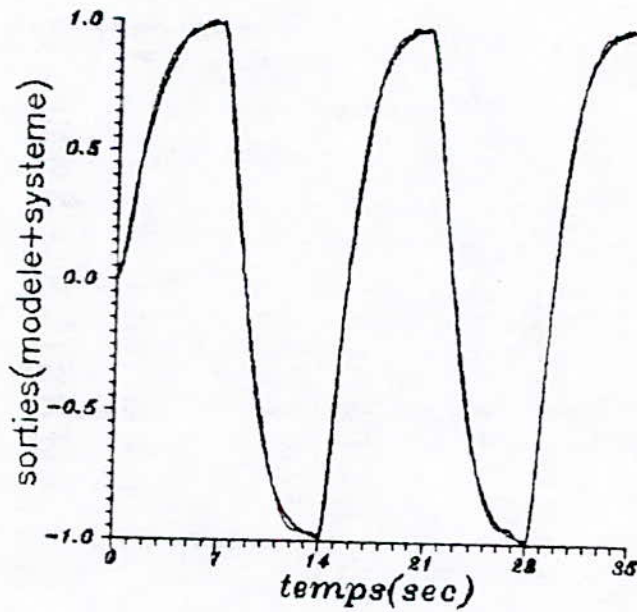


fig 4.2.2 (a) Reponse du systeme

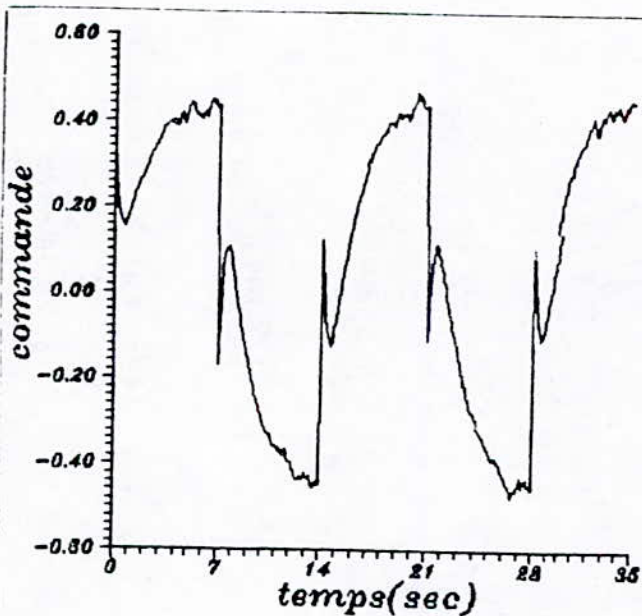


fig 4.2.2 (b) La commande

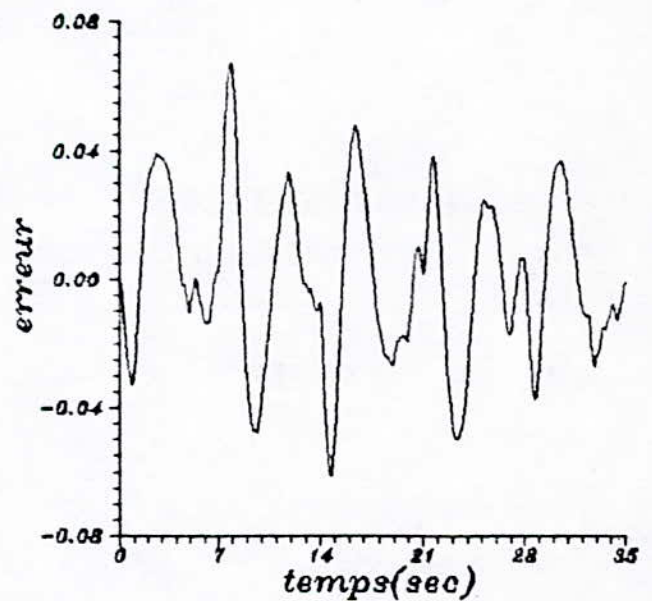


fig 4.2.2 (c) Evolution de l'erreur

MRAC modifie

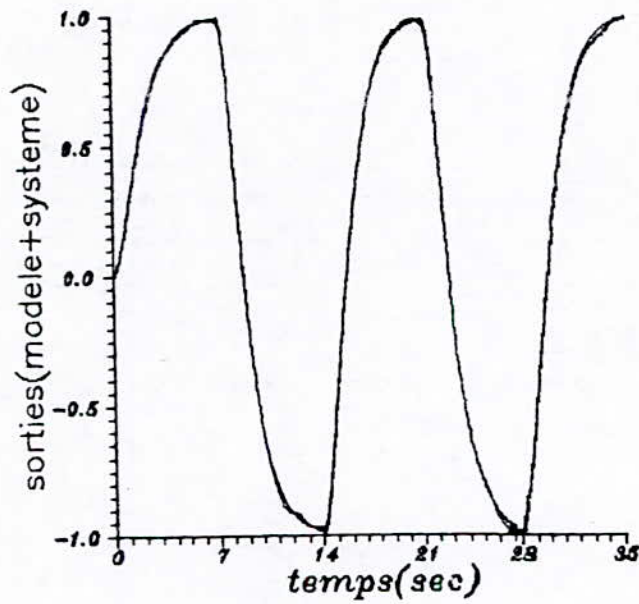


fig 4. 2.1(a) Reponse du systeme

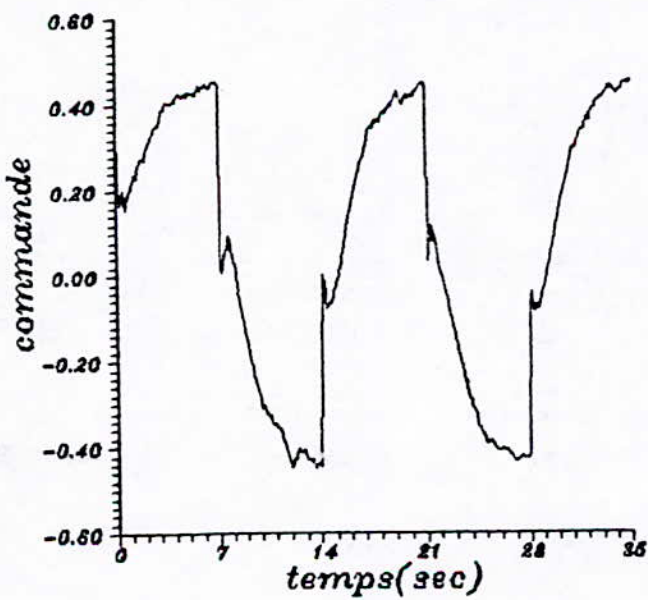


fig 4. 2.1(b) La commande

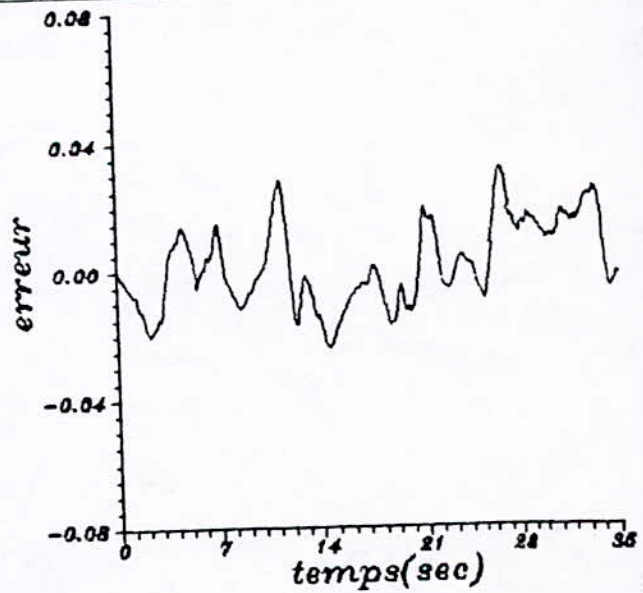


fig 4. 2.1(c) Evolution de l'erreur

variation aleatoire d'amplitude assez élevée des paramètres du procédé n'a pas pu influé sur la sortie du système, d'ou l'impossibilité de comparer entre les deux réponses. La comparaison peut se faire parcontre entre les courbes d'erreur représentées par fig(4-2-1c,4-2-2c), il ya une amelioration de l'erreur dans le cas du MRAC modifié. Les pics présents dans la commande du premier contrôleur fig( 4-2-1b ) n'apparaissent presque plus dans la commande du second fig(4-2-1b).

En changeant la nature de la variation des paramètres du système (variation sinusoidale rapide ou lente, d'amplitude faible et élevée, variation exponentielle, ect..) les résultats sont identiques aux précédents, on a toujours une petite amélioration de l'erreur, apportée par le contrôleur conçu pour les SPV. Mais contrairement à l'exemple 1, ces variations n'ont pas empêché le système sous MRAC de suivre la trajectoire du modèle (ceci est dû à la robustesse du MRAC, et l'insensibilité du système aux variations paramétriques).

DEUXIEME PARTIE :  
CHAPITRE 5



## 5) CONCLUSION

Le contrôleur MRAC modifié présenté précédemment a donné des résultats satisfaisant pour les SPV. Malgré la variation imposée aux paramètres du système ,la poursuite est toujours réalisée. Le comportement des deux autres contrôleurs (MRAC,MCS) face à la variation diffère d'un exemple à un autre. La poursuite était mauvaise dans l'exemple1, quand on a augmenté l'amplitude de la variation et sa période par rapport à la période d'échantonnage. Le m me test a été fait au système 2<sup>m</sup> ordre (exemple 2), ce dernier est resté insensible à la variation.

Ces résultats contradictoires ne nous permettent pas d'affirmer quand est ce notre contrôleur pourra t-il remplacer le MRAC et le MCS, c'est à dire pour quel type de variation sera t-il nécessaire ( variation rapide ou lente, amplitude faible ou élevée), pour le savoir il faudrait faire d'autres tests de robustesse et choisir d'autres types de système (exemples pratiques).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES .

La deuxième partie du travail a apporté une modification assez intéressante au niveau du contrôle par modèle de référence. Cette méthode basée sur une poursuite linéaire n'empêche pas d'envisager d'autres applications sur une classe de systèmes tels que:

- systèmes multivariables non linéaires,
- systèmes à structure fortement variable (présentant par exemple une région d'instabilité),
- ou -des systèmes pour lesquels le MRAC simple, respectivement le MCS ne donnent pas des résultats acceptables.

Des tests sur la nature de la commande générée, sur les limites de l'identification et de l'échantillonnage devront se faire.

# ANNEXE A

## Stabilité au sens de Lyapounov

### A1 Interpretation intuitive

La stabilité au sens de Lyapounov (2<sup>ème</sup> méthode) consiste à choisir une fonction de Lyapounov qui représente en quelque sorte l'énergie du système. Si la dérivée de  $V$  décroît avec le temps, l'énergie du système diminue et de ce fait, on dira que le système tend vers sa stabilité.

### A.2 définitions

- Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  les variables d'état du système étudié.
- Soit  $V(x_1, \dots, x_n)$  une fonction définie en chaque point de l'espace d'état et continue au voisinage de ce point.

#### Définition A.2.1

La fonction  $V(x_1, \dots, x_n)$  définie dans le domaine  $G(x_1, \dots, x_n)$  sera:

- a- définie positive si elle reste positive sur tout le domaine et ne s'annule qu'à l'origine des coordonnées,
- b- définie négative si elle conserve le signe(-) sur tout le domaine et ne s'annule qu'à l'origine,
- c- semi-définie: si elle s'annule en un nombre distinct de points du domaine,
- d- indéfinie si elle prend des signes opposés sur le domaine.

### A.3 Théorèmes

#### Théorème A.3.1

Dans un domaine  $G$  la position d'équilibre sera stable, s'il est possible de trouver dans ce domaine une fonction  $V(x_1, \dots, x_n)$  définie, avec une dérivée totale par rapport au temps  $dV/dt$  définie et de signe opposé.

#### Théorème A.3.2

S'il est possible de trouver dans un domaine  $G$  comprenant la position d'équilibre une fonction  $V$  de signe défini, dont la dérivée  $dV/dt$  est semi-définie et de signe opposé (dans le même domaine), l'équilibre est alors stable dans ce domaine.

Théorème A.3.3

S'il est possible de trouver dans un domaine  $G$ , une fonction  $V$  définie dont la dérivée est définie de même signe que  $V$  alors l'équilibre est instable.

# ANNEXE B

## Positivité et hyperstabilité

### B.1 Positivité

#### B.1.1 Matrices réelles positives

##### Définition B.1.1.1:

Une matrice  $H(s)$  d'une variable complexe  $s = \sigma + j\omega$  est une matrice hermitienne si:  $H^T(s^*) = H(s)$  ( $s^*$  conjuguée de  $s$ )

- Propriétés d'une matrice hermitienne:

a- c'est une matrice carrée, les termes de sa diagonale sont réels,

b- les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont toujours réelles,

c- si  $H(s)$  est une matrice hermitienne et  $x$ , un vecteur de composants complexes, la forme quadratique  $x^T H x^*$  est toujours réelle.

##### Définition B.1.1.2:

Une matrice  $H(s)$  de dimension  $(n \times n)$  est réelle positive si:

a- La partie réelle des pôles des éléments de  $H(s)$  est négative ou nulle

b- la matrice  $H(s) + H^T(s^*)$  est hermitienne, semi-définie positive pour tout  $s$  tel que  $\text{Re}[s] \geq 0$

##### Définition B.1.1.3

Une matrice  $H(s)$  de dimension  $(n \times n)$  est strictement réelle positive si:

a- La partie réelle des pôles des éléments de  $H(s)$  est strictement négative.

b- La matrice  $H(j\omega) + H^T(-j\omega)$  est hermitienne, semi-définie positive pour tout  $\omega$  réel.

### B.1.2 Systèmes positifs, continus, linéaires et invariants dans le temps

Considérons le système multivariable linéaire invariant dans le temps suivant:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (B.1.1)$$

$$v = Cx + Ju \quad (B.1.2)$$

$x$ : vecteur d'état de dimension  $n$

$u$  et  $v$ : vecteurs d'entrée et de sortie respectifs de dimension  $m$

$(A, B)$ : matrices contrôlables

$(C, A)$ : matrices observables

Le système d'équations {(B.1.1) et (B.1.2)} peut être caractérisé par sa matrice de transfert carrée  $H(s)$ .

#### Lemme B.1.2.1

Le système linéaire invariant dans le temps suivant:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (B.1.3)$$

$$v = Cx \quad (B.1.4)$$

est positif, et la matrice de transfert:

$$H(s) = C^T (sI - A)^{-1} B \quad (B.1.5)$$

est positive si et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive  $P$  et une matrice symétrique semi-définie positive  $Q$  tel que:

$$PA + A^T P = -Q \quad (B.1.6)$$

$$B^T P = C \quad (B.1.7)$$

#### Lemme B.1.2.2

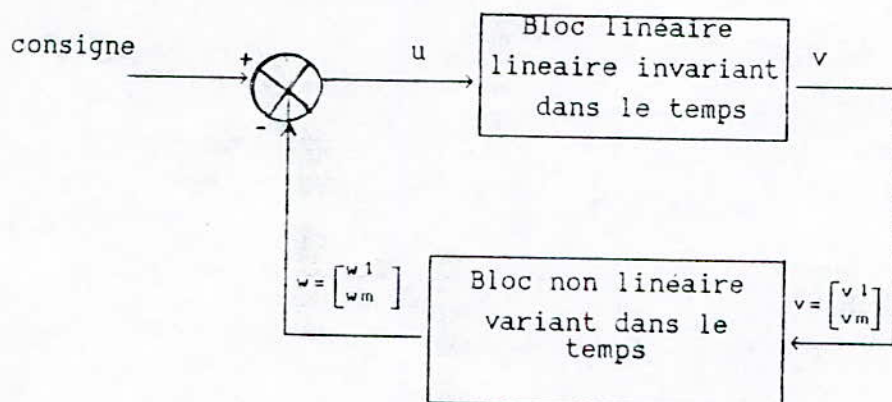
La matrice de transfert  $H(s)$  donnée par l'équation (B.1.5) est strictement réelle positive, s'il existe une matrice  $P$  symétrique, définie positive et une matrice symétrique définie positive  $Q$  ( $Q$  non singulière) telle que (B.1.6) et (B.1.7) soient vérifiées.

## B.2) Hyperstabilité

### B.2.1 Problème d'hyperstabilité

Le problème d'hyperstabilité a été introduit par Popov comme une généralisation du problème de la stabilité absolue [16].

Considérons la figure ( B.2.1 )



(fig.B.2.1): Système standard multivariable non linéaire à contre réaction variant dans le temps

dans la stabilité absolue, on s'intéresse à trouver les conditions que doit satisfaire le bloc direct de sorte que le système à contre réaction (B.2.1) soit globalement asymptotiquement stable pour tout bloc de réaction appartenant à une classe vérifiant une inégalité de la forme:

$$v_i w_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.2.1})$$

Popov considère la stabilité asymptotique globale du système décrit par l'équation (B.2.1), mais pour une classe de blocs de réaction vérifiant l'inégalité suivante:

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} w^T v dt \geq -\gamma_0^2 \quad t_1 > t_0 \quad (\text{B.2.2})$$

Cette inégalité est appelée "Inégalité de Popov".

Cette classe contient la sous classe des blocs de réaction considérés dans le problème de la stabilité absolue.

L'inégalité (B.2.2) est une généralisation de (B.2.1) dans le sens où au lieu d'avoir une inégalité vérifiée pour tout  $t > 0$ , elle sera vérifiée en moyenne.



Quand le système donné par la figure (B.2.1) est globalement asymptotiquement stable pour tout bloc de réaction satisfaisant l'inégalité (B.2.2), il sera appelé: système asymptotiquement hyperstable et le bloc direct: bloc hyperstable.

### B.2.2 Définitions

Considérons un système boucle fermé.

Le bloc direct est décrit par:

$$\dot{x} = A x + B u = A x - B w \quad (B.2.3)$$

$$v = C x + J u = C x - J w \quad (B.2.4)$$

et le bloc de réaction par:

$$w = f(v, t, \tau) \quad (B.2.5)$$

#### Définition B.2.2.1

Le système boucle fermée (B.2.3), (B.2.4) et (B.2.5) est hyperstable s'il existe des constantes positives  $\delta$  et  $\gamma_0$ , de sorte que toutes les solutions  $x [x(0), t]$  de (B.2.3) et (B.2.4) vérifient l'inégalité suivante:

$$\|x(t)\| < \delta [ \|x(0)\| + \gamma_0 ] \quad \forall t > 0 \quad (B.2.6)$$

Pour des blocs de réaction définis par l'équation (B.2.5) et vérifiant l'équation (B.2.2).

#### Définition B.2.2.2

Le système boucle fermé donné par les équations (B.2.3), (B.2.4) et (B.2.5) est asymptotiquement hyperstable si:

a- il est hyperstable

b-  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  pour tout bloc de réaction vérifiant l'inégalité de

Popov.

### B.2.3 Principaux résultats

#### Théorème B.2.3.1

La condition nécessaire et suffisante pour que le système à contre réaction décrit par les équations (B.2.3), (B.2.4), (B.2.5) et (B.2.2)

soit hyperstable est la matrice de transfert  $H(S)=J+C(sI-A)^{-1}$  doit être une matrice réelle positive.

Théorème B.2.3.2

La condition nécessaire et suffisante pour que le système décrit par (B.2.2), (B.2.3), (B.2.4) et (B.2.5) soit asymptotiquement hyperstable est la matrice de transfert  $H(s)$  doit être strictement réelle positive.

Théorème fondamentale d'hyperstabilité :(autre formulation)

Pour que le système définis par la figure (B.2.1) soit Hyperstable , il faut que :

- 1 - le bloc directe soit positif
- 2 - le bloc non linéaire de reaction satisfasse l'inégalité de Popov.

## ANNEXE C

### Résolution de l'inégalité de Popov

La résolution de l'inégalité de Popov est traitée en détail dans [12] et cette annexe reproduira quelques lemmes utilisés.

L'inégalité de Popov est donnée par l'équation (C.1)

$$\int_{t_0}^{t_1} v^T w \, d\tau > -\gamma_0^2 \quad \gamma_0 \text{ constante positive} \quad (C.1)$$

avec

$$w = \left[ \int_0^t \phi_1(v, t, \tau) + \phi_2(v, t) + A_0 \right] Y + \left[ \int_0^t \psi_1(v, t, \tau) + \psi_2(v, t) + B_0 \right] u \quad (C.2)$$

La résolution de l'équation (C.2) consiste à trouver des solutions  $\phi_1, \phi_2, \psi_1$  et  $\psi_2$  étant de même nature.

#### Lemme C.1:

L'inégalité de l'équation (C.1) est satisfaite par:

$$\phi_1^j(v, t, \tau) = F^j(t-\tau) v_j(\tau) \gamma_j(\tau) \quad j=1, \dots, n$$

Où les  $\phi_1^j$  sont les vecteurs colonne de  $\phi_1(v, t, \tau)$  et  $F^j(t-\tau)$  est matrice noyau carrée définie positive dont la transformée de Laplace est réelle positive avec des pôles  $S = 0$  (voir def C.1)

#### Definition C.1

Une matrice  $K(t, \tau)$  est dite positive définie si pour chaque intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  et tout vecteur fonction  $f(t)$  continu par morceaux dans  $[t_0, t_1]$  l'inégalité suivante a lieu:

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f^T(t) \left\| \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau) B(\tau) \, d\tau \right\| dt > 0 \quad (C.4)$$

#### Lemme C.2

L'inégalité de l'équation (C.1) est satisfaite par:

$$\phi_1(v, t, \tau) = F(t-\tau) V(\tau) [G\gamma(\tau)]^T \quad (C.5)$$

Où  $F(t-\tau)$  a les mêmes propriétés que  $F^j(t-\tau)$  au lemme (C.1)

Lemme C.3:

L'inégalité de l'équation (C.1) est satisfaite par:

$$\phi_1^{iT}(v, t, \tau) = G^i(t-\tau) \gamma(\tau) v_i(\tau), \quad i=1, \dots, q \quad (C.6)$$

Où les  $\phi_1^{iT}$  sont les vecteurs lignes et  $\phi_1(v, t, \tau)$  et  $G^i(t-\tau)$  est une matrice de même propriétés que  $F^i(t-\tau)$  dans le lemme (C.1).

Lemme C.4:

L'inégalité de l'équation (C.2) est satisfaite par:

$$\phi_1^{ij}(v, t, \tau) = K^{ij}(t-\tau) v_i(\tau) \gamma_j(\tau), \quad i=1, \dots, q \text{ et } j=1, \dots, n \quad (C.7)$$

où  $\phi_1^{ij}(v, t, \tau)$  sont les éléments de  $\phi_1(v, t, \tau)$  et les  $K^{ij}$  sont des scalaires noyaux définis positifs dont la transformée de Laplace est réelle positive avec un pôle en  $s = 0$ .

Remarque: un cas particulier vérifie (C.1) lorsque au moins un des  $K^{ij}(t-\tau)$  est non nul vérifiant les propriétés énoncées au lemme précédent.

Lemme C.5:

L'inégalité de l'équation (C.1) est satisfaite par:

$$\phi_2(v, t) = F'(t) [G'(\cdot) \gamma(\cdot)]^T \quad (C.8)$$

Où  $F'(t)$  et  $G'(t)$  sont des matrices carrées variants dans le temps semi-définies positives.

A N N E X E        D :

PROCEDURE ' EVOLUTION DU BRAS MANIPULATEUR '

```
procedure evolution_Bras (tn:integer;dte:real;uc:vect;var x:vect);
const
```

```
c1=75;c2=10;c3=1;k1=40;k2=20;k3=40;
j=9.81;jx1=3;j1p=0.01;jx2=3;j2p=0.01;
l1=1;l2=1;p11=0.5;p12=0.5;
m1=10;m2=10; me=5;
jt1=jx1+m2*l1*l1;j3=1;
g=9.81;
```

```
{-----}
```

```
{ x[i] sont les composantes du vecteur d'etat }
{ fonction ( of j) sont les derivées de x }
{-----}
```

```
var t,dti : real ;
i : integer ;
{=====}
{----- system equation definition -----}
```

```
function fonction(j:integer;t:real; x:vect):real;
```

```
var
sx1,sx3,cx1,cx3,sx13,cx13,m11,m12,m21,m22,m33,d12,d13,d21,d23,
e11,e32,e33,f1,f2,det,sig1,sig2,sig3,NL2,NL4,NL6 : REAL;
```

```
BEGIN
```

```
{ sauvegarde des calculs repetitifs }
```

```
      sx1:=sin(x[1]);
      cx1:=cos(x[1]);
      sx3:=sin(x[3]);
      cx3:=cos(x[3]);
      sx13:=sin(x[1]+x[3]);
      cx13:=cos(x[1]+x[3]);
```

```
-----}
m11:=(jx1+(m2+me)*sqr(l1))+(jx2+me*sqr(l2))+2*(m2*p12+me*l2)*l1*cx3;
m12:=(jx2+me*sqr(l2))+2*(m2*p12+me*l2)*l1*cx3;
m21:=m21;
m22:=jx2+me*sqr(l2);
m33:=(jx1+(m2+me)*sqr(l1))*sqr(sx1)+j1p*sqr(cx1)+(me*sqr(l2)+jx2)*sqr(sx13)
      j2p*sqr(cx13)+j3+2*(m2*p12+me*l2)*l1*sx1*sx13;
-----}
```

```

-----}
d12:=- (m2*p12+me*12)*11*sx3;
d13:=- (jx1+(m2+me)*sqr(11)-j1p)*sx1*cx1-((jx2+me*sqr(12))-j2p)*sx13*cx13-(m
12+me*12)*11*sin(2*x[1]+x[3]);
d21:=(m2*p12+me*12)*11*sx3;
d23:=-((jx2+me*sqr(12))-j2p)*sx13*cx13-(m2*p12+me*12)*11*sx1*cx13;
-----}
e11:=-2*(m2*p12+me*12)*11*sx3;
e32:=2*(jx1+(me+m2)*sqr(11)-j1p)*sx1*cx1+2*((jx2+me*sqr(12))-j2p)*sx13*cx13
(m2*p12+me*12)*11*sin(2*x[1]+x[3]);
e33:=2*((jx2+me*sqr(12))-j2p)*sx13*cx13+2*(m2*p12+me*12)*11*cx13*sx1;
-----}
f1:=- (m1*p11+(m2+me)*11)*sx1-(m2*p12+me*12)*sx13;
f2:=- (m2*p12+me*12)*sx13;

-----}
det:=m22*m11-sqr(m21);

NL2:=-d12*sqr(x[4])-d13*sqr(x[6])-f1*g-e11*x[2]*x[4];
sig1:=-c1*x[2]+k1*u[1]+NL2;

NL4 :=-d21*sqr(x[2])-d23*sqr(x[6])-f2*g;
sig2:=-c2*x[4]+k2*u[2]+NL4;

NL6:=-e32*x[2]*x[6]-e33*x[4]*x[6];
sig3:=-c3*x[6]+k3*u[3]+NL6;

case j of
1: fonction:=x[2];
3: fonction:=x[4];
5: fonction:=x[6];
2: fonction:=(sig1*m22-sig2*m12)/det;
4: fonction:=(sig2*m11-sig1*m21)/det;
6: fonction:=(sig3/m33);
end;

END;

```

## BIBLIOGRAPHIE :

- [1] G.AMBROSINO, G.CELENANO et F.GAROFALO (1984). Variable structure model reference adaptive control systems. INT.J. Control, vol 39, N°6.
- [2] K.J ASTROM et B.WITTENMARK (1989). Adaptive control. Addison-Wesley Publishing Company.
- [3] A.BALESTRINO, G.DE MARIA et A.S.I.ZINBER (1984). Non linear adaptive model-following control. Automatica.
- [4] H.BENCHOUBEN et D.P.STOTEN (1990). Empirical studies of an algorithm with minimal controller synthesis. INT.J.Control, vol 51, N°4.
- [5] H.BENCHOUBEN et D.P.STOTEN (1990). Robustness of Minimal Controller Synthesis, INT.J.Control, Vol 51, N° 4.
- [6] H.BENCHOUBEN et D.P STOTEN (1990). Convergence rates of an adaptive algorithm with application to the speed control of a DC machine. IEEE.
- [7] J.J.D'AZZO (1984). Linear control system :Analysis and design. Ed.Mc Graw-Hill.
- [8] C.FARGEON (1986). Commande numerique des systemes. Ed.Masson.
- [9] FOULARD (1979). Commande et regulation par ordinateur de la theorie aux applications.

- [10] J.C;GILLE (1988). Systemes asservis non lineaires.Ed. Dunod.
- [11] I.D.LANDAU : ARTICE 1971 REVUE DE PRESSE AUTOMATICA
- [12] I.D.LANDAU (1979). Adaptive control (The model reference approach). A Series Of Monographs and text books.
- [13] I.D.LANDAU et L.DUGARD (1986). Commande adaptative. Aspects pratiques et theoriques. Ed.Masson.
- [14] I.D.LANDAU (1988). Identification et commande des systemes. Traité des nouvelles technologies. Serie Automatique.
- [15] NAJIM (1982). Commande adaptative des processus industriels. Ed. Masson.
- [16] V.M.POPOV (1973). L'hyperstabilité des systemes automatiques. Ed. Dunod.
- [17] D.P.STOTEN(1990). Model reference adaptive control of manipulators. Research studies press Ltd. Taunton, UK.
- [18] K.TSAKALIS et P.IOANNOU (1987). Adaptive control of linear time-varying plants.
- [19] K.TSAKALIS et P.IOANNOU (1987). Adaptive control of linear time-varying plants a new controller structure.



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

والصلاة والسلام على أشرف المرسلين محمد نبي الله  
عليه أركان الشريعة والسلام على آله وصحبه أجمعين  
الحمد لله الذي أنعم علينا، الحمد لله عدد كلماته، الحمد لله الذي  
بفضله أتممنا هذا العمل المتواضع، فإن أجزأنا فمن  
أنفسنا وإن أهبنا فبفضله، علا وجل جلاله.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

آية « وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ »

آية « وَالَّذِينَ جَاهَدُوا فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَا وَإِنَّ اللَّهَ لَعَ  
الْمُحْسِنِينَ »

هدى الله العالَمين

والسلام عليكم سالماً مباركاً.

س