

005/85

# THÈSE

Présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Pour obtenir le titre de

## MAGISTER

Par

**HECHICHE ALI**

# ETUDE D'UN FILTRE DERIVATEUR OPTIMAL

SOUTENUE LE 18 MAI 1985 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MONSIEUR : ADANE A.

PRÉSIDENT

J. F. CAVASSILAS

RAPPORTEUR

A. OUABDESSALEM

M. E. H. ZAIM

B. KACPRZYNSKY

EXAMINATEURS

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

إهداء:

إلى الشَّابِّ الطَّاهِرِ  
الذي كان يحمل هموم هذه الأمة  
منذ نعومة أظفاره...  
سيد أقرانه وحبُّ شقيقه  
عبد الحميد...  
أهدي هذه الرسالة

---

---

# REMERCEMENTS

---

---

JE TIENS A REMERCIER Mr CAVASSILAS J.F. QUI N'A  
MENAGE AUCUN EFFORT POUR METTRE A MA DISPOSITION, A  
L'UNIVERSITE DE TOULON, TOUT CE QUI M'A PERMIS DE  
MENER A BIEN CETTE ETUDE.

MES REMERCIMENTS S'ADRESSENT EGALEMENT A Mr  
ADANE A. POUR LES PRECIEUX CONSEILS ET SUGGESTIONS  
QUI ONT ETE D'UN APPORT APPRECIABLE POUR PRESENTER  
AUJOURD'HUI CE TRAVAIL.

JE SAISIS CETTE OCCASION POUR REMERCIER TOUS  
CEUX QUI ONT CONTRIBUE DE PRES OU DE LOIN A L'EEL-  
BORATION DE CE PROJET, NOTAMMENT Mr BENTAYEB M.

QU'IL ME SOIT PERMIS EGALEMENT DE REMERCIER  
LES MEMBRES DU JURY QUI ONT BIEN VOULU HONNORER  
DE LEUR PRESENCE CETTE SOUTENANCE.

---

---

# TABLE DE MATIERES

---

---

INTRODUCTION	1
<b>1</b> PREDICTION ET FILTRAGE OPTIMAL DANS LES SYSTEMES LINEAIRES DISCRETS	4
1.1 Présentation du problème	4
1.2 Recherche de critères d'estimation	7
1.3 Modèle de Gauss-Markov à temps discret	14
1.4 Filtrage optimal dans les systèmes linéaires discrets	17
1.5 Prédiction optimale dans les systèmes linéaires discrets	21
1.6 Organigramme du filtre de KALMAN	22
<b>2</b> CONCEPTION D'UN FILTRE DERIVATEUR	27
2.1 Introduction	27
2.2 Calcul de la matrice de transition d'état	30
2.3 Calcul de la matrice de covariance de perturbation	32
2.4 Mise en équation du filtre dérivateur	41
2.5 Initialisation de l'algorithme de KALMAN	45
<b>3</b> REALISATION DU FILTRE DERIVATEUR	60
3.1 Description sommaire des manipulations sur ordinateur	60
3.2 Calcul de l'algorithme de gain	61
3.3 Génération d'un bruit gaussien de second ordre	63
3.4 Calcul de la meilleure estimation d'un signal perturbé par un bruit gaussien de second ordre	74
3.5 Discussion des résultats obtenus	80

4	A P P L I C A T I O N   A U   F I L T R E	
	D E   B U T T E R W O T H	89
4.1	Généralités	89
4.2	Propriétés du filtre de BUTTERWORTH	91
4.3	Réalisation d'un filtre dérivateur de BUTTERWORTH	98
	C O N C L U S I O N	115
	A N N E X E 1	117
	Théorèmes fondamentaux de l'estimation dans les systèmes discrets	
	A N N E X E 2	123
	Rappel des propriétés de la fonction de DIRAC	
	A N N E X E 3	133
	Listing du programme du filtre dérivateur	
	A N N E X E 4	140
	Théorème de l'observateur optimal	
	B I B L I O G R A P H I E   E T   R E F E R E N C E S	144

---

---

# INTRODUCTION

---

---

Ce travail est consacré à l'étude du filtrage d'un signal de télécommunications perturbé par un bruit.

Au cours de ces dernières années, les méthodes de traitement du signal se sont considérablement développées à la suite de l'apparition sur le marché de microordinateurs à la fois très performants et peu coûteux.

De façon générale, ces méthodes résultent de l'application de la théorie de l'information au problème de l'estimation du message utile que contient un signal altéré par un bruit.

Les premiers travaux sur l'analyse et la synthèse des systèmes de communication sont dus à H. NYQUIST [1,2] et R.V.L. HARTLEY [3]. Mais, on peut dire que les fondements de la théorie de l'information ont été établis par C.E. SHANNON [4,5]. D'autres études sont venues enrichir cette discipline. Citons, en particulier, celle de A. BLANC-LAPIERRE et B. PICINBONO sur les propriétés statistiques du bruit de fond [6] ou celle de N. WIENER et KOLMOGOROV sur la commande optimale [7].

La théorie de l'information, dans une conception plus large, conduit à une théorie du signal où des sujets plus généraux sont abordés: le filtrage des signaux, les propriétés du bruit, la modulation et les différentes opérations de traitement du signal. De nouvelles notions telles que par exemple, le filtrage adapté, la commande optimale, le filtrage numérique ou la reconnaissance des formes ont vu le jour et sont maintenant couramment utilisées dans divers domaines de pointe (télédétection, traitement de l'image, robotique, transmission par satellites, ...).

Cependant, le problème de la détection d'un signal noyé dans le bruit

demeure mal résolu dans de nombreux cas de nos jours dans la mesure où on continue à exiger des systèmes de communication un rapport signal sur bruit aussi élevé que possible.

En effet , malgré que le signal soit bien défini à l'émission , ses grandeurs caractéristiques peuvent être notablement altérées à la réception par la présence d'un bruit et devenir inobservables.

En télécommunications , la plupart des bruits sont assimilables à des perturbations gaussiennes du second ordre. Et, il peut être intéressant d'employer des techniques de filtrage par dérivation pour extraire du signal brouillé, le message utile.

Parmi les différents procédés de filtrage , ce sont les méthodes numériques qui semblent être les plus efficaces , du fait que le traitement du signal peut se faire par ordinateur.

Notre travail a porté sur la mise au point d'une méthode de dérivation numérique par filtrage de KALMAN.

Nous avons choisi la méthode de KALMAN car elle conduit à un algorithme qui est un estimateur capable de donner une erreur quadratique minimale [ 8 ] . Pour cela , on utilise un ensemble de relations de récurrence - formant le filtre de KALMAN [ 9 ] - qui font appel à la notion de variables d'état . ces relations sont des équations aux accroissements finis où les grandeurs varient pas à pas. Elles vont donc faire intervenir les dérivées du signal et du bruit dans les composantes de variables d'état.

Afin de concevoir notre dérivateur numérique , nous avons été amené au préalable à développer dans le chapitre 1, des notions sur la prédiction et le filtrage optimal dans les systèmes linéaires discrets. Ensuite, nous avons présenté une étude générale du filtrage de KALMAN.

Au chapitre 2, nous avons procédé au calcul du filtre dérivateur dans le

cas d'un bruit gaussien. Ce calcul a abouti à l'élaboration d'un algorithme représentant le filtre de KALMAN que nous avons utilisé.

Par un choix judicieux des conditions initiales, nous avons pu simplifier notablement l'écriture de l'algorithme de KALMAN. Ce qui nous a permis de travailler sur ordinateur de capacité mémoire réduite; l'appareil utilisé étant un microcalculateur HP 9826.

Le chapitre 3 a été consacré à l'exploitation de cet algorithme pour en déduire le gain de notre dérivateur numérique. Nous expliquons également dans ce chapitre comment simuler sur ordinateur le bruit de second ordre afin d'étudier la perturbation qu'il entraîne sur le signal. Puis, nous avons procédé au calcul de la meilleure estimation du signal transmis.

Le chapitre 4 est une application de notre dérivateur numérique au filtre de BUTTERWORTH.

Enfin, nous terminons par une conclusion sur les résultats obtenus. En particulier, on trouve que la méthode est bien adaptée à la conception de systèmes de filtrage par filtre de BUTTERWORTH et peut conduire à des applications intéressantes en télécommunications.

---



---

# PREDICTION ET FILTRAGE OPTIMAL DANS LES SYSTEMES LINEAIRES DISCRETS

---



---

## 1.1. Présentation du problème

Une question importante qui se présente souvent en télécommunications est celle de l'extraction du message contenu dans un signal transmis ou reçu.

En effet, considérons la chaîne de transmission de la figure 1.

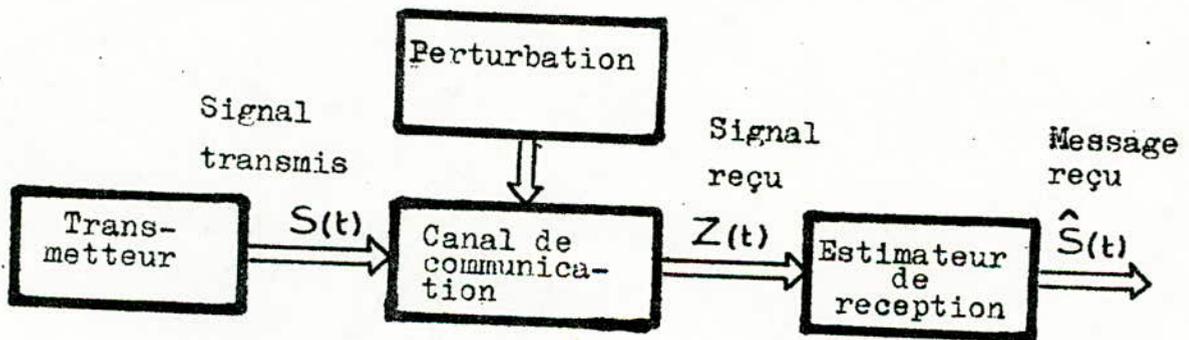


Figure 1 - Schéma synoptique de la chaîne de transmission.

Le signal transmis ne comporte pas uniquement le message  $S(t)$ , car ce dernier est parfois accompagné d'erreur de codage et de transmission. D'autre part, lors de son passage dans le canal de communication, le signal peut-être altéré par la présence de perturbations  $B(t)$  (comme, par exemple, le bruit atmosphérique ou les parasites). En fin de réception, le problème est alors de traiter le signal reçu  $Z(t)$  afin d'obtenir la meilleure estimation

possible  $\hat{S}(t)$  du message transmis .

De façon générale , deux sortes de solutions peuvent être envisagées . L'une fait appel à l'analyse spectrale des signaux[ ]

. L'autre est basée sur l'étude des propriétés des signaux en fonction du temps[ ] et en particulier fait intervenir les fonctions d'autocorrélation

Dans notre cas , nous sommes intéressés au comportement dans le temps de  $S(t)$  et  $B(t)$ .

Pour cela , supposons que le signal  $S(t)$  soit bien défini à l'émission et que ses caractéristiques soient perturbées par un bruit  $B(t)$  dans le canal de communication , le signal de réception  $Z(t)$  s'écrira :

$$Z(t) = S(t) + B(t) \quad (1-1)$$

Si  $S(t)$  avait un comportement linéaire , il aurait été possible de concevoir une méthode permettant d'éliminer le bruit par dérivation du signal  $Z(t)$  et l'estimation  $\hat{S}(t)$  qui en résulterait, serait pratiquement une reproduction fidèle du message  $S(t)$ .

Dans le cas général ,  $S(t)$  n'est pas une fonction linéaire du temps. Néanmoins , nous pouvons décomposer celui-ci en une série de segments élémentaires d'équation :

$$S_n(t) = A_{1n} \cdot t + A_{2n} \quad (1-2)$$

avec  $(n-1)T \leq t \leq nT$  .

L'intervalle de temps  $T$  a été choisi suffisamment petit pour rendre linéaire la portion de signal qui est comprise dans ce laps de temps ( figure 2).

Le signal émis s'écrit dans ce cas :

$$S(t) = \sum_n S_n(t) \quad (1-3)$$

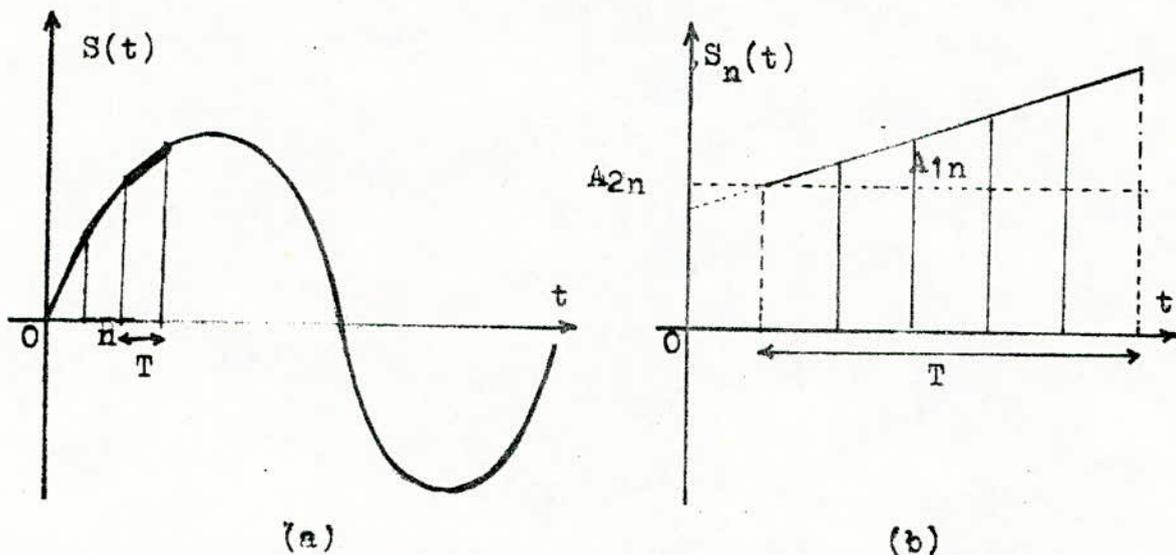


Figure 2 - Décomposition d'un signal  $S(t)$  en une série de segments de droite

L'estimation du message contenu dans le signal  $Z(t)$  est un problème de prédiction, au sens large du terme.

Ainsi, nous nous sommes orientés vers la recherche d'une méthode de dérivation faisant intervenir les variables d'état.

La notion de variables d'état a été largement développée en théorie des systèmes [10], [11], [12]. L'état d'un système à l'instant  $t_0$  peut-être défini comme la somme minimale d'information sur le passé ( $t \leq t_0$ ) nécessaire pour prédire l'avenir lorsque l'on connaît les entrées pour  $t > t_0$ . Cette information est contenue dans un certain nombre de variables  $X_i$  appelées

variables d'état. Celles-ci forment, par définition, les composantes d'un vecteur  $X$  appelé vecteur d'état.

L'intérêt de travailler dans l'espace d'état réside dans le fait qu'il est relativement facile de résoudre par programmation les problèmes faisant intervenir des processus aléatoires.

Le comportement linéaire des expressions ( 1 - 1 ) et ( 1 - 2 ), ainsi que celui de leur dérivées, nous suggère d'étudier un système dont le schéma synoptique se présente sous la forme d'une structure canonique de KALMAN. De façon générale, cette dernière se traduit par un système de relations de récurrence, appelé filtre de KALMAN [10].

Notre intérêt pour le filtre de KALMAN peut se justifier par le fait que, d'après la littérature, ce système d'équations permet d'évaluer un phénomène avec le minimum d'erreur [ 9 ]. En outre, pour estimer par ce moyen une grandeur physique à un instant donné, il suffit de connaître l'estimation précédente et la mesure effectuée à l'instant  $t_0$ .

Aussi, nous allons aborder maintenant l'étude générale de la prédiction et du filtrage optimal dans les systèmes linéaires.

Notons que le traitement du signal sur ordinateur suppose un échantillonnage de  $Z(t)$  dans l'intervalle  $T$ . Par conséquent, cette étude sera limitée à celle des systèmes linéaires discrets.

## 1.2. Recherche de critères d'estimation

Considérons à l'émission un signal déterministe ayant la même allure que celui de la figure 2 b. Son équation est de la forme:

$$S(t) = A_1 \cdot t + A_2 \quad (1-4)$$

avec  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  (où  $t_0$  est l'instant initial de l'élément linéaire considéré ).

En présence d'un bruit  $B(t)$ , les paramètres  $A_1$  et  $A_2$  ne sont pas directement accessibles à la mesure. De ce fait, ce seront des valeurs arbitraires à la réception.

La reconstitution du signal revient à évaluer les paramètres  $A_1$  et  $A_2$ . Ceci peut se faire avec le minimum d'erreurs, si on suit la procédure décrite au paragraphe précédent. Comme cette dernière nécessite l'emploi d'un calculateur numérique, il faut discrétiser le temps de manière à avoir des échantillons périodiques, de période  $\zeta$ , convenablement choisie sur l'intervalle  $T$  (avec  $\zeta \ll T$ ). Par suite, on aura affaire à un système dynamique dont le vecteur d'état  $X(k)$  est un processus stochastique de dimension  $n$  à temps discret ( où  $k = 1, 2, \dots, N$ , et  $N =$  nombre d'échantillons dans l'intervalle  $T$  ).

L'état  $X(k)$  n'étant pas directement observable, on peut cependant le déduire d'une série de mesures  $Z(1), Z(2), \dots, Z(j)$ , liées causalement à cet état au moyen d'un appareil de mesure  $M$  ( figure 3 ).

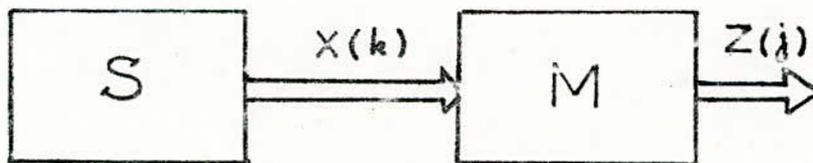


Figure 3 - définition de l'état à partir d'un système de mesure .

L'estimation de l'état  $X(k)$  du système ( pour un indice donné) fait intervenir les probabilités d'obtenir cet état lorsque les  $j$  mesures sont connues. Afin de tenir compte des probabilités à priori, l'estimation de cet état est alors notée  $\hat{X}(k|j)$ . Elle a pour expression générale:

$$\hat{X}(k|j) = \phi_k [Z(1), Z(2), \dots, Z(j)] \quad (1-5)$$

Trois cas importants peuvent être distingués:

- 1)  $k > j$ : On se trouve face à un problème de prédiction au sens strict du terme, car il reste  $(k - j)$  mesures à faire pour caractériser entièrement l'état  $X(k)$ .
- 2)  $k = j$ : On dit alors que  $\hat{X}(k|j)$  est le filtre de  $X(k)$ .
- 3)  $k < j$ : Cette situation correspond aux opérations de lissage ou d'interpolation, car les mesures effectuées sont plus nombreuses que les échantillons disponibles.

Pour optimiser l'estimation  $\hat{X}(k|j)$ , on doit minimiser l'erreur d'estimation qui est par définition:

$$\tilde{X}(k|j) = X(k) - \hat{X}(k|j) \quad (1-6)$$

Notons en particulier que pour  $\tilde{X}(k|j) = 0$ , on a  $\hat{X}(k|j) = X(k)$ . C'est à dire que nous sommes dans un cas idéal où l'estimation donne la valeur exacte de l'état du système.

Lorsque  $\tilde{X}(k|j) \neq 0$ , l'estimation devient incorrecte et on a une perte d'informations sur l'état  $X(k)$ . Pour mesurer celle-ci, il est commode d'introduire une fonction de pertes admissibles

$$L[\tilde{X}(k|j)] \quad [13].$$

C'est une fonction scalaire à  $n$  variables aléatoires. Ses principales propriétés sont d'être convexe et symétrique par rapport à l'origine [10]. En outre, elle est nulle pour un vecteur erreur nul.

Sa valeur moyenne  $J$ , appelée mesure de performances, est également une fonction de pertes non décroissante. Elle s'écrit:

$$J[\tilde{X}(k|j)] = E\{L[\tilde{X}(k|j)]\} \quad (1-7)$$

Dans la littérature, on démontre que la meilleure estimation  $\hat{X}(k|j)$  est celle qui minimise la fonction  $J[\tilde{X}(k|j)]$ . Pour cela, il faut tenir compte du fait que la détermination de l'état est conditionnelle aux mesures  $Z(1), Z(2), \dots, Z(j)$ . Les propriétés de l'espérance conditionnelle entraînent que [14]:

$$E_{\tilde{X}}\{L[\tilde{X}(k|j)]\} = E_{Z^T} \left[ E_{\tilde{X}}\{L[\tilde{X}(k|j)] \mid Z(1), Z(2), \dots, Z(j)\} \right] \quad (4-8)$$

où  $Z^T$  est la transposée du vecteur de mesure  $Z$ . (Notons qu'en représentation matricielle, le vecteur  $Z$  est une matrice à  $j \times m$  éléments et que le vecteur transposé  $Z^T$  est une matrice rectangulaire  $m \times j$ ).

Le second membre de l'équation (4-8) ne dépend pas du choix de  $\hat{X}(k|j)$ . Il s'ensuit que la minimisation de  $J$  est équivalente à celle de  $E\{L[\tilde{X}(k|j) \mid Z(1), Z(2), \dots, Z(j)]\}$ .

Par suite, l'expression (4-8) se simplifie et on peut écrire que:

$$J[\tilde{X}(k|j)] = E_{\tilde{X}} \left\{ L[\tilde{X}(k|j)] \mid Z(1), Z(2), \dots, Z(j) \right\} \quad (1-9)$$

Afin d'expliciter l'expression ( 1-9 ), nous faisons l'hypothèse que le bruit  $B(t)$  est une perturbation de second ordre. Ce type de bruit est celui qu'on rencontre le plus fréquemment en télécommunication. C'est une fonction aléatoire de second ordre dont les principales propriétés sont [ ]:

1°)  $B(t)$  admet une moyenne indépendante du temps.

2°)  $E[B(t) \cdot B(t-\tau)] = C(\tau)$  = Fonction de corrélation.

3°)  $C(\tau)$  est continue à l'origine.

4°)  $C(\tau)$  donne le carré moyen pour  $\tau = 0$  C.a.d  $E[B(t)]^2 = C(0)$

5°)  $C(\tau) = C(-\tau)$ .

6°)  $|C(\tau)| < C(0)$

7°) converge en moyen quadratique

8°) Continuité et dérivabilité de  $B(t)$ :

pour que  $\frac{dB(t)}{dt} = \dot{B}(t)$  existe, il faut que

$\left(\frac{d^2C}{d\tau^2}\right)_{\tau=0}$  existe.

Au préalable, pour simplifier l'écriture, nous pouvons condenser la notation des éléments qui composent une séquence de mesure et représenter ainsi cette dernière par le symbole  $Z(i); i = 1, 2, \dots, j$ . C'est à dire:

$\{Z(i); i = 1, 2, \dots, j\} \equiv \{Z(1), Z(2), \dots, Z(j)\}$  (1-10)

De même, le positionnement de l'état  $X(k)$  dans la séquence des échantillons  $\{X(0), X(1), \dots, X(\quad), \dots, X(n)\}$  sera définie par le symbole  $\{X(k); k \in U\}$  où  $U = \{0, 1, \dots, n\}$ .

Cette écriture fait apparaître clairement que la séquence de mesure est une fonction de la variable aléatoire  $Z(i)$  et que la séquence d'état est une fonction de la variable discrète  $X(k)$ .

Les considérations précédentes et celles développées dans l'annexe 1 ( corollaire 1-1 du théorème N° 1 ) permettent de dire que si ces équations forment chacune une distribution gaussienne, l'estimation optimale sera :

$$\hat{X}(k|j) = E [X(k) | Z^T(j)] \quad (1-11)$$

La distribution gaussienne caractérise la plupart des phénomènes aléatoires que l'on rencontre dans la nature et elle peut servir à décrire avec une bonne approximation le comportement aléatoire de certains systèmes physiques.

D'autre part, l'analyse d'une telle distribution se fait en général aisément car elle est entièrement définie si on peut déterminer ses deux premiers moments ( c'est à dire, correspondant aux matrices donnant respectivement la moyenne et la covariance). D'où notre intérêt pour les bruits de 2<sup>nd</sup> ordre.

Une conséquence immédiate du théorème n° 1 (voir annexe 1 ) est que l'estimation optimale  $\hat{X}(k|j)$  vaudra  $\bar{X}(k)$  quels que soient  $k$  et  $j$ , si les processus stochastiques  $\{X(k); k \in U\}$  et  $\{Z(i); i = 1, 2, \dots, j\}$  sont indépendants.

Prenons le cas simple où ces processus ont chacun une moyenne nulle.

Quand on introduit les matrices de covariance  $P_{XZ^T}$  et  $P_{Z^T Z^T}$  dans l'expression (1-11), on a (voir théorème n° 3 de l'annexe 1):

$$\hat{X}(k|j) = P_{XZ^T} \cdot P_{Z^T Z^T}^{-1} \cdot Z^T \quad (1-12)$$

avec  $P_{XZ^T} = E[X^T Z]$  et  $P_{Z^T Z^T} = E[Z^T \cdot Z]$

Puis on trouve que la fonction de pertes admissibles doit être de la forme ( théorème n° 3 de l'annexe 1 ):

$$L[\tilde{X}(k|j)] = \tilde{X}^T(k|j) \cdot \tilde{X}(k|j) \quad (1-13)$$

Autrement dit, la meilleure estimation de l'état  $X(k)$  sera obtenue si l'erreur quadratique peut-être minimisée. Ainsi, notre étude nécessite les conditions et les étapes suivantes:

- signal  $S(t)$  linéaire dans un intervalle de temps donné  $T$
- Discrétisation des variables  $S(t)$ ,  $B(t)$  et  $X(t)$
- Estimation de l'état  $X(k)$  à partir de  $j$  mesures causalement liées à cet état.
- Bruit  $B(t)$  gaussien ( de second ordre ).
- Calcul de l'espérance mathématique conditionnelle:

$$E\{L[\tilde{X}(k|j)] | Z(i); i=1, 2, \dots, j\}$$

- Minimisation de l'erreur quadratique moyenne en vue d'optimiser l'estimation de l'état  $X(k)$  et par suite celle du message  $S(t)$ .

Quoique les résultats de ce paragraphe soient fondamentaux, leur portée pratique est assez limitée. En effet, si on considère seulement le cas où  $\hat{X}(k|j)$  est donnée par l'expression (1-12), il faut inverser la matrice de covariance  $P_{z^T z^T}$ . Celle-ci est une matrice  $j \times m$  où  $j$  est le nombre de mesures et  $m$ , le nombre d'éléments du vecteur de mesure. Quand on fait varier chacun des indices  $k$  et  $j$  dans l'expression (1-12) pour trouver l'estimation optimale, le calcul de cette dernière devient inextricable. Même si on fait appel à <sup>des</sup> techniques de programmation, le temps de calcul demeure énorme.

Il faudrait donc rechercher des algorithmes de calcul efficaces et faciles à mettre en oeuvre. C'est à dire qu'il faudrait mettre au point un modèle permettant d'obtenir aisément l'estimation optimale  $\hat{X}(k|j)$ . Ceci est parfaitement réalisable quand on a affaire à des processus de GAUSS - MARKOV à temps discrets [10].

Dans les prochains paragraphes, nous allons voir comment développer de tels algorithmes pour la classe des processus de GAUSS-MARKOV soit dans le cas de la prédiction, soit dans le cas du filtrage.

### 1.3. Modèle de Gauss-Markov à temps discret

Le modèle qui décrit un système où interviennent des processus de GAUSS-MARKOV est donné par le système linéaire discret suivant [10]:

$$X(k+1) = \Phi(k+1, k)X(k) + \Gamma(k+1, k)W(k) \quad (1-14)$$

$$Z(k+1) = H(k+1)X(k+1) + V(k+1) \quad (1-15)$$

Dans ces équations,  $\underline{X}$  est le vecteur d'état de dimension  $n$ ,  $\Phi$ , la matrice  $n \times n$  de transition d'état,  $\Gamma$ , la matrice  $m \times p$  de transition de perturbation,  $W$ , le vecteur de perturbation de dimension  $m$ ,  $H$ , la matrice  $m \times n$  de mesure et  $V$ , le vecteur erreur de mesure de dimension  $m$ .

Les processus  $\{W(k); k = 0, 1, \dots\}$  et  $\{V(k+1); k = 0, 1, \dots\}$  sont des séquences gaussiennes de dimension  $p$ . Leurs principales propriétés sont:

$$E[W(k)] = 0 \quad (1-16)$$

$$E[W(j) \cdot W^T(k)] = Q(k) \delta_{jk} \quad (1-17)$$

$$E[V(k)] = 0 \quad (1-18)$$

$$E[V(j+1) \cdot V^T(k+1)] = R(k+1) \delta_{jk} \quad (1-19)$$

$Q$  et  $R$  sont respectivement la matrice  $p \times p$  de covariance de perturbation et la matrice  $m \times m$  de covariance de l'erreur de mesure.

Ces matrices sont définies positives.

Notons que les équations allant de (1-14) à (1-19) sont valables quel que soit  $k$ , entier positif ou nul.

Considérons le cas où  $V$  et  $W$  sont deux processus stochastiques indépendants ( l'incertitude commise sur la mesure ne dépend pas du bruit dans le canal de communications ). On aura :

$$E[V(j)W^T(k)] = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots \text{ et } k = 0, 1, \dots \quad (1-20)$$

L'état initial  $X(0)$  est un vecteur gaussien de dimension  $n$  et de moyenne nulle :

$$E[X(0)] = 0 \quad (1-21)$$

sa matrice de covariance sera également définie positive, et elle s'écrira :

$$E[X(0)X^T(0)] = P(0) \quad (1-22)$$

Supposons que l'état initial soit indépendant des séquences de perturbation et de l'erreur de mesure, il viendra dans ce cas

$$E[X(0) \cdot W^T(k)] = 0 \quad (1-23)$$

$$E[X(0) \cdot V^T(k+1)] = 0 \quad (1-24)$$

On déduit que le modèle décrit par les équations allant de (1-14) à (1-24) doit posséder les propriétés suivantes :

a/ les processus stochastiques  $\{X(k); k = 0, 1, \dots\}$  et  $\{Z(i); i = 1, 2, \dots, j\}$  sont gaussiens avec des moyennes identiquement nulles .

b/  $E[X(j)W^T(k)] = 0$  quel que soit  $k \geq j (j=0, 1, \dots)$  (1-25)

c/  $E[Z(j)W^T(k)] = 0$  pour tout  $k \geq j (j=0, 1, \dots)$  (1-26)

d/  $E[X(j)V^T(k)] = 0 \quad \forall j \text{ et } k (j=0, 1, \dots \text{ et } k=1, 2, \dots)$  (1-27)

e/  $E[W(j)V^T(k)] = 0$  pour tout  $k > j (j \text{ ou } k=1, 2, \dots)$  (1-28)

## 1.4. Filtrage optimal dans les systèmes linéaires discrets

Voyons maintenant comment développer un algorithme de filtrage optimal.

Considérons pour cela des processus stochastiques gaussiens de moyenne nulle. L'application du corollaire n° 1-1 et du théorème n° 3 ( voir annexe.1 ) nous permet de calculer le filtre optimal  $\hat{X}(j|j)$ . Pour obtenir ce dernier, il suffit de remplacer  $j$  par  $k$  dans les expressions (1-11) et (1-12), puis de déterminer les conditions initiales.

Quand on exprime l'erreur de filtrage en fonction de  $\hat{X}(j|j)$ , celle - ci s'écrit :

$$\tilde{X}(j|j) = X(j) - \hat{X}(j|j) \quad (1-29)$$

$$\hat{X}(j|j) = E[X(j) | Z(1), Z(2), \dots, Z(j)] \quad (1-30)$$

et sa matrice de convariance est :

$$P(j|j) = E[\tilde{X}(j|j) \cdot \tilde{X}^T(j|j)] \quad (1-31)$$

Lorsque  $j = 0$ , aucune mesure n'a été encore faite et on déduit des expressions (1-21), (1-30), (1-29) et (1-31) que :

$$\hat{X}(0|0) = E[X(0)] = 0 \quad (1-32)$$

$$\tilde{X}(0|0) = X(0) - \hat{X}(0|0) = X(0) \quad (1-33)$$

$$P(0|0) = E[\tilde{X}(0|0)\tilde{X}^T(0|0)] = E[X(0)X^T(0)] = P(0) \quad (1-34)$$

Les  $j$  mesures ( pour  $j > 0$  ) ajoutées aux valeurs données par (1-32), (1-33), et (1-34) forment les conditions initiales du système.

Dans le cas d'un filtre optimal pour lequel  $j = k + 1$ , les considérations précédentes demeurent valables et on a :

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1|k+1) &= E[X(k+1)|Z(1), Z(2), \dots, Z(j)] \\ &= E[X(k+1)|Z(i); i=1, 2, \dots, j] \end{aligned} \quad (1-35)$$

Les propriétés de l'espérance conditionnelle gaussienne nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} E[x|y, z] &= E[x|y, \tilde{z}] \\ &= E[x|y] + E[x|\tilde{z}] - \bar{x} \end{aligned} \quad (1-36)$$

avec  $\tilde{z} = z - E[z|y]$ .

En appliquant celles-ci à l'expression (1-35), il vient :

$$\begin{aligned} E[X(k+1)|Z(i); i=1, 2, \dots, k+1] &= E[X(k+1)|Z(1), \dots, Z(k), \tilde{Z}(k+1|k)] \\ &= E[X(k+1)|Z(1), \dots, Z(k)] + E[X(k+1)|\tilde{Z}(k+1|k)] \end{aligned} \quad (1-37)$$

avec :

$$\tilde{Z}(k+1|k) = Z(k+1) - E[Z(k+1)|Z(1), \dots, Z(k)] \quad (1-38)$$

On trouve que le dernier terme de l'expression (1-38) donne

la prédiction optimale de  $Z(k+1)$  à condition que les mesures  $\{Z(1), \dots, Z(k)\}$  soient déjà connues, c'est à dire que:

$$\hat{Z}(k+1|k) = E[Z(k+1)|Z(1), Z(2), \dots, Z(k)] \quad (1-39)$$

La différence entre les mesures à l'instant  $k+1$  et les mesures précédentes sera:

$$\tilde{Z}(k+1|k) = Z(k+1) - \hat{Z}(k+1|k) \quad (1-40)$$

Cette différence est par définition le résiduel de la mesure.

Par substitution de l'équation (1-15) dans l'équation (1-39)

on aura:

$$\hat{Z}(k+1|k) = E[H(k+1)X(k+1) + V(k+1)|Z(1), \dots, Z(k)]$$

En appliquant la relation (1-36), on a:

$$\begin{aligned} \hat{Z}(k+1|k) &= H(k+1)E[X(k+1)|Z(i); i=1, \dots, k] + E[V(k+1)|Z(i); i=1, \dots, k] \\ &= H(k+1)\hat{X}(k+1|k) + E[V(k+1)|Z(i); i=1, \dots, k] \end{aligned} \quad (1-41)$$

Mais d'après l'équation (1-28),  $V(k+1)$  est non corrélé avec chacune des mesures  $Z(1), \dots, Z(k)$ . Par conséquent, ces deux types de vecteurs sont indépendants. D'après (1-18), il vient:

$$\begin{aligned} \hat{Z}(k+1|k) &= H(k+1)\hat{X}(k+1|k) + E[V(k+1)] \\ &= H(k+1)\hat{X}(k+1|k) \end{aligned} \quad (1-42)$$

D'après le théorème n° 5 (annexe 1) le filtre optimal  $X(k+1|k+1)$

est donné par la relation récursive suivante:

$$\hat{X}(k+1|k+1) = \Phi(k+1, k) \hat{X}(k|k) + K(k+1) [Z(k+1) - H(k+1) \Phi(k+1, k) \hat{X}(k|k)] \quad (1-43)$$

Rappelons que  $k$  varie pas à pas ( $k = 0, 1, \dots$ ) et que les conditions initiales sont fixées pour  $X(0|0) = 0$ .  $K(k+1)$ , qui est une matrice  $n \times m$ , représente par définition le gain du filtre.

Il a pour expression:

$$K(k+1) = P(k+1|k) H^T(k+1) [H(k+1) P(k+1|k) H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \quad (1-44)$$

D'après le théorème n° 5, et appliquant la condition (1-34), on a:

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k) P(k|k) \Phi^T(k+1, k) + \Gamma^T(k+1, k) Q(k) \Gamma(k+1, k) \quad (1-45)$$

De même, on trouve que:

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1) H(k+1)] P(k+1|k) \quad (1-46)$$

où  $I$  est la matrice identité  $n \times n$ .

Par définition, l'ensemble des relations de récurrence (1-43), (1-44), (1-45) et (1-46) constitue le filtre de KALMAN.

Notons que le théorème n° 5 a été démontré pour la première fois par KALMAN en 1960 [ ].

## 1.5. Prédiction optimale dans les systèmes linéaires discrets

D'après le théorème n° 4 de l'annexe 1, il existe entre le filtre optimal  $X(j|j)$  et la prédiction optimale  $X(k|j)$ , une relation de correspondance qui est:

$$\hat{X}(k|j) = \Phi(k, j) \cdot \hat{X}(j|j) \quad (1-47)$$

Les différents états de prédiction optimale peuvent être également générés pas à pas.

Si on a  $k+1$  mesures, l'état le plus proche pour lequel la prédiction peut-être faite est  $k+2$ . L'application de l'équation (1-47) donne:

$$\hat{X}(k+2|k+1) = \Phi(k+2, k+1) \hat{X}(k+1|k+1) \quad (1-48)$$

Il suffit donc de multiplier l'équation (1-43) par la matrice de transition d'état  $\Phi(k+2, k+1)$  pour obtenir la prédiction optimale d'un état  $X(k+2)$  sachant que  $k+1$  mesures ont été effectuées. De même pour la prédiction optimale de l'état  $X(k+3)$ , on aura :

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+3|k+1) &= \Phi(k+3, k+1) \hat{X}(k+2|k+1) \\ &= \Phi(k+3, k+1) \Phi(k+2, k+1) \hat{X}(k+1|k+1) \end{aligned} \quad (1-49)$$

Puis, en raisonnant par récurrence, on obtient:

$$\hat{X}(k+l|k+i) = \prod_{i=1}^l \Phi(k+i, k+i) \hat{X}(k+1|k+1) \quad (1-50)$$

## 1.6. Organigramme du filtre de KALMAN

Parmi les caractéristiques du filtre de KALMAN les plus significatives, on notera la forme récursive: une propriété qui le rend extrêmement utile dans le traitement des mesures pour estimer le filtre optimal par calculateur numérique.

En effet, les mesures peuvent être suivies au moment où elles se produisent et on n'a besoin de stocker aucune donnée de mesure.

L'équation ( 1 - 35 ) peut être présentée par le bloc diagramme de la figure 4. Celui-ci nous permet de voir comment l'information circule dans le filtre.

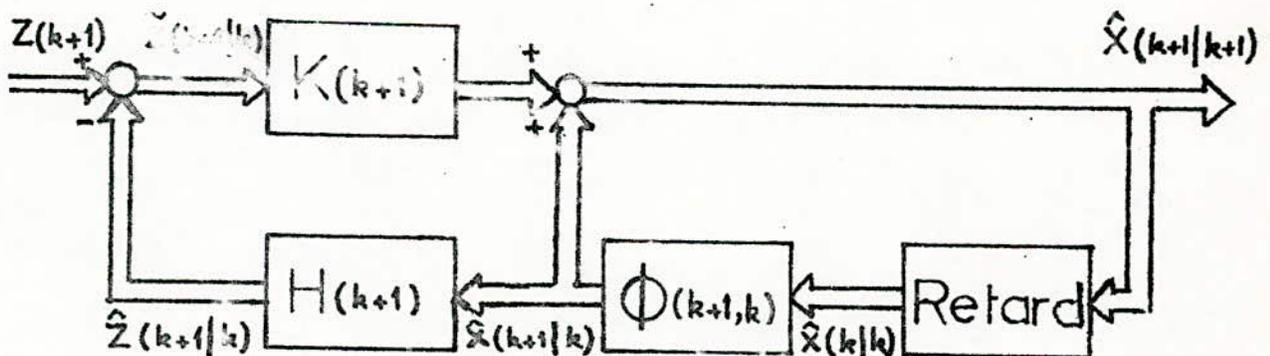


Figure 4 - Bloc diagramme du filtre de KALMAN

- On suppose que  $\hat{X}(k|k)$  est connue pour des valeurs données et qu'on cherche à déterminer  $\hat{X}(k+1|k+1)$  lorsque les mesures  $Z(k+1)$  ont été faites. Le cycle de calcul se poursuivra comme suit:
- 1- L'estimation de filtrage optimal  $\hat{X}(k|k)$  est multipliée par la matrice de transition d'état  $\Phi(k+1,k)$ . Ce qui donne la prédiction optimale  $\hat{X}(k+1|k)$ .
  - 2-  $\hat{X}(k+1|k)$  est multipliée d'abord par  $H(k+1)$  pour donner  $\hat{Z}(k+1|k)$ . Cette dernière est retranchée de la mesure actuelle  $Z(k+1)$  afin d'obtenir le résiduel de la mesure  $\tilde{Z}(k+1|k)$ .
  - 3-  $\tilde{Z}(k+1|k)$  est multiplié par la matrice  $K(k+1)$ . le résultat est ensuite additionné à  $\hat{X}(k+1|k)$  pour avoir  $\hat{X}(k+1|k+1)$ .
  - 4-  $\hat{X}(k+1|k+1)$  est stockée en mémoire jusqu'à ce que la mesure qui suivra fasse répéter le cycle.

La matrice  $K(k+1)$  est considérée comme matrice de chargement ou matrice de gain du filtre, appelée encore matrice de gain de KALMAN.

La réaction entre prédiction et filtrage est évidente en ce point. En effet, chacune des estimations peut être déduite de l'autre, c'est à dire que :

$$\hat{X}(k+1|k) = \Phi(k+1, k) \hat{X}(k|k)$$

$$\hat{X}(k+1|k+1) = \hat{X}(k+1|k) + K(k+1) [Z(k+1) - H(k+1) \hat{X}(k+1|k)]$$

L'initialisation du filtrage se fait en commençant avec  $\hat{X}(0|0)=0$ , et on voit immédiatement que :

$$\hat{X}(1|1) = K(1) \cdot Z(1)$$

Puis:  $\hat{X} ( 2 | 2 )$ ,  $\hat{X} ( 3 | 3 )$ , ....., se suivent récursivement comme l'indiquent les quatres étapes précédentes.

L'organigramme de la figure 5 résume toutes ces opérations. Cet organigramme nécessite le calcul préalable de la matrice de gain  $K ( k + 1 )$  ainsi que ces deux matrices de covariance  $P ( k + 1 | k )$  et  $P ( k + 1 | k + 1 )$  qui interviennent dans les équations ( 1 - 44 ), ( 1 - 45 ) et ( 1 - 46 ). Un tel calcul peut-être suivi selon le cycle typique suivant.

- 1 - Connaissant  $P ( k | k )$ ,  $Q ( k )$ ,  $\Phi ( k + 1, k )$  et  $\Gamma ( k + 1, k )$ ,  $P ( k + 1 | k )$  est calculée à l'aide de l'équation ( 1 - 45 ).
- 2 - On substitue  $P ( k + 1 | k )$ ,  $H ( k + 1 )$  et  $R ( k + 1 )$  dans l'équation ( 1 - 44 ) pour obtenir  $K ( k + 1 )$ .
- 3 -  $P ( k + 1 | k )$ ,  $K ( k + 1 )$  et  $H ( k + 1 )$  sont substituées dans l'équation ( 1 - 46 ) pour déterminer  $P ( k + 1 | k + 1 )$  qui est stockée en mémoire à l'instant de la prochaine mesure où le cycle est répété. L'organigramme de ce cycle est donné par la figure 6.

Notons que ces organigrammes nous permettent d'estimer le filtrage optimal  $\hat{X} ( k + 1 | k + 1 )$  ainsi que la prédiction optimale  $X ( k + 1 | k )$ .

Si on voulait estimer la prédiction optimale  $\hat{X} ( k + 2 | k )$  pour laquelle  $\hat{P} \geq 2$ , il faudrait modifier ces organigrammes de façon à tenir compte de la relation ( 1 - 50 ).

Mais une telle opération n'est pas nécessaire, car notre étude ne concerne que le filtrage optimal.

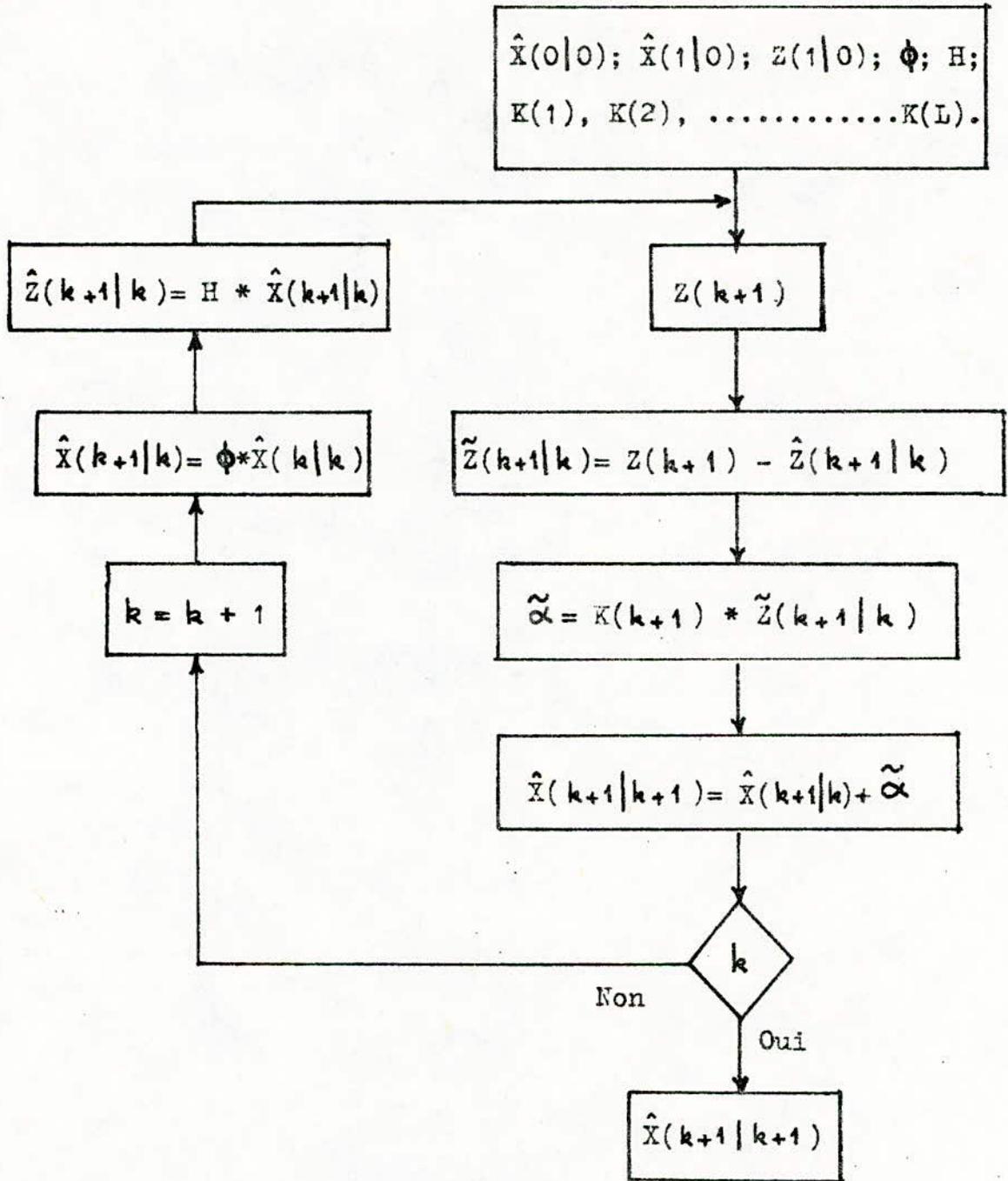


Figure 5- Organigramme de l'algorithme de KALMAN

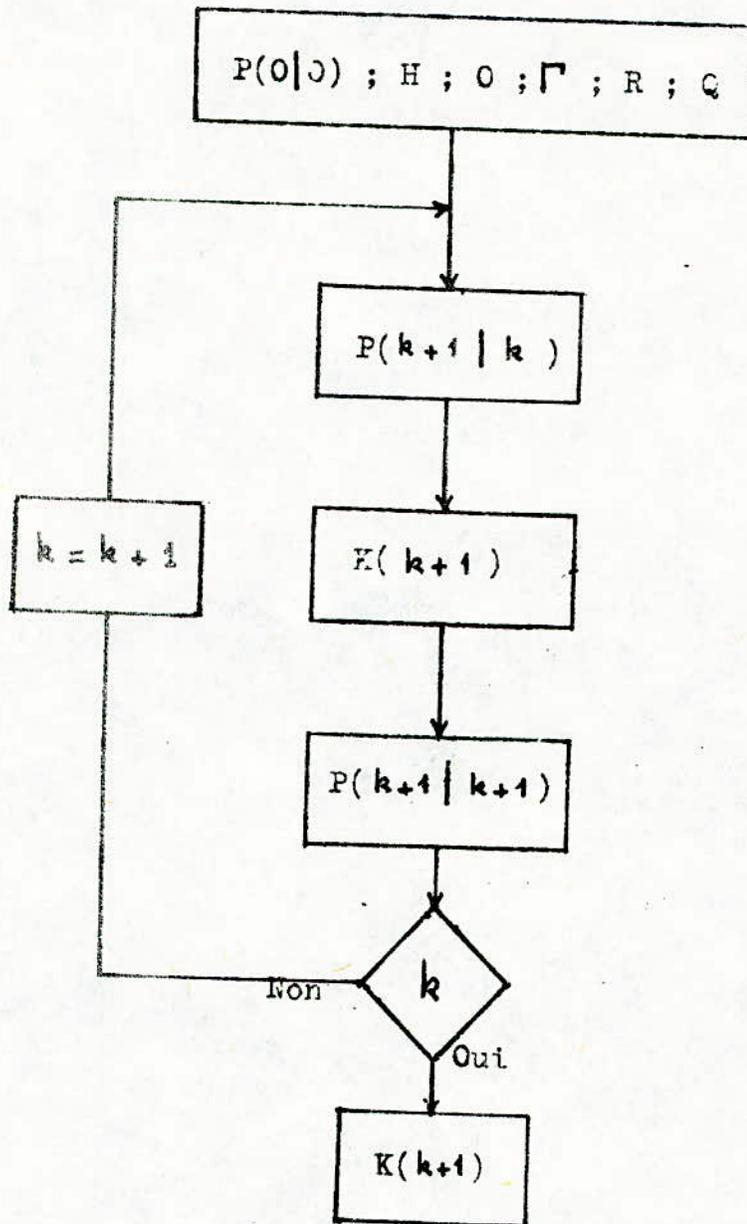


Figure 6- Organigramme donnant le gain du filtre optimal.

# CONCEPTION D'UN FILTRE DERIVATEUR

## 2.1. Introduction

Dans ce chapitre , nous comptons adapter le filtre de KALMAN au problème de l'estimation optimale d'un signal déterministe , perturbé par un bruit de second ordre. De façon plus précise , nous allons tout d'abord caractériser le bruit en calculant les différents éléments du matrice de transition d'état  $\Phi$  et de covariance de perturbation  $Q$  . Ensuite , nous expliciterons le vecteur d'état  $X(k)$  et sa mesure  $Z(k)$  pour mettre en équations notre problème. Puis , nous recherchons les conditions qui permettent d'initialiser l'algorithme de KALMAN .

Considérons pour cela , un système de communication où règne un bruit gaussien du second ordre  $B(t)$ . Nous voulons transmettre par ce moyen un signal  $S(t)$  du même type que celui de la figure 2b. Dans le but d'extraire le signal quand il est noyé dans le bruit , un traitement de l'information est effectué à la réception par ordinateur numérique . Dans ces conditions , le signal observé à la réception sera une suite d'échantillons de la forme ( voir expression (1-1) et (1-15)):

$$Z(k\tau) = A_1 \cdot k\tau + A_2 + B(k\tau) \quad (2-1)$$

Rappelons que  $A_1$  et  $A_2$  ne sont pas directement accessibles à la mesure et que  $\tau$  est la période d'échantillonnage .

Le but du traitement du signal est de faire une estimation optimale - au sens de l'erreur quadratique moyenne minimale - des coefficients  $A_1$  et  $A_2$  en

faisant l'hypothèse que la connaissance à priori sur la valeur numérique de  $A_1$  et  $A_2$  est nulle avant toute observation .

Le bruit  $B(t)$  est donc formé d'une suite d'échantillons numériques de période  $T$  . Cette suite résulte de l'échantillonnage d'une fonction aléatoire  $X(t)$  stationnaire, ergodique et solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\ddot{X}(t) + \beta \dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = u(t) \quad (2-2)$$

où  $u(t)$  est un bruit gaussien de corrélation négligeable et de puissance  $\sigma_u^2$  .

C'est une équation différentielle à coefficients constants ( $\beta$  = coefficient d'amortissement et  $\omega_0$  = pulsation de résonance propre du système ). Elle peut se traduire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2-3)$$

En notation vectorielle, elle s'écrit :

$$\dot{X} = F \cdot X(t) + G \cdot u(t) \quad (2-4)$$

$$\text{avec } X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\beta \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'équation (2-4) est associée au système linéaire invariant représenté en terme de variables d'état [15]. Le vecteur  $X(t)$  est appelé vecteur d'état de ce système. Le bloc diagramme engendrant ce processus est donné par la figure 7

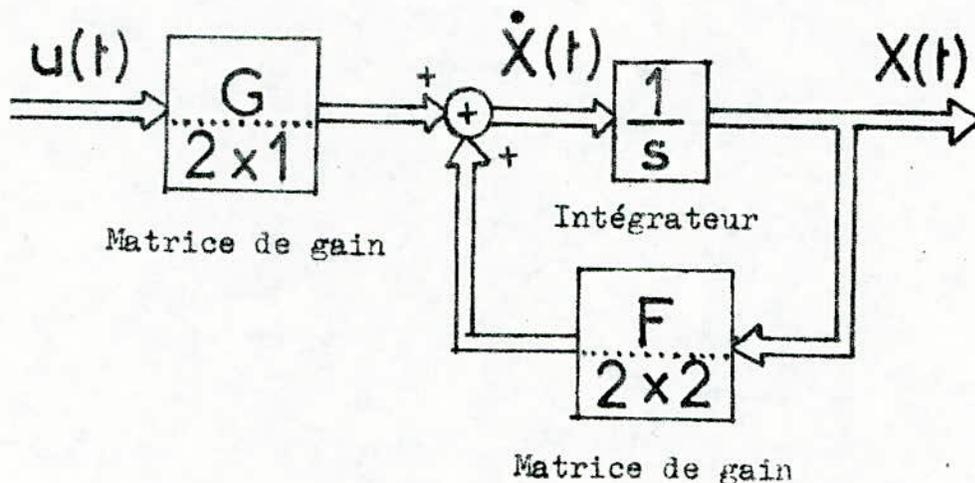


Figure 7 : Bloc diagramme de l'équation d'état

Pour tenir compte de l'échantillonnage, nous remplaçons l'équation (2-3) par l'équation aux accroissements finis définie par l'équation (1-14) :

$$X((k+1)\tau) = \Phi((k+1)\tau, k\tau)X(k\tau) + W(k\tau) \quad (2-5)$$

où  $X((k+1)\tau)$  est la solution de l'équation (2-4),  $X(k\tau) = \begin{bmatrix} B(t=k\tau) \\ \dot{B}(t=k\tau) \end{bmatrix}$ ,

$$\Phi((k+1)\tau, k\tau) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \text{ est la matrice de transition d'état et}$$

$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$  est un bruit bi-dimensionnel dont la matrice de covariance est  $Q$ .

Pour avoir une forme plus explicite de l'équation (2-5), nous devons calculer chacune des matrices  $\Phi$  et  $Q$ .

## 2.2. Calcul de la matrice de transition d'état $\Phi$

D'après la théorie des systèmes, la matrice de transition d'état d'un système décrit par l'équation (2-4) est [12,15]:

$$\Phi(t) = e^{F \cdot t} \quad (2-6)$$

Nous pouvons chercher  $\Phi(t)$  par la méthode de CAYLEY-HAMILTON [12] qui est basée sur le fait que chaque matrice carrée satisfait à sa propre équation caractéristique:

$$g(\lambda) = |F - \lambda I| = 0 \quad (2-7)$$

où  $I$  est la matrice identité, et  $\lambda$  la valeur propre de cette équation. Donc on peut écrire :

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\beta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (2-8)$$

soit:

$$\lambda^2 + \beta \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2-9)$$

Les valeurs propres sont solutions de l'équation (2-9). Si on suppose que le régime est oscillatoire, on aura  $4\omega_0^2 > \beta^2$ . D'où:

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{2} + j \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}}{2} = -\frac{\beta}{2} + j \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2/4} \quad (2-10)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\beta}{2} - j \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}}{2} = -\frac{\beta}{2} - j \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2/4} \quad (2-11)$$

Si on pose  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2/4}$ , on obtiendra :

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{2} + j \omega_1 \quad (2-12)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\beta}{2} - j \omega_1 \quad (2-13)$$

D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a également :

$$e^{F.t} = \alpha_0 I + \alpha_1 F \quad (2-14)$$

et

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i \quad (2-15)$$

Ceci se traduit par un système linéaire simple :

$$e^{(-\frac{\beta}{2} + j \omega_1)t} = \alpha_0 + \alpha_1 (-\frac{\beta}{2} + j \omega_1) \quad (2-16)$$

$$e^{(-\frac{\beta}{2} - j \omega_1)t} = \alpha_0 + \alpha_1 (-\frac{\beta}{2} - j \omega_1)$$

Il peut encore s'écrire :

$$e^{-\frac{1}{2}\beta t} \cdot e^{j\omega_1 t} = \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha_1 \beta + j \alpha_1 \omega_1 \quad (2-17)$$

$$e^{-\frac{1}{2}\beta t} \cdot e^{-j\omega_1 t} = \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha_1 \beta - j \alpha_1 \omega_1 \quad (2-18)$$

En retranchant l'expression (2-18) de (2-17), on obtient :

$$2j\alpha_1\omega_1 = e^{-\frac{1}{2}\beta t} (e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t})$$

d'où :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta t} \sin \omega_1 t \quad (2-19)$$

par substitution dans le système (2-17) et (2-18), on trouve :

$$\alpha_0 = e^{-\frac{1}{2}\beta t} \left( \frac{\beta}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right) \quad (2-20)$$

par conséquent, on aura, d'après (2-14) :

$$\phi(t) = e^{F.t} = \alpha_0 I + \alpha_1 F$$

ou

$$\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}\beta t} \left( \frac{\beta}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta t} \sin \omega_1 t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -\beta \end{bmatrix}$$

Après calcul, on obtient la matrice de transition d'état :

$$\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}\beta t} \begin{bmatrix} \cos \omega_1 t + \frac{\beta}{2\omega_1} \sin \omega_1 t & \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \\ -\frac{\omega_1^2}{\omega_1} \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t - \frac{\beta}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

## 2.3. Calcul de la matrice de covariance de perturbation Q

Si on introduit la puissance de bruit  $\sigma_B^2$  dans l'équation (1-17), la matrice de covariance de perturbation Q s'écrira :

$$\delta_{kl} \cdot Q = E [W(k\tau) \cdot W^T(l\tau)] = \sigma_B^2 \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \delta_{kl} \quad (2-22)$$

Les éléments de cette matrice peuvent être calculés en explicitant le

vecteur perturbation  $W(kz)$  à l'aide de l'équation (2-5). Pour résoudre cette dernière, il est plus commode de rechercher d'abord les solutions de l'équation d'état (2-4), puis de transférer les résultats obtenus au cas d'un système à temps discret.

De façon générale, une solution de l'équation (2-4) est la superposition d'une partie homogène (ou système libre) et d'une solution particulière (ou système forcé) [15]

### 2.3-1 SOLUTION HOMOGÈNE DE L'ÉQUATION D'ÉTAT

Dans ce cas, l'équation (2-4) se réduit à :

$$\dot{X}(t) = F \cdot X(t) \quad (2-23)$$

dont  $X(t_0)$  est la condition initiale.

Si  $X(t)$  et  $F$  sont des scalaires, on trouve :

$$x(t) = e^{F \cdot (t-t_0)} x(t_0) \quad (2-24)$$

Dans le cas vectoriel [15] on aura :

$$X(t) = e^{F \cdot (t-t_0)} X(t_0) \quad (2-25)$$

où  $e^{F \cdot t}$  est par définition :

$$e^{F \cdot t} = I + F \cdot t + \frac{F^2 t^2}{2!} + \dots \quad (2-26)$$

Rappelons que la fonction  $e^{F \cdot (t-t_0)}$  est la matrice de transition d'état  $\Phi(t-t_0) \equiv \Phi(t, t_0)$  (voir expression (2-6)).

Notons que  $\Phi$  satisfait à l'équation :

$$a/ \quad \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} = F \cdot \Phi(\tau) \quad (2-27)$$

b/ la condition initiale  $t = t_0$  entraîne que :

$$\phi(t_0 - t_0) = \phi(0) = I \quad (2-28)$$

c/ 
$$\phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1) \cdot \phi(t_1, t_0) \quad (2-29)$$

d/ 
$$\phi^{-1}(t_1, t_0) = \phi(t_0, t_1) \quad (2-30)$$

La solution homogène peut donc être écrite en fonction de

$$X(t) = \phi(t - t_0) \cdot X(t_0) \quad (2-31)$$

Une solution analytique est normalement difficile à obtenir. Mais, dans notre cas, il n'est heureusement pas indispensable de connaître explicitement cette solution, car il suffit d'utiliser les propriétés (2-27), (2-28), (2-29) et (2-30) pour résoudre notre problème.

### 2.3-2 SOLUTION PARTICULIERE DE L'EQUATION D'ETAT

En général, une solution particulière sera de la forme :

$$X(t) = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \cdot G \cdot u(\tau) d\tau \quad (2-32)$$

avec  $\phi(t, \tau) = \text{Exp}[F \cdot (t - \tau)]$ .

Le régime stationnaire est atteint quand  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Soit :

$$X(t) = \int_{-\infty}^t e^{F \cdot (t - \tau)} \cdot G \cdot u(\tau) d\tau \quad (2-33)$$

### 2.3-3 SOLUTION GENERALE

Elle est la superposition des expressions (2-25) et (2-32). D'où :

$$X(t) = e^{F \cdot (t - t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{F \cdot (t - \tau)} \cdot G \cdot u(\tau) d\tau \quad (2-34)$$

Notons que si  $t_0 \rightarrow -\infty$ , le premier terme doit être nécessairement

nul car physiquement il n'est pas possible d'avoir des informations sur un passé lointain. Par hypothèse, on aura donc :  $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} [e^{F \cdot (t-t_0)} X(t_0)] = 0$

Pour ce cas, on est ramené au régime stationnaire et l'expression (2-34) (c'est à dire, en fait, (2-33)) peut prendre la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^t \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau \quad (2-35)$$

d'où on peut tirer :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t \phi_{12}(t, \tau) u(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta t} \int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{2}\beta \mu} \sin \omega_1(t-\mu) u(\mu) d\mu \end{aligned} \quad (2-36)$$

par conséquent :

$$x(t+\tau) = \frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta(t+\tau)} \int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{2}\beta \alpha} \sin \omega_1(t+\tau-\alpha) u(\alpha) d\alpha \quad (2-37)$$

### 2.3-4 CALCUL DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION $\mathcal{R}_{xx}$

Quand on utilise les solutions (2-35) de l'équation d'état pour calculer le vecteur perturbation  $W(k\tau)$ , puis les éléments qui composent la matrice (2-22), on fait intervenir nécessairement la fonction d'autocorrélation  $\mathcal{R}_{xx}$ . Celle-ci est par définition [14] :

$$\mathcal{R}_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X^T(t_2)] \quad (2-38)$$

où  $X(t)$  est un processus stochastique qui satisfait à l'équation d'état (2-4).

En régime stationnaire, elle prend la forme :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(0, t_2 - t_1) = R_{xx}(\tau) \quad (2-39)$$

où  $\tau = t_2 - t_1$ .

### 2.3-4.1 CAS D'UNE SEULE COMPOSANTE DU VECTEUR D'ETAT :

L'expression (2-37) permet de calculer la fonction d'autocorrélation pour une seule composante ; soit :

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E[x(t+\tau)x(t)] \\ &= \frac{1}{\omega_1} e^{-\beta t} e^{-\frac{1}{2}\beta\tau} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{2}\beta\mu} e^{\frac{1}{2}\beta\alpha} E[u(\mu)u(\alpha)] \\ &\quad \sin \omega_1(t-\mu) \sin \omega_1(t+\tau-\alpha) d\mu d\alpha \end{aligned} \quad (2-40)$$

or

$$E[u(\mu)u(\alpha)] = \sigma_u^2 \delta(\mu - \alpha) \quad (2-41)$$

(où  $\delta(\mu - \alpha)$  est la fonction de DIRAC, centrée en  $\alpha$ ).

L'équation (2-40) se réduit à :

$$R_{xx}(\tau) = \frac{\sigma_u^2}{\omega_1^2} e^{-\beta t} e^{-\frac{\beta\tau}{2}} \int_{-\infty}^t e^{\beta\mu} \sin \omega_1(t-\mu) \sin \omega_1(t-\mu+\tau) d\mu$$

ou bien

$$R_{xx}(\tau) = \frac{\sigma_u^2}{2\omega_1^2} e^{-\beta t} e^{-\frac{1}{2}\beta\tau} \left[ \cos \omega_1\tau \int_{-\infty}^t e^{\beta\mu} d\mu - J \right]$$

avec :

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^t e^{\beta\mu} \cos \omega_1(2t - 2\mu + \tau) d\mu \\ &= \int_{-\infty}^t e^{\beta\mu} \frac{1}{2} \left[ e^{j\omega_1(2t - 2\mu + \tau)} + e^{-j\omega_1(2t - 2\mu + \tau)} \right] d\mu \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{2} e^{j\omega_1 2t} e^{j\omega_1 \tau} e^{(\beta - j2\omega_1)\mu} d\mu + \int_{-\infty}^t \frac{1}{2} e^{-j\omega_1 2t} e^{-j\omega_1 \tau} e^{(\beta + j2\omega_1)\mu} d\mu \\
&= \frac{1}{2} e^{j\omega_1 2t} e^{j\omega_1 \tau} \int_{-\infty}^t e^{(\beta - j2\omega_1)\mu} d\mu + \frac{1}{2} e^{-j\omega_1 2t} e^{-j\omega_1 \tau} \int_{-\infty}^t e^{(\beta + j2\omega_1)\mu} d\mu \\
&= \frac{e^{\beta t}}{\beta^2 + 4\omega_1^2} (\beta \cos \omega_1 \tau - 2\omega_1 \sin \omega_1 \tau)
\end{aligned}$$

On trouve finalement que la fonction d'auto corrélation est :

$$R_{xx}(\tau) = \mathcal{R}(\tau) = \frac{\sigma_u^2}{2\beta\omega_1^2} e^{-\frac{1}{2}\beta\tau} \left( \cos \omega_1 \tau + \frac{\beta}{2\omega_1} \sin \omega_1 \tau \right) \quad (2-42)$$

### 2.3-4.2 CAS D' UN VECTEUR D' ETAT:

Revenons maintenant au calcul de la fonction d'autocorrélation du processus d'état  $\mathcal{R}_{xx}$ . Exécutons d'abord le produit :

$$\begin{aligned}
X(t+\tau) \cdot X^T(t) &= \begin{bmatrix} x(t+\tau) \\ \dot{x}(t+\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) & \dot{x}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x(t+\tau)x(t) & x(t+\tau)\dot{x}(t) \\ \dot{x}(t+\tau)x(t) & \dot{x}(t+\tau)\dot{x}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Puis, prenons son espérance mathématique, ce qui se traduit par la relation :

$$E[X(t+\tau) \cdot X^T(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{xx}(\tau) & \frac{d\mathcal{R}_{xx}(\tau)}{d\tau} \\ -\frac{d\mathcal{R}_{xx}(\tau)}{d\tau} & -\frac{d^2\mathcal{R}_{xx}(\tau)}{d\tau^2} \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

avec [14] :

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{R}_{xx}(\tau) \equiv \mathcal{R}_{x\dot{x}}(\tau) = E[x(t+\tau)\dot{x}(t)]$$

$$-\frac{d}{d\tau} \mathcal{R}_{xx}(\tau) \equiv \mathcal{R}_{\dot{x}x}(\tau) = E[\dot{x}(t+\tau)x(t)]$$

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{R}_{xx}(\tau) \equiv \mathcal{R}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = E[\dot{x}(t+\tau)\dot{x}(t)]$$

En effet ;

$$E[\dot{x}(t)] = E\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \frac{d}{dt}E[x(t)]$$

Posons , pour simplifier ,  $A = \frac{\sigma_u^2}{2\beta\omega_1^2}$  ,  $\gamma = \frac{\beta}{2\omega_1}$  et  $\alpha = \frac{\beta}{2}$ .

D'après l'équation (2-42),  $\mathcal{R}_{xx}(\tau)$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{R}_{xx}(\tau) = A e^{-\alpha\tau} (\cos \omega_1\tau + \gamma \sin \omega_1\tau) \quad (2-44)$$

Ce qui permet d'avoir les résultats suivants

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{R}_{xx}(\tau) = -\frac{\omega_0^2}{\omega_1} A \sin \omega_1\tau \cdot e^{-\alpha\tau}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{R}_{xx}(\tau) = -\frac{\omega_0^2}{\omega_1} A (\omega_1 \cos \omega_1\tau - \alpha \sin \omega_1\tau) e^{-\alpha\tau}$$

avec [14] :

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{R}_{xx}(\tau) \equiv \mathcal{R}_{x\dot{x}}(\tau) = E[x(t+\tau)\dot{x}(t)]$$

$$-\frac{d}{d\tau} \mathcal{R}_{xx}(\tau) \equiv \mathcal{R}_{\dot{x}x}(\tau) = E[\dot{x}(t+\tau)x(t)]$$

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{R}_{xx}(\tau) \equiv \mathcal{R}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = E[\dot{x}(t+\tau)\dot{x}(t)]$$

En effet ;

$$E[\dot{x}(t)] = E\left[\frac{d}{dt} x(t)\right] = \frac{d}{dt} E[x(t)]$$

Posons , pour simplifier ,  $A = \frac{\sigma_u^2}{2\beta\omega_1^2}$  ,  $\gamma = \frac{\beta}{2\omega_1}$  et  $\alpha = \frac{\beta}{2}$ .

D'après l'équation (2-42),  $\mathcal{R}_{xx}(\tau)$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{R}_{xx}(\tau) = A e^{-\alpha\tau} \left( \cos \omega_1\tau + \gamma \sin \omega_1\tau \right) \quad (2-44)$$

Ce qui permet d'avoir les résultats suivants

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{R}_{xx}(\tau) = -\frac{\omega_0^2}{\omega_1} A \sin \omega_1\tau \cdot e^{-\alpha\tau}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{R}_{xx}(\tau) = -\frac{\omega_0^2}{\omega_1} A (\omega_1 \cos \omega_1\tau - \alpha \sin \omega_1\tau) e^{-\alpha\tau}$$

par substitution dans (2-43) nous aurons :

$$R_{xx}(\tau) = A e^{-\alpha \tau} \begin{bmatrix} \cos \omega_1 \tau + \delta \sin \omega_1 \tau & \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \sin \omega_1 \tau \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_1} \sin \omega_1 \tau & \frac{\omega_0^2}{\omega_1} (\omega_1 \cos \omega_1 \tau - \alpha \sin \omega_1 \tau) \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

Dans le cas particulier où  $\tau = 0$ , on déduit :

$$R_{xx}(0) = E[X(t)X^T(t)] = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

On voit que  $R_{xx}(0)$  ne dépend plus de  $t$  ou de  $\tau$ .

### 2.3-5 CALCUL DES ELEMENTS DE Q

À la lumière des résultats précédents, on passe facilement au calcul dans le cas discret de  $R_{xx}((k+1)\tau)$  et de l'expression (2-45) en tenant compte de l'équation (2-5) aux accroissements finis. Nous obtenons dans ce cas la forme quadratique suivante :

$$\begin{aligned} E[X((k+1)\tau)X^T((\ell+1)\tau)] &= \langle [\phi(\tau)X(k\tau) + W(k\tau)], [X^T(\ell\tau)\phi^T(\tau) + W^T(\ell\tau)] \rangle \\ &= \phi(\tau) \langle X(k\tau)X^T(\ell\tau) \rangle \phi^T(\tau) + \langle W(k\tau)W^T(\ell\tau) \rangle \end{aligned} \quad (2-47)$$

Dans cette expression, on a tenu compte du fait que  $X$  et  $W$  sont indépendants (voir relation (1-25)). D'où :

$$E[X((k+1)\tau)X^T((\ell+1)\tau)] = \phi(\tau) E[X(k\tau)X^T(\ell\tau)] + E[W(k\tau)W^T(\ell\tau)] \quad (2-48)$$

Remarquons que, pour  $k = \ell$ , le terme de gauche et le premier terme de droite de l'équation (2-48) ressemblent exactement à celui de l'équation (2-46). ce qui nous permet d'écrire l'équation (2-48) comme suit :

$$\begin{aligned}
 A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_{11}(\tau) & \phi_{12}(\tau) \\ \phi_{21}(\tau) & \phi_{22}(\tau) \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11}(\tau) & \phi_{12}(\tau) \\ \phi_{21}(\tau) & \phi_{22}(\tau) \end{bmatrix} + Q \\
 &= A \begin{bmatrix} \phi_{11}^2 + \omega_0^2 \phi_{12}^2 & \phi_{11} \phi_{21} + \omega_0^2 \phi_{12} \phi_{22} \\ \phi_{11} \phi_{21} + \omega_0^2 \phi_{12} \phi_{22} & \phi_{12}^2 + \omega_0^2 \phi_{22}^2 \end{bmatrix} + Q \quad (2-49)
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$Q = \sigma_B^2 \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 - (\phi_{11}^2 + \omega_0^2 \phi_{12}^2) & -(\phi_{11} \phi_{21} + \omega_0^2 \phi_{12} \phi_{22}) \\ -(\phi_{11} \phi_{21} + \omega_0^2 \phi_{12} \phi_{22}) & \omega_0^2 (1 - \phi_{22}^2) - \phi_{21}^2 \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

Par identification, nous trouvons :

$$\sigma_B^2 = A = \frac{\sigma_u^2}{2\beta\omega_0^2} \quad (2-51)$$

de même, en tenant compte de l'équation (2-21), nous trouvons aussi :

$$\begin{aligned}
 q_{11} &= 1 - (\phi_{11}^2 + \phi_{12}^2 \omega_0^2) \\
 &= 1 - \left( \frac{\beta}{2\omega_1} \sin 2\omega_1 \tau - \frac{\beta^2}{4\omega_1} \cos 2\omega_1 \tau + \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \right) e^{-\beta\tau} \quad (2-52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{12} &= -(\phi_{11} \phi_{21} + \omega_0^2 \phi_{12} \phi_{22}) \\
 &= \frac{\omega_0^2 \beta}{2\omega_1^2} (1 - \cos 2\omega_1 \tau) e^{-\beta\tau} \quad (2-53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{22} &= \omega_0^2 (1 - \phi_{22}^2) - \phi_{21}^2 \\
 &= \omega_0^2 - \omega_0^2 \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} - \frac{\beta^2}{4\omega_1^2} \cos 2\omega_1 \tau - \frac{\beta}{2\omega_1} \sin 2\omega_1 \tau \right) e^{-\beta \tau} \quad (2-54)
 \end{aligned}$$

$$q_{21} = q_{12} \quad (2-55)$$

## 2.4. Mise en équation du filtre dérivateur

Jusqu'ici, on a pu calculer les deux matrices  $\Phi$  et  $Q$  qui étaient nécessaires pour expliciter l'équation d'état aux accroissements finis (2-5). Il reste maintenant à déterminer le vecteur d'état  $X(k)$  et son observation  $Z(k)$ , puis les relations de KALMAN correspondantes :

$$x_1(k) = A_1 \cdot k$$

$$x_2(k) = A_1$$

$$x_3(k) = A_2 \quad (2-56)$$

$$x_4(k) = [B(t)]_{t=k\tau_c}$$

$$x_5(k) = [\dot{B}(t)]_{t=k\tau_c}$$

En tenant compte des équations (2-5) et (2-56), les équations dynamiques globales régissant l'évolution du processus seront :

$$x_1(k+1) = A_1 \cdot (k+1) = A_1 \cdot k + A_1$$

$$x_2(k+1) = A_1$$

$$x_3(k+1) = A_2$$

(2-57)

$$x_4(k+1) = \phi_{11} x_4(k) + \phi_{12} x_5(k) + W_1(k)$$

$$x_5(k+1) = \phi_{21} x_4(k) + \phi_{22} x_5(k) + W_2(k)$$

soient, en respectant la disposition mathématique des éléments :

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k)$$

$$x_3(k+1) = x_3(k)$$

(2-58)

$$x_4(k+1) = \phi_{11} x_4(k) + \phi_{12} x_5(k) + W_1(k)$$

$$x_5(k+1) = \phi_{21} x_4(k) + \phi_{22} x_5(k) + W_2(k)$$

qui s'écrivent encore sous forme matricielle:

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W_1(k) \\ W_2(k) \end{bmatrix}$$

(2-59)

Rappelons qu'en faisant  $\tau_e=1$ , le signal observé de l'équation (2-1) peut être mis sous la forme :

$$\begin{aligned} Z(k+1) &= A_1 \cdot (k+1) + A_2 + B(k+1) \\ &= x_1(k+1) + x_3(k+1) + x_4(k+1) \end{aligned} \quad (2-60)$$

qui s'écrit aussi sous forme matricielle :

$$Z(k+1) = [1 \ : 0 \ : 1 \ : 1 \ : 0] X(k+1) \quad (2-61)$$

D'après la théorie des systèmes [16], un système dynamique peut être modélé par l'équation suivante :

$$Z(t) = H(t) X(t) \quad (2-62)$$

Dans le cas discret, on aura :

$$Z(k+1) = H(k+1) X(k+1) \quad (2-63)$$

où  $H$  est la matrice de mesure. On déduit :

$$H(k+1) = H = [1 \ : 0 \ : 1 \ : 1 \ : 0] \quad (2-64)$$

On dispose maintenant d'un système linéaire d'équations qui par dérivation décrit l'évolution du processus (expressions (2-57) et (2-60)). Nous allons maintenant lui appliquer l'algorithme de KALMAN développé au chapitre précédent (équations (1-43), (1-44), (1-45) et (1-46)).

Les équations d'estimation correspondantes à notre problème sont :

$$\hat{X}(k+1|k+1) = \psi \hat{X}(k|k) + K(k+1) [Z(k+1) - H \psi \hat{X}(k|k)] \quad (2-65)$$

$$K(k+1) = P(k+1|k) H^T [H P(k+1|k) H^T]^{-1} \quad (2-66)$$

$$P(k+1|k) = \psi P(k|k) \psi^T + Q \quad (2-67)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H] P(k+1|k) \quad (2-68)$$

L'équation (2-65) étant l'équation de filtrage,  $\hat{X}$  représente la meilleure estimation de l'état  $X$ ,  $K$  le gain du filtre calculé récursivement grâce aux équations (2-66), (2-67) et (2-68).

Notons que la cause de la disparition de certains termes du système d'équations (2-65) jusqu'à (2-68) figurant auparavant dans les équations de base (1-43) à (1-46) est que :

- pour le terme  $R(k+1)$  représentant la matrice de covariance de l'erreur de mesure  $V(k+1)$ , on note que cette dernière n'est pas introduite par le récepteur mais par le bruit sur le canal. Ce bruit est mathématisé par la présence de composantes aléatoires sur le vecteur d'état.
- le terme  $\Gamma(k+1)$  représentant la matrice de transition de perturbation est, d'après (2-59), égale à l'unité.

A partir du système (2-5), ainsi que l'équation (2-21), on peut déduire :

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}; \quad Q = \sigma_B^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{11} & q_{12} \\ 0 & 0 & 0 & q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (2-69)$$

## 2.5. Initialisation de l'algorithme de KALMAN

La difficulté du problème réside dans le choix d'une méthode satisfaisante d'initialisation de la procédure algorithmique.

Nous choisissons de considérer  $A_1$  et  $A_2$  comme deux variables aléatoires indépendantes, centrées telles que :

$$E[A_1^2] = E[A_2^2] = \sigma_A^2 \quad (2-70)$$

$\sigma_A^2$  n'est pas fixée numériquement, mais elle est considérée comme étant très grande devant  $\sigma_B^2$ .

Nous calculons analytiquement les éléments des matrices  $P(0|0)$ ,  $P(1|0)$ ,  $K(1)$ ,  $P(1|1)$ ,  $P(2|1)$ ,  $K(2)$  et  $P(2|2)$  etc... et nous faisons tendre ensuite la grandeur  $\mu^2 = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}$  vers 0, ce qui est légitime d'après notre hypothèse de méconnaissance à priori.

Les calculs nous montrent alors qu'une solution peut être retenue dès que  $P(2|2)$  est connue.

### 2.5-1 CALCUL DE $P(0|0)$

D'après les équations (1-22) et (1-34), nous avons :

$$P(0|0) = E[X(0)X^T(0)]$$

$$= E \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \\ A_2 \\ x_4(0) \\ x_5(0) \end{bmatrix} [0 : A_1 : A_2 : x_4(0) : x_5(0)] \right\}$$

$$= E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^2 & A_1 A_2 & A_1 x_4(0) & A_1 x_5(0) \\ 0 & A_1 A_2 & A_2^2 & A_2 x_4(0) & A_2 x_5(0) \\ 0 & A_1 x_4(0) & A_2 x_4(0) & x_4^2(0) & x_4(0) x_5(0) \\ 0 & A_1 x_5(0) & A_2 x_5(0) & x_4(0) x_5(0) & x_5^2(0) \end{bmatrix} \quad (2-71)$$

Nous savons d'une part que :

$$E[x_4^2(0)] = E[B^2(0)] = E[x^2(0)]$$

et

$$E[x_5^2(0)] = E[\dot{B}^2(0)] = E[\dot{x}^2(0)]$$

d'autre part, d'après l'équation (2-45), nous avons :

$$E[X(0)X^T(0)] = E \left\{ \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} [x(0) : \dot{x}(0)] \right\}$$

ou encore :

$$E[x(0)x^T(0)] = \begin{bmatrix} E[x^2(0)] & E[x(0)\dot{x}(0)] \\ E[x(0)\dot{x}(0)] & E[\dot{x}^2(0)] \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_B^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix}$$

c'est à dire:

et  $E[x_A^2(0)] = E[x^2(0)] = \sigma_B^2$

$$E[x_S^2(0)] = E[\dot{x}^2(0)] = \omega_0^2 \sigma_B^2$$

Il en résulte que l'équation (2-71) devient:

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \sigma_A^2 & \circ \\ \circ & \circ & \sigma_B^2 \\ \circ & \circ & \circ & \omega_0^2 \sigma_B^2 \end{bmatrix} \quad (2-72)$$

## 2.5-2 CALCUL DE P(1|0)

Nous savons, d'après l'équation (2-67), que :

$$P(1|0) = \psi P(0|0) \psi^T + Q$$

celle-ci se traduit sous la forme :

$$P(1|0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0^2 \sigma_B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{11} & \phi_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$+ \sigma_B^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0^2 \sigma_B^2 \end{bmatrix} = \sigma_A^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0^2 \mu^2 \end{bmatrix} \quad (2-73)$$

avec:  $\mu^2 = \sigma_B^2 / \sigma_A^2$ .

### 2.5-3 CALCUL DE K(1)

D'après l'équation (2-66) on a :

$$K(1) = P(1|0) H^T [H P(1|0) H^T]^{-1}$$

Calculons, d'abord, le produit des deux matrices  $P(1|0)$  et  $H^T$ .

$$P(1|0)H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0^2 \mu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mu^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

puis :

$$HP(1|0)H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mu^2 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_A^2 = \sigma_A^2 (2 + \mu^2)$$

d'où :

$$K(1) = \frac{1}{2 + \mu^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mu^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-74)$$

#### 2.5-4 CALCUL DE P(1|1)

Nous avons d'après l'équation (2-68) :

$$P(1|1) = [I - K(1)H]P(1|0)$$

$$K(1)H = \frac{1}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mu^2 \\ 0 \end{bmatrix} [1 : 0 : 1 : 1 : 0] = \frac{1}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \mu^2 & 0 & \mu^2 & \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I - K(1)H = \frac{1}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 1+\mu^2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\mu^2 & -1 & 0 \\ -\mu^2 & 0 & -\mu^2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(1|1) = \frac{\sigma_A^2}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 1+\mu^2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\mu^2 & -1 & 0 \\ -\mu^2 & 0 & -\mu^2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \mu^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_A^2}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 1+\mu^2 & 1+\mu^2 & -1 & -\mu^2 & 0 \\ 1+\mu^2 & 1+\mu^2 & -1 & -\mu^2 & 0 \\ -1 & -1 & 1+\mu^2 & -\mu^2 & 0 \\ -\mu^2 & -\mu^2 & -\mu^2 & 2\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2+\mu^2)(\omega^2 \mu^2) \end{bmatrix} \quad (2-75)$$

2.5-5 CALCUL DE P(2|1)

D'après l'équation (2-67), on a:

$$P(2|1) = \psi P(1|1) \psi^T + Q$$

Les matrices  $\psi$ ,  $Q$  et  $P(1|1)$  sont déjà données respectivement par les expressions (2-69) et (2-75). Effectuons donc les calculs de

$P(2|1)$  par parties:

$$P(1|1) \psi^T = \frac{\sigma_A^2}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 1+\mu^2 & 1+\mu^2 & -1 & -\mu^2 & 0 \\ 1+\mu^2 & 1+\mu^2 & -1 & -\mu^2 & 0 \\ -1 & -1 & 1+\mu^2 & -\mu^2 & 0 \\ -1 & -\mu^2 & -\mu^2 & 2\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2+\mu^2)(\omega_0^2 \mu^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{11} & \phi_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_A^2}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 2(1+\mu^2) & 1+\mu^2 & -1 & -\mu^2 \phi_{11} & -\mu^2 \phi_{21} \\ 2(1+\mu^2) & 1+\mu^2 & -1 & -\mu^2 \phi_{11} & -\mu^2 \phi_{21} \\ -2 & -1 & 1+\mu^2 & -\mu^2 \phi_{11} & -\mu^2 \phi_{21} \\ -2\mu^2 & -\mu^2 & -\mu^2 & 2\mu^2 \phi_{11} & 2\mu^2 \phi_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0^2 \mu^2 (2+\mu^2) \phi_{12} & \omega_0^2 \mu^2 (2+\mu^2) \phi_{22} \end{bmatrix}$$

De même :

$$\psi P(1|1) \psi^T = \frac{\sigma_A^2}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 4(1+\mu^2) & 2(1+\mu^2) & -2 & -2\mu^2 \phi_{11} & -2\mu^2 \phi_{21} \\ 2(1+\mu^2) & 1+\mu^2 & -1 & -\mu^2 \phi_{11} & -\mu^2 \phi_{21} \\ -2 & -1 & 1+\mu^2 & -\mu^2 \phi_{11} & -\mu^2 \phi_{21} \\ -2\mu^2 \phi_{11} & -\mu^2 \phi_{11} & -\mu^2 \phi_{11} & c & d \\ -2\mu^2 \phi_{21} & -\mu^2 \phi_{21} & -\mu^2 \phi_{21} & d & e \end{bmatrix} \quad (2-76)$$



$$\frac{2+\mu^2}{\sigma_A^2} P(2|1)_{44} = c + q'_{11} = c + \mu^2(2+\mu^2)q_{11}$$

$$= [2\mu^2\phi_{11}^2 + \omega_0^2\mu^2(2+\mu^2)\phi_{12}^2] + \mu^2(2+\mu^2)[1 - \phi_{11}^2 - \omega_0^2\phi_{12}^2]$$

$$= 2\mu^2 + \mu^4(1 - \phi_{11}^2) = C$$

$$\frac{2+\mu^2}{\sigma_A^2} P(2|1)_{45} = d + q'_{12} = d + \mu^2(2+\mu^2)q_{12}$$

$$= [2\mu^2\phi_{11}\phi_{21} + \omega_0^2\mu^2(2+\mu^2)\phi_{12}\phi_{22}] + \mu^2(2+\mu^2)[-(\phi_{11}\phi_{21} + \omega_0^2\phi_{12}\phi_{22})]$$

$$= -\mu^4\phi_{11}\phi_{21} = D$$

$$\frac{2+\mu^2}{\sigma_A^2} P(2|1)_{55} = e + q'_{22} = e + \mu^2(2+\mu^2)q_{22}$$

$$= [2\mu^2\phi_{21}^2 + \omega_0^2\mu^2(2+\mu^2)\phi_{22}^2] + \mu^2(2+\mu^2)[\omega_0^2 - \omega_0^2\phi_{22}^2 - \phi_{21}^2]$$

$$= \omega_0^2\mu^2(2+\mu^2) - \mu^4\phi_{21}^2 = E$$

$$P(2|1)_{54} = P(2|1)_{45}$$

Le reste des éléments  $P(2|1)_{ij}$  ;  $i, j = 1, 2, 3$ , sont identiques aux éléments  $(\Psi P(1|1)\Psi^T)_{ij}$  ;  $i, j = 1, 2, 3$ . On trouve finalement :

$$P(2|1) = \frac{\sigma_A^2}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 4(1+\mu^2) & 2(1+\mu^2) & -2 & -2\mu^2\phi_{11} & -2\mu^2\phi_{21} \\ 2(1+\mu^2) & 1+\mu^2 & -1 & -\mu^2\phi_{11} & -\mu^2\phi_{21} \\ -2 & -1 & 1+\mu^2 & -\mu^2\phi_{11} & -\mu^2\phi_{21} \\ -2\mu^2\phi_{11} & -\mu^2\phi_{11} & -\mu^2\phi_{11} & C & D \\ -2\mu^2\phi_{21} & -\mu^2\phi_{21} & -\mu^2\phi_{21} & D & E \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

### 2.5-6 CALCUL DE $K(2)$

D'après l'équation (2-66), on peut

$$K(2) = P(2|1)H^T[HP$$

$$P(2|1)H^T = \frac{\sigma_A^2}{2+\mu^2} \begin{bmatrix} 2 + 2\mu^2(2 - \phi_{11}) \\ 1 + \mu^2(2 - \phi_{11}) \\ -1 + \mu^2(1 - \phi_{11}) \\ \mu^2(2 - 3\phi_{11}) + \mu^4(1 - \\ -\mu^2(3\phi_{21}) - \mu^4(\phi_{11}) \end{bmatrix}$$

$$HP(2|1)H^T = \frac{\sigma_A^2}{2+\mu^2} [1 + \mu^2(7 - 6\phi_{11})]$$

$$K(2) = \frac{1}{1 + \mu^2(7 - 6\phi_{11}) + \mu^4(1 - \phi_{11}^2)} \begin{bmatrix} - \\ / \\ - \end{bmatrix}$$

### 2.5-7 CALCUL DE $P(2|2)$

D'après l'équation (2-68), on a :

$$P(2|2) = [I - K(2)H^T]$$

Pour simplifier les calculs, posons l'expression (2-78) sous la forme :

$$K(2) = \frac{1}{\lambda} [K_1 : K_2 : K_3 : K_4 : K_5]^T$$

avec :

$$\lambda = 1 + \mu^2(7 - 6\phi_{11}) + \mu^4(1 - \phi_{11}^2)$$

dans ce cas, nous écrivons :

$$I - K(2)H = \frac{1}{\lambda} \left\{ \lambda I - [K_1 : K_2 : K_3 : K_4 : K_5]^T [1 : 0 : 1 : 1 : 0] \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \lambda - K_1 & 0 & -K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_2 & \lambda & -K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_3 & 0 & \lambda - K_3 & -K_3 & 0 \\ -K_4 & 0 & -K_4 & \lambda - K_4 & 0 \\ -K_5 & 0 & -K_5 & -K_5 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2-79)$$

Pour calculer  $P(2|2)$ , il suffit maintenant de faire le produit des deux matrices (2-79) et (2-77), et de remplacer ensuite  $K_i$  et  $\lambda$  par leurs valeurs. Posons, pour faciliter le calcul :

$$P'(2|2) = \frac{\lambda(2 + \mu^2)}{\sigma_A^2} P(2|2)$$

ou bien, puisque  $\mu^2 = \sigma_B^2 / \sigma_A^2$ ,

$$P'(2|2) = \frac{\lambda \mu^2 (2 + \mu^2)}{\sigma_B^2} P(2|2)$$

Il vient, après calcul :

$$P'(2|2)_{11} = 16\mu^2(1-\phi_{11}) + 8\mu^4(1-\phi_{11})(2+\phi_{11}) + 4\mu^6(1-\phi_{11}^2)$$

$$P'(2|2)_{12} = \frac{1}{2} P'(2|2)_{11}$$

$$P'(2|2)_{13} = -\mu^2 \cdot 12(1-\phi_{11}) - 6\mu^4(1-\phi_{11})$$

$$P'(2|2)_{14} = -4\mu^2(1-\phi_{11}) - 2\mu^4(1-\phi_{11})(5+4\phi_{11}) - 4\mu^6(1-\phi_{11}^2)$$

$$P'(2|2)_{15} = 4\mu^2\phi_{21} + 2\mu^4\phi_{21}(-1+4\phi_{11}) + 2\mu^6\phi_{21}(-1+2\phi_{11})$$

$$P'(2|2)_{21} = P'(2|2)_{12}$$

$$P'(2|2)_{22} = \frac{1}{2} P'(2|2)_{21}$$

$$P'(2|2)_{23} = -6\mu^2(1-\phi_{11}) - 3\mu^4(1-\phi_{11})$$

$$P'(2|2)_{24} = -2\mu^2(1-\phi_{11}) - \mu^4(1-\phi_{11})(5+4\phi_{11}) - 2\mu^6(1-\phi_{11}^2)$$

$$P'(2|2)_{25} = 2\mu^2\phi_{21} + \mu^4\phi_{21}(4\phi_{11}-1) + \mu^6\phi_{21}(2\phi_{11}-1)$$

$$P'(2|2)_{31} = P'(2|2)_{13}$$

$$P'(2|2)_{32} = P'(2|2)_{23}$$

$$P'(2|2)_{33} = 2\mu^2(5-4\phi_{11}) - \mu^4(7-2\phi_{11})(1+\phi_{11}) + \mu^6(1-\phi_{11}^2)$$

$$P'(2|2)_{34} = 2\mu^2(1-2\phi_{11}) - \mu^4(1+2\phi_{11}+2\phi_{11}^2) - \mu^6(1-\phi_{11}^2)$$

$$P'(2|2)_{35} = -4\mu^2\phi_{21} - 2\mu^4\phi_{21}(2-\phi_{11}) - \mu^6\phi_{21}(1-\phi_{11})$$

$$P'(2|2)_{41} = P'(2|2)_{14}$$

$$P'(2|2)_{42} = P'(2|2)_{24}$$

$$P'(2|2)_{43} = P'(2|2)_{34}$$

$$P'(2|2)_{44} = 2\mu^2 + \mu^4(11 - 10\phi_{11}^2) + 6\mu^6(1 - \phi_{11}^2) - \mu^8(1 - \phi_{11}^2)$$

$$P'(2|2)_{45} = 2\mu^4\phi_{21}(3 - 5\phi_{11}) + \mu^6\phi_{21}(3 - 5\phi_{11})$$

$$P'(2|2)_{51} = P'(2|2)_{15}$$

$$P'(2|2)_{52} = P'(2|2)_{25}$$

$$P'(2|2)_{53} = P'(2|2)_{35}$$

$$P'(2|2)_{54} = P'(2|2)_{45}$$

$$P'(2|2)_{55} = 2\omega_0^2\mu^2 + 3\mu^4(5\omega_0^2 + 4\omega_0^2\phi_{11} - 3\phi_{11}\phi_{21} - \frac{1}{3}\phi_{22}^2)$$

$$+ \mu^6(9\omega_0^2 - 6\omega_0^2\phi_{11} - 2\omega_0^2\phi_{11}^2 - 7\phi_{22}^2) + \mu^8(\omega_0^2 - \omega_0^2\phi_{11}^2 - \phi_{22}^2)$$

Nous remarquons que la matrice  $P'(2|2)$  est une matrice symétrique, c'est à dire,  $P'(2|2)_{ij} = P'(2|2)_{ji}$  ;  $i, j = 1, 2, \dots, 5$ .

Faisons tendre maintenant  $\mu^2$  vers zéro.  $P(2|2)$  devient :

$$P(2|2) = \sigma_B^2 \begin{bmatrix} 8(1-\phi_{11}) & 4(1-\phi_{11}) & -6(1-\phi_{11}) & -2(1-\phi_{11}) & 2\phi_{21} \\ 4(1-\phi_{11}) & 2(1-\phi_{11}) & -3(1-\phi_{11}) & -(1-\phi_{11}) & \phi_{21} \\ -6(1-\phi_{11}) & -3(1-\phi_{11}) & (5-4\phi_{11}) & (1-2\phi_{11}) & -2\phi_{21} \\ -2(1-\phi_{11}) & -(1-\phi_{11}) & (1-2\phi_{11}) & 1 & 0 \\ 2\phi_{21} & \phi_{21} & -2\phi_{21} & 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix} \quad (2-80)$$

$P(2|2)$  ne depend que de la puissance du bruit  $\sigma_B^2$ .

Quand  $\mu^2 \rightarrow 0$ , la réduction du nombre de termes a lieu aussi dans  $K(1)$  et  $K(2)$  qui prennent les formes (voir équations (2-74) et (2-78)):

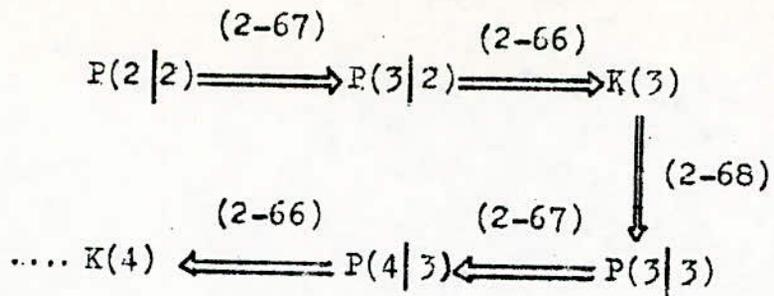
$$K(1) = \left[ \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 0 : 0 \right]^T \quad (2-81)$$

$$K(2) = \left[ 2 : 1 : -1 : 0 : 0 \right]^T \quad (2-82)$$

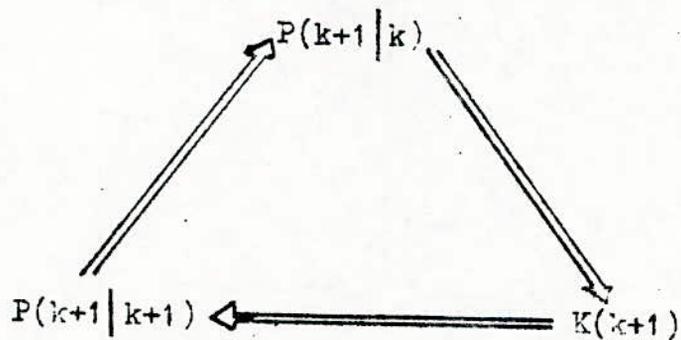
## 2.5-8 CONCLUSION

Nous choisissons donc les expressions (2-80), (2-81) et (2-82) pour l'initialisation de la procédure de KALMAN.

A partir du résultat (2-80) et à l'aide des équations d'estimation (2-66), (2-67) et (2-68), le gain du filtre  $K$  sera calculé facilement d'une manière récursive. Ceci peut s'expliquer par le schéma simple suivant:



En utilisant un calculateur, il suffit de mémoriser la matrice  $P(2|2)$  pour que les calculs de gain se déroulent en fermant la boucle comme le montre le schéma suivant :



---

---

## REALISATION DU FILTRE DERIVATEUR

---

---

### 3.1. Description sommaire des manipulations sur microordinateur

Le programme des organigrammes décrits par les figures 5 et 6, a été exécuté à l'Université de Toulon et de Var sur microordinateur Hewlett - Packard de type HP 9826. Ce dernier est un appareil de table de capacité mémoire : 512 K octets. Il comporte un microprocesseur 16 bits. En outre, il est doté d'un clavier alphanumérique et d'un système de visualisation numérique ou graphique sur écran. Les données, les instructions ou les résultats peuvent être également inscrits sur imprimante alphanumérique ou sur table traçante graphique.

Le microordinateur H P 9826 peut dialoguer dans les langages suivants: BASIC, HPL, et PASCAL.

Pour résoudre les relations de Kalman ( équations ( 1-43 ) à ( 1 - 46 ), nous avons préféré travailler en BASIC car ce langage permet de converser aisément avec la machine. Les différentes étapes de ce calcul sont brièvement les suivantes:

- Calcul de l'algorithme du gain  $K(k+1)$
- Simulation sur H P 9826 d'un bruit de second ordre.
- Estimation optimale de l'état  $X(k+1)$  du système de communication considéré.

Les résultats obtenus se traduisent sous forme d'un listing joint en annexe ( Voir Annexe 3 ).

## 3.2. Calcul de l'algorithme de gain

Au début du programme, un emplacement dans la mémoire du micro-ordinateur est réservé pour chacune des matrices qui interviennent dans l'ensemble des calculs. Puis, les différents gains sont obtenus à partir de la relation ( 1-44 ) et des conditions d'initialisation énoncées au paragraphe 2-5, et sont stockés sous forme d'un tableau  $L_a(I,J)$ . Celui - ci s'écrit :

$$L_a = \begin{bmatrix} K_1(1) & K_1(2) & \dots & K_1(M) \\ K_2(2) & & & \\ \vdots & & & \\ K_5(1) & & & K_5(M) \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

On trouve après calcul ( Equations (2-79) et (2-80) ) :

$$K(1) = \begin{bmatrix} K_1(1) \\ K_2(1) \\ K_3(1) \\ K_4(1) \\ K_5(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K(2) = \begin{bmatrix} K_1(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ K_5(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarquons que ce tableau sera utilisé ultérieurement lors du calcul de l'estimation de l'état  $X(k)$ .

L'élaboration d'un tel tableau nécessite les étapes suivantes:

- 1 - Réserver un emplacement mémoire pour chaque matrice.
- 2 - Phase 1: Calculer les éléments de matrice  $\psi$
- 3 - Phase 2: Transférer ces éléments vers l'emplacement de  $\psi$  dans la mémoire.

- 4 - Phase 3: Calculer les éléments de matrice  $Q$  et les transférer vers l'emplacement mémoire attribué à  $Q$
- 5 - Phase 4: Calculer les éléments de matrice  $P(2|2)$  et les transférer vers l'emplacement mémoire réservé pour  $P(2|2)$ .
- 6 - Phase 5: Introduire en mémoire les valeurs numériques des éléments de matrice  $H$ , calculés dans le paragraphe 2 - 4.
- 7 - Utiliser l'instruction " FOR S=3 TO 100 " pour ouvrir une boucle dans le but de calculer le gain en commençant à partir de la troisième colonne de la matrice  $L_a(I, J)$ . C'est à dire à partir de  $K(3)$ .
- 8 - Phase 6: Calculer les éléments de matrice  $P(k+1|k)$  et les transférer vers l'emplacement mémoire réservé pour  $P(k+1|k)$  ( cette matrice est notée  $R$  dans l'équation (2-67) ). Le calcul se fait dans l'ordre suivant:

$$P \psi^T = E$$

$$\psi E = F$$

$$F+Q = R$$

- 9 - Phase 7: Calculez le gain  $K(k+1)$  (noté  $K$  dans l'équation (2-66) en tenant compte de l'ordre suivant:

$$R H^T = G$$

$$H G = M_1$$

$$K = G/M_1$$

- 10 : Adresser le résultat  $K$  au tableau  $L_a$ . C'est à dire qu'on a:

$$L_a(I, S) = K(I)$$

avec  $I = 1, 2, \dots, 5$  et  $S = 1, 2, \dots, 100$

Ceci constitue la fin du premier cycle de calcul. Passons maintenant aux cycles suivants:

11 - Phase 8: Calculer la matrice  $P(k+1|k+1)$  (notée  $P$  dans l'équation (2.63)) en tenant compte de l'ordre suivant:

$$HR = U$$

$$KU = V$$

$$R - V = P$$

12 - Appliquer l'instruction " NEXTS " pour fermer la boucle et commencer le prochain cycle de calcul en repartant de la phase 7.

13 - Remplir le tableau  $L_a$ .

14 - Fin du programme concernant le calcul du gain.

### 3.3. Génération d'un bruit de second ordre

#### 3-3-1 METHODES DE GENERATION D'ECHANTILLONS DE BRUIT :

Pour trouver la meilleure estimation  $\hat{X}(k+1|k+1)$  (voir équation (2.65)), il est indispensable de générer le bruit de second ordre et sa dérivée première, car ceux-ci représentent deux des cinq composantes du vecteur d'état  $X(k)$  tel que nous l'avons choisi au paragraphe 2-4.

Le bruit de second ordre peut-être obtenu:

- à partir d'un générateur de bruit.
- Par enregistrement sur bandes magnétiques ou sur disques d'une séquence d'échantillons de bruit.
- ou bien par simulation sur ordinateur.

Considérons un générateur dont la bande passante de bruit est  $F_B$  et qui délivre un signal aléatoire  $B(t)$ , comme celui de la figure 3.

Ce bruit peut être représenté numériquement par des échantillons de période  $T_B = \frac{1}{2F_B}$ , en application du théorème d'échantillonnage d

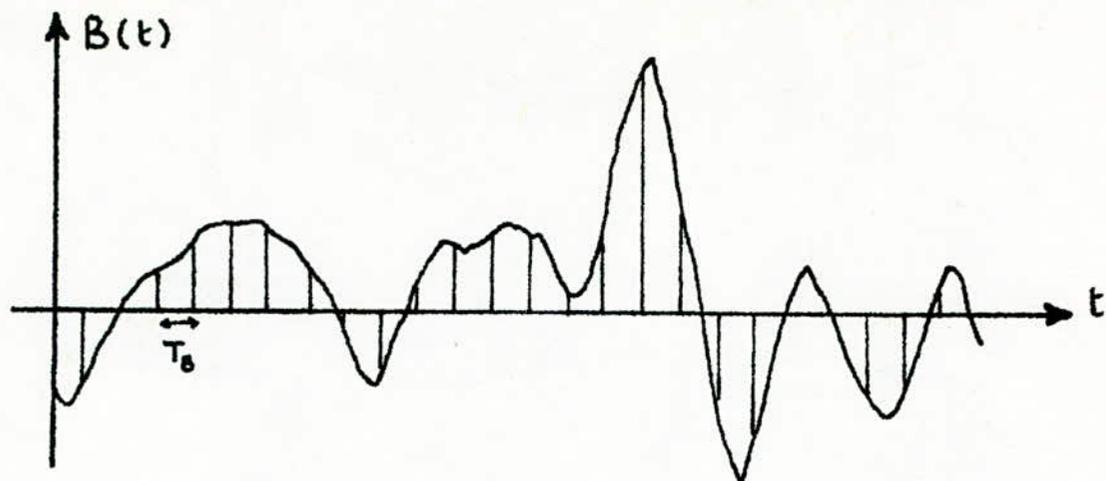


Figure 8 : Bruit continu

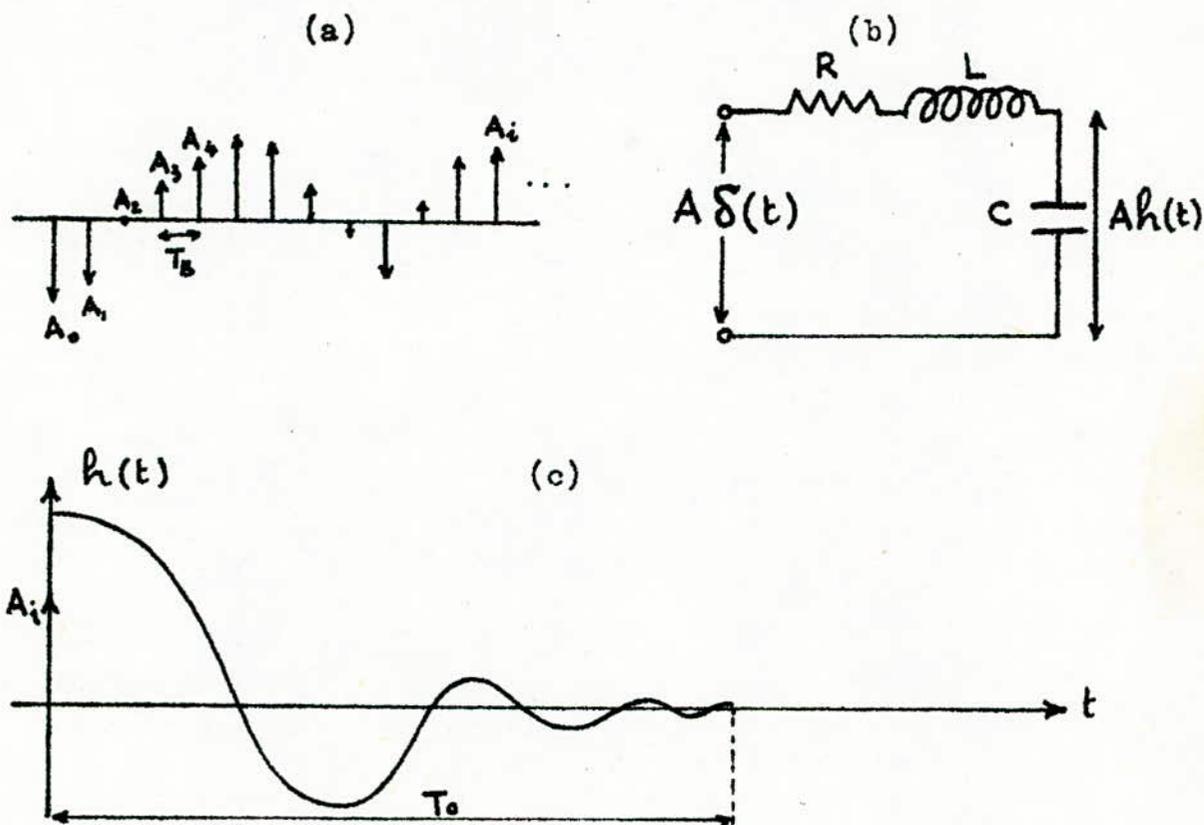


Figure 9: a/ Echantillons de bruit

b/ Circuit RLC

c/ Réponse impulsionnelle d'un échantillon

SHANNON ( Voir annexe 2 ) [ 17 ] . Ces échantillons qui sont très proches l'un de l'autre, peuvent ne pas être indépendants. On a alors dans ce cas un bruit coloré. Pour obtenir un bruit blanc, il faut prendre la période  $T_e$  des échantillons suffisamment grande, pour que ces derniers deviennent indépendants. Autrement dit, on doit avoir  $T_e > T_B$  .

Le choix de la période  $T_e$  se fait en fonction des critères suivants:

- Le nombre d'échantillons de bruit durant la période  $\tau$  séparant deux échantillons du signal observé ne doit pas être trop élevé. Dans le cas contraire, on aurait une trop grande corrélation entre les échantillons de bruit et le signal risquerait d'être étouffé par le bruit.
- Ce même nombre ne doit pas être trop petit afin qu'il puisse répondre aux variations importantes de bruit.

Durant la période  $\tau$  , la puissance de bruit  $\sigma_B^2$  ne doit pas être trop forte par rapport à celle du signal utile.

L'application de l'ensemble de ces critères nécessite la connaissance de la réponse percussionnelle du bruit.

### 3- 3- 2- REPONSE PERCUSSIONNELLE D'UN BRUIT ECHANTILLONNE :

Prenons un échantillon de bruit d'amplitude  $A_0$  . Multiplions le par une impulsion  $\delta(t)$  et appliquons le à l'entrée d'un circuit R L C (fig. 9) . A la sortie de celui-ci, nous devons avoir une réponse percussionnelle  $h(t)$  qui n'aura lieu qu'après l'application de  $\delta(t)$  (voir annexe 2) .

A l'instant suivant, introduisons un deuxième échantillon  $A_1$  . A l'entrée, on aura donc  $A_1 \delta(t - \Delta\tau)$  et à la sortie, on obtiendra

$A_i h(t - \Delta\tau)$  ( avec  $\Delta\tau = T_e$  = période séparant deux échantillons de bruit). Ainsi, pour  $n$  échantillons de bruit successifs, la réponse totale sera :  $\sum_{i=0}^n A_i h(t - i \Delta\tau)$  où  $h$  dépend des paramètres du circuit.

De façon générale, ce résultat peut-être étendu au cas d'un bruit quelconque  $B(t)$ . Soit:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n A_i h(t - i \Delta\tau) \quad (3-2)$$

où  $A_i$  sont des paramètres aléatoires.

La figure 8 C donne l'allure générale de la réponse percussionnelle d'un échantillon de bruit. La longueur  $T_0$  représente la durée au delà de laquelle la réponse est approximativement nulle. Par définition, cet intervalle de temps est appelée mémoire du filtre. Expérimentalement, on considère que l'amplitude de l'onde devient négligeable quand elle est inférieure à  $\frac{2}{100} A_k$ , où  $A_k$  est l'amplitude de l'impulsion de bruit considérée ( ce chiffre est de l'ordre de la résolution de l'écran du H P 9826 ). Dans ce cas, pour le circuit R L C, la mémoire du filtre sera  $T_0 \approx 4/\alpha$ , où  $\alpha$  est la constante de temps du circuit RLC.

Pour simuler un bruit gaussien de second ordre, nous pouvons utiliser la série ( 3-2). Mais au préalable, il faut résoudre l'équation ( 2-2) en calculant la réponse percussionnelle du bruit  $X(t)$ .

La convolution pour le bruit blanc  $u(t)$  est donnée par (voir annexe 2 ):

$$u^*(t) = \sum_0^{\infty} u(t) \delta(t - nT_e) = \sum_0^{\infty} u(nT_e) \delta(t - nT_e) \quad (3-3)$$

De même, la convolution pour un bruit  $X(t)$  sera:

$$\begin{aligned} X(t) &= u(t) * h(t) \\ &= \int_0^{T_0} u(t - \tau) h(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-4)$$

Comme nous nous intéressons à l'intercorrélation entre la sortie et l'entrée, on aura :

$$R_{xu}(\tau) = E[x(t)u(t-\tau)] = E[x(t+\tau)u(t)] \quad (3-5)$$

Pour distinguer les variables qui interviennent dans  $x$  et  $u$ , on remplace dans l'intégrale (3-4) la variable  $\tau$  par  $\eta$ , il viendra :

$$\begin{aligned} R_{xu}(\tau) &= E\left[\int_0^{T_0} h(\eta)u(t-\eta)u(t-\tau) d\eta\right] \\ &= \int_0^{T_0} h(\eta)E[u(t-\eta)u(t-\tau)] d\eta \end{aligned}$$

Les propriétés de bruit blanc donnent :

$$\begin{aligned} R_{xu}(\tau) &= \int_0^{T_0} h(\eta)\sigma_u^2 \delta(\eta-\tau) d\eta \\ &= \sigma_u^2 \int_0^{T_0} h(\eta)\delta(\eta-\tau) d\eta \\ &= \sigma_u^2 h(\tau) \end{aligned}$$

d'où :

$$h(\tau) = \frac{R_{xu}(\tau)}{\sigma_u^2} \quad (3-6)$$

Par ailleurs, si on utilise les équations (2-37) et (3-5), on a successivement :

$$R_{xu}(\tau) = \frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta(t+\tau)} \int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{2}\beta\alpha} \sin \omega_1(t+\tau-\alpha) E[u(\alpha)u(t)] d\alpha$$

$$\begin{aligned}
 R_{xu}(\tau) &= \frac{\sigma_u^2}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta(t+\tau)} \int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{2}\beta\alpha} \sin \omega_1(t+\tau-\alpha) \delta(\alpha-t) d\alpha \\
 &= \frac{\sigma_u^2}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta\tau} \sin \omega_1\tau
 \end{aligned}
 \tag{3-7}$$

En identifiant les équations (3-6) et (3-7), on obtient la réponse percussionnelle d'un bruit de second ordre :

$$h(\tau) = \frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta\tau} \sin \omega_1\tau
 \tag{3-8}$$

La figure 10 donne la réponse percussionnelle de  $x(t)$  à différents points d'échantillonnage .

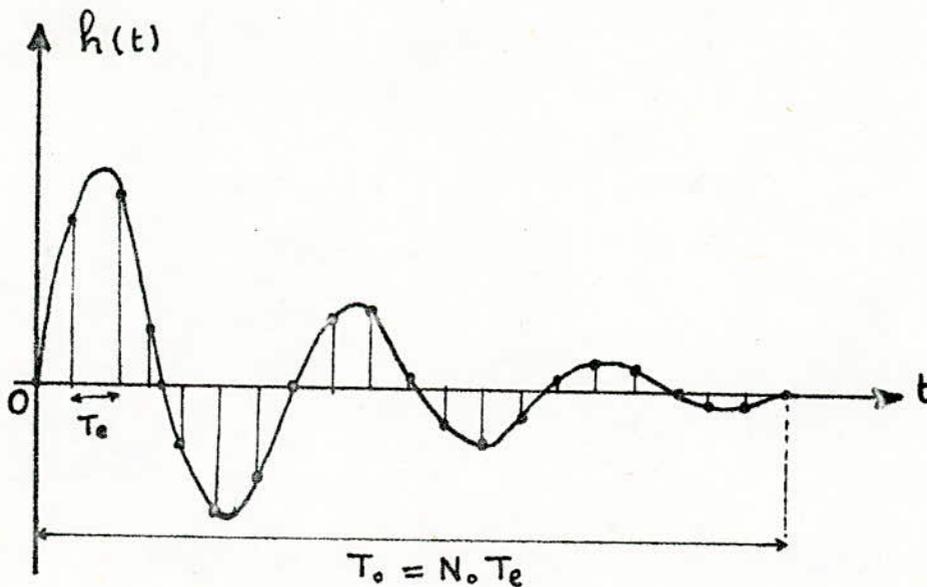


Figure 10 : Réponse percussionnelle de  $x(t)$

### 3.3-3 SIMULATION SUR ORDINATEUR D'UNE SEQUENCE DE BRUIT :

On déduit de (3-2) et (3-8) que la solution de l'équation (2-2) est du type :

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_i}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta(t-i\Delta\tau)} \sin \omega_1(t-i\Delta\tau) \quad (3-9)$$

A un instant donné  $t$ , le nombre de termes non nuls de cette série est fini et ne dépasse pas le nombre d'échantillons  $N_0$  émis pendant  $T_0$ , la mémoire du filtre ( avec  $N_0 = T_0 / T_e$  ).

Ainsi, quand  $0 \leq t < T_0$ , le nombre de termes qui interviennent dans la série (3-9) est  $N < N_0$  ( où  $N = t / T_e$  ). Cette situation constitue le régime transitoire, c'est à dire le moment au cours duquel le bruit de second ordre s'établit .

Lorsque  $t \geq T_0$ , la figure 11 montre que le nombre de termes qui apportent une contribution non nulle demeure pratiquement égal à  $N_0$ . En effet, à partir de  $T_0$ , le premier terme de la série (3-9) devient négligeable. Mais, c'est à cet instant que débute la réponse percussionnelle de l'échantillon  $N_0$  ( figure 11a). De même, à partir du temps  $T_0 + \Delta\tau$ , la contribution des deux premiers termes de la série (3-9) est pratiquement nulle. Mais, après cet instant, il faut ajouter celle des échantillons  $N_0$  et  $N_0+1$  ( figure 11b ). En raisonnant par récurrence, on se retrouve devant une situation identique pour l'échantillon  $N_0+k$ .

Par conséquent, si on veut reconstruire le bruit de second

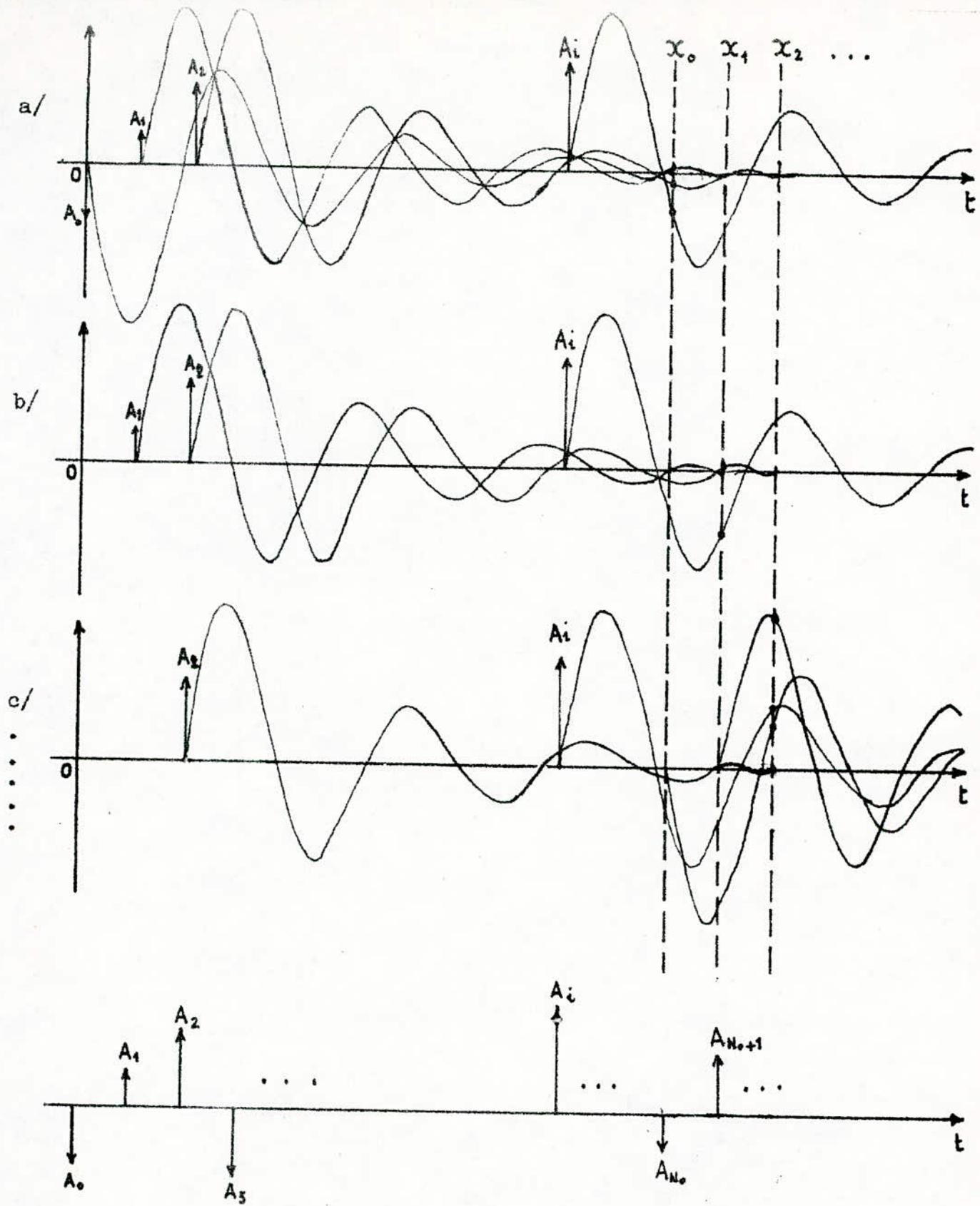


Figure 11- Principe de la reconstitution d'un bruit de 2nd ordre

ordre  $x(t)$  à un instant  $T_0 + k\Delta\tau$ , il suffit de déterminer les  $N_0$  termes les plus significatifs de la série (3-9).

À  $t = T_0$ , on aura :

$$x_0 = A_0 h(t) + A_1 h(t - \Delta\tau) + \dots + A_{N_0} h(t - N_0 \Delta\tau) \quad (3-10)$$

Pour déterminer le bruit  $x(t)$  à d'autres instants ( $t > T_0$ ), il suffit de faire à chaque fois une translation dans l'échelle des temps

Ainsi, pour le bruit  $x_1$  mesuré à l'instant  $T_0 + \Delta\tau$ , l'origine des temps des réponses percussionnelles sera prise à  $\Delta\tau$  et il viendra (d'après la figure 11b):

$$x_1 = A_1 h(t) + A_2 h(t - \Delta\tau) + \dots + A_{N_0+1} h(t - N_0 \Delta\tau) \quad (3-11)$$

De même, le bruit  $x_2$  qui se produit à l'instant  $T_0 + 2\Delta\tau$  s'écrira :

$$x_2 = A_2 h(t) + A_3 h(t - \Delta\tau) + \dots + A_{N_0+2} h(t - N_0 \Delta\tau) \quad (3-12)$$

En raisonnant par récurrence, on trouve l'expression générale suivante :

$$x_m = \sum_{k=0}^{N_0} A_{k+m} h(t - k \Delta\tau) \quad (3-13)$$

On obtient donc une séquence de bruit gaussien de second ordre  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  dont les éléments correspondent respectivement aux valeurs discrètes de temps  $t = T_0; T_0 + \Delta\tau; T_0 + 2\Delta\tau; \dots$

Pour sa programmation, nous avons trouvé expérimentalement

qu'il était nécessaire de produire 20 échantillons par mémoire de filtre pour générer chaque élément de la séquence de bruit  $\{x_m\}$ .

Les coefficients aléatoires  $A_{k+m}$  peuvent être obtenus à partir de l'instruction RND du microcalculateur HP 9826, car celle-ci permet de produire des valeurs aléatoires positives et inférieures à l'unité.

Pour générer des valeurs aléatoires algébriques quelconques, il suffit de retrancher à cette instruction la valeur 0,5, puis multiplier l'ensemble par un coefficient de pondération  $\alpha$  convenablement choisi. Ceci s'écrit dans le langage BASIC: "(RND-.5)\* $\alpha$ ".

On a pris la valeur 0,5 pour pouvoir centrer autour d'elle les fluctuations engendrées par l'instruction RND. D'autre part, cette valeur correspond à un état équiprobable. Le coefficient  $\alpha$  est ajusté en fonction de la puissance de bruit.

Le programme permettant de générer la séquence de bruit  $\{x_m\}$  a été enchaîné au programme de gain (voir paragraphe 3-2 et listings de l'annexe 3). Ceci nous permet d'utiliser des données communes pour mettre ensuite en équation l'observation  $Z$ , puis déterminer la meilleure estimation  $\hat{X}$ .

Les différentes étapes qu'il faut ajouter au programme de gain pour engendrer un bruit gaussien de second ordre sont :

Phase 9-1: produire des échantillons de bruit (notés  $A_k$ ) à l'aide de l'instruction  $(RND-.5)*\alpha$ .

Phase 9-2: calculer l'écart type  $\sigma$  (noté  $S_g$ ).

Phase 9-3: calculer la réponse percussionnelle (notée  $R_e$ ) en utilisant l'équation (3-8) dans laquelle le paramètre

$\tau$  a été remplacé par le temps  $t = k\Delta\tau$ . Pour faciliter la programmation de cette équation, nous sommes partis d'un instant  $t = 2k\Delta\tau$ . Puis, nous avons posé successivement

$$\theta_2 = \omega_1 k \Delta\tau ; \theta_3 = \frac{1}{2} \beta k \Delta\tau ; \gamma_2 = \sin \theta_2 \text{ et } Z_2 = \bar{e}^{\theta_3}$$

L'expression (3-8) devient :

$$R_e(k) = \frac{1}{\omega_1} e^{-\theta_3} \sin \theta_2 = \frac{Z_2 \gamma_2}{\omega_1}$$

Phase 9-4: calculer le bruit de second ordre (noté  $B_r$ ) à l'aide de la série (3-13).

Phase 9-5: calculer la puissance de bruit  $B_r$  (notée  $S_{10}$ )  
- Fin de programmation.

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires au calcul de la meilleure estimation d'un signal  $S(t)$  perturbé par un bruit de second ordre.

### 3.4. Calcul de la meilleure estimation d'un signal perturbé par un bruit gaussien de second ordre

considérons l'équation (2-1) qui caractérise l'observation d'un signal  $B(t)$  perturbé par un bruit  $B(t)$ . Pour évaluer les paramètres  $A_1$  et  $A_2$  de ce signal, nous allons utiliser l'équation (2-55). Notre <sup>choix</sup> est dû au fait que cette équation donne la meilleure estimation de l'état  $X(k) = [A_{1,k} ; A_1 ; A_2 ; B ; \dot{B}]^T$ , défini au paragraphe 2-4 par le système (2-56).

Pour tester la méthode, nous partons, par exemple, d'un signal de référence  $S_0(t)$  dont nous fixons à priori les paramètres aux valeurs  $A_{01}=5$  et  $A_{02}=10$  (voir fig. 12b). Puis, nous introduisons ces données dans le microcalculateur pour y générer ce signal et le perturber par la séquence de bruit  $\{X_m\}$ .

Le niveau de bruit est ajusté de façon voulue, en manipulant sur le coefficient  $\alpha$  dans l'instruction RND.

L'observation ainsi obtenue est filtrée de manière à avoir l'estimation optimale  $\hat{S}_0(kZ)$ . C'est à dire qu'on aura:

$$Z_0(kZ) \equiv \hat{S}_0(kZ) = \hat{A}_{01} \cdot kZ + \hat{A}_{02} \quad (3-14)$$

La courbe 12d donne l'estimé  $\hat{S}_0$ . On constate que celle-ci a la même allure que le signal test  $S_0(t)$ .

De même, les figures 13 montrent cette opération pour différentes valeurs de la puissance du bruit ainsi que de  $\beta$ .

Pour réaliser une telle opération, il est nécessaire d'ajouter à la suite des programmes de gain et de bruit, les étapes suivantes:

Phase 9-6: calculer l'estimé  $\hat{S}_0(kZ)$  à partir de l'équation

(2-65) en respectant l'ordre suivant:

- a/ introduire les valeurs fixées de  $A_{01}$  et  $A_{02}$
- b/ tracer l'observation  $Z$  avant le filtrage.
- c/ calculer successivement:

$$\Psi \hat{X} = Y$$

$$H \cdot Y = M$$

$$Z - M = T$$

$$La^* T = W$$

$$Y - W = \hat{X}$$

d/ fin

Omea0=100π

Sigma=2444

Beta= 2

And = 3

le = .0005

TABIEAU-1

TRANSPOSE DE LA MATRICE DU GAIN La(I,S)

.500	.500	.500	0.000	0.000
2.000	1.000	-1.000	0.000	0.000
1.500	.500	8.032	-8.532	960.120
13.901	3.475	-3.957	-8.945	-1945.068
14.761	2.952	-5.218	-8.543	-1432.102
14.405	2.401	-3.596	-7.807	-904.364
12.857	1.837	-5.020	-6.829	-369.492
11.410	1.426	-4.451	-5.959	14.843
10.134	1.126	-3.920	-5.214	292.975
9.071	.907	-3.477	-4.594	473.522
8.106	.744	-3.110	-4.075	641.224
7.446	.620	-2.806	-3.640	752.130
6.821	.525	-2.551	-3.270	837.071
6.289	.449	-2.336	-2.953	903.292
5.832	.389	-2.153	-2.679	955.753
5.434	.340	-1.995	-2.439	997.910
5.087	.299	-1.858	-2.228	1032.220
4.780	.266	-1.730	-2.042	1060.461
4.508	.237	-1.633	-1.875	1083.942
4.265	.213	-1.539	-1.726	1103.646
4.046	.193	-1.455	-1.591	1120.314
3.848	.175	-1.379	-1.469	1134.521
3.669	.160	-1.311	-1.358	1146.710
3.506	.146	-1.249	-1.256	1157.233
3.356	.134	-1.193	-1.163	1166.368
3.219	.124	-1.142	-1.077	1174.340
3.092	.115	-1.094	-1.000	1181.329
2.975	.106	-1.051	-0.924	1187.403
2.866	.099	-1.010	-0.856	1192.924
2.765	.092	-0.973	-0.792	1197.753
2.671	.086	-0.938	-0.733	1202.052
2.583	.081	-0.906	-0.677	1205.893
2.501	.076	-0.876	-0.625	1209.335
2.424	.071	-0.848	-0.576	1212.420
2.351	.067	-0.821	-0.530	1215.214
2.282	.063	-0.796	-0.486	1217.730
2.210	.060	-0.773	-0.445	1220.000
2.157	.057	-0.751	-0.406	1222.074
2.099	.054	-0.730	-0.369	1223.952
2.044	.051	-0.710	-0.334	1225.662
1.992	.049	-0.691	-0.301	1227.222
1.943	.046	-0.674	-0.269	1228.648
1.896	.044	-0.657	-0.239	1229.953
1.851	.042	-0.641	-0.211	1231.149
1.808	.040	-0.625	-0.183	1232.247
1.768	.038	-0.611	-0.157	1233.256
1.729	.037	-0.597	-0.132	1234.184
1.691	.035	-0.583	-0.108	1235.040
1.656	.034	-0.571	-0.085	1235.829
1.621	.032	-0.559	-0.063	1236.557
1.588	.031	-0.547	-0.041	1237.230
1.557	.030	-0.536	-0.021	1237.853
1.526	.029	-0.525	-0.002	1238.429
1.497	.028	-0.515	0.017	1238.963
1.469	.027	-0.505	0.035	1239.458
1.442	.026	-0.495	0.053	1239.917
1.416	.025	-0.486	0.070	1240.343
1.391	.024	-0.477	0.086	1240.739
1.367	.023	-0.469	0.102	1241.107
1.343	.022	-0.460	0.117	1241.449
1.321	.022	-0.452	0.132	1241.767
1.299	.021	-0.445	0.146	1242.063

TABLEAU 2

## LES VALEURS DU BRUIT DE SECOND ORDRE

.00766	.00050	.01700	.04366	.07000
.09340	.11446	.13413	.15251	.16700
.17757	.18227	.18014	.17354	.16290
.14944	.13359	.11427	.09647	.08660
.08342	.08999	.10129	.11741	.13900
.16579	.17522	.22682	.25483	.27740
.29177	.29801	.29410	.28091	.25830
.22708	.19298	.15519	.11867	.08290
.04912	.02161	.00141	.00805	.00740
.00617	.03580	.07839	.13295	.19000
.24284	.20675	.31691	.32768	.32200
.30059	.26697	.22475	.18107	.14190
.10985	.08957	.08493	.09943	.12890
.17325	.22492	.27910	.32631	.36390
.39282	.40909	.40779	.38675	.34590
.29112	.22902	.17002	.11445	.07180
.04960	.04675	.06546	.10571	.15820
.22363	.27244	.35956	.42075	.47170
.50681	.53248	.53502	.52142	.49380
.45181	.39411	.32419	.24464	.15910

TABLEAU 3

TRANSPOSE DE LA MEILLEURE ESTIMATION  $X_a(I, S)$ 

$X_a(1, S)$	$X_a(2, S)$	$X_a(3, S)$	$X_a(4, S)$	$X_a(5, S)$
7.49617	7.49617	7.49617	0.00000	0.00000
10.01432	5.00716	9.98518	0.00000	0.00000
15.03819	5.01273	10.07467	-.09506	10.69733
20.02339	5.00585	10.08251	-.06224	23.10744
24.95555	4.99111	10.10856	.00606	34.91504
29.92136	4.98689	10.11838	.05366	33.87210
34.95484	4.99355	10.10016	.05945	25.36497
39.99629	4.99954	10.08148	.05636	18.19793
45.03415	5.00379	10.06666	.05171	12.72453
50.04577	5.00458	10.06366	.05775	7.47511
55.06115	5.00556	10.05955	.05687	2.30503
60.06422	5.00535	10.06049	.05756	-3.57530
65.06152	5.00473	10.06350	.05512	-9.91591
70.07296	5.00521	10.06101	.03997	-13.69669
75.07540	5.00503	10.06203	.02551	-17.17164
80.07787	5.00487	10.06297	.00860	-19.09947
85.07460	5.00439	10.06594	-.00695	-20.46157
90.05975	5.00332	10.07294	-.01842	-22.86024
95.06467	5.00340	10.07236	-.04057	-19.35533
100.08295	5.00415	10.06699	-.06355	-10.45402
105.08714	5.00415	10.06698	-.07070	-3.60754
110.10123	5.00460	10.06341	.07466	6.20682
115.09447	5.00411	10.06747	.06066	9.58204
120.09742	5.00406	10.06789	.04790	14.49805
125.10619	5.00425	10.06621	.03300	19.91170
130.11382	5.00438	10.06501	.01304	23.16760
135.12357	5.00458	10.06311	.00854	25.12487
140.13661	5.00488	10.06012	.03009	26.20527
145.13846	5.00477	10.06119	.05518	20.50219
150.14457	5.00482	10.06072	.07217	14.55042
155.14610	5.00471	10.06188	.08300	5.24207
160.15207	5.00475	10.06143	.08451	-2.57034
165.15175	5.00460	10.06321	.07914	-13.87422
170.15303	5.00452	10.06410		

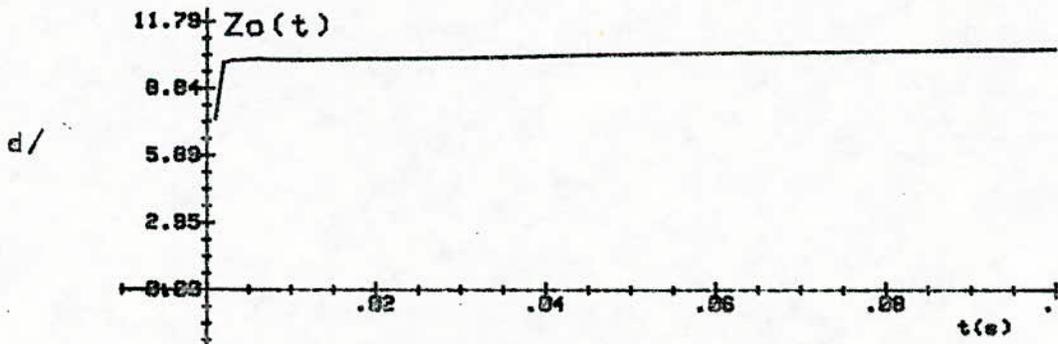
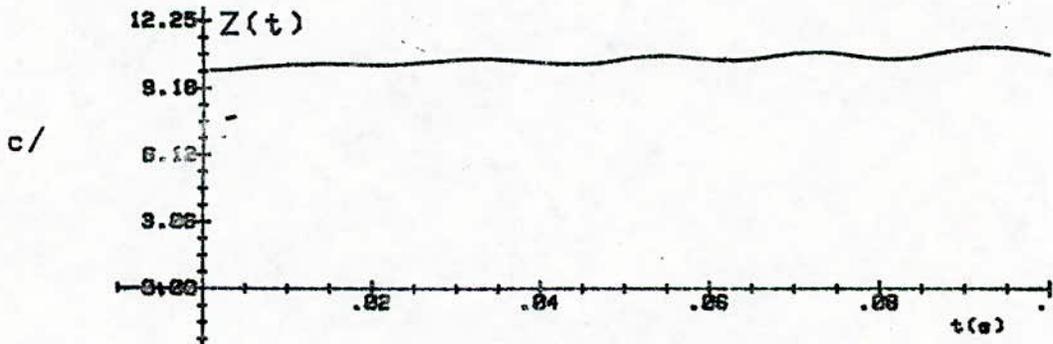
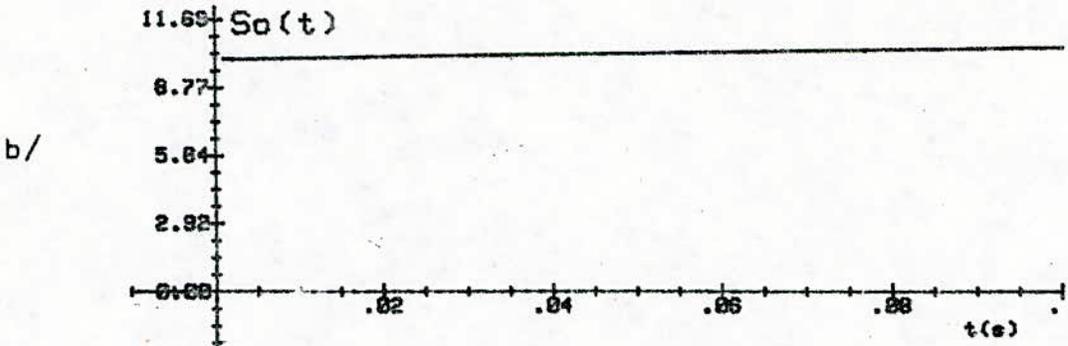
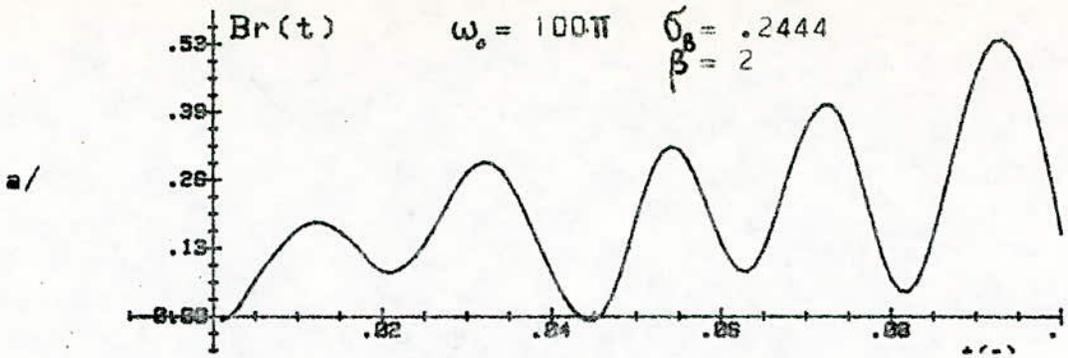


Fig.12- a/ bruit gaussien de second ordre  
 b/ signal test (utile)  
 c/ l'observation avant filtrage  
 d / l'observation après filtrage

$$\Omega_{med} = 2\pi$$

$$\text{Amp} = 40$$

$$\text{Beta} = 2$$

$$T_e = .29$$

TABLEAU 1

TRANSPOSE DE LA MATRICE DU GAIN  $L_a(I, S)$

.500	.500	.500	0.000	0.000
2.000	1.000	-1.000	0.000	0.000
1.500	.500	3.442	-3.942	16.404
3.761	.940	.504	-3.265	8.162
4.535	.907	-.246	-3.290	8.824
5.348	.891	-1.061	-3.287	9.123
6.678	.811	-1.455	-3.223	10.628
7.705	.723	-1.678	-3.107	12.249
8.717	.635	-1.766	-2.950	13.849
9.556	.556	-1.781	-2.775	15.276
10.346	.486	-1.753	-2.593	16.508
11.117	.426	-1.702	-2.415	17.552
11.884	.376	-1.640	-2.244	18.429
12.657	.333	-1.573	-2.084	19.164
13.440	.296	-1.506	-1.934	19.783
14.236	.265	-1.441	-1.795	20.304
15.045	.238	-1.378	-1.666	20.746
15.867	.215	-1.319	-1.548	21.123
16.701	.195	-1.264	-1.436	21.445
17.548	.177	-1.212	-1.336	21.722
18.405	.162	-1.163	-1.242	21.961
19.273	.149	-1.118	-1.155	22.169
20.149	.137	-1.075	-1.074	22.351
21.034	.126	-1.036	-.998	22.510
21.926	.117	-.999	-.928	22.650
22.826	.109	-.964	-.862	22.773
23.732	.101	-.932	-.800	22.883
24.644	.094	-.901	-.742	22.980
25.561	.088	-.872	-.688	23.067
26.482	.083	-.845	-.637	23.144
27.409	.078	-.820	-.589	23.214
28.339	.073	-.796	-.543	23.277
29.274	.069	-.773	-.500	23.333
30.212	.065	-.752	-.460	23.384
31.153	.062	-.732	-.421	23.431
32.097	.058	-.712	-.384	23.473
33.044	.055	-.694	-.350	23.511
34.023	.052	-.677	-.317	23.546
35.045	.050	-.660	-.286	23.577
36.099	.047	-.644	-.255	23.606
37.185	.045	-.629	-.226	23.633
38.314	.043	-.615	-.199	23.657
39.473	.041	-.601	-.172	23.680
40.675	.039	-.588	-.147	23.700
41.920	.038	-.575	-.123	23.719
43.203	.036	-.563	-.100	23.737
44.527	.035	-.552	-.078	23.753
45.897	.033	-.540	-.057	23.767
47.316	.032	-.530	-.036	23.781
48.777	.031	-.519	-.016	23.794
50.283	.030	-.510	.003	23.806
51.827	.028	-.500	.021	23.817
53.412	.027	-.491	.038	23.827
55.040	.026	-.482	.055	23.836
56.714	.025	-.473	.072	23.845
58.427	.025	-.465	.088	23.853
60.182	.024	-.457	.103	23.860
62.000	.023	-.450	.118	23.867
63.875	.022	-.442	.132	23.874
65.810	.021	-.435	.146	23.880
67.807	.021	-.428	.160	23.885

1.249	.020	.421	.173	23.891
1.229	.020	.415	.185	23.896
1.211	.019	.408	.198	23.900
1.193	.018	.402	.209	23.904
1.175	.018	.396	.221	23.908
1.158	.017	.390	.232	23.912
1.142	.017	.385	.243	23.915
1.126	.016	.379	.254	23.919
1.110	.016	.374	.264	23.922
1.095	.015	.369	.274	23.924
1.080	.015	.364	.284	23.927
1.066	.015	.359	.293	23.929
1.052	.014	.354	.303	23.931
1.038	.014	.349	.312	23.934
1.025	.013	.345	.320	23.935
1.012	.013	.341	.329	23.937
.999	.013	.336	.337	23.939
.987	.012	.332	.345	23.940
.975	.012	.328	.353	23.942
.963	.012	.324	.361	23.943
.951	.012	.320	.369	23.944
.940	.011	.316	.376	23.945
.929	.011	.313	.383	23.946
.919	.011	.309	.390	23.947
.908	.011	.305	.397	23.948
.898	.010	.302	.404	23.949
.888	.010	.299	.411	23.950
.878	.010	.295	.417	23.950
.869	.010	.292	.423	23.951
.859	.009	.289	.429	23.952
.850	.009	.286	.436	23.952
.841	.009	.283	.441	23.953
.833	.009	.280	.447	23.953
.824	.009	.277	.453	23.953
.816	.008	.274	.458	23.954
.807	.008	.271	.464	23.954
.799	.008	.268	.469	23.954
.791	.008	.266	.475	23.954
.784	.008	.263	.480	23.954
.00025	.85893			

TABLEAU 2

LES VALEURS DU BRUIT DE SECOND ORDRE

-1.95121	-1.35380	2.28073	-4.15172	-4.60108
-3.71284	-2.15770	-3.13463	-2.66341	-3.17508
-2.54112	-.94949	-1.89225	-.17193	-.03231
-2.27072	-.92722	1.10704	.48560	.23263
-1.85964	1.06255	1.34328	-1.39036	1.18775
1.03735	-.03050	1.10523	1.12424	1.62327
.44681	-.46889	1.27381	.58314	-1.45617
.35107	1.22499	1.39285	-1.25314	-2.41631
-.91930	1.47181	-3.79212	-1.58785	-1.20625
3.04906	.32539	.87754	-3.69915	-2.17800
1.54359	-4.26010	-3.65833	-2.01305	-1.09933
-2.86580	-.80185	1.43546	-1.36741	-2.60899
-.46726	2.45550	.65741	.48460	-2.27578
1.13054	-1.56089	-1.10634	.72074	1.20627
.03186	.82262	-1.64301	-2.57714	.22260
2.20726	-1.06495	1.04239	2.00695	-.52462
1.50720	1.82990	.08238	2.85358	-.25877
.37320	1.32183	.89087	1.98597	3.01046
.53079	3.00523	3.38323	2.53224	1.94816
.86214	-.14908	-.76299	-1.92904	-1.80268

TABLEAU 3

TRANSPOSE DE LA MEILLEURE ESTIMATION  $X_a(I, S)$ 

$X_a(1, S)$	$X_a(2, S)$	$X_a(3, S)$	$X_a(4, S)$	$X_a(5, S)$
6.52440	6.52440	6.52440	0.00000	0.00000
11.19481	5.59741	7.45138	0.00000	0.00000
14.50573	4.83524	2.20483	6.00872	-25.00474
18.47463	4.61866	2.00862	5.28503	-34.53625
31.36637	6.27327	1.64024	-2.60768	-23.37278
40.82275	6.80379	1.00050	-5.54410	-9.71906
47.29846	6.75692	1.09256	-5.54893	1.42421
36.29250	4.53656	6.24563	4.32724	-26.01817
54.41662	6.04629	2.04701	-4.12704	2.53597
50.02640	5.00264	5.39330	-1.40522	-18.80679
63.53055	5.77550	2.60552	-3.67719	7.51164
70.74832	5.89569	2.12576	-3.82356	18.25738
62.53569	4.81044	6.86273	3.70933	-30.44460
83.79242	5.98517	1.30655	-5.27090	34.66531
77.59850	5.17323	5.43809	1.93111	-14.71263
75.90512	4.74407	7.77385	4.05032	-49.13126
97.03849	5.70815	2.18882	-5.22524	34.40058
100.86745	5.60375	2.02993	-2.59034	28.97505
96.39146	5.07323	6.27104	2.82310	-28.72987
105.64560	5.28228	4.84324	-1.24921	-4.29469
103.46947	4.92712	7.39061	2.28028	-51.31455
126.51315	5.75060	1.20340	-6.65400	74.50000
115.50749	5.02206	6.92499	2.91080	-42.66167
121.76114	5.07338	6.50456	3.34394	-32.85408
138.76656	5.55066	2.43269	-5.01149	63.55866
133.14251	5.12087	6.24471	1.65014	-26.22969
138.62820	5.13438	6.12030	2.22099	-22.50095
149.25490	5.33053	4.24824	-2.39791	20.05363
150.03967	5.17551	5.77998	2.25529	-11.98246
157.50604	5.25020	5.01683	1.89959	10.14873
155.90400	5.02916	7.34943	1.29977	-55.65735
167.12702	5.22272	5.24184	-2.83775	11.51404
174.25271	5.28039	4.59459	-2.57349	34.69795
173.47508	5.10221	6.65424	4.45381	-29.51570
177.02363	5.05782	7.18225	1.66205	-43.04584
189.95650	5.27657	4.50693	-4.11244	52.51656
190.96322	5.16117	5.95695	1.69518	3.55943
193.74132	5.09846	7.76591	1.11438	-23.80247
197.62841	5.06740	7.17697	-1.05852	-34.86246
203.39659	5.08491	6.93925	2.75215	-19.17813
212.53854	5.18387	5.56350	-4.02133	40.39218
212.56397	5.06105	7.31216	1.34795	-25.16862
215.39946	5.00929	8.06637	-2.25795	-48.75046
228.03378	5.18259	5.48317	5.10480	66.59577
227.77683	5.06171	7.32542	-1.30850	-9.36403
230.30267	5.00658	8.18401	-1.53574	-41.76502
244.71345	5.20667	5.00084	-3.88890	104.16968
238.69021	4.97271	8.80094	1.63131	-70.60546
244.64709	4.99280	8.46800	-1.81424	-48.59329
255.35571	5.10711	6.53482	4.08854	50.30847
257.39806	5.04702	7.57111	-1.51276	2.33247
258.03516	4.96318	9.04498	1.39024	-65.37147
268.37410	5.06366	7.24503	-4.27746	33.96196
273.10340	5.05747	7.35801	-2.47446	31.50645
277.10138	5.03821	7.71593	1.91663	13.59397
278.70559	4.97689	8.87575	1.44714	-46.10377
289.43597	5.07782	6.93293	-2.17074	62.71185
293.29435	5.05680	7.34462	1.79649	35.92968
292.42723	4.95639	7.34420	1.86115	-78.67599
300.65483	5.01091	8.24023	-1.58406	10.27196
308.98930	5.06540	7.11881	-1.57538	56.74925
314.17136	5.06728	7.07945	1.20469	53.79650

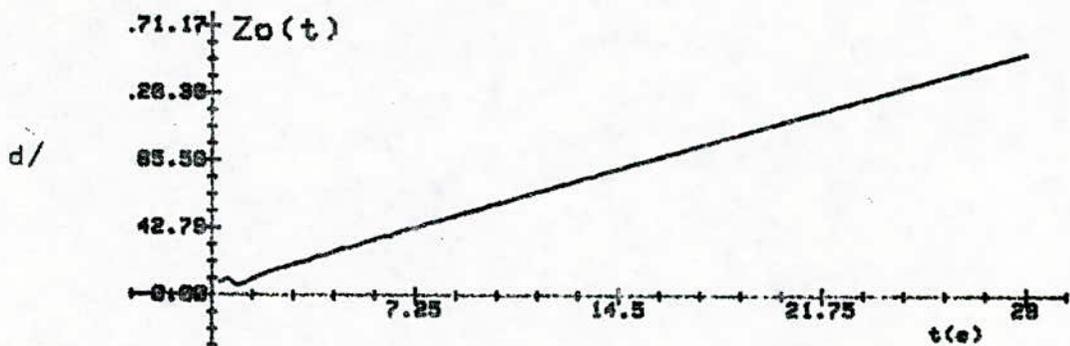
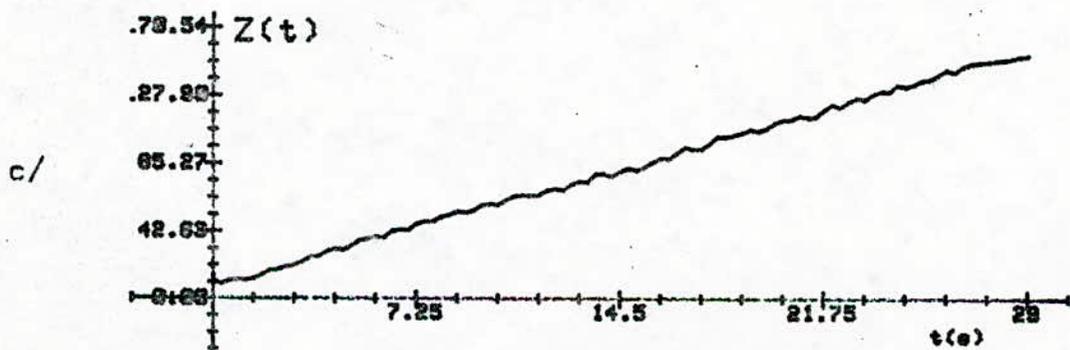
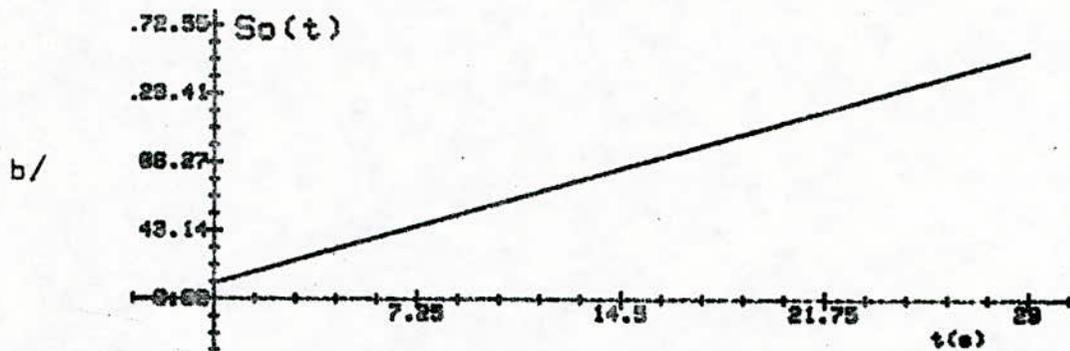
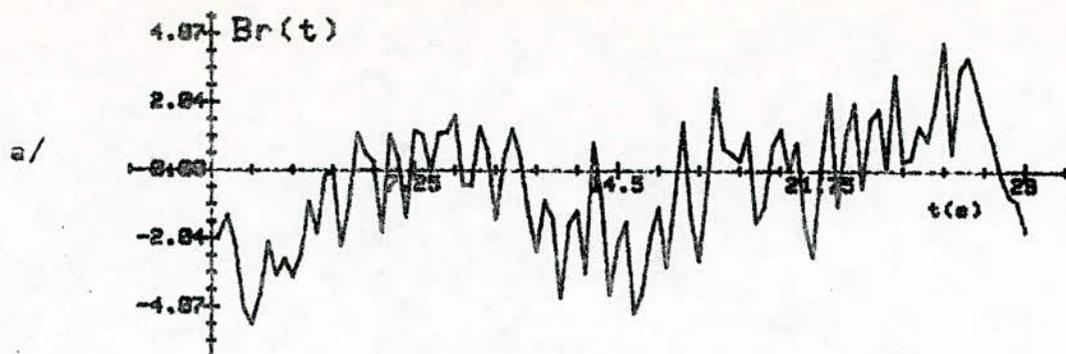


Fig.13- pour:  $\omega_0=2$   $\beta=2$   $\sigma_B=1.8889$

Omeq0=2π

Sigma=2.73

Heta=4

AMP = 4

N = 20

Te = .052

TABLEAU-1

TRANSPOSE DE LA MATRICE DU GAIN La(I,3)

.500	.500	.500	0.000	0.000
.000	1.000	-1.000	0.000	0.000
.000	.500	1.804	-2.304	14.669
.866	.717	.170	-2.036	11.012
.238	.648	-.149	-2.089	12.305
.687	.614	-.596	-2.090	12.094
.893	.556	-.832	-2.062	13.921
.999	.500	-.993	-2.006	14.894
.012	.446	-1.003	-1.929	15.817
.968	.397	-1.130	-1.838	16.638
.888	.353	-1.148	-1.741	17.357
.787	.316	-1.146	-1.641	17.977
.674	.283	-1.132	-1.542	18.509
.557	.254	-1.111	-1.446	18.965
.438	.229	-1.085	-1.353	19.356
.321	.208	-1.057	-1.264	19.692
.208	.189	-1.027	-1.180	19.982
.099	.172	-.998	-1.101	20.232
.994	.158	-.968	-1.026	20.449
.895	.145	-.939	-.956	20.639
.800	.133	-.911	-.889	20.805
.711	.123	-.884	-.827	20.950
.626	.114	-.858	-.768	21.078
.546	.106	-.834	-.712	21.191
.469	.099	-.810	-.660	21.292
.397	.092	-.787	-.610	21.381
.329	.086	-.766	-.563	21.461
.264	.081	-.745	-.519	21.532
.202	.076	-.725	-.477	21.596
.144	.071	-.707	-.437	21.654
.088	.067	-.689	-.399	21.706
.035	.064	-.672	-.363	21.752
.984	.060	-.655	-.329	21.795
.936	.057	-.640	-.296	21.833
.890	.054	-.625	-.265	21.868
.846	.051	-.611	-.235	21.900
.804	.049	-.597	-.207	21.929
.764	.046	-.584	-.180	21.955
.725	.044	-.571	-.154	21.979
.688	.042	-.559	-.129	22.002
.653	.040	-.548	-.105	22.022
.619	.039	-.537	-.083	22.041
.587	.037	-.526	-.061	22.058
.555	.035	-.516	-.040	22.073
.525	.034	-.506	-.019	22.088
.496	.033	-.496	0.000	22.101
.468	.031	-.487	.019	22.114
.441	.030	-.478	.037	22.125
.415	.029	-.470	.054	22.136
.390	.028	-.461	.071	22.145
.366	.027	-.453	.088	22.154
.342	.026	-.446	.103	22.163
.320	.025	-.438	.118	22.170
.298	.024	-.431	.133	22.178
.277	.023	-.424	.147	22.184
.256	.022	-.417	.161	22.190
.236	.022	-.411	.174	22.196
.217	.021	-.404	.187	22.201
.198	.020	-.398	.200	22.206
.180	.020	-.392	.212	22.211
.163	.019	-.386	.224	22.215
.146	.018	-.381	.235	22.219
.129	.018	-.375	.246	22.223
.112	.017	-.370	.257	22.226

TABLEAU-2

## LES VALEURS DU BRUIT DE SECOND ORDRE

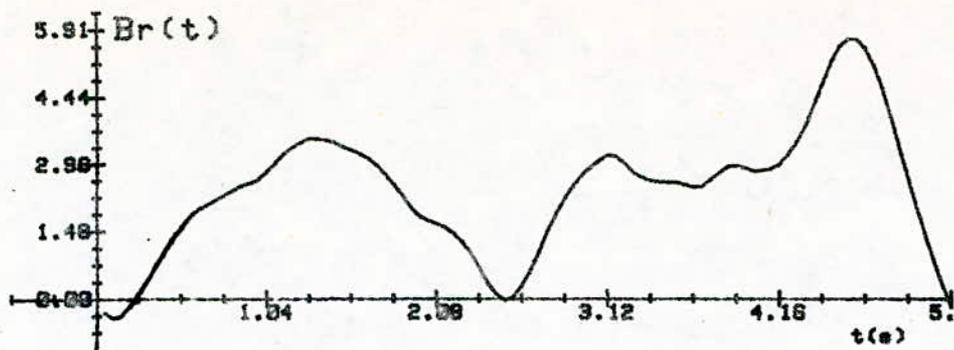
-	.32067	-	.42971	-	.37498	-	.16197	-	.13336
	.42160		.70215		.98218		1.30058		1.57549
1.	.79610	1.	.95263	2.	.04304	2.	1.4946	1.	2.4943
2.	.35458	2.	.45832	2.	.51774	2.	.59472	2.	.76919
2.	.95233	3.	.15749	3.	.29252	3.	.40780	3.	.49214
3.	.48251	3.	.45164	3.	.40425	3.	.30959	3.	.23654
3.	.15178	3.	.05218	2.	.89279	2.	.68724	2.	.46674
2.	.23594	1.	.97421	1.	.78425	1.	.68708	1.	.62319
1.	.54304	1.	.40806	1.	.22197		.98981		.66246
	.31926		.09001	-	.04378		.03874		.29004
	.62554	1.	.03503	1.	.49099	1.	.87366	2.	.20186
2.	.47108	2.	.70716	2.	.08362	3.	.02645	3.	.13760
3.	.09974	2.	.93442	2.	.73809	2.	.63383	2.	.55979
2.	.54303	2.	.52982	2.	.53213	2.	.48009	2.	.43222
2.	.45957	2.	.60198	2.	.75876	2.	.88745	2.	.90775
2.	.84873	2.	.77733	2.	.80106	2.	.83768	2.	.93500
3.	.15580	3.	.42231	3.	.76995	4.	.23865	4.	.69198
5.	.16772	5.	.51728	5.	.67982	5.	.66141	5.	.46683

TABLEAU-3

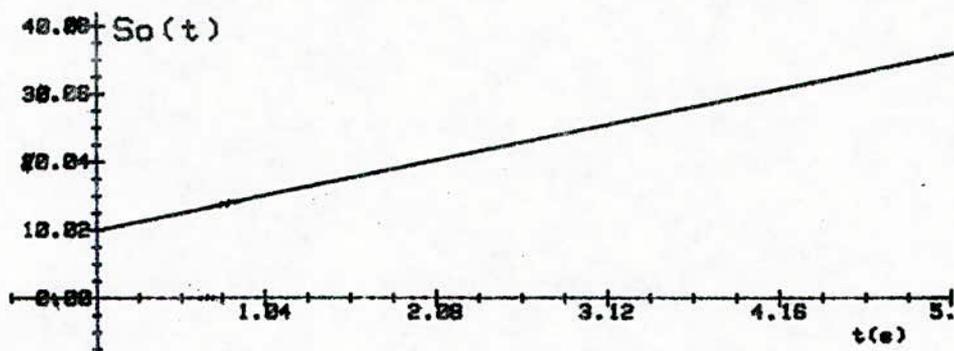
TRANSPOSE DE LA MEILLEURE ESTIMATION  $X_a(1,5)$ 

$X_a(1,5)$	$X_a(2,5)$	$X_a(3,5)$	$X_a(4,5)$	$X_a(5,5)$	
7.	.33967	7.	.33967	0.	.00000
9.	.78192	4.	.89096	0.	.00000
14.	.91855	4.	.97284	0.	.00000
20.	.20320	5.	.05080	10.	.08388
25.	.40557	5.	.08111	10.	.10240
30.	.44499	5.	.07417	10.	.09542
35.	.60825	5.	.08689	10.	.10217
40.	.82697	5.	.10337	10.	.08314
46.	.23452	5.	.13717	10.	.05040
51.	.31422	5.	.13142	9.	.96828
56.	.45757	5.	.13251	9.	.98465
61.	.54134	5.	.12844	9.	.78112
66.	.60605	5.	.12354	9.	.99587
71.	.92418	5.	.13744	10.	.01552
77.	.07029	5.	.13302	9.	.95473
82.	.27366	5.	.14210	9.	.95199
87.	.42203	5.	.14247	9.	.93120
92.	.43555	5.	.13531	9.	.92919
97.	.64070	5.	.13898	9.	.97070
103.	.01425	5.	.15071	9.	.94812
108.	.11340	5.	.14850	9.	.87202
113.	.34055	5.	.15184	9.	.88717
118.	.30659	5.	.14376	9.	.86315
123.	.45318	5.	.14388	9.	.92388
128.	.51390	5.	.14056	9.	.92295
133.	.42914	5.	.13189	9.	.95023
138.	.50691	5.	.12989	10.	.02421
143.	.52095	5.	.12575	10.	.04200
148.	.45422	5.	.11911	10.	.08013
153.	.51644	5.	.11721	10.	.14353
158.	.45627	5.	.11149	10.	.16228
163.	.39818	5.	.10619	10.	.22080
168.	.22656	5.	.09777	10.	.27677
173.	.07227	5.	.09036	10.	.27677
177.	.73238	5.	.08378	10.	.36853
182.	.76490	5.	.07680	10.	.45182
187.	.53833	5.	.06860	10.	.52794
192.	.47437	5.	.06511	10.	.61105
197.	.40633	5.	.06170	10.	.71143
202.	.24780	5.	.05620	10.	.79939
207.	.05227	5.	.05006	10.	.87233
211.	.80151	5.	.04289	10.	.95573
216.	.55691	5.	.03621	11.	.05541
221.	.29878	5.	.02952	11.	.15069
225.	.94578	5.	.02102	11.	.24828
230.	.69376	5.	.01508	11.	.37511
235.	.57770	5.	.01229	11.	.46567
240.	.41110	5.	.00856	11.	.50917
				11.	.56852
				-2.	.02339
				-1.	.08138

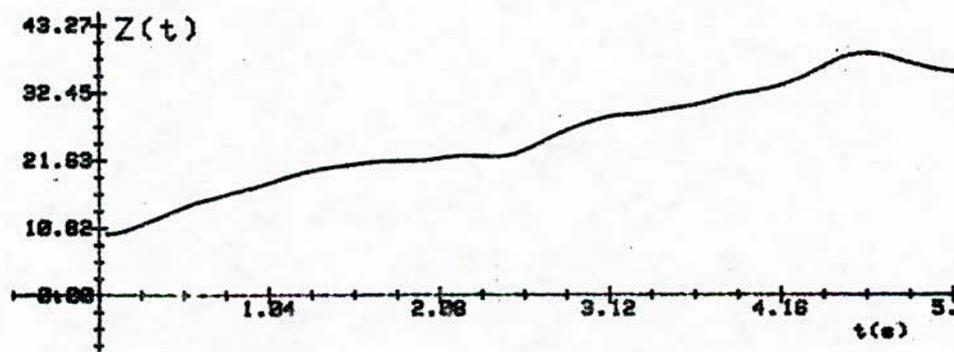
a/



b/



c/



d/

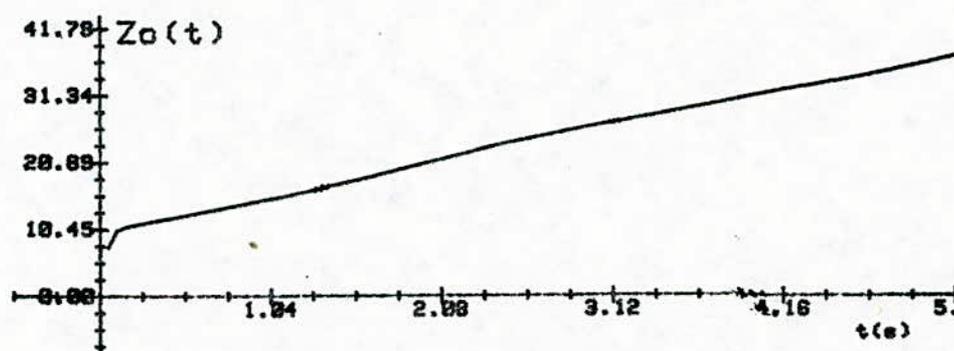


Fig.14- Pour:  $\omega_s=6.28$   $\beta=4$   $\sigma_B=2.73$

Le listing de l'ensemble des programmes de gain, de bruit et d'estimation optimale du signal est donné par l'annexe 3.

les résultats numériques de notre filtre dérivateur sont donnés par les tableaux n° 1,2 et 3. Ils correspondent respectivement aux valeurs numériques de gain, de bruit et d'estimation optimale  $\hat{S}_o(t)$ , et se traduisent globalement par la courbe d des figures 12 et 13.

Afin d'examiner les performances de la méthode , nous avons également étudié le cas ou le bruit est de niveau élevé. on constate que la méthode demeure applicable même si le niveau du bruit est proche de celui du signal ( voir ultérieurement le cas des figures 18,19 et 20).

### 3.5- Discussion des résultats obtenus

D'après les tableaux 3, on remarque que l'algorithme converge rapidement , et la meilleure estimé est établit , dans certains cas, après une dizaine d'ittérations seulement .

Afin d'apprécier l'efficacité de notre méthode, nous allons chiffrer l'erreur quadratique moyenne de l'estimation . Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème de l'observateur optimal, présenté dans l'annexe-4 . Ce théorème permet d'évaluer cette erreur à l'aide de la relation suivante:

$$E [\tilde{X}^T(t).W(t).\tilde{X}(t)] = \text{trace} [P(t).W(t)]$$

ou  $P(t)$  est la matrice de covariance de l'erreur de l'estimation et  $W(t)$  est la matrice de pondération .

Dans notre cas , on s'intéresse surtout à la dérivé  $A_1$  du signal, qui présente la pente des courbes b ou d sur les figures 12 et 13. Il est donc commode de choisir la matrice de pondération comme:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Ceci permet d'avoir l'erreur quadratique moyenne sur  $A_1$

Le tableau suivant donne cette erreur pour les différents cas envisagés sur les figures 12 et 13(  $N_0$  est le nombre d'itérations)

Figure \ No	5	10	20	30	50	100
12	.09261	.01123	.00114	.00031	.00006	.00001
13	.46601	.13181	.02044	.00630	.00139	.00018
13'	.46188	.15528	.03005	.01009	.00240	.00032
13''	.66860	.18911	.02933	.00903	.00200	.00025

Remarque: Si on veut savoir l'erreur quadratique moyenne sur toutes les composantes du vecteur d'état, il suffit de choisir  $W$  comme matrice identité( les éléments diagonaux sont égaux à 1)

Nos résultats expérimentaux montrent que l'estimateur de KALMAN permet de faire une bonne évaluation d'un signal perturbé par un bruit.

TABLEAU 2  
LES VALEURS DU BRUIT DE SECOND ORDRE

-	.36297	-	.46865	-	.37922	-	.11743	-	.22869
	.56589		.89063		1.20605		1.54470		1.82541
2	.04147	2	.18950	2	.27508	2	.38152	2	.48732
2	.60389	2	.72406	2	.80840	2	.91702	3	.11903
3	.32091	3	.53109	3	.66172	3	.76717	3	.84059
3	.82849	3	.90888	3	.78776	3	.73718	3	.72225
3	.70622	3	.68116	3	.60026	3	.47323	3	.32504
3	.15171	2	.22745	2	.74147	2	.60230	2	.43974
2	.21565	1	.90349	1	.52727	1	.11449		.64414
	.21611	-	.03551	-	.13177	-	.02897		.37746
	.81243	1	.30654	1	.81845	2	.22776	2	.55445
2	.72852	2	.27104	3	.11523	3	.20639	3	.27651
3	.22755	3	.09831	2	.99055	3	.01543	3	.09824
3	.24639	3	.30872	3	.51814	3	.55339	3	.54076
3	.53502	3	.56059	3	.51718	3	.37722	3	.09153
2	.72517	2	.37919	2	.18343	2	.08247	2	.14155
2	.42592	2	.85601	3	.45623	4	.23612	5	.03653
5	.86328	6	.54533	7	.00567	7	.23527	7	.23124
6	.96189	6	.51968	5	.83454	5	.04952	4	.20233
3	.31630	2	.39575	1	.47131		.57877	-	.23651

((((((((((((  
S10= 3.27419374188  
))))))))))

TABLEAU 3  
TRANSPOSE DE LA MEILLEURE ESTIMATION  $X_a(I, J)$

$X_a(1, S)$	$X_a(2, S)$	$X_a(3, S)$	$X_a(4, S)$	$X_a(5, S)$
7.31851	7.31851	7.31851	0.00000	0.00000
9.78864	4.89432	9.74271	0.00000	0.00000
14.77563	4.72188	10.41428	.76912	3.20063
20.27213	5.06803	10.45514	-.84470	4.84113
25.37562	5.07512	10.45322	-.60014	5.72576
30.22867	5.03811	10.49729	-.16007	5.70860
35.31512	5.84502	10.48490	.09061	5.28048
40.50322	5.06290	10.44339	.25943	4.65755
45.25357	5.10525	10.32367	.26745	4.44386
50.93340	5.09334	10.36411	.52789	2.96042
56.07037	5.09731	10.34981	.62130	1.68406
61.17350	5.09779	10.34787	.66813	.30124
66.30045	5.10003	10.33808	.63656	-.88102
71.76851	5.12632	10.21374	.39227	-.43029
76.93024	5.13202	10.18477	.32231	-.73456
82.26050	5.14128	10.13435	.20905	-.52128
87.45728	5.14455	10.11543	.15135	-.55272
92.49865	5.13801	10.11063	.15912	-1.32009
77.78570	5.14662	10.10002	.03130	-.56764
103.22995	5.16150	9.99838	.10930	1.27565
108.30516	5.15739	10.02785	-.91210	1.74074
113.51859	5.15994	10.00871	.60379	1.03688
118.43219	5.14923	10.09283	.13670	-.36711
123.59332	5.14972	10.08876	.00508	-.91014
128.65797	5.14632	10.11780	.06482	-1.92724
133.57926	5.13766	10.19456	.05467	-3.30300
138.72185	5.13785	10.19288	-.10584	-2.82070
143.78776	5.13528	10.21749	-.21739	-2.90402
148.77223	5.13008	10.26876	-.30383	-3.44010
153.91014	5.13834	10.26611	-.45400	-2.30615
158.89708	5.12574	10.31466	-.50631	-2.50122
163.89041	5.17158	10.35998	-.56923	-2.52166

168	.76029	5	.11395	10	.44559	-	.60562	-3	.67908
173	.66150	5	.10769	10	.51789	-	.70624	-4	.26829
178	.57974	5	.10228	10	.58230	-	.83701	-4	.39229
183	.45616	5	.09600	10	.65903	-	.96328	-4	.73253
188	.25967	5	.08810	10	.75836	-1	.09058	-5	.61351
193	.22627	5	.08490	10	.79960	-1	.20440	-4	.21000
198	.14182	5	.08056	10	.85707	-1	.39660	-3	.25836
202	.92493	5	.07312	10	.95797	-1	.44316	-3	.87787
207	.65734	5	.06481	11	.07351	-1	.51520	-4	.96409
212	.33141	5	.05551	11	.20597	-1	.63389	-6	.51747
217	.02793	5	.04716	11	.32762	-1	.82328	-7	.32227
221	.72467	5	.03920	11	.44634	-2	.05651	-7	.64151
226	.34345	5	.02985	11	.50873	-2	.28803	-8	.57298
231	.10219	5	.02396	11	.68052	-2	.56660	-6	.93610
236	.00927	5	.02147	11	.72008	-2	.76486	-2	.84782
240	.84369	5	.01758	11	.78338	-2	.75884	-	.05441
245	.87973	5	.01725	11	.77713	-2	.62789	5	.39157
250	.81721	5	.01634	11	.80435	-2	.24410	8	.28553
255	.70892	5	.01390	11	.84649	-1	.74298	9	.32508
260	.65474	5	.01259	11	.86951	-1	.21771	10	.15159
265	.60843	5	.01148	11	.88941	-	.67940	10	.00756
270	.46431	5	.00860	11	.74199	-	.17854	7	.24398
275	.42578	5	.00774	11	.95791	-	.17076	5	.73014
280	.39617	5	.00707	11	.97053	-	.43183	5	.95008
285	.42945	5	.00753	11	.96168	-	.59992	3	.03860
290	.43949	5	.00758	11	.96083	-	.71491	1	.52662
295	.50732	5	.00860	11	.94049	-	.75857	1	.06757
300	.57740	5	.00962	11	.91974	-	.77937	1	.63729
305	.52244	5	.00856	11	.94154	-	.76358	-2	.12737
310	.53102	5	.00056	11	.94153	-	.62576	-3	.24970
315	.62313	5	.00989	11	.91335	-	.45407	-2	.33032
320	.81148	5	.01268	11	.85317	-	.35070	-	.67737
325	.88987	5	.01369	11	.83101	-	.37736	1	.24135
331	.01402	5	.01536	11	.79377	-	.43860	2	.60515
336	.05821	5	.01579	11	.78405	-	.54645	2	.00724
341	.12550	5	.01655	11	.76670	-	.62594	1	.77672
346	.10260	5	.01528	11	.77999	-	.67080	-	.48636
351	.14876	5	.01641	11	.76982	-	.62237	-1	.02036
356	.22669	5	.01728	11	.74910	-	.55923	-1	.69339
361	.31771	5	.01830	11	.72426	-	.51862	-	.00590
366	.29739	5	.01777	11	.73727	-	.48253	-1	.84189
371	.26566	5	.01710	11	.75394	-	.35763	-3	.60676
376	.16378	5	.01552	11	.79400	-	.13375	-6	.50218
381	.11017	5	.01461	11	.81727	-	.20227	-7	.43532
386	.10626	5	.01437	11	.82350	-	.55058	-6	.43006
391	.18821	5	.01523	11	.80076	-	.80554	-2	.86009
396	.10385	5	.01499	11	.80735	-	.90873	-1	.41784
401	.26434	5	.01580	11	.78531	-	.90810	2	.09164
406	.40091	5	.01730	11	.74468	-	.71967	6	.49255
411	.48594	5	.01812	11	.72189	-	.35102	8	.61235
416	.65113	5	.01989	11	.67242	-	.13268	11	.78007
421	.86487	5	.02220	11	.60722	-	.76404	14	.83908
426	.97049	5	.02342	11	.57243	1	.47361	13	.93063
432	.20719	5	.02566	11	.50743	2	.14066	14	.31922
437	.30703	5	.02652	11	.48249	2	.75581	10	.22895
442	.40745	5	.02736	11	.45764	3	.14057	5	.60447
447	.51388	5	.02825	11	.43106	3	.29103	1	.08631
452	.60760	5	.02897	11	.40905	3	.21459	-3	.41693
457	.65340	5	.02916	11	.40340	2	.90510	-8	.46838
462	.74268	5	.02981	11	.38319	2	.39381	-10	.99262
467	.70675	5	.02910	11	.40528	1	.72251	-15	.76487
472	.74590	5	.02921	11	.40190	-	.89771	-16	.43742
477	.73360	5	.02877	11	.41586	-	.05288	-16	.96781
482	.67372	5	.02785	11	.44564	-	.80306	-17	.32952
487	.56369	5	.02643	11	.49196	-1	.65971	-17	.35249
492	.42263	5	.02472	11	.54823	-2	.49955	-16	.78957
497	.25464	5	.02277	11	.61297	-3	.28883	-15	.54471
502	.07244	5	.02072	11	.68182	-3	.99076	-13	.43555

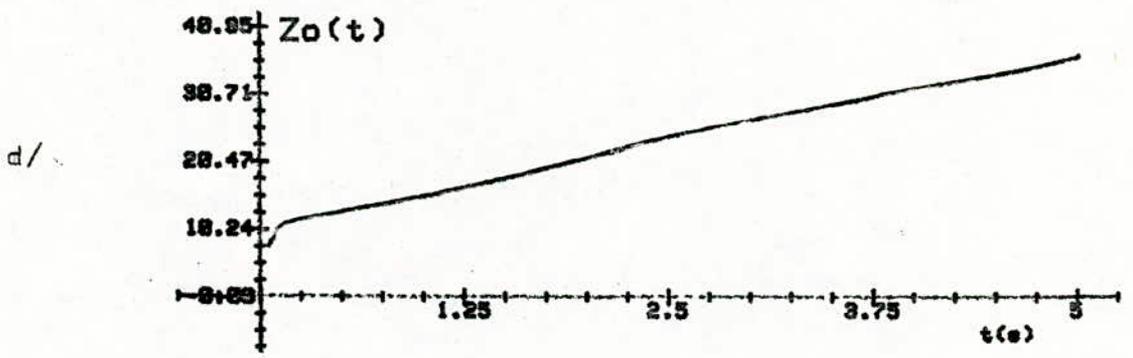
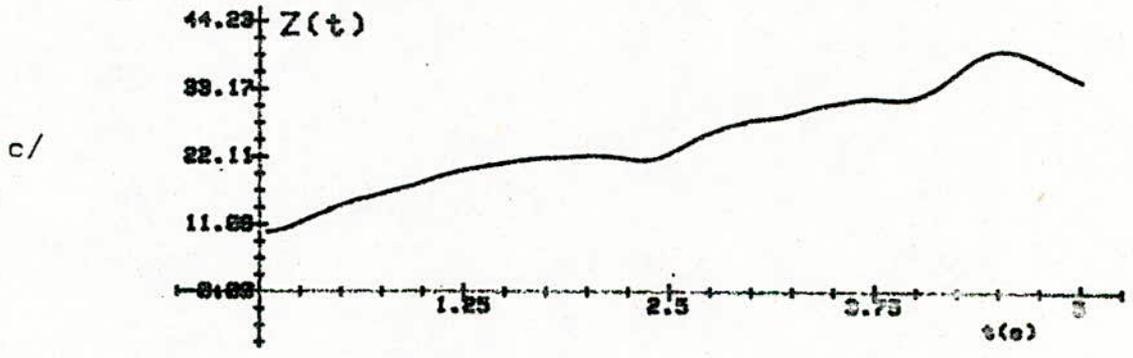
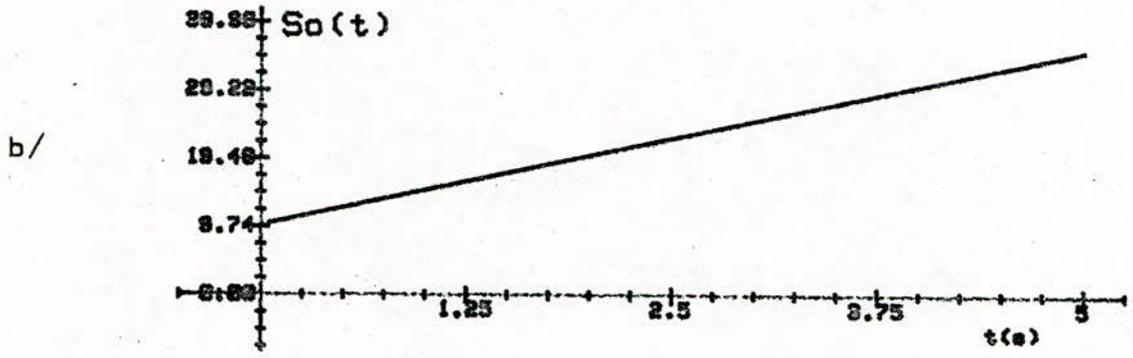
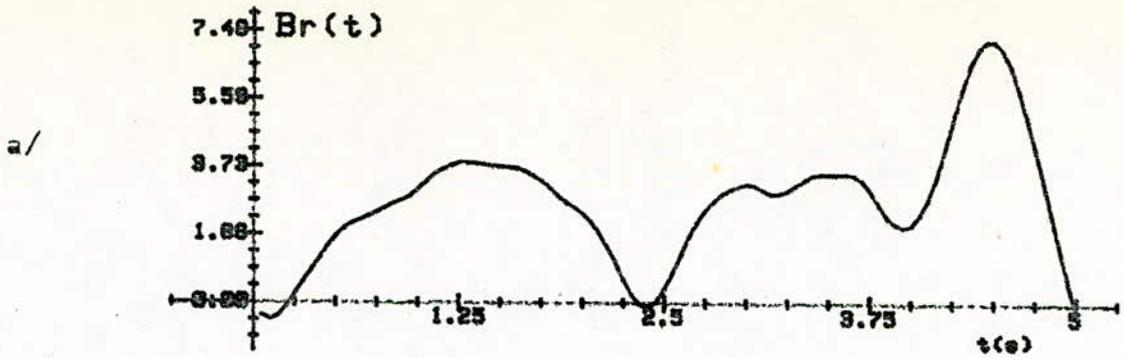


Fig. 13'' - Pour:  $\omega_0 = 2$   $\beta = 2$   $\sigma_B = 3.2741$

---



---

# APPLICATION AU FILTRE DE BUTTERWORTH

---



---

## 4.1. Généralités

Comme nous l'avons vu au chapitre 1 et 2, KALMAN et BUCY avaient considéré la classe particulière des processus pouvant être engendrés par une fonction forcée de bruit blanc  $u(t)$  [17]. La caractéristique essentielle du filtre de KALMAN-BUCY est la nature séquentielle de l'estimation; c'est à dire markovienne [17]. Ceci implique pour un processus stationnaire de GAUSS que la covariance soit de la forme  $Ae^{-\beta|z|}$  [15]. Ce qui représente bien l'autocorrélation d'un spectre rationnel. Cependant, pour tout spectre rationnel, il existe un filtre linéaire, délivrant en sortie un processus blanc et dont l'inverse est également un filtre linéaire réalisable [15].

En électronique, le filtre passe-bas idéal est celui dont la courbe de réponse est représentée par la figure 14. Cette caractéristique donne la variation du carré de l'impédance de transfert réduite  $|Z_{21}|^2$  en fonction de la pulsation réduite  $\omega$  [16, 19] (c'est à dire  $Z_{21}$  et  $\omega$  sont sans dimensions). Quand  $0 \leq \omega \leq 1$ , les signaux sont transmis sans pertes et pour  $1 < \omega < \infty$ , le signal de sortie est nul quel que soit le signal d'entrée. un tel filtre n'est pas causal. Il n'est donc pas réalisable physique-

ment. Cependant, il existe un filtre physiquement réalisable dont la caractéristique est proche de celle de la figure 14. Celui-ci est le filtre de BUTTERWORTH dont la fonction de transfert est de la forme [16,19] :

$$|Z_{21}|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad (4-1)$$

Sa caractéristique est donnée par la figure 15 pour différentes valeurs de n. Elle est monotone décroissante et tend vers celle de filtre passe-bas idéal quand n augmente notablement.

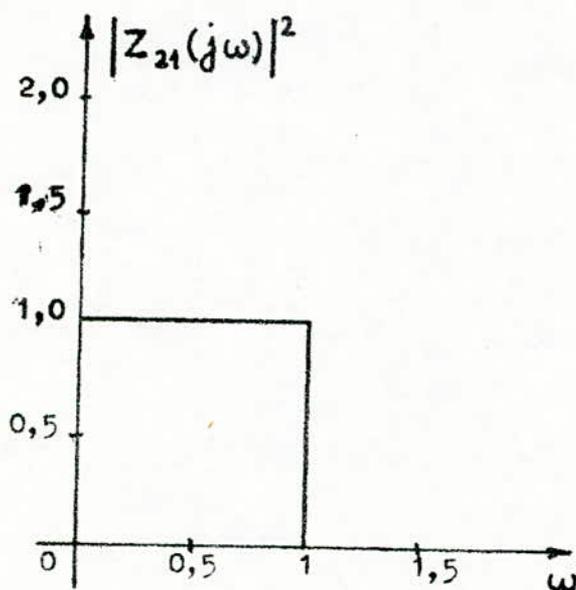


Figure 14- Réponse d'un filtre passe-bas idéal (  $\omega$  est une variable réduite ).

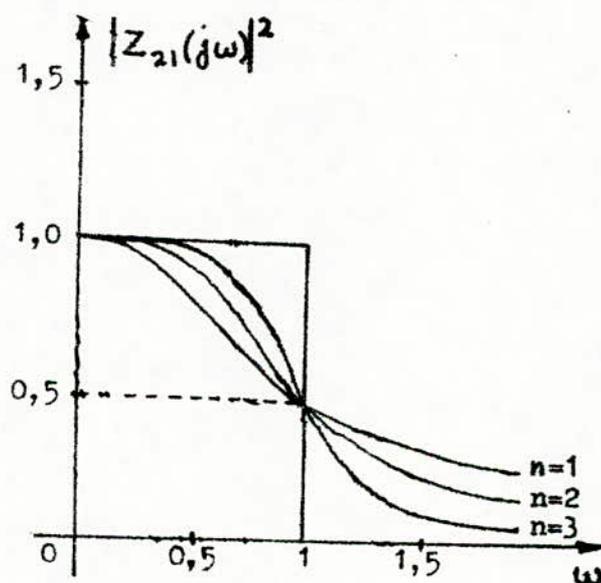


Figure 15- Filtre de BUTTERWORTH pour des valeurs n différentes.

ment. Cependant, il existe un filtre physiquement réalisable dont la caractéristique est proche de celle de la figure 14. Celui-ci est le filtre de BUTTERWORTH dont la fonction de transfert est de la forme [16,19] :

$$|Z_{21}|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad (4-1)$$

Sa caractéristique est donnée par la figure 15 pour différentes valeurs de n. Elle est monotone décroissante et tend vers celle du filtre passe-bas idéal quand n augmente notablement.

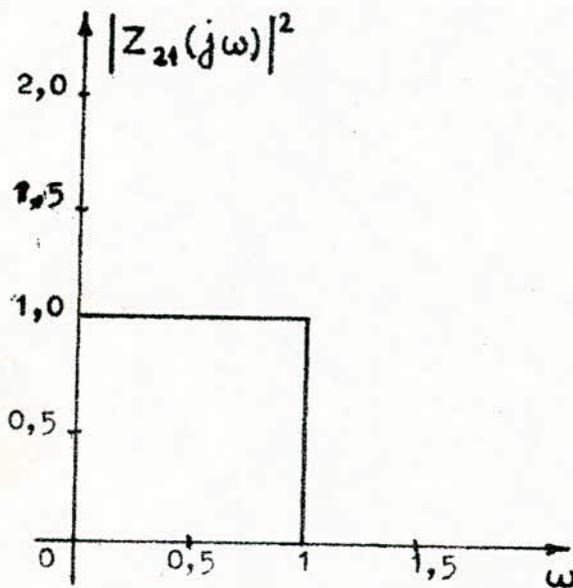


Figure 14- Réponse d'un filtre passe-bas idéal (ω est une variable réduite).

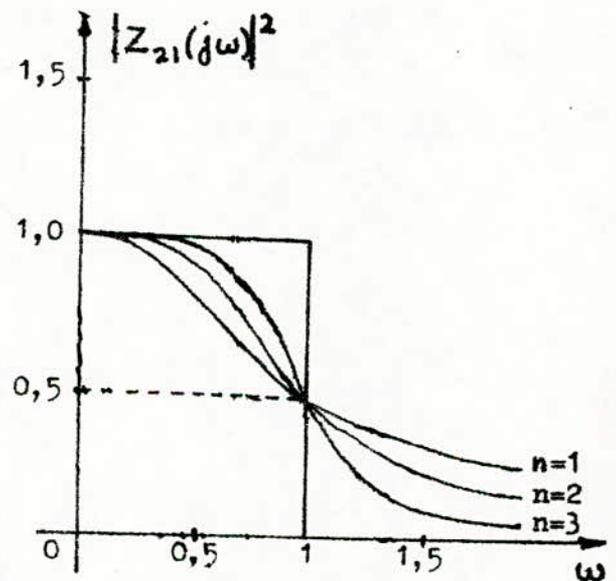


Figure 15- Filtre de BUTTERWORTH pour des valeurs n différentes.

Le filtre de BUTTERWORTH est très utilisé en télécommunications surtout quand il s'agit de transmettre des signaux dans une large gamme de fréquences avec un bon rapport signal sur bruit ( comme c'est le cas en télévision). D'autre part, la formulation mathématique de ce filtre est relativement simple.

Avant de voir comment lui appliquer le filtrage de KALMAN, examinons les propriétés de ce filtre.

## 4.2. Propriétés du filtre de BUTTERWORTH

Considérons la fonction de transfert d'un filtre du type:

$$|Z_{21}(\omega)|^2 = \frac{C_0(1 + C_2\omega^2 + C_4\omega^4 + \dots + C_{2m}\omega^{2m})}{1 + d_2\omega^2 + d_4\omega^4 + \dots + d_{2n}\omega^{2n}} \quad (4-2)$$

Par hypothèse, cette fonction est analytique à l'origine. On peut donc la développer en série de MAC LAURIN. Il vient après calcul:

$$|Z_{21}|^2 \approx C_0 \{ 1 + (C_2 - d_2)\omega^2 + [(C_4 - d_4) - d_2(C_2 - d_2)]\omega^4 + \dots \} \quad (4-3)$$

Remarquons que les coefficients non nuls de cette série résultent du calcul des dérivées d'ordre pair de la fonction ( 4-2 ) ( les dérivées d'ordre impair étant toutes nulles au voisinage de l'origine). Pour que la fonction de transfert

( 4-2 ) puisse se comporter comme celle du filtre passe-bas idéal de la figure 14/3, il faudrait que sa caractéristique soit aussi plate que possible au voisinage de l'origine. Ceci impose que  $C_0 = 1$ ,  $m < n$  et que les termes de la série (4-3) qui résultent de la dérivation successive de  $|Z_{21}|^2$ , soient négligeables au voisinage de l'origine. En particulier, on peut annuler successivement les coefficients qui interviennent dans chacune de ces termes de façon que la fonction  $|Z_{21}|^2$  devienne pratiquement constante. Dans ce cas, on aura:

$$\begin{array}{ll}
 C_0 = 1 & d_{2m+2} = 0 \\
 C_2 = d_2 & d_{2m+4} = 0 \\
 C_4 = d_4 & d_{2m+6} = 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 C_{2m} = d_{2m} & d_{2n-2} = 0
 \end{array} \quad (4-4)$$

La série ( 4 - 3 ) s'écrira:

$$|Z_{21}|^2 = 1 + R(\omega^{2n}) \quad (4-5)$$

et la fonction de transfert ( 4-2 ) deviendra:

$$|Z_{21}|^2 = \frac{1 + C_2 \omega^2 + C_4 \omega^4 + \dots + C_{2m} \omega^{2m}}{1 + C_2 \omega^2 + C_4 \omega^4 + \dots + C_{2m} \omega^{2m} + d_{2n} \omega^{2n}} \quad (4-6)$$

L'expression ( 4 - 6 ) peut se mettre sous la forme:

$$|Z_{21}|^2 = \frac{1}{1 + A_n(\omega^2)} \quad (4-7)$$

avec

$$A_n(\omega^2) = \frac{d_{2n} \omega^{2n}}{1 + C_2 \omega^2 + C_4 \omega^4 + \dots + C_{2m} \omega^{2m}} \quad (4-8)$$

Ainsi un ajustement approprié des coefficients  $C_{2m}$  et  $d_{2n}$  conduit à une fonction de transfert qui présente un aplatissement maximum de sa caractéristique au voisinage de

l'origine. La courbe de réponse est alors horizontale dans la bande passante du filtre quand les conditions (4-4) sont satisfaites, c'est à dire quand les  $(2n-1)$  premières dérivées de  $|Z_{21}|^2$  sont nulles.

Si tous les zéros de la fonction de transfert sont rejetés à l'infini, on aura approximativement:

$$|Z_{21}|^2 \approx \frac{1}{1 + d_{2n} \omega^{2n}} \quad (4-9)$$

Au voisinage de la fréquence de coupure  $F_c$  (c'est à dire, pour  $\omega=1$ ), on obtient une fonction de transfert qui donne la puissance maximale à condition que  $d_{2n}=1$ . Ce cas est celui d'un filtre passe-bas décrit par la fonction de transfert (4-1) du filtre de BUTTERWORTH.

Le filtre de BUTTERWORTH est donc un filtre optimal puisque sa courbe de réponse est horizontale dans la bande passante. En outre, celle-ci est d'autant plus aplatie que l'indice est grand (ce qui revient à augmenter le nombre d'éléments entrant dans la réalisation du filtre).

La fonction de transfert (4-1) peut-être décomposée en polynômes de BUTTERWORTH  $B_n$  qui sont en fait des polynômes de HURWITZ dans lesquels on a posé  $S=j\omega$  [19]. Il vient:

$$\frac{1}{1 + \omega^{2n}} = \frac{1}{B_n(S) \cdot B_n(-S)} \quad (4-10)$$

Les pôles de cette fonction s'obtiennent en rendant le dénominateur égal à zéro. C'est à dire en faisant:

$$S^{2n} = \pm 1 \quad (4-11)$$

D'où les pôles de la fonction (4-10):

$$S_k = e^{j \frac{(2k-1) \pi}{n}} \quad \text{pour } n \text{ pair} \quad (4-12)$$

$$S_k = e^{j \frac{2k \pi}{n}} \quad \text{pour } n \text{ impair} \quad (4-13)$$

ou, en regroupant ces deux expressions:

$$S_{2\nu+1} = e^{j \frac{(2\nu+1+n) \pi}{2n}} \quad (4-14)$$

avec  $\nu = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ .

Dans le plan complexe, ces pôles sont distribués le long d'un cercle unité et chaque pôle appartient à un axe de symétrie d'ordre  $k$ . À titre d'exemple, la figure 16 donne la position des pôles de la fonction de BUTTERWORTH  $F(s) = B_n^{-1}(s)$  pour  $n = 2$ .

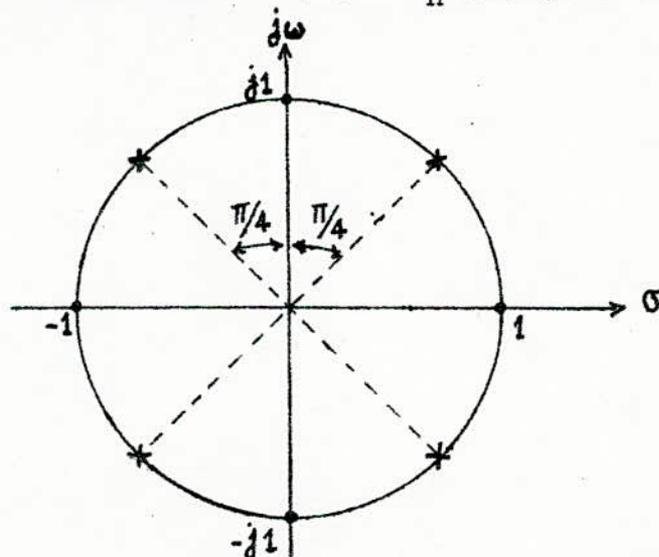


Figure 16- Position des pôles de la fonction de BUTTERWORTH  $F(s) = B_n^{-1}(s)$ .

Remarquons que tous les pôles de  $F(s)$  (c'est à dire les zéros de  $B_n(s)$ ) se trouvent dans le demi-plan de gauche (ce qui correspond à un filtre stable [20]) et que ceux de  $F(-s)$  appartiennent au demi-plan de droite.

On déduit de la relation (4-14) la forme trigonométrique qui donne les zéros de  $B_n(s)$  dans le demi-plan de gauche:

$$S_{2\nu+1} = -\sin \frac{(2\nu+1)\pi}{2n} + j \cos \frac{(2\nu+1)\pi}{2n} \quad (4-15)$$

avec  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Quand on explicite le polynôme  $B_n(s)$ , la fonction de BUTTERWORTH s'écrit :

$$F(s) = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \quad (4-16)$$

Les coefficients  $a_k$  et les zéros du polynôme  $B_n(s)$  ont été tabulés. Les tables 4 et 5 donnent ces paramètres jusqu'à l'ordre 10 [19] (la pulsation  $\omega$  étant normalisée à l'unité quand on est à mi-puissance maximale).

Pour calculer les coefficients  $a_k$ , on exprime le polynôme de BUTTERWORTH en fonction de ses zéros. Soit:

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k = \prod_{\nu=0}^{n-1} \left( s - e^{j \frac{(2\nu+1+n)\pi}{2n}} \right) \quad (4-17)$$

Pour  $s = 0$ , on trouve que  $a_0 = 1$ .

Le produit (4-17) peut s'écrire :

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
-1.0000000	-0.7071068	-1.0000000	-0.3826834	-1.0000000	-0.2588190	-1.0000000	-0.1950903	-1.0000000	-0.156434
	+j0.707106		+j0.923879		+j0.965925		+j0.980785		+j0.987688
		-0.5000000	-0.9238879	-0.3090170	-0.7071068	-0.2225209	-0.5555702	-0.1736482	-0.453990
		+j0.866025	+j0.382683	+j0.951056	+j0.707106	+j0.974927	+j0.831469	+j0.984807	+j0.89100
				-0.8090170	-0.9659258	-0.6234898	-0.8314696	-0.5000000	-0.707106
				+j0.587785	+j0.258819	+j0.781831	+j0.555570	+j0.866025	+j0.70710
						-0.9009689	-0.9807853	-0.7660442	-0.891006
						+j0.433883	+j0.195090	+j0.642787	+j0.453990
								-0.9396926	-0.987688
								+j0.342020	+j0.156434

Table 5- Les coefficients du polynôme de BUTTERWORTH  $B_n = S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_2S^2 + a_1S + 1$

n	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>	a <sub>7</sub>	a <sub>8</sub>	a <sub>9</sub>
1	1.4142136								
2	1.4142136								
3	2.0000000	2.0000000							
4	2.6131259	3.4142136	2.6131259						
5	3.2360680	5.2360680	5.2310680	3.2360680					
6	3.8637033	7.4641016	9.1416202	7.4641016	3.8637033				
7	4.4939592	10.0978347	14.5917939	14.5917939	10.0978347	4.4939592			
8	5.1258309	13.1370712	21.8461510	25.6883559	21.8461510	13.1370712	5.1258309		
9	5.7587705	16.5817187	31.1634375	41.9863857	41.9863857	31.1634375	16.5817187	5.7587705	
10	6.3924532	20.4317291	42.8020611	64.8823963	74.2334292	64.8823963	42.8020611	20.4317291	6.3924532

$$B_n(s) = \frac{s_- e^{j \frac{(n+1)\pi}{2n}}}{s_- e^{j \frac{(3n+1)\pi}{2n}}} \prod_{\nu=1}^n \left[ s_- e^{j \frac{(2\nu+1+n)\pi}{2n}} \right] \quad (4-18)$$

Posons dans (4-18),  $\rho = \nu - 1$ . On aura :

$$B_n(s) = \frac{s_- e^{j \frac{(n+1)\pi}{2n}}}{s_- e^{j \frac{(3n+1)\pi}{2n}}} \prod_{\rho=0}^{n-1} \left[ s_- e^{j \frac{(2\rho+3+n)\pi}{2n}} \right] \quad (4-19)$$

ou :

$$B_n(s) = \frac{s_- j e^{j \frac{\pi}{2n}}}{s_+ j e^{j \frac{\pi}{2n}}} \prod_{\rho=0}^{n-1} \left[ s_- e^{j \frac{\pi}{n}} e^{j \frac{(2\rho+1+n)\pi}{2n}} \right] \quad (4-20)$$

Quand on met  $\text{Exp}(j \frac{\pi}{n})$  en facteur, n termes de ce type peuvent être mise en dehors du produit et la multiplication de ces n facteurs donne  $\text{Exp}(j \pi) = -1$ . D'où :

$$B_n(s) = - \frac{s_- j e^{j \frac{\pi}{2n}}}{s_+ j e^{j \frac{\pi}{2n}}} \prod_{\rho=0}^{n-1} \left[ s_- e^{-j \frac{\pi}{n}} e^{j \frac{(2\rho+1+n)\pi}{2n}} \right] \quad (4-21)$$

En comparant (4-17) et (4-21), on trouve :

$$B_n(s) = - \frac{s_- j e^{j \frac{\pi}{2n}}}{s_+ j e^{j \frac{\pi}{2n}}} B_n(s e^{-j \frac{\pi}{n}}) \quad (4-22)$$

C'est à dire que :

$$\left(s + j e^{j \frac{\pi}{2n}}\right) \sum_{k=0}^n a_k s^k + \left(s - j e^{j \frac{\pi}{2n}}\right) \sum_{k=0}^n a_k e^{-j \frac{k\pi}{n}} s^k = 0 \quad (4-23)$$

En identifiant terme à terme, on trouve une relation de récurrence entre les coefficients  $a_k$  et  $a_{k+1}$ . Soit :

$$a_{k+1} + j e^{j \frac{\pi}{2n}} a_{k+1} + e^{-j \frac{\pi}{2n}} a_k - j e^{-j \frac{(2k+1)\pi}{2n}} a_{k+1} = 0 \quad (4-24)$$

ou :

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cos(k\pi/2n)}{\sin\left[\frac{(k+1)\pi}{2n}\right]} \quad (4-25)$$

avec  $k=0,1,2,\dots,n$ . Cette relation permet de calculer les coefficients  $a_k$ , sachant que  $a_0=1$ .

### 4.3. Réalisation d'un filtre dérivateur de Butterworth

Considérons un processus de bruit dont la densité spectrale est proportionnelle à l'inverse d'un polynôme de BUTTERWORTH. On aura [15] :

$$S_x(\Omega, n) = \frac{2nP}{k} \frac{\sin(\pi/2n)}{1 + (\Omega/k)^{2n}} \quad (4-26)$$

qui est de la forme :

$$S_x(\omega, n) = \frac{C_n}{1 + \omega^{2n}} \quad (4-27)$$

avec :  $\omega = \Omega/k$ .

$P = \sigma_p^2$  est la puissance de bruit (correspondant à la moyenne quadratique) et  $C_n$  est un coefficient de gain ajustable.

La figure 17 donne la loi de variation de S en fonction de  $\omega$

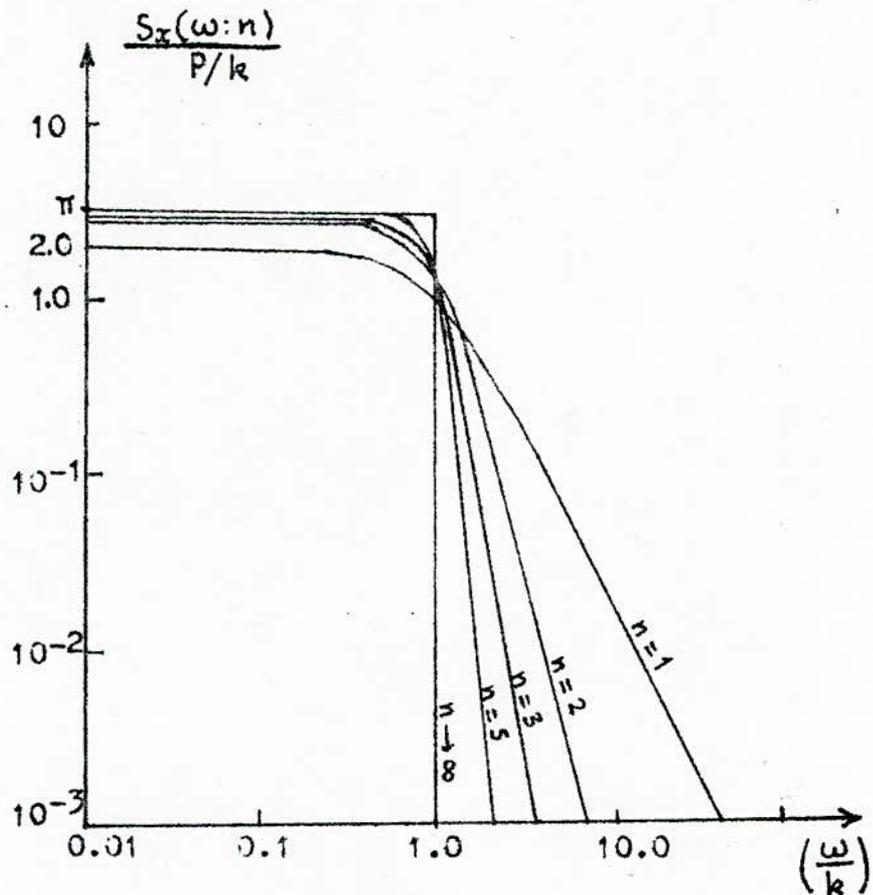


Figure 17- Spectre de bruit en fonction de  $\omega$  et  $n$



peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{X}(t) = F \cdot X(t) + G \cdot u(t) \quad (4-30)$$

avec:  $G = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}$  et  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$  (4-31)

Dans le cas d'un bruit de second ordre , on a  $n=2$  et l'équation (4-30) devient :

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$$

On retrouve l'équation (2-2) du paragraphe (2-1) dans laquelle  $\omega_0^2 = a_0$  ,  $\beta = a_1$  et  $b_0 = 1$ . Le tableau n° 5 donne :

$$\begin{aligned} &= a_1 = 1,444 \\ &= a_0 = 1,000 \end{aligned} \quad (4-33)$$

En appliquant le programme décrit au chapitre 3, nous obtenons l'estimation d'un signal linéaire  $S(t)$  perturbé par un bruit de second ordre .C'est à dire le filtrage de son observation par un filtre de BUTTERWORTH de 2<sup>e</sup> ordre . Les résultats obtenus sont donnés sous forme de valeurs numériques ( tableau 1-b, 2-b et 3-b) qui se traduisent par les figures 18, 19 et 20

Ceux-ci nous permettent de vérifier à nouveau que le filtre de KALMAN est un estimateur optimal et que la méthode est bien adaptée à la mise au point de filtres de BUTTERWORTH. En effet, l'écart en moyenne quadratique entre les deux courbes est de l'ordre de .028 à la 100<sup>ième</sup> itération

$\Omega_{eq0}=1$ 

AMP =4

 $\text{Beta}=\sqrt{2}$ 

Ta = .29

TABLEAU 1-b

TRANSPOSE DE LA MATRICE DU GAIN La(1,5)

500	500	500	0.000	0.000
1.000	1.000	-1.000	0.000	0.000
500	500	-5.005	-5.505	8.302
2.542	.635	3.155	-4.697	6.966
2.892	.578	3.175	-5.067	7.614
3.415	.569	2.706	-5.120	7.716
3.835	.548	2.401	-5.235	7.951
4.241	.530	2.081	-5.322	8.144
4.610	.512	1.793	-5.403	8.341
4.950	.495	1.523	-5.473	8.530
5.261	.478	1.273	-5.534	8.713
5.546	.462	1.041	-5.587	8.889
5.806	.447	.825	-5.631	9.059
6.043	.432	.625	-5.668	9.223
6.258	.417	.439	-5.697	9.380
6.453	.403	.267	-5.720	9.531
6.630	.390	.107	-5.737	9.676
6.790	.377	-.041	-5.749	9.815
6.934	.365	-.179	-5.755	9.949
7.064	.353	-.307	-5.757	10.077
7.179	.342	-.426	-5.754	10.199
7.283	.331	-.536	-5.747	10.317
7.375	.321	-.638	-5.737	10.430
7.456	.311	-.733	-5.723	10.538
7.527	.301	-.820	-5.707	10.641
7.590	.292	-.902	-5.688	10.740
7.644	.283	-.978	-5.666	10.836
7.690	.275	-1.048	-5.642	10.927
7.729	.267	-1.113	-5.616	11.014
7.762	.259	-1.173	-5.589	11.098
7.789	.251	-1.229	-5.560	11.179
7.811	.244	-1.281	-5.529	11.256
7.827	.237	-1.330	-5.497	11.330
7.839	.231	-1.374	-5.464	11.401
7.846	.224	-1.415	-5.431	11.470
7.849	.218	-1.454	-5.396	11.536
7.849	.212	-1.489	-5.360	11.599
7.846	.206	-1.521	-5.324	11.659
7.839	.201	-1.552	-5.288	11.718
7.830	.196	-1.579	-5.250	11.774
7.818	.191	-1.605	-5.213	11.828
7.804	.186	-1.629	-5.175	11.880
7.787	.181	-1.650	-5.137	11.930
7.769	.177	-1.670	-5.098	11.979
7.748	.172	-1.689	-5.060	12.025
7.727	.168	-1.705	-5.021	12.070
7.703	.164	-1.721	-4.983	12.113
7.678	.160	-1.735	-4.944	12.155
7.652	.156	-1.747	-4.905	12.195
7.625	.153	-1.759	-4.867	12.234
7.597	.149	-1.769	-4.828	12.272
7.568	.146	-1.778	-4.790	12.308
7.538	.142	-1.787	-4.751	12.343
7.507	.139	-1.794	-4.713	12.377
7.476	.136	-1.801	-4.675	12.409
7.444	.133	-1.806	-4.638	12.441
7.411	.130	-1.811	-4.600	12.472
7.378	.127	-1.816	-4.563	12.501
7.345	.124	-1.819	-4.526	12.530
7.311	.122	-1.822	-4.489	12.558
7.277	.119	-1.825	-4.452	12.585
7.242	.117	-1.826	-4.416	12.611
7.208	.114	-1.828	-4.380	12.636
7.173	.112	-1.828	-4.344	12.660
7.138	.110	-1.829	-4.309	12.684
7.102	.108	-1.829	-4.274	12.707
7.067	.105	-1.828	-4.239	12.729

TABLEAU 2.b  
LES VALEURS DU BRUIT DE SECOND ORDRE

- .87150	- .84985	- .16680	1. 21264	2. 95408
4. 60224	6. 15683	7. 67093	9. 41545	10. 97502
12. 35940	13. 43735	14. 16633	14. 96681	15. 70741
16. 43605	17. 09796	17. 40848	17. 64215	18. 26749
18. 85287	19. 52210	19. 79340	19. 95088	19. 96197
19. 46687	18. 84051	18. 11835	17. 12406	16. 24796
15. 35518	14. 45709	13. 31523	11. 97834	10. 59601
9. 17695	7. 56669	6. 32707	5. 67494	5. 36158
5. 22966	5. 09419	4. 97062	4. 84660	4. 32532
3. 65079	3. 39479	3. 34712	4. 14212	5. 57038
7. 22268	9. 10271	11. 15350	12. 77102	14. 07110
15. 04901	15. 88320	16. 47020	17. 00070	17. 55639
17. 48913	16. 81094	15. 94521	15. 55338	15. 32245
15. 42056	15. 60247	15. 92030	15. 96656	16. 00334
16. 42337	17. 53722	18. 89353	20. 30472	21. 28762
21. 87541	22. 29494	23. 05243	23. 60953	24. 11289
24. 85800	25. 39008	25. 89599	26. 69616	27. 17653
27. 71414	27. 67329	26. 82336	25. 26786	23. 09384
20. 19194	17. 10499	13. 39429	9. 76629	6. 49878
3. 64011	1. 15632	- .91882	-2. 55875	-3. 72200

((((((((((((  
S10= 15. 6733034755  
))))))))))

TABLEAU-3.b  
TRANSPOSE DE LA MEILLEURE ESTIMATION  $X_a(I, S)$

$X_a(1, S)$	$X_a(2, S)$	$X_a(3, S)$	$X_a(4, S)$	$X_a(5, S)$
7. 06425	7. 06425	7. 06425	0. 00000	0. 00000
10. 04330	5. 02165	9. 10685	0. 00000	0. 00000
16. 05704	5. 35235	12. 41702	-3. 64087	5. 49079
22. 82114	5. 70529	14. 16949	-5. 77800	8. 99540
29. 27035	5. 85807	15. 00812	-6. 34440	10. 39356
34. 80470	5. 80078	14. 73576	-4. 93822	8. 88090
40. 58450	5. 79779	14. 72262	-4. 15029	8. 16822
46. 46478	5. 80810	14. 76309	-3. 55693	7. 67850
53. 57571	5. 95286	15. 26996	-4. 43023	9. 39804
58. 66845	5. 86684	15. 00523	-2. 67865	7. 14130
63. 96646	5. 81513	14. 86754	-1. 47460	5. 55339
68. 63990	5. 71999	14. 65322	. 14423	3. 17041
72. 88030	5. 60618	14. 44287	1. 84316	. 46374
79. 46901	5. 67636	14. 54452	. 95328	1. 75321
84. 65505	5. 64367	14. 51010	1. 54226	. 72539
90. 49438	5. 65590	14. 51819	1. 42348	. 79746
95. 79815	5. 63519	14. 51251	1. 78930	. 06780
99. 22283	5. 51238	14. 52601	3. 65964	-3. 28497
104. 77820	5. 51569	14. 52438	3. 31957	-3. 09793
113. 00309	5. 65015	14. 40749	. 05691	. 83691
117. 71042	5. 60526	14. 46338	1. 67906	- . 67584
124. 23835	5. 64720	14. 39552	. 88823	. 57351
126. 78551	5. 51241	14. 66363	3. 34426	-3. 95470
132. 20484	5. 50854	14. 67277	3. 07326	-3. 88378
136. 49442	5. 45978	14. 80564	3. 66191	-5. 39059
138. 22401	5. 31631	15. 24099	5. 99387	-10. 31863
143. 08556	5. 29947	15. 30716	5. 44779	-10. 20716
147. 23294	5. 25832	15. 46416	5. 42125	-11. 05605
150. 09427	5. 17566	15. 80934	6. 22044	-13. 57807
156. 09330	5. 20311	15. 68487	4. 47178	-11. 26689
160. 19508	5. 16758	15. 85871	4. 30139	-11. 84379
164. 88397	5. 15262	15. 93724	3. 63588	-11. 45530

167	48934	5	07543	16	36993	4	45596	-14	05157
170	81143	5	02387	16	67729	4	48963	-15	26311
174	92215	4	99778	16	84201	3	83186	-15	11461
178	80602	4	96683	17	04828	3	32265	-15	23142
181	46249	4	90439	17	48650	3	61769	-17	06856
188	66614	4	96490	17	04062		62031	-11	87579
196	57501	5	04041	16	45776	-2	35863	-6	08022
202	74644	5	06866	16	22977	-3	61463	-3	44380
208	38525	5	08257	16	11271	-4	26830	-1	86065
212	85107	5	06780	16	24143	-3	99031	-2	21718
217	75005	5	06395	16	27723	-4	05666	-1	87265
222	44758	5	05563	16	35602	-3	95699	-1	87142
224	12625	4	98058	17	09196	-1	89289	-6	55446
228	21295	4	96115	17	20925	-1	85140	-6	99518
235	94090	5	02002	16	67124	-4	21735	-1	63857
241	38317	5	02882	16	57585	-4	60990		41902
252	37369	5	15089	15	21010	-8	46166	9	54913
260	96848	5	21937	14	42041	-9	81852	14	58582
267	55108	5	24610	14	10298	-9	43137	15	03128
274	90135	5	20656	13	60854	-9	40718	18	11287
281	83238	5	31759	13	21877	-8	89765	19	38536
284	52004	5	26889	13	84726	-5	59627	13	43200
288	96576	5	25392	14	04552	-3	94018	10	89735
292	73340	5	22738	14	40618	-2	09057	7	41545
297	81627	5	22485	14	44150	-1	37457	6	44400
301	70993	5	20190	14	76706		00879	3	51877
307	16987	5	20627	14	70515		12567	3	53144
312	78126	5	21302	14	60418		17095	3	78690
313	66147	5	14199	15	69056	3	13711	-4	18154
315	47491	5	08831	16	52995	4	80608	-9	73003
319	66627	5	07407	16	75740	4	52154	-10	51896
327	81318	5	12208	15	97405	1	76615	4	19186
332	95837	5	12244	15	96813	1	39595	-3	78786
340	24584	5	15524	15	41065		22793		43026
345	27333	5	15333	15	44370		11456		16680
351	48253	5	16886	15	16928		73151	2	07068
354	56619	5	13864	15	71361		68677	-1	92692
360	13242	5	14475	15	60151		26941		96385
367	74728	5	17954	14	95130	-1	27521	3	70070
377	20474	5	23895	13	82073	-3	48825	11	32332
383	53966	5	25397	13	52998	-3	17611	12	29047
389	61385	5	26505	13	31157	-2	62070	12	60710
392	54924	5	23399	13	93414		19576	6	86619
396	30167	5	21450	14	33145	-1	24229	3	21430
401	12468	5	20941	14	43679	1	73348	1	96614
408	94350	5	24287	13	73237		37656	6	63609
412	60678	5	22287	14	16014	1	84262	2	71789
418	23159	5	22789	14	05095	1	83034	3	02196
425	24882	5	24799	13	56345	1	04573	6	03435
429	07845	5	23266	13	95155	2	36009	2	39043
434	85008	5	23916	13	80386	2	24205	2	98037
442	16680	5	26389	13	23303	1	29635	6	61122
445	30625	5	23890	13	81830	3	05199	1	39360
451	78643	5	25333	13	47545	2	45226	3	50132
453	36410	5	21108	14	49325	4	81575	-4	66551
454	43159	5	16400	15	64343	6	74834	-13	04751
455	77516	5	12107	16	70644	7	78626	-19	95238
457	15304	5	07948	17	75038	8	19542	-25	99076
457	31581	5	02545	19	12472	8	75141	-33	84197
460	74505	5	00810	19	57188	6	78806	-33	82707
460	36698	4	75018	21	08402	6	94329	-41	73140
464	87567	4	94549	21	20823	3	68239	-38	17557
469	72620	4	74449	21	23500		53758	-34	04037
474	89904	4	94687	21	17049	-2	42942	-29	44740
477	94150	4	74735	21	14344	-4	92862	-25	45229
485	37591	4	95282	21	00547	-7	30020	-20	87718
491	05077	4	76011	20	80034	-9	40985	-16	13590
497	12236	4	97122	20	48399	11	32835	-10	92313

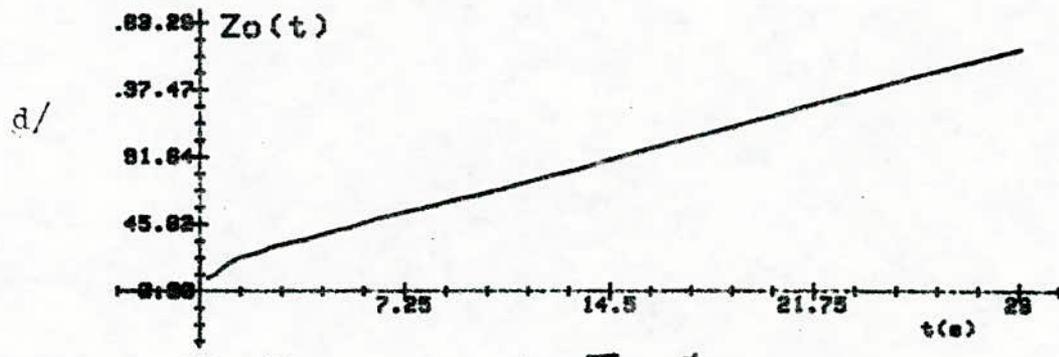
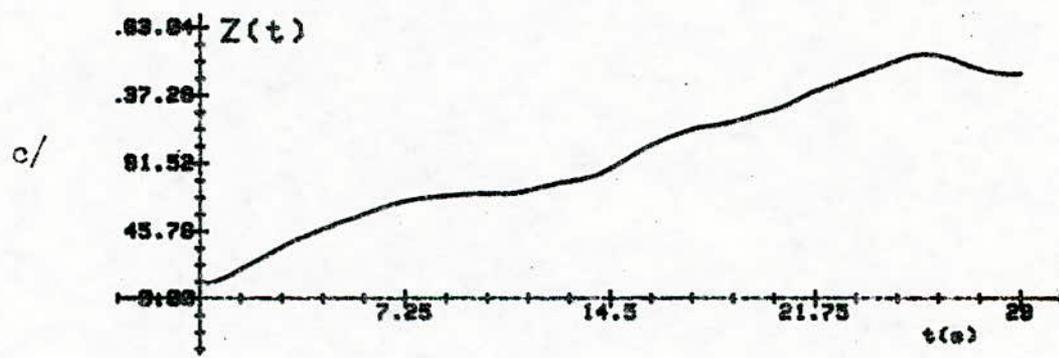
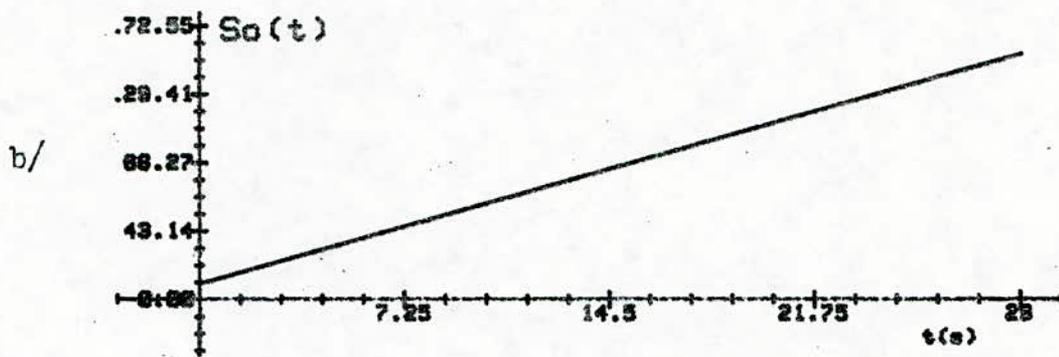
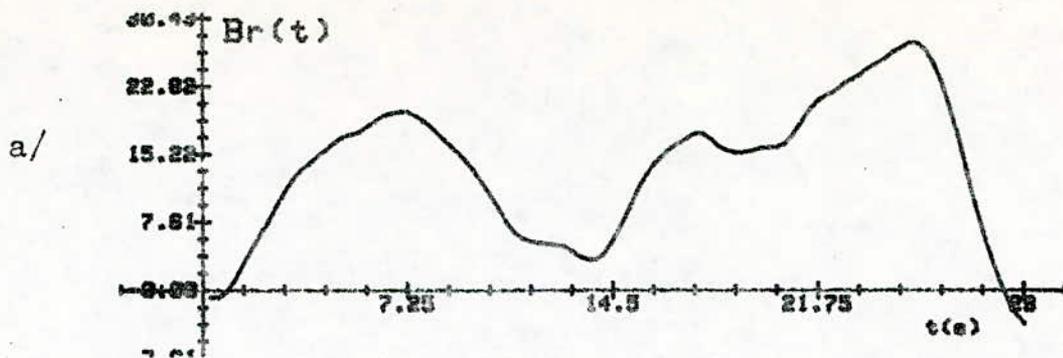


Fig.18:  $\omega_0=1$   $\beta=\sqrt{2}$   $\sigma_B=15.6733$

Omega = 1

Amp = 2

Beta = sqrt(2)

Te = .29

TABLEAU 1-b

TRANSPOSE DE LA MATRICE DU GAIN La(I, S)

500	500	500	0.000	0.000
2.000	1.000	-1.000	0.000	0.000
1.500	.500	.839	-1.339	0.000
270	.567	.002	-1.271	.381
410	.482	-.065	-1.345	.197
631	.439	-.269	-1.362	.470
747	.392	-.384	-1.363	.601
830	.354	-.481	-1.349	.740
876	.320	-.552	-1.324	.855
897	.290	-.606	-1.291	.957
899	.264	-.645	-1.253	1.044
886	.241	-.674	-1.212	1.120
863	.220	-.695	-1.168	1.186
832	.202	-.709	-1.123	1.244
796	.186	-.718	-1.078	1.295
755	.172	-.722	-1.033	1.339
712	.160	-.724	-.988	1.378
667	.148	-.723	-.944	1.413
621	.138	-.721	-.901	1.444
575	.129	-.716	-.859	1.472
529	.120	-.711	-.818	1.496
482	.113	-.704	-.778	1.518
437	.106	-.697	-.740	1.538
392	.100	-.690	-.702	1.556
348	.094	-.682	-.666	1.572
305	.089	-.673	-.632	1.586
263	.084	-.665	-.599	1.600
222	.079	-.656	-.566	1.612
182	.075	-.647	-.534	1.623
143	.071	-.639	-.504	1.633
105	.068	-.630	-.475	1.642
68	.065	-.621	-.447	1.650
32	.062	-.613	-.419	1.655
977	.059	-.604	-.393	1.665
963	.056	-.596	-.368	1.672
934	.054	-.587	-.343	1.678
899	.051	-.579	-.319	1.683
868	.049	-.571	-.296	1.688
837	.047	-.563	-.274	1.693
808	.045	-.556	-.252	1.698
780	.043	-.548	-.231	1.698
752	.042	-.541	-.211	1.702
725	.040	-.534	-.192	1.706
699	.039	-.526	-.173	1.709
674	.037	-.519	-.154	1.713
649	.036	-.513	-.136	1.716
625	.035	-.506	-.119	1.719
601	.033	-.499	-.102	1.721
579	.032	-.493	-.086	1.724
557	.031	-.487	-.070	1.726
535	.030	-.481	-.054	1.728
514	.029	-.475	-.039	1.730
493	.028	-.469	-.025	1.732
473	.027	-.463	-.010	1.734
454	.026	-.458	.004	1.736
435	.026	-.452	.017	1.737
417	.025	-.447	.030	1.739
399	.024	-.441	.043	1.740
381	.023	-.436	.055	1.742
364	.023	-.431	.068	1.743
347	.022	-.426	.079	1.744
331	.021	-.422	.091	1.745
315	.021	-.417	.102	1.746
				1.747
				1.748

TABLEAU 2-b

LES VALEURS DU BRUIT DE SECOND ORDRE

- .43575	- .42492	- .00340	.60632	1.47704
2.30112	3.07841	3.83547	4.70772	5.49751
6.17970	6.71868	7.08317	7.48340	7.85370
8.21803	8.54998	8.70424	8.82108	9.13374
9.42643	9.76105	9.89670	9.97544	9.98098
9.73343	9.42025	9.05917	8.56203	8.12498
7.67759	7.22855	6.65762	5.98917	5.29801
4.58847	3.78334	3.16354	2.83747	2.68079
2.61483	2.54709	2.48531	2.42330	2.16266
1.82540	1.69739	1.67456	2.07106	2.78519
3.61134	4.55136	5.57675	6.38551	7.03555
7.52451	7.94160	8.23510	8.50035	8.77820
8.74457	8.40517	7.97261	7.77669	7.66123
7.71428	7.80123	7.96015	7.98328	8.00167
8.21168	8.76861	9.44677	10.15236	10.64381
10.93771	11.14247	11.52622	11.80477	12.05644
12.42900	12.61504	12.94799	13.34809	13.58827
13.85707	13.81665	13.41168	12.63393	11.54942
10.09597	8.92250	6.69715	4.88314	3.24939
1.82006	1.7816	- .45941	-1.27937	-1.86100

(((((( ((((((  
 $S_{10} = 7.83665174776$   
 ))))))) )))))))

TABLEAU 3-b

TRANSPOSE DE LA MEILLEURE ESTIMATION  $X_a(I, S)$

$X_a(1, S)$	$X_a(2, S)$	$X_a(3, S)$	$X_a(4, S)$	$X_a(5, S)$
7.28213	7.28213	7.28213	0.00000	0.00000
10.02165	5.01083	9.55343	0.00000	0.00000
15.52852	5.17517	7.83076	- .44268	.78740
21.40581	5.35145	9.03123	- .63072	1.27631
27.21731	5.44347	9.81880	- .55910	1.41224
32.71575	5.45263	9.81318	- .22781	1.07424
38.33269	5.47610	9.79021	- .04449	.83934
43.99891	5.49986	9.75788	- .07868	.75000
50.05851	5.56206	9.65045	- .00122	1.03020
55.56841	5.55684	9.66134	.26773	.58908
61.11091	5.55554	9.66453	.40421	.28873
66.46431	5.53870	9.71175	.54256	- .13917
71.65847	5.51219	9.79536	.62934	- .60680
77.33124	5.52366	9.75518	.39690	- .34232
82.69663	5.51311	9.79580	.36127	- .49756
88.16460	5.51029	9.80764	.24578	- .45233
93.58715	5.0054	9.85189	.18893	- .54977
98.45499	5.46972	10.00234	.24692	-1.10478
103.71493	5.45868	10.06001	.04613	-1.02685
109.43269	5.47153	9.98793	- .28688	- .30070
114.60557	5.45741	10.07193	- .25106	- .53512
120.05122	5.45687	10.07526	- .36543	- .29116
124.86060	5.42872	10.26056	- .22446	-1.03950
130.02468	5.41770	10.32686	- .38610	- .99100
134.99502	5.39980	10.46674	- .48077	-1.21028

139. 525578  
144. 308873  
149. 113228  
153. 60414  
158. 439883  
163. 028865  
167. 65507  
171. 99162  
176. 342228  
180. 73578  
185. 07116  
189. 22563  
193. 85726  
198. 63019  
203. 31450  
207. 98612  
212. 56974  
217. 21334  
221. 85671  
226. 18945  
230. 71213  
235. 60970  
240. 35598  
245. 70991  
250. 99412  
256. 20219  
261. 56233  
266. 97221  
272. 04373  
277. 25316  
282. 39693  
287. 64315  
292. 77993  
298. 03528  
303. 31031  
308. 15622  
312. 98145  
317. 93117  
323. 19952  
328. 25456  
333. 49464  
338. 57996  
343. 76681  
348. 70460  
353. 81207  
359. 10395  
364. 61019  
369. 95216  
375. 30955  
380. 43195  
385. 58050  
390. 78738  
396. 23249  
401. 38785  
406. 67064  
412. 07291  
417. 25102  
422. 55509  
427. 99141  
433. 13262  
438. 49482  
443. 48602  
448. 35238  
453. 13023  
457. 82428  
462. 30933  
466. 91658  
471. 16025  
475. 64044  
480. 10585  
484. 27041

.36638  
.34773  
.32547  
.29669  
.28133  
.25899  
.23922  
.21187  
.18654  
.16388  
.14087  
.11421  
.10151  
.09329  
.08286  
.07283  
.06118  
.05147  
.04220  
.02643  
.01548  
.01297  
.00742  
.01449  
.01988  
.02357  
.03004  
.03785  
.04097  
.04288  
.04637  
.04793  
.05145  
.05517  
.05174  
.04809  
.04653  
.04999  
.05007  
.05295  
.05343  
.05539  
.05369  
.05446  
.05780  
.06403  
.06784  
.07175  
.07243  
.07343  
.07516  
.07990  
.08086  
.08338  
.08732  
.08843  
.09103  
.09514  
.09568  
.09878  
.09754  
.09491  
.07144  
.08694  
.08032  
.07518  
.06624  
.07000  
.05375  
.04774

10. 72060  
10. 86850  
11. 05254  
11. 30020  
11. 43760  
11. 64486  
11. 83489  
12. 10703  
12. 36753  
12. 60815  
12. 86026  
13. 16124  
13. 30887  
13. 40717  
13. 53533  
13. 66201  
13. 81300  
13. 94214  
14. 06859  
14. 28878  
14. 44539  
14. 48211  
14. 56528  
14. 45706  
14. 37270  
14. 31577  
14. 20823  
14. 08897  
14. 07819  
14. 02420  
13. 99181  
13. 92766  
13. 89912  
13. 83358  
13. 76286  
13. 82911  
13. 90087  
13. 93207  
13. 86167  
13. 86006  
13. 79967  
13. 78937  
13. 74690  
13. 78436  
13. 76722  
13. 69148  
13. 54835  
13. 45958  
13. 36704  
13. 35085  
13. 32649  
13. 28377  
13. 16528  
13. 14109  
13. 07635  
12. 97406  
12. 94492  
12. 87567  
12. 76475  
12. 74995  
12. 66425  
12. 69885  
12. 77325  
12. 87275  
13. 00330  
13. 19722  
13. 34970  
13. 61780  
13. 80683  
13. 99868  
14. 40884

.51295  
.83698  
.10665  
.34231  
.75246  
.99591  
.26141  
.44103  
.72064  
.04592  
.34295  
.60353  
.00259  
.20790  
.16904  
.03329  
.83565  
.67017  
.50200  
.31557  
.33213  
.39442  
.24670  
.09591  
.58163  
.90462  
.21920  
.48444  
.26359  
.75820  
.13577  
.37079  
.55605  
.63149  
.70503  
.75924  
.52314  
.10936  
.71550  
.54660  
.41997  
.43190  
.44644  
.49432  
.42238  
.41625  
.61007  
.03503  
.47576  
.86101  
.03072  
.07632  
.12845  
.27582  
.30945  
.38203  
.49911  
.51723  
.59192  
.70570  
.69800  
.65177  
.28605  
.62296  
.72183  
.41058  
.71378  
.08090  
.56412  
.85514  
97000

-1. 99859  
-1. 92269  
-2. 02200  
-2. 38892  
-1. 95577  
-2. 00485  
-1. 89543  
-2. 27289  
-2. 42098  
-2. 34906  
-2. 32179  
-2. 56754  
-1. 70018  
-1. 75273  
-1. 32045  
-1. 06228  
-1. 11278  
-1. 05441  
-1. 05123  
-1. 77317  
-1. 82918  
-1. 00641  
-1. 19298  
-1. 71313  
-2. 45485  
-2. 60676  
-2. 91277  
-2. 06048  
-2. 11438  
-1. 69719  
-1. 14862  
-1. 78400  
-1. 52977  
-1. 52227  
-1. 55124  
-1. 64429  
-1. 45993  
-1. 55572  
-1. 59613  
-1. 52828  
-1. 10138  
-1. 06002  
-1. 33827  
-1. 25519  
-1. 11076  
-1. 57355  
-1. 67901  
-1. 79317  
-1. 81051  
-1. 94478  
-1. 39808  
-1. 21035  
-1. 88541  
-1. 30298  
-1. 34251  
-1. 77345  
-1. 23439  
-1. 31636  
-1. 83581  
-1. 07086  
-1. 37363  
-1. 80712  
-1. 99811  
-2. 75601  
-3. 77277  
-4. 83526  
-4. 75191  
-5. 80421  
-5. 19832  
-4. 52858  
-2. 92892

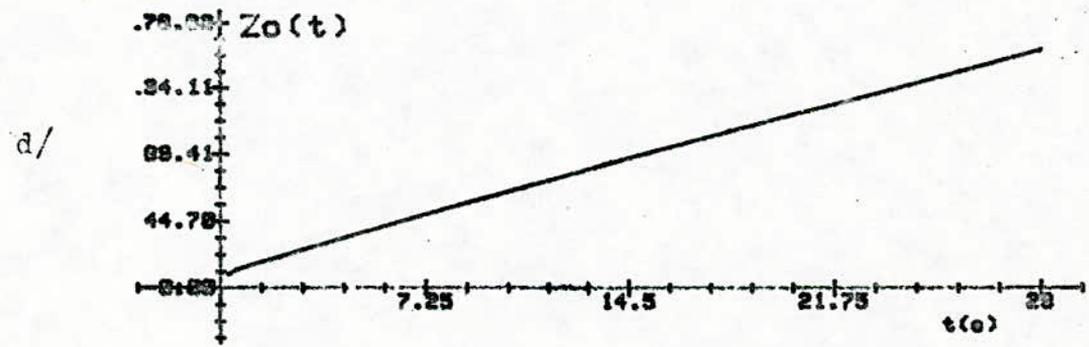
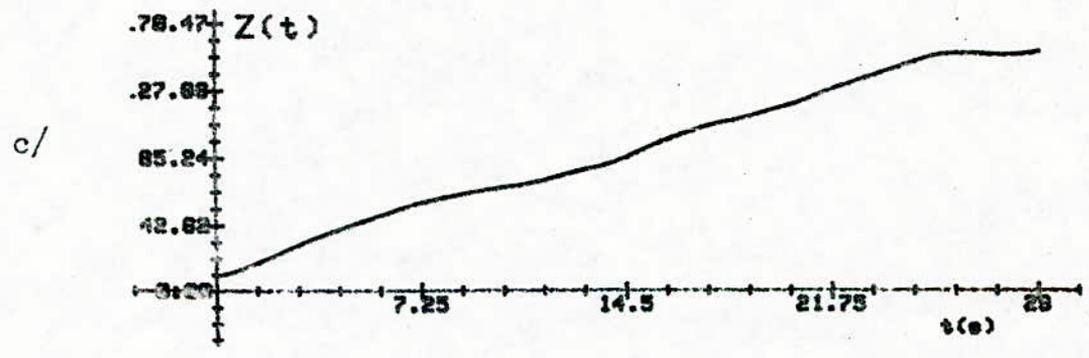
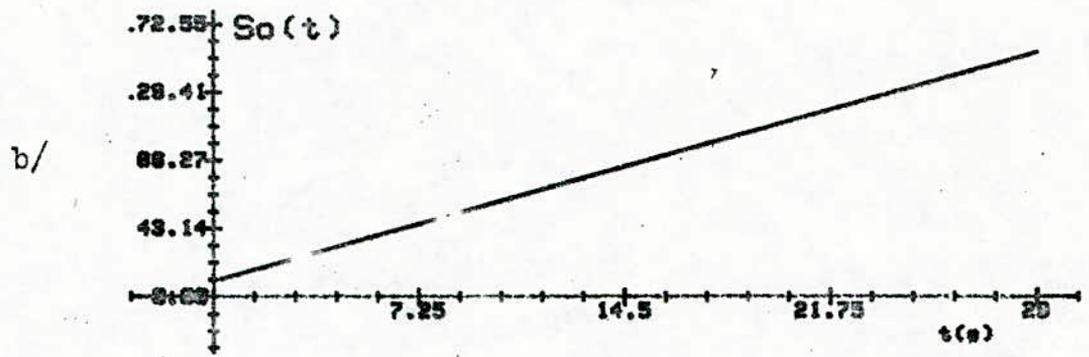
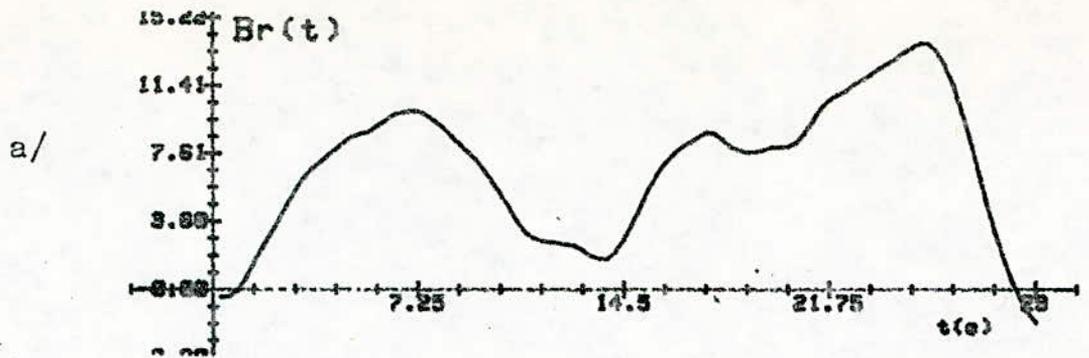


Fig. 19-  $\omega_0=1$   $\beta=\sqrt{2}$   $\delta_B=7.8366$

Omea0 = 1

Beta =  $\sqrt{2}$

Amp = 6

Te = .05

TABLÉAU 1.6

TRANSPOSE DE LA MATRICE DU GAIN La(I,S)

.500	.500	.500	0.000	0.000
2.000	1.000	-1.000	0.000	0.000
1.500	.500	-.250	-.750	1.529
2.100	.525	-.359	-.742	1.487
2.136	.427	-.384	-.751	1.683
2.226	.371	-.494	-.733	1.786
2.235	.319	-.537	-.698	1.882
2.222	.278	-.568	-.654	1.756
2.189	.243	-.583	-.606	2.016
2.145	.215	-.589	-.556	2.066
2.094	.190	-.589	-.505	2.106
2.040	.170	-.584	-.455	2.140
1.984	.153	-.577	-.407	2.168
1.928	.138	-.568	-.361	2.191
1.873	.125	-.557	-.316	2.211
1.820	.114	-.546	-.274	2.228
1.768	.104	-.534	-.234	2.242
1.718	.095	-.522	-.195	2.254
1.670	.088	-.511	-.159	2.265
1.624	.081	-.499	-.124	2.274
1.579	.075	-.488	-.092	2.282
1.537	.070	-.477	-.061	2.289
1.497	.065	-.466	-.031	2.294
1.458	.061	-.455	-.003	2.300
1.421	.057	-.445	.024	2.304
1.386	.053	-.435	.049	2.308
1.353	.050	-.426	.073	2.312
1.320	.047	-.416	.096	2.315
1.289	.044	-.408	.118	2.318
1.260	.042	-.399	.139	2.320
1.232	.040	-.391	.159	2.322
1.205	.038	-.383	.178	2.324
1.179	.036	-.375	.196	2.326
1.154	.034	-.368	.214	2.328
1.130	.032	-.361	.231	2.329
1.107	.031	-.354	.247	2.330
1.084	.029	-.347	.263	2.331
1.063	.028	-.341	.277	2.332
1.043	.027	-.334	.292	2.333
1.023	.026	-.328	.305	2.334
1.004	.024	-.323	.319	2.334
.985	.023	-.317	.331	2.335
.968	.023	-.312	.344	2.336
.951	.022	-.306	.356	2.336
.934	.021	-.301	.367	2.336
.918	.020	-.296	.378	2.337
.903	.019	-.291	.389	2.337
.888	.018	-.287	.399	2.337
.873	.018	-.282	.409	2.338
.859	.017	-.278	.419	2.338
.846	.017	-.274	.428	2.338
.832	.016	-.270	.437	2.338
.820	.015	-.266	.446	2.338
.807	.015	-.262	.455	2.338
.795	.014	-.258	.463	2.338
.784	.014	-.254	.471	2.338
.772	.014	-.251	.479	2.338
.761	.013	-.247	.487	2.338

.750	.013	-.244	.494	2.338
.740	.012	-.241	.501	2.338
.730	.012	-.237	.508	2.338
.720	.012	-.234	.514	2.338
.710	.011	-.231	.521	2.338
.701	.011	-.228	.527	2.338
.692	.011	-.225	.534	2.338
.683	.010	-.223	.540	2.338
.674	.010	-.220	.546	2.338
.666	.010	-.217	.551	2.338
.658	.010	-.215	.557	2.338
.650	.009	-.212	.562	2.337
.642	.009	-.210	.568	2.337
.634	.009	-.207	.573	2.337
.627	.009	-.205	.578	2.337
.619	.008	-.202	.583	2.337
.612	.008	-.200	.588	2.337
.605	.008	-.198	.593	2.337
.598	.008	-.196	.597	2.337
.592	.008	-.194	.602	2.336
.585	.007	-.191	.606	2.336
.579	.007	-.189	.611	2.336
.572	.007	-.187	.615	2.336
.566	.007	-.185	.619	2.336
.560	.007	-.184	.623	2.336
.555	.007	-.182	.627	2.336
.549	.006	-.180	.631	2.335
.543	.006	-.178	.635	2.335
.538	.006	-.176	.639	2.335
.532	.006	-.174	.642	2.335
.527	.006	-.173	.646	2.335
.522	.006	-.171	.649	2.335
.517	.006	-.169	.653	2.335
.512	.006	-.168	.656	2.334
.507	.005	-.166	.660	2.334
.502	.005	-.165	.663	2.334
.497	.005	-.163	.666	2.334
.493	.005	-.162	.669	2.334
.488	.005	-.160	.672	2.334
.484	.005	-.159	.675	2.334
.479	.005	-.157	.678	2.334
.475	.005	-.156	.681	2.333
.00071	2.45412			

TABLEAU-2-b

LES VALEURS DU BRUIT DE SECOND ORDRE

1. 98052	4. 11154	6. 22101	8. 23654	10. 08223
11. 65634	12. 96239	13. 99258	14. 85842	15. 44166
15. 73957	15. 76588	15. 55096	15. 26652	14. 86700
14. 37796	13. 79815	13. 09370	12. 41803	11. 87676
11. 34319	10. 80878	10. 17767	9. 64375	9. 21724
8. 75184	8. 45689	8. 28255	8. 20012	8. 36038
8. 73797	9. 29504	9. 96694	10. 72617	11. 66837
12. 72727	13. 85442	15. 18173	16. 68078	18. 26514
19. 87041	21. 36781	22. 80868	24. 15462	25. 30899
26. 33902	27. 38773	28. 30789	29. 18459	29. 91746
30. 38920	30. 53058	30. 34060	29. 74067	28. 72782
27. 36155	25. 73676	23. 86798	21. 81852	19. 64179
17. 14807	14. 35917	11. 43373	8. 54200	5. 60014
2. 55933	- .65633	-4. 06836	-7. 74825	-11. 56830
-15. 52623	-19. 53703	-23. 78145	-28. 27498	-33. 10543
-38. 23587	-43. 52108	-48. 87835	-54. 34557	-59. 08301
-65. 43469	-71. 08278	-76. 75392	-82. 37079	-87. 98088
-93. 48358	-98. 97283	-104. 44930	-109. 80101	-114. 91145
-119. 78112	-124. 28715	-128. 46752	-132. 15394	-135. 37758
-138. 23647	-140. 75866	-143. 04843	-145. 16828	-147. 06794

((((((((  
 S10= 55.2008423171  
 )))))))

TABLEAU-3-6

TRANSPOSE DE LA MEILLEURE ESTIMATION  $X_a(I, S)$

$X_a(1, S)$	$X_a(2, S)$	$X_a(3, S)$	$X_a(4, S)$	$X_a(5, S)$
8.49026	8.49026	8.49026	0.00000	0.00000
14.26204	7.13102	9.84950	0.00000	0.00000
21.36074	7.12025	9.84412	.01615	-.03295
28.28583	7.07146	9.87746	.07325	-.15876
34.99576	6.79915	9.94253	.14393	-.30266
41.34605	6.89101	10.08638	.22391	-.74593
47.50182	6.78597	10.26308	.19748	-1.04039
53.38111	6.67264	10.49491	.11656	-1.23881
59.25038	6.58338	10.70894	-.10090	-.40975
64.63645	6.46365	11.03790	-.23269	-1.78200
69.81124	6.34648	11.40039	-.47205	-2.05790
74.72793	6.22733	11.81001	-.77206	-2.31115
79.43735	6.11057	12.25138	-1.13777	-2.49790
84.22026	6.01573	12.64218	-1.59572	-2.31660
88.73187	5.91516	13.08947	-1.95434	-2.35214
93.17453	5.82111	13.53126	-2.32784	-2.28221
97.45975	5.73293	13.99611	-2.66770	-2.27790
101.62490	5.64583	14.47296	-3.00417	-2.27414
105.87686	5.57247	14.89933	-3.35816	-1.97821
110.24248	5.51212	15.27033	-3.63606	-1.95536
114.42982	5.44904	15.67940	-3.76604	-1.48267
118.63359	5.39244	16.06545	-3.89025	-1.34711
122.67384	5.33365	16.42515	-3.98231	-1.46173
126.96072	5.29003	16.81287	-4.12984	-1.06556
131.24821	5.24993	17.12672	-4.15768	-.80672
135.40451	5.20787	17.46999	-4.12266	-.87232
139.86483	5.18018	17.70522	-4.11316	-.37093
144.30076	5.15360	17.93994	-3.95815	-.16598
148.81185	5.13144	18.14300	-3.75472	.03070
153.59048	5.11968	18.35472	-3.48482	.56318
159.46458	5.11176	18.53262	-3.05923	.91338
163.44808	5.10838	18.68702	-2.54006	1.19593
168.55230	5.10765	18.83471	-1.96007	1.32393
173.74403	5.11012	18.93491	-1.36577	1.41615
179.16050	5.11887	19.02510	-.74234	1.73186
184.64256	5.12896	19.13197	-.04937	1.81364
190.22196	5.14113	17.98915	.64251	1.83455
196.05603	5.15977	17.76775	1.35772	2.17527
202.00100	5.17951	17.51606	2.16372	2.74460
208.02825	5.20071	17.24393	2.99295	2.34664
214.12742	5.22262	16.95524	3.78775	2.23284
220.20119	5.24289	16.68150	4.48512	1.85489
226.37610	5.26456	16.38149	5.05109	1.68758
232.53895	5.28498	16.09209	5.52358	1.39555
238.63348	5.30297	15.83107	5.84444	.91207
244.76398	5.32076	15.56406	6.01098	.66847
250.98131	5.34003	15.29462	6.13180	.71564
257.06704	5.35556	15.03368	6.20721	.34174
263.21399	5.37171	14.77778	6.19281	-.22362
269.23811	5.38476	14.56670	6.11265	-.56204
275.12478	5.39460	14.40422	5.81020	-.59256
280.85452	5.40105	14.29566	5.38021	-.20713
286.44471	5.40462	14.23435	4.66956	-1.74393
291.78152	5.40336	14.20634	3.70281	-2.50474
297.92897	5.39871	14.33937	2.45948	1.00998
301.87500	5.39064	14.48606	1.99968	5.2154
306.45400	5.37800	14.63800	1.40446	0.00000

311. 22380  
315. 62394  
319. 85669  
323. 76522  
327. 47316  
331. 04268  
334. 51744  
337. 77810  
340. 86525  
343. 74092  
346. 42867  
348. 88078  
351. 21160  
353. 34818  
355. 36539  
357. 10848  
358. 66720  
359. 96358  
361. 05908  
362. 00359  
362. 78680  
363. 37003  
363. 80390  
364. 10183  
364. 20641  
364. 20450  
364. 10219  
363. 86158  
363. 57159  
363. 14334  
362. 63676  
362. 10322  
361. 57170  
361. 02152  
360. 54095  
360. 07858  
359. 76552  
359. 53581  
359. 39477  
359. 37416  
359. 43992  
359. 60914  
359. 91314

3. 36593  
3. 34956  
3. 33094  
3. 30763  
3. 28183  
3. 25465  
3. 22683  
3. 19659  
3. 16463  
3. 13046  
3. 09454  
3. 05624  
3. 01731  
4. 27673  
4. 93563  
4. 89190  
4. 84685  
4. 79951  
4. 75078  
4. 70135  
4. 65111  
4. 59962  
4. 54755  
4. 49508  
4. 44154  
4. 38801  
4. 33455  
4. 28072  
4. 22758  
4. 17406  
4. 12087  
4. 06858  
4. 01746  
3. 96727  
3. 91892  
3. 87181  
3. 82729  
3. 78459  
3. 74370  
3. 70489  
3. 66775  
3. 63242  
3. 59913

17. 24820  
15. 26215  
15. 62534  
16. 08812  
16. 60877  
17. 16631  
17. 74606  
18. 38673  
19. 07432  
19. 82068  
20. 61745  
21. 47964  
22. 36918  
23. 30970  
24. 27624  
25. 31917  
26. 40834  
27. 56884  
28. 77985  
30. 02460  
31. 30626  
32. 63723  
34. 00051  
35. 39162  
36. 82914  
38. 28433  
39. 75517  
41. 25411  
42. 75191  
44. 27791  
45. 81234  
47. 33846  
48. 84705  
50. 34527  
51. 80445  
53. 24205  
54. 61544  
55. 94709  
57. 23582  
58. 47179  
59. 66685  
60. 81591  
61. 90926

2. 30401  
-4. 06756  
-5. 84025  
-7. 70526  
-9. 72276  
-11. 77525  
-13. 72150  
-15. 56469  
-17. 38024  
-19. 21794  
-21. 11448  
-23. 10866  
-25. 14900  
-27. 18411  
-29. 17866  
-31. 20910  
-33. 35053  
-35. 63786  
-38. 07480  
-40. 54728  
-42. 97141  
-45. 35283  
-47. 68750  
-49. 92814  
-52. 11833  
-54. 24274  
-56. 22815  
-58. 09658  
-59. 80709  
-61. 39408  
-62. 89840  
-64. 24268  
-65. 33020  
-66. 14791  
-66. 63255  
-66. 78815  
-66. 53490  
-65. 86047  
-64. 86706  
-63. 60461  
-62. 15519  
-60. 59333  
-58. 91234

-3. 07710  
-4. 10990  
-4. 20119  
-4. 20061  
-4. 66258  
-4. 92197  
-4. 84047  
-4. 44758  
-4. 34963  
-4. 29196  
-4. 40023  
-4. 50455  
-4. 76511  
-4. 66524  
-4. 65222  
-4. 41326  
-4. 66338  
-4. 80320  
-5. 16086  
-5. 34697  
-5. 21800  
-4. 97630  
-4. 85237  
-4. 61744  
-4. 28417  
-4. 17958  
-3. 84454  
-3. 40136  
-3. 11763  
-2. 56952  
-2. 33644  
-2. 03340  
-1. 47998  
- .78157  
- .15241  
- .75010  
1. 43774  
2. 53422  
3. 38351  
4. 01125  
4. 58786  
4. 89443  
5. 10075  
5. 38142

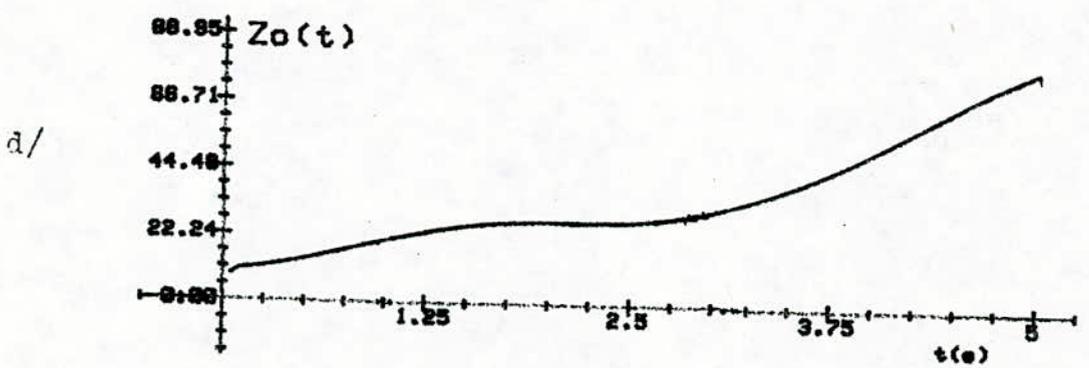
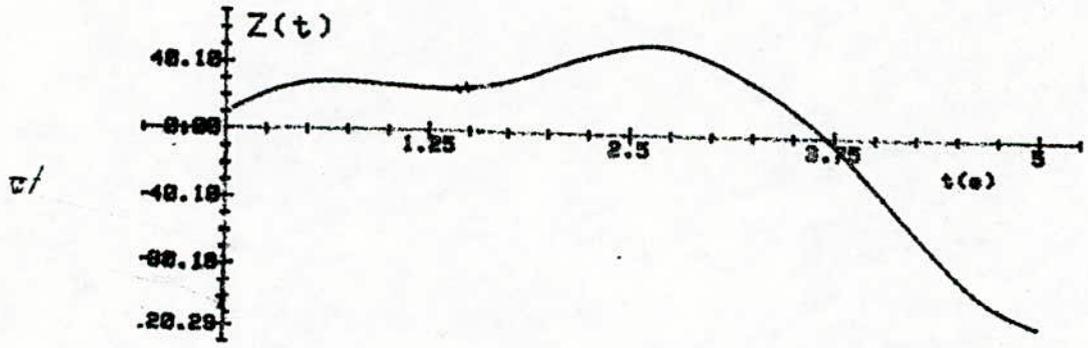
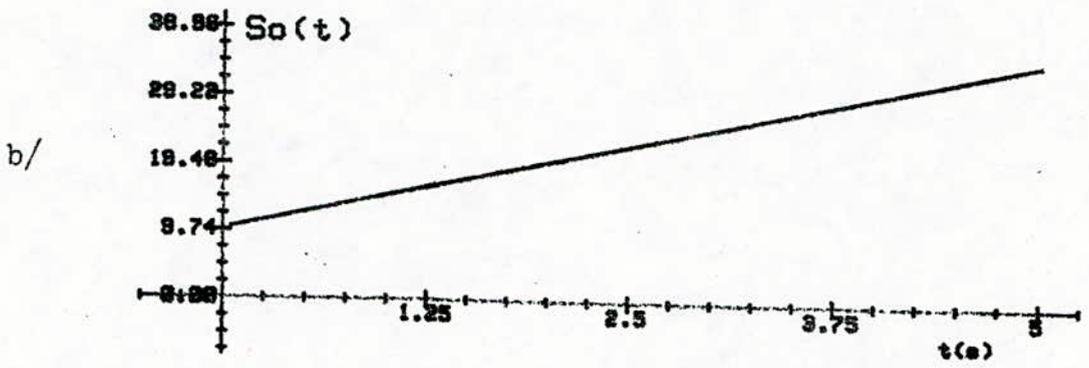
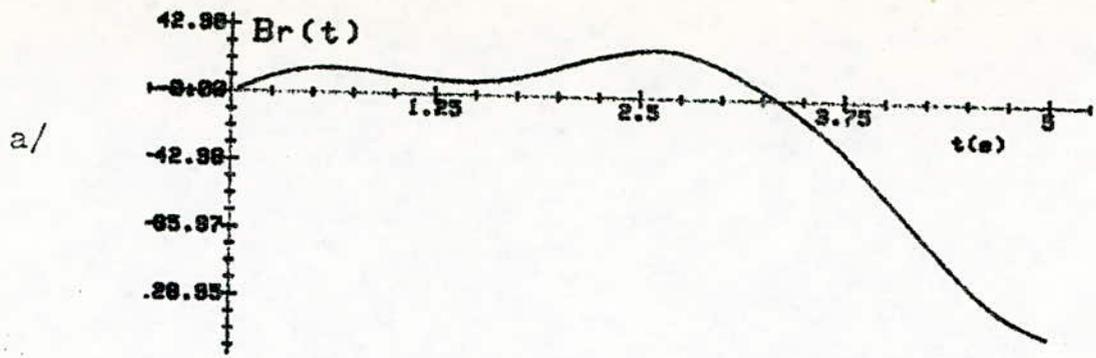


Fig.20-  $\omega_0=1$        $\beta=\sqrt{2}$        $\zeta_B=55.2008$ .

---

---

# CONCLUSION

---

---

La méthode ainsi mise au point pour détecter un signal noyé dans un bruit est efficace dans la mesure où elle donne des résultats assez satisfaisants.

En effet, pour trouver de bonnes conditions de l'algorithme de KALMAN, nous sommes partis d'une situation où la covariance du bruit était à la réception plus faible que celle du signal. En appliquant au signal observé un filtre dérivateur de type KALMAN, on obtient une erreur quadratique moyenne sur la dérivé du signal de l'ordre de  $10^{-5}$ .

En particulier, nous avons voulu tester les performances du filtre dérivateur en considérant le cas où le niveau du bruit à la réception est de l'ordre de celui du signal. On trouve que l'erreur sur le coefficient pente est de l'ordre de  $10^{-3}$ . Ceci montre que la méthode est valable même dans ce cas et vérifie le fait que le filtre de KALMAN-BUCY est un estimateur optimal.

Notons que ces résultats n'ont pu être obtenus que grâce à un choix judicieux des conditions d'initialisation de l'algorithme de KALMAN. La taille mémoire nécessaire et le temps de calcul sur ordinateur sont alors considérablement réduits, et l'algorithme converge vers la meilleure estimation après quelques itérations dans la plupart des cas.

Les difficultés numériques ainsi que les erreurs de modèle sont des causes de la divergence du filtre de KALMAN, car dans

le caractère positif semi défini des matrices de covariance n'est pas préservé .

Pour éviter ou éliminer cette divergence, différentes solutions ont été envisagées dans la littérature [21]. Mais, dans notre cas, nous n'avons jamais rencontré une telle situation, sans doute grâce au bon choix de nos conditions d'initialisation.

Un certain nombre d'applications du filtre dérivateur peuvent être envisagées dans le future. Elles portent sur la suppression de parasites, l'amélioration du rapport signal sur bruit, la mise au point de filtres numériques, etc... Pour cela, il faudrait traduire notre réalisation sous forme d'un système électronique dont on aura à définir le schéma détaillé et les éléments constitutifs. C'est à cette question que nous avons pensé lorsque, dans le chapitre 4, nous nous sommes intéressés au filtre de BUTTERWORTH.

Au cours de notre étude, nous avons pris un signal de référence linéaire pour mettre au point le filtre dérivateur. Il reste maintenant à examiner le système à un signal-test non linéaire ou du moins à déterminer les conditions de filtrage d'un tel signal .

Signalons, pour terminer, un autre problème que nous avons effleuré au chapitre 4: celui de voir comment généraliser la méthode à des bruit non gaussiens.

# ANNEXE\_1

---

---

## THEOREMES FONDAMENTAUX DE L'ESTIMATION DANS LES SYSTEMES DISCRETS

---

---

### 1. Note préliminaire

Maintenant nous allons énoncer, sans démonstration, un certain nombre de théorèmes dont les résultats sont utiles pour notre travail.

Le lecteur intéressé par les développements théoriques ayant permis d'établir ces théorèmes peut consulter l'excellent ouvrage de J.S. MEDITCH portant sur l'estimation linéaire optimale des processus stochastiques [10] .

### 2. Théorème n°1:

Considérons la fonction de répartition qui donne la probabilité conditionnelle d'avoir l'état  $X(k)$  sachant que les mesures  $Z(1)$ ,  $Z(2), \dots, Z(j)$  ont été effectuées . Elle s'écrit :

$$F[\xi | Z^T(j)] = P[X(k) \leq \xi | Z^T(j)]$$

$\xi$  est un vecteur de dimension  $n$  et  $Z^T(j)$  est le vecteur transposé du vecteur  $Z$  .

ENONCE DU THEOREME :

Si la fonction  $L[\tilde{X}(k|j)]$  est une fonction de pertes admissibles et si la  $\downarrow$  de répartition  $F[\xi | Z^T(j)]$  est symétrique par rapport à sa moyenne  $\bar{\xi}$  et convexe pour tout  $\xi \leq \bar{\xi}$ , alors l'estimation optimale sera :

$$\hat{X}(k|j) = E[X(k) | Z^T(j)]$$

Rappelons que la fonction  $F$  est symétrique par rapport à sa moyenne  $\bar{\xi}$ , si elle satisfait à la relation suivante:

$$F[\xi - \bar{\xi} | Z^T(j)] = 1 - F[\bar{\xi} - \xi | Z^T(j)] \quad \forall \xi.$$

De même, on dit qu'elle est convexe pour tout vecteur  $\xi \leq \bar{\xi}$  si on a :

$$F[\lambda \xi^1 + (1-\lambda)\xi^2 | Z^T(j)] \leq \lambda F[\xi^1 | Z^T(j)] + (1-\lambda)F[\xi^2 | Z^T(j)].$$

quels que soient les vecteurs  $\xi^1, \xi^2 \leq \bar{\xi}$

Remarque: les exposants 1 et 2 indiquent qu'on a affaire à deux vecteurs différents.

C O R O L L A I R E n° 1.1 :

Si  $L[\tilde{X}(k|j)]$  est une fonction de pertes admissibles et si les séquences  $\{X(k); k \in U\}$  et  $\{Z(i); i=1,2,\dots,j\}$  sont des gaussiennes à temps discret, l'estimation optimale sera

$$\hat{X}(k|j) = E[X(k) | Z^T(j)]$$

### 3. Théorème n° 2

Si la fonction de pertes admissibles  $L[\tilde{X}(k|j)]$  est égale à l'erreur quadratique  $\tilde{X}^T(k|j) \cdot \tilde{X}(k|j)$ , l'estimation optimale sera :

$$\hat{X}(k|j) = E[X(k) | Z^T(j)]$$

Dans ce cas, la mesure de performance donnera l'erreur quadratique moyenne qui est :

$$J[\tilde{X}(k|j)] = E[\tilde{X}^T(k|j) \cdot \tilde{X}(k|j)]$$

En effet, la quantité  $E[\tilde{X}^T(k|j) \cdot \tilde{X}(k|j)]$  est la valeur moyenne du carré du module du vecteur erreur.

## 4. Théorème n°3

Si les deux premiers moments des processus stochastiques  $\{X(k); k \in U\}$  et  $\{Z(i); 1, 2, \dots, j\}$  sont connus, l'estimation optimale pour toute fonction de pertes admissibles sera l'estimation linéaire d'expression :

$$\hat{X}(k|j) = \bar{X}(k) + P_{XZ^T} \cdot P_{Z^T Z^T}^{-1} \cdot (Z^T - \bar{Z}^T)$$

$P_{XZ^T}$  et  $P_{Z^T Z^T}$  sont des matrices de covariance non singulières et de dimension  $j.m \times j.m$ . C'est à dire que :

$$P_{XZ^T} = E[(X^T - \bar{X}^T)(Z^T - \bar{Z}^T)^T]$$

$$P_{Z^T Z^T} = E[(Z^T - \bar{Z}^T) \cdot (Z^T - \bar{Z}^T)^T]$$

Si les processus stochastiques de mesure et d'état ont chacun une valeur moyenne nulle, le résultat du théorème n°3 devient

$$\hat{X}(k|j) = P_{XZ^T} P_{Z^T Z^T}^{-1} \cdot Z^T$$

Cette estimation possède les propriétés importantes suivantes

a/  $\hat{X}(k|j)$  est linéaire. C'est à dire que c'est une combinaison linéaire des mesures disponibles.

b/  $\hat{X}(k|j)$  et  $\tilde{X}(k|j)$  sont des vecteurs gaussiens de dimension n.

c/  $\tilde{X}(k|j)$  est indépendante de toute combinaison linéaire des mesures disponibles. Il en résulte que cette erreur ne dépend pas de l'estimation  $\hat{X}(k|j)$ . C'est à dire que :

$$E[\tilde{X}(k|j) \cdot \hat{X}(k|j)] = 0 \quad q$$

d/ l'estimation optimale  $\hat{X}(k|j)$  est unique.

## 5. Théorème n° 4

Si, pour des mesures données de  $j=0,1,\dots$ , le filtre optimal  $\hat{X}(j|j)$  et la matrice de covariance  $P(j|j)$  de l'erreur de filtrage  $\tilde{X}(j|j)$  sont connues, les paramètres de filtrage peuvent être déduits de règles ( valables quel que soit k ) qui sont :

a/ la prédiction optimale  $\hat{X}(k|j)$  est donnée, pour toute fonction de pertes admissibles, par la relation:

$$\hat{X}(k|j) = \Phi(k, j) \cdot \hat{X}(j|j).$$

b/ le processus stochastique  $\{\tilde{X}(k|j); k=j+1, j+2, \dots\}$  est une séquence de GAUSS-MARKOV à moyenne nulle et sa matrice de covarian-

ce s'écrit :

$$P(k|j) = \phi(k, j) \cdot P(j|j) \phi^T(k, j) + \sum_{i=j+1}^k \phi(k, i) \Gamma(i, i-1) Q(i-1) \Gamma^T(i, i-1) \phi^T(k, i)$$

Remarques:

- 1- Rappelons que  $\phi$ ,  $\Gamma$  et  $Q$  sont respectivement les matrices de transition d'état, de transition de perturbation et de covariance de la perturbation.
- 2- L'expression de  $P(k|j)$  peut se mettre sous une autre forme. Celle-ci est :

$$P(k|j) = \phi(k, k-1) P(k-1|j) \phi^T(k, k-1) + \Gamma(k, k-1) Q(k-1) \Gamma^T(k, k-1)$$

C O R O L L A I R E n° 4.1 :

Si le filtre optimal  $\hat{X}(k|k)$  et la matrice de covariance  $P(k|k)$  de l'erreur de filtrage  $\tilde{X}(k|j)$  sont connues pour des valeurs données  $k = 0, 1, \dots$ , alors :

- a/ la prédiction optimale (variant pas à pas) sera donnée pour toute fonction de pertes admissibles par :

$$\hat{X}(k+1|k) = \phi(k+1, k) \cdot \hat{X}(k|k)$$

- b/ le processus stochastique  $\{\tilde{X}(k+1|k); k=0, 1, \dots\}$  sera une séquence de GAUSS-MARKOV à moyenne nulle et sa matrice de covariance s'écrira :

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k)$$

## 6\_Théorème n°5

Soit  $Z$ , un vecteur de mesure,  $H$ , la matrice de mesure,  $R$ , la matrice de covariance de l'erreur de mesure et  $K$ , le gain de filtrage.

a/ le filtre optimal  $\hat{X}(k+1|k+1)$  peut être représenté par la relation de récurrence:

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1|k+1) &= \Phi(k+1, k)\hat{X}(k|k) \\ &+ K(k+1)[Z(k+1) - H(k+1)\Phi(k+1, k)\hat{X}(k|k)] \end{aligned}$$

quel que soit  $k = 0, 1, \dots$ , et à condition que  $\hat{X}(0|0) = 0$

b/ le gain  $K(k+1)$  est une matrice  $n \times m$  définie, quel que soit  $k = 0, 1, \dots$ , par les relations ci-après:

$$K(k+1) = P(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}$$

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k)Q(k+1)\Gamma^T(k+1, k)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k)$$

où  $I$  est la matrice identité de dimension  $n \times n$ , et les conditions initiales étant fixées par :  $P(0|0) = P(0)$ .

c/ le processus stochastique  $\{\tilde{X}(k+1|k+1); k=0, 1, \dots\}$  est une séquence de GAUSS-MARKOV à moyenne nulle, et sa matrice de covariance est  $P(k+1|k+1)$ .

## ANNEXE - 2

# RAPPEL DES PROPRIETES DE LA FONCTION DE DIRAC

### 1\_ Fonction de DIRAC

La fonction de DIRAC ( ou fonction Delta ) est définie par [12]:

$$\delta(t-\alpha) = 0 \quad \text{pour tout } t \neq \alpha \quad (A_2-1)$$

telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\alpha) dt = 1 \quad (A_2-2)$$

Une autre définition de la fonction de DIRAC est:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left[ u\left(t + \frac{a}{2}\right) - u\left(t - \frac{a}{2}\right) \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left[ u(t) - u(t-a) \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left[ u(t+a) - u(t) \right] \end{aligned} \quad (A_2-3)$$

où  $u(t-a)$  est la fonction échelon-unité définie par :

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases} \quad (A_2-4)$$

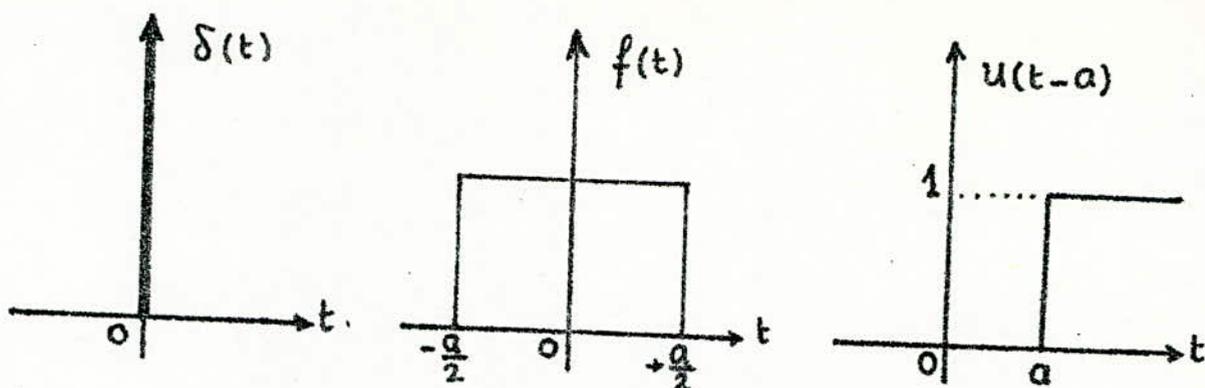


Figure (1-A<sub>2</sub>)

Soit  $\phi(t)$  une fonction de test. Par exemple, elle peut être de la forme :

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - t^2}} & |t| \geq \lambda \\ 0 & |t| < \lambda \end{cases}$$

A chaque valeur de  $\lambda$ , il correspond une fonction de test  $\phi_\lambda(t)$  donnée. L'ensemble des fonctions de test  $\phi_\lambda(t)$  (avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) forme l'espace des fonctions de test.

Une fonctionnelle linéaire est définie dans un espace de fonctions de test par :

$$F[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \phi(t) dt \quad (A_2-5)$$

où  $s(t)$  est une fonction symbolique. Cette fonctionnelle satisfait aux relations suivantes :

$$F[\phi_1 + \phi_2] = F[\phi_1] + F[\phi_2]$$

$$F[k\phi] = k F[\phi] \quad (A_2-6)$$

La fonction  $\delta(t)$  et ses dérivées peuvent être considérées comme des fonctions symboliques et être substituées à  $S(t)$  dans l'intégrale (A<sub>2</sub>-5). Il en découle alors un certain nombre de propriétés de la fonction Delta .

a/

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \{ u(t) \} \quad (A_2-7)$$

b/

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \phi(t) dt = \phi(t_0) \quad (A_2-8)$$

Cette propriété est la plus importante. Elle signifie que  $\delta(t)$  prend la valeur de la fonction  $\phi$  à l'instant  $t_0$  où  $\delta(t)$  est appliquée.

c/ Parité de la fonction de Dirac et de ses dérivées:

$$\delta^{(n)}(t) = (-1)^n \delta^{(n)}(-t) \quad (A_2-9)$$

c'est à dire les Delta d'ordre impair sont des fonctions impaires et celles d'ordre pair sont des fonctions paires.

d/

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = (-1)^n \phi^{(n)}(0) \quad (A_2-10)$$

e/ Fonction  $\delta$  d'une fonction  $f$  :

$$\delta[f(t)] = \frac{\delta(t-t_0)}{|f'(t_0)|} \quad (A_2-11)$$

où  $f(t)$  est une fonction ~~monotone~~ et nulle à l'origine.

Notons que si  $f(t)$  est une fonction discrète du temps, nous aurons

$$\delta [ f(t) ] = \sum_{n=1}^m \frac{\delta(t-t_0)}{|f^{(n)}(t_n)|} \quad (A_2-12)$$

f/ Multiplication de  $\delta(t)$  d'ordre quelconque par une autre fonction continue dont la dérivée première est continue :

$$\delta^n(t) \cdot f(t) = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_m^n f^{(m)}(0) \delta^{n-m}(t) \quad (A_2-13)$$

où  $C_m^n$  est la combinaison de  $n$  objets parmi  $m$  objets .

## 2. Applications des fonctions $\delta$

EXEMPLE 1 : Considérons une onde  $e(t)$  qui est échantillonnée périodiquement par un interrupteur ( figure 2-A<sub>2</sub> ).

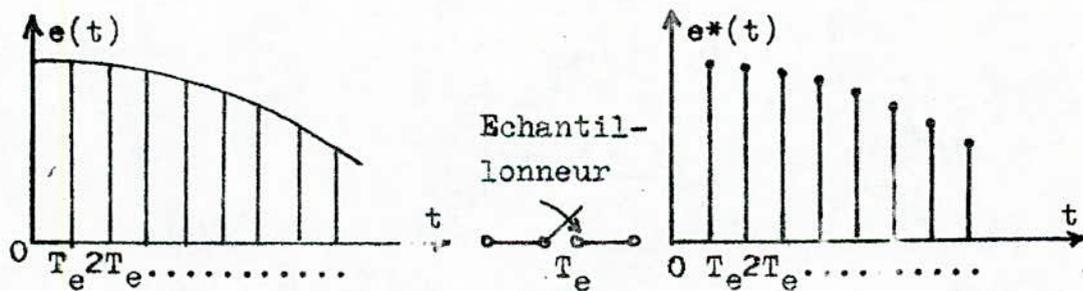


Figure (2-A<sub>2</sub>)

L'équation de l'onde échantillonnée  $e^*(t)$  peut s'écrire :

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(t) \delta(t - nT_e) \quad (A_2-14)$$

ou

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT_e) \delta(t - nT_e) \quad (A_2-15)$$

où  $T_e$  est la durée qui sépare deux échantillons successifs .  
 $e^*(t)$  est obtenue en modulant en amplitude l'impulsion de Dirac par l'onde  $e(t)$ . La relation (A<sub>2</sub>-15) est très utile pour l'analyse des systèmes échantillonnés .

EXEMPLE 2 : Soit une tension  $\delta(t)$  appliquée à un circuit RC , et supposons que les conditions initiales soient nulles. D'après la figure (3-A<sub>2</sub>) , on a :

$$\delta(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

ou, en dérivant :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = \frac{1}{R} \delta^{(1)}(t)$$

c'est à dire que :

$$\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \delta^{(1)}(t) \quad (A_2-16)$$

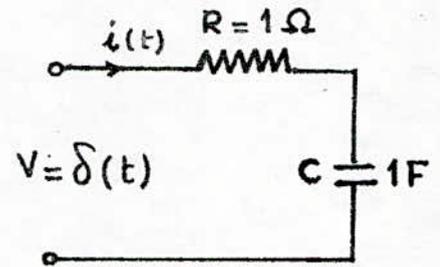


Figure (3-A<sub>2</sub>)

On peut résoudre cette équation , en faisant un raisonnement physique . En effet , lorsqu'une impulsion est appliquée au moment  $t = 0$ , on peut dire de façon générale que la réponse sera aussi une impulsion. Mais pour  $t < 0$  , la capacité C se charge comme  $e^{-t}$  ( qui est solution de la partie homogène de l'équation différentielle ). Cherchons donc une solution générale du type :

$$i(t) = \alpha u(t) e^{-t} + \beta \delta(t)$$

par substitution , on trouve :

$$\alpha \delta(t) e^{-t} + \beta \delta^{(1)}(t) + \beta \delta(t) = \delta^{(1)}(t)$$

ou bien :

$$(\alpha + \beta) \delta(t) + (\beta - 1) \delta^{(1)}(t) = 0$$

car:  $\delta(t)e^{-t} = \delta(t)$ . D'où:  $\alpha = -\beta = -1$

et:  $i(t) = -u(t)e^{-t} + \delta(t)$  (A<sub>2</sub>-17)

### 3- La convolution

Nous avons vu précédemment que si une fonction  $e(t)$  pouvait être échantillonnée périodiquement selon la période  $T_e$ , on pouvait l'exprimer mathématiquement par la série (A<sub>2</sub>-15).

Cette série est valable pour une fonction qui débute à l'instant  $t=0$ .

Si  $e(t)$  est une fonction du temps, définie sur l'intervalle  $[-\infty, +\infty]$ , alors  $n$  variera de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Quand  $T_e$  devient très petite ( $T_e \rightarrow d\tau$ ), la série (A<sub>2</sub>-15) s'écrit:

$$e(t) = \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} e(n d\tau) \delta(t - n d\tau)}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - n d\tau)} \quad (A_2-18)$$

c'est à dire:

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (A_2-19)$$

Notons que l'application de la propriété (A<sub>2</sub>-8) des fonctions Delta permet de résoudre facilement cette intégrale.

### 4- Réponse percussionnelle

Soit un circuit linéaire dont les paramètres sont indépendants du temps. Ce circuit peut-être, par exemple, un circuit résonant dont les paramètres sont R, L, et C. Appliquons une tension  $\delta(t)$  à l'entrée du circuit. Expérimentalement, une telle tension se traduit par une impulsion d'amplitude très

élevée et de très courte durée (l'aire limitée par cette tension et l'axe des abscisses étant de valeur finie).

Le signal observé à la sortie du circuit est ce qu'on appelle la réponse percussionnelle  $h(t)$ .

Si on injecte maintenant une fonction quelconque du temps le problème est d'en déduire la réponse du circuit à ce signal.

Les équations (A<sub>2</sub>-15) et (A<sub>2</sub>-19) montrent que n'importe quel signal d'entrée peut-être décomposé en une multitude de fonctions Delta convenablement pondérées.

La réponse d'un circuit linéaire invariant dans le temps à une fonction  $\delta(t - \tau)$  est la réponse impulsionnelle  $h(t - \tau)$

Dans le cas d'un signal quelconque  $e(t)$ , la réponse du circuit s'obtiendra en multipliant  $h(t - \tau)$  par la quantité  $e(\tau)$ , puis en intégrant sur l'échelle du temps. D'où:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (A_2-20)$$

Expérimentalement, le signal d'entrée est appliqué à partir de  $t \geq 0$  et la mesure de  $y(t)$  est affectée pendant un temps fini. On a donc  $h(t) = 0$  pour  $t < 0$ . D'où:

$$y(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (A_2-21)$$

Par définition, (A<sub>2</sub>-20) est appelée intégrale de superposition et (A<sub>2</sub>-21) représente l'intégrale de convolution [12, 17].

Physiquement, cela signifie que si on connaît la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant dans le temps,

on peut trouver n'importe quel signal d'entrée à l'aide de l'équation (A<sub>2</sub> - 21).

Exemple: La réponse impulsionnelle d'un circuit R C simple est donnée par  $e^{-t}$ . Appliquons à l'entrée une fonction échelon-unité. On aura:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) h(t-\tau) d\tau$$
$$= \int_0^t u(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau$$

soit :

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

L'expression de  $y(t)$  ainsi obtenue est le résultat bien connu de la charge de la capacité C pour un échelon-unité.

En général, si on a deux fonction  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$ , la convolution sera définie par:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau \quad (A_2-22)$$

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont connues analytiquement, on peut trouver la convolution par des méthodes analytiques. Si cependant elles sont données graphiquement, cette intégrale peut-être calculée graphiquement.

## 5\_ Théorème d'échantillonnage

Sous certaines conditions, un signal continu peut-être représenté en fonction de ses ordonnées prises à des instants

discrets appellées échantillons.

Si la plus haute fréquence du spectre d'un signal  $e(t)$  est  $F_B$ , on peut énoncer le théorème de la façon suivante: "le signal  $e(t)$  est déterminé d'une manière unique si on connaît ses ordonnées  $e(n/2F_B)$ , où  $n \in (-\infty, \infty)$  (Figure (4-42))

On appelle échantillonnage le produit:

$$e^*(t) = e(t) * \delta_T(t) \quad (A_2-23)$$

où  $\delta_T(t)$  est la fonction Delta périodique ".

Considérons la fonction périodique  $E_T(t)$  de la figure (5-42), cette fonction résulte du filtrage de  $\delta_T(t)$  par un filtre dont la réponse percussionnelle est  $h_f(t)$ . ( Rappelons que  $\tau < T$  ).  $h_f$  s'appelle la réponse percussionnelle du filtre de Farne.

L'expression d'un signal échantillonné pour la fonction périodique rectangulaire  $E_T(t)$  se déduit du diagramme de la figure (6-42).

$$\begin{aligned} e^*(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} e(\lambda) \delta(\lambda - n\tau) \right] h_f(t - \lambda) d\lambda \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} e(n\tau) h_f(t - n\tau) \end{aligned} \quad (A_2-24)$$

Ceci représente bien une suite régulière d'impulsions modulées en amplitude.

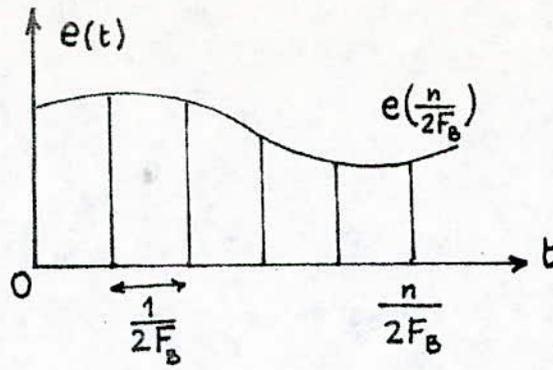


Figure (4-A<sub>2</sub>): Signal continu représenté par ses ordonnées prises à des instants discrets

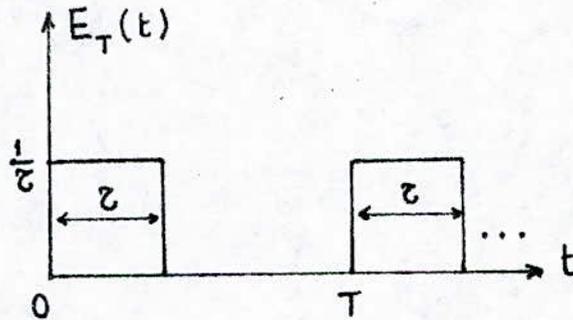


Figure (5-A<sub>2</sub>): Fonction périodique résultant du filtrage de

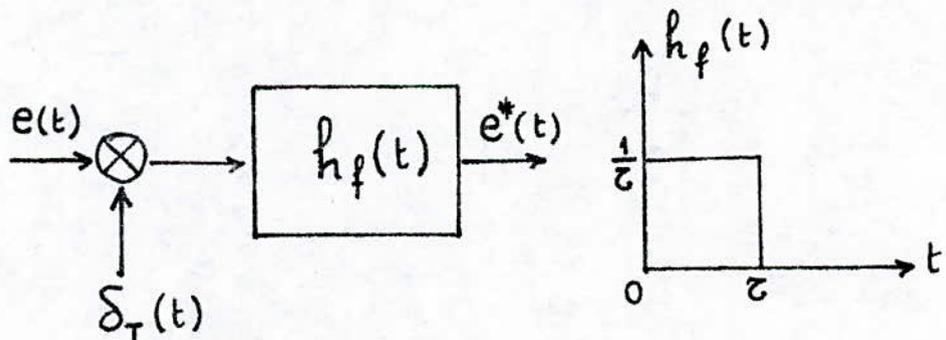


Figure (6-A<sub>2</sub>): Filtre de FARME et sa réponse percussionnelle.

# ANNEXE\_3

## LISTING DU PROGRAMME DU FILTRE DERIVATEUR

```

10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350
360
370
380
390
400
410
420
430
440
450
460
470
480
490
500
510
520
530
540
550
560
570
580

```

```

*****
* ALGORITHME DE KALMAN *
*****

DIM La(5,100),Xa(5,100),Q(5,5),P(5,5),H(1,5),R(5,5),E(5,5)
DIM F(5,5),U(1,5),V(5,5),K(5),G(5),X(5),Y(5),W(5),T(100)
DIM A1(200),Re(100),Rr(100),S0(100),Z(100),Z0(100),Coo(100)
!
GINIT
GRAPHICS ON
INPUT "TRACER LES COURBES SUR ECRAN OU SUR TRACFUR ?",Reponse$
SELECT Reponse$
CASE "ECRAN"
PLOTTER IS 3,"INTERNAL"
CASE "TRACFUR"
PLOTTER IS 805,"HPGL"
CASE FLSE
PRINT "REPONSE ERRONNEE"
GOTO 130
END SELECT

DEFINITION DE L'ALGORITHME DE KALMAN

X(k+1|k+1)=Psi*X(k|k)+K(k+1)*(Z(k+1)-H(k+1)*Psi*X(k|k))
P(k+1) =P(k+1|k)*H *IH*P(k+1|k)*H I
P(k+1|k) =Psi*P(k|k)*Psi*+Q
P(k+1|k+1)=(I-K(k+1)*H)*P(k+1|k)

DONNEES DU PROBLEME

Omeq0=2*PI !Pulsation propre
Sigma=2.73 !Puissance du bruit
Beta=.2 !Coefficient d'attenuation
Amp=40 !Facteur d'amplification du bruit
N=20 !Nombre d'echantillons par second
No=100 !Nombre d'itterations
Te=.29 !temps d'echantillonnage
PRINT " Omeq0= Beta="
PRINT " Amp = Te ="
PRINT
Omeq1=SQR(Omeq0*Omeq0-(Beta*Beta)/4)
Alpha=Beta/(2*Omeq1)
Teta=2*PI/N
Teta1=2*PI*Alpha/N
X1=COS(Teta)
Y1=SIN(Teta)
Z1=EXP(-Teta1)
Ph11=Z1*(X1+Alpha*Y1)
Ph12=Z1*Y1/Omeq1
Ph21=-Ph12*Omeq0/Omeq0
Ph22=Z1*(X1-Alpha*Y1)

```

```

590      !
600      !
610      !           INITIALISATION DU PROGRAMME PAR K(1) ET K(2)
620      !
630      !
640      La(1,1)=.5
650      La(2,1)=.5
660      La(3,1)=.5
670      La(4,1)=0
680      La(5,1)=0
690      La(1,2)=2
700      La(2,2)=1
710      La(3,2)=1
720      La(4,2)=0
730      La(5,2)=0
740      !
750      !
760      !           CALCUL ET CHARGEMENT DE PSI
770      !
780      !
790      FOR I=1 TO 5
800      FOR J=1 TO 5
810      Psi(I,J)=0
820      NEXT J
830      NEXT I
840      Psi(1,1)=1
850      Psi(1,2)=1
860      Psi(2,2)=1
870      Psi(3,3)=1
880      Psi(4,4)=Ph11
890      Psi(4,5)=Ph12
900      Psi(5,4)=Ph21
910      Psi(5,5)=Ph22
920      !
930      !
940      !           CALCUL ET CHARGEMENT DE Q
950      !
960      !
970      A=1-Ph11^2-(Omeg0^2)*(Ph12^2)
980      B=-(Ph21*Ph11+(Omeg0^2)*(Ph12*Ph22))
990      C=(Omeg0^2)-(Ph21^2+(Omeg0^2)*(Ph22^2))
1000     PRINT
1010     FOR I=1 TO 5
1020     FOR J=1 TO 5
1030     Q(I,J)=0
1040     NEXT J
1050     NEXT I
1060     Q(4,4)=A*Sigma^2
1070     Q(4,5)=B*Sigma^2
1080     Q(5,4)=Q(4,5)
1090     Q(5,5)=C*Sigma^2
1100     !
1110     !
1120     !           CALCUL DE LA MATRICE P(212)
1130     !
1140     !
1150     D=(1-Ph11)*Sigma^2
1160     P(1,1)=8*D
1170     P(1,2)=4*D
1180     P(1,3)=-6*D
1190     P(1,4)=-2*D
1200     P(1,5)=2*Ph21*Sigma^2
1210     P(2,1)=P(1,2)
1220     P(2,2)=2*D
1230     P(2,3)=-3*D
1240     P(2,4)=-D
1250     P(2,5)=P(1,5)/2
1260     P(3,1)=P(1,3)
1270     P(3,2)=P(2,3)
1280     P(3,3)=Sigma^2+4*D
1290     P(3,4)=-Sigma^2+2*D
1300     P(3,5)=-P(1,5)

```

```

1310 P(4,1)=P(1,4)
1320 P(4,2)=P(2,4)
1330 P(4,3)=P(3,4)
1340 P(4,4)=Sigma^2
1350
1360 P(5,1)=P(1,5)
1370 P(5,2)=P(2,5)
1380 P(5,3)=P(3,5)
1390 P(5,4)=P(4,5)
1400 P(5,5)=(Omega0*Sigma)^2
1410
1420
1430
1440 CHARGEMENT DE LA MATRICE H
1450
1460 H(1,1)=1
1470 H(1,2)=0
1480 H(1,3)=1
1490 H(1,4)=1
1500 H(1,5)=0
1510
1520
1530 CALCUL DE LA MATRICE P(K+1)K)=R
1540
1550
1560 PRINT "
1570 PRINT "
1580 PRINT "
1590 PRINT "
1600 PRINT "
1610 PRINT USING "7D.DDD";La(1,1);La(2,1);La(3,1);La(4,1);La(5,1)
1620 PRINT USING "7D.DDD";La(1,2);La(2,2);La(3,2);La(4,2);La(5,2)
1630 FOR S=3 TO N0
1640 FOR I=1 TO 5
1650 FOR J=1 TO 5
1660 S1=0
1670 FOR L=1 TO 5
1680 S1=S1+P(I,L)*Psi(J,L)
1690 NEXT L
1700 E(I,J)=S1
1710 NEXT J
1720 NEXT I
1730 FOR I=1 TO 5
1740 FOR J=1 TO 5
1750 S2=0
1760 FOR L=1 TO 5
1770 S2=S2+Psi(I,L)*E(L,J)
1780 NEXT L
1790 F(I,J)=S2
1800 NEXT J
1810 NEXT I
1820 FOR I=1 TO 5
1830 FOR J=1 TO 5
1840 R(I,J)=F(I,J)+Q(I,J)
1850 NEXT J
1860 NEXT I
1870
1880
1890
1900
1910
1920
1930
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020

```

```

2030 M1=54
2040 FOR I=1 TO 5
2050 K(I)=G(I)/M1
2060 La(I,S)=K(I)
2070 NEXT I
2080 PRINT USING "7D.DDD";La(1,S);La(2,S);La(3,S);La(4,S);La(5,S)
2090 |
2100 |
2110 |           CALCUL DE LA MATRICE P(K+1|K+1)=P
2120 |
2130 |
2140 FOR J=1 TO 5
2150 S5=0
2160 FOR L=1 TO 5
2170 S5=S5+H(1,L)*R(L,J)
2180 NEXT L
2190 U(1,J)=S5
2200 NEXT J
2210 FOR I=1 TO 5
2220 FOR J=1 TO 5
2230 V(I,J)=K(I)*U(1,J)
2240 NEXT J
2250 NEXT I
2260 FOR I=1 TO 5 /
2270 FOR J=1 TO 5
2280 P(I,J)=R(I,J)-V(I,J)
2290 NEXT J
2300 NEXT I
2310 | NEXT S
2311 PRINT USING "7D.5D";P(2,2);P(3,3)
2312 NEXT S
2320 |
2330 |
2340 |           CALCUL DU VECTEUR X(K+1|K+1)=X
2350 |
2360 |
2370 |           1/ GENERATION DES ECHANTILLONS DE BRUIT
2380 |
2390 FOR I=1 TO 2*No
2400 A1(I)=(RND-.5)*Amp
2410 NEXT I
2420 |
2430 |           2/ CALCUL DE L'FCART-TYPE SIGMA=S8
2440 |
2450 S8=0
2460 FOR J=1 TO 2*No
2470 S8=S8+A1(J)*A1(J)
2480 NEXT J
2490 S8=SQR(S8/2*No)
2500 | PRINT "====="
2510 | PRINT "S8=";S8
2520 | PRINT "====="
2530 |
2540 |           3/ CALCUL DE LA REPONSE PERCUSSINELLE Re
2550 |
2560 FOR J=1 TO No
2570 Teta3=Beta*Te*J*.5
2580 Teta2=Omegi*Te*J
2590 Y2=SIN(Teta2)
2600 Z2=EXP(-Teta3)
2610 Re(J)=Z2*Y2/Omegi
2620 NEXT J
2630 PRINT
2640 PRINT
2650 PRINT
2660 Or=80
2670 Vr=98
2680 Cou$="Re(t)"
2690 MAT Cou= Re
2700 Titre$="Re(t)"
2710 INPUT "VOULEZ VOUS TRACER Re(t)?(REPONDEZ PAR COU1)",Rep$
2720 IF Rep$="COU1" THEN

```

```

2730 GOSUB 4170
2740 END IF
2750 !
2760 ! 4/ CALCUL DU BRUIT DE SECOND ORDRE Br
2770 !
2780 PRINT
2790 PRINT " TABLEAU-2 "
2800 PRINT
2810 PRINT " LES VALEURS DU BRUIT DE SECOND ORDRE "
2820 PRINT
2830 PRINT
2840 S9=0
2850 FOR J=1 TO No
2860 FOR I=1 TO No
2870 L=J+I-1
2880 S9=S9+A1(L)*Re(I)
2890 NEXT I
2900 Br(J)=S9
2910 NEXT J
2920 FOR J=0 TO 19
2930 PRINT USING "7D.5D"; Br(5*J+1); Br(5*J+2); Br(5*J+3); Br(5*J+4); Br(5*
2940 NEXT J
2950 PRINT
2960 PRINT
2970 PRINT
2980 Dr=76
2990 Vr=94
3000 Cou$="Br(t)"
3010 MAT Cou= Br
3020 Titre$="Br(t)"
3030 INPUT "VOULEZ VOUS TRACER Br(t)?(REPONDEZ PAR COU2)",Rep$
3040 IF Rep$="COU2" THEN
3050 GOSUB 4170
3060 END IF
3070 !
3080 ! 5/ CALCUL DE LA PUISSANCE DU BRUIT Br(J) Sigma=S10
3090 !
3100 S10=0
3110 FOR J=1 TO No
3120 S10=S10+Br(J)*Br(J)
3130 NEXT J
3140 S10=SQR(S10/No)
3150 PRINT "((((((((((((((((("
3160 PRINT "S10=";S10
3170 PRINT ")))))))))))))))))"
3180 PRINT
3190 PRINT
3200 !
3210 ! 6/ CALCUL DE L'ESTIMATION
3220 !
3230 !
3240 ! a/ LE SIGNAL TEST So=Ao1*k +Ao2
3250 !
3260 Xa(1,1)=0
3270 Xa(2,1)=5
3280 Xa(3,1)=10
3290 Xa(4,1)=0
3300 Xa(5,1)=0
3310 !
3320 !
3330 FOR J=1 TO No
3340 So(J)=Xa(2,1)*J*Te+Xa(3,1)
3350 NEXT J
3360 Dr=54
3370 Vr=72
3380 Cou$="So(t)"
3390 MAT Cou= So
3400 Titre$="So(t)"
3410 INPUT "VOULEZ VOUS TRACER So(t)?(REPONDEZ PAR COU3)",Rep$
3420 IF Rep$="COU3" THEN
3430 GOSUB 4170
3440 END IF

```

```

3450 |
3460 |           b/ L'OBSERVATION AVANT FILTRAGE Z
3470 |
3480 FOR J=1 TO No
3490 Z(J)=So(J)+Br(J)
3500 NEXT J
3510 Or=32
3520 Vr=50
3530 Cou$="Z(t)"
3540 MAT Cou=Z
3550 Titre$="Z(t)"
3560 INPUT "VOULEZ VOUS TRACER Z(t)?(REPONDEZ PAR COU4 )",Rep$
3570 IF Rep$="COU4" THEN
3580 GOSUB 4170
3590 END IF
3600 INPUT "VOULEZ VOUS PASSER AU CALCUL DE L'ESTIMATION ?",Rep$
3610 IF Rep$="OUI" THEN
3620   FOR J=1 TO No
3630     Z(J)=Xa(2,1)*J+Xa(3,1)+Br(J)
3640   NEXT J
3650 END IF
3660 |
3670 |           c/ L'OBSERVATION APRES FILTRAGE Zo
3680 |
3690 PRINT "
3700 PRINT "
3710 PRINT "
3720 PRINT "
3730 PRINT "
3740 PRINT "           Xa(1,S)           Xa(2,S)           Xa(3,S)           Xa(4,S)
3750 PRINT "
3760 FOR S=1 TO No
3770   FOR I=1 TO 5
3780     S6=0
3790     FOR L=1 TO 5
3800       S6=S6+Psi(I,L)*X(L)
3810     NEXT L
3820     Y(I)=S6
3830   NEXT I
3840   S7=0
3850   FOR L=1 TO 5
3860     S7=S7+H(1,L)*Y(L)
3870   NEXT L
3880   M=S7
3890   T(S)=Z(S)-M
3900   FOR I=1 TO 5
3910     W(I)=La(I,S)*T(S)
3920   NEXT I
3930   FOR I=1 TO 5
3940     X(I)=Y(I)+W(I)
3950     Xa(I,S)=X(I)
3960   NEXT I
3970   PRINT USING "7D.5D";Xa(1,S);Xa(2,S);Xa(3,S);Xa(4,S);Xa(5,S)
3980   Zo(S)=Xa(2,S)*3*Te+Xa(3,S)
3990   NEXT S
3991 PRINT
3992 PRINT
3993 PRINT
4000 Or=10
4010 Vr=28
4020 Cou$="Zo(t)"
4030 MAT Cou=Zo
4040 Titre$="Zo(t)"
4050 INPUT "VOULEZ VOUS TRACER Zo(t)?(REPONDEZ PAR COUS)",Rep$
4060 IF Rep$="COUS" THEN
4070   GOSUB 4170
4080 END IF
4090 GOTO 4620
4100 |
4110 |
4120 |           SOUS ROUTINE DE TRACAGE DES AXES ET DES COURBES
4130 |

```

```

4140      !
4150      ! 1/ TRACE DES COURBES
4160      !
4170      Xmin=-10*Te
4180      Xmax=No*Te
4190      Sdvx=5*Te
4200      Ymin=MIN(Cou(*))
4210      Ymax=MAX(Cou(*))
4220      GOSUB 4320
4230      GOSUB 4560
4240      MOVE 1,Cou(1)
4250      FOR J=1 TO No
4260      PLOT J*Te,Cou(J)
4270      NEXT J
4280      PAUSE
4290      GCLEAR
4300      RETURN
4310      !
4320      ! 2/ SITUATION DES COURBES PAR RAPPORT AUX AXES
4330      !
4340      IF Ymin>=0 AND Ymax>0 THEN
4350      Ymin=-Ymax/10
4360      Ymax=Ymax+Ymax/20
4370      Sdvy=Ymax/20
4380      END IF
4390      !
4400      IF Ymin<0 AND Ymax<=0 THEN
4410      Ymax=Ymin+Ymin/20
4420      Sdvy=ABS(Ymin/20)
4430      Ymin=-Ymin/20
4440      END IF
4450      !
4460      IF Ymax>0 AND Ymin<0 THEN
4470      Ymax=Ymax+(Ymax-Ymin)/10
4480      Ymin=Ymin-(Ymax-Ymin)/10
4490      Sdvy=(Ymax-Ymin)/20
4500      END IF
4510      !
4520      RETURN
4530      !
4540      ! 3/ FENETRE D'AFFICHAGE ET GRADUATION DES AXES
4550      !
4560      VIEWPORT 10,60,Dr,Vr
4570      WINDOW Xmin,Xmax+Sdvx,Ymin,Ymax
4580      AXES Sdvx,Sdvy,0,0,5,4,.75
4590      CSIZE 1.25
4600      LORG 6
4610      Dvx=5*Sdvx
4620      Dvy=4*Sdvy
4630      FOR I=Dvx TO Xmax STEP Dvx
4640      MOVE I,-Sdvy/8
4650      LABEL I
4660      NEXT I
4670      LORG 9
4680      MOVE Xmax-Sdvx,-1.5*Sdvy
4690      LABEL "t(s)"
4700      LORG 8
4710      FOR J=-4*Dvy TO Ymax STEP Dvy
4720      MOVE -Sdvx/10,J
4730      LABEL USING "4D.DD";J
4740      NEXT J
4750      LORG 2
4760      CSIZE 2
4770      MOVE Dvx/10,Ymax-Sdvy
4780      LABEL Titre$
4790      MOVE 0,0
4800      RETURN
4810      !
4820      END

```

## ANNEXE .4

# THEOREME DE L'OBSERVATEUR OPTIMAL

Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= F(t)X(t) + G(t)u(t) + W_1(t) \\ Z(t) &= H(t)X(t) + W_2(t)\end{aligned}\tag{A_4-1}$$

avec  $t \geq t_0$ .

$X(t)$  est l'état du système (de dimensions  $n$ ),  $Z(t)$  correspond à sa mesure (de dimension  $m$ ),  $F(t)$  est la matrice de gain d'état ( $n \times n$ ),  $G(t)$  matrice ( $n \times r$ ),  $u(t)$  est un vecteur de contrôle (de dimension  $r$ ),  $W_1(t)$  est le vecteur de perturbation (de dimensions  $p$ ),  $W_2(t)$  représente le vecteur erreur de mesure (de dimensions  $m$ ) et  $H(t)$  est la matrice de mesure ( $m \times n$ ).

Le système d'équation (A<sub>4</sub>-1) est équivalent au modèle de GAUSS-MARKOV à temps discret (1-14) et (1-15). La matrice  $\begin{bmatrix} W_1 & \\ & W_2 \end{bmatrix}^T$  constitue un processus de bruit blanc dont la matrice intensité est :

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_{12} \\ V_{12}^T & V_2 \end{bmatrix}$$

avec  $t \geq t_0$  et  $V_1 = E[W_1 \cdot W_1^T] = Q$  et  $V_2 = E[W_2 \cdot W_2^T] = R$ .

Rappelons que  $Q$  est la matrice de covariance de perturbation et que  $R$  est la matrice de covariance de l'erreur de mesure.

Par hypothèse, l'état initial  $X(t_0)$  est non corrélé avec  $W_1$  et  $W_2$ . En outre, il est caractérisé par :

$$E[X(t_0)] = \bar{X}_0 \quad (A_4-2)$$

et

$$E\{[X(t_0) - \bar{X}(t_0)][X(t_0) - \bar{X}(t_0)]^T\} = Q_0 \quad (A_4-3)$$

$u(t)$  est un signal d'entrée donné du système .

D'après la littérature [22,23], on peut déduire du système d'équation (A<sub>4</sub>-1) l'observateur suivant :

$$\dot{\hat{X}}(t) = F(t)\hat{X}(t) + G(t)u(t) + K(t)[Z(t) - H(t)\hat{X}(t)] \quad (A_4-4)$$

Le problème est alors ramené à celui de déterminer la matrice de gain  $K(\tau)$  (avec  $t_0 \leq \tau \leq t$ ) et les conditions initiales  $\hat{X}(t_0)$  qui minimisent l'espérance mathématique  $E[\tilde{X}^T(t).W(t).\tilde{X}(t)]$ .

$W(t)$  est une matrice de pondération symétrique, définie et positive.

Ceci forme, par définition, le problème de l'observateur optimal.

Si  $R(t) > 0$  (avec  $t \geq t_0$ ), ce problème devient non singulier.

L'énoncé du théorème de l'observateur optimal est le suivant :

"considérons un observateur optimal non singulier, défini à partir du filtre de KALMAN, et supposons que l'excitation de l'état et le bruit d'observation soient non corrélés. La résolution d'un tel problème se fait en choisissant la matrice de gain égale à :

$$K^0(t) = P(t)H^T(t)R^{-1}(t) \quad (A_4-5)$$

avec  $t \geq t_0$ , où  $P(t)$  est solution de l'équation matricielle de RIC-CATI, d'expression :

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) \quad (A_4-6)$$

et de conditions initiales :

$$P(t_0) = P_0 \quad (A_4-7)$$

et

$$\hat{X}(t_0) = \bar{X}_0 \quad (A_4-8)$$

Si les conditions  $(A_4-5)$  et  $(A_4-8)$  sont satisfaites, l'espérance mathématique  $E[\tilde{X}^T(t).W(t).\tilde{X}(t)]$  sera minimale quel que soit  $t \geq t_0$ .

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation sera :

$$E[\tilde{X}(t)\tilde{X}^T(t)] = P(t) \quad (A_4-9)$$

et l'erreur quadratique moyenne de l'erreur d'estimation s'écrira :

$$E[\tilde{X}^T(t)W(t)\tilde{X}(t)] = \text{trace}[P(t)W(t)] \quad (A_4-10)$$

On constate que la solution du problème de l'observateur optimal est remarquablement indépendante de la matrice  $W(t)$ . Notons que  $W(t)$ , dans notre cas, est la matrice identité  $I$ . L'observateur optimal de ce théorème est encore appelé: Filtre de KALMAN-BUCY.

Les premiers calculs de KALMAN-BUCY en 1961 [24] ont montré

que ce filtre est l'estimateur linéaire quadratique moyen minimum. Autrement dit, on ne peut pas trouver une autre fonctionnelle linéaire des observations  $Z(\tau)$  et de l'entrée  $u(\tau)$  (avec  $t_0 \leq \tau \leq t$ ).

Par ailleurs, JAZWINSKI a prouvé en 1970 [9] que si l'état  $X(t_0)$  est gaussien et si le bruit d'excitation de l'état  $W_1(t)$  et le bruit de l'observation  $W_2(t)$  sont des processus de bruit gaussien blanc, le filtre de KALMAN-BUCY donnera une estimation  $\hat{X}$  de  $X$  ayant une erreur quadratique moyenne minimale  $\tilde{X}(t)$ ; cette estimation existant quel que soient les processus de traitement de  $Z(\tau)$  et  $u(\tau)$ .

---

---

# BIBLIOGRAPHIE ET REFERENCES

---

---

- [1] H. NYQUIST  
" Certain factors affecting telegraph speed "  
Bell System technical Journal, 3, 324 , (1924)
- [2] H. NYQUIST  
" Network analysis "
- [3] R.V.L. HARTLEY  
"Transmission of information"  
Bell System Technical Journal, 7 , 535 , (1928)
- [4] C.E. SHANNON  
" Communication in the presence of noise "  
Proc. I.R.E. , 37 , 10 , (1949)
- [5] C.E. SHANNON  
" A mathematical theory of communication "  
Bell System Technical Journal, 27 , 379 et 623 , (1948)
- [6] B. PICINBONO et A. BLANC-LAPIERRE  
" Propriétés statistiques du bruit de fond " Ed. par:  
Masson , Paris , (1961)

- [7] N. WIENER  
" The extrapolation , interpolation , and smoothing of stationary  
time series with engineering application " Ed. par:  
John Wiley , New York , (1949)
- [8] A.H. JAZWINSKI  
" Stochastic processes and filtering theory "  
Academic Press , New York , (1970)
- [9] R.E. KALMAN  
" Mathematical description of linear dynamical systems "  
SIAM J. Contr., ser. A , 1 , 152 , (1963)
- [10] J.S. MEDITCH  
" Stochastic optimal linear estimation and control "  
McGraw-Hill , New York , (1969)
- [11] L.A. ZADEH and C.A. DESOER  
" Linear system theory " Ed. par:  
McGraw-Hill , New York , (1963)
- [12] S.C. GUPTA  
" Transform and state variable methods in linear system "  
John Wiley , New York , (1966)
- [13] B. PICINBONO  
" Eléments de théorie du signal " Ed. par:  
Bordas , Paris , (1977)

- [14] A. PAPOULIS  
" Probability , random variables and stochastic process " Ed. par:  
McGraw-Hill ,New York , (1965)
- [15] H.L. VAN TREES  
" Detection , estimation and modulation theory " Ed. par:  
John Wiley , New York , (1968)
- [16] S.A. TRETTNER  
" Introduction to discrete-time signal processing " Ed. par:  
John Wiley , New York , (1976)
- [17] A. SPATARU  
" théorie de la transmission de l'information " Ed. par:  
Masson , Paris . . , (1970)
- [18] T. ASSIFI  
" Stochastic processes , estimation theory , and image inhancement " Ed. par  
JPL Publication , California , (1978)
- [19] L. WEINBERG  
" Network analysis and synthesis " Ed. par:  
McGraw-Hill , New York , (1962)
- [20] M. BELLANGER  
" Traitement numérique du signal " Ed. par:  
Masson , Paris , (1981)
- [21] R.J. FITZGERALD  
" Divergence of the KALMAN filter "  
IEEE , Trans. auto. contr. , AC-16 , 6 , 737 , (1971)

[22] R. SIVAN

" Linear optimal control systems " Ed. par:  
John Wiley , New York , (1972)

[23] E. TSE

" On the optimal control of stochastic linear system "  
IEEE , Trans. auto. contr. , AC-16 , 6 , 776 , (1971)

[24] R.E. KALMAN

" New results in linear filtering and prediction theory "  
J. Basic eng. , 83D , 95 , (1961)