

وزارة الجامعات
Ministère aux Universités

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D' ELECTRONIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE UNIFIEE DES TRANSFORMATIONS FREQUENTIELLES

NUMERIQUES ET APPLICATION A QUELQUES FILTRES

PROTOTYPES

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

M^r B. DERRAS

M^r M.A.A. BELOUHRANI

M^r B. DERRAS

M^r L. MITICHE

PROMOTION
JUN 91

THESE D'INGENIORAT D'ETAT

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Spécialité

ELECTRONIQUE

Présentée par:

Mohamed Arezki Adel BELOUHRANI

et

Lahcene MITICHE

T H E M E

ETUDE UNIFIEE DES TRANSFORMATIONS FREQUENTIELLES
NUMERIQUES ET APPLICATION A QUELQUES FILTRES
PROTOTYPES

Soutenu le 29 juin 1991

Devant le jury composé de:

D . BERKANI (E.N.P) Président
K . SAADA (E.N.P)
B . DERRAS (E.N.P)

Je dédie cette étude,

à ma mère,

*faible témoignage de ma profonde affection et de
mon affectueux attachement.*

à mon père,

*sa vie d'homme intègre et sa sagesse restent pour
nous le plus bel exemple.*

à mes sœurs,

à tous les miens,

à tous mes amis (es).

E. Adel .

Je dédie ce modeste travail à :

la mémoire de mon frère MOHAMMED,

mes parents pour leurs sacrifices,

mes frères et sœurs,

mes amis (es),

à tous les miens.

M. Lahcene

à Monsieur S. Derras.

Qui a bien voulu nous faire l'honneur d'accepter d'être notre promoteur qu'il trouve ici l'expression de notre déférente gratitude et nos respectueux remerciements pour la surveillance et à l'intérêt qu'il a manifesté à notre égard.

"Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement
Et les mots pour le dire arrivent aisément."

Boileau.

بسم الله الرحمن الرحيم

الموضوع: دراسة موحدة للتحويلات التواترية و تطبيقها على مرشحات نموذجية.
ملخص: الهدف من هذه الدراسة هو إيجاد تحويل تواتري عددي موحد قصد تحويل مرشح نموذجي عددي ممر للترددات المنخفضة إلى مرشحات أخرى من نوع إمرار الترددات المنخفضة، إمرار الترددات العالية، إمرار حيز ترددي وإيقاف حيز ترددي. قمنا أولاً بدراسة بعض المرشحات النموذجية العددية الممثلة للترددات المنخفضة مثل مرشحات باتروورث شيبشيف (I و II) وكاور و بيسل. ثم بعد ذلك، وبحل جملة معادلات خطية، استخلصنا معاملات التحويل التواتري و في الأخير استعملنا خوارزمية سريعة لإيجاد معاملات المرشح المرغوب فيه انطلاقاً من معاملات المرشح النموذجي و معاملات التحويل التواتري.

TITLE : A unified study to digital frequency transformations and application to the synthesis of digital filters.

ABSTRACT : The purpose of this work is to design in an unified fashion, a digital frequency transformation to transform a prototype digital low-pass filter into other digital filters such as band-pass, band-stop, high-pass and low-pass filters. First, we have studied some prototype low-pass filters such as, Butterworth's, Chebyshev's (I & II), Causer's and Bessel's ones. After this, we have solved a linear system of real equations to compute the coefficients of the frequency transformation using an efficient method. At last, an efficient procedure has been used to compute the coefficients of the desired filter from those of the prototype digital low-pass filter and those of the frequency transformation.

TITRE: Etude unifiée des transformations fréquentielles numériques et application à quelques filtres prototypes.

RESUME : Le travail que nous avons effectué consiste à mettre en oeuvre une transformation fréquentielle numérique unifiée pour transformer un filtre numérique prototype passe-bas en un filtre numérique de type passe-bas, passe-haut, passe-bande (éventuellement multi-passe-bandes) ou coupe bande. Pour cela, nous avons étudié quelques filtres prototypes passe-bas tels que les filtres de Butterworth, Chebyshev (I et II), Causer et Bessel. L'étude des propriétés de la transformation fréquentielle conduit à un système linéaire d'équations bien structuré dont la résolution par une méthode rapide, permet l'obtention des coefficients de la transformation fréquentielle. Par ailleurs, une procédure rapide permet le passage aux coefficients du filtre désiré à partir de ceux du filtre prototype passe-bas et ceux de la transformation fréquentielle.

MOTS CLES :

Transformation fréquentielle numérique unifiée.
Filtre Chebyshev.
Filtre de Causer.
Fonctions elliptiques.

AVANT PROPOS

المدسة الوطنية المتعدة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Ce travail a été mené et réalisé au DEPARTEMENT D'ELECTRO-
NIQUE de L'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

Les calculs ont été effectués sur compatible PC 'Olivetti'
M 290 ' du centre de calcul de L'école.

SOMMAIRE

INTRODUCTION		1
CHAPITRE I	GENERALITES SUR LE FILTRAGE NUMERIQUE	
I.1 Notions fondamentales.....		3
- Linéarité		
- Invariance temporelle		
- Causalité		
I.2 Avantages des filtres numériques.....		4
I.3 Outils mathématiques.....		5
I.4 Classification selon la réponse fréquentielle.....		6
I.5 Classification selon la réponse impulsionnelle.....		7
I.5.1 Filtres à réponse impulsionnelle finie RIF.....		7
I.5.2 Filtres à réponse impulsionnelle infinie RII.....		8
I.6 Conclusion.....		11
CHAPITRE II	SYNTHESE DES FILTRES NUMERIQUES PROTOTYPES PASSE-BAS	
II.1 Approximation des filtres analogiques		
II.1.1 Introduction.....		12
II.1.2 Filtre de BUTTERWORTH.....		12
II.1.3 Filtre de CHEBYSHEV.....		14
II.1.4 Filtre de CAUER.....		17
II.1.5 Filtre de BESSEL.....		19
II.2 Transformation bilinéaire.....		21
II.3 Etapes de synthèse des filtres numériques prototypes.....		22
- Exemples		
- Interprétation et comparaison des résultats		
II.4 Conclusion.....		41

CHAPITRE III TRANSFORMATION FREQUENTIELLE NUMERIQUE UNIFIEE	
III.1 Introduction.....	42
III.2 Transformations fréquentielles numériques spécifiques.....	42
III.3 Transformation fréquentielle numérique unifiée.....	43
III.4 Détermination des coefficients du filtre de type désiré.....	47
- Exemples	
- Interprétation et comparaison des résultats	
III.5 Conclusion.....	66
CONCLUSION GENERALE.....	67
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE.....	68
ANNEXES : A1 : Filtre De Chebyshev I et II.....	70
A2 : Fonctions Elliptiques et filtre de Caer.....	74
A3 : Algorithme de HORNER.....	91
A4 : Algorithme de LEVERRIER-FADEEVA et sa conséquence.....	95
A5 : Listing du programme.....	99

Le problème du "Filtrage" ou de la séparation des signaux en fonction de leurs fréquences, a toujours été capital dans la technique des télécommunications. Le développement spectaculaire de l'électronique numérique a permis au filtrage numérique de devenir une technique très importante dans divers applications telles que radars, traitement de la parole, sonar, séismique, traitement du signal biomédical, etc...

Notre travail consiste en l'étude unifiée des transformations fréquentielles numériques appliquées à des filtres prototypes, linéaires et invariants dans le temps [1].

Les transformations fréquentielles, nous permettent d'obtenir à partir d'un filtre de type passe-bas, des filtres de type passe-haut, passe-bande, coupe-bande, etc....

Dans la littérature classique, ces transformations se traitent d'une manière spécifique pour chaque type de filtre. Notre étude propose l'unification de ces transformations, elle se compose essentiellement de deux parties :

La première est consacrée à l'étude de quelques filtres prototypes passe-bas, tels que :

- Filtre de BUTTERWORTH.
- Filtre de CHEBYSHEV (Type I et II).
- Filtre de CAUER (Elliptique).
- Filtre de BESSEL.

On y trouve deux chapitres :

Le premier chapitre portera sur des généralités sur le filtrage numérique. Le deuxième est consacré à la description des étapes de l'étude et la synthèse des filtres prototypes.

La deuxième partie de cette étude, traitée au chapitre III, présente une méthode unifiée de synthèse de filtres numériques par transformation fréquentielle.

Les résultats obtenus sont illustrés par des graphes tracés à l'aide du logiciel Grapher [2].

Nous terminons notre étude par une conclusion générale par laquelle nous mettrons en valeur les résultats obtenus.

Une référence bibliographique, comportant la liste d'ouvrages utilisés, est présentée à la fin.

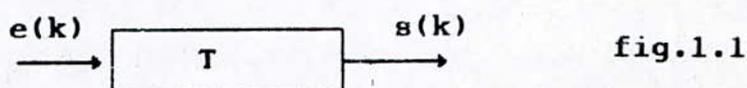
En Annexes, on y trouve les différentes démonstrations relatives aux algorithmes et formules utilisés, ainsi que le listing du programme élaboré à l'issue de cette étude. Le programme est écrit en Fortran 77.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LE FILTRAGE NUMERIQUE

I-1 Notions fondamentales

Dans Notre étude, on s'intéressera à une classe particulière de filtres, les filtres numériques, linéaires, invariants et causals [3]. De tels filtres sont utilisés pour modifier la distribution fréquentielle des composantes d'un signal selon des spécifications données. Un filtre numérique est un système agissant sur un signal numérique d'entrée pour produire un autre signal numérique à sa sortie, il établit alors une relation de cause à effet, celle-ci est représentée par :



où T est l'opérateur reliant le signal de sortie s(k) au signal d'entrée e(k) par :

$$s(k) = T(e(k)). \quad (1.1)$$

Linéarité: La classe de filtres linéaires est obtenue en imposant la contrainte de superposition à l'opérateur T; il doit alors satisfaire la relation :

$$\begin{aligned} T(\alpha e_1(k) + \beta e_2(k)) &= \alpha T(e_1(k)) + \beta T(e_2(k)) \\ &= \alpha s_1(k) + \beta s_2(k) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Où α et β sont deux constantes et $s_1(k)$ et $s_2(k)$ sont les réponses respectives aux excitations $e_1(k)$ et $e_2(k)$.

Invariance Temporelle: Si la réponse à l'excitation e(k) est s(k), le filtre est dit invariant dans le temps si la réponse à e(k-i) est s(k-i) où i est un nombre entier quelconque, autrement dit l'opérateur T doit satisfaire la condition :

$$\begin{aligned} \text{si } T(e(k)) &= s(k), \\ \text{alors } T(e(k-i)) &= s(k-i). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Causalité: Les filtres causals sont caractérisés par le fait que leur réponse ne précède jamais leur excitations. c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \text{si } e(k) = 0 & \quad \text{pour } k < n , \\ \text{alors } s(k) = 0 & \quad \text{pour } k < n . \end{aligned} \quad (1.4)$$

Filtre Idéal: Le filtre idéal serait celui qui transmettrait toutes les composantes fréquentielles désirées sans atténuation, ni déphasage, tout en éliminant complètement les autres [4].

On distingue les filtres analogiques [5] et les filtres numériques; les premiers traitent des signaux analogiques, tandis que les seconds traitent des signaux numériques.

I-2 Avantages des Filtres Numériques :

L'avantage du filtrage numérique sur le filtrage analogique se résume essentiellement aux points suivants :

i) LA SOUPLESSE :

La réponse fréquentielle peut être modifiée en changeant les valeurs des coefficients .

ii) LA PRECISION :

Les différentes manipulations étant effectuées sur des nombres, la précision ne dépend en grande partie que de celle du Convertisseur Analogique Numérique (CAN) d'entrée et du Convertisseur Numérique Analogique (CNA) de sortie, ainsi que la précision des calculs.

iii) LA STABILITE :

Il n'y a pas de vieillissement des composants, ni d'influence de la température sur les caractéristiques du filtre qui restent parfaitement stables au cours du temps.

iv) LA MINIATURISATION :

Le filtrage numérique se prête bien à une réalisation en circuits très intégrés, même aux très basses fréquences où le filtrage analogique se trouve handicapé par l'usage de composants de grandes dimensions [6].

I-3 Outils Mathématiques :

Quatre relations mathématiques forment les outils de base du filtrage numérique. La réponse fréquentielle $H(f)$ est liée aux transformées de Fourier $E(f)$ et $S(f)$ des signaux d'entrée et de sortie par :

$$S(f) = H(f).E(f) \quad (1.5)$$

Dans le domaine temporel, la relation précédente se traduit par le produit de convolution suivant :

$$s(k) = h(k) * e(k) \quad (1.6a)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} h(l) e(k-l) \quad (1.6b)$$

où $h(k)$ est la réponse impulsionnelle du filtre [7].

Si $h(k)$ est de durée finie M la relation (1.6) devient :

$$s(k) = \sum_{l=0}^M h(l) e(k-l) \quad (1.6c)$$

La transformée en Z des deux membres de l'équation (1.6b) donne:

$$S(Z) = H(Z) E(Z) \quad (1.7)$$

avec :

$$H(Z) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l) Z^{-l} = \frac{S(Z)}{E(Z)} \quad (1.8a)$$

où $H(Z)$ est la fonction de transfert du filtre; celle-ci peut s'écrire aussi sous la forme rationnelle suivante :

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i Z^{-i}} \quad (1.8b)$$

où N, M représentent respectivement les degrés du dénominateur et du numérateur. D'où les signaux d'entrée et de sortie sont liés par l'équation récurrente suivante :

$$s(k) = \sum_{l=0}^M b_l e(k-l) - \sum_{l=1}^N a_l s(k-l) \quad (1.8c)$$

Dans le cas d'un filtre numérique avec une réponse impulsionnelle de durée finie, $H(Z)$ peut s'écrire aussi sous la forme :

$$H(Z) = \sum_{l=0}^M b_l Z^{-l} \quad (1.9)$$

où les coefficients b_l représentent la réponse impulsionnelle du filtre. Alors dans ce cas, les signaux d'entrée et de sortie seront liés par l'équation non récursive suivante :

$$s(k) = \sum_{i=0}^M b_i e^{k-i} \quad (1.10)$$

La réponse impulsionnelle $h(k)$ étant un signal discret, la réponse fréquentielle $H(f)$ est une fonction périodique de période $2\pi f_0$ où f_0 est la fréquence d'échantillonnage du domaine temporel. Pour satisfaire la condition de Shannon la fréquence d'échantillonnage f_0 doit être au moins supérieure à deux fois la fréquence maximale du spectre du signal à filtrer [8].

La réponse fréquentielle $H(f)$ d'un filtre numérique est la fonction de transfert évaluée sur le cercle unité :

$$H(f) = H(Z) \Big|_{Z=e^{j2\pi f/f_0}} \quad (1.11)$$

Stabilité : Un filtre linéaire invariant est stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle satisfait la condition [8] :

$$\sum_k |h(k)| < \infty \quad (1.12)$$

Un filtre numérique est physiquement réalisable si et seulement s'il est à la fois causal et stable.

I-4 Classification Selon la Réponse Fréquentielle :

On peut classer les filtres par leurs réponses fréquentielles, tels que les filtres passe-bas, filtres passe-haut, filtres passe-bande et les filtres coupe-bande [8] (voir fig.1.2a, fig.1.2b).

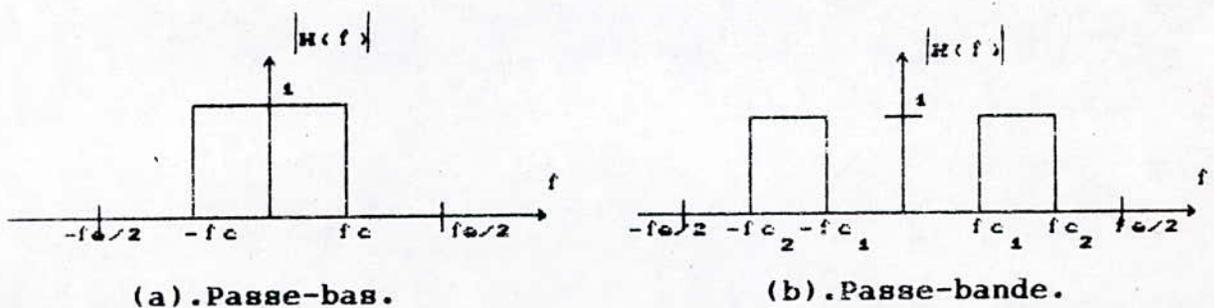
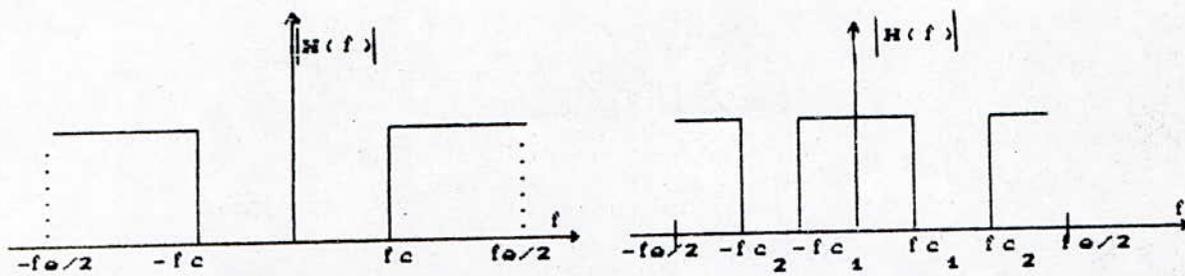


fig.1.2a



(c). Passe-haut.

(d). Coupe-bande.

fig.1.2b

Notion de gabarit :

A cause de la nature idéalisée de ces réponses fréquentielles, les filtres pratiquement réalisables ne peuvent satisfaire ce type de spécifications que d'une manière approximative . Dans les problèmes pratiques, les spécifications sont données avec des tolérances; ceci constitue un gabarit que doit satisfaire la réponse fréquentielle $H(f)$. Par exemple, dans le cas d'un filtre passe-bas, le gabarit que l'on peut avoir est donné par la fig.1.3

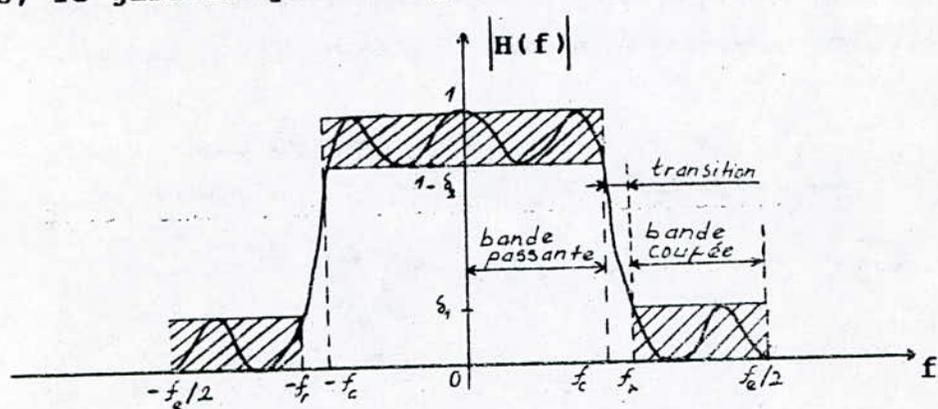


fig.1.3

où δ_1 et δ_2 représentent les erreurs d'approximation tolérées, et f_c et f_r sont respectivement les fréquences de coupure et d'atténuation.

I-5 Classification Selon La Réponse Impulsionnelle :

On peut aussi subdiviser les filtres numériques en deux larges catégories selon la durée de leurs réponses impulsionnelles.

I-5.1 Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (R.I.F) :

Dans cette classe de filtres, les échantillons $h(k)$ de la ré-

ponse impulsionnelle sont non nuls seulement sur un intervalle de durée finie. Ces filtres sont toujours stables et possèdent un déphasage linéaire [8]. Leur réalisation peut être effectuée par le calcul direct de définition (1.9) ou par transformée de Fourier [6]. Elle nécessite un très grand nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle et surtout pour des filtres à bandes étroites, donc une très grande capacité mémoire et un très grand nombre d'opérations. En revanche, du fait de sa non récursivité, l'erreur de calcul n'est pas cumulative [8].

I-5.2 Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (R.I.I) :

Dans ce cas, les échantillons $h(k)$ de la réponse impulsionnelle sont non nuls sur un intervalle de durée infinie. Un filtre RII est mis en oeuvre à l'aide d'une équation aux différences du type (1.8c). L'élaboration de tels filtres consiste en la détermination des coefficients a_k et b_k à partir de la réponse fréquentielle tout en satisfaisant le gabarit et les conditions de causalité et de stabilité. Dans ce cas, la fonction de transfert est un quotient de deux polynômes en Z , et, pour que le filtre soit stable, il faut que les zéros du polynôme du dénominateur (pôles du filtre) soient à l'intérieur du cercle unité [3]. Les méthodes d'élaboration des filtres RII peuvent être groupées en deux catégories; l'une comprend des méthodes algorithmiques qui font appel à des procédures d'optimisation par ordinateur. Ces méthodes cherchent à rendre minimum l'erreur d'approximation des caractéristiques du filtre désiré par celles d'un filtre réalisable, selon un critère approprié [9]. L'autre catégorie, la plus traditionnelle, comprend les techniques de transposition des méthodes de synthèse de filtres analogiques au cas des filtres numériques. Il s'agit ici de tirer partie de tout l'arsenal des méthodes de synthèse de filtres analogiques, en établissant une correspondance appropriée entre les domaines numérique et analogique. Cette transposition peut se faire en établissant une correspondance entre le plan S de la transformation de LAPLACE et le plan Z de la transformée en Z . Un tel pont doit conserver les propriétés essentielles des filtres telles que stabilité et causalité.

Les trois principales méthodes de transposition se résument comme suit :

Equivalence de la dérivation :

Cette méthode consiste à poser, du point de vue opérateur, que la dérivation analogique est équivalente à la dérivation numérique :

$$\frac{d}{dt} e_a(t) \longleftrightarrow \frac{e(k) - e(k-1)}{T_0} \quad (1.13)$$

(T_0 est la période d'échantillonnage)

où $e_a(t)$ est un signal analogique et $e(k)$ un signal numérique. L'équation aux différences pour la dérivation numérique est donnée par :

$$s(k) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_0} \quad (1.14)$$

La fonction de transfert correspondante est donc :

$$H(Z) = \frac{1 - Z^{-1}}{T_0} \quad (1.15)$$

D'après ce résultat, l'axe imaginaire du plan S est appliqué sur le cercle de centre $Z = (1/2, 0)$ et de rayon $r = 1/2$. La réponse fréquentielle doit donc être évaluée sur ce cercle [10], toutefois, comme l'échantillonnage applique le même axe sur le cercle unité en introduisant la transformée de Fourier, l'équivalence de la dérivation n'est satisfaisante qu'au voisinage du point $Z = 1$ où les deux cercles sont tangents. Pour concentrer une réponse fréquentielle dans cette région, il faut utiliser une fréquence d'échantillonnage très élevée. Cela conduit à une représentation redondante donc inefficace du signal analogique [8].

Equivalence de l'intégration :

Le principe qui vient d'être décrit précédemment peut être appliqué à l'intégration.

On pose :

$$s_a(t) = \int_a^t e_a(u) du \longleftrightarrow y(k) = y(k-1) + T_0 \frac{x(k) + x(k-1)}{2} \quad (1.16)$$

où l'intégration numérique est basée sur la règle trapézoïdal [8].

Dans le cas analogique, l'intégration correspond à l'opérateur $\frac{1}{s}$.
L'application cherchée est donc donnée par :

$$\frac{1}{s} = \frac{T_0}{2} \cdot \frac{1 + Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \quad (1.17)$$

Cette équation est connue sous le nom de TRANSFORMATION BILINEAIRE car elle est linéaire par rapport à s et Z . Dans ce cas, l'image de l'axe imaginaire du plan S est le cercle unité dans le plan Z . On obtient donc une transposition compatible avec l'échantillonnage. Le prix payé pour ce résultat est une loi de correspondance non linéaire entre les fréquences analogiques et les fréquences numériques, donnée par :

$$w_a = \frac{2}{T_0} \cdot \text{tg}(w_d \frac{T_0}{2}) \quad (1.18)$$

où w_a et w_d ($w = 2\pi f$) représentent les pulsations pour lesquelles le filtre analogique et le filtre numérique ont la même fonction de transfert.

Invariance Impulsionnelle :

Cette méthode consiste à échantillonner la réponse impulsionnelle. Soit la fonction de transfert analogique $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{s - s_j} \quad (1.19)$$

où s_j sont des pôles simples.

La réponse impulsionnelle analogique est donnée par :

$$h_a(t) = \sum_{j=1}^N a_j e^{(s_j t)} \epsilon(t) \quad (1.20)$$

$$\text{avec : } \epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'échantillonnage de $h_a(k)$ donne :

$$h(n) = \sum_{j=1}^N a_j e^{(s_j n T_0)} \cdot \epsilon(n T_0) \quad (1.21)$$

où T_0 est la période d'échantillonnage .

La fonction de transfert du filtre numérique est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 H(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot Z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N a_j e^{(s_j n T_0)} Z^{-n} \\
 &= \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{1 - e^{(s_j T_0)} Z^{-1}} \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

La méthode d'invariance impulsionnelle donne au filtre numérique la même réponse impulsionnelle que celle du filtre analogique aux instants d'échantillonnage; par ailleurs elle modifie la réponse fréquentielle du filtre analogique. En effet, à cause de l'échantillonnage, la réponse fréquentielle du filtre numérique est obtenue par une répétition périodique de celle du filtre analogique et comme les filtres analogiques utilisés en pratique ne sont pas limités en fréquences, un recouvrement spectral sera inévitable.

I-6 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a introduit la notion de filtrage numérique avec ses outils et classification. La distinction selon la durée finie ou infinie de la réponse impulsionnelle est introduite, ainsi que les principales méthodes d'élaboration de filtres numériques. Le chapitre suivant traitera en détail l'élaboration de quelques filtres numériques prototypes en utilisant la méthode de transformation bilinéaire.

CHAPITRE II

SYNTHESE DES FILTRES NUMERIQUES PROTOTYPES

PASSE-BAS

II.1- Approximation des Filtres Analogiques :

II.1.1- Introduction :

La réalisation d'un filtre prototype passe-bas à partir de son gabarit se fait par l'intermédiaire de fonctions mathématiques particulières ou fonctions d'approximations, qui permettent de trouver la fonction de transfert du filtre [11].

Les principales fonctions d'approximation sont :

- 1- BUTTERWORTH.
- 2- CHEBYSHEV.
- 3- ELLIPTIQUE (Cauer).
- 4- BESSEL.

II.1.2- Filtre de Butterworth.

Ce filtre est caractérisé par une réponse plate à l'origine [12] (voir fig.2.1).

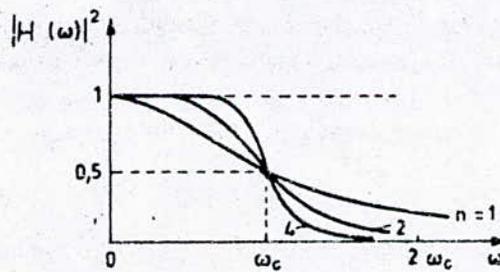


fig.2.1

Le carré du module de la fonction de transfert d'un tel filtre est donné par [13]:

$$\left| H(\omega) \right|^2 = \frac{1}{1 + (\omega^2)^n} \quad (2.1)$$

ceci pour une fréquence de coupure $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$. On a :

$s = j\omega$ avec $s^* = -s$ où s^* est le conjugué de s .

Alors :

$$\left| H(\omega) \right|^2 = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \Big|_{s=j\omega} \quad (2.2)$$

En résolvant l'équation :

$$1 + (-s^2)^n = 0 \quad (2.3)$$

on trouve les racines de cette dernière équation :

$$s_k = e^{j\pi(1/2 + (2k-1)/2n)} \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, 2n \quad (2.4)$$

Comme les pôles d'un filtre analogique stable doivent se trouver dans la partie gauche de l'axe imaginaire du plan S , alors on ne garde que les solutions pour lesquelles la partie réelle est négative. D'où la fonction de transfert s'écrit :

$$H(s) = \frac{K_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)} \quad (2.5)$$

où K_0 est une constante de normalisation et s_k les pôles du filtre analogique donnés par :

$$s_k(k) = -\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + j \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad (2.6)$$

$k = 1, 2, \dots, n$

On remarque que :

$$\left[\text{Re}(s_k) \right]^2 + \left[\text{Im}(s_k) \right]^2 = 1 \quad (2.7)$$

donc ces pôles se trouvent sur le cercle unité, centré à l'origine. On remarque aussi que ce filtre ne possède pas de zéros.

En pratique, l'ordre n du filtre est déterminé généralement à partir de l'atténuation A désirée ($A > 1$), à une fréquence d'atténuation $\omega_r > \omega_c = 1$.

On aura alors :

$$\left| H(\omega) \right|^2 \Big|_{\omega = \omega_r} = \frac{1}{A^2} = \frac{1}{1 + (\omega_r^2)^n} \quad (2.8)$$

d'où :

$$n = \frac{\log(A^2 - 1)}{2 \log(\omega_r)} \quad (2.9)$$

(log(.) étant le logarithme décimale).

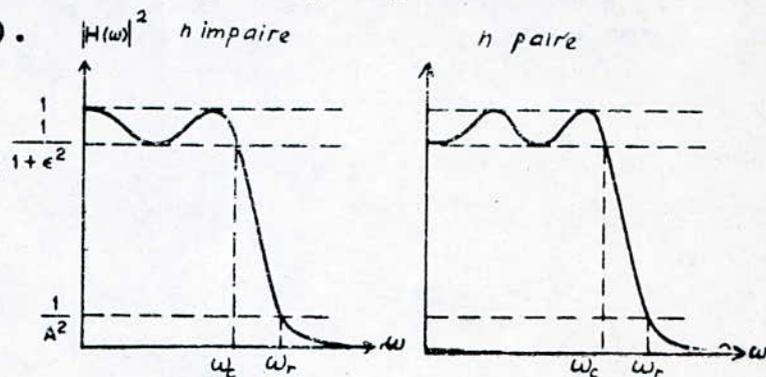
II.1.3- Filtre de Chebyshev :

Le filtre de Chebyshev est caractérisé par la propriété de minimiser l'amplitude maximale de l'erreur [9]. Cette dernière oscille entre un maximum et un minimum avec des amplitudes égales. Selon que l'erreur soit minimisée dans la bande passante ou dans la bande d'atténuation, on distingue deux types de filtres de Chebyshev :

Filtre de Chebyshev de Type I :

Ce filtre présente des ondulations équiréparties dans la bande passante (voir fig.2.2).

CHEBYSHEV TYPE I



CHEBYSHEV TYPE II

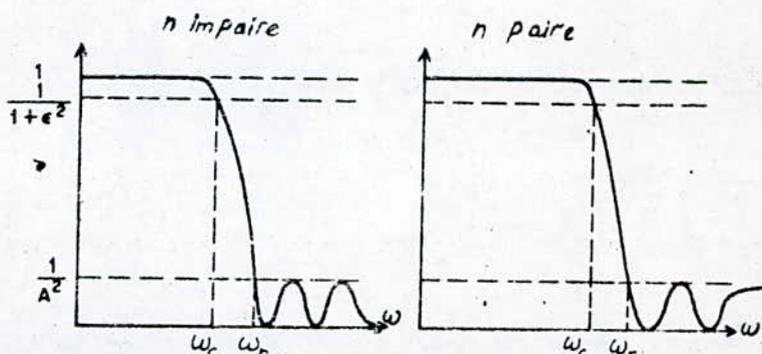


fig.2.2

Le carré du module de la fonction de transfert pour $\omega_c = 1$, est donné par [9]:

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(w)} \quad (2.10)$$

où $T_n(w)$ est le polynôme de Chebyshev défini par :

$$T_n(w) = \begin{cases} \cos(n \cdot \text{Arcos}(w)) & \text{pour } |w| \leq 1 \\ \text{ch}(n \cdot \text{Argch}(w)) & \text{pour } |w| > 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

et ε est un paramètre relatif aux oscillations dans la bande passante. Comme $T_n(w)$ est un polynôme, ce filtre n'admet pas de zéros.

Filtre de Chebyshev de Type II :

Ce filtre présente des oscillations dans la bande d'atténuation (voir fig.2.2).

Pour $w_c = 1$, le carré du module de sa fonction de transfert est donné par :

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot [T_n(w_r) / T_n(w_r/w)]^2} \quad (2.12)$$

avec w_r : fréquence d'atténuation .

Les pôles ($s_k = \sigma_k + jw_k$) du filtre de Chebyshev type I [12] se trouvent sur une ellipse (dans le plan S), d'équation :

$$\frac{\sigma_k^2}{\text{sh}^2(\varphi)} + \frac{w_k^2}{\text{ch}^2(\varphi)} = 1 \quad (2.13)$$

$$\text{où : } \sigma_k = -\text{sh}(\varphi) \cdot \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right],$$

$$w_k = \text{ch}(\varphi) \cdot \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right],$$

$$\text{sh}(\varphi) = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\text{ch}(\varphi) = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \quad \text{avec } \gamma = \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right]^{1/n}.$$

Pour le filtre de chebyshev II, les zéros sont purement imaginaires et sont donnés par [9] :

$$s_{ok} = j \frac{w_r}{\cos\left[\left[\frac{(2k-1)}{2n}\right]\pi\right]} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

Les pôles sont donnés par :

$$s_k = \sigma_k + j w_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

avec :

$$\sigma_k = \frac{w_r \alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

$$w_k = - \frac{w_r \beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

$$\alpha_k = - \operatorname{sh}(\varphi) \cdot \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]$$

$$\beta_k = \operatorname{ch}(\varphi) \cdot \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]$$

$$\text{et : } \operatorname{sh}(\varphi) = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$

$$\operatorname{ch}(\varphi) = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left[A + \sqrt{A^2 - 1} \right]^{1/n}$$

La démonstration de ces formules est donnée en Annexe A1.

On calcule l'ordre du filtre de chebyshev I et II comme suit :

à la fréquence w_r , on a une atténuation de A ($A > 1$), donc

$$\left| H(w_r) \right|^2 = \frac{1}{A^2} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cdot T_n^2(w_r)} \quad (2.15)$$

$$\text{d'où : } T_n(w_r) = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}} = g$$

$$\text{or } T_n(w_r) + \sqrt{T_n^2(w_r) - 1} = \left[\text{ch}(n \text{Argch}(w_r)) + \text{sh}(n \text{Argch}(w_r)) \right]$$

et d'après la formule de De Moivre :

$$T_n(w_r) + \sqrt{T_n^2(w_r) - 1} = \left[\text{ch}(\text{argch}(w_r)) + \text{sh}(\text{argch}(w_r)) \right]^n$$

$$\text{d'où : } g + \sqrt{g^2 - 1} = \left[w_r + \sqrt{w_r^2 - 1} \right]^n$$

alors l'ordre du filtre est donné par :

$$n = \frac{\text{Log}(g + \sqrt{g^2 - 1})}{\text{Log}(w_r + \sqrt{w_r^2 - 1})} \quad \text{avec } g = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}} \quad (2.16)$$

II.1.4- Filtre de Cauer:

Ce filtre présente des oscillations en bande passante et en bande atténuée [14]. La fonction modèle fait appel aux fonctions elliptiques; elle s'écrit :

$$H^2(s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \text{sn}^2(s, k_1)} \quad (2.17)$$

où $y = \text{sn}(s, k_1)$ est définie de façon implicite par la fonction elliptique incomplète de première espèce [12] :

$$s = \int_0^{\text{Arcsin}(y)} \frac{1}{(1 - k_1^2 \sin^2(\theta))^{1/2}} d\theta \quad (2.18)$$

La représentation de la fonction $H^2(s)$ pour $s = j\omega$ est donnée par : la figure (fig.2.3).

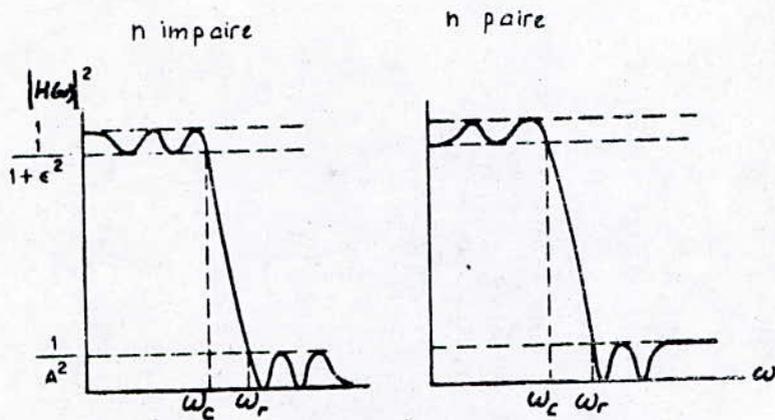


fig.2.3

On définit le facteur de sélectivité par $k = \omega_c/\omega_r$.

Les pôles s_i et les zéros s_{oi} d'un filtre d'ordre n se calculent par la procédure suivante [12]:

$$1- k' = \sqrt{1-k^2}$$

$$2- q_0 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \right]$$

$$3- q \approx q_0 + 2 \cdot q_0^5 + 15 \cdot q_0^9 + 150 \cdot q_0^{13}$$

$$4- D = \frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}$$

5- L'ordre du filtre est tel que :

$$n \geq \frac{\log(16D)}{\log(1/q)}$$

$$6- B = \frac{1}{2n} \log \left[\frac{\sqrt{1+\epsilon^2} + 1}{\sqrt{1+\epsilon^2} - 1} \right]$$

$$7- \sigma_o = \left| \frac{2 q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \text{sh}[(2m+1)B]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \text{ch}(2mB)} \right|$$

$$8- W = \sqrt{(1+k\sigma_o^2)(1+\sigma_o^2/k)}$$

$$9- \Omega_i = \left| \frac{2 q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \text{sh}[(2m+1)\pi u/n]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \text{ch}(2m\pi u/n)} \right|$$

$$\text{où : } u = \begin{cases} i & \text{pour } n \text{ impaire} & i = 1, 2, \dots, (n-1)/2 \\ i-1/2 & \text{pour } n \text{ paire} & i = 1, 2, \dots, n/2 \end{cases}$$

$$10- V_i = \sqrt{(1-k\Omega_i^2)(1-\Omega_i^2/k)}$$

$$\text{d'où : } S_{oi} = \pm j \frac{1}{\Omega_i}$$

$$S_i = \frac{-\sigma_o V_i \pm j \Omega_i W}{(1 + \sigma_o^2 \Omega_i^2)} \quad (2.19)$$

$$i = 1, \dots, (n-1)/2 \quad \text{pour } n \text{ impaire et,}$$

$$i = 1, \dots, n/2 \quad \text{pour } n \text{ paire .}$$

La démonstration de ces formules ainsi qu'un rappel sur les fonctions elliptiques sont donnés en Annexe A2.

II.1.5- Filtre de BESSEL :

Ce filtre est caractérisé par un temps de propagation de groupe constant au voisinage de l'origine du plan s [15,16,17].

Sa fonction de transfert est donnée par [9] :

$$H(s) = \frac{d_o}{B_n(s)} \quad (2.20)$$

où $B_n(s)$ est le polynôme de Bessel d'ordre n et d_o est une constante de normalisation donnée par :

$$d_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (2.21)$$

Le polynôme de Bessel satisfait la relation de récurrence suivante

$$B_n(s) = (2n-1)B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \quad (2.22)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} B_0(s) &= 1 \\ B_1(s) &= s+1 \end{aligned}$$

On peut écrire $B_n(s)$ sous la forme :

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^n d_k s^k$$

$$\text{où } d_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} k!(n-k)!} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

La fréquence de coupure w_{nc} de ce filtre dépend de l'ordre de ce dernier [17], elle est tel que ;

$$\left| H(w_{nc}) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.23)$$

$$\text{et comme } H(w_{nc}) = \frac{d_0}{B_n(jw_{nc})}$$

alors :

$$\left| B_n(jw_{nc}) \right| = d_0 \sqrt{2} \quad (2.24)$$

Pour chaque n , cette fréquence de coupure est déterminée par itérations jusqu'à satisfaction de l'égalité (2.24).

On calcule l'ordre de Bessel comme suit :

- Soit w_r la fréquence d'atténuation du filtre normalisée par rapport à la fréquence de coupure. La fréquence d'atténuation non normalisée est alors $w_r w_{nc}$. A cette fréquence, on a une atténuation de A ($A > 1$), donc :

$$\left| H(w_r w_{nc}) \right| = \frac{1}{A} = \left| \frac{d_0}{B_n(jw_r w_{nc})} \right| \quad (2.25)$$

d'où :

$$|B_n(j\omega_r \omega_{nc})| = \delta_0 A \quad (2.26)$$

L'ordre n est alors déterminé par itérations jusqu'à satisfaction de l'égalité (2.26).

II.2- Transformation Bilinéaire :

La transformation bilinéaire permet de mettre en relation les fonctions de transfert des filtres analogiques et celles des filtres numériques. La méthode consiste à remplacer dans la fonction de transfert du filtre analogique, la variable s par :

$$s = \frac{2}{T_0} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} = \frac{2}{T_0} \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (2.27a)$$

avec : $T_0 = \frac{1}{f_0}$ période d'échantillonnage du filtre numérique.

$$\text{d'où :} \quad Z = \frac{1 + s.(T_0/2)}{1 - s.(T_0/2)} \quad (2.27b)$$

La transformation bilinéaire établit une correspondance entre l'axe imaginaire du plan s et le cercle unité du plan Z .

Soit : $s = j\omega_a$ et $Z = e^{j\omega_d T_0}$

En substituant la valeur de Z dans l'équation (2.27), on obtient :

$$s = \frac{2}{T_0} \frac{e^{j\omega_d T_0} - 1}{e^{j\omega_d T_0} + 1} = \frac{2}{T_0} j \operatorname{tg}(\omega_d T_0 / 2) = j \omega_a$$

d'où :

$$\omega_a = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_d T_0}{2}\right) \quad (2.28)$$

Cette relation donne une correspondance non linéaire entre la fréquence analogique et la fréquence numérique.

Si on remplace dans l'équation (2.27b) s par $(\alpha + j\omega)$, il vient par suite de calculs :

$$Z = \frac{(1 + (T_0/2)\alpha) + j\omega(T_0/2)}{(1 - (T_0/2)\alpha) - j\omega(T_0/2)} \quad (2.29)$$

On remarque que si $\alpha < 0$ alors $|Z| < 1$, et comme un système analogique stable est caractérisé par des pôles situés à gauche de l'axe imaginaire, cela implique que le système numérique possède des pôles situés à l'intérieur du cercle unité, d'où la stabilité d

ce dernier. Donc au demi-plan gauche du plan s correspond l'intérieur du cercle unité et au demi-plan droite correspond l'extérieur du même cercle. L'axe imaginaire est donc transformé en cercle unité (fig.2.4).

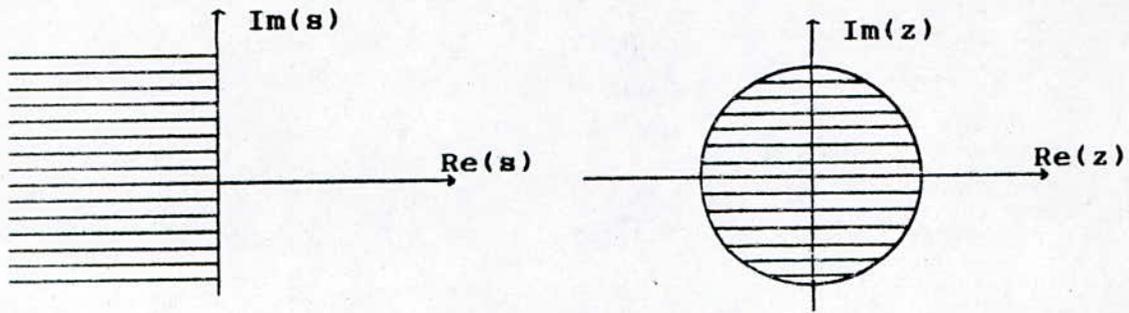


fig.2.4- Correspondance entre le plan S et le plan Z définie par la transformation bilinéaire.

Les avantages que présente cette transformation est qu'elle assure une réponse fréquentielle pour le filtre numérique très proche de celle du filtre analogique de départ, et que la stabilité du filtre est préservée.

La transformation bilinéaire, appliquée aux filtres de CHEBYSHEV, de BUTTERWORTH et de CAUER, conserve les propriétés de ces derniers. Par contre, les propriétés du filtre de BESSEL ne sont pas conservées. En effet, la transformation bilinéaire modifie le temps de propagation de groupe suivant la relation [13] :

$$\tau_N = \tau_A \left[1 + \left(\frac{\omega_a T_0}{2} \right)^2 \right] \quad (2.30)$$

C'est-à-dire qu'un filtre, analogique, ayant un temps de propagation de groupe constant est transformé en un filtre numérique n'ayant pas cette propriété.

II-3 Etapes de Synthèse des Filtres Numériques Prototypes :

Pour synthétiser un filtre numérique prototype pass-bas à partir des spécifications de son gabarit, on suivra les étapes suivantes :

- Etape 1 :

Par transformation bilinéaire, on transpose les spécifications fréquentielles du gabarit du filtre numérique à ceux du filtre analogique en utilisant la relation (2.28)

- Etape 2 :

A partir de ces spécifications, on calcul l'ordre, les pôles et les zéros du filtre analogique correspondant au choix désiré :

- 1/ Filtre de Butterworth
- 2i/ Filtre de Chebyshev
- 3i/ Filtre de Caue
- 4i/ Filtre de Bessel

- Etape 3 :

En appliquant la tranformation bilinéaire (2.27) aux pôles et zéros du filtre analogique, on obtient ceux du filtre numérique.

- Etape 4 :

Une fois les pôles et zéros numériques obtenus, on calcule les coefficients du filtre numérique par la conséquence de l'algorithme de Leverrier-Fadeeva (ANNEXE A4).

- Etape 5 :

Pour évaluer les performances du filtre synthétisé, on calcule la réponse fréquentielle en utilisant l'algorithme de Horner (ANNEXE A3). On évalue aussi la réponse impuls. onnelle [10], la fonction d'autocorrelation [18] et le temps de propagation [13]. On visualise aussi le diagramme des pôles et des zéros, donnant des conclusions intéressantes sur la stabilité et le comportement futur du filtre.

Ces étapes sont illustrées par l'organigramme de la fig.2.10.

Exemples : Soit le gabarit suivant d'un filtre passe-bas :

- Fréquence de coupure normalisée : $f_c = 0.25$
- Fréquence d'atténuation normalisée : $f_r = 0.28$
- Atténuation : $A = 0.05$

Pour ce même gabarit, on synthétise les filtres prototypes numériques (Butterworth, Chebyshev, Caue). Les résultats sont illustrés par les fig.2.5, fig2.6, fig2.7 et fig.2.8.

Intérprétation et Comparaison des résultats :

1) Le filtre de Butterworth présente une bonne approximation du filtre idéal, ses caractéristiques d'amplitude en fréquence sont très plates dans la bande passante, ils ont une excellente uniformité de l'atténuation dans la bande de transition, mais nécessite un ordre élevé ($n = 16$). Son spectre de phase s'approche de la linéarité dans la bande passante.

Fig. 2.5a

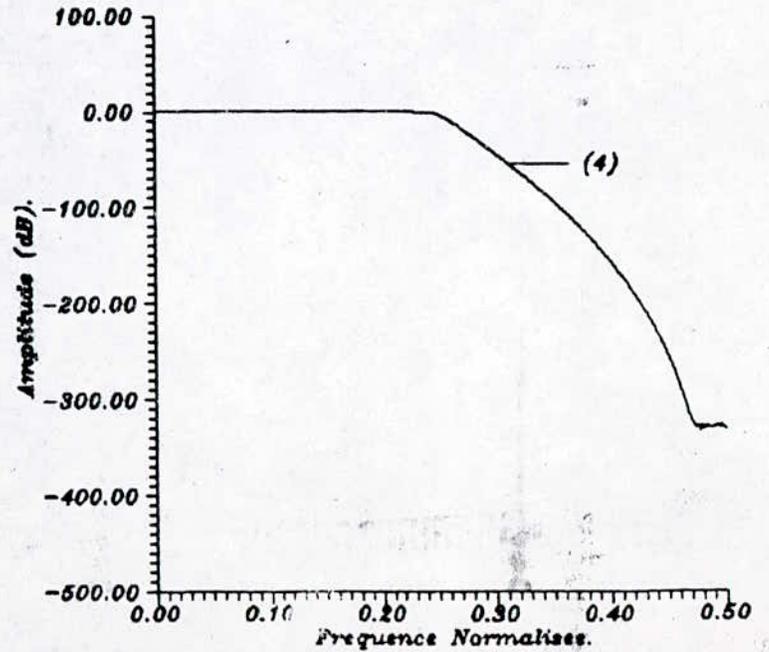
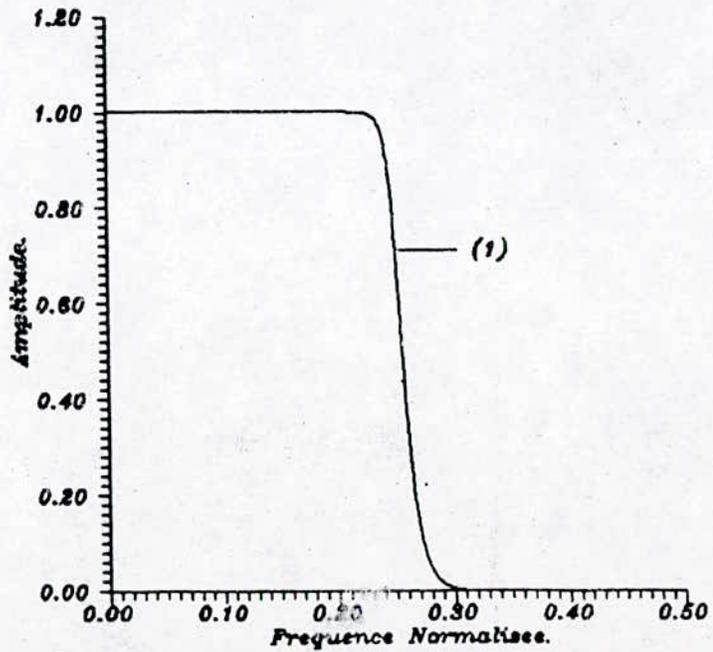
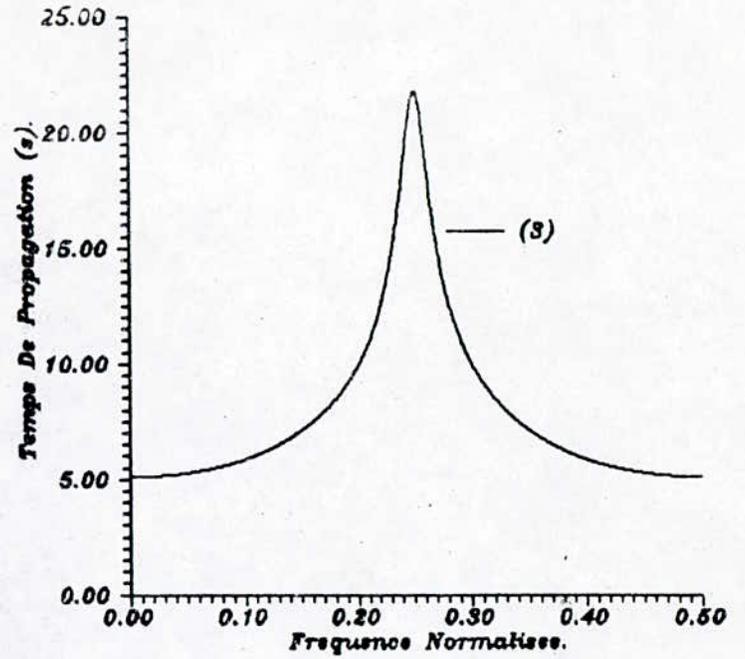
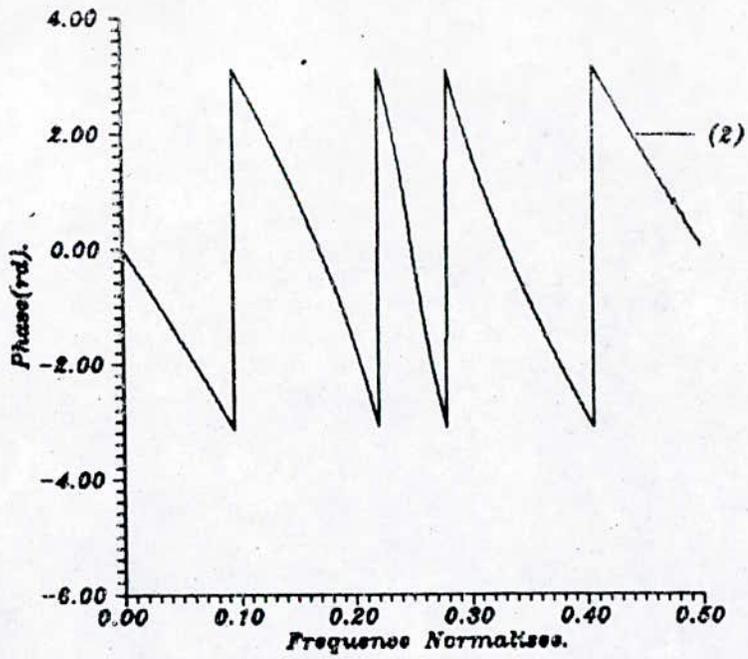
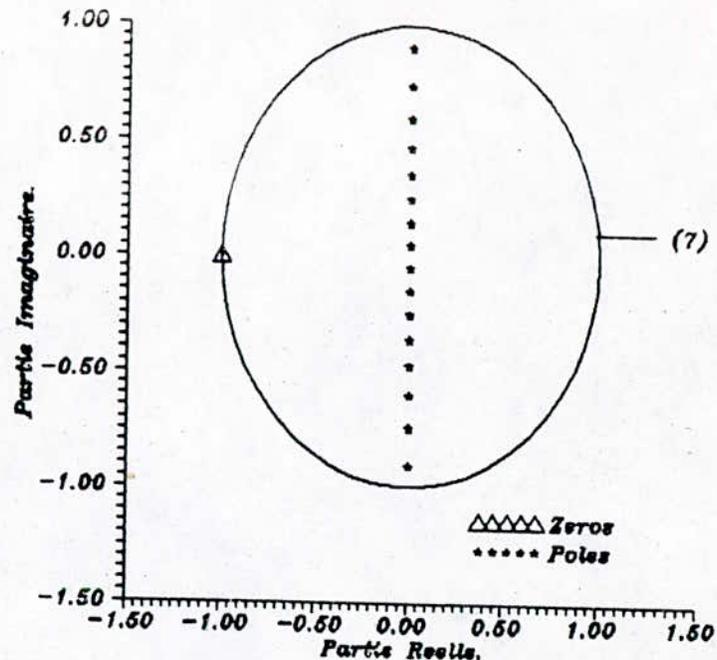
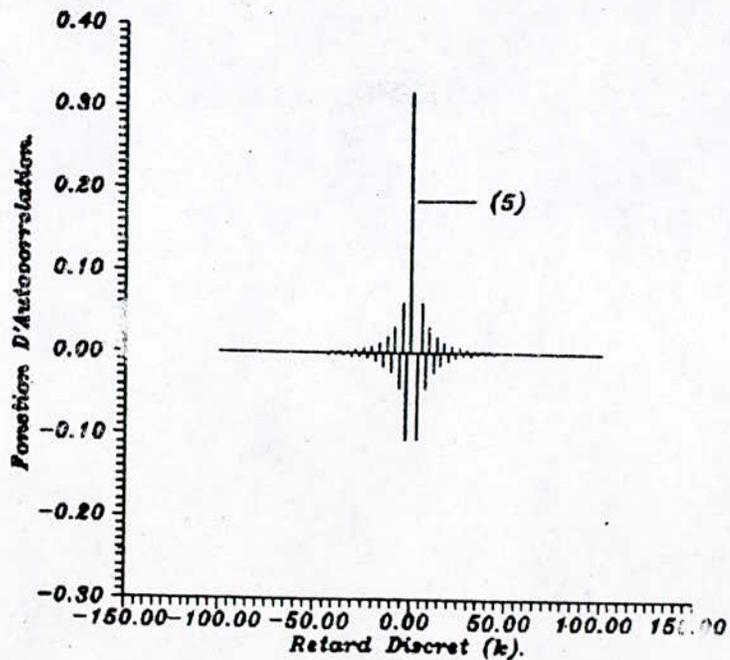
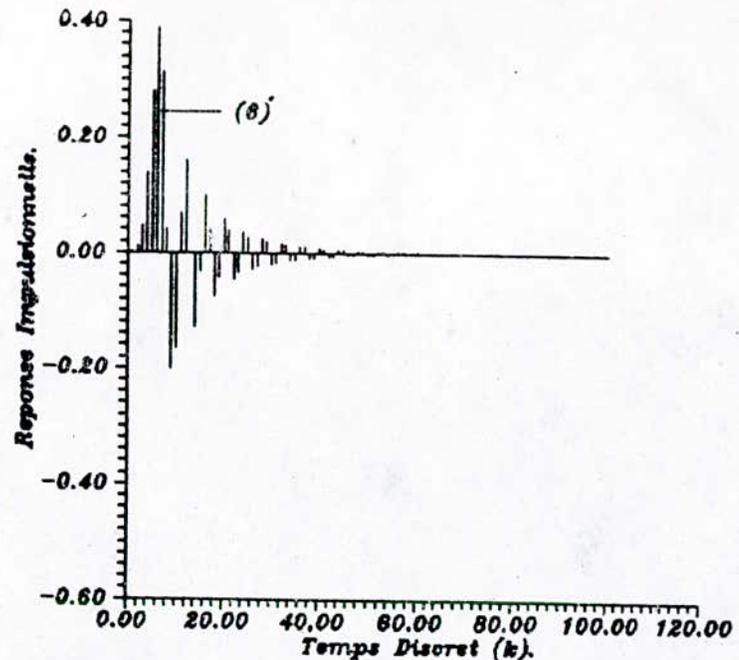


Fig. 2.5b



Filtre De Butterworth D'Ordre 16.

GABARIT: - Freq De Coupe :.25
 - Freq D'Attenuation :.28
 - Attenuation :.05

..... COURBES
 (1) ... Spectre D'Amplitude.
 (2) ... Spectre De Phase.
 (3) ... Temps De Propagation.
 (4) ... Spectre D'Amplitude En dB.
 (5) ... Fonction D'Autocorrelation.
 (6) ... Reponse Impulsionnelle.
 (7) ... Cercle De Stabilité.

Fig. 2.6a

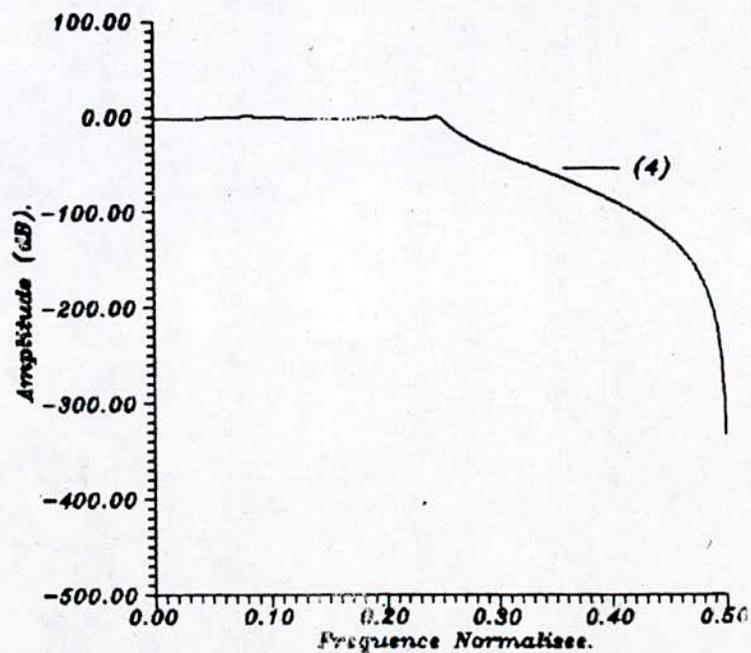
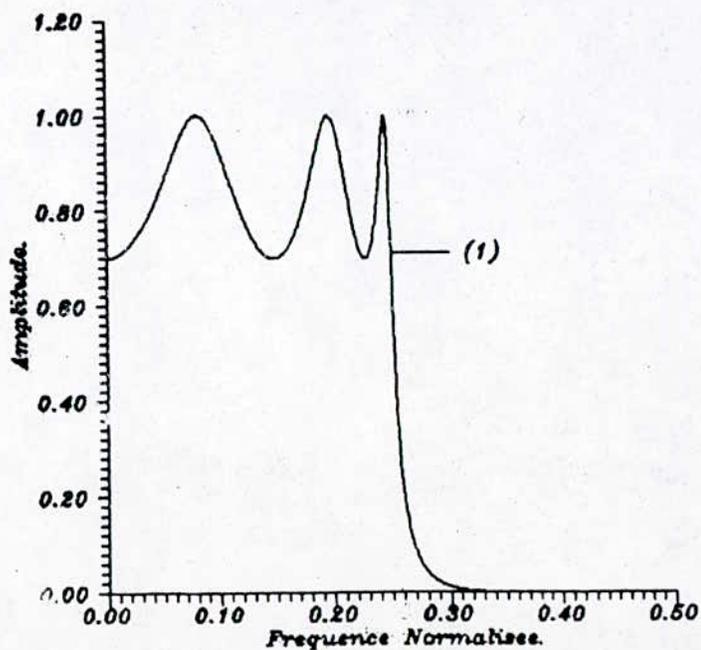
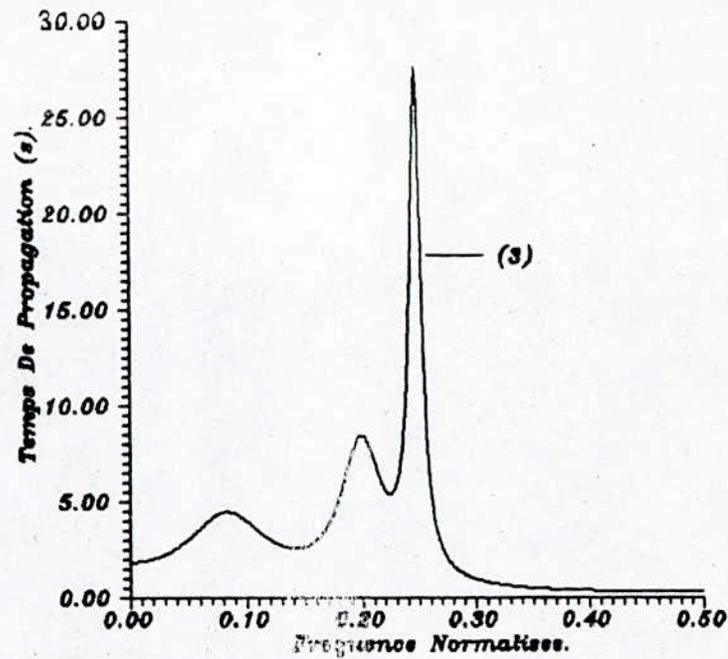
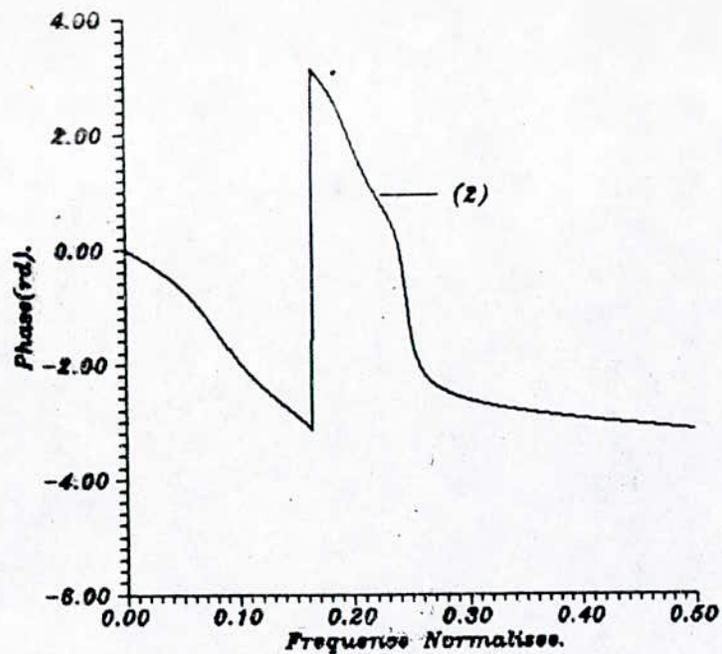
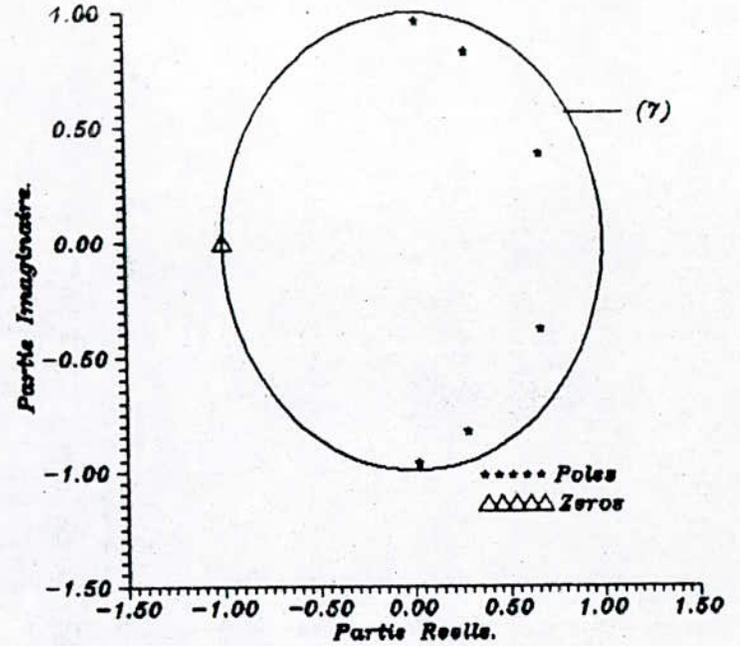
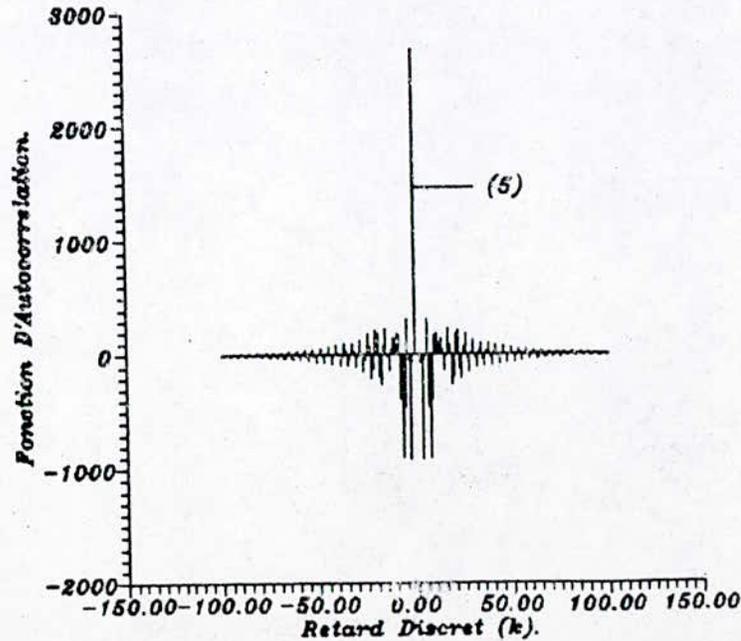
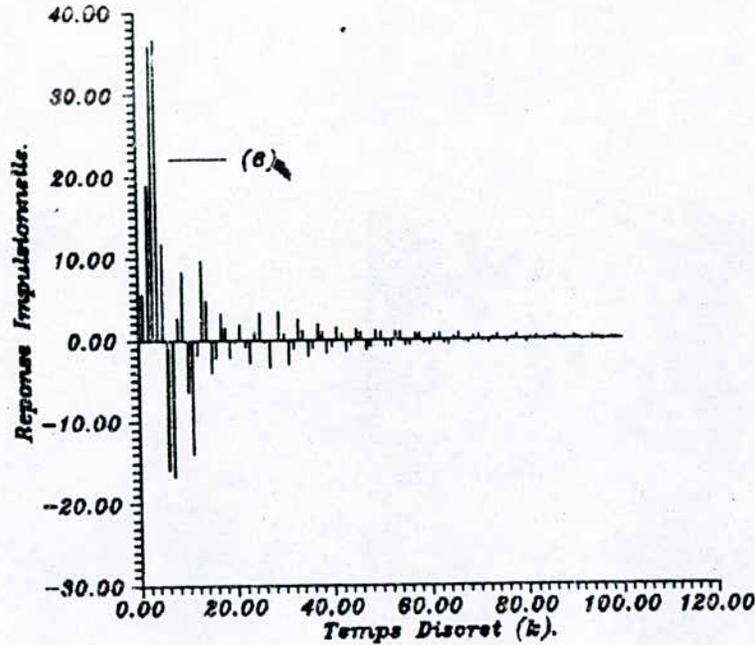


Fig. 2.6b

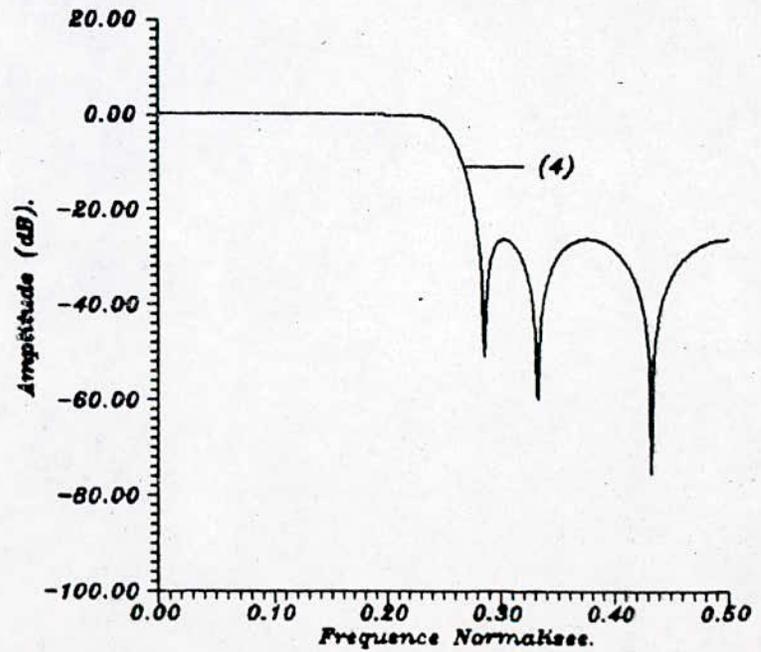
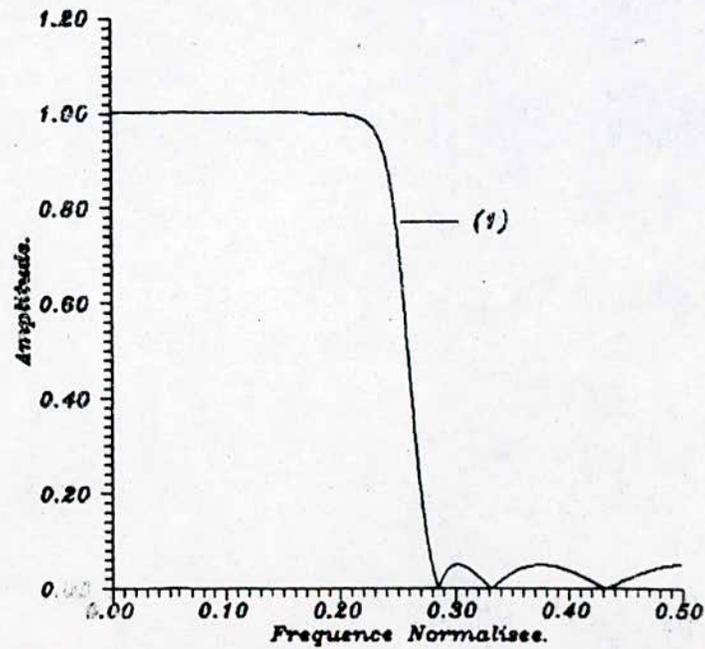
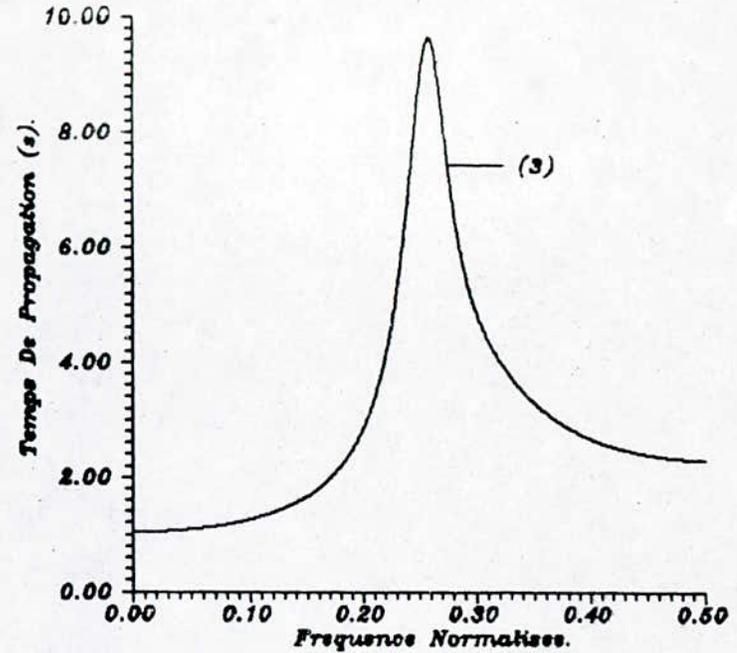
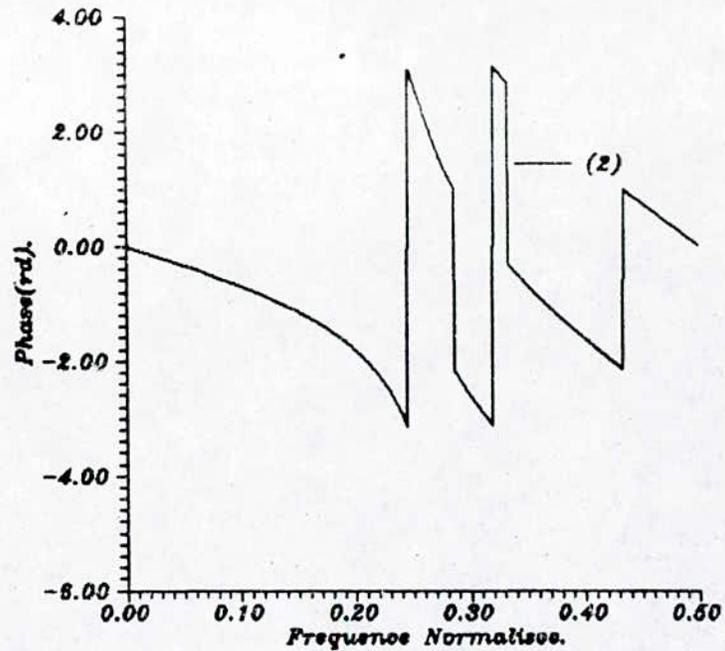


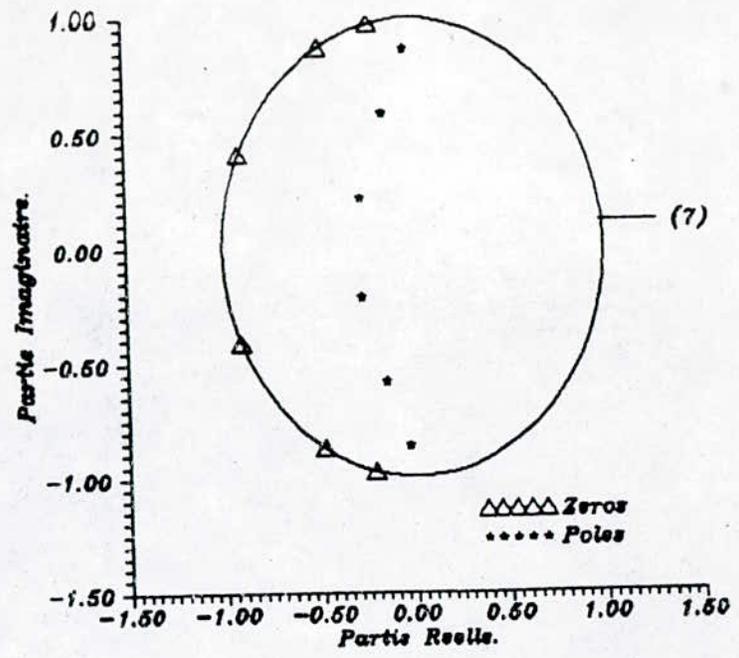
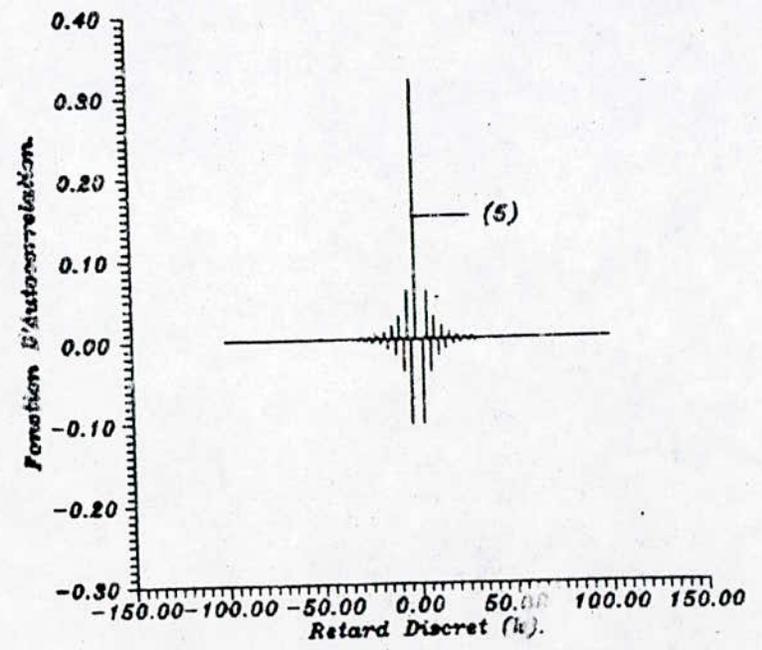
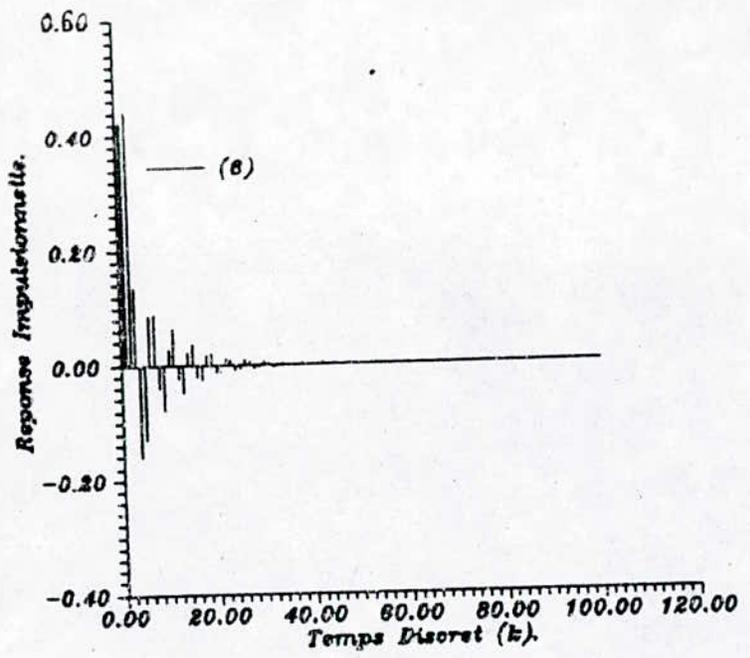
Filtre De Chebyshev(I) D'Ordre 6.

GABARIT:- Freq De Coupure :.25
 - Freq D'Attenuation :.28
 - Attenuation :.05
 - Ondulation :.3

..... COURBES
 (1) ... Spectre D'Amplitude.
 (2) ... Spectre De Phase.
 (3) ... Temps De Propagation.
 (4) ... Spectre D'amplitude En dB.
 (5) ... Fonction D'Autocorrelation.
 (6) ... Reponse Impulsionnelle.
 (7) ... Cercle De Stabilité.

Fig. 2.7a





Filtre De Chebyshev (II) D'Ordre 6.

GABARIT:- - Freq De Coupure :.26
 - Freq D'Attenuation :.28
 - Attenuation :.05
 - Ondulation :.9

..... **COURBES**

(1) ... Spectre D'Amplitude.
 (2) ... Spectre De Phase.
 (3) ... Temps De Propagation.
 (4) ... Spectre D'Amplitude En dB.
 (5) ... Fonction D'Autocorrelation.
 (6) ... Reponse Impulsionnelle.
 (7) ... Cercle De Stabilité.

Fig. 2.8a

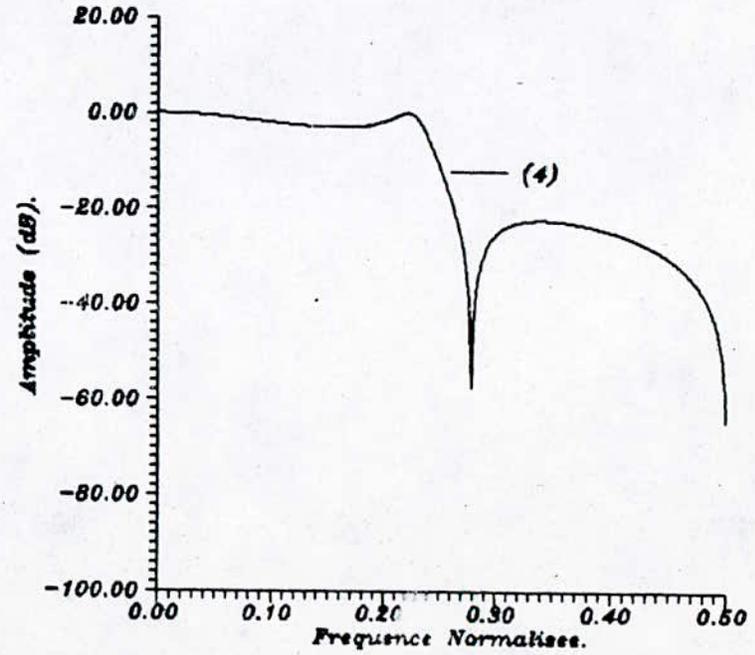
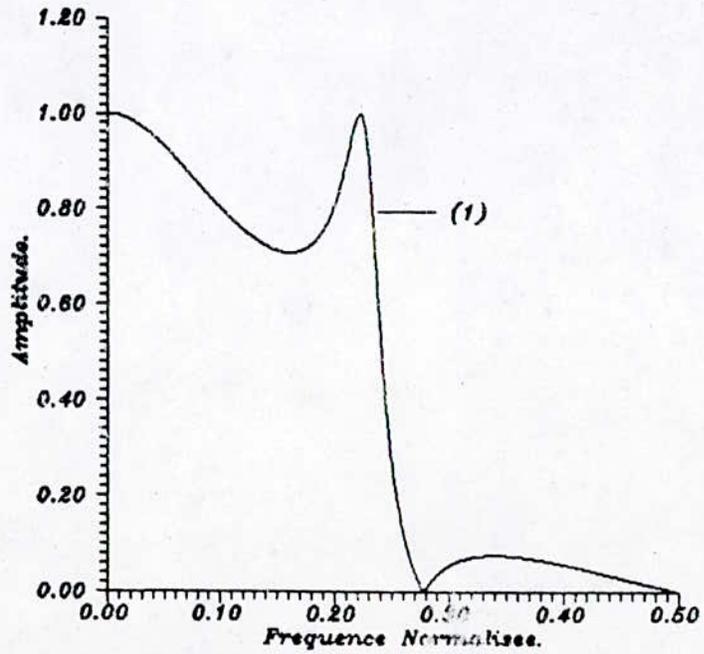
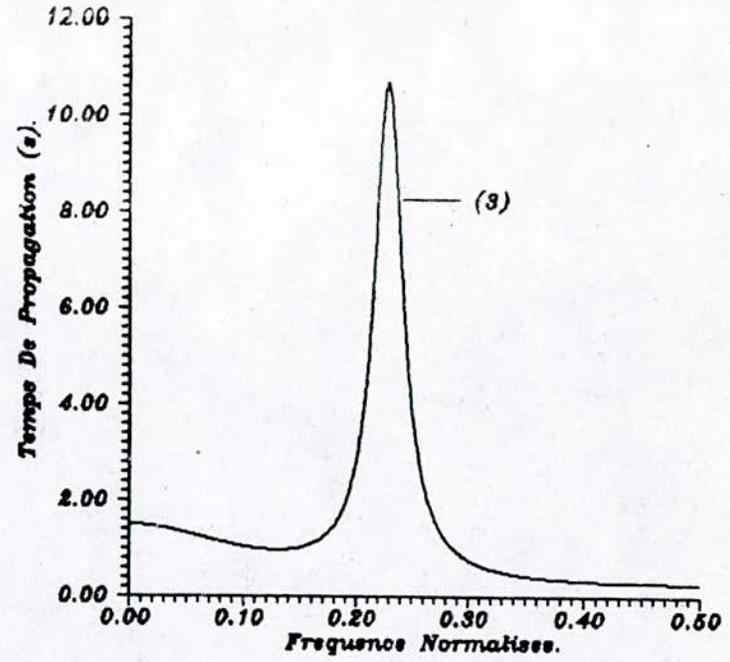
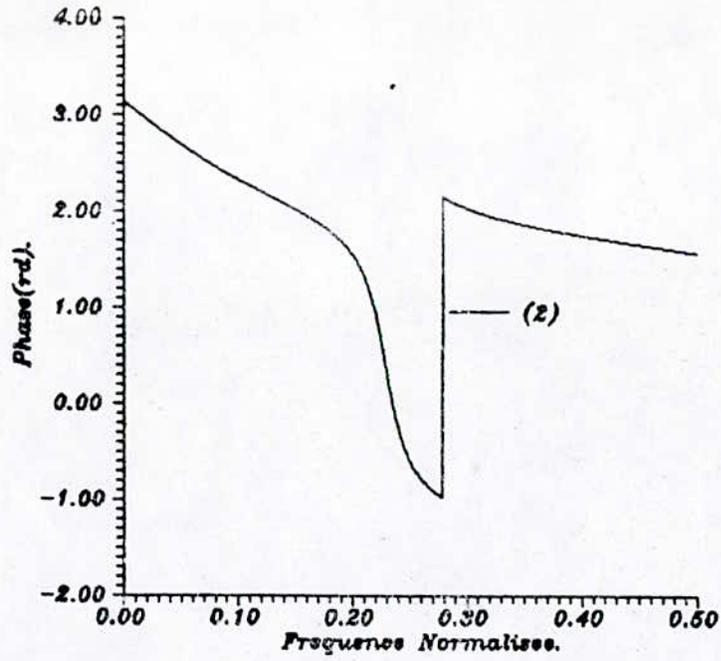
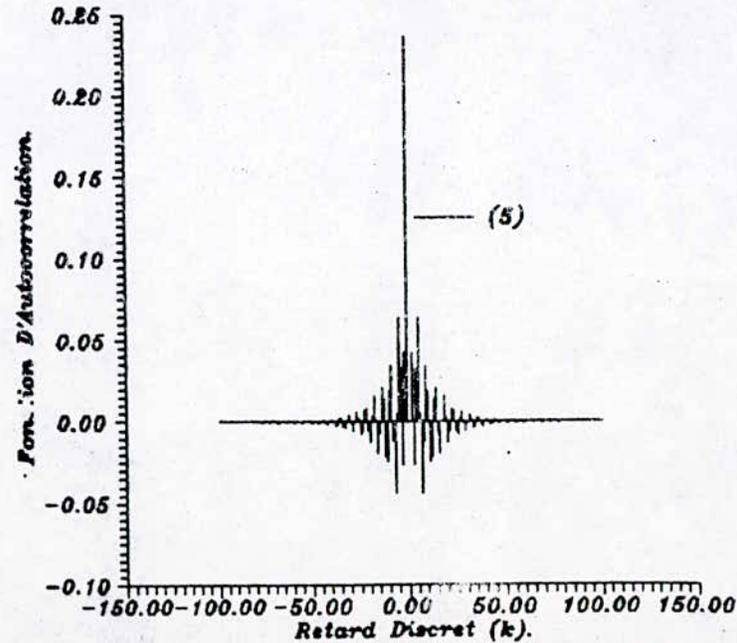
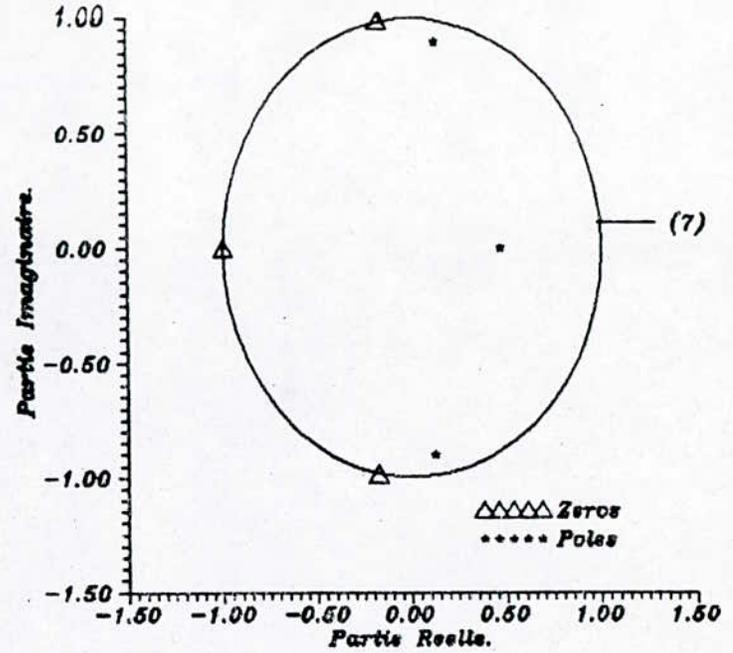
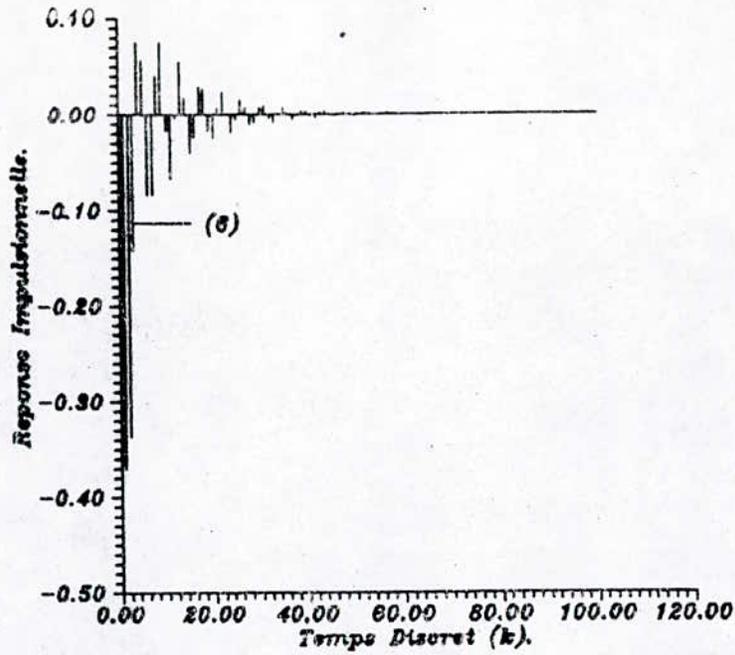


Fig. 2.8b



Filtre De Cauer D'Ordre 3.	
<p>GABARIT:- Freq De Coupure :.25 - Freq D'attenuation :.28 - Attenuation :.05 - Ondulation :.3</p>	
<p>***** COURBES *****</p> <p>(1) ... Spectre D'Amplitude. (2) ... Spectre De Phase. (3) ... Temps De Propagation. (4) ... Spectre D'Amplitude En dB. (5) ... Fonction D'Autocorrelation. (6) ... Reponse Impulsionnelle. (7) ... Cercle De Stabilité.</p> <p>*****</p>	

Fig. 2.9a

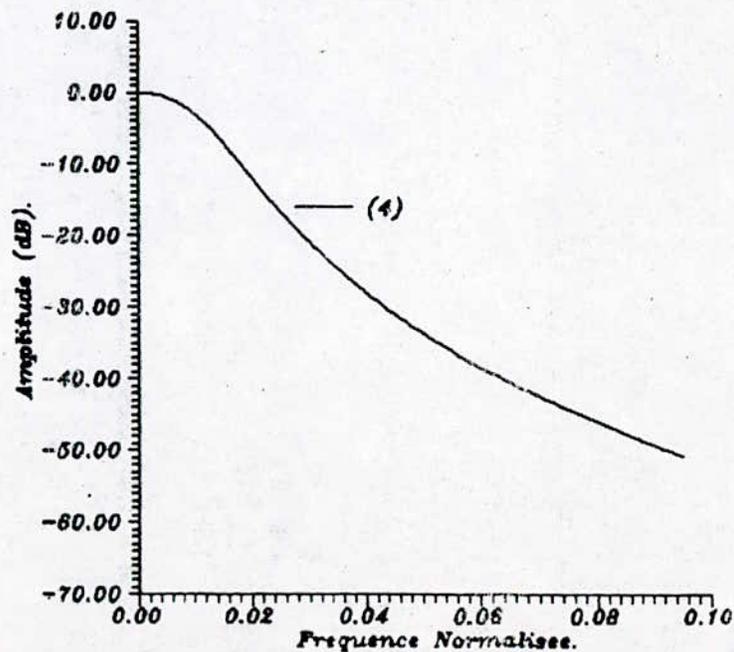
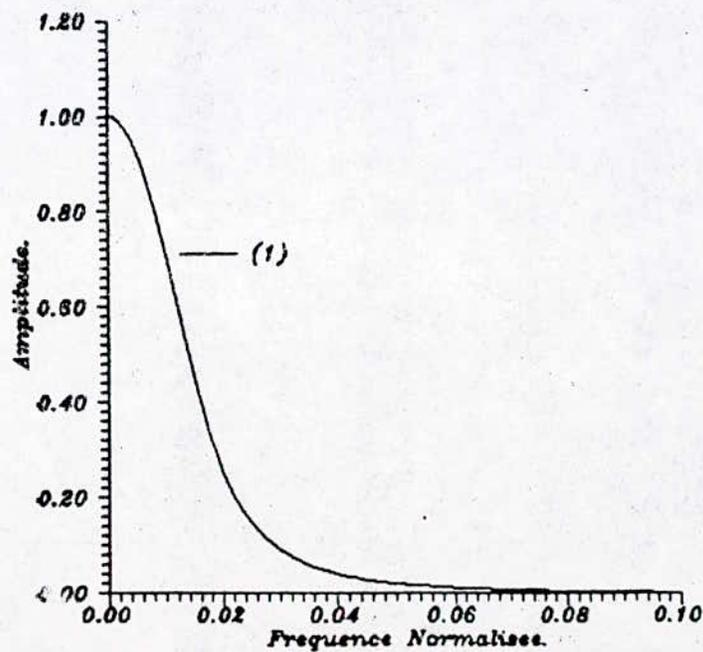
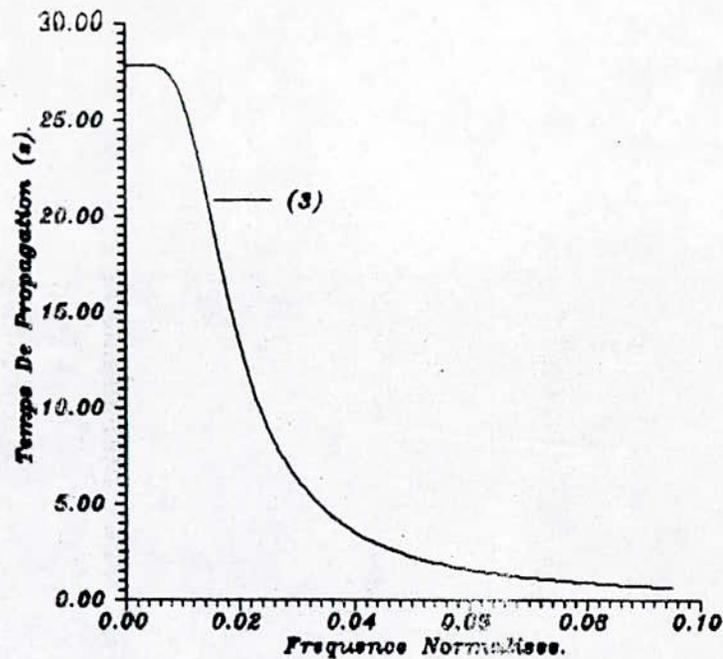
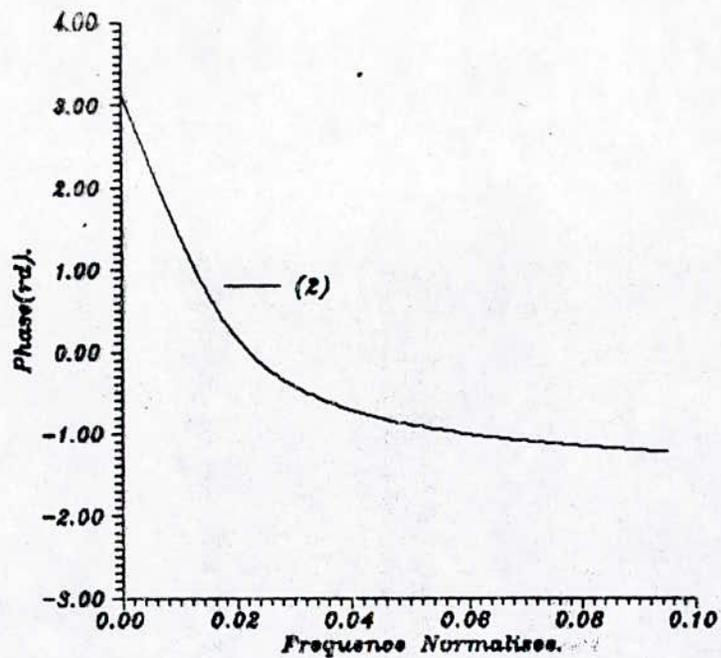
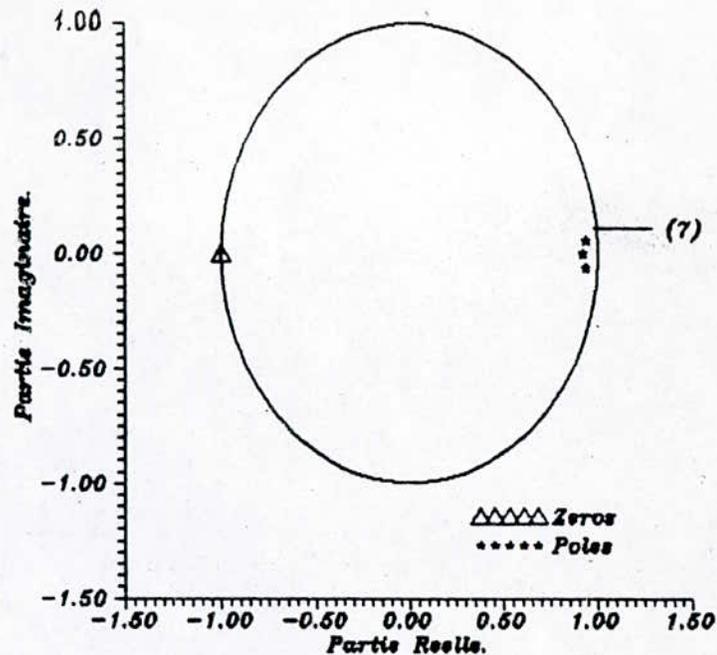
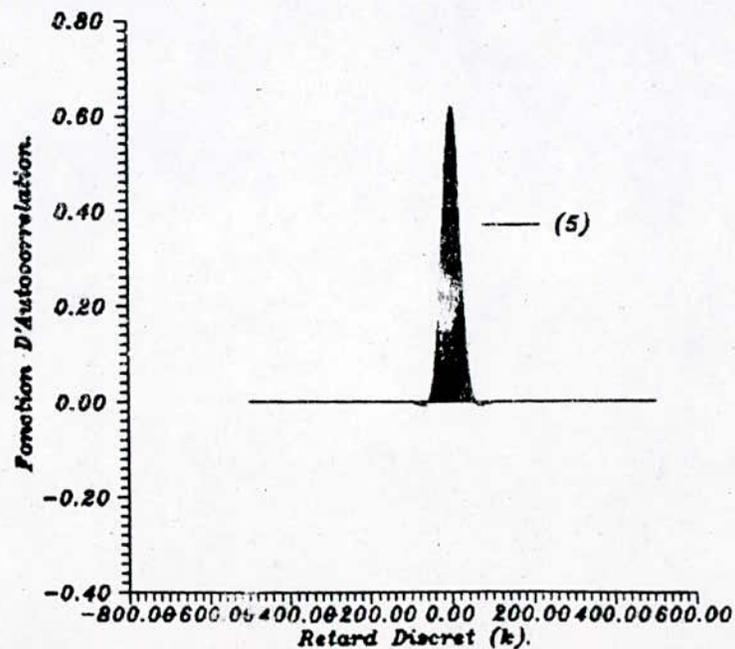
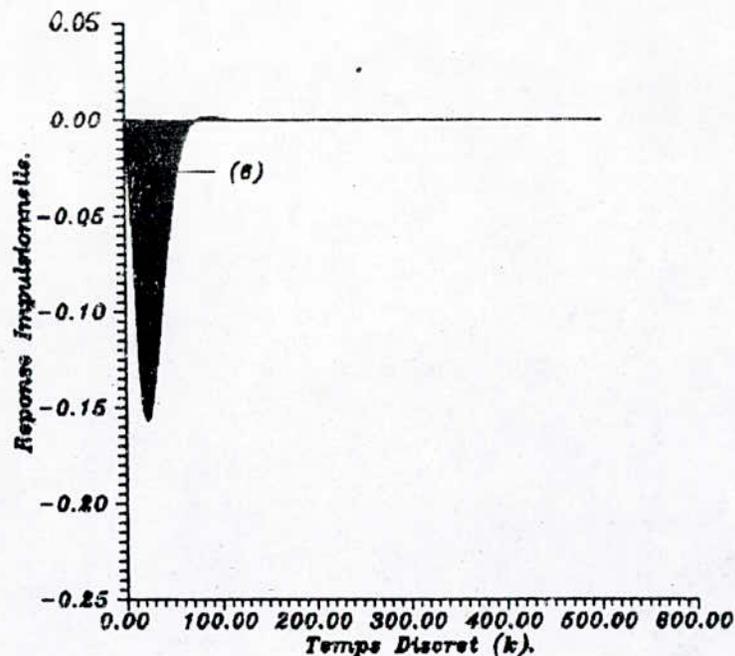


Fig. 2.9b



Filtre De Bessel D'Ordre 3.

GABARIT: - Freq De Coupure :.01
 - Freq D'Attenuation :.04
 - Attenuation :.05

- COURBES
- (1) ... Spectre D'Amplitude.
 - (2) ... Spectre De Phase.
 - (3) ... Temps De Propagation.
 - (4) ... Spectre D'Amplitude En dB.
 - (5) ... Fonction D'Autocorrelation.
 - (6) ... Reponse Impulsionnelle.
 - (7) ... Cercle De Stabilité.
-

Filtre De Butterworth D'Ordre 16

Les Coefficients Du Dénominateur

a0 : 1.000000
a1 : .000000
a2 : 2.169645
a3 : .000000
a4 : 1.765042
a5 : .000000
a6 : .685302
a7 : .000000
a8 : .134084
a9 : .000000
a10 : .012851
a11 : .000000
a12 : .000540
a13 : .000000
a14 : .000008
a15 : .000000
a16 : .000000

Les Coefficients Du Numérateur

b0 : .000088
b1 : .001408
b2 : .010561
b3 : .049283
b4 : .160168
b5 : .384404
b6 : .704741
b7 : 1.006773
b8 : 1.132620
b9 : 1.006773
b10 : .704741
b11 : .384404
b12 : .160168
b13 : .049283
b14 : .010561
b15 : .001408
b16 : .000088

Filtre De Chebyshev (I) D'Ordre 6

Les Coefficients Du Dénominateur

a0 : 1.000000
a1 : -1.933271
a2 : 3.103965
a3 : -3.186863
a4 : 2.448541
a5 : -1.264770
a6 : .416761

Les Coefficients Du Numérateur

b0 : .700000
b1 : 4.200000
b2 : 10.500000
b3 : 14.000000
b4 : 10.500000
b5 : 4.200000
b6 : .700000

--*-*-*-*-*-*-*-*-*

Filtre De Chebyshev (II) D'Ordre 6.

Les Coefficients Du Dénominateur

a0 : 1.000000
a1 : .920853
a2 : 1.453955
a3 : .920217
a4 : .547682
a5 : .180768
a6 : .033276

Les Coefficients Du Numérateur

b0 : .181731
b1 : .589911
b2 : 1.095121
b3 : 1.323228
b4 : 1.095121
b5 : .589911
b6 : .181731

Filtre De Cauer D'Ordre 3

Les Coefficients Du Dénominateur

a0 : 1.000000
a1 : -.713129
a2 : .938656
a3 : -.383608

Les Coefficients Du Numérateur

a0 : -.178806
a1 : -.242153
a2 : -.242153
a3 : -.178806

--*-*-*-*-*-*-*

Filtre De Bessel D'Ordre 3

Les Coefficients Du Dénominateur

a0 : 1.000000
a1 : -2.788469
a2 : 2.595264
a3 : -.806171

Les Coefficients Du Numérateur

a0 : -.000418
a1 : -.001255
a2 : -.001255
a3 : -.000418

21) Le filtre de Chebyshev est très proche de Butterworth mais procure une transition très rapide à proximité de la coupure. À un ordre moins élevé ($n = 6$), au détriment d'une ondulation notable dans la bande passante pour le type I et dans la bande d'atténuation pour le type II, il a aussi une excellente uniformité de l'atténuation dans la bande de transition.

31) Le filtre de Causer présente d'importantes ondulations dans la bande passante et dans la bande d'atténuation, l'ordre est faible ($n = 3$) et la bande de transition est la plus raide.

La comparaison des caractéristiques de ces différents filtres prototypes numériques se résume par le tableau suivant :

Tableau 2.1- Comparaison des différents filtres numériques prototypes passe-bas.

type de filtre.	Caractéristiques.	Régularité d'amplitude dans :		Inconvénients
		B-passante	B-atténuée	
Butterworth.	Réponse plate dans la B-P	Excellente	Excellente	Ordre élevé
Chebyshev.	Ordre minimal pour l'atténuation donnée.	Ondulation (type I) Excellente (type II)	Excellente (type I) Ondulation (type II)	Oscillation de la réponse impulsionnelle.
Causer.	Ordre le plus faible	Ondulation	Ondulation	Complexité de mise en œuvre

le filtre de Bessel numérique n'est intéressant qu'aux basses fréquences (fig.2.9), où il présente un temps de propagation de groupe constant, cela d'après l'équation (2.30), où τ_{gr} approche τ_{gr0} à ces fréquences.

On présente comme filtre numérique type (fig.2.11), celui de Causer d'ordre 12 répondant au gabarit suivant :

- Fréquence de coupure normalisée : 0.25
- Fréquence d'atténuation normalisée : 0.258
- Atténuation : 0.001
- Ondulation : 0.001

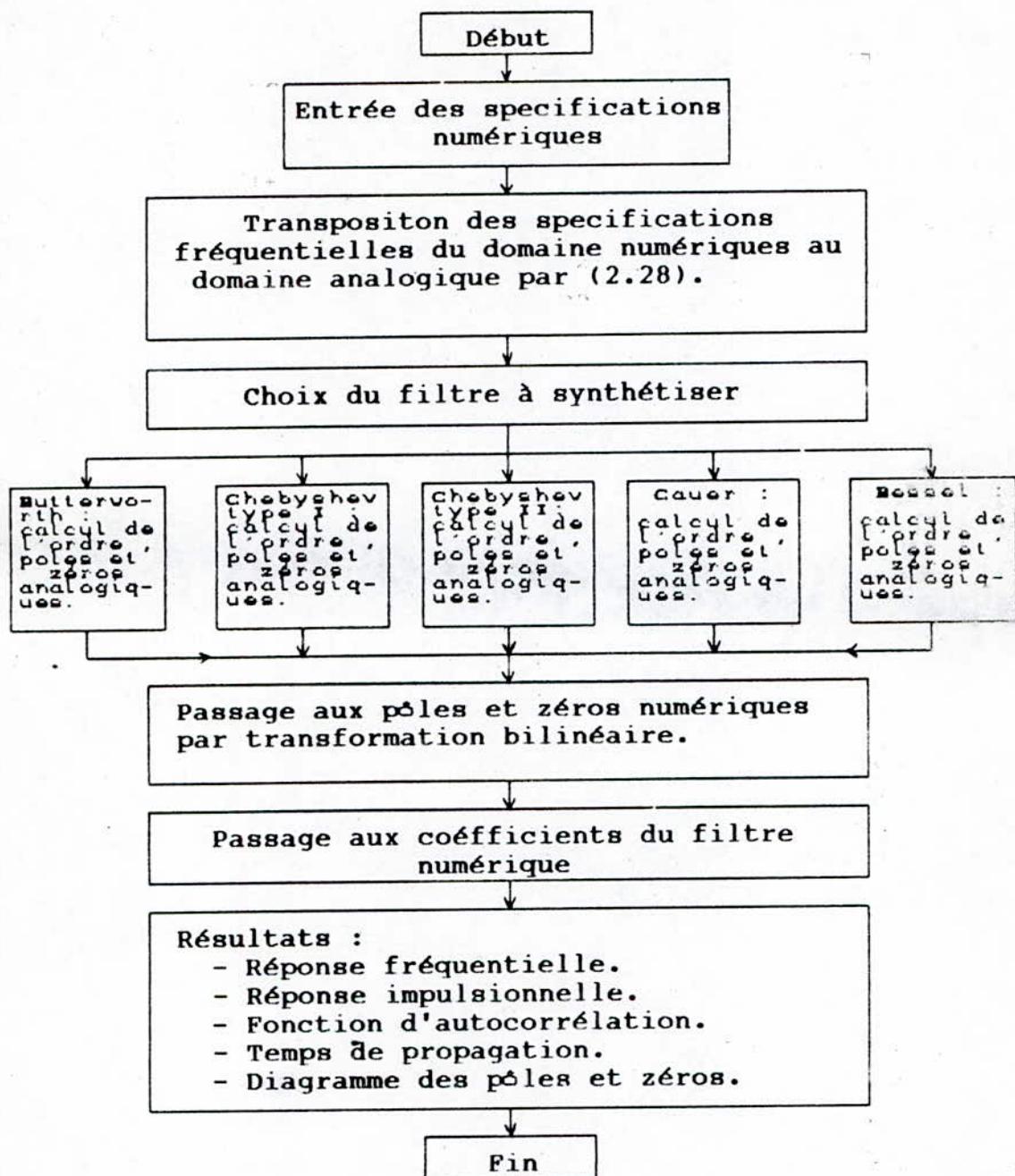


fig.2.10 - Organigramme de synthèse de filtres numériques passe-bas prototypes .

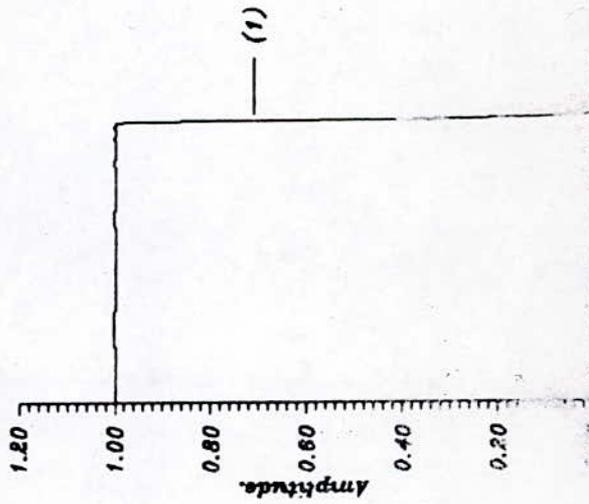
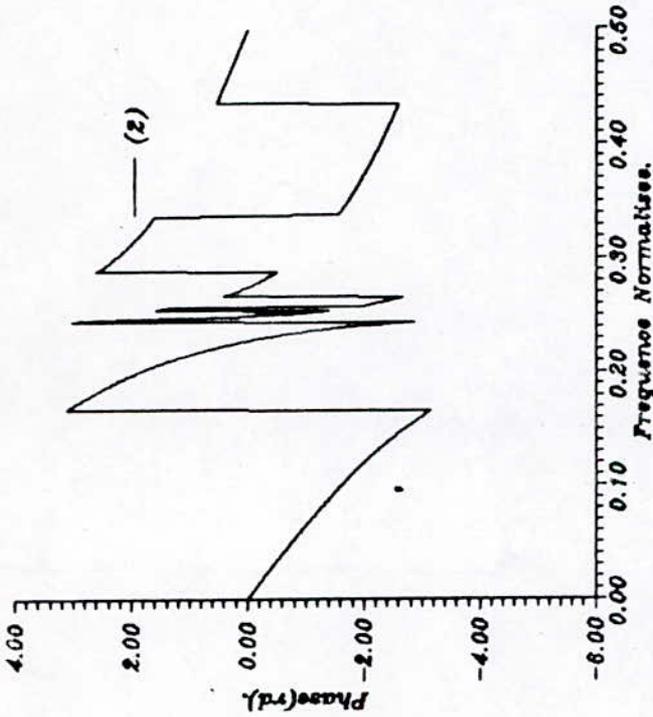
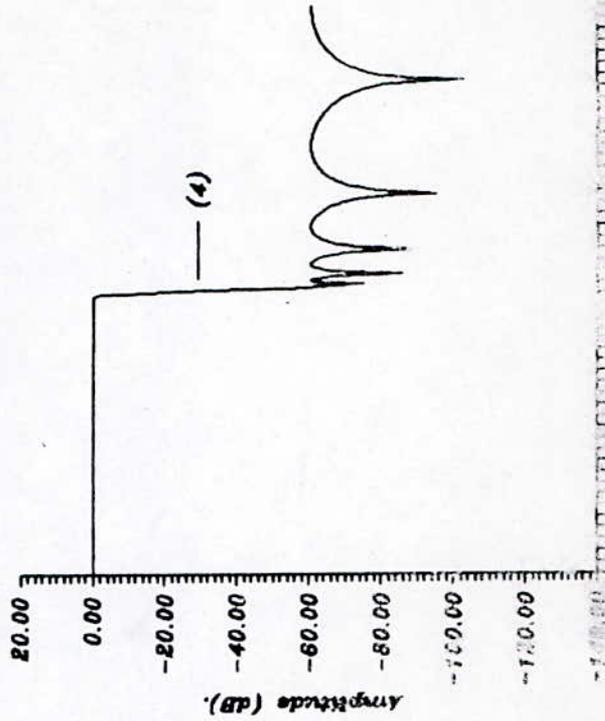
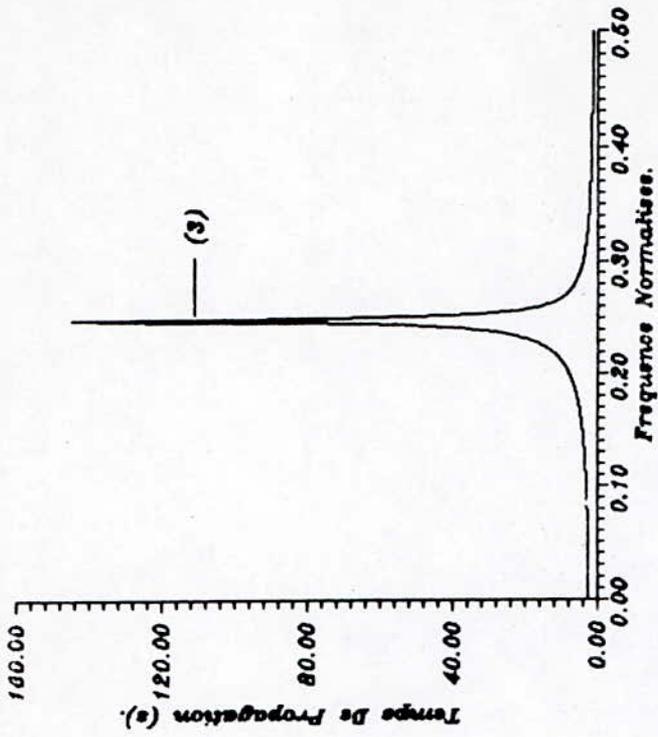
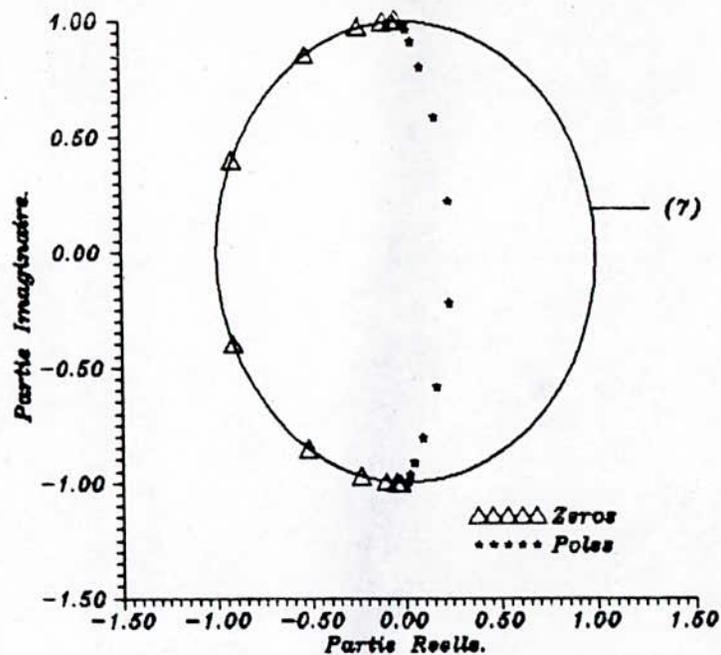
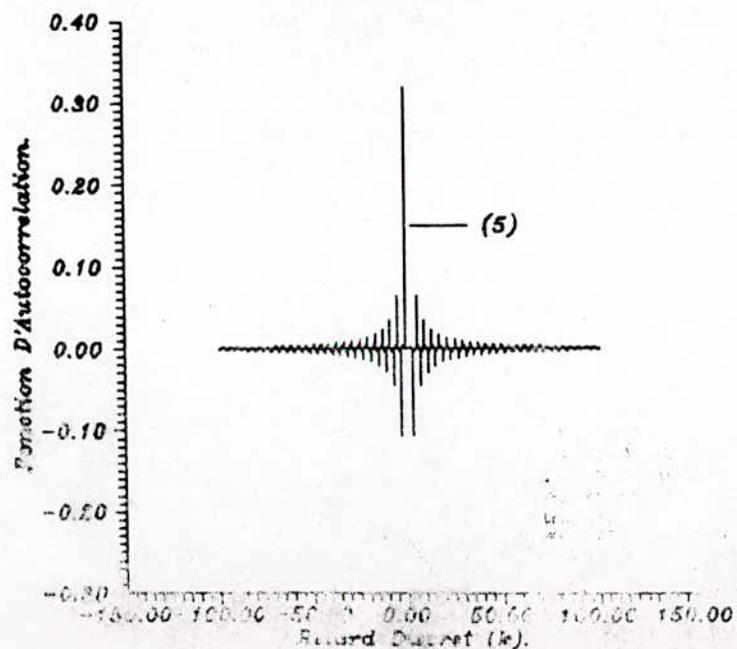
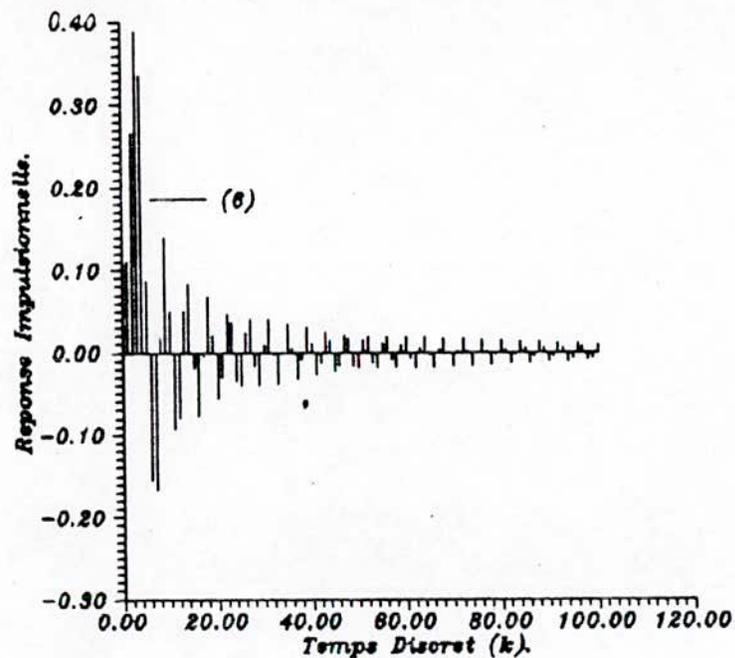


fig.2.11a

Fig. 2.11b



Filtre De Cauer D'Ordre 12.

GABARIT: - Freq De Coupure :.25
 - Freq D'Attenuation :.258
 - Attenuation :.001
 - Ondulation :.001

***** COURBES *****

(1) ... Spectre D'Amplitude.
 (2) ... Spectre De Phase.
 (3) ... Temps De Propagation.
 (4) ... Spectre D'Amplitude En dB.
 (5) ... Fonction D'Autocorrelation.
 (6) ... Reponse Impulsionnelle.
 (7) ... Cercle De Stabilité.

II-4 Conclusion :

Dans ce chapitre les différentes approximations conduisant à la synthèse de filtres analogiques Passe-bas. A partir de ces derniers, et par transformation bilinéaire on a synthétisé des filtres numériques Passe-bas prototypes.

On remarque que chaque approximation possède ses propres performances; de cela, on ne peut opter pour une approche ou une autre que selon les caractéristiques désirées.

On exposera dans le chapitre suivant une méthode unifiée permettant de transformer ces filtres passe-bas en des filtres de type passe-bande, coupe-bande, passe-haut, etc..

CHAPITRE III

TRANSFORMATION FREQUENTIELLE NUMERIQUE UNIFIEE

III-1 Introduction :

L'approche standard de synthèse de filtres numériques passe-bandes, consiste à transformer des filtres prototypes passe-bas par transformations fréquentielles .

Pour cela, deux approches sont possibles [10] (voir fig.3.1) :

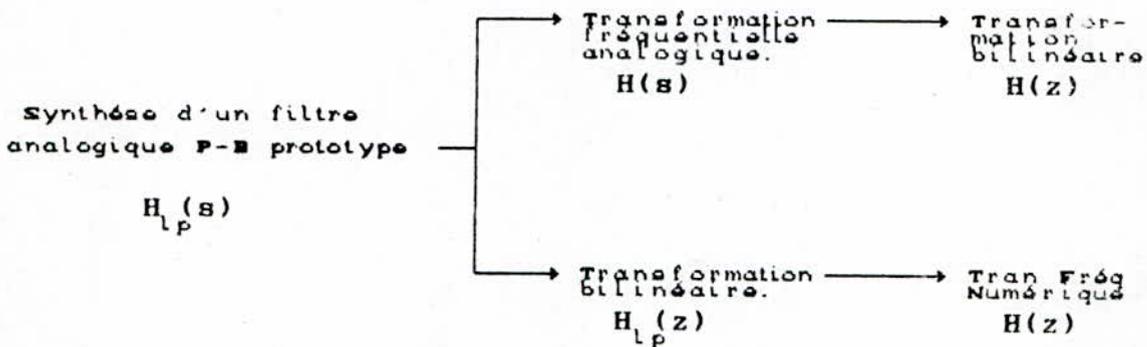


fig.3.1

Dans notre cas, on utilisera la seconde approche qui reste la plus intéressante à cause de sa simplicité.

III-2 Transformations Fréquentielles Numériques Spécifiques :

Soit $H_l(z)$ la fonction de transfert du filtre prototype de référence passe-bas, de fréquence de coupure θ_p , et $H_d(z)$ celle du filtre désiré (passe-bas, passe-bande, passe-haut, coupe-bande...).

La transformation fréquentielle consiste à remplacer la variable z^{-1} de $H_l(z)$, par $F^{-1}(Z)$; c'est-à-dire $H_d(Z) = H_l(F(Z))$.

Selon le type de filtre désiré, on procède aux transformations suivantes [19]:

1/ Passe-bas :

$$z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}} \quad \text{où } \alpha = \frac{\sin[(\theta_p - \omega_p)/z]}{\sin[(\theta_p + \omega_p)/z]} \quad (3.1)$$

et ω_p : fréquence de coupure désirée.

2i/ Passe-haut :

$$z^{-1} = - \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \quad \text{où } \alpha = \frac{\cos[(\theta_p + \omega_p)/z]}{\cos[(\omega_p - \theta_p)/z]} \quad (3.2)$$

et ω_p : fréquence de coupure désirée.

3i/ Passe-bande :

$$z^{-1} = - \frac{z^{-2} - [2\alpha k/(k+1)] z^{-1} + (k-1)/(k+1)}{[(k-1)/(k+1)] z^{-2} - [2\alpha k/(k+1)] z^{-1} + 1} \quad (3.3)$$

$$\text{où : } \alpha = \frac{\cos[(\omega_1 + \omega_2)/z]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/z]}$$

$$\text{et } k = \cotg[(\omega_2 - \omega_1)/z] \cdot \text{tg}(\theta_p/z)$$

avec ω_1 et ω_2 les fréquences de coupure inférieure et supérieure du filtre désiré.

4i/ Coupe-bande :

$$z^{-1} = \frac{z^{-2} - [2\alpha k/(k+1)] z^{-1} - (k-1)/(k+1)}{[(1-k)/(k+1)] z^{-2} - [2\alpha k/(k+1)] z^{-1} + 1} \quad (3.4)$$

$$\text{où : } \alpha = \frac{\cos[(\omega_1 + \omega_2)/z]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/z]}$$

$$\text{et } k = \text{tg}[(\omega_2 - \omega_1)/z] \cdot \text{tg}(\theta_p/z)$$

avec ω_1 et ω_2 les fréquences de coupure inférieure et supérieure du filtre désiré.

III-3 Transformation Fréquentielle Numérique Unifiée :

Le problème consiste à trouver une transformation fréquentielle $F(z)$ telle que :

$$G(z) = H(F(z)) \quad (3.5)$$

où $G(z)$ est la fonction de transfert du filtre de type désiré et $H(z)$ celle d'un filtre prototype passe-bas. La transformation fréquentielle $F(z)$ doit avoir les propriétés suivantes [10]:

1- $F(z)$ doit transformer le cercle unité en lui même c'est-à-dire,

$F(e^{j\phi}) = e^{j\theta(\phi)}$. Et la réponse fréquentielle du filtre désiré sera alors :

$$G(e^{j\phi}) = H(e^{j\theta(\phi)}) \quad (3.6)$$

2- Si $H(z)$ est stable et à phase minimale [8], il en sera de même pour $G(z)$, et si λ est un pôle (ou zéro) de $G(z)$ alors $F(\lambda)$ sera un pôle (ou zéro) de $H(z)$.

Ces propriétés conduisent à la définition suivante :

Une fonction complexe $F(z)$ est une transformation fréquentielle si et seulement si :

$$\begin{aligned} |z| > 1 &\iff |F(z)| > 1 \\ |z| = 1 &\iff |F(z)| = 1 \\ |z| < 1 &\iff |F(z)| < 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

d'après ces propriétés, on remarque que $F(z)$ n'est autre qu'un filtre passe-tout à phase minimale.

Le produit de deux transformations fréquentielles ou leur composées est aussi une transformation fréquentielle [10].

Comme $F(z)$ doit être à phase minimale, alors ses zéros sont à l'intérieur du cercle unité, donc $1/F(z) = [F(z)]^{-1}$ est un filtre stable puisque ses pôles coïncident avec les zéros de $F(z)$. D'où, dans la composition $G(z) = H(F(z))$, on peut remplacer le retard unité z^{-1} par le filtre passe-tout $[F(z)]^{-1}$, c'est-à-dire :

$$G(z^{-1}) = H([F(z)]^{-1}) \quad (3.8)$$

La transformation fréquentielle du premier ordre est donnée par :

$$F(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha^* z} \quad (3.9)$$

avec $|\alpha| < 1$

La transformation fréquentielle d'ordre n est donnée par le produit de "Blasckle" [10] :

$$F(z) = \prod_{k=1}^n \frac{(z - \alpha_k)}{(1 - \alpha_k^* z)} = \frac{p(z)}{\tilde{p}(z)} \quad (3.10)$$

où $p(z) = p_0 + p_1 \cdot z^{-1} + \dots + p_n \cdot z^{-n} = p_0 \cdot z^{-n} \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k) \quad |\alpha_k| < 1$

et $\tilde{p}(z) = p_n + p_{n-1} \cdot z^{-1} + \dots + p_0 \cdot z^{-n} = z^{-n} \cdot p(z^{-1}) \quad (3.11)$

Le problème consiste à trouver $F(z)$ telle que, la composition $H(F(z)) = G(z)$ donne le filtre désiré. On choisira pour $H(z)$, une fréquence de coupure de $\pi/2$, et pour $G(z)$ comme exemple les spécifications données par la fig(3.2).

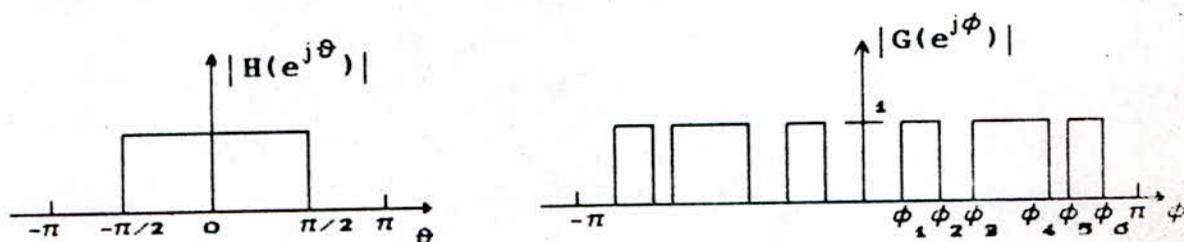


fig.3.2- Exemple de transformation fréquentielle

$F(z)$ devra alors faire correspondre aux fréquences θ , les fréquences ϕ , comme il est illustré sur la fig.3.3.

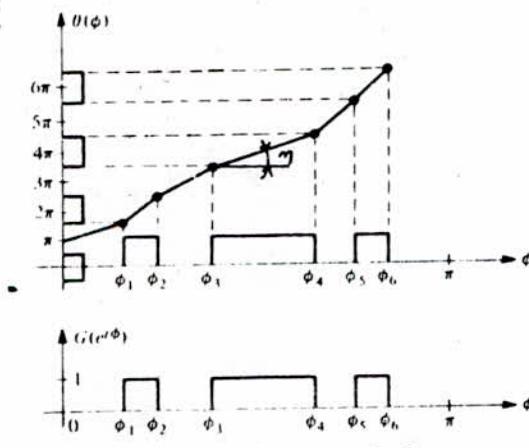


fig.3.3

En générale, l'ordre de $F(z)$ sera le nombre de bandes passantes (dans ce cas l'ordre est 6). Il existe deux cas :

$$\text{Passe-bas} \begin{cases} F(1) = 1 \\ \theta(0) = 0 \\ \theta_k = \theta(\phi_k) = (k-1/2)\pi \end{cases} \quad (3.12)$$

et

$$\text{Coupe-bas} \begin{cases} F(1) = -1 \\ \theta(0) = \pi \\ \theta_k = \theta(\phi_k) = (k+1/2)\pi \end{cases} \quad (3.13)$$

La seule différence entre ces deux cas est une addition d'un angle de π radian. Pour passer du cas passe-bas au cas coupe-bas, il suffit de remplacer $F(z)$ par $-F(z)$. Par conséquent, l'étude du cas passe-bas semble suffisante, donc on ne s'intéressera, dans ce qui va suivre qu'à ce cas là.

D'après la propriété 1 on a :

$$F(e^{j\phi_k}) = e^{j\theta_k} \quad (3.14)$$

Sachant que :

$$F(z) = \frac{p(z)}{p(z)}$$

en posant $z = e^{j\phi_k}$, il vient :

$$p(e^{j\phi_k}) = e^{j\theta_k} \tilde{p}(e^{j\phi_k}) \quad (3.15)$$

$$\text{or } \tilde{p}(z) = z^{-n} \cdot p(z^{-1})$$

$$\text{d'où : } p(e^{j\phi_k}) = e^{(j\theta_k)} \cdot e^{-(jn\phi_k)} \cdot p(e^{-j\phi_k}) \quad (3.16)$$

Une version symétrique de cette équation est donnée par :

$$\left[e^{-j(\theta_k - n\phi_k)/2} \cdot p(e^{j\phi_k}) - e^{+j(\theta_k - n\phi_k)/2} \cdot p(e^{-j\phi_k}) \right] / 2 = 0 \quad (3.17a)$$

$$\text{d'où : } \sum_{i=0}^n p_i \cdot \sin \left[n\phi_k / 2 - \theta_k / 2 - i \cdot \phi_k \right] = 0 \quad (3.17b)$$

Avec : $\theta_k = (k-1/2)\pi$, $1 \leq k \leq n$ pour le cas passe-bas.

On obtient alors un système linéaire bien structuré à n équations

et (n+1) inconnues qu'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sin \left[(n\phi_1 - \theta_1) / 2 - \phi_1 \right] & \dots & \sin \left[(n\phi_1 - \theta_1) / 2 - n\phi_1 \right] \\ \sin \left[(n\phi_2 - \theta_2) / 2 - \phi_2 \right] & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ \sin \left[(n\phi_n - \theta_n) / 2 - \phi_n \right] & \dots & \sin \left[(n\phi_n - \theta_n) / 2 - n\phi_n \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p_1}{p_0} \\ \frac{p_2}{p_0} \\ \vdots \\ \frac{p_n}{p_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\text{où } b_k = -\sin \left[(n\phi_k - \theta_k) / 2 \right] \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Si les fréquences de coupure ϕ_k sont ordonnées comme suit : $0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_n < \pi$, alors il existe une solution unique [20] au système d'équation (3.18) pour un p_0 donné et les racines du polynôme $p(z)$ résultant vérifient la condition $|\alpha_k| < 1$. Il existe également un algorithme rapide [20,21] pour la résolution de ce système, cet algorithme est donné par fig.3.4.

III-4 Détermination des coefficients du filtre de type désiré

La procédure de détermination des coefficients du filtre de type désiré à partir de ceux d'un filtre passe-bas prototype est proposée par G.FEYH [10], le filtre prototype passe-bas, de fréquence de coupure $\pi/2$ et d'ordre L est défini par :

$$H(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \quad (3.18)$$

$$\text{où : } \alpha(z) = \sum_{k=0}^L \alpha_k z^{-k} \quad \text{et} \quad \beta(z) = \sum_{k=0}^L \beta_k z^{-k} \quad (3.19)$$

La transformation fréquentielle est donnée par :

$$F(z) = \frac{\tilde{p}(z)}{p(z)} \quad (3.20)$$

avec :

$$p(z) = \sum_{k=0}^M p_k z^{-k} \quad \text{et} \quad \tilde{p}(z) = z^{-M} p(z^{-1})$$

Données : $n, \phi[1, n]$
 Calcul de : $p[0, n]$ satisfaisant $F(e^{j\phi_k}) = e^{j(k-1/2)\pi}$
 où : $F(z) = p(z) / \tilde{p}(z)$
 $p(z) = p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}$
 $\tilde{p}(z) = z^{-n} p(z^{-1})$

Initialisation : $v \leftarrow 1/2$
 $p_0 \leftarrow 1$

Corps : pour $k = 1$ à n , faire
 $v \leftarrow -v$
 $\phi^1 \leftarrow (\phi_k - \pi)v$
 pour $j = 0$ à k , faire
 $\alpha \leftarrow 0$
 $\beta \leftarrow 0$
 si $j > 0$ alors
 $\alpha \leftarrow \alpha + p_{j-1}$
 $\beta \leftarrow \beta - p_{k-j}$
 fin de si
 si $j < k$ alors
 $\alpha \leftarrow \alpha + p_j$
 $\beta \leftarrow \beta + p_{k-j-1}$
 fin de si
 $q_j \leftarrow \alpha \cos(\phi^1) + \beta \sin(\phi^1)$
 (fin de boucle sur j)
 pour $j = 0$ à k , faire
 $p_j \leftarrow q_j$
 (fin de boucle sur j)
 (fin de boucle sur k).

fig.3.4- Algorithme de calcul des coefficients de la transformation fréquentielle numérique.

La transformation fréquentielle est donnée par :

$$F(z) = \frac{\tilde{p}(z)}{p(z)} \quad (3.20)$$

avec :

$$p(z) = \sum_{k=0}^M p_k z^{-k} \quad \text{et} \quad \tilde{p}(z) = z^{-M} p(z^{-1})$$

La fonction de transfert du filtre désiré est alors donnée par :

$$G(z) = H(\sigma F(z)) = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (3.21a)$$

où σ est un entier égale à ± 1 selon qu'on a affaire au cas coupe-bas ($\sigma = -1$) ou passe-bas ($\sigma = +1$).

En utilisant les équations (3.18) et (3.20), il vient :

$$G(z) = \frac{\beta(\sigma F(z))}{\alpha(\sigma F(z))} = \frac{\sum_{k=0}^L \beta_k \left[\frac{\tilde{p}(z)}{p(z)} \right]^k}{\sum_{k=0}^L \alpha_k \left[\frac{\tilde{p}(z)}{p(z)} \right]^k} \quad (3.21b)$$

En multipliant le dénominateur et le numérateur par $[p(z)]^L$ on obtient :

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{\beta(\sigma F(z)) [p(z)]^L}{\alpha(\sigma F(z)) [p(z)]^L} = \frac{\sum_{k=0}^L \beta_k \left[\frac{\tilde{p}(z)}{p(z)} \right]^k [p(z)]^{L-k}}{\sum_{k=0}^L \alpha_k \left[\frac{\tilde{p}(z)}{p(z)} \right]^k [p(z)]^{L-k}} \quad (3.22)$$

d'où :

$$b(z) = \beta(\sigma F(z)) [p(z)]^L = \sum_{k=0}^L \beta_k \left[\frac{\tilde{p}(z)}{p(z)} \right]^k [p(z)]^{L-k} \quad (3.23)$$

$$a(z) = \alpha(\sigma F(z)) [p(z)]^L = \sum_{k=0}^L \alpha_k \left[\frac{\tilde{p}(z)}{p(z)} \right]^k [p(z)]^{L-k} \quad (3.24)$$

et comme le polynôme $p(z)$ est d'ordre M , alors $G(z)$ et $b(z)$ seront d'ordre ML , d'où :

$$a(z) = \sum_{k=0}^{LM} a_k z^{-k} = \alpha(\sigma F(z)) [p(z)]^L \quad (3.25)$$

$$b(z) = \sum_{k=0}^{LM} b_k z^{-k} = \beta(\sigma F(z)) [p(z)]^L \quad (3.26)$$

Pour un nombre $N \geq LM+1$, posons :

$$p_k = 0 \quad \text{pour } k = M+1, \dots, N-1$$

$$a_k = b_k = 0 \quad \text{pour } k = LM+1, \dots, N-1$$

$$\text{et } z = e^{j2\pi n/N} \quad \text{avec } n = 0, \dots, N-1$$

en utilisant les relations (3.20), (3.25) et (3.26), on obtient :

$$A(n) = \beta \left[\sigma F(e^{j2\pi n/N}) \right] \left[p(n) \right]^L \quad (3.27)$$

$$B(n) = \alpha \left[\sigma F(e^{j2\pi n/N}) \right] \left[p(n) \right]^L \quad (3.28)$$

avec :

$$A(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j2\pi nk/N} = a(z) \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}} \quad (3.29)$$

$$B(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-j2\pi nk/N} = b(z) \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}} \quad (3.30)$$

$$P(n) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k e^{-j2\pi nk/N} = p(z) \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}} \quad (3.31)$$

D'après la propriété 2 de la transformation fréquentielle (voir III.3), on peut écrire :

$$\sigma F(e^{j2\pi n/N}) = e^{j\theta_n} \quad (3.32)$$

où θ_n est déterminé comme suit :

d'après les relations (3.18) et (3.31), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma F(e^{j2\pi n/N}) &= \sigma \frac{p(z)}{z^{-M} p(z^{-1})} \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}} \quad (3.33) \\ &= \sigma \frac{p(z)}{e^{-j2\pi nM/N} [p(n)]^*} \end{aligned}$$

d'où

$$\theta_n = \arg(\sigma) + \arg[p(n)] - \arg[p^*(n)] - \arg[e^{-j2\pi nM/N}] \quad (3.34)$$

$$\text{et comme : } \begin{cases} \arg(\sigma) = 0 & \text{pour } \sigma = 1 \\ \arg(\sigma) = \pi & \text{pour } \sigma = -1 \end{cases}$$

$$\text{alors : } \theta_n = \frac{1 - \sigma}{2} \pi + 2\arg(P(n)) + 2\pi nM/N \quad (3.35)$$

$$= 2\arg(P(n)) + [(1-\sigma)/2 + 2nM/N]\pi$$

$$\text{d'où : } A(n) = \alpha(\sigma F(e^{j\theta_n})) [P(n)]^L \quad (3.36)$$

$$B(n) = \beta(\sigma F(e^{j\theta_n})) [P(n)]^L \quad (3.37)$$

$$\text{avec } \theta_n = 2\arg[P(n)] + [(1-\sigma)/2 + 2nM/N]\pi \quad (3.38)$$

A(n), B(n) et P(n) représentent respectivement les transformées de Fourier discrète [8] des coefficients a_l , b_l et p_l évaluées sur N valeurs. Donc les coefficients a_l et b_l du filtre de type désiré sont déterminés par la transformée de Fourier inverse des expressions A(n) et B(n) données par les relations (3.29) et (3.30). La détermination des coefficients a_i et b_i du filtre désiré se résume par les étapes suivantes :

Prendre $N \geq LM+1$.

$$[p_0, \dots, p_M, 0, \dots, 0] \xleftrightarrow{\text{DFT}, N} [P(0), P(1), \dots, P(N-1)]$$

$$A(n) = \alpha(e^{j\theta_n}) [P(n)]^L, \quad B(n) = \beta(e^{j\theta_n}) [P(n)]^L$$

$$\text{où } \theta_n = 2\arg[P(n)] + [(1-\sigma)/2 + 2nM/N]\pi$$

$$[a_0, \dots, a_{LM}, \dots, 0, \dots, 0] \xleftrightarrow{\text{DFT}, N} [A(0), \dots, A(N-1)]$$

$$[b_0, \dots, b_{LM}, \dots, 0, \dots, 0] \xleftrightarrow{\text{DFT}, N} [B(0), \dots, B(N-1)]$$

ces étapes sont illustrées par l'organigramme de la fig.3.5.

Exemples :

Exemple 1 : Soit le filtre prototype passe-bas de Caier d'ordre 8, répondant au gabarit suivant (fig.3.6):

- Fréquence de coupure normalisée : $f_c = 0.25$
- Fréquence d'atténuation normalisée : $f_r = 0.26$

- Atténuation : $A = 40$ dB
- Ondulations : $E = 1$ dB

à partir de ce dernier, on synthétise les types de filtres suivants :

1/ Filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_{cd} = 0.1$, d'ordre 8 (voir fig.3.7).

2/ Filtre passe-haut de fréquence de coupure $f_{cd} = 0.3$, d'ordre 8 (voir fig.3.8).

3/ Filtre passe-bandes de fréquences de coupure :
 $f_{c1} = 0.1$, $f_{c2} = 0.18$, $f_{c3} = 0.3$, $f_{c4} = 0.4$, d'ordre 32
 (voir fig.3.9).

4/ Filtre coupe-bande de fréquences de coupure :
 $f_{c1} = 0.2$, $f_{c2} = 0.3$, d'ordre 16 (voir fig.3.10).

Exemple 2 : à partir du filtre prototype passe-bas de Caer d'ordre 4 (fig.3.12) répondant au gabarit suivant :

- Fréquence de coupure normalisée = $f_c = 0.25$
- Fréquence d'atténuation normalisée : $f_r = 0.28$
- Atténuation : $A = 0.05$
- Ondulations : $E = 0.05$

on synthétise un filtre passe-bandes (4 bandes), d'ordre 32, de fréquences de coupure (fig.3.13):

$f_{c1} = 0.1$, $f_{c2} = 0.15$, $f_{c3} = 0.2$, $f_{c4} = 0.25$, $f_{c5} = 0.3$, $f_{c6} = 0.35$
 $f_{c7} = 0.4$, $f_{c8} = 0.45$

Exemple 3 : On donne le filtre prototype passe-bas de Caer, d'ordre 7 (fig.3.15), obéissant au gabarit suivant :

- Fréquence de coupure normalisée : $f_c = 0.25$
- Fréquence d'atténuation normalisée : $f_r = 0.26$
- Atténuation : $A = 0.01$
- Ondulations : $E = 0.1$

A partir de ce filtre, on synthétise un filtre passe-bandes (2 bandes), d'ordre 28 et de fréquences de coupure (fig.3.16) :

$f_{c1} = 0.1$, $f_{c2} = 0.15$, $f_{c3} = 0.25$, $f_{c4} = 0.45$

Les deux largeurs de bandes passantes de ce filtre sont respectivement : $\Delta f_1 = 0.05$ et $\Delta f_2 = 0.2$

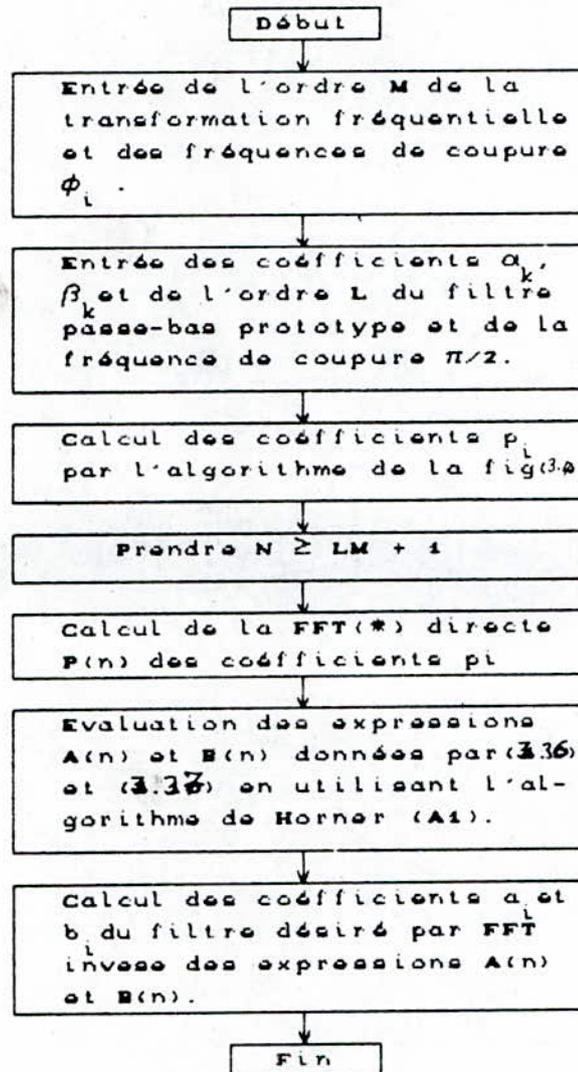


fig.3.5- Organigramme de la détermination des coefficients du filtre désiré.

(*). Dans le programme, la TFD est évaluée par la FFT [22].

Fig. 3.6

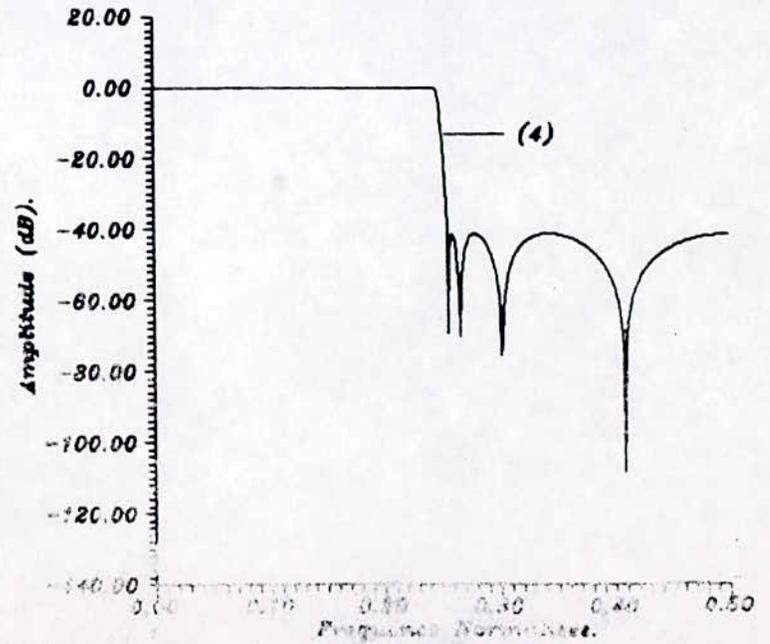
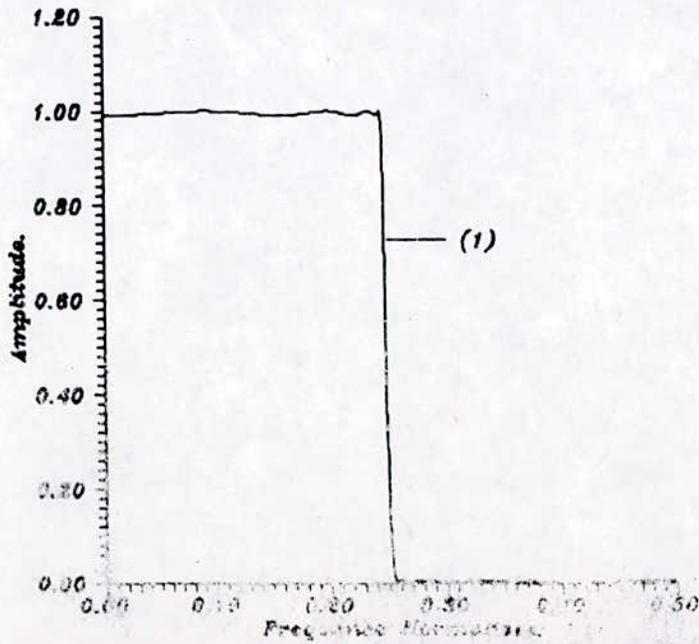
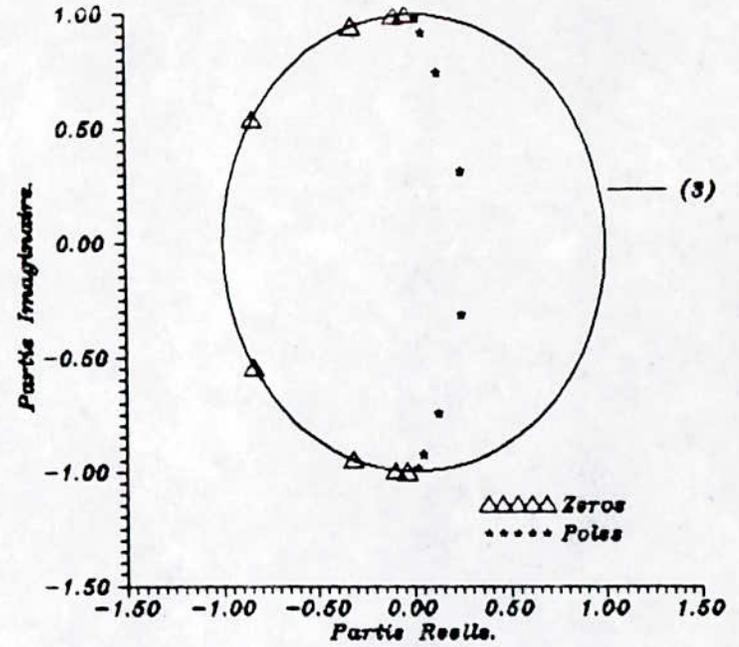
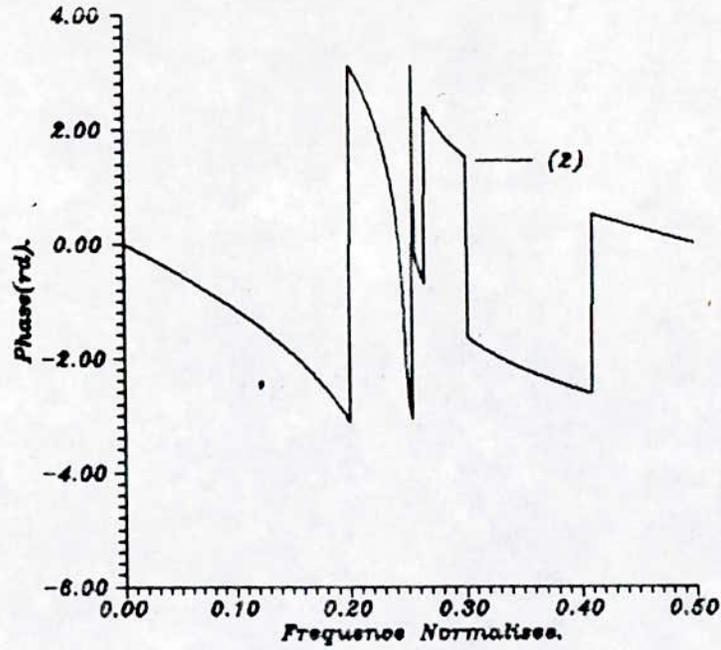


Fig. 3.7

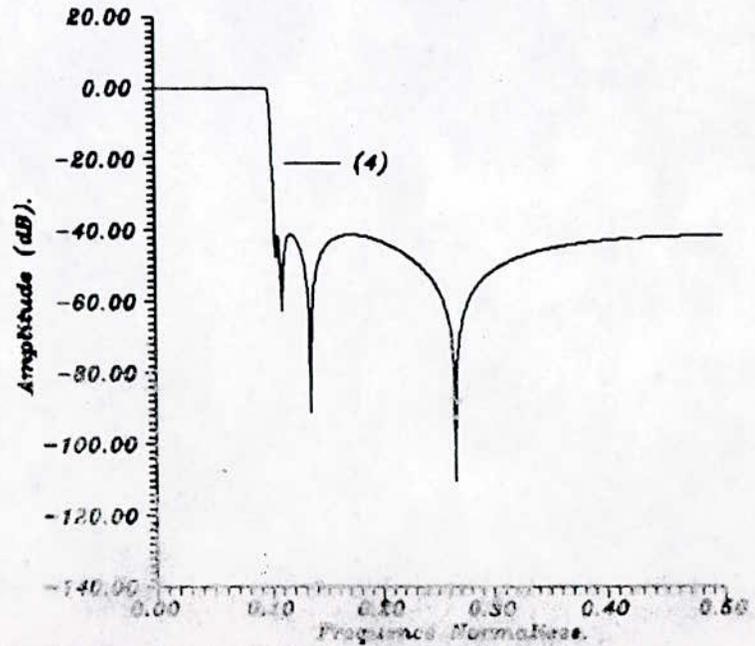
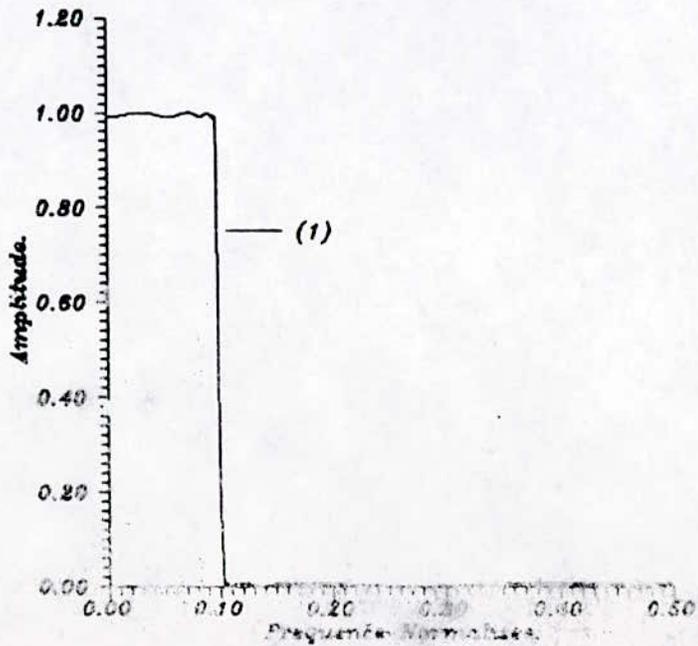
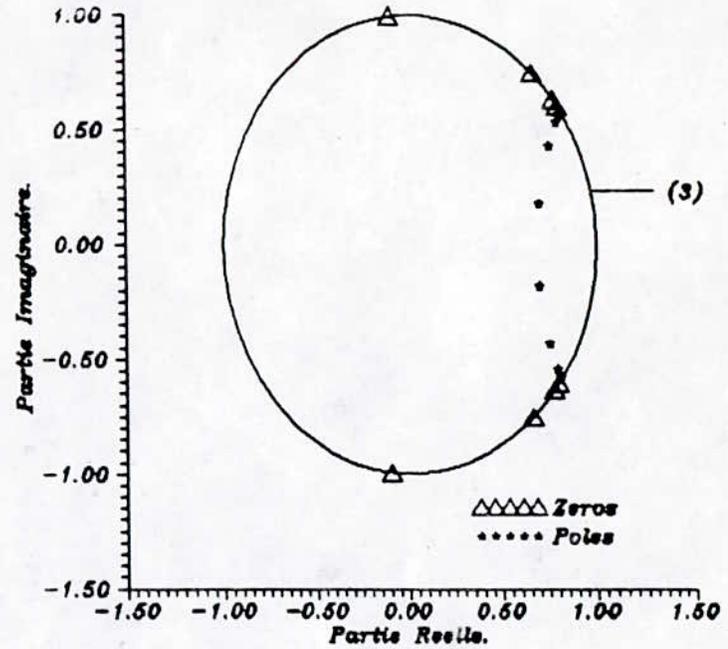
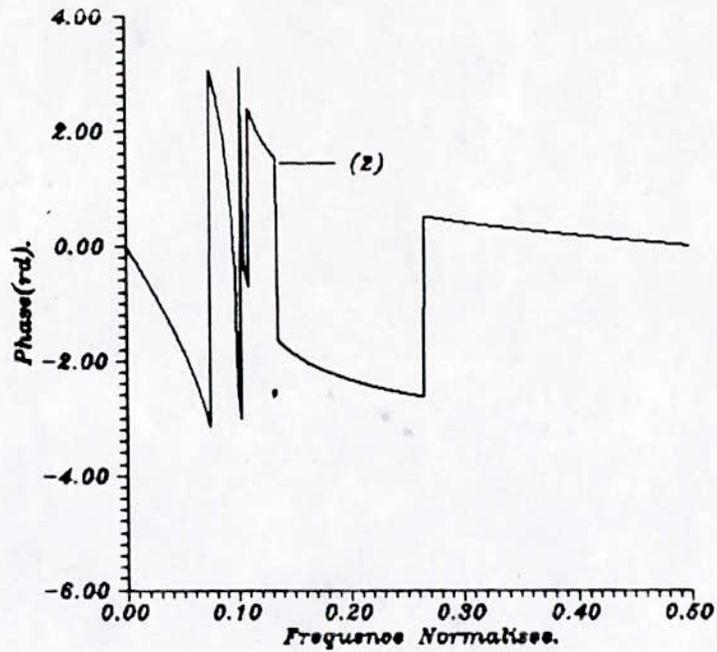


Fig. 3.8

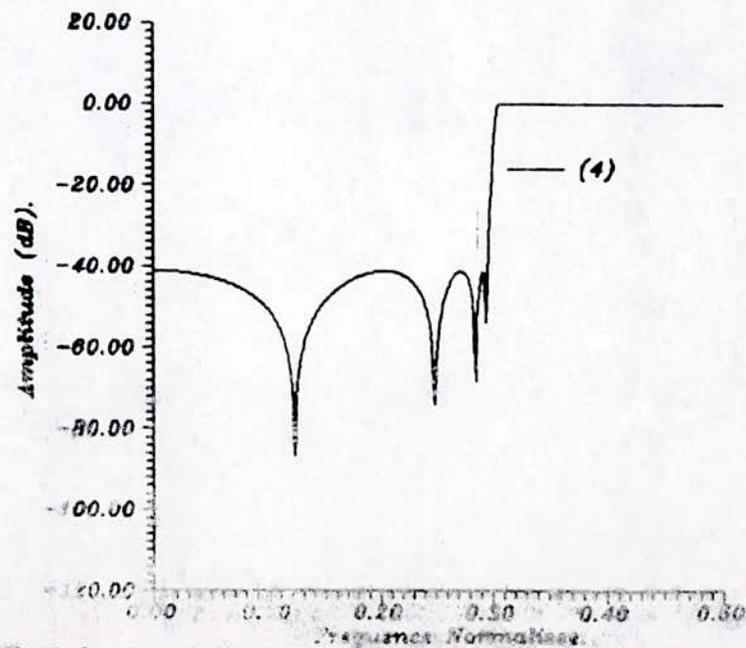
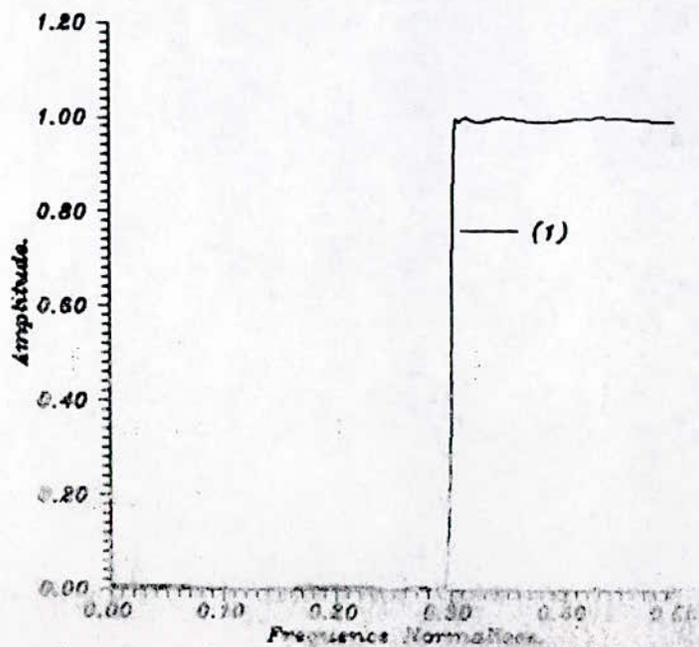
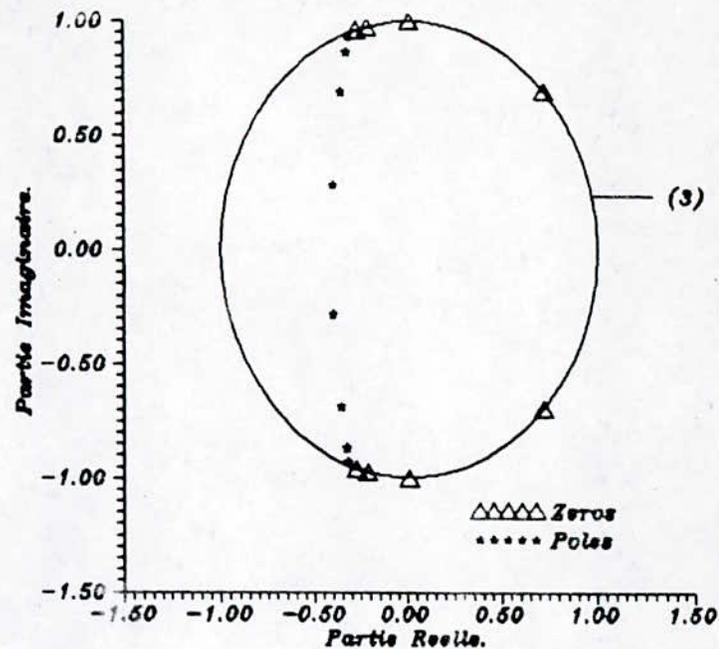
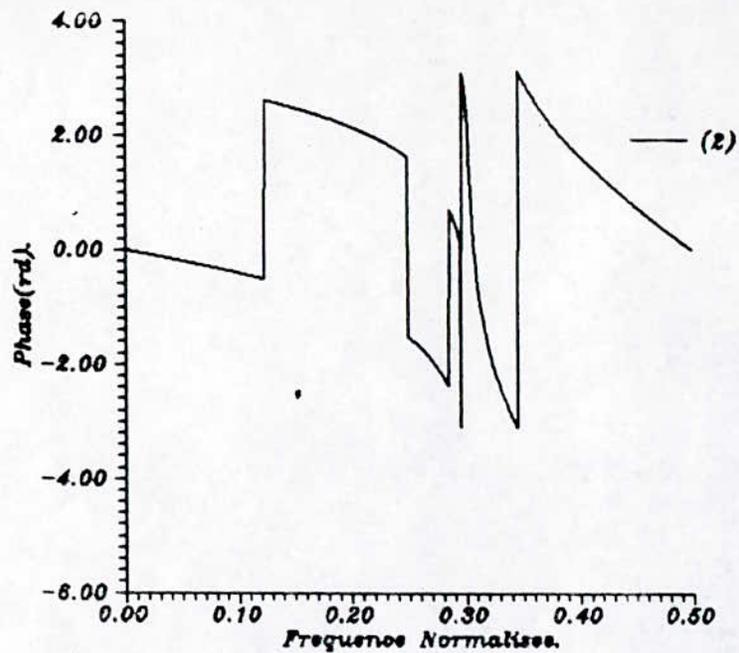


Fig. 3.9

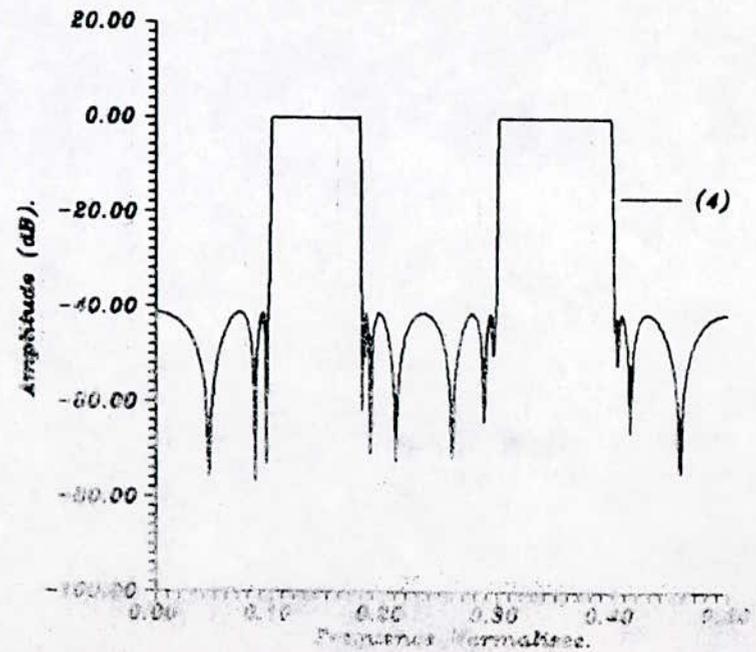
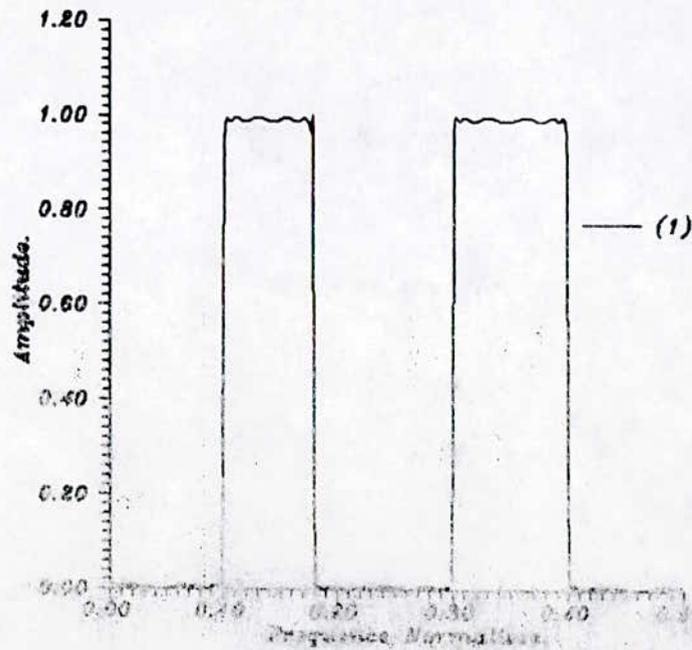
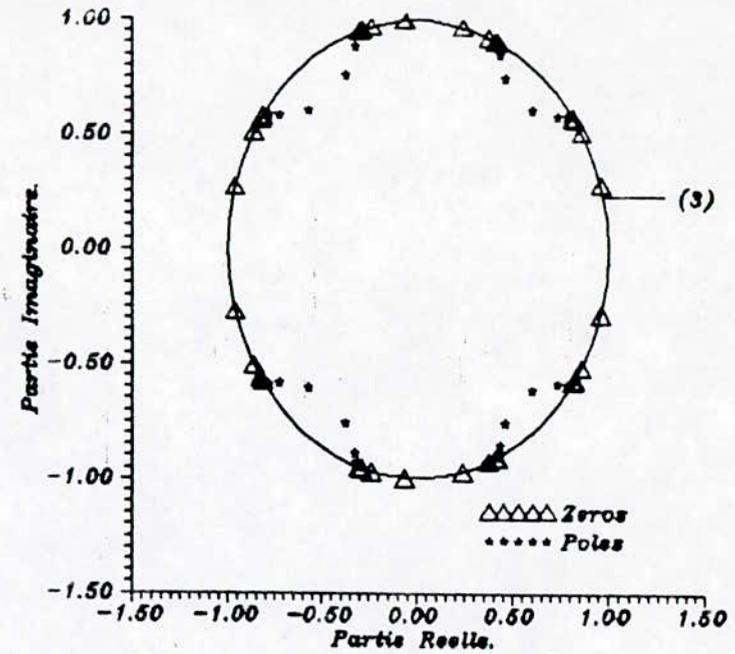
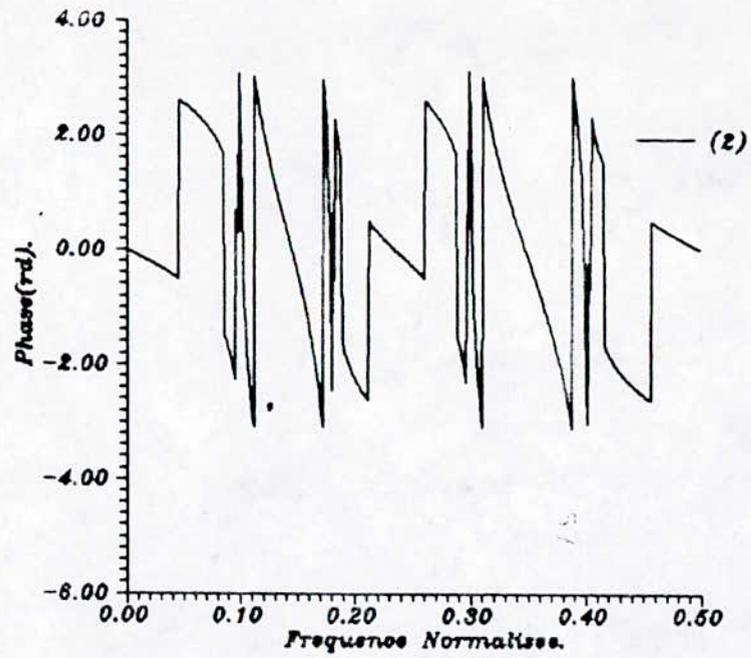
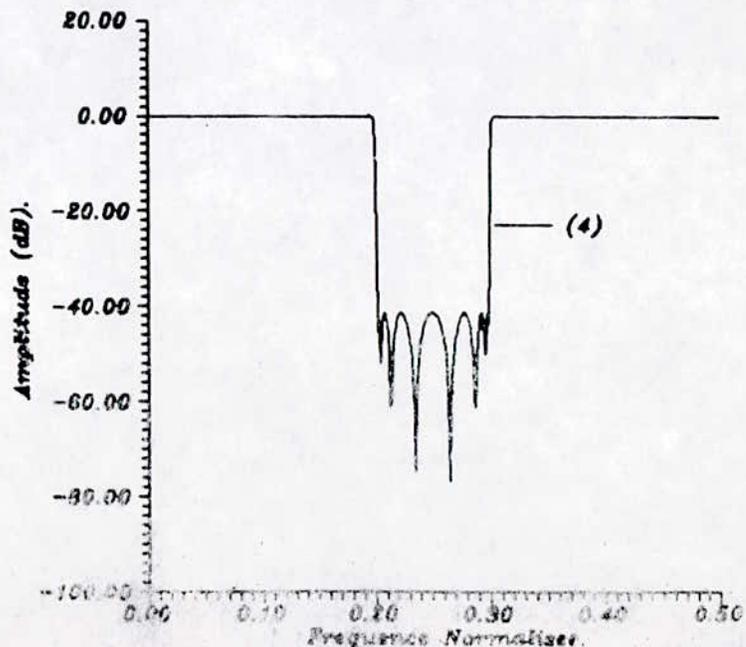
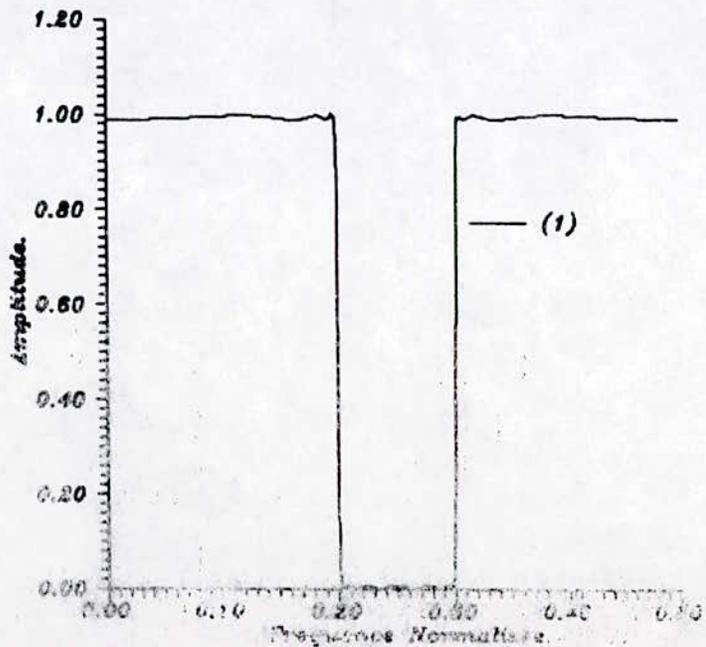
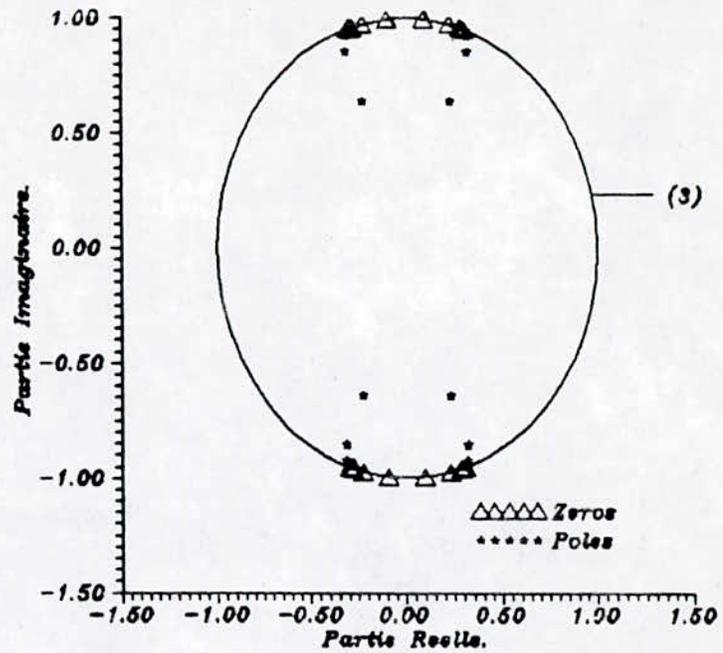
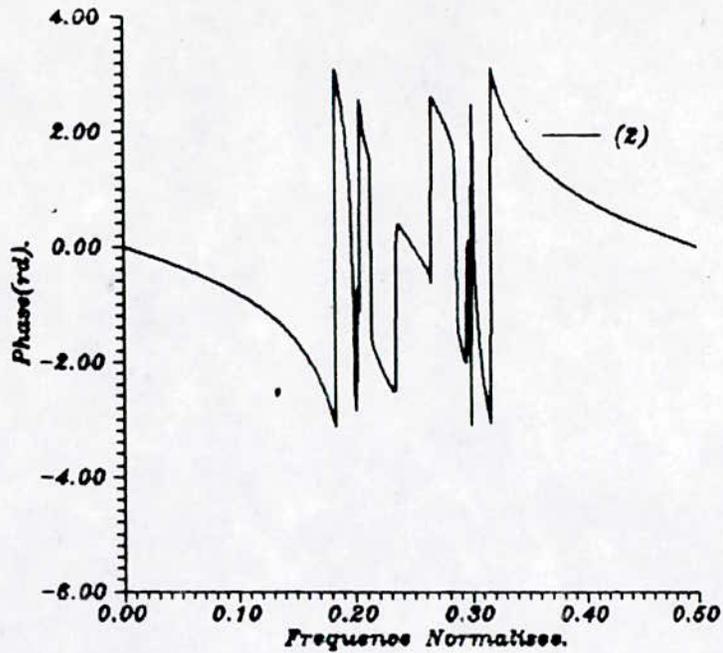


Fig. 3.10



Filtres De Cauer Concus Par T-F-N-U.

*GABARIT Du Filtre:- Freq De Coupure :.25
 P-B De Depart. - Freq D'Attenuation :.26
 Ordre:8 - Attenuation :40 dB
 - Ondulation :.1 dB*

Frequences De Coupure Normalisees.

<i>Filtre P-B. - FC:.1 Ordre:8</i>	<i>Filtre P-H FC:.3 Ordre:8</i>	<i>Filtre P-2 Bandes. - FC1:.1 - FC2:.18 - FC3:.3 - FC4:.4 Ordre:32</i>	<i>Filtre S-B - FC1:.2 - FC2:.3 Ordre:16</i>
--	---	---	--

******* COURBES *******

- (1) ... Spectre D'Amplitude U-N.*
- (2) ... Spectre De Phase.*
- (3) ... Cercle De Stabilite.*
- (4) ... Spectre D'Amplitude En dB.*

Fig. 3.12

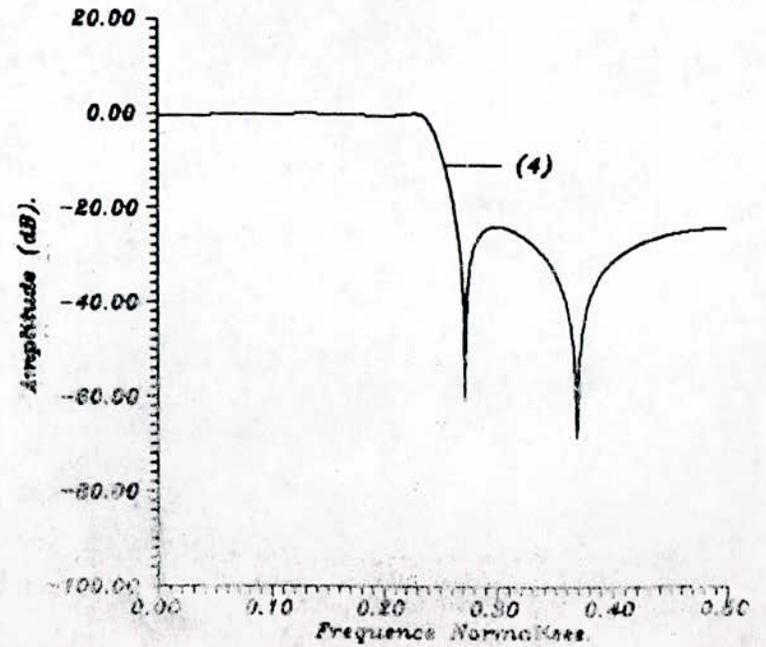
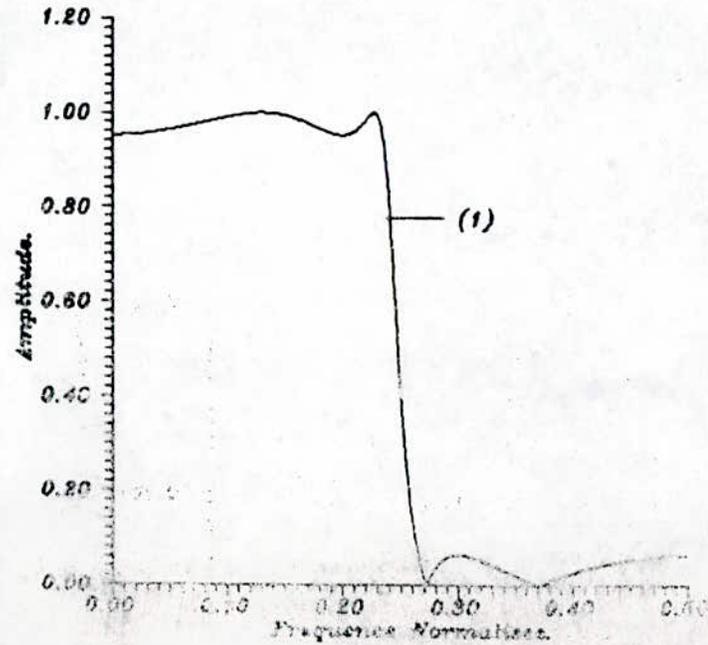
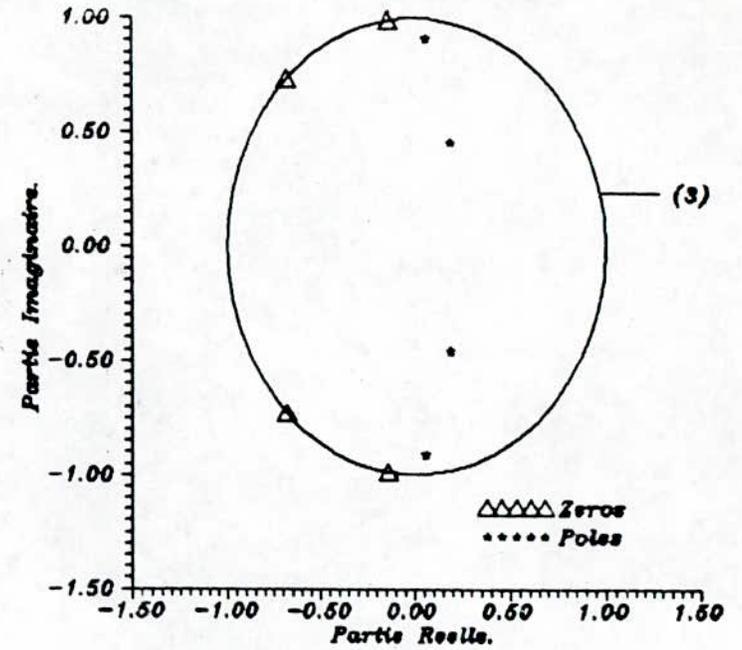
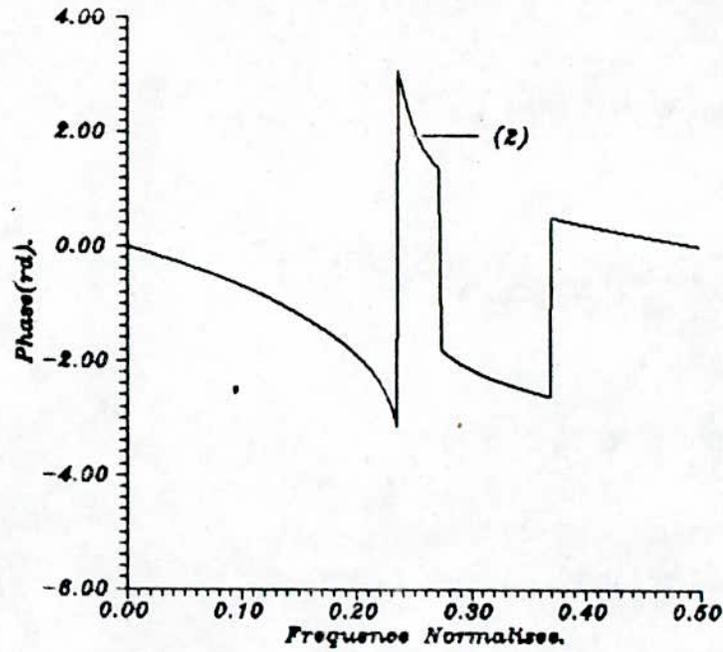
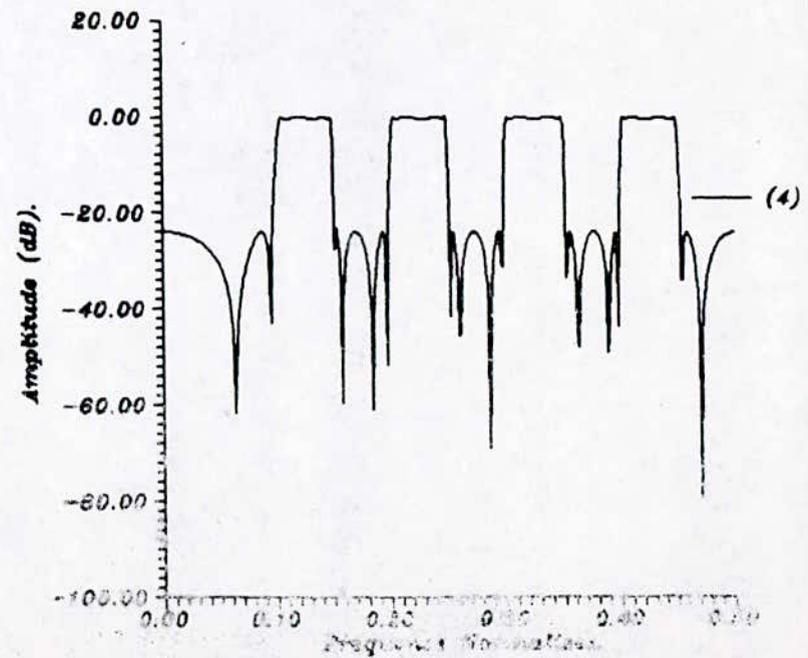
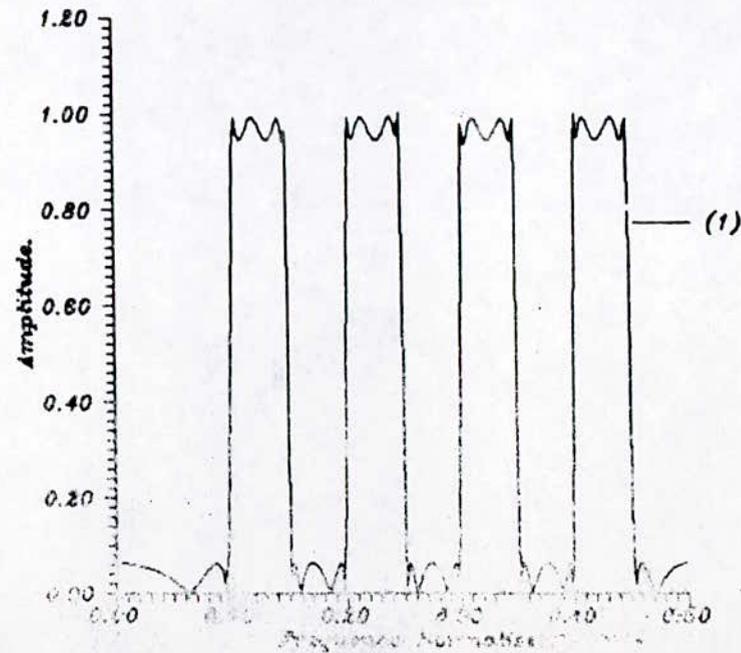
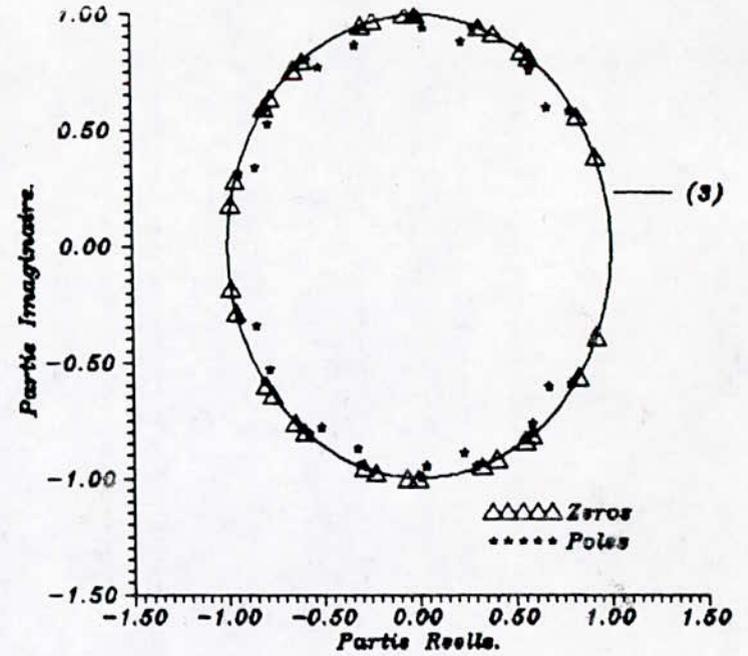
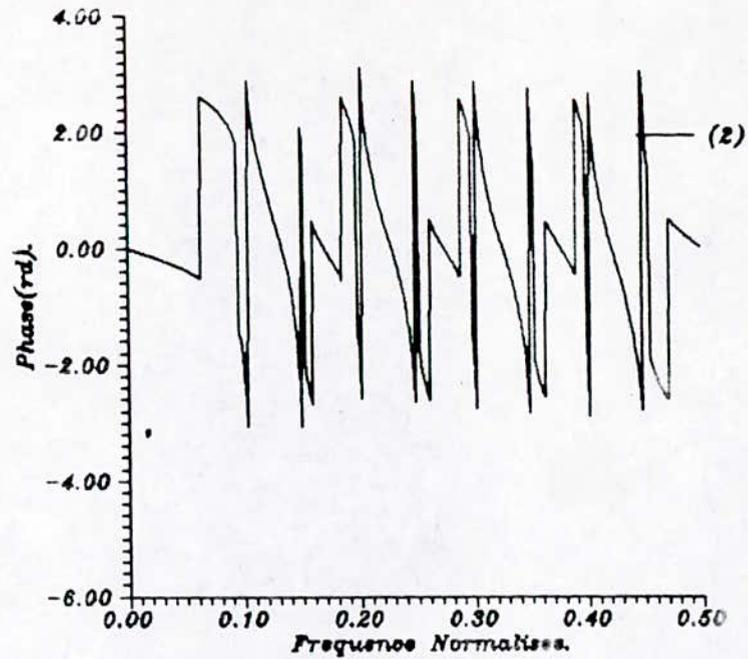


Fig. 3.13



Filtre De Couer P-Bandes D'Ordre 32.

*GABARIT Du Filtre - Freq De Coupure :.25
P-B De Depart: - Freq D'Attenuation :.28
Ordre:4 - Attenuation :.05
- Ondulation :.05*

Frequences De Coupure.

Filtre De Couer D'Ordre 32.

*- FC1:.1 - FC5:.3
- FC2:.15 - FC6:.35
- FC3:.2 - FC7:.4
- FC4:.25 - FC8:.45*

****** COURBES ******

- (1) ... Spectre D'Amplitude U-N.*
- (2) ... Spectre De Phase.*
- (3) ... Cercle De Stabilité.*
- (4) ... Spectre D'Amplitude En dB.*

Fig.3.14

Fig. 3.15

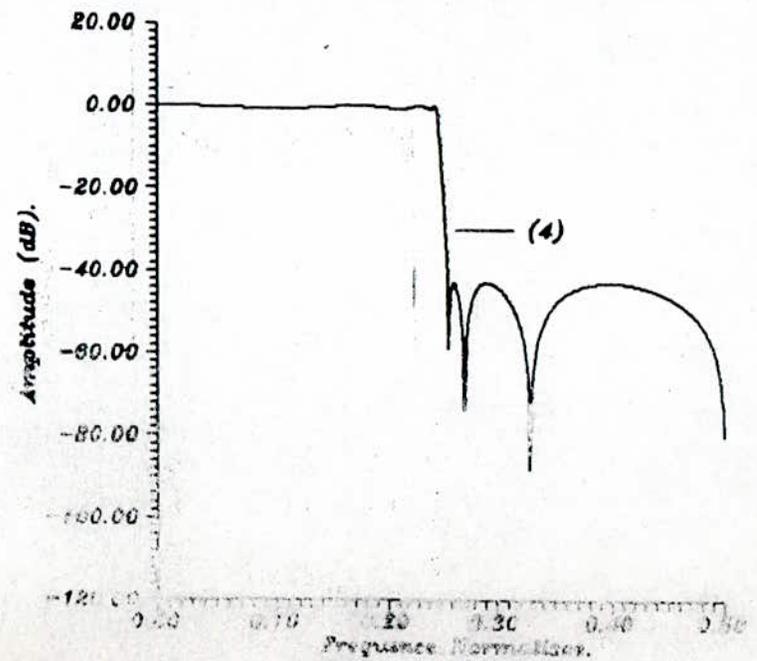
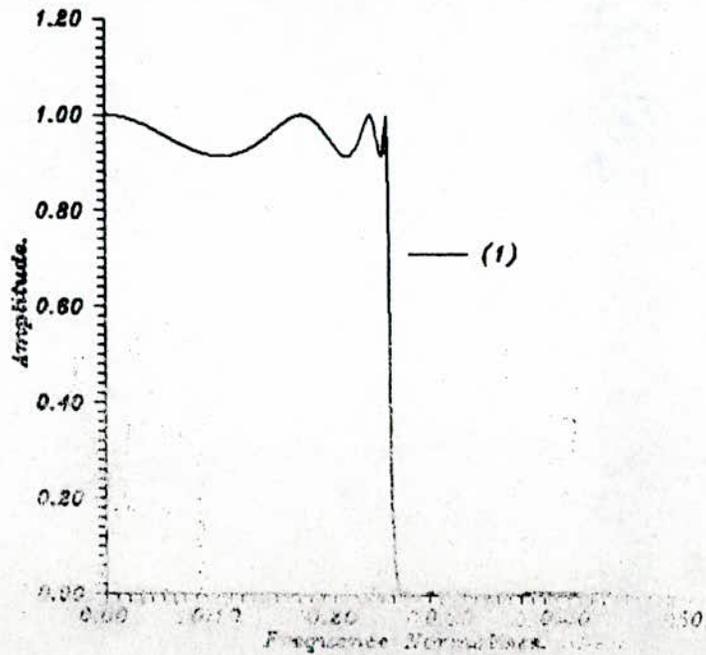
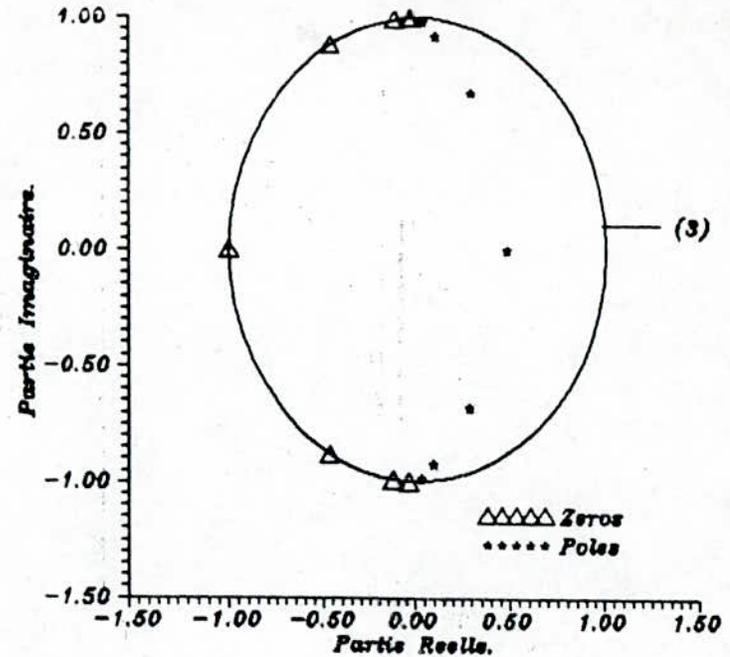
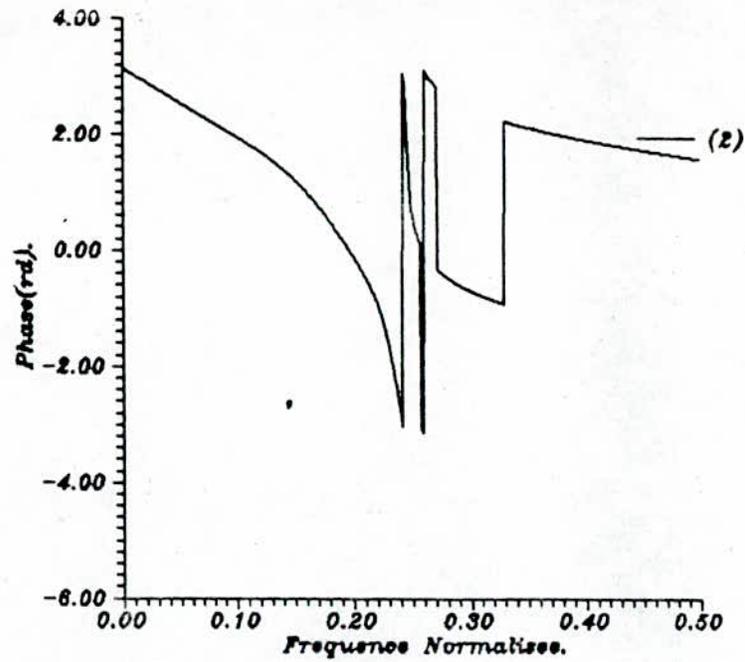
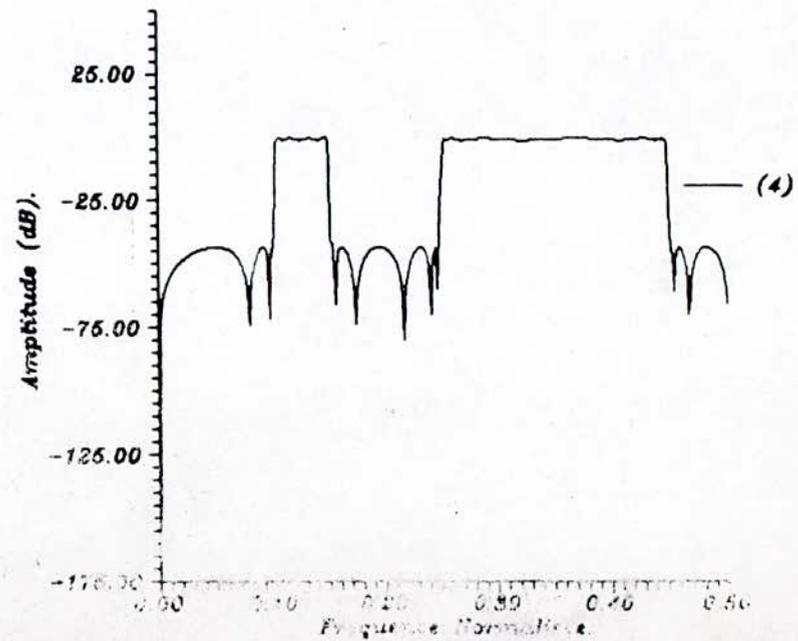
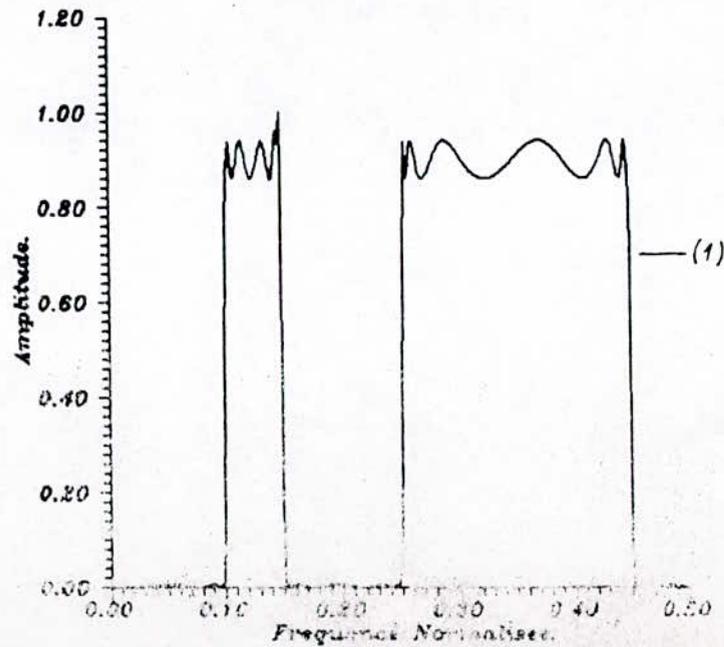
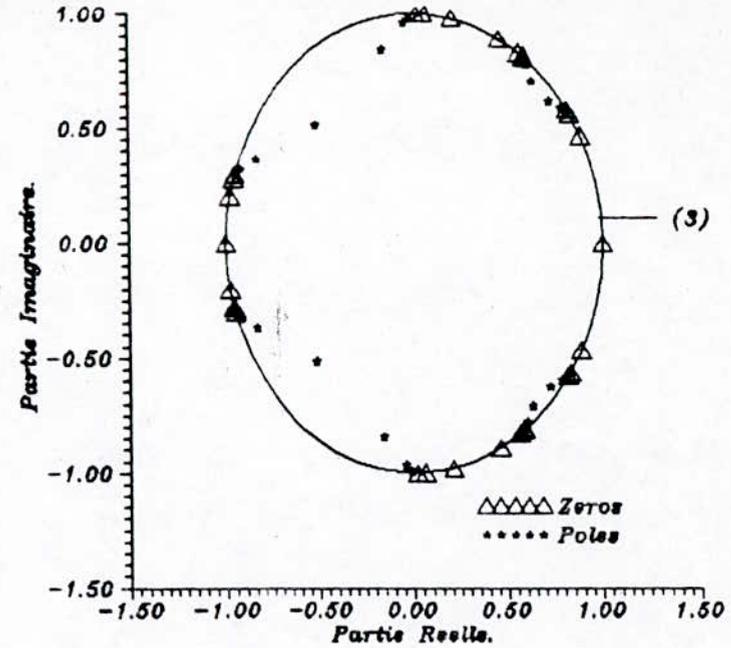
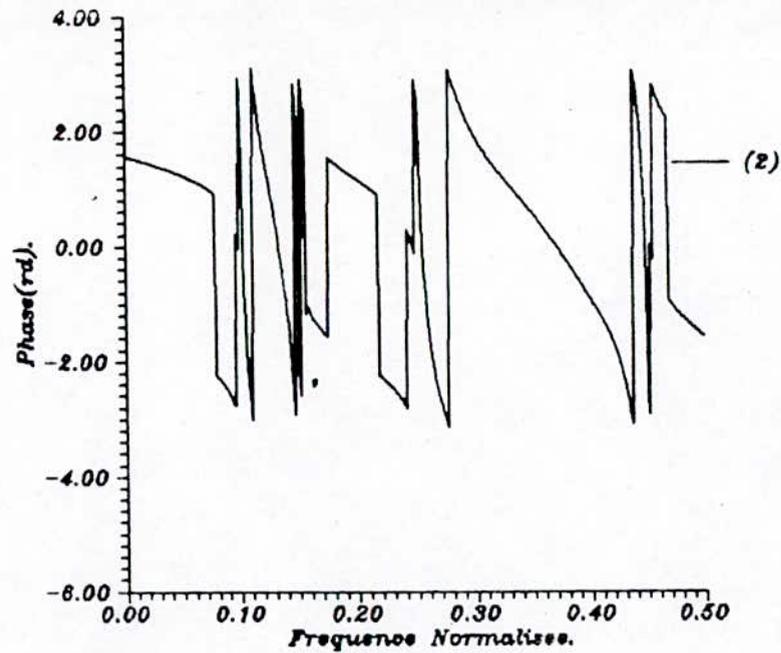


Fig. 3.16



Filtre De Couer P-Bandes D'Ordre 28.

*GABARIT Du Filtre - Freq De Coupure :.25
P-B De Depart: - Freq D'Attenuation :.26
Ordre:7 - Attenuation :.01
- Ondulation :.1*

Frequences De Coupure Normalisees.

Filtre De Couer D'Ordre 28.

*- FC1: .1 - FC3: .25
- FC2: .15 - FC4: .45*

****** COURBES ******

- (1) ... Spectre D'Amplitude U-N.*
- (2) ... Spectre De Phase.*
- (3) ... Cercle De Stabilite.*
- (4) .. Spectre D'Amplitude En dB.*

Interprétation et comparaison des résultats :

L'exemple 1 montre qu'à partir d'un même filtre prototype, on peut synthétiser tous les types de filtres désirés par transformation fréquentielle, éventuellement des filtres multi-passe-bandes. Pour le filtre synthétisé dans l'exemple 2, on peut imaginer une application intéressante dans les réseaux de télécommunication où quatre bandes de fréquence distincts peuvent être filtrées simultanément. Les résultats obtenus montrent que les pôles du filtre initiale subissent, après transformation fréquentielle, une translation vers le cercle unité, ce qui est un inconvénient pour certaines applications. En effet une troncature éronée des coefficients du filtre peut rendre le filtre instable. D'après les résultats obtenus, la phase du filtre initiale n'est pas conservée par la transformation fréquentielle. L'exemple 3 permet d'étudier l'influence de la largeur de la bande passante sur les ondulations. D'après la fig.3.16, on déduit qu'une diminution de la bande de fréquence Δf_c entraîne une augmentation de l'ondulation. En effet en diminuant la bande de fréquence Δf_c , on augmente la pente η (voir fig.3.3), et les ondulations seront multipliées par cette pente, donc elles augmentent.

III-5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons introduit les transformations fréquentielles numériques qui permettent de transformer un filtre passe-bas prototype en un filtre passe-bandes, passe-haut, coupe-bande, etc...

Après étude des propriétés de ces transformations fréquentielles, on en a déduit un système linéaire d'équations dont la résolution donne les coefficients de la transformation désirée. Nous avons également présenté une procédure rapide qui permet d'aboutir aux coefficients du filtre de type désiré à partir de ceux du filtre passe-bas prototype. Les résultats obtenus montrent que les ondulations sont fonction de la largeur de la bande passante et que des surtensions peuvent apparaître aux fréquences de coupure, conséquences de la discontinuité de la pente η (voir fig.3.3) à ces fréquences .

CONCLUSION GENERALE

L'objectif de notre travail était l'étude unifiée des transformations fréquentielles numériques. Pour cela, on a commencé par la synthèse de quelques filtres prototypes passe-bas numériques à partir de filtres prototypes analogiques (BUTTERWORTH, CHEBYSHEV, CAUER et BESSEL) en utilisant la transformation bilinéaire. Cette méthode a l'avantage d'aboutir à des filtres RII stables.

Selon les résultats obtenus, on peut conclure que le filtre de Caueur donne de meilleurs performances que les autres filtres avec un ordre optimal. Le deuxième volet de notre travail consiste en l'étude des propriétés de la transformation fréquentielle numériques et d'en déduire un système d'équations linéaire bien structuré dont la résolution permet d'obtenir les coefficients de la transformation fréquentielle. Pour cela un algorithme rapide exploitant la structure régulière de ce système a été utilisé. On a aussi présenté une procédure rapide conduisant aux coefficients du filtre désiré à partir de ceux du filtre prototype passe-bas et de la transformation fréquentielle déjà obtenus.

Bien que les résultats obtenus sont satisfaisants, on remarque dans certains cas la manifestation des problèmes relatifs à l'influence de la largeur de la bande de fréquence sur les ondulations et les problèmes relatifs à l'apparition des surtensions aux fréquences de coupure.

Notre travail n'est qu'une première étape dans la réalisation d'un filtre numérique. On peut alors envisager une continuité de ce travail consistant à la simulation et l'implémentation d'une structure bien déterminée, mais cela n'est pas nécessaire si l'on opère sur un micro-ordinateur où le filtrage se fait directement par programme.

Cette étude nous a permis d'une part d'approfondir nos connaissances en matière de traitement numérique du signal, et d'autre part de maîtriser et d'apprécier l'art de la programmation en FORTRAN.

Référence Bibliographique

- [1] R.A.Gabel & R.A.Roberts, *Signals and linear systems*, John Wiley & sons Inc, New York, 1987.
- [2] Grapher, Golden Software Inc, Colorado, USA, 1988.
- [3] R.Boite & M.Kunt, *Traitement de la parole*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1987.
- [4] P.Bilstein, *Filtres actifs*, Editions Radio, Paris, 1980.
- [5] M.Hasler & J.Neirynck, *Filtres électriques*, Traité d'électricité Vol XIX, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1981.
- [6] M.Labarrere, J.P.Krief & B.Gimonet, *Le filtrage et ses applications*, Cepadues-Edition, Toulouse, 1988.
- [7] J.Max, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques Tome 1*, Masson, Paris, 1987.
- [8] M.Kunt, *Traitement numérique des signaux*, Dunod, Paris, 1981.
- [9] L.R.Rabiner & B.Gold, *Theory and application of digital signal processing*, Prentice Hall, New Jersey, 1975.
- [10] C.T.Mullis & R.A.Roberts, *Digital signal processing*, Addison Wesley, Reading MA, 1987.
- [11] H.Y.F.Lam, *Analog and digital filters design and realization*, Prentice-Hall, Leon O.Chua edition, 1979.
- [12] A.Antoniou, *Digital filters : Analysis and design*, Mc Graw-Hill, New York, 1979.
- [13] M.Bellanger, *Traitement numérique du signal*, Masson, Paris, 1987.
- [14] W.Cauer, *Synthesis of linear communication networks*, Mc Graw-Hill, New York, 1958.
- [15] F.De Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Traité d'électricité Vol.VI, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984.
- [16] F.De Coulon, *Signal theory and processing*, Artech House Inc, Washington, 1986.
- [17] W.K.Chen, *Passive and active filters theory and implementations*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1986.
- [18] C.J.Demeure & C.T.Mullis, "The euclid algorithm and the fast computation of cross-covariance and autocovariance sequences", *IEEE Trans on ASSP*, Vol 37, N°4, April 1989.
- [19] A.V.Oppenheim & R.W.Schafer, *Digital signal processing*, Englewood cliffs, Prentice Hall, 1975.
- [20] J.C.Franchitti, "All-pass filter interpolation and frequency transformation problems", M.S Thesis, Dept of Electrical and Computer Engineering, Univ.of Colorado, Boulder, Co, 1985.

- [21] G.Feyh, C.T.Mullis & J.C.Franchitti, "All-pass filter interpolation and frequency transformation problems", Proc.XIX. Ast-lomar conf. on signals, systems and computers, Pacific Grove Cal, pp. 164-168 Nov. 1986.
- [22] J.Lifermann, *Les méthodes rapides de transformation du signal: Fourier, Walsh, Hadamard, Haar*, Ed Masson, Paris, 1980.
- [23] B.Derras, "The approximation of discrete-time linear systems based on one use of projections", Ph.D. Dissertation. EE Dept., Univ. of Colorado, Boulder, Co, 1988.
- [24] F.Pécastaings, *Chemins vers l'algèbre Tome 2*, Vuibert, C Librairie Vuibert, Paris, sept. 1986,
- [25] G.E.Shilou (Traduit à l'anglais par RA.Silverman), *Linear algebra*, Dover, New york, 1977.
- [26] A.Revechon et M.Ducamp, *Mathématiques sur micro-ordinateur*, Eyrolles, Paris, 1986.
- [27] L.Leon, *Traitement d'algorithmes par ordinateur Tome 1 et 2*, Cepadues Editions, Toulouse, 1983 .

ANNEXE 1

CALCUL DES POLES ET ZEROS DU FILTRE DE CHEBYSHEV

I- Poles du filtre de Chebyshev type I

Le carré du module de la fonction de transfert de ce filtre est donné par (voir chapitre II) :

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(w)} \quad (A1.1)$$

où $T_n(w)$ est le polynôme de Chebyshev d'ordre n , et ϵ un paramètre relatif à l'ondulation dans la bande passante. Les pôles de ce filtre s'obtiennent en recherchant les racines à partie réelle négative de l'expression $1 + \epsilon^2 T_n^2(s/j)$, cela en utilisant la formulation trigonométrique des polynômes de Chebyshev [12], on obtient alors :

$$1 + \epsilon^2 \cos[n \arccos(s_k/j)] = 0 \quad (A1.2a)$$

$$\cos[n \arccos(s_k/j)] = \pm j/\epsilon \quad (A1.2b)$$

s_k étant les pôles cherchés.

En posant : $p_k = u_k + jv_k = \arccos(s_k/j)$ (A1.3)

il vient :

$$\cos(np_k) = \cos(nu_k + jnv_k)$$

$$\cos(nu_k) \operatorname{ch}(nv_k) - j \sin(nu_k) \operatorname{sh}(nv_k) = \pm j/\epsilon$$

Les pôles sont donc donnés par :

$$\cos(nu_k) \operatorname{ch}(nv_k) = 0$$

$$\sin(nu_k) \operatorname{sh}(nv_k) = \pm 1/\epsilon$$

Soit $u_k = (2k-1)\pi/2n$, n entier (A1.4)

et $v_k = v = \frac{1}{n} \operatorname{argsh}(1/\epsilon)$ (A1.5)

en portant ces valeurs dans (A1.3), il vient :

$$s_k = j \cos(u_k + jv_k) \quad (A1.6a)$$

ou encore :

$$s_k = \sigma_k + j \omega_k = \sin(u_k) \operatorname{sh}(v) + j \cos(u_k) \operatorname{ch}(v) \quad (A1.6b)$$

$$k = 1, \dots, n$$

La relation (A1.6b) montre que les racines de la fonction de transfert se trouvent sur une ellipse d'équation :

$$\frac{\sigma_k^2}{\text{sh}(v)} + \frac{w_k^2}{\text{ch}(v)} = 1 \quad (\text{A1.7})$$

d'après les relations (A1.4) et (A1.5), et sachant que :

$\text{ch}(\text{argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$, il vient :

$$\text{sh}(nv) + \text{ch}(nv) = \frac{1 + \sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \quad (\text{A1.8})$$

en posant :

$$\gamma^n = \left[\frac{1 + \sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right]$$

et d'après la formule de De Moivre, la relation (A1.8) devient :

$$(\text{ch}(v) + \text{sh}(v))^n = \gamma^n$$

d'où :

$$\text{ch}(v) + \text{sh}(v) = \gamma$$

De la relation précédente, on en déduit que :

$$(\text{ch}(v) + \text{sh}(v))^{-1} = \text{ch}(v) - \text{sh}(v) = \gamma^{-1} \quad (\text{A1.9})$$

et d'après les relations (A1.8) et (A1.9), il vient :

$$\text{sh}(v) = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch}(v) = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\text{avec} \quad \gamma = \left[\frac{1 + \sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right]^{1/n}$$

II- Poles et zéros du filtre de Chebyshev type II

Le carré du module de la fonction de transfert du filtre de Chebyshev type II est donné par (voir chap II) :

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_n(w_r) / T_n(w_r/w)]^2} \quad (\text{A1.10a})$$

$$= \frac{T_n^2(w_r/w)}{T_n^2(w_r/w) + \varepsilon^2 [T_n(w_r)]^2} \quad (\text{A1.10b})$$

1- Calcul des zéros :

D'après la relation (A1.10b), les zéros du filtre sont tels que :

$$T_n(j\omega_r/s_{ok}) = 0$$

En utilisant la formulation trigonométrique des polynômes de Chebyshev, on a :

$$\cos(n \arccos(j\omega_r/s_{ok})) = 0$$

d'où :

$$s_{ok} = j \frac{\omega_r}{\cos(\alpha_k)} \quad (A1.11)$$

avec $\alpha_k = (2k-1)/2n$, $k = 1, \dots, n$

2- Calcul des poles :

D'après la relation (A1.10b), les pôles du filtre s'obtiennent en cherchant les racines à partie réelle négative de l'expression $T^2(\omega_r/\omega) + \epsilon^2 T^2(\omega_r)$ en utilisant la formulation des polynômes de Chebyshev [12], on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 \left[n \operatorname{argch}(j\omega_r/s_k) \right] + \epsilon^2 T_n^2(\omega_r) &= 0 \\ \operatorname{ch} \left[n \operatorname{argch}(j\omega_r/s_k) \right] &= \pm j \epsilon T_n(\omega_r) \end{aligned} \quad (A1.12)$$

où s_k étant les pôles cherchés.

Or à la fréquence ω_r , on a une atténuation de A ($A > 1$), donc :

$$\left| H(\omega_r) \right|^2 = \frac{1}{A^2} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega_r)}$$

d'où : $\epsilon T_n(\omega_r) = \sqrt{A^2 - 1}$

La relation (A1.12) devient alors :

$$\operatorname{ch} \left[n \operatorname{argch}(j\omega_r/s_k) \right] = \pm j \sqrt{A^2 - 1}$$

en posant :

$$p_k = u_k + jv_k = \operatorname{argch}(j\omega_r/s_k) \quad (A1.13)$$

il vient :

$$\operatorname{ch}(np_k) = \operatorname{ch}(nu_k + jnv_k)$$

$$\operatorname{ch}(nu_k) \cos(nv_k) + j \operatorname{sh}(nv_k) \sin(nv_k) = +j\sqrt{A^2-1}$$

Les pôles sont donc donnés par :

$$\operatorname{ch}(nu_k) \cos(nv_k) = 0$$

$$\operatorname{sh}(nv_k) \sin(nv_k) = +\sqrt{A^2-1}$$

$$\text{soit : } v_k = (2k-1)\pi/2n \quad k=1, \dots, n \quad (\text{A1.14})$$

$$\text{et } u_k = u = \frac{1}{n} \operatorname{argsh}(\sqrt{A^2-1}) \quad (\text{A1.15})$$

en portant ces valeurs dans (A1.13), il vient :

$$j \frac{w_r}{s_k} = \operatorname{ch}(u_k + jv_k) \\ = \operatorname{ch}(u) \cos(v_k) + j \operatorname{sh}(u) \sin(v_k)$$

ou encore :

$$s_k = \sigma_k + jw_k = \frac{w_r \xi_k}{\xi_k^2 + \beta_k^2} - \frac{w_r \beta_k}{\xi_k^2 + \beta_k^2} \quad (\text{A1.16})$$

$$\text{avec : } \xi_k = -\operatorname{sh}(u) \sin(\alpha_k)$$

$$\beta_k = \operatorname{ch}(u) \cos(\alpha_k)$$

$$\text{où } \alpha_k = (2k-1)\pi/2n \quad k=1, \dots, n$$

De même que pour le cas du filtre du Chebyshev type I, on trouve :

$$\operatorname{sh}(u) = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(u) = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\text{mais avec } \gamma = (A + \sqrt{A^2-1})^{1/n}$$

ANNEXE 2

FONCTIONS ELLIPTIQUES ET FILTRE DE CAUER

I. Fonctions Elliptiques

I.1. Intégrales Elliptiques

L'intégrale elliptique de première espèce est donnée par[12]:

$$U = U(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1-k^2 \sin^2(\theta))^{1/2}} \quad (\text{A2.1})$$

où :- k : module de $U(\phi, k)$ ($0 \leq k < 1$)

- ϕ : argument.

$U(\phi, k)$ représente l'aire limitée par la courbe de la fonction

$I = (1-k^2 \cdot \sin^2(\theta))^{-1/2}$ et les axes $\theta = 0$, $\theta = \phi$.

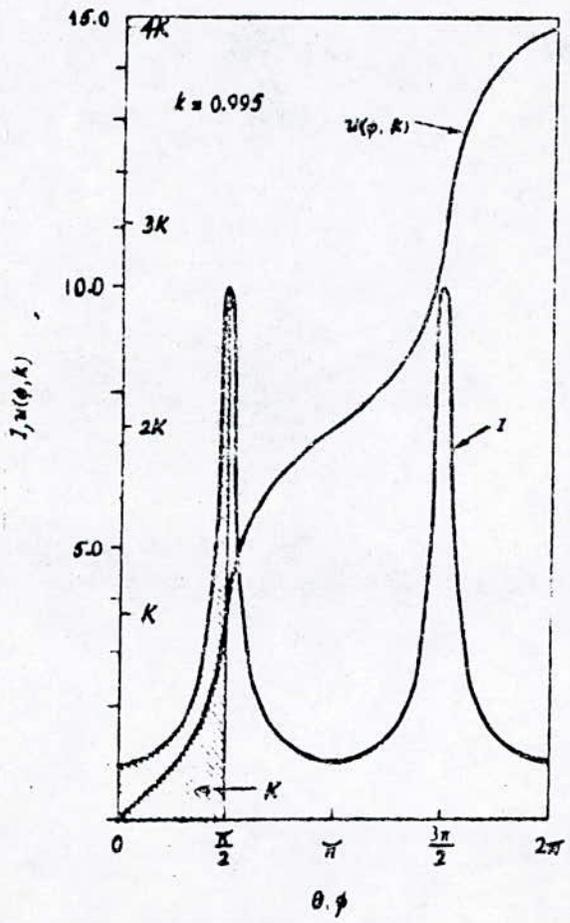


fig.A2.1

D'après la fig.A2.1, on remarque que :

$$I(\vartheta) = I_{\min} = 1 \quad \text{pour } \vartheta = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

$$I(\vartheta) = I_{\max} = \frac{1}{(1-k^2)} \quad \text{pour } \vartheta = \pi/2, 3\pi/2, \dots$$

En effet, I est périodique de période Π , et l'aire délimitée par I et les droites $\vartheta = n\pi/2$ et $\vartheta = (n+1)\pi/2$ est constante quelque soit n et est égale à l'aire comprise entre $\vartheta = 0$ et $\vartheta = \pi/2$ car I est symétrique. Cette aire est l'intégrale elliptique complète :

$$U(\pi/2, k) = K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \cdot \sin^2(\vartheta))^{1/2}} \quad (\text{A2.2})$$

Par conséquence de la périodicité et de la symétrie de I , on aura les égalités suivantes :

$$1) - U(n\pi + \phi_1, k) = 2nK + U(\phi_1, k)$$

$$2) - U(\pi/2 + \phi_1, k) = 2K - U(\pi/2 - \phi_1, k)$$

REMARQUES :

• Si $k = 0$ alors $U(\phi, 0) = \int_0^{\phi} d\vartheta = \phi$

• Si $k = 1$ alors $U(\phi, 1) = \int_0^{\phi} \frac{d\vartheta}{\cos(\vartheta)} = \text{Ln} \left[\text{tg}(\pi/4 + \phi/2) \right]$

• Pour $0 \leq \phi < \pi/2$, on aura $U(\phi, 0) \leq U(\phi, k) \leq U(\phi, 1)$ (voir fig.A2.2).

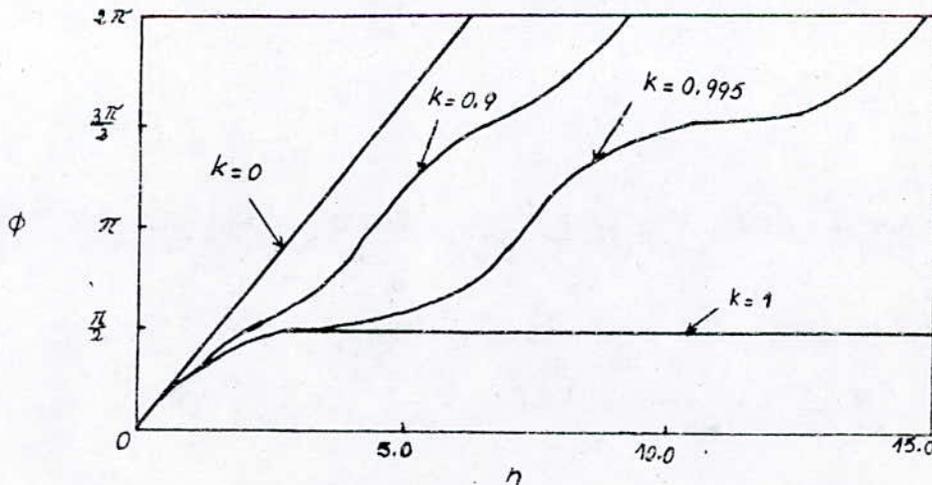


fig.A2.2

I.2- Fonctions Elliptiques

La correspondance entre u et ϕ donnée par la fig.A2.2, montre que pour une paire donnée de valeurs (u,k) correspond une amplitude unique ϕ tel que : $\phi = f(u,k)$. On définit les fonctions elliptiques comme suit :

$$\cdot \operatorname{sn}(u,k) = \sin(\phi) \quad (\text{A2.3})$$

$$\cdot \operatorname{cn}(u,k) = \cos(\phi) \quad (\text{A2.4})$$

$$\cdot \operatorname{dn}(u,k) = \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\phi)} \quad (\text{A2.5})$$

$\operatorname{sn}(u,k)$ et $\operatorname{cn}(u,k)$ sont périodiques, de période $4mK$ (m entier), et $\operatorname{dn}(u,k)$ est périodique de période $2mK$, d'où :

$$\cdot \operatorname{sn}(u+4mK,k) = \operatorname{sn}(u,k) \quad (\text{A2.6})$$

$$\cdot \operatorname{cn}(u+4mK,k) = \operatorname{cn}(u,k) \quad (\text{A2.7})$$

$$\cdot \operatorname{dn}(u+2m.K,k) = \operatorname{dn}(u,k) \quad (\text{A2.8})$$

I.2.1- Argument Imaginaire

Pour un argument imaginaire ($U = jV$), l'intégrale elliptique du première espèce est alors :

$$jV = \int_0^{\psi} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2(\theta))^{1/2}} \quad (\text{A2.9})$$

On définit les fonctions elliptiques associées comme suit :

$$\cdot \operatorname{sn}(jv,k) = \sin(\psi) \quad (\text{A2.10})$$

$$\cdot \operatorname{cn}(jv,k) = \cos(\psi) \quad (\text{A2.11})$$

$$\cdot \operatorname{dn}(jv,k) = (1-k^2 \cdot \sin^2(\psi))^{1/2} \quad (\text{A2.12})$$

En appliquant la transformation :

$$\cdot \sin(\theta) = j \operatorname{tg}(\vartheta)$$

$$\cdot \sin(\psi) = j \operatorname{tg}(\psi')$$

l'équation (A2.9) s'écrit :

$$V = \int_0^{\psi'} \frac{d\vartheta'}{\left[1 - (k')^2 \sin^2(\vartheta')\right]^{1/2}} \quad (\text{A2.13})$$

avec $k'^2 = 1 - k^2$ (k' est le module complémentaire)

On définit l'intégrale complète complémentaire par :

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{(1 - (k')^2 \sin^2(\vartheta))^{1/2}} \quad (\text{A2.14})$$

. Identités relatives aux fonctions elliptiques

$$1/ \operatorname{sn}(z_1 + z_2, k) = \frac{\operatorname{sn}(z_1, k) \operatorname{cn}(z_2, k) \operatorname{dn}(z_2, k) + \operatorname{cn}(z_1, k) \operatorname{sn}(z_2, k) \operatorname{dn}(z_1, k)}{D}$$

$$\text{où } D = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(z_1, k) \operatorname{sn}^2(z_2, k)$$

$$21/ \operatorname{cn}(z_1 + z_2, k) = \frac{\operatorname{cn}(z_1, k) \operatorname{cn}(z_2, k) - \operatorname{sn}(z_1, k) \operatorname{sn}(z_2, k) \operatorname{dn}(z_1, k) \operatorname{dn}(z_2, k)}{D}$$

$$31/ \operatorname{dn}(z_1 + z_2, k)$$

$$= \frac{\operatorname{dn}(z_1, k) \operatorname{dn}(z_2, k) - k^2 \operatorname{sn}(z_1, k) \operatorname{sn}(z_2, k) \operatorname{cn}(z_1, k) \operatorname{cn}(z_2, k)}{D}$$

$$41/ \operatorname{dn}^2(z/2, k) = \frac{\operatorname{dn}(z, k) + \operatorname{cn}(z, k)}{1 + \operatorname{cn}(z, k)}$$

Périodicité

$\operatorname{sn}(z, k)$ est double périodique, elle a pour période réelle $4mK$ et pour période imaginaire $2nK'$ (n et m entiers), d'où :

$$\operatorname{sn}(z + 4mK + j2nK', k) = \operatorname{sn}(z, k)$$

. Parallélogramme-période

On divise le plan Z en parallélogramme-période (fig.A2.3)

$$\text{Soit : } U = 4mK$$

$$V = j2nK'$$

où m et n sont des entiers.

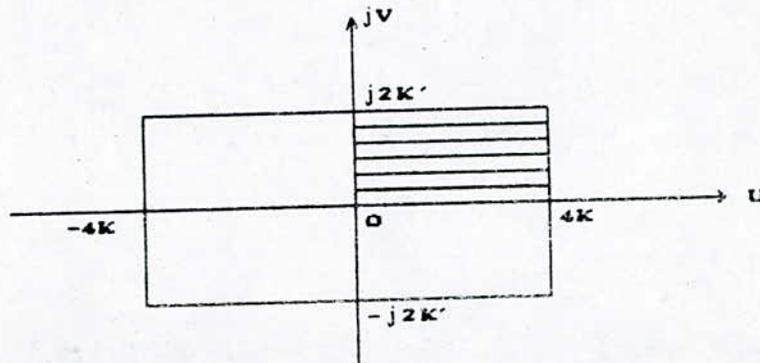


fig.A2.3

Le parallélogramme délimité par les points $(0,0)$; $(0,4K)$; $(4K,j2K)$ et $(0,j2K)$ est le parallélogramme-période fondamental.

Transformations

$$\text{Soit l'équation } w = \sqrt{k} \operatorname{sn}(z,k) \quad (\text{A2.15})$$

Du fait de la périodicité, on peut écrire :

$$z = z_p + 4mK + j2nK \quad (\text{A2.16})$$

Si l'on s'intéresse uniquement aux points se trouvant dans le parallélogramme-période fondamental alors pour le :

- Domaine 1 : $z = u$ avec $0 \leq u \leq K$
- Domaine 2 : $z = K+jv$ avec $0 \leq v \leq K$
- Domaine 3 : $z = u+jK$ avec $0 \leq u \leq K$

1/ Dans le Domaine 1 :

$$w = \sqrt{k} \operatorname{sn}(u,k) \quad (\text{A2.17})$$

$$\text{si } u = 0 \quad \text{alors } w = \sqrt{k} \operatorname{sn}(0,k)$$

$$\text{et si } u = K \quad \text{alors } w = \sqrt{k} \operatorname{sn}(K,k) = \sqrt{k}$$

c'est-à-dire si z varie (sur l'axe réel) de 0 à K , la variable w varie de 0 à \sqrt{k} dans le plan w .

21/ Dans le Domaine 2 :

$$w = \sqrt{k} \operatorname{sn}(K+jv,k) \quad (\text{A2.18})$$

en utilisant l'identité i/ et le fait que $\operatorname{cn}(K,k) = 0$, on aura :

$$w = \frac{\sqrt{k}}{\operatorname{dn}(v,k)} \quad (\text{A2.19})$$

31/ Dans le Domaine 3 :

$$w = \sqrt{k} \operatorname{sn}(u+jK,k) \quad (\text{A2.20})$$

de même que pour le domaine 2, on trouve :

$$w = \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \text{sn}(u, k)} \quad (\text{A2.21})$$

- si $u = 0$ alors $w \rightarrow \infty$

- si $u = K$ alors $w = 1/\sqrt{k}$

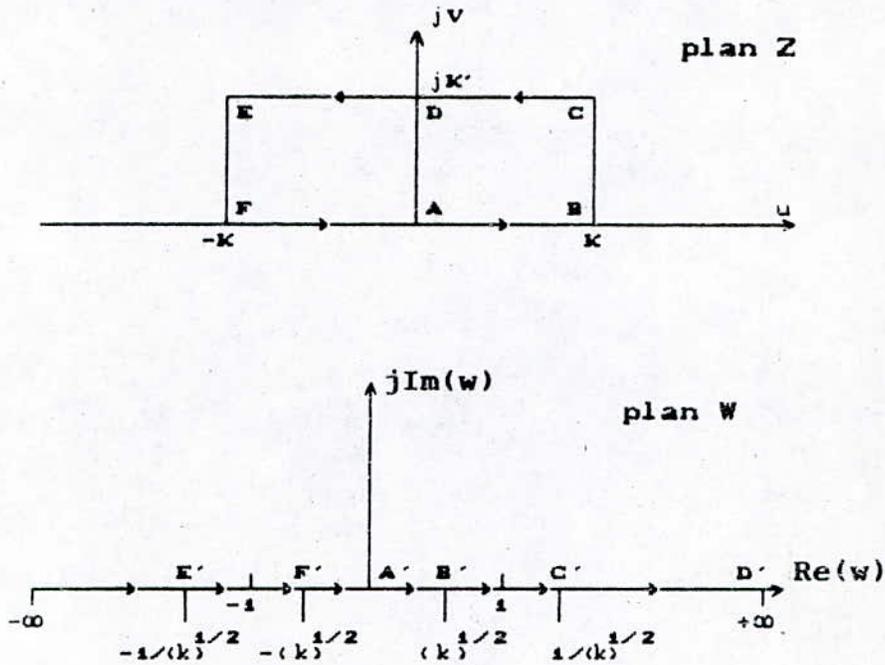


fig.A2.4 -Correspondance des deux plans (Z) et (W) par la transformation (A2.15).

Représentation par des séries

On peut représenter les fonctions elliptiques par des séries qui convergent rapidement telles que :

$$\text{sn}(z, k) = (k)^{-1/2} \frac{\vartheta_1(z/2K, q)}{\vartheta_0(z/2K, q)} \quad (\text{A2.22})$$

$$\text{cn}(z, k) = \left[\frac{k'}{k} \right]^{1/2} \frac{\vartheta_2(z/2K, q)}{\vartheta_0(z/2K, q)} \quad (\text{A2.23})$$

$$\text{dn}(z, k) = (k')^{1/2} \frac{\vartheta_3(z/2K, q)}{\vartheta_0(z/2K, q)} \quad (\text{A2.24})$$

avec : $q = \exp(-\pi K'/K)$

et les ϑ_i sont données par :

$$\vartheta_0(z/2K, q) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos(2m\pi z/2K) \quad (\text{A2.25})$$

$$\vartheta_1(z/2K, q) = 2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin((2m+1)\pi z/2K) \quad (\text{A2.26})$$

$$\vartheta_2(z/2K, q) = 2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m+1)} \cos((2m+1)\pi z/2K) \quad (\text{A2.27})$$

$$\vartheta_3(z/2K, q) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos(2m\pi z/2K) \quad (\text{A2.28})$$

II- Approximation elliptique

L'approximation elliptique produit des oscillations dans la bande passante et dans la bande atténuée.

Approximation du 5^{ème} ordre : La courbe de l'atténuation en dB est donnée par la fig.A2.5 :

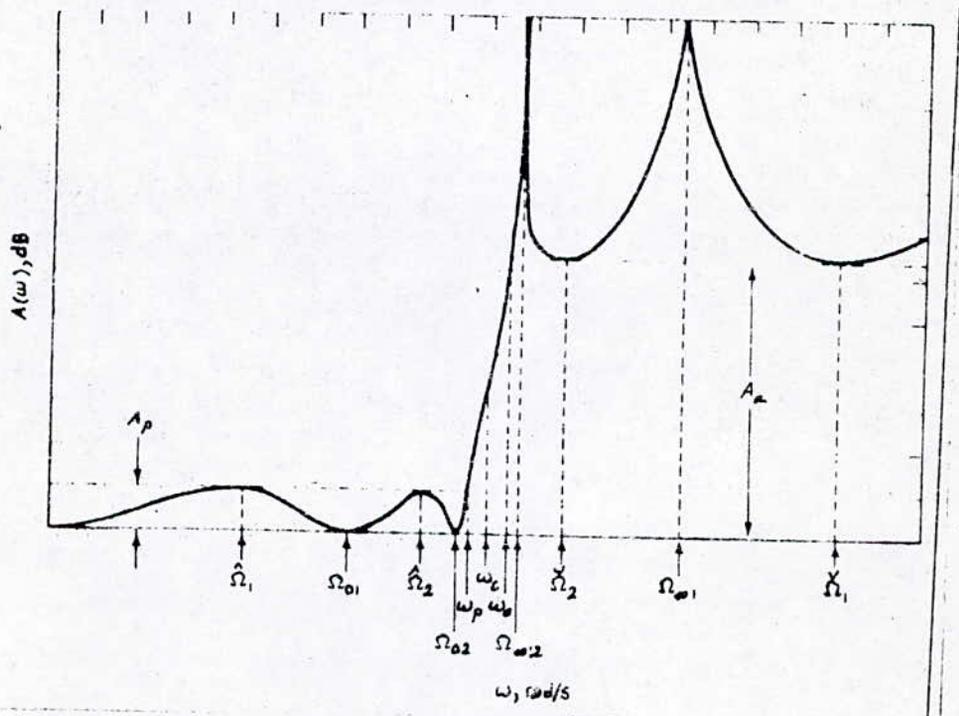


fig.A2.5

On rappelle que l'atténuation est l'inverse de la fonction de transfert. Avec une fréquence de coupure $w_c = 1$, on aura :

$$w_p = \sqrt{k} \quad \text{et} \quad w_a = 1/\sqrt{k} \quad \text{car} \quad w_c = \sqrt{w_a w_p} = 1 \quad (\text{A2.29})$$

k : la sélectivité, c'est à dire $k = w_p/w_a$

$$k_1 = \left[\frac{A^{0.1A} P - 1}{A^{0.1A} a - 1} \right]^{1/2}$$

$$A(w) = 10 \cdot \log[L(w^2)]$$

avec
$$L(w^2) = 1 + \varepsilon^2 F^2(w) \quad (\text{A2.30})$$

et
$$\varepsilon^2 = 10^{0.1A} P - 1$$

$F(w)$ étant la fonction caractéristique du filtre [12].

D'après la caractéristique de l'atténuation (fig.A2.5), on tire les propriétés suivantes (cas d'une approximation d'ordre 5):

1/ $F(w) = 0$ pour $w = 0, \pm\Omega_{o1}, \pm\Omega_{o2}$

2i/ $F(w) = \infty$ pour $w = \infty, \pm\Omega_{oa}, \pm\Omega_{oa2}$

3i/ $F^2(w) = 1$ pour $w = \pm\hat{\Omega}_1, \pm\hat{\Omega}_2, \pm\sqrt{k}$

4i/ $F^2(w) = 1/k_1^2$ pour $w = \pm\check{\Omega}_1, \pm\check{\Omega}_2, \pm 1/\sqrt{k}$

5i/ $\frac{dL(w^2)}{dw} = 0$ pour $w = \pm\hat{\Omega}_1, \pm\hat{\Omega}_2, \pm\check{\Omega}_1, \pm\check{\Omega}_2$

D'après ces propriétés, on peut établir la relation :

$$\left[\frac{dF(w)}{dw} \right]^2 = \frac{M_5 [1-F^2(w)][1-k_1^2 F^2(w)]}{[1-w^2/k][1-kw^2]} \quad (\text{A2.31})$$

où M_5 est une constante.

En posant: $x = F(w)$ et $y = w$ dans (A2.31), il vient :

$$\int_0^F \frac{dx}{\sigma \sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2 x^2)}} = \sqrt{M_3} \int_0^w \frac{dy}{\sigma \sqrt{(1-y^2/k)(1-ky^2)}} + M_7 \quad (\text{A2.32})$$

où M_7 est une constante d'intégration, posons encore : $y = \sqrt{k} y$
 puis $y = y$, on aura :

$$\int_0^F \frac{dx}{\sigma \sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2 x^2)}} = M_\sigma \int_0^{w/(k)^{1/2}} \frac{dy}{\sigma \sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} + M_7 \quad (\text{A2.33})$$

Ces intégrales sont des intégrales elliptiques du première espèce.
 En utilisant les transformations suivantes :

$$x = \sin(\theta_1) \quad F = \sin(\phi_1) \quad y = \sin(\theta) \quad w/(k)^{1/2} = \sin(\phi)$$

on obtient une autre forme de ces intégrales :

$$\int_0^{\phi_1} \frac{d\theta_1}{\sigma \sqrt{1-k_1^2 \sin^2(\theta_1)}} = M_\sigma \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sigma \sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} + M_7 \quad (\text{A2.34})$$

Posons :

$$z = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sigma \sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} = u + jv \quad (\text{A2.35})$$

la solution de l'équation (A2.31) est donc :

$$\frac{w}{\sqrt{k}} = \sin(\phi) = \text{sn}(z, k) \quad (\text{A2.36})$$

$$F = \sin(\phi_1) = \text{sn}(M_\sigma z + M_7, k_1) \quad (\text{A2.37})$$

où $\text{sn}(\dots)$ correspond à la fonction elliptique.

L'équation (A2.36) transforme le plan (parallélogramme) en axe réel du plan (W) (fig.A2.6).

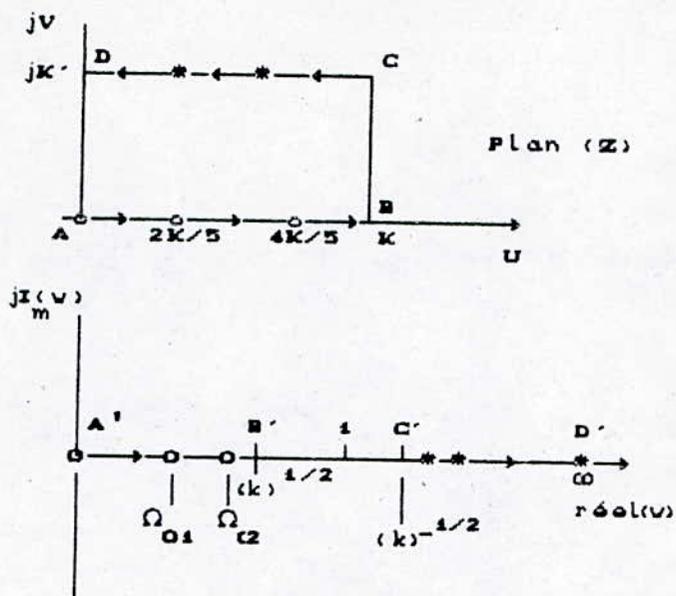


fig.A2.6

Il en est de même pour l'équation (A2.37).

Si $z = u$ (réel) et $0 \leq u \leq K$ les équations (A2.36) et (A2.37) deviennent :

$$w = \sqrt{k} \operatorname{sn}(u, k) \quad (\text{A2.38})$$

$$F = \operatorname{sn}(M_\sigma u + M_\gamma, k_1) \quad (\text{A2.39})$$

w et F ont pour périodes respectives $4K$ et $4K_1 / M_\sigma$.

Si $w = 0$ alors $u = 0$ et si $w = \sqrt{k}$ alors $u = K$ comme le montre la courbe de la fig.A2.7.

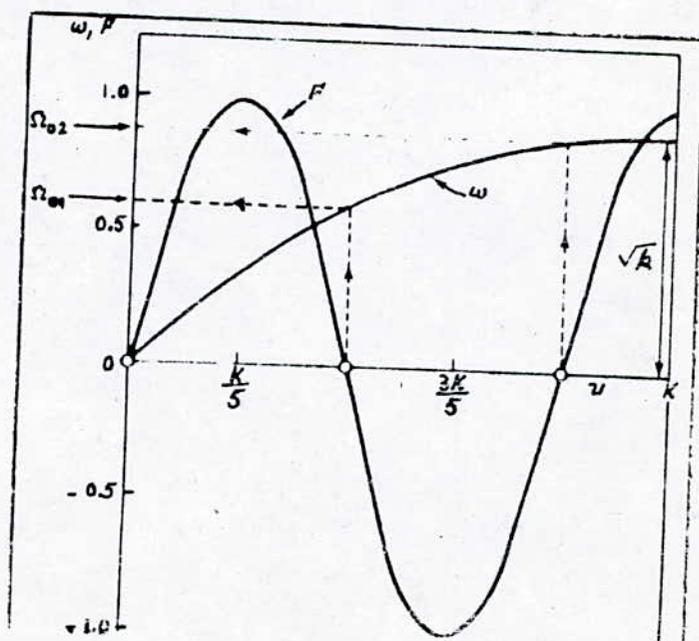


fig.A2.7

La fonction $F(w)$ est nulle pour $u = 0$ et s'annule en deux autres points pour $0 < u \leq K$, et est égale à l'unité pour $u = K$ (propriétés $i/$ et $3i/$).

Il est clair que pour $u = 0$, $F = \text{sn}(M_7, k_1) = 0$ et $M_7 = 0$, alors cinq quart de période de F coïncident avec un quart de période de w , d'où :

$$M_7 = \frac{5K_1}{K}$$

et l'équation (A2.37) devient : $F = \text{sn}((5K_1/K)u, k_1)$ (A2.40)

et les zéros de F sont alors :

$$u = \frac{2iK}{5}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{A2.41})$$

donc les zéros de l'atténuation sont bien :

$$\Omega_{oi} = \sqrt{k} \text{sn}(2Ki/5, k) \quad \text{pour } i = 0, 1, 2 \quad (\text{A2.42})$$

Si maintenant $z = u + jK'$ et $0 \leq u \leq K$, les équations (A2.36) et (A2.37) s'écrivent :

$$w = \frac{1}{\sqrt{k} \text{sn}(u, k)} \quad (\text{A2.43})$$

$$F = \text{sn}\left[\frac{5K_1(u+jK')}{K}, k_1\right] \quad (\text{A2.44})$$

.Si $w = \infty$ alors $u = 0$ et F est infinie d'après (A2.37), on aura :

$$F = j \frac{\text{sn}(5K_1 K'/K, k_1')}{\text{cn}(5K_1 K'/K, k_1')} = \infty \quad \text{où } k_1' = (1 - k_1^2)^{1/2} \quad (\text{A2.45})$$

et ayant la relation : $5K'/K = K_1'/K_1$
 (K et K' sont fonction de k et K_1 et K_1' sont fonction de k_1).
 L'équation (A2.37) devient :

$$F = \text{sn}\left[\frac{5K_1}{K} u + jK_1', k_1\right] = \frac{1}{k_1 \text{sn}(5K_1 u/K, k_1)} \quad (\text{A2.46})$$

Evidement $F = \infty$ si $u = 2Ki/5$ pour $i=0,1,2$ (A2.47)

Donc les pôles de F sont $z = \frac{2Ki}{5} + jK'$, $i=0,1,2$

$F(w)$ possède deux pôles pour $1/\sqrt{k} \leq w < \infty$ et un pôle à l'infini; ces pôles sont obtenus à partir des équations (A2.43 et A2.47).

$$\Omega_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{k} \operatorname{sn}(2Ki/5, k)}, \quad i = 0,1,2 \quad (\text{A2.48})$$

Les zéros de $F(w)$ sont donnés par :

$$\Omega_{oi} = 1/\Omega_{\infty i} \quad (\text{A2.49})$$

En éliminant Ω_{∞} dans l'équation (A2.31), on obtient :

$$F(w) = \frac{M'_1 w(w^2 - \Omega_{o1}^2)(w^2 - \Omega_{o2}^2)}{(1 - w^2 \Omega_{o1}^2)(1 - w^2 \Omega_{o2}^2)} \quad \text{où } M'_1 \text{ est une constante.}$$

pour $z = K + jv$ et $0 \leq v \leq K'$, les équations (A2.36) et (A2.37) deviennent:

$$w = \frac{\sqrt{k}}{\operatorname{dn}(v, k')} \quad \text{et } F = \operatorname{sn}\left[\frac{5K_1(K + jv)}{K}, k_1\right]$$

si $w = 1$, $v = K'/2$ et $F(1) = M'_1$

$$\text{alors } M'_1 = \operatorname{sn}\left(5K_1 + j\frac{5K_1 K_1}{2K}, k_1\right) = \operatorname{sn}(K_1 + jK_1/2, k_1)$$

$$\text{d'où : } M'_1 = \frac{1}{\operatorname{dn}(K_1/2, k_1)} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \quad (\text{A2.50})$$

. Approximation D'ordre n (n impaire)

Pour une approximation d'ordre n (n impaire), la constante M_7 dans l'équation (A2.37) est nulle, et n quarts de période de F doit correspondre à un quart de période de w , alors on aura :

$$M_{\sigma} = \frac{n K_1}{K}$$

$$\text{et } F = \operatorname{sn}\left(\frac{nK_1}{K}z, k_1\right) \quad (\text{A2.52})$$

avec $nK/K = K_1/K_1$

(A2.53)

On peut alors montrer que la fonction caractéristique est donnée par :

$$F(w) = \frac{(-1)^r w^r (w^2 - \Omega_1^2)}{\sqrt{k_1} \prod_{i=1}^r (1 - w^2 \Omega_i^2)} \quad \text{où } r = (n-1)/2$$

et $\Omega_i = \sqrt{k} \operatorname{sn}(2Ki/n, k) \quad i = 1, 2, \dots, r$

Poles et zéros de L'atténuation

D'après les équations (A2.30 et A2.52), l'atténuation dans le domaine z est donné par :

$$L(z) = 1 + \epsilon^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{nK_1}{K} z, k_1\right) \\ = \left[1 + j\epsilon \operatorname{sn}\left(\frac{nK_1}{K} z, k_1\right)\right] \left[1 - j\epsilon \operatorname{sn}\left(\frac{nK_1}{K} z, k_1\right)\right]$$

Les zéros de L(z) sont donc déterminés par :

$$\operatorname{sn}\left(\frac{nK_1}{K} z, k_1\right) = j/\epsilon \quad (A2.54)$$

En pratique, k_1 est très petit, donc on peut l'approximer à zéro, dans ce cas :

$$\operatorname{sn}\left(\frac{nK_1}{K} z, 0\right) = \operatorname{sn}\left(\frac{nK_1}{K} z\right) = j/\epsilon$$

avec $K_1 = \pi/2$, d'après l'équation (A2.2), il vient :

$$-\frac{jn\pi}{2K} z = \operatorname{sh}^{-1}(1/\epsilon)$$

ayant la relation : $\operatorname{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

on obtient un zéro de L(z) : $z_0 = jv_0$ avec :

$$v_0 = \frac{K}{n\pi} \ln\left[\frac{10^{0.05Ap} + 1}{10^{0.05Ap} - 1}\right]$$

$\operatorname{sn}(nK_1 z/K, k_1)$ a une période réelle de $4K/n$, d'où :

$$z_i = z_0 + \frac{4Ki}{n} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots$$

les z_i étant les zéros de $L(z)$. les zéros de $L(w^2)$ sont alors déterminés en utilisant la correspondance entre les plans z et w d'après l'équation (A2.36), les zéros de $L(-s^2)$ sont obtenus en utilisant la relation $w = s/j$. Pour $i=0$, $L(-s^2)$ possède un zéro réel $s = \sigma_0$ où :

$$\sigma_0 = j\sqrt{k} \operatorname{sn}(jv_0, k) \quad (\text{A2.55})$$

et pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, $L(-s^2)$ admet $(n-1)$ zéros complexes $s = \sigma_i + jw_i$, où

$$\sigma_i + jw_i = j\sqrt{k} \operatorname{sn}(jv_0 + \frac{4Ki}{n}, k) \quad (\text{A2.56})$$

cette équation peut être mise sous la forme [12] :

$$\sigma_i + jw_i = j\sqrt{k} (-1)^i \operatorname{sn}(jv_0 + \frac{2Ki}{n}, k) \quad \text{pour } i = 1, \dots, (n-1)/2$$

à l'aide de l'identité i/, il vient :

$$\sigma_i + jw_i = \frac{(-1)^i \sigma_0 v_i + j\Omega_i W}{1 + \sigma_0^2 \Omega_i^2} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, (n-1)/2$$

où :

$$W = \sqrt{(1+k\sigma_0^2) \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)} \quad (\text{A2.57})$$

$$v_i = \sqrt{(1-k\Omega_i^2) \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{k}\right)} \quad (\text{A2.58})$$

$$\Omega_i = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{2Ki}{n}, k\right) \quad (\text{A2.59})$$

$L(-s^2)$ a des zéros en $s = \pm \sigma_0$, $(\pm \sigma_i + jw_i)$ et des pôles doubles en $s = \pm j/\Omega_i$. Ces derniers peuvent être évalués en utilisant la représentation en séries des fonctions elliptiques. D'après les relations (A2.55), (A2.22), il vient :

$$\sigma_0 = \frac{-2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \operatorname{sh}[(2m+1)B]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \operatorname{ch}[2mB]} \quad (\text{A2.60})$$

où : $B = \frac{1}{2n} \ln \frac{10^{0.05A^P} + 1}{10^{0.05A^P} - 1}$

le paramètre q est donné par :

$$q = e^{-nk/k} \quad (\text{A2.61})$$

de même, à partir des équations (A2.39) et (A2.22), il vient :

$$\Omega_i = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin[(2m+1)\pi i/n]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos[2m\pi i/n]} \quad (\text{A2.62})$$

pour $i = 1, 2, \dots, (n-1)/2$

Le paramètre q peut être déterminé en évaluant numériquement K et K' . Une méthode rapide consiste à utiliser la procédure suivante : sachant que $\operatorname{dn}(0, k) = 1$, l'équation (A2.24) donne :

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots} \quad (\text{A2.63})$$

puisque $q < 1$ ($K, K' > 0$) alors une première approximation est donnée par :

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

en éliminant $\sqrt{k'}$ dans l'équation (A2.63), il vient :

$$q \approx q_0 + 2q_0^5 - 5q_0^9 + 10q_0^{13}$$

si q_{m-1} (m entier) est une approximation de q , alors :

$$q_m \approx q_0 + 2q_{m-1}^5 - 5q_{m-1}^9 + 10q_{m-1}^{13} \quad (\text{A2.64})$$

est une meilleure approximation de q .

En utilisant la relation (A2.64), on peut montrer que :

$$q \approx q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$$

donc si k est connu, les quantités k' , q_0 , q , σ_0 , Ω_1 , σ_1 et w_1 peuvent alors être évaluées.

Cas où n paire

Les résultats précédents peuvent être étendus au cas où n est paire, la fonction F est de la forme :

$$F = \operatorname{sn} \left[\frac{n K_1}{K} z + K_1, k_1 \right]$$

avec
$$\frac{nK'}{K} = \frac{K_1'}{K_1} \quad (\text{A2.65})$$

dans ce cas, $F(w)$ aura pour expression :

$$F(w) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{k_1}} \prod_{i=1}^r \frac{(w^2 - \Omega_i^2)}{(1 - w^2 \Omega_i^2)} \quad \text{où } r = n/2$$

et $\Omega_i = \sqrt{k} \operatorname{sn}((2i-1)K/n, k) \quad i = 1, 2, \dots, r$

Les zéros de $L(-s^2)$ sont : $s_i = \pm (\sigma_i + jw_i) \quad \text{où :$

$$(\sigma_i + jw_i) = \pm \frac{[\sigma_0 v_i + j(-1)^i \Omega_i w]}{[1 + \sigma_0^2 \Omega_i^2]} \quad (\text{A2.66})$$

Les paramètres w , v_i et σ_0 sont donnés par les relations (A2.57), (A2.58) et (A2.60). Les Ω_i peuvent être évaluées en remplaçant i par $((i-1)/2)$ dans le membre droit de l'équation (A2.62).

Détermination de L'ordre

Pour une approximation d'ordre n [12], on a la relation (voir (A2.53) et (A2.65)) :

$$\frac{n K'}{K} = \frac{K_1'}{K_1} \quad (\text{A2.67})$$

à partir de la définition du sinus elliptique $\operatorname{sn}(K_1, k) = 1$, et

d'après (A2.22), il vient :

$$k_1 = 4\sqrt{q_1} \left[\frac{1 + q_1^2 + q_1^4 + \dots}{1 + 2q_1 + 2q_1^4 + \dots} \right]^2 \quad \text{avec} \quad q_1 = e^{-\pi k'_1 / k_1}$$

En pratique, k_1 est proche de zéro et k'_1 proche de l'unité, donc k'_1/k_1 est très grand, d'où $q_1 \ll 1$, il vient alors :

$$k_1 \approx 4\sqrt{q_1} \quad \text{ou} \quad k_1^2 = 16 q_1 = 16 e^{-\pi k'_1 / k_1}$$

En éliminant k'_1/k_1 d'après l'équation (A2.67), on aura :

$$k_1^2 = 16 e^{-\pi n k / k} = 16 q^n,$$

or la relation (A2.61) donne :

$$k_1^2 = \frac{10^{\frac{0.1A}{p} - 1}}{10^{\frac{0.1A}{a} - 1}} = 16 q^n$$

d'où :

$$n \geq \frac{\log(16D)}{\log(1/q)} \quad (\text{A2.68})$$

$$\text{où } D = \frac{10^{\frac{0.1A}{a} - 1}}{10^{\frac{0.1A}{p} - 1}}$$

ANNEXE 3

ALGORITHME DE HORNER

Cet algorithme permet d'évaluer un polynôme d'une manière rapide. Soit le polynôme :

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k} \quad \text{où } z \in \mathbb{C} . \quad (\text{A3.1})$$

pour $z = e^{j\theta}$, on a d'après la formule de De Moivre :

$$z^k = \cos(k\theta) + j\sin(k\theta)$$

En utilisant la règle de Horner [10], on peut écrire $P(z)$ sous la forme : $p(z) = a_n + z(a_{n-1} + z(a_{n-2} + \dots + z(a_1 + a_0 z))) \dots$

pour évaluer $p(z) = p(e^{j\theta})$ à une valeur de θ , on doit calculer la partie réelle et la partie imaginaire tel que :

$$p(e^{j\theta}) = \alpha + j\beta = R + jI_m$$

pour cela, l'algorithme de calcul doit être initialisé par :

$$\begin{aligned} R &= a_0 \cos(\theta) + a_1 \\ I_m &= a_0 \sin(\theta) \end{aligned}$$

à la deuxième étape, on aura :

$$\begin{aligned} R &\longleftarrow R \cos(\theta) - I_m \sin(\theta) + a_2 \\ I_m &\longleftarrow I_m \cos(\theta) + R \sin(\theta) \end{aligned}$$

L'algorithme aura alors la forme suivante :

Ayant $\theta, a_0, a_1, \dots, a_n$

Initialisation : $v_1 = a_0$

$$v_2 = 0$$

pour $i = 1$ à n , faire

$$\begin{aligned} v_1 &\longleftarrow v_1 \cos(\theta) - v_2 \sin(\theta) + a_i \\ v_2 &\longleftarrow v_2 \cos(\theta) + v_1 \sin(\theta) \end{aligned}$$

end i.

$$p(e^{j\theta}) = v_1 + j v_2$$

Pour chaque valeur de θ , cet algorithme nécessite environ $4n$ multiplications et deux évaluations des fonctions $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Simplification de l'algorithme de Horner

$$\text{Soit } p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k} = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\text{et } p(z^{-1}) = \sum_{k=0}^n a_k z^{-(n-k)} = a_0 z^{-n} + \dots + a_{n-1} z^{-1} + a_n$$

En utilisant l'algorithme de Horner décrit précédemment, on peut évaluer $p(z)$ et $p(z^{-1})$ comme suit :

pour $p(z)$, on a :

Initialisation $x_1(0) = 0$

Boucle $x_1(k+1) = z x_1(k) + a_k$

Fin $p(z) = x_1(n+1)$.

Pour $p(z^{-1})$, on a :

Initialisation $x_2(0) = 0$

Boucle $x_2(k+1) = z^{-1} x_2(k) + a_k$

Fin $p(z^{-1}) = x_2(n+1)$.

En regroupant les deux algorithmes précédents, on obtient :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_k \quad (\text{A3.2})$$

de la forme : $X(k+1) = A X(k) + B a_k$

$$\text{avec : } A = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \begin{bmatrix} p(z) \\ p(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} \quad (\text{A3.3})$$

de la forme : $Y(k) = C X(n+1)$

$$\text{avec : } Y(k) = \begin{bmatrix} p(z) \\ p(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad \text{et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit la transformation :

$$T = \begin{bmatrix} -z^{-1} & 1 \\ -z & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z - 1/z} & \frac{-1}{z - 1/z} \\ \frac{z}{z - 1/z} & \frac{-1/z}{z - 1/z} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.4})$$

En appliquant cette dernière à la représentation d'état :

$$X(k+1) = A X(k) + B a_k$$

$$Y(k) = C X(k)$$

on obtient :

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \begin{bmatrix} p(z) \\ p(z^{-1}) \end{bmatrix} &= C T \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -z^{-1} & 1 \\ -z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$p(z)$ est un polynôme à coefficients réels, on a alors :

$$p(z^{-1}) = p^*(z) = \alpha - j\beta$$

D'où, la nouvelle représentation d'état est donnée par :

$$X(k+1) = \overline{A} X(k) + \overline{B} a_k$$

$$\begin{bmatrix} p(z) \\ p(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta \\ \alpha - j\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z^{-1} & 1 \\ -z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} \quad (A3.5)$$

et l'algorithme de Horner devient alors :

Ayant $\theta, a_0, a_2, \dots, a_n$
Calculer α et β tel que :

$$\alpha + j\beta = p(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^n a_k e^{j(n-k)\theta}$$

Initialisation :

$$C = \cos(\theta)$$

$$S = \sin(\theta)$$

$$d = 2C$$

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = 0$$

Corps :

pour $k = 0$ à n , faire

$$V_2 \leftarrow a_k - V_1 + dV_2$$

$$V_1 \leftarrow V_2$$

$$V_2 \leftarrow V_2$$

fin de boucle sur k .

$$\alpha = V_2 - C V_1$$

$$\beta = S V_1$$

$$p(e^{j\theta}) = \alpha + j\beta$$

Remarque : Le nombre de multiplications a été réduit de $4n$ à n .

ANNEXE 4

ALGORITHME DE LEVERRIER-FADEEVA ET SA CONSEQUENCE

Ayant les paramètres d'état A, B, C et D d'une représentation d'état [1] d'un système discret :

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

où $x(k)$ représente le vecteur d'état et $u(k)$, $y(k)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système. Le problème consiste à calculer les coefficients de la fonction de transfert correspondante :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \quad \text{avec } a_0 = 1 \quad (\text{A4.1})$$

cela peut être obtenu en utilisant l'algorithme suivant [23] :

$$b_0 = D$$

$$B_1 = I$$

pour $k = 1$ à n , faire.

$$a_k = -(1/k) \text{Tr}(A B_k)$$

$$b_k = C B_k B + D a_k$$

$$B_{k+1} = A B_k + a_k I$$

fin de boucle sur k

verifier que $B_{n+1} = 0$

où I est la matrice unité d'ordre n et $\text{Tr}(x)$ représente la trace d'une matrice x [24,25].

Démonstration :

En fonction de A, B, C et D, la fonction de transfert peut s'écrire comme suit [23] :

$$\begin{aligned} H(z) &= D + C (zI - A)^{-1} B \\ &= D + \frac{C \text{Adj}(zI-A) B}{\text{Det}(zI-A)} \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

où : $\text{Adj}(zI-A) = B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \dots + B_n$
représente la matrice adjointe de $(zI-A)$.

Posons $A(z) = \text{Det}(zI-A) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$

d'où, on peut écrire :

$$(zI-A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(zI-A)}{A(z)} = \frac{B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \dots + B_n}{A(z)}$$

cela implique que :

$$A(z) I = (zI-A) (B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \dots + B_n)$$

En identifiant les termes correspondants de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_1 - AB_0 &= I \\ B_2 - AB_1 &= a_1 I \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ B_{k+1} - AB_k &= a_k I \end{aligned}$$

Pour calculer les coefficients a_i , posons : $\alpha(z) = (zI-A)$.

alors : $A(z) = \text{Det}(\alpha(z))$.

Le calcul de la dérivée de $A(z)$ par rapport à z donne :

$$A'(z) = \frac{d}{dz} [\text{Det}(\alpha(z))] = \sum_{i,j} \left[\frac{\partial \text{Det}(\alpha(z))}{\partial \alpha_{ij}(z)} \right] \left[\frac{d\alpha_{ij}(z)}{dz} \right] \quad (\text{A4.3a})$$

$$= \sum_{i,j} [\beta(z)]_{ij} \delta(i-j) \quad (\text{A4.3b})$$

où $\beta_{ij}(z)$ est le $j^{\text{ième}}$ cofacteur de $(zI-A)$

$$\text{et } \delta(i-j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{d'où, } A'(z) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii}(z) = \text{trace}(\beta(z))$$

où $\beta(z) = \text{Adj}(zI-A) = \text{Adj}(\alpha(z))$.

De cette dernière expression, on obtient l'identité suivante :

$$\sum_k (n-k) a_k z^{n-k-1} = \sum_k \text{Tr}(\beta_k) z^{n-k}$$

après égalisation des termes de même puissance, on obtient :

$$a_k = -(1/k) \text{Tr}(A B_k) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Le calcul des coefficients b_i est plus simple en notant que :

$$H(z) = \frac{C(B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} + \dots + B_0)B_n + D \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^n (CB_i B + D a_i) z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}}$$

il vient :

$$b_k = CB_k B + D a_k \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Conséquence :

On a établi précédemment que :

$$a_k = -(1/k) \text{Tr}(A B_k) \quad ; \quad k = 1, \dots, n$$

et

$$B_k = A B_{k-1} + a_{k-1} I$$

En remplaçant l'expression de B_k dans a_k , on obtient :

$$a_k = -(1/k) \text{Tr}[A(A B_{k-1} + a_{k-1} I)]$$

$$\text{d'où } a_k = -(1/k) \text{Tr}(A^2 B_{k-1}) - (1/k) a_{k-1} \text{Tr}(A)$$

De même en remplaçant l'expression de B_{k-1} dans a_k , on trouve :

$$a_k = -(1/k) \text{Tr}(A^3 B_{k-2}) - (1/k) a_{k-2} \text{Tr}(A^2) - (1/k) a_{k-1} \text{Tr}(A)$$

En continuant le processus, on obtient à la fin :

$$a_k = -(1/k) [\text{Tr}(A^k) + a_1 \text{Tr}(A^{k-1}) + \dots + a_{k-1} \text{Tr}(A)]$$

$$\text{or } \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\text{où } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres de } A, \quad \text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$$

d'où :

$$a_k = -(1/k) \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i^k + a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{k-1} + \dots + a_{k-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i \right] \text{ pour } k = 1, \dots, n$$

Ce système d'équations s'écrit sous la forme matricielle comme :

$$- \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ na_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & 0 \\ a_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ a_{n-1} & & & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} \quad (\text{A4.4})$$

$$\text{où } T_m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m$$

Les valeurs propres de A étant les racines du polynôme :

$$A(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$$

alors le système d'équations (A4.4) donne la relation existant entre les coefficients et les racines d'un polynôme. En particulier (A4.4) nous permet de calculer facilement les coefficients d'un polynôme a_1, a_2, \dots, a_n à partir de ses racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

LISTING DU PROGRAMME

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

-- DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE --

Projet De Fin D'Etudes

THEME

Etude Unifiée Des Transformations Fréquentielles Numériques Et Application A Quelques Filtres Prototypes.

Proposé Par M : B.DERRAS.
Etudié Par M : M.A.A.BELOUCHRANI.
& L.MITICHE.

COMMENTAIRES

Ce Programme Permet La Synthèse De Filtres Numériques Passe-bas Prototypes à Partir De Filtres Analogiques Passe-bas Par Transformation Bilinéaire.

Les Filtres Analogiques Utilisés Sont:

- Filtre de Butterworth.
- Filtre de Chebyshev Type I.
- Filtre de Chebyshev Type II.
- Filtre de Bessel.
- Filtre de Caer (Elliptique).

A Partir Des Filtres Prototypes Ainsi Obtenus, On Synthétise, Par Transformation Fréquentielle Numérique Unifiée, Des Filtres Numériques De Type Passe-bas, Passe-haut, Passe-bandes, Coupe-bandes, Ect...

Paramètres D'Entrée:

- Choix :
 - . Si Choix=1 ==>> Synthèse De Filtres Numériques Passe-bas Prototypes.
 - . Si Choix=2 ==>> Synthèse De Filtres Numériques Par Transformation Fréquentielle Numérique Unifiée.
- Choix1 : Choix Du Filtre Prototype A Synthétisé.
 - . Si Choix1=1 ==>> Filtre De Butterworth.
 - . Si Choix1=2 ==>> Filtre De Chebyshev Type I.
 - . Si Choix1=3 ==>> Filtre De Chebyshev Type II.
 - . Si Choix1=4 ==>> Filtre De Bessel.
 - . Si Choix1=5 ==>> Filtre De Caer (Elliptique).
- Fc : Fréquence De Coupure Normalisée.
- Fr : Fréquence D'Atténuation Normalisée.

- Att: Atténuation à La Fréquence D'Atténuation.
- E : Ondulations Dans La Banda Passante.
- Choix2 :
 - . Si Choix2=0 ==>> Donner L'Atténuation En dB.
 - . Si Choix2=1 ==>> Donner L'Atténuation En Unité Normale.
- Choix3 : Synthèse Par Transformation Fréquentielle Numérique Unifiée De Filtres Numériques de Type...
 - . Si Choix3=1 ==>> Passe-bas.
 - . Si Choix3=2 ==>> Passe-haut.
 - . Si Choix3=3 ==>> Passe-bandes.
 - . Si Choix3=4 ==>> Coupe-bandes.
- Phi(i) : Fréquences De Coupure Du Filtre Désiré.
Ces Fréquences Doivent Etre Differentes !!.

Paramètres Intermédiaires:

- WC : Fréquence De Coupure Analogique.
- WR : Fréquence D'Atténuation Analogique.

Paramètres De Sorties:

- N: Ordre Du Filtre Limité à 50.
- ZO(N): Vecteur Contenant Les Zéros Du Filtre.
- Z(N) : Vecteur Contenant Les Poles Du Filtre.
- A(N) : Vecteur Contenant Les Coefficients Du Dénominateur De La Fonction De Transfert H(Z).
- B(N) : Vecteur Contenant Les Coefficients Du Numérateur De La Fonction De Transfert H(Z).
- LO : Nombre D'Echantillons De La Réponse Impulsionnelle (N < LO < 500).
- H(LO): Vecteur Contenant Les Valeurs De La Réponse Impulsionnelle.
- L1 : Nombre D'Echantillons De La Fonction D'Autocorrélation (N < L1 < 500).
- Y(L1): Vecteur Contenant Les Valeurs De La Fonction D'Autocorrélation.
- L2 : Nombre De Valeurs Du Spectre D'Amplitude, De Phase Et Du Temps De Propagation.
- Tamp : Variable tampon pour Les Fréquences Normalisées De La Réponse Fréquentielle.
- HM(L2) : Vecteur Contenant Les Valeurs Du Spectre D'Amplitude.
- PH(L2) : Vecteur Contenant Les Valeurs Du Spectre De Phase.
- T(L2) : Vecteur Contenant Les Valeurs Du Temps De Propagation.
- MD : Unité Du Spectre D'Amplitude.
 - . Si MD=1 ==>> Le Spectre En Unité Normale.
 - . Si MD=0 ==>> Le Spectre En Unité dB.
- Sig: Correspond Au Type De Filtre Désiré i-e :
 - . Si Sig=-1 ==>> Filtre Passe-Bandes.
 - . Si Sig=+1 ==>> Filtre Stop-Bandes.

Sous-Programmes Utilisés:

- INDVBA : Ce Sous-Programme Permet La Conversion De L'Atténuation Et Des Ondulations De L'Unité dB à L'Unité Normale.
- PASNA : Ce Sous-Programme Permet Le Passage Aux Fréquences Analogiques Par Transformation Bilinéaire.

- BUTT : Permet Le Calcul De L'Ordre, Des Poles Et Des Zéros Du Filtre De BUTTERWORTH.
- CHEB1 : Permet Le Calcul De L'Ordre, Des Poles Et Des Zéros Du Filtre De CHEBYSHEV(I).
- CHEB2 : Permet Le Calcul De L'Ordre, Des Poles Et Des Zéros Du Filtre De CHEBYSHEV(II).
- BESSEL : Permet Le Calcul De L'Ordre, Des Poles Et Des Zéros Du Filtre De BESSEL.
- CAUER : Permet Le Calcul De L'Ordre, Des Poles Et Des Zéros Du Filtre De CAUER.
- PASCO : Permet Le Passage Des Poles Numériques Aux Coefficients Du Dénominateur Et Des Zéros Numériques Aux Coefficients Du Numérateur.
- ORDON : Permet D'Ordonner Les $\theta(i)$ Par Ordre Croissant.
- FFT : Permet Le Calcul De La Transformée De Fourier Rapide.
- BAIRST : Permet De Calculer Les Racines D'Un Polynome A Coefficients Réels.
- REIMP : Permet Le Calcul De La Réponse Impulsionnelle.
- REFEQ : Calcule Le Module Et La Phase De La Réponse Fréquentielle.
- AUTOCO : Calcule La Fonction D'Autocorrélation.
- TEMPO : Calcule Le Temps De Propagation.
- ORD : Calcul De L'Ordre Du Filtre De CHEBYSHEV.
- CEST : Permet Le Calcul Du Cercle De Stabilité.
- AB : Calcule L'Expression De La TFD Des Coefficients Du Filtre Passe-Bandes.
- TF : Ce Sous-Programme Calcule Les Coefficients Du Filtre Passe-Bandes, Stop-Bande, Passe-Haut..ect.

DECLARATIONS

```

Implicit Real*8(A-H,O-Z)
Complex*16 Z(50),ZO(50)
Complex*16 A1(150),B1(150),P(150)
Real*8 A(51),B(51),CX(51),CY(51),Phi(21),Sig
Integer Choix,Choix1,Choix2,Choix3
Character*30 TITRE
Common/B1/ N, /B2/ T(500),HM(500),PH(500)
Common /B3/H(500),Y(500)

```

OUVERTURE DE FICHIERS

L'ouverture des fichiers ces.dat et repi.dat se fera ultérieurement.

```

OPEN(1,FILE='Resultat.DAT',STATUS='NEW')
OPEN(2,FILE='REPF.DAT',STATUS='NEW')
OPEN(4,FILE='AUTO.DAT',STATUS='NEW')
OPEN(5,FILE='COE.DAT',STATUS='NEW')
OPEN(7,FILE='POZE.DAT',STATUS='NEW')

```

PROGRAMME PRINCIPAL

```

1 Do 1 I=1,16
  Write(*,*)'
  Do 2 I=1,7
2   Write(*,*)'
5   Write(*,10)'-- Donner Votre Choix (1,2) --: '
10  Format(7X,A35,$)
    Read(*,*) Choix
    If (Choix.LT.1.OR.Choix.GT.2) Then
      Write(*,*)' ## ERREUR ## : Votre Choix N''Est Pas Correct'
      Goto 5
    Endif
11  Do 11 I=1,9
    Write(*,*)'
    Do 12 I=1,4
12  Write(*,*)'
15  Write(*,20)'-- Donner Votre Choix (1,2,3,4,5) --: '
20  Format(7X,A42,$)
    Read(*,*) Choix1
    If (Choix1.LT.1.OR.Choix1.GT.5) Then
      Write(*,*)' ## ERREUR ## : Votre Choix N''Est Pas Correct'
      Goto 15
    Endif
C   '
C   Lecture de L'Atténuation Désirée ATT à La Fréquence WDR Désirée.
C   '
    Write(*,*)'
    If (Choix.EQ.2) Then
      WDC=25.D-2
    Else
25   Write(*,30)
30   Format(7X,'Donner La Fréquence De Coupure FC Normalisée 0<FC<0.5:'
      *,/,15X,'FC=',$,)
      Read(*,*) WDC
      If (WDC.GE.5.D-01.OR.WDC.LE.0) Then
        Write(*,*)' ## ERREUR ## : 0<FC<1'
        Goto 25
      Endif
    Endif
    Write(*,*)' Voulez-Vous Donner L''atténuation : '
    Write(*,*)' En dB ? 0 '

```

MENU

Synthèse de Filtres Numériques:

- 1- Passe-Bas Prototypes.
- 2- Par Transformation Fréquentielle Numérique Unifiée.

MENU

Synthèse des Filtres Numériques Passe Bas Prototypes:

- 1- Filtre de Butterworth.
- 2- Filtre de Chebyshev Type (I).
- 3- Filtre de Chebyshev Type (II).
- 4- Filtre de Bessel.
- 5- Filtre de Causer.

```

Write(*,*)'                Ou En Unité Normale? 1 '
34 Write(*,35)
35 Format(14X,'  Votre Choix ?',$)
Read(*,*) Choix2
If (Choix2.LT.0.OR.Choix2.GT.1) Then
  Write(*,*)'    ## ERREUR ## : Votre Choix N''Est Pas Correct'
  Goto 34
Endif
If (Choix2.EQ.0) Then
40   Write(*,45)
45   Format(7X,'L''atténuation Dans La Bande Coupée En dB A(1<A<100)
* :',/,15X,'A=',$)
  Read(*,*) ATT
  If (ATT.GE.1.D2.OR.ATT.LE.1.D0) Then
    Write(*,*)'    ## ERREUR ## : 1<A<100'
    Goto 40
  Endif
Else
50   Write(*,55)
55   Format(7X,'Donner L''atténuation Dans La Bande Coupée A(0<A<1)
* :',/,15X,'A=',$)
  Read(*,*) ATT
  If (ATT.GE.1.D0.OR.ATT.LE.0.D0) Then
    Write(*,*)'    ## ERREUR ## : 0<A<1'
    Goto 50
  Endif
Endif
60 Write(*,65) WDC
65 Format(7X,'Donner La Fréquence D''attenuation Fr Normalisée',F4.3
*, '<Fr<0.5',/,15X,'Fr=',$)
Read(*,*) WDR
If (WDR.GE.5.D-001.OR.WDR.LE.WDC) Then
  Write(*,70) WDC
70   Format(7X,' ## ERREUR ## : ',F4.3,'<Fr<0.5')
  Goto 60
Endif

If (Choix1.NE.1.AND.Choix1.NE.4) Then
  If (Choix2.EQ.0) Then
75     Write(*,80) ATT
80     Format(7X,'L''Atténuation Dans La Bande Passante En dB A(0<A<'
*,F4.1,'):',/,15X,'A=',$)
    Read(*,*) E
    If (E.GE.ATT.OR.E.LE.0.D0) Then
85       Write(*,85) ATT
        FORMAT(10X,'## ERREUR ## : 0<A<',F4.1)
        Goto 75
    Endif
    Call INVDBA(ATT)
    Call INVDBE(E)
  Else
90     Write(*,95) 1.D0-ATT
95     Format(7X,'Donner L''Ondulation Dans La Bande Passante
*E (0<E<',F4.3,'):',/,15X,'E=',$)
    Read(*,*) E
    If (E.LE.0.D0.OR.E.GE.1.D0-ATT) Then
100      Write(*,100) 1.D0-ATT
        Format(7X,' ## ERREUR ## : 0<E<',F4.3)
        Goto 90
    Endif
  Endif

```

```
Endif
ELSE
  IF (Choix2.EQ.0) Call INVDBA(ATT)
Endif
```

```
Appel du Sous-Programme du Passage Aux Fréquences Analogiques.
```

```
Call PASNA(WDR,WDC,WR,WC)
```

```
Appel Du Sous-Programme Du Filtre Choisi.
```

```
If( Choix1.EQ.1) Call BUTT(ATT,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE)
If( Choix1.EQ.2) Call CHEB1(E,ATT,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE)
If( Choix1.EQ.3) Call CHEB2(E,ATT,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE)
If( Choix1.EQ.4) Call BESSEL(ATT,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE,WDC,WDR)
If( Choix1.EQ.5) Call Cauer(E,ATT,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE)
```

```
Passage des Poles Numériques aux Coefficients du Dénominateur.
```

```
Call PASCO(Z,A,1.D0)
```

```
Passage des Zéros Numériques aux Coefficients du Numérateur.
```

```
Call PASCO(ZO,B,BO)
```

```
IF (Choix.EQ.1) Goto 150
```

```
TRANSFORMATION FREQUENTIELLE.
```

```
DO 101 I=1,8
```

```
101 Write(*,*)' '
```

```
Write(*,*)'
```

```
DO 105 I=1,8
```

```
105 Write(*,*)' '
```

```
110 Write(*,280)'-- Donner Votre Choix (1,2,3,4) --:'
```

```
Read(*,*) Choix3
```

```
If (Choix3.LT.1.OR.Choix3.GT.4) Then
```

```
  Write(*,*)' ## ERREUR ## : Votre Choix N''Est Pas Correct'
```

```
  Goto 110
```

```
Endif
```

```
If (Choix3.EQ.1.OR.Choix3.EQ.4) Then
```

```
  Sig=1.D0
```

```
Else
```

```
  Sig=-1.d0
```

```
Endif
```

```
If (Choix3.EQ.1.OR.Choix3.EQ.2) Then
```

```
  M=1
```

```
  Write(*,*)' Donnez La Fréquence De Coupure (0<0<0.5):'
```

```
Else
```

```
  WB=15.D-1*(WDR-WDC)
```

MENU

Synthèse de Filtres Numériques Par
Transformation Fréquentielle

De Type :

- 1- Filtre Passe-bas.
- 2- Filtre Passe-haut.
- 3- Filtre Passe-bandes.
- 4- Filtre Coupe-bandes.

```

MA=INT(5.D-1/WB)
MA=MA-1
If (MA.GT.20) MA=20
115 Write(*,120) MA
120 Format(7X,' Donnez Le Nombre De Fréquences De Coupure(<',I4,'):'
*,/,14X,'M= ',$,)
Read(*,*) M
If (M.LE.0.OR.M.GE.MA) Then
Write(*,*)' ## ERREUR ## : Votre Choix N''Est Pas Correct'
Goto 115
Endif
Write(*,*)'          Donnez Ces Différentes Fréquences(0<0i<0.5)'
Write(*,*)'          Ces Fréquences Doivent Etre Différentes:'
Endif
Do 140 I=1,M
125 Write(*,130) I
130 Format(14X,'0',I2,'=',$,)
Read(*,*) Phi(I)
If (Phi(I).LE.0.OR.Phi(I).GE.5.D-1) Then
Write(*,*)'          ## ERREUR ## : 0<0<0.5 '
Goto 125
Endif
Do 135 k=1,I-1
If (Phi(I).EQ.Phi(k)) Then
Write(*,*)'          ## ERREUR ##:Les 0i Sont Différentes'
Goto 125
Endif
If (DABS(PHI(I)-Phi(k)).LT.WB) Then
134 Write(*,134) WB
Format(7X,'## ERREUR ##:L''intervalle entre les 0i doit
*etre > :',F4.3)
Goto 125
Endif
35 Continue
40 Continue

Appel Du Sous-Programme Qui Ordonne Les Phi(i).

Call ORDON(M,phi,N1,Nu,N,L)
If (N.GT.50) Stop' N>50'

Appel du Sous-Programme de Calcul des coefficients de
La Transformation Fréquentielle.

Call TF(M,Phi,N1,P)
Mode=0
Call FFT(Nu,P,Mode)
Call AB(A,B,A1,B1,N1,M,L,P,sig)
Mode=-1
Call FFT(Nu,A1,Mode)
Call FFT(Nu,B1,Mode)
NP1=N+1
Do 145 I=1,NP1
A(I)=DREAL(A1(I))/DREAL(A1(1))
B(I)=DREAL(B1(I))/DREAL(B1(1))
45 Continue
Call Bairst(N,B,ZO,IR)
Call Bairst(N,A,Z,IR)
50 NP1=N+1
Write(5,*) N

```

```

Write(1,*) Titre,N
Write(1,*)' _____ '
Write(1,*)' '
Write(1,*)' Les Poles du Filtre Sont: '
Write(1,*)' _____ '
Write(1,*)' '
Write(1,290)' Partie Réelle', 'Partie Imaginaire'
Write(1,*)' '
Do 155 I=1,N
    Write(1,260) DREAL(Z(I)),DIMAG(Z(I))
    Write(7,270) DREAL(Z(I)),DIMAG(Z(I)),DREAL(ZO(I)),DIMAG(ZO(I))
155 Continue
Write(1,*)' Les Zéros du Filtre Sont: '
Write(1,*)' _____ '
Write(1,*)' '
Write(1,290)' Partie Réelle', 'Partie Imaginaire'
Write(1,*)' '
Do 160 I=1,N
    Write(1,260) DREAL(ZO(I)),DIMAG(ZO(I))
160 Continue
Write(1,*)' '
Write(1,*)' Les Coefficients du Dénominateur Sont: '
Write(1,*)' _____ '
Write(1,*)' '
Do 165 I=1,NP1
    Write(1,255) A(I)
    Write(5,255) A(I)
165 Continue
Write(1,*)' '
Write(1,*)' Les Coefficients du Numérateur Sont: '
Write(1,*)' _____ '
Write(1,*)' '
Do 170 I=1,NP1
    Write(1,255) B(I)
    Write(5,255) B(I)
170 Continue
Close(5)
C
C Appel du Sous Programme de Calcul du Cercle Unité.
C
OPEN(8,FILE='CES.DAT',STATUS='NEW')
Call CEST(CX,CY)
Do 175 I=1,51
    Write(8,260) CX(I),CY(I)
175 Continue
Close(8)
180 Write(*,185) N
185 Format(7X, 'Donner Le Nombre D''échantillons De La Réponse ',/,
*7X,'Impulsionnelle (' ,I3,' < L ≤ 500): ',/,15X,'L=',$,)
Read(*,*) LO
If (LO.GT.500.OR.LO.LE.N) Then
    Write(*,190) N
190 Format(7X, '## ERREUR ## :',I3,' ≤ L ≤ 500')
    Goto 180
Endif
C
C Appel du Sous-Programme de Calcul de La Réponse Impulsionnelle.
C
Call REIMP(B,A,LO)
Write(1,*)' '

```

```

191 Write(1,191)' Les Valeurs de La Réponse Impulsionnelle Sont: '
Format(A50)
Write(1,*)' _____
Write(1,*)' '
Write(1,305) 'k', ' h(k)'
Write(1,*)' '

C
C Ouverture du Fichier Contenant La Réponse Impulsionnelle.
C

OPEN(3,FILE='REPI.DAT',STATUS='NEW')
Do 195 I=0,L0
Write(1,275) I,H(I)
Write(3,*) I, 0.DO
Write(3,*) I, H(I)
Write(3,*) I, 0.DO
195 Continue
Close(3)
200 Write(*,205) N
205 Format(7X, 'Donner Le Nombre D''échantillons De La Fonction ',/,
*7X, 'D''Autocorrélation (' ,I3, '< L ≤ 500): ',/,15X, 'L=', $)
Read(*,*) L1
If (L1.GT.500.OR.L1.LE.N) Then
Write(*,210) N
210 Format(7X, '## ERREUR ## :',I3, '≤L≤500')
Goto 200
Endif

C
C Appel du Sous-Programme de Calcul de La Fonction D'autocorrélation.
C

Call AUTOCO(A,B,L1)
Write(1,*)' Les Valeurs de La Fonction D''Autocorrélation Sont: '
Write(1,*)' _____
Write(1,*)' '
Write(1,305) 'k', ' f(k)'
Write(1,*)' '
Do 215 I=L1,1,-1
Write(1,275) -I,Y(I)
Write(4,275) -I,0.DO
Write(4,275) -I,Y(I)
Write(4,275) -I,0.DO
215 Continue
Do 220 I=2,L1
Write(1,275) I,Y(I)
Write(4,275) I,0.DO
Write(4,275) I,Y(I)
Write(4,275) I,0.DO
220 Continue
230 Write(*,235)
235 Format(7X, 'Donner Le Nombre De Valeurs L Du Spectre D''Amplitude',
*/,7X, 'Du Spectre De Phase & Du Temps De Propagation 50≤L≤500',/
*15X, 'L=', $)
Read(*,*) L2
If (L2.GT.500.OR.L2.LT.50) Then
Write(*,*) ' ## ERREUR ## : 50≤L≤500'
Goto 230
Endif
240 Write(*,*)' Vous Voulez Votre Spectre D''Amplitude '
Write(*,*)' En Unite Normale ? 1 '
Write(*,*)' Ou En Décibels ? 0 '
Write(*,245)

```

```

245 Format(15X,'MD=',\$)
Read(*,*) MD
If (MD.NE.1.AND.MD.NE.0) Then
    Write(*,*) ' ## ERREUR ## : Votre Choix N''Est Pas Correct'
    Goto 240
Endif
Write(*,*)' '
Write(*,*)'
Write(*,*)'
Write(*,*)'
Write(*,*)'

```

PATIENTEZ Calculs En Cours ...

```

C
C
C
Appel du Sous-Programme de Calcul de La Réponse Fréquentielle.

```

```

Call REFEQ(B,A,L2,MD)
Call TEMPO(Z,ZO,L2)
Write(1,*)' '
Write(1,*)' Les Valeurs de La Réponse Fréquentielle '
Write(1,*)' Et du Temps de Propagation Sont: '
Write(1,*)' _____ '
Write(1,*)' '
Write(1,300)'w ', 'H(w) ', 'Ø(w) ', 'Tps de Propagation'
Write(1,*)' '
X=2.DO*FLOAT(L2)
Do 250 I=1,L2
    Tamp=FLOAT(I-1)/X
    Write(1,270) Tamp, HM(I),PH(I),T(I)
    Write(2,270) Tamp, HM(I),PH(I),T(I)

```

```

250 Continue
Do 251 I=1,8

```

```

251 Write(*,*)' '
Write(*,*)'

```

FICHIERS DE RESULTATS

Les Resultats Complets	: resultat.dat
H(f) & Ø(f) & Tps.Progation:	repf.dat
h(k)	: repi.dat
f(k)	: auto.dat
Poles et Zéros	: poze.dat
Cercle Unite	: ces.dat
a(i) & b(i)	: coe.dat

```

Do 252 I=1,8
252 Write(*,*)' '
255 Format(4X,F20.6)
260 Format(2(2X,F20.6))
265 Format(3(4X,F20.6))
270 Format(4(1X,F19.6))
275 Format(4X,I4,4X,F21.6)
280 Format(7X,A42,\$)
290 Format(2(4X,A25))
300 Format(4(1X,A19))
305 Format(4X,A4,4X,A19)
STOP
End

```

```

C
C
C
C
C
C

```

FIN DU PROGRAMME PRINCIPAL

SOUS-PROGRAMMES

Subroutine INVDBA(ATT)

Ce Sous-Programme Calcule L'atténuation dans La Bande Coupée En Unité Normale.

Paramètres D'Entrée:

- ATT : Atténuation dans La Bande Coupée En (dB).

Paramètre de Sortie:

- ATT : Atténuation dans La Bande Coupée En Unité Normale.

Déclarations.

Real*8 ATT

ATT=1.D1**(-ATT/2.D1)

Return

End

Subroutine INVDBE(E)

Ce Sous-Programme Calcule D'Ondulations dans La Bande Passante En Unité Normale.

Paramètre D'Entrée:

- E : Atténuation dans La Bande Passante En (dB).

Paramètre de sortie:

- E : Ondulations dans La Bande Passante En Unité Normale.

Déclarations.

Real*8 E

E=1.DO-1.D1**(-E/2.D1)

Return

End

Subroutine PASNA(WDR,WDC,WR,WC)

Ce Sous-Programme Effectue Le Passage des Fréquences Numériques Aux Fréquences Analogiques Par Transformation Bilineaire.

Paramètres D'Entrée:

- WDR : Fréquence Numérique D'Atténuation Normalisée Par Rapport à La Fréquence D'échantillonnage.
- WDC : Fréquence de Coupure Numérique Normalisée Par Rapport à La Fréquence D'échantillonnage.

Paramètres de sortie:

- WR : Fréquence Analogique D'Atténuation Normalisée Par Rapport à La Fréquence de Coupure.
- WC : Fréquence Analogique de Coupure.

Déclarations.

Real*8 Pi,WR,WC,WDR,WDC

Pi=4.DO*DATAN(1.DO)

```

WR=DTAN(Pi*WDR)
WC=DTAN(Pi*WDC)
WR=WR/WC
Return
End

```

```

C*****
Subroutine BUTT(A,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE)

```

```

C
C Ce Sous-Programme Calcule L'Ordre, Les Poles Et Les Zéros
C Numériques Du Filtre de Butterworth.

```

```

C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*

```

```

C Paramètres D'Entrée:

```

- WC : Fréquence De Coupure Analogique Normalisée.
- WR : Fréquence D'Atténuation Analogique.
- A : Atténuation.

```

C Paramètre Intermédiaire:

```

- S : Poles Analogiques.

```

C Parametres De Sorties:

```

- N : Ordre Du Filtre De Butterworth.
- ZO : Vecteur Contenant Les Zéros Du Filtre De Butterworth.
- Z : Vecteur Contenant Les Poles Du Filtre De Butterworth.
- BO : Premier Coefficient Du Numérateur B(1).

```

C Déclarations.

```

```

Common /B1/ N
Real*8 Pi,D,WR,A,OR,BO,WC,Tamp
Complex*16 Z(50),ZO(50),S,PR
Character*30 Titre
Pi=4.DO*DATAN(1.DO)
Titre='FILTRE DE BUTTERWORTH D'ORDRE: '

```

```

C Calcul De L'Ordre Du Filtre.

```

```

A=1.DO/A
OR=Dlog(A**2-1.DO)/(2.DO*Dlog(WR))
OR=OR+.5DO
N=INT(OR)
If (N.GT.50) Stop'1''Ordre >50'

```

```

C Calcul des Poles.

```

```

PR=CMPLX(1.DO,0.DO)
Tamp=Pi/(2.DO*FLOAT(N))
Do 30 I=1,N
  D=(2.DO*FLOAT(I)-1.DO)*Tamp
  S=CMPLX(-WC*DSIN(D),WC*DCOS(D))
  Z(I)=(1.DO+S)/(1.DO-S)
  PR=PR*(1.DO-S)/S

```

```

30 Continue

```

```

C Calcul des Zéros Numériques.

```

```

Do 40 I=1,N
  ZO(I)=CMPLX(-1.DO,0.DO)

```

```

40 Continue

```

```

C
C   Calcul de B(1)=BO.
C
BO=(-WC)**N/DREAL(PR)
Return
End
C*****
C   Subroutine BESSEL(A,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE,WDC,WDR)
C
C   Ce Sous-Programme Calcule Les Poles Et Les Zéros Numériques
C   du Filtre de Bessel.
C   *-*-*-*-*
C
C   Paramètres D'Entrée:
C       - WC      : Fréquence De Coupure Analogique Normalisée.
C       - WR      : Fréquence D'Atténuation Analogique Normalisée.
C       - A       : Atténuation A La Fréquence D'Atténuation.
C       - WDC     : Fréquence De Coupure Numérique.
C       - WDR     : Fréquence D'Atténuation Numérique.
C
C   Paramètres Intermédiaires:
C       - WnC    : Fréquence De Coupure De Normalisation Du
C                 Polynome De BESSEL.
C       - D(N)   : Vecteur Contenant Les Coefficients De BESSEL.
C       - S      : Poles Analogiques.
C
C   Parametres De Sortie:
C       - N      : Ordre Du Filtre De BESSEL.
C       - ZO(N)  : Vecteur Contenant Les Zéros Numériques.
C       - Z(N)   : Vecteur Contenant Les Poles Numériques.
C       - BO     : Premier Coefficient Du Numérateur B(1).
C
C   Sous-Programme Utilisé:
C       - BAIRST: Permet Le Passage Des Coefficients De BESSEL
C                 Aux Poles Analogiques Du Filtre.
C
C   Déclarations.
C   Common /B1/ N
C   Real*8 Pi,d0,BO,WC,Tamp,WR,WnC,WDC,WDR
C   Real*8 X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3,C,k,D(51)
C   Real*8 A,Tmin,dOmin,Wmin,FN,FI
C   Complex*16 Z(50),ZO(50),PR,S
C   Character*30 Titre
C   Pi=4.DO*DATAN(1.DO)
C   Titre='FILTRE DE BESSEL D''ORDRE: '
C   Write(*,*)' .....Patientez Calcul En Cours'
C
C   Calcul De La Fréquence De Coupure De Normalisation
C   Du Polynome De BESSEL.
C
C   Tamp1=A
C   WnC=134.D-2
C   Do 10 I=2,50
C       WnC=WnC+1.D-2
C   1   X2=1.DO
C       X3=1.DO
C       Y3=0.DO
C       Y2=WnC
C       d0=1.DO
C       C=WnC**2

```

```

C=-C
Do 2 J=2,I
  k=2.DO*Float(J)-1.DO
  X1=k*X2+C*X3
  X3=X2
  X2=X1
  d0=k*d0
  Y1=k*Y2+C*Y3
  Y3=Y2
  Y2=Y1
Continue
Tamp=(X1**2+Y1**2)/(d0**2)
If(Dabs(Tamp-2.d0).LT.1.D-2) Goto 3
Wnc=Wnc+1.d-2
Goto 1

```

Calcul de L'Ordre du Filtre.

```

X2=1.DO
X3=1.DO
Y3=0.DO
C=(Wnc*WR)**2
C=-C
Y2=WR*Wnc
Do 4 L=2,I
  k=2.DO*Float(L)-1.DO
  X1=k*X2+C*X3
  X3=X2
  X2=X1
  Y1=k*Y2+C*Y3
  Y3=Y2
  Y2=Y1
Continue
Tamp=d0/Dsqrt(X1**2+Y1**2)
If(Tamp.LT.A) Goto 20
If(I.EQ.2) Tmin=Tamp
Tmin=Dmin1(Tmin,Tamp)
If(Tamp.EQ.Tmin) Then
  Imin=I
  dOmin=d0
  Wmin=Wnc
Endif
Continue
N=Imin
d0=dOmin
Wnc=Wmin
If(N.GE.50) Stop'1''Ordre >50'
Write(*,15) WDC,WDR,Tmin,N
Format(4X,'La Meilleure Atténuation Qu''On Peut Obtenir avec
* FC= ',F4.3,' & FR=',F4.3,' Est:',/,4X,' A= ',F4.3,/,4X,'Et
* Ceci Pour L''Ordre : ',I3)
Write(*,*)'          Voulez Vous : '
Write(*,*)'          Quitter? 0 '
Write(*,*)'          Ou Continue? 1'
Write(*,16)
Format(8X,'Votre Réponse(0,1):',$,)
Read(*,*) R
If(R.EQ.1) Goto 21
Stop
N=I

```

```

21 NP1=N+1
   D(1)=1
   D(NP1)=d0
C
C Calcul des Coefficients de Bessel.
C
Do 30 I=2,N
   FN=Float(N)
   FI=Float(I)
   Tamp=FN+FI-1.DO
   D(I)=(FN-FI+2.DO)*Tamp*D(I-1)/(2.DO*(FI-1.DO))
30 Continue
C
C Calcul des Poles.
C
Call Bairst(N,D,Z,IR)
PR=CMPLX(1.DO,0.DO)
Do 35 I=1,N
   S=CMPLX(DREAL(Z(I))*WC/Wnc,DIMAG(Z(I))*WC/Wnc)
   PR=PR*(1.DO-S)
   Z(I)=(1.DO+S)/(1.DO-S)
35 Continue
C
C Calcul des Zeros Numeriques.
C
Do 40 I=1,N
   ZO(I)=CMPLX(-1.DO,0.DO)
40 Continue
C
C Calcul de B(1)=BO.
C
BO=(-WC)**N/DREAL(PR)
BO=BO*d0
Return
End
C*****
Subroutine Cauer(E,A,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE)
C
C Ce Sous-Programme Calcule L'Ordre,Les Poles Et Les Zeros
C Numeriques du Filtre de Cauer.
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
C
C Parametres D'Entree:
C   - WC : Frequence De Coupure Analogique Normalisee.
C   - WR : Frequence D'Attenuation Analogique Normalisee.
C   - A : Attenuation A La Frequence D'Attenuation.
C   - E : Taux D'Ondulation Dans La Bande Passante.
C
C Parametres Intermediaires:
C   - S : Poles Analogiques.
C   - R : Entier / .. R=(N-1)/2 Si N Est Impaire.
C       .. R=N/2 Si N Est Paire.
C   - k : Selectivite Du Filtre.
C   - kp : Egale A (1-k**2)**.5.
C   - Q0 : Egale A .5*(1-kp**.5)/(1+kp**.5)
C   - Q : Egale A Q0+2*Q0**5+15*Q0**9+150*Q0**13.
C   - AA : AA=2.D1*Dlog10(1.DO/A)
C   - AP : AP=1.D1*Dlog10(1.DO+E**2)
C
C Parametres De Sortie:

```

- N : Ordre Du Filtre De CAUER.
- ZO(N): Vecteur Contenant Les Zéros Numériques.
- Z(N) : Vecteur Contenant Les Poles Numériques.
- B0 : Premier Coefficient Du Numérateur B(1).

Déclarations.

Common /B1/ N

INTEGER R

Real*8 Pi,Q0,WC,Temp,WR,A,kp,k,skp,Q,Q04,D,AA,A₂,D1,D0,Omega

Real*8 Ordre,u,W0,Sig0,Sig02,Wi,Vi,Sigma,B0

Real*8 E,A1,A01,B01,B11

Complex*16 Z(50),ZO(50),PR,S,PRO,S0,S01,S1

Character*40 Titre

Pi=4.DO*DATAN(1.DO)

Titre='FILTRE DE Cauer D''ORDRE: '

Calcul de L'Ordre du Filtre.

E=DSQRT(1.DO/(1.DO-E)**2-1.DO)

AA=2.D1*Dlog10(1.DO/A)

AP=1.D1*Dlog10(1.DO+E**2)

k=1.DO/WR

kp=Dsqrt(1.DO-k**2)

Skp=Dsqrt(kp)

Q0=((1.DO-Skp)/(1.DO+Skp))/2.DO

Q04=Q0**4

Q=Q0*(1.DO+Q04*(2.DO+Q04*(15.DO+150.DO*Q04)))

D=(1.D1**((AA/1.D1)-1.DO)/(1.D1**((AP/1.D1)-1.DO))

Ordre=DLOG(16.DO*D)/DLOG(1.DO/Q)

Ordre=Ordre+.5

N=INT(Ordre)

If (N.GT.50) STOP'L''ORDRE EST > A 50'

Calcul des Poles Et des Zéros.

PRO=CMPLX(1.DO,0.DO)

PR=CMPLX(1.DO,0.DO)

Temp=1.D1**((5.D-2*AP)

A1=DLOG((Temp+1.DO)/(Temp-1.DO))/(2.DO*Float(N))

SIG0=SNO(Q,A1)

If(MOD(N,2).NE.0) Then

S=CMPLX(-SIG0*WC,0.DO)

J=(N+1)/2

Z(J)=(1.DO+S)/(1.DO-S)

ZO(J)=CMPLX(-1.DO,0.DO)

PR=PR*(1.DO-S)/S

R=(N-1)/2

ELSE

R=N/2

Endif

SIG02=SIG0**2

W0=Dsqrt((1.DO+k*SIG02)*(1.DO+SIG02/k))

Do 10 I=1,R

If(Mod(N,2).NE.0) Then

U=Float(I)

Else

U=Float(I)-5.D-1

Endif

Wi=Sni(q,Pi*U/Float(N))

Temp=Wc/Wi

```

SO=CMPLX(0.DO,Temp)
SO1=CMPLX(0.DO,-Temp)
ZO(I)=(1.DO+SO)/(1.DO-SO)
J=N+1-I
ZO(J)=(1.DO+SO1)/(1.DO-SO1)
PRO=PRO*(1.DO-SO)/SO
PRO=PRO*(1.DO-SO1)/SO1
VI=Dsqrt((1.DO-k*(W1**2))*(1.DO-(W1**2)/k))
D=1.DO+(SIGO*W1)**2
Sigma=-SigO*Vi/D
Omega=W1*WO/D
S=CMPLX(Sigma*Wc,Omega*Wc)
S1=CMPLX(Sigma*Wc,-Omega*Wc)
Z(I)=(1.DO+S)/(1.DO-S)
Z(N+1-I)=(1.DO+S1)/(1.DO-S1)
PR=PR*(1.DO-S)/S
PR=PR*(1.DO-S1)/S1

```

10 Continue

C
C Calcul de B(1)=B0.
C

BO=DREAL(PRO)/DREAL(PR)
Return
End

C*****
Subroutine CHEB1(E,A,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE)

C
C Ce Sous-Programme Calcule Les Poles Et Les Zeros Numériques
C du Filtre de Chebyshev Type (I).
C *-*-*-*-*
C

Paramètres D'Entrée:

- WC : Fréquence De Coupure Analogique Normalisée.
- WR : Fréquence D'Atténuation Analogique Normalisée.
- A : Atténuation A La Fréquence D'Atténuation.
- E : Taux D'Ondulation Dans La Bande Passante.

Paramètres Intermédiaires:

- S : Poles Analogiques.

Paramètres De Sortie:

- N : Ordre Du Filtre De CHEBYSHEV (I).
- ZO(N): Vecteur Contenant Les Zeros Numériques.
- Z(N) : Vecteur Contenant Les Poles Numériques.
- BO : Premier Coefficient Du Numérateur B(1).

Sous-Programme Utilisé:

- ORD : Permet Le Calcul De L'Ordre Du Filtre.

Déclarations.

Common /B1/ N
Real*8 Pi,E,WR,A,BO,Tamp,Q
Real*8 AK,GA,SHV,CHV,BA1,NA2,WC
Complex*16 Z(50),ZO(50),S,PR
Character*40 Titre

Pi=4.DO*DATAN(1.DO)
Titre='FILTRE DE CHEBYSHEV TYPE 1 D'ORDRE: '
A=1.DO/A

```

E=DSQRT(1.DO/(1.DO-E)**2-1.DO)
C
C Calcul de L'Ordre du Filtre.
C
C Call ORD(A,E,WR)
C
C Calcul des Poles.
C
PR=CMPLX(1.DO,0.DO)
Tamp=Pi/(2.DO*FLOAT(N))
Do 30 I=1,N
  AK=(2.DO*FLOAT(I)-1.DO)*Tamp
  GA=((1.DO+DSQRT(1.DO+E**2.DO))/E)**(1.DO/FLOAT(N))
  SHV=(GA-(1.DO/GA))/2.DO
  CHV=(GA+(1.DO/GA))/2.DO
  NA1=SHV*DSIN(AK)
  NA2=CHV*DCOS(AK)
  S=CMPLX(-WC*NA1,WC*NA2)
  Z(I)=(1.DO+S)/(1.DO-S)
30 Continue
C
C Calcul des Zéros Numériques.
C
Do 40 I=1,N
  ZO(I)=CMPLX(-1.DO,0.DO)
40 Continue
C
C Calcul de B(1)=BO.
C
BO=(-WC)**N/DREAL(PR)
Mn=N/2
If ((2*Mn).EQ.N) Then
  Q=Dsqrt(1.DO+E**2)
  BO=BO/Q
Endif
Return
End
C*****
Subroutine CHEB2(E,A,WR,WC,BO,Z,ZO,TITRE)
C
C Ce Sous-Programme Calcule Les Poles Et Les Zéros Numériques
C du Filtre de Chebyshev Type (II).
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
C
C Paramètres D'Entrée:
C   - WC : Fréquence De Coupure Analogique Normalisée.
C   - WR : Fréquence D'Atténuation Analogique Normalisée.
C   - A  : Atténuation à La Fréquence D'Atténuation.
C   - E  : Taux D'Ondulation Dans La Bande Passante.
C
C Paramètres Intermédiaires:
C   - S  : Poles Analogiques.
C
C Paramètres De Sortie:
C   - N  : Ordre Du Filtre De CHEBYSHEV (II).
C   - ZO(N) : Vecteur Contenant Les Zéros Numériques.
C   - Z(N)  : Vecteur Contenant Les Poles Numériques.
C   - BO   : Premier Coefficient Du Numérateur B(1).

```

C Sous-Programme Utilisé:
C - ORD : Permet Le Calcul De L'Ordre Du Filtre.
C

C Déclarations

Common /B1/ N
Real*8 Pi,E,WR,A,BO,Tamp
Real*8 AK,GA,SHV,CHV,NA1,NA2,D,WC
Complex*16 Z(50),ZO(50),S,SO,PR,PRO
Character*40 Titre

Pi=4.DO*DATAN(1.DO)
Titre='FILTRE DE CHEBYSHEV TYPE 2 D''ORDRE: '
A=1.DO/A
E=DSQRT(1.DO/(1.DO-E)**2-1.DO)

C Calcul de L'Ordre du Filtre.

C Call Ord(A,E,WR)

C Calcul des Poles.

PR=CMPLX(1.DO,0.DO)
PRO=CMPLX(1.DO,0.DO)
Tamp=Pi/(2.DO*FLOAT(N))
Do 30 I=1,N
 AK=(2.DO*FLOAT(I)-1.DO)*Tamp
 GA=(A+DSQRT(A**2-1.DO))**(1.DO/FLOAT(N))
 SHV=(GA-(1.DO/GA))/2.DO
 CHV=(GA+(1.DO/GA))/2.DO
 NA1=-SHV*DSIN(AK)
 NA2=CHV*DCOS(AK)
 D=NA1**2+NA2**2
 S=CMPLX(NA1*WR*WC/D,-NA2*WR*WC/D)
 Z(I)=(1.DO+S)/(1.DO-S)
 PR=PR*(1.DO-S)/S

30 Continue

C Calcul des Zéros.

Do 40 I=1,N
 AK=(2.DO*FLOAT(I)-1.DO)*Tamp
 SO=CMPLX(0.DO,WC*WR/DCOS(AK))
 ZO(I)=(1.DO+SO)/(1.DO-SO)
 PRO=PRO*(1.DO-SO)/SO

40 Continue

C Calcul de B(1)=BO.

BO=(-WC)**N)*DREAL(PRO)/DREAL(PR)
Return
End

C*****
C Subroutine Ord(A,E,WR)

C Ce Sous-Programme Calcule L'Ordre du Filtre de CHEBYSHEV.
C *-----*

C Paramètres D'Entrée:

- C - WR : Fréquence D'Atténuation Normalisée.
- C - A : Atténuation A La Fréquence D'Atténuation.

- E : Taux D'Ondulation Dans La Bande Passante.

Paramètre De Sortie:

- N : Ordre Du Filtre De CHEBYSHEV Type I Et II.

Déclarations.

```
Common /B1/ N
Real*8 E,A,WR,OR,G
G=DSQRT((A**2-1.DO)/E**2)
OR=Dlog(G+DSQRT(G**2-1.DO))/Dlog(WR+DSQRT(WR**2-1.DO))
OR=OR+.5DO
N=INT(OR)
If (N.GT.50) Then
Stop'1''Ordre > A 50'
Endif
Return
End
```

Subroutine PASCO(Z,A;BO)

Ce Sous-Programme Effectue Le Passage des Poles (Zéros) Numériques aux Coefficients du Filtre Numérique En Utilisant La Conséquence de L'algorithme de Leverria Fadeeva.

-

Paramètres D'Entrée:

- Z(N) : Vecteur Contenant Les Poles (Zéros) Numériques Du Filtre.
- BO : Premier Coefficient Du Dénominateur (Numérateur)
A(1)=BO.

Paramètre De Sortie:

- A(N) : Vecteur Contenant Les Coefficients Du Dénominateur (Numérateur) De La Fonction De Transfert Du Filtre.

Déclarations.

```
Common /B1/N
Complex*16 Z(50),Tomp(51)
Real*8 A(51),Som(51),BO,Temp
```

Initialisation.

```
Do 10 I=1,N
    Tomp(I)=CMPLX(1.DO,0.DO)
Continue
Do 30 I=1,N
    Som(I)=0.DO
    Do 20 J=1,N
        Tomp(J)=Tomp(J)*Z(J)
        Som(I)=Som(I)+DReal(Tomp(J))
    Continue
Continue
A(1)=1.DO
Do 50 I=1,N
    IP1=I+1
    A(IP1)=0.DO
    Temp=-Float(I)
    Do 40 K=1,I
        A(IP1)=A(IP1)+A(IP1-K)*Som(K)
```

```

40     Continue
A(IP1)=A(IP1)/Temp
50     Continue
If (B0.NE.1.D0) Then
    NP1=N+1
    Do 60 I=1, NP1
        A(I)=A(I)*B0
60     Continue
Endif
Return
End

```

Subroutine REIMP(B,A,L)

Sous-Programme de Calcul des Elements H(k) de La Réponse Impulsionnelle.
--*-*-*

Paramètres D'Entrée:

- L : Nombre D'Echantillons De La Réponse Impulsionnelle.
- A(N) : Vecteur Contenant Les Coefficients Du Dénominateur De La Fonction De Transfert.
- B(N) : Vecteur Contenant Les Coefficients Du Numérateur De La Fonction De Transfert.

Paramètres De Sortie:

- H(L) : Vecteur Contenant Les Elements De La Réponse Impulsionnelle.

Déclarations.

```

Implicit Real*8(A-H,O-Z)
Common /B1/ N
Common /B3/ H(500),Y(500)
Real*8 B(51),A(51)
NP1=N+1
H(0)=B(1)
DO 15 K=1,N
    H(K)=B(K+1)

    Do 10 I=1,K
        H(K)=H(K)-A(I+1)*H(K-I)
10     Continue
15     Continue
Do 16 K=NP1,L
    H(K)=0
    Do 11 I=1,N
        H(K)=H(K)-A(I+1)*H(K-I)
11     Continue
16     Continue
Return
End

```

Subroutine REFSEQ(B,A,L,MD)

Ce Sous-Programme Calcule Le Spectre D'Amplitude Et de Phase.
--*-*-*

Paramètres D'Entrée:

- A(N) : Vecteur Contenant Les Coefficients Du Dénominateur De La Fonction De Transfert.

- B(N) : Vecteur Contenant Les Coefficients Du Numérateur De La Fonction De Transfert.
- L : Nombre D'Echantillons Du Spectre D'Amplitude Et De Phase.

Paramètre Intermédiaire:

- HMAX : Valeur Max Du Spectre D'Amplitude [Valeur De Normalisation].

Paramètres De Sortie:

- HM(L) : Vecteur Contenant Les Valeurs Du Spectre D'Amplitude De La Fonction De Transfert.
- PH(L) : Vecteur Contenant Les Valeurs Du Spectre De Phase De La Fonction De Transfert.

Déclarations.

```
Implicit Real*8(A-H,O-Z)
Common /B1/ N
Common /B2/ T(500),HM(500),PH(500)
Real*8 A(51),B(51)
Pi=4.DO*Datan(1.DO)
ANG=Pi/Float(L)
NP1=N+1
```

```
Do 30 J=1,L
  O=ANG*Float(J-1)
  C=DCos(O)
  S=DSin(O)
  C2=2.DO*C
  V1=0.DO
  V2=0.DO
  Do 10 K=1,NP1
    V3=A(K)-V1+C2*V2
    V1=V2
    V2=V3
  Continue
  AL2=V2-C*V1
  BE2=S*V1
  DN=DSqrt(V1*V1+V2*V2-C2*V1*V2)
  V1=0.DO
  V2=0.DO
  Do 20 K=1,NP1
    V3=B(K)-V1+C2*V2
    V1=V2
    V2=V3
  Continue
  AL1=V2-C*V1
  BE1=S*V1
  AN=DSqrt(V1*V1+V2*V2-C2*V1*V2)
```

Calcul du Spectre D'Amplitude.

```
HM(J)=AN/DN
DN=AL2*AL2+BE2*BE2
R=(AL1*AL2+BE1*BE2)/DN
AI=(BE1*AL2-BE2*AL1)/DN
```

Calcul du Spectre de Phase.

```
PH(J)=Datan2(AI,R)
Continue
```

```

HMAX=0.DO
C
C Calcul de La Valeur MAX de HM.
C
Do 40 J=1,L
  HMAX=Dmax1(HMAX,HM(J))
40 Continue
C
C Normalisation du Spectre D'Amplitude HM.
C
Do 50 J=1,L
  HM(J)=HM(J)/HMAX
50 Continue
C
C Si MD=0 alors HM Est Calculé En Décibels.
C
If (MD.EQ.0) Then
  Do 60 J=1,L
    HM(J)=20.DO*DLOG10(HM(J))
60 Continue
  Endif
  Return
  End
C*****
Subroutine CEST(CX,CY)
C
C Ce Sous-Programme Calcule Le Cercle de Stabilité
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
C
C Paramètres Intermédiaire:
C - Teta : Le Pas Angulaire.
C
C Paramètres De Sortie:
C - CX & CY : Vecteurs Contenant Les
C Coordonnées Des Points Constituant
C Le Cercle De Stabilité.
C
C Déclarations.
Common /B1/ N
Real*8 CX(51),CY(51),Pi,Teta
Pi=4.DO*DATAN(1.DO)
Do 10 I=1,51
  Teta=2*Pi*(FLOAT(I)-1.DO)/5.D1
  CX(I)=DCOS(Teta)
  CY(I)=DSIN(Teta)
10 Continue
Return
End
C*****
Subroutine AUTO(A,B,L)
C
C Sous-Programme de Calcul de La Fonction D'Autocorrelation [Y]
C En Utilisant un Algorithme Rapide Pour La Résolution
C Du Systeme D'Equations de JURY ( [M].[X] = [Y] ).
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
C
C Paramètres D'Entrée:
C - L : Nombre D'Echantillons De La Fonction
C D'Autocorrélation.
C - A(L) : Vecteur Contenant Les Coefficients Du

```

```

C          Dénominateur De La Fonction De Transfert.
C          - B(L) : Vecteur Contenant Les Coefficients Du
C          Numérateur De La Fonction De Transfert.
C          - H(L) : Vecteur Contenant Les Valeurs De La
C          Réponse Impulsionnelle.

```

Paramètres De Sortie:

```

C          - Y(L) : Vecteur Contenant Les Valeurs De La
C          Fonction D'Autocorrelation.

```

Déclarations.

```

C          Implicit Real*8(A-H,O-Z)
C          Common /B1/ N
C          Common /B3/ H(500),Y(500)
C          Real*8 M(50,50),A(51),B(51)

```

Calcul des Eléments du Second Membre de L'Equation.

```

C          Do 20 J=0,N
C             Y(J)=0.DO
C             N1=N-J
C             Do 10 I=0,N1
C                Y(J)=Y(J)+H(I)*B(J+1+I)

```

```

10          Continue
20          Continue

```

Initialisation.

```

C          Do 30 I=0,N
C             M(N,I)=A(I+1)

```

```

30          Continue

```

Factorisation.

```

C          Do 50 I=N-1,1,-1
C             AL=1.DO-M(I+1,I+1)*M(I+1,I+1)
C             Do 40 J=1,I
C                M(I,J)=(M(I+1,J)-M(I+1,I+1)*M(I+1,I+1-J))/AL

```

```

40          Continue
50          Continue

```

Solution.

```

C          Do 70 I=N,1,-1
C             AL=1.DO-M(I,I)*M(I,I)
C             Do 60 J=0,I/2
C                TAMPON=Y(J)
C                Y(J)=(Y(J)-M(I,I)*Y(I-J))/AL
C                If(J.NE.(I-J)) Y(I-J)=(Y(I-J)-M(I,I)*TAMPON)/AL

```

```

60          Continue
70          Continue

```

```

C          Do 90 I=2,N
C             SOM=0.DO
C             Do 80 J=1,I-1
C                SOM=SOM+M(I-1,J)*Y(I-J)

```

```

80          Continue
C             Y(I)=Y(I)-SOM

```

```

90          Continue
C          Do 100 k=N+1,L
C             Y(k)=0

```

```

Do 110 I=1,N
Y(k)=Y(k)-A(I+1)*Y(k-I)
110 Continue
100 Continue
Return
End

C*****
Subroutine TEMPO(Z,ZO,L)

C
C Ce Sous-Programme Calcule Le Temps de Propagation.
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
C
C Paramètres D'Entrée:
C - L : Nombre D'Echantillons Du Temps De
C Propagation.
C - ZO : Vecteur Contenant Les Zéros Numériques
C Du Filtre.
C - Z : Vecteur Contenant Les Poles Numériques
C Du Filtre.
C
C Paramètre De Sortie:
C - T(L) : Vecteur Contenant Les Valeurs Du Temps
C De Propagation.
C
C Déclarations.
C Implicit Real*8(A-H,O-Z)
C Common /B1/ N
C Common /B2/ T(500),HM(500),PH(500)
C Real*8 O,ANG,C,S
C Complex*16 Z(50),ZO(50),Temp,ZV
C Pi=4.DO*DATAN(1.DO)
C ANG=Pi/FLOAT(L)
C Do 20 J=1,L
C O=ANG*FLOAT(J-1)
C C=DCOS(O)
C S=DSIN(O)
C ZV=CMPLX(C,S)
C Temp=CMPLX(0.DO,0.DO)
C Do 10 I=1,N
C Temp=Temp+1.DO/(ZV-ZO(I))-1.DO/(ZV-Z(I))
10 Continue
C Temp=Temp*ZV
C T(J)=-DREAL(Temp)
20 Continue
Return
End

C*****

Subroutine Bairst(N,COE,S,IR)

C
C Ce Sous-Programme Calcule Les Racines D'un Polynome à Coefficients
C Réels Par La Méthode de Bairstow.
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
C
C Paramètres d'Entrée:
C - N : Degrés du Polynome.
C - COE : Vecteur des Coefficients.
C
C Paramètres de Sortie :
C - S(N) : Vecteur Contenant Les Racines du Polynome.
C - IR : ..Si IR=0 ==>> Le Calcul S'est Bien Déroulé.

```

..Si IR=1 ==>> Il N'y a Pas Eu Convergence Dans
Raphson-Newton Le Calcul Continué.
Mais Les Resultats Sont Généralement
Non Satisfaisants.

C
C
C
C
C
C

Déclarations.

Real*8 COE(51),Re(50),Im(50),A(51),B(51),E
Real*8 Cmax,Sk,Pk,Sk1,Pk1,SG,PG,Delta,Denom,Epsil

Real*8 Epsde,Del,Rde

Complex*16 S(50)

E=2.DO**(-48)

Nordre=N

NP1=N+1

Do 1 I=1,NP1

B(I)=COE(I)

1 Continue

Cmax=0.DO

Do 2 I=1,NP1

Cmax=DMAX1(Cmax,DABS(COE(I)))

2 Continue

Do 3 I=1,NP1

COE(I)=COE(I)/Cmax

3 Continue

4 If (COE(1).NE.0.DO) Goto 6

Do 5 I=1,Nordre

COE(I)=COE(I+1)

5 Continue

Nordre=Nordre-1

Goto 4

6 M=Nordre+1

Do 7 I=1,M

A(I)=COE(I)

7 Continue

8 If (M.LE.1) Goto 28

If (M.NE.2) Goto 9

Re(2)=-A(2)/A(1)

Im(2)=0.DO

Goto 25

9 If (M.NE.3) Goto 10

IR=0

M=3

Sk=-A(2)/A(1)

Pk=A(3)/A(1)

Goto 17

10 IR=0

Itest=0

Sk1=0.DO

Pk1=1.D-15

11 IR1=0

Re(1)=A(1)

Im(1)=A(1)

12 IR1=IR1+1

IR2=0

13 Re(2)=A(2)+Sk1*Re(1)

Do 14 I=3,M

Re(I)=A(I)+Sk1*Re(I-1)-Pk1*Re(I-2)

14 Continue

Im(2)=Re(2)+Sk1*Im(1)

MM2=M-2

Do 15 I=3,MM2

```

15  Im(I)=Re(I)+Sk1*Im(I-1)-Pk1*Im(I-2)
    Continue
    Im(M-1)=Sk1*Im(M-2)-Pk1*Im(M-3)
    SG=Re(M)*Im(M-3)-Re(M-1)*Im(M-2)
    PG=Re(M)*Im(M-2)-Re(M-1)*Im(M-1)
    If (SG.EQ.0.DO.AND.PG.EQ.0.DO) Goto 16
    Delta=Im(M-2)**2-Im(M-1)*Im(M-3)
    If (Delta.EQ.0.DO) Delta=Sign(E,Delta)
    Sk=Sk1+SG/Delta
    Pk=Pk1+PG/Delta
    Denom=Dabs(Sk)+Dabs(Pk)
    If (Denom.LT.1.DO) Denom=1.DO
    Epsil=(Dabs(Sk-Sk1)+Dabs(Pk-Pk1))/Denom
    Sk1=Sk
    Pk1=Pk
    If (IR1.GE.200) Goto 30
    If (Epsil.GE.Q.01) Goto 12
    IR2=IR2+1
    If (IR2.LE.5) Goto 13
16  Sk=Sk1
    Pk=Pk1

```

```

C
C  Calcul Des Racines De  $X^2 - Sk * X + Pk = 0$  .
C

```

```

17  If (Sk.NE.0.DO) Goto 19
    If (Pk.LT.0.DO) Goto 18
    Re(M)=0.DO
    Im(M)=Dsqrt(Pk)
    Re(M-1)=0.DO
    Im(M-1)=-Im(M)
    Goto 23
18  Re(M)=Sqrt(-Pk)
    Im(M)=0.DO
    Re(M-1)=-Re(M)
    Im(M-1)=0.DO
    Goto 23
19  If (Pk.NE.0.DO) Goto 20
    Re(M)=0.DO
    Im(M)=0.DO
    Re(M-1)=Sk
    Im(M-1)=0.DO
    Goto 23
20  Epsde=3.DO*E*(Sk**2+4.DO*Dabs(Pk))
    Del=Sk**2-4.DO*Pk
    If (Dabs(Del).GT.Epsde) Goto 21
    Re(M)=Sk/2.DO
    Im(M)=0.DO
    Re(M-1)=Re(M)
    Im(M-1)=0.DO
    Goto 23
21  If (Del.GT.0.DO) Goto 22

```

```

C
C  Cas De Racines Complexes.
C

```

```

    Rde=Dsqrt(-Del)
    Re(M)=Sk/2.DO
    Im(M)=Rde/2.DO
    Im(M-1)=-Im(M)
    Re(M-1)=Re(M)
    Goto 23

```

```

C
C   Cas De Racines Reelles.
C
22  Rde=Dsqrt(Del)
    Re(M)=5.D-1*(Sk+Sign(Rde,Sk))
    Im(M)=0.DO
    Re(M-1)=Pk/Re(M)
    Im(M-1)=0.DO
C
23  M=M-2
    Do 24 I=1,M
    A(I)=Re(I)
24  Continue
    If(M.GE.2) Goto 8
25  Do 26 I=1,Nordre
    Re(I)=Re(I+1)
    Im(I)=Im(I+1)
26  Continue
28  Do 29 I=1,N
    COE(I)=B(I)
    S(I)=CMPLX(Re(I),Im(I))
29  Continue
    COE(NP1)=B(NP1)
    RETURN
30  If(Itest.NE.0) Goto 31
    Itest=1
    Sk1=1.DO
    Pk1=1.DO
    Goto 11
31  IR=1
    Goto 16
    END
C*****
C
C   Double Precision Function SNO(Q,A)
C   *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
C
C   Cette Fonction Calcule La Valeure Absolue De
C   L'Expression Suivante:
C
C    $(2Q^{[1/4]}\Sigma(-1)^{[m]}Q^{[m(m+1)]}\text{Sinh}[(2m+1)A]) / (1+2\Sigma(-1)^{[m]}Q^{[m^2]}\text{Cosh}[2mA])$ 
C
C   On Evalue Les Sommes ( $\Sigma$ ) Sur L'Indice m.
C   Pour La Somme Du Numerateur, L'Indice m Varie De Zero
C   A L'Infini, Pour Celle Du Denominateur m Varie De Un
C   A L'Infini.
C
C   Déclarations.
    Real*8 Som1,Som2,SNO1,CP,Q,Qt,Som,C,A,Somp,Temp
    Som1=0.DO
    Som2=0.DO
    C=-1.DO
    CP=1.DO
    QT=2.DO*(Q**(25.D-2))
    Do 20 M=0,500
    C=-C
    Som=C*(Q**(M*(M+1)))*DSinh((2.DO*Float(M)+1.DO)*A)
    CP=-CP
    Somp=Cp*(Q**((M+1)**2))*DCosh(2.DO*(Float(M)+1.DO)*A)
    Som1=Som1+Som

```



```

C
C Déclarations.
Integer k
Real*8 P1(21),phi(1),V,phi1,Pi,ALPHA,BETA,Q(21)
Complex*16 P(1)
C Initialisation.
V=5.D-1
P1(1)=1.DO
Pi=4.DO*DATAN(1.DO)
Do 20 k=1,M
  V=-V
  Phi1=(phi(k)-Pi)*V
  Do 10 J=1,K+1
    ALPHA=0.DO
    BETA=0.DO
    If(J.GT.1) Then
      ALPHA=ALPHA+P1(J-1)
      BETA=BETA-P1(k+2-J)
    Endif
    If(J.LT.(K+1)) Then
      ALPHA=ALPHA+P1(J)
      BETA=BETA+P1(k+1-J)
    Endif
    Q(J)=ALPHA*DCOS(Phi1)+BETA*DSIN(Phi1)
10  Continue
  Do 15 J=1,K+1
    P1(J)=Q(J)
15  Continue
20  Continue
  Do 25 I=1,M+1
    P(I)=CMPLX(P1(I),0.DO)
25  Continue
  Do 30 I=M+2,N
    P(I)=CMPLX(0.DO,0.DO)
30  Continue
  Return
  End

```

```

C*****
C Subroutine AB(A,B,A1,B1,N,M,L,P,SIG)
C
C Ce Sous-Programme Calcule L'Expression Des TFD Des Coefficients
C Du Filtre Multipass-bande.
C *-*-*-*-*

```

- Paramètres D'Entrée:
- A : Vecteur Contenant Les Coefficients Du Dénominateur De La Fonction De Transfert.
 - B : Vecteur Contenant Les Coefficients Du Numérateur De La Fonction De Transfert.
 - N : Nombre De Valeur De A1 Et B1.
 - M : Nombre De Fréquences De Coupure Du Filtre Désiré.
 - L : Ordre Du Filtre a Synthétiser.
 - P : F-F-T Des Coefficients Du Filtre Passe-Tout.

- Paramètres De Sortie:
- A1 : T-F-D Du Vecteur A
 - A2 : T-F-D Du Vecteur B

C

```

C Déclarations.
Real*8 O,C,S,SIG,X1,X2,X3,Y3,Y2,Y1,ALPHA,BETA
Real*8 C1,C2,A(1),B(1)
Integer Np1,N
Complex*16 P(1),A1(1),B1(1),Temp
Pi=4.DO*Datan(1.DO)
NP1=N+1
Do 10 I=1,N
  O=(2.DO*(Float(I)-1.d0)*Float(M)/Float(N)+(1.DO-SIG)/2.DO)*Pi
  O=2.DO*Datan2(DIMAG(P(I)),DREAL(P(I)))+O
  O=-O
  C=DCOS(O)
  S=DSIN(O)
  C2=2.DO*C
  X1=0.DO
  X2=0.DO
  Y1=0.DO
  Y2=0.DO
  Do 15 K=1,L+1
    X3=A(L-K+2)-X1+C2*X2
    X1=X2
    X2=X3
    Y3=B(L-K+2)-Y1+C2*Y2
    Y1=Y2
    Y2=Y3
15 Continue
  ALPHA=X2-C*X1
  BETA=S*X1
  Temp=P(I)**L
  A1(I)=Cmplx(ALPHA,BETA)
  A1(I)=A1(I)*Temp
  ALPHA=Y2-C*Y1
  BETA=S*Y1
  B1(I)=Cmplx(ALPHA,BETA)
  B1(I)=B1(I)*Temp
10 Continue
RETURN
END

```

```

C*****
C Subroutine ORDON(M,Phi,N1,Nu,N,L)

```

```

C Ce Sous-programme Ordonne Les Fréquences De Coupure Et
C Calcule Le Nbre N1 Des échantillons De La FFT.

```

```

C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*

```

```

C Paramètres D'Entrée:

```

- C - Phi : Vecteur Contenant Les Fréquences De
- C Coupure Du Filtre Désiré.
- C - M : Nombre De Fréquences De Coupure Du
- C Filtre Désiré.
- C - L : Ordre Du Filtre Passe-bas De Référence.

```

C Paramètres De Sortie.

```

- C - Phi : Vecteur Contenant Les Fréquences De
- C Coupure Ordonnées Du Filtre Désiré.
- C - N : Ordre Du Filtre Désiré (Multi-Passe-bandes)
- C [N = L*M].
- C - N1 : Nombre D'Echantillons De la FFT.

```

C

```

```

C Déclarations.
  Real*8 Phi(1),Pi,Temp,R
  Integer M,Nu,N
  L=N
  N=L*M
  Pi=4.DO*DatAn(1.DO)
  Do 10 I=1,M
    Do 15 J=1,I
      If (Phi(J).GT.Phi(I)) Then
        Temp=Phi(I)
        Phi(I)=Phi(J)
        Phi(J)=Temp
      Endif
    Continue
15 Continue
10 R=DLOG(FLOAT(N)+1.DO)/DLOG(2.DO)
  Nu=INT(R)+1
  N1=2**Nu
  Do 20 I=1,M
    Phi(I)=Phi(I)*Pi*2.DO
20 Continue
  RETURN
  END

```

```

C*****
  Subroutine FFT(Nu,X,MODE)
C
C Ce Sous-programme Calcule La Transformée De Fourier Rapide
C (F-F-T) à base (2).
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
C Paramètres D'Entrée:
C - X(N) : Vecteur Complexe de Dimension N [ N=2**Nu ]
C - NU : Entier.
C - MODE : Entier.
C 1- Si MODE=0 ==>> FFT ....
C 2- Si MODE=-1 ==>> FFT Inverse....
C Paramètre De Sortie:
C - X(N) : Vecteur Complexe Contenant Les Elements De
C La T-F-D Calculés Par La F-F-T.
C
C Déclarations .....
  Integer Nu,MODE,K,ID,LE2,LE
  Real*8 Ang,Pi2
  Complex*16 X(1),W,A,B
  N=2**Nu
  J=1
  Pi2=8.DO*DatAn(1.DO)
  DO 10 I=1,N-1
    If(I.lt.J) Then
      B=X(J)
      X(J)=X(I)
      X(I)=B
    Endif
    K=N/2
    if (K.GE.J) goto 10
    J=J-K
    K=K/2
    Goto 2
10 J=J+K
  DO 11 l=1,NU

```

```
LE=2**L
ANG=-P12/Float(LE)
LE2=LE/2
A=CMPLX(1.DO,0.DO)
W=CMPLX(DCos(Ang),DSin(Ang))
If (Mode.EQ.-1) W=CMPLX(DCos(Ang),-DSin(Ang))
Do 11 J=1,LE2
  DO 3 I=J,N,LE
    ID=I+LE2
    B=X(ID)*A
    X(ID)=X(I)-B
    X(I)=X(I)+B
  11  A=A*W
If (Mode.EQ.-1) Then
  DO 14 I=1,N
  14  X(I)=X(I)/CMPLX(Float(N),0.DO)
Endif
Return
End
```

C _____ FIN _____